Topologia Algebrica

Indice

1 Primi passi sulla teoria dell'Omologia

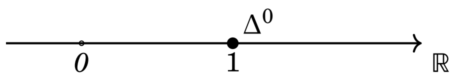
1.1 Omologia Singolare

Definizione 1.1.1: Inviluppo Convesso della Base Canonica

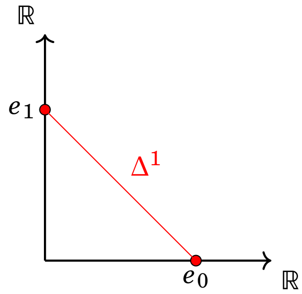
Sia $\mathbb{R}^{n+1}$ spazio vettoriale reale e $\{e_o, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$ allora chiamiamo Inviluppo convesso di $\{e_o, \dots, e_n\}$ l'insieme:

$$\Delta^n := \{(t_0, \dots, t_n) \,|\, t_i \geq 0 \; \forall i, \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$$

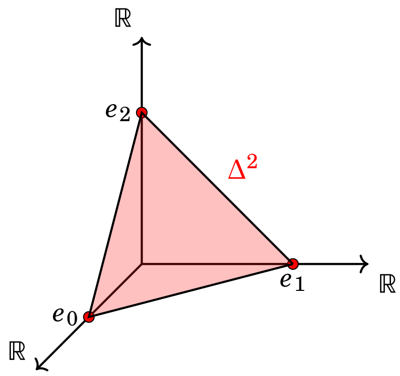
Esempio 1. *Caso* $n = 0$*:*



Esempio 2. *Caso* $n = 1$*:*



Esempio 3. *Caso* $n = 2$*(Considerare solo la faccia della piramide rossa, compresi i bordi):*



Osservazione. data questa definizione possiamo notare che fissato n abbiamo $n+1$ funzioni affini naturali

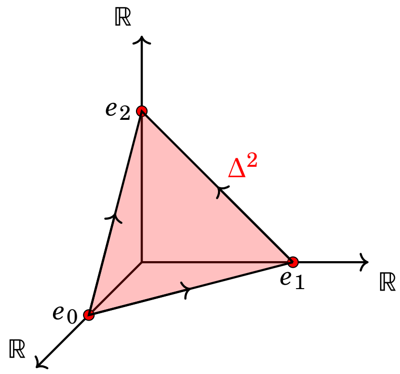
Definizione 1.1.2: ∂_i facce

$\forall i \in \{0, \dots, n\}$ definisco l'i-esima faccia dell'invilippo come la funzione:

$$\begin{aligned} \partial_i : \Delta^{n-1} &\to \Delta^n \\ (t_0, \dots, t_n) &\mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

Osservazione. Ogni sottoinsieme I$\subseteq \{0,\dots,k\}$ individua una faccia di $\Delta^{|\mathrm{I}|-1}$

Esempio 4. $n = 2$:



Quindi notiamo in questo caso abbiamo che:

$$\partial_0(t_0,t_1) = (0,t_0,t_1) \qquad \partial_0(1,0) = e_1, \partial_0(0,1) = e_2$$
$$\partial_1(t_0,t_1) = (t_0,0,t_1) \qquad \partial_1(1,0) = e_0, \partial_1(1,0) = e_2$$
$$\partial_2(t_0,t_1) = (t_0,t_1,0) \qquad \partial_2(1,0) = e_0, \partial_2(1,0) = e_1$$

Definizione 1.1.3: n-simplesso singolare

Sia X uno spazio topologico un **n-simplesso singolare** è una funzione continua σ tale che:

$$\sigma : \Delta^n \to X$$

Esempio 5. *Le facce ∂_i sono $n-1$ Simplessi singolari di Δ^n*

Definizione 1.1.4: Gruppo Abeliano libero generato

Sia E un insieme il **Gruppo Abeliano libero generato da E** si definisce come:

$$\mathbb{Z}^E = \{\varphi : E \to \mathbb{Z} \,|\, \varphi(e) = 0 \text{ tranne che per un numero finito di elementi di E}\}$$

Definizione 1.1.5: n-catene singolari

Il Gruppo abeliano libero generato dagli n-simplessi singolari, indicato con $C_n(X)$ si dice il Gruppo delle **n-catene singolari** di X

Osservazione. Sia $\sigma \in C_n(X) \Rightarrow \sigma = a_1\sigma_1 + \cdots + a_k\sigma_k$ con $a_1,\dots,a_k \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_1,\dots,\sigma_k : \Delta^n \to X$

Osservazione. Sia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici allora se $\sigma : \Delta^n \to X$ è un n-simplesso singolare di X allora vale che $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ è continua quindi è un n-simplesso singolare di Y.

Quindi è ben posto il morfismo di Gruppi f_*:

$$\begin{aligned} f_* : C_n(X) &\to C_n(Y) \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

Osservazione. Siano $v_0,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n$ con $n > k$ allora esiste un unica funzione affine (ovvero lineare sommata ad una traslazione) che manda elementi di Δ^k nell'inviluppo convesso di $v_0,\dots,v_k$ t.c:

$$\begin{aligned}\Delta^k &\to \text{Inviluppo convesso di } v_0,\dots,v_k\\ (t_0,\dots,t_n) &\mapsto \sum_{i=0}^{k} t_i v_i\\ e_0 &\mapsto v_0\\ &\vdots\\ e_k &\mapsto v_k\end{aligned}$$

La mappa è omeomorfismo $\iff v_1 - v_0,\dots,v_k - v_0$ sono linearmenti indipendenti. Chiamiamo tale mappa $< v_0,\dots,v_k >$.

Definizione 1.1.6: ∂

Definiamo $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ come:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma\circ\partial_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n>}$$

La notazione finale si può interpretare come: restringo la funzione σ alle sue facce togliendo un vertice.

Esempio 6. *Sia $\sigma \in C_2(X)$ allora vale:*

$$\begin{aligned}\partial\sigma &= \sigma|_{<e_1,e_2>} - \sigma|_{<e_0,e_2>} + \sigma|_{<e_0,e_1>}\\ \partial\sigma|_{<e_1,e_2>} &= \sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_1>}\\ \partial\sigma|_{<e_0,e_2>} &= \sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_0>}\\ \partial\sigma|_{<e_0,e_1>} &= \sigma|_{<e_1>} - \sigma|_{<e_0>}\\ \partial^2\sigma &= \sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_1>} - (\sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_0>}) + \sigma|_{<e_1>} - \sigma|_{<e_0>}\\ \partial^2\sigma &= 0\end{aligned}$$

Proposizione 1.1.7: $\partial^2 = 0$

$$\partial^2 = 0$$

Dimostrazione. Utilizzando la seconda notazione il teorema è molto immediato poichè se prendiamo $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n>}$ calcolare nuovamente la funzione ∂ su tale quantità mi darà somme (con segni) di $\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,\hat{e_j},\dots,e_n>}$ ed ognuno di questi simplessi appare 2 volte:

1. In $\partial\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots>} \to$ con segno $(-1)^{i+j-1}$
2. In $\partial\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_j},\dots>} \to$ con segno $(-1)^{i+j}$

Allora avendo segno opposto la somma si annulla a 2 a 2 ogni volta ottenendo la Tesi. □

Osservazione. Questo fatto equivale a dire:

$$\mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{X})) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X}))$$

Definizione 1.1.8: n-esimo Gruppo di Omologia Singolare

Sia X spazio topologico, chiamiamo l'**n-esimo Gruppo di Omologia Singolare** di X:

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X}))\big/\mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{X}))$$

Proposizione 1.1.9

ia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici e sia $f_* : C_n(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{Y})$ il morfismo di gruppi indotto da f allora vale $\partial f_* = f_* \partial$. Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} C_n(\mathrm{X}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & C_{n-1}(\mathrm{X}) \arrow[d, "f_*"] \\ C_n(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Sia $\sigma \in C_n(\mathrm{X})$ allora vale:

$$\begin{aligned} f_*(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_*(\sigma \circ \partial_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f \circ (\sigma \circ \partial_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i (f \circ \sigma) \circ \partial_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_*(\sigma) \circ \partial_i \\ &= \partial(f_*(\sigma)) \end{aligned}$$

□

Definizione 1.1.10: Cicli e Bordi

- $\sigma \in \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X}))$ è detto n-ciclo
- $\sigma \in \mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{X}))$ è detto n-bordo

Teorema 1.1.11: Morfismi tra $\mathrm{H}_n(\mathrm{X})$ e $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y})$

Sia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici, allora f induce un morfismo tra $\mathrm{H}_n(\mathrm{X})$ e $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y})$. Equivalentemente è ben definita:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(\mathrm{X}) &\to \mathrm{H}_n(\mathrm{Y}) : \\ [\mathrm{c}] &\mapsto [f_*(c)] \end{aligned}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la Proposizione 1.1.9 sugli n-cicli e sugli n-bordi:

Sia $\sigma \in \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X})) \Rightarrow \partial f_*(\sigma) = f_*\partial(\sigma) = 0 \Rightarrow f_*(\sigma) \in \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{Y}) \to C_{n-1}(\mathrm{Y}))$
Se $\mathrm{c} = \partial\omega \Rightarrow f_* c = f_*\partial\omega = \partial(f_*\omega)$ quindi ottengo un n-bordo

Otteniamo così la Tesi. □

Osservazione. Si può dimostrare che H_n è un funtore e quindi se tra 2 spazi topologici ho un Omeomorfismo esso induce un isomorfismo tra i loro Gruppi di Omologia Singolare.[1]

Esercizio 1. Calcolare il Gruppo di Omologia Singolare di $X = \{p\}$ spazio topologico con un punto.

Soluzione. Notiamo per prima cosa che fissato un $k \in \mathbb{N}$ allora i k-simplessi singolari sono tutti funzioni costanti e quindi vale $C_k(\mathrm{X}) \cong \mathbb{Z}$ inoltre vale che:

$$\partial \sigma_k = \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \right] \sigma_{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{se k è dispari} \\ 1 & \text{se k è pari} \end{cases}$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Caso $k > 0$:

1. k pari allora non ci sono k-cicli $\Rightarrow \mathrm{H}_k(\{p\}) = 0$
2. k dispari allora $\mathrm{Ker}\partial = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{Im}\partial = \mathbb{Z} \Rightarrow \mathrm{H}_k(\{p\}) = 0$

Caso $k = 0$:

$$\mathrm{Ker}\partial = \mathbb{Z} \quad \mathrm{Im}\partial = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_0(\{p\}) = \mathbb{Z}$$

Il gruppo di omologia singolare di un punto è:

- $\mathrm{H}_0(\{p\}) = \mathbb{Z}$
- $\mathrm{H}_k(\{p\}) = 0 \quad \forall k > 0$

■

Proposizione 1.1.12

ia X= $\coprod_\alpha \mathrm{X}_\alpha$ spazio topologico scomposto lungo le sue componenti connesse per archi. Allora:

$$\forall k \quad \mathrm{H}_k(\mathrm{X}) \cong \bigoplus_\alpha \mathrm{H}_k(\mathrm{X}_\alpha)$$

Dimostrazione. Se $\sigma : \Delta^k \to \mathrm{X}$ è un k-simplesso singolare essendo Δ^k connesso per archi, allora dalla continuità di σ segue che $\sigma(\Delta^k)$ è connesso per archi e quindi è totalmente contenuto in una delle componenti connesse per archi di X. Questo mi implica che:

$$\mathrm{C}_k(\mathrm{X}) \cong \bigoplus_\alpha \mathrm{C}_k(\mathrm{X}_\alpha)$$

Inoltre dalla continuità di ∂:

$$\sigma \in \mathrm{C}_k(\mathrm{X}_\alpha) \quad \Rightarrow \quad \partial\sigma \in \mathrm{C}_{k-1}(\mathrm{X}_\alpha)$$

Questo implica che il nucleo e l'immagine di ∂ possono essere decomposti lungo le componenti connesse per archi, così facendo otteniamo la Tesi. □

[1] Trovate la dimostrazione a pagina 67 di "An Introduction to Algebraic Topology" di Joseph J. Rotman

1.2 Omologia Simpliciale

Definizione 1.2.1: Complesso Omologico

Un **Complesso Omologico**, o complesso a catena, è una coppia, $(C_\bullet, d_\bullet)$, formata da:

1. Una successione di Gruppi Abeliani C_k;
2. Morfismi $d_k : C_k \to C_{k-1}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_{k-1} \circ d_k = 0$

$$\cdots \longrightarrow C_k \xrightarrow{d_k} C_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} C_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \cdots \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

Esempio 7. *Le catene singolari 1.1.5 e la funzione ∂ 1.1.6 costituiscono un complesso omologico.*

Definizione 1.2.2: Cicli di un Complesso Omologico

Sia $(C_\bullet, d_\bullet)$ un Complesso Omologico allora definiamo i k-cicli di un Complesso Omologico come:

$$Z_k := \mathrm{Ker}(d_k)$$

Definizione 1.2.3: Bordi di un Complesso Omologico

Sia $(C_\bullet, d_\bullet)$ un Complesso Omologico allora definiamo i k-bordi di un Complesso Omologico come:

$$B_k := \mathrm{Im}(d_{k+1})$$

Osservazione. $d_{k-1} \circ d_k = 0 \Rightarrow$ ogni k-bordo è un k-ciclo

Definizione 1.2.4: Gruppo di Omologia singolare di un Complesso Omologico

l Gruppo di Omologia singolare di un Complesso Omologico $(C_\bullet, d_\bullet)$ è definito come:

$$H_k(C_\bullet) := Z_k / B_k$$

Definizione 1.2.5: Morfismi di Complessi Omologici

Siano $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(D_\bullet, d'_\bullet)$ Complessi Omologici allora un **Morfismo di Complessi Omologici** $\varphi_\bullet : C_\bullet \to D_\bullet$ è una famiglia $\varphi_k : C_k \to D_k$ di morfismi tale che $\forall k \; d'_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ d_k$ equivalentemente il seguente diagramma commuti per ogni k:

$$\begin{tikzcd}
C_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "d_k"] & D_k \arrow[d, "d'_k"] \\
C_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] & D_{k-1}
\end{tikzcd}$$

Osservazione. φ_k manda k-cicli in k-cicli e k-bordi in k-bordi quindi tramite il funtore H_k definisce un morfismo tra gruppi:

$$H_k(\varphi_k) : H_k(C_\bullet) \to H_k(D_\bullet)$$

Esempio 8. *Sia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici allora essa definisce un morfismo tra complessi omologici:*

$$f_* : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$$

Definizione 1.2.6: Complesso Simpliciale Finito

Un **Complesso Simpliciale Finito** è il dato di:

1. Un insieme finito I non vuoto;
2. Una famiglia Σ di sottoinsiemi di I (eccetto il vuoto) con le proprietà:
   (a) Ogni elementi di I, considerato come sottoinsieme di cardinalità 1, appartiene a Σ;
   (b) se $\sigma \in \Sigma$ e $\tau \subseteq \sigma \quad \Rightarrow \quad \tau \in \Sigma$

Esempio 9. *Sia* $I = \{0,1,2,3,4\}$ *allora se* $\{0,2,3\} \in \Sigma \Rightarrow \{0,2\}, \{0,3\}, \{2,3\} \in \Sigma$ *quindi avremmo in questo caso il complesso simpliciale* (I,Σ) *dato da:*

- $I = \{0,1,2,3,4\}$;
- $\Sigma = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{0,2,3\},\{0,2\},\{0,3\},\{2,3\}\}$.

Fissando una biezione di I è possibile associale ad un complesso simpliciale un complesso omologico:

Definizione 1.2.7: l-simplessi

Dato (I,Σ) Complesso Simpliciale Finito definiamo gli l-simplessi:

$$\Sigma_l = \{\sigma \in \Sigma : |\sigma| = l+1\}$$

Definizione 1.2.8: Gruppo Abeliano libero generato da Σ_l

Chiamiamo C_l^Σ il Gruppo abeliano libero generato da Σ_l, ed i suoi elementi della base sono:

$$\sigma =< i_0, \dots, i_l >$$

Esempio 10. *Prendiamo* $I = \{a,b,c\}$ *e consideriamo* $\Sigma = \mathscr{P}(I) \setminus \{\varnothing\}$ *allora troviamo che gli elementi della base sono:*

- *Per* C_0^Σ *sono* $\{< a >, < b >, < c >\}$ *quindi* $C_0^\Sigma \cong \mathbb{Z}^3$
- *Per* C_1^Σ *sono* $\{< a,b >, < b,c >, < a,c >\}$ *quindi* $C_1^\Sigma \cong \mathbb{Z}^3$
- *Per* C_2^Σ *sono* $\{< a,b,c >\}$ *quindi* $C_2^\Sigma \cong \mathbb{Z}$

Osservazione. Notiamo che $C_l^\Sigma \cong \mathbb{Z}^{|\Sigma_l|}$

Definizione 1.2.9: ∂^Σ

Definiamo la funzione $\partial^\Sigma : C_l^\Sigma \to C_{l-1}^\Sigma$ sugli elementi della base come:

$$\forall \sigma =< i_0, \dots, i_l > \quad \Rightarrow \quad \partial^\Sigma \sigma := \sum_{k=0}^{l} (-1)^k < i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_l >$$

Osservazione. Utilizzando la stessa dimostrazione di prima troviamo $\partial^\Sigma \partial^\Sigma = 0$

Esercizio 2. Calcolare l'omologia di $C_\bullet^\Sigma$ nel caso di:

1. $I = \{a,b,c\} \quad \Sigma = \mathscr{P}(\mathrm{I}) \setminus \{\varnothing\}$;
2. $I = \{a,b,c\} \quad \Sigma = \mathscr{P}(\mathrm{I}) \setminus \{\{\varnothing\},\{a,b,c\}\}$;

Soluzione. Partiamo scrivendo la catena del primo aiutandoci con le osservazioni precedenti:

$$0 \xrightarrow{\partial_3^\Sigma} \mathrm{C}_2^\Sigma \xrightarrow{\partial_2^\Sigma} \mathrm{C}_1^\Sigma \xrightarrow{\partial_1^\Sigma} \mathrm{C}_0^\Sigma \xrightarrow{\partial_0^\Sigma} 0$$

Che grazie all'esempio 10 diventa:

$$0 \xrightarrow{\partial_3^\Sigma} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2^\Sigma} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1^\Sigma} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_0^\Sigma} 0$$

Notiamo innanzitutto che il $Ker(\partial_0^\Sigma) \cong \mathbb{Z}^3$ quindi ora cerchiamo il $Ker(\partial_1^\Sigma)$ per determinarne anche l'immagine. Scriviamo una combinazione lineare degli elementi della base di C_1^Σcon coefficienti in $\mathbb{Z}$ come generico elemento di tale gruppo e andiamo a vedere quando tale elemento, calcolato con ∂_1^Σ è nullo:

$$\partial_1^\Sigma(a_1(<a,b>)+a_2(<b,c>)+a_3(<a,c>)) = 0 \iff$$

$$a_1(<b>-<a>)+a_2(<c>-<b>)+a_3(<c>-<a>) = 0 \iff \begin{cases} a_1+a_3=0 \\ a_1-a_2=0 \\ a_2+a_3=0 \end{cases}$$

Il sistema si risolve facilmente in quanto la matrice associata ha rango 2 questo mi da necessariamente che $Ker(\partial_1^\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ e che $Im(\partial_1^\Sigma) \cong \mathbb{Z}^2$.
Quindi intanto abbiamo trovato $\mathrm{H}_0^\Sigma = \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$. Ora cerchiamo invece il $Ker(\partial_2^\Sigma)$ e quindi la sua immagine. Ragioniamo come prima ovvero:

$$\partial_2^\Sigma(a_1(<a,b,c>)) = 0 \iff a_1(<b,c>-<a,c>+<a,b>) = 0 \iff a_1 = 0$$

Quindi la funzione è iniettiva e di conseguenza questo mi implica che $\mathrm{Im}(\partial_2^\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ quindi abbiamo trovato che:

- $\mathrm{H}_0^\Sigma = \mathbb{Z}^3/\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{H}_1^\Sigma = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \cong \{0\}$
- $\mathrm{H}_2^\Sigma = \{0\}/\{0\} \cong \{0\}$.

Il secondo punto si risolve in modo analogo e da come risultati:

- $\mathrm{H}_0^\Sigma \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{H}_1^\Sigma \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{H}_2^\Sigma \cong \{0\}$.

■

Definizione 1.2.10: $\Sigma^{(l)}$

Sia (I,Σ) complesso simpliciale con $\mathrm{I}=\{0,\dots,n\}$ insieme dei vertici definiamo $\Sigma^{(l)}$ come:

$$\Sigma^{(l)}=\{\sigma\in\Sigma : |\sigma|\leq l+1\}$$

Definizione 1.2.11: l-scheletro

Sia $\mathrm{K}=(\mathrm{I},\Sigma)$ complesso simpliciale chiamiamo l-scheletro di K il complesso simpliciale:

$$\mathrm{K}^{(l)}=(\mathrm{I},\Sigma^{(l)})\quad l\geq 0$$

Osservazione. Se il complesso omologico associato a K è:

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \mathbb{Z}^{|\Sigma_l|}\longrightarrow \mathbb{Z}^{|\Sigma_{l-1}|}\longrightarrow\cdots$$

allora il complesso omologico associato a $\mathrm{K}^{(l)}$ è:

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \Sigma^{|\Sigma_l|}\longrightarrow \Sigma^{|\Sigma_{l-1}|}\longrightarrow\cdots$$

Inoltre questo è un esempio di **sottocomplesso simpliciale**.

Cerchiamo di costruire Geometricamente un complesso simpliciale e di conseguenza un complesso omologico, partiamo con le funzioni:

Definizione 1.2.12: $|\sigma|$

Sia $\mathrm{K}=(I,\Sigma)$ Complesso Simpliciale $\mathrm{I}=\{0,\dots,n\}$ e consideriamo $\mathbb{R}^{n+1}$ con base canonica $\{e_0,\dots,e_n\}$, allora se abbiamo $\sigma\in\Sigma$ un elemento della base $\sigma=<i_0,\dots,i_k>$ allora definisco $|\sigma|$ come l'unica funzione affine tale che: [a]

$$\begin{aligned}|\sigma|:\Delta^k&\to\mathbb{R}^n+1\\ e_0&\mapsto e_{i_0}\\ \vdots\ &\quad\vdots\\ e_k&\mapsto e_{i_k}\end{aligned}$$

[a] Attenzione: non è il valore assoluto per indicare la cardinalità, da ora la cardinalità la indicheremo con #

Definizione 1.2.13: Realizzazione Geometrica di un Complesso Simpliciale

Sia $\mathrm{K}=(I,\Sigma)$ complesso simpliciale allora chiamiamo
$|\mathrm{K}|$ **Realizzazione Geometrica di un Complesso Simpliciale**:

$$|\mathrm{K}|\overset{def}{=}\bigcup_{\sigma\in\Sigma}|\sigma|(\Delta^{\#\sigma-1})$$

Osservazione. Insiemisticamente si può dimostrare che vale:

$$|K| = \bigsqcup_{\sigma\in\Sigma} |\,\sigma\,|\,(\mathrm{int}(\Delta^{\#\sigma-1}))$$

da ciò inoltre possiamo comprendere che $|K|$ nella topologia indotta è compatto e T2.

Osservazione. se $\sigma \in \Sigma$ allora $\#\sigma = l+1$ e $\sigma =< i_0,\dots,i_k >$ quindi la funzione $|\sigma| \in C_l^{\Sigma}(|K|)$ è un simplesso della base. In questo modo possiamo definire un morfismo tra complessi (tra il complesso omologico di K e il complesso omologico di $|K|$):

$$\begin{aligned} C_\bullet^{\Sigma}(K) &\to C_\bullet(|K|) \\ \sigma \in \Sigma_l &\mapsto |\sigma| \end{aligned}$$

Inoltre possiamo vedere che se ho $\partial\sigma = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k < i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_l >$ allora vale $|\partial\sigma| = \partial|\sigma|$.

Definizione 1.2.14: Triangolare

Uno spazio topologico si dice **Triangolare** se è omeomorfo alla realizzazione geometrica di un complesso simpliciale.

Definizione 1.2.15: Triangolazione

Una **Triangolazione** è un omeomorfismo tra uno spazio topologico e una realizzazione geometrica.

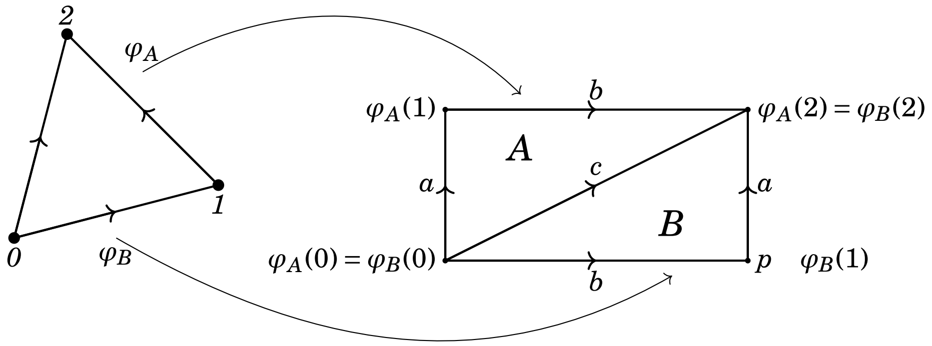
1.3 Δ-Complessi

Definizione 1.3.1: Δ-Complesso finito

Un Δ-Complesso finito è uno spazio topologico X tale che $\forall k \geq 0$ è dato un insieme I_k finito di indici e funzioni continue(potrebbe confondere ma stiamo chiamando l'insieme delle funzioni continue e degli indici allo stesso modo), $\varphi_\alpha^{(k)} : \Delta^k \to X \quad \alpha$ tale che:

1. Ogni $\varphi_\alpha^{(k)}$ è omeomorfismo ristretta alla parte interna del k-simplesso e
$$\mathrm{X} = \bigsqcup_{\alpha \in I_k} \varphi_\alpha^{(k)}\left(\mathrm{int}\Delta^k\right);$$
2. Per ogni $\varphi_\alpha^{(k)}$, per ogni $i = 0, \dots, k$ allora:
$$\varphi_\alpha^{(k)} \circ \partial_i \in I_{k-1} \quad \text{(dove } I_{k-1} \text{ è l'insieme delle funzioni)}$$

Esempio 11. *Toro. Un esempio di spazio topologico che può essere visto come Δ-Complesso è il toro nel seguente modo:*



Quindi possiamo usare un abuso di notazione per indicare sia indici (o le facce) che le funzioni stesse sulla quale poi calcoliamo la nostra ∂:

- *$I_2 = \{A, B\}$ è l'insieme che contiene le funzioni che mandano (mantenendo l'orientamento delle frecce) l'inviluppo convesso sopra nei rispettivi 2 "triangoli" A e B;*
- *$I_1 = \{a, b, c\}$ sono le funzioni che mandano i lati del inviluppo nei "lati" a,b,c;*
- *$I_0 = \{p\}$ la funzione che manda i vertici dell'inviluppo nel "vertice" p (ho un unico vertice e non 4 in quanto tutti e 4 i vertici sono in relazione tra loro).*

Grazie all'abuso di notazioni e al fatto che questi li possiamo vedere, come elementi che generano dei gruppi liberi abeliani, allora possiamo calcolare il gruppo di omologia del complesso omologico descritto sopra (del toro).

Osservazione. $\varphi_\alpha^{(k)}$ sono k-simplessi singolari e quindi definenedo $\mathrm{C}_k^\Delta(X) \overset{def}{=} \mathrm{Span}_\mathbb{Z}\{\varphi_\alpha^{(k)}\} \subseteq \mathrm{C}_k(X)$ e considerando (2) vale $\partial\left(\mathrm{C}_k^\Delta(X)\right) \subseteq \mathrm{C}_{k-1}^\Delta(X)$ allora possiamo definire il seguente complesso omologico:

$$\xrightarrow{\partial} \mathrm{C}_k^\Delta(X) \xrightarrow{\partial} \mathrm{C}_{k-1}^\Delta(X) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \mathrm{C}_0^\Delta(X) \xrightarrow{\partial} 0$$

Esercizio 3. Calcolare i gruppi di omologia del Toro.

Soluzione. Prendiamo $I_2 = \{A, B\}$ e consideriamo il gruppo abeliano libero generato da I_2 allora essendo finito è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ con base $\{A, B\}$ se consideriamo anche I_1 e I_0 otteniamo il seguente complesso omologico:

$$0 \xrightarrow{\partial} \underset{\text{A,B}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{\partial} \underset{\text{a,b,c}}{\mathbb{Z}^3} \xrightarrow{\partial} \underset{\text{p}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial} 0$$

Quindi, aiutandoci con l'algebra lineare, possiamo scrivere le matrici associate alle nostre funzioni ∂ e quindi calcolare nucleo e immagine. Partendo da sinistra, la prima, è la funzione che manda 0 in 0 e quindi possiamo già dire che $\mathrm{H}_2^\Delta(X) = \mathrm{Ker}(\partial)$, dove il nucleo è della seconda funzione da sinistra. Calcoliamo la matrice associata della seconda funzione della catena, ovvero, prendiamo la base $\{A, B\}$ e calcoliamo la funzione su tale base (stiamo sempre usando l'abuso di notazione di prima):

- $\partial A = \varphi_A(<1,2>) - \varphi_A(<0,2>) + \varphi_A(<0,1>) = b - c + a = a + b - c$
- $\partial B = \varphi_B(<1,2>) - \varphi_B(<0,2>) + \varphi_B(<0,1>) = b + a - c = a + b - c$

La matrice associata è quindi: $\mathrm{M}(\partial) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ che ha rango 1 di conseguenza $\mathrm{Im}(\partial) \cong \mathbb{Z}$ e di conseguenza $\mathrm{Ker}(\partial) \cong \mathbb{Z} < A - B >$ ovvero generato da A-B. Ora calcoliamo la matrice associata alla terza funzione della catena sapendo che $\partial a = \partial b = \partial c = p - p = 0$ e quindi: $M(\partial) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ di conseguenza $\mathrm{Ker}(\partial) \cong \mathbb{Z}^3$ Quindi abbiamo $\mathrm{H}_1^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^2$ con generatori a,b. Per ultimo abbiamo banalmente $\mathrm{H}_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}$ con generatore p.
Ricapitolando:

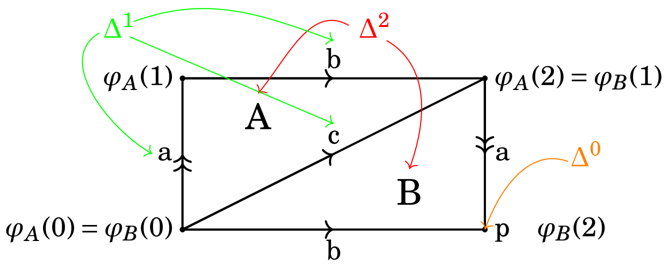
$$0 \xrightarrow{\partial} \underset{\text{A,B}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}]{\partial} \underset{\text{a,b,c}}{\mathbb{Z}^3} \xrightarrow[(0,0,0)]{\partial} \underset{\text{p}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial} 0$$

- $\mathrm{H}_2^\Delta(X) \cong \mathbb{Z} < A - B >$;
- $\mathrm{H}_1^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}^2 < a, b >$;
- $\mathrm{H}_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z} < p >$.

■

Esercizio 4. Calcolare i gruppi di omologia della Bottiglia di Klein.

Soluzione. Partiamo con il disegnare la bottiglia ed elencare gli insiemi I_k:



- $I_2 = \{A, B\}$;
- $I_1 = \{a, b, c\}$;
- $I_0 = \{p\}$;

Quindi il complesso omologico associato è "simile" a quello del toro[a]:

$$0 \xrightarrow{\partial} \underset{\mathrm{A,B}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{\partial} \underset{\mathrm{a,b,c}}{\mathbb{Z}^3} \xrightarrow{\partial} \underset{\mathrm{p}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial} 0$$

Seguendo i passi dell'esercizio precedente calcoliamo le matrici:

- $\partial A = \varphi_A(<1,2>) - \varphi_A(<0,2>) + \varphi_A(<0,1>) = b - c + a = a + b - c$
- $\partial B = \varphi_B(<1,2>) - \varphi_B(<0,2>) + \varphi_B(<0,1>) = a - b + c$
- $\partial a = \partial b = \partial c = p - p = 0$

Quindi la matrice della seconda ∂ è $\mathrm{M}(\partial) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e invece per la terza funzione è come prima la funzione nulla:

$$0 \xrightarrow{\partial} \underset{\mathrm{A,B}}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}]{\partial} \underset{\mathrm{a,b,c}}{\mathbb{Z}^3} \xrightarrow[(0,0,0)]{\partial} \underset{\mathrm{p}}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial} 0$$

Intantosappiamo che $\mathrm{H}_2^\Delta = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ quindi è il gruppo banale.

Ora per calcolare $\mathrm{H}_1^\Delta = \mathbb{Z}^3 \Big/ \mathrm{Im}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cong {<a,b,c>} \big/ {<a+b-c, a-b+c>}$ cerchiamo di capire quali sono le classi di equivalenza usando le relazioni:

- $[a] = [b-c] = [c-b] \to [2a] = [0]$
- $[2b] = [2c]$

Sviluppiamo un po' di conti e calcoliamo la classe di un generico elemento di $< a, b, c >$ siano $x, y, z \in \mathbb{Z}$ calcoliamo $[ax + by + cz]$:

$$\begin{aligned}[ax+by+cz] &= [b-c]x + [b]y + [c]z = [b](x+y) + [c](y-x) \\ &= [b](x+y \bmod 2) + [c]m = [b]n + [c]m \quad n \in \mathbb{Z}_2 \; m \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Quindi abbiamo dimostrato che vale $\mathrm{H}_1^\Delta \cong \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}_2$. Invece il gruppo H_0^Δ è come nel caso del Toro. Ricapitolando:

- $\mathrm{H}_2^\Delta(X) \cong \{0\}$;
- $\mathrm{H}_1^\Delta(X) \cong \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}_2$;
- $\mathrm{H}_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z} < p >$.

Volendo possiamo considerare invece di gruppi abeliani liberi con cofficienti in $\mathbb{Z}$(i procedimenti sono analoghi) considerando gruppi abeliani liberi con coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ otteniamo:

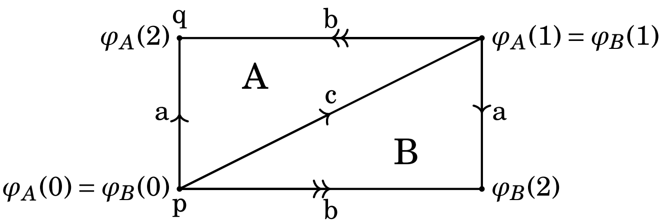
- $\mathrm{H}_2^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}_2$;
- $\mathrm{H}_1^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_2$;
- $\mathrm{H}_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}_2$.

■

[a]ATTENZIONE!! anche se i gruppi liberi sono isomorfi le funzioni ∂ sono diverse!!

Esercizio 5. Calcolare i gruppi di omologia del Piano Proiettivo: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. Partiamo con il disegno e poi andiamo a calcolare le matrici:



- $I_2 = \{A, B\}$;
- $I_1 = \{a, b, c\}$;
- $I_0 = \{p, q\}$;
- $\partial A = \varphi_A(< 1,2 >) - \varphi_A(< 0,2 >) + \varphi_A(< 0,1 >) = c + b - a = -a + b + c$;
- $\partial B = \varphi_B(< 1,2 >) - \varphi_B(< 0,2 >) + \varphi_B(< 0,1 >) = c + a - b = a - b + c$;
- $\partial a = q - p = -p + q$;
- $\partial b = q - p = -p + q$;

- $\partial c = p - p = 0$;

Quindi il complesso omologico che otteniamo è:

$$0 \xrightarrow{\partial} \underset{A,B}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}]{\partial} \underset{a,b,c}{\mathbb{Z}^3} \xrightarrow[\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}]{\partial} \underset{p,q}{\mathbb{Z}^2} \xrightarrow{\partial} 0$$

$H_2^\Delta = \text{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ quindi è il gruppo banale (il rango per colonne è 2) vediamo di trovare dei generatori dell'immagine di tale funzione in particolare vediamo che l'immagine è un sottogruppo del $\text{Ker}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =< a-b, c >$ riprendendo le equazioni di prima possiamo vedere che se chiamiamo $x := a - b$ e $y := c$ allora otteniamo:

- $\partial A = y - x$
- $\partial B = x + y$

Che equivale a ridefinire la matrice della funzione $\partial : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \cong \text{Ker}(\partial)$ nel seguente modo(facilitandoci i conti):

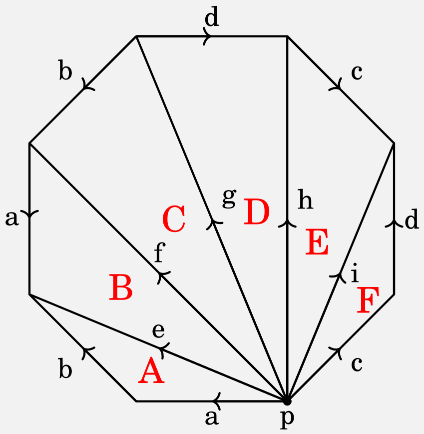
$$M(\partial) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da ciò possiamo vedere che $H_1^\Delta = \text{Ker}(\partial) \Big/ \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \cong < x, y > / < x - y, x + y > \cong \mathbb{Z}_2$ Infine $H_0^\Delta = < p, q > / < p - q > \cong \mathbb{Z}$.
Ricapitolando:

- $H_2^\Delta(X) \cong \{0\}$;
- $H_1^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}_2$;
- $H_0^\Delta(X) \cong \mathbb{Z} < p - q >$.

■

Esercizio 6. Calcolare il gruppo di omologia del seguente $\Delta-$complesso:



Soluzione. ■

2 Gruppi Abeliani

2.1 Gruppi Abeliani Liberi

Definizione 2.1.1: Gruppo Abeliano finitamente generato

Sia G un Gruppo abeliano allora G è finitamente generato se esistono: $g_1,\dots,g_r \in G$ tale che ogni $g \in G$ si scrive come:

$$g = a_1 g_1 + \dots + a_r g_r \quad \text{con } a_1,\dots,a_r \in \mathbb{Z}$$

Equivalentemente esiste un omomorfismo(di gruppi) suriettivo $\varphi : \mathbb{Z}^r \to G$

Definizione 2.1.2: Gruppo abeliano libero

Un gruppo abeliano si dice libero se esistono:$g_1,\dots,g_r \in G$ tale che ogni g si scrive in modo unico come:

$$g = a_1 g_1 + \dots + a_r g_r \quad \text{con } a_1,\dots,a_r \in \mathbb{Z}$$

Equivalentemente esiste un omomorfismo(di gruppi) suriettivo e iniettivo $\varphi : \mathbb{Z}^r \to G$ ovvero $G \cong \mathbb{Z}^r$.

Chiamiamo Rango di G (gruppo abeliano libero) r, ovvero il numero di elementi che scrivono ogni elemento di G in modo unico e l'insieme di tali elementi (analogamente agli spazi vettoriali) si definisce base di G.[2].

Osservazione. Dal primo teorema di isomorfismo otteniamo che un gruppo abeliano finitamente generato è un quoziente di $\mathbb{Z}^r$:

$$G \cong \mathbb{Z}^r \big/ \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Questo implica per esempio che $\mathbb{Q}$ non è finitamente generato in quanto non è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ma sono solo in biezione (numerabile).

Esempio 12. *$\mathbb{Z}$ è un gruppo abeliano libero con base* $\{1\}$.

Teorema 2.1.3

Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano libero G (finitamente generato) è ancora un gruppo abeliano libero (finitamente generato e con rango ≤ rango di G)

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione sul r=rango di G. Per semplificare le notazioni scegliamo una base di G e identifichiamo esso con $\mathbb{Z}^r$ in quanto isomorfi.
Caso r=1: $G \cong \mathbb{Z}$ allora i sottogruppi non vuoti di G sono tutti del tipo $n\mathbb{Z}$ per un qualche n e sappiamo che $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ (basta prendere $\varphi : \mathbb{Z} \to n\mathbb{Z}$ t.c. $\varphi(z) = nz$)
Prendiamo che per ogni le ipotesi valgono per rango ≤ r-1. Sia H sottogruppo di $G \cong \mathbb{Z}^r$ quindi possiamo vederlo come sottogruppo di $\mathbb{Z}^r$ definiamo $\pi : \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ tale che $\pi \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = a_r$, consideriamo

[2]l'esistenza e l'unicità vengono dimostrate nel libro "An introduction to Algebraic Topology" di Joseph J. Rotman a pagina 60

l'insieme $\operatorname{Ker}(\pi|_{\mathrm{H}})$=$\operatorname{Ker}(\pi) \cap \mathrm{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{H} \right\}$ questo è un sottogruppo di $\mathbb{Z}^{r-1}$ e quindi per ipotesi induttiva è libero di rango s ≤ r-1, ovvero ammette una base $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$.
Consideriamo $\operatorname{Im}(\pi|_{\mathrm{H}})$ sottogruppo di $\mathbb{Z}$ allora avremo 2 casi:

1. $\operatorname{Im}(\pi|_{\mathrm{H}})=\{0\} \Rightarrow \mathrm{H} \subseteq \operatorname{Ker}\pi \cong \mathbb{Z}^{r-1}$
2. $\operatorname{Im}(\pi|_{\mathrm{H}}) = n_0\mathbb{Z}$

Nel primo caso per ipotesi induttiva H è gruppo libero.
Nel secondo caso prendiamo $\gamma_{s+1} \in \mathrm{H}$ tale che $\pi(\gamma_{s+1}) = n_0$ mostriamo che $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s, \gamma_{s+1}\}$ è una base di H:

$$\begin{aligned}
&\text{sia } \gamma \in \mathrm{H} \Rightarrow \\
&\pi(\gamma) = kn_0 \Rightarrow \pi(\gamma - k\gamma_{s+1}) = 0 \Rightarrow \\
&\gamma - k\gamma_{s+1} \in \operatorname{Ker} \cap \mathrm{H} \Rightarrow \\
&\gamma - k\gamma_{s+1} = a_1\gamma_1 + \cdots + a_s\gamma_s \quad \text{con } a_i \in \mathbb{Z} \text{ unici} \\
&\gamma = a_1\gamma_1 + \cdots + a_s\gamma_s + k\gamma_{s+1}.
\end{aligned}$$

La scrittura è unica banalmente e dall'ipotesi s ≤ r-1 otteniamo s+1 ≤ r. □

Corollario 2.1.4

Sia H sottogruppo di $\mathbb{Z}^n$ allora H è libero e H≅ $\mathbb{Z}^r$ con r≤ n.

Osservazione. Il rango di un gruppo abeliano libero(finitamente generato) è unico ovvero prese 2 basi esse hanno lo stesso numero di elementi. Questo implica che presa una matrice di cambiamento di base essa è invertibile e il determinante vale ±1.

Teorema 2.1.5

Sia G un gruppo libero di rango r, sia H un sottogruppo di G di rango s allora esiste una base $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ di G e degli interi $t_1, \dots, t_s \in \mathbb{Z}$ tali che $\{t_1\gamma_1, \dots, t_s\gamma_s\}$ è una base di H

Prima di dimostrare il teorema dimostriamo il seguente corollario del teorema molto utile

Corollario 2.1.6

Sia G gruppo abeliano finitamente generato allora:

$$\mathrm{G} \cong \mathbb{Z}^{r-s} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/t_i\mathbb{Z} \right)$$

Esempio 13. *Un esempio di gruppo abeliano finitamente generato di questo tipo è il gruppo di omologia H_1^{Δ} del complesso omologico associato alla bottiglia di Klein nell Esercizio 4.*

Dimostrazione. Corollario. Dalla definizione di gruppo abeliano finitamente generato abbiamo che G è il quoziente di un gruppo abeliano libero F ovvero $G \cong {}^{\mathrm{F}}\!/_{\mathrm{H}}$ inoltre dal teorema 2.1.3 sappiamo che H è un gruppo libero a sua volta. Sia $\{t_1\gamma_1, \dots, t_s\gamma_s\}$ base di H con $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ base di F (teorema precedente) allora: $\mathrm{G} = {}^{\mathrm{F}}\!\Big/_{\mathrm{H}} \cong {}^{<\gamma_1, \dots, \gamma_r>}\!\Big/_{<t_1\gamma_1, \dots, t_s\gamma_s>}$.
Calcoliamo le classi di equivalenza di un generico elemento di F sapendo che valgono:
$$\begin{cases} [t_1\gamma_1] = [0] \Rightarrow [a\gamma_1] = (a \bmod t_1)[\gamma_1] \quad \forall a \in \mathbb{Z} \\ \vdots \\ [t_s\gamma_s] = [0] \Rightarrow [a\gamma_s] = (a \bmod t_s)[\gamma_s] \quad \forall a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
Quindi sia $a_1\gamma_1 + \cdots + a_r\gamma_r$ con $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ allora vale:

$$[a_1\gamma_1 + \cdots + a_r\gamma_r] = (a_1 \bmod t_1)[\gamma_1] + \cdots + (a_s \bmod t_s)[\gamma_s] + a_{s+1}[\gamma_{s+1}] + \cdots + a_r[\gamma_r]$$

Allora abbiamo dimostrato che:

$$\mathrm{G} \cong {}^{\mathrm{F}}\!/_{\mathrm{H}} \cong \mathbb{Z}^{r-s} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{t_i\mathbb{Z}} \right)$$

□