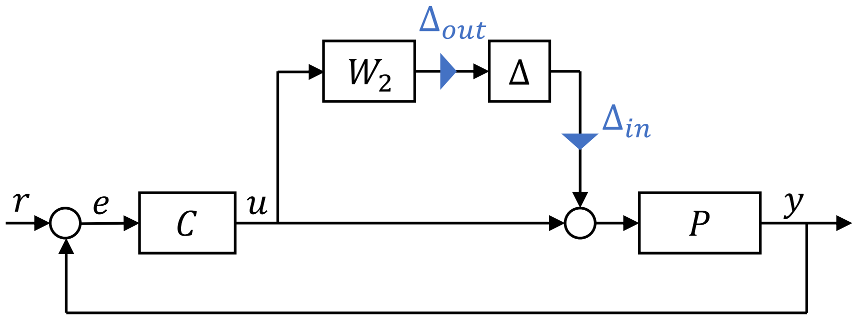
Relazione progetto n.6

Giorgio Manca (0294006)

Condizioni di stabilità

$$\tilde{P} = P(1 + \Delta W_2) \quad \text{con} \quad \|\Delta\|_\infty \le 2 = \beta\,, \quad P(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$W_2(s) = \frac{2}{s+10}\,, \quad W_2(s) = \frac{1}{s+1}\,, \quad C(s) = k$$



Δ è un'incertezza di livello $\beta = 2$, per cui la condizione per la stabilità robusta è $\|W_2 T\|_\infty < {}^1/_\beta = {}^1/_2$

È possibile verificare la validità di questa condizione utilizzando il teorema del piccolo guadagno. Separando il sistema a ciclo chiuso da Δ e considerando i guadagni delle due parti risultanti si ha che:

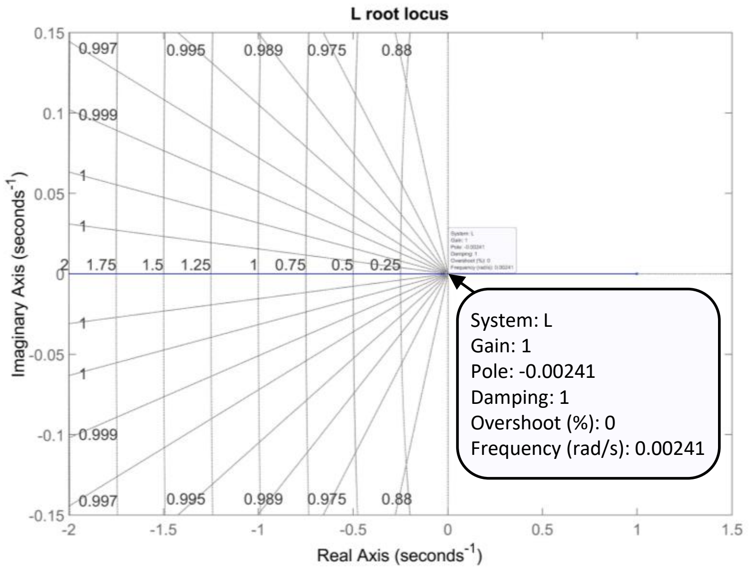
$\Delta_{in} \rightarrow \Delta_{out}$: $\quad W_2 \dfrac{PC}{1+PC} = W_2 \dfrac{L}{1+L} = W_2 T \qquad$ che conferma la validità della funzione usata per la condizione scelta.

Deve essere: $\quad \|\Delta\|_\infty \cdot \|W_2 T\|_\infty < 1 \quad \xrightarrow{\|\Delta\|_\infty \le 2} \quad 2 \cdot \|W_2 T\|_\infty < 1 \quad \Rightarrow \|W_2 T\|_\infty < \dfrac{1}{2}$

Prima di studiare la stabilità robusta, è interessante valutare le condizioni su k necessarie ad avere stabilità nominale del sistema a ciclo chiuso. Tali condizioni possono essere ricavate sia considerando il luogo della radici di $L = PC$ che i poli della funzione di sensitività S (metodi equivalenti). Si ha:

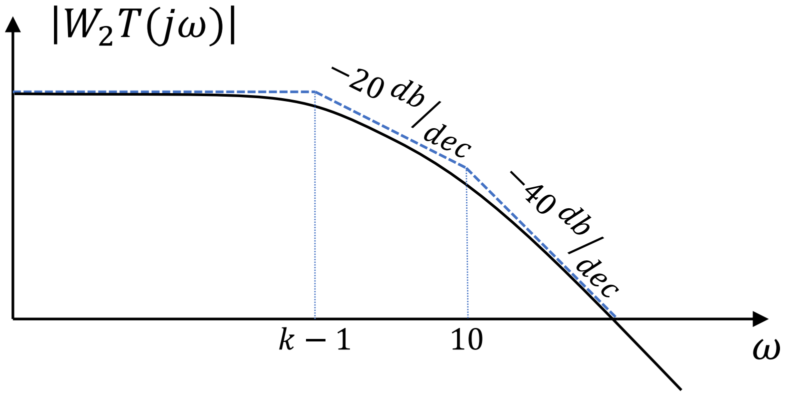
$$S = \frac{1}{1+PC} = \frac{s-1}{s-1+k}$$

da cui si ricava che per avere la stabilità asintotica nominale del sistema a ciclo chiuso deve essere soddisfatta la condizione $k > 1$



Stabilità robusta

Calcolando esplicitamente la funzione W_2T della condizione di stabilità robusta si ha:



$$W_2T(s) = W_2 \frac{L}{1+L} = \frac{2k}{(s+10)(s-1+k)}$$

Dal diagramma dei moduli si ricava che il guadagno maggiore si ha per $\omega = 0$, per cui:

$$\|W_2T\|_\infty = |W_2T(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{2k}{10(k-1)} = \frac{k}{5k-5}$$

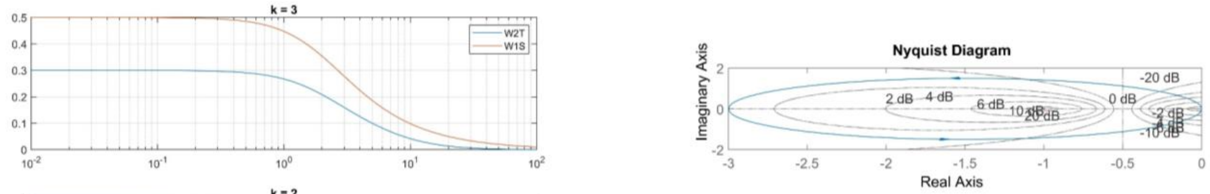
Per avere stabilità robusta deve essere:

$$\frac{k}{5(k-1)} < \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad k > \frac{5}{3} = 1.\overline{6} = k^*$$

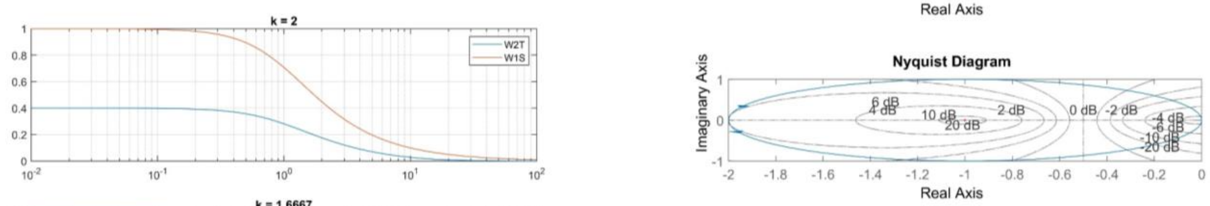
Tracciando il diagramma dei moduli per diversi valori si k, è possibile verificare la correttezza dei risultati trovati. Inoltre analizzando anche il diagramma polare di L è possibile effettuare le seguenti osservazioni:

- Per $k = 1$, $L(j\omega)$ passa per il punto -1, ed il sistema risulta effettivamente instabile (in senso di sistema nominale).
- Con l'aumentare di k, il percorso tracciato da $L(j\omega)$ si dilata. Ciò aumenta la distanza dal punto -1, rendendo il sistema più robusto ad incertezze sul modello.
  - Per $k > k^*$ la condizione di stabilità robusta (a fronte di incertezze di livello $\beta = 2$) richiesta è rispettata.

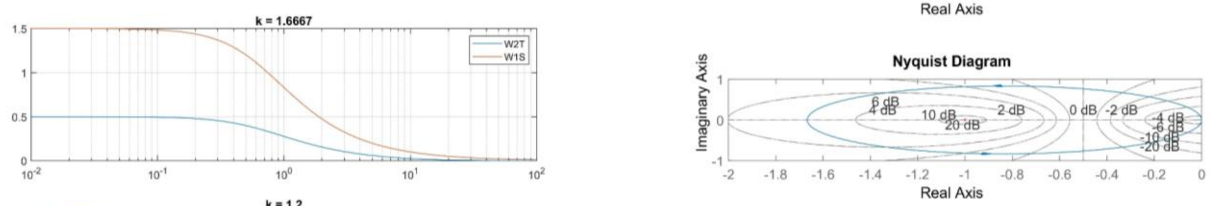
$k = 3$



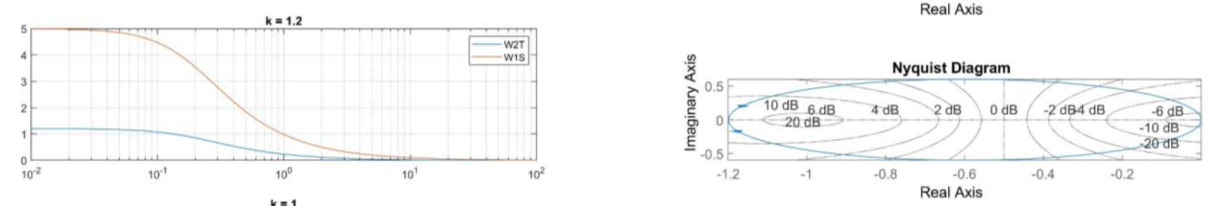
$k = 2$



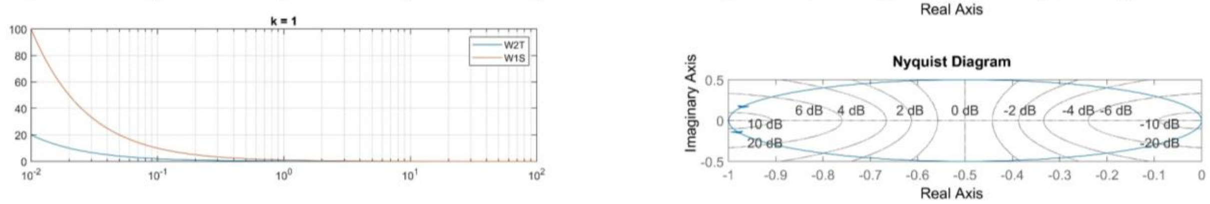
$k = k^*$



$k = 1.2$



$k = 1$

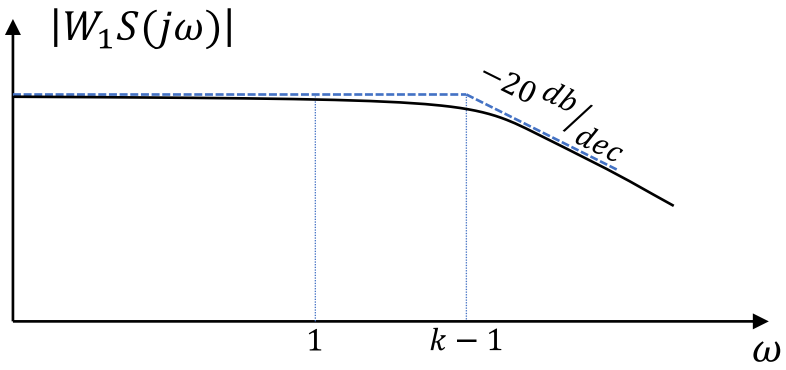


Stabilità robusta e prestazioni robuste

Per garantire prestazioni robuste di livello α, e contemporaneamente tollerare incertezze di livello $\beta = 2$, deve essere:

$$\|W_2T\|_\infty < \frac{1}{2} \quad \left(\Rightarrow \quad |W_2T| < \frac{1}{2}\,, \forall\omega\right) \qquad \text{e} \qquad \left\|W_1\tilde{S}\right\|_\infty = \left\|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right\|_\infty < \alpha, \qquad \forall\Delta\colon \|\Delta\|_\infty \le 2$$

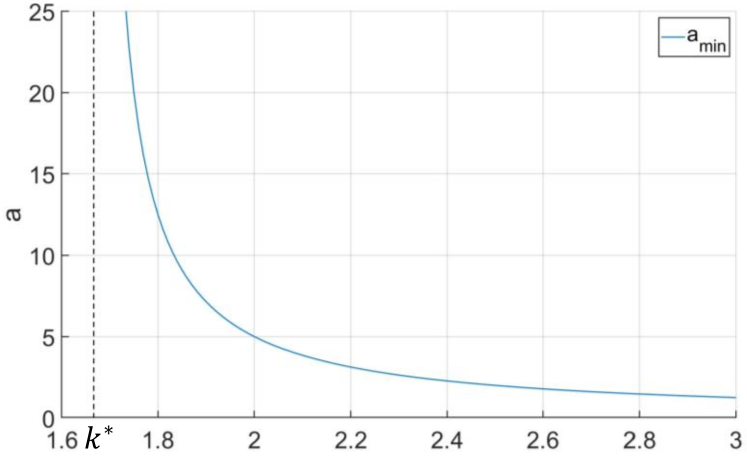
$$\max_{|\Delta|\le 2}\left|\frac{W_1S}{1+\Delta W_2T}\right| = \frac{|W_1S|}{1-2|W_2T|} < \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha_{min} = \max_{\omega}\frac{|W_1S|}{1-2|W_2T|} = \left\|\frac{|W_1S|}{1-2|W_2T|}\right\|_\infty$$



$$W_1S(s) = W_1\frac{1}{1+L} = \frac{s-1}{(s+1)(s-1+k)} \quad \Rightarrow \qquad |W_1S| \text{ massimo in } \omega = 0$$

Inoltre come calcolato precedentemente, anche $|W_2T|$ è massimo in $\omega = 0$, per cui il rapporto $\frac{|W_1S|}{1-2|W_2T|}$ è massimo in $\omega = 0$. Si ha:

$$\left.\begin{aligned} |W_2T(j\omega)|_{\omega=0} &= \frac{k}{5(k-1)} \\ |W_1S(j\omega)|_{\omega=0} &= \frac{1}{k-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha_{min} &= \frac{\frac{1}{k-1}}{1-2\cdot\left(\frac{k}{5(k-1)}\right)} = \frac{5}{5k-5-2k} = \frac{5}{3k-5} \\ \frac{\partial}{\partial k}\alpha_{min} &= -5(3k-5)^{-2}\cdot 3 = -\frac{15}{(3k-5)^2} < 0\,, \forall k \end{aligned}\right.$$



Ne deriva che più grande è il valore di k e minore è il livello α raggiungibile. Ciò è coerente con quanto esaminato prima nei diagrammi dei moduli e nei diagrammi polari. Infatti con l'aumentare di k si ha che:

- Sia $\|W_2T\|_\infty$ che $\|W_1S\|_\infty$ diventano sempre più piccoli.
- Il diagramma polare di L si allontana sempre di più dal punto -1, rendendo il sistema più robusto.

Idealmente con $k \to \infty$ si ha $\|W_2T\|_\infty = {}^1/_5$ e $\|W_1S\|_\infty = 0$, ottenendo $\alpha_{min} = 0$.