

28/2

Applicazioni di Stevino

1.9) Pressione sottomarina

Siamo sott'acqua e siamo a prof. h

$$\text{P}_0 = 1 \text{ atm}$$

$P(z) = P_0 + \rho_{\text{H}_2\text{O}} g z$

$$P(z) = P_0 + \rho_{\text{H}_2\text{O}} g z = P_0 + \frac{10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.8 \text{ m/s}^2}{\approx 10^5 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{z}{10 \text{ m}} \cdot N/\text{m}^2 = P_a \approx 1 \text{ atm}$$

1.9) Pressione sottomarina

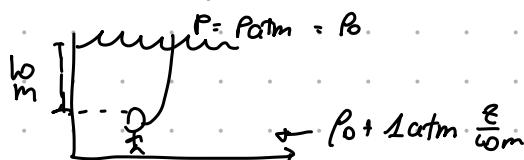
$$P(z) - P_0 = \frac{z}{10 \text{ m}} \cdot 1 \text{ atm}$$

A questa legge è valida a P costante

$P(z)$ non costante se cambia soluzia, pressione
lo ma cambia poco ($\approx \frac{1}{10^3}$ circa)

Supponiamo d'essere al mare e scendere di livello 2

A 10 m d'profondità, si riesce a respirare con un tubo connesso all'aria?



Bisogna vincere una pressione $P(z) - P_0 = 1 \text{ atm} \frac{z}{10 \text{ m}}$

$$F_{\text{polm}} \approx P_{\text{respi}} \cdot A_{\text{polm}} \approx 10^5 \text{ Pa} \cdot 0.1 \text{ m}^2 \cdot \frac{z}{10 \text{ m}} = 10^4 \text{ N} \cdot \frac{z}{10 \text{ m}}$$

$$F_{\text{polm}} = 10^3 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \approx 10^4 \text{ N}$$

Quale è la massima profondità a cui si può respirare? 

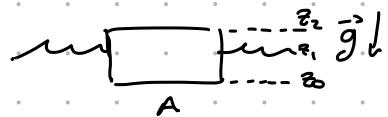
Per questo motivo l'aria delle banchise è sotto pressione

1.10) Legge di Archimede

Un corpo immerso in un fluido (liquido e gas) è spinto verso l'alto da una forza F_A pari al peso (F_p) del liquido spostato.

Così se ρ del liquido è omogenea, allora $F_A = -\vec{g} \rho V$
(con V = volume immerso nel fluido)

DIM



$$\text{Con Stevino } p(z_1) = p(z_0) + \rho g (z_1 - z_0) \\ \leq \rho(z_1) + \rho_e g(z_1 - z_0)$$

$$\vec{F}_{\text{fluo}} = P(z_1) A \vec{e}' - P(z_2) A \vec{e} = \rho_e g (z_2 - z_1) A = \rho_e g V_{\text{imm}}$$

DIM 2

Fluido in quiete



, non c'è variazione verticale se la densità non è omogenea

$$\vec{F}_p = \int \vec{F}_{\text{fluo}} ds \quad (\because \int \vec{F} \cdot \vec{n} ds) = - \vec{F}_p \text{ del liquido spostato}$$

1.6 Archimede

1 GALLEGGIAMENTO: un corpo galleggia in un fluido se $\vec{F}_A - \vec{F}_p > 0$

$$\text{Se i fluidi sono omogeni} = -\rho_e g V + \rho_{\text{cor}} g V > 0 \Leftrightarrow \rho_e g V - \rho_{\text{cor}} g V > 0 \Leftrightarrow \rho_e - \rho_{\text{cor}} > 0$$

ES Quanto Voli $\frac{V_{\text{immerso}}}{V_{\text{totale}}} = ?$ Sapendo che $\rho_{\text{GHIACCIA}} \approx 917 \text{ kg/m}^3$

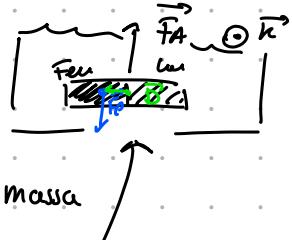
$$F_p = F_A \Rightarrow m g = \rho_e g V = \rho_e V_a = \rho_a V_a \Rightarrow V_a = \frac{\rho_e}{\rho_a}$$

Se il corpo non ha densità omogenea, dove agisce la forza di Archimede?

F_p nel centro di massa

F_A nel centro di massa del liquido spostato

Quindi se ρ omogenea si applica nel centro di massa



Se $\|\vec{F}_p\| > \|\vec{F}_A\|$ allora affonda, ma $\vec{M}(\vec{F}_A) = \vec{r} \times \vec{F}_A = \vec{r} F_A D > 0$

\vec{D} è il vettore del braccio

Se invece è tutto costante, allora i due punti d'applicazione sono gli stessi:

PESO APPARENTE: $\vec{F}_p - \vec{F}_A$

Quanto siamo alleggeriti dall'atmosfera?

$$\vec{F}_p - \vec{F}_A = \vec{g}(m - \rho_{\text{aria}} V_{\text{pers}}) \quad \text{Peso: } 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad \frac{M_p - \rho_{\text{aria}} V_p}{M_p} = ?$$

Assumiamo una persona con un parallelepipedo $V_{\text{pers}} = \text{L} \cdot \text{A} = 1,60 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m}^2 = 0,16 \text{ m}^3 \Rightarrow m_p = 160 \text{ kg}$

$$\frac{M_p - \rho_{\text{aria}} V_p}{M_p} \approx \frac{\rho_{\text{cor}} - \rho_{\text{aria}}}{\rho_{\text{cor}}} = 1 - \frac{\rho_{\text{cor}}}{\rho_{\text{aria}}} \approx 0,999 \dots \text{ vaia di pochissimo}$$

ES MONGOLIERE $R_{\text{Max}}(M_{\text{pers}}) = ?$



la temperatura è 120°C e $\rho_A(T=120^\circ\text{C}) = 2/3 \rho_A(T=20^\circ\text{C})$
Supponiamo di trascurare il peso del cestello

Mongolfiera in quiete $\vec{F}_p + \vec{F}_A = 0$

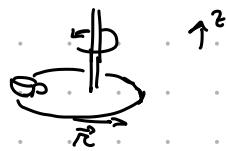
$$\underbrace{(M_{\text{pers+cestello}} + V_{\text{aria}} \rho(T=120^\circ))}_{} g$$

$$\vec{F}_A = V_{\text{aria}} \rho_{\text{cor}} \vec{g} \Rightarrow \left(M_{\text{cor}} + V_{\text{aria}} \rho(T=120^\circ) \right) g \cdot \vec{g} \cdot \rho(T=20^\circ) \frac{V_p}{M_{\text{cor}}} \\ = V \cdot \frac{\rho_{\text{cor}}}{\rho_{\text{cor}} = 1 - \rho_{\text{cor}} = 120^\circ} \cdot \frac{1}{3} \frac{M_{\text{cor}}}{\rho_{\text{cor}}} \cdot \frac{3 M_{\text{cor}}}{A_p} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \left(\frac{M_{\text{cor}}}{\text{kg}} \right)$$

$$R \approx \left(\frac{3}{\pi \rho g} V \right)^{\frac{1}{3}} = 10 \text{ m} \left(\frac{\text{Mpc}}{\text{m}^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

1.III FLUIDOSTATICA CON FORZE APPARENTI

Sappia che $\vec{F}_p(\vec{x}) = -\vec{V}_m(\vec{x})$, $\frac{d\vec{F}_v(\vec{x})}{dm} = -\vec{\nabla} V_m(\vec{x})$
 ↳ per forze conservative



Per esempio siamo su una giostra e abbiamo una bottiglietta d'acqua

Se non gira = coincide con sup equipotenziale

Se gira in modo perfettamente uniforme ?

Ci riconduca alla situaz fluidostatica mettendoci in un sist. di riferimento non ineriale della forma
 Quali forze d'Volume agiscono?

$$\begin{aligned} d\vec{F}_v &= d\vec{F}_p - d\vec{F}_{App} = \vec{g} dm + \vec{\omega} dm \\ &= -g dm \hat{z} + \hat{R} \omega^2 R dm \end{aligned} \quad (\text{con } dm = f_{AQ} dV)$$

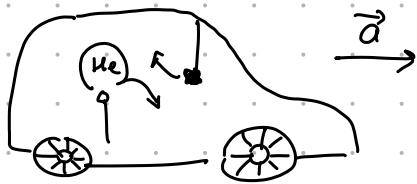
$$\frac{d\vec{F}_v}{dm} = -\vec{\nabla} V_m \Rightarrow \boxed{V_m(\vec{x}) = g z - \frac{\omega^2 R^2}{2}}$$

Sappia che Sup Isobar \equiv Sup equipotenziali del $V_m(\vec{x})$

$$gz - \frac{\omega^2 R^2}{2} = \text{cost} \Leftrightarrow z = \frac{\text{cost}}{g} + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$$



Si ottiene che $z(R) = h_1 + \frac{\omega^2}{2g} (R^2 - R_1^2)$
 $z(R_2) = h_2 + \frac{\omega^2}{2g} (R_2^2 - R_1^2)$



Nel vezzo sia palloncino sia aria vogliono andare in alto.
È più forte l'aria del palloncino (con He)
⇒ Sia va in alto e palloncino (con He) va avanti.

Perciò il palloncino va avanti?



$$\begin{aligned} \text{aria} & \quad \text{(He)} \downarrow \vec{g} \\ m_p \vec{g} - p_A V \vec{g} &= m_p \vec{a} \quad \left\{ \Rightarrow \vec{a} = -\vec{g} (p_A + p_{He}) v + m_{\text{resto}} \vec{g} \right. \\ (p_{He} V + m_{\text{resto}} - p_A) \vec{g} &\cdot m_p \vec{a} \quad \left. \Rightarrow \vec{a} = -\vec{g} \text{ se } m_{\text{resto}} < (p_A - p_{He}) v \right. \end{aligned}$$



Nel sistema d'rifermimento del palloncino, per analogia con Archimede
palloncino si sposta verso l'alto:

$$\vec{F}_A = -p_A (\vec{g} + \vec{a})$$

Questo perché $\vec{a}' = \vec{g} + \vec{a}$ → Accelerazione apparente

ES Generalizza al caso in cui \vec{a} non parallelo a \vec{g}

Ahi in "équilibrio", $\boxed{\vec{F}_p + \underbrace{m \vec{a}}_{\text{Forza apparente}} + \vec{F}_{\text{press}} = 0}$

1.12 COMPRIMIBILITÀ / COMPRESSIBILITÀ di un corpo (fluido o solido)

Sia V volume di un corpo a pressione esterna P uniforme

Si definisce la COMPRESSIBILITÀ ISOTERMA $\boxed{\beta = -\Delta P \frac{V}{\Delta V}}$

dove ΔV : variazione di volume al vario della pressione ΔP

Si misura in Pascal (Pa) (più è grosso β , meno è compressibile)

Esempio: Acciaio: $1.5 \cdot 10^11$ / Rame $1.6 \cdot 10^11$ / Acqua: $2.1 \cdot 10^9$ / Gas: $\beta = p$ ($\approx 10^5$)

$\beta(\text{gas})$ segue dalla legge di Boyle: $\Delta P + P \Delta V = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V}{\Delta V} \Delta P = -P = \beta}$

Come calcolo $\rho(\text{?})$? $\frac{\Delta P}{P} \Big|_{\text{Acqua}} \quad (\text{h} = 10^3 \text{ m}) \quad (\text{ogni } 10 \text{ m in H}_2\text{O} \rightarrow +1 \text{ atm})$

$\rho = \frac{m}{V}$ in profondità $P_h = \frac{M}{V_h}$ M è sempre la stessa $\Rightarrow \Delta V = V_h - V$

$$\Delta P = P(h = 10^3 \text{ m}) - P(h=0) = 100 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta P}{\beta} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{-5}{10^5} \quad \text{vale a } \rho \text{ costante}$$

$$\text{Supponendo che } \frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 1.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta P = \int_0^h \rho(h') g dh' \approx \rho g h + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial h} |_{h=0} g \frac{1}{2} h^2 = \rho g \left(1 + \frac{h}{2} \frac{\partial \rho}{\rho} \right) \stackrel{\beta}{=} \rho g h \left(1 + \frac{\Delta P}{\rho} \right)$$

$$\rho(h) = \bar{\rho} + \frac{h}{\Delta P} \frac{\partial \rho}{\partial h} |_{h=0}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P}{\beta} = \frac{\rho g h}{\beta} \left(1 + \frac{\Delta P}{\rho} \right) = 5 \cdot 10^{-3} \left(1 + \frac{1.5 \cdot 10^11}{5 \cdot 10^5} + \dots \right)$$

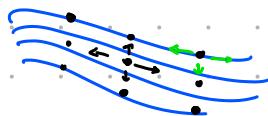
1.13 Fenomeni di Superficie

Tensione Specifica

La superficie del fluido rompe la simmetria per rotazione.

Ogni molecola "interna" risente da quella vicina.

Sulla sup. la forza risultante sulla superficie di un fluido in quiete è non nulla e con direz. // \vec{n} ($\vec{F} \neq \vec{0}$)



Forze molecole \Rightarrow Forze gravitazionali

Le molte per cui \vec{g} è più debole per il problema della gocciola.

Per la teoria dei campi dovrebbe esser uguali, ma non è così.

Per aumentare dS (cioè aggiunge molecolare), serve lavoro

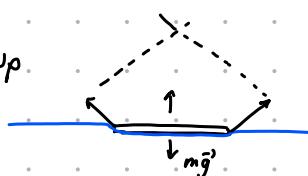
$$[dV = dS \tau] \quad \text{con } [\tau] = N/m \quad (\tau = \frac{\partial W}{\partial S})$$

DEF (alternativa) La forza necessaria per un taglio ℓ

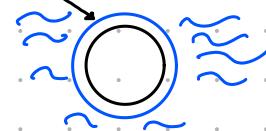
$$\tau = \frac{\partial F}{\partial \ell}$$

la circonf.

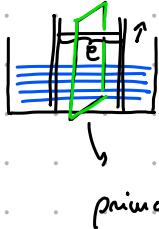
Cu' muove in su sup.



Dall'alto

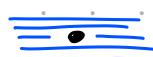


DIM



se tira su il filo più più

prima:



Se aumento $\Delta \ell \Rightarrow$ aumento $\Delta S = \Delta \ell \cdot h$

$$\Rightarrow \tau = \frac{\Delta F}{\Delta \ell} = \frac{\Delta F \cdot R}{\Delta S} = \frac{\Delta W}{\Delta S}$$

□

da si può misurare con uno STALAGMOMETRO



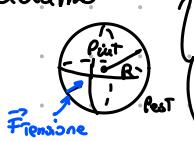
$$\Rightarrow \vec{F}_p = mg^j \quad \text{e} \quad \vec{F}_{app} = \tau \ell \hat{n} = \tau 2\pi R \hat{n}$$

Subito prima che cada la goccia (che identifica la massa) si ha che:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{app} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{mg}{2\pi R}}$$

Bolle e gocce

Consideriamo



Se voglio aumentare di dR il raggio:

$$dW_p = - \int P dV = -(\rho_{ext} - \rho_{int}) dV = (\rho_{int} - \rho_{ext}) 4\pi R^2 dR$$

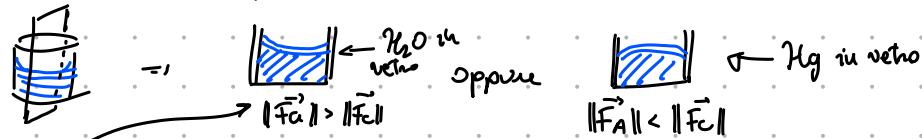
più costante se soffio

$$dW_c : -\gamma dS = -\gamma d(\pi R^2) = -8\pi \gamma R dR$$

per bolla di sapone = $-16\pi R dR \gamma$

Se la bolla/goccia in quiete $dW_{tot} = 0$ goccia
 $\Rightarrow dW = dW_p + dW_c = (\rho_{in} - \rho_{out}) \pi R^2 \stackrel{!}{=} 8\pi R \gamma \Rightarrow (\rho_{in} - \rho_{out}) = 2\gamma / R$

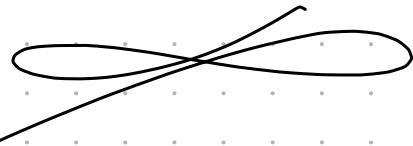
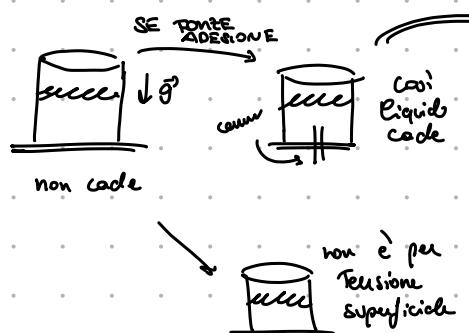
CAPILLARITÀ = fenomeno in cui la superficie di un fluido "vicino" alla superficie del suo contenitore si discosta da quella isolata



In particolare:



$$\left. \begin{array}{l} ||\vec{F}_A|| > ||\vec{F}_C|| \\ ||\vec{F}_A|| < ||\vec{F}_C|| \end{array} \right\} ||\vec{F}_C|| \neq ||\vec{F}_A||$$

BONUS FLUIDO STANCA

Non cade per pressione

$$\text{fiume} \downarrow p_{\text{atm}} + \rho g V$$

$$\uparrow p_{\text{atm}} = p_{\text{atm}}$$

per 1 atm, 10 m di acqua

22 FLUIDO DINAMICA2.1) Definizioni

COME DESCRIVERE ACQUA?

1) "LAGRANGIANA" = $\int \vec{x}_i(t) dt$ (cioè sapere moto di partecella e istante)2) "EULERO" = descr. continua $\vec{v}(\vec{x}, t)$ di \vec{x} - continua

↳ descrizione continua che usa il campo di velocità

↳ Consente in modo semplice di definire densità $\rho(\vec{x}, t)$, pressione $p(\vec{x}, t)$, ($\vec{T}(\vec{x}, t), \dots$)

Ahi andò a studiare liquidi a regime STAZIONARIO: $\vec{v}(\vec{x}, t)$ non dipende dal tempo
da cui $\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x})$ e $p(\vec{x}, t) = p(\vec{x})$, ...

LINIA DI FLUSSO linea tangente a \vec{v} , $\frac{d\vec{x}}{dt}$ Per non STAZIONARIO, le linee di flusso possono cambiareSe regime STAZIONARIO, le linee sono fisse

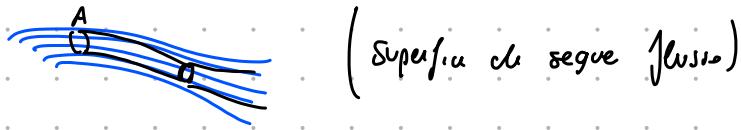
Ahi identifica le traiettorie di fluido

SI POSSONO INCROCIARE | No

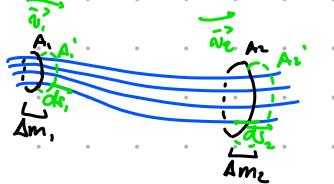
le linee di flusso (per liquidi stazionario) non si possono incrociare

VISCOSIM caratteristi "attrito fra linee di fluido"FLUSSO ROTAZIONALE O VORTICO Se compaiono i vorticiFLUSSO IDEALE Se è stazionario, non viscoso e irrotazionale
(Fluido ideale = incompressibile $\rho = \text{cost}$)

TUBO DI FLUSSO Insieme di linee di flusso definite da una sezione A ortogonale ad esse in un certo \vec{x} (Non costante al vari di \vec{x})



2.2) PONTATA DI MASSA ED EQUAZIONI DI CONTINUITÀ (Conservaz. di massa)



$$\text{PONTATA DI MASSA} : P_h(\vec{x}) = \rho A v$$

Eq. CONTINUITÀ : P_h costante lungo il tubo

Se noi sciviamo il sistema dopo un tempo Δt piccolo, quello che succede fra A_1 e A_2 è uguale

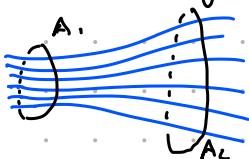
$$\Leftrightarrow \Delta m_1 = \Delta m_2$$

$$\rho_1 A_1 v_1 \Delta t = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t \quad \text{Valido anche per il secondo} \\ \Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$$

La portata di massa è costante

Eq continuità: Se ρ = omogenea $\Rightarrow [A v]$ costante P_V = portata di Volume

ESEMPIO Sia tubo di flusso



$$\Rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2 \Leftrightarrow v_1 = \frac{v_2 A_2}{A_1} \Rightarrow v_2 > v_1$$

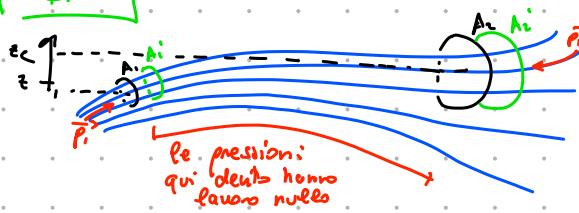
2.3) TEOREMA DI BERNOULLI In fluidi e flusso ideali

consevar. energia

$$P \frac{v^2}{2} + \rho g h + p = \text{costante}$$

if tubo di fluido

DIM



Per t. fissa nello : $W_{1 \rightarrow 2} = E_{n2} - E_{n1}$

Consever. massa $\delta m_1 = \delta m_2 = \delta m$

$$E_{n1} \cdot \frac{1}{2} \delta m v_1^2 = E_{n2} \cdot \frac{1}{2} \delta m v_2^2$$

Ag. solo: gravità: $F_p = W_{1 \rightarrow 2} = \delta m g (z_2 - z_1)$

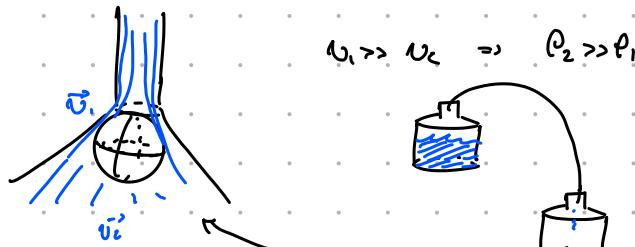
: pressioni quali pressioni? P_1 e P_2 $W_{1 \rightarrow 2} = P_1 dV_1 - P_2 dV_2$

$$\delta m g (z_2 - z_1) + P_1 dV_1 - P_2 dV_2 = \delta m (v_2^2 - v_1^2)$$



$$P_1 dV_1 + \delta m \frac{v_1^2}{2} + \delta m g z_1 = P_2 dV_2 + \delta m \frac{v_2^2}{2} + \delta m g z_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2\rho} + \frac{gz}{\rho} = \text{cost}}$$



$$v_1 > v_2 \Rightarrow P_2 > P_1$$

2.4 Applicaz. di Bernoulli

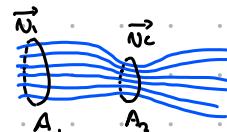
PARADISO IDRODINAMICO

$$\underline{\text{cost}}: \rho \frac{v^2}{2} + P_i = \rho \frac{v^2}{2} + P_2 \Leftrightarrow P_2 - P_i = \frac{\rho}{2} (v_i^2 - v_2^2) = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \gg 1$$

$$\underline{v=0} \vee \underline{v \text{ cost}}: P_2 - P_i = \rho g \Delta h \quad (\text{Legge di Stevino})$$

$\Delta z = 0$: Misura di Velocità

1) tubo di Venturi

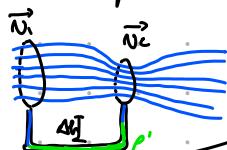


$$\begin{cases} P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} \\ A_1 v_1 = A_2 v_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2} \right)$$

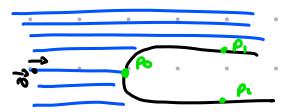
$$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{A_1^2 - A_2^2}} \cdot A_2$$

COME MISURNO $P_1 - P_2$?



$$P_2 + \rho g h + P_i \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g h$$

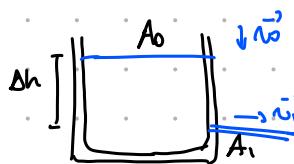
2) "Tubo di Pitot"



$$\begin{aligned} P + \frac{1}{2} \rho v^2 &= 0 \\ P + \frac{1}{2} \rho v^2 &= P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}}$$

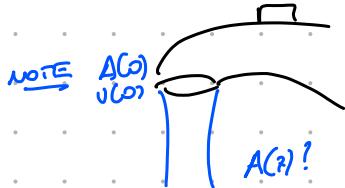
$$\text{Anche se non so il fior in } P_1 \Rightarrow \sqrt{\frac{2P_0 - P_1}{\rho}} = \sqrt{\frac{2g \Delta h_p}{\rho}}$$



$$A_1 \ll A_0 \quad P = \text{cost}$$

$$\begin{cases} \rho \frac{v_1^2}{2} = \rho \frac{v_0^2}{2} + \rho g \Delta h \\ A_0 v_0 = A_1 v_1 \end{cases} \Rightarrow v_0 = \frac{A_1}{A_0} v_1$$

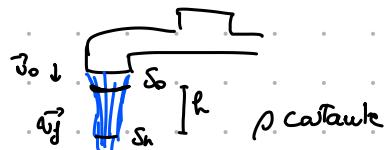
$$v_1 = \sqrt{2g \Delta h}$$



E d'altra per quale
tale che non misura a
traverso il vetro?

2.4) APPLICAZIONE DI BERNOULLI

Sezione flussi rubinetto



C'è la conservaz. di massa $\Rightarrow (\rho \text{ cost}) \Rightarrow$ conservaz. di Volume $A_0 v_0 = A_f v_f$

$$\text{Eq. Bernoulli (Conserv. Energia)}: P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2} + \rho g h = P_f + \rho \frac{v_f^2}{2} + \rho g h$$

Le pressioni si semplificano e ottieniamo:

$$\begin{cases} v_f = v_0 \frac{A_0}{A_f} \\ v_0^2 + 2gh = v_f^2 = v_0^2 \frac{A_0^2}{A_f^2} \end{cases} \Rightarrow [..] \Rightarrow A_f = \frac{A_0 v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

Se mi fosse venuto $A_f = \frac{A_0}{\sqrt{v_0^2 - 2gh}}$ ← ci sarebbe stato uno s'ingolaih
e questo ci dice che l'area aumenta scendendo
Impariamo a fare questi controlli, che sono comodi

$$\text{Se (corona) fosse venuto } A_f = \frac{A_0}{2} \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

se $h=0$, allora le velocità si semplificano e l'area non varia

(più è potente il getto del rubinetto, più tende ad essere costante)

2.5) Viscosità

Fin'ora ignorata per fluidi ider (abbiamo ignorato forze di taglio).

per fluidi non ider: Esiste una forza di attrito interno



Viscosità definita come $\mu = \frac{df}{ds}$ (Forza necessaria per cambiare la velocità)

($\mu \rightarrow 0$, poche forze di taglio)

si misura in $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

FLUIDO NEWTONIANO se μ è costante in $\frac{df}{ds}$

Le caratteristiche da molti laminari



per H_2O ($20^\circ C$) = 10^{-3}
H_2O ($2^\circ C$) = $1.8 \cdot 10^{-3}$
Vetro ($700^\circ C$) = 10^{10}
Aria = $1.7 \cdot 10^{-5}$

FLUIDO NON NEWTONIANO $\mu = \mu \left(\frac{df}{ds} \right)$ moto caotico, turbolento

FLUIDO COMPENDIO

Fluido = "sostanza che scomponibile = gas
incomprensibile = liquido"

Densità: $\rho(\vec{x}) = \frac{dm}{dV}(\vec{x})$ / Pressione: $P(\vec{x}) = \frac{|dF_1(\vec{x})|}{dS}$ ma dipende da orientaz di dS

$$\vec{\nabla} P(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}) \text{ con } \vec{a}(\vec{x}) = \frac{d\vec{F}_v(\vec{x})}{dm}$$

Se \vec{F}_v è conservativa ($\Rightarrow \exists U \text{ t.c. } \vec{F}_v(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x})$) allora
 $\Rightarrow \nabla P(\vec{x}) = -\rho(\vec{x}) \vec{\nabla}U_m(\vec{x})$ dove $\vec{\nabla}U_m = \frac{dU(\vec{x})}{dm}$

poi se ρ è costante, vale la LEGGE DI STEVINO $\Delta F = \rho g \Delta h$

LEGGE DI PASCAL: P si trasmette inalterata in ogni punto del fluido incluso la parete del suo contenitore (\Rightarrow deca idraulica)

LAVORO DI UNA PRESSIONE $W = \int P dV$

LEGGE DI ARCHIMEDE: $F_v = -\vec{a}\rho_{\text{FLUIDO}} V_{\text{FLUIDO}}$

COMPRESIBILITÀ

$$\beta = -\frac{V}{\Delta V} \Delta P$$

TENSIONE SUPERFICIALE $\gamma = \frac{dW}{dS} = \frac{dF}{de}$

PORTEGGIO DI MASSA: $P_m = \rho A v$ si conserva lungo tubi di flusso

LEGGE DI BERNOULLI: $P/\rho + \frac{V^2}{2} + gh = \text{costante}$

VISCOSITÀ: $\mu = \frac{dF/dS}{dV/de}$

3. TEMPERATURA

3.1 INTRO

In meccanica, le forze sono conservative $\rightarrow F_{tot} = F_k + U$ si conserva (gravitazione e elettrica) o non conservative (come le forze d'attrito)

Se nel microcosmo le sole forze elettive (che sono conservative), come è possibile che esistono forze non conservative?

Con decadimenti β si notò per la prima volta che l'energia non si conserva
 $\Rightarrow \exists$ la particella (neutrini) che serviva per conservare energia

A livello microscopico le forze sono tutte conservative e l'energia si conserva

A livello macroscopico le forze non conservative inducono variazioni di energia interna del sistema

Come si può studiare l'energia interna?

1) Meccanica degli N costituenti del mio sistema macroscopico

(ma $N > 10^{23}$, poco pratico e impossibile per Heisenberg
 non è possibile determinare condizioni iniziali $(x_i, v_i) \forall i \in N$)

2) Studio delle proprietà microscopiche del mio sistema.

↳ Fisica Statistica (Meccanica classica + quantistica, Analisi Statistica)

↳ Termodinamica = branca della fisica che studia le proprietà microscopiche

d'un sistema a partire da nuovi principi macroscopici
 (nuovi rispetto alla meccanica e sono empirici)

3.2) DEFINIZIONI

VARIABILE TERMODINAMICA: proprietà misurabili del sistema
 come p, P, m, V e T

macroscopiche

STATO TERMODINAMICO: stato del sistema in cui la variazione termica di interesse
 sia definita su ogni punto e sia indipendente

EQ TERMICO tra 2 sistemi, se non vengono scambiati né massa né energia
 nemmeno energia interna

EQUAZIONI DI STATO per A, B, C, \dots variabili termodinamiche
 \exists funzione $f(A, B, C, \dots) = 0$

Esempio per gas perfetti: $PV = NkT$
 stelle neutroni: $P = k_i p^{\gamma}$ $i = \text{langchezza}$

TRANSFORMAZIONI TERMODINAMICHE Variazione di sistema fra stati termodinamici (fra stati termodinamici di equilibrio)

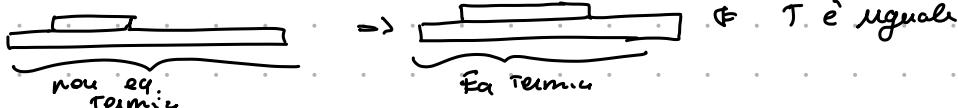
3.3) "PRINCIPIO ZERO" E TEMPERATURA

"PRINCIPIO ZERO": Se un corpo 1 è in equilibrio termico con 3 e 2 è in equilibrio termico con 3, allora anche 1 e 2 lo sono

⇒ è possibile definire una variabile termodinamica che assume lo stesso valore scalare al corpo all'equilibrio termodinamico.

→ 1 è allo stesso eq. termico $\Leftrightarrow T_1 = T_2$

COME SI MISURA?



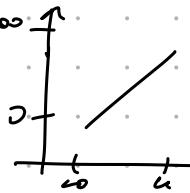
Per fare la misura passo perciò uno specchio e metterla a contatto per un po' con ghiaccio e poi con H₂O bollito

$$T(L_0) = 0 \quad \text{e p.e.} \quad T(L_1) = 100$$

Poi dividio la gradata. in 100
per $L = L_0 \Rightarrow T = 0$ e per $L = L_1 \Rightarrow T = 100$

È lineare

$$T(L) = \left(\frac{L - L_0}{L_1 - L_0} \right) 100^\circ\text{C}$$





Mon 19/3/2024

3.4) SCALE DI MISURA

Si misura in Kelvin $\frac{T}{K} = \frac{T}{C} + 273,15$

Esiste poi la Fahrenheit definita come $\frac{T}{F} = \frac{9}{5} \frac{T}{C} + 32$

3.5) DILATAZIONE LINEARE DI SOLIDI

$$\Delta L = \alpha L \Delta T \quad \text{con } \alpha = \text{coeff di dilatazione lineare } [\alpha] = K^{-1}$$

Quanto vale α ?

	Ghiaccio	Ottone	Acciaio	Vetro (Pyrex)
$\frac{L}{10^{-6} K^{-1}}$	51	19	12	3,2

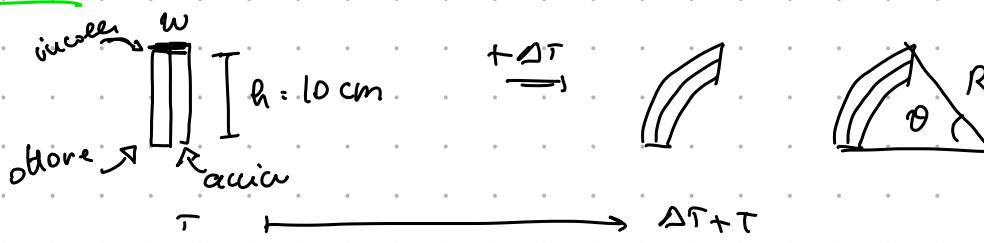
ES Dilatazione Rotazionale

Sappiamo $L = 1 \text{ km}$ $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ $\Delta L = ?$

$$\Delta L = \alpha_{\text{acc}} L \Delta T = 60 \text{ cm}$$

" Si usano notai $L_n = 18 \text{ m}$ $\Rightarrow \Delta L_n = 1,1 \text{ cm}$
de notare si separano di circa 5 cm"

ESERCIZIO Dilatazione Lineare dei metalli



$$d = R \cdot R \cos \theta \Rightarrow L_{\text{ottone}} \cdot L + \Delta L_{\text{ottone}} = L + d \alpha_{\text{acc}} \Delta T = R \theta$$

$$L_{\text{acciaio}} = L + \Delta L_{\text{acciaio}} = L + \alpha_{\text{acciaio}} L \Delta T = (R \cdot w) \theta$$

$$RD = L + \alpha_{\text{acc}} L \Delta T \text{ e } (R \cdot w) \theta = L + \alpha_{\text{acc}} L \Delta T$$

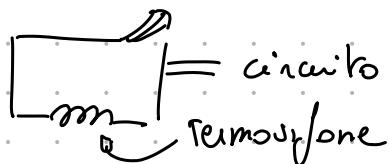
WAGGI

$$R = \frac{w}{(\alpha_{\text{acc}} - \alpha_{\text{acc}}) \Delta T} \Rightarrow d = R \cdot R \cos \theta \approx \frac{R \theta^2}{2} \cdot d$$

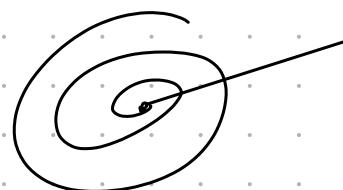
$$\Rightarrow d \approx L \cdot \frac{w}{w} \cdot \frac{\Delta \alpha \Delta T}{2}$$

3.6) APPLICAZIONI DI BIMETALLI

① Termostatica



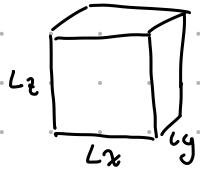
2) Termometro a spine



3.7) DILATAZIONE TERMICA DI VOLUME

$$\Delta V = \beta V \cdot \Delta T$$

β : coefficiente di dilatazione volumica



$$V = L_x L_y L_z$$

$$V + \Delta V = (L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y)(L_z + \Delta L_z)$$

$$= L^3 (1 + \alpha \Delta T) \quad (\text{se } \alpha_x = \alpha_y = \alpha_z, \text{ è detto}$$

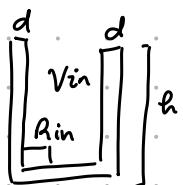
$$\Rightarrow \Delta V = 3\alpha \Delta TV$$

soltanto isotropo

ESEMPI

$\beta / 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Acqua	/	Hg	/	Benzina	/	Vetro (Pyrex)
180	/	180	/	960	/	9.6	

3.8) DILATAZIONE DI UN CONTENITORE



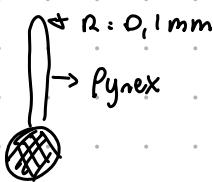
$$\Delta V_{in} = \beta_{\text{contenitore}} V_{in} \Delta T$$

$$\therefore \Delta h = \alpha_{\text{contenitore}} h \Delta T$$

$$\Delta R_{in} = \alpha_c R_{in} \Delta T$$

$$\begin{aligned} \Delta V_{in} &= (h + \Delta h) \pi (R_{in} + \Delta R_{in})^2 - h \pi R_{in}^2 \\ &\stackrel{!}{=} \left(\frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} \frac{\Delta R}{R} \right) V = \underbrace{3\alpha}_{P_{\text{con}}} \Delta TV \left(1 + O(\alpha \Delta T) \right) \end{aligned}$$

3.9) TERMOMETRO A MERCURIO



$$\text{ma } \Delta V_{Hg} = \pi R^2 h$$

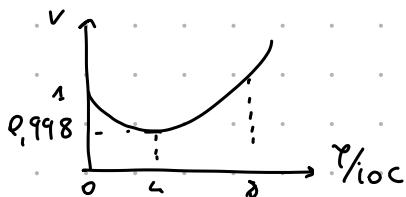
$$\Delta V_{Hg} = \beta_{Hg} V_{leg} \Delta T \approx 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \frac{\Delta T}{10^\circ C}$$

$$\Delta V_{pyrex} = \beta_{pyrex} V \Delta T \approx 9.6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^3 \frac{\Delta T}{10^\circ C}$$

$$\leq 0.10 \Delta V_{Hg}$$

TRASCURIAMO IL
CONTENITORE

3.10) DILATAZIONE DELL'ACQUA

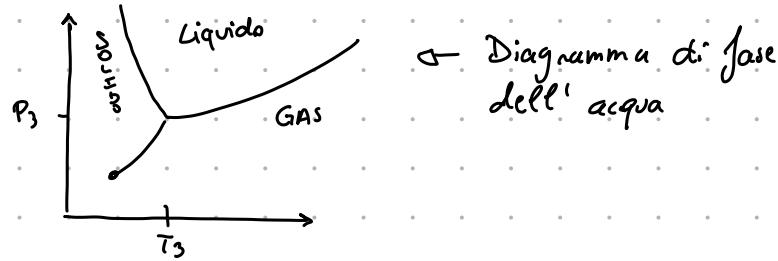


DEFINIZIONE TEMPERATURA DA PUNTO TRIPLO DELL' ACQUA

punto triplo $\exists! T = T_3$ e $P = P_3$ tali che

fase solida, liquida e gassosa coesistono per l'acqua

$$P_3 = 0,006 \text{ atm} \quad T_3 = 273,16 \text{ K}$$



$$T(P) = ?$$

Supponendo che la relazione sia lineare ho che $T(P) = C_P P$

$$= P = \frac{T_3}{C_P P_3}$$

3.7) PUNTO TRIPLO DELL'ACQUA

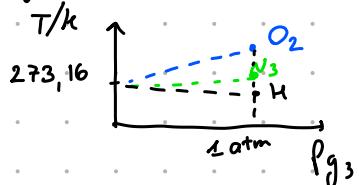


$$T_g = T_{g,3} \frac{P_g}{P_{g,3}}$$

Definiz. di una scala

Questa è migliore per 2 motivi

1) è indipendente dal gas per $P_{g,3}$ piccole



2) direzione tra P e T è empiricamente ok finché $P_{g,3}$ è piccola

$$T = \lim_{P_{3g} \rightarrow 0} \frac{P_g}{P_{g,3}} T_{g,3}$$

Definiz. nuova migliore
che non dipende dal gas

4 GAS

4.1 Gas Ideali (o perfetti) e relaz. empiriche associate

DEF Un gas è tanto più ideale quanto più la sua pressione è bassa e quanto più la sua temperatura è alta rispetto alla T_{crit} (CP)

! Il gas ideale non esiste in natura, ma molti gas sono ideali in ottima approssimazione

Legge di Boyle - Mariotte (1661)

A temperatura costante, il prodotto della pressione e del Volume è costante
Eq. termodinamico e non dipende dal gas

$$P \cdot V / T = \text{cost}$$

Legge di Guy - d'USSON (1802)

- 1) A pressione costante: $\frac{V}{P} = \frac{T}{T_0}$ è costante e non dipende dal gas]
- 2) A volume costante $\frac{P}{T} = \frac{V}{V_0}$ è costante

$$T \xrightarrow{\text{ideale}} T_0$$

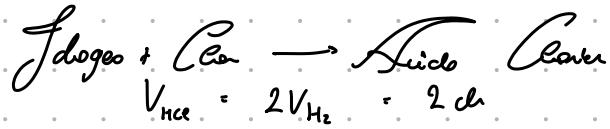
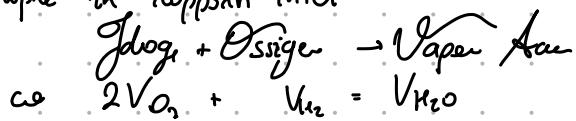
Re Celsius, ness., $T(C) = 273,15$

$T = -273,15^\circ\text{C}$ Speciale

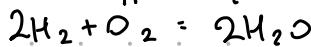
Legge di Avogadro (1811)

Volumi uguali di gas diversi, a stesse T e P , contengono lo stesso numero di costituenti elementari / molecole

de "reazioni" fra gas diversi, i volumi tra i gas coinvolti era in sempre in rapporti interi



Questi volumi sono in questi rapporti perché



$\rightarrow N$ numero di molecole

Possiamo riscrivere la legge come $\frac{N}{V} pT = \text{costante}$

4.2 Numero di Avogadro e mol

M = massa totale di un gas V

m = massa di una molecola di gas

m_u = "Unità di massa atomica" $\approx 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = \frac{1}{12} \text{ m}^{12}$

$$N = \frac{M}{m} = \frac{M}{Am_u} \Rightarrow N = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{\text{M/g}}{A}$$

\hookrightarrow Numero di Avogadro

Mole mol = qta di massa $M = Agn$ dove A è il numero dei suoi costituenti ^{di massa}

DOMANDA Contenuto di M di H in spazio, sulla Terra $H \rightarrow H_2$. sì:

Allora si elimina

stessa Temp o c 1 atm

Legge di Avogadro per ogni gas, ogni mole occupa lo stesso volume $V_m = 22,4 \text{ litri}$

$M_{\text{ans}} = \frac{V_{\text{ans}}}{V_{\text{mol}}} A_{\text{gr}}$ \hookrightarrow I gas hanno lo stesso volume a parità di mol

4.3 Equazione di stato dei gas ideal

Consideriamo n mol di gas che occupano $V_0 = nV_m$ a $P_0 = 1 \text{ atm}$ e $T_0 = 273,15 \text{ K}$

II legge di Gay-Lussac $P_T = \frac{P_0}{T_0} T \Rightarrow V_0 T_0 = \frac{P_0}{T_0} T V_0$

con Boyle si ottiene $-V_T P_0 = V_0 P_T \Rightarrow VP/T$

$$\Rightarrow PV = \frac{P_0}{T_0} V_0 T = \frac{P_0 V_0}{T_0} n T$$

ponendo $(R) = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 22,4 \text{ litri}}{273,15 \text{ K}} = 8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$

$$PV = nRT$$

\hookrightarrow COSTANTE UNIVERSALE DEI GAS

Costante di Boltzmann $k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ N num. di mole

$$\Rightarrow PV = N k_B T$$

Sapendo poi che $V = M/p$ $\Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{n}{M} RT$ ma $\frac{n}{M} = A g_n$

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{A}$$

ESECUZ Sia $M: 5 \text{ g}$ d' H_2 , $V: 100 \text{ l}$ a $T: 20^\circ\text{C} = 293,15 \text{ K}$

1) $P = ?$ 2) per stessi V e T , quale M d' O_2 induce la stessa pressione

$$PV = nRT \quad P = \frac{nRT}{V} = \frac{RT}{V} \frac{M}{M_{H_2}} = \frac{RT}{V} \frac{M}{16} = 6,1 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Per avere stessa pressione \Rightarrow stesse mol: $\boxed{12,5}$

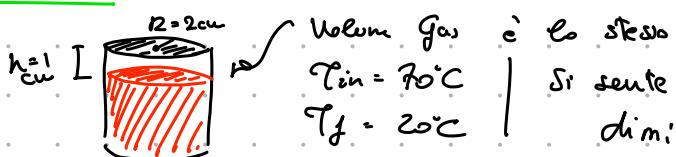
$$n = \frac{M_{O_2}}{M_{O_2} g_m} \Rightarrow M_{O_2} \cdot n = 32 \cdot 8 \text{ g}$$

ESENZA In laboratorio le press + piccole sono 10^{-13} Pa
Quante molecole di gas abbir a 1 cm^3 a $T: 20^\circ\text{C}$

$$PV = N k_B T \Rightarrow N = \frac{PV}{k_B T}$$

$$= \frac{N}{\text{cm}^3} = \frac{P}{k_B T} = \frac{25}{\text{cm}^3}$$

ESENZA Click nei barattoli:



$$P_i = 1 \text{ atm} \rightarrow P_f = ?$$

Vol cost $\Rightarrow \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f} \Rightarrow P_f = \frac{P_i T_f}{T_i}$

$\vec{F} = P_i A \hat{j} - P_f A \hat{j} = \hat{j} 10^5 \text{ Pa} \cdot 12 \text{ m}^2 (1 - 0,25)$

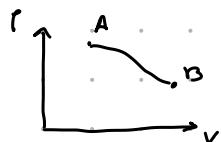
4.1) Transformaz. di gas

Transformatione fra stati di equilibrio termodinamico di un gas con "moli": $A \rightarrow B$

$$P_A V_A = nRT_A \quad e \quad P_B V_B = nRT_B$$

EQ. TERM \Rightarrow caratterizza a mente su piani bidimensionali
 $(P-V)$, $(V-T)$, $(P-T)$

Quello che si usa quasi sempre è $PV =$ "PIANO DI CLAPEYRON"

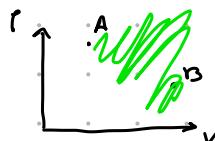


Se ne vogliono studiare le trasformazioni: 2 gruppi:

- TRASFORMAZIONI REVERSIBILI, se avviene attraverso stati intermedi di equilibrio termodinamico
 \hookrightarrow Ora de "lenta"

Possono avere diverse temperature, basta che sia definito in P, V

- TRASFORMAZIONI IRREVERSIBILI se gli stati intermedi non sono in equilibrio termodinamico
 \hookrightarrow almeno una fra P, V, T varia velocemente



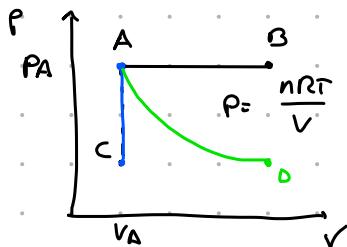
LAVORO EFFETTUATO SUL'ESTERNO (qualsiasi cosa a contatto con il fluido)

$$W = \int_A^B P dV$$

Questa espressione è utile se

- La trasformazione è reversibile
- Trasformazione non reversibile con P costante
- con V costante ($W=0$)

DEF Se la trasformazione avviene a P costante, è detta ISOBARA
 a V costante ISOCONICA
 a T costante ISOTERMA



■ ISOBARA

■ ISOCONICA

■ ISOTERMA

$$\Rightarrow W|_P = P_A(V_B - V_A)$$

$$\therefore W_C = 0$$

$$\therefore W_T = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

DEF TRASFORMAZIONE CICLICA Se stato iniziale è uguale a quello finale



$$W = W_{A \rightarrow A'} + W_{A' \rightarrow A} = A_{AA'} - A_{A'A} > 0$$

Se un fluido fa l'arco sull'estero \Rightarrow motore e produce energia

Se è ciclo ma la traiettoria è uguale e inversa $W < 0$

4.5 Teoria cinetica gas: ENTR

OBIETTIVO: Proprietà termodinamiche di sistema (gas) da quelle meccaniche dei suoi costituenti.

- MODELLO CINETICO:
- ① Un gas è costituito da molecole identiche, che si muovono continuamente e in modo disordinato (\Rightarrow nel contenitore $\sum F = 0$) soggetto a leggi della MECCANICA CLASSICA
 - ② Tutti gli urti sono elasticci, in particolare tra molecole e molecole-pareti
 - ③ di unica forza intermolecolare sono quelle repulsive delle molecole
 - ④ di distanza \gg dim. molecole

FORZE IMPULSIVE \vec{F} è impulsiva se induce Δp finito su un intervallo di tempo Δt limitato
 le poche sono le forze che fanno cambiare la qta d' moto a corpi coinvolti in urti meccanici

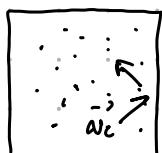
$$1 \Rightarrow M_{\text{tot}} \cdot \sum m_{\text{mol}} \cdot \sum N m_{\text{mol}} = N A m_0 = \frac{N}{N_A} A g n$$

2+3 $\Rightarrow \sum E_{ki}$ costante in quanto

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ per forze vive } \Delta E_k = W$$

4.6 Pressione a livello molecola

la pressione è $P = \frac{\sum \vec{F}_i}{S}$ $\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ deve essere legata alla variaz. d' impulso $\Delta \vec{p}$ di molecole in metri



$$\Delta \vec{p}_i = p_{fi} - p_{si} \quad \text{l'unica da varia è rispetto alla } \vec{x} \\ \vec{x} (p_{fi} - p_{si}) = \vec{x} (-v_{ix} - v_{sx})$$

$$\Delta \vec{p}_i \cdot -2m v_{ix} \vec{x} \Rightarrow \Delta \vec{p}_{ic} = -\Delta \vec{p}_i = 2m v_{ix} \vec{x}$$

$$\Rightarrow P_{ci} \cdot \frac{f_{xi}}{L^2} \Rightarrow \text{dove legare } f_i \text{ è } \Delta \vec{p}_{ic}$$

$$f_{xi} = \Delta \vec{p}_{ic} \vec{x} \cdot \frac{N_{\text{MOLC}}}{\Delta t}$$

Se i non urta con altre molecole, allora $\Delta E = \frac{2C}{N_A}$

$$\text{Quindi } F_{ci} = 2m N_A \frac{U_{xi}}{2C} = \frac{m v_{xi}^2}{L} \Rightarrow P_{xi} = \frac{m v_{xi}^2}{L^3}$$

Se le molecole urtano fra loro

Siccome le molecole sono uguali, gli urti elastici e il moto è elisoc.

$$\sum v_i = 0$$

Allora $\frac{1}{2}$ perdita di v_{ix} in un urto intermolecolare

\exists mole $j \neq i$ che guadagna la stessa perdita in v_{xj}

$$P_c = \sum_i P_{ci} = \frac{m}{L^3} \sum_i U_{ix}^2 = \frac{Nm}{L^3} \left[\frac{\sum v_{xi}^2}{N} \right] = \frac{Nm}{L^3} \overline{v_x^2}$$

La Velocità quadratica media

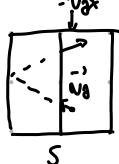
Se abbiamo che $\sum_i \vec{v}_i = 0$ ≠ direzione nel modello
 $\Rightarrow \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$

Inoltre $\frac{1}{2} \|\vec{v}_{ij}\|^2 = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 \Rightarrow \overline{v_{ix}^2} = \frac{1}{3} \overline{v_i^2}$

$$\Rightarrow P_c = \boxed{\frac{Nm}{V} \cdot \frac{\overline{v^2}}{3} = P} \quad (\text{non dipende dalla formula del corpo})$$

E la pressione all'interno del contenitore ?
 è la stessa

Sfuttiamo gli stessi passaggi per la legge di Pascal (gas e fluido)



$$\Rightarrow \Delta p_s = 2m v_{ix}$$

ESEMPIO Calcola $\overline{v^2}$ per 1g di He e 1g He. Di quanto si muove $\overline{v^2}$
 (sfuttura $V_{mol} = 22.4 \text{ l}$)

$$\overline{v^2} = \frac{3PV}{Nm} = \frac{3 \cdot 1 \text{ atm} \cdot n \cdot V_{mol}}{1 \text{ g}} \quad \begin{aligned} \text{He mmol} &= 1 \\ \text{He mol} &= \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\overline{v^2} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{gr} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{3 \cdot \text{gr}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} 6.7 \cdot 10^5$$

poi radice

4.6 Pression a livell molecolar

$$P = \frac{Nm}{V} \cdot \frac{\overline{v^2}}{3} \quad \begin{matrix} N = \text{mol} \\ m = \# \text{molecole} \end{matrix} \quad \overline{v^2} = \text{media } v^2$$

4.7 Temperatura ed energia media molecolar

$E_i^{(m)} = \frac{1}{2} m v_i^2$ = Energia cinetice traslazional di una molecola i

$$\Rightarrow P = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{3} \overline{E_c^{(m)}}$$

Vogliamo avvicinari il più possibile a $PV = NK_B T$

$$\text{Se definiamo } T = ? \stackrel{?}{=} \frac{\overline{E^{(m)}}}{k_B} \Rightarrow PV = NK_B T$$

Perché non la definiamo così e basta?

All'equilibrio termico vogliamo che tutti abbiano la stessa T
 ↘ Quindi vogliamo ottenere che tutti gli esseri risultati:
 ↗ Nessuno ce lo garantisce

È vero però grazie al teorema dell'EQUIPARANZ. DELL'ENERGIA

"In sistemi all'equilibrio termico, l'ENERGIA MEDIA dei costituenti è PROPORZIONALE al grado di libertà dei costituenti n_g "

Se purif. $n_g = 3$ \rightarrow $k_B n_g$

Se molecola diazonica $n_g = 5 \rightarrow 3 + 2$

Se molecole diazoniche che possono oscillare $n_g = 6$

$$n_g = 5 + 1 \quad (1 \text{ dato da oscillazioni})$$

4.7 Teo equip. energ.a

$\overline{E} \propto \# \text{ termini quadratuci in } v \text{ e/o } \omega \text{) dell'energia dei costituenti } (\frac{1}{2}mv^2, \frac{1}{2}I\omega^2, \frac{1}{2}k_B\chi^2 \text{ per)}$

Così il teorema equiparanz. dell'energia \Rightarrow

$\Rightarrow \overline{E^{(m)}}$ è la stessa per tutti i sistemi all'eq. termico

Questo ci dice che la def precedente va bene.

$$\Rightarrow T = T(\overline{E_c^{(m)}}) \text{ iniettiva}$$

da formula che aveva fatto l'aveva fatto su particelle puntiformi

per N_g super, mediamente non cambia nulla

$$P = \frac{Nm}{V} \frac{U^2}{3} \quad \forall N_g \geq 3$$

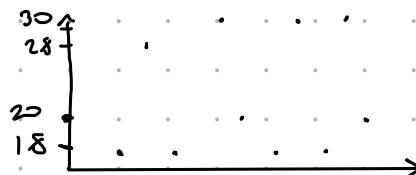
Allora $PV = NK_B T$ vale per ogni gas, sia che sia monatomico, diaatomico o anche oscillanti

4.8 CENN DI STATISTICA

Sia $Y(x \in X)$ funzione a valori ordinati gli elementi dell'insieme X con $|X| = Y$

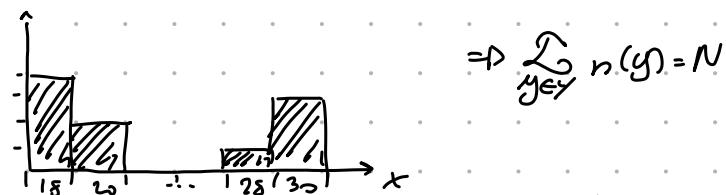
ESEMPIO

X	Y
abitati Paesi	Salvo Med
Studenti	Voto medo
molecole di gas	velocità



$$N = |X| = 10$$

$n(y \in Y)$ numero d'occurrence di y sull'insieme X



$$\Rightarrow \sum_{y \in Y} n(y) = N$$

Questa cosa può esser portata al continuo come $\int_Y n(y) dy = N$

$n(y) dy$ = numero di elementi di X a cui Y assegna valori tra y e $y + dy$

DEF Si definisce DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ $P(y) = \frac{n(y) dy}{N}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P(y) dy \leq 1 \\ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} n(y) dy = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P(y) \leq 1 \\ \sum_{y \in Y} n(y) = 1 \end{array} \right.$$

DEF Media da MEDIA di una funzione $g(Y)$ con distribuzione di prob $P(y)$

$$\langle g(y) \rangle = \bar{g(y)} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} g(y) P(y) dy \quad (= \sum_{y \in Y} g(y) P(y))$$

DEF Varianza $\sigma_g^2 = \langle (g(y) - \bar{g}(y))^2 \rangle$

$$\Rightarrow \sigma_g^2 = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (g^2(y) + \bar{g}^2(y) - 2g(y)\bar{g}(y)) P(y) dy$$

$$= \underbrace{\int g^2(y) P(y) dy}_{\bar{g}^2(y)} + \bar{g}^2(y) \int P(y) dy - 2 \bar{g}(y) \int P(y) g(y) dy$$

$$= \bar{g}^2(y) + \bar{g}^2(y) - 2 \bar{g}^2(y) = \bar{g}^2(y) - \bar{g}^2(y)$$

DEF Mediana MEDIANA $= \underline{m} : \int_{y_{\min}}^{\underline{m}} P(y) dy = \int_{\underline{m}}^{y_{\max}} P(y) dy$

DEF Moda Valore + probabile Max p(y)

4.9] Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

$$P(v) dv = c n v \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv \quad (\text{con } v = \|\vec{v}\|)$$

Vole scappare che $\int_0^{+\infty} P(v) dv = 1$

"DIMOSTRAZIONE"

$$\text{Sappiamo che } \nabla P = \rho(\vec{z}) \vec{g} = -\rho(\vec{z}) \hat{z} = -mn_v(\vec{z}) g \hat{z}$$

$$\text{Se uso } PV = N k_B T \text{ ottengo } P = n k_B T$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla n_v(\vec{z})}{(\partial_{\vec{z}} n_v(\vec{z}) \hat{z})} = -\frac{mg}{k_B T} n_v(\vec{z}) \hat{z} \quad (\text{dove } \frac{\partial f}{\partial \vec{z}})$$

$$\Leftrightarrow n_v(\vec{z}) = \frac{n_0}{n_0} e^{-\frac{mg}{k_B T} \vec{z}}$$

Per raggiungere un' altezza \vec{z} , una molecola deve raggiungere
 $E_C = mg \vec{z} = \frac{1}{2} m v_z^2$

$$\Rightarrow \vec{z} = \frac{v_z^2}{2g} \Rightarrow dz = v_z dv_z/g$$

$$\text{Abbiamo che } P_{\vec{z}} = \frac{1}{N} \frac{dn_v(\vec{z})}{d\vec{z}} = -\frac{n_0 mg}{k_B T} e^{-\frac{mg\vec{z}}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow P_{v_z} = \frac{1}{N} \frac{dn(v_z)}{dv_z} = \frac{1}{N} \left| \frac{dn(v_z)}{dv_z} \right| = \frac{1}{N} \frac{n_0 mg}{k_B T} e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}}$$

$$\Rightarrow P_{v_z} = \frac{1}{N} \int_0^\infty e^{-\frac{mv_z^2}{2k_B T}}$$

$$\text{Supponendo che } \int_{-\infty}^{+\infty} P_{V_Z}(V_Z) dV_Z = 1 \Rightarrow \frac{1}{n} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k_B T}}$$

Abbiamo un sistema isotropo $\Rightarrow V_x, V_y, V_z$ sono indipendenti

$$\begin{aligned} \Rightarrow P(\vec{v}) d^3 v &= P_{V_Z}(V_Z) P_{V_Y}(V_Y) P_{V_X}(V_X) dV_Z dV_Y dV_X \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} (V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2)} d^3 \vec{v} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T} ||\vec{v}||^2} d^3 \vec{v} \quad \text{ma } d^3 v = \underbrace{v^2 dv d\Omega}_{d^3 \vec{v}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int v dv = \int v^2 dv \underbrace{\int \cos \theta d\theta \int d\phi}_{4\pi} =$$

$$\Rightarrow P(\vec{v}) d^3 \vec{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dz$$

4.9 Conseguenze di M-B

$$\text{MODA } (V_2 P) : \max_v P(v) = N_{\text{moda}} \cdot \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

$$\text{VAL. MEDIO } \bar{v} : \int_0^{+\infty} v P(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

$$\text{VAL. QUAD. MEDIO} = \bar{v}^2 = \int_0^{+\infty} v^2 P(v) dv = \frac{3k_B T}{m}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{1}{2} m \frac{3k_B T}{m} = \frac{3}{2} k_B T$$

avremo anche che $\frac{E_C}{T} = \frac{2}{3} \frac{E_C}{k_B}$

ESENZIALE Calcola la velocità relativa media fra due molecole di gas

$$\bar{v}_{ij} = \int \|\vec{v}_i - \vec{v}_j\| P(v_i) P(v_j) d^3 P(v_i) d^3 P(v_j) \quad \boxed{\text{HINT}}$$

Ven 15/4/2024

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \int_0^{v_1} dv_1 \int_0^{v_2} dv_2 \|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\| P(v_1) P(v_2)$$

Cambio variabili di integrazione $\begin{cases} \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \\ \vec{V} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = (\vec{v}_{\text{rel}} + \vec{V})/2 \\ \vec{v}_2 = (\vec{V} - \vec{v}_{\text{rel}})/2 \end{cases}$

$$\therefore \vec{v}_{\text{rel}} = \int_{v_1^2 dv_1 dv_2} d^3 v_1 \frac{P(v_1)}{4\pi v_1^2} \int_{v_2^2 dv_1 dv_2} d^3 v_2 \frac{P(v_2)}{4\pi v_2^2} \|\vec{v}_2 - \vec{v}_1\|$$

abbiamo che $\frac{P(v_1)}{v_1^2 4\pi} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T}(v_{\text{rel}}^2 + V^2 + 2v_{\text{rel}}V)/4}$

$$\frac{P(v_2)}{v_2^2 4\pi} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2k_B T}(v_{\text{rel}}^2 + V^2 - 2v_{\text{rel}}V)/4}$$

d'integrandi sarà quindi $\frac{P(v_1)}{4\pi v_1^2} \cdot \frac{P(v_2)}{4\pi v_2^2} v_{\text{rel}} = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^3 e^{-\frac{m}{4k_B T}(v_{\text{rel}}^2 + V^2) - v_{\text{rel}}}$

$$d^3 v_1 d^3 v_2 = \det \left(\frac{\partial (\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\partial (\vec{V}, \vec{v}_{\text{rel}})} \right) d^3 V d^3 v_{\text{rel}}$$

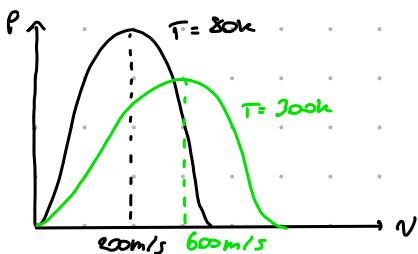
$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1^x v_2^x}{\partial V^x v_{\text{rel}}^x} & x-y \\ x-z & x-z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J) \cdot \left(\det \left(\frac{\partial v^x v^x}{\partial V^x v_{\text{rel}}^x} \right) \right)^3 = -\frac{1}{8}$$

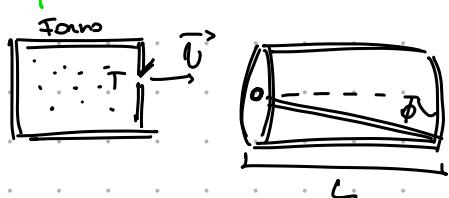
$$\Rightarrow N_{\text{rel}} = \int \frac{d^3 V d^3 v_{\text{rel}}}{8} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^3 e^{-\frac{m}{2k_B T} \left(\left(\frac{v_{\text{rel}}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{V}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow v_{\text{rel}} = \frac{v_{\text{rel}}}{\sqrt{2}} \quad V = V/\sqrt{2} \\ &= \int d^3 V d^3 v'_{\text{rel}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^3 e^{-\frac{m}{2k_B T} (v'_{\text{rel}}^2 + V'^2)} \cdot \sqrt{2} v'_{\text{rel}} \\ &= \underbrace{\int dV^1 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mV^2}{2k_B T}} V'^2}_{1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{8k_B T}{m\pi}}} \cdot \underbrace{\int dv'_{\text{rel}} \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv'^2_{\text{rel}}}{2k_B T}} v'^2_{\text{rel}}}_{\sqrt{2} \sqrt{\frac{8k_B T}{m\pi}}} \end{aligned}$$

graficamente



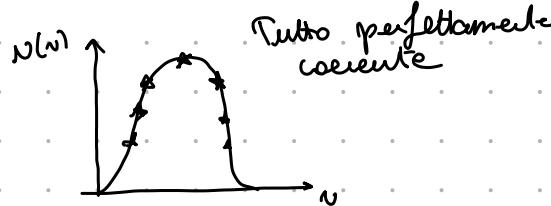
Verifica sperimentale



sensore che conta quante particelle hanno velocità v

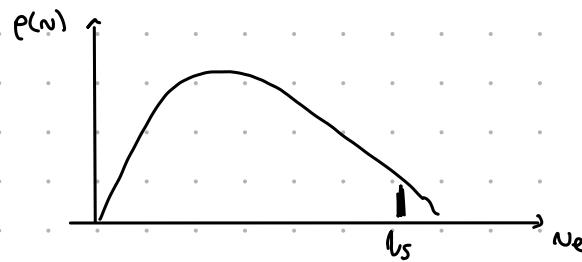
$$\text{Il tempo impiegato è } t = \frac{L}{v} - \frac{\phi}{w} \Rightarrow v = \frac{Lw}{\phi}$$

Quindi misurano $N(v)$ e trovano che



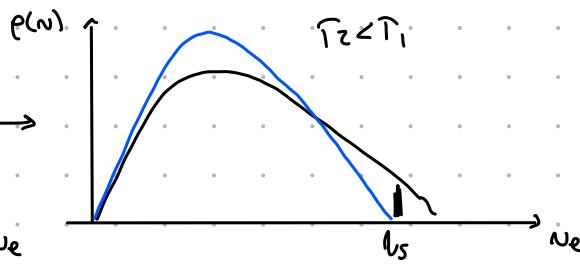
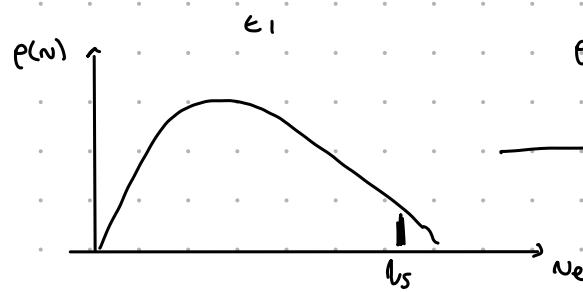
4.10 Evaporazione a livello microscopico

Liquidi hanno una propria distribuzione di velocità



$$P_e(v_e) = \frac{1}{N_e} \cdot \#(v_e < v < v_e + dv)$$

$\exists v_s = v_{\text{esc}} : v_e > v_s$
la molecola esce dal liquido



d'evaporazione avviene anche a temperatura costante

$$\# \text{ molecole con } v > v_{\text{vap}} = \int_{v_s}^{+\infty} dv_s P(v) \cdot N$$

4.11 Cammino libero medio

Perché non si sentono odori di gas "istantaneamente"?

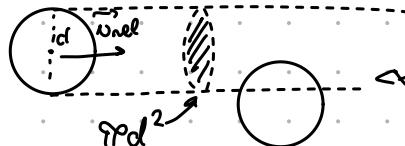
- 1) le molecole di gas fanno molti salti (quindi non sono confinate)
- 2) "nel diffusione" $\ll v$ (moto browniano)

(1) Gas \rightarrow Ad ogni istante, c'è una distanza λ :

Definire il cammino medio

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n}$$

Estendiamo il modello cinetico dei gas con la dimensione delle molecole



ci capita molto perché parte dell'altra molecola sta nella traiett. della prima

Per un λ_i quanti salti avvengono?

$$N_{\text{mol}} (\Delta t) = \frac{N}{V} \cdot V_1 (\Delta t) \xrightarrow{\text{VOLUME SPAZIATO}} = \frac{N}{V} \cdot \pi d^2 V_{\text{rel}} \Delta t$$

$$= \frac{N}{V} \pi d^2 V_{\text{rel}} \Delta t$$

$$\lambda = \langle \lambda \rangle = \frac{\text{distanza percorsa}}{\text{t}} = \frac{V}{\Delta t}$$



$$\lambda = \frac{\bar{V} \Delta t}{\text{mass } \pi d^2 V_{\text{rel}} \Delta t} = \frac{N}{V} \frac{1}{\pi d^2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Usiamo } PV = Nk_B T \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{N k_B T}{\sqrt{2} p} \frac{1}{\pi d^2}}$$

ESEMPIO Molecola di Azoto N_2 $d \approx 3.2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ A t. amb. $V = 22,4 \text{ l}$

Calcolo \bar{V} e λ a $p=\text{satm}$ $n=1 \text{ mol}$ $T = 300 \text{ K}$

$$\sqrt{V} = \sqrt{\frac{3PV}{NM}} = \sqrt{3P} \cdot \sqrt{\frac{22,4}{A_N}} \approx 500 \text{ m} \quad \lambda = \sqrt{2} p \frac{1}{\pi d^2} \approx 10^{-7} \text{ m}$$

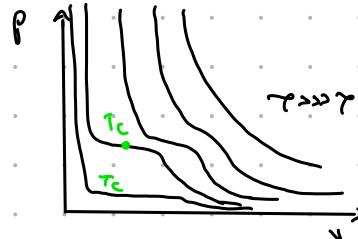
4.12 Equazione di Stato dei gas reali (Van der Waals)

Per i gas ideali $PV = nRT$ empiricamente ottima per $T \gg T_c$

Per $T \approx T_c$
↓ quella migliore

$$\boxed{(P + a \frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT}$$

aso. b > 0 ind. da PV, T, n
ma dipendenti del gas



V: V diminuisce perché le molecole hanno dimensione finite

P: $\sim P + a \frac{n^2}{V^2}$ molecole vicine si attraggono un minimo
↳ aumenta
↳ Al quadrato per il fatto che sono coinvolte 2 molecole

COS'È SI "DIMOSTRA"?

→ descrizione microscopica → Picasso 21.5
→ " " macroscopica

Tutti i gas sono ideali per $P \rightarrow P/V \rightarrow$

Scelgo una tra questi parametri macroscopici ed espando

$$\text{Se } \frac{P}{V} \sim \frac{PV}{nRT} = 1 + C_1 \frac{N}{V} + C_2 \frac{n^2}{V^2} + \dots$$

Segno di $C_1 \rightarrow$ stessa logica di b

$C_2 \rightarrow$ stessa logica di a

"Pressione di vapore saturo"

4.B3 Neutrini Cosmici di Fondo



modelli cosmico presente $T_0 |_{\log} = 1,97 \text{ K}$

$$V_2 = ?$$

$$\sqrt{V_2^2} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_2}} = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$$

$$m_2 = 0,005 \frac{\text{eV}}{\text{c}^2}$$

MELOGO Temperatura e gas

TENNO DINAMICA: Branca della fisica che studia l'energia interna dei sistemi a livello macroscopico

VARIABILI TENO DINAMICHE: Proprietà macroscopiche misurabili

EQUILIBRIO fra due sistemi se non si scambiano né Massa né Energia

PRINCIPIO ZERO Equilibrio termico è transitivo \Rightarrow
 $\Rightarrow \exists$ funzione scala (T) che ha lo stesso valore
 per sistema a equilibrio termico

TEMPERATURA Definizioni macroscopiche

$$T = \begin{cases} 100^\circ C & \frac{L-L_0}{L_0} \\ 273,15 K & \lim_{P_j \rightarrow 0} \frac{P}{P_j} \end{cases} \quad (L \text{ lunghezza sbarra di metallo...})$$

SCALE DI TEMPERATURA ${}^\circ C, {}^\circ F, K$ $\frac{T}{K} = 273,15 + \frac{T}{C} = \frac{T}{F} = \frac{9}{5} \frac{T}{C} + 32$

DILATAZIONI TERMICHE $\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T \quad \Delta V/V = \beta \Delta T$. Solidi isotropi $\Rightarrow \beta = 3\alpha$

MOLTEZZA 1 mol = quantità di sostanza in massa $M = A$ gr di quantità di sostanza, dove A = numero di massa delle due molecole

1 mole contiene sempre $N_A \cdot 6,022 \cdot 10^{23}$ molecole

d' unità di massa atomica $m_p (\equiv \frac{1}{2} M^\circ C) = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$V_{1\text{mol}} (T=20^\circ C, P=1 \text{ atm}) = 22,4 \text{ l}^\circ C$

EQUAZIONI DI STATO DEI GAS (IDEALI) $PV = nRT = Nk_B T \quad \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{Agn}$

TRASFORMAZIONE DEI GAS E LAVORO $W = \int_a^b p dV = \begin{cases} 0 & \text{se ISOCORA} \\ P(V_b - V_a) & \\ nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) & \text{ISOTENNA} \end{cases}$

TEORIA CINETICA E PRESSIONE $P = \frac{Nm}{V} \frac{v^2}{3} \quad m: \text{massa molecola}$
 $\Rightarrow PV = n \frac{2}{3} \overline{E_C}$ $v: \text{Velocità "}}$

TEORIA CINETICA E T $T = \frac{2}{3} \frac{\overline{E_C}}{k_B}$

\approx Ok grazie a Teorema equipartizione energia

DISTRIBUZIONE PI MAXWELL-BOLTZMAN Distribuz. di probabilità delle velocità in gas

$$\text{ideale secondo cinetico} \quad P(v) dv = A \pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} v^2 dv \quad \left(\int_0^{+\infty} P(v) dv = 1 \dots \right)$$

CAMMINO LIBERO MEDIO $\lambda = \frac{k_B T}{\sqrt{2} \rho} \frac{1}{\pi d^2}$ ($d = \text{diametro molecole}$)

GAS REALE $(P + a \frac{n^2}{V}) (V - nb) = nRT$ $a, b > 0$ e dipende dal gas
ma non da P, V, n, T

5 CALORE E I LEGGI TERMODINAMICA

Forte dissipativa a livello microscopico. Trasferimento E. meccanica da E interna
lo fino ad adesio non ne avevamo mai parlato

DEF CALORE è il lavoro microscopico che realizza variaz. di energia interna $\Delta E_{int} \neq 0$

5.1) Energia e calore a livello microscopico

Energie potenziali delle forze interne, conservative

DEF Energia Interna $E_{int} = \sum_i \sum_{j \neq i} E_{kin,i} + \sum_i U_i(n_j)$

R Energie cinetiche del sist. di ref. in quiete macroscopica

Consideriamo due corpi macroscopici A e B che interagiscono

$$\Delta E_{kin}^A = W_{macro}^{B \rightarrow A} \quad \text{e} \quad \Delta E_{kin}^B = W_{macro}^{B \rightarrow A}$$

per esempio attrito di blocco su un proiettile

$$\Rightarrow \Delta E_{kin}^A + \Delta E_{kin}^B (\equiv -E_{diss}) = W_{macro}^{A \rightarrow B} + W_{macro}^{A \rightarrow B} < 0$$

$$\Delta E_{kin}^{A,B} = \Delta E_{kin,i,j}^{AB} - \Delta E_{kin,i}^{AB} \quad (\text{MECCANICA, "macro")}$$

Vediamo come passa al microscopico

LIVELLO MACRO + MICRO

$$\frac{\Delta E_{kin}^A + \Delta E_{int}^A}{W_{TOT}^{svA}} + \frac{\Delta E_{kin}^B + \Delta E_{int}^B}{W_{TOT}^{svB}} = 0 \quad \text{teorema forze vive}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{TOT}^{svA} + W_{TOT}^{svB} = 0} \quad \text{ma} \quad \boxed{W_{macro}^{A \rightarrow B} + W_{macro}^{A \rightarrow B} < 0}$$

$$\Rightarrow W_{TOT}^{svA} = W_{macro}^{B \rightarrow A} + W_{macro}^{svA} \Rightarrow \boxed{\Delta E_{int}^A = W_{macro}^{svA}}$$

Cerchiamo di capire ΔW^{svA} a livello microscopico

$$W_{TOT}^{svA} \cdot \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i \Rightarrow \overline{\vec{F}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{e} \quad \overline{\Delta \vec{r}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta \vec{r}_i$$

Allora abbiamo che $\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = \overline{\vec{F}_i} + \delta \vec{F}_i \\ \Delta \vec{r} = \overline{\Delta \vec{r}} + \delta \vec{r} \end{array} \right.$

$$\text{Con } \delta \vec{F}_i \cdot \frac{1}{n} \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{e} \quad \delta \vec{r} \cdot \frac{1}{n} \sum \Delta \vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow W_{TOT}^{svA} = \underbrace{\overline{\vec{F}} \cdot \overline{\Delta \vec{r}}}_{W_{macro}^{svA}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \delta \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}}_{W^{svB}} + \underbrace{\overline{\vec{F}} \cdot \sum_{i=1}^n \delta \vec{r}}_{0} + \underbrace{(\sum_{i=1}^n \delta \vec{F}_i) \cdot \overline{\Delta \vec{r}}}_{0}$$

Lo faccio disordinato / faccio disordinato, CALORE

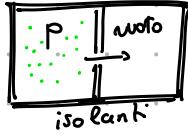
$$\Rightarrow \Delta E_{kin} + \Delta E_{int} = W_{tot} = W_{macro} + Q$$

Se $\Delta E_{kin} = 0$ $\Delta E_{int} = W_{macro} + Q$ + I leggi termodinamica

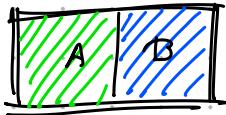
5.2 Definizioni (Ved' anche 3.2)

- **SISTEMA TERMODINAMICO**: insieme degli elementi finiti, oggetti delle nostre misure d: variabili macroscopiche (termodinamiche o meno) delle loro variazioni (volume di gas per esempio)
- **AMBIENTE**: insieme di elementi esterni al sistema con cui il sistema può interagire (aria in cui è messo il sistema)
- **UNIVERSO TERMODINAMICO**: Sistema + ambiente
- **SISTEMA APERTO**: Se può scambiare sia energia sia materia
- **SISTEMA CHIUSO**: Se può scambiare energia ma non materia con ambiente (pressione)
- **SISTEMA ISOLATO**: Se non può scambiare né energia, né materia
- **SISTEMA ADIABATICO**: Se non scambia calore con l'ambiente e $\Delta Q=0$
- **TRASFORMAZ. NECESSIBILE**: Se avviene attraverso stati intermedi di equilibrio senza che intervengano fonte dissipative
- **TRASF. INNECESSIBILE**: Se non è reversibile

ESEMPI



trasformazione irreversibile perch' ci sono stati intermedi ad equilibrio termico ma non meccanico (P non in equilibrio)



$T_B > T_A \rightarrow T_A^f = T_B^f$
reversible in maniera meccanica ma non termodinamica



perch' "diatermico" cioè non isolamento termico

If stato intermedio \Rightarrow variazioni termodinamiche ben definite \Rightarrow reversibile
T costante P,V varian per stati di equilibrio

DEF VARIABILI TERMODINAMICHE

- **ESTENSIVA** se nasce dalle dimensioni del sistema (additiva)
 - ES Volume, massa, energia
- **INTENSIVA** se non dipende dalla dim del sistema e se esprime prop. locali del sistema (non additivi)
 - (es. densità, pressione, temperatura)

5.2) SORGENTE DI CALORE \rightarrow Corpo che scambia Q mantenendo T costante
($M \gg m$ oppure $C \gg C_{sist}$)

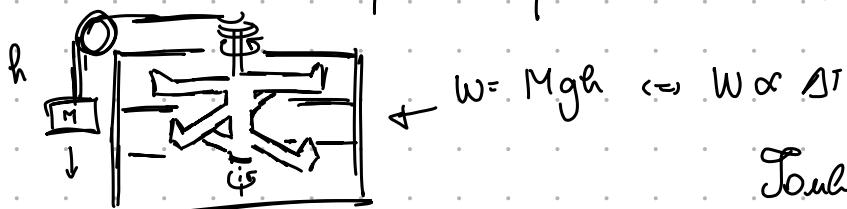
5.3) CALORE E 1^o LEGGE TERMODINAMICA (punto di vista europeo)

Fino al inizio '800: Calore: fluido che fluisce da $T_2 > T_1$ a T_1 , misurata in calorie Q necessaria a far partire 1gr d'acqua da 14,5°C a 15,5°C

Eperimenti di Joule



Joule si domandò se la temperatura poteva aumentare con del lavoro meccanico



Joule concluse che
 $Q = -\Delta E_{int} = -W$

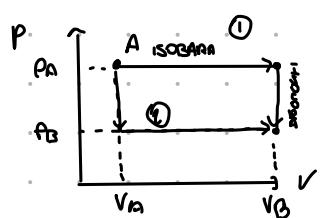
$$W = \Delta E_{int} (\propto \Delta T)$$

$$1 \text{ caloria} = 4,187 \text{ J}$$

CALORE "davono disordinato" responsabile di ΔT (di ΔE_{int}) senza variazioni di proprietà macroscopiche dei sistemi

1 LEGGE TERMODINAMICA Siano A e B due stati termodinamici di un sistema. In ogni trasformazione termodinamica in cui il sistema scambia Q e W con l'ambiente, Q e W (che initialmente dipendono dalla trasformazione scelta) siano $Q+W$ indipendentemente dalla trasformazione, ma dipende da solo A e B.
 $Q+W = E_{int}^B - E_{int}^A$

Per un gas W dipende dalla trasformazione



$$W^{(1)}: \int_A^B P dV = P_A (V_B - V_A) + 0$$

$$W^{(2)}: \int_A^B P dV = \phi + P_B (V_B - V_A)$$

$$Q+W = E_{int}^B - E_{int}^A$$

Definizione moderna di calore $Q = \Delta E_{int} - W$

- i) Convenzioni sui segni: $Q > (<) 0$ se ho trasferito al (dal) sistema dall' (all') ambiente
- $\begin{cases} T_2 \text{ d. } \leftarrow \text{ è negativa} \\ W > (<) 0 \text{ se ho effettuato sul (dal) sistema dall' (all') ambiente} \end{cases}$

ESEMPIO Se $\bar{W} (= -V)$ lavoro effettuato dal sistema sull' ambiente, allora $Q - W = \Delta E_{\text{int}}$

E_{int} è funzione dello stato dinamico? sì. (fissato punto \Rightarrow energia fissata)
ma il lavoro no (è in funzione di due sistemi)

OSS A e B devono essere di equilibrio termodinamico (affinché valga la prima legge)
Trasformazioni d: $A \rightarrow B$ (responsabile di $Q \neq 0$ e $W \neq 0$) può essere reversibile o meno
(un'esplosione è di rispetto alla prima legge).

<u>OSS</u>	<u>Trasformazione</u>	<u>Effetti:</u>
	isocrona	$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{int}} = Q$
	adiabatica	$Q = 0 \Rightarrow \Delta E_{\text{int}} = W$
	ciclo (AS)	$\Delta E_{\text{int}} \Rightarrow Q = -W$
	\hookrightarrow Sono quelle dei motori per esempio	

È comodo scrivere la prima legge a livello infinitesimo: $dQ = dE_{\text{int}} + dW$
 dE_{int} è difficilmente esatto, ma

$$\Delta E_{\text{int}} = \int_A^B dE_{\text{int}} = E_{\text{int}}^B - E_{\text{int}}^A$$

δQ e δW non lo sono

5.4 Trasferimento di calore

Calore specifico: Q necessario a varia di $\Delta T = 1^\circ C$ un corpo d'acqua $M = 1 \text{ kg}$

$$Q = cM(\gamma_f - \gamma_i)$$

con $[c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot ^\circ \text{C}}$

Sappiamo che $\delta Q = cM \delta T \rightarrow c = \frac{1}{M} \frac{dQ}{dT}$

perimentalmente, si verifica che c è lineare (in buona appross.) $\xrightarrow{\text{in } M}$ in ΔT
per intervalli d: T "appropriati"
Si misura per un certo sistema da T_A a T_B con scambio di Q
MA e Q misurando la stessa ΔT con W

c dipende dalla sostanza e dalla trasformazione che realizza ΔT

C a V costante + C a P costante (per un gas almeno)
Per un solido sono sostanzialmente uguali:

DEF Capacità termica = $C = M_C \Rightarrow [C] : \frac{J}{K}$

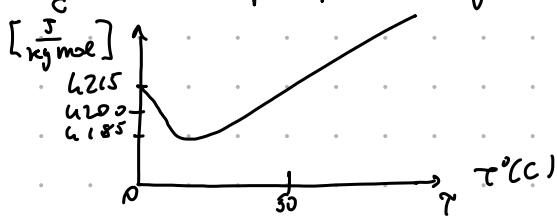
DEF Calore specifico molar: $C_m = \frac{1}{M} \frac{\partial Q}{\partial T} \quad [C_m] = \frac{J}{kg \cdot K}$

$$Q = \int_i^f \delta Q \cdot M \int_{T_i}^{T_f} c(T) dT = n \int_{T_i}^{T_f} C_n(T) dT$$

Tutte queste formule per quando ci sono problemi

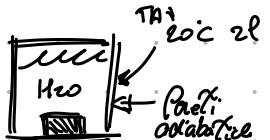
ESEMPIO		Acqua	Alcol	Ferro	Rame	Vetro	Mattone	Glicina
	$C(\frac{J}{kg \cdot K})$	4187	2200	448	387	628	840	2051,2
	$T(K)$	15	20	20	25	20	20	0

Caloria = Calore necessario per portare 1 gr da T_i a T_f



ESEMPIO Misura calore specifico di sostanza solida

Sia blocco di $M_s = 0,378 \text{ kg}$, è inizialmente a $T_i = 95^\circ\text{C}$



all'equilibrio termico $T_f = 21,3^\circ\text{C}$
Assumendo $\frac{dQ}{dT} = 0$, calcola C_s

SOL $Q_A = M_A C_A (T_f - T_i) \quad \left. \right\} \text{ Sistema } A+S \text{ è isolato } (Q_{A+S}=0) \text{ e } W=0$
 $Q_S = M_S C_S (T_f - T_i) \quad \left. \right\}$

$$\Rightarrow Q_A + Q_S = 0 \Rightarrow M_A C_A (T_f - T_i) = M_S C_S (T_i - T_f) \Rightarrow C_S = C_A \frac{M_A}{M_S} \frac{T_f - T_i}{T_i - T_f} = 387 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Calori latenti: Non tutti i Q sono associati a cambiamenti di temperatura
(es. trasformaz di fase)

$C_L = \frac{Q}{M}$ → Calore necessario per cambiare fase a 1 kg. di sostanza
 $C_L = \frac{J}{kg}$
 Anicamente dipendono dalla sostanza

$P = 1 \text{ atm}$

ESEMPIO

	Acqua / Ferro / Piombo / Anidride Carbonica
Calore latente di evaporazione/condensazione	
$C_L (\frac{J}{kg})$	$33 \cdot 10^5$ (0°C) $2,1 \cdot 10^5$ (1530°C) $265 \cdot 10^4$ (324°C) #
Solidif. fusione → C_F	$9,26 \cdot 10^6$ (100°C) # $8,7 \cdot 10^4$ (1760°C) #
sublimaz. → C_S	# # # $3,7 \cdot 10^5$ (-70°C)

ESEMPIO Ghiaia $M_G = 30 \text{ g}$ $T_G = -15^\circ\text{C}$
lo immergiamo nell'acqua $M_A = 50 \text{ g}$ $T_A = 60^\circ\text{C}$
 $T_f = ?$



Sol Hyp $T_f \geq 0$ Ghiaia $Q_{G_1} = M_G C_A (T_0 - T_G)$ $Q_A = M_A C_A (T_f - T_A)$

$$Q_{G_2} = M_G C_A$$

$$Q_{G_3} = M_G C_A (T_f - T_0)$$

Sistema isolato, no libero W $\Rightarrow Q_A = Q_{G_1} + Q_{G_2} + Q_{G_3}$

$$Q_{G_1} = 923 \text{ J} \quad Q_{G_2} = 9900 \text{ J}$$

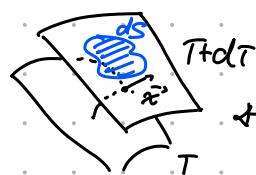
$$Q_{G_1} + Q_{G_2} + M_A C_A (T_f - T_0) + M_A C_A (T_f - T_A) = 0$$

$$\Rightarrow T_f (M_G C_A + M_A C_A) = M_A C_A T_0 + M_A C_A T_A - Q_{G_1} - Q_{G_2}$$

$$T_f = \frac{M_A T_0 + M_A T_A}{M_G + M_A} - \frac{Q_{G_1} + Q_{G_2}}{C_A} = 60^\circ\text{C}$$

5.6) Trasmissione del calore

CONDUZIONE TERMICA



$$\frac{dQ}{ds dt} = -k \frac{dT}{dx}$$

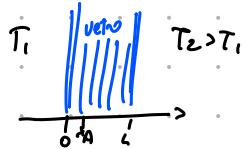
k : Condutibilità termica
 $[k] = \frac{W}{Km} \cdot \frac{K}{m^2}$

si toccano (contatto)
 x' verso vero + caldo

k dipende da natura del materiale e T

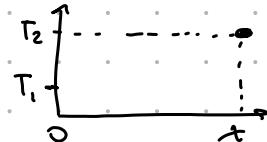
$k \left[\frac{W}{Km} \right]$	Ferro	Rame	Mutto	Vetro	Sogno	Aqua	Ice
50,2	387,6	0,63	0,84	0,06	0,59	0,59	2,1
0°C	0°	20°C	20°C	27°C	4°C	0°C	0°C

ESERCIZIO



In condiz. stazionarie $\frac{dQ}{ds dt} = \frac{dt}{dx} = 0$ $T(x) = ?$

Sappiamo ch.



Per capire il graf. considera le sup. interne

SOL $\frac{dQ}{ds dt} = -k \sum_A \frac{dt}{dx} \Big|_{x=x_A} = 0$

$$\frac{dQ}{ds dt} = -k \sum_B \frac{dt}{dx} \Big|_{x=x_B = x_A + dx} = 0$$

Nel nostro caso $A \approx B \Rightarrow$

Con Taylor $\frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_A+dx} = \underbrace{\frac{dT}{dx} \Big|_{x=x_A}}_{=0} + \frac{d^2T}{dx^2} \Big|_{x=x_A} dx$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} \Big|_{x=x_A} = 0 \quad \forall x_A \in [0, L] \Rightarrow T(x) = C_1 + C_2 x$$

Per la condiz. al bordo $T(x) = T(x) = \frac{x}{L} T_2 + T_1 (1 - \frac{x}{L})$

Quindi so ch. che cresce in maniera lineare

DEF POTENZA TERMICA $H = \frac{dQ}{dt} \left(= -k \frac{dT}{dx} s \right)$

RESISTENZA TERMICA $R = \frac{L}{k} \leftarrow$ lunghezza oggetto
 \leftarrow condutibilità termica

Con altezze, superfici in intervalli Δx d' un materiale lungo L

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{R}{L} s (T_2 - T_1) = \frac{s (T_2 - T_1)}{R}$$

ESEMPIO $\frac{dQ}{dt}$ per una parete a due strati (piani) (a regime stationario) $\rightarrow \frac{dQ}{dt}$ costante $\Rightarrow \frac{dQ_A}{dt} = \frac{dQ_B}{dt}$

$$\left| \begin{array}{c} T_1 \\ l_1 \\ T_A \\ k_1 \\ \hline k_2 \\ l_2 \\ T_B \end{array} \right| \dots \left| \begin{array}{c} l_1 \\ k_2 \\ l_2 \\ T_B \end{array} \right|$$

SOL Condiz. stazionaria $H_1 = H_2 = \dots = H_n$

$$H_1 = \frac{S(T_2 - T_1)}{R_1} \quad H_2 = \frac{S(T_A - T_B)}{R_2}$$

$$H = H_1 = H_2 \Rightarrow \frac{T_2 - T_A}{R_1} = \frac{T_A - T_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow T_A \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) = \frac{T_2}{R_1} + \frac{T_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{H = S \frac{T_2 - T_1}{R_1 + R_2}}$$

In genere $H = S \frac{T_2 - T_1}{\sum R_i}$

le resistenze termiche di capi si sommano

$$\text{Se } \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \dots \text{ (diffici isolare colonne)}$$

CONVEZIONE Trasporto di calore (settore) nei fluidi

transporto di materia



Per la legge di Archimede i componenti in B vengono soli, quelli in A vengono scatenati

IRRADIAMENTO dQ/dt per induz. elettromagnetica

potenza emessa $| P_{\text{em}} = \sigma E A T^4 |$

σ = costante Stefan-Boltz

A = suprf. che emette energia

E = emissività della superficie $0 < E < 1$

$E = 1$ caso limite "corpo nero"

POTENZA ASSORBITA $P_{\text{as}} = \sigma E A T_{\text{ambiente}}^4$

ESEMPIO Deserto, $T_{\text{notte}} = 6^\circ\text{C}$ $E_{\text{acqua}} = 0.9$ $T_{\text{eq, amb}} = -23^\circ\text{C}$

Prendo recipiente con A: 9cm^2 d = 0,5 cm
Lo isoliamo dal suolo

$$\frac{dQ}{dt} = P_{\text{ass}} - P_{\text{em}} = \sigma A E (T_{\text{as}} - T_{\text{em}}) < 0 \Rightarrow \text{Acqua sta cedendo calore}$$

$$\Rightarrow \text{Gugelmanno} \rightsquigarrow \Delta Q / \text{J} \quad T = \text{cost}$$

$$\Delta T = \frac{\Delta Q / \text{cost}}{P_{\text{eff}}} = \frac{33 \cdot 10^{-5} \text{ J}}{5 \text{ m}^2 \text{ kg}}$$

$$\Delta Q / \text{cost} = \frac{cm}{6186 \text{ J/kg}} (T_i - T_0) + C_L m \quad \Rightarrow -1600 \text{ J}$$

$$\Delta t = \underbrace{\frac{-1600 \text{ J}}{5 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \text{ J/m}^2 \text{ kg}}} \cdot \underbrace{\frac{g \cdot 10^4 \text{ m}^2}{A}} \cdot \underbrace{\frac{0.9}{\epsilon}} \quad (250 \text{ K} - 279 \text{ K})^{1.4} = 5 \cdot 2.1 \cdot 10^6 \approx 6 \text{ ore}$$

5.7 Energia interna e calori specifici dei gas

$$T = \frac{2}{3} \frac{\bar{E}^{\text{cm}}}{k_B} \Rightarrow \bar{E}^{\text{cm}} = \frac{3}{2} T k_B$$

Per il teorema di equiparz. dell' energia
f: numero d' gradi d' libertà

$$\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ per atomi} \\ 5 \text{ per molecole diaforetiche} \end{array} \right. \frac{1}{2} m(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{1}{2} I(\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

→ cresce d' più se può oscillare

$$\boxed{\bar{E}_C = \frac{1}{2} k_B T}$$

$$E_{\text{int}} = N E = \frac{1}{2} N k_B = \frac{1}{2} n R T \quad (n = \# \text{ mol})$$

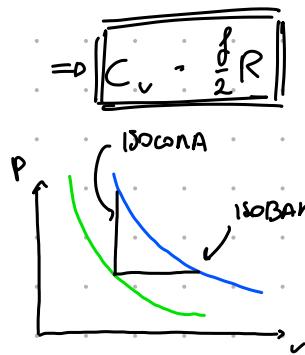
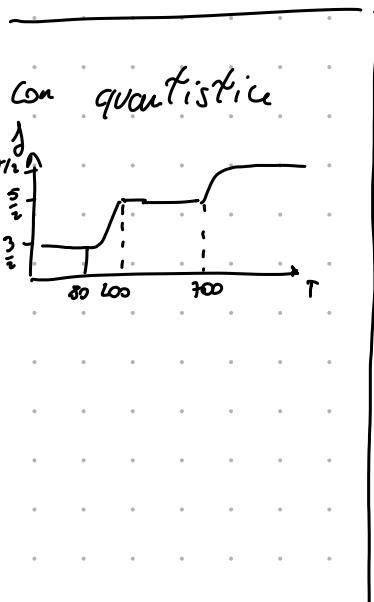
Calori specifici MOLARI Cx

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_V \quad C_P = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_P$$

$$\text{Se indip. dal tempo} \quad C_V = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_V \quad C_P = \frac{1}{n} \frac{\partial Q}{\partial T} \Big|_P$$

$$\delta E_{\text{int}} = Q + \underbrace{\Delta W}_{-\Delta W} = Q \cdot \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

$$\text{ISOCONA} \Rightarrow \Delta W = 0 \Rightarrow Q \cdot m c_V \Delta T = \Delta E_{\text{int}} = \frac{f}{2} k_B \Delta T = \frac{12.5 \text{ J}}{\text{mol K}} \frac{f}{3}$$



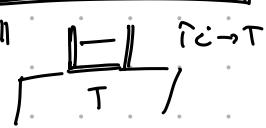
$$\text{ISOCONA} = P \text{ cost} \Rightarrow \Delta W = -P(V_f - V_i)$$

$$\Delta E_{\text{int}} = Q - P \Delta V = \frac{f}{2} n R \Delta T - n c_V \Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{C_P = \left(\frac{1}{2} + f \right) R = C_V + R}$$



$$\begin{aligned} T &\rightarrow T = T_i + \Delta T \\ P &\rightarrow P \\ V_i &\rightarrow V = V_i \end{aligned}$$



GIO 12/5/2024

Recap

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{\delta T} \Big|_V = \frac{f}{2} R \quad \text{dove } f = \# \text{ gradi d' libertà}$$

$E_{int} = n C_V T$ } 3 per mono
5 per diat.

$$C_P = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{\delta T} \Big|_P = C_V + R \quad \text{④}$$

5.8] TRANSFORMAZIONI ADIABATICHE (non c'è scambio di calore con l'ambiente) Q=0

Vale $PV^\gamma = \text{costante}$ per trasformazioni adiabatiche reversibili.
 $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{T_2 + 1}{T_1}$ 5/3 per monatomici 7/5 per diat.

Da $PV^\gamma = \text{costante}$ e $PV = nRT \Rightarrow PV^{\gamma-1} = \text{costante}' \cdot T^{-1}$
 $\Leftrightarrow T V^{\gamma-1} = \text{costante}$

Analogamente si ricava $T P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante}$

DIM ($PV^\gamma = \text{cost}$ pu' chaf. adiabatica) δ = non diff esatti

I legge: $\frac{dE_{int}}{dt} = \delta Q + \delta W = \overset{\delta}{dW} = -pdV$ adiabatica

$$n C_V dT \Rightarrow n C_V dT = -pdV$$

Eq stato $\Rightarrow PV = nRT$, differenziando: $PdV + Vdp = nRdT = n(C_P - C_V)dT$

\Rightarrow quindi ottieniamo che $\frac{C_P - C_V}{C_V} (-\frac{dV}{V}) - \frac{dp}{V} = -\frac{dV}{V} \left(1 + \frac{C_P}{C_V} - 1 \right) = -\frac{\gamma dV}{V}$
 dividendo per P e per V si ha che

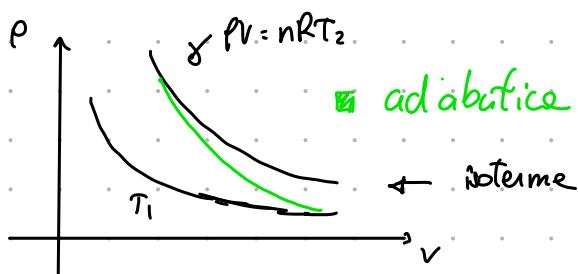
$$\left\| \frac{dp}{P} \right\| = \frac{C_P - C_V}{C_V} \left(-\frac{dV}{V} \right) - \frac{dp}{V} = -\frac{dV}{V} \left(1 + \frac{C_P}{C_V} - 1 \right) = -\frac{\gamma dV}{V}$$

In integrando: $\int_i^f \frac{dp}{P} = -r \int_i^f \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right) = -r \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{p_f}{p_i}\right) + \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^r = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{p_f V_f^r}{p_i V_i^r}\right) = 0$$

$$\Rightarrow p_f V_f^r = p_i V_i^r$$

□



ADIABATICA

ad un'espansione
(aumento volume)
ne consegue una
diminuzione di temperatura

ESENZIO danno W effettuato dall'ambiente sul sistema - ?
per trasformazione adiabatica -

$$W = \int_i^f dW \stackrel{?}{=} \int_i^f E_{\text{int}} = \int_i^f n_C v dT = n_C (T_f - T_i)$$

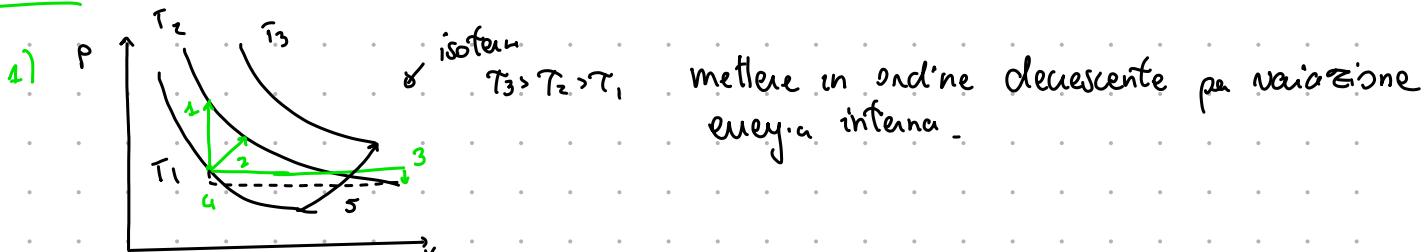
prima legge della dinamica

Il segno dipende da situazione (stando alla curva precedente) = negativo

$$\begin{aligned} \text{Si poteva anche far } W &= \int_i^f dW = - \int_i^f p dV = \int_i^f \frac{p_i V_i^r}{V^r} dV = - p_i V_i^r \int_i^f \frac{dV}{V^r} \\ &= - \frac{p_i V_i^r}{r-1} [V^{-r+1}]^V_i = \frac{p_i V_i^r}{r-1} [V_f^{1-r} - V_i^{1-r}] \end{aligned}$$

ESENZIO Gn $PV = nRT$ e $PV^r = \text{cost}$ che $\rightarrow n_C (T_f - T_i)$

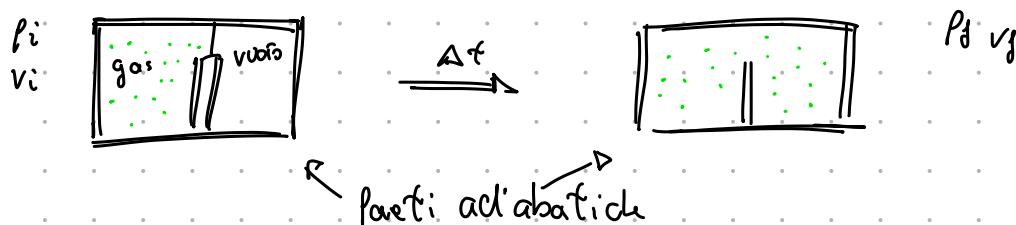
ESENZIO



$\Rightarrow \Delta E_{\text{int}} = n_C \Delta T$ siccome è sempre lo stesso gas, dipende da ΔT

$$\Delta E_{\text{int},1} = \Delta E_{\text{int},2} = \Delta E_{\text{int},3} = \Delta E_{\text{int},4} \leq \Delta E_{\text{int},5}$$

2) Calcolare Q e W da gas in espansione libera;



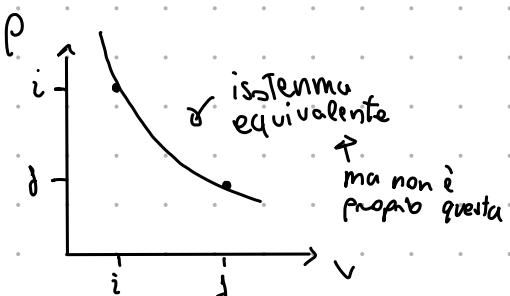
Trovare relazione tra p_i, v_i, p_f e v_f

$Q = 0$ perché il sistema è adiabatico

$W = 0$ perché per $\downarrow \Delta V = 0$

Per prima legge $\Delta E_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$

$$\Rightarrow p_i v_i = p_f v_f$$



5.10 CICLI TERMICI (FRIGORIFERI)

DEF Muo MAISONNADE è CICLO (CICLO) se $i=j$

R Ciclo è TERMICO se realizza $Q > 0$ ($\Rightarrow W < 0$)

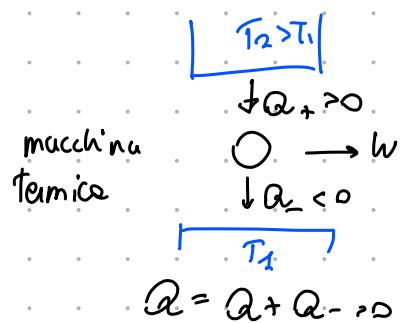
(se assorbe calore dall'ambiente e effettua lavoro sull'ambiente)

DEF Si chiama MACCHINA (MOTORE) TERMICO il sistema che realizza un cicl.

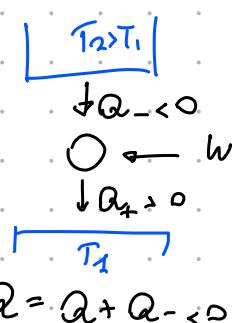
DEF Un ciclo si dice FRIGORIFERO se realizza trasferimento di calore da sorgente a $T_1 < T_2$ e lo trasferisce a sorgente a T_2 , con $W > 0$

Il dispositivo che lo realizza si chiama MACCHINA FRIGORIFERA.

FATTO $W \neq 0 \Leftrightarrow$ se il ciclo avviene tra almeno 2 sorgenti a T diverse



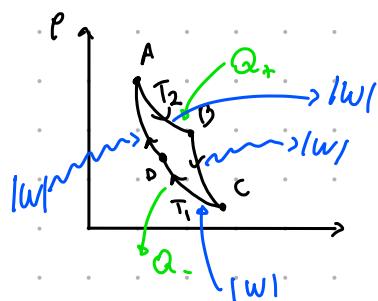
Macchina frigorifera



DEF RENDIMENTO di un cicl. termico : $\eta = \frac{|W|}{Q_+}$
 \Rightarrow frazione del calore assorbito che viene trasformato in calore

Sappiamo che $\Delta E_{int} = 0 \Rightarrow |W| = Q \Rightarrow \eta = \frac{Q}{Q_+} = \frac{Q_+ + Q_-}{Q_+} = 1 + \frac{Q_-}{Q_+} \leq 1$
 Sperimentalmente $\eta < 1$

CICLO di Carnot AB espansione isoterma, BC espansione adiabatica] REVER.
 CD compressione isoterma, DA compressione adiabatica



AB: a contatto con sorgente T_2
 BC: sorgenti termicamente isolati
 CD: a contatto con sorgente $T_1 < T_2$
 DA

$$\eta_{\text{CARNOT}} = ? \quad 1 + \frac{Q_-}{Q_+}$$

$$Q_+ = ? \quad Q_+ + W = \Delta E_{int}(B) - \Delta E_{int}(A) = nC_V(T_B - T_A) = 0$$

$$\Rightarrow Q_+ = -W = - \left(- \int_A^B P dV \right) = \int_A^B nRT_2 \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) > 0$$

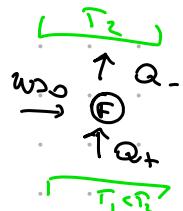
$$Q_- = ? \quad Q_- + W = \Delta E_{int} = 0 \Rightarrow Q_- = -W = nRT_1 \ln \left(\frac{V_C}{V_D} \right) < 0$$

$$\Rightarrow \eta_{\text{CARNOT}} = 1 + \frac{nRT_1 \ln \left(\frac{V_C}{V_D} \right)}{nRT_2 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \frac{\ln \left(V_C / V_D \right)}{\ln \left(V_B / V_A \right)}$$

Usiamo $TV^{\gamma-1}$ costante su BC e DA

$$\Rightarrow \begin{cases} T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} & (B \rightarrow C) \\ T_2 V_A^{\gamma-1} = T_4 V_D^{\gamma-1} & (D \rightarrow A) \end{cases} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{V_C}{V_D}$$

$$\eta_{\text{CARNOT}} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

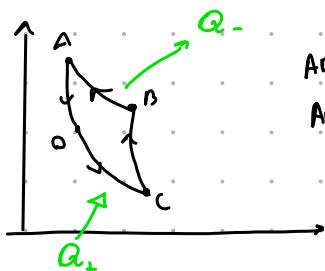


NENDIMENTO DI UN CICLO FRIGORIFERO ϵ
 ("efficienza d'affreddamento") (frigorifero ~ pompa di calore)

$$\epsilon = \frac{Q_+}{W} = \frac{Q_+}{Q_+ - Q_-}$$

per la prima legge $W + Q = 0 \Rightarrow W + Q_+ + Q_- = W + Q_+ - Q_- = 0 \Rightarrow W = Q_- - Q_+$

ESEMPIO (Ciclo di Carnot al contrario)



AD e BC adiabatiche
AB e CD isofrone

{ È effettivamente un ciclo
frigorifero

$$\epsilon_c = ? \Rightarrow \epsilon_c = \frac{Q_-}{Q_- - Q_+}$$

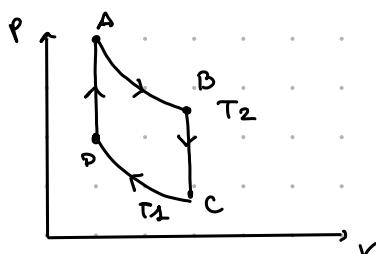
$$Q_+ = -W_{BC} = -\left(-\int_B^C pdV\right) = \int_B^C \frac{nRT_2}{V} dV \cdot nRT_2 \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) > 0$$

$$Q_- = -W_{BA} = -\left(-\int_B^A pdV\right) = \int_B^A \frac{nRT_1}{V} dV \cdot nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) < 0 \quad (V_A < V_B)$$

Vediamo che $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_B} \Leftrightarrow \frac{Q_+}{T_2} = -\frac{Q_-}{T_1}$

$$\Rightarrow \epsilon_c = \frac{Q_+}{Q_- - Q_+} = \frac{1}{\frac{T_2}{T_1} - 1} = \boxed{\frac{T_1}{T_2 - T_1} = \epsilon_{CF}} \quad (T_2 > T_1) \Rightarrow \epsilon_{CF} \in [0, +\infty]$$

S.ii) ESEMPIO (Ciclo di Stirling)



AB espansione isoterma
BC isocora a P inferiore
CD compressione isoterma
DA isocora fino a P_A

} macchina
termica
(motore)

Tutti i cicli ora, il lavoro effettuato sull'ambiente è positivo
(autonomia è negativo)

\hookrightarrow sono tutti motori quelli ora (autonomi frigoriferi)

Neendumero $\eta: \frac{|W|}{Q_+} = \frac{Q_+ + Q_-}{Q_+} \quad pV = nRT$

$$\boxed{0 < Q_{AB}} = -\left(-\int_A^B pdV\right) = nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

$$0 = \Delta E_{int} = Q_{AD} + W_{AB}$$

inverso

Se $W_{BC} = 0 \Rightarrow Q_{BC} = \Delta E_{int} = nC_V \Delta T < 0$

$$Q_{AB} = -\left(-\int_C^B p dV\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_C}\right) < 0$$

$$Q_{DA} = nC_V \Delta T > 0$$

$$\Rightarrow Q_+ = Q_{AB} + Q_{DA} \quad Q_- = Q_{BC} + Q_{CD}$$

$$\Rightarrow \eta_s = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \frac{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_1 \ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}{nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nC_V (T_2 - T_1)}$$

una sapendo che si semplifica e $V_B = V_C$ e $V_A = V_D$

$$\Rightarrow \frac{(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}{T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \frac{C_V}{R} (T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \left(\frac{1}{1 + \frac{C_V}{R T_2} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)} \right) \quad > 0 \Leftrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \eta_s < \eta_c$$

II LEGGE e ENTROPIA

6) INTRO FRECCIA DEL TEMPO

Senso del tempo

- oggetto che cade e si rompe
- inchiostro che si espande in acqua
- gas diversi che si uniscono
- temperatura del caffè che scende
- oggetto che rallenta e si ferma (frena per attrito)

si percepisce lo
scorrere del
tempo

Vediamo il caso dei due gas che si mescolano

Come si spiega microscopicamente

- Modello cinetico dei gas? Non contiene la freccia del tempo
- Né gravità, né elettromagnetismo hanno la freccia del tempo

d'interazione nucleare debole ha una freccia del tempo
(Scoperto nel 1964 nei kaoni)

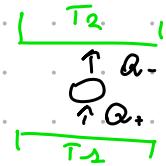
(NON SI SPIEGA, è un fenomeno macroscopico)

ASSUNZIONE MATERIALE: (universi e sistemi fisici erano + ordinati)

6.2) II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

CLAUSIUS = "Il frigorifero perfetto":
È impossibile realizzare una macchina
che in un solo ciclo abbia come unico risultato

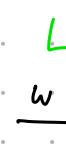
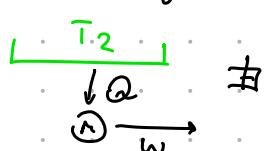
il trasferimento d' calore da un corpo a T_1 ad uno a temperatura $T_2 > T_1$



se c'era del lavoro si:

KELVIN "non motore perfetto"

È impossibile che una macchina termica in un ciclo abbia come unico risultato quello di produrre lavoro sull'ambiente scambiando Q con un' unica sorgente



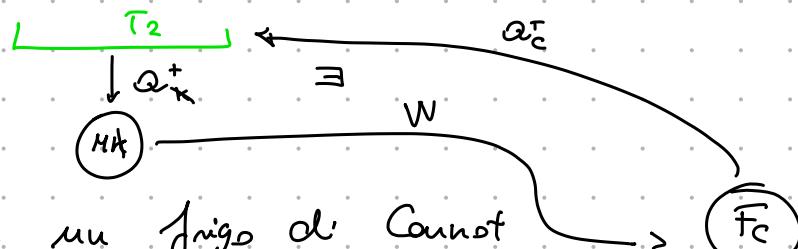
(per esempio
una resistenza
elett. in acqua)

$W \rightsquigarrow Q$ è possibile $Q \rightsquigarrow W$ non è possibile

Non si può trasformare lavoro disordinato interamente in lavoro ordinato

TEO Clausius \Leftrightarrow Kelvin

DIM ($C \Rightarrow K$) Se non vole $K \Rightarrow \exists \mathcal{A}$:



Ci attacco allora un frigo d' Carnot

Mostri ch $M_K \xrightarrow{w} F_C \nparallel$

$$\left. \begin{aligned} |Q_{\text{c}}| &= Q_c^+ + W \cdot Q_c^- + Q_{\text{K}}^+ \\ |W| &= Q_c^+ \\ \text{ciclo} \cdot \Delta E_{\text{int}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

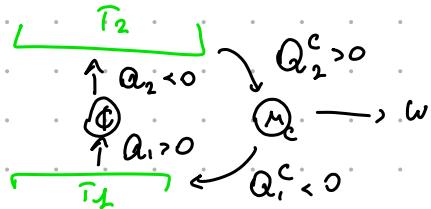
$\Rightarrow M_K \oplus F_C$ preleva Q_c^+ da $T_1 < T_2$
e cede $|Q| = |Q_c^+ - Q_{\text{K}}^+| = |Q_c^+|$
 $\Rightarrow M_K$



Mer 18/5/2024

6.2 Clausius \nexists frigo perfetto KELVW \nexists motore perfetto

$K \Rightarrow C$ Supponiamo $\exists \phi$



Prendiamo Carnot in modo che chi
 $Q_1^C = -Q_2$,
 $\Rightarrow M = \phi + M_C$ non scambia calore
con T_2 , ma realizza W su
ambiente $\Rightarrow K$

3° Enunciato (Planck) \nexists dispositivo il cui unico effetto su un ciclo sia
l'inversione di un processo irreversibile

DIM Processo irreversibile = espansione libera d'gas



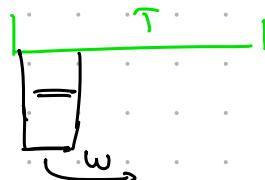
$$Q=0 \quad W=0 \quad \Delta T=0$$

Mostriamo Planck \leftrightarrow Kelvin
 $(P \Rightarrow K) \Leftrightarrow (K \Rightarrow P)$



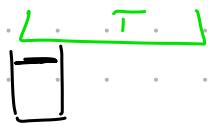
compressione di gas "liberò" e tornare gas allo
stadio precedente $\Rightarrow \nexists$

$$(K \Rightarrow P) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow K)$$



gas si espande esegue un lavoro
sull'ambiente $|W| = \int p dV > 0$
ma T costante

$K \Rightarrow \exists$ disposit. che invierte trasformat. irreversibile



\Rightarrow fatto everso con ambiente con
una sola sorgente $\Rightarrow K$

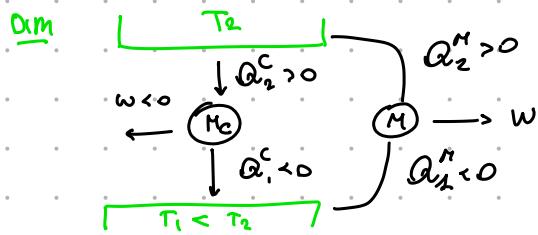
6.3 Teorema di Carnot

"Tutte le macchine termiche reversibili che scambiano calore

fra 2 sorgenti, hanno lo stesso rendimento η_n

η_i di ogni macchina irreversibile che opera fra le due stesse sorgenti
 soddisfa $\eta_i \leq \eta_n$

M_c cannot be reversible or not



Scelgiamo M_c : $W_c - W$

$$H_p \quad \eta_c = \frac{|W|}{Q_2^C}$$

$$\eta_n = \frac{|W|}{Q_2^H}$$

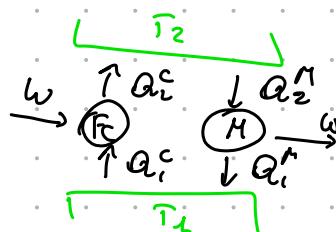
$$\text{Se } \eta_n > \eta_c \Rightarrow \frac{|W|}{Q_2^H} > \frac{|W|}{Q_2^C} \Rightarrow Q_2^C > Q_2^H \Rightarrow Q_2^C - Q_2^H > 0$$

$$\text{Con la prima legge } \Delta E_{int}^M = \Delta E_{int}^C = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_2^C + Q_1^C + W = 0 \\ Q_2^H + Q_1^H + W = 0 \end{cases} \Rightarrow Q_1^C + Q_1^H = Q_2^H + Q_1^H$$

$$\Rightarrow Q_2^H - Q_1^C = Q_2^C - Q_2^H \geq 0$$

Invertiamo M_c



$\bar{M} = F_c \oplus M$ scambia con T_1
 $\bar{Q} = Q_1^H - Q_1^C > 0$ per prima
non scambia W con ambiente

Scambia con T_2 $\bar{Q}_2 = Q_2^H - Q_2^C < 0$ per prima
cioè cede calore a T_2
 $\Rightarrow \bar{M}$ viola Clausius

$$\boxed{\eta_M < \eta_c} \quad \text{TM}$$

Se M è reversibile allora si ricomincia la dimostrazione da $\eta_c < \eta_M$
rifacendo la dimostraz. anche $\boxed{\eta_c < \eta_M}$

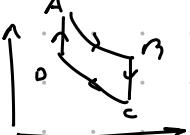
Mettendo tutto insieme ottengo $\eta_c = \eta_M$ per M reversibile

con A macchina da opera tra 2 sergenti vale $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$
con uguale \Leftrightarrow reversibile

$$\begin{aligned} \text{Diagram: } & \text{Top: } T_2, \text{ Bottom: } T_1, \text{ Left: } Q_2, \text{ Right: } W, \text{ Middle: } Q_1. \\ \eta_M &= \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{Geometria di Carnot} \\ \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} + \frac{T_1}{T_2} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \end{aligned}$$

C'è l'uguaglianza se e solo se reversibile

ESEMPIO (ciclo di Stirling)



isoterme
isocor
isoterme
isoco

$$\eta_{\text{stirling}} < \eta_c$$

Verifichiamo $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0$ Stirling

$$Q_1 = Q_{BC} + Q_{CD} = nC_v(T_1 - T_2) - nR\tau_1 \ln(\frac{V_2}{V_1})$$

$$Q_2 = Q_{AB} + Q_{DA} = n R T_2 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + n C_V (T_2 - T_1)$$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -nc_V\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) - \cancel{nR\ln\frac{V_2}{V_1}} + \cancel{nR\ln\frac{T_2}{T_1}} + nc_V\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$= nc_V\left(\frac{T_2 - T_1}{T_2} + \frac{T_1 - T_2}{T_1}\right) < 0$$

$$= nc_V\left(T_2 - T_1\right)\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) < 0$$

ED (Diuquoglaze. d. Celandus)

Sia M maculina cicca de scabie. Qi è 20 con n segmenti a temperatu T_1

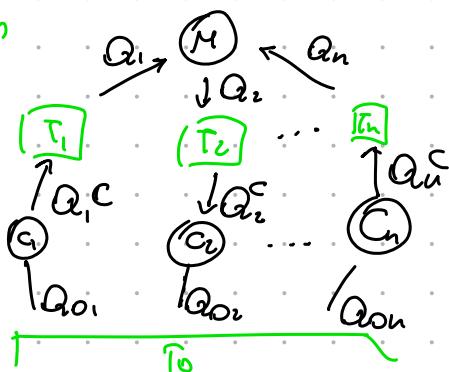
Aller $\sum \frac{q_i}{r_i} \leq 0$

$$\text{per } n \rightarrow +\infty \quad \frac{\partial \phi}{T} < 0 \quad \text{con } \phi = \sum_i c_i \ln d_i / T_i$$

Se neverdibile ci dona dei segni uguali:

NB T'è delle sovrapposizioni delle macchine

DIM



Accoppiano Ti con Macchie di Canott Ci chi
operca tra Ti e To

$$\text{Negolan} \cdot C_i \text{ tale che } Q_i^C + Q_i^S = 0$$

Definiamo $\bar{M} \in M(\oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_n \oplus C_1 \oplus \dots \oplus C_n)$

questa scacchi's $\bar{Q}_{\text{so}} = Q_{\text{so}} + \dots + Q_{\text{on}}$ con una sorgente To

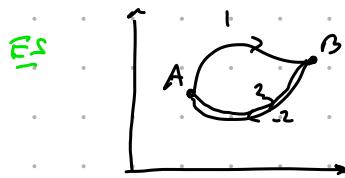
$$\text{Helmholtz} \Rightarrow w \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} I' \text{ legge} \\ Q+w=0 \end{cases} \Rightarrow Q_0 \leq 0$$

Dal teorema di Cauchy si ha $\frac{Q_{0i}}{T_0} + \frac{Q_i^c}{T_i} = 0$
 Usiamo che $Q_i^c + Q_i = 0$ quindi $\frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{Q_i}{T_i} \Rightarrow \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \sum_i \frac{Q_{0i}}{T_0} = \frac{\sum Q_{0i}}{T_0} = 0$

OSS Teo Clausius è equivalente a (enunciato Kelvin) II° principio

6.5 / ENTRPIA

Sia α e β trasformazioni reversibili fra stati A e B di un stesso sistema



Allora $\alpha \oplus \beta$ è un ciclo reversibile
 $\Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0$

$$\text{ma } 0 = \oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\alpha} + \int_B^A \frac{dQ}{T} \Big|_{-\beta} = \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\alpha} - \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\beta}$$

$$\Rightarrow \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\alpha} = \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\beta} \quad \text{e } \alpha, \beta \text{ reversibili da } A, B$$

$\int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}}$ dipende solo da A e B , cioè è una funzione di stato

Può definire $S(A) = \int_0^A \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}}$ ENTRPIA

è una funzione di stato \rightarrow Stato di riferimento arbitrario

$\Rightarrow S(A)$ è definita da una costante

$$[S] = J/n \quad \text{e} \quad S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}}$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \Big|_{\text{rev}}$$

differenziale esatto

OSS S è una quantità estensiva

Cioè è additiva (due sistemi termodynamici in stati A e B)

$$S_{\alpha+\beta}(A, B) = S_\alpha(A) + S_\beta(B)$$

$$\text{Infatti } E_{\text{int}, \alpha\beta}(A, B) = E_{\text{int}, \alpha}(A) + E_{\text{int}, \beta}(B)$$

$$\Rightarrow W_{\alpha+\beta}(O_\alpha \rightarrow A, O_\beta \rightarrow B) = W_\alpha(O_\alpha \rightarrow A) + W_\beta(O_\beta \rightarrow B)$$

$$\text{I legge } \Delta Q_{\alpha+\beta}(O_\alpha A, O_\beta B) = \Delta Q_\alpha(O_\alpha A) + \Delta Q_\beta(O_\beta B)$$

$$\Rightarrow S_x(A) = \frac{\Delta Q_x(O_x y)}{T} \quad \text{d'è additivo se } \alpha, \beta, \alpha+\beta \text{ sono}$$

$y \neq \alpha, \beta$

DETERMINATA
CONSTANTE
FUNZ. DI STATO
VARIABILE

6.6) Aumenti d'entropia

Oss A, B stati d'un sistema

$$S(B) - S(A) > \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{inversibile}}$$

DIM Sia $A \rightarrow B$ reversibile e $B \rightarrow A$ irreversibile



$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0 \text{ per Clausius}$$

$$0 > \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{REVER.}} + \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{IRREV.}} = S(A) - S(B) - \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{IRREV.}}$$

$$\Leftrightarrow S(B) - S(A) > \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \Big|_{\text{IRREV.}} \quad \square$$

OSS $\star \Leftrightarrow$ Thm. Clausius \Leftrightarrow II° principio

Nota di caccio ΔS : obiettivo: trovare trasformazioni reversibili equivalenti (all'irreversibile), nel senso che mi porta dallo stesso stato in allo stesso stato f (perché f è funzione di stato)

Applicazione di \star a sistema isolato (cioè globalmente $\delta Q=0$)

$$S(B) - S(A) \geq 0$$

"d'entropia d'un sistema isolato non diminuisce mai"

\Leftrightarrow II° principio termodynamico

"localmente" S può anche diminuire

ESEMPIO lungo una delle 2 isoterme della macchina di Carnot

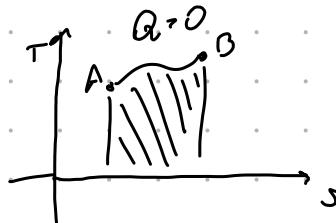
$$\Delta S_{\text{macca}} = 0 \text{ ma } \Delta S_{\text{univ.}} = \Delta S_{\text{macca}} + \Delta S_{\text{ambiente}} \xrightarrow{\text{adeguante}} \geq 0$$

6.7) DIAGRAMMI T-S

S si aggiunge a funzioni di stato come P, V, T

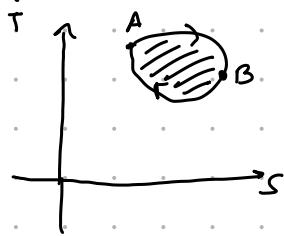
(può perfino uscire come variabile termodynamica)

Cos'è il piano T-S



$$\delta Q = T dS \Rightarrow \int_A^B T dS = Q \text{ calore scambiato lungo la trasformazione}$$

Se prendiamo un ciclo



$$\int_A^B T ds = Q_{\text{ASSORBITO}}$$

(<0)

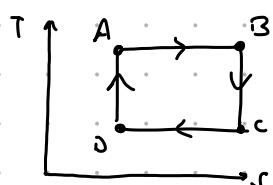
$$\text{Area} = Q_{\text{ASS}} + Q_{\text{CEDUTO}}$$

$$= Q_{AB} + Q_{BA} = Q_{\text{CICLO}} = |W|$$

ma se è un ciclo $\Delta E_{\text{int}} = 0 \xrightarrow{\text{legge}} W_{\text{Ciclo}} + Q_{\text{cav}} = 0$

$$\text{rendimento } \eta = \frac{|W|}{Q_{\text{ASS}}} = \frac{\text{Area cinterna}}{\text{Area sotto AB}}$$

ESEMPIO Ciclo di Carnot



AB = espansione isotermica
BC = espansione adiabatica

$$\eta_{\text{Carnot}} = ?$$

$$Q_{\text{ASS}} = \text{Area sotto AB} = T_2 (\delta_2 - \delta_1)$$

$$Q_{\text{CED}} = T_1 (\delta_1 - \delta_2) = -T_1 (\delta_2 - \delta_1)$$

$$Q = |W| = Q_{\text{ASS}} - Q_{\text{CED}} = (T_2 - T_1)(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{|W|}{Q_{\text{ASS}}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

6.8) Calcolo di ΔS

- ISO TERMA NEUENSIBILE : $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{\Delta E_{\text{int}} - W}{T}$
Se $E_{\text{int}} = E_{\text{int}}(T)$ (pe! gas ideale $\Delta E_{\text{int}} = 0$) $\Rightarrow \Delta S_{\text{gas ideale}} = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

- ADIABATICA REVERSIBILE : $\Delta S = 0$ \rightarrow capacità termica

- ISOCORA NEUENSIBILE $\Delta S = \int_i^f \frac{dq}{T} = \int_i^f \frac{nC_V(T)dt}{T} = nC_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$

se C_V è costante fra i e f

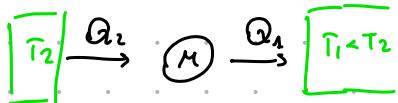
- ISOBARICA NEUENSIBILE $\Delta S = \int_i^f \frac{nC_P(T)dt}{T} = nC_P \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$ (se C_P costante)

- MACCHINA (SENZA AMBIENTE) OU CAVO : $\Delta S = 0$

- SORGENTI $\Delta S_S = \int_A^B \frac{dq}{T_S} = \frac{Q}{T_S} \xrightarrow{\text{se } Q > 0 \text{ la macchina assorbe calore}} \text{ se } Q < 0 \text{ la macchina cede calore}$

- "AMBIENTE" del ciclo fra 2 sorgenti T_1 e T_2

$$\Delta S_{AMB} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{|Q_1|}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2}$$



Se $M = 1$ (cioè se $|T_2|/|T_1| < 1$), allora $|Q_1| = |Q_2| \equiv Q$
da cui $\Delta S = Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) > 0$

- DUE CORPI A CONTRARIO TERMICO

$M_{A,B}$, calore specifico $C_{A,B}$, $T_{iniz.}$ e T_{AB}
 $\Delta S_A = ?$ $\Delta S_B = ?$ $\Delta S_{A+B} \geq 0?$

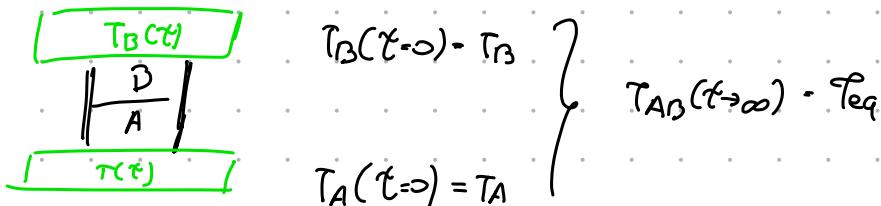
$$\Delta S_{A,B} = \int_{T_{AB}}^{T_{eq}} \frac{dQ}{T} = M_{A,B} C_{A,B} \int_{T_{AB}}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = M_{A,B} C_{A,B} \ln \frac{T_{eq}}{T_{AB}}$$

$$T_{eq} = ? \quad Q_A + Q_B = 0 = C_A M_A (T_{eq} - T_A) + C_B M_B (T_{eq} - T_B) = 0 \\ \Rightarrow T_{eq} = \frac{(C_A M_A T_A + C_B M_B T_B)}{(C_A M_A + C_B M_B)}$$

Con calcoli tonica

$$\Delta S_{A+B} = \Delta S_A + \Delta S_B \quad / \text{ Consideriamo } M_A = M_B = M \text{ e } C_A = C_B = C \\ \Rightarrow T_{eq} = \frac{T_A + T_B}{2} \\ = M_C \left[\ln \left(\frac{T_A + T_B}{2T_A} \right) + \ln \left(\frac{T_A + T_B}{2T_B} \right) \right] = M_C \ln \left[\left(\frac{T_A + T_B}{2} \right)^2 \frac{1}{T_A T_B} \right] \geq 0 \text{ se } A \neq B$$

- REVERSIBILITÀ EQUIVALENTE



$$\Delta S_{universo} = \Delta S_A + \Delta S_B + \Delta S_{sorgenti} \underset{\approx 0}{\approx} 0 \quad \text{REVERSIBILE}$$

- Transizione di fase

→ avvengono a T costante T_F calore fornito da
→ Q necessario a completare $T.F.$ è $Q = C_M$ transizione

$$\Delta S = \frac{C_M}{T_F}$$

- Riscaldamento per attrito

$M \rightarrow$ M si fuma per attrito da vel 0 a vel v

Hyp: frenata "rapida"

cioè: no scambi di calore con ambiente durante la frenata

$$\Delta S = \int_{\text{frenata}} \frac{\partial Q}{\partial T} dT = 0 \quad \text{e} \quad T \rightarrow \infty$$

$\Delta S_M = \Delta S_A = 0$ perché gli stati i e f di MCA sono gli stessi.

i) Non ho equilibrio meccanico e dissipazione $W = \frac{1}{2} M v^2$

Frenata rapida \Rightarrow ambiente non ne ricevute

$$\Delta E_{\text{int}}(M+A) = |W| = \frac{1}{2} m v^2$$

ii) Eq meccanico

Q da A ad M a ambiente

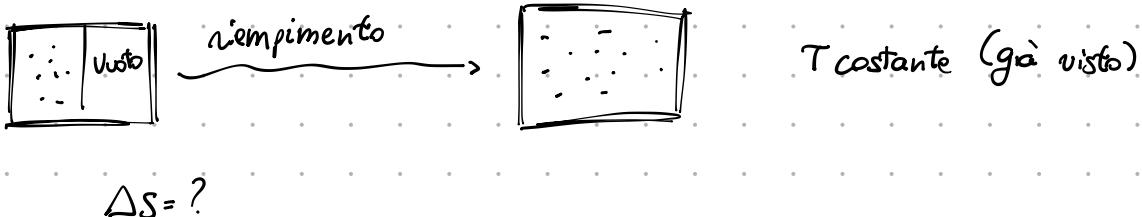
$$W=0$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Delta S_{AMB} = \frac{Q}{T_{\text{amb}}} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{T_{\text{amb}}} = \frac{\frac{1}{2} m v^2}{T_{\text{amb}}} > 0$$

• ΔS in gas

Esplorazione Adiabatica di gas



Transf. reversibile equivalente

Isotermia



$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} = nR \ln 2 \geq 0$$

• ΔS inversa della reversibile equivalente?

$$\Delta S_{\text{uni}} = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{sorgente}}$$

$$\text{Sistema isolato } (\Delta T = 0) \quad \Delta S_{\text{sorgente}} = \frac{Q_s}{T} = - \frac{Q_{\text{gas}}}{T}$$

$$\Rightarrow - \frac{W}{T} = - \frac{1}{T} \int pdV = - nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$\text{Recap } V_f = 2V_i$$

$$\Delta S = nR \ln 2$$

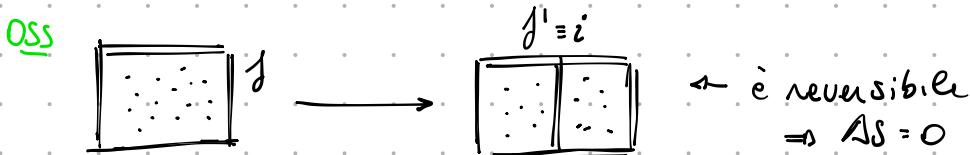
Ven / 17/5/2024

- Due gas diversi che si mescolano



S è una quantità estensiva $\Rightarrow \Delta S_{A+B} = \Delta S_A + \Delta S_B = 2nR \ln 2$

Se il gas è lo stesso, quanto vale $\Delta S = ?$



$H_2 \parallel H_2 \xrightleftharpoons[\text{separati}]{} H_2 + H_2$ è reversibile $\Rightarrow \boxed{\Delta S = 0}$ ma le molecole sono diverse

- Gas ideale $(V_A, P_A, T_A) \rightarrow (V_B, P_B, T_B)$, $\Delta S = ?$

$$\Delta S = \int_A^B dS = \int_A^B \frac{dQ}{T} \stackrel{\text{ILLEGGE}}{=} \int_A^B -\frac{dW + dE_{\text{int}}}{T} = \int_A^B \frac{pdV}{T} + \int_A^B \frac{nC_V dT}{T}$$

Sappendo che $pV = nRT$ ottengo che:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_A^B \frac{nRdv}{v} + nC_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 0 \\ \Rightarrow \boxed{\Delta S = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nC_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{è equivalente} \\ \text{a fare prima} \\ \text{un'isocora e poi} \\ \text{un'isoterna} \end{array} \right\}$$

(Esempio di trasformazione reversibile equivalente

$$(V_A, T_A) \rightarrow (V_B, T_A) \rightarrow (V_B, T_B)$$

- CASO PANCOLANE TRASFORMAZIONE ADIABATICA $A \rightarrow B$

$$\Delta S = 0 : \Delta Q$$

Sappiamo che adiabatica per gas ideale

$$PV^r = \text{cost} \quad \text{e} \quad TV^{\frac{r-1}{r}} = \text{cost} \quad \text{con} \quad r = \frac{C_P}{C_V}$$

$$C_P = C_V + R \Rightarrow R = C_P - C_V = -C_V(1-r)$$

$$\Delta S = nC_V \left((r-1) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \right) = nC_V \ln \frac{V_B^{r-1} T_B}{V_A^{r-1} T_A} = 0$$

RECAP

- CLAUSIUS \nexists frigo perfetto $1 < \frac{E_{\text{CANNOT}}}{E_c} < +\infty$
dove $E = |W|$ e $E_c = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$
KELVIN \nexists motore perfetto $0 \leq \eta \leq \eta_c < 1$ ($\eta = \frac{|W|}{Q_2}$ $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$)

"PLANCK" \nexists dispositivo il cui unico risultato sia di invertire un processo irreversibile

ENTROPIA A sistema isolato, $\Delta S \geq 0$

ESERCIZIO Motore che lavora fra 2 sorgenti a $T_1 = 0^\circ\text{C}$ e $T_2 = 100^\circ\text{C}$
che produce lavoro $|W|$ sull'ambiente di 120 J circa con $\eta_x = 75\%$
Può esistere questo motore?

SOL Valgono il primo o il secondo principio? (Vediamo il secondo)

KELVIN $\eta_{\text{CANNOT}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273}{373} = 0,27$
questa macchina non può esistere ($\eta_x > \eta_c$)

ENTROPIA $\Delta S = \Delta S_x + \Delta S_1 + \Delta S_2 \geq 0$?
 $\Delta S_x = S_{x_f} - S_{x_i} = 0$ (sul ciclo abbiamo $i=f$)

$$\Delta S_1 = \frac{|Q_1|}{T_1} \quad \Delta S_2 = \frac{-|Q_2|}{T_2}$$

ma abbiamo il rendimento $\eta = \frac{|W|}{Q_2} \Rightarrow Q_2 = \frac{|W|}{\eta} = 160\text{ J}$
inoltre su un ciclo $\Delta E = 0$
 $\Rightarrow Q + W = 0 \Rightarrow |Q_2| - |Q_1| - |W| = 0$
 $\Rightarrow Q_1 = Q_2 - W = 160 - 120 = 40\text{ J}$
 $\Rightarrow \Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{|Q_1|}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} = -0,28 \leq 0$ impossibile
viene violato il secondo principio

6.11 Entropia dal punto di vista microscopico

È stato termodinamico macroscopico $\exists g \gg 1$ stati macro

Esempio gas ideale a T

stati microscopici possibili = tutti quelli che

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

ASSUNZIONE fondamentale

"In un sistema isolato, tutti gli stati microscopici ACCESSIBILI sono equiprobabili"

ISOTERMI: N costituenti = costante, $E = \text{costante}$

ACCESSIBILI: Stati consentiti da vincoli termodinamici macroscopiche

e dalle scale temporali di interesse (rilevanti)

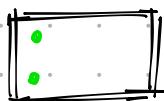
CONSEGUENZA

$$\frac{\text{Prob}(A)}{\text{Prob}(B)} = \frac{g_A}{g_B}$$

ES da teoria cinetica dei gas con N molecole

$$g(v < \bar{v}) = \left(\int_0^{\bar{v}} P_{MB}(v) dv \right) N = g_A$$

ESEMPIO Espansione libera di un gas. Supponiamo $N=2$ (macroscopico a due o a sei)



v



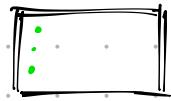
$g=2$



$g=1$

$$(A \text{ adx})_v (B \text{ adx})$$

$N=3$



$g=1$



$g=3$



$g=3$



$g=1$

poniamo variabile macroscopica $\alpha = \frac{p_{\text{tot}}}{p_{\text{tot}}} = \frac{M m v}{N m v} = M/N$: $M \leq N$

$\alpha=1$

$\alpha=\frac{2}{3}$

$\alpha=\frac{1}{3}$

$\alpha=0$

molecole a sx

$$g_M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \binom{N}{M}$$

$$P(\alpha=1) \begin{cases} N=2 & \frac{g_1}{g_1+g_2+g_3} = \frac{1}{3} \\ N=3 & \frac{g_1}{g_1+g_2+g_3+g_4} = \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\dots P(\alpha=1) = \frac{g_1}{\sum_{i=0}^{N-1} g_i} < \frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{1}{\binom{N}{2}! \binom{N}{1}!} \right)$$

per Shirley, sappiamo che $N! \rightarrow e^{N(\ln N - 1)}$

$$\text{Andando a sott. } g_2 = \frac{e^{N(\ln N - 1)}}{\left(e^{\frac{N(\ln \frac{N}{2} - 1)}{2}} \right)^2} = \frac{e^{N \ln N} e^{-N}}{e^{N \ln N - N \ln 2} e^{-N}} = \frac{e^{N \ln N}}{e^{N \ln N} e^{N \ln 2}} = \boxed{e^{-N \ln 2}}$$

$$P(\alpha=1) < \frac{g_1}{g_2} = e^{-N \ln 2} \approx 10^{-93 N}$$

ESEMPIO

$$P(\alpha=1) \begin{cases} 10^{-30} & \text{per } N=600 \\ 10^{-300} & \text{per } N=1000 \\ 10^{-93 \cdot 10^{24}} & \text{per } N=10^{24} \end{cases}$$

Che cosa significa tutto questo?

$$\text{tempo + breve possibile } t_{\text{peak}} = \sqrt{\frac{G \hbar}{C^5}} = 5 \cdot 10^{-64} \text{ s}$$

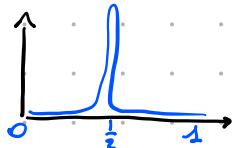
$$T_{universo} = 14 \cdot 10^9 \text{ anni} = 5 \cdot 10^{17} \text{ secondi}$$

Se gas cambia microstati ogni: t_{plast}

Allora l'universo nella sua vita scorsa, una

$$\frac{T_{\text{uni}}}{t_{\text{plast}}} = 10^{61} \text{ microstati}$$

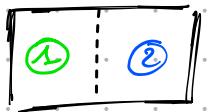
Stato + probabile $\alpha = \frac{P_{\text{st}}}{P_{\text{tot}}} = \frac{1}{2} \pm \delta\alpha$ con $\delta\alpha \ll 1$



Sistema fisico vuole andare verso stato i che massimizza g_i :

$$\rightarrow S_i = J(g_i) \text{ crescente}$$

ESEMPIO



prima del contatto

$$N_{1,2}, N = N_1 + N_2$$

$$E_{12}, E = E_1 + E_2$$

Numero stati accessibili:

$$g_{1,2}(N_{1,2}, E_{12})$$

$$g(N, E) = g_1(N_1, E_1) \cdot g_2(N_2, E_2)$$

$$\text{CONTATTO TERMICO} \Rightarrow g(N, E) = \sum_{0 < E_1, E_2} g_1(N_1, E_1) g_2(N_2, E_2) \propto P(N, E)$$

$$\Rightarrow \text{Massimo di probabilità?} \Rightarrow \frac{\partial P(N, E)}{\partial E_1} = 0 = \frac{\partial g_1}{\partial E_1} \Big|_{N_1, N_2 \text{ cost}} g_2 + g_1 \frac{\partial g_2}{\partial E_2} \Big|_{N_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial g_1}{g_2 \partial E_1} + \frac{\partial g_2}{g_1 \partial E_2} \Big|_{N_1, N_2 \text{ cost}} = 0 \quad \text{ma} \quad \frac{\partial g_1}{\partial E_1} = \partial \ln g_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln g_1 g_2}{\partial E_1} \Big|_{N_1, N_2 \text{ cost}} = 0 \quad \text{cioè tutti i sistemi fisici massimizzano: } \ln g_1 = \ln g_2$$

$$\Rightarrow \boxed{S = k_B \ln g + C}$$

$$\text{OSS} \quad S_{1+2} = k_B \ln g_1 g_2 + C$$

$$= k_B \ln g_1 + k_B \ln g_2 + C$$

$$\therefore \delta_1 + \delta_2 + C \quad (\Rightarrow C=0)$$

Additiva che trasforma prodotti in somme

$$\begin{aligned} \text{ESEMPIO} \quad g_i &= 1 & g_j &= \frac{N!}{(\frac{N}{2})! (\frac{N}{2})!} \rightarrow e^{N \ln 2} \\ &\Rightarrow S_i = 0 & S_j &= k_B N \ln 2 \end{aligned}$$

III principio "Il sistema all' equilibrio termodynamico $S \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$ "

conosciamo da start $T=0$ è impossibile da realizzare

"DIM" Il calore che puoi estrarre $Q = \int_0^T T dS \rightarrow 0 \quad \square$

$T_{\text{rad cosmico}} = 2.7 \text{ K}$ $T \approx 40 \text{ pk} = 4 \cdot 10^{11} \text{ K}$ t. più bassa mai fatta in lab