ANALISI MATEMATICA 1B

MODULO 1 - TEORIA

Appunti di lezione
G. Cupini

Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
A.A. 2020-2021

Indice

CAPITOLO 1

Funzioni monotone e punti estremanti locali

1.1. Funzioni monotone

Proposizione 1.1.1. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in A \cap D(A)$.*
Allora

$$f \textit{ crescente} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi sia f crescente e $x_0 \in A \cap D(A)$.
Se $x \in A$ e $x > x_0$ allora

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \qquad x - x_0 > 0,$$

quindi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall x \in A, x > x_0.$$

Se $x \in A$ e $x < x_0$ allora

$$f(x) - f(x_0) \leq 0, \qquad x - x_0 < 0,$$

quindi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall x \in A, x < x_0.$$

Quindi,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad \forall x \in A \setminus \{x_0\}.$$

Per il teorema del confronto sarà

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

cioè $f'(x_0) \geq 0$. □

Teorema 1.1.2 (Criterio di monotonia). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è crescente in I,*
(b) *$f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \operatorname{int} I$.*

Analogamente, sono equivalenti:

(a') *f è decrescente in I,*
(b') *$f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \operatorname{int} I$.*

DIMOSTRAZIONE.
Consideriamo solo il caso delle funzioni crescenti, dato che nell'altro caso ci si può ricondurre al precedente, osservando che $f : I \to \mathbb{R}$ è decrescente se e solo se la funzione opposta $-f : I \to \mathbb{R}$ è crescente.

$(a) \Rightarrow (b)$
Segue dalla Proposizione 1.1.1

$(b) \Rightarrow (a)$
Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. Vogliamo dimostrare che $f(x_1) \leq f(x_2)$. Consideriamo la funzione f ristretta all'intervallo $[x_1, x_2]$, cioè $f|_{[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$.
Dato che $[x_1, x_2] \subseteq I$ e $]x_1, x_2[\subseteq \operatorname{int} I$, sono verificate le ipotesi del Teorema di Lagrange (f continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in $]x_1, x_2[$), per cui esiste $\xi \in]x_1, x_2[$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Dato che $x_2 - x_1 > 0$ e per l'ipotesi (b) risulta $f'(\xi) \geq 0$, abbiamo $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. □

Osservazione 1.1.3. Esiste l'esempio di una funzione $f : [0, 1] \to [0, 1]$ con le seguenti proprietà:

- f è crescente, continua, suriettiva
- f è derivabile quasi ovunque con derivata nulla.

Precisamente f è derivabile con derivata nulla in $[0, 1] \setminus C$, dove C è un insieme (non numerabile) di misura di Lebesgue nulla [le espressioni *quasi ovunque* e *insieme di misura di Lebesgue nulla* diventeranno chiare nel corso di Analisi Matematica 2]
La funzione f è la funzione di Cantor(-Vitali) o "scala del diavolo" e l'insieme C è l'insieme di Cantor.
`https://it.wikipedia.org/wiki/Funzione_di_Cantor`
`https://it.wikipedia.org/wiki/Insieme_di_Cantor`

Teorema 1.1.4 (Criterio di stretta monotonia). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è strettamente crescente in I,*
(b) *f è crescente in I e f non è costante in alcun intervallo $J \subseteq I$ con* $\operatorname{int} J \neq \emptyset$
(c) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \operatorname{int} I$ *e* $\operatorname{int}\{x \in \operatorname{int} I : f'(x) = 0\} = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$
Se f è strettamente crescente in I, allora in particolare è crescente. Supponiamo per assurdo che esista un intervallo $J \subseteq I$ con $\operatorname{int} J \neq \emptyset$ e $c \in \mathbb{R}$, tale che $f(x) = c$ per ogni $x \in J$. Allora f non è iniettiva, in quanto, essendo $\operatorname{int} J \neq \emptyset$, allora J ha infiniti elementi, i quali hanno la stessa immagine. Ciò contraddice la stretta crescenza di f.

$(b) \Rightarrow (c)$
Dato che f è crescente in I allora, per il Teorema 1.1.2 si ha $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \operatorname{int} I$.

Proviamo che $\operatorname{int}\{x \in \operatorname{int} I : f'(x) = 0\} = \emptyset$.
Se ci fosse $\overline{x} \in \operatorname{int}\{x \in \operatorname{int} I : f'(x) = 0\}$ esisterebbe $\delta > 0$ tale che

$$[\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta] \subseteq \{x \in \operatorname{int} I : f'(x) = 0\}.$$

Per il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti aventi come dominio un intervallo, si ha che la funzione f ristretta a $[\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$ è costante, in contraddizione con (b).

$(c) \Rightarrow (a)$
Per il Teorema 1.1.2, essendo f continua in I e $f' \geq 0$ in $\operatorname{int} I$, allora f è crescente in I, cioè

$$\forall x_1, x_2 \in I \qquad (x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Se f non fosse strettamente crescente, esisterebbero $x_1, x_2 \in I$ tali che $x_1 < x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Dalla crescenza di f, avremmo

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

e dunque f è costante in $[x_1, x_2]$, intervallo con interno non vuoto. Pertanto sarebbe $f' = 0$ in $]x_1, x_2[$. Essendo $[x_1, x_2] \subseteq I$ allora $]x_1, x_2[\subseteq \operatorname{int} I$. Ne deduciamo che

$$]x_1, x_2[\subseteq \operatorname{int}\{x \in \operatorname{int} I : f'(x) = 0\}.$$

Ciò è in contraddizione con l'ipotesi.

□

Corollario 1.1.5. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in* $\operatorname{int} I$.
Allora

$$f'(x) > 0 \ \forall x \in \operatorname{int} I \ \Rightarrow \ f \text{ è strettamente crescente in } I$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dall'implicazione $(c) \Rightarrow (a)$ in Teorema 1.1.4. □

Osservazione 1.1.6. La tentazione di scrivere un criterio di stretta crescenza nel seguente modo:
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I. Allora

$$f \text{ strettamente crescente in } I \Leftrightarrow f'(x) > 0 \forall x \in I$$

è grande, ma va abbandonata. Infatti l'implicazione $\Rightarrow$ è falsa, come attesta il seguente esempio:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, è una funzione strettamente crescente eppure $f'(0) = 0$.

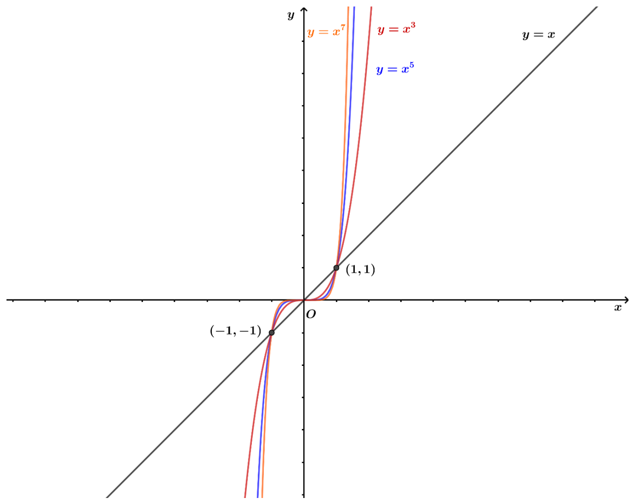


Figura 1. $f(x) = x^n$ con n dispari, $n \geq 3$, è strettamente crescente e $f'(0) = 0$.

1.2. Punti estremanti locali

Definizione 1.2.1 (Punti estremanti assoluti). Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$.
Diciamo che x_0 è un punto di massimo assoluto (o globale) di f se

$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in A.$$

Diciamo che x_0 è un punto di minimo assoluto (o globale) di f se

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad \forall x \in A.$$

Diciamo che x_0 è un punto estremante assoluto di f se x_0 è un punto di massimo o minimo assoluto.

Definizione 1.2.2 (Punti estremanti locali). Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$.
Diciamo che x_0 è un punto di massimo locale (o relativo) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[.$$

Diciamo che x_0 è un punto di minimo locale (o relativo) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[.$$

Diciamo che x_0 è un punto estremante locale di f se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale.

Definizione 1.2.3 (Punti estremanti locali forti). Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$.
Diciamo che x_0 è un punto di massimo locale forte (o stretto) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) > f(x) \quad \forall x \in A \cap \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\}.$$

Diciamo che x_0 è un punto di minimo locale forte (o stretto) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(x_0) < f(x) \quad \forall x \in A \cap \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\setminus \{x_0\}.$$

Diciamo che x_0 è un punto estremante locale forte di f se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale forte.

Osservazione 1.2.4. Nella definizione di punto estremante locale, non si confonda $\exists\delta > 0$ con $\forall\delta > 0$. Se scrivessimo

$$\forall\delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

avremmo che x_0 è un punto di massimo assoluto.

Proposizione 1.2.5. *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$.
Allora

$$\{x \in A : x \textit{ è un punto di massimo assoluto di } f\} \subseteq \{x \in A : x \textit{ è un punto di massimo locale di } f\}.$$

Osservazione 1.2.6. Un punto x_0 di massimo relativo per f è tale che

$$\exists\delta > 0 : f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Ciò significa che x_0 è un punto di massimo assoluto per la funzione $f : A \cap \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.7 (Condizioni sufficienti di ordine zero per gli estremanti locali). *Siano* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in A$.
Se esiste $\delta > 0$ *tale che* f *è crescente in* $A \cap]x_0 - \delta, x_0]$ *e* f *è decrescente in* $A \cap [x_0, x_0 + \delta[$ *allora* x_0 *è un punto di massimo locale.*
Analogamente:
se esiste $\delta > 0$ *tale che* f *è decrescente in* $I \cap]x_0 - \delta, x_0]$ *e* f *è crescente in* $I \cap [x_0, x_0 + \delta[$ *allora* x_0 *è un punto di minimo locale.*

DIMOSTRAZIONE. Un semplice esercizio che si lascia al lettore. □

Osservazione 1.2.8. Si noti che non vale il viceversa del Teorema 1.2.7. Ad esempio, se x_0 è un punto di minimo locale, non è detto che esista $\delta > 0$ tale che f è decrescente in $I \cap]x_0, -\delta, x_0]$ e f è crescente in $I \cap [x_0, x_0 + \delta[$.
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Tale funzione è non negativa e continua (è addirittura derivabile), 0 è un punto di minimo assoluto, quindi anche locale, eppure non esiste $\delta > 0$ tale che f sia monotona in $]0 - \delta, 0]$ e in $[0, 0 + \delta[$ (per dimostrarlo, si considerino le successioni $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ e $b_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, con $n \geq 1$, e quelle col segno opposto).

Teorema 1.2.9 (Condizioni sufficienti di ordine zero per gli estremanti locali forti). *Siano $f : I \to \mathbb{R}$ continua e $x_0 \in I$.*
Se esiste $\delta > 0$ tale che f è strettamente crescente in $I \cap]x_0 - \delta, x_0]$ e f è strettamente decrescente in $I \cap [x_0, x_0 + \delta[$ allora x_0 è un punto di massimo locale forte.
Analogamente:
se esiste $\delta > 0$ tale che f è strettamente decrescente in $I \cap]x_0 - \delta, x_0]$ e f è strettamente crescente in $I \cap [x_0, x_0 + \delta[$ allora x_0 è un punto di minimo locale forte.

DIMOSTRAZIONE. Un semplice esercizio che si lascia al lettore. □

1.3. Il Teorema di Fermat

Definizione 1.3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione da destra di A se

$$\forall r > 0 \quad A \cap]x_0, x_0 + r[\neq \emptyset.$$

Analogamente, diciamo che x_0 è un punto di accumulazione da sinistra di A se

$$\forall r > 0 \quad A \cap]x_0 - r, x_0[\neq \emptyset.$$

Definizione 1.3.2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione da destra di A.
Si chiama *derivata destra* di f in x_0 il valore del limite, se esiste ed è finito,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In tal caso il valore di tale limite si denota $D_+ f(x_0)$ oppure $f'_+(x_0)$.
In modo analogo si definisce la derivata sinistra.
Sia $x_0 \in A$ un punto di accumulazione da sinistra di A.
Si chiama *derivata sinistra* di f in x_0 il valore del limite, se esiste ed è finito,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In tal caso il valore di tale limite si denota $D_- f(x_0)$ oppure $f'_-(x_0)$.

Proposizione 1.3.3. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in A$ punto di accumulazione da destra.*
Se

(a) *x_0 è un punto di minimo locale per $f|_{A \cap [x_0, +\infty[}$*
(b) $\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora

$$\ell \in [0, +\infty].$$

In partcolare, se esiste $D_+ f(x_0)$ [=derivata destra in x_0] allora $D_+ f(x_0) \geq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per (a)

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap A.$$

Allora

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \qquad x - x_0 > 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap A,$$

quindi,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap A.$$

Per (b) e per il teorema del confronto sarà

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in [0, +\infty].$$

In particolare, se tale limite è finito (cioè se esiste $D_+ f(x_0)$), esso è un numero reale maggior o uguale a 0. □

Proposizione 1.3.4. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in A \cap D(A)$ punto di accumulazione da sinistra.*
Se

(a) *x_0 è un punto di minimo locale per $f|_{A\cap]-\infty, x_0]}$*
(b) $\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora

$$\ell \in [-\infty, 0].$$

In partcolare, se esiste $D_- f(x_0)$ [=derivata sinistra in x_0] allora $D_- f(x_0) \leq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per (a)

$$\exists \delta > 0 \quad : \quad f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap A.$$

Allora

$$f(x) - f(x_0) \geq 0, \qquad x - x_0 < 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap A,$$

quindi,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap A.$$

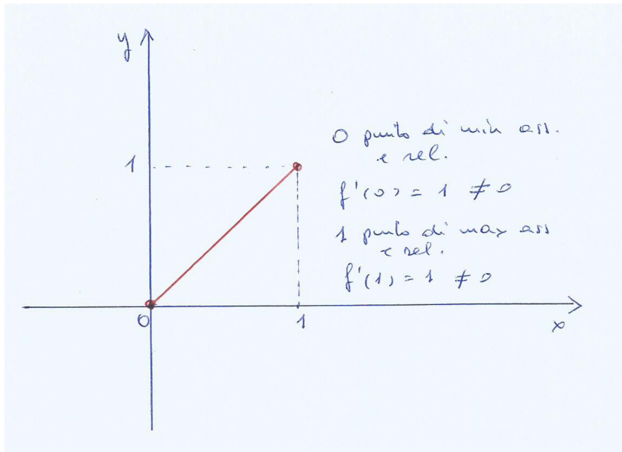
Per (b) e per il teorema del confronto sarà

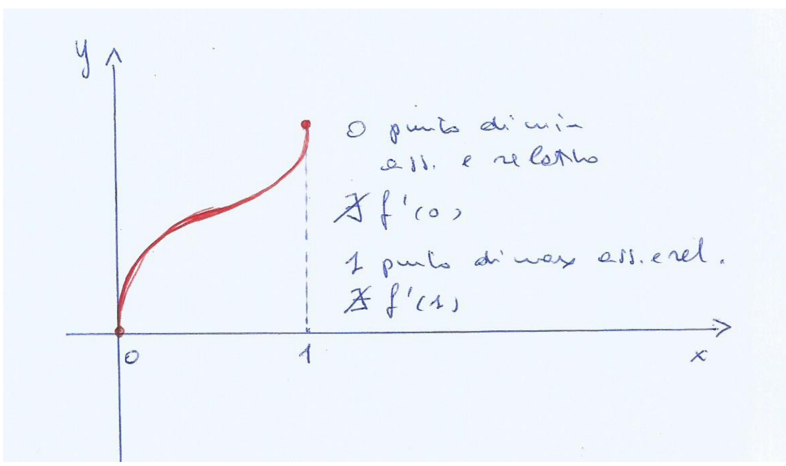
$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in [-\infty, 0].$$

In particolare, se tale limite è finito (cioè se esiste $D_- f(x_0)$), esso è un numero reale minore o uguale a 0. □

Esercizio 1.3.5. Scrivere gli enunciati analoghi a quello delle Proposizioni 1.3.3 e 1.3.4 nel caso dei punti di massimo locale.

Osservazione 1.3.6. A illustrare le Proposizioni 1.3.3 e 1.3.4 e i loro analoghi sono utili i seguenti disegni:





Altro esempio:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Si ha $f(x) > 0$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(0) = 0$. Dunque 0 è un punto di minimo relativo (e anche assoluto) stretto e punto di accumulazione bilatero. Si ha $f'_-(0) = -1 \le 0$ e $f'_+(0) = 1 \ge 0$.

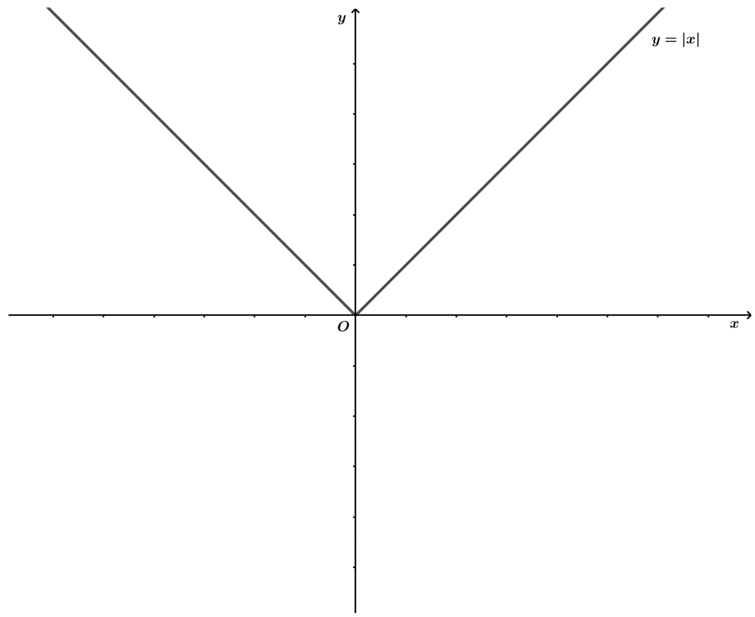
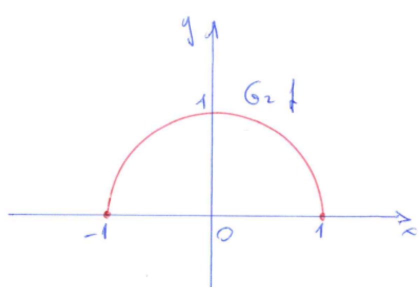


Figura 2. 0 è un punto di minimo per la funzione valore assoluto. $D_- f(0) = -1 \leq 0$ e $D_+ f(0) = 1 \geq 0$.

Altri esempi:
$f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.



Si ha $f(x) > 0$ in $]-1,1[$ e $f(\pm 1) = 0$. -1 è un punto di accumulazione da destra di $[-1,1]$ e punto di minimo relativo (e anche assoluto) stretto. Si ha $\exists \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = +\infty$.
Analogamente 1 è un punto di accumulazione da sinistra di $[-1,1]$ e minimo relativo (e anche assoluto) stretto. Si ha $\exists \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$.

Definizione 1.3.7. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia f derivabile in $x_0 \in A \cap D(A)$.
Diciamo che x_0 è un *punto critico* per f se $f'(x_0) = 0$.

Osservazione 1.3.8. Ricordando che $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$, si ha che l'interpetazione geometrica di $f'(x_0) = 0$ è:

la retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale.

Teorema 1.3.9 (Teorema di Fermat o condizione necessaria del I ordine per gli estremanti relativi). *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$.
Se

(a) $x_0 \in \operatorname{int} I$
(b) x_0 *è un punto estremante locale per* f
(c) f *è derivabile in* x_0,

allora x_0 *è un punto critico, ossia*

$$f'(x_0) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Diamo la dimostrazione nel caso x_0 punto di minimo locale.
Dato che $x_0 \in \operatorname{int} I$ allora x_0 è un punto di accumulazione bilatero di I. Essendo f derivabile in x_0 allora

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

Inoltre x_0 è un punto di minimo locale per f, allora per le Proposizioni 1.3.3 e 1.3.4

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) \le 0, \qquad f'(x_0) = f'_+(x_0) \ge 0.$$

Abbiamo così dimostrato che $f'(x_0) \ge 0$ e $f'(x_0) \le 0$ da cui si deduce che $f'(x_0) = 0$.
Si lascia al lettore la dimostrazione nel caso di x_0 punto di massimo locale. $\square$

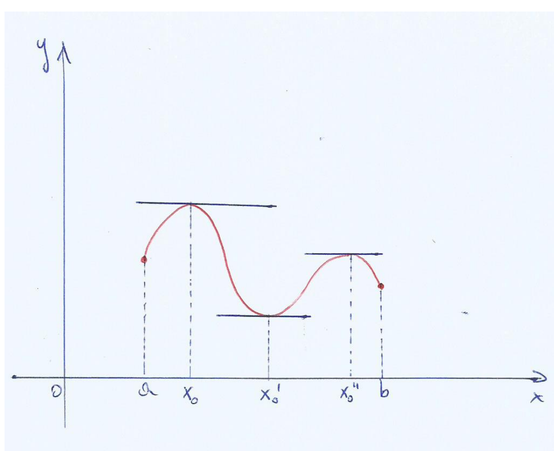


Figura 3. Significato geometrico del Teorema di Fermat

Osservazione 1.3.10. Se nel Teorema di Fermat si toglie l'ipotesi che il punto estremante locale sia nell'interno di I, allora viene a cadere la tesi.

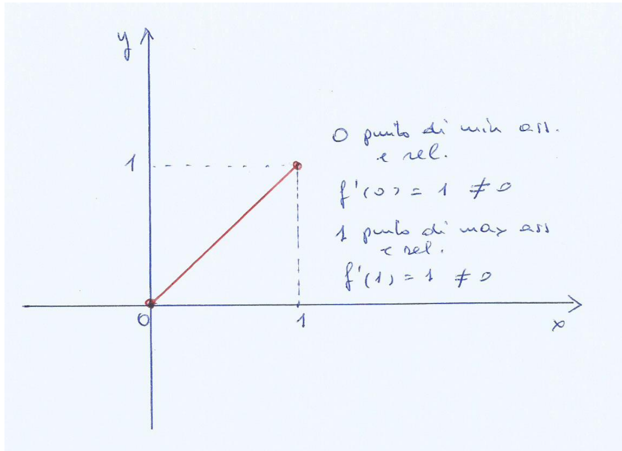


Figura 4. Nel Teorema di Fermat x_0 non può essere agli estremi di I

1.4. Altre condizioni necessarie/sufficienti per gli estremanti locali

Le condizioni sufficienti di ordine zero per gli estremanti locali di funzioni unite alle informazioni fornite dai criteri di monotonia, permettono di ottenere altre condizioni necessarie/sufficienti in termini delle derivate.

Teorema 1.4.1 (Condizioni sufficienti del I ordine per gli estremanti locali). *Siano $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$.*
Sia f continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$.
Se esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ e $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[$, allora x_0 è un punto di minimo locale.
Analogamente, se esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ e $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

DIMOSTRAZIONE. Immediata conseguenza del Teorema 1.2.7 e del Criterio di monotonia (Teorema 1.1.2). □

Teorema 1.4.2 (Condizioni sufficienti del I ordine per gli estremanti locali forti). *Siano $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$.*
Sia f continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$.
Se esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[$, allora x_0 è un punto di minimo locale forte.
Analogamente, se esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0[$ e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[$, allora x_0 è un punto di massimo locale forte.

DIMOSTRAZIONE. Immediata conseguenza del Teorema 1.2.9 e del Criterio di stretta monotonia (Teorema 1.1.4). □

Teorema 1.4.3 (Condizioni sufficienti del II ordine per gli estremanti locali forti). *Siano $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ con f derivabile in I e derivabile due volte in x_0.*
Si hanno le seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ \\ f''(x_0) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x_0 \ \textit{è un punto di minimo locale forte per } f$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ \\ f''(x_0) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x_0 \ \textit{è un un punto di massimo locale forte per } f$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima implicazione, essendo la seconda analoga.
$f' : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, quindi esiste $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continua in x_0, $\varphi(x_0) = f''(x_0)$. tale che

$$f'(x) = f'(x_0) + \varphi(x)(x - x_0) \qquad \forall x \in I.$$

Per ipotesi $f'(x_0) = 0$, quindi

$$f'(x) = \varphi(x)(x - x_0) \qquad \forall x \in I. \tag{1.4.1}$$

Per ipotesi, $\varphi(x_0) = f''(x_0) > 0$, dunque per la continuità di φ esiste $\delta > 0$ tale che $\varphi(x) > 0$ per ogni $x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Da (1.4.1) si ha

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \cap]x_0, -\delta, x_0[\qquad \text{e} \qquad f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \cap]x_0, x_0 + \delta[.$$

Pertanto, per il Teorema 1.4.2, si ha che x_0 è un punto di minimo locale forte. □

Osservazione 1.4.4. In generale:

$$\left\{\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ \\ f''(x_0) \geq 0 \end{array}\right. \quad \not\Rightarrow \quad x_0 \text{ è un punto di minimo locale per } f$$

Ad esempio, se si considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, allora $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ (quindi è anche $f''(0) \geq 0$), ma 0 non è né un punto di minimo né un punto di massimo locale.

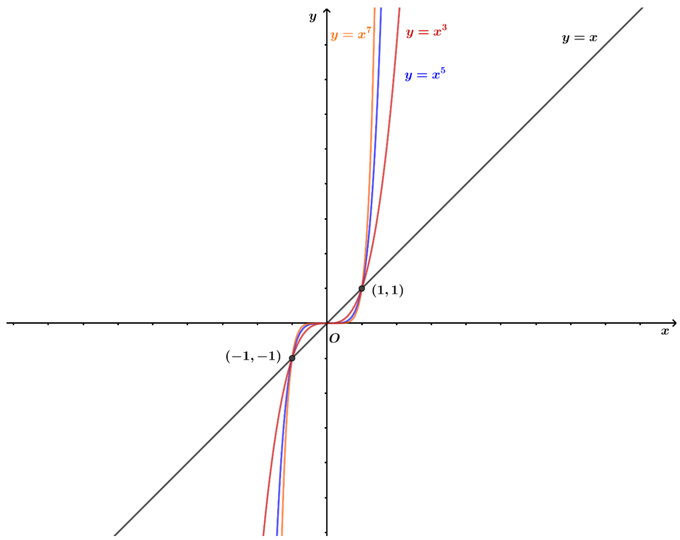


Figura 5. $f(x) = x^{2n+1}$ con $n \geq 3$. $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$ e 0 non è un punto estremante locale

Osservazione 1.4.5. In generale

$$x_0 \text{ è un punto di minimo locale forte per } f \quad \not\Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0. \end{cases}$$

Af esempio, se si considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$, allora 0 è un punto di minimo locale forte, $f'(0) = 0$, ma è falso che sia $f''(0) > 0$.

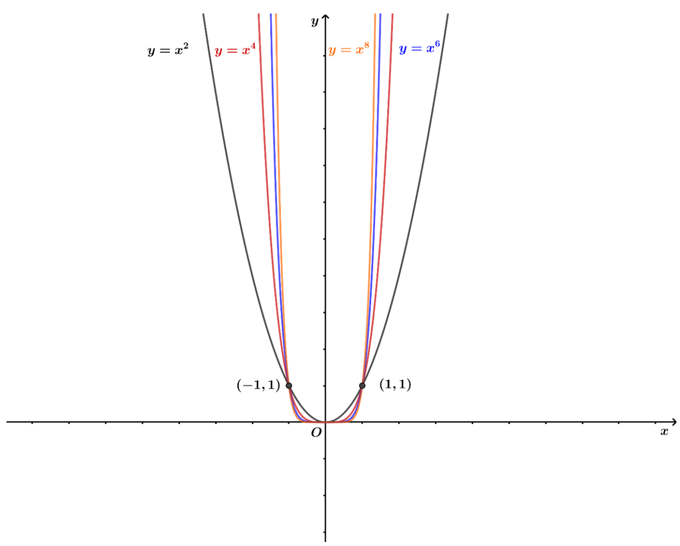


Figura 6. $f(x) = x^4$. 0 è un punto critico e di minimo locale forte, pur essendo $f''(0) = 0$

Per avere una implicazione inversa si deve fare accortezza a indebolire la condizione sulla derivata seconda altrimenti l'affermazione è falsa. Più precisamente vale il seguente risultato.

Teorema 1.4.6 (Condizioni necessarie del II ordine per gli estremanti locali). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in* $\operatorname{int} I$ *e derivabile due volte in $x_0 \in \operatorname{int} I$.*
Si hanno le seguenti:

$$x_0 \textit{ punto di minimo locale per } f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ \\ f''(x_0) \geq 0 \end{cases}$$

$$x_0 \textit{ punto di massimo locale per } f \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ \\ f''(x_0) \leq 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la prima implicazione, essendo la seconda analoga.
Per il Teorema di Fermat (T. 1.3.9), che possiamo usare perché $x_0 \in \operatorname{int} I$, si ha $f'(x_0) = 0$.
Se per assurdo fosse $f''(x_0) < 0$ allora, per il Teorema 1.4.3, x_0 sarebbe un punto di massimo locale forte. Ciò contraddice l'ipotesi che x_0 sia un punto di minimo locale. Dunque deve essere $f''(x_0) \geq 0$. □

CAPITOLO 2

Funzioni convesse

2.1. Significato geometrico di convessità

In modo euristico, diciamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è *convessa* se:

per ogni coppia di punti del grafico, il segmento che li congiunge sta sopra (eventualmente tocca) il grafico di f.

Cerchiamo di esprimere matematicamente questa proprietà.

Lemma 2.1.1. *Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, allora*

$$\begin{aligned}]x_1, x_2[&= \{z \in \mathbb{R} : x_1 < z < x_2\} \\ &= \{x_1 + t(x_2 - x_1) : t \in]0,1[\} \\ &= \{(1-t)x_1 + tx_2 : t \in]0,1[\} \\ &= \{(1-s)x_2 + sx_1 : s \in]0,1[\} \\ &= \{x_2 + s(x_1 - x_2) : s \in]0,1[\}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, allora la funzione $g : [0,1] \to [x_1, x_2]$, $g(t) := x_1 + t(x_2 - x_1)$ è continua e strettamente crescente. Per il Teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo di g e, per la stretta monotonia di g,

$$\min g = g(0) = x_1 < g(x) < \max g = g(1) = x_2 \qquad \forall x \in]x_1, x_2[.$$

Per il Teorema dei valori intermedi $g([x_1, x_2])$ è un intervallo. Dunque

$$g([0,1]) = [x_1, x_2].$$

Inoltre, per la stretta crescenza di g,

$$]x_1, x_2[= [x_1, x_2] \setminus \{x_1, x_2\} = g([0,1]) \setminus \{g(0), g(1)\}$$

da cui

$$]x_1, x_2[= \{x_1 + t(x_2 - x_1) : t \in]0,1[\}.$$

Le altre uguaglianze sono ovvie. □

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$.
Siano P_1 e P_2 i punti del grafico di f aventi rispettivamente ascisse x_1 e x_2.
L'equazione della retta P_1P_2 è

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Sia $x \in]x_1, x_2[$.
Sia Q il punto del segmento congiungente P_1 e P_2 avente ascissa x e sia R il punto del grafico di f avente ascissa x.

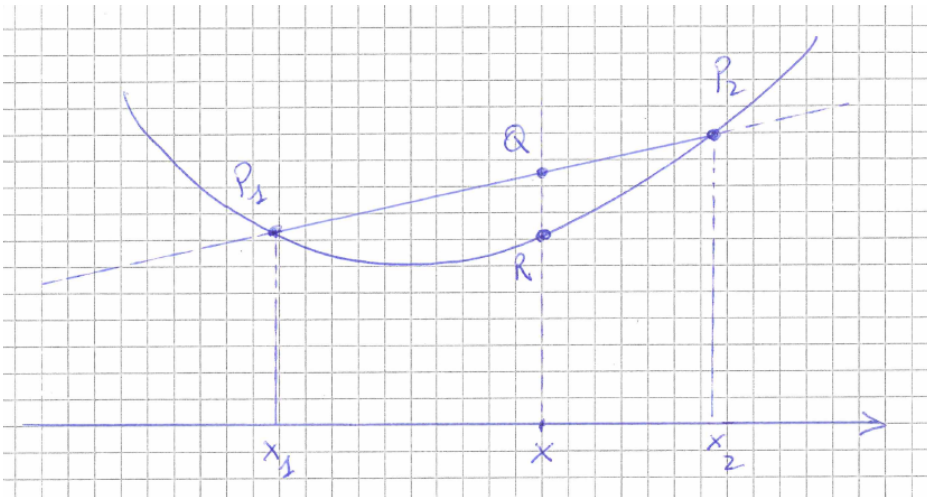


Figura 1. Significato geometrico di funzione convessa

Per il Lemma 2.1.1 esiste $t \in]0,1[$ tale che $x = (1-t)x_1 + tx_2$ e si deduce facilmente che

$$Q = ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)f(x_1) + tf(x_2))$$

$$R = ((1-t)x_1 + tx_2, f((1-t)x_1 + tx_2)).$$

Richiedere che Q stia sopra (o tocchi) P si esprime con la richiesta

$$(1-t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f((1-t)x_1 + tx_2).$$

Notiamo che, ponendo $s = 1-t$ la disuguaglianza diventa

$$(1-s)f(x_2) + sf(x_1) \geq f((1-s)x_2 + sx_1).$$

Siamo pronti per formalizzare la proprietà di convessità di una funzione.

Definizione 2.1.2. Sia $f : I \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f è *convessa* se

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall x, y \in I, \ \ \forall t \in]0,1[. \tag{2.1.1}$$

Diciamo che f è *concava* se

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall x, y \in I, \ \ \forall t \in]0,1[. \tag{2.1.2}$$

Osservazione 2.1.3. Le disuguaglianze (2.1.1) e (2.1.2) sono banalmente soddisfatte se $t = 0$ e $t = 1$.

Dato che f è convessa se e solo se $-f$ è concava è facile adattare risultati su funzioni convesse al caso di funzioni concave. Si lascia quindi al lettore il compito di adattare i prossimi risultati sulle funzioni convesse al caso delle funzioni concave.

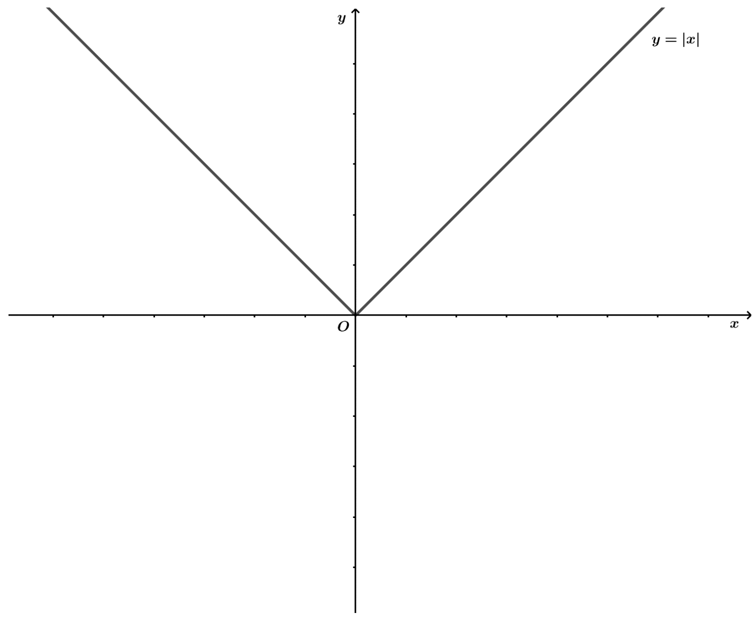


Figura 2. La funzione valore assoluto è convessa.

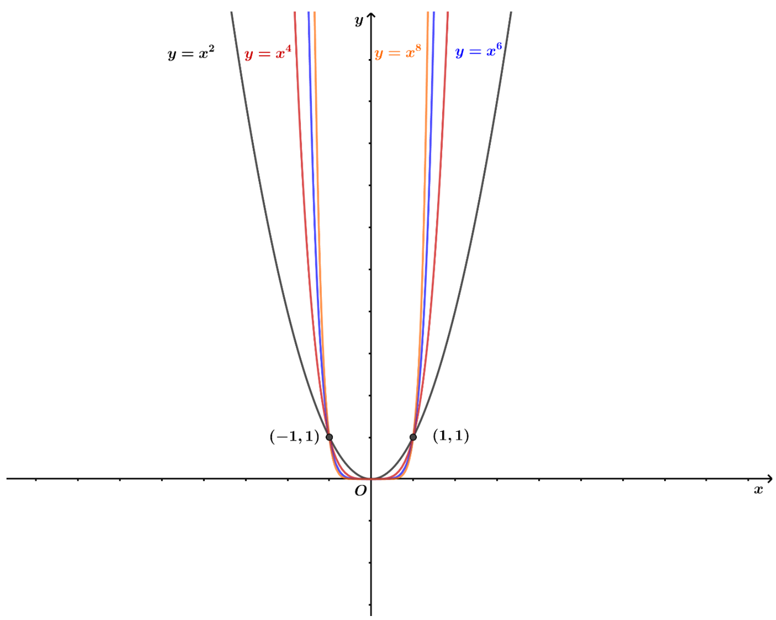


Figura 3. La funzione x^2 è convessa. Lo stesso vale per le funzioni x^n con n pari

La funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = a \\ 1 & \text{se } x \neq a \end{cases}$$

è convessa.

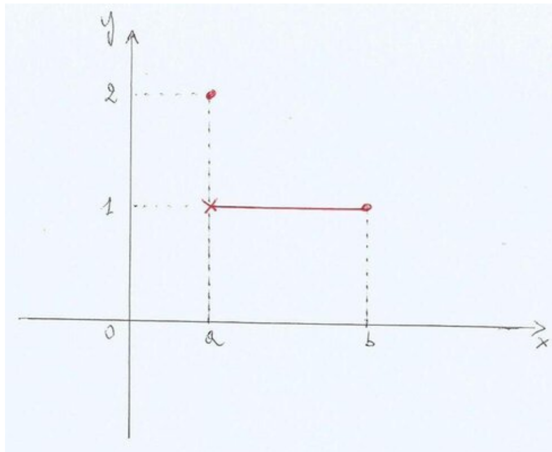


Figura 4. Esempio di funzione convessa e discontinua

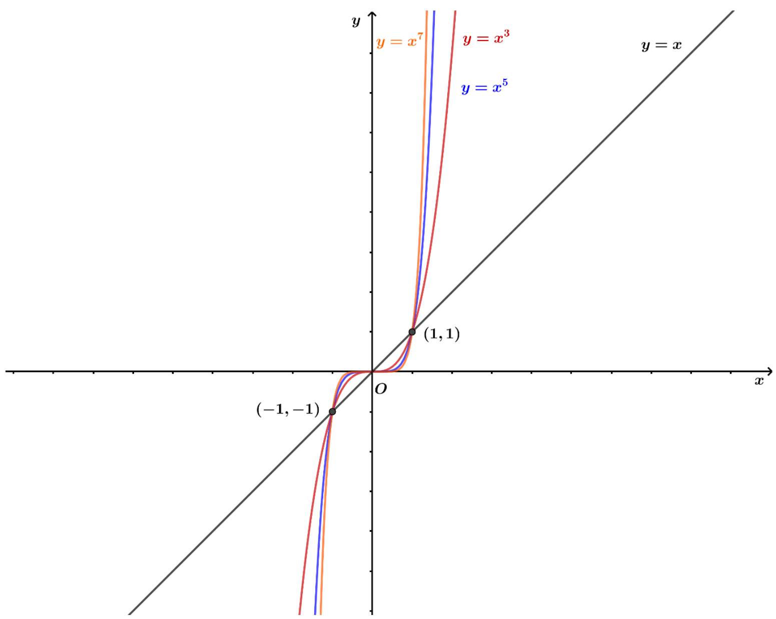


Figura 5. L'identità ($f(x) = x$) è sia convessa che concava. La funzione $f(x) = x^n$, n dispari ≥ 3, è concava in $]-\infty, 0]$ ed è convessa in $[0, +\infty[$.

2.2. Caratterizzazioni del I ordine

Ciò che afferma il prossimo teorema è che una funzione derivabile è convessa se e solo se

ogni retta tangente al grafico di f sta sotto (o tocca) il grafico di f.

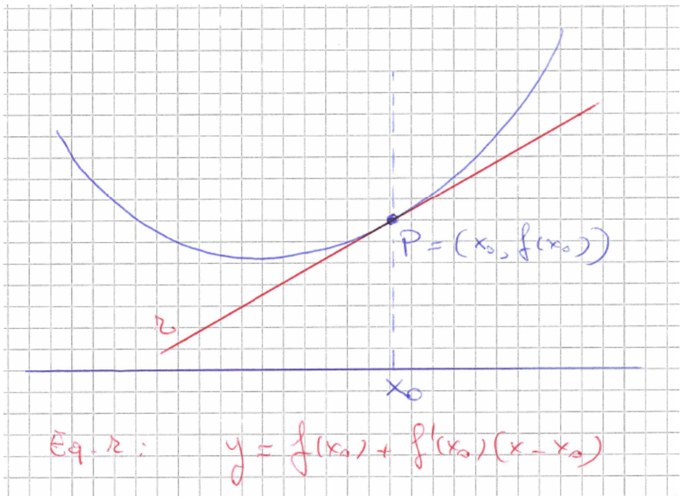


Figura 6. Proprietà geometrica delle funzioni derivabili e convesse

Teorema 2.2.1 (I caratterizzazione del I ordine delle funzioni convesse). *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivabile in* $\operatorname{int} I$. *Allora sono equivalenti:*

(a) f *è convessa*
(b) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in I$ *e* $\forall x_0 \in \operatorname{int} I$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$
Siano $x \in I$ e $x_0 \in \operatorname{int} I$, con $x \neq x_0$. Per definizione di funzione convessa,

$$(1-t)f(x) + tf(x_0) \geq f((1-t)x + tx_0) \qquad \forall t \in]0,1[,$$

o, equivalentemente,

$$sf(x) + (1-s)f(x_0) \geq f(sx + (1-s)x_0) \qquad \forall s \in]0,1[.$$

Sottraendo $f(x_0)$ a primo e secondo membro si ha

$$sf(x) + (1-s-1)f(x_0) \geq f(sx + (1-s)x_0) - f(x_0)$$

da cui, essendo $sx + (1-s)x_0 = x_0 + s(x - x_0)$,

$$s(f(x) - f(x_0)) \geq f(x_0 + s(x - x_0)) - f(x_0).$$

Dividendo per s si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + s(x - x_0)) - f(x_0)}{s}$$

e, moltiplicando e dividendo la frazione a secondo membro per $x - x_0$,

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + s(x - x_0)) - f(x_0)}{s(x - x_0)}(x - x_0).$$

Dato che f è derivabile in x_0 ed essendo $s(x-x_0) \to 0$ per $s \to 0$, per il teorema di cambiamento di variabile nel calcolo dei limiti, si ha

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x_0 + s(x-x_0)) - f(x_0)}{s(x-x_0)}(x-x_0) = f'(x_0).$$

Quindi

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0).$$

Se $x_0 = x$ tale disuguaglianza è banalmente verificata.

$(b) \Rightarrow (a)$
Siano $x, y \in I$, $x \neq y$, e $t \in]0,1[$.
Denotiamo $x_0 := (1-t)x + ty$.
Di certo $x_0 \in \operatorname{int} I$, essendo $\min\{x,y\} < x_0 < \max\{x,y\}$ e $[\min\{x,y\}, \max\{x,y\}] \subseteq I$.
Allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$
$$f(y) \geq f(x_0) + f'(x_0)(y-x_0).$$

Moltiplicando la prima disuguaglianza per $1-t$ e la seconda per t e sommando, abbiamo:

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq (1-t+t)\big(f(x_0) - f'(x_0)x_0\big) + f'(x_0)\big((1-t)x + ty\big)$$

cioè

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)(x_0)$$

ossia

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(x_0).$$

Abbiamo così dimostrato che se $x, y \in I$, $x \neq y$,

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty) \quad \forall t \in]0,1[.$$

Se $x = y$ la disuguaglianza è ovviamente vera.

$\square$

Teorema 2.2.2 (II caratterizzazione del I ordine delle funzioni convesse). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è convessa*
(b) *f' è crescente in* $\operatorname{int} I$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$
Supponiamo f convessa. Dobbiamo dimostrare che se $x, y \in \operatorname{int} I$, $x < y$, allora $f'(x) \leq f'(y)$.
Per Teorema 2.2.1 (implicazione $(a) \Rightarrow (b)$) presi $x, y \in \operatorname{int} I$, $x < y$, si ha

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$
$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y).$$

Sommando membro a membro si ha

$$f(y)+f(x) \geq f(x)+f(y)+(f'(x)-f'(y))(y-x),$$

e quindi

$$0 \geq (f'(x)-f'(y))(y-x).$$

Essendo $y-x>0$, deduciamo che $f'(x)-f'(y) \leq 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$
Supponiamo f' crescente in $\operatorname{int} I$.
Siano $x \in I$, $x_0 \in \operatorname{int} I$, con $x_0 \neq x$ e si consideri l'intervallo chiuso J di estremi x_0 e x, ossia $J=[\min\{x_0,x\},\max\{x_0,x\}]$.
Si noti che f è continua in J e derivabile in $\operatorname{int} J$. Per il Teorema di Lagrange applicato a $f: J \to \mathbb{R}$, esiste $\xi \in \operatorname{int} J \subseteq \operatorname{int} I$, tale che

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0). \tag{2.2.1}$$

Se $x>x_0$ allora $x>\xi>x_0$ e quindi per l'ipotesi di crescenza per f' si ha $f'(\xi) \geq f'(x_0)$. Allora (2.2.1) implica

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0).$$

Se $x<x_0$ allora $x<\xi<x_0$ e quindi per l'ipotesi di crescenza per f' si ha $f'(\xi) \leq f'(x_0)$. Allora (2.2.1) implica

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \qquad \forall x \in I,\ \forall x_0 \in \operatorname{int} I.$$

Per il Teorema 2.2.1 (implicazione $(b) \Rightarrow (a)$), f è convessa. □

Osservazione 2.2.3. Nella dimostrazione $(a) \Rightarrow (b)$ del Teorema 2.2.2 non si è usata la continuità di f in $I \setminus \operatorname{int} I$.

2.3. Caratterizzazioni del II ordine

Teorema 2.3.1 (Caratterizzazione del II ordine delle funzioni convesse). *Sia $f: I \to \mathbb{R}$, con f continua in I e f derivabile due volte in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è convessa*
(b) *f' è crescente in* $\operatorname{int} I$*,*
(c) $f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in \operatorname{int} I$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Leftrightarrow (b)$
E' ovvia conseguenza del Teorema 2.2.2.

$(b) \Leftrightarrow (c)$
f' è derivabile (quindi anche continua) in $\operatorname{int} I$. Per il criterio di monotonia (Teorema 1.1.2) applicato a $f': \operatorname{int} I \to \mathbb{R}$, si ha che f' è crescente in $\operatorname{int} I$ se e solo se $f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in \operatorname{int} I$.

□

Corollario 2.3.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con f derivabile due volte in I.*
Allora sono equivalenti:

(a) *f è convessa*
(b) *f' è crescente in I,*
(c) *$f''(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \operatorname{int} I$.*

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Leftrightarrow (c)$
Si deduce dall'equivalenza $(a) \Leftrightarrow (c)$ nel Teorema 2.3.1.

$(b) \Leftrightarrow (c)$
Si deduce dal criterio di monotonia (Teorema 1.1.2) applicato alla funzione derivabile $f' : I \to \mathbb{R}$. □

2.4. Regolarità delle funzioni convesse

Una funzione convessa $f : I \to \mathbb{R}$ può essere discontinua solo agli estremi dell'intervallo. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 2.4.1 (Continuità delle funzioni convesse). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se f è convessa allora f è continua in* $\operatorname{int} I$. *Inoltre, per ogni $x_0 \in \operatorname{int} I$ esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$.*

Per dimostrarlo possiamo usare il seguente lemma:

Lemma 2.4.2. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$.*
Siano $x_0 \in \operatorname{int} I$ e sia $g : \operatorname{int} I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

Se f è convessa allora g è crescente.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.4.1. Sia $x_0 \in \operatorname{int} I$.
Siano $x_1, x_2 \in \operatorname{int} I$, con $x_1 < x_0 < x_2$. Per il Lemma 2.4.2 la funzione

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{è crescente in } [x_1, x_2] \setminus \{x_0\}$$

quindi

$$\ell_1 := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} =: \ell_2 \qquad \forall x \in [x_1, x_2] \setminus \{x_0\}$$

ed esistono esistono i seguenti limiti

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Per il Teorema del confronto, risulta

$$\ell_1 \leq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \ell_2$$

da cui l'esistenza delle derivate destra e sinistra di f in x_0.

Dimostriamo ora la continuità di f in x_0.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0).$$

L'ultimo limite è zero, in quanto limite del prodotto di una funzione limitata in $[x_1,x_2]\setminus\{x_0\}$ ($\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in[\ell_1,\ell_2]$) per una infinitesima $(x-x_0)$. Si è dunque dimostrato che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Per completezza diamo qui la dimostrazione del Lemma 2.4.2.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 2.4.2. Sia $x_0 \in \operatorname{int} I$. Sia P_0 il punto del grafico di f avente ascissa x_0. La tesi segue se dimostriamo che, presi $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2 \in \operatorname{int} I$ si hanno le tre implicazioni:

$$x_0<x_1<x_2 \quad\Rightarrow\quad g(x_1)\le g(x_2),$$

$$y_1<y_2<x_0 \quad\Rightarrow\quad g(y_1)\le g(y_2),$$

$$z_1<x_0<z_2 \quad\Rightarrow\quad g(z_1)\le g(z_2).$$

Consideriamo $x_1,x_2 \in \operatorname{int} I$, $x_0<x_1<x_2$ e dimostriamo che $g(x_1)\le g(x_2)$.

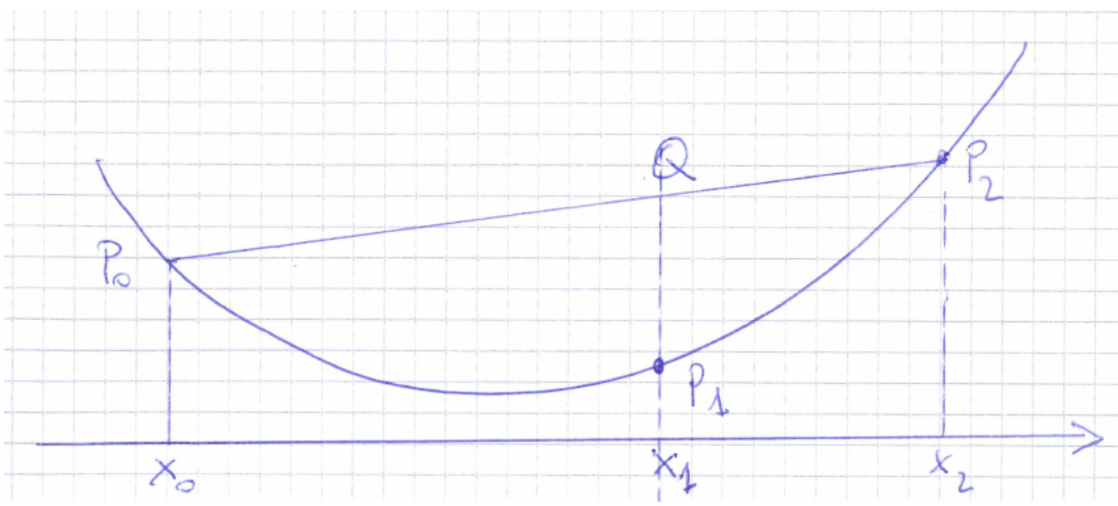


Figura 7. Il caso $x_0<x_1<x_2$

Come in figura 7, sia P_1 il punto del grafico di f avente ascissa x_1 e P_2 il punto del grafico di f avente ascissa x_2. La retta passante per P_0 e P_2 ha equazione

$$y = f(x_0)+\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x-x_0),$$

quindi il punto Q del segmento congiungente P_0 e P_2 e avente ascissa x_1 è il punto

$$Q=\left(x_1, f(x_0)+\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x_1-x_0)\right).$$

Dalla convessità di f, l'ordinata di Q è maggiore o uguale della ordinata di P_1, cioè:

$$f(x_0) + \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}(x_1 - x_0) \geq f(x_1)$$

da cui

$$g(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = g(x_2),$$

che è quanto si voleva dimostrare.
Il significato geometrico di questa disuguaglianza è:

[v. fig.7]: coeff. angolare retta P_0P_1 $\leq$ coeff. angolare retta P_0P_2.

Consideriamo ora $y_1, y_2 \in \operatorname{int} I$, $y_1 < y_2 < x_0$ e dimostriamo che $g(y_1) \leq g(y_2)$. Come in figura (8), sia P_1 il punto del grafico di f avente ascissa y_1 e P_2 il punto del grafico di f avente ascissa y_2. La retta passante per P_1 e P_0 ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(y_1) - f(x_0)}{y_1 - x_0}(x - x_0),$$

quindi il punto Q del segmento congiungente P_1 e P_0 e avente ascissa y_2 è il punto

$$Q = \left(y_2, f(x_0) + \frac{f(y_1) - f(x_0)}{y_1 - x_0}(y_2 - x_0)\right).$$

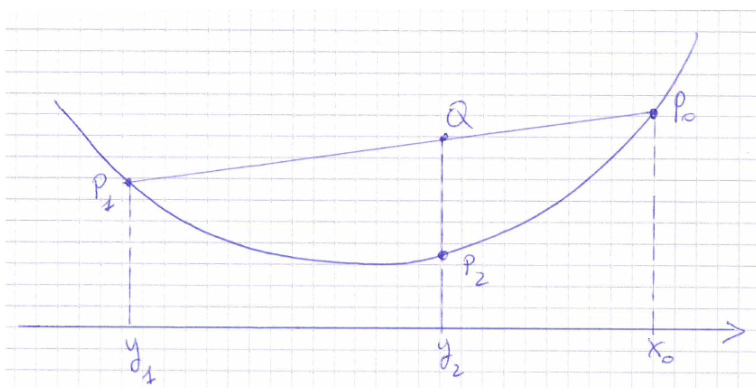


Figura 8. Il caso $y_1 < y_2 < x_0$

Dalla convessità di f, l'ordinata di Q è maggiore o uguale della ordinata di P_2, cioè:

$$f(x_0) + \frac{f(y_1) - f(x_0)}{y_1 - x_0}(y_2 - x_0) \geq f(y_2)$$

da cui

$$\frac{f(y_1) - f(x_0)}{y_1 - x_0}(y_2 - x_0) \geq f(y_2) - f(x_0)$$

e dividendo per $y_2 - x_0$ (che è negativo)

$$g(y_1) = \frac{f(y_1) - f(x_0)}{y_1 - x_0} \leq \frac{f(y_2) - f(x_0)}{y_2 - x_0} = g(y_2),$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Il significato geometrico di questa disuguaglianza è:

$$\text{[v. fig.8]:} \quad \text{coeff. angolare retta } P_1P_0 \le \text{coeff. angolare retta } P_2P_0.$$

Consideriamo ora $z_1, z_2 \in \operatorname{int} I$, $z_1 < x_0 < z_2$ e dimostriamo che $g(z_1) \le g(z_2)$. Come in figura 9, sia P_1 il punto del grafico di f avente ascissa z_1 e P_2 il punto del grafico di f avente ascissa z_2.
La retta passante per P_1 e P_2 ha equazione

$$y = f(z_1) + \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}(x - z_1),$$

quindi il punto R del segmento congiungente P_1 e P_2 e avente ascissa x_0 è il punto

$$R = \left(x_0, f(z_1) + \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}(x_0 - z_1)\right).$$

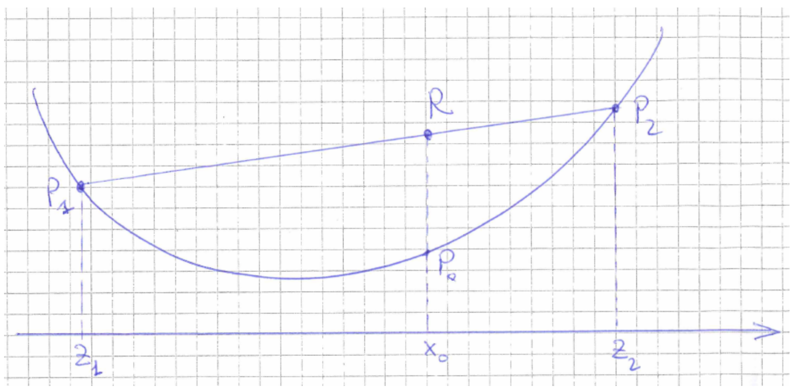


Figura 9. Il caso $z_1 < x_0 < z_2$

Tenuto conto che $z_1 < x_0 < z_2$ e $z_1 \in \operatorname{int} I$, utilizzando quanto dimostrato all'inizio con le seguenti sostituzioni:

$$x_0 := z_1, \quad x_1 := x_0, \quad x_2 := z_2$$

otteniamo:

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \ge \frac{f(x_0) - f(z_1)}{x_0 - z_1}.$$

ossia

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \ge \frac{f(z_1) - f(x_0)}{z_1 - x_0}.$$

Tenuto conto che $z_1 < x_0 < z_2$ e $z_2 \in \operatorname{int} I$, possiamo usare quanto già dimostrato precedentemente, con le seguenti sostituzioni:

$$y_1 := z_1, \quad y_2 := x_0, \quad x_0 := z_2$$

ottenendo così

$$\frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \le \frac{f(x_0) - f(z_2)}{x_0 - z_2}.$$

ossia

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \le \frac{f(z_2) - f(x_0)}{z_2 - x_0}.$$

Abbiamo così la seguente catena di disuguaglianze:

$$g(z_1) = \frac{f(z_1)-f(x_0)}{z_1-x_0} \le \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} \le \frac{f(z_2)-f(x_0)}{z_2-x_0} = g(z_2)$$

da cui $g(z_1) \le g(z_2)$.

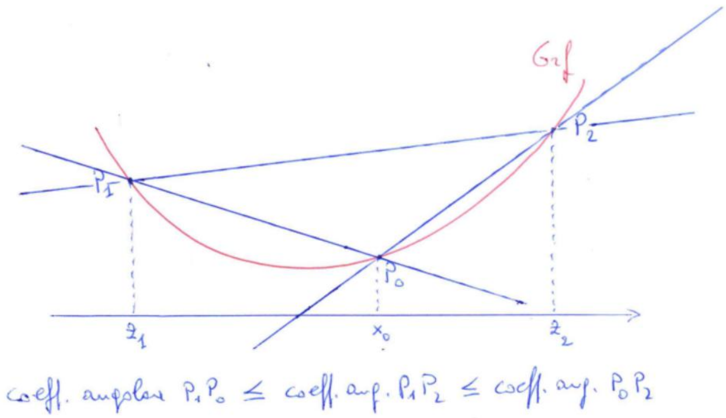


Figura 10. Significato di $\frac{f(z_1)-f(x_0)}{z_1-x_0} \le \frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} \le \frac{f(z_2)-f(x_0)}{z_2-x_0}$

$\square$

Osservazione 2.4.3. La funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x = a \\ 1 & \text{se } x \neq a \end{cases}$$

è convessa, ma è discontinua in a.

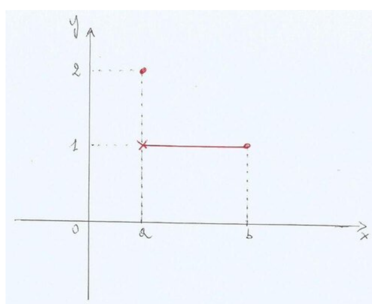


Figura 11. Funzione convessa discontinua in un estremo

Vale di più che la continuità. Ricordiamo la seguente definizione.

Definizione 2.4.4. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$.
Si dice che f è localmente lipschitziana se per ogni intervallo $[a,b] \subseteq \operatorname{int} I$ la restrizione $f|_{[a,b]} : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione lipschitziana.
Ossia: per ogni intervallo $[a,b] \subseteq \operatorname{int} I$ esiste $L(a,b) \ge 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| \le L(a,b)|x - x'| \quad \forall x, x' \in [a,b].$$

Vale il seguente teorema.

Teorema 2.4.5. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se f è convessa, allora f è localmente lipschitziana in* $\operatorname{int} I$.

2.5. Funzioni strettamente convesse

In modo euristico, diciamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è *strettamente convessa* se:

per ogni coppia di punti del grafico P_1 e P_2, il segmento che li congiunge sta sopra il grafico di f, senza toccarlo, eccetto che agli estremi.

Sono esempi di funzioni strettamente convesse: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pari, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = \log_a x$, con $0 < a < 1$

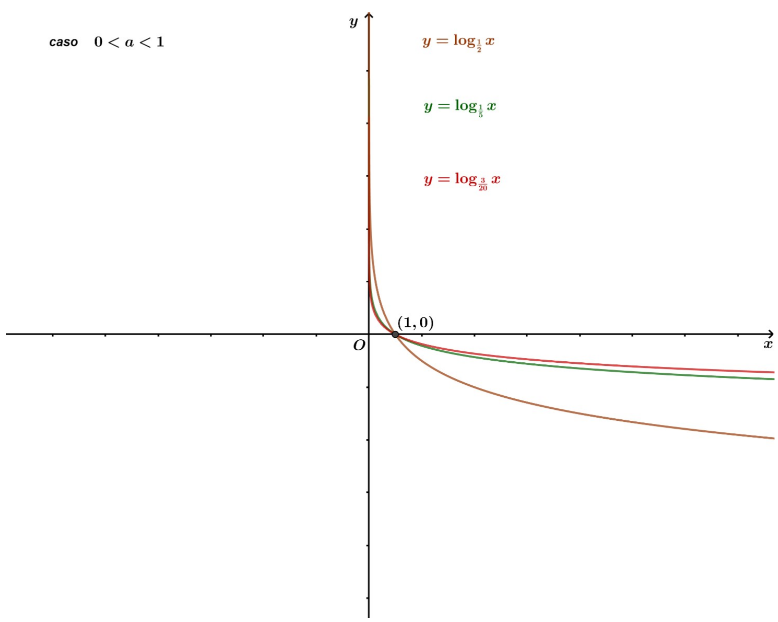


Figura 12. $log_a x$, con $0 < a < 1$ è strettamente convessa

Esempio di funzioni strettamente concava: $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$.

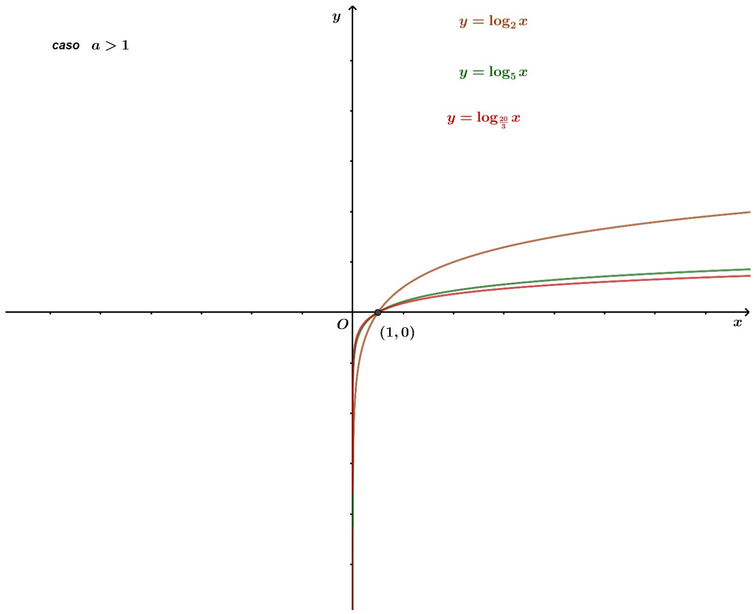


Figura 13. $log_a x$, con $a > 1$ è strettamente concava

Definizione 2.5.1. Sia $f : I \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f è *strettamente convessa* se

$$f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall x, y \in I, x \neq y, \ \forall t \in]0,1[. \tag{2.5.1}$$

Diciamo che f è *strettamente concava* se

$$f((1-t)x + ty) > (1-t)f(x) + tf(y) \qquad \forall x, y \in I, x \neq y, \ \forall t \in]0,1[. \tag{2.5.2}$$

Dato che f è strettamente convessa se e solo se $-f$ è strettamente concava è facile adattare risultati su funzioni strettamente convesse al caso di funzioni strettamente concave.

Teorema 2.5.2 (I caratterizzazione del I ordine delle funzioni strettamente convesse). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è strettamente convessa*
(b) $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ *e* $\forall x_0 \in \operatorname{int} I$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$
Siano $x \in I$ e $x_0 \in \operatorname{int} I$, con $x \neq x_0$. Per definizione di funzione convessa, per ogni $t \in]0,1[$

$$(1-t)f(x) + tf(x_0) > f((1-t)x + tx_0).$$

Sottraendo $f(x_0)$ a primo e secondo membro si ha

$$(1-t)f(x) + (t-1)f(x_0) > f((1-t)x + tx_0) - f(x_0)$$

da cui, essendo $(1-t)x + tx_0 = x_0 + (1-t)(x-x_0)$,

$$(1-t)f(x) > (1-t)f(x_0) + f(x_0 + (1-t)(x-x_0)) - f(x_0).$$

Dividendo per $1-t$ si ha

$$f(x) > f(x_0) + \frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{1-t}$$

e, moltiplicando e dividendo la frazione a secondo membro per $x - x_0$,

$$f(x) > f(x_0) + \frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)}(x-x_0).$$

Sia $x > x_0$. Allora $(1-t)(x-x_0) > 0$. Per il Lemma 2.4.2 e per la derivabilità di f in x_0

$$\frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)} \geq \lim_{t\to 1} \frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)} = f'(x_0) \quad \text{se } x > x_0,$$

quindi

$$f(x) > f(x_0) + \frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)}(x-x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \qquad \text{se } x > x_0.$$

Sia $x < x_0$, ossia $x - x_0 < 0$. Si ha

$$\frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)} = \frac{f(x_0) - f(x_0+(1-t)(x-x_0))}{0-(1-t)(x-x_0)} = \frac{f(x_0) - f(x_0+(1-t)(x-x_0))}{x_0 - (x_0+(1-t)(x-x_0))}.$$

Essendo

$$[0,1] \ni t \mapsto x_0 + (1-t)(x-x_0) =: y(t) \quad \text{funzione crescente}$$

e, per il Lemma 2.4.2,

$$\operatorname{int} I \cap]-\infty, x_0[\ni y \mapsto \frac{f(x_0) - f(y)}{x_0 - y} = g(y) \quad \text{funzione crescente}$$

allora

$$[0,1] \ni t \mapsto g(y(t)) = \frac{f(x_0) - f(x_0+(1-t)(x-x_0))}{x_0 - (x_0+(1-t)(x-x_0))} = \frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)} \quad \text{è funzione crescente}$$

in quanto composizione di funzioni crescenti. Quindi

$$g(y(t)) \leq \lim_{t\to 1} g(y(t))$$

ossia

$$\frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)} = g(y(t)) \leq \lim_{t\to 1} g(y(t))$$
$$= \lim_{t\to 1} \frac{f(x_0) - f(x_0+(1-t)(x-x_0))}{x_0 - (x_0+(1-t)(x-x_0))} = f'_-(x_0) = f'(x_0) \qquad \text{se } x < x_0.$$

Allora, essendo $x - x_0 < 0$,

$$\frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)}(x-x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{se } x < x_0,$$

e quindi

$$f(x) > f(x_0) + \frac{f(x_0+(1-t)(x-x_0)) - f(x_0)}{(1-t)(x-x_0)}(x-x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \text{se } x < x_0.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{se } x \neq x_0.$$

$(b) \Rightarrow (a)$
Siano $x, y \in I$, $x \neq y$, e $t \in]0,1[$.
Denotiamo $x_0 := (1-t)x + ty$.
Di certo $x_0 \in \operatorname{int} I$, essendo $\min\{x,y\} < x_0 < \max\{x,y\}$ e $[\min\{x,y\}, \max\{x,y\}] \subseteq I$.
Allora

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$f(y) > f(x_0) + f'(x_0)(y - x_0).$$

Moltiplicando la prima disuguaglianza per $1-t$ e la seconda per t e sommando, abbiamo:

$$(1-t)f(x) + tf(y) > (1-t+t)\big(f(x_0) - f'(x_0)x_0\big) + f'(x_0)\big((1-t)x + ty\big)$$

cioè

$$(1-t)f(x) + tf(y) > f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)(x_0)$$

ossia

$$(1-t)f(x) + tf(y) > f(x_0).$$

Abbiamo così dimostrato che se $x, y \in I$, $x \neq y$,

$$(1-t)f(x) + tf(y) > f((1-t)x + ty) \quad \forall t \in]0,1[.$$

$\square$

Teorema 2.5.3 (II caratterizzazione del I ordine delle funzioni strettamente convesse). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è strettamente convessa*
(b) *f' è strettamente crescente in* $\operatorname{int} I$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$
Supponiamo f strettamente convessa. Dobbiamo dimostrare che se $x, y \in \operatorname{int} I$, $x < y$, allora $f'(x) < f'(y)$.
Per Teorema 2.5.2 (implicazione $(a) \Rightarrow (b)$) presi $x, y \in \operatorname{int} I$, $x < y$, si ha

$$f(y) > f(x) + f'(x)(y - x)$$
$$f(x) > f(y) + f'(y)(x - y).$$

Sommando membro a membro si ha

$$f(y) + f(x) > f(x) + f(y) + (f'(x) - f'(y))(y - x),$$

e quindi

$$0 > (f'(x) - f'(y))(y - x).$$

Essendo $y - x > 0$, deduciamo che $f'(x) - f'(y) < 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$
Supponiamo f' strettamente crescente in $\operatorname{int} I$.
Siano $x \in I$, $x_0 \in \operatorname{int} I$, con $x_0 \neq x$ e si consideri l'intervallo chiuso J di estremi x_0 e x, ossia $J = [\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\}]$.
Si noti che f è continua in J e derivabile in $\operatorname{int} J$. Per il Teorema di Lagrange applicato a $f : J \to \mathbb{R}$, esiste $\xi \in \operatorname{int} J \subseteq \operatorname{int} I$, tale che

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0). \tag{2.5.3}$$

Se $x > x_0$ allora $x > \xi > x_0$ e quindi per l'ipotesi di stretta crescenza di f' si ha $f'(\xi) > f'(x_0)$. Allora (2.5.3) implica

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0).$$

Se $x < x_0$ allora $x < \xi < x_0$ e quindi per l'ipotesi di stretta crescenza di f' si ha $f'(\xi) < f'(x_0)$. Allora (2.5.3) implica

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ \ \forall x_0 \in \operatorname{int} I.$$

Per il Teorema 2.5.2 (implicazione $(b) \Rightarrow (a)$), f è strettamente convessa. □

Osservazione 2.5.4. Nella dimostrazione $(a) \Rightarrow (b)$ del Teorema 2.5.3 non si è usata la continuità di f in $I \setminus \operatorname{int} I$.

Teorema 2.5.5 (Caratterizzazione del II ordine delle funzioni strettamente convesse). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con f continua in I e f derivabile due volte in* $\operatorname{int} I$.
Allora sono equivalenti:

(a) *f è strettamente convessa*
(b) *f' è strettamente crescente in* $\operatorname{int} I$*,*
(c) $f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in \operatorname{int} I$ *e* $\operatorname{int}\{x \in \operatorname{int} I : f''(x) = 0\} = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Leftrightarrow (b)$
E' ovvia conseguenza del Teorema 2.5.3.

$(b) \Leftrightarrow (c)$
f' è derivabile (quindi anche continua) in $\operatorname{int} I$. Per il criterio di stretta monotonia (Teorema 1.1.4) applicato a $f' : \operatorname{int} I \to \mathbb{R}$, si ha che f' è strettamente crescente in $\operatorname{int} I$ se e solo se $f''(x) \geq 0\ \ \forall x \in \operatorname{int} I$ e

$$\operatorname{int}\{x \in \operatorname{int} : f''(x) = 0\} = \emptyset.$$

□

Corollario 2.5.6 (Condizione sufficiente del II ordine per le funzioni strettamente convesse). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con f continua in I e f derivabile due volte in* $\operatorname{int} I$.
Se $f''(x) > 0\ \ \forall x \in \operatorname{int} I$ allora f è strettamente convessa.

DIMOSTRAZIONE.
Se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in \operatorname{int} I$ allora vale (c) del Teorema 2.5.5, la quale implica (a) del Teorema 2.5.5, ossia f è strettamente convessa. $\square$

CAPITOLO 3

Numeri complessi

3.1. Definizione e piano di Gauss

In $\mathbb{R}$ non c'è soluzione dell'equazione $x^2+1=0$.
Proviamo a estendere i numeri reali, introducendo un simbolo i, con la proprietà

$$i^2=-1.$$

Formalizziamo.

Definizione 3.1.1. Si chiama *unità immaginaria* il simbolo i. Si assume la seguente proprietà:

$$i^2=-1.$$

Definizione 3.1.2. Si chiama *numero complesso* un numero della forma

$$a+ib$$

dove $a,b\in\mathbb{R}$ e i è l'unità immaginaria.

Definizione 3.1.3. L'insieme dei numeri complessi è denotato $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}:=\{a+ib\,:\,a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Definizione 3.1.4. Sia $z:=a+ib\in\mathbb{C}$, con $a,b\in\mathbb{R}$.
Diciamo che a è la *parte reale* di z e b è la *parte immaginaria* di z e scriviamo

$$\mathrm{Re}z:=a,\qquad \mathrm{Im}z:=b. \tag{3.1.1}$$

Dunque

$$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z.$$

Proposizione 3.1.5. *L'applicazione*

$$F:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2\qquad F(a+ib):=(a,b)$$

è biunivoca.[1]

DIMOSTRAZIONE. E' di immediata verifica. □

[1] $\mathbb{R}^2:=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Grazie all'applicazione F e alla corrispondenza tra coppie di numeri reali e punti di un piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano, a ogni numero complesso è possibile far corrispondere in modo unico un punto di un piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano, e viceversa.
Il piano su cui rappresentiamo i numeri complessi prende il nome di *piano di Gauss*. L'ascissa del riferimento cartesiano viene detta *asse reale* e i suoi punti rappresentano le parti reali dei numeri complessi, l'ordinata del riferimento cartesiano viene detta *asse immaginario* e i suoi punti rappresentano le parti immaginarie dei numeri complessi. L'origine degli assi corrisponde al numero complesso $0+i0$.

Osservazione 3.1.6. I numeri reali possono essere identificati coi numeri complessi aventi parte immaginaria nulla nel seguente modo: $a \in \mathbb{R}$ è identificato col numero complesso $a+i0$. Dunque

$$\mathbb{R} \equiv \{a+i0 : a \in \mathbb{R}\}.$$

Mediante l'identificazione di $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ stabilita da F, si ha

$$a \equiv a+i0 \equiv (a,0) \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dunque sul piano di Gauss i numeri reali sono rappresentati da tutti e soli i punti dell'asse reale.

Osservazione 3.1.7. Se $b \in \mathbb{R}$, si usa scrivere ib anziché $0+ib$. Questi si dicono numeri *immaginari*. Mediante l'identificazione di $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ stabilita da F, si ha

$$ib \equiv 0+ib \equiv (0,b) \qquad \forall b \in \mathbb{R}.$$

Dunque sul piano di Gauss i numeri immaginari sono rappresentati da tutti e soli i punti dell'asse immaginario .

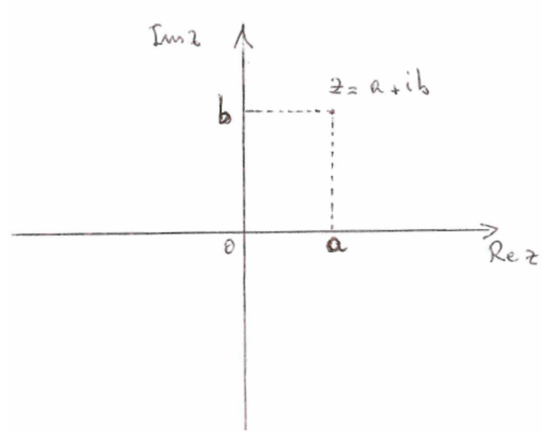


Figura 1. Piano di Gauss

3.2. Somma e prodotto

Applicando formalmente le proprietà commutativa e associativa della somma e del prodotto e la proprietà distributiva di $\mathbb{R}$ a cui siamo abituati, usando il calcolo letterale formalmente otteniamo:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd = ac+i(ad+bc)-bd = (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Ciò suggerisce la seguente definizione.

Definizione 3.2.1. In $\mathbb{C}$ si definiscono due operazioni binarie dette somma e un prodotto.
Per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si pone

$$(a+ib)+(c+id) := (a+c)+i(b+d),$$
$$(a+ib)\cdot(c+id) := (ac-bd)+i(ad+bc).$$

Proposizione 3.2.2. *La somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ estendono le analoghe operazioni definite in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.*

DIMOSTRAZIONE. Facendo riferimento all'Osservazione 3.1.6, la tesi segue per il fatto che per ogni $a, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$(a+i0)+(c+i0) = (a+c)+i0$$

e

$$(a+i0)\cdot(c+i0) = (ac-0)+i(a0+0c) = ac+i0.$$

□

L'applicazione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $F(a+ib) := (a,b)$ precedentemente definita, suggerisce di definire in $\mathbb{R}^2$ delle operazioni di somma e di prodotto, in modo coerente con quelle appena definite in $\mathbb{C}$.

Definizione 3.2.3. In $\mathbb{R}^2$ si definiscono due operazioni binarie dette somma e prodotto, nel seguente modo:

$$(a,b)\oplus(c,d) := (a+c, b+d), \qquad (a,b)\odot(c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

Proposizione 3.2.4. *L'applicazione $F : (\mathbb{C}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$, $F(a+ib) := (a,b)$, gode delle seguenti proprietà:*

$$F(z+w) = F(z)\oplus F(w) \qquad e \qquad F(z\cdot w) = F(z)\odot F(w) \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

DIMOSTRAZIONE. In virtù delle Definizioni 3.2.1 e 3.2.3, la tesi è di immediata verifica. □

Osservazione 3.2.5. Si usa identificare l'insieme dei numeri complessi $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$.

Osservazione 3.2.6. Il numero complesso ottenuto sommando i numeri complessi $a+ib$ e $c+id$ sul piano di Gauss è legato ai punti corrispondenti a $a+ib$ e $c+id$ mediante la regola del parallelogramma:

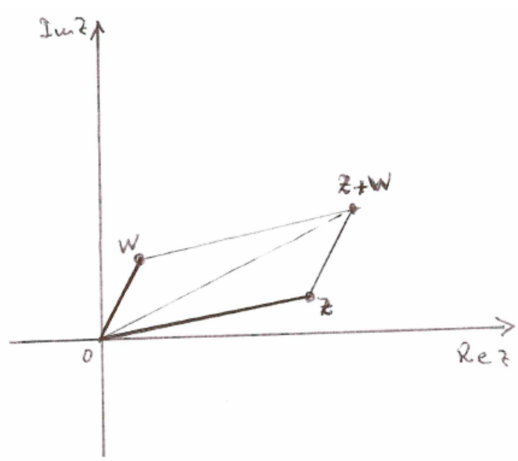


Figura 2. Somma di numeri complessi: la regola del parallelogramma

Per il significato geometrico del prodotto di due numeri complessi, facciamo riferimento alla figura 8.
Esaminiamo le proprietà delle operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{C}$.

Teorema 3.2.7. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *è un campo.*
In particolare, valgono le seguenti.
L'elemento neutro della somma è $0+i0$ *(denotato semplicemente* 0*) e l'elemento neutro della moltiplicazione è* $1+i0$ *(denotato semplicemente* 1*).*
Se $z=a+ib\in\mathbb{C}$ *allora esiste l'opposto di* z*. Esso è unico ed è*

$$-z=-a+i(-b).$$

Se $z=a+ib\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *allora esiste un suo inverso* $z^{-1}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *tale che* $z\cdot z^{-1}=1+i0\equiv 1$*. Tale numero, che denoteremo anche* $\frac{1}{z}$*, è unico ed è*

$$z^{-1}:=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}. \tag{3.2.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Facciamo la verifica che se $z=a+ib\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, allora $z^{-1}:=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}$ è tale che $zz^{-1}=1+i0$.

$$(a+ib)\Big(\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}\Big)=\frac{a^2-b(-b)}{a^2+b^2}+i\frac{-ab+ab}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}+i0=1+i0$$

Lasciamo per esercizio le altre facili dimostrazioni. □

Esempio 3.2.8. Se $z=i$, allora $z^{-1}=-i$.

Osservazione 3.2.9. Si noti che dal Teorema 3.2.7 si ha, in particolare, $ib=bi$ e $i(-b)=-ib$. Dunque

$$ib=bi,\qquad i(-b)=-ib=-bi.$$

Proposizione 3.2.10. $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *(identificato con l'insieme dei numeri complessi aventi parte immaginaria nulla) è un sottocampo di* $(\mathbb{C},+,\cdot)$*. Inoltre,* $\mathbb{R}$ *è isomorfo a*

$$\{a+i0\,:\,a\in\mathbb{R}\}\equiv\mathbb{R}\times\{0\}.$$

In particolare, se $z=a+i0$*,* $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$*, allora*

$$-z=-a+i0,\qquad z^{-1}=\frac{1}{a}+i0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto alle operazioni di somma e prodotto di numeri complessi.

Dalla formula di opposto di un numero complesso deduciamo che l'opposto di un numero complesso avente parte immaginaria nulla è ancora un numero complesso avente parte immaginaria nulla e, per l'Osservazione 3.2.9, $-(a+i0)=-a+i0$. Ciò significa che anche in $\mathbb{C}$ l'opposto di un numero reale a è il numero reale $-a$.
Dalla formula di inverso di un numero complesso non nullo deduciamo che l'inverso di un numero complesso non nullo avente parte immaginaria nulla è ancora un numero complesso non nullo avente parte

immaginaria nulla. In particolare, se $z = a + i0$ allora $z^{-1} = \frac{1}{a} + i0$. Mediante l'identificazione dei numeri reali con i numeri complessi aventi parte immaginaria nulla ciò significa che l'inverso di un numero reale non nullo a è, anche in $\mathbb{C}$, il numero reale $\frac{1}{a}$.
Le altre proprietà che rendono $\mathbb{C}$ un campo sono a maggior ragione valide se applicate a $\mathbb{R}$. □

3.3. Coniugato e modulo

Definizione 3.3.1. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Si chiama *coniugato* di z il numero complesso

$$\overline{z} := a - ib.$$

Osservazione 3.3.2. Essendo $\mathrm{Re}\overline{z} = \mathrm{Re}z$ e $\mathrm{Im}\overline{z} = -\mathrm{Im}z$. Dunque sul piano di Gauss $\overline{z}$ è il punto simmetrico a quello corrispondente a z rispetto all'asse reale.

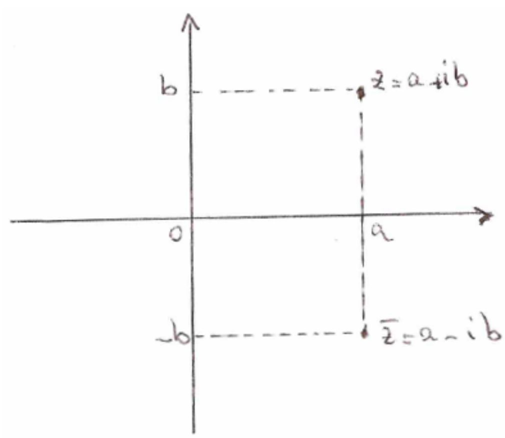


Figura 3. Il coniugato di un numero complesso

Proposizione 3.3.3 (Proprietà del coniugato). *Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Valgono le seguenti:*

(C1) $z = 0$ *se e solo se* $\overline{z} = 0$
(C2) $Rez = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $Imz = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
(C3) $\overline{\overline{z}} = z$
(C4) $\overline{z} = z$ *se e solo se* $Imz = 0$ *(cioè se e solo se* $z \in \mathbb{R}$*)*
(C5) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
(C6) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
(C7) $\overline{(\frac{z}{w})} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *se* $w \neq 0$.
(C8) $z\overline{z} = (Rez)^2 + (Imz)^2$
(C9) $z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo (C6).
Siano $z = a + ib$, $w = c + id$.

$$\overline{zw} = \overline{ac - bd + i(ad + bc)} = ac - bd - i(ad + bc)$$

$$\overline{zw} = (a - ib)(c - id) = ac - (-b)(-d) + i(a(-d) + (-bc)) = ac - bd - i(ad + bc).$$

Lasciamo al lettore le altre dimostrazioni. □

Osserviamo che nell'ultima proprietà del coniugato, appare l'espressione $(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2$ che ha un significato geometrico: sul piano di Gauss è il quadrato della lunghezza del segmento congiungente l'origine e il punto corrispondente al numero complesso z. Ciò porta alla definizione di *modulo* di un numero complesso.

Definizione 3.3.4. Sia $z \in \mathbb{C}$. Si chiama *modulo* di z il numero reale non negativo

$$|z| := \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2}.$$

Osservazione 3.3.5. Sul piano di Gauss $|z|$ è la distanza del punto individuato da z sul piano e l'origine degli assi (corrispondente al numero complesso 0).

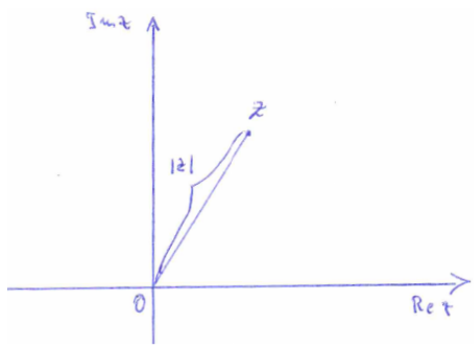


Figura 4. Il modulo di un numero complesso

Proposizione 3.3.6 (Proprietà del modulo). *Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Valgono le seguenti:*

(M1) $|z| \geq 0$
(M2) $|z| = 0$ *se e solo se* $z = 0$
(M3) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
(M4) $|z| = |\overline{z}|$
(M5) $|zw| = |z|\,|w|$
(M6) *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, $|t| = |t + i0|$ *(il primo è un valore assoluto, il secondo è un modulo di numero complesso)*
(M6bis) *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, $|tz| = |t||z|$
(M7) $|Rez| \leq |z|$ *(il primo è un valore assoluto, il secondo è un modulo)*
(M8) $|Imz| \leq |z|$ *(il primo è un valore assoluto, il secondo è un modulo)*
(M9) *(disuguaglianza triangolare)* $|z + w| \leq |z| + |w|$
(M10) $|z| \leq |Rez| + |Imz|$
(M11) *se* $z \neq 0$, *si ha* $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo alcune di queste, essendo le dimostrazioni delle altre proprietà assai elementari.
(M5): Dimostriamo $|zw| = |z|\,|w|$.
Se $z = a + ib$, $w = c + id$, si ha

$$\begin{aligned}
|zw|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \\
&= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 \\
&= (ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 \\
&= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= |z|^2|w|^2.
\end{aligned}$$

(M6): Dimostriamo che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $|t| = |t + i0|$.
Si ha $|t| = \sqrt{t^2} = \sqrt{t^2 + 0^2} = |t + i0|$.
(M6bis): Si ha

$$|tz| \overset{(M5)}{=} |t||z| \overset{(M6)}{=} |t||z| \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

(M9): Dimostriamo la disuguaglianza triangolare. Usando le proprietà del coniugato:

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\
&\overset{(C5)}{=} (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w \\
&\overset{(C3)}{=} |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z}\,\overline{\overline{w}} \\
&\overset{(C6)}{=} |z|^2 + |w|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\
&\overset{(C2)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) \\
&\overset{(M7)}{\leq} |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \\
&\overset{(M5)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| \\
&\overset{(M4)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&= (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

(M11): Dimostriamo che se $z \neq 0$, si ha $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
È una semplice conseguenza di (3.2.1).

□

Osservazione 3.3.7. Si noti che non è necessario memorizzare la formula (M11). Infatti, tenuto conto che $\overline{z} \neq 0$, moltiplicando e dividendo z^{-1} per $\overline{z}$ e usando (M3) si ha $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Esercizio 3.3.8. Siano $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che $|z + w| = |z| + |w|$ se e solo se $w = tz$ con $t \in \mathbb{R}^+$.
Sul piano di Gauss qual è il significato geometrico di tale relazione?

In virtù della Proposizione 3.3.6, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ risulta essere uno spazio vettoriale dotato di di una norma.

Definizione 3.3.9. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale. Una funzione $N : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, si chiama *norma* in $\mathbb{X}$ se ha le seguenti proprietà: per ogni $z, w \in \mathbb{X}$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$

(N1) $N(z) \geq 0$, $N(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$
(N2) $N(tz) = |t|N(z)$
(N3) $N(z+w) \leq N(z) + N(w)$.

Proposizione 3.3.10. *Il campo* $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *è uno spazio vettoriale in* $\mathbb{R}$*, ossia per ogni* $z, w \in \mathbb{C}$ *e per ogni* $s, t \in \mathbb{R}$ *valgono le seguenti:*

(V1) $t(z+w) = tz + tw$
(V2) $(t+s)z = tz + sz$
(V3) $(ts)z = t(sz)$
(V4) $1z = z$.

DIMOSTRAZIONE. Si lascia al lettore la facile verifica delle proprietà (V1)–(V4). □

Teorema 3.3.11. *Sia* $N : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$,

$$N(z) = |z|.$$

Allora N *è una norma dello spazio vettoriale* $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla Proposizione 3.3.6.

□

3.4. Argomento

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideriamo il semiasse reale positivo del piano di Gauss e la semiretta avente origine nell'origine degli assi e passante per il punto individuato sul piano di Gauss da z. Essi sono lati di infiniti angoli, che differiscono tra loro per multipli di angoli giri.
Le misure in radianti (con le solite convenzioni di verso) di tali angoli si dicono *argomenti* di z.
Formalizziamo.

Lemma 3.4.1. *Se* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *allora il numero* $\frac{z}{|z|}$ *si trova, sul piano di Gauss, sulla circonferenza di centro l'origine e raggio* 1.

DIMOSTRAZIONE. Facendo riferimento alle proprietà elencate nella Proposizione 3.3.6, si ha che per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| \overset{(M6bis)}{=} \left|\frac{1}{|z|}\right| |z| = \frac{1}{|z|}|z| = 1.$$

□

Lemma 3.4.2. *Sia* $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(a) $|w| = 1$
(b) $w = \cos\theta + i\sin\theta$ *con* $\theta \in \mathbb{R}$.

Inoltre, in tal caso,

$$w = \cos\theta + i\sin\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \operatorname{Re} w \\ \\ \sin\theta = \operatorname{Im} w. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$: Sia $w = a + ib$. Essendo $|w| = 1$ allora $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, da cui il punto (a, b) giace sulla circonferenza goniometrica. Dunque esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$a = \cos\theta, \qquad b = \sin\theta.$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

L'equivalenza (3.4.1) è ovvia. □

I Lemmi 3.4.1 e 3.4.2 e le uguaglianze

$$\operatorname{Re}\frac{z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \operatorname{Im}\frac{z}{|z|} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

portano alle seguenti definizioni.

Definizione 3.4.3 (Argomento). Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si chiama *argomento* di z ogni numero reale $\theta \in \mathbb{R}$ tale che

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

L'insieme degli argomenti di z si denota $\arg z$:

$$\arg z := \left\{\theta \in \mathbb{R} : \cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|},\ \sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right\}.$$

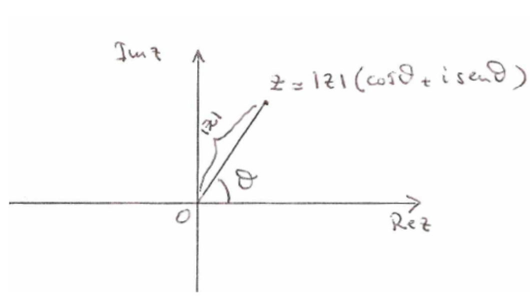


Figura 5. Il modulo e l'argomento di un numero complesso

Segue dalla definizione di *argomento* la seguente proposizione.

Lemma 3.4.4. *Sia* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *L'insieme* $\arg z$ *è non vuoto. Inoltre, se* $\theta \in \arg z$, *allora*

$$\arg z = \{\theta + 2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Che $\arg z$ sia non vuoto segue dal Lemma 3.4.1.
Sia $\theta \in \arg z$. Se $\phi \in \arg z$ allora,

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\phi \\ \sin\theta = \sin\phi \end{cases}$$

che, per la periodicità di 2π delle funzioni cos e sin, è verificata se e solo se

$$\theta = \phi + 2n\pi \text{ con } n \in \mathbb{Z}.$$

□

Definizione 3.4.5 (Argomento principale). Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si chiama *argomento principale* di z l'unico elemento di $\arg z$ che appartiene a $]-\pi, \pi]$.

Osservazione 3.4.6. Che l'argomento principale esista e sia unico è conseguenza immediata del Lemma 3.4.4 e del fatto che l'intervallo $]-\pi, \pi]$ ha ampiezza 2π.

Osservazione 3.4.7. Talvolta l'*argomento principale* viene definito come l'unico elemento di $\arg z$ che appartiene a $[0, 2\pi[$. Si veda in tal caso l'Esercizio 3.4.10.

Proposizione 3.4.8. *Sia* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Allora*

$$\arg z = \{\operatorname{Arg} z + 2n\pi \, : \, n \in \mathbb{Z}\}$$

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza immediata del Lemma 3.4.4, della Definizione 3.4.5. □

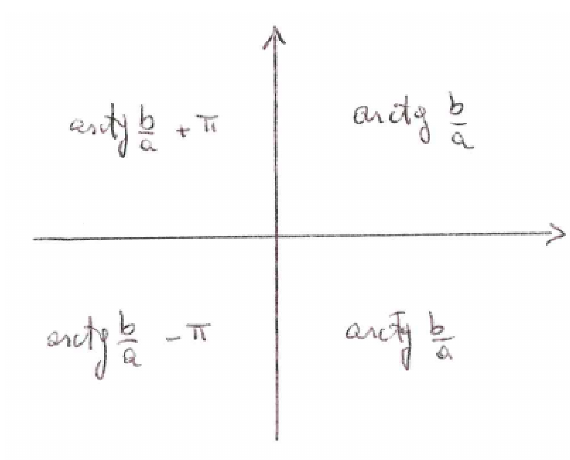


Figura 6. L'argomento principale: il caso $]-\pi, \pi]$.

Teorema 3.4.9. *Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \textit{se } a < 0 \textit{ e } b < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{se } a = 0 \textit{ e } b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \textit{se } a > 0 \textit{ e } b < 0 \\ 0 & \textit{se } a > 0 \textit{ e } b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \textit{se } a > 0 \textit{ e } b > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \textit{se } a = 0 \textit{ e } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \textit{se } a < 0 \textit{ e } b > 0 \\ \pi & \textit{se } a < 0 \textit{ e } b = 0. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.4.8 c'è una unica soluzione in $]-\pi, \pi]$ del sistema

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Dimostriamo che questa soluzione è quella descritta in (3.4.2).
Se $a = 0$ o $b = 0$, basta fare una verifica diretta.
Sia $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Osserviamo che il sistema (3.4.3) è equivalente a uno e uno solo dei seguenti sistemi, a seconda dei segni di a e b:

$$\text{se } a < 0 \text{ e } b < 0: \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \\ \theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

$$\text{se } a > 0 \text{ e } b < 0: \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \\ \theta \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\end{cases}$$

$$\text{se } a > 0 \text{ e } b > 0 \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \\ \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

$$\text{se } a < 0 \text{ e } b > 0 \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \\ \\ \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[. \end{cases}$$

Ciascuno di questi ha una e una sola soluzione, ed essa deve essere anche soluzione di

$$\tan\theta = \frac{b}{a}. \tag{3.4.4}$$

L'unico numero reale $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ soluzione di (3.4.4) è $\theta = \arctan\frac{b}{a}$, l'unico numero reale $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ soluzione di (3.4.4) è $\theta = \arctan\frac{b}{a} + \pi$ e l'unico numero reale $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[$ soluzione di (3.4.4) è $\theta = \arctan\frac{b}{a} - \pi$. Da qui la tesi. □

Esercizio 3.4.10. Dimostrare che se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$, allora esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi[$ soddisfacente (3.4.3). Esso è:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 0 \text{ e } b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > 0 \text{ e } b > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } a = 0 \text{ e } b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b > 0 \\ \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b = 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{se } a < 0 \text{ e } b < 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } a = 0 \text{ e } b < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{se } a > 0 \text{ e } b < 0. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

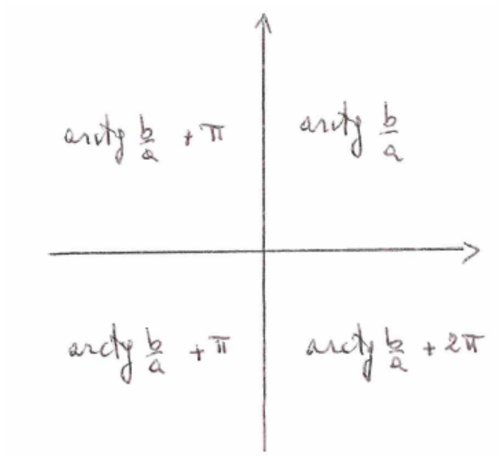


Figura 7. Soluzione di (3.4.3): il caso $[0, 2\pi[$.

3.5. Forma trigonometrica

Definizione 3.5.1. Un numero complesso non nullo si dice espresso in *forma trigonometrica* se è scritto nella forma

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 3.5.2. *Sia z il numero complesso*

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Allora $\rho = |z|$ *e* $\theta \in \arg z$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha $|z| = \rho$, in quanto

$$|z| = |\rho(\cos\theta + i\sin\theta)| = \sqrt{\rho^2((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2)} = \sqrt{\rho^2} = |\rho| = \rho.$$

Dunque $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e quindi, per definizione di argomento, $\theta \in \arg z$. □

Per il Lemma 3.4.1 e il Teorema 3.4.9 vale anche il viceversa della Proposizione 3.5.2: un numero complesso non nullo può essere scritto in forma trigonometrica prendendo $\rho = |z|$ e come θ un suo argomento.

Proposizione 3.5.3. *Siano* $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *con* $\theta \in \arg z$ *e* $\phi \in \arg w$. *Allora*

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \\ \theta = \phi + 2n\pi \quad \textit{con } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha la seguente implicazione:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \cos\theta = \cos\phi \\ \sin\theta = \sin\phi \end{cases}$$

Per la periodicità di 2π delle funzioni cos e sin, l'ultima uguaglianza è verificata se e solo se θ e ϕ differiscono tra loro per multipli di 2π. Da qui la tesi. □

Elenchiamo alcune proprietà riguardanti la forma trigonometrica dei numeri complessi.

Proposizione 3.5.4. *Siano $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = r(\cos\phi + i\sin\phi). \tag{3.5.1}$$

Allora valgono le seguenti:

(A1) $z = w$ *se e solo se* ($\rho = r$ *ed esiste* $n \in \mathbb{Z}$ *tale che* $\theta = \phi + 2n\pi$)
(A2) $\overline{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
(A3) $z^{-1} = \dfrac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
(A4) $zw = \rho r\big(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\big)$
(A5) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\rho}{r}\big(\cos(\theta-\phi) + i\sin(\theta-\phi)\big)$.

DIMOSTRAZIONE.
(A1)
È la Proposizione 3.5.3.
(A2):
Per la Proposizione 3.5.2 è $|z| = \rho$. Da (M3) $|\overline{z}| = |z|$. Dunque $|\overline{z}| = \rho$.
Verifichiamo che $-\theta$ è un argomento di $\overline{z}$.

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow \overline{z} = \rho(\cos\theta + i(-\sin\theta))$$

per la parità della funzione cos e per la disparità della funzione sin si ha

$$\cos\theta = \cos(-\theta), \qquad -\sin\theta = \sin(-\theta).$$

Dunque

$$\overline{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

(A3):
Da (M11) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ e per (M3) $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{\rho}$. Usando (A2) otteniamo (A3).
(A4):
Usando la formula di addizione per il coseno si ha

$$\begin{aligned} zw &= r\rho(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) \\ &= r\rho\big((\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi)\big) \\ &= r\rho\big(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)\big). \end{aligned}$$

(A5):
(A5) è una diretta conseguenza di (A3) e (A4). □

Grazie alla proprietà (A4) è possibile dare una rappresentazione grafica del prodotto di due numeri complessi.

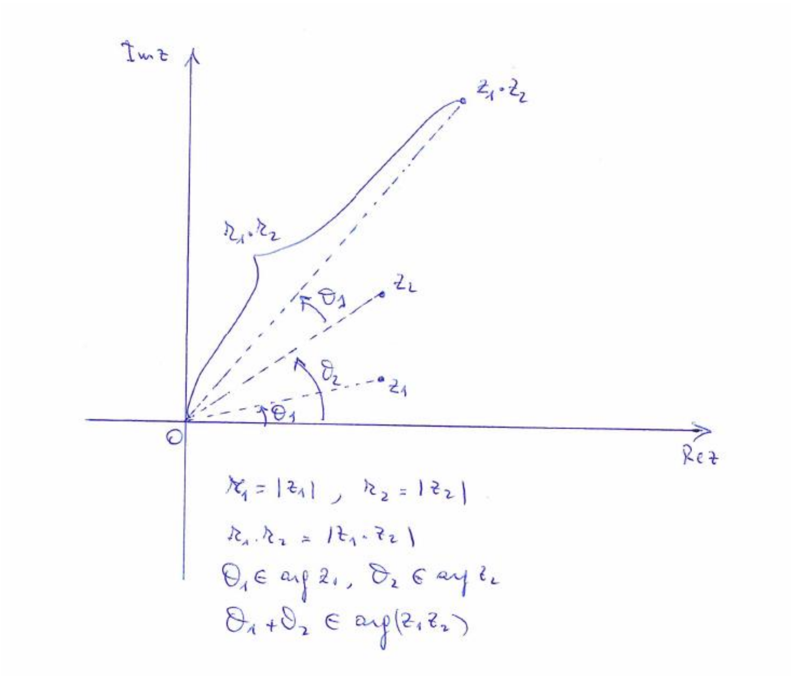


Figura 8. Prodotto di due numeri complessi

3.6. Forma trigonometrica e potenze n-esime

Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Allora la formula

$$\begin{cases} g(0) = 1, \\ g(n+1) = zg(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

definisce la successione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $g(n) = z^n$.
Per definizione, si pone

$$z^{-n} := \left(z^{-1}\right)^n \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Scrivere un numero complesso in forma trigonometrica è vantaggioso per il calcolo delle sue potenze.

Teorema 3.6.1 (Formula di De Moivre). *Sia* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. *Si ha*

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big) \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.6.1}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo la formula (3.6.1) per $n \in \mathbb{N}$ ragionando per induzione.
Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $P(n)$ la proposizione: "$z^n = \rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$".
$P(0)$ è vera per definizione.
Sia vera $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che anche $P(n+1)$ è vera.

$$z^{n+1} = z \cdot z^n = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\rho^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big) \overset{(A4)}{=} \rho^{n+1}\big(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\big).$$

Dunque $P(n+1)$ è vera.

Per dimostrare che la formula in (3.6.1) è vera per ogni $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, usiamo quanto già dimostrato. Dato che $-n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} z^n &:= (z^{-1})^{-n} \overset{(A3)}{=} \left(\frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\right)^{-n} \\ &\overset{-n\in\mathbb{N}+\text{ caso precedente}}{=} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{-n}(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \\ &= \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \end{aligned}$$

□

Segue dal Teorema 3.6.1 la seguente proposizione.

Proposizione 3.6.2. *Siano $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Allora $|z^n| = |z|^n$ e*

$$\arg z^n = \{n\theta : \theta \in \arg z\}.$$

3.7. Forma esponenziale e potenze n-esime

Definizione 3.7.1. Sia $\theta \in \mathbb{R}$. Si pone

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta.$$

Usando questa notazione, si ha un altro modo di scrivere un numero complesso non nullo.

Definizione 3.7.2. Un numero complesso z con forma trigonometrica $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si può scrivere

$$\rho e^{i\theta}.$$

In tal caso si dice che z è scritto in *forma esponenziale*.

Da Definizione 3.7.1, Proposizione 3.5.4 e Teorema 3.6.1 si ha:

Proposizione 3.7.3 (Proprietà dell'esponenziale). *Per ogni $\rho, r > 0$, per ogni $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$, valgono le seguenti:*

- (E1) $|e^{i\theta}| = 1$,
- (E2) $e^{i2n\pi} = 1$
- (E3) $\rho e^{i\theta} \cdot r e^{i\phi} = \rho r e^{i(\theta+\phi)}$
- (E4) $\dfrac{\rho e^{i\theta}}{r e^{i\phi}} = \dfrac{\rho}{r} e^{i(\theta-\phi)}$
- (E5) *(Formula di De Moivre)* $\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$.

Dalla formula (E3) si deduce che l'applicazione $z \mapsto e^{i\theta} z$, letta sul piano di Gauss, agisce come una rotazione (in senso antiorario, se $\theta > 0$, in senso orario se $\theta < 0$), come illustrato in figura 9

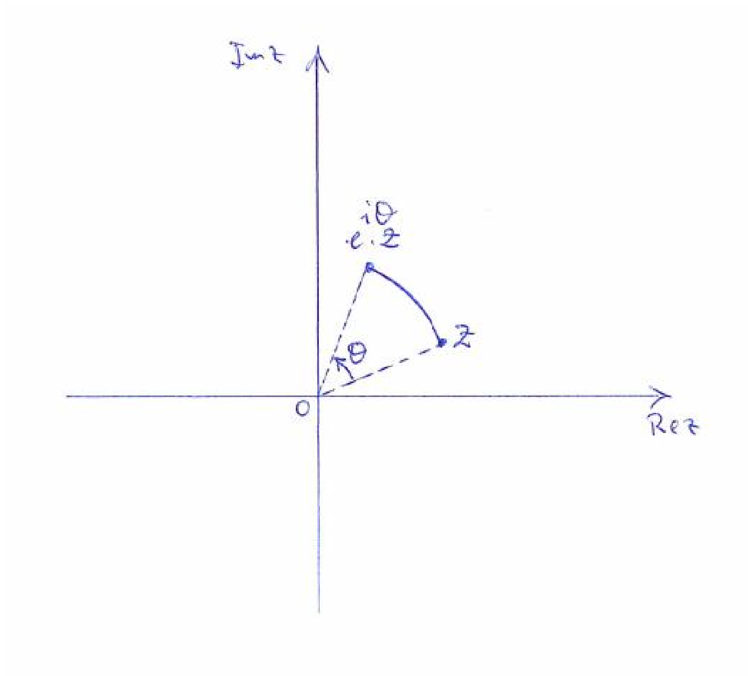


Figura 9. Moltiplicazione di un numero complesso per $e^{i\theta}$ con $\theta > 0$

Osservazione 3.7.4. Si noti che vale anche l'uguaglianza $e^{i\pi} = -1$. Essa si può anche scrivere nella forma più suggestiva:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

in cui appaiono i numeri $0, 1, e, \pi, i$.

Osservazione 3.7.5. Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti formule di facile verifica, note come formule di Eulero:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Esempio 3.7.6. Il numero complesso $-2 + i$ ha modulo

$$|-2 + i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Il numero complesso $-2 + i$ ha parte reale negativa e parte immaginaria positiva. Dunque sul piano complesso il numero $-2 + i$ si trova nel II quadrante. Per il Teorema 3.4.9, si veda anche la figura 6, si ha

$$\operatorname{Arg} z = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi.$$

Dunque

$$-2 + i = \sqrt{5}e^{i\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right)}.$$

Esempio 3.7.7. Il numero complesso $(-2 + i)^1 0$ ha forma esponenziale

$$5^5 e^{10i\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right)}.$$

Ciò segue dall'Esempio 3.7.6, in particolare dal fatto che
$$-2+i=\sqrt{5}e^{i\left(\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi\right)},$$
e dalla formula di De Moivre, Proposizione 3.7.3 (E5).

3.8. Radici n-esime

3.8.1. Definizione e proprietà.

Definizione 3.8.1. Siano $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Diciamo che $z \in \mathbb{C}$ è una *radice n-esima* del numero complesso w se
$$z^n = w.$$
Denotiamo $\sqrt[n]{w}$ l'insieme delle radici n-esime del numero complesso w, cioè:
$$\sqrt[n]{w} := \left\{z \in \mathbb{C} : z^n = w\right\}.$$
Il prossimo teorema dà una precisa descrizione dell'insieme $\sqrt[n]{w}$.

Teorema 3.8.2. *Siano $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Allora l'insieme $\sqrt[n]{w}$ ha n elementi. Inoltre, se $w = \rho e^{i\theta}$ si ha*
$$\sqrt[n]{w} = \left\{\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} : k \in \{0,1,\cdots,n-1\}\right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 3.7.3 si ha che se $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$ allora $\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ è una radice n-esima di w. Infatti
$$\left(\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right)^n \overset{(E5)}{=} \rho e^{in\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} \overset{(E3)}{=} \rho e^{i\theta}e^{i2k\pi} \overset{(E2)}{=} \rho e^{i\theta}.$$
Resta da dimostrare che non ci sono altre radici n-esime oltre a queste.
Sia $z = |z|e^{i\phi}$ una radice n-esima di w. Per la Proposizione 3.6.2
$$|z|^n = |z^n| = |w|.$$
Dato che questa è una uguaglianza tra numeri reali, ne deduciamo
$$|z| = \sqrt[n]{|w|},$$
dove a secondo membro appare l'abituale radice n-esima aritmetica di un numero reale. Allora
$$w = \rho e^{i\theta} \qquad z = \sqrt[n]{\rho}e^{i\phi}.$$
Dato che z è una radice n-esima di w, deve essere $z^n = w$ ossia
$$\rho e^{in\phi} = \rho e^{i\theta}$$
dunque
$$e^{in\phi} = e^{i\theta}.$$
Usando (E4) deduciamo
$$e^{i(n\phi-\theta)} = 1$$
che significa
$$\cos(n\phi-\theta) + i\sin(n\phi-\theta) = 1 + i0$$

e quindi

$$\cos(n\phi - \theta) = 1.$$

Pertanto deve esistere $m \in \mathbb{Z}$ tale che $n\phi - \theta = 2m\pi$, da cui

$$\phi = \frac{\theta + 2m\pi}{n}.$$

Effettuando la divisione del numero intero m per n, deduciamo che esistono $h \in \mathbb{Z}$ e $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ tali che

$$m = hn + k.$$

Allora

$$\phi = \frac{\theta + 2(hn+k)\pi}{n} = \frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2h\pi.$$

Dunque,

$$z = \sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}+2h\pi\right)} \overset{(E3)}{=} \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}e^{i2h\pi} \overset{(E2)}{=} \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

con $k \in \{0, \cdots, n-1\}$.
Osserviamo che i numeri

$$\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \qquad k \in \{0, \cdots, n-1\}$$

sono tutti distinti. Infatti se ci fossero $k, h \in \{0, \cdots, n-1\}$, con $k \neq h$, tali che

$$e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = e^{i\frac{\theta+2h\pi}{n}}$$

allora per la Proposizione 3.5.3 esisterebbe $n' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tale che

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2h\pi}{n} + 2n'\pi.$$

Ciò è assurdo perché

$$\left\{\frac{\theta + 2k\pi}{n} \,:\, k \in \{0, \cdots, n-1\}\right\} \subseteq \left[\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n} + 2\pi\right[,$$

dunque l'insieme a sinistra non può contenere due numeri distinti aventi una differenza che sia un multiplo di 2π. $\square$

Osservazione 3.8.3. Dal Teorema 3.8.2 si ha che le radici n-esime di un numero complesso $w = \rho e^{i\theta}$ corrispondono nel piano di Gauss ai vertici di un poligono regolare di n lati e inscritto in una circonferenza di centro l'origine degli assi e di raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

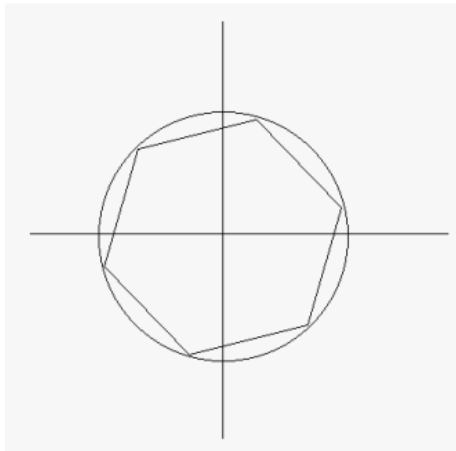


Figura 10. Le radici seste di un numero complesso sono vertici di un esagono regolare

3.8.2. Radici quadrate complesse.

Proposizione 3.8.4. *Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = |z|e^{i\theta}$, con $\rho > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, abbiamo che*

$$\sqrt{z} = \left\{\sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}\right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Da (E3) e dall'Osservazione 3.7.4 si ha

$$e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi} = -e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

Dunque

$$\sqrt{z} = \left\{\sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}, -\sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}\right\}.$$

□

Dunque le radici quadrate di un numero complesso sono due, una l'opposta dell'altra. In particolare, si hanno i seguenti due risultati relativi alle radici quadrate complesse di numeri reali.

Proposizione 3.8.5. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Allora*

$$\sqrt{a} = \{\pm\sqrt{a}\},$$

dove la radice quadrate a primo membro è la radici quadrata complessa e quella a secondo membro è la usuale radice quadrata di un numero reale positivo.

DIMOSTRAZIONE. Il numero reale positivo a è esprimibile nella forma esponenziale come ae^{i0}. Usando la Proposizione 3.8.4 otteniamo:

$$\sqrt{a} = \left\{\sqrt{a}e^{i\frac{0}{2}}, -\sqrt{a}e^{i\frac{0}{2}}\right\} = \left\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\right\},$$

dove la prima radice quadrata è la radice complessa, mentre le altre sono le usuali radici aritmetiche di numeri reali. □

Proposizione 3.8.6. *Sia $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$. Allora*

$$\sqrt{a} = \{\pm i\sqrt{|a|}\},$$

dove la radice quadrate a primo membro è la radici quadrata complessa di a e $\sqrt{|a|}$ indica l'usuale radice quadrata del valore assoluto di a.

DIMOSTRAZIONE. Dato che a è un numero reale negativo, allora $a = -|a|$, che è esprimibile nella forma esponenziale come $|a|e^{i\pi}$. Usando la Proposizione 3.8.4 otteniamo:

$$\sqrt{a} = \left\{\sqrt{|a|}e^{i\frac{\pi}{2}}, -\sqrt{|a|}e^{i\frac{\pi}{2}}\right\} = \left\{i\sqrt{|a|}, -i\sqrt{|a|}\right\},$$

dove la prima radice quadrata è la radice complessa, mentre le altre sono le usuali radici aritmetiche di numeri reali. □

La proprietà descritta nella Proposizione 3.8.4 porta a un abuso di notazione

Osservazione 3.8.7. A differenza di ciò che si fa per $n > 2$, per cui il simbolo $\sqrt[n]{z}$ denota le n radici complesse di z, se $n = 2$ si scrive talvolta $\pm\sqrt{z}$ per indicare le due radici quadrate di z.

3.9. Equazioni algebriche in $\mathbb{C}$

Un'equazione algebrica in $\mathbb{C}$ è un'equazione $P_n(z) = 0$, dove $P_n(z)$ è un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \qquad a_i \in \mathbb{C}, i \in \{0, 1, \cdots, n\}.$$

3.9.1. Equazioni di primo grado.

L'equazione di primo grado in $\mathbb{C}$ è della forma

$$az + b = 0 \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

Essa ha un'unica soluzione in $\mathbb{C}$:

$$z = -\frac{b}{a}.$$

3.9.2. Equazioni di secondo grado.

Tenendo a mente l'Osservazione 3.8.7, possiamo affermare che per risolvere le equazioni di secondo grado a coefficienti complessi

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0,$$

vale la stessa formula nota per le equazioni di secondo grado in $\mathbb{R}$.

Teorema 3.9.1. *Si consideri l'equazione*

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0. \tag{3.9.1}$$

Allora le soluzioni sono tutte e sole

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(con l'abuso di notazione descritto nell'Osservazione 3.8.7).

DIMOSTRAZIONE. Dato che $a \neq 0$ possiamo moliplicare per $4a$ il primo e il secondo membro dell'equazione: Notiamo che

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow 4az^2 + 4ab + 4ac = 0 \Leftrightarrow 4az^2 + 4ab + b^2 - b^2 + 4ac = 0 \Leftrightarrow (2az + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Dunque z è soluzione di (3.9.1) se e solo se $2az + b$ è una radice quadrata di $b^2 - 4ac$. Le due radici quadrate complesse di $b^2 - 4ac$ sono:

$$\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

dove abbiamo usato l'abuso di notazione descritto nella Osservazione 3.8.7. Dunque

$$2az + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$\square$

Esempio 3.9.2. Risolviamo l'equazione $z^2 - 2iz - 1 - 3i = 0$.
Si hanno

$$a = 1, \qquad b = -2i, \qquad c = -1 - 3i.$$

Allora

$$b^2 - 4ac = (-2i)^2 - 4(-1 - 3i) = -4 + 4 + 12i = 12i = 12e^{i\frac{\pi}{2}}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata l'espressione di i in forma esponenziale (si noti che $\operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$).
Dunque, per la Proposizione 3.8.4,

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \left\{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}, -2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}\right\}.$$

Allora le soluzioni dell'equazione sono:

$$z_1 = \frac{2i + 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}, \qquad z_2 = \frac{2i - 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}$$

e, semplificando,

$$z_1 = i + \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad z_2 = i - \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Essendo

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

deduciamo

$$z_1 = i + \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad z_2 = i - \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

e quindi

$$z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right), \qquad z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

3.9.3. Equazioni algebriche in $\mathbb{C}$: caso generale. Un polinomio di grado n in $\mathbb{C}$ nella variabile complessa z è espresso nella forma

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

con $a_i \in \mathbb{C}$ per ogni $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, $a_n \neq 0$. Lo denotiamo $P_n(z)$.
A un polinomio $P_n(z)$ è associato una equazione di grado n in $\mathbb{C}$:

$$P_n(z) = 0.$$

Gli zeri (o radici) del polinomio $P_n(z)$ sono le soluzioni dell'equazione associata e viceversa. La molteplicità di una radice z_0 di $P_n(z)$ è il numero naturale non nullo h tale che

$$P_n(z) = (z - z_0)^h Q(z)$$

dove Q è un polinomio (di grado $n-h$) tale che $Q(z_0) \neq 0$.
Vale il seguente importante risultato.

Teorema 3.9.3 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio $P_n(z)$ ha almeno una radice complessa. Da ciò segue che, $P_n(z)$ ha n radici complesse (se contate con la loro molteplicità).*

Se il polinomio $P_n(z)$ è a coefficienti reali, cioè

$$P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{R} \text{ se } \ i \in \{0, 1, \cdots, n\},\ a_n \neq 0,$$

allora vale la seguente proposizione.

Proposizione 3.9.4. *Sia $P_n(z)$ un polinomio di grado n nella variabile complessa z e a coefficienti reali. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ è uno zero del polinomio, allora anche $\overline{z_0}$ è uno zero. Inoltre, $\overline{z_0}$ ha la stessa molteplicità di z_0.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ uno zero di molteplicità h del polinomio $P_n(z)$, con

$$P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \qquad \text{con } a_i \in \mathbb{R} \text{ se } \ i \in \{0, 1, \cdots, n\}, a_n \neq 0,$$

Dimostriamo che $\overline{z_0}$ è anch'esso uno zero. Passando ai coniugati, come semplice conseguenza della Proposizione 3.3.3, si ha

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} \overset{a_i \in \mathbb{R} + (C4)}{=} a_n \overline{z}^n + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = P_n(\overline{z}).$$

Quindi,

$$P_n(\overline{z_0}) = \overline{P_n(z_0)} = \overline{0} = 0,$$

cioè $\overline{z_0}$ è uno zero di $P_n(z)$.
Se $\mathrm{Im} z_0 = 0$, è ovvio che $\overline{z_0}$ abbia la stessa molteplicità di z_0, dato che z_0 e $\overline{z_0}$ coincidono. Se $\mathrm{Im} z_0 \neq 0$, allora $\overline{z_0} \neq z_0$ e

$$P_n(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0}) Q_{n-2}(z)$$

con $Q_{n-2}(z)$ opportuno polinomio di grado n. Esso è a coefficienti reali. Infatti,

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0}) z + z_0 \overline{z_0} = z^2 - (2\,\mathrm{Re}\, z_0) z + |z_0|^2$$

è un polinomio a coefficienti reali. Essendo $Q_{n-2}(z)$ un polinomio di grado $n-2$ in z, si ha

$$Q_{n-2}(z) = \sum_{j=0}^{n-2} b_j z^j.$$

I coefficienti b_j, potenzialmente in $\mathbb{C}$, sono in realtà in $\mathbb{R}$. Infatti, dall'uguaglianza

$$P_n(z) = (z - z_0)(z - \overline{z_0})Q_{n-2}(z) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \left(z^2 - (2\operatorname{Re} z_0)z + |z_0|^2\right) \cdot \sum_{j=0}^{n-2} b_j z^j,$$

deduciamo le seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$\begin{cases} a_0 = b_0|z_0|^2 \\ a_1 = b_1|z_0|^2 - b_0(2\operatorname{Re} z_0) \\ a_2 = b_2|z_0|^2 - b_1(2\operatorname{Re} z_0) + b_0 \\ a_3 = b_3|z_0|^2 - b_2(2\operatorname{Re} z_0) + b_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} = b_{n-2}|z_0|^2 - b_{n-3}(2\operatorname{Re} z_0) + b_{n-4} \\ a_{n-1} = -b_{n-2}(2\operatorname{Re} z_0) + b_{n-3} \\ a_n = b_{n-2}. \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{|z_0|^2} a_0 \in \mathbb{R} \\ b_1 = \dfrac{1}{|z_0|^2} (a_1 + b_0(2\operatorname{Re} z_0)) \in \mathbb{R} \\ b_2 = \dfrac{1}{|z_0|^2} (a_2 + b_1(2\operatorname{Re} z_0) - b_0) \in \mathbb{R} \\ b_3 = \dfrac{1}{|z_0|^2} (a_3 + b_2(2\operatorname{Re} z_0) - b_1) \in \mathbb{R} \\ \vdots \\ b_{n-2} = \dfrac{1}{|z_0|^2} (a_{n-2} + b_{n-3}(2\operatorname{Re} z_0) - b_{n-4}) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dunque è dimostrato che $Q_{n-2}(z)$ è un polinomio a coefficienti reali.
Se la molteplicità di z_0 è maggiore di 1, allora il polinomio $Q_{n-2}(z)$ ha z_0 come radice e si può iterare l'argomento sopra, applicandolo a $Q_{n-2}(z)$ e così procedendo si otterrà l'esistenza di $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e di un polinomio $S_{n-2h}(z)$ nella variabile z di grado $n-2h$ e a coefficienti reali tale che

$$P_n(z) = (z - z_0)^h (z - \overline{z_0})^h S_{n-2h}(z)$$

e tale che

$$S_{n-2h}(z_0) \neq 0.$$

Ciò porta a concludere che le molteplicità di z_0 e $\overline{z_0}$ sono uguali. □

3.10. Esponenziale complesso

Definizione 3.10.1 (Esponenziale complesso). Sia chiama funzione *esponenziale complessa* la funzione

$$\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp_{\mathbb{C}}(z) := e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z},$$

ossia se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp_{\mathbb{C}}(x + iy) = e^x\left(\cos y + i \sin y\right).$$

Proposizione 3.10.2. *Siano $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Valgono le seguenti:*

(a) $|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = e^{Rez}$
(b) $\exp_{\mathbb{C}}(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
(c) $\exp_{\mathbb{C}}(i2n\pi) = 1$
(d) $\exp_{\mathbb{C}}(z+w) = \exp_{\mathbb{C}}(z)\exp_{\mathbb{C}}(w)$
(e) $\exp_{\mathbb{C}}(z+i2n\pi) = \exp_{\mathbb{C}}(z)$.

DIMOSTRAZIONE. (a):

$$|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = \left|e^{\mathrm{Re}z}e^{i\mathrm{Im}z}\right| = \left|e^{\mathrm{Re}z}\right|\left|e^{i\mathrm{Im}z}\right| \overset{(E1)}{=} \left|e^{\mathrm{Re}z}\right| = e^{\mathrm{Re}z}.$$

(b):
Segue da (a), dato che $e^{\mathrm{Re}z} > 0$.
(c):

$$\exp_{\mathbb{C}}(i2n\pi) = e^0 e^{i2n\pi} \overset{(E2)}{=} 1$$

(d):
Siano $z = x + iy$ e $w = x' + iy'$ le scritture di z e w in forma algebrica. Allora

$$\exp_{\mathbb{C}}(z+w) = e^{(x+x')}e^{i(y+y')} \overset{(E3)}{=} e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = \exp_{\mathbb{C}}(z)\exp_{\mathbb{C}}(w).$$

(e):
Una conseguenza ovvia di (c) e (d). □

Proposizione 3.10.3. *La funzione* $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *non è iniettiva. In particolare, se* $z, w \in \mathbb{C}$ *allora*

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(w) \Leftrightarrow \begin{cases} Rez = Rew \\ Imz = Imw + 2n\pi \quad con\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. La funzione eponenziale non è iniettiva, come risulta da (e) in Proposizione 3.10.2. Più precisamente: se $z, w \in \mathbb{C}$ sono tali che $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(w)$, allora

$$|\exp_{\mathbb{C}}(z)| = |\exp_{\mathbb{C}}(w)| \overset{Prop. 3.10.2(a)}{\Leftrightarrow} |e^{\mathrm{Re}z}| = |e^{\mathrm{Re}w}| \Leftrightarrow e^{\mathrm{Re}z} = e^{\mathrm{Re}w} \Leftrightarrow \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w.$$

Dunque

$$\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(w) \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w \\ e^{i\mathrm{Im}z} = e^{i\mathrm{Im}w} \end{cases} \overset{(A1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w \\ \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}w + 2n\pi \qquad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

□

Teorema 3.10.4. *Sia* $\theta \in \mathbb{R}$. *Si definisca*

$$S(]\theta, \theta + 2\pi]) := \{z \in \mathbb{C} : Imz \in]\theta, \theta + 2\pi]\}.$$

Allora $\exp_{\mathbb{C}} : S(]\theta, \theta + 2\pi]) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *è biunivoca.*

DIMOSTRAZIONE. L'iniettività segue dalla Proposizione 3.10.3.
Dimostriamo la suriettività. Preso $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si consideri $x = \ln|w|$ e come y l'unico elemento di $\arg w$ appartenente all'intervallo $]\theta, \theta + 2\pi]$. Allora

$$\exp_{\mathbb{C}}(x + iy) = e^{\ln|w|}e^{iy} = |w|e^{iy} = w.$$

□

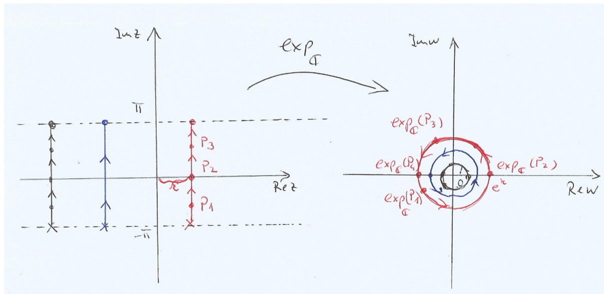


Figura 11. La funzione $\exp_{\mathbb{C}} : S(]-\pi,\pi]) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ manda il segmento verticale costituito dai punti di ascissa r e ordinate in $]-\pi,\pi]$ nella circonferenza del piano di Gauss di centro 0 e raggio $e^r > 0$ Se il segmento a sinistra viene percorso dal basso verso l'alto (l'estremo finale è (r,π)) allora la circonferenza a destra viene percorsa in senso antiorario e il punto terminale è $(-e^r, 0)$.

Osservazione 3.10.5. Se si definisce

$$S([\theta,\theta+2\pi[) := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \in [\theta,\theta+2\pi[\}$$

allora, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 3.10.4, si ottiene che la funzione $\exp_{\mathbb{C}} : S([\theta,\theta+2\pi[) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è biunivoca.

Definizione 3.10.6. La funzione inversa di $\exp_{\mathbb{C}} : S(]-\pi,\pi]) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ si chiama *determinazione principale del logaritmo complesso* ed è la funzione

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S(]-\pi,\pi]).$$

Proposizione 3.10.7. *Per ogni* $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *si ha*

$$Log_{\mathbb{C}}(w) = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w$$

dove $\mathrm{Arg}\,w$ *è l'argomento principale di* w *(a valori in* $]-\pi,\pi]$*).*

Dimostrazione. Verifichiamo che $\exp_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(w)\big) = w$.

$$\exp_{\mathbb{C}}\big(\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(w)\big) = e^{\mathrm{Re}\,\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(w)} e^{i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(w)} = e^{\ln|w|} e^{i\,\mathrm{Arg}\,w} = |w| e^{i\,\mathrm{Arg}\,w} = w.$$

$\square$

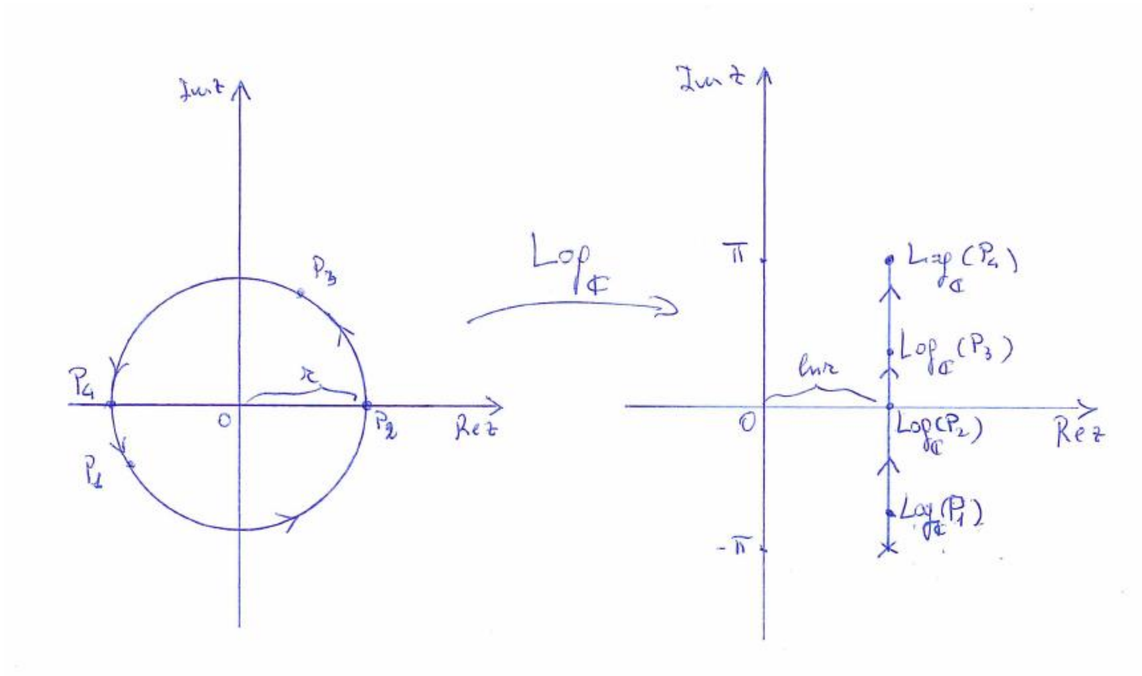


Figura 12. La funzione $\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}$ manda la circonferenza del piano di Gauss di centro 0 e raggio $r > 0$ nel segmento verticale sulla retta $x = \ln r$ costituito dai punti di ordinate in $]-\pi,\pi]$. Se la circonferenza a sinistra viene percorsa in senso antiorario con punto terminale $(-r,0)$ allora il segmento a destra viene percorso dal basso verso l'alto.

Osservazione 3.10.8. Tenuto conto dell'Osservazione 3.10.5, a volte si definisce *determinazione principale del logaritmo complesso* l'inversa della funzione $\exp_{\mathbb{C}} : S([0,2\pi[) \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$. In tal caso si ha

$$\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}(w) = \ln|w| + i\,\mathrm{Arg}\,w$$

dove $\mathrm{Arg}\,w$ è l'argomento principale di w a valori in $[0,2\pi[$.

Definizione 3.10.9. Si definisce *logaritmo complesso* la funzione multivoca

$$\log_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathscr{P}(\mathbb{C}),$$

$$\log_{\mathbb{C}}(w) := \{\ln(|w|) + i\theta : \theta \in \arg(w)\}.$$

Osservazione 3.10.10. Ricordando la Proposizione 3.4.8, si ha

$$\log_{\mathbb{C}}(w) = \{\mathrm{Log}_{\mathbb{C}}\, w + i2n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

3.11. Primi esercizi

Esercizio 3.11.1. Scrivere in forma algebrica e trigonometrica:

$$\frac{3i}{(2-i)^2} + \frac{\sqrt{2}}{(3-i)^2}$$

[$\frac{-12+2\sqrt{2}}{25}+\frac{18+3\sqrt{2}}{50}i$; $\frac{\sqrt{950-84\sqrt{2}}}{50}e^{i\left(\arctan\left(\frac{18+3\sqrt{2}}{2(-12+2\sqrt{2})}\right)+\pi\right)}$]

$$\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)^3}$$

[$\frac{41}{125}-\frac{38}{125}i$; $\frac{1}{\sqrt{5}}e^{i\left(\arctan(-\frac{38}{41})+2\pi\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-i\arctan\frac{38}{41}}$]

$$(3i-3)(2-2i)^2$$

[$24+24i$; $24\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$]

Esercizio 3.11.2. Determinare le radici n-esime, con n indicato:

$$\frac{1+i}{i} \qquad (n=4)$$

[$z_k=\sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{7}{16}\pi+\frac{2k\pi}{4}\right)}, k=0,1,2,3$]

$$-2+2\sqrt{3}i \qquad (n=2)$$

[$z=\pm 2e^{i\frac{\pi}{3}}$]

$$-i \qquad (n=5)$$

[$z_k=e^{i\left(\frac{3}{10}\pi+\frac{2k\pi}{5}\right)}, k=0,1,2,3,4$]

$$\frac{1+i}{1-2i} \qquad (n=2)$$

[$z=\pm\sqrt[4]{\frac{2}{5}}e^{i\left(\frac{\arctan(-3)+\pi}{2}\right)}$]

$$\left(\frac{i}{1-i}\right)^2 \qquad (n=2)$$

[$z=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\frac{3}{4}\pi}$]

$$\left(\cos\sqrt{3}+i\sin\sqrt{3}\right)^3 \qquad (n=2)$$

[$z=\pm e^{i\frac{3}{2}\sqrt{3}}$]

$$\frac{(2-i)^2}{(2+i)^3} \qquad (n=2)$$

[$z=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{5}}e^{i\left(\frac{-5}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)}$]

$$(-\sin 12+i\cos 12)^2 \qquad (n=3)$$

[Sugg.: $(-\sin 12+i\cos 12)^2=i^2(\cos 12+i\sin 12)^2$. $z_k=e^{i\left(8+\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k=0,1,2$]

Esercizio 3.11.3. Risolvere le seguenti equazioni:

$$z^4 = i$$

[$z_k = e^{i\left(\frac{1}{8}\pi + \frac{2k\pi}{4}\right)}, k = 0,1,2,3$]

$$z^2 - 4z + 7 = 0$$

[$z = 2 \pm i\sqrt{3}$]

$$z^2 - 2iz - 1 - 3i = 0$$

[$z_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right)$, $z_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} + i\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right)$]

$$-z^3 + 2z^2 - 6z = 0$$

[$z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i\sqrt{5}$, $z_3 = 1 - i\sqrt{5}$]

$$z^2 + (1 - i)z - 10 + 10i = 0$$

[$z_1 = 3 - i$, $z_2 = -4 + 2i$]
[Sugg.: $z = \frac{1}{2}\left(-1 + i + \sqrt{40 - 42i}\right)$. Si può esprimere la radice in forma algebrica (anziché trigonometrica), tenendo conto del fatto che $\sqrt{a + ib} = \alpha + i\beta$ se $a + ib = (\alpha + i\beta)^2$, cioé se

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b. \end{cases}$$

In questo modo si ottiene che $\sqrt{40 - 42i} = -7 + 3i$]

CAPITOLO 4

Integrale di Riemann

4.1. Somme integrali inferiori e superiori

In questa sezione, $[a,b]$ denota in intervallo di $\mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$: è quindi un intervallo chiuso e limitato.
Inoltre, si considera $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata.
Ricordiamo che se $A \subseteq [a,b]$, allora

$$\inf_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}, \quad \sup_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}.$$

Ricordiamo inoltre che un insieme si dice *finito* se ha un numero finito di elementi.

Definizione 4.1.1 (Scomposizione).
Si chiama *scomposizione* di $[a,b]$ un sottoinsieme finito σ di $[a,b]$ contenente a e b:

$$\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \quad \text{con } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

L'insieme delle scomposizioni di $[a,b]$ lo denotiamo $\Omega_{a,b}$.

Definizione 4.1.2 (Intervallo k-esimo di una scomposizione).
Data una scomposizione $\sigma \in \Omega_{a,b}$, con

$$\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

chiamiamo *intervallo k-esimo* di σ l'intervallo

$$I_k := [x_{k-1}, x_k].$$

Si chiama *misura* dell'intervallo I_k il numero

$$|I_k| := x_k - x_{k-1}.$$

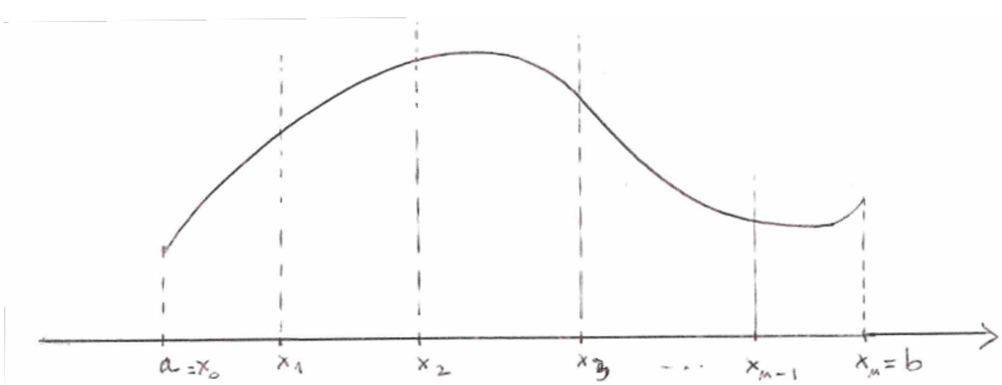


Figura 1

Definizione 4.1.3 (Somme integrali).
Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e $\sigma \in \Omega_{a,b}$. Si definisce *somma integrale inferiore* di f relativamente alla scomposizione σ la seguente quantità:

$$s(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot |I_k|.$$

Si definisce *somma integrale superiore* di f relativamente alla scomposizione σ la seguente quantità:

$$S(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot |I_k|.$$

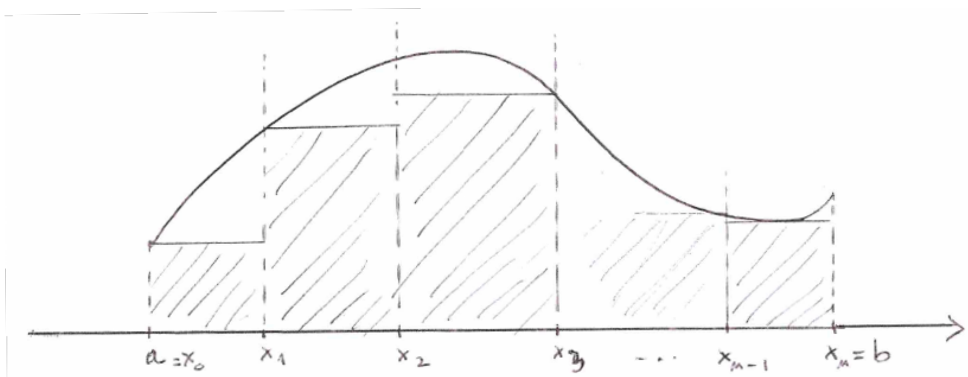


Figura 2. Nel disegno l'area della regione tratteggiata corrisponde a $s(f,\sigma)$

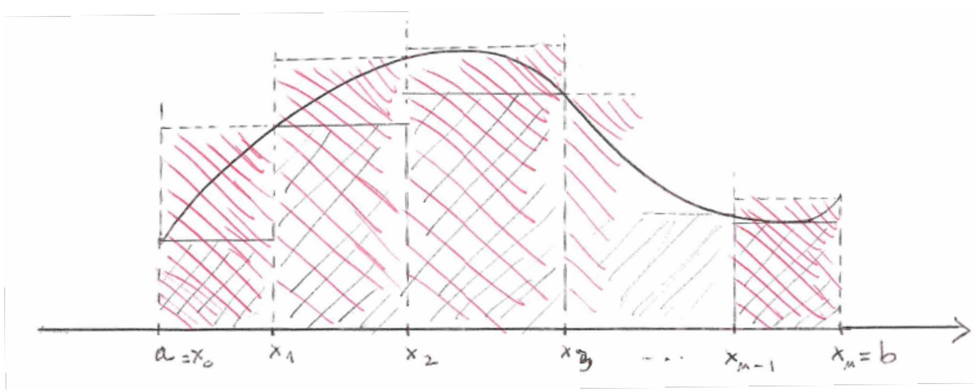


Figura 3. Nel disegno l'area della regione tratteggiata in rosso corrisponde a $S(f,\sigma)$

Lemma 4.1.4.
Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata e $\sigma \in \Omega_{a,b}$, con

$$\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad \text{con } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Allora $s(f,\sigma)$ e $S(f,\sigma)$ sono numeri reali e si ha

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \le s(f,\sigma) \le S(f,\sigma) \le \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a). \tag{4.1.1}$$

DIMOSTRAZIONE.
Basta dimostrare (4.1.1) per avere anche la finitezza di $s(f,\sigma)$ e $S(f,\sigma)$.
Posto $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ si ha
$$\sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a$$
e
$$\inf_{[a,b]} f \leq \inf_{I_k} f \leq \sup_{I_k} f \leq \sup_{[a,b]} f \qquad \forall\, k \in \{1, \cdots, n\}.$$
Allora, essendo $|I_k| > 0$,
$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) = \inf_{[a,b]} f \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} \inf_{[a,b]} f \cdot |I_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot |I_k| = s(f,\sigma).$$
Ragionando in modo analogo:
$$\sup_{[a,b]} f \cdot (b-a) = \sup_{[a,b]} f \sum_{k=1}^{n} |I_k| = \sum_{k=1}^{n} \sup_{[a,b]} f \cdot |I_k| \geq \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot |I_k| = S(f,\sigma).$$
Inoltre, essendo $\inf_{I_k} f \leq \sup_{I_k} f$ per ogni k, è
$$s(f,\sigma) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{I_k} f \cdot |I_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{I_k} f \cdot |I_k| =: S(f,\sigma)$$
□

Lemma 4.1.5. *Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Siano $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$, $\sigma' \supset \sigma$. Allora*
$$s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma') \quad e \quad S(f,\sigma') \leq S(f,\sigma).$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, definiamo la proposizione $P(n)$:
"Se $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$, $\sigma' \supset \sigma$ e $\operatorname{card}\sigma' = \operatorname{card}\sigma + n$, allora $s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma')$ e $S(f,\sigma') \leq S(f,\sigma)$."
Se dimostriamo che le Proposizioni $P(n)$ sono vere per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ abbiamo la tesi.
Procediamo per induzione.
Dimostriamo che $P(1)$ è vera.
Siano $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$, $\sigma' \supset \sigma$ e $\operatorname{card}\sigma' = \operatorname{card}\sigma + 1$. Allora
$$\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad \text{con } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$
ed esistono $p \in \{1, \cdots, n\}$ e $y \in]a,b[$ tali che
$$\sigma' = \{x_0, x_1, \cdots x_{p-1}, y, x_p, \cdots, x_n\} \quad \text{con } x_{p-1} < y < x_p.$$
Allora
$$\begin{aligned} s(f,\sigma') - s(f,\sigma) &= \inf_{[x_{p-1},y]} f \cdot (y - x_{p-1}) + \inf_{[y,x_p]} f \cdot (x_p - y) - \inf_{[x_{p-1},x_p]} f \cdot (x_p - x_{p-1}) \\ &\geq \inf_{[x_{p-1},x_p]} f \cdot (x_p - y + y - x_{p-1}) - \inf_{[x_{p-1},x_p]} f \cdot (x_p - x_{p-1}) = 0. \end{aligned}$$
In modo analogo si dimostra che
$$S(f,\sigma) - S(f,\sigma') \geq 0.$$

Dalle disuguaglianze dimostrate si ha:

$$s(f,\sigma) \le s(f,\sigma') \quad \text{e} \quad S(f,\sigma') \le S(f,\sigma).$$

Supponiamo ora vera $P(n)$ e dimostriamo $P(n+1)$.
Sia $\sigma' \in \Omega_{a,b}$ tale che $\operatorname{card}\sigma' = \operatorname{card}\sigma + n + 1$. In particolare $\operatorname{card}\sigma' \ge 3$. Sia $\sigma^* = \sigma' - \{y\}$, con $y \in \sigma' \setminus \sigma$. Allora, $\sigma^*, \sigma' \in \Omega_{a,b}$ e $\operatorname{card}\sigma' = \operatorname{card}\sigma^* + 1$ e $\operatorname{card}\sigma^* = \operatorname{card}\sigma + n$.
Essendo $P(1)$ vera, applicandola a σ^* e σ', abbiamo

$$s(f,\sigma^*) \le s(f,\sigma'), \qquad S(f,\sigma') \le S(f,\sigma^*). \tag{4.1.2}$$

Dato che $\operatorname{card}\sigma^* = \operatorname{card}\sigma + n$, possiamo usare l'ipotesi che $P(n)$ è vera, ottenendo in particolare:

$$s(f,\sigma) \le s(f,\sigma^*), \qquad S(f,\sigma^*) \le S(f,\sigma).$$

Queste disuguaglianze, unitamente a (4.1.2), concludono la dimostrazione della veridicità di $P(n+1)$.
Per il Principio d'induzione segue che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

Ogni somma integrale inferiore è minore o uguale di ogni somma integrale superiore. Precisamente:

Proposizione 4.1.6.
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Siano $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$. Allora

$$s(f,\sigma) \le S(f,\sigma') \qquad \forall \sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Siano $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$.
Sia $\sigma'' := \sigma \cup \sigma'$ e dimostriamo che

$$s(f,\sigma) \le s(f,\sigma'') \le S(f,\sigma'') \le S(f,\sigma').$$

Se $\sigma = \sigma'$ allora è $\sigma'' = \sigma = \sigma'$ e la tesi segue dal Lemma 4.1.4.
Sia $\sigma \ne \sigma'$. Allora $\sigma'' \supset \sigma$ e $\sigma'' \supset \sigma'$ e quindi

$$s(f,\sigma) \overset{Lemma\ 4.1.5}{\le} s(f,\sigma'') \overset{Lemma\ 4.1.4}{\le} S(f,\sigma'') \overset{Lemma\ 4.1.5}{\le} S(f,\sigma').$$

□

4.2. Funzioni integrabili

Definizione 4.2.1 (Integrale inferiore e superiore).
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata.
Siano

$$A := \{s(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{a,b}\}$$

e

$$B := \{S(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{a,b}\}.$$

Si chiama *integrale inferiore* di f il seguente:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup A.$$

Si chiama *integrale superiore* di f il seguente:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf B.$$

Proposizione 4.2.2.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Allora

$$\inf_{[a,b]} f\cdot(b-a) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f\cdot(b-a).$$

DIMOSTRAZIONE.
Dal Lemma 4.1.4 e dalla Proposizione 4.1.6 si ha

$$\inf_{[a,b]} f\cdot(b-a) \overset{Lemma\ 4.1.4}{\le} s(f,\sigma) \overset{Prop.\ 4.1.6}{\le} S(f,\sigma') \overset{Lemma\ 4.1.4}{\le} \sup_{[a,b]} f\cdot(b-a) \qquad \forall\sigma,\sigma'\in\Omega_{a,b}.$$

Dunque, per ogni $\sigma'\in\Omega_{a,b}$, la somma $S(f,\sigma')$ risulta essere un maggiorante di A. Pertanto:

$$\inf_{[a,b]} f\cdot(b-a) \le \sup A \le S(f,\sigma') \le \sup_{[a,b]} f\cdot(b-a) \qquad \forall\sigma'\in\Omega_{a,b}.$$

Allora $\sup A$ è un minorante di B, da cui:

$$\inf_{[a,b]} f\cdot(b-a) \le \sup A \le \inf B \le \sup_{[a,b]} f\cdot(b-a).$$

La tesi è così dimostrata. □

Definizione 4.2.3 (Funzione integrabile).
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[a,b]$ (e scriviamo $f\in\mathscr{R}([a,b])$) se

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

In tal caso, tale numero lo indichiamo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

che leggiamo: *integrale (definito) da a a b di $f(x)$ in dx.*

Se $f\in\mathscr{R}([a,b])$, $f\ge 0$, allora il numero $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ha un significato geometrico.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata e $f\ge 0$. Sia

$$\Gamma(f) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b],\ 0\le y\le f(x)\}.$$

Preso $\sigma\in\Omega_{a,b}$

$$\sigma=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}, \quad \text{con } a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

definiamo

$$P'(f,\sigma) := \bigcup_{k=1}^{n}([x_{k-1},x_k]\times[0,\inf_{[x_{k-1},x_k]} f])$$

e

$$P''(f,\sigma) := \bigcup_{k=1}^{n} ([x_{k-1}, x_k] \times [0, \sup_{[x_{k-1},x_k]} f]).$$

Si ha

$$P'(f,\sigma) \subseteq \Gamma(f) \subseteq P''(f,\sigma).$$

Ovviamente l'area di $P'(f,\sigma)$ e di $P''(f,\sigma)$ le si possono calcolare e facilmente si ha

$$\text{area } P'(f,\sigma) = s(f,\sigma), \qquad \text{area } P''(f,\sigma) = S(f,\sigma).$$

Una definizione ragionevole di "area di $\Gamma(f)$" deve quindi avere la seguente proprietà:

$$s(f,\sigma) \leq \text{“area } \Gamma(f)\text{”} \leq S(f,\sigma') \qquad \forall \sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}.$$

Quindi, passando all'estremo superiore su σ e all'estremo inferiore su σ' otteniamo che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \text{“area } \Gamma(f)\text{”} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Ciò comporta che se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ è naturale prendere come definizione di area di $\Gamma(f)$ la seguente:

Definizione 4.2.4 (Area del sottografico).
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$. Sia

$$\Gamma(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora si definisce

$$\text{area}(\Gamma(f)) := \int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposizione 4.2.5 (Stima dell'integrale definito).
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

DIMOSTRAZIONE.
Segue da Proposizione 4.2.2. □

Corollario 4.2.6. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Allora*

$$f \geq 0 \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE.
Segue in modo ovvio dalla Proposizione 4.2.5. □

Proposizione 4.2.7 (Le funzioni costanti sono integrabili).
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$. Allora $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = c \cdot (b-a)$$

DIMOSTRAZIONE.
Si ha

$$\inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) = c \cdot (b-a) = \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a),$$

quindi dalla Proposizione 4.2.2

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = c \cdot (b-a).$$

□

Esempio 4.2.8 (Esempio di funzione non integrabile). Dimostrare che la funzione di Dirichlet, definita come $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

non è integrabile, essendo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$ e $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 1$.

Teorema 4.2.9 (Teorema di Riemann: caratterizzazione delle funzione integrabili).
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Sono equivalenti le seguenti:

(a) $f \in \mathscr{R}([a,b])$
(b) $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \sigma \in \Omega_{a,b} \; : \; S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon$.

DIMOSTRAZIONE.
(a) ⇒ (b)
Essendo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ l'estremo superiore delle somme integrali inferiori,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \sigma'(\epsilon) \in \Omega_{a,b} \; : \; s(f,\sigma'(\epsilon)) > \underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.2.1}$$

Essendo $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ l'estremo inferiore delle somme integrali superiori,

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \sigma''(\epsilon) \in \Omega_{a,b} \; : \; S(f,\sigma''(\epsilon)) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \tag{4.2.2}$$

Fissato $\epsilon > 0$ definiamo $\sigma(\epsilon) := \sigma'(\epsilon) \cup \sigma''(\epsilon)$. Allora

$$\begin{aligned}
S(f,\sigma(\epsilon)) &\overset{\text{Lemma 4.1.5}}{\leq} S(f,\sigma''(\epsilon)) \\
&\overset{(4.2.2)}{<} \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \\
&\overset{(a)}{=} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \\
&\overset{(4.2.1)}{<} s(f,\sigma'(\epsilon)) + \epsilon \\
&\overset{\text{Lemma 4.1.5}}{\leq} s(f,\sigma(\epsilon)) + \epsilon.
\end{aligned}$$

Dunque

$$S(f,\sigma(\epsilon)) - s(f,\sigma(\epsilon)) < \epsilon,$$

che è quanto si voleva dimostrare.
(b) $\Rightarrow$ (a)
Per ipotesi

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma \in \Omega_{a,b}\ :\ S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon.$$

Allora $\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma \in \Omega_{a,b}$ tale che

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,\sigma) < s(f,\sigma) + \epsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \epsilon$$

da cui

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \epsilon.$$

Mandando ϵ 0 deduciamo

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

ossia $f \in \mathscr{R}([a,b])$. $\square$

4.3. Proprietà dell'integrale definito

Definizione 4.3.1.
Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si definiscono i seguenti:

$$\lambda A := \{\lambda a\ :\ a \in A\}$$

$$A + B := \{a + b\ :\ a \in A, b \in B\}.$$

Lemma 4.3.2. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Allora*

$$\lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (\inf(\lambda A) = \lambda \inf A, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup A). \tag{4.3.1}$$

$$\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad (\inf(\lambda A) = \lambda \sup A, \quad \sup(\lambda A) = \lambda \inf A). \tag{4.3.2}$$

$$\inf(A+B) \geq \inf A + \inf B, \qquad \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B. \tag{4.3.3}$$

DIMOSTRAZIONE.
La si lascia al lettore. □

Definizione 4.3.3.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ (eventualmente anche costante). Allora si definiscono le funzioni non negative: $f^+, f^- : A \to [0, \infty[$

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}$$

dette rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di f.

Lemma 4.3.4. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti*

(a) $f^- = (-f)^+$
(b) $f = f^+ - f^-$ *e* $|f| = f^+ + f^-$
(c) $f^+ = \dfrac{f + |f|}{2}$, $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$,
(d) $-f^- \leq f \leq f^+$
(e) $\sup\limits_A f^+ = (\sup\limits_A f)^+$ *e* $\inf\limits_A f^+ = (\inf\limits_A f)^+$
(f) $|f^+ - g^+| \leq |f - g|$.

DIMOSTRAZIONE.
(a):
È ovvia: $(-f)^+ = \max\{-f(x), 0\} = f^-(x)$.
(b):
Se $f(x) \geq 0$ allora $f^+(x) = f(x)$ e $f^-(x) = 0$, quindi

$$f(x) = f(x) - 0 = f^+(x) - f^-(x), \qquad |f(x)| = f(x) = f^+(x) = f^+(x) + f^-(x)$$

Se $f(x) < 0$ allora $f^+(x) = 0$ e $f^-(x) = -f(x)$, quindi

$$f(x) = 0 - (-f(x)) = f^+(x) - f^-(x), \qquad |f(x)| = -f(x) = f^-(x) = f^+(x) + f^-(x).$$

(c):
Sommando membro a membro le due uguaglianze in (b) si deduce la prima uguaglianza.
Sottraendo membro a membro le due uguaglianze in (b) si deduce la seconda uguaglianza.
(d):
Immediata conseguenza della prima uguaglianza in (b), essendo f^+ e f^- funzioni non negative.
(e):
Si ha che per ogni $x \in A$,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \leq \max\{\sup_A f, 0\} = (\sup_A f)^+$$

da cui $\sup_A f^+ \leq (\sup_A f)^+$.
D'altra parte vale anche la diguaglianza opposta:

$$(\sup_A f)^+ := \max\{\sup_A f, 0\} \overset{(d)}{\leq} \max\{\sup_A f^+, 0\} = \sup_A f^+.$$

Si lascia al lettore dimostrare l'uguaglianza con l'inf.
(f):
Dalla disuguaglianza triangolare (d'ora in poi: D.T.) e (c) si ha:

$$|f^+ - g^+| \overset{(c)}{=} \left|\frac{f+|f|}{2} - \frac{g+|g|}{2}\right| = \left|\frac{f-g}{2} + \frac{|f|-|g|}{2}\right| \overset{D.T.}{\leq} \frac{|f-g|}{2} + \frac{||f|-|g||}{2}$$
$$\overset{D.T.}{\leq} 2\frac{|f-g|}{2} = |f-g|.$$

□

Proposizione 4.3.5.
Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

(a) $(\lambda f) \in \mathscr{R}([a,b])$ *e* $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

(b) $(f+g) \in \mathscr{R}([a,b])$ *e* $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(c) *(monotonia) se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ allora* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

(d) $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$ *e* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Sia $\lambda \geq 0$. Sia $\sigma \in \Omega_{a,b}$,

$$\sigma := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Allora

$$s(\lambda f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \inf_{I_k}(\lambda f) \cdot |I_k| \overset{(4.3.1)}{=} \lambda \sum_{k=1}^n \inf_{I_k} f \cdot |I_k| = \lambda s(f, \sigma)$$

e

$$S(\lambda f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \sup_{I_k}(\lambda f) \cdot |I_k| \overset{(4.3.1)}{=} \lambda \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} f \cdot |I_k| = \lambda S(f, \sigma).$$

Dunque, usando la notazione introdotta nella Definizione 4.3.1,

$$\{s(\lambda f, \sigma) : \sigma \in \Omega_{a,b}\} = \lambda \{s(f, \sigma) : \sigma \in \Omega_{a,b}\},$$

per cui, usando ancora (4.3.1),

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Analogamente si dimostra

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Essendo $f \in \mathscr{R}([a,b])$ deduciamo che $\lambda f \in \mathscr{R}([a,b])$ e che vale la formula scritta in (a).
Sia ora $\lambda < 0$. Sia $\sigma \in \Omega_{a,b}$,

$$\sigma := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Allora

$$s(\lambda f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \inf_{I_k}(\lambda f) \cdot |I_k| \overset{(4.3.2)}{=} \lambda \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} f \cdot |I_k| = \lambda S(f, \sigma)$$

e

$$S(\lambda f, \sigma) = \sum_{k=1}^n \sup_{I_k}(\lambda f) \cdot |I_k| \overset{(4.3.2)}{=} \lambda \sum_{k=1}^n \inf_{I_k} f \cdot |I_k| = \lambda s(f, \sigma).$$

Dunque

$$\{s(\lambda f, \sigma) \,:\, \sigma \in \Omega_{a,b}\} = \lambda \{S(f, \sigma) \,:\, \sigma \in \Omega_{a,b}\}$$

per cui, usando ancora (4.3.2),

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Analogamente si dimostra

$$\overline{\int_a^b} \lambda f(x)\,dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Essendo $f \in \mathscr{R}([a,b])$ deduciamo che $\lambda f \in \mathscr{R}([a,b])$ e che vale la formula scritta in (a).
(b):
Da (4.3.3), Siano $\sigma', \sigma'' \in \Omega_{a,b}$ e $\sigma = \sigma' \cup \sigma''$ Allora

$$\overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx \le S(f+g, \sigma) \overset{(4.3.3)}{\le} S(f, \sigma) + S(g, \sigma) \overset{Lemma\ 4.1.5}{\le} S(f, \sigma') + S(g, \sigma'').$$

Dunque, passando all'estremo inferiore dell'insieme

$$\{S(f, \sigma') \,:\, \sigma' \in \Omega_{a,b}\},$$

deduciamo

$$\overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + S(g, \sigma'') \quad \forall \sigma'' \in \Omega_{a,b}$$

e da qui, passando all'estremo inferiore dell'insieme

$$\{S(g, \sigma'') \,:\, \sigma'' \in \Omega_{a,b}\},$$

deduciamo

$$\overline{\int_a^b} (f(x) + g(x))\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Analogamente si procede per dimostrare

$$\underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Pertanto, essendo $f, g \in \mathscr{R}([a,b])$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b}(f(x)+g(x))\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

da cui la tesi.

(c):

Sia $\sigma \in \Omega_{a,b}$,

$$\sigma := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Essendo $f \leq g$ si hanno

$$\inf_{I_k} f \leq \inf_{I_k} g$$

quindi:

$$s(f,\sigma) \leq s(g,\sigma). \tag{4.3.4}$$

Dalla definizione di $\underline{\int_a^b} g(x)\,dx$,

$$s(g,\sigma) \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx,$$

per cui da (4.3.4) otteniamo che

$$s(f,\sigma) \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \qquad \forall \sigma \in \Omega_{a,b}$$

e passando all'estremo superiore in σ:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Tenuto conto che f, g sono entrambe integrabili secondo Riemann in $[a,b]$ si è dimostrato che

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

(d):

Dato che $f \in \mathscr{R}([a,b])$, allora dal Teorema 4.2.9 si ha che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\sigma \in \Omega_{a,b}$,

$$\sigma := \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

tale che

$$S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon.$$

Dalla definizione di parte positiva e dal Lemma 4.3.4, si ha

$$S(f^+,\sigma) = \sum_{k=1}^n \sup_{I_k} f^+ \cdot |I_k| \overset{Lemma 4.3.4(e)}{=} \sum_{k=1}^n (\sup_{I_k} f)^+ \cdot |I_k|$$

e

$$s(f^+,\sigma)=\sum_{k=1}^{n}\inf_{I_k} f^+\cdot|I_k| \overset{Lemma 4.3.4(e)}{=} \sum_{k=1}^{n}(\inf_{I_k} f)^+\cdot|I_k|.$$

Pertanto, usando Lemma 4.3.4 (f),

$$\begin{aligned} S(f^+,\sigma)-s(f^+,\sigma) &= \sum_{k=1}^{n}\left((\sup_{I_k} f)^+-(\inf_{I_k} f)^+\right)|I_k| \\ &\overset{Lemma\ 4.3.4(f)}{\le} \sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{I_k} f-\inf_{I_k} f\right)|I_k| \\ &= S(f,\sigma)-s(f,\sigma)<\epsilon. \end{aligned}$$

Vale dunque (b) del Teorema 4.2.9 e quindi $f^+\in\mathscr{R}([a,b])$.
Dimostriamo che $f,f^+\in\mathscr{R}([a,b])$ implicano $f^-\in\mathscr{R}([a,b])$.
Per (a), applicato con $\lambda=-1$, si ha che $-f\in\mathscr{R}([a,b])$, quindi

$$f^- \overset{Lemma 4.3.4(b)}{=} f^+ + (-f) \overset{f^+,-f\in\mathscr{R}([a,b])\ +\ (b)}{\in} \mathscr{R}([a,b]).$$

Essendo per (b) in Lemma 4.3.4) $|f|=f^+ + f^-$ deduciamo da (b) che $|f|\in\mathscr{R}([a,b])$ e, ancora da (a), che $-|f|\in\mathscr{R}([a,b])$. Inoltre, essendo $\pm f\le|f|$ deduciamo da (c) che

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{(c)}{\le} \int_a^b |f(x)|\,dx, \qquad -\int_a^b f(x)\,dx \overset{(a)}{=} \int_a^b -f(x)\,dx \overset{(c)}{\le} \int_a^b |f(x)|\,dx$$

da cui

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Corollario 4.3.6. *L'insieme $\mathscr{R}([a,b])$ è uno spazio vettoriale e l'applicazione*

$$\mathscr{F}:\mathscr{R}([a,b])\to\mathbb{R}, \qquad \mathscr{F}(f):=\int_a^b f(x)\,dx,$$

è lineare.

DIMOSTRAZIONE.
È un'immediata conseguenza di (a) e (b) della Proposizione 4.3.5. Si noti che $0\in\mathscr{R}([a,b])$ in virtù della Proposizione 4.2.7. □

Proposizione 4.3.7 (Additività dell'integrale).
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e $c\in]a,b[$. Allora

$$f\in\mathscr{R}([a,b]) \quad\Leftrightarrow\quad (f\in\mathscr{R}([a,c]) \text{ e } f\in\mathscr{R}([c,b])).$$

Inoltre in tal caso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{4.3.5}$$

DIMOSTRAZIONE.

$\Rightarrow$:

Per ipotesi $f \in \mathscr{R}([a,b])$. Allora, per il Teorema 4.2.9, fissato $\epsilon > 0$

$$\exists \sigma \in \Omega_{a,b} \;:\; S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon.$$

Definiamo $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Allora

$$S(f,\sigma') - s(f,\sigma') \overset{Lemma\ 4.1.5}{\leq} S(f,\sigma) - s(f,\sigma) < \epsilon.$$

Definiamo $\sigma_1 := \sigma' \cap [a,c]$ e $\sigma_2 := \sigma' \cap [c,b]$. Allora $\sigma_1 \in \Omega_{a,c}$, $\sigma_2 \in \Omega_{c,b}$ e

$$\begin{aligned}\epsilon > S(f,\sigma') - s(f,\sigma') &= (S(f,\sigma_1) + S(f,\sigma_2)) - (s(f,\sigma_1) + s(f,\sigma_2))\\ &= (S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1)) + (S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2)).\end{aligned}$$

Dunque

$$S(f,\sigma_1) - s(f,\sigma_1) < \epsilon, \qquad S(f,\sigma_2) - s(f,\sigma_2) < \epsilon$$

Vale quindi la (b) del Teorema 4.2.9 sia in $[a,c]$ che in $[c,b]$, da cui

$$f \in \mathscr{R}([a,c]) \text{ e } f \in \mathscr{R}([c,b]).$$

$\Leftarrow$:

Siano $\sigma_1 \in \Omega_{a,c}$ e $\sigma_2 \in \Omega_{c,b}$. Allora $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2 \in \Omega_{a,b}$. È ovvio che

$$S(f,\sigma) = S(f,\sigma_1) + S(f,\sigma_2).$$

Dunque

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f,\sigma) = S(f,\sigma_1) + S(f,\sigma_2) \quad \forall \sigma_1 \in \Omega_{a,c},\ \sigma_2 \in \Omega_{c,b}.$$

Passando all'estremo inferiore dell'insieme di $S(f,\sigma_1)$, si ha

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + S(f,\sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Omega_{c,b}.$$

Passando all'estremo inferiore dell'insieme di $S(f,\sigma_2)$, si ha

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Analogamente si dimostra che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Per ipotesi $f \in \mathscr{R}([a,c])$ e $f \in \mathscr{R}([c,b])$ pertanto:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

cioè $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e vale (4.3.5).

$\square$

Ragionando per induzione, la Proposizione 4.3.7 può essere estesa a una decomposizione dell'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di intervalli superiore a 2 e senza tenere conto dell'ordinamento degli estremi.

Proposizione 4.3.8. *Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Allora*

$$f\in\mathscr{R}([a,b]) \quad \Leftrightarrow \quad (f\in\mathscr{R}([x_{k-1},x_k]) \quad \forall k\{1,\cdots,n\}).$$

Inoltre in tal caso:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx. \tag{4.3.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\alpha,\beta\in[a,b]$, $\alpha<\beta$ si definisca

$$\Omega^n_{\alpha,\beta}=\{\sigma\in\Omega_{\alpha,\beta}:\operatorname{card}\sigma=n+1\}.$$

Sia $P(n)$ la proposizione:

$$\text{“}\forall\alpha,\beta\in[a,b],\ \alpha<\beta,\ \forall\sigma=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\Omega^n_{\alpha,\beta}$$
$$f\in\mathscr{R}([\alpha,\beta]) \quad \Leftrightarrow \quad (f\in\mathscr{R}([x_{k-1},x_k]) \quad \forall k\in\{1,\cdots,n\})$$

e in tal caso:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.\text{''}$$

$P(1)$ è ovviamente vera.
$P(2)$ è vera per la Proposizione 4.3.7.
Dimostriamo che $P(n)$ implica $P(n+1)$ per ogni $n\geq 2$. Consideriamo

$$\sigma_1=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}\in\Omega^n_{\alpha,x_n}, \qquad \sigma_2=\{x_n,x_{n+1}\}\in\Omega^1_{x_n,x_{n+1}}$$

e

$$\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2=\{x_0,x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}\}\in\Omega^{n+1}_{\alpha,\beta}.$$

Essendo $P(2)$ vera, si ha

$$f\in\mathscr{R}([\alpha,\beta]) \quad \Leftrightarrow \quad (f\in\mathscr{R}([\alpha,x_n]), f\in\mathscr{R}([x_n,\beta])$$

e

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^{x_n} f(x)\,dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx.$$

Per ipotesi $P(n)$ è vera, quindi

$$f\in\mathscr{R}([\alpha,x_n]) \quad \Leftrightarrow \quad (f\in\mathscr{R}([x_{k-1},x_k]) \quad \forall k\in\{1,\cdots,n\})$$

e

$$\int_\alpha^{x_n} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Quindi, mettendo insieme le informazioni sopra

$$f\in\mathscr{R}([\alpha,\beta]) \quad \Leftrightarrow \quad (f\in\mathscr{R}([x_{k-1},x_k]) \quad \forall k\in\{1,\cdots,n+1\})$$

e

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Abbiamo così dimostrato che $P(n)$ implica $P(n+1)$ per ogni $n \geq 2$.
La tesi segue dal principio d'induzione. $\square$

Definizione 4.3.9. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $a, b \in I$, $a < b$.
Valgono le seguenti convenzioni

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

e, se $f \in \mathscr{R}([a,b])$,

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Utilizzando le definizioni sopra, vale anche la seguente generalizzazione, che non tiene conto dell'ordinamento degli estremi di integrazione.

Proposizione 4.3.10.
Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e siano

$$a := \min\{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ e } b := \max\{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Se $f \in \mathscr{R}([a,b])$ allora

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx. \tag{4.3.7}$$

DIMOSTRAZIONE.
Ci sono 6 casi possibili: ne trattiamo qui 3 e lasciamo gli altri al lettore.
$\alpha < \gamma < \beta$:
In tal caso la tesi segue dalla Proposizione 4.3.7.
$\alpha < \beta < \gamma$:
In tal caso dalla Proposizione 4.3.7.

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx.$$

Pertanto:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx - \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

$\beta < \alpha < \gamma$:
In tal caso dalla Proposizione 4.3.7.

$$\int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx.$$

Pertanto:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx - \int_\beta^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx.$$

Si lascia al lettore concludere la verifica.

$\square$

4.4. Classi di funzioni integrabili

Le funzioni monotone e continue sono funzioni integrabili. Valgono infatti i seguenti teoremi:

Teorema 4.4.1.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *monotona. Allora* $f\in\mathscr{R}([a,b])$.

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione nel caso di f crescente. Se f è decrescente la dimostrazione procede allo stesso modo, con le opportune e ovvie modifiche.
Se $f(a)=f(b)$ allora f è costante e la tesi segue dalla Proposizione 4.2.7.

Supponiamo $f(a)<f(b)$.
Sia $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, e consideriamo $\sigma_n\in\Omega_{a,b}$,

$$\sigma_n:=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},\qquad x_k:=a+\frac{b-a}{n}k.$$

Allora $|I_k|=x_k-x_{k-1}=\dfrac{b-a}{n}$ con $k\in\{1,\cdots,n\}$.
Dato che f è crescente, allora $\inf\limits_{I_k} f=f(x_{k-1})$ e $\sup\limits_{I_k} f=f(x_k)$. Dunque

$$\begin{aligned}0\le S(f,\sigma_n)-s(f,\sigma_n)&=\sum_{k=1}^{n}\big(\sup_{I_k} f-\inf_{I_k} f\big)|I_k|=\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)|I_k|\\&=\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\\&=\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)).\end{aligned}$$

Dato che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))=0$$

allora per il teorema dei carabinieri

$$\lim_{n\to\infty}\big(S(f,\sigma_n)-s(f,\sigma_n)\big)=0.$$

Dunque,

$$\forall\epsilon>0\ \exists\overline{n}\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\ :\ S(f,\sigma_{\overline{n}})-s(f,\sigma_{\overline{n}})<\epsilon.$$

Vale dunque la (b) del Teorema 4.2.9 e quindi $f\in\mathscr{R}([a,b])$. □

Teorema 4.4.2.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua. Allora* $f\in\mathscr{R}([a,b])$.

DIMOSTRAZIONE.
Essendo $[a,b]$ un insieme compatto e f continua, allora per il Teorema di Heine-Cantor f è una funzione uniformemente continua. Dunque

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta_\epsilon>0 : |f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon}{b-a}\quad \forall x',x''\in[a,b], |x'-x''|<\delta.$$

Fissiamo $\epsilon>0$ e consideriamo $\sigma\in\Omega_{a,b}$,

$$\sigma:=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},\qquad a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

con $\max\{|I_k| : k\in\{1,\cdots,n\}\}<\delta_\epsilon$, dove I_k denota il k-esimo intervallo di σ.
Per ogni $k\in\{1,\cdots,n\}$ la funzione $f:I_k\to\mathbb{R}$ è continua, allora per il Teorema di Weierstrass esistono $x_k',x_k''\in I_k$ tali che

$$f(x_k')=\min_{I_k} f,\qquad f(x_k'')=\max_{I_k} f.$$

Dato che $|x_k''-x_k'|\le|I_k|<\delta_\epsilon$ si ha

$$\begin{aligned}S(f,\sigma)-s(f,\sigma)&=\sum_{k=1}^n\left(\max_{I_k} f-\min_{I_k} f\right)|I_k|=\sum_{k=1}^n\left(f(x_k'')-f(x_k')\right)|I_k|\\&<\sum_{k=1}^n\frac{\epsilon}{b-a}\cdot|I_k|=\frac{\epsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n|I_k|=\epsilon.\end{aligned}$$

Vale quindi (b) del Teorema 4.2.9 e quindi $f\in\mathscr{R}([a,b])$. □

Teorema 4.4.3.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua,* $f\ge 0$. *Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx=0\ \Rightarrow\ (f(x)=0\ \ \forall x\in[a,b]).$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $\bar{x}\in[a,b]$ tale che $f(\bar{x})>0$. allora per il teorema di permanenza del segno

$$\exists\delta>0\ :\ f(x)\ge\frac{f(\bar{x})}{2}\quad\forall x\in[a',b']:=[a,b]\cap[\bar{x}-\delta,\bar{x}+\delta].$$

Dunque, per la proprietà di additività (Proposizione 4.3.7), il Corollario 4.2.6, la Proprietà di monotonia (Proposizione 4.3.5 (c)) e la Proposizione 4.2.7

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx\ge\int_{a'}^{b'}\frac{f(\bar{x})}{2}\,dx=\frac{f(\bar{x})}{2}(b'-a')>0.$$

Ciò è assurdo. □

Lemma 4.4.4. *Sia* $f\in\mathscr{R}([a,b])$ *e siano* $x,y\in[a,b]$. *Se* $M>0$ *è tale che* $|f(t)|\le M$ *per ogni* t *nell'intervallo di estremi* x *e* y *allora*

$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right|\le M|y-x|.$$

DIMOSTRAZIONE.
Se $y > x$ si ha
$$\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \overset{Prop.\ 4.3.5(d)}{\leq} \int_x^y |f(t)|\,dt \overset{Prop.\ 4.3.5(c)}{\leq} \int_x^y M\,dt \overset{Prop.\ 4.2.7(c)}{=} M\cdot(y-x) = M\cdot|y-x|.$$
Se invece $y < x$ si ha
$$\begin{aligned}\left|\int_x^y f(t)\,dt\right| = \left|\int_y^x f(t)\,dt\right| &\overset{Prop.\ 4.3.5(d)}{\leq} \int_y^x |f(t)|\,dt \overset{Prop.\ 4.3.5(c)}{\leq} \int_y^x M\,dt \\ &\overset{Prop.\ 4.2.7(c)}{=} M\cdot(x-y) = M\cdot|y-x|.\end{aligned}$$
□

Teorema 4.4.5.
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata e $f|_{]a,b[}$ continua. Allora $f\in\mathscr{R}([a,b])$ e il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ non dipende da $f(a)$ e $f(b)$.

DIMOSTRAZIONE.
Essendo f limitata, esiste $M>0$ tale che $\sup\limits_{[a,b]}|f|\leq M$.
Siano $\epsilon>0$ e $\delta>0$ tale che
$$0<\delta<\min\left\{\frac{b-a}{2},\frac{\epsilon}{4M}\right\}.$$
Per la scelta fatta su δ, si ha $a+\delta<b-\delta$. Essendo $f|_{]a,b[}$ continua deduciamo in particolare che f è continua in $[a+\delta,b-\delta]$. Dunque, per il Teorema 4.4.2 è $f\in\mathscr{R}([a+\delta,b-\delta])$.
Per (b) del Teorema 4.2.9 esiste $\sigma=\sigma(\epsilon,\delta)\in\Omega_{a+\delta,b-\delta}$, tale che
$$\sigma:=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},\qquad a+\delta=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b-\delta.$$
e tale che
$$S(f|_{[a+\delta,b-\delta]},\sigma)-s(f|_{[a+\delta,b-\delta]},\sigma)<\epsilon.$$
Sia $\sigma':=\sigma\cup\{a,b\}$. Allora $\sigma'\in\Omega_{a,b}$ e
$$\begin{aligned}S(f,\sigma')-s(f,\sigma') &= \left(\sup_{[a,a+\delta]}f-\inf_{[a,a+\delta]}f\right)\delta+\left(\sup_{[b-\delta,b]}f-\inf_{[b-\delta,b]}f\right)\delta\\ &\quad+S(f|_{[a+\delta,b-\delta]},\sigma)-s(f|_{[a+\delta,b-\delta]},\sigma)\\ &\leq 4M\delta+\epsilon<2\epsilon,\end{aligned}$$
dove l'ultima disuguaglianza è conseguenza dell'aver scelto $\delta<\dfrac{\epsilon}{4M}$.
Dunque per ogni $\epsilon>0$ abbiamo trovato $\sigma'\in\Omega_{a,b}$ tale che
$$S(f,\sigma')-s(f,\sigma')<2\epsilon.$$
Per il Teorema 4.2.9 risulta $f\in\mathscr{R}([a,b])$.

Dimostriamo ora che il valore di $\int_a^b f(x)\,dx$ non dipende da $f(a)$. per ogni $\delta \in]0, b-a[$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+\delta} f(x)\,dx + \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Dato che

$$0 \le \left| \int_a^{a+\delta} f(x)\,dx \right| \overset{Lemma\ 4.4.4}{\le} M\delta$$

allora

$$\lim_{\delta \to 0} \int_a^{a+\delta} f(x)\,dx = 0,$$

dunque

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx. \tag{4.4.1}$$

Dato che nel calcolo del limite a destra non viene coinvolto il valore $f(a)$ abbiamo concluso.
Si ragiona in modo analogo per $f(b)$. □

Teorema 4.4.6.
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata ed esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che

$$\{x \in [a,b] : f \text{ è discontinua in } x\} = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
Allora $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx + \int_{x_n}^b f(x)\,dx. \tag{4.4.2}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per il Teorema 4.4.5

$$f \in \mathscr{R}([a,x_0]), \quad f \in \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{R}([x_{k-1},x_k]), \quad f \in \mathscr{R}([x_n,b]).$$

La tesi segue dalla Proposizione 4.3.8 □

4.5. Primitive e calcolo integrale

Definizione 4.5.1.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $F : A \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f se

(i) F è derivabile
(ii) $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Per capire il legame tra primitiva e integrali definiti è utile la seguente proposizione.

Proposizione 4.5.2.
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* $f \in \mathscr{R}([a,b])$*. Se* F *è una primitiva di* f*, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $\sigma \in \Omega_{a,b}$,

$$\sigma = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}, \quad \text{con } a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Per ogni $k \in \{1, \cdots, n\}$ applichiamo il Teorema di Lagrange alla funzione $F|_{I_k} : I_k \to \mathbb{R}$ e deduciamo che

$$\exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[\,:\; F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)|I_k|.$$

Dunque

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|.$$

Si noti che

$$s(f,\sigma) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| \le S(f,\sigma)$$

Abbiamo così dimostrato che

$$s(f,\sigma) \le F(b) - F(a) \le S(f,\sigma).$$

Pertanto per l'arbitrarietà di σ si ha:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

La conclusione segue ora dall'ipotesi $f \in \mathscr{R}([a,b])$. □

Purtroppo non tutte le funzioni integrabili hanno primitive (e viceversa: non tutte le funzioni che hanno una primitiva sono integrabili: un esempio è la cosiddetta *funzione di Volterra*). Prima di proporre un esempio di funzione integrabile senza primitive, enunciamo e dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 4.5.3 (T. di Darboux).
Sia $f : I \to \mathbb{R}$*, con* I *intervallo e* f *derivabile. Allora* $f'(I)$ *è un intervallo.*

DIMOSTRAZIONE.
Vogliamo dimostrare che presi $x, z \in I$ e $y \in \mathbb{R}$ tali che $f'(x) < y < f'(z)$, allora $y \in f'(I)$, ossia esiste $c \in I$ tale che $f'(c) = y$.
Consideriamo $a := \min\{x,z\}$ e $b := \max\{x,z\}$. Allora la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - yt$, è derivabile.
Se $x < z$ è $a = x$ e $b = z$. Dunque $g'(a) < 0$ e $g'(b) > 0$. Per il Teorema di Weierstrass esiste $c \in [a,b]$ tale che $g(c) = \min_{[a,b]} g$. Di certo $c \ne a$. Infatti, $a = \min[a,b]$ e se a fosse un punto di minimo di g risulterebbe $g'(a) \ge 0$ per la Proposizione 1.3.3, contraddicendo $g'(a) < 0$.
Analogamente, $c \ne b$. Infatti, $b = \max[a,b]$ e se b fosse un punto di minimo di g risulterebbe $g'(b) \le 0$ per la Proposizione 1.3.4, contraddicendo $g'(b) > 0$.
Ne deduciamo che $a < c < b$. Quindi, per il Teorema di Fermat, $g'(c) = 0$, cioè $f'(c) - y = 0$.

Se $x > z$ è $a = z$ e $b = x$. Dunque $g'(a) > 0$ e $g'(b) < 0$. Per il Teorema di Weierstrass esiste $c \in [a, b]$ tale che $g(c) = \max_{[a,b]} g$. Di certo $c \neq a$. Infatti, $a = \min[a, b]$ e $g'(a) > 0$, dunque a non può essere un massimo locale di g e quindi tanto meno assoluto. Analogamente, $c \neq b$. Infatti, $b = \max[a, b]$ e $g'(b) < 0$, dunque b non può essere un massimo locale di g e quindi tanto meno assoluto. Ne deduciamo che $a < c < b$. Quindi, per il Teorema di Fermat, $g'(c) = 0$, cioè $f'(c) - y = 0$.

□

Segue dal Teorema 4.5.3 che condizione necessaria affinché una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, abbia primitiva è che $f(I)$ sia un intervallo.

Proposizione 4.5.4 (Condizione necessaria per l'esistenza di una primitiva). *$f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Se f ha una primitiva, allora $f(I)$ è un intervallo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Allora per il Teorema di Darboux $F'(I)$ è un intervallo, Da qui la tesi, essendo $F' = f$ per definizione di primitiva. □

Esempio 4.5.5. La funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{se } x \in]0, 1] \end{cases}$$

Si ha che $f \in \mathscr{R}([-1, 0])$ essendo f costante in $[-1, 0]$, $f \in \mathscr{R}([0, 1])$ per il Teorema 4.4.5. Dunque $f \in \mathscr{R}([-1, 1])$ per la Proposizione 4.3.7.
Se esistesse $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ primitiva di f, allora $F'([-1, 1]) = f([-1, 1]) = \{0, 1\}$, in contraddizione col Teorema di Darboux che afferma che la derivata di una funzione manda intervalli in intervalli.

Ora vogliamo dimostrare, tra le altre cose, che le funzioni continue hanno primitive (Teorema 4.5.10).

Definizione 4.5.6 (Funzione integrale).
Sia $f \in \mathscr{R}([a, b])$. Sia $x_0 \in [a, b]$. Allora la funzione $F_{x_0} : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$F_{x_0}(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

si chiama *funzione integrale* relativa ad x_0. Se $x_0 = a$, spesso scriveremo semplicemente F e la chiameremo *funzione integrale* di f, tacendo che è relativa ad a.

Osservazione 4.5.7.
Si noti che per la Proposizione 4.3.10, per ogni $x_0 \in [a, b]$ risulta

$$F_a(x) = F_{x_0}(x) + \int_a^{x_0} f(t)\, dt, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Dunque, per ogni $x_0 \in [a, b]$,

$$F_a \text{ è continua/derivabile in } x \text{ se e solo se } F_{x_0} \text{ è continua/derivabile in } x$$

e

$$F_a \text{ è una primitiva di } f \text{ se e solo se } F_{x_0} \text{ è una primitiva di } f.$$

Definizione 4.5.8 (Funzione lipschitziana). Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è lipschitziana se

$$\exists L > 0 \ : \ |f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad \forall x, y \in A. \tag{4.5.1}$$

Proposizione 4.5.9. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.*
Se f è lipschitziana, allora f è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi

$$\exists L > 0 \ : \ |f(x) - f(y)| \le L|x - y| \qquad \forall x, y \in A.$$

Per ogni $\epsilon > 0$, scelto $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{L}$ si ha

$$|f(x) - f(x')| \le L|x - x'| < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon \qquad \forall x, x' \in A, \ |x - x'| < \delta(\epsilon),$$

ossia f è uniformemente continua. □

Teorema 4.5.10 (Teorema fondamentale del calcolo integrale: versione generale).
Sia $f \in \mathscr{R}([a,b])$ e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, la funzione integrale

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

Valgono le seguenti:

(i) *F è lipschitziana (quindi anche continua),*
(ii) *se f è continua in x, allora F è derivabile in x e $F'(x) = f(x)$,*
(iii) *se f è continua, allora F è una primitiva di f.*

DIMOSTRAZIONE.
(i):
Essendo $f \in \mathscr{R}([a,b])$, allora in particolare f è limitata, ossia

$$\exists M > 0 \ : \ |f(x)| \le M \quad \forall x \in [a,b].$$

Siano $x', x'' \in [a,b]$, con $x' \ne x''$. Si ha

$$0 \le |F(x'') - F(x')| \overset{\text{Prop. 4.3.10}}{=} \left| \int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \right| \overset{Lemma\ 4.4.4}{\le} M \cdot |x'' - x'|.$$

Dunque F è lipschitziana.
(ii):
Supponiamo che sia f continua in $x \in [a,b]$. Allora

$$\lim_{t \to x} f(t) = f(x),$$

ossia

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ \left(\begin{bmatrix} t \in [a,b] \\ 0 < |t - x| < \delta \end{bmatrix} \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon \right). \tag{4.5.2}$$

Sia $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x + h \in [a,b]$, con $|h| < \delta$. Essendo $[a,b]$ un intervallo e $x, x+h \in [a,b]$, l'intervallo $[a, \max\{x, x+h\}]$ risulta incluso in $[a,b]$.

Per la Proposizione 4.3.10, riguardante la proprietà di additività dell'integrale, si ha

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt,$$

da cui

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt. \tag{4.5.3}$$

Osserviamo anche che

$$\int_x^{x+h} 1\,dt=h,$$

pertanto

$$f(x)h=f(x)\int_x^{x+h} 1\,dt=\int_x^{x+h} f(x)\,dt. \tag{4.5.4}$$

Dunque

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\overset{(4.5.3)}{=}\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}-f(x)=\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt-f(x)h}{h}\overset{(4.5.4)}{=}\frac{\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt}{h}. \tag{4.5.5}$$

Dalla continuità di f in x e da (4.5.2), si ha che se h è tale che $0<|h|<\delta$, allora

$$|t-x|<\delta \quad \text{per ogni } t \text{ nell'intervallo di estremi } x \text{ e } x+h$$

e quindi

$$0<|h|<\delta \quad\Rightarrow\quad \frac{\left|\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt\right|}{|h|}\overset{(4.5.2)+\text{Lemma 4.4.4}}{\leq}\frac{\epsilon\cdot|h|}{|h|}=\epsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ :\ \left(\begin{bmatrix} x+h\in[a,b]\\ 0<|h|<\delta\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|\leq\epsilon\right)$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=0,$$

che è equivalente a

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

Dunque esiste $F'(x)$ e vale $f(x)$.
(iii):
Immediata conseguenza di (ii). □

Definizione 4.5.11. Se $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ si è soliti usare le seguenti notazioni:

$$F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b=F|_a^b.$$

Teorema 4.5.12 (Teorema di Torricelli: formula fondamentale del calcolo integrale).
Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a) \tag{4.5.6}$$

dove F è una qualunque primitiva di f.

DIMOSTRAZIONE. Essendo f continua esse ha primitive per il Teorema 4.5.10 (iii). Vale dunque la tesi in virtù della Proposizione 4.5.2. □

Osservazione 4.5.13. La formula (4.5.6) si è soliti scriverla

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

ed è talvolta chiamata *formula fondamentale del calcolo integrale.*

Teorema 4.5.14 (Teorema della media integrale).
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua. Allora esiste* $\xi \in [a,b]$ *tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{4.5.7}$$

DIMOSTRAZIONE.
Dal Teorema di Weierstrass esistono $\min_{[a,b]} f$ e $\max_{[a,b]} f$ e quindi per la Proposizione 4.2.5

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f].$$

Dal Teorema di Bolzano (o dei valori intermedi) si ha che

$$f([a,b]) = [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f].$$

Quindi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in f([a,b]).$$

Dunque

$$\exists \xi \in [a,b] \;\; : \;\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Da qui la tesi. □

Osservazione 4.5.15.
Se $f \geq 0$ la formula (4.5.7) è una uguaglianza tra aree: l'area del sottografico $\Gamma(f)$ (primo membro di (4.5.7)) (v. Definizione 4.2.4) e l'area del rettangolo di base $[a,b]$ e di altezza $f(\xi)$ (secondo membro di (4.5.7)) .

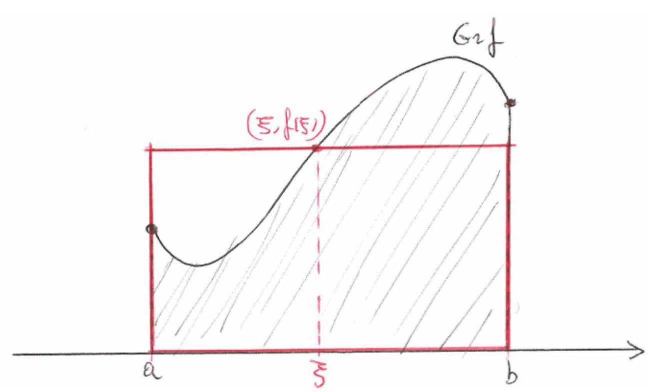


Figura 4

Esercizio 4.5.16. Dimostrare che nell'enunciato del Teorema 4.5.14 si può sostituire la tesi con: "Allora esiste $\xi \in]a,b[$..."

Diamo ora un'altra dimostrazione di Teorema 4.5.10 (iii), che non usa (ii) dello stesso teorema, ma il Teorema della media integrale 4.5.14.

DIMOSTRAZIONE. [Dimostrazione alternativa di (iii)]
Sia $x \in [a,b]$ e calcoliamo il limite del rapporto incrementale di F in x. Usando la proprietà di additività dell'integrale

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \overset{\text{Prop. } 4.3.10}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}. \tag{4.5.8}$$

Sia $h>0$. Allora per il teorema della media integrale (Teorema 4.5.14) esiste $x(h) \in [x, x+h]$ tale che

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{x+h-x} = f(x(h)).$$

Se $h<0$, allora per il teorema della media integrale (Teorema 4.5.14) esiste $x(h) \in [x+h, x]$ tale che

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = -\frac{\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt}{x-(x+h)} \overset{T.4.5.14}{=} f(x(h)).$$

Dunque, abbiamo che esiste $x(h)$ tale che

$$\min\{x, x+h\} \le x(h) \le \max\{x, x+h\}$$

e

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(x(h)). \tag{4.5.9}$$

Dato che

$$\lim_{h\to 0} \min\{x, x+h\} = \lim_{h\to 0} \max\{x, x+h\},$$

allora per il teorema dei Carabinieri si ha

$$\lim_{h\to 0} x(h) = x$$

e quindi, essendo f continua, sarà

$$\lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x).$$

Dunque per (4.5.9)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x).$$

Ricordandoci di (4.5.8) abbiamo dimostrato che esiste il limite del rapporto incrementale di F relativo a x, che è finito e vale $f(x)$, ossia esiste $F'(x)$ e vale $f(x)$. □

Definizione 4.5.17 (Integrale indefinito).
Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$. L'insieme

$$\{G : I \to \mathbb{R} : G \text{ è una primitiva di } f\}$$

si usa chiamarlo *integrale indefinito* di f e indicarlo col simbolo $\int f(x)\,dx$.

Conoscere una primitiva è sufficiente per conoscere tutte le altre.

Teorema 4.5.18 (Caratterizzazione delle primitive).
Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I. Se F è una primitiva di f, allora

$$\{G : I \to \mathbb{R} : G \textit{ è una primitiva di } f\} = \{F + c : I \to \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}.$$

DIMOSTRAZIONE.
$\subseteq$:
Sia G una primitiva di f. Allora $G - F : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in quanto differenza di funzioni derivabili e

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Per il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti deduciamo che $G - F$ è una funzione costante ossia che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) - F(x) = c$ per ogni $x \in I$. Ciò conclude la dimostrazione.
$\supseteq$:
Sia $G : I \to \mathbb{R}$ tale che esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$. Allora, G è derivabile, in quanto somma di funzioni derivabili, e

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Dunque G è una primitiva di f. □

Osservazione 4.5.19.
Usando la notazione introdotta nella Definizione 4.5.17, si ha che se $f : I \to \mathbb{R}$ e F è una primitiva di f, allora

$$\int f(x)\,dx = \{G : I \to \mathbb{R} : \text{esiste } c \in \mathbb{R} \text{ tale che } G(x) = F(x) + c\}$$

che viene semplificata, mediante un abuso di notazione, in

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

4.6. Integrazione per sostituzione

Teorema 4.6.1 (Formula di integrazione per sostituzione per l'integrale indefinito).
Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile, con I intervallo.
Sia $g : f(I) \to \mathbb{R}$ una funzione con una primitiva.
Allora

$$\{H : I \to \mathbb{R}\ H \textit{ è primitiva di } (g \circ f) \cdot f'\} = \{G \circ f : I \to \mathbb{R}\ G \textit{ è primitiva di } g\}.$$

In simboli:

$$\int g(f(x)) f'(x)\,dx = \int g(y)\,dy|_{y=f(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE.
$\subseteq$:
Per ipotesi esiste una primitiva di g. Sia essa $\tilde{G}$.
Allora per il Teorema di derivazione di funzione composta $\tilde{G} \circ f$ è una primitiva di $(g \circ f) \cdot f'$.
Essendo $\tilde{G} \circ f$ primitiva di $(g \circ f) \cdot f'$, allora per il Teorema 4.5.18

$$\{H : I \to \mathbb{R}\ H \text{ è primitiva di } (g \circ f) \cdot f'\} = \{\tilde{G} \circ f + c : I \to \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Essendo

$$\tilde{G} \circ f + c = (\tilde{G} + c) \circ f, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

abbiamo

$$\{H : I \to \mathbb{R}\ H \text{ è primitiva di } (g \circ f) \cdot f'\} = \{(\tilde{G} + c) \circ f : I \to \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}.$$

Essendo

$$\{G : f(I) \to \mathbb{R} : G \text{ primitiva di } g\} = \{\tilde{G} + c : f(I) \to \mathbb{R} : c \in \mathbb{R}\}$$

si ha

$$\{H : I \to \mathbb{R}\ H \text{ è primitiva di } (g \circ f) \cdot f'\} = \{G \circ f : I \to \mathbb{R} : G \text{ primitiva di } g\}.$$

Esse sono le funzioni $H : I \to \mathbb{R}$,

$$H = G \circ f + c, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte,

$$G \circ f + c = (G + c) \circ f, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Ora basta notare che la funzione $G + c$ è una primitiva di g
Quindi

$$H = (G + c) \circ f, \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Ora basta notare che la funzione $G + c$ è una primitiva di g per concludere che

$$\int g(f(x)) f'(x)\, dx \subseteq \int g(y)\, dy|_{y=f(x)}.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Usando le notazioni in Definizione 4.5.17 e Osservazione 4.5.19, dai Teoremi 4.6.1 e 4.5.18, si ha il seguente.

Corollario 4.6.2.
Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile e $g : f(I) \to \mathbb{R}$.
Se G è una primitiva di g, allora

$$\int g(f(x)) f'(x)\, dx = G(f(x)) + c.$$

Teorema 4.6.3 (I Formula di integrazione per sostituzione per l'integrale definito).
Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $g : J \to \mathbb{R}$*, con* J *intervallo reale tali che*

$$f([a,b]) \subseteq J.$$

Se f *è di classe* C^1 *e* g *è continua, allora*

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per il Teorema 4.5.10 la funzione continua g ha una primitiva.
Sia G una primitiva di g. Allora per il Teorema 4.5.12

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy = \big[G(y)\big]_{f(a)}^{f(b)} = G(f(b)) - G(f(a)).$$

Inoltre per il Teorema 4.6.1 $G \circ f$ è primitiva di $(g \circ f) \cdot f' : I \to \mathbb{R}$, dunque per il Teorema 4.5.12

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \big[(G \circ f)(x)\big]_a^b = G(f(b)) - G(f(a)).$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.$$

□

Teorema 4.6.4 (II Formula di integrazione per sostituzione per l'integrale definito).
Siano $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$*, con* I *intervallo reale tale che*

$$\alpha, \beta \in f(I).$$

Se f *è di classe* C^1 *e iniettiva e* g *è continua, allora*

$$\int_\alpha^\beta g(y)\,dy = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} g(f(x))f'(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dalle ipotesi $f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta) \in I$. Dunque, essendo I un intervallo sarà

$$[\min\{f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\}, \max\{f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\}] \subseteq I.$$

Inoltre f è $C^1(I)$, con I intervallo, e f è iniettiva, quindi f è strettamente monotona.
Se f è strettamente crescente, risulta

$$[\min\{f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\}, \max\{f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\}] = [f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)],$$

e

$$f : [f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)] \to [\alpha, \beta]$$

è biunivoca e strettamente crescente. La tesi segue dal Teorema 4.6.3, in quanto

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(y)\,dy = \int_{f(f^{-1}(\alpha))}^{f(f^{-1}(\beta))} g(y)\,dy \overset{Teo.\ 4.6.3}{=} \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} g(f(x))f'(x)\,dx.$$

Se f è strettamente decrescente risulta

$$\min\{f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\}, \max\{f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)\}] = [f^{-1}(\beta), f^{-1}(\alpha)]$$

e

$$f : [f^{-1}(\beta), f^{-1}(\alpha)] \to [\alpha, \beta]$$

è biunivoca e strettamente decrescente. La tesi segue dal Teorema 4.6.3, in quanto

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(y)\,dy = -\int_{\beta}^{\alpha} g(y)\,dy = -\int_{f(f^{-1}(\beta))}^{f(f^{-1}(\alpha))} g(y)\,dy$$

$$\overset{Teo.\ 4.6.3}{=} -\int_{f^{-1}(\beta)}^{f^{-1}(\alpha)} g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} g(f(x))f'(x)\,dx.$$

□

Osservazione 4.6.5. Confrontando gli integrali dell'uguaglianza

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy.$$

ci accorgiamo delle seguenti corrispondenze:

$$y = f(x)$$

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Dunque si deduce la seguente uguaglianza formale:

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Per quel che riguarda gli estremi di integrazione:

$$y = f(x) \Rightarrow \begin{bmatrix} x = a \Rightarrow y = f(a) \\ x = b \Rightarrow y = f(b) \end{bmatrix}$$

Lemma 4.6.6. *Sia $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$, con $a > 0$ e g continua.*
Allora

$$\int_{-a}^{0} g(y)\,dy = \int_0^a g(-y)\,dy.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : [0, a] \to [-a, 0]$, $f(x) = -x$. $f \in C^1([0, a])$ e strettamente decrescente. Allora, per il Teorema 4.6.4,

$$\int_{-a}^{0} g(y)\,dy = \int_a^0 g(-x)(-1)\,dx = \int_0^a g(-x)\,dx.$$

□

Proposizione 4.6.7. *Sia $g:[-a,a]\to\mathbb{R}$, con $a>0$ e g continua.*
Se g è pari, allora

$$\int_{-a}^{a} g(y)\,dy = 2\int_0^a g(x)\,dx.$$

Se g è dispari, allora

$$\int_{-a}^{a} g(y)\,dy = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 4.3.7 e il Lemma 4.6.6

$$\int_{-a}^{a} g(y)\,dy = \int_{-a}^{0} g(y)\,dy + \int_0^a g(y)\,dy = \int_0^a g(-y)\,dy + \int_0^a g(y)\,dy.$$

Se g è pari,

$$\int_0^a g(-y)\,dy = \int_0^a g(y)\,dy$$

da cui

$$\int_{-a}^{a} g(y)\,dy = 2\int_0^a g(y)\,dy.$$

Se g è dispari,

$$\int_0^a g(-y)\,dy = -\int_0^a g(y)\,dy$$

da cui

$$\int_{-a}^{a} g(y)\,dy = -\int_0^a g(y)\,dy + \int_0^a g(y)\,dy = 0.$$

□

Pur con tutte le cautele nell'uso della notazione assai imprecisa $\int f(x)\,dx$, e usando la notazione commentata nell'Osservazione 4.5.19, è utile crearsi una tabella con a sinistra le primitive di alcune funzioni elementari e accanto quelle di funzioni più complicate ad esse legate dal Teorema 4.6.1 e Corollario 4.6.2. Se ne dà un esempio parziale qui sotto. Il parametro c indica una costante arbitraria di $\mathbb{R}$.

Integrali immediati

$$\int 0\,dx = c$$

$$\int 1\,dx = x + c$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotan} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{sett}\sinh x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{sett}\cosh x + c$$

Integrali “quasi immediati”

$$\int f(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f^2(x) + c$$

$$\int f^\alpha(x)f'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}f^{\alpha+1}(x) + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \sin(f(x))f'(x)\,dx = -\cos(f(x)) + c$$

$$\int \cos(f(x))f'(x)\,dx = \sin(f(x)) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))}f'(x)\,dx = \tan(f(x)) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(f(x))}f'(x)\,dx = -\operatorname{cotan}(f(x)) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-f(x)^2}}f'(x)\,dx = \arcsin(f(x)) + c = -\arccos(f(x)) + k$$

$$\int \frac{1}{1+f(x)^2}f'(x)\,dx = \arctan(f(x)) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+f(x)^2}}f'(x)\,dx = \operatorname{sett}\sinh(f(x)) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)^2-1}}f'(x)\,dx = \operatorname{sett}\cosh(f(x)) + c$$

4.7. Integrazione per parti

Introduciamo la seguente notazione:

Definizione 4.7.1.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Allora

$$y + A := \{y + a : a \in A\}.$$

Teorema 4.7.2 (Formula di integrazione per parti per l'integrale indefinito).
Sia I intervallo e siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili.
Se esiste una primitiva di $f' \cdot g : I \to \mathbb{R}$, allora

$$\{k : I \to \mathbb{R} : h \text{ è primitiva di } fg'\} = \{fg - h : I \to \mathbb{R} : h \text{ è primitiva di } f'g\}.$$

Con la notazione introdotta nella Definizione 4.7.1:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f \cdot g - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
$\supseteq$:
Per ipotesi $f' \cdot g$ ha almeno una primitiva.
Sia h una primitiva di $f' \cdot g$. Allora $fg - h : I \to \mathbb{R}$ è derivabile, in quanto differenza di funzioni derivabili, e

$$(fg - h)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = f(x)g'(x).$$

Pertanto $fg - h$ è una primitiva di fg'.
$\subseteq$:
Sia $k : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di $fg' : I \to \mathbb{R}$ e sia h una primitiva di $f'g$. Da quanto appena dimostrato $fg - h$ è una primitiva di fg'. Allora, per il Teorema 4.5.18 di caratterizzazione delle primitive,

$$\exists c \in \mathbb{R} : k = fg - h + c$$

da cui

$$\exists c \in \mathbb{R} : k = fg - (h - c).$$

Essendo $h - c : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di $f'g$ abbiamo che k è differenza di fg e di una primitiva di fg', che è quanto si desiderava dimostrare. □

Teorema 4.7.3 (Formula di integrazione per parti per l'integrale definito).
Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1. Allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dato che $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^1, allora fg' e $f'g$ sono continue in $[a, b]$.
Dato che $f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $(f \cdot g)' : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora

$$[f(x)g(x)]_a^b \overset{Pr.\ 4.5.2\ o\ T.\ 4.5.12}{=} \int_a^b (f \cdot g)'(x)\,dx \overset{Prop.\ 4.3.5(c)}{=} \int_a^b f(x)g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

e si ha la tesi. □

Esercizio 4.7.4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Calcolare

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx, \qquad \int_a^b \cos^2(x)\,dx$$

e verificare che

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$
$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

ma che

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\,dx.$$

Sol:
I modo:
Dalla formula di duplicazione, $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, quindi

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b dx - \frac{1}{2}\int_a^b \cos(2x)\,dx.$$

Il primo integrale a secondo membro è facile da trattare:

$$\frac{1}{2}\int_a^b 1\,dx = \frac{1}{2}(b-a).$$

Il secondo integrale può essere ricondotto a un integrale "quasi immediato": definendo $f(x) = 2x$, riconosciamo che

$$\int_a^b \cos(2x)2\,dx = \int_a^b \cos(f(x))f'(x)\,dx = [\sin(f(x))]_a^b.$$

Dunque

$$\frac{1}{2}\int_a^b \cos(2x)\,dx = \frac{1}{4}\int_a^b \cos(2x)2\,dx = \frac{1}{4}[\sin(2x)]_a^b.$$

Concludiamo che

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{b-a}{2} - [\sin(2x)]_a^b.$$

II modo:

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \int_a^b \sin(x)\sin(x)\,dx.$$

Posto

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$
$$g'(x) = \sin(x) \Rightarrow g(x) = -\cos(x)$$

e integrando per parti,

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_a^b - \int_a^b \cos(x)(-\cos(x))\,dx$$

ossia

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b \cos^2(x)\,dx.$$

L'integrale a secondo membro ha la stessa difficoltà di essere calcolato di quello a primo membro, ma usando la formula fondamentale $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ deduciamo che

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_a^b + \int_a^b (1-\sin^2(x))\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_a^b + (b-a) - \int_a^b \sin^2(x)\,dx.$$

Allora

$$2\int_a^b \sin^2(x)\,dx = [-\sin(x)\cos(x)]_a^b + (b-a),$$

da cui

$$\int_a^b \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\Big([-\sin(x)\cos(x)]_a^b + b - a\Big).$$

Il caso di funzone integranda $\cos^2(x)$ e le verifiche delle uguaglianze/disuguaglianze per $a=0$ e $b=2\pi,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}$ le lasciamo al lettore.

4.8. Suggerimenti e primi esercizi

Ricordare le seguenti uguaglianze:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x},$$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh x\cosh x \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(2x) = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Ricordare inoltre che a volte può essere conveniente effettuare le seguenti sostituzioni:

$$\int R(e^x)\,dx \quad [e^x = t] \quad \Rightarrow \quad \int R(t)\frac{1}{t}\,dt$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx \quad \left[\tan\frac{x}{2} = t\right] \quad \Rightarrow \quad \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx \quad [\tan x = t] \quad \Rightarrow \quad \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\int R(\big(x, (a+bx)^{m/n}, (a+bx)^{p/q}\big)\,dx \quad (m,n,p,q \in \mathbb{N}) \quad \big[(a+bx)^{1/r} = t, \text{con } r := \text{mcm}\{n,q\}\big] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int R\left(\frac{t^r - a}{b}, t^{rm/n}, t^{rp/q}\right)\frac{r}{b}t^{r-1}\,dt$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{a+bx}{cx+d}\right)^{m/n}\right)dx \quad (m,n \in \mathbb{N}) \quad \left[\frac{a+bx}{cx+d} = t^n \Leftrightarrow x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int R\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t^m\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})\,dx \quad [x = \sinh t] \quad \Rightarrow \quad \int R(\sinh t, \cosh t)\cosh t\,dt$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})\,dx \quad [x = \cosh t] \quad \Rightarrow \quad \int R(\cosh t, |\sinh t|)\sinh t\,dt,$$

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\,dx \quad [x = \sin t] \quad \Rightarrow \quad \int R(\sin t, |\cos t|)\cos t\,dx$$

$$\text{oppure} \qquad [x = \cos t] \quad \Rightarrow \quad \int -R(\cos t, |\sin t|)\sin t\,dx$$

(1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{t}{t^2+3}\,dt \qquad [\tfrac{1}{2}\log(t^2+3)+c]$$

$$\int \frac{2t^3-t^2+5t-3}{t^2+3}\,dt \qquad [t^2-t-\tfrac{1}{2}\log(t^2+3)+c]$$

$$\int \frac{t+2}{2t^2-t-1}\,dt \qquad [\tfrac{1}{2}\log\tfrac{(t-1)^2}{|2t+1|}+c]$$

$$\int \frac{t^3-2t+1}{-2t^2+t+1}\,dt \qquad [\tfrac{1}{4}(-t^2-t)+\tfrac{5}{8}\log|2t+1|+c]$$

$$\int x\log x\,dx \qquad [\tfrac{1}{4}x^2(2\log(x)-1)+c]$$

$$\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad [-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+c]$$

$$\int \frac{\log x}{\sqrt{x^5}}\,dx \qquad [-\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{\sqrt{x^3}}\left(\log(x)+\tfrac{2}{3}\right)+c]$$

$$\int \frac{\log^2 x}{\sqrt{x^5}}\,dx \qquad [-\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{\sqrt{x^3}}\log^2(x)-\tfrac{8}{9}\tfrac{1}{\sqrt{x^3}}\left(\log(x)+\tfrac{2}{3}\right)+c]$$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad [e^{\arcsin x}+c]$$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{3-\cos^2 x}}\,dx \qquad [2\sqrt{3-\cos^2(x)}+c]$$

$$\int \frac{x}{x^4+2x^2+5}\,dx \qquad [\tfrac{1}{4}\arctan\tfrac{x^2+1}{2}+c]$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+5}\,dx \qquad [\tfrac{1}{2\sqrt{5}}\arctan\tfrac{e^{2x}}{\sqrt{5}}+c]$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}\,dx \qquad [\tfrac{1}{4\sqrt{5}}\log\left|\tfrac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right|+c]$$

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \qquad [3\sqrt{x^2+4}-2\log\left(\tfrac{x}{2}+\sqrt{1+\tfrac{x^2}{4}}\right)+c]$$

$$\int \frac{(-\cos^3 x+\cos x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad [\tfrac{1}{2}\cos^2(x)-\log(\cos^2 x+1)+c]$$

$$\int \log(x^2+3)\,dx \qquad [x\log(x^2+3)-2\left(x-\sqrt{3}\arctan(\tfrac{x}{\sqrt{3}})\right)+c]$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \qquad [2\sqrt{\cos x}-\tfrac{2}{5}(\cos x^{5/2})+c]$$

(2) Calcolare i seguenti integrali definiti

$$\int_0^2 \frac{dx}{2x^2+8x+20}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+x-6}\,dx,$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{4+4e^{2x}+e^{4x}}\,dx, \qquad \int_1^{e^2} x\log x\,dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1-\cos x}{\sin x-\sin^2 x}\,dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \sin^2 x\cos x\,dx,$$

$$\int_1^2 \frac{x}{x^4+1}\,dx, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{|\cos x|\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$$

(3) Risolvere l'equazione

$$\int_0^x t\sqrt{1-2t^2}\,dt = \frac{1}{12}.$$

(4) Calcolare le primitive nulle in 0 di: $f_1(x) = e^x\cos x$ e $f_2(x) = \dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$.

(5) Calcolare la primitiva F di $f(x) = \arctan\sqrt{x}$ tale che $F(0) = \pi$.

(6) Calcolare l'area
   (a) della regione del primo quadrante compresa tra la circonferenza di centro 0 e raggio 1 e la retta $y = -x+1$,
   (b) della regione compresa tra la circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt{8}$ e la parabola $y^2 = 2x$,
   (c) della regione compresa tra l'asse delle ascisse, le rette $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$, e il grafico della funzione $\dfrac{-1}{\cos^2 x\sqrt{2+5\tan x}}$,
   (d) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$, l'asse delle ascisse e le rette $x = \frac{1}{2}$ e $x = 3$,
   (e) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = \dfrac{2x^3-x^2+5x-3}{x^2+3}$, il suo asintoto obliquo a $+\infty$ e le rette $x = 0$ e $x = 3$,
   (f) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = e^x$, la retta tangente al grafico nel punto di ascissa 1 e la retta $x = 0$,
   (g) della regione compresa tra il grafico di $f(x) = x^2-2x$, la retta tangente al grafico nel punto di ascissa -1 e la retta $x = 1$.

(7) Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \frac{-t^2+2t}{-2t^2-2t-1}\,dt \qquad \int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1+2t+2t^2}\,dt \qquad \int \frac{1}{2x^2-6x}\,dx$$

$$\int \frac{2t-5}{3t^2-4t+3}\,dt \qquad \int \frac{e^x}{1-2e^x+e^{2x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx \qquad \int \frac{1}{\sin 2y}\,dy$$

$$\int \cos x \log(\sin^2 x+3)\,dx \qquad \int \frac{e^{2x}}{\sin e^{2x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x(1+4\log^2 x)}\,dx \qquad \int \frac{\sin^2(\log x)}{x}\,dx$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\cos e^{2x}}\,dx \qquad \int \frac{\tan^3 x+1}{\sin^2 x-2}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \qquad \int e^x \cos x\,dx$$

$$\int (x^2+5x+6)\cos(2x)\,dx \qquad \int x^3 e^{-x/3}\,dx$$

$$\int x \sin x \cos x\,dx \qquad \int x \sin^2 x\,dx$$

$$\int \arctan t\,dt \qquad \int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$$

CAPITOLO 5

Integrali generalizzati

5.1. Definizioni

Definizione 5.1.1 (Integrale generalizzato in $[a, b[$: esistenza e non esistenza).
Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, tale che $f \in \mathscr{R}([a, \beta])$ per ogni $\beta \in [a, b[$.
Diciamo che l'*integrale generalizzato* $\int_a^b f(x)\, dx$ *esiste* se

$$\exists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\, dx.$$

In tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\, dx. \tag{5.1.1}$$

Se il limite (5.1.1) non esiste, diciamo che l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ *non esiste* o *è indeterminato*.

Definizione 5.1.2 (Integrale generalizzato in $[a, b[$: convergenza e divergenza).
Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$. Se l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ esiste, diciamo che esso è *convergente* oppure *divergente a* $\pm\infty$ se il limite in (5.1.1) è un numero reale oppure $\pm\infty$.

Definizione 5.1.3 (Funzione integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$).
Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$. Diciamo che f è *integrabile in senso generalizzato* in $[a, b[$ se l'integrale generalizzato $\int_a^b f(x)\, dx$ è convergente.

Si usa dire "studiare il carattere" di un integrale generalizzato al posto di "stabilire se l'integrale generalizzato è convergente, divergente o indeterminato".

In modo analogo, si può trattare il caso $f :]a, b] \to \mathbb{R}$.

Teorema 5.1.4.
Valgono le seguenti:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx \left[\begin{array}{ll} \textit{converge} & \textit{se } \alpha > 1 \\ \textit{diverge a } +\infty & \textit{se } \alpha \le 1 \end{array} \right.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx \left[\begin{array}{ll} \textit{converge} & \textit{se } \alpha < 1 \\ \textit{diverge a } +\infty & \textit{se } \alpha \ge 1 \end{array} \right.$$

DIMOSTRAZIONE.
È una semplice verifica, basandosi sulla definizione di integrale generalizzato. □

Corollario 5.1.5.
Sia $f_\alpha :]0,\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha}.$$

Allora

$$f_\alpha \textit{ è integrabile in senso generalizzato in }]0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

$$f_\alpha \textit{ è integrabile in senso generalizzato in } [1,+\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

Trattiamo ora il caso più complicato $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Definizione 5.1.6.
Sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le +\infty$.
Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in $]a,b[$ se, preso $c \in]a,b[$, f è integrabile in senso generalizzato in $]a,c]$ e in $[c,b[$.
In tal caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se la somma a secondo membro invece è $\pm\infty$ diciamo che l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ è divergente a $\pm\infty$.
Se almeno uno tra $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ non esiste oppure la loro somma è una forma indeterminata (vale a dire $+\infty + (-\infty)$ o $-\infty + (+\infty)$), allora diciamo che $\int_a^b f(x)\,dx$ non esiste o non ha senso.

Osservazione 5.1.7.
È indifferente la scelta di c nella Definizione 5.1.6. Infatti, se $a < c' < c'' < b$, per ogni $\alpha \in]a,c'[$ e ogni $\beta \in]c'',b[$ si ha

$$\int_\alpha^{c''} f(x)\,dx = \int_\alpha^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx$$

$$\int_{c''}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{c'}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx$$

dove $\int_{c'}^{c''} f(x)\,dx$ è un numero reale indipendente da α e da β. Dunque

$$\lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^{c''} f(x)\,dx \text{ esiste/converge/diverge a } \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^{c'} f(x)\,dx \text{ esiste/converge/diverge a } \pm\infty$$

e

$$\lim_{\beta\to b^-} \int_{c''}^{\beta} f(x)\,dx \text{ esiste/converge/diverge a } \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\beta\to b^-} \int_{c'}^{\beta} f(x)\,dx \text{ esiste/converge/diverge a } \pm\infty.$$

5.2. Proprietà dell'integrale generalizzato

Proposizione 5.2.1.
Siano $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se esiste $\int_a^b f(x)\,dx$ *allora esiste* $\int_a^b \lambda f(x)\,dx$ *e*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
Si ha

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta \lambda f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \lambda \int_a^\beta f(x)\,dx = \lambda \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Proposizione 5.2.2.
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$.
Se esistono $\int_a^b f(x)\,dx$ *e* $\int_a^b g(x)\,dx$, *e se*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

non si presenta nella forma indeterminata $+\infty + (-\infty)$ *o* $-\infty + (+\infty)$, *allora esiste* $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx$ *e*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ogni $\beta \in [a, b[$

$$\int_a^\beta (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^\beta f(x)\,dx + \int_a^\beta g(x)\,dx.$$

Mandando β a b, si ottiene la tesi applicando l'algebra dei limiti. □

Lemma 5.2.3.
Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, *tale che* $f \in \mathscr{R}([a, \beta])$ *per ogni* $\beta \in [a, b[$.
Sia $c \in]a, b[$. *Allora* $\int_a^b f(x)\,dx$ *e* $\int_c^b f(x)\,dx$ *hanno lo stesso carattere.*

DIMOSTRAZIONE.
Per la Proposizione 4.3.7, per ogni $\beta \in]c, b[$ si ha

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\beta f(x)\,dx.$$

Essendo $\int_a^c f(x)\,dx$ un numero reale si ha

$$\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx \text{ esiste/converge/diverge a } \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\beta\to b^-} \int_c^\beta f(x)\,dx \text{ esiste/converge/diverge a } \pm\infty.$$

□

Osservazione 5.2.4.
Sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. Dal Lemma 5.2.3 segue che un criterio per lo studio del carattere di un integrale generalizzato $\int_a^b f(x)\,dx$, che richieda, ad esempio, $f \ge 0$, può essere applicato anche per funzioni che sono non negative solo in un intorno sinistro di b. Un esempio di risultato di questo tipo è il seguente importante risultato (Teorema 5.2.5).

Teorema 5.2.5.
Sia $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, *tale che*

(a) $f \in \mathscr{R}([a,\beta])$ *per ogni* $\beta \in [a,b[$,

(b) $f \ge 0$.

Allora $\int_a^b f(x)\,dx$ *esiste e*

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \textit{o converge a un numero non negativo oppure diverge a } +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE.
Si definisca $F : [a,b[\to \mathbb{R}$, $F(\beta) := \int_a^\beta f(x)\,dx$. La funzione è ben posta per l'ipotesi (a). Dall'ipotesi (b) e dal Corollario 4.2.6 si ha che $F \ge 0$.
Per ogni $x_1, x_2 \in [a,b[$, $x_1 < x_2$ si ha

$$F(x_2) \overset{Prop. 4.3.7}{=} F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \overset{Cor. 4.2.6}{\ge} F(x_1).$$

Dunque F è crescente e non negativa, quindi esiste il seguente limite

$$\lim_{\beta\to b^-} F(\beta) = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$$

ed esso è non negativo oppure $+\infty$. Da qui la tesi. □

5.3. Intervalli limitati: condizione sufficiente per la convergenza

Lemma 5.3.1.
Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$.
Allora

$$(f \textit{ continua e limitata}) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \textit{ convergente.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi, esiste $M > 0$ tale che

$$|f(x)| \le M \ \ \forall x \in]a,b].$$

Consideriamo la funzione

$$\tilde f : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \tilde f(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]a,b] \\ M & \text{se } x = a \end{cases} \tag{5.3.1}$$

Per definizione di M,

$$|\tilde{f}(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,b],$$

dunque $\tilde{f}$ è limitata in $[a,b]$ e continua in $]a,b]$. Allora per il Teorema 4.4.5 $\tilde{f} \in \mathscr{R}([a,b])$, il valore di $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$ non dipende da $\tilde{f}(a)$ e

$$\mathbb{R} \ni \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx \overset{(4.4.1)}{=} \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b \tilde{f}(x)\,dx \overset{(5.3.1)}{=} \lim_{\delta\to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Dunque il limite a destra esiste ed è finito, ossia f è integrabile in senso generalizzato in $]a,b]$. □

Proposizione 5.3.2.
Sia $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$.
Allora

$$(f \textit{ continua e } \exists \lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \ \textit{ convergente.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $\ell := \lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione

$$\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]a,b] \\ \ell & \text{se } x = a. \end{cases}$$

La funzione $\tilde{f}$ è continua in $[a,b]$ e quindi per il Teorema di Weierstrass è limitata, ossia esiste $M > 0$ tale che

$$|\tilde{f}(x)| \leq M \ \ \forall x \in [a,b],$$

il che implica

$$|f(x)| \leq M \ \ \forall x \in]a,b].$$

Pertanto f è continua e limitata in $]a,b]$ e quindi dal Lemma 5.3.1 segue la tesi.. □

Esempio 5.3.3.
L'integrale

$$\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$$

converge per il Lemma 5.3.1.
Infatti la funzione

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sin\frac{1}{x}.$$

è continua e $-1 \leq f(x) \leq 1$ per ogni $x \in]0,1]$.

Esempio 5.3.4.
L'integrale

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge per la Proposizione 5.3.2.

Infatti la funzione

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

è continua e $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

5.4. Intervalli illimitati: condizione necessaria per la convergenza

Teorema 5.4.1 (Intervalli illimitati: condizione necessaria per la convergenza).
Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, tale che

(a) $f \in \mathscr{R}([a, \beta])$ *per ogni* $\beta > a$,
(b) $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi (b) esiste $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Supponiamo che esso sia non nullo. Allora o $\ell \in]0, +\infty]$ oppure $\ell \in [-\infty, 0[$.
Caso $\ell \in]0, +\infty]$:
Sia M il numero positivo così definito:

$$M := \begin{cases} 1 & \text{se } \ell = +\infty \\ \frac{\ell}{2} & \text{se } \ell > 0 \end{cases}$$

Per definizione di limite, esiste $\bar{x} > a$ tale che $f(x) \geq M$ per ogni $x \geq \bar{x}$. Allora
Per ogni $\beta > \bar{x}$ si ha

$$\int_{\bar{x}}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\bar{x}}^{\beta} M\,dx = M \cdot (\beta - \bar{x}).$$

Mandando β a $+\infty$, otteniamo dal Teorema del confronto che

$$\int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int_{\bar{x}}^{\beta} f(x)\,dx = +\infty.$$

Per il Lemma 5.2.3 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_{\bar{x}}^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere, pertanto

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty.$$

Ciò contraddice l'ipotesi di convergenza dell'integrale generalizzato.
Caso $\ell \in [-\infty, 0[$:
Si ragiona in modo analogo. □

Corollario 5.4.2.
Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, tale che

(a) $f \in \mathscr{R}([a, \beta])$ *per ogni* $\beta > a$,
(b) $f(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in [a, +\infty[$,

Allora

$$(\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0) \quad \Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE.
Conseguenza dei Teoremi 5.4.1 e 5.2.5. □

Si noti che nel Teorema 5.4.1 e nel Corollario 5.4.2 l'ipotesi che esista $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non è eliminabile. Infatti, una funzione f continua potrebbe essere integrabile in senso generalizzato in $[a,+\infty[$ non solo senza che esista il $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, ma addirittura senza che f sia limitata. Si veda il seguente esempio.

Esempio 5.4.3. $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} n + n^2 2^n (x-n) & \text{se } x \in \left[n - \frac{1}{n2^n}, n\right] \text{ con } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ n - n^2 2^n (x-n) & \text{se } x \in \left[n, n + \frac{1}{n2^n}\right] \text{ con } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{n2^n}, n + \frac{1}{n2^n}\right]. \end{cases}$$

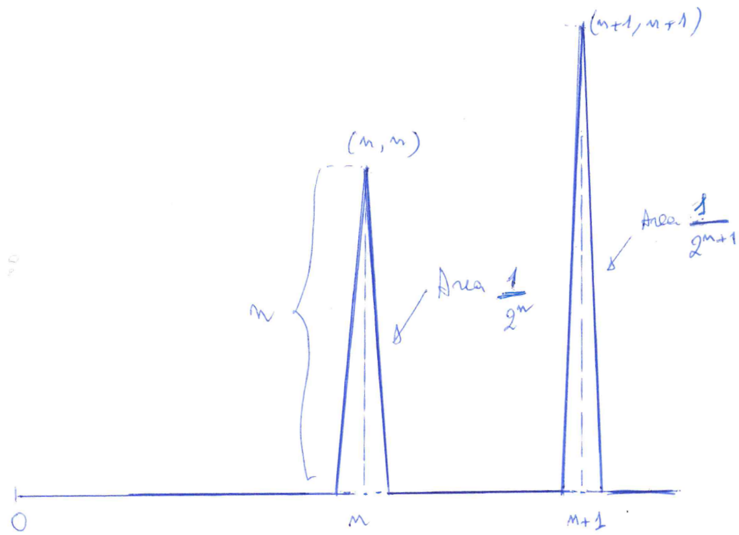


Figura 1. Il grafico della funzione f dell'Esempio 5.4.3

La funzione è continua, non negativa,

$$f(n) = n, \qquad f\Big(\frac{n+1}{2}\Big) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque f è illimitata e $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Per il Teorema 5.2.5, dalla non negatività di f segue che $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ esiste ed esso è convergente o divergente a $+\infty$. Dimostriamo che è divergente.

Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\int_{n-\frac{1}{n2^n}}^{n+\frac{1}{n2^n}} f(x)\,dx = \int_{n-\frac{1}{n2^n}}^{n} (n + n^2 2^n (x-n))\,dx + \int_{n}^{n+\frac{1}{n2^n}} (n - n^2 2^n (x-n))\,dx = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Dunque, dalla definizione di f, dalla Proposizione 4.3.8 e dal conto qui sopra si ha

$$\int_0^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{k2^k}}^{k+\frac{1}{k2^k}} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

È facile dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left((\frac{1}{2})\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

il che implica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 2(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) - 1 = 1 - 2(\frac{1}{2})^{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ne deduciamo che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - 2(\frac{1}{2})^{n+1}\right) = 1.$$

5.5. Criteri di convergenza

Lemma 5.5.1.
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, tali che

(a) *$f, g \in \mathscr{R}([a, \beta])$ per ogni $\beta \in [a, b[$,*
(b) *$f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in [a, b[$.*

Se esistono $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per la monotonia dell'integrale (Proposizione 4.3.5 (c))

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \overset{Pr.\ 4.3.5(c)}{\le} \int_a^\beta g(x)\,dx \qquad \forall \beta \in [a, b[.$$

Passando al limite, dal Teorema del confronto per le funzioni otteniamo

$$\lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx \le \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta g(x)\,dx.$$

Da qui la tesi. □

Se nel Lemma precedente aggiungiamo l'informazione $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, allora è gratuita l'esistenza di $\int_a^b g(x)\,dx$ che risulta anch'esso divergente a $+\infty$. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 5.5.2 (I Teorema del confronto: il caso della divergenza).
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, *tali che*

(a) $f \in \mathscr{R}([a, \beta])$ *per ogni* $\beta \in [a, b[$,
(b) $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a, b[$.

Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per la monotonia dell'integrale

$$\int_a^\beta f(x)\,dx \overset{Pr.\ 4.3.5\ (c)}{\leq} \int_a^\beta g(x)\,dx \qquad \forall \beta \in [a, b[. \tag{5.5.1}$$

Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora

$$+\infty = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Da (5.5.1) e dal criterio del confronto per le funzioni otteniamo che

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta g(x)\,dx = +\infty.$$

Dunque $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ esiste ed è divergente a $+\infty$. □

Teorema 5.5.3 (II Teorema del confronto: il caso della convergenza).
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq +\infty$, *tali che*

(a) $f, g \in \mathscr{R}([a, \beta])$ *per ogni* $\beta \in [a, b[$,
(b) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a, b[$.

Allora

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \left(\int_a^b f(x)\,dx \text{ convergente e } 0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx\right).$$

DIMOSTRAZIONE.
Siano f e g soddisfacenti le ipotesi e sia g integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$.
Essendo $f \geq 0$, allora per il Teorema 5.2.5 l'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è convergente a un numero non negativo o divergente a $+\infty$. Quindi, per il Lemma 5.5.1

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx < \infty.$$

Dunque non può essere $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$. □

Esempio 5.5.4.

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx = +\infty \quad \forall \alpha \le 1.$$

Infatti:

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx \quad \text{e} \quad \int_e^{\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx \ \text{ hanno lo stesso carattere.}$$

Si ha

$$\frac{\log x}{x^\alpha} \ge \frac{1}{x^\alpha} \qquad \forall x \ge e.$$

La tesi segue dal Teorema 5.5.2, essendo (v. Teorema 5.1.4 e il Lemma 5.2.3)

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = +\infty.$$

Esempio 5.5.5.

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{x^\alpha}\, dx \ \text{ converge} \quad \forall \alpha > 1.$$

Infatti, essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\epsilon} = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

allora

$$\exists \bar{x} \ : \ \log x < x^\epsilon \quad \forall x \ge \bar{x}.$$

Quindi

$$\frac{\log x}{x^\alpha} < \frac{x^\epsilon}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\epsilon}} \quad \forall x \ge \bar{x}.$$

Essendo $\alpha > 1$ possiamo scegliere $\epsilon > 0$ tale che $\alpha - \epsilon > 1$ (ad es. $\epsilon = \frac{\alpha-1}{2}$). Allora la tesi segue dal Teorema 5.5.2, essendo (v. Teorema 5.1.4)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\epsilon}}\, dx \quad \text{convergente.}$$

Esercizio 5.5.6. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha |\log x|^\beta}\, dx \left[\begin{array}{ll} \text{converge} & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha < 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array} \right. \\ \\ = +\infty & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha > 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta \le 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Esercizio 5.5.7. Dimostrare che

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta}\,dx \quad \left[\begin{array}{lcl} \text{converge} & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \alpha > 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array}\right. \\ \\ = +\infty & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \alpha < 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta \le 1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Esercizio 5.5.8. Dimostrare che

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x}\,dx \quad \left[\begin{array}{lcl} \text{converge} & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \beta > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \beta = 0 \text{ e } \alpha < -1 \end{array}\right. \\ \\ = +\infty & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \beta < 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \beta = 0 \text{ e } \alpha \ge -1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Teorema 5.5.9 (Teorema del confronto asintotico).
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, *tali che*

(a) $f, g \in \mathscr{R}([a, \beta])$ *per ogni* $\beta \in [a, b[$,
(b) $f, g > 0$ *in* $[a, b[$.

Allora

$$f(x) \sim g(x) \ \ \textit{per } x \to b^- \quad \Rightarrow \quad \left(\int_a^b f(x)\,dx \ \ \textit{e} \ \int_a^b g(x)\,dx \ \ \textit{hanno lo stesso carattere.} \right)$$

DIMOSTRAZIONE.
Essendo f e g non negative, allora per il Teorema 5.2.5 $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ esistono e possono essere o convergenti o divergenti a $+\infty$.
Per ipotesi, esiste $\bar{x}$, con $a < \bar{x} < b$ tale che

$$\frac{1}{2} g(x) \le f(x) \le 2g(x) \qquad \forall x \in [\bar{x}, b[. \tag{5.5.2}$$

Per il Lemma 5.2.3 $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_{\bar{x}}^b f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere e, similmente, $\int_a^b g(x)\,dx$ e $\int_{\bar{x}}^b g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere.
Se $\int_{\bar{x}}^b f(x)\,dx = +\infty$ allora per il Teorema 5.5.3 e per la seconda disuguaglianza in (5.5.2) si ha

$$\int_{\bar{x}}^b 2g(x)\,dx = +\infty$$

e quindi

$$\int_{\bar{x}}^b g(x)\,dx = +\infty.$$

Se $\int_{\bar{x}}^{b} f(x)\,dx$ converge, allora per il Teorema 5.5.2 e per la prima disuguaglianza in (5.5.2) si ha che

$$\int_{\bar{x}}^{b} \frac{1}{2} g(x)\,dx \text{ converge,}$$

quindi anche $\int_{\bar{x}}^{b} g(x)\,dx$ converge. □

Esercizio 5.5.10. Studiamo il carattere dell'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x |\sin \frac{1}{x}|^{\alpha}}{x^3}\,dx, \qquad \alpha > 0.$$

La funzione $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\arctan(x) |\sin \frac{1}{x}|^{\alpha}}{x^3}$$

è continua e non negativa. Si ha $0 < \frac{1}{x} \le 1 < \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \ge 1$, quindi

$$\left|\sin \frac{1}{x}\right| = \sin \frac{1}{x} \qquad \forall x \ge 1.$$

Si ha che

$$\frac{\arctan(x) \left|\sin \frac{1}{x}\right|^{\alpha}}{x^3} = \frac{\arctan(x) \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{x^3} \sim \frac{\pi}{2} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{x^3} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^{3+\alpha}} \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Per il Teorema 5.1.4 si ha

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3+\alpha}}\,dx \quad \left[\begin{array}{ll} \text{convergente} & \text{se } 3+\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > -2 \\ = +\infty & \text{se } 3+\alpha \le 1 \Leftrightarrow \alpha \le -2 \end{array} \right.$$

Per il Teorema 5.5.9

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x |\sin \frac{1}{x}|^{\alpha}}{x^3}\,dx$$

ha lo lo stesso carattere di

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3+\alpha}}\,dx.$$

Quindi

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3+\alpha}}\,dx \quad \left[\begin{array}{ll} \text{convergente} & \text{se } \alpha > -2 \\ = +\infty & \text{se } \alpha \le -2 \end{array} \right.$$

5.6. Integrazione per parti per gli integrali generalizzati

Teorema 5.6.1 (Formula di integrazione per parti per gli integrali generalizzati).
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$, funzioni di classe C^1. Supponiamo

(a) *$f' g$ integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$*
(b) $\exists \lim_{x \to b^-} f(x) g(x)$.

Allora

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

dove

$$[f(x)g(x)]_a^b := \lim_{x\to b^-} (f(x)g(x) - f(a)g(a)).$$

DIMOSTRAZIONE.
Dato che f e g sono funzioni di classe C^1, allora fg' e $f'g$ sono continue in $[a,b[$, dunque $fg', f'g \in \mathscr{R}([a,\beta])$ per ogni $\beta \in]a,b[$. Per il Teorema di integrazione per parti (Teorema 4.7.3) si ha

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x)g(x)\,dx$$

Usando (a) e (b) si ha che il secondo membro ha limite per x che tende a b^-, ottenendo così la tesi. □

5.7. Assoluta integrabilità

Definizione 5.7.1 (Funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato in $[a,b[$).
Sia $f:[a,b[\to\mathbb{R}$, $-\infty < a < b \le +\infty$. Diciamo che f è *assolutamente integrabile* in senso generalizzato in $[a,b[$ se l'integrale generalizzato $\int_a^b |f(x)|\,dx$ è convergente.

Teorema 5.7.2 (Assoluta integrabilità implica integrabilità).
Sia $f:[a,b[\to\mathbb{R}$, $-\infty<a<b\le+\infty$, *tale che* $f\in\mathscr{R}([a,\beta])$ *per ogni* $\beta\in]a,b[$.
Allora

$$f \text{ è ass. integrabile in s.g. in } [a,b[\;\Rightarrow\; \left(f \text{ è integrabile in s.g. in } [a,b[\text{ e } \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\right).$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi, f è assolutamente integrabile in $[a,b[$, ossia $\int_a^b |f(x)|\,dx$ esiste ed è convergente.
Consideriamo $f^+, f^- : [a,b[\to\mathbb{R}$, parte positiva e parte negativa di f (si veda Definizione 4.3.3). Essendo $f^\pm$ funzioni non negative, allora per il Teorema 5.2.5 esistono $\int_a^b f^\pm(x)\,dx$.
Essendo $0\le f^\pm\le|f|$ in $[a,b[$, per il Teorema 5.5.2 $\int_a^b f^+(x)\,dx$ e $\int_a^b f^-(x)\,dx$ sono entrambi convergenti e

$$0 \le \int_a^b f^\pm(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty. \tag{5.7.1}$$

Dal Lemma 4.3.4 (b) $f = f^+ - f^-$, quindi per la Proposizione 5.2.2 f è integrabile in senso generalizzato in $[a,b[$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{Pr.\,5.2.2}{=} \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx \overset{Lemma 5.5.1}{\le} \int_a^b f^+(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

e

$$-\int_a^b f(x)\,dx \overset{Pr.\,5.2.2}{=} -\int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx \overset{Lemma 5.5.1}{\le} \int_a^b f^-(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dunque

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Teorema 5.7.3 (Criterio di convergenza per funzioni oscillanti).
Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$*, con* f, g *di classe* C^1*. Siano*

(a) g *limitata*

(b) f *monotona*

(c) $\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$.

Allora $f'g$ *e* fg' *sono integrabili in senso generalizzato in* $[a, b[$ *e*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = -f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi (a) esiste $M > 0$ tale che $|g(x)| \le M$ per ogni $x \in [a, b[$. Pertanto

$$0 \le |f'(x)g(x)| \le M|f'(x)| \qquad \forall x \in [a, b[. \tag{5.7.2}$$

La funzione f è monotona per (b). Supponiamo che sia f decrescente. Per il Criterio di monotonia, $f' \le 0$ in $[a, b[$ e quindi per il Teorema 4.5.12 si ha

$$\int_a^\beta M|f'(x)|\,dx = -M\int_a^\beta f'(x)\,dx \overset{Teor.\ 4.5.12}{=} -M(f(\beta) - f(a)).$$

Passando al limite e usando (c):

$$\lim_{\beta\to b^-}\int_a^\beta M|f'(x)|\,dx = Mf(a).$$

Allora Mf', e quindi anche f', è assolutamente integrabile in $[a, b[$.
Le funzioni $f'g$ e $|f'g|$ sono continue. Dunque, per il Teorema 4.4.2, $f'g, |f'g| \in \mathscr{R}([a, \beta])$ per ogni $\beta \in]a, b[$.
Possiamo quindi applicare il II Teorema del confronto (Teorema 5.5.3): la disuguaglianza (5.7.2) implica che $|f'g|$ è integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$ e quindi per il Teorema 5.7.2 $f'g$ è integrabile in senso generalizzato.
Osserviamo che

$$\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) = 0$$

in quanto limite del prodotto di una funzione infinitesima per una limitata. Allora per il Teorema 5.6.1,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = -f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

che è un numero reale.
Se f è crescente si procede in modo analogo. □

Esempio 5.7.4. L'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

è convergente per ogni $\alpha > 0$. Basta applicare il Teorema 5.7.3 con $g(x) = -\cos x$ e $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

5.8. Primi esercizi

Discutere la convergenza dei seguenti integrali generalizzati (se appare α, discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{x}\,dx \quad [+\infty\ \ \forall\alpha]; \qquad \int_1^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,dx \quad [\mathrm{C}\ \ \forall\alpha];$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx \quad [+\infty]; \qquad \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_0^{+\infty} x^2 e^{x}\,dx \quad [+\infty];$$

$$\int_0^{1} x^2 e^{1/x}\,dx \quad [+\infty]; \qquad \int_{-1}^{0} x^2 e^{1/x}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_{-\infty}^{0} x^2 e^{1/x}\,dx \quad [+\infty];$$

$$\int_0^{1} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx \quad [+\infty]; \qquad \int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx \quad [\mathrm{C}];$$

$$\int_0^{1} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \quad [+\infty]; \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad [+\infty];$$

$$\int_0^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \quad [+\infty]; \qquad \int_0^{1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx \quad [-\infty]; \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx \quad [\mathrm{C}];$$

$$\int_0^{1} \frac{\sin^2(3x)}{x^2}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{x}\right) dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}}\,dx \quad [\mathrm{C\ sse}\ \alpha > 1];$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{100}}{2^x}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2^x+3}{2-3^x}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_2^{+\infty} \frac{-x^6}{x^8-2}\,dx \quad [\mathrm{C}];$$

$$\int_0^{1} \log x\,dx \quad [-1]; \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\log x}\,dx \quad [+\infty]; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha}}\,dx \quad [\mathrm{C\ sse}\ \alpha > 1];$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \quad [\mathrm{C}]; \qquad \int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{2x^2+2}\,dx \quad [-\infty]; \qquad \int_2^{+\infty} \frac{x^5}{x^2-x^6}\,dx \quad [-\infty];$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-x^4}\,dx \quad [-\infty]; \qquad \int_0^{1/2} \frac{1}{x-x^2}\,dx \quad [+\infty]; \qquad \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x^2-x^3}\,dx \quad [+\infty];$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+\sin(x^3 e^x)}{x^3}\,dx \quad [\mathrm{CA}]; \qquad \int_0^{1} \frac{x+\sin(x^3 e^x)}{x^3}\,dx \quad [+\infty]; \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx \quad [\mathrm{CA}];$$

$$\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{x^\alpha}\right)dx \quad [\text{C sse } \alpha>\frac{1}{2}]; \quad \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\log^\alpha x}\,dx \quad [\text{C sse } \alpha>1]; \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x\log(1+\frac{1}{x^2})}\,dx \quad [+\infty];$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\log(1+\frac{1}{x^3})}\,dx \quad [+\infty]; \quad \int_1^{+\infty}\frac{1}{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}\,dx \quad [+\infty]; \quad \int_0^{1}\frac{1}{x\log x}\,dx \quad [-\infty];$$

$$\int_{-10}^{+\infty}x^3e^{-x}\,dx \quad [\text{C}]; \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(1+2x^2)}}\,dx \quad [\text{C}]; \quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x(1+2x)}}\,dx \quad [+\infty];$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{x-1}\,dx \quad [+\infty]; \quad \int_1^{+\infty}\log\left(1+\frac{1}{x^{2\alpha}}\right)dx \quad [\text{C sse } \alpha>\frac{1}{2}]; \quad \int_1^{+\infty}\frac{3^x x^4}{2^{2x}}\,dx \quad [\text{C}].$$

[C]=converge, [CA]= convergenza assoluta, [no C]= non converge, [no CA]= non converge assolutamente, sse=se e solo se.

CAPITOLO 6

Serie numeriche

6.1. Definizione

Definizione 6.1.1. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$. Si chiama *serie numerica* relativa a (a_n) il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Definizione 6.1.2. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$. Si chiama *successione delle somme parziali* relativa a (a_n) la successione (s_n) così definita:

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Definizione 6.1.3. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$. La *serie numerica* ad essa associata si dice convergente/divergente a $\pm\infty$ se la successione delle somme parziali (s_n) relativa a (a_n) è convergente/divergente a $\pm\infty$.
In tal caso si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

e tale valore si chiama *somma della serie*.

Definizione 6.1.4. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$. La *serie numerica* ad essa associata si dice *indeterminata* o *irregolare* se la successione delle somme parziali (s_n) non ha limite.
Una serie si dice *regolare* se non è irregolare, ossia se è convergente o divergente.

Osservazione 6.1.5.
Studiare il *carattere* di una serie significa determinare se una serie è convergente/divergente/irregolare. Tale comportamento è determinato dai termini della serie da un certo indice in avanti, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ha lo stesso carattere di } \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n$$

qualunque sia $\bar{n} \in \mathbb{N}$.
Fissiamo infatti $\bar{n} \in \mathbb{N}$ e definiamo la successione $(\tilde{a}_n)$,

$$\tilde{a}_n := a_{\bar{n}+n}.$$

La successione $(\tilde{a}_n)$ è la sottosuccessione di (a_n) ottenuta da questa eliminando i primi $\bar{n}$ termini. Se denotiamo $(\tilde{s}_n)$ la successione delle somme parziali di $(\tilde{a}_n)$, otteniamo per ogni $n \geq \bar{n}$:

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots a_{\bar{n}-1} + \sum_{k=\bar{n}}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_{\bar{n}-1} + \sum_{k=0}^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}+k} = (a_0 + a_1 + \cdots a_{\bar{n}-1}) + \tilde{s}_{n-\bar{n}}. \tag{6.1.1}$$

Si noti che la successione $(\tilde{s}_{n-\bar{n}})_{n\geq\bar{n}}$ coincide con la successione $(\tilde{s}_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Essendo

$$a_0 + a_1 + \cdots a_{\bar{n}-1} \text{ numero reale },$$

da (6.1.1) segue che:
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge/diverge/è irregolare se e solo se $(s_n)_{n\geq\bar{n}}$ converge/diverge/è irregolare se e solo se $(\tilde{s}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge/diverge/è irregolare.
Pertanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ha lo stesso carattere di } \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n.$$

Esempio 6.1.6.
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} 1$ diverge a $+\infty$. Infatti essa è la serie associata alla successione costante (a_n) con $a_n = 1$. La successione delle somme parziali associata a (a_n) è (s_n) con $s_n = n+1$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n+1 = +\infty.$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Esempio 6.1.7.
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è irregolare. Infatti la successione delle somme parziali è (s_n) con

$$s_n = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ & \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{array}\right.$$

6.2. La serie geometrica

Definizione 6.2.1 (Serie geometrica).
Sia $q \in \mathbb{R}$. Si chiama serie geometrica di ragione q la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Teorema 6.2.2 (Carattere della serie geometrica).
Sia $q \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \left[\begin{array}{ll} = +\infty & \textit{se } q \geq 1 \\ & \\ = \dfrac{1}{1-q} & \textit{se } |q| < 1 \\ & \\ \textit{è indeterminata} & \textit{se } q \leq -1 \end{array}\right.$$

DIMOSTRAZIONE.
Studiamo dapprima il caso $q = 1$: si ha che la serie geometrica di ragione $q = 1$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1,$$

che è una serie divergente a $+\infty$, come visto nell'Esempio 6.1.6.
Studiamo ora il caso $q \neq 1$.
Si dimostra per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$(1-q) \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}, \tag{6.2.1}$$

ossia, tenendo conto che $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{6.2.2}$$

Dato che

$$\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \lim_{n\to\infty} q^n \left[\begin{array}{ll} = +\infty & \text{se } q > 1 \\ = 0 & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{array} \right.$$

deduciamo la tesi da (6.2.2). □

6.3. Proprietà delle serie

Proposizione 6.3.1.
Siano (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è regolare, allora anche $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ lo è e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali associata a (a_n) e sia (t_n) la successione delle somme parziali associata a (λa_n). Si ha

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k = \lambda s_n,$$

dunque

$$\exists \lim_{n\to+\infty} t_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Da qui la tesi. □

Proposizione 6.3.2.
Siano (a_n) e (b_n) successioni in $\mathbb{R}$, tali che le serie ad esse associate sono regolari.
Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

non si presenta nella forma indeterminata $+\infty + (-\infty)$ o $-\infty + (+\infty)$, allora la serie associata alla successione $(a_n + b_n)$ è regolare e

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

DIMOSTRAZIONE.
Siano (s_n) la successione delle somme parziali associata a (a_n), (t_n) la successione delle somme parziali associata a (b_n) e (r_n) la successione delle somme parziali associata a $(a_n + b_n)$. Si ha

$$r_n = s_n + t_n.$$

Per l'algebra dei limiti otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n + t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n.$$

Da qui la tesi. □

In analogia al Teorema 5.2.5 si ha che le serie a termini non negativi non possono essere indeterminate.

Teorema 6.3.3.
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{o converge a un numero non negativo oppure diverge a } +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali relativa a (a_n). Allora (s_n) è ovviamente una successione a termini non negativi (ogni termine della succesione è somma finita di termini non negativi) e (s_n) è una successione crescente, in quanto

$$s_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque la successione (s_n) ha limite ed esso è un numero non negativo oppure $+\infty$. □

6.4. Criteri di convergenza

In analogia al Teorema 5.4.1 si ha il seguente importante risultato.

Teorema 6.4.1 (Condizione necessaria per la convergenza).
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \text{convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali relativa a (a_n). Per ipotesi esiste $\ell := \lim_{n\to+\infty} s_n$, con $\ell \in \mathbb{R}$.
Allora, dall'algebra dei limiti,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = \ell - \ell = 0.$$

□

Osservazione 6.4.2.
Dal Teorema 6.4.1 deduciamo che la condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ è necessaria per la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Esempio 6.4.3.
Non vale il viceversa del teorema precedente. Esempio: $a_n := \frac{1}{n}$: la serie ad essa associata è la cosiddetta *serie armonica* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ che si dimostrerà essere divergente a $+\infty$ (vedi Teorema 6.5.2).

Teorema 6.4.4 (Criterio di Cauchy).
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *è convergente*
(b) $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_n \right| < \epsilon \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n > \bar{n}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali. Per definizione, dire che vale (a) significa che (s_n) è convergente, che è equivalente a dire che (s_n) è una successione di Cauchy, cioè che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ :\ \text{tale che } |s_m - s_n| < \epsilon \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \geq \bar{n},$$

da qui la tesi. □

Teorema 6.4.5 (I Teorema del confronto: caso della divergenza).
Siano (a_n) e (b_n) successioni in $\mathbb{R}$, tali che

$$a_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali associata a (a_n) e sia (t_n) la successione delle somme parziali associata a (b_n). Dall'ipotesi

$$s_n \leq t_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se (s_n) diverge a $+\infty$ allora anche (t_n) diverge a $+\infty$, per il Teorema del confronto per le successioni. $\square$

Teorema 6.4.6 (II Teorema del confronto: caso della convergenza).
Siano (a_n) e (b_n) successioni in $\mathbb{R}$, tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ convergente} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ convergente.}$$

Teorema 6.4.7 (Criterio del confronto asintotico).
Siano (a_n) e (b_n) successioni in $\mathbb{R}$ a termini positivi. Allora

$$a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ hanno lo stesso carattere.}$$

Teorema 6.4.8 (Criterio della radice).
Sia $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Valgono le seguenti:

(1) *se* $\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ *con* $0 \leq l < 1$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge*

(2) *se* $\min\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ *con* $l > 1$ *o* $l = +\infty$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE.
Sia $l < 1$. Osservando che $l < \frac{l+1}{2} < 1$, dall'ipotesi $\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ esisterà $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1+l}{2} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

cioè

$$a_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$$

è la serie geometrica di ragione $0 < \frac{1+l}{2} < 1$, quindi è convergente. Allora per l'Osservazione 6.1.5 è convergente anche la serie $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$. Per il Teorema 6.4.6 risulta convergente anche $\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n$. Dall'Osservazione 6.1.5 si ha la tesi. $\square$

Teorema 6.4.9 (Criterio del rapporto con maxlim e minlim). *Sia $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Valgono le seguenti:*

(1) *se* $\max \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *con* $0 \le l < 1$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge*

(2) *se* $\min \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *con* $l > 1$ *o* $l = +\infty$ *allora* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$.

DIMOSTRAZIONE.
Sia $l < 1$. Se denotiamo $x := \frac{l+1}{2}$ si ha $l < x < 1$. Dall'ipotesi $\max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ esisterà $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le x \qquad \forall n \ge \bar{n}. \tag{6.4.1}$$

Per induzione si dimostra che la proposizione $P(n)$

$$\text{“ } a_n \le a_{\bar{n}} x^{n-\bar{n}} \text{ ”} \tag{6.4.2}$$

è vera per ogni $n \ge \bar{n}$.
Infatti: $P(\bar{n})$ è vera per (6.4.1). Fissato $n \ge \bar{n}$, supponiamo che sia $P(n)$ vera. Allora

$$a_{n+1} = a_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{(4.5.8)}{\le} a_n x \overset{P(n)\text{ vera}}{\le} a_{\bar{n}} x^{n-\bar{n}} x = a_{\bar{n}} x^{n+1-\bar{n}}.$$

cioè $P(n+1)$ è vera.
Dunque per il Teorema d'induzione è $P(n)$ vera per ogni $n \ge \bar{n}$.
La serie

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_{\bar{n}} x^{n-\bar{n}} = a_{\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} x^{n-\bar{n}} = a_{\bar{n}} \sum_{m=0}^{\infty} x^m$$

è convergente essendo $0 < x < 1$ (v. Teorema 6.2.2). Allora, per (6.4.2) e il Teorema 6.4.6 otteniamo la tesi. □

Teorema 6.4.10 (Criterio integrale).
Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che

(a) *f è decrescente*

(b) *$f(x) \ge 0$ per ogni x.*

Allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \quad \textit{ha lo stesso carattere di} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

DIMOSTRAZIONE.
Per (a) e per il Teorema 4.4.1, $f \in \mathscr{R}([0,\beta])$ per ogni $\beta > 0$ ed esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
Per (b) sono possibili due casi: $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$ oppure $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Nel primo caso

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

in quanto non sono soddisfatte le condizioni necessarie per la convergenza (Teoremi 5.4.1 e 6.4.1) e, per (b), $f \ge 0$.

Consideriamo il secondo caso: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Per la Proposizione 4.2.5 si ha

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dunque, sommando per k da 0 a n si ha

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n+1} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi, posto $s_n := \sum_{k=0}^{n} f(k)$,

$$s_{n+1} - f(0) \leq \int_0^{n+1} f(x)\,dx \leq s_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per i Teoremi 5.2.5 e 6.3.3 esistono i limiti dei tre membri per $n \to +\infty$, e il limite $\lim_{\beta\to\infty} \int_0^{\beta} f(x)\,dx$ coincide con $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n+1} f(x)\,dx$ per il Teorema di collegamento (o delle restrizioni) di AM1A. La tesi segue passando al limite per $n \to +\infty$ e usando il Teorema del confronto per le successioni (v. AM1A). □

Per il Lemma 5.2.3 e l'osservazione 6.1.5 il Criterio integrale si può riscrivere nel seguente modo:

Teorema 6.4.11.
Sia $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *tale che*

(a) $f \in \mathscr{R}([a,\beta])$ *per ogni* $\beta > a$,
(b) f *è decrescente in un intorno di* $+\infty$,
(c) $f \geq 0$ *in un intorno di* $+\infty$.

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{ha lo stesso carattere di} \quad \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} f(n)$$

con $\bar{n} \in \mathbb{N}$, $\bar{n} \geq a$.

6.5. Serie armonica e serie armonica generalizzata

Definizione 6.5.1 (Serie armonica).
Si chiama *serie armonica* la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.
Più in generale, si chiama *serie armonica generalizzata* la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Grazie al Criterio integrale è facile stabilire il carattere della serie armonica e della serie armonica generalizzata.

Teorema 6.5.2 (Carattere della serie armonica generalizzata).
Valgono le seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left[\begin{array}{ll} \textit{converge} & \textit{se } \alpha > 1 \\ = +\infty & \textit{se } \alpha \le 1. \end{array} \right.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ogni $\alpha > 0$ la funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ è decrescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Dunque per il Teorema 6.4.11

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \text{ha lo stesso carattere di} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

La tesi segue dal Teorema 5.1.4.
Se $\alpha \le 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{array} \right.$$

Dunque per il Teorema 6.4.1 la serie armonica generalizzata non può convergere. Ciò significa, per il Teorema 6.3.3, che la serie armonica generalizzata diverge per $\alpha \le 0$. □

6.6. Serie a segno alterno

Definizione 6.6.1 (Serie a segno alterno).
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è una serie *a segno alterno* se esiste (c_n) successione in $\mathbb{R}$ con $c_n \ge 0$ per ogni n tale che

$$a_n = (-1)^n c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

oppure

$$a_n = (-1)^{n+1} c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 6.6.2 (Criterio di Leibniz).
Si consideri la serie a segno alterno $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ *con* (c_n) *successione in* $\mathbb{R}$, $c_n \ge 0$.
Se valgono:

(a) (c_n) *è decrescente*
(b) $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ *è convergente. Inoltre, indicata con* $l \in \mathbb{R}$, $l \ge 0$, *la somma della serie, si ha*

$$\left| l - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k \right| \le c_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.6.1}$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali relativa a (a_n) dove, $a_n := (-1)^n c_n$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo le seguenti sottosuccessioni di (s_n): (s_{2n}) e (s_{2n+1}).
Si hanno le seguenti:

(P1) (s_{2n}) è una successione decrescente

(P2) (s_{2n+1}) è una successione crescente

(P3) $s_0 \geq s_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Infatti:

$(P1)$:

$(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione decrescente: infatti

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} + a_{2n+1} = (-1)^{2n+2} c_{2n+2} + (-1)^{2n+1} c_{2n+1} = c_{2n+2} - c_{2n+1} \overset{(a)}{\leq} 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$(P2)$:

$$s_{2n+3} - s_{2n+1} = a_{2n+3} + a_{2n+2} = (-1)^{2n+3} c_{2n+3} + (-1)^{2n+2} c_{2n+2} = -c_{2n+3} + c_{2n+2} \overset{(a)}{\geq} 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$(P3)$:

$$s_0 \overset{(P1)}{\geq} s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} + c_{2n} \geq s_{2n-1} \overset{(P2)}{\geq} s_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Dunque: le successioni (s_{2n}) e (s_{2n+1}) sono monotone e limitate. Esse dunque convergono. Siano $l := \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n}$ e $l' := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$. Dimostriamo che $l = l'$. Vale

$$l' - l = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} ((-1)^{2n+1} c_{2n+1}) \overset{\text{limit. per infinit.}}{=} 0. \tag{6.6.2}$$

Allora $l = l'$. Per quanto si sa da AM1A, dato che (s_{2n}) e (s_{2n+1}) hanno lo stesso limite, esiste $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ ed esso è l: abbiamo così dimostrato che la serie a segno alterno converge.

Per concludere, osserviamo che

$$|l - s_{2n}| \overset{(P1)}{=} s_{2n} - l \overset{(P2)}{\leq} s_{2n} - s_{2n+1} = c_{2n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|l - s_{2n+1}| \overset{(P2)}{=} l - s_{2n+1} \overset{(P1)}{\leq} s_{2n+2} - s_{2n+1} = c_{2n+2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e da qui la disuguaglianza (6.6.1). □

Si faccia attenzione a **non commettere l'errore** alquanto comune di pensare che se (c_n) e (d_n) sono successioni a termini positivi tali che $c_n \sim d_n$ allora le serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n d_n$ hanno lo stesso carattere. Ciò è falso, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.6.3.
Si considerino le successioni $(c_n)_{n\geq 1}$ e $(d_n)_{n\geq 1}$,

$$c_n := \frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n}, \qquad d_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Affermiamo che

$$c_n \sim d_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n \text{ diverge} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n d_n \text{ converge.}$$

Vediamo i dettagli.

$c_n \sim d_n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\sum_n (-1)^n c_n$ diverge :
Si hanno le seguenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ converge per il Teorema 6.6.2,}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^n \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{per il Teorema 6.5.2.}$$

Quindi per la Proposizione 6.3.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

$\sum_n (-1)^n d_n$ converge:
Si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ converge per il Teorema 6.6.2.}$$

6.7. Serie assolutamente convergente

Definizione 6.7.1.
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è *assolutamente convergente* se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Teorema 6.7.2 (Assoluta convergenza implica convergenza).
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ è ass. convergente } \Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ è convergente e } \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right). \tag{6.7.1}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente. Dunque per il Criterio di Cauchy (Teorema 6.4.4) applicato alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ si ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ : \ \text{tale che } \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \epsilon \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}, \ m > n \geq \bar{n}$$

Per la disuguaglianza triangolare, si ha

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|.$$

Dunque

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}\ :\ \text{tale che } \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon \qquad \forall n, m \in \mathbb{N},\ m > n \geq \bar{n}.$$

Vale la condizione di Cauchy per la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. La sua convergenza segue dal Teorema 6.4.4. □

Si noti che che non vale il viceversa dell'implicazione 6.7.1, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.7.3.
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per il Criterio di Leibniz (Teorema 6.6.2) applicato con $c_n = \frac{1}{n}$. Questa dunque è l'esempio di una serie convergente, ma non assolutamente convergente, in quanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Teorema 6.7.4.
Siano (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ e $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ un'applicazione biunivoca. Chiamiamo (α_n) la successione di termine n-esimo $\alpha_n := a_{k(n)}$.
Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$$

.

Nel Teorema 6.7.4 non si può fare a meno dell'ipotesi di assoluta convergenza della serie, come dimostra il seguente esempio.

Esempio 6.7.5.
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (a $\log 2$), vale a dire:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \cdots = \log 2. \tag{6.7.2}$$

Moltiplicando (6.7.2) per $\frac{1}{2}$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{\log 2}{2}$$

cioè

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\log 2}{2}.$$

Sommando le due uguaglianze si ha

$$1+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{2}{8}+\cdots=\frac{3\log 2}{2},$$

e, semplificando,

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3\log 2}{2},$$

Se fosse possibile riordinare i termini nella somma a sinistra senza cambiare la sua somma, avremmo

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots=\frac{3\log 2}{2}.$$

ottenendo così l'assurdo: $\log 2=\frac{3\log 2}{2}$.

Enunciamo ora l'analogo discreto del Teorema 5.7.3.

Teorema 6.7.6 (Criterio di Dirichlet).
Siano (a_n) e (b_n) successioni in $\mathbb{R}$ tali che

(a) $\exists M>0$ *tale che*

$$|\sum_{k=0}^{n} a_h|\leq M \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

(b) (b_n) *è una successione decrescente*

(c) $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n \ \textit{converge.}$$

Il Teorema 6.6.2 (Criterio di Leibniz) è un caso particolare del Teorema 6.7.6, applicato scegliendo $a_n=(-1)^n$ e usando l'Esempio 6.1.7.
Per mostrare un'applicazione, avremo bisogno del seguente lemma che afferma che l'uguaglianza (6.2.1) vale anche in $\mathbb{C}$.

Lemma 6.7.7.
Sia $q\in\mathbb{C}$. Si ha

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k=1-q^{n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Facile dimostrazione per induzione, lasciata al lettore. □

Teorema 6.7.8. *Sia $\theta\in]0,2\pi[$. Allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha} \ \textit{e} \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \ \textit{convergono per ogni } \alpha>0.$$

DIMOSTRAZIONE.
Ricordiamo che se $\theta \in]0,2\pi[$ si ha $e^{i\theta} \neq 1$ e $|e^{i\theta}| = 1$.
Per il Lemma 6.7.7 risulta

$$\sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^n = \frac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} - 1 = \frac{e^{i\theta}-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}}$$

da cui, usando la disuguaglianza triangolare,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{in\theta}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} (e^{i\theta})^n\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.$$

Ricordando che $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ e che per ogni $z \in \mathbb{C}$ è $|\mathrm{Re} z|, |\mathrm{Im} z| \leq |z|$, otteniamo

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)\right| = \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{in\theta}\right)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} (e^{in\theta})\right| \leq \frac{2}{|1-e^{i\theta}|} =: M(\theta).$$

Si noti che $M(\theta) \in \mathbb{R}$, $M(\theta) > 0$, ma è indipendente da n.
Possiamo quindi applicare il Criterio di Dirichlet (Teorema 6.7.6), con $b_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ e $a_n = \sin(n\theta)$, ottenendo così la convergenza di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.
In modo analogo si ragiona per $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$. □

6.8. Successioni e serie in $\mathbb{C}$

Ricordiamo che una successione (a_n) converge ad $a \in \mathbb{R}$ se e solo se $\lim_{n\to+\infty} |a_n - a| = 0$.

Questa caratterizzazione della convergenza si presta ad essere estesa in $\mathbb{C}$.

Definizione 6.8.1. Una successione in $\mathbb{C}$ è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Si usa scrivere a_n al posto di $a(n)$.

Definizione 6.8.2. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$. Diciamo che essa converge ad $a \in \mathbb{C}$ se $\lim_{n\to+\infty} |a_n - a| = 0$, dove $|a_n - a|$ denota il modulo del numero complesso $a_n - a$.

Teorema 6.8.3.
Siano (a_n) una successione in $\mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$. sono equivalenti:

(a) *(a_n) converge ad a*
(b) *$Rea_n \to Rea$ e $Ima_n \to Ima$.*

Ricordando la definizione di serie in $\mathbb{R}$ convergente ci si accorge che essa può essere facilmente adattata al caso di serie in $\mathbb{C}$.

Definizione 6.8.4. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$. Si chiama *serie numerica* relativa a (a_n) il simbolo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Definizione 6.8.5. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$. Si chiama *successione delle somme parziali* relativa a (a_n) la successione (s_n) così definita:

$$s_n := a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Definizione 6.8.6. Sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$. La *serie numerica* ad essa associata si dice convergente se la successione delle somme parziali (s_n) relativa a (a_n) è convergente.
In tal caso si pone

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

e tale valore si chiama *somma della serie*.

In analogia al Teorema 6.4.1 si ha il seguente importante risultato **non enunciato a lezione**.

Teorema 6.8.7 (Condizione necessaria per la convergenza).
Sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \textit{convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia (s_n) la successione delle somme parziali relativa a (a_n). Per ipotesi esiste $\ell := \lim_{n\to+\infty} s_n$, con $\ell \in \mathbb{C}$.
Allora, la tesi segue dal Teorema 6.8.3 e dal Teorema 6.4.1, che implicano $\mathrm{Re}\ell = 0$ e $\mathrm{Im}\ell = 0$ □

Altro risultato, che generalizza il Teorema 6.2.2 in ambito complesso è il seguente teorema.

Teorema 6.8.8.
Sia $z \in \mathbb{C}$. Si ha che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge se e solo se $|z| < 1$ e si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \forall |z| < 1.$$

6.9. Esercizi facili

Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche (se appare α, discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{2^n}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{e^n}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)^3\quad [CA];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2\sin^2 n}{n^2}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^\alpha}\quad [\text{C sse } \alpha>1];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3}{2-3^n}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\quad [+\infty];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\quad [C];$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^5}{n^2-n^6}\quad [-\infty];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-n^6}{n^8-2}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\quad [CA];$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\log n}\quad [+\infty];\qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\log n}\quad [+\infty];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}\quad [\text{C sse } \alpha>1];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{100}}{2^n}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}\quad [C];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n!)+n^\alpha}{n^3+\cos n}\quad [\text{C sse } \alpha<2];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4-3\cos(n^n)}{n^{3/2}}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-n^2}{2n^2+2}\quad [-\infty];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)\quad [\text{C sse } \alpha>\tfrac{1}{2}];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n^5}{3^n}\quad [CA];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(2n)!}\quad [C];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}\quad [+\infty];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n!}{n^n}\quad [+\infty];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^3e^{-n}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n^4}{2^{2n}}\quad [C];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+2n^2)}}\quad [C];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(1+\frac{2}{n^{2\alpha}}\right)\quad [\text{C sse } \alpha>\tfrac{1}{2}];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n\quad [+\infty];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{n}{2n^2+2}\right)}{\sqrt{n}}\quad [C];$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\quad [CA];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)\quad [\text{C, no CA}];\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+\sqrt{2}}{n+1}\quad [\text{no C}].$$

[C]=converge, [CA]= convergenza assoluta, [no C]= non converge, [no CA]= non converge assolutamente, sse=se e solo se.

Esercizio 6.9.1. Dimostrare che

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \left[\begin{array}{ccl} \text{converge} & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \alpha > 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array} \right. \\ \\ = +\infty & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \alpha < 1 \text{ e } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Esercizio 6.9.2. Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha e^{-\beta n}\, dx \left[\begin{array}{ccl} \text{converge} & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \beta > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \beta = 0 \text{ e } \alpha < -1 \end{array} \right. \\ \\ = +\infty & \Leftrightarrow & \left[\begin{array}{l} \beta < 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ \beta = 0 \text{ e } \alpha \geq -1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

CAPITOLO 7

Spazi metrici

In questo capitolo $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definizione di spazio metrico

Definizione 7.0.1 (Distanza).
Sia X un insieme non vuoto.
Si chiama *distanza* o *metrica* su X una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

(Di) $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$
(Dii) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$
(Diii) [simmetria] $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$
(Div) [disuguaglianza triangolare] $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y, z \in X$.

Definizione 7.0.2 (Spazio metrico).
Uno *spazio metrico* è una coppia (X, d) dove X è un insieme non vuoto e d è una distanza su X.

Esempio 7.0.3 (Metrica discreta).
Sia X un insieme non vuoto. Si chiama *metrica discreta* su X la metrica d su X così definita:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Bisogna dimostrare che valgono (i)–(iv) della definizione di metrica. L'unica non ovvia è (iv). Se $x = y$ la disuguaglianza è ovvia. Se $x \neq y$ e $z \in X$ allora almeno una delle seguenti vale: $z \neq x$ o $z \neq y$. Nel primo caso si ha

$$d(x, z) + d(z, y) = 1 + d(z, y) \overset{(i)}{\geq} 1 + 0 = 1 = d(x, y).$$

In modo analogo si ragiona se $z \neq y$.

Esempio 7.0.4 (Metrica euclidea).
Sia $X = \mathbb{R}^n$. Per ogni $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Essa definisce una distanza d su $\mathbb{R}^n$ detta *distanza euclidea.*

Esempio 7.0.5.
Sia $X = C([0,1])$. Per ogni $f, g \in C([0,1])$ sia

$$d(f,g) := \max\left\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\right\}.$$

Essa definisce una distanza d su $C([0,1])$ detta *distanza della convergenza uniforme* o distanza C^0 o L^∞.

Esempio 7.0.6.
Sia $X = C([0,1])$. Per ogni $f, g \in C([0,1])$ sia

$$d(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Essa definisce una distanza d su $C([0,1])$ detta *distanza* L^1.

7.1. Palle, aperti, intorni

Definizione 7.1.1 (Palla).
Sia (X,d) uno spazio metrico. Si chiama *palla* di centro $x_0 \in X$ e raggio $r > 0$ l'insieme

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}.$$

Definizione 7.1.2 (Insieme limitato).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che A è limitato se esiste $x_0 \in X$ e $r > 0$ tale che $A \subseteq B(x_0, r)$.

Esempio 7.1.3 (Palle della metrica discreta).
Siano X un insieme non vuoto, con almeno due elementi. Sia d la *metrica discreta* su X e sia $x_0 \in X$.
Se $r \in]0,1]$ allora $B(x_0, r) = \{x_0\}$. Se $r > 1$ allora $B(x_0, r) = X$.
Dunque $D(X) = \emptyset$. Infatti se ci fosse $y \in D(X)$ dovrebbe essere

$$\emptyset \neq B(y,1) \cap X \setminus \{y\} = \{y\} \cap X \setminus \{y\}$$

assurdo.
Inoltre $D(B(x_0, r)) = \emptyset$ per ogni $r > 0$. Infatti se $r > 1$ si ha $B(x_0, r) = X$ e la conclusione segue da quanto detto sopra. Se invece $r \leq 1$, e ci fosse $y \in D(B(x_0, r))$ dovrebbe essere

$$\emptyset \neq B(y,1) \cap B(x_0, r) \setminus \{y\} = \{y\} \cap \{x_0\} \setminus \{y\}$$

il che è un assurdo.
Analogamente, $Fr(B(x_0, 1)) = \emptyset$. Infatti se ci fosse $y \in Fr(B(x_0, 1))$ dovrebbe essere, in particolare,

$$\emptyset \neq B(y,1) \cap B(x_0, 1) = \{y\} \cap \{x_0\} \qquad \emptyset \neq B(y,1) \cap (X \setminus B(x_0, 1)) = \{y\} \cap (X \setminus \{x_0\})$$

da cui $y = x_0$ e $y \neq x_0$. Assurdo.

Definizione 7.1.4 (Punto interno).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che $x_0 \in X$ è un punto interno ad A se

$$\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A.$$

Osservazione 7.1.5. In particolare, un punto interno ad A è anche un punto di A, ma non è detto che ogni punto di A sia interno ad A.

Definizione 7.1.6 (Interno di un insieme).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si chiama *interno* di A l'insieme

$$\operatorname{int} A := \{x \in X : x \text{ è un punto interno ad } A\}.$$

Definizione 7.1.7 (Insieme aperto).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che A è aperto se $\operatorname{int} A = A$, ossia se ogni elemento di A è un punto interno ad A.
Per convenzione si pone $\emptyset$ insieme aperto.

Osservazione 7.1.8.
Segue dalla Definizione 7.1.7 che se (X,d) uno spazio metrico, allora è un insieme aperto.

Proposizione 7.1.9 (Le palle sono aperte).
Sia (X,d) uno spazio metrico. Le palle di X sono insieme aperti.

DIMOSTRAZIONE.
Sia $x_0 \in X$ e $r > 0$ e sia $x \in B(x_0, r)$. Dimostriamo che esiste $\rho > 0$ tale che $B(x,\rho) \subseteq B(x_0, r)$.
Se scegliamo $\rho := r - d(x, x_0)$, che è un numero reale positivo, si ha

$$d(y, x_0) \overset{\text{(Dis.triang.)}}{\leq} d(y,x) + d(x,x_0) < \rho + d(x,x_0) = r \qquad \forall y \in B(x,\rho).$$

Pertanto $B(x,\rho) \subseteq B(x_0, r)$. □

Definizione 7.1.10 (Insieme chiuso).
Siano X lo spazio ambiente e $A \subseteq X$. L'insieme $X \setminus A$ si chiama *insieme complementare* di A rispetto a X. Quando non ci sono possibilità di fraintendimento, esso si indica anche A^c.

Definizione 7.1.11 (Insieme chiuso).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che A è chiuso se $X \setminus A$ è aperto.

Proposizione 7.1.12.
Sia (X,d) *uno spazio metrico.*
Valgono le seguenti:

(i) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia di* aperti *di* X*, allora*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \text{ è un aperto di } X.$$

(ii) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia* **finita** *di* aperti *di* X*, allora*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \text{ è un aperto di } X.$$

(iii) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia di* chiusi *di* X*, allora*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \text{ è un chiuso di } X.$$

(iv) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia* **finita** *di* chiusi *di* X*, allora*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \text{ è un chiuso di } X.$$

DIMOSTRAZIONE.
(i):
Se $x\in\bigcup_{i\in I} A_i$ allora esiste $i\in I$ tale che $x\in A_i$. Dunque esiste $r>0$ tale che $B(x,r)\subseteq A_i$ e quindi $B(x,r)\subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.
(ii):
I è finito, quindi possiamo rinominare gli indici: $I=\{1,2,\cdots,m\}$ con $m\in\mathbb{N}^*$.
Se $x\in\bigcap_{i=1}^m A_i$ allora per ogni i esiste $r_i>0$ tale che $B(x,r_i)\subseteq A_i$. Definiamo $r:=\min\{r_i : i=1,\cdots,m\}$. Si ha $r>0$ e $B(x,r)\subseteq B(x,r_i)\subseteq A_i$ per ogni i. Da qui la tesi.
(iii) e (iv):
Si ottengono da (i), (ii) e dalle formule

$$(\bigcup_{i\in I} A_i)^c=\bigcap_{i\in I}(A_i)^c, \qquad (\bigcap_{i\in I} A_i)^c=\bigcup_{i\in I}(A_i)^c.$$

□

Definizione 7.1.13 (Intorno in uno spazio metrico).
Sia (X,d) uno spazio metrico.
Sia $x\in X$. Diciamo che U è un intorno di x se esiste $r>0$ tale che $B(x,r)\subseteq U$.

Definizione 7.1.14 (Punto di accumulazione).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A\subseteq X$. Diciamo che $x_0\in X$ è un punto di accumulazione di A se

$$B(x_0,r)\cap A\setminus\{x_0\}\neq\emptyset \qquad \forall r>0.$$

Definizione 7.1.15 (Derivato).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si chiama *derivato* di A l'insieme

$$D(A) := \{x \in X : x \text{ è un punto di accumulazione di } A\}.$$

Definizione 7.1.16 (Punto di frontiera).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che $x_0 \in X$ è un *punto di frontiera* di A se

$$B(x_0,r) \cap A \neq \emptyset \text{ e } B(x_0,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \qquad \forall r > 0.$$

Definizione 7.1.17 (Frontiera).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Si chiama *frontiera* di A l'insieme

$$\partial A = \mathrm{Fr} A = \{x \in X : x \text{ è un punto di frontiera di } A\}.$$

Definizione 7.1.18 (Chiusura di un insieme).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Chiamiamo *chiusura* di A l'insieme

$$\overline{A} = \mathrm{int}\, A \cup \mathrm{Fr} A.$$

Proposizione 7.1.19.
Siano (X,d) *uno spazio metrico e* $A \subseteq X$. *Allora*

$$Fr\, A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$$

e

$$\overline{A} = A \cup D(A).$$

7.2. Spazi metrici e spazi topologici

Ricordiamo la definizione di topologia di un insieme.

Definizione 7.2.1 (Topologia di un insieme).
Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{T}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Diciamo che $\mathcal{T}$ è una topologia su X se valgono le seguenti:

(Ti) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
(Tii) se $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{T}$ allora $\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{T}$,
(Tiii) se $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di insiemi appartenenti a $\mathcal{T}$, allora

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{T}.$$

In tal caso diciamo che $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico.

Definizione 7.2.2 (Intorno).
Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico.
Sia $x \in X$. Diciamo che U è un intorno di x nella topologia $\mathscr{T}$ se esiste $\Omega \in \mathscr{T}$ tale che

$$x \in \Omega \subseteq U.$$

Osservazione 7.2.3.
Gli insiemi di $\mathscr{T}$ sono intorni.

Definizione 7.2.4 (Spazio topologico di Hausdorff).
Diciamo che uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$ è di Hausdorff (o separato o T_2), se

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \ \exists U \text{ intorno di } x \text{ nella topologia } \mathscr{T}, \ \exists V \text{ intorno di } y \text{ nella topologia } \mathscr{T} \ : \ U \cap V = \emptyset.$$

In ogni spazio metrico è possibile definire in modo naturale una topologia di Hausdorff.

Teorema 7.2.5.
Sia (X, d) uno spazio metrico.
La famiglia

$$\mathscr{T} := \{A \subseteq X : A \text{ è un aperto di } X \text{ rispetto alla metrica } d\},$$

è una topologia di Hausdorff su X.

DIMOSTRAZIONE.
Che $\mathscr{T}$ sia una topologia su X è conseguenza di (i) e (ii) in Proposizione 7.1.12.
Dimostriamo che è di Hausdorff. Siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Sia $r := d(x, y)$. Per (Di) e (Dii) in Definizione 7.0.1, $r > 0$. Consideriamo $B(x, r/2)$ e $B(y, r/2)$. Se ci fosse $z \in B(x, r/2) \cap \in B(y, r/2)$ si avrebbe

$$r = d(x, y) \leq d(z, x) + d(z, y) < r.$$

Assurdo. Quindi $B(x, r/2) \cap B(y, r/2) = \emptyset$.
Dato che le palle sono insieme aperti (vedi Proposizione 7.1.9) e dato che gli insieme aperti sono ovviamente degli intorni dei loro punti, abbiamo trovato due intorni di x e di y che hanno intersezione vuota. □

7.3. Convergenza negli spazi metrici

Definizione 7.3.1 (Successione convergente).
Siano (X, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione in X.
Diciamo che (x_n) è convergente a $x_0 \in X$ se

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

ossia:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \quad : \quad d(x_n, x_0) < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Scriviamo in modo equivalente:

$$x_n \xrightarrow{d} x_0, \qquad x_n \to x_0 \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0.$$

queste ultime quando non ci sono dubbi sul fatto che si sta usando la convergenza in termini della distanza d.

Teorema 7.3.2 (Unicità del limite).
Siano (X,d) uno spazio metrico e (x_n) una successione in X convergente a x_0 e a y_0 in X. Allora $x_0 = y_0$.

DIMOSTRAZIONE.
Per la disuguaglianza triangolare

$$0 \le d(x_0, y_0) \le d(x_0, x_n) + d(x_n, y_0) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mandando n a $+\infty$ otteniamo, per il Teorema dei Carabinieri: $d(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_0, y_0) = 0$. □

Proposizione 7.3.3 (Caratterizzazione dei chiusi).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$.
Sono equivalenti le seguenti:

(Ci) *A è chiuso,*

(Cii) *$\forall (x_n)$ successione in A e $x_0 \in X$, si ha:*

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \Rightarrow \; x_0 \in A.$$

(Ciii) *$D(A) \subseteq A$,*

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo l'equivalenza tra (Ci) e (Cii).
(Ci) $\Rightarrow$ (Cii):
Siano (x_n) una successione in A e $x_0 \in X$, tale che $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Se fosse $x_0 \notin A$ allora, essendo A^c aperto, esisterebbe $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq A^c$. Da $x_n \xrightarrow{d} x_0$ si ha che esiste $\bar{n}$ tale che $d(x_n, x_0) < r$ per ogni $n \ge \bar{n}$, ossia $x_n \in B(x_0, r) \subseteq A^c$ per ogni $n \ge \bar{n}$. Ciò è assurdo, perché (x_n) è una successione in A.
(Cii) $\Rightarrow$ (Ci):
Se per assurdo A non fosse chiuso, il suo complementare A^c non sarebbe aperto. Quindi esisterebbe $x_0 \in A^c$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$

$$B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Sia $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$. Allora (x_n) è una successione in A tale che $0 \le d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ per ogni n. Dunque, per il Teorema dei carabinieri, $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Pertanto per (Cii) $x_0 \in A$. Ciò contraddice l'assunzione $x_0 \in A^c$. □

Proposizione 7.3.4 (Caratterizzazione dei punti di accumulazione).
Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $x_0 \in X$.
Sono equivalenti le seguenti:

(Ai) $x_0 \in D(A)$

(Aii) *per ogni $r > 0$ esistono infiniti punti in $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\}$.*

(Aiii) *esiste una successione* $(x_n)_{n\geq 1}$ *in* A, $x_n \neq x_0$ *per ogni* n *e tale che* $x_n \xrightarrow{d} x_0$.

(Aiv) *esiste una successione* $(x_n)_{n\geq 1}$ *in* A *con termini tutti distinti tra loro, tale che*

$$0 < d(x_0, x_n) < d(x_0, x_{n-1}) \qquad \forall n \geq 2$$

e tale che $x_n \xrightarrow{d} x_0$.

DIMOSTRAZIONE.
(Ai) $\Rightarrow$ (Aii):
Sia $r > 0$. Di certo $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\}$ è non vuoto, essendo $x_0 \in D(A)$. Se esistesse $m \in \mathbb{N}^*$ tale che $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} = \{x_1, \cdots, x_m\}$, posto $\bar{r} := \min\{d(x_i, x_0) : i \in \{1, \cdots, m\}$ sarebbe $B(x_0, \bar{r}) \cap A \setminus \{x_0\}$ vuoto. Assurdo.
(Aii) $\Rightarrow$ (Aiii):
Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ ci sono infiniti punti in $B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x_0\}$. Ne scegliamo uno e lo chiamiamo x_n. Allora abbiamo una successione $(x_n)_{n\geq 1}$ tale che

$$0 < d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}.$$

Mandando n a ∞, per il Teorema dei Carabinieri otteniamo che $x_n \xrightarrow{d} x_0$.
(Aiii) $\Rightarrow$ (Aiv):
Sia (x_n) una successione in A, $x_n \neq x_0$ per ogni n e tale che $x_n \xrightarrow{d} x_0$.
Estraiamone la sottosuccessione (x_{n_k}) dove

$$n_1 := 1, \qquad n_k := \min\{n \in \mathbb{N}^* : n > n_{k-1}, d(x_0, x_n) < d(x_0, x_{n_{k-1}})\} \quad \text{se } k \geq 2.$$

Ciò è una definizione ben posta. Infatti

$$\{n \in \mathbb{N}^* : n > n_{k-1}, d(x_0, x_n) < d(x_0, x_{n_{k-1}})\} \neq \emptyset$$

e il minimo di un sottoinsieme di $\mathbb{N}^*$ esiste. Dimostriamo che l'insieme è non vuoto: essendo $x_n \neq x_0$ per ogni n e $x_n \xrightarrow{d} x_0$, fissato un indice n_{k-1}, esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}^*$ tale che

$$d(x_0, x_n) < d(x_0, x_{n_{k-1}}) \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Allora, posto

$$n_k^* := \max\{n_{k-1} + 1, \bar{n}\}$$

si ha

$$n_k^* \in \{n \in \mathbb{N}^* : n > n_{k-1}, d(x_0, x_n) < d(x_0, x_{n_{k-1}})\}.$$

Definiamo $y_k := x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Si ha che $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ è una sottosuccessione di (x_n), quindi in particolare $y_k \neq x_0$ per ogni k, $y_k \xrightarrow{d} x_0$ e

$$0 < d(x_0, y_k) < d(x_0, y_{k-1}).$$

(Aiv) $\Rightarrow$ (Aiii) :
Ovvia.
(Aiii) $\Rightarrow$ (Ai):

Sia (x_n) una successione in A tale che $x_n \neq x_0$ per ogni n e tale che $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Allora, fissato $r > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che $0 < d(x_n, x_0) < r$ per ogni $n \geq \bar{n}$. In particolare,

$$x_{\bar{n}} \in B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\}.$$

□

7.4. Completezza

Definizione 7.4.1.
Siano (X, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione in X.
Diciamo che (x_n) è una successione di Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \ :\ d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ n, m \geq \bar{n}.$$

Proposizione 7.4.2.
Se (X, d) è uno spazio metrico e $A \subseteq X$, allora una successione è di Cauchy in (A, d) se e solo se è di Cauchy in (X, d).

DIMOSTRAZIONE. Segue direttamente dalla definizione di successione di Cauchy. □

Teorema 7.4.3.
Siano (X, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione in X. Allora

$$(x_n) \text{ è convergente a } x_0 \in X \quad \Rightarrow \quad (x_n) \text{ è di Cauchy.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \ :\ d(x_n, x_0) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq \bar{n}.$$

Allora, per ogni $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n, m \geq \bar{n}$, si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

La conclusione segue. □

Non vale in generale il viceversa.

Esempio 7.4.4 (Successione di Cauchy, ma non convergente).
Sia $X =]0, 1]$ dotato della metrica euclidea ($d_e(x, y) := |x - y|$) e, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ sia $x_n := \frac{1}{n}$. La successione (x_n) è convergente in $\mathbb{R}$ (il suo limite è 0). Dunque (x_n) è di Cauchy in $(\mathbb{R}, d_e)$, quindi lo è anche in $(]0, 1], d_e)$. Tuttavia non converge in $]0, 1]$. (v. Teorema di unicità del limite 7.3.2).

Definizione 7.4.5 (Successione limitata).
Siano (X, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione in X. Diciamo che (x_n) è limitata se l'insieme $\{x_n . n \in \mathbb{N}^*\}$ è limitato, ossia se esiste $x_0 \in X$ e $r > 0$ tale che $d(x_n, x_0) < r$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 7.4.6.
Siano (X,d) *uno spazio metrico e* (x_n) *una successione in* X. *Allora*

$$(x_n) \text{ è di Cauchy} \quad \Rightarrow \quad (x_n) \text{ è limitata.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \ :\ d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ n, m \geq \bar{n}.$$

Posto $\epsilon = 1$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}^*$ tale che

$$d(x_n, x_m) < 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*,\ n, m \geq \bar{n}.$$

e quindi

$$x_n \in B(x_{\bar{n}}, 1) \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Sia

$$R := \max\{1, \max\{d(x_i, x_{\bar{n}}) : i \in \{0, 1, \cdots, \bar{n} - 1\}\}\}.$$

Allora,

$$d(x_n, x_{\bar{n}}) \leq \left[\begin{array}{ll} \max\{d(x_i, x_{\bar{n}}) : i \in \{0, 1, \cdots, \bar{n}\}\} \leq R & \text{se } n \in \{0, 1, \cdots, \bar{n} - 1\} \\ 1 \leq R & \text{se } n \geq \bar{n}. \end{array} \right.$$

Pertanto $x_n \in B(x_{\bar{n}}, R)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. □

Come immediata conseguenza del Teorema 7.4.3 e del Teorema 7.4.6 si ha:

Corollario 7.4.7.
Siano (X,d) *uno spazio metrico e* (x_n) *una successione in* X. *Allora*

$$(x_n) \text{ è convergente} \quad \Rightarrow \quad (x_n) \text{ è limitata.}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 7.4.3 una successione convergente è di Cauchy e quindi, per il Teorema 7.4.6, anche limitata. □

Definizione 7.4.8.
Sia (X,d) uno spazio metrico. Diciamo che (X,d) è *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente a un punto di X.

Esempio 7.4.9. Gli spazi metrici $(\mathbb{Q}, d_e)$ e $(]0,1], d_e)$ non sono completi (per l'ultimo esempio si veda Esempio 7.4.4).

Teorema 7.4.10 ($(\mathbb{R}^n, d_e)$ è completo).
Lo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^n, d_e)$, *dove* d_e *è la metrica Euclidea, è uno spazio completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$
$$x_k = (x_{k,1}, \cdots, x_{k,n})$$
una successione in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$ e per ogni $k, h \in \mathbb{N}^*$, si ha
$$|x_{k,i} - x_{h,i}| = \sqrt{(x_{k,i} - x_{h,i})^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{k,j} - x_{h,j})^2} = d(x_k, x_h).$$
Dalle disuguaglianze sopra segue che se $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ allora le successioni reali $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}^*}$, con $i \in \{1, \cdots, n\}$, sono di Cauchy in $\mathbb{R}$. Essendo $\mathbb{R}$ completo, allora, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$, la successione $(x_{k,i})_{k\in\mathbb{N}^*}$ è convergente a un elemento $x_{0,i} \in \mathbb{R}$. Sia $x_0 := (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$. Dato che
$$0 \le d(x_k, x_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{k,j} - x_{0,j})^2} \le \sum_{j=1}^{n} |x_{k,j} - x_{0,j}|$$
dal Teorema dei Carabinieri deduciamo che $\lim\limits_{k\to+\infty} d(x_k, x_0) = 0$, ossia che $x_k \xrightarrow{d} x_0$. □

Teorema 7.4.11 (I chiusi di uno spazio completo sono completi).
Siano (X, d) uno spazio metrico completo e C un suo sottoinsieme non vuoto. Allora
$$C \text{ è chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad (C, d) \text{ è completo.}$$

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
Sia (x_n) una successione di Cauchy in (C, d). Allora (x_n) è di Cauchy anche in (X, d) (v. Proposizione 7.4.2). Essendo X completo, allora esiste $x_0 \in X$ tale che $x_n \xrightarrow{d} x_0$. Per la Proposizione 7.3.3 (Cii) si ha $x_0 \in C$. Ciò conclude la dimostrazione.
$\Leftarrow$:
Se dimostriamo che presa una qualunque successione (x_n) in C e convergente a $x_0 \in X$, allora $x_0 \in C$, otteniamo che C è chiuso per via della Proposizione 7.3.3.
Sia (x_n) una successione in C e convergente a $x_0 \in X$. Per il Teorema 7.4.3 (x_n) è di Cauchy in X. Dunque, per la Proposizione 7.4.2 (x_n) è di Cauchy in C. Essendo (C, d) uno spazio completo, allora (x_n) è convergente in C, e quindi $x_0 \in C$. □

7.5. Compattezza

Definizione 7.5.1 (Ricoprimento).
Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ di X è un *ricoprimento* di A se
$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i.$$
Diciamo che $\{A_i\}_{i\in I}$ di X è un *ricoprimento di aperti* di A se la famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ di X è un *ricoprimento* di A e gli insiemi A_i sono aperti.

Definizione 7.5.2 (Compatto).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Diciamo che K è un compatto se da ogni ricoprimento di aperti $\{A_i\}_{i\in I}$ di K è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, ossia esistono $A_{i_1},\cdots,A_{i_m} \in \{A_i\}_{i\in I}$, con $m \in \mathbb{N}^*$, tali che
$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} A_{i_j}.$$

Definizione 7.5.3 (Insieme totalmente limitato).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Diciamo che A è *totalmente limitato* se per ogni $r > 0$ esistono $x_1, x_2, \cdots, x_m \in X$ tali che $\{B(x_i,r)\}_{i\in\{1,\cdots,m\}}$ è un ricoprimento di A.

Proposizione 7.5.4.
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$. Allora
$$A \text{ totalmente limitato} \quad \Rightarrow \quad A \text{ limitato.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi A è *totalmente limitato*, dunque, fissato $r > 0$ esistono $x_1, x_2, \cdots, x_m \in X$ tali che
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,r). \tag{7.5.1}$$
Se $m = 1$ non c'è altro da dimostrare.
Se $m \geq 2$. Definiamo
$$R := r + \max\{d(x_i,x_1) : i = 1,\cdots,m\},$$
e dimostriamo che $A \subseteq B(x_1,R)$. Per ogni $x \in B(x_i,r)$ si ha
$$d(x,x_1) \leq d(x,x_i) + d(x_i,x_1) < r + d(x_1,x_i) \leq R.$$
Dunque $B(x_i,r) \subseteq B(x_1,R)$. La conclusione segue da (7.5.1). $\square$

In generale in uno spazio metrico un insieme limitato non è detto che sia totalmente limitato.

Esempio 7.5.5. Sia
$$\ell^\infty := \{(x_n) : (x_n) \text{ è una successione in } \mathbb{R},\ \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < +\infty\}.$$
La funzione $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$,
$$d((x_n),(y_n)) := \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$
è una distanza di ℓ^∞.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $e^{(k)} = (e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ la successione tale che
$$e_n^{(k)} := \begin{cases} 1 & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$
Si ha
$$\sup\{|e_n^{(k)}| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{0,1\} = 1 < +\infty \quad \Rightarrow \quad e^{(k)} \in \ell^\infty.$$

Quindi
$$A := \{e^{(k)} : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^\infty.$$

Dimostriamo che A è limitato.
Sia (0) la successione i cui termini sono tutti nulli.
Si ha
$$d(e^{(k)}, (0)) = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$
dunque
$$A \subseteq B((0), 2)$$
e quindi A è limitato.
Dimostriamo che A non è totalmente limitato. Si ha
$$d(e^{(k)}, e^{(h)}) = 1 \qquad \forall k, h \in \mathbb{N},\ k \neq h.$$
Pertanto, preso $r = \frac{1}{2}$, per ogni $x \in \ell^\infty$,
$$\mathrm{card}(B(x, \frac{1}{2}) \cap A) \in \{0, 1\} \qquad \forall x \in \ell^\infty.$$
Infatti, se ci fossero $e^{(k)}$ e $e^{(h)}$ in $B(x, \frac{1}{2}) \cap A$, con $k \neq h$, si avrebbe
$$1 = d(e^{(k)}, e^{(h)}) \leq d(e^{(k)}, x) + d(x, e^{(h)}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$
che è un assurdo. Dunque non è possibile ricoprire A con un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$. Infatti, se esistessero $x^1, x^2, \cdots, x^m \in \ell^\infty$ tali che
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x^i, \frac{1}{2}) \Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i=1}^m (A \cap B(x^i, \frac{1}{2})) \Rightarrow \mathrm{card}\, A \leq \mathrm{card} \bigcup_{i=1}^m (A \cap B(x^i, \frac{1}{2})) \leq \sum_{i=1}^m \mathrm{card}(A \cap B(x^i, \frac{1}{2})) \leq m$$
che è assurdo, in quanto A è numerabile.

Teorema 7.5.6.
Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Allora
$$K \text{ compatto} \quad \Rightarrow \quad K \text{ chiuso e totalmente limitato.}$$

DIMOSTRAZIONE.
K compatto $\Rightarrow$ K totalmente limitato:
Sia $r > 0$. Ovviamente, la famiglia di palle aperte $\{B(x, r)\}_{x \in K}$ costituisce un ricoprimento aperto di K, cioè
$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r).$$
Essendo K compatto posso estrarne un sottoricoprimento finito: esiste $m \in \mathbb{N}^*$ e un numero finito di elementi di K, $x_1, \cdots, x_m$ tali che
$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r).$$
Ciò conclude la dimostrazione.

K compatto $\Rightarrow$ K chiuso:
Dimostriamo che il complementare di K è aperto.
Sia $x_0 \in K^c$. Per ogni $x \in K$ poniamo $r_x := \frac{d(x,x_0)}{2}$. Osserviamo che

$$B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x) = \emptyset \qquad \forall x \in K. \tag{7.5.2}$$

Infatti, se fosse $z \in B(x, r_x) \cap B(x_0, r_x)$ sarebbe

$$d(x, x_0) \leq d(x, z) + d(z, x_0) < 2r_x = d(x, x_0),$$

un assurdo. Ovviamente

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$$

e quindi, estraendo un ricoprimento finito, esiste $m \in \mathbb{N}^*$ e un numero finito di elementi di K, $x_1, \cdots, x_m$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r_{x_i}).$$

Definiamo $r := \min\{r_{x_i} : 1 \leq i \leq m\}$. Si ha

$$B(x_0, r) \cap K \subseteq B(x_0, r) \cap (\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r_{x_i})) = \bigcup_{i=1}^{m} (B(x_0, r) \cap B(x_i, r_{x_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (B(x_0, r_{x_i}) \cap B(x_i, r_{x_i})) \overset{(7.5.2)}{=} \emptyset.$$

Dunque $B(x_0, r) \subseteq K^c$.

□

Proposizione 7.5.7 (I chiusi di un compatto sono compatti).
Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$ compatto. Allora i sottoinsiemi non vuoti e chiusi di K sono compatti.

DIMOSTRAZIONE.
Sia $C \subseteq K$, C non vuoto e chiuso. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ di X un ricoprimento di aperti di C. Allora

$$K = (K \setminus C) \cup C \subseteq (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Dalla chiusura di C si ha che $X \setminus C$ è aperto. Allora abbiamo trovato un ricoprimento di aperti di K. Per la compattezza di K possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di K:

$$C \subseteq K \subseteq (X \setminus C) \cup \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Essendo $C \cap (X \setminus C) = \emptyset$, otteniamo

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

□

Definizione 7.5.8 (Compatto per successioni).
Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Diciamo che K è sequenzialmente compatto (o *compatto per successioni*) se da ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ di elementi di K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K.

Teorema 7.5.9.
Siano (X,d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Allora sono equivalenti:

(a) *K è compatto*
(b) *K è sequenzialmente compatto*
(c) *K è totalmente limitato e (K,d) è completo.*

Separiamo il teorema. Per l'implicazione $(a) \Rightarrow (b)$ avremo bisogno del seguente lemma.

Lemma 7.5.10.
Sia (X,d) uno spazio metrico. Siano (x_n) una successione in X e $\bar{x} \in X$.
Sono equivalenti le seguenti proprietà:

(a) *esiste una sottosuccessione (x_{h_n}) di (x_n) convergente a $\bar{x}$*
(b) *per ogni aperto A contenente $\bar{x}$*

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\} \text{è numerabile.}$$

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$:
Sia A un aperto contenente $\bar{x}$. Per ipotesi, esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, tale che

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > \bar{n} \ \Rightarrow \ x_{h_n} \in A).$$

Dunque

$$\{h_n \in \mathbb{N} : n > \bar{n}\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_{h_n} \in A\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\} \subseteq \mathbb{N}$$

ed essendo il primo e l'ultimo insieme numerabili, allora lo sono anche quelli in mezzo.
$(b) \Rightarrow (a)$:
Costruiamo una sottosuccessione di (x_n) convergente a $\bar{x}$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia

$$V_n := \left\{ h \in \mathbb{N} : x_h \in B(\bar{x}, \frac{1}{n+1}) \right\}.$$

Per ipotesi V_n è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{N}$, quindi $\sup V_n = +\infty$. Sia

$$h_0 \in V_0 : h_0 > 0.$$

Definiamo poi, in modo ricorsivo,

$$h_{n+1} \in V_{n+1} : h_{n+1} > h_n.$$

La definizione è ben posta, perché h_n non può essere maggiorante di V_{n+1}. E' così definita $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(n) = h_n$, che, per definizione, è strettamente crescente.
La successione (x_{h_n}) è una sottosuccessione di (x_n) e si ha, per definizione,

$$h_n \in V_n \Leftrightarrow x_{h_n} \in B(\bar{x}, \frac{1}{n+1}) \Leftrightarrow 0 \leq d(x_{h_n}, \bar{x}) < \frac{1}{n+1}.$$

Per il Teorema dei carabinieri, $\lim_{n \to +\infty} x_{h_n} = \bar{x}$. □

Teorema 7.5.11 ($(a) \Rightarrow (b)$ del Teorema 7.5.9).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Allora

$$K \text{ compatto} \quad \Rightarrow \quad K \text{ sequenzialmente compatto.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Supponiamo che K non sia sequenzialmente compatto. Allora esiste una successione (x_n) di K priva di sottosuccessioni di (x_n) convergenti a punti di K. Precisamente, ogni $y \in K$ non è limite di sottosuccessioni convergenti a y. Per il Lemma 7.5.10 deve esistere un aperto U_y contenente di y tale che

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_y\} \text{ è finito.}$$

Ovviamente $(U_y)_{y \in K}$ è una famiglia di aperti che ricopre K. Essendo K compatto, esiste $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e y_1, y_2, $\cdots$, y_p punti di K tali che

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} U_{y_i}.$$

Per ogni $i \in \{1, \cdots, p\}$ sia

$$V_i := \{n \in \mathbb{N} : x_n \in U_{y_i}\}.$$

Essendo V_i finito per ogni i allora

$$V := \bigcup_{i=1}^{p} V_i \text{ è finito.}$$

Dunque

$$V \subsetneq \mathbb{N}. \tag{7.5.3}$$

D'altra parte, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$x_n \in \bigcup_{i=1}^{p} U_{y_i},$$

quindi deve esistere $k \in \{1, \cdots, p\}$ tale che $x_n \in U_{y_k}$. Per definizione, ciò significa che $n \in V_k$ e quindi $n \in V$. Per l'arbitrarietà di n si ha $\mathbb{N} \subseteq V$, contraddicendo (7.5.3).

$\square$

Lemma 7.5.12. *Siano (X,d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$.*
Se K sequenzialmente compatto allora per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ esiste una famiglia finita di palle centrate in punti di K e di raggio r che ricopre K.

DIMOSTRAZIONE. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che esista $r > 0$ tale che non sia possibile trovare un ricoprimento finito di K costituito da palle centrate in punti di K aventi raggio r.
Prendiamo $x_0 \in K$. Dovrà essere

$$K \setminus B(x_0, r) \neq \emptyset.$$

Sia $x_1 \in K \setminus B(x_0, r)$, ossia

$$\exists x_0, x_1 \in K, \qquad d(x_0, x_1) \geq r.$$

Supponiamo di avere definito

$$\exists x_0, x_1, \cdots, x_n \in K, \qquad d(x_i, x_j) \geq r \quad \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}, i \neq j.$$

Dimostriamo che esiste $x_{n+1} \in K$ tale che

$$d(x_i, x_j) \geq r \quad \forall i, j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}, i \neq j. \tag{7.5.4}$$

Dobbiamo solo dimostrare

$$d(x_i, x_{n+1}) \geq r \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{7.5.5}$$

Per ipotesi non è possibile trovare un ricoprimento finito di K costituito da palle di raggio r, quindi

$$\exists x_{n+1} \in K \setminus \cup_{i=0}^{n} B(x_i, r).$$

Da qui segue (7.5.5) e quindi (7.5.4). Tale algoritmo porta alla definizione di una successione (x_n) in K. Essendo K sequenzialmente compatto esiste una sottosuccessione (x_{h_n}) di (x_n) convergente a un punto $x \in K$. Dunque x è un punto di accumulazione di $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Per la Proposizione 7.3.4 esiste un insieme $J \subseteq \mathbb{N}$, numerabile, tale che

$$x_j \in B(x, \frac{r}{2}) \qquad \forall j \in J.$$

Per (7.5.4) otteniamo

$$r \overset{(7.5.4)}{\leq} |x_j - x_i| \leq |x_j - x| + |x - x_i| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

il che è assurdo. □

Teorema 7.5.13 ($(b) \Rightarrow (c)$ del Teorema 7.5.9).
Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Allora

$$K \textit{ sequenzialmente compatto} \quad \Rightarrow \quad K \textit{ totalmente limitato e } (K, d) \textit{ è completo.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Dal Lemma 7.5.12 si ha che se K è sequenzialmente compatto allora K è totalmente limitato.
Dimostriamo che (K, d) è completo. Sia (x_n) una successione di Cauchy in K, ossia tale che

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \;:\; d(x_n, x_m) < \epsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^*, \; n, m \geq \bar{n}.$$

Essendo K sequenzialmente compatto, deve esistere una sottosuccessione $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ di (x_n) convergente a $x_0 \in K$, ossia

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \tilde{n} \in \mathbb{N}^* \;:\; d(x_{k_n}, x_0) < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n \geq \tilde{n}.$$

Dimostriamo che la successione (x_n) converge a x_0. Fissiamo $\epsilon > 0$ e sia $n^* := \max\{\bar{n}, \tilde{n}\}$. Ricordando che la successione di indici $(k_n)_n$ è crescente e quindi $k_n \geq n$, si ha:

$$d(x_n, x_0) \overset{(D.T.)}{\leq} d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0) < 2\epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n \geq n^*.$$

Dunque, per definizione, $x_n \xrightarrow{d} x_0$. □

Dimosrtiamo ora l'implicazione $(c) \Rightarrow (b)$ del Teorema 7.5.9.

Teorema 7.5.14 ((c) $\Rightarrow$ (b) del Teorema 7.5.9).
Siano (X,d) *uno spazio metrico e* $K \subseteq X$*. Allora*

$$K \text{ totalmente limitato e } (K,d) \text{ è completo} \quad \Rightarrow \quad K \text{ sequenzialmente compatto.}$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che per ogni (a_n) successione in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K.
Per la totale limitatezza, esistono $x_1^{(1)}, \cdots, x_m^{(1)} \in X$ tali che

$$K \subseteq \cup_{i=1}^{m} B(x_i, 1).$$

Deve esistere $j_1 \in \{1, \dots, m\}$ tale che

$$B(x_{j_1}^{(1)}, 1) \text{contiene infiniti termini della successione } (a_n).$$

Essi costituiscono una sottosuccessione di (a_n) che denotiamo $(a_n^{(1)})$. Denotiamo

$$y_1 := x_{j_1}^{(1)}, \qquad B(y_1, 1) := B(x_{j_1}^{(1)}, 1).$$

L'insieme $B(y_1, 1) \cap K$ è totalmente limitato, in quanto sottoinsieme di K, quindi possiamo ricoprirlo con un numero finito di palle di raggio $\frac{1}{2}$. Anche in questo caso esiste tra queste almeno una palla, che denotiamo $B(y_2, \frac{1}{2})$, che contiene infiniti termini di $(a_n^{(1)})$. Essi costituiscono una sottosuccessione di $(a_n^{(1)})$ che denotiamo $(a_n^{(2)})$.
Iterando, si ottiene una famiglia numerabile di palle $B(y_h, \frac{1}{h})$ e delle sottuccessioni di (a_n) con queste proprietà:

$$\begin{array}{l} (a_n^{(h+1)}) \text{sottosuccessione di } (a_n^{(h)}) \\ \forall h, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ a_n^{(h)}) \text{ è successione a termini in } \cap_{j=1}^{h} B(y_j, \frac{1}{j}) \cap K \subseteq B(y_m, \frac{1}{m}) \cap K \quad \forall m \leq h. \end{array}$$

Consideriamo la successione (b_n) in K così definita

$$b_n := (a_n^{(n)}).$$

Essa è una sottuccessione di (a_n) con le seguenti proprietà:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad b_n \in B(y_{\bar{n}}, \frac{1}{\bar{n}}) \cap K \quad \forall \bar{n} \in \mathbb{N},\ \bar{n} \leq n.$$

Per ogni $\epsilon > 0$, sia $\bar{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che

$$\frac{2}{\bar{n}} < \epsilon.$$

Allora

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n, m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |b_n - b_m| \leq |b_n - y_{\bar{n}}| + |y_{\bar{n}} - b_m| < \frac{2}{\bar{n}} < \epsilon.$$

Ciò dimostra che la successione (b_n) è di Cauchy in K. Essendo K completo, allora (b_n) è convergente a un elemento di K. □

Dimostriamo ora che (b) implica (a). Necessitiamo di alcuni lemmi. Vale il viceversa del Teorema 7.5.11. Per dimostrare ciò abbiamo bisogno dei seguenti risultati.

Lemma 7.5.15. *Sia I un insieme finito o numerabile di indici. Per ogni $i \in I$ sia A_i un insieme finito o numerabile. Allora*

$$\cup_{i\in I} A_i \text{ è finito o numerabile.}$$

Lemma 7.5.16. *Siano (X,d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$.*
Se K sequenzialmente compatto allora K ha la proprietà del ricoprimento numerabile, ossia da ogni ricoprimento di aperti $\{A_i\}_{i\in I}$ di K è possibile estrarre un sottoricoprimento al più numerabile, ossia esiste una famiglia al più numerabile di indici $J \subseteq I$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia dato un ricoprimento di aperti $\{A_i\}_{i\in I}$ di K. Se I è finito o numerabile non vi è nulla da dimostrare.
Supponiamo che I sia più che numerabile. Per il Lemma 7.5.12 per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$ esiste una famiglia finita di palle centrate in punti di K e di raggio q la cui unione, che denotiamo $\mathscr{B}_q$, contiene K. L'insieme

$$\mathscr{B} := \cup_{q\in\mathbb{Q}^+} \mathscr{B}_q \supset K$$

è unione numerabile di palle centrate in punti di K, in quanto è unione numerabile di insiemi che sono unione finita o numerabile di palle (v. Lemma 7.5.15). Numeriamo queste palle, di cui denotiamo anche i centri i raggi: $(B(y_h,q))_{h\in\mathbb{N},q\in\mathbb{Q}^+}$. Dunque

$$y_h \in K$$

e

$$\mathscr{B} := \cup_{q\in\mathbb{Q}^+} \cup_{h\in\mathbb{N}} B(y_h,q) \supset K. \tag{7.5.6}$$

Dato che

$$\cup_{i\in I} A_i \supseteq K \supset \{y_h : h \in \mathbb{N}\},$$

allora per ogni $i \in I$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $y_k \in A_i$. Essendo A_i un insieme aperto, esiste $q_k \in \mathbb{Q}^+$ tale che $B(y_k,q_k) \subseteq A_i$. Abbiamo così dimostrato che per ogni $i \in I$

$$\mathscr{C}_i := \{B(y_h,q) \in \mathscr{B} : h \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q}^+,\ B(y_h,q) \subseteq A_i\} \neq \emptyset.$$

Si noti che $\mathscr{C}_i \subseteq \mathscr{B}$, dunque

$$\mathscr{C} := \cup_{i\in I} \mathscr{C}_i \subseteq \mathscr{B}.$$

Essendo $\mathscr{B}$ numerabile, anche $\mathscr{C}$ è al più numerabile. Ogni $C \in \mathscr{C}$ potrebbero esistere più indici $i \in I$ tali che $C \in \mathscr{C}_i$. Scegliamone uno e denotiamolo $f(C)$. E' così definita una applicazione

$$f : \mathscr{C} \to I.$$

Essendo $\mathscr{C}$ numerabile, sarà $f(\mathscr{C}) \subseteq I$ un sottoinsieme finito o numerabile di I. Perciò $(A_{f(C)})_{C\in\mathscr{C}}$ è una sottofamiglia finita o numerabile di $(A_i)_{i\in I}$.
Resta da dimostrare che

$$K \subseteq \cup_{C\in\mathscr{C}} A_{f(C)}.$$

Sia $x \in K$ allora $\exists i \in I$ tale che $x \in A_i$. Poiché A_i è aperto, $\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che $B(x,\epsilon) \subseteq A_i$. Sia $r \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < r < \frac{\epsilon}{2}$. Da (7.5.6) esiste $y \in K$ e $B(y_h,r) \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B(y,r)$.

Si ha

$$B(y,r) \subseteq B(x,\epsilon).$$

Infatti

$$\forall z \in B(y_h, r) \qquad d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < 2r < \epsilon.$$

Allora

$$B(y,r) \subseteq B(x,\epsilon) \subseteq A_i$$

quindi $B(y,r) \in \mathscr{C}_i \subseteq \mathscr{C}$. Ne deduciamo che $x \in A_{f(B(y,r))}$. Ciò dimostra che

$$K \subseteq \cup_{C \in \mathscr{C}} A_{f(C)}).$$

□

Teorema 7.5.17 ($(b) \Rightarrow (a)$ del Teorema 7.5.9).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$. Allora

$$K \textit{ sequenzialmente compatto} \quad \Rightarrow \quad K \textit{ compatto.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Supponiamo, per assurdo, che ci sia un *ricoprimento di aperti* $\{A_i\}_{i \in I}$ di K dai quali non sia possibile estrarre un ricoprimento finito. In particolare, deve essere $\{A_i\}_{i \in I}$ una collezione infinita di elementi, altrimenti essa sarebbe un ricoprimento finito, contraddicendo quanto appena supposto. Per il Lemma 7.5.16 e la sequenziale compattezza di K è possibile supporre $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deve esistere

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

La successione (x_n) così ottenuta è una successione in K, e si ha

$$A_i \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \{x_n : 1 \le n \le i-1\}. \tag{7.5.7}$$

Dalla compattezza per successioni di K deve esistere una sottosuccessione (x_{n_k}) convergente a un elemento $x_0 \in K$. Dato che $x_0 \in K \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ deve esistere j_0 tale che $x_0 \in A_{j_0}$. Essendo A_{j_0} aperto esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subseteq A_{j_0}$. Dato che (x_{n_k}) converge a $x_0 \in K$, esisteranno infiniti elementi della successione (x_{n_k}) (e quindi infiniti elementi di (x_n)) contenuti in $B(x_0, r)$ e quindi in A_{j_0}. Questo è un assurdo, per la (7.5.7).

□

Teorema 7.5.18 (Teorema di Heine-Borel: caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$).
Si consideri lo spazio Euclideo $(\mathbb{R}^n, d_e)$ dove d_e è l'usuale metrica euclidea:

$$d((x_1, \cdots, x_n) - (y_1, \cdots, y_n)) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Sia $K \subseteq X$ non vuoto. Allora

$$K \textit{ e compatto} \quad \Leftrightarrow \quad K \textit{ chiuso e limitato.}$$

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
Segue dal Teorema 7.5.6 e dalla Proposizione 7.5.4.
$\Leftarrow$:
Per il Teorema 7.5.17 basta dimostrare che K è sequenzialmente compatto, ossia che da ogni successione (x_h) in K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un $x_0 \in K$.
Sia K chiuso e limitato. Sia (x_h) una successione in K. Dunque

$$x_h = (x_{h,1}, x_{h,2}, \cdots, x_{h,n}) \in K \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Essendo K limitato, allora esiste $M > 0$ tale che per ogni $h \in \mathbb{N}^*$ è $d(x_h, 0) \le M$ per ogni h, ossia

$$|x_{h,j}| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{h,i}^2} \le M \qquad \forall h \in \mathbb{N}^*, \forall j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Dunque, per ogni $j \in \{1, \cdots, n\}$ la successione $(x_{h,j})_{h\in\mathbb{N}^*}$ è una successione in $\mathbb{R}$ limitata.
Iniziamo considerando $j = 1$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass e per la chiusura di K, da $(x_{h,1})_{h\in\mathbb{N}^*}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $(x_{k_h,1})_{h\in\mathbb{N}}$ di $(x_{h,1})_{h\in\mathbb{N}}$ che è convergente a un certo $x_{0,1} \in \mathbb{R}$. Denotiamo $x_{h,1}^{(1)} := x_{k_h,1}$.
Consideriamo la sottosuccessione $(x_{h,2}^{(1)})_{h\in\mathbb{N}^*}$ di $(x_{h,2})_{h\in\mathbb{N}^*}$, così definita:

$$x_{h,2}^{(1)} := x_{k_h,2} \qquad \forall h \in \mathbb{N}^*.$$

$(x_{h,2}^{(1)})_{h\in\mathbb{N}^*}$ è sottosuccessione di una successione limitata quindi è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$, da $(x_{h,2}^{(1)})_{h\in\mathbb{N}^*}$ è possibile estrarre una sottosuccessione, che denotiamo $(x_{h,2}^{(2)})_{h\in\mathbb{N}^*}$, che è convergente a un certo $x_{0,2} \in \mathbb{R}$.
Si noti che $(x_{h,1}^{(2)})_{h\in\mathbb{N}^*}$ è una sottosuccessione di $(x_{h,1}^{(1)})_{h\in\mathbb{N}^*}$, quindi

$$\lim_{h\to+\infty} x_{h,1}^{(2)} = x_{0,1}, \qquad \lim_{h\to+\infty} x_{h,1}^{(2)} = x_{0,2}.$$

Iterando il ragionamento, per ogni $j \in \{1, \cdots, n\}$ si determina una sottosuccessione $(x_{h,j}^{(n)})_{h\in\mathbb{N}^*}$ di $(x_{h,j})_{h\in\mathbb{N}^*}$ e un numero reale $x_{0,j}$ tali che

$$\lim_{h\to+\infty} x_{h,j}^{(n)} = x_{0,j} \qquad \forall j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Definiamo

$$x_h^{(n)} := (x_{h,1}^{(n)}, \cdots, x_{h,n}^{(n)}) \in \mathbb{R}^n, \qquad x_0 := (x_{0,1}, \cdots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n.$$

Si ha

$$0 \le d(x_h^{(n)}, x_0) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{h,j}^{(n)} - x_{0,j})^2} \le \sum_{j=1}^{n} |x_{h,j}^{(n)} - x_{0,j}|.$$

Per il Teorema dei Carabinieri si ha $\lim_{h\to+\infty} d(x_h^{(n)}, x_0) = 0$. Essendo K chiuso, per la Proposizione 7.3.3 (Cii) deve essere $x_0 \in K$. Pertanto abbiamo trovato una sottosuccessione di (x_h) convergente nella metrica d a un $x_0 \in K$. $\square$

7.6. Separabilità

Definizione 7.6.1. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice *denso* in X se $\overline{A} = X$.

Definizione 7.6.2. Uno spazio topologico si dice *separabile* se contiene un sottonsieme che è sia denso che numerabile.

Esempio 7.6.3. $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea è separabile, in quanto $\mathbb{Q}$ è un suo sottoinsieme denso e numerabile.

Teorema 7.6.4. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Sia $K \subseteq X$.*
Vale la seguente implicazione:

$$K \text{ compatto} \quad \Rightarrow \quad K \text{ separabile.}$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$K \subseteq \cup_{x\in K} B(x, \frac{1}{n}).$$

Essendo K compatto deve esistere un sottoricoprimento finito. Dunque esistono

$$\exists m_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \exists x_1^{(n)}, \cdot, x_{m_n}^{(n)} \quad : \quad K \subseteq \cup_{i=1}^{m_n} B(x_i^n, \frac{1}{n}).$$

Sia

$$D := \{x_i^{(n)} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ i \in \{1, \dots, m_n\}\}.$$

Si ha $D \subseteq K$ e D è numerabile.
Inoltre, D è denso in K, dato che per ogni $x \in K \setminus D$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste $y \in D$ tale che $d(x,y) < \frac{1}{n}$. □

7.7. Funzioni tra spazi metrici

In questo paragrafo consideriamo due spazi metrici (X,d) e (Y,d'). Indichiamo $B_d(x_0,r)$ e $B_{d'}(y_0,r)$ le palle dei rispettivi spazi.
Ricordando la definizione di intorno (v. Definizione 7.1.13) in uno spazio metrico,

Definizione 7.7.1.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici e sia $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ funzione. Siano $x_0 \in D(A)$ e $y_0 \in Y$.
Diciamo che "f tende (o converge) a $y_0 \in Y$ quando x tende a x_0" se

$$\forall V \text{ intorno di } y_0 \text{ in } (Y,d')\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ in } (X,d) \ :\ f(x) \in V \ \ \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}. \tag{7.7.1}$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{d(x,x_0)\to 0} d'(f(x), y_0) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = y_0.$$

Ricordando la definizione di insieme aperto (v. Definizione 7.1.7) e palla e osservando che: ogni aperto è un intorno di ogni suo punto e che ogni palla centrata in x è un intorno (aperto) di x, si ha la seguente caratterizzazione di limite.

Teorema 7.7.2 (Caratterizzazione di limite).
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici e sia* $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ *funzione. Siano* $x_0 \in D(A)$ *e* $y_0 \in Y$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$,
(ii) $\forall V$ *aperto di* y_0 *in* (Y,d') $\exists U$ *aperto di* x_0 *in* (X,d) : $f(x) \in V \quad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$.
(iii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \; : \; d'(f(x), y_0) < \epsilon \qquad \forall x \in A, 0 < d(x,x_0) < \delta$.

Teorema 7.7.3 (Unicità del limite).
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici e sia* $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ *funzione. Siano* $x_0 \in D(A)$ *e* $y_0, y_1 \in Y$.
Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = y_1,$$

allora $y_0 = y_1$.

DIMOSTRAZIONE.
Supponiamo $y_0 \neq y_1$. Allora dal Teorema 7.2.5 esistono $r_0, r_1 > 0$ tali che

$$B_{d'}(y_0, r_0) \cap B_{d'}(y_1, r_1) = \emptyset.$$

Per ipotesi e per Teorema 7.7.2 (iii), fissato $\epsilon := \min\{r_0, r_1\} > 0$, $\exists \delta_0(\epsilon), \delta_1(\epsilon) > 0$,

$$f(x) \in B_{d'}(y_0, \epsilon) \qquad \forall x \in A \cap B_d(x_0, \delta_0(\epsilon)), x \neq x_0.$$

$$f(x) \in B_{d'}(y_1, \epsilon) \qquad \forall x \in A \cap B_d(x_0, \delta_1(\epsilon)), x \neq x_0.$$

Consideriamo $\delta := \min\{\delta_0(\epsilon), \delta_1(\epsilon)\}$. Si ha

$$f(x) \in B_{d'}(y_0, \epsilon) \cap B_{d'}(y_1, \epsilon) \qquad \forall x \in A \cap B_d(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}. \tag{7.7.2}$$

Si noti che essendo $x_0 \in D(A)$ è $A \cap B_d(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ non vuoto e quindi dalla (7.7.2) deduciamo

$$\emptyset \neq f(A \cap B_d(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subseteq B_{d'}(y_0, \epsilon) \cap B_{d'}(y_1, \epsilon) \subseteq B_{d'}(y_0, r_0) \cap B_{d'}(y_1, r_1) = \emptyset.$$

Ciò è un assurdo. $\square$

Teorema 7.7.4 (Caratterizzazione sequenziale di limite).
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici e sia* $A \subseteq X$, $f: A \to Y$ *funzione.*
Siano $x_0 \in D(A)$ *e* $y_0 \in Y$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.
(ii) *per ogni* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *successione in* A *tale che* $x_k \neq x_0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}^*$, *si ha*

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} d'(f(x_k), y_0) = 0.$$

Proposizione 7.7.5.
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici e siano* $B \subseteq A \subseteq X$, $f : A \to Y$ *funzione.*
Siano $x_0 \in D(B)$ *e* $y_0 \in Y$.
Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f|_B(x) = y_0,$$

dove ricordiamo che $f|_B$ *denota la funzione* f *ristretta al dominio* B.

Osservazione 7.7.6. La Proposizione precedente è utile per stabile risultati di non esistenza di limite.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici e siano $B,C \subseteq A \subseteq X$, $f : A \to Y$ funzione. Dalla Proposizione 7.7.5 deduciamo che:

- se $x_0 \in D(B)$ e $\nexists \lim_{x\to x_0} f|_B(x)$ allora non può esistere $\lim_{x\to x_0} f(x)$
- se $x_0 \in D(B)\cap D(C)$ e
$$\lim_{x\to x_0} f|_B(x) \neq \lim_{x\to x_0} f|_C(x)$$
allora non esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Esempio 7.7.7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Sia $B = \{(x,0) : x \neq 0\}$ e $C = \{(0,y) : y \neq 0\}$. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_B(x,y) = \lim_{x\to 0} f|_B(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_C(x,y) = \lim_{y\to 0} f|_C(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

dunque non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Teorema 7.7.8 (Teorema di limite di funzione composta).
Siano (X,d), (Y,d'), (Z,d'') *spazi metrici,* $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ *funzione e* $f(A) \subseteq B$ *con* $B \subseteq Y$. *Supponiamo che sia* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \in Y$ *e che esista* U *intorno di* x_0 *in* X *tale che*

$$f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}.$$

Allora $y_0 \in D(B)$.
Inoltre, se $g : B \to Z$ *è tale che* $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0 \in Z$ *allora*

$$\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = z_0$$

7.8. Funzioni continue

Definizione 7.8.1.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.
Si dice che f è *continua in* x_0 se

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \text{ in } (Y,d')\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ in } (X,d) : \ f(x) \in V \ \ \forall x \in U. \tag{7.8.1}$$

Si dice che f è continua se f è continua in ogni punto di A.

Teorema 7.8.2 (Caratterizzazione della continuità in un punto).
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici,* $f : X \to Y$, $x_0 \in X$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) f *è continua in* x_0
(ii) $\forall V$ *aperto di* $f(x_0)$ *in* (Y,d') $\exists U$ *aperto di* x_0 *in* (X,d) : $f(x) \in V \;\; \forall x \in U$
(iii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;:\; d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \quad \forall x \in B_d(x_0, \delta)$.

Teorema 7.8.3 (Caratterizzazione topologica della continuità).
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici,* $f : X \to Y$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) f *è continua*
(ii) $\forall V$ *aperto di* (Y,d') $f^{-1}(V)$ *è un aperto di* (X,d).

Se (X,d) è uno spazio metrico e $A \subseteq X$ allora (A,d) è uno spazio metrico. È facile vedere che le palle, gli aperti e gli intorni di (A,d) sono legati a quelli di (X,d) nel modo seguente:
- le palle di (A,d) sono le intersezioni di A con palle di (X,d)
- gli aperti di (A,d) sono le intersezioni di A con gli aperti di (X,d)
- gli intorni di $x \in A$ in (A,d) sono le intersezioni di A con gli intorni del punto x in (X,d).

Ciò ci permette di adattare la defινzione di continuità al caso di $f : A \to Y$, con $A \subseteq X$.

Definizione 7.8.4.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici, $A \subseteq X$ e $f : A \to Y$.
Si dice che f è *continua in* $x_0 \in A$ se

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \text{ in } (Y,d') \; \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ in } (X,d) \;:\; f(x) \in V \;\; \forall x \in A \cap U \tag{7.8.2}$$

o, equivalentemente,

$$\forall V \text{ aperto di } f(x_0) \text{ in } (Y,d') \; \exists U \text{ aperto di } x_0 \text{ in } (X,d) \;:\; f(x) \in V \;\; \forall x \in A \cap U$$

oppure

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \;:\; d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \qquad \forall x \in A,\; d(x, x_0) < \delta.$$

Come immediata conseguenza della Definizione/Teorema 7.8.4 si ha un'altra caratterizzazione che mette in evidenza il legame tra la nozione topologica di continuità con quella di limite.

Teorema 7.8.5.
Siano (X,d) *e* (Y,d') *spazi metrici,* $A \subseteq X$ *e* $x_0 \in A$.
Una funzione $f : A \to Y$ *è continua in* x_0 *se e solo se vale una delle due:*

- $x_0 \notin D(A)$
- $x_0 \in D(A)$ *e* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $x_0 \notin D(A)$ allora esiste $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$. Quindi l'affermazione

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \ : \ d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \qquad \forall x \in A, \ d(x, x_0) < \delta$$

è banalmente verificata: basta scegliere $\delta = r$.
Se invece $x_0 \in D(A)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ allora, per definizione di limite

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \ : \ d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \qquad \forall x \in A \cap B_d(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}.$$

D'altra parte, se $x = x_0$ è $d'(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \epsilon$ quindi si ha

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \ : \ d'(f(x), f(x_0)) < \epsilon \qquad \forall x \in A \cap B_d(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}.$$

□

Teorema 7.8.6.
Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici, $A \subseteq X$.
Una funzione $f : A \to Y$ è continua se e solo se

$$\forall V \ \text{aperto di } (Y, d') \ \exists U \ \text{aperto di } (X, d) : \ f^{-1}(V) = U \cap A.$$

Proposizione 7.8.7 (La funzione distanza è continua).
Siano (X, d) uno spazio metrico. Sia $x_0 \in X$. La funzione $d_{x_0} : (X, d) \to \mathbb{R}$ è continua.

DIMOSTRAZIONE.
Sia $\bar{x} \in X$.
Si ha

$$0 \le |d_{x_0}(x) - d_{x_0}(\bar{x})| = |d(x, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \overset{(Div)}{\le} d(x, \bar{x})$$

quindi se $d(x, \bar{x}) \to 0$ allora, per il Teorema dei Carabinieri, $|d_{x_0}(x) - d_{x_0}(\bar{x})| \to 0$. □

Definizione 7.8.8.
Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici, $A \subseteq X$ e $x_0 \in A$.
Una funzione $f : A \to Y$ si dice *sequenzialmente continua in* x_0 se per ogni successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ in X

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} d'(f(x_k), f(x_0)) = 0.$$

Teorema 7.8.9.
Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici e $A \subseteq X$.
Sia $f : A \to Y$ una funzione e $x_0 \in A$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) *f è continua in x_0*
(ii) *f è sequenzialmente continua in x_0*

7.9. Funzioni a valori reali

In questa sezione consideriamo funzioni a valori reali, del tipo $f : X \to \mathbb{R}$, dove X è uno spazio metrico e $\mathbb{R}$ è pensato dotato della metrica euclidea d_e.

Teorema 7.9.1.
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f,g : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ ed esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tali che Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \mu, \qquad \lambda > \mu,$$

allora esiste U intorno di x_0 tale che

$$f(x) > g(x) \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}.$$

Corollario 7.9.2.
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ e esiste $\lambda \in]0,+\infty]$ tale che Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda,$$

allora esiste U intorno di x_0 tale che

$$f(x) > 0 \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Usare il Teorema 7.9.1 con $g \equiv 0$. □

Teorema 7.9.3 (Teorema del confronto: il caso della divergenza).
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f,g : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ ed esiste U intorno di x_0 tale che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$$

allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Teorema 7.9.4 (Teorema dei carabinieri).
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f,g,h : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ ed esiste U intorno di x_0 tale che

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$$

e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda.$$

Teorema 7.9.5.
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ e $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora valgono le seguenti implicazioni

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Teorema 7.9.6.
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ e se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ (alt.: $f(x) < 0$) per ogni $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$ allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ (alt.: } -\infty\text{)}.$$

7.10. Funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$

In questa sezione consideriamo funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$, del tipo $f : X \to \mathbb{R}^m$, dove X è uno spazio metrico e $\mathbb{R}^m$ è pensato dotato della metrica euclidea d_e.

Definizione 7.10.1.
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$.
Allora, le funzioni a valori reali $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,\cdots,m\}$ tali che $f(x) = (f_1(x),\cdots,f_m(x))$ per ogni $x \in A$, si dicono *componenti di f*.

Teorema 7.10.2.
Siano (X,d) spazio metrico, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$, $f = (f_1,\cdots,f_m)$. Siano $x_0 \in D(A)$ e $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$.
Sono equivalenti le seguenti:

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lambda$
(b) *per ogni $i \in \{1,\cdots,m\}$* $\lim_{x\to x_0} f_i(x) = \lambda_i$.

DIMOSTRAZIONE.
Basta osservare che per ogni $j \in \{1,\cdots,m\}$

$$0 \leq |f_j(x) - \lambda_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - \lambda_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{m} \sqrt{(f_i(x) - \lambda_i)^2} = \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - \lambda_i|,$$

da cui deduciamo la tesi, in virtù del Teorema del confronto e dei carabinieri. □

Con dimostrazioni analoghe a quelle per funzioni di una variabile reale a valori reali è facile dimostrare i seguenti risultati.

Teorema 7.10.3 (Limite di una somma).
Siano (X,d) *spazio metrico,* $A \subseteq X$, $f,g : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Siano $x_0 \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^m$, *tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \mu.$$

Allora la funzione $f + g : A \to \mathbb{R}^m$ *è tale che*

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lambda + \mu.$$

Corollario 7.10.4.
Siano (X,d) *spazio metrico,* $A \subseteq X$, $f,g : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Siano f,g *continue in* $x_0 \in A$. *Allora la funzione* $f + g : A \to \mathbb{R}^m$ *è continua in* x_0.

Teorema 7.10.5 (Moltiplicazione per scalari).
Siano (X,d) *spazio metrico,* $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Siano $x_0 \in D(A)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda.$$

Allora per ogni $c \in \mathbb{R}$, *la funzione* $cf : A \to \mathbb{R}^m$ *è tale che*

$$\lim_{x \to x_0} (cf)(x) = c \lim_{x \to x_0} f(x) = c\lambda.$$

Corollario 7.10.6.
Siano (X,d) *spazio metrico,* $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Sia f *continua in* $x_0 \in A$. *Allora la funzione* $cf : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $c \in \mathbb{R}$, *è continua in* x_0.

Teorema 7.10.7 (Limite di funzione limitata per una infinitesima).
Siano (X,d) *spazio metrico,* $A \subseteq X$, $f,g : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Siano $x_0 \in D(A)$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$ *e supponiamo che esista* U *intorno di* x_0 *e* $M > 0$ *tale che*

$$\exists U \text{ intorno di } x_0 \;:\; |g(x)| \leq M \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}.$$

Allora la funzione $f \cdot g : A \to \mathbb{R}^m$ *è tale che*

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0.$$

7.11. Uniforme continuità

Definizione 7.11.1.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici. Una funzione $f:(X,d)\to(Y,d')$ si dice *uniformemente continua* se

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0,\ :\ d'(f(x),f(x_0))<\epsilon \qquad \forall x\in X,\ d(x,x_0)<\delta. \tag{7.11.1}$$

Ovviamente una funzione uniformemente continua è continua.

Teorema 7.11.2 (Teorema di Heine-Cantor).
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici, $K\subseteq X$ e $f:K\to Y$.
Se $K\subseteq X$ è compatto e f è continua, allora f è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che f non sia uniformemente continua. Allora esiste $\epsilon>0$ tale che per ogni $n\in\mathbb{N}^*$ esistono $x_n,x'_n\in K$ tali che

$$(x_n,x'_n)<\frac{1}{n} \quad \text{e} \quad d'(f(x_n),f(x'_n))\geq\epsilon. \tag{7.11.2}$$

La successione (x_n) è in K, che è compatto e quindi sequenzialmente compatto (v. Teorema 7.5.9) e chiuso (v. Teorema 7.5.6). Allora esiste una sottosuccessione (x_{k_n}) di (x_n) che è convergente a un $x_0\in K$:

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_{k_n},x_0)=0.$$

Consideriamo la sottosuccessione (x'_{k_n}) di (x'_n). Si ha

$$d(x'_{k_n},x_0)\leq d(x'_{k_n},x_{k_n})+d(x_{k_n},x_0)\leq\frac{1}{k_n}+d(x_{k_n},x_0)\leq\frac{1}{n}+d(x_{k_n},x_0)$$

e dal Teorema del Carabinieri otteniamo che (x'_{k_n}) ha anch'essa limite x_0.
Si ha

$$d'(f(x_n),f(x'_n))\leq d'(f(x_n),f(x_0))+d'(f(x'_n),f(x_0))$$

e dato che per la continuità di f

$$\lim_{n\to\infty} d'(f(x_n),f(x_0))=0 \qquad \lim_{n\to\infty} d'(f(x'_n),f(x_0))=0$$

otteniamo dal Teorema dei Carabinieri che $\lim_{n\to\infty} d'(f(x_n),f(x'_n))=0$. Ciò è impossibile perché contraddice la seconda disuguaglianza di (7.11.2). □

7.12. Teorema di Weierstrass

Definizione 7.12.1.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici e $A\subseteq X$.
Una funzione $f:A\to Y$ si dice *limitata* se $f(A)$ è un insieme limitato, ossia (v. Definizione 7.1.2)

$$\exists y_0\in Y,\ \exists M>0\ :\ d'(f(x),y_0)<M \qquad \forall x\in A.$$

Definizione 7.12.2.
Siano (X,d) uno spazio metrico, $A \subseteq X$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Si dice che f ha *massimo* se esiste il massimo dell'immagine di f, ossia se esiste

$$\max_A f = \max f(A) := \max\{f(x) : x \in A\}.$$

In tal caso il valore $\max\limits_A f$ si chiama massimo (o valore di massimo) di f. Un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \max_A f$ si chiama *punto di massimo assoluto*.
Analogamente si possono dare le definizioni di minimo e di punto di minimo.

Teorema 7.12.3 (Teorema di Weierstrass).
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici, $K \subseteq X$, $f : K \to Y$ continua.
Allora

$$K \textit{ compatto in } X \quad \Rightarrow \quad f(K) \textit{ compatto in } Y.$$

DIMOSTRAZIONE.
Diamo due dimostrazioni:
I dimostrazione:
Usando il Teorema 7.5.9 dimostriamo che $f(K)$ è sequenzialmente compatto.
Sia (y_n) una successione in $f(K)$. Per definizione, per ogni n esiste $x_n \in X$ tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo K compatto (e quindi sequenzialmente compatto) esiste una sottosuccessione (x_{k_n}) di (x_n) convergente a un qualche $x_0 \in K$. Per la continuità di f e per il Teorema 7.8.9, dovrà essere

$$\lim_{n\to\infty} d'(f(x_{k_n}), f(x_0)) = 0.$$

Essendo $(f(x_{k_n})$ una sottosuccessione di (y_n) convergente a $f(x_0) \in f(K)$ abbiamo concluso.
II dimostrazione:
Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di aperti di $f(K)$. Dimostriamo che è possibile estrarne un sottoricoprimento finito.
Per la continuità di f e dal Teorema 7.8.6 per ogni $i \in I$ esiste U_i aperto di X tale che

$$f^{-1}(A_i) = K \cap U_i. \tag{7.12.1}$$

Si ha

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Rightarrow \quad K \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) = K \cap \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Allora

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Abbiamo quindi trovato un ricoprimento di aperti di K. Essendo K compatto, esistono $m \in \mathbb{N}^*$ e $i_1, \cdots, i_m \in I$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}.$$

Quindi

$$f(K) = f(K \cap \bigcup_{j=1}^{m} U_{i_j}) = \bigcup_{j=1}^{m} f(K \cap U_{i_j}) \overset{(7.12.1)}{\subseteq} \bigcup_{j=1}^{m} A_{i_j}.$$

Ciò è quanto si desiderava dimostrare. □

Nel caso di $(Y, d') = (\mathbb{R}, d_e)$ (con d_e distanza Euclidea), il Teorema 7.12.3 ha una conseguenza importante.

Teorema 7.12.4.
Sia (X, d) uno spazio metrico, $K \subseteq X$ e $f : X \to \mathbb{R}$.
Se $K \subseteq X$ è compatto e f è continua, allora f è limitata e f ha massimo e minimo.

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo che f è superiormente limitata e che f ha massimo. Che sia f inferiormente limitata e che f abbia minimo segue ragionano in modo analogo.
Per il Teorema 7.12.3 $f(K)$ è un compatto di $\mathbb{R}$. Per il Teorema di Heine-Borel (Teorema 7.5.18) i compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati. In particolare, essendo $f(K)$ limitato, si ha $\sup_K f \in \mathbb{R}$.
Sia (y_k) una successione in $f(K)$ convergente a $\sup_K f$. Si noti che una tale successione esiste sempre, dato che una caratterizzazione di $\sup_K f \in \mathbb{R}$ è:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists y_k \in f(K) \ : \ \sup_K f - \frac{1}{n} < y_k \leq \sup_K f.$$

Essendo $f(K)$ chiuso, per la Proposizione 7.3.3 (Cii) deve essere $\sup_K f \in f(K)$. Ciò significa che esiste $\max_K f$. □

7.13. Teorema di punto fisso

Definizione 7.13.1.
Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici. Una funzione $f : (X, d) \to (Y, d')$ si dice *contrazione* se

$$\exists L \in [0, 1[\ : \ d'(f(x), f(x')) \leq L d(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

È facile vedere che una contrazione è una funzione continua.

Proposizione 7.13.2.
Siano (X, d) e (Y, d') spazi metrici, $f : (X, d) \to (Y, d')$ contrazione. Allora f è continua.

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi,

$$\exists L \in [0, 1[\ : \ d'(f(x), f(x')) \leq L d(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

Sia $x_0 \in X$ e dimostriamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Sia $\epsilon > 0$. Se scegliamo $\delta := \frac{\epsilon}{L}$ esso è tale che

$$d'(f(x), f(x_0)) \leq L d(x, x_0) < L\delta = \epsilon \qquad \forall x \in X \cap B_d(x_0, \delta).$$

ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Definizione 7.13.3.
Siano X, Y insiemi non vuoti e $f : X \to Y$. Si dice che $x \in X$ che è un punto fisso di f se $f(x) = x$.

Teorema 7.13.4 (Teorema di Banach-Caccioppoli).
Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $f : (X, d) \to (X, d)$ una contrazione.
Allora esiste un unico punto fisso di f.

DIMOSTRAZIONE. Essendo f una contrazione, esiste $L \in]0, 1[$ tale che

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

Esistenza del punto fisso:
Definiamo la successione (x_n) in X per ricorrenza:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in X \end{cases}$$

Essendo f una contrazione, esiste $L \in]0, 1[$ tale che

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq Ld(x_n, x_{n-1}).$$

Dimostriamo per induzione che fissato $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0).$$

Se $n = 0$ è ovvio.
Supponiamo che sia

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \tag{7.13.1}$$

e dimostriamo che vale

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq L^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Si ha

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n+1}, x_n) \overset{(7.13.1)}{\leq} L \cdot L^n d(x_1, x_0) = L^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Siano ora $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n \geq 1$. Allora, usando il Teorema 6.2.2sul carattere della serie geometrica,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{h=0}^{m-n-1} L^{n+h} = d(x_1, x_0) L^n \sum_{h=0}^{m-n-1} L^h \\ &\leq d(x_1, x_0) L^n \sum_{h=0}^{\infty} L^h \overset{\text{Teor. 6.2.2}}{=} d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1 - L}. \end{aligned}$$

Dato che $L < 1$ il limite per n che tende a ∞ dell'ultimo termine è 0. Quindi,

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \;\; : \;\; d(x_m, x_n) \leq \epsilon \;\; \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \geq \bar{n}.$$

Dunque (x_n) è una successione di Cauchy. Essendo (X, d) completo, la successione converge a un $\bar{x} \in X$.

Dalla relazione $x_{n+1} = f(x_n)$, dalla continuità di f (v. Proposizione 7.13.2), e dal Teorema 7.8.9 si ha

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

Quindi $\bar{x}$ è un punto fisso.
Unicità del punto fisso:
Se esistessero x, x' punti fissi distinti di f si avrebbe $d(x,x') > 0$ e, ricordando che $L < 1$,

$$d(x,x') = d(f(x), f(x')) \leq Ld(x,x') < d(x,x')$$

il che è un assurdo. □

Corollario 7.13.5.
Siano (X,d) uno spazio metrico completo e $f : (X,d) \to (X,d))$. Sia $m \in \mathbb{N}^*$ tale che f^m è una contrazione. Allora esiste un unico punto fisso di f.

DIMOSTRAZIONE. Se $m = 1$ è il Teorema di Banach-Caccioppoli.
Sia $m \geq 2$.
Dal Teorema di Banach-Caccioppoli, f^m ha un punto fisso (ed esattamente uno). Sia esso $\bar{x}$.
Si ha

$$f(\bar{x}) = f(f^m(\bar{x})) = f^m(f(\bar{x})),$$

dunque $f(\bar{x})$ è un punto fisso di f^m. Per l'unicità dei punti fissi di f^m, risulta $\bar{x} = f(\bar{x})$, quindi $\bar{x}$ è punto fisso anche di f.
Unicità:
Sia y un punto fisso di f. Per induzione dimostriamo che y è un punto fisso di f^n per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sia $P(n)$ la proposizione "y è un punto fisso di $f^n(y)$". $P(1)$ è vera per ipotesi. Sia vera $P(n)$ e dimostriamo $P(n+1)$:

$$f^{n+1}(y) = f^n(f(y)) = f^n(y) \overset{P(n)\text{vera}}{=} y$$

ossia y è un punto fisso di f^{n+1}. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ vera implica $P(n+1)$ vera. Dunque è dimostrato che y è un punto fisso di $f^n(y)$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In particolare y è un punto fisso per f^m. Se ci fossero due punti fissi distinti di f, essi sarebbero punti fissi distinti di f^m, e ciò è assurdo perché per il Teorema 108 (T. di Banach-Caccioppoli) la contrazione f^m ha un unico punto fisso. □

7.14. Insiemi connessi

Definizione 7.14.1 (Insieme connesso).
Siano (X,d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$.
Diciamo che A è *connesso* se

$$\nexists O_1, O_2 \text{ aperti di } X \text{ tali che valgano le seguenti:}$$

(a) $A \subseteq O_1 \cup O_2$
(b) $A \cap O_1 \neq \emptyset$, $A \cap O_2 \neq \emptyset$
(c) $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

La definizione si semplifica se A è un aperto, come attesta il seguente risultato.

Proposizione 7.14.2.
Siano (X,d) *uno spazio metrico e* $A \subseteq X$.
Se A *è un aperto, allora* A *è* connesso *se e solo se*

$$\nexists O_1, O_2 \text{ aperti di } X \text{ tali che valgano le seguenti:}$$

(i) $A = O_1 \cup O_2$
(ii) $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$
(iii) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
Sia A connesso. Dimostriamo che non possono esistere O_1, O_2 aperti di X che soddisfano (i), (ii), (iii). Per assurdo, se esistessero O_1 e O_2 aperti di X tali che

(i) $A = O_1 \cup O_2$
(ii) $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$
(iii) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

si avrebbe, da (i) che vale (a) nella Definizione 7.14.1 e $O_1, O_2 \subseteq A$ e quindi:

$$A \cap O_1 = O_1 \overset{(ii)}{\neq} \emptyset \qquad A \cap O_2 = O_2 \overset{(ii)}{\neq} \emptyset$$

che è la (b) nella Definizione 7.14.1. Inoltre (iii) e $O_1, O_2 \subseteq A$ implicano

$$A \cap O_1 \cap O_2 = O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Abbiamo quindi trovato due aperti che soddisfano (a), (b) e (c) nella Definizione 7.14.1, contro l'ipotesi di connessione di A.
$\Leftarrow$:
Supponiamo per assurdo, che A non sia connesso. Allora esistono O_1 e O_2 soddisfacenti (a), (b) e (c) nella Definizione 7.14.1. Definiamo $\tilde{O}_1 = O_1 \cap A$ e $\tilde{O}_2 = O_2 \cap A$. Essi sono insiemi aperti, per la Proposizione 7.1.12. Dimostriamo che essi soddisfano (i), (ii) e (iii).
Per (a), $A \subseteq O_1 \cup O_2$ e quindi

$$\tilde{O}_1 \cup \tilde{O}_2 = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A \cap (O_1 \cup O_2) = A$$

e quindi vale (i).
Da (b) segue direttamente (ii).
Da (c)

$$\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

ossia vale (iii).
Abbiamo quindi trovato due aperti, $\tilde{O}_1$ e $\tilde{O}_2$, soddisfacenti (i), (ii) e (iii), contro l'ipotesi. □

Osservazione 7.14.3.
Essendo X un insieme aperto, vedi l'Osservazione 7.1.8 la Proposizione 7.14.2, si applica a $A = X$.

Definizione 7.14.4 (Segmento).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d_e)$ e $x, y \subseteq \mathbb{R}^n$.
Chiamiamo *segmento* di primo estremo x e secondo estremo y l'insieme

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}.$$

Osservazione 7.14.5.
Si noti che l'insieme $\{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\}$ è l'insieme dei punti del segmento di $\mathbb{R}^n$ congiungente x e y.

Definizione 7.14.6 (Poligonale).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d_e)$ e $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.
Diciamo che $P(x, y)$ è una poligonale di estremi x e y se esistono $x_0, \cdots, x_m \in \mathbb{R}^n$, con $m \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = x$, $x_m = y$, tali che

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} [x_{i-1}, x_i].$$

Definizione 7.14.7 (Insieme connesso per poligonali).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d_e)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto.
Diciamo che A è connesso per poligonali se per ogni $x_1, x_2 \in A$ esiste una poligonale $P(x_1, x_2)$ tale che $P(x_1, x_2) \subseteq A$.

Teorema 7.14.8 (Caratterizzazione degli aperti connessi).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d_e)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e non vuoto.
Sono equivalenti le seguenti.

(i) *A è connesso*
(ii) *A è connesso per poligonali.*

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo (i) $\Rightarrow$ (ii).
Siano $x_1, y_1 \in A$. Dimostriamo che esiste una poligonale $P(x_1, y_1) \subseteq A$. Se $x_1 = y_1$ non c'è niente da dimostrare.
Consideriamo

$$O_1 := \{x \in A : \exists P(x_1, x) \subseteq A\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $O_1 = A$.
Dimostriamo che l'insieme O_1 è aperto, ossia per ogni $x \in O_1$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq O_1$.
Essendo $x \in O_1$, esiste $P(x_1, x)$ poligonale tale che $P(x_1, x) \subseteq A$. Essendo A aperto, esiste $r > 0$ tale che

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Per ogni $y \in B(x, r)$ consideriamo la poligonale $Q(x_1, y) := P(x_1, x) \cup [x, y]$. Si ha

$$Q(x_1, y) := P(x_1, x) \cup [x, y] \subseteq A \cap B(x, r) \subseteq A.$$

Pertanto $B(x,r) \subseteq O_1$.
Dimostriamo ora che $O_2 := A \setminus O_1$ è un insieme aperto.
Se $A = O_1$ allora $A \setminus O_1 = \emptyset$, che è aperto.
Se $A \setminus O_1 \neq \emptyset$ allora dobbiamo dimostrare che per ogni punto $x \in A \setminus O_1$ esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq A \setminus O_1$.
Sia $x \in A \setminus O_1$. Essendo A aperto, esiste $r > 0$, tale che $B(x,r) \subseteq A$.
Per ogni $z \in B(x,r)$ deve essere $z \in O_2$. Infatti se $z \in O_1$ allora esisterebbe una poligonale $P(x_1,z)$ contenuta in A e quindi

$$Q(x_1,x) := P(x_1,z) \cup [z,x] \subseteq A \cup B(x,r) \subseteq A$$

sarebbe una poligonale congiungente x_1 e x, contraddicendo $x \in A \setminus O_1$. Ciò dimostra che $B(x,r) \subseteq A \setminus O_1$, e quindi che x è un punto interno di $A \setminus O_1$.
Concludiamo ora dimostrando che $A = O_1$, che, per l'arbitrarietà di x_1 dà la tesi.
Se fosse

$$O_2 := A \setminus O_1 \neq \emptyset,$$

allora avremmo trovato due aperti, O_1 O_2 tali che

(i) $A = O_1 \cup O_2$
(ii) $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$
(iii) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

contraddicendo l'ipotesi che A è connesso, in virtù della Proposizione 7.14.2.

□

Teorema 7.14.9.
In $\mathbb{R}$ gli insiemi connessi sono tutti e soli gli intervalli.

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo una implicazione: se $A \subseteq \mathbb{R}$ è connesso, allora A è un intervallo.
Se A ha un solo elemento allora ovviamente è un intervallo.
Siano $x, y \in A$, $x < y$, e supponiamo che sia $z \in \mathbb{R}$, $x < z < y$ tale che $z \notin A$.
Consideriamo gli insiemi $O_1 :=]-\infty, z[$ e $O_2 :=]z, +\infty[$. Essi sono aperti. Inoltre si hanno

(a) $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \{z\} = O_1 \cup O_2$
(b) $x \in A \cap]-\infty, z[= A \cap O_1$, $y \in A \cap]z, +\infty[= A \cap O_2$
(c) $A \cap\,]-\infty, z[\, \cap\,]z, +\infty[\, = \emptyset$.

Ciò contraddice l'ipotesi di connessione di A. Dunque, $z \in A$.
Abbiamo così dimostrato che A è un intervallo. □

Teorema 7.14.10 (Teorema di Bolzano).
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \to Y$ continua.
Allora

$$A \text{ connesso in } X \quad \Rightarrow \quad f(A) \text{ connesso in } Y.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $f(A)$ non sia connesso. Allora esistono due aperti non vuoti O_1 e O_2 in Y tali che

(a) $f(A) \subseteq O_1 \cup O_2$
(b) $f(A) \cap O_1 \neq \emptyset$, $f(A) \cap O_2 \neq \emptyset$
(c) $f(A) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

f è continua, quindi per il Teorema 7.8.6 esistono U_1 e U_2 aperti in (X, d) tali che

$$U_i \cap A = f^{-1}(O_i) = f^{-1}(f(A) \cap O_i) \overset{(b)}{\neq} \emptyset \qquad i = 1, 2. \tag{7.14.1}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} A \cap U_1 \cap U_2 = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) &\overset{(7.14.1)}{=} f^{-1}(f(A) \cap O_1) \cap f^{-1}(f(A) \cap O_2) \\ &= f^{-1}(f(A) \cap O_1 \cap O_2) \overset{(c)}{=} \emptyset \end{aligned}$$

e da (7.14.1)

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(f(A)) \overset{(a)}{=} f^{-1}(f(A) \cap (O_1 \cup O_2)) = f^{-1}((f(A) \cap O_1) \cup (f(A) \cap O_2)) \\ &= f^{-1}(f(A) \cap O_1) \cup f^{-1}(f(A) \cap O_2) \overset{(7.14.1)}{=} (U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) \\ &= A \cap (U_1 \cup U_2), \end{aligned}$$

che implica $A \subseteq U_1 \cup U_2$.
Avremmo così trovato due aperti U_1 e U_2 che svolgono il ruolo di O_1 e O_2 nella Definizione 7.14.1, contro l'ipotesi di connessione di A. □

Corollario 7.14.11 (Teorema di Bolzano per funzioni a valori reali).
Siano (X, d) e $(\mathbb{R}, d_e)$ (d_e metrica euclidea) spazi metrici, $A \subseteq X$, $f : A \to \mathbb{R}$ continua.
Allora

$$A \text{ connesso in } X \quad \Rightarrow \quad f(A) \text{ intervallo.}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Teorema 7.14.10 e dal Teorema 7.14.9. □

7.15. Prodotto scalare, norma e distanza

Definizione 7.15.1 (Norma).
Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si chiama *norma* su X una funzione $N : X \to \mathbb{R}$, soddisfacente le seguenti: $\forall x, y \in X$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

(Ni) $N(x) \geq 0$
(Nii) $N(x) = 0$ se e solo se $x = 0$
(Niii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
(Niv) [disuguaglianza triangolare] $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Definizione 7.15.2 (Spazio vettoriale normato).
Uno *spazio vettoriale normato* su $\mathbb{R}$ è una coppia (X, N) dove X è un insieme vettoriale su $\mathbb{R}$ e N è una norma su X.

Teorema 7.15.3. *Sia* (X, N) *uno* spazio vettoriale normato *su* $\mathbb{R}$. *Se si definisce* $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) := N(y - x)$$

allora d *è una metrica su* X*, detta metrica indotta dalla norma* M.

DIMOSTRAZIONE.
Bisogna dimostrare che valgono (i)–(iv) della definizione di metrica. L'unica non ovvia è (iv). Se $x, y, z \in X$ si ha

$$d(x,z) + d(z, y) = N(z - x) + N(y - z) \overset{(Niv)}{\geq} N((z - x) + (y - z)) = N(y - x) = d(x, y).$$

$\square$

Esempio 7.15.4 (Esempio di distanza non indotta da una norma).
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia d la metrica discreta. Allora d non può essere indotta da una norma. Se infatti esistesse una norma $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$d(x, y) := N(y - x)$$

si avrebbe

$$1 = d(0,2x) = N(2x) = 2N(x) = 2d(0, x) = 2 \qquad \forall x \neq 0.$$

Esempio 7.15.5.
Sia $X = \mathbb{R}$ e sia $|\cdot|$ il valore assoluto. Allora $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ è uno spazio normato su $\mathbb{R}$.

Esempio 7.15.6.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Denotiamo $C([a, b])$ l'insieme

$$C([a, b]) := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ è continua}\}.$$

È facile dimostrare che $C([a, b])$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Sia $\|\cdot\|_0 : C([a, b]) \to \mathbb{R}$,

$$\|f\|_0 := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad \forall f \in C([a, b]).$$

Allora $\|\cdot\|_0$ è una norma su $C([a, b])$, detta *norma della convergenza uniforme*. Le uniche non ovvie sono le dimostrazioni delle proprietà (Niii) e (Niv). Esse sono conseguenze del Lemma 4.3.2.
Infatti:

$$\sup_{x\in[a,b]} |\lambda f(x)| = \sup\{|\lambda f(x)| : x \in [a, b]\} = \sup\{|\lambda||f(x)| : x \in [a, b]\}$$

$$\overset{\text{Lemma 4.3.2}}{=} |\lambda| \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\} = |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

e

$$\sup_{x\in[a,b]} |(f+g)(x)| = \sup\{|f(x)+g(x)| : x\in[a,b]\} \overset{\text{Disug. triang.}}{\le} \sup\{|f(x)|+|g(x)| : x\in[a,b]\}$$
$$\overset{\text{Lemma 4.3.2}}{\le} \sup\{|f(x)| : x\in[a,b]\}+\sup\{|g(x)| : x\in[a,b]\} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|.$$

Definizione 7.15.7 (Prodotto scalare).
Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si chiama *prodotto scalare* su X una funzione $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{R}$, avente le seguenti proprietà: $\forall x,y,z\in X$ e $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

(Si) $\langle x,x\rangle \ge 0$
(Sii) $\langle x,x\rangle = 0$ se e solo se $x=0$
(Siii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
(Siv) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$
(Sv) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.

Lemma 7.15.8 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).
Sia $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *dotato di* prodotto scalare . *Sia* $N : X\to\mathbb{R}$,

$$N(x) := \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Allora

$$|\langle x,y\rangle| \le N(x)N(y) \qquad \forall x,y\in X.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ogni $t\in\mathbb{R}$ e per ogni $x,y\in X$ si ha

$$0\le \langle x+ty, x+ty\rangle = N(x)^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2N(y)^2.$$

L'ultimo membro è un polinomio in t, che risulta non negativo per ogni $t\in\mathbb{R}$. Ciò è possibile solo se

$$\langle x,y\rangle^2 - N(x)^2N(y)^2 \le 0.$$

Da qui la tesi. □

Teorema 7.15.9.
Sia $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *dotato di* prodotto scalare . *Se si definisce* $N : X\to\mathbb{R}$,

$$N(x) := \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

allora N *è una norma su* X*, ed essa è detta* norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

DIMOSTRAZIONE.
L'unica dimostrazione non ovvia è (Niv):

$$N(x+y) = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{N(x)^2 + 2\langle x, y\rangle + N(y)^2}$$
$$\overset{L.7.15.8}{\leq} \sqrt{N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2} = \sqrt{(N(x)+N(y))^2} = N(x) + N(y).$$

□

Esempio 7.15.10 (Spazio Euclideo reale n-dimensionale).
Sia $X = \mathbb{R}^n$. Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Tale funzione è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. Allora $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ è uno spazio Euclideo.
La norma indotta è

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

e la distanza indotta da tale norma è $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$d((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{7.15.1}$$

La metrica d è detta *distanza Euclidea.*

Definizione 7.15.11. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $N : X \to \mathbb{R}$ una norma su X. Sia $f : X \to \mathbb{R}$. Diciamo che $f(x)$ tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0 (rispetto alla norma N) se

$$\forall \epsilon > 0 \;:\; |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in X,\; 0 < N(x - x_0) < \delta(\epsilon, x_0).$$

In tal caso, scriviamo

$$\lim_{x \overset{N}{\to} x_0} f(x) \qquad \text{o, più semplicemente,} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

Proposizione 7.15.12. *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $N : X \to \mathbb{R}$ una norma su X. Allora N è continua, ossia*

$$\forall x_0 \in X, \qquad \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0 \;:\; |N(x) - N(x_0)| < \epsilon \quad \forall x \in X, 0 < N(x - x_0) < \delta(\epsilon, x_0)$$

.

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in X$. Vogliamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : |N(x) - N(x_0)| < \epsilon \qquad \forall x \in X,\; N(x - x_0) < \delta(\epsilon).$$

Per ogni $\epsilon > 0$ si definisca $\delta(\epsilon) = \epsilon$. Allora per ogni $x_0 \in X$, si ha

$$N(x) = N(x - x_0 + x_0) \overset{(Niv)}{\leq} N(x - x_0) + N(x_0) < \delta(\epsilon) + N(x_0) = \epsilon + N(x_0) \qquad \forall x \in X,\; N(x - x_0) < \delta(\epsilon)$$

Dunque

$$N(x) - N(x_0) < \epsilon \qquad \forall x \in X,\; N(x - x_0) < \delta(\epsilon).$$

Analogamente

$$N(x_0) = N(x_0 - x + x) \overset{(Niv)}{\leq} N(x_0 - x) + N(x) \overset{(Niii)}{=} N(x - x_0) + N(x)$$
$$< \delta(\epsilon) + N(x) = \epsilon + N(x) \qquad \forall x \in X,\ N(x - x_0) < \delta(\epsilon).$$

Pertanto

$$N(x_0) - N(x) < \epsilon \qquad \forall x \in X,\ N(x - x_0) < \delta(\epsilon).$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 7.15.13 (Teorema di Jordan-von Neumann).
Sia (X, N) *uno spazio normato. Si definisca*

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right) \qquad x, y \in X. \tag{7.15.2}$$

Allora $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *è un prodotto scalare se e solo se vale la formula del parallelogramma*

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2). \tag{7.15.3}$$

Inoltre, in tal caso, N *è la norma indotta dal prodotto scalare, ossia*

$$N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
Sia N una norma indotta da un prodotto scalare, denotato $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle$$
$$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle$$
$$= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2(N(x)^2 + N(y)^2).$$

$\Leftarrow$:
Supponiamo che N sia una norma soddisfacente (7.15.3) e dimostriamo che la definizione di $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in (7.15.2) è quella di un prodotto scalare.
(Si):
Si ha

$$\langle x, x\rangle = \frac{1}{4}\left(N(2x)^2 - N(0)^2\right) \overset{N(0)=0}{=} \frac{1}{4}N(2x)^2 \tag{7.15.4}$$

da cui

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in X.$$

(Sii)
Si ha

$$\langle x, x\rangle = 0 \overset{(7.15.4)}{\Leftrightarrow} N(2x)^2 = 0 \overset{(Nii)}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

(Siii)
Da (Niii) si ha

$$N(x-y) = |-1|N(y-x) = N(y-x).$$

Quindi

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(N(x+y)^2 - N(x-y)^2\right) = \frac{1}{4}\left(N(y+x)^2 - N(y-x)^2\right) =: \langle y, x\rangle$$

(Siv)
Dimostriamo che

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \qquad \forall x, y, z \in X.$$

Iniziamo col dimostrare che

$$\langle u+v, z\rangle + \langle u-v, z\rangle = 2\langle u, z\rangle. \tag{7.15.5}$$

Da (7.15.3) si hanno

$$N((u+z)+v)^2 + N((u+z)-v)^2 = 2(N(u+z)^2 + N(v)^2)$$
$$N((u-z)+v)^2 + N((u-z)-v)^2 = 2(N(u-z)^2 + N(v)^2),$$

e, sottraendo membro a membro,

$$N((u+z)+v)^2 + N((u+z)-v)^2 - \left(N((u-z)+v)^2 + N((u-z)-v)^2\right) = 2(N(u+z)^2 - N(u-z)^2).$$

che, riordinando i termini a primo membro, dà:

$$N((u+v)+z)^2 - N((u+v)-z)^2 + N((u-v)+z)^2 - N((u-v)-z)^2 = 2(N(u+z)^2 - N(u-z)^2)$$

Usando la definizione (7.15.2) tale uguaglianza si può riscrivere

$$4\left(\langle u+v, z\rangle + \langle u-v, z\rangle\right) = 8\langle u, z\rangle.$$

Abbiamo così dimostrato (7.15.5).

Applicando (7.15.5) con $u = v$ otteniamo

$$\langle 2u, z\rangle + \langle 0, z\rangle = 2\langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X.$$

essendo

$$\langle 0, z\rangle \overset{(7.15.2)}{=} \frac{1}{4}\left(N(z)^2 - N(-z)^2\right) \overset{(Niii)}{=} \frac{1}{4}\left(N(z)^2 - N(z)^2\right) = 0 \qquad z \in X, \tag{7.15.6}$$

deduciamo

$$\langle 2u, z\rangle = 2\langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X. \tag{7.15.7}$$

Applicando (7.15.5) con $x = u+v$ e $y = u-v$ e osservando che $x+y = 2u$, otteniamo

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \overset{(7.15.5)}{=} 2\langle \frac{1}{2}(x+y), z\rangle \overset{(7.15.7)}{=} \langle x+y, z\rangle \qquad x, y, z \in X. \tag{7.15.8}$$

(Sv)
Dimostriamo per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$,

$$\mathscr{P}(n): \qquad \langle \frac{1}{2^n} u, z\rangle = \frac{1}{2^n}\langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X. \tag{7.15.9}$$

Per $n = 1$ si ha

$$2\langle \frac{1}{2} u, z\rangle \overset{(7.15.7)}{=} \langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X$$

dunque $\mathscr{P}(n) = 1$ è vera.

Sia vera $\mathscr{P}(n)$ e dimostriamo che $\mathscr{P}(n+1)$ è vera. Si ha

$$\langle \frac{1}{2^{n+1}} u, z\rangle \overset{\mathscr{P}(n)}{=} \frac{1}{2^n} \langle \frac{1}{2} u, z\rangle \overset{\mathscr{P}(1)}{=} \frac{1}{2^{n+1}} \langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X.$$

Dunque, le ipotesi del principio d'induzione sono verificate e (7.15.9) è dimostrata.
Dimostriamo ora che, per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$\mathscr{Q}(n): \qquad \langle (n+1)u, z\rangle = (n+1)\langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X. \tag{7.15.10}$$

$\mathscr{Q}(1)$ è vera per (7.15.7). Dimostriamo che se $\mathscr{Q}(n)$ è vera, allora è vera $\mathscr{Q}(n+1)$.

$$\langle (n+1)u, z\rangle = \langle u + nu, z\rangle \overset{(Siv)}{=} \langle u, z\rangle + \langle nu, z\rangle = \overset{\mathscr{Q}(n)}{=} \langle u, z\rangle + n\langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X.$$

Dunque, le ipotesi del principio d'induzione sono verificate e (7.15.10) è dimostrata.
Combinando (7.15.9) e (7.15.10) deduciamo che per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \neq 0$,

$$\begin{aligned} \langle \frac{m}{2^n} u, z\rangle &\overset{(7.15.9)}{=} \frac{1}{2^n} \langle mu, z\rangle \\ &\overset{(7.15.10)}{=} \frac{m}{2^n} \langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X. \end{aligned}$$

I casi $m = 0$ è vero per (7.15.6).
Dimostriamo ora che

$$-\langle u, z\rangle = \langle -u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X. \tag{7.15.11}$$

Si ha

$$-\langle u, z\rangle - \langle -u, z\rangle = -\left(\langle u, z\rangle + \langle -u, z\rangle\right) \overset{(Siii)}{=} -\left(\langle z, u\rangle + \langle z, -u\rangle\right) \overset{(Siv)}{=} -\langle z, 0\rangle \overset{(Siii)+(7.15.6)}{=} 0$$

il che conclude la dimostrazione di (7.15.11).
Abbiamo così dimostrato che

$$\langle \frac{m}{2^n} u, z\rangle = \frac{m}{2^n} \langle u, z\rangle \qquad \forall u, z \in X, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.15.12}$$

Per concludere dobbiamo ragionare per approssimazione. Osserviamo che

$$\lim_{t \to t_0} \langle tu, z\rangle = \langle t_0 u, z\rangle \tag{7.15.13}$$

Ciò segue dalla Prop. 7.15.12. Infatti,

$$\langle tu, z\rangle \overset{(7.15.2)}{=} \frac{1}{4} \left(N(tu+z)^2 - N(tu-z)^2\right)$$

e

$$t \to t_0 \overset{Prop.7.15.12}{\Rightarrow} N(tu \pm z) \to N(t_0 u \pm z).$$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lambda - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n\lambda - 1}{2^n} < \frac{[2^n\lambda]}{2^n} \leq \frac{2^n\lambda}{2^n} = \lambda$$

e quindi, per il Teorema dei carabinieri,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{[2^n\lambda]}{2^n} = \lambda.$$

Dunque, per (7.15.12) si ha che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $u, z \in X$

$$\langle \lambda u, z\rangle = \langle \lim_{n \to +\infty} \frac{[2^n\lambda]}{2^n} u, z\rangle \overset{(7.15.13)}{=} \lim_{n \to +\infty} \langle \frac{[2^n\lambda]}{2^n} u, z\rangle \overset{(7.15.12)}{=} \lim_{n \to +\infty} \frac{[2^n\lambda]}{2^n} \langle u, z\rangle = \lambda\langle u, z\rangle.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Esempio 7.15.14 (Norma non indotta da un prodotto scalare).
La norma $\|\cdot\|_0 : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, non è indotta ta un prodotto scalare. Si considerino infatti $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{2} & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

Si hanno le seguenti, di facile verifica:

$$\|f\|_0 = \|g\|_\infty = \||f+g\|_0 = |f-g|_0 = \frac{1}{2},$$

da cui si hanno

$$\|f+g\|_0^2 + \|f-g\|_0^2 = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e

$$2(\|f\|_0^2 + \|g\|_0^2) = 2(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1.$$

Dunque, non vale la formula del parallelogramma e quindi, per il Teorema 7.15.13, la norma $\|\cdot\|_0$ non è indotta da un prodotto scalare.