Statistica

Indice

1 Spazio di Probabilità

Per poter studiare Probabilità e statistica possiamo immaginare di fare un parallelismo con l'analisi:

Probabilità e Statistica	**Analisi Matematica**
Spazio di Probabilità	Numeri reali
Variabile Aleatoria	Variabile reale
Convergenza per successioni di variabili aleatorie	Successioni
($\mathbb{M}$) Processo Stocastico	Funzioni
($\mathbb{M}$) Calcolo Stocastico	Calcolo differenziale e integrale
($\mathbb{M}$) Equazioni Differenziali Stocastiche	Equazioni Differenziali

Il ($\mathbb{M}$) *sta indicare che non sono argomenti trattati in questo corso, ma saranno approfonditi alla magistrale*

1.1 Cenni di Teoria della Misura

Definizione 1.1.1: Spazio Misurabile

Si definisce **Spazio Misurabile** una coppia $(\Omega, \mathscr{F})$, dove Ω è un insieme non vuoto e $\mathscr{F}$ è una $\sigma-$algebra, cioè una famiglia non vuota di sottoinsiemi di Ω che soddisfa due proprietà:

1. $A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F}$, cioè $\mathscr{F}$ è chiuso rispetto al complementare
2. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathscr{F}$, allora
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{F}$$
cioè $\mathscr{F}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile

Il prefisso "$\sigma-$" davanti a queste parole sta ad indicare che si tratta di una proprietà numerabile. Quindi le due proprietà sopra elencate possono essere scritte come "$\mathscr{F}$ è $\sigma-\cup-$chiuso"

Osservazione. Sottolineiamo che Ω può essere un insieme qualunque (un esempio, forse il più facile da tenere a mente è quello della Teoria della Misura di Lebesgue, un esempio può essere $(\Omega, \mathscr{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)))$ Quindi possiamo prendere insiemi qualunque, che siano numerici, come $\mathbb{N}, \mathbb{C}$, vettoriali $\mathbb{R}^n$, oppure qualcosa di totalmente diverso, come l'insieme delle funzioni continue $C(\mathbb{R})$, l'insieme dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ addirittura l'insieme delle sedie in una stanza.

Osservazione ($\sigma-$algebre banali)**.** Esistono due tipi di $\sigma-$algebre particolari, dette **Banali** in quanto sono definite come:
$$\mathscr{F} = \{\varnothing, \Omega\} \qquad \text{e} \qquad \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$$
In particolare abbiamo che valgono:
$$\{\varnothing, \Omega\} \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega) \qquad \forall \mathscr{F}\ \sigma-\text{algebra}$$

Proposizione 1.1.2

Se $\mathscr{F}$ è una $\sigma-$algebra, allora è $\cup-$chiusa (cioè l'unione finita è chiusa)

Dimostrazione. Siano $A_1,...,A_n \in \mathscr{F}$ e siano:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{A}_k \qquad \text{dove } \overline{A}_k = \begin{cases} A_k & k \leq n \\ A_n & k > n \end{cases}$$

Tuttavia, sappiamo che $\mathscr{F}$ è una $\sigma-$algebra, quindi il secondo elemento sta in $\mathscr{F}$. Tuttavia, essendo il secondo uguale al primo abbiamo che anche il primo sta in $\mathscr{F}$. Per l'arbitrarietà degli A_k, segue che $\mathscr{F}$ è $\cup-$chiuso □

Osservazione. Per, definizione di $\sigma-$algebra, $\mathscr{F}$ è non vuoto. Sia $A \in \mathscr{F}$ vale che:

$$A^c \in \mathscr{F} \quad \Rightarrow \quad A \cup A^c = \Omega \in \mathscr{F} \quad \text{e} \quad \varnothing = \Omega^c \in \mathscr{F}$$

questo implica che $\varnothing$ e Ω appartengono a ogni $\mathscr{F}$ σ-algebra.

Osservazione. Prendiamo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathscr{F}$ allora dalla definizione vale che:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^c\right)^c \in \mathscr{F}$$

Definizione 1.1.3: Misura su $(\Omega,\mathscr{F})$

Definiamo una **Misura** su uno spazio misurabile come una funzione $\mu : \mathscr{F} \to [0,+\infty]$ tale che:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. μ è σ-additiva ovvero:

   Se (A_n) è una successione in $\mathscr{F}$ i cui elementi sono disgiunti $\Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$

Osservazione (La misura è additiva su somme finite)**.** Usiamo la Notazione $\uplus$ per parlare di unione disgiunta. Siano $A_1,\ldots,A_n$ disgiunti e siano $A_k = \varnothing \ \forall k \geq n+1$, dalla definizione di misura segue banalmente che $\mu(A_k) = 0 \ \forall k \geq n+1$ allora dal fatto poichè μ è σ-additiva vale che:

$$\mu\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Definizione 1.1.4: Spazio di Probabilità

Definiamo uno **Spazio di Probabilità** come una tripla $(\Omega,\mathscr{F},P)$, cioè uno spazio misurabile $(\Omega,\mathscr{F})$ con misura P tale che:

$$P(\Omega) = 1$$

Diamo adesso dei nomi agli strumenti che stiamo utilizzando, in particolare utilizzando un esempio, quello del dado a 6 facce:

Elemento	**Nome**	**Esempio**
Ω	**Spazio Campionario**	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
$\omega \in \Omega$	**Esito**	$\omega = 1$
$\mathscr{F}$	**Famiglia degli Eventi**	$\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$
$A \in \mathscr{F}$	**Evento**	$A = \{1,3,5\}$
P	**Misura di Probabilità**	$P(A)$

Definizione 1.1.5: Spazio Discreto

Uno spazio si dice **Discreto** se Ω è finito o numerabile in questo caso prendiamo:

$$\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega) \quad \text{e scriviamo} \quad (\Omega, \mathscr{F}, P) = (\Omega, P)$$

Esempio 1 (Lancio di un dado). *In questo caso abbiamo:* $\Omega = \{1, \dots, 6\}$*,* $\mathscr{F}$ *= famiglia degli eventi dove* $A \in \mathscr{F}$ *è un evento ovvero "un affermazione relativa all'esito dell'esperimento",* P *= Misura di probabilità è la funzione* $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ *che manda A nella probabilià che l'esito sia positivo.*

Per esempio sia $A = \{1,3,5\} \subseteq \Omega$ *ovvero le possibili facce che lanciando il Dado diano un esito positivo, allora* $P(A) = \frac{1}{2}$*. Notiamo inoltre che lanciando il dado uscirà sempre almeno una faccia questo equivale a dire che* $P(\varnothing) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$*.*

Osservazione. Possiamo fare un parallelismo tra gli insiemi misurabili e la probabilità aiutandoci con la "terminologia":

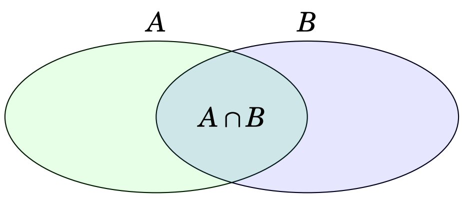
Analisi e Insiemistica	**Probabilità e statistica**
$A \cup B$	Evento A "oppure" Evento B
$A \cap B$	Evento A "e" Evento B
A^c	"Non Evento A"
$\mu(\mathbb{Q}) = 0$	$P(A) = 0 \Rightarrow A$ è "non misurabile"
$\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$	$P(A) = 1 \Rightarrow A$ è "quasi certo"

Esempio 2 (Corridore e le due Gare). *Abbiamo un corridore che partecipa a 2 gare dove, ottimisticamente parlando, vorrebbe vincere le due gare:*

- A = *Vince la prima gara*
- B = *Vince la seconda gara*

Supponiamo di avere come dati:

- $P(A) = 30\%$ *la probabilità di vincere di la prima gara*
- $P(B) = 40\%$ *la probabilità di vincere la seconda gara*
- $P(A \cup B) = 50\%$ *la probabilità di vincere la prima o la seconda gara*



Allora dall'additività della misura possiamo ricavare:

$$P(A \cup B) = P(A \uplus (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) = P(A) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

e poiché $P(B \setminus A) + P(A \cap B) = P(B)$ *otteniamo:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Andando a sostituire otteniamo:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.3 + 0.4 - 0.5 = 0.2 = 20\%$$

Osservazione. L'esempio precedente funziona perché siamo in uno spazio discreto. Prendiamo (Ω, P) discreto ovvero $\#\Omega \leq \aleph_0$ quindi considerando ω esito e $\{\omega\}$ evento elementare sappiamo che vale:

$$P(A) = P\left(\biguplus_{\omega\in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$$

Quindi data P misura di probabilità posso definire la seguente funzione:

$$\begin{aligned} p:\quad & \Omega \to [0,1] \\ & \omega \mapsto P(\{\omega\}) = p(\omega) \end{aligned}$$

Dove sappiamo che valgono:

- $1 = P(\Omega) = \sum_{w\in\Omega} p(\omega)$
- $p(\omega) \geq 0$

Concludendo possiamo dire che se (Ω, P) è discreto, posso studiare la probabilità sui singoli eventi elementari.

È importante osservare che avere la probabilità dei singoli esiti o eventi elementari risulta fondamentale nel calcolo di vari eventi. In particolare se lo spazio campionario di partenza è molto grande oppure numerabile.

Esempio 3. *Se abbiamo uno spazio campionario Ω tale che $\#\Omega = 100$, allora abbiamo che $\#\mathscr{P}(\Omega) = 2^{100}$. Risulta quindi estremamente più comodo conoscere le probabilità dei singoli eventi elementari che di tutti gli eventi possibili. Per questo motivo, in questo caso, è opportuno ricordare p definita sugli esiti che P sugli eventi.*

Viceversa, se Ω è discreto, cioè è tale che $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$, e conosciamo le singole probabilità di ogni esito, allora possiamo considerare una successione $(p_n)n$, definite come $p_n = p(\omega_n)$, e possiamo calcolare $P(A)$, per $A \in \mathscr{F}$, come:

$$P(A) = \sum_{\omega_n\in A} p_n$$

Quindi p mi definisce una misura di probabilità P.

Tutto quello che abbiamo fatto è fattibile in quanto abbiamo che Ω è discreto, se così non fosse non sarebbe possibile.

Esempio 4 (Probabilità Uniforme)**.** *Se abbiamo che $\#\Omega = N$, allora possiamo prendere $p_n = \frac{1}{N}$ per $n \in \{1, 2, ..., N\}$, allora segue che la probabilità di ogni evento è:*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Cioè andiamo a guardare le cardinalità degli insiemi. In sintesi questo sarebbe "Casi Favorevoli su Casi Totali"

Esempio 5 (Continuo del Corridore, Esempio 2)**.** *Possiamo scrivere Ω come:*

$$\Omega = \{p_1 = vv, p_2 = vp, p_3 = pv, p_4 = pp\}$$

Allora, riprendendo gli eventi A e B, questi possono essere scritti come:

$$A = \{vv, vp\} = \{p_1, p_2\} = 30\% \qquad B = \{vv, pv\} = \{p_1, p_3\} = 40\%$$

Da cui segue che:

$$A \cup B = \{vv, vp, pv\} = \{p_1, p_2, p_3\} = 50\% \qquad A \cap B = \{vv\} = ??\%$$

Abbiamo allora che P è univocamente determinata se conosciamo p_1, p_2, p_3, p_4. Tuttavia, per come abbiamo definito p, abbiamo che:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad p_4 = 1 - p_1 - p_2 - p_3$$

Otteniamo quindi un sistema lineare di 4 operazioni a 4 incognite:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 0,3 \\ p_1 + p_3 = 0,4 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 0,5 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \end{cases}$$

Andandolo a risolvere otteniamo lo stesso risultato ottenuto nell'esempio precedente

Questo è anche un esempio di probabilità non uniforme

Osservazione. La probabilità uniforme non è altro che un esempio di probabilità, il caso più semplice e a volte anche quello meno interessante, in quanto basta solamente guardare la cardinalità degli insiemi degli eventi e può essere usata solamente per Ω finiti. Se infatti Ω fosse numerabile, avremmo che:

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})$$

Poiché tutti gli elementi sono uguali, questa serie diverge oppure è uguale a 0.

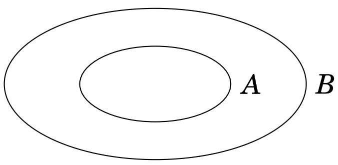
1.2 Proprietà Generali

Proposizione 1.2.1: Monotonia

Vale la proprietà di monotonia per la Misura di Probabilità P, cioè:

$$\forall A, B \in \mathscr{F}: \quad A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$$

Dimostrazione. Graficamente abbiamo che:



Allora possiamo considerare:

$$P(B) = P(A \uplus (B \setminus A)) = P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq P(A)$$

□

Osservazione. Se $B = \Omega$, allora abbiamo che: $1 = P(\Omega) = P(A) + P(A^c) \quad \Rightarrow \quad P(A^c) = 1 - P(A)$

Esempio 6 (Lancio 8 dadi). *Sia Ω l'insieme dei possibili risultati lanciando 8 dadi e sia A = "esca almeno un 6". In questo caso (così come quelli futuri in cui ci sarà "almeno"), è più facile calcolare $P(A^c)$, dove A^c = "Non esce neanche un 6". Scrivendo tutto per bene in formule abbiamo che:*

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_8) : \omega_i \in \{1, ..., 6\}\} \qquad \Rightarrow \#\Omega = 6^8$$

Allora abbiamo che:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} = 1 - \frac{5^8}{6^8}$$

Proposizione 1.2.2: σ-sub-additività di P

Se P è misura di Probabilità $\Rightarrow P$ è σ-sub-additiva ovvero vale:

$$\forall A \text{ e } (A_n) \in \mathscr{F} : A \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$$

Dimostrazione. Siano A e $(A_n) \in \mathscr{F}$ tali che $A \subseteq \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$, poniamo $\overline{A}_1 = A_1 \cap A$, e prendiamo come elementi disgiunti $\overline{A}_n = \left(A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k\right)\right) \cap A$. In questo modo infatti vale che sono tutti elmenti di $\mathscr{F}$ e $A = \biguplus\limits_{n\geq 1} \overline{A}_n$ e quindi dalla σ-additività 1.1.3 e dalla Monotonia 1.2.1 vale che:

$$P(A) = \sum_{n\geq 1} P(\overline{A}_n) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n) \qquad \left(\overline{A}_n \subseteq A_n \forall n\right)$$

□

Proposizione 1.2.3: Caratterizzazione dell'additività Finita

Sia $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ Misura di Probabilità tale che $P(\varnothing) = 0$ allora:

$$P \text{ è additiva (Finitamente)} \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad \forall A, B \in \mathscr{F}$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ la prima implicazione l'abbiamo vista ieri nell'esempio del Corridore 2.
$\Leftarrow$ la seconda implicazione invece è ovvia infatti basta partire dal caso $A \cap B = \varnothing$ ed otteniamo il risultato. □

Esempio 7 (Lancio dei 2 Dadi). *Consideriamo il seguente evento A= "Almeno uno dei 2 lanci è minore o uguale a 3", (Piccola notazione: $I_n = \{1, \ldots, n\} \quad n \in \mathbb{N}$) in questo caso lo spazio di probabilità discreto (Ω, P) è composto da:*

- $\Omega = I_6 \times I_6 = \{(m,n) : m, n \in I_6\}$
- *P Probabilità uniforme*

In particolare notiamo che $A = A_1 \cup A_2$ dove A_1="Il primo lancio è minore o uguale di 3" e A_2="Il secondo lancio è minore o uguale di 3". Sappiamo che questi 2 eventi non sono disgiunti e che valgono:

- $|\Omega| = 36$
- $|A_1| = |A_2| = 18$
- $|A_1 \cap A_2| = 9$

Sapendo che lo spazio è discreto vale la proposizione precedente e quindi:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{|A_1|}{|\Omega|} + \frac{|A_2|}{|\Omega|} - \frac{|A_1 \cap A_2|}{|\Omega|} = \frac{18}{36} + \frac{18}{36} - \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = 75\%$$

Prima di enunciare la prossima proposizione diamo 2 notazioni che ci torneranno utili:

$$A_n \nearrow A \overset{\text{def}}{\iff} A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n = A$$
$$A_n \searrow A \overset{\text{def}}{\iff} A_n \supseteq A_{n+1} \forall n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n \geq 1} A_n = A$$

Proposizione 1.2.4: Nome che mette manu

$P : \mathscr{F} \to [0,1]$ additiva e tale che $P(\varnothing) = 0$ allora sono equivalenti:

1. P è σ-additiva
2. P è σ-subadditiva
3. P è continua dal basso ossia vale la seguente implicazione:
$$\forall (A_n) \in \mathscr{F} : A_n \nearrow A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(A)$$
4. P è continua dall'alto ossia vale la seguente implicazione:
$$\forall (A_n) \in \mathscr{F} : A_n \searrow A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P(A)$$

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ l'abbiamo fatta nella proposizione1.2.2
$2 \Rightarrow 3$ Ovvero P è σ-subadditiva $\Rightarrow P$ è continua dal basso, vediamo se vale la condizione.

$$\text{Sia } A_n \nearrow A \Rightarrow A_n \subseteq A_{n+1} \forall n \overset{\text{Monotonia}}{\Longrightarrow} P(A_n) \leq P(A_{n+1}) \leq P(A) \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} P(A_n) \leq P(A)$$

Ora definiamo $\overline{A}_1 = A_1$ e $\overline{A}_n = A_n \setminus A_{n-1}$ questo implica che $A = \biguplus_{n \geq 1} \overline{A}_n$. Utilizzando la σ-subadditività otteniamo:

$$P(A) \leq \sum_{n \geq 1} P(\overline{A}_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A}_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$$

□