Insegnamento di Calcolo Numerico

Corso di Studi in Matematica (Laurea Triennale)

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Prove svolte con traccia dello svolgimento

V.Simoncini

versione del 27 dicembre 2022.

Le prove sono ordinate in ordine cronologico inverso (la più recente viene per prima). La risoluzione di alcuni esercizi recenti può essere adattata da quella di esercizi svolti in precedenza.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 07 novembre 2022
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2021-2022

1. Dati i punti $x_0 = 0, x_1 = \pi/4$ e $x_2 = \pi/2$, e la funzione $f(x) = \sin(x)^2 \cos(x)$,
i) (3 punti) Determina il polinomio, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
i) (3 punti) Determina il polinomio, nella forma di Newton, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
ii) (2 punti) Dai una maggiorazione dell'errore di approssimazione sull'intero intervallo $[0, \pi/2]$.

2. È data l'equazione non lineare $f(x) = 0$.
i) (3 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton e spiega i suoi criteri d'arresto.
ii) (2 punti) proponi un variante del metodo, nel caso non sia possibile conoscere esplicitamente la derivata di f.
iii) (4 punti) Analizza al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza delle successioni $\{x_i\}$ costruite mediante il metodo di Newton per le seguenti funzioni:
$$f_1(x) = x^{2/3}, \qquad f_2(x) = |x|^{1/3}.$$
(per ogni funzione, valuta se converge alla radice cercata)

3. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & M \\ & A_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 10 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 11 \end{bmatrix},$$
e la matrice M è diagonale ed ha valori nel cerchio di centro l'origine e raggio 1/4.
i) (3 punti) Dimostra che A ha autovalori reali e positivi, senza determinarne esplicitamente gli autovalori.
ii) (4 punti) Scrivi l'algoritmo di Jacobi "a blocchi" per il sistema dato, considerando lo splitting a blocchi, con i blocchi corrispondenti ai blocchi diagonali di A. Valuta se tale iterazione è convergente, motivando la risposta.

4. È dato il problema $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Supponi che A abbia la forma $A = [W_1; W_2] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonale e non singolare.
i) (5 punti) Proponi una procedura per determinare x e che tenga conto della struttura di A.
ii) (3 punti) Valutane il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

i) La matrice A è triangolare a blocchi, quindi vale $\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(A_1) \cup \mathrm{spec}(A_2)$. Siccome A_1 e A_2 sono entrambe simmetriche, gli autovalori sono reali. I dischi di Gerschgorin (da verificare) assicurano che gli autovalori di A_1 e A_2 sono a destra dell'origine.

ii) Nell'algoritmo di Jacobi è sufficiente sostituire $D = \mathrm{diag}(A)$ con $D = \mathrm{blkdiag}(A_1, A_2)$.

La matrice di iterazione è $B = -[0, A_1^{-1}M; 0, 0]$ che ha tutti autovalori zero. In particolare, la convergenza è assicurata in quanto alla seconda iterazione si ha $B^2 = 0$.

ESERCIZIO 4. Se $m - n \ll n$ cosicchè W_2 è larga (molte più colonne che righe, si può per esempio usare l'equazione normale, che si scrive come $(W_1^T W_2 + W_2^T W_2)x = [W_1^T, W_2^T]b$. La matrice dei coefficienti è una m. diagonale pi˘ una matrice di rango basso, per cui si può procedere con la formula di Sherman-Morrison.

In alternativa, si può azzerare ogni colonna sotto alla diagonale di W_1, partendo dalla prima colonna, usando le rotazioni di Givens consecutive fino alla $n + 1$ riga, e poi coinvolgendo, per esempio, la prima riga.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 2 settembre 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il sistema lineare $(A + \alpha_1 I)(A + \alpha_2 I)x = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonale, simmetrica definita positiva ed $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$.
   i) (6 punti) Descrivi un'algoritmo per la risoluzione del sistema con costo computazionale $O(n)$, che tenga conto della struttura del problema.
   ii) (3 punti) Determina una stima per l'intervallo spettrale di $(A + \alpha_1 I)(A + \alpha_2 I)$ in funzione degli autovalori di A.

2. Sia $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ di rango massimo con $n > m$ e $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonale non singolare.
   i) (5 punti) Proponi un algoritmo per stimare $\|B^T D^{-1} B\|$ dove $\|\cdot\|$ è la norma matriciale indotta dalla norma vettoriale euclidea, senza formare esplicitamente $B^T D^{-1} B$.
   ii) (2 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale ed i criteri d'arresto.

3. Sono date le funzioni $f(x) = x \exp(x/2)$ e $g(x) = \frac{1}{1+2x^2}$, con $x \in [0, 1]$.
   i) (2 punti) Dimostra che esiste ed è unico il punto di intersezione di ascissa x^* dei grafici di f e g in $[0, 1]$.
   ii) (6 punti) Proponi un algoritmo, avente convergenza almeno lineare, che approssimi x^*. Descrivine i criteri d'arresto e le ipotesi che assicurino la convergenza.

4. Considera la formula di quadratura del tipo

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha f(\frac{1}{3}) + \beta f(\frac{2}{3}) + f(x_1).$$

   i) (5 punti) Determina α, β, x_1 in modo che il grado di precisione sia $k = 2$.
   ii) (3 punti) Per $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ confronta l'errore della formula precedente con quello ottenuto con la formula di Simpson.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

È possibile procedere in due modi. nel primo modo, si risolvono due sistemi tridiagonali a cascata: $(A + \alpha_1 I)y = b$ e poi $(A + \alpha_2 I)x = y$. Ognuno di questi può essere risolto con l'algoritmo di Thomas (con coefficienti da ricalcolare, perchè cambia la diagonale). [descrizione da inserire] Il costo computazionale, da descrivere in almeno uno dei due casi, è di 2 volte $8n$.

ESERCIZIO 2.

Siccome $B^T D^{-1} B$ è sdp, si ha $\|B^T D^{-1} B\| = \lambda_{\max}(B^T D^{-1} B)$. (verificare), per cui è possibile usare il metodo delle potenze, dove il prodotto viene svolto con $y = B^T(D^{-1}(Bx))$, con l'operazione con D fatta elemento per elemento.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 2 settembre 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la funzione $f(x) = \sin(x)\exp(-x)$, di cui si vuole trovare il punto critico nell'intervallo $[0,\pi]$.
   i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di bisezione per determinare il punto critico, senza calcolare derivate in modo esplicito.
   ii) (3 punti) Individua un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione e stima il numero di iterazioni sufficienti per ottenere un errore di 10^{-2}.
   iii) (2 punti) Descrivi come modificare l'algoritmo al punto (i) per approssimare il punto di flesso di f in $[0,\pi]$.

2. Sia $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ la funzione Gamma.
   È noto che $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3) = 2$ e $\Gamma(4) = 3!$ Allora
   i) (4 punti) Ottieni una stima per $\Gamma(3.2)$ mediante interpolazione usando la formula di Newton;
   ii) (3 punti) Sapendo che $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, partendo dal punto ii) costruisci il polinomio interpolante anche questo valore, ed ottieni una nuova stima per $\Gamma(3.2)$.

3. Sono date le funzioni $f(x) = x\exp(x/2)$ e $g(x) = \frac{1}{1+2x^2}$, con $x \in [0,1]$.
   i) (2 punti) Dimostra che esiste ed è unico il punto di intersezione di ascissa x^* dei grafici di f e g in $[0,1]$.
   ii) (6 punti) Proponi un algoritmo, avente convergenza almeno lineare, che approssimi x^*. Descrivine i criteri d'arresto e le ipotesi che assicurino la convergenza.

4. Considera la formula di quadratura del tipo

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha f(\frac{1}{3}) + \beta f(\frac{2}{3}) + f(x_1).$$

   i) (5 punti) Determina α, β, x_1 in modo che il grado di precisione sia $k = 2$.
   ii) (3 punti) Per $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ confronta l'errore della formula precedente con quello ottenuto con la formula di Simpson.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 19 luglio 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice A simmetrica definita positiva e a banda, con banda β.
   i) (5 punti) Descrivi l'algoritmo per determinare la fattorizzazione LU di A che tenga conto della struttura
   ii) (5 punti) Tenendo conto del punto (i), descrivi l'algoritmo per l'approssimazione dell'autovalore più vicino all'origine, e relativo autovettore, della matrice $\widehat{A} = A + uu^T$, con $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$. Discuti in dettaglio il costo computazionale.

2. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva.
   i) (2 punti) Determina la matrice E di norma minima tale che $A+E$ sia singolare (per una norma matriciale a piacere).
   ii) (2 punti) Prendendo spunto da (i), proponi una matrice E_1 tale che $A + E_1$ abbia rango $n - 2$.
   iii) (2 punti) Sia E come in (i). Determina stime dal basso e dall'alto per $\mathrm{cond}(A+\varepsilon E)$, con $\varepsilon \in (0, 1)$, che dipendano da ε e dagli autovalori di A.

3. Sono date le coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 3$ con

x_i	$1/4\pi$	$1/2\pi$	$3/4\pi$	π
y_i	0.55	1.57	1.66	0

   corrispondenti ai valori di una funzione f di cui vogliamo approssimare l'integrale sull'intervallo $[x_0, x_3]$.
   i) (3 punti) Scrivi la formula di Newton-Cotes di grado $N = 3$ associata ai dati.
   ii) (5 punti) Supponendo che il valore di y_N non sia noto, ma sia noto $\widehat{y}_N = y_N + \varepsilon$, studia come varia l'approssimazione dell'integrale in termini di ε.

4. È data l'equazione $x = e^{-x} \cos(x)$.
   i) (3 punti) Giustifica l'esistenza e l'unicità dello zero $x^\star$ dell'equazione.
   ii) (5 punti) Studia la convergenza (e l'ordine di convergenza) dell'iterazione $x_{k+1} = e^{-x_k} \cos x_k$, identificando un possibile intervallo chiuso e limitato in cui si abbia convergenza globale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ii) Si usa il metodo delle potenze inverse. Ad ogni iterazione, il sistema con $\widehat{A}$ si risolve mediante la formula di Sherman-Morrison, avendo in precedenza già fattorizzato A (all'esterno del ciclo).

ESERCIZIO 2.

Usiamo la norma indotta euclidea. i) per il teorema della distanza dalla singolarità, $\|E\| = 1/\|A^{-1}\| = \lambda_{\min}(A)$ e $E = -x\lambda_{\min}x^T$, dove x è l'autovettore corrispondente a $\lambda_{\min}$ (da verificare). Una alternativa può essere $E = -\lambda_{\min}I$.

ii) Si scrive $A = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i x_i^T$ dove (λ_i, x_i) sono le autocoppie di A. Basta prendere, per esempio, $E_1 = -x_1\lambda_1 x_1^T - x_2\lambda_2 x_2^T$.

iii) Usiamo $E = -x\lambda_{\min}x^T$ (togliamo la dipenda da A nella notazione). Il quoziente di Rayleigh di una matrice è contenuto nell'intervallo spettrale della matrice stessa. In questo caso, siccome $E \leq 0$, il quoziente di Rayleigh soddisfa

$$x^T(A + \varepsilon E)x = x^T Ax + \varepsilon x^T Ex \leq \lambda_{\max}x^T x$$

e

$$x^T(A + \varepsilon E)x = x^T Ax + \varepsilon x^T Ex \geq \lambda_{\min}x^T x - \varepsilon\lambda_{\min}x^T x$$

Quindi $\mathrm{cond}(A + \varepsilon E) \leq \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min} - \varepsilon\lambda_{\min}}$.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 19 luglio 2022
Modulo II - Laurea Triennale in Matematica

1. È Data la funzione $f(x) = (1 - x^2)^{3/2}$, $x \in [-1, 1]$.
i) (2 punti) Determina il polinomio interpolante di grado $n = 2$ con nodi equispaziati.
ii) (2 punti) Determina il polinomio interpolante di grado $n = 2$ con nodi di Chebyshev.
iii) (4 punti) Per $n \geq 2$, analizza una stima dell'errore e la convergenza per $n \to \infty$ nei due casi considerati sopra.

2. i) (4 punti) Scrivi l'algoritmo delle secanti per approssimare uno zero $x^\star$ di $f(x) = 0$, descrivendo in dettaglio come ottenere i dati iniziali, ed il costo computazionale.
ii) (4 punti) Confronta il costo computazionale dell'algoritmo in (i) con quello del metodo delle corde. Quest'ultimo metodo può convergere in un numero di iterazioni confrontabile con quello del metodo delle secanti (aiutati eventualmente con un esempio)?

3. Sono date le coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 3$ con

x_i	$1/4\pi$	$1/2\pi$	$3/4\pi$	π
y_i	0.55	1.57	1.66	0

corrispondenti ai valori di una funzione f di cui vogliamo approssimare l'integrale sull'intervallo $[x_0, x_3]$.
i) (3 punti) Scrivi la formula di Newton-Cotes di grado $N = 3$ associata ai dati.
ii) (5 punti) Supponendo che il valore di y_N non sia noto, ma sia noto $\widehat{y}_N = y_N + \varepsilon$, studia come varia l'approssimazione dell'integrale in termini di ε.

4. È data l'equazione $x = e^{-x}\cos(x)$.
i) (3 punti) Giustifica l'esistenza e l'unicità dello zero $x^\star$ dell'equazione.
ii) (5 punti) Studia la convergenza (e l'ordine di convergenza) dell'iterazione $x_{k+1} = e^{-x_k}\cos x_k$, identificando un possibile intervallo chiuso e limitato in cui si abbia convergenza globale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 04 luglio 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice non singolare

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & I \\ 0 & D_2 & I \\ B_1 & B_2 & C \end{bmatrix},$$

con tutti blocchi $n \times n$ non singolari, D_1, D_2 diagonali e I la matrice identità.
i) (4 punti) Determina una decomposizione LU a blocchi di A, con L triangolare inferiore a blocchi ed U triangolare superiore a blocchi, che tenga conto della struttura di $\mathcal{A}$. Evidenzia eventuali ulteriori ipotesi per l'esistenza di tale decomposizione.
ii) (4 punti) Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare $\mathcal{A}x = b$ che tenga conto della fattorizzazione in (i). Discutine il costo computazionale.

2. È data la matrice simmetrica non singolare

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

i) (3 punti) Stima dall'alto cond(A) senza calcolare gli autovalori;
ii) (5 punti) Proponi una procedura per approssimare l'autovalore di A più vicino all'origine, che usi come parametro di accelerazione o $\sigma = 0$ oppure σ uguale ad un valore opportunamente scelto. Confronta la velocità di convergenza nei due casi.

3. i) È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x\pi)e^x & x \in [-1, 0] \\ -x^3 - 3x^2 + 2x & x \in [0, 2] \end{cases}$$

i) (5 punti) Proponi una formula di quadratura composita con grado di esattezza uguale a 2 per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-1}^{2} f(x)dx$;
ii) (3 punti) stima l'errore nell'intervallo $[-1, 2]$.

4.

5. È data la funzione $f(x) = e^{-x} - x^2$, con zero $x^* \approx 0.7$.
i) (3 punti) Determina un intervallo chiuso in cui l'iterazione di punto fisso

$$x_{k+1} = e^{-\frac{x_k}{2}}$$

converga, e valutane l'ordine di convergenza.
ii) (5 punti) Proponi una iterazione di punto fisso per la stessa funzione f, che abbia ordine di convergenza 2, e studia l'esistenza di un intervallo chiuso in cui si abbia convergenza per ogni iterata iniziale in tale intervallo.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Si costruisce la seguente fattorizzazione (per confronto)

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ B_1 D_1^{-1} & B_2 D_2^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & 0 & I \\ 0 & D_2 & I \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}, \qquad S = C - B_1 D_1^{-1} - B_2 D_2^{-1}.$$

ii) Sono tutte sostituzioni, tranne il sistema con S, che richiede l'assemblamento di S e la sua fattorizzazione LU (da descrivere, supponendo che esista). La non singolarità di S segue da quella di $\mathcal{A}$.

ESERCIZIO 2.

i) Mediante i dischi di Gerschgorin si verifica che la matrice è (simmetrica) definita positiva, e si ottiene $\lambda \in [1, 7.5]$, da cui $\mathrm{cond}(A) \leq 7.5$.

ii) Per il metodo delle potenze inverse (con $y = A^{-1}x$ ad ogni iterazione0 si ha velocità di convergenza λ_1/λ_2 (autovalori in ordine crescente). Per $0 < \sigma \leq 1$ si verifica (da fare) che si ha

$$\frac{\lambda_1 - \sigma}{\lambda_2 - \sigma} < \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Quindi è preferibile usare $y = (A - \sigma I)^{-1}x$ nella iterazione.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 04 luglio 2022
Modulo II - Laurea Triennale in Matematica

1. È Dato il polinomio $\phi(x) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ con radici $\{\lambda_i\}$, $i = 1, \dots, 4$ reali e negative;
i) (3 punti) Stima dal basso $\min_i \lambda_i$ senza calcolare le radici esplicitamente;
ii) (5 punti) Osserva che le radici di ϕ sono le stesse di $\varphi(x) = \phi(-x)$, ma con segno opposto. Scrivi quindi un algoritmo per approssimare la radice di ϕ più a sinistra, per una scelta opportuna (quale?) dell'approssimazione iniziale. Discutine il costo computazionale.

2. Sono dati i nodi $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = \sin(\frac{x}{2}\pi)x^2$.
i) (3 punti) Calcola il polinomio di grado 2 interpolante la funzione f nella forma $p(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$, mediante l'uso della matrice di Vandermonde.
ii) (3 punti) Calcola il polinomio di grado 1 che minimizza la distanza di interpolazione (nel senso dei minimi quadrati) rispetto ad f usando i nodi dati.
iii) (2 punti) Supponendo ora $x_2 = x_1 + \varepsilon$ con $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ piccolo, commenta sul condizionamento del problema al punto i) ed in particolare sulla possibile quasi singolarità della matrice dei coefficienti.

3. È data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x\pi)e^x & x \in [-1, 0] \\ -x^3 - 3x^2 + 2x & x \in [0, 2] \end{cases}$$

i) (5 punti) Proponi una formula di quadratura composita con grado di esattezza uguale a 2 per l'approssimazione dell'integrale $\int_{-1}^{2} f(x)dx$;
ii) (3 punti) stima l'errore nell'intervallo $[-1, 2]$.

4. È data la funzione $f(x) = e^{-x} - x^2$, con zero $x^* \approx 0.7$.
i) (3 punti) Determina un intervallo chiuso in cui l'iterazione di punto fisso

$$x_{k+1} = e^{-\frac{x_k}{2}}$$

converga, e valutane l'ordine di convergenza.
ii) (5 punti) Proponi una iterazione di punto fisso per la stessa funzione f, che abbia ordine di convergenza 2. Studia l'esistenza di un intervallo chiuso in cui si abbia convergenza per ogni iterata iniziale in tale intervallo.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 06 giugno 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. Date $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare e di grandi dimensioni, e $\|\cdot\|$ norma matriciale indotta dalla norma vettoriale Euclidea,
i) (3 punti) Mostra che $\|A^{-1}\|^2 = \max_{x\neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x}$ per una opportuna matrice M;
ii) (5 punti) Supponendo A tridiagonale, proponi un algoritmo efficiente che sfrutti (i) per approssimare $\|A^{-1}\|$ e descrivine il costo computazionale.

2. È dato il sistema
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C^T & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}.$$
con $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonali e non singolari, con $n \gg m$.
i) (6 punti) Sfruttando la forma a blocchi, proponi due diversi metodi risolutivi minimizzando il costo computazionale: uno dei metodi determina prima la x e poi la y, mentre il secondo metodo trova prima la y e successivamente la x.
Includi eventuali ulteriori ipotesi affinchè le procedure siano ben definite.
ii) (2 punti) Confronta il costo computazionale e valuta quale dei due metodi sia più conveniente.

3. i) (4 punti) È data la funzione $f(x) = \ln(2+x)$, $x \in [-1,1]$, ed il polinomio di grado n, p_n, interpolante f nei nodi di Chebyshev in $[-1,1]$. Ottieni una stima per $\|f - p_n\|_\infty$;
ii) (4 punti) Confronta la stima con una stima opportuna per $\|f - t_n\|_\infty$, dove t_n è il polinomio di Taylor di grado n di f intorno all'origine.

4. i) (2 punti) Scrivi in forma semplificata l'iterazione associata al metodo di Newton per determinare la radice quadrata di $a > 0$, corrispondente al problema $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 - a$.
ii) (3 punti) Mostra che vale la relazione
$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^2} = \frac{1}{2x_k},$$
ed ottieni la costante asintotica di convergenza.
iii) (3 punti) Determina un intervallo chiuso I in cui la convergenza del metodo è assicurata, per ogni $x_0 \in I$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

Si ha

$$\|A^{-1}\|^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}x\|^2}{\|x\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T(A^{-1})^T A^{-1}x}{x^T x} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T M x}{x^T x} = \lambda_{\max}(M),$$

con $M = (A^{-1})^T A^{-1}$.

ii) Usiamo il metodo delle potenze applicato ad M. Ad ogni iterazione si calcola $y = Mx = (A^T)-1(A^{-1}x)$, che corrisponde alla risoluzione di sistemi con A e A^T. La matrice A può essere fattorizzata fuori dal ciclo.

ESERCIZIO 2.

i) Le due equazioni del sistema sono $Ax + By = f$, $C^T x + Dy = 0$. Ricavando la x nella prima equazione e sostituendo nella seconda, si ottiene il sistema $m \times m$, $(D - C^T A^{-1} B)y = -A^{-1} f$, con costo $O(m^3)$. La matrice dei coefficienti, per essere assemblata, richiede la risoluzione di m sistemi con A, dove $n \gg m$. A è diagonale quindi il costo è limitato, $O(nm)$. Il prodotto per C^T richiede ulteriori $O(nm^2)$ flops.

ii) Ricavando la y nella seconda equazione e sostituendo nella prima, si ottiene il sistema $n \times n$, $(A - BD^{-1}C^T)x = f$, che richiede molta memoria, in quanto $BD^{-1}C^T$ è piena. Il costo della risoluzione è $O(n^3)$, a cui si aggiungono i costi del calcolo esplicito della matrice.

iii) Per i conti fatti, il secondo modo è molto più costoso del primo.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 06 giugno 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati il problema $f(x) = 0$ con f sufficientemente regolare, e l'iterazione (metodo di Halley)
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{1}{2} f''(x_k) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
i) (2 punti) Mostra che l'iterazione corrisponde al metodo di Newton applicato alla funzione $g(x) = f(x)/\sqrt{f'(x)}$.
ii) (5 punti) Supponendo che $x_k \to x^*$ per $k \to \infty$ con x^* zero semplice del problema, mostra che la convergenza è almeno cubica;
iii) (1 punti) Semplifica l'iterazione nel caso $f(x) = x^\lambda - a$, con $a > 0$.

2. i)(3 punti) Determina una formula di quadratura (di grado di esattezza 2) nella forma
$$\int_0^1 y(s)ds \approx ay(0) + by(1) - c[y'(1) - y'(0)]$$
ii) (2 punti) Trasforma la formula precedente in una formula adatta all'approssimazione di $\int_x^{x+h} f(t)dt$
iii) (3 punti) Dalle espressioni precedenti ottieni una formula composita per l'approssimazione di $\int_a^b f(t)dt$

3. i) (4 punti) È data la funzione $f(x) = \ln(2+x)$, $x \in [-1, 1]$, ed il polinomio di grado n, p_n, interpolante f nei nodi di Chebyshev in $[-1, 1]$. Ottieni una stima per $\|f - p_n\|_\infty$;
ii) (4 punti) Confronta la stima con una stima opportuna per $\|f - t_n\|_\infty$, dove t_n è il polinomio di Taylor di grado n di f intorno all'origine.

4. i) (2 punti) Scrivi in forma semplificata l'iterazione associata al metodo di Newton per determinare la radice quadrata di $a > 0$, corrispondente al problema $f(x) = 0$ con $f(x) = x^2 - a$.
ii) (3 punti) Mostra che vale la relazione
$$\frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^2} = \frac{1}{2x_k},$$
ed ottieni la costante asintotica di convergenza.
iii) (3 punti) Determina un intervallo chiuso I in cui la convergenza del metodo è assicurata, per ogni $x_0 \in I$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 4 aprile 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed e assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x.$$

2. È data la matrice simmetrica definita positiva $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalori $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ con $\lambda_3 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_1 = 3.5$.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo delle potenze inverse traslate per l'approssimazione del secondo più grande autovalore di A. Descrivi il costo computazionale.
ii) (2 punti) Studia la velocità di convergenza dell'iterazione al punto i) per il parametro di traslazione $\mu \in \{1.6, 2.4\}$. Quale valore di μ determina una maggiore velocità di convergenza? (motivare la risposta)

3. (6 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = \begin{bmatrix} T & S_1 \\ S_2^\top & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$
con $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bidiagonali superiore non singolari, e T matrice $n \times n$ tridiagonale non singolare.
Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema, che minimizzi il costo computazionale e tenga conto della struttura del problema.

4. È data la funzione $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
i) (4 punti) Descrivi la formula generale dell'interpolazione composita con polinomi di grado 2, $P_h^{(2)}$.
ii) (4 punti) Determina il numero di nodi in cui suddividere l'intervallo, affinchè l'errore di interpolazione, $\max_{x\in[0,\pi]} |f(x) - P_h^{(2)}(x)|$ sia inferiore a 10^{-2}.

5. È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$.
i) (4 punti) Descrivi una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice di ϕ_4 più grande in modulo.
ii) (4 punti) Descrivi un metodo per approssimare la radice del punto i), che tenga conto della presenza di un polinomio.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ii) Il fattore di convergenza asintotica è $|\lambda_2 - \mu|/|\lambda_* - \mu|$ dove λ_* è il secondo autovalore di più vicino a μ. Per i valori di μ scelti, si ha che per $\mu = 2.4$ il denominatore è più grande che per $\mu = 1.6$, per cui la scelta $\mu = 2.4$ dà maggiore velocità di convergenza.

ESERCIZIO 3.

Siano $x = [x_1; x_2]$ e $b = [b_1; b_2]$. Il sistema corrisponde a

$$Tx_1 + S_1 x_2 = b_1, \qquad S_2^T x_1 = b_2.$$

Si risolve prima il sistema con S_2^T (descrivere l'algoritmo),poi si sostituisce x_1 nella prima equazione e si risolve per x_2 (descrivere l'algoritmo).

ESERCIZIO 4.

Modulo I - Prova scritta di Calcolo Numerico, 31 gennaio 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 2T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$
con $T = \text{tridiag}(-1, \underline{3}, -1)$ ed $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
i) (3 punti) Dimostra che gli autovalori di A sono tutti reali e positivi, ed ottieni una stima per l'intervallo spettrale;
ii) (6 punti) Proponi un algoritmo per l'approssimazione dell'autovalore di A più vicino a zero e discutine il costo computazionale.

2. (7 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = \begin{bmatrix} T & S_1 S_2^\top \\ 0 & T^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$
con $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, $\ell < n$, e T matrice $n\times n$ non singolare a banda, con banda superiore ed inferiore uguale a $k \ll n$.
Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema, che minimizzi il costo computazionale e tenga conto della struttura del problema.

3. È data una matrice $U \in \mathbb{R}^{n\times k}$ con colonne linearmente indipendenti e $k \ll n$.
i) (4 punti) Determina una matrice $\Pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $\Pi^2 = \Pi$ e $\Pi U = U$;
ii) (4 punti) Data la matrice $V \in \mathbb{R}^{n\times s}$ con $k + s \leq n$, proponi un algoritmo che usi Π per trasformare V in modo che le colonne della nuova matrice siano ortogonali a U.

4. È dato il sistema $Ax = b$ con $A =$pentadiag$(-\beta, -1, \underline{3}, +1, +\beta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare, e $\beta \in \mathbb{R}$.
i) (4 punti) Descrivi il metodo di Jacobi, illustrando in dettaglio il costo computazionale ed i criteri d'arresto.
ii) (4 punti) Determina un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di $\mathbb{R}$ tale che per ogni $\beta \in \mathcal{I}$ il metodo di Jacobi converga, motivando la risposta.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Vale $\mathrm{spec}(A) = \mathrm{spec}(T) \cup \mathrm{spec}(2T)$, con T simmetrica, quindi gli autovalori di A sono reali. T è definita positiva: la verifica con dischi di Gerschgorin mostra che vale $\mathrm{spec}(T) \subset [1,5]$ e $\mathrm{spec}(2T) \subset [2,10]$, per cui $\mathrm{spec}(A) \subset [1,10]$.

ii) Si usa il metodo delle potenze inverse. La risoluzione di sistemi con A prevede la fattorizzazione di T fuori dal ciclo (con Thomas), usata due volte, una per ogni blocco di A.

ESERCIZIO 2.

Si procede con una fattorizzazione LU a banda di T, $T = LU$. Posto $x = [x_1; x_2]$, $b = [b_1; b_2]$, si risolve prima il sistema $T^\top x_2 = b_2$ con $T^\top = U^\top L^\top$, e poi si sostituisce x_2 nella prima equazione, e si risolve $Tx_1 = b_1 - S_1(S_2^\top x_2)$ (attenzione ad effettuare i prodotti con S_1, S_2 seguendo le parentesi).

ESERCIZIO 3.

i) Π è il proiettore ortogonale rispetto a U. Direttamente si ha $\Pi = U(U^T U)^{-1} U^T$ (verifica che soddisfa le condizioni); in alternativa, detta Q_1 la matrice con colonne ortonormali ottenuta dalla fattorizzazione QR ridotta di U, allora, $\Pi = Q_1 Q_1^T$ (le due matrici sono uguali).

ii) Si ha $\widehat{V} = (I - \Pi)V$.

ESERCIZIO 4.

ii) si ha $B_J = \frac{1}{3}\mathrm{pentadiag}(\beta, 1, 0, -1, -\beta)$. Usando i dischi di Gerschgorin, gli autovalori di B_J soddisfano $|\lambda| \le 2(1 + |\beta|)/3$. quindi per $2(1 + |\beta|)/3 < 1$ il metodo converge, cioè per $|\beta| < 1/2$, $\mathcal{I} = (-1/2, 1/2)$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 31 gennaio 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 2T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$
con $T = \text{tridiag}(-1, \underline{3}, -1)$ ed $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
i) (3 punti) Dimostra che gli autovalori di A sono tutti reali e positivi, ed ottieni una stima per l'intervallo spettrale;
ii) (6 punti) Proponi un algoritmo per l'approssimazione dell'autovalore di A più vicino a zero e discutine il costo computazionale.

2. (7 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = \begin{bmatrix} T & S_1 S_2^\top \\ 0 & T^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$
con $S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{n \times \ell}$, $\ell < n$, e T matrice $n \times n$ non singolare a banda, con banda superiore ed inferiore uguale a $k \ll n$.
Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema, che minimizzi il costo computazionale e tenga conto della struttura del problema.

3. È dato il problema $f(x) = 0$ con $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$, $x \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi)$.
i) (3 punti) Descrivi il metodo di Newton ed i suoi criteri d'arresto;
ii) (5 punti) Mostra che il metodo determina una successione $\{x_k\}_{k \geq 0}$ convergente per x_0 opportunamente scelto.

4. È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 e^x dx$.
i) (4 punti) Determina il numero minimo di nodi di una formula di quadratura composita del trapezio per approssimare l'integrale $\mathcal{I}$ con un errore non superiore a 10^{-3}.
ii) (3 punti) Cosa si può dire su questa formula di quadratura e sulla stima dell'errore, per l'integrale $\mathcal{J} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 \sqrt{x} dx$?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. vedi modulo I nella stessa data.

ESERCIZIO 2. vedi modulo I nella stessa data.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 gennaio 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica definita positiva, con decomposizione spettrale $A = X\Lambda X^T$ ed autovalori λ_i, $i = 1, \dots, n$ ordinati in modo decrescente (λ_n è il più piccolo) e $X = [x_1, \dots, x_n]$.
   i) (3 punti) Sia $v \neq 0$ un vettore ortogonale ad x_n. A quale autocoppia converge il metodo delle potenze inverse (in aritmetica esatta) se v è usato come approssimazione iniziale? Motiva la risposta.
   ii) (6 punti) Supponendo che A sia anche tridiagonale, sia $H = A+uu^T$ con $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$. Approssima l'autovalore di H più vicino a zero, con costo per iterazione di $O(n)$ (iterata iniziale scelta a piacere). Descrivine in dettaglio il costo computazionale.

2. (6 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = (a_{i,j})_{i,j=1,..,n}$ non singolare tale che $a_{i,j} = 0$ per $j > i + 1$. Descrivi un algoritmo per la risoluzione del sistema, i cui costi computazionali e di memoria tengano conto della struttura di A.

3. Sia p_n un polinomio di grado n a coefficienti reali.

   i) (5 punti) Scrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di una radice del polinomio p_n, illustrando in dettaglio l'uso di p_n e della sua derivata nell'algoritmo.

   ii) (2 punti) Sia $p_n(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, con radici tutte reali. Scegli un dato iniziale x_0 affinchè il metodo di Newton converga in modo monotòno alla radice più grande.

   iii) (2 punti) Proponi una procedura per approssimare quindi anche la seconda radice più grande.

4. Studia il comportamento della seguente successione di punto fisso del tipo $x_{k+1} = \phi_p(x_k)$, al variare del parametro $p > 0$,

$$x_{k+1} = -\frac{1}{p}(e^{2x_k} + 2).$$

   In particolare,
   i) (2 punti) Determina, se possibile, un intervallo opportuno per cui $|\phi_p'(x)| < 1$ per ogni $x \in I$;
   ii) (4 punti) Determina, se possibile e dando eventualmente condizioni su p, un intervallo opportuno $[a, b]$ per cui $\phi_p : [a, b] \to [a, b]$;
   iii) (2 punti) Concludi quindi sulla convergenza della successione come metodo di punto fisso, al variare di p.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Poniamo $x^{(0)} = v$. Si ha $x^{(k)} \propto (A^{-1})^k x^{(0)} = X(\Lambda^{-1})^k X^T x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda_i^k} x_i^T x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{1}{\lambda_i^k} x_i^T x^{(0)}$. Per $k \to \infty$ e previa normalizzazione, l'iterazione tende a x_{n-1}.

ii) Si usa il metodo delle potenze inverse su H. I sistemi con H possono essere risolti con la formula di Sherman-Morrison, previa fattorizzazione di A con il m. Thomas, fuori dal ciclo.

ESERCIZIO 2.

La matrice A è di tipo Hessenberg inferiore. Si possono effettuare rotazioni di Givens da destra, oppure rotazioni di givens trasposte da sinistra (così da trasformare $[x_1; x_2]$ in $[0; *]$), oppure si può fattorizzare A^T (Hessenberg superiore), memorizzando solo le rotazioni (questo è equivalente al primo modo).

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Modulo I - Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 gennaio 2022
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica definita positiva, con decomposizione spettrale $A = X\Lambda X^T$ ed autovalori λ_i, $i = 1,\dots,n$ ordinati in modo decrescente (λ_n è il più piccolo) e $X = [x_1,\dots,x_n]$.
i) (3 punti) Sia $v \neq 0$ un vettore ortogonale ad x_n. A quale autocoppia converge il metodo delle potenze inverse (in aritmetica esatta) se v è usato come approssimazione iniziale? Motiva la risposta.
ii) (6 punti) Supponendo che A sia anche tridiagonale, sia $H = A+uu^T$ con $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$. Descrivi un algoritmo per l'approssimazione dell'autovalore di H più vicino a zero, con costo per iterazione di $O(n)$ (iterata iniziale scelta a piacere). Descrivine in dettaglio il costo computazionale.

2. (6 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = (a_{i,j})_{i,j=1,..,n}$ non singolare tale che $a_{i,j} = 0$ per $j > i + 1$. Descrivi un algoritmo per la risoluzione del sistema, i cui costi computazionali e di memoria tengano conto della struttura di A.

3. Sia $A = \text{tridiag}(-2, \underline{\alpha}, -2)$ una matrice simmetrica tridiagonale, con $\alpha > 0$.
i) (3 punti) Determina un intervallo I tale che per $\alpha \in I$, A sia definita positiva ed il metodo di Jacobi converga;
ii) (3 punti) Descrivi l'algoritmo SOR(ω) ed il suo costo computazionale;
iii) (3 punti) Per $\alpha \in I$, proponi una stima per ω_{opt}.
Motiva in dettaglio i tuoi risultati.

4. È dato il problema ai minimi quadrati
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n},\ b \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
i) (3 punti) Descrivi i problemi di instabilità riscontrabili nell'uso del metodo della equazione normale nella risoluzione del problema, eventualmente fornendo un esempio;
ii) (5 punti) Descrivi in dettaglio un algoritmo stabile per la risoluzione del problema.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. vedi stesso esercizio nella prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 2. vedi stesso esercizio nella prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3.

Si ha $B_j = \frac{1}{\alpha}\text{tridiag}(-2, 0, 2)$. Usando i dischi di Gerschgorin, gli autovalori di B_J soddisfano $|\lambda| < 4/\alpha$. Quindi perchè sia $|\lambda| < 1$ è sufficiente che sia $4 < \alpha$, cioè $I = (4, +\infty)$. Con questi valori di α, la matrice A è sdp.

iii) siccome A è tridiagonale e simmetrica, si stima il valore ω_{opt} usando un teorema visto a lezione.

ESERCIZIO 4.

i) Si può riprodurre un esempio come quello nelle dispense, per esempio $A = [1, 2; 2, 4; 0, \alpha]$ con α tale che $\alpha > \mathtt{u}$ e $\alpha^2 < \mathtt{u}$.

ii) Si usa fattorizzazione QR.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 23 novembre 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

con autovalori $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_4$.
i) (3 punti) Determina un intervallo aperto (α_0, α_1) tale che la matrice $\tilde{A} = A + \alpha I$ sia definita positiva per $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$.
ii) (5 punti) Sfruttando il punto (i), proponi un algoritmo che determini l'autovalore λ_1. Discutine il costo computazionale ed i criteri d'arresto.

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{bmatrix} 2+\delta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2+\delta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2+\delta & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2+\delta & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2+\delta & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2+\delta & -1 & \cdots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad b \in \mathbb{R}^n, b_i = 1,$$

n pari e $\delta \in (0, 1)$.
i) (2 punti) Mostra che il metodo di Gauss-Seidel converge molto più velocemente del metodo di Jacobi, per la risoluzione di questo problema.
ii) (6 punti) Proponi nei dettagli una versione dell'algoritmo di Jacobi, dove la matrice diagonale D è sostituita da una matrice diagonale *a blocchi* di dimensioni 2×2, e valutane il costo computazionale.

3. È data la funzion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 4\sin(x)$. Sia $x_\star \approx 3.6$ il primo zero positivo di f.
i) (3 punti) Determina un intervallo in cui il metodo di bisezione sia applicabile per approssimare $x_\star$, e descrivi l'algoritmo;
ii) (5 punti) Proponi un metodo con convergenza più che lineare, e dimostra che converge a $x_\star$, per x_0 preso in un intorno di $x_\star$.

4. È dato l'integrale $\int_0^2 f(x)dx$ con $f(x) = e^{-x}\sqrt{x}$.
i) (4 punti) Determina una formula di quadratura del tipo $\tilde{\mathcal{I}} = \alpha_1 f(\frac{1}{2}) + \alpha_2 f(\frac{3}{2})$ con il massimo grado di esattezza;
ii) (4 punti) Valuta l'applicabilità delle formule del rettangolo e del trapezio, e l'errore ottenibile per il problema considerato.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Mediante i dischi di Gerschgorin (da fare), si mostra che $\lambda \geq -2$ per ogni λ autovalore di A. Quindi, per $\alpha > -2 =: \alpha_0$, la matrice $\tilde{A}$ ha autovalori a destra dell'origine. Si può porre $\alpha_1 = +\infty$.

ii) L'autovalore più a sinistra di A corrisponde all'autovalore di $\tilde{A}$ più vicino all'origine. Applico quindi il metodo delle potenze inverse a $\tilde{A}$ per approssimare $\tilde{\lambda}_1$. Al termine, $\tilde{\lambda}_1 - \alpha$ approssimerà λ_1.

ESERCIZIO 2.

i) La matrice è a diagonale dominante (per righe e colonne). Il risultato segue da un teorema visto.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 19 luglio 2022
Modulo II - Laurea Triennale in Matematica

1. È Data la funzione $f(x) = (1 - x^2)^{3/2}$, $x \in [-1, 1]$.
i) (2 punti) Determina il polinomio interpolante di grado $n = 2$ con nodi equispaziati.
ii) (2 punti) Determina il polinomio interpolante di grado $n = 2$ con nodi di Chebyshev.
iii) (4 punti) Per $n \geq 2$, analizza una stima dell'errore e la convergenza per $n \to \infty$ nei due casi considerati sopra.

2. i) (4 punti) Scrivi l'algoritmo delle secanti per approssimare uno zero $x^\star$ di $f(x) = 0$, descrivendo in dettaglio come ottenere i dati iniziali, ed il costo computazionale.
ii) (4 punti) Confronta il costo computazionale dell'algoritmo in (i) con quello del metodo delle corde. Quest'ultimo metodo può convergere in un numero di iterazioni confrontabile con quello del metodo delle secanti (aiutati eventualmente con un esempio)?

3. Sono date le coppie di dati (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, 3$ con

x_i	$1/4\pi$	$1/2\pi$	$3/4\pi$	π
y_i	0.55	1.57	1.66	0

corrispondenti ai valori di una funzione f di cui vogliamo approssimare l'integrale sull'intervallo $[x_0, x_3]$.
i) (3 punti) Scrivi la formula di Newton-Cotes di grado $N = 3$ associata ai dati.
ii) (5 punti) Supponendo che il valore di y_N non sia noto, ma sia noto $\widehat{y}_N = y_N + \varepsilon$, studia come varia l'approssimazione dell'integrale in termini di ε.

4. È data l'equazione $x = e^{-x}\cos(x)$.
i) (3 punti) Giustifica l'esistenza e l'unicità dello zero $x^\star$ dell'equazione.
ii) (5 punti) Studia la convergenza (e l'ordine di convergenza) dell'iterazione $x_{k+1} = e^{-x_k}\cos x_k$, identificando un possibile intervallo chiuso e limitato in cui si abbia convergenza globale.

Traccia della risoluzione.

esercizio 1.

esercizio 2.

esercizio 3.

esercizio 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 settembre 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. (6 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare, tridiagonale, con in più gli elementi non nulli $a_{1,3}$ e $a_{n,n-2}$, e $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$.
   Proponi una procedura con minimo costo computazionale, $\mathcal{O}(n)$, per risolvere il sistema.

2. È dato il problema agli autovalori $Ax = \lambda Bx$, con A e B matrici $n \times n$ simmetriche e definite positive.
   i) (3 punti) Supponendo di conoscere gli autovalori di A e di B, dai una stima dall'alto e dal basso del quoziente
   $$\frac{v^T A v}{v^T B v}, \quad 0 \neq v \in \mathbb{R}^n.$$
   Deducine che gli autovalori λ del problema di partenza sono tutti reali e positivi.
   ii) (7 punti) Proponi un algoritmo iterativo per l'approssimazione dell'autovalore più grande $\lambda_{\max}$ del problema dato, minimizzando il costo computazionale per iterazione. Valuta in dettaglio tale costo.

3. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ il polinomio interpolante f nei nodi distinti $\{x_0, \dots, x_n\}$, in forma di Lagrange.
   i) (3 punti) Sia ω_{n+1} il polinomio nodale. Mostra che
   $$\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$$
   e deducine che $L_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$;
   ii) (3 punti) Per un valore di $i \in \{0, \dots, n\}$, proponi una buona stima di $\|L_i\|_\infty$ per $\{x_i\}$ equispaziati e per $\{x_i\}$ nodi di Chebyshev;
   iii) (3 punti) Per $f(x) = e^x \cos x$ con $[a,b] = [-\pi, \pi]$ e $n = 2$, dai una stima dell'errore di interpolazione per nodi equispaziati.

4. È data l'equazione $x + \log x = 0$ con zero $x^* \approx 0.5671$. Considera l'iteratione di punto fisso associata a questo problema, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, con $\varphi(x) = x(1 - \log x)/(1 + x)$.
   i) (2 punti) Determina l'ordine di convergenza dell'iterazione;
   ii) (5 punti) Determina un intervallo in cui l'iterazione sia globalmente convergente ad x^*, giustificando la scelta in modo rigoroso.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

Si può per esempio scrivere A come $A = T + UV^T$ con T tridiagonale e

$$U = [a_{1,3}e_1, a_{n,n-2}e_n], \qquad V = [e_3, e_{n-2}]$$

ed usare la formula di Sherman-Morrison. In alternativa, si può annullare l'elemento $a_{n,n-2}$ mediante una successione di rotazioni di Givens, e poi risolvere il sistema "quasi" tridiagonale risultante, con altre rotazioni per eliminare la parte sotto la diagonale principale.

ESERCIZIO 2.

i) Il quoziente di Rayleigh di una matrice M simmetrica soddisfa $\lambda_{\min}(M) \le (x^T Mx)/(x^T x) \le \lambda_{\max}(M)$. Quindi

$$\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(B)} \le \frac{x^T Ax}{x^T x}\frac{x^T x}{x^T Bx} = \frac{x^T Ax}{x^T Bx} \le \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(B)},$$

da cui segue anche la positività degli autovalori, visto che A e B sono sdp.

ii) Il problema dato è equivalente a $B^{-1}Ax = \lambda x$. Posso usare il mtodo delle potenze applicato a $B^{-1}A$. Ad ogni iterazione, $y = B^{-1}(Ax^{(k)})$ richiede la risoluzione di un sistema con B, per il quale si può fare una fattorizzazione di Cholesky fuori dal ciclo.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 settembre 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il polinomio p_n, con $n > 10$, definito nell'intervallo $[a, b]$.
   i) (6 punti) Descrivi una procedura per determinare il polinomio q_m, di grado $m = 3$, interpolante p_n nei nodi equispaziati $\{x_i\}$, $i = 0, \dots, m$. Descrivi in particolare come valutare $p_n(x_i)$, ed il costo computazionale dell'intera procedura.
   ii) (3 punti) Supponi che x^* sia una radice di p_n, con $x^* \neq x_i$, $i = 0, \dots, m$. Mostra come determinare q_{m+1} da q_m in modo che x^* sia anche radice di q_{m+1}.

2. Considera il problema dell'approssimazione dell'integrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
   i) (4 punti) Costruisci una formula di quadratura del tipo
   $$\alpha_0(f(0) + f(1)) + \alpha_1 f'(0) + \alpha_2 f'(1).$$
   ii) (3 punti) Costruisci la versione composita della formula, su m sottointervalli di $[0, 1]$, dandone una formula il più possibile semplificata.

3. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ il polinomio interpolante f nei nodi distinti $\{x_0, \dots, x_n\}$, in forma di Lagrange.
   i) (3 punti) Sia ω_{n+1} il polinomio nodale. Mostra che
   $$\omega'_{n+1}(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)$$
   e deducine che $L_i(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$;
   ii) (3 punti) Per un valore di $i \in \{0, \dots, n\}$, proponi una buona stima di $\|L_i\|_\infty$ per $\{x_i\}$ equispaziati e per $\{x_i\}$ nodi di Chebyshev;
   iii) (3 punti) Per $f(x) = e^x \cos x$ con $[a, b] = [-\pi, \pi]$ e $n = 2$, dai una stima dell'errore di interpolazione per nodi equispaziati.

4. È data l'equazione $x + \log x = 0$ con zero $x^* \approx 0.5671$. Considera l'iteratione di punto fisso associata a questo problema, $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, con $\varphi(x) = x(1 - \log x)/(1 + x)$.
   i) (2 punti) Determina l'ordine di convergenza dell'iterazione;
   ii) (5 punti) Determina un intervallo in cui l'iterazione sia globalmente convergente ad x^*, giustificando la scelta in modo rigoroso.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 06 luglio 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 8 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$
Approssima l'autovalore con parte reale più grande ($\lambda_{\max}$) e parte reale più piccola ($\lambda_{\min}$ in valore assoluto) di A. Più precisamente:

i) (3 punti) Senza calcolare esplicitamente gli autovalori di A, mostra che il metodo delle potenze (o sue varianti) converge, se applicato ad A per approssimare $\lambda_{\max}$ o $\lambda_{\min}$.
ii) (2 punti) Dai una stima del fattore di convergenza per l'approssimazione di $\lambda_{\max}$ e di $\lambda_{\min}$.
iii) (3 punti) Scrivi l'algoritmo per l'approssimazione di $\lambda_{\min}$, descrivendo in dettaglio il costo computazionale ed i criteri d'arresto, per una generica dimensione n della matrice tridiagonale A.

2. Sono dati il vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ non singolare con $a_{i,j} = 0$ per $i > j + 2$.
i) (5 punti) Scrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss e la risoluzione del sistema $Ax = b$ che tenga conto della struttura della matrice, e discutine in dettaglio il costo computazionale;
ii) (3 punti) Modifica l'algoritmo in modo da risolvere contemporaneamente i sistemi $A[x_1, \ldots, x_s] = [b_1, \ldots, b_s]$, con $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, s$, e $s > 1$, illustrando in dettaglio come il costo dipenda da s.

3. È data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $[a, b] = [0, \pi]$.

i) (3 punti) Costruisci una generica formula di quadratura aperta di tipo Newton-Cotes con nodi $x_0 = a + (b - a)/4$ e $x_1 = b - (b - a)/4$;

ii) (4 punti) Stima l'errore di quadratura ottenuto, per una f generica;

iii) (2 punti) Con la formula ottenuta approssima $\int_0^\pi \sin(x)dx$.

4. Sia $\{x_k\}_{k\geq 0}$ una successione di punto fisso convergente a x^* linearmente e sia $e_k = x_k - x^*$.

i) (3 punti) Mostra che l'iterazione
$$z_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$
soddisfa $z_k - x^* = e_k - (e_{k+1} - e_k)^2/(e_{k+2} - 2e_{k+1} + e_k)$.

ii) (4 punti) Sapendo che $\{x_k\}_{k\geq 0}$ converge *linearmente* ad x^*, deduci che
$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k - x^*}{x_k - x^*} = 0.$$
Cosa implica questo risultato?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Mediante l'uso dei dischi di Gerschgorin si mostra che i dischi associati a $a_{2,2}$ e $a_{3,3}$ sono isolati, ed agli estremi dell'intervallo spettrale, per cui $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$ sono isolati ed il metodo delle potenze e potenze inverse convergono (il disco centrato in -1 è il più vicino all'origine, quindi il metodo dell potenze inverse è appropriato).

ii) I dischi $\mathcal{G}_2^{(c)} = D(8,1)$ e $\mathcal{G}_4^{(c)} = D(4,1)$ danno una stima del fattore di convergenza per il metodo delle potenze, $\lambda_2/\lambda_1 \leq 3/9$. In modo analogo si procede per il metodo delle potenze inverse.

iii) Il metodo richiede la risoluzione di sistemi con A, previa fattorizzazione con Thomas, fuori dal ciclo.

ESERCIZIO 2.

ii) Si applica ogni trasformazione elementare contemporaneamente a tutti i termini noti. (fornire i dettagli)

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, II Modulo, 6 luglio 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. Supponendo di voler approssimare il reciproco di un numero reale a come radice dell'equazione

$$f(x) = \frac{1}{x} - a = 0,$$

i) (3 punti) scrivi il metodo di Newton (senza richiedere divisioni);

ii) (6 punti) proponi una approssimazione iniziale che assicuri la convergenza del metodo e giustifica la scelta.

2. È data la funzione $f(x) = e^{-x}$ nell'intervallo $[0, 10]$.

i) (4 punti) Determina il minimo numero di nodi di una approssimazione per interpolazione composita di grado 2 con nodi equispaziati, che assicuri un errore inferiore a 10^{-3}.

ii) (3 punti) Mostra come varia il risultato nel caso vengano usati i nodi di Chebyshev.

3. È data la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $[a, b] = [0, \pi]$.

i) (3 punti) Costruisci una generica formula di quadratura aperta di tipo Newton-Cotes con nodi $x_0 = a + (b - a)/4$ e $x_1 = b - (b - a)/4$;

ii) (4 punti) Stima l'errore di quadratura ottenuto, per una f generica;

iii) (2 punti) Con la formula ottenuta approssima $\int_0^\pi \sin(x)dx$.

4. Sia $\{x_k\}_{k\geq 0}$ una successione di punto fisso convergente a x^* linearmente e sia $e_k = x_k - x^*$.

i) (3 punti) Mostra che l'iterazione

$$z_k = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

soddisfa $z_k - x^* = e_k - (e_{k+1} - e_k)^2/(e_{k+2} - 2e_{k+1} + e_k)$.

ii) (4 punti) Sapendo che $\{x_k\}_{k\geq 0}$ converge *linearmente* ad x^*, deduci che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k - x^*}{x_k - x^*} = 0.$$

Cosa implica questo risultato?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 17 giugno 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il problema ai minimi quadrati

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times s}} \|B-AX\|_F, \quad A\in\mathbb{R}^{n\times m},\ B\in\mathbb{R}^{n\times s},$$

   con A di rango massimo.

   i) (5 punti) Descrivi in dettaglio un algoritmo per determinare X, che lavori su tutte le colonne di B contemporaneamente, illustrandone anche il costo computazionale.

   ii) (3 punti) Modifica l'algoritmo proposto nel caso $B = B_1B_2^T$ con $B_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{s\times r}$, $r < s$, spiegando la procedura usata.

2. È data la matrice simmetrica definita positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con autocoppie (λ_i, v_i), dove i λ_i sono in ordine decrescente e $\|v_i\| = 1$.

   i) (2 punti) Mostra come variano gli autovalori di $\Pi A\Pi$, in funzione dei λ_i, dove $\Pi = I - v_1v_1^T$;

   ii) (6 punti) Supponendo di conoscere (λ_1, v_1) e sfruttando quanto mostrato nel punto precedente, proponi un algoritmo per determinare il secondo autovalore più grande di A. Qual'è la velocità asintotica di convergenza del metodo?

3. Per x che varia in $[-1, 1]$,

   i) (4 punti) Mostra che la potenza x^n può essere approssimata in modo uniforme da un polinomio, combinazione di potenze $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, con un errore non superiore a $2^{-(n-1)}$;

   ii) (3 punti) Usa il polinomio approssimante trovato al punto (i) per stimare $(\frac{1}{3})^3$. Confronta quindi l'errore con quello ottenuto usando il polinomio interpolante di grado 2 ottenuto con una suddivisione equispaziata di $[-1, 1]$.

4. È data l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = \tan(x) - cx$, $x > 0$ e $c \in (0, 1)$.

   i) (3 punti) Mostra che la prima radice positiva x^* di f si trova nell'intervallo $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$;

   ii) (6 punti) Mostra che se $x_0 = \pi$, allora il metodo di Newton genera una iterazione $\{x_k\}_{k\geq 0}$ convergente se c è abbastanza piccolo. Quanto dev'essere piccolo c?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Si può usare la fattorizzazione QR, in cui le matrici di Householder (per es.) vengono applicate contemporaneamente a tutte le colonne di B.

ii) Se $B = B_1 B_2^T$ occorre solo lavorare con B_1, infatti, posto $A = QR$ con $Q = [Q_1, Q_2]$, $R = [R_1; 0]$, si ha $\|B - AX\| = \|Q^T B - RX\| = \|(Q^T B_1)B_2^T - RX\|$. Quindi si trova che $X = ((R_1^{-1}(Q_1^T B_1))\, B_2^T$.

ESERCIZIO 2. A è simmetrica quindi i suoi autovettori sono ortogonali.

i) Per ogni $v_i \neq v_1$, si ha che $\Pi v_i = v_i$, per cui $\Pi A \Pi v_i = v_i \lambda_i$, cioè le autocoppie rimangono invariatte. Inoltre, $\Pi A \Pi v_1 = 0 = v_1 0$. Quindi gli autovalori di $\Pi A \Pi$ sono $\{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

ii) L'autovalore più grande di $\Pi A \Pi$ è λ_2. Quindi applico il m etodo delle potenze a questa matrice. Ad ogni iterazione, l'operazione $y = \Pi A \Pi x^{(k)}$ non deve richiedere la costruzione esplicita di Π o $\Pi A \Pi$. Invece, si opera come segue: $y = \Pi(A(\Pi x^{(k)}))$, con l'operazione del tipo $w = \Pi u = u - v_1(v_1^T u)$.

la velocità di convergenza sarà data da λ_3/λ_2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, II Modulo, 17 giugno 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. Considera la suddivisione uniforme $\{x_i\}$ dell'intervallo $[0,1]$ con passo h. Sfruttando le differenze finite, siamo interessati ad approssimare la funzione $u = u(x)$ che soddisfa l'equazione
$$u''(x) = -\frac{4}{1+x^2}, \quad x \in (0,1),$$
sapendo che deve valere $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$. In particolare

   i) (3 punti) Per $h = \frac{1}{2}$, determina una approssimazione del valore $u(\frac{1}{2})$;

   ii) (4 punti) Per $h = \frac{1}{4}$, determina una nuova approssimazione del valore $u(\frac{1}{2})$;

2. È data la funzione $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$, $x > \frac{1}{2}$.

   i) (5 punti) Determina α_i, $i = -1, 0, 1$ tali che la formula
$$\alpha_{-1} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt + \alpha_0 f(0) + \alpha_1 \int_{\frac{1}{2}}^{\bar{x}} f(t)dt \approx F(\bar{x})$$
abbia grado di esattezza massimo.

   ii) (4 punti) Usa la formula trovata per approssimare $F(1)$, per $f(x) = e^x$.

3. Per x che varia in $[-1,1]$,

   i) (4 punti) Mostra che la potenza x^n può essere approssimata in modo uniforme da un polinomio, combinazione di potenze $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$, con un errore non superiore a $2^{-(n-1)}$;

   ii) (3 punti) Usa il polinomio approssimante trovato al punto (i) per stimare $(\frac{1}{3})^3$. Confronta quindi l'errore con quello ottenuto usando il polinomio interpolante di grado 2 ottenuto con una suddivisione equispaziata di $[-1,1]$.

4. È data l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = \tan(x) - cx$, $x > 0$ e $c \in (0,1)$.

   i) (3 punti) Mostra che la prima radice positiva x^* di f si trova nell'intervallo $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$;

   ii) (6 punti) Mostra che se $x_0 = \pi$, allora il metodo di Newton genera una iterazione $\{x_k\}_{k\geq 0}$ convergente se c è abbastanza piccolo. Quanto dev'essere piccolo c?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 3 giugno 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b, c, f \in \mathbb{R}^n,$$

ed A tridiagonale invertibile, avente tutti i minori principali non singolari.

i) (3 punti) Supponendo che sia disponibile un algoritmo che risolve sistemi con A, proponi una procedura per risolvere il sistema lineare dato.

ii) (5 punti) Descrivi l'algoritmo per i risolvere sistemi lineari con A. Nel caso siano presenti più sistemi con la stessa matrice A, modifica l'algoritmo opportunamente in modo da minimizzare il numero di operazioni complessive.

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$, con $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$ e la matrice tridiagonale $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots n}$ con tutti gli elementi nulli tranne $a_{i,i} = i+1$, per $i = 1, \ldots, n$, e $a_{i,i+1} = 1$, $a_{i+1,i} = -1$, per $i = 1, \ldots n-1$.

i) (4 punti) Dai una stima dell'intervallo spettrale contenente tutti i valori[1] $\Re(\lambda)$, dove λ è un qualsiasi autovalore di A;

iii) (4 punti) Supponendo che $a_{i,i+1} = 1 + \alpha$, con $\alpha > 0$, dai una condizione sufficiente che assicuri la convergenza del metodo di Jacobi per il sistema dato.

3. È data la funzione $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, $x \in [0, \pi/2]$.

i) (3 punti) Determina il polinomio $p_2(x)$ di grado 2 interpolante f nell'intervallo dato (approssima il valore di f mediante la formula del trapezio).

ii) (4 punti) Supponendo che l'intervallo $[0, \pi/2]$ sia suddiviso con nodi equispaziati di passo h, stima l'errore ottenuto nell'approssimazione di $f(\bar{x})$ mediante interpolazione di f con un polinomio composito di grado 3, per $\bar{x} \in [0, \pi/2]$.

4. È dato il polinomio $\phi_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, avente tutte radici reali.

i) (3 punti) Senza calcolare le radici, determina dati iniziali x_{-1}, x_0 adatti per il metodo di bisezione o per il metodo delle secanti.

ii) (6 punti) Descrivi in dettaglio l'algoritmo associato al metodo delle secanti per polinomi, e proponi criteri di arresto affidabili giustificando le scelte.

[1] $\Re(\lambda)$ è la parte reale del numero complesso λ.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) Ricavando la x nella prima equazione, si ottiene il sistema $c^T A^{-1} b y = A^{-1} f$. Una volta calcolato lo scalare y, trova $x = A^{-1} f - b y$ (nota che $A^{-1} f$ è già stata calcolata.

ii) Risolvo sistemi con Thomas. La fattorizzazione viene fatta una volta sola, poi applico i due fattori a b ed ad f contemporaneamente.

ESERCIZIO 2. Si ha $A = \text{tridiag}(-1, \underline{1+i}, 1)$ con $i = 1, \ldots, n$ indice di riga.

i) si ha $\mathcal{G}_1 = D(2,1)$, $\mathcal{G}_i = D(1+i, 2)$ per $i = 2, \ldots, n-1$, $\mathcal{G}_n = D(1+n, 1)$ per $i = 2, \ldots, n-1$. Nota che $\mathcal{G}_{n-1} = D(n, 2)$ ha lo stesso estremo destro di $\mathcal{G}_n$.

Quindi $\text{spec}(A) \subset [1, n+2]$.

ii) Si ha $B_J = \text{tridiag}(-1/(1+(i+1)), 0, (1+\alpha)/(1+(i+1)))$. per ogni riga $i > 1$, i suoi autovalori soddisfano $|\lambda| \leq (1+1+\alpha)/(i+2)$ mentre per $i = 1$, $|\lambda| \leq (1+\alpha)/2$. Da quest'ultimo, se $(1+\alpha)/2 < 1$ il metodo convergence, cioè $\alpha < 1$. Le altre condizioni sono meno stringenti

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, II Modulo, 3 giugno 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la funzione $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$, $x \in [0, \pi/2]$.

   i) (3 punti) Determina il polinomio $p_2(x)$ di grado 2 interpolante f nell'intervallo dato (approssima il valore di f mediante la formula del trapezio).

   ii) (4 punti) Supponendo che l'intervallo $[0, \pi/2]$ sia suddiviso con nodi equispaziati di passo h, stima l'errore ottenuto nell'approssimazione di $f(\bar{x})$ mediante interpolazione di f con un polinomio composito di grado 3, per $\bar{x} \in [0, \pi/2]$.

   iii) (4 punti) Proponi una formula di quadratura composita che assicuri un errore nella valutazione di $f(\bar{x})$ inferiore a 10^{-3}.

2. È dato il polinomio $\phi_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$, avente tutte radici reali.

   i) (3 punti) Senza calcolare le radici, determina dati iniziali x_{-1}, x_0 adatti per il metodo di bisezione o per il metodo delle secanti.

   ii) (6 punti) Descrivi in dettaglio l'algoritmo associato al metodo delle secanti per polinomi, e proponi criteri di arresto affidabili giustificando le scelte.

3. (6 punti) Discuti, al variare del parametro $p > 0$, la convergenza del metodo iterativo:

$$x_{k+1} = -\frac{1}{p}(e^{2x_k} + 2).$$

4. (6 punti) Costruisci una formula di quadratura

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx a_1 f(0) + a_2 f'(1),$$

   col massimo grado di esattezza possibile.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 29 marzo 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. (8 punti) Considera il sistema

$$Ax = b, \qquad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \ f, g \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & L \\ L^T & T \end{bmatrix}, \quad L, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

con L triangolare inferiore e T tridiagonale, entrambe invertibili. Usa questo partizionamento per determinare una procedura risolutiva per il sistema dato, descrivendo in dettaglio tutti gli algoritmi intermedi ed il costo computazionale.

2. (8 punti) Proponi un algoritmo completo per la risoluzione del problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad b \in \mathbb{R}^{n+1},\ A = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} + ae_1^T$$

con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bidiagonale superiore non singolare, $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ e e_1 primo vettore della base canonica. Discutine il costo computazionale.

3. È data la funzione $f(x) = x + 2\log(x)$, con zero $x^* \approx 0.7$.
i) (5 punti) Determina, giustificando la scelta, un intervallo chiuso in cui il metodo di bisezione sia ben definito. Descrivi l'algoritmo associato spiegando l'uso dei criteri d'arresto scelti. Determina infine il numero minimo di iterazioni affinchè l'errore sia minore di 10^{-3}.
ii) (3 punti) Proponi una iterazione di punto fisso per la stessa funzione f, che abbia ordine di convergenza 2 in un opportuno intervallo.

4. Supponi che la funzione $f(x) = x\sin(x)$, $x = [0, \pi]$ sia data solo mediante i suoi valori tabulati in $x_{0,1,2} = \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi$.
i) (4 punti) Determina una approssimazione di $f(\frac{1}{6}\pi)$ mediante interpolazione quadratica nei nodi dati, e stimane l'errore.
ii) (4 punti) Supponi che per $x_2 = \frac{3}{4}\pi$ il valore tabulato sia $\tilde{y}_2 = 1.7$ (il valore esatto, nelle prime 4 cifre decimali è $y_2 = 1.6661$) e determina il polinomio perturbato $\tilde{p}_2$. Mostra come varia il polinomio interpolante con questa perturbazione mediante una stima di $\|p_2 - \tilde{p}_2\|_\infty$, dove p_2 è il polinomio determinato in (i).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Partizioniamo $x = [x_1; x_2]$. Quindi $Lx_2 = f$ e $L^T x_1 + Tx_2 = g$. Si risolve in x_2 dalla prima equazione (descrivere l'algoritmo con L triangolare inf). Poi si risolve $L^T x_1 = -Tx_2 + g$ (descrivere l'algoritmo con L^T triangolare sup).

ESERCIZIO 2.

Mediante l'equazione normale si ha $([R^T, 0] + e_1 a^T)([R; 0] + a e_1^T)x = \tilde{b}$, con matrice dei coefficienti uguale a

$$(R^T R + g e_1^T + e_1 g^T + e_1(a^T a)e_1^T) = R^T R + UV^T, \qquad g = [R^T, 0]a,$$

con $U = [g, e_1]$ e $V = [e_1, g + (a^T a)_1]$. Il sistema può essere risolto con la formula di Sherman-Morrison, sfruttando la fattorizzazione $R^T R$ già disponibile.

In alternativa, si possono usare le rotazioni di Givens, coinvolgendo sempre la prima riga di R.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 28 Gennaio 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tridiagonale non singolare.
i) (8 punti) Considera il sistema

$$Ax = b, \qquad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, g \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{bmatrix} T_1 & E_1 \\ E_2 & T_2 \end{bmatrix}, \quad T_1, T_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

dove A è stata partizionata, e descrivi la struttura dei singoli blocchi. Usa questo partizionamento per determinare un algoritmo che risolva il sistema dato con un costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, descrivendo in dettaglio i costi.

2. (8 punti) Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad b \in \mathbb{R}^{n+1},\ A = \begin{bmatrix} L \\ a^T \end{bmatrix}$$

con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare inferiore nonsingolare, ed $a \in \mathbb{R}^n$. Discutine il costo computazionale.

3. È data la funzione $f(x) = e^{-x} - x^2$, con zero $x^* \approx 0.7$.
i) (5 punti) Determina un intervallo chiuso in cui l'iterazione di punto fisso

$$x_{k+1} = e^{-\frac{x_k}{2}}$$

converga, valutane la convergenza e l'ordine di convergenza.
ii) (3 punti) Proponi una iterazione di punto fisso per la stessa funzione f, che abbia ordine di convergenza 2 in un opportuno intervallo.

4. Sia p un polinomio di grado n a coefficienti reali.

i) (3 punti) Scrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di una radice del polinomio p, illustrando in dettaglio il calcolo di p e della sua derivata.

ii) (3 punti) Sia $p(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$, con radici tutte reali. Scegli un dato iniziale x_0 affinchè il metodo converga in modo monotòno alla radice più grande.

iii) (2 punti) Proponi una procedura per approssimare quindi anche la seconda radice più grande.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

Partiziono $x = [x_1; x_2]$. Si ha che T_1, T_2 sono a loro volta tridiagonali, mentre $E_1 = a_{n,n+1} e_n e_1^T$ e $E_2 = a_{n+1,n} e_1 e_n^T$. Riscrivendo l'equazione a blocchi, si ha $T_1 x_1 + E_1 x_2 = 0$ e $E_2 x_1 + T_2 x_2 = g$. Sostituendo $x_1 = -T_1^{-1} E_1 x_2$ nella seconda equazione, si ottiene il sistema

$$(T_2 - E_2 T_1^{-1} E_1) x_2 = g.$$

Si noti che $E_2 T_1^{-1} E_1 = \alpha e_1 (e_n^T T_1^{-1} e_n) e_1^T$ con $\alpha = a_{n,n+1} a_{n+1,n}$, per cui $E_2 T_1^{-1} E_1$ ha rango 1. Quindi previo il calcolo di $(e_n^T T_1^{-1} e_n$, la matrice $T_2 - E_2 T_1^{-1} E_1$ è la modifica di rango uno di una matrice tridiagonale, e il sistema può essere risolto con la formula di Sherman-Morrison. I sistemi con T_1, T_2 vengono risolti con il metodo di Thomas (da descrivere almeno una volta).

ESERCIZIO 2.

È possibile applicare l'equazione normale, ottenendo la matrice dei coefficienti $L^T L + aa^T$ (m. strutturata piu rango uno). Oppure, si procede azzerando gli elementi della riga (n+1)-esima con rotazioni, che però modificano la struttura triangolare inferiore di L.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

I modulo - Prova scritta di Calcolo Numerico, 28 Gennaio 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ tridiagonale non singolare.
   i) (8 punti) Considera il sistema

$$Ax = b, \quad \text{con} \quad b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ g \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, g \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{bmatrix} T_1 & E_1 \\ E_2 & T_2 \end{bmatrix}, \quad T_1, T_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \text{non sing.}$$

   dove A è stata partizionata, e descrivi la struttura dei singoli blocchi. Usa questo partizionamento per determinare un algoritmo che risolva il sistema dato con un costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, descrivendo in dettaglio i costi.

   ii) (2 punti) Confronta la procedura del punto (i) con la risoluzione del sistema dato con A tridiagonale non partizionata. Qual'è la strategia con minore costo computazionale?

2. (8 punti) Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad b \in \mathbb{R}^{n+1}, \, A = \begin{bmatrix} L \\ a^T \end{bmatrix}$$

   con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare inferiore nonsingolare, ed $a \in \mathbb{R}^n$. Discutine il costo computazionale.

3. Sono dati i tre vettori non nulli e linearmente indipendenti $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^n$.

   i) (4 punti) Descrivi un algoritmo che determini una base ortogonale per lo spazio $\text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$.

   ii) (2 punti) Descrivi un algoritmo che determini la matrice di proiezione ortogonale nello spazio ortogonale a $\text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$.

4. (8 punti) È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare ed n dispari, con tutti gli elementi nulli tranne $a_{i,i} \neq 0$, $a_{i,n-i+1} \neq 0$, per $i = 1, \dots, n$ (matrice a croce). Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$ che tenga conto della struttura di A, e valutane in dettaglio il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. vedi l'esercizio nella prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 2. vedi l'esercizio nella prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3.
i) Usa Gram-Schmidt, per esempio, per ottenere U.
ii) Il proiettore è $\Pi = UU^T$.

ESERCIZIO 4.

Per n dispari, la diagonale principale e secondaria hanno in comune $a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$, unico elemento non nullo della riga $\frac{n}{2}+1$. Quindi $x_{\frac{n}{2}+1} = b_{\frac{n}{2}+1}/a_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+1}$. Per la riga i-esima, $i \neq \frac{n}{2}+1$, vale la relazione

$$\begin{bmatrix} a_{i,i} & a_{i,n+1-i} \\ a_{n+1-i,i} & a_{n+1-i,n+1-i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{n+1-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i \\ b_{n+1-i} \end{bmatrix}.$$

Quindi si risolvono $\frac{n}{2}$ sistemi 2×2 (da descrivere).

Prova scritta di Calcolo Numerico, 8 Gennaio 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. Siano $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ con colonne ortonormali ed ℓ tale che $2\ell < n$.

   i) (6 punti) Descrivi una procedura ed il suo costo computazionale, per scrivere la fattorizzazione QR ridotta di $[V_1, V_2]$, cioè $[V_1, V_2] = V_3R_3$, che tenga conto della struttura;

2. È data la matrice *simmetrica e definita positiva* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   i) (5 punti) Descrivi un algoritmo per approssimare l'autovalore di A più vicino a zero, insieme ai suoi criteri d'arresto;

   ii) (4 punti) Proponi una procedura per accelerarne la convergenza, spiega in che senso la convergenza possa in effetti essere migliore, e le (eventuali) condizioni per implementare tale procedura.

3. È data la funzione $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$.

   i) (5 punti) Scrivi l'iterazione $\{x_k\}$ di Newton e dimostra che l'iterazione converge ad $x^* \approx 0.5885$, supponendo di aver scelto x_0 in modo opportuno. Discuti i criteri d'arresto associati.

   ii)(3 punti) Sia ϕ una funzione di punto fisso di classe C^1 con punto fisso x^*. Dimostra che se $|\phi'(x^*)| > 1$ allora l'iterazione associata a ϕ non converge.

4. È data la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{2t^2-3t+1}{t^2+1}\mathrm{dt}$, $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

   i) (4 punti) Per $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, determina la formula di quadratura composita dei rettangoli per approssimare il valore $F(x)$, e determina il minimo numero di sottointervalli, dipendenti da x, in modo che l'errore sia inferiore a 10^{-2}.

   i) (5 punti) Sfruttando quanto fatto nel punto (i), ma usando solo 2 sottointervalli, proponi una procedura per l'approssimazione di F nell'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$ mediante interpolazione con polinomi di grado 2.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

La procedura di Gram-Schmidt applicata a $[V_1, V_2]$ lascia invariate le prime ℓ colonne perchè già ortogonali. Quindi si può scrivere l'iterazione partendo dalla ℓ-esima colonna (da scrivere).

ESERCIZIO 2.

Si può stimare $\lambda_{\min}$ da sinistra (dischi di Gerschgorin), e poi applicare il metodo delle potenze inverse traslate con tale stima come parametro, con velocità di convergenza asintotica corrispondente (da scrivere nella forma generale).

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

I modulo - Prova scritta di Calcolo Numerico, 8 Gennaio 2021
Laurea Triennale in Matematica

1. Siano $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ con colonne ortonormali ed ℓ tale che $2\ell < n$.

   i) (6 punti) Descrivi una procedura ed il suo costo computazionale, per scrivere la fattorizzazione QR ridotta di $[V_1, V_2]$, cioè $[V_1, V_2] = V_3R_3$, che tenga conto della struttura;

   ii) (4 punti) Siano $A_1 = V_1S_1W_1^T$, $A_2 = V_2S_2W_2^T$ con $V_i, W_i \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$, $i = 1, 2$ aventi colonne ortonormali ed $S_i \in \mathbb{R}^{\ell\times\ell}$ di rango massimo. Supponi che $[V_1, V_2]$ abbia rango massimo.
   Sfruttando quanto fatto nel punto (i), proponi una procedura per determinare le matrici "alte" $V_3, W_3 \in \mathbb{R}^{n\times 2\ell}$, aventi colonne ortonormali, ed S_3 quadrata, tali che

   $$A_1 + A_2 = V_3S_3W_3^T.$$

   Descrivi in dettaglio il suo costo computazionale.

2. (7 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$, con $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ di rango massimo avente tutti gli elementi nulli tranne $a_{i,i}, a_{i+1,i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ e $a_{i,n} \neq 0$, $i = 1, \dots, n-1$.
   Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema, che tenga conto della struttura di A, e discutine il costo computazionale.

3. È data la matrice *simmetrica e definita positiva* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   i) (5 punti) Descrivi un algoritmo per approssimare l'autovalore di A più vicino a zero, insieme ai suoi criteri d'arresto;

   ii) (4 punti) Proponi una procedura per accelerarne la convergenza, spiega in che senso la convergenza possa in effetti essere migliore, e le (eventuali) condizioni per implementare tale procedura.

4. È data la matrice *normale* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare.

   i) (3 punti) Data $E = u\sigma v^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, determina $\|E\|$ con $\|\cdot\|$ norma matriciale indotta da quella Euclidea vettoriale.

   ii) (3 punti) Per un fissato autovalore di $A + E$ determina una stima per la distanza minima dall'insieme degli autovalori di A.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

i) La procedura di Gram-Schmidt applicata a $[V_1, V_2]$ lascia invariate le prime ℓ colonne perchè già ortogonali. Quindi si può scrivere l'iterazione partendo dalla ℓ-esima colonna (da scrivere).

ii) Dal punto i) si ha $[V_1, V_2] = V_3 R_3$ e $[W_1, W_2] = W_3 G_3$. Si ha

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 = V_1 S_1 W_1^T + V_2 S_2 W_2^T &= [V_1, V_2] \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1^T \\ W_2^T \end{bmatrix} \\ &= V_3 R_3 \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} (W_3 G_3)^T = V_3 S_3 W_3^T, \end{aligned}$$

con $S_3 = R_3 \begin{bmatrix} S_1 & \\ & S_2 \end{bmatrix} G_3^T$.

ESERCIZIO 2. A è bidiagonale inferiore $(n+1) \times n$ più l'ultima colonna (n-esima) nonzero. Applicando le rotazioni di Givens alla diagonale inferiore, si transforma la parte principale $n \times n$ della matrice in una bidiagonale superiore, più una colonna nonzero. La risoluzione del sistema corrispondente va scritta in modo esplicito.

ESERCIZIO 3. vedi l'esercizio della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 4.

Siano λ_i gli autovalori ordinati in modo decrescente in modulo.

i) Dal teorema sulla distanza dalla singolarià, si ottiene $\|E\| = |\lambda_n(A)|$.

ii) Sia $\tilde{\lambda}$ un autovalore di $A + E$. Dal teorema di Bauer-Fike con A normale, si ottiene $\min_i |\lambda_i - \tilde{\lambda}\| \leq |\lambda_{\min}(A)|$.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 4 Settembre 2020
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il problema: Determina una approssimazione di $T > 0$ tale che

$$F(T) = 0, \qquad \text{con} \quad F(T) := \int_0^T \sin(x + \sqrt{T^2 + x})dx - \frac{1}{4}.$$

i) (8 punti) Descrivi una implementazione (in Matlab) del metodo di Newton per il problema dato, e descrivine i criteri d'arresto.
(Ricorda che in generale, data $F(y) = \int_0^y f(x, y)dx$, si ha che $F'(y) = f(y, y) + \int_0^y \partial_y f(x, y)dx$.)

ii) (3 punti) Suggerisci un opportuno intervallo in cui scegliere il dato iniziale T_0.

2. È data l'equazione non lineare $x + \ln x = 0$ con una radice x^* in un intorno del punto 0.5;

i) (5 punti) Determina un intervallo chiuso in cui l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$ converga globalmente a x^*;

ii) (3 punti) Determina l'ordine di convergenza dell'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = x_k(1 - \ln x_k)/(x_k + 1)$.

3. Sia $f(x) = \sqrt{x^3 + \frac{3}{x^2}}$ per $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

i) (5 punti) Determina il polinomio interpolante p_2 di grado due di f con nodi $x_0 = 1/2, x_1 = 1, x_2 = 2$. Proponi una stima di $f(3/2)$ sfruttando il polinomio determinato;

ii) (5 punti) Supponi di non aver accesso al valore esatto $y_2 = f(x_2)$, ma di poterlo stimare come $\widetilde{y}_2 = 2.7$ (il valore esatto sarebbe $y_2 = 2.958$). Determina una stima dell'errore $\|p_2 - \widetilde{p}_2\|_\infty$ dove $\widetilde{p}_2$ è il polinomio interpolante ottenuto usando le coppie $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, \widetilde{y}_2)$, senza calcolare esplicitamente $\widetilde{p}_2$;

iii) (3 punti) Supponendo che sia disponibile il polinomio p_2 del punto i), determina il polinomio interpolante p_3 interpolante anche $x_3 = 3/2$ senza ricalcolare il polinomio da zero.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 4 Settembre 2020
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   i) (3 punti) Determina un intervallo $[a, b]$ tale che per $\alpha \in [a, b]$ la matrice A sia definita positiva, ma il metodo di Jacobi per $Ax = b$ non sia convergente.

   ii) (4 punti) Per $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con la stessa forma ed α opportuno, descrivi l'algoritmo di Jacobi per risolvere il sistema $Ax = b$, discutendone il costo computazionale.

   iii) (4 punti) Mostra che in ii) la matrice A ha la forma $A = D + vv^T$ con D diagonale e v vettore. Confronta il costo computazionale di ogni iterazione in ii) con un metodo diretto per la risoluzione del sistema $Ax = b$ che sfrutti D e v.

2. (5 punti) Descrivi in dettaglio un algoritmo ed il suo costo computazionale per la risoluzione del sistema a blocchi
$$\begin{bmatrix} D & L \\ L^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix},$$
   con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice triangolare inferiore non singolare, e $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice tridiagonale.

3. È data l'equazione non lineare $x + \ln x = 0$ con una radice x^* in un intorno del punto 0.5.

   i) (5 punti) Determina un intervallo in cui l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + e^{-x_k})$ converga globalmente a x^*.

   ii) (3 punti) Determina l'ordine di convergenza dell'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = x_k(1 - \ln x_k)/(x_k + 1)$.

4. Sia $f(x) = \sqrt{x^3 + \frac{3}{x^2}}$ per $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

   i) (3 punti) Determina il polinomio interpolante p_2 di grado due di f con nodi $x_0 = 1/2, x_1 = 1, x_2 = 2$;

   ii) (5 punti) Supponi di non aver accesso al valore esatto $y_2 = f(x_2)$, ma di poterlo stimare come $\widetilde{y}_2 = 2.7$ (il valore esatto sarebbe $y_2 = 2.958$). Determina una stima dell'errore $\|p_2 - \widetilde{p}_2\|_\infty$ dove $\widetilde{p}_2$ è il polinomio interpolante ottenuto usando le coppie $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, \widetilde{y}_2)$, senza calcolare esplicitamente $\widetilde{p}_2$.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 Luglio 2020
Laurea Triennale in Matematica

Esercizio n.1. 9 punti.

È dato il problema $f(x) = 0$, con $f \in C^2([a, b])$ e sia x^* l'unico zero di f in $[a, b]$.

1. Supponi che il metodo di Newton generi una successione $\{x_k\}$ ben definita in $[a, b]$, e sia $M > 0$ tale che
$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(y)}{f'(x)}\right| \leq M, \quad \forall x, y \in [a, b].$$
   i) (2 punti) Sfruttando lo sviluppo di Taylor intorno a x^*, dimostra che l'errore soddisfa
$$|M(x^* - x_{k+1})| \leq (M(x^* - x_k))^2.$$
   ii) (2 punti) Sfrutta tale relazione per determinare un intorno $I = I(M)$ di x^* che assicuri la convergenza per ogni $x_0 \in I$.

2. Sia $f \equiv p$, polinomio di grado n.

   i) (3 punti) Scrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di una radice del polinomio p, illustrando in dettaglio il calcolo di p e della sua derivata.

   ii) (2 punti) Sia $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, con radici tutte reali. Scegli un dato iniziale x_0 affinchè il metodo converga in modo monotòno alla radice più grande.

Esercizio n.2. 9 punti.

È dato l'integrale $I_\alpha = \int_0^1 f_\alpha(x)dx$, con $f_\alpha(x) = x^\alpha \cos(x\pi)$ e $\alpha \geq 1$

1. (4 punti) Calcola una approssimazione di I_α mediante la formula dei trapezi. Deriva una stima dell'errore per i valori di α per cui questa è scrivibile, giustificando la scelta.
2. (3.5 punti) Stima il numero di sottointervalli per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-2}, mediante la formula composita del trapezio, e la formula composita di Cavalieri-Simpson;
3. (1.5 punti) Per il numero minimo di sottointervalli trovato al punto precedente in ognuna delle due formule, quale dei due metodi è più efficiente, considerando come misura del costo computazionale il numero di valutazioni della funzione integranda?

Prova scritta di Calcolo Numerico, 14 Luglio 2020
Laurea Triennale in Matematica

Esercizio n.1. 12 punti

È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. (4 punti) Proponi un algoritmo che determini la fattorizzazione $A = QH$ con Q ortogonale e H Hessenberg superiore. Descrivine il costo computazionale.

2. (6 punti) Sfrutta l'algoritmo del punto precedente per risolvere il problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - \begin{bmatrix} A \\ \gamma e_n^T \end{bmatrix} x\|, \qquad b \in \mathbb{R}^{n+1},\ 0 \neq \gamma \in \mathbb{R}$$

in modo stabile. In particolare, modifica eventualmente l'algoritmo precedente in modo che non sia richiesta l'esplicita memorizzazione di Q.

3. (2 punti) Sia $A_1 = A + ve_n^T$ con $v, e_n \in \mathbb{R}^n$. Supponendo che la fattorizzazione $A = QH$ del punto 1 sia già disponibile, come si ottiene la fattorizzazione $A_1 = Q_1 H_1$?

Esercizio n.2. 10 punti

È dato il polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, di cui si vuole approssimare la prima radice positiva, $x^* \in [\frac{3}{5}, \frac{3}{2}]$.

1. (5 punti) Studia in dettaglio la convergenza dell'iterazione

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \text{con} \quad \phi(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3x}.$$

Nel caso di convergenza, determinane l'ordine di convergenza.

2. (3 punti) Scrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di una radice di p, illustrando in dettaglio il calcolo di p e della sua derivata.

3. (2 punti) Sapendo che tutte le radici di p sono reali, scegli un dato iniziale x_0 affinchè il metodo converga in modo monotòno alla radice più grande.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 30 Giugno 2020
Laurea Triennale in Matematica

Esercizio n.1. 10 punti

È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con tutti autovalori reali positivi.

1. (4 punti) Proponi una procedura per determinare una stima non banale $[\alpha, \beta]$ con $\alpha \geq 0$ contenente l'intervallo spettrale di A, usando solo gli elementi di A. Descrivi il corrispondente algoritmo.

2. (6 punti) Supponendo $\alpha > 0$, proponi un algoritmo per approssimare l'autocoppia corrispondente all'autovalore minimo di A, e che sfrutti α. Descrivine in dettaglio il costo computazione ed i criteri d'arresto.

Esercizio n.2. 12 punti

È dato il problema $f(\alpha) = 0$ con $f : [\frac{1}{100}\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos(t)}{t^{\frac{1}{2}}} dt,$$

con primo zero positivo $\alpha_* \approx 0.162$.

1. (4 punti) Scrivi la formula di quadratura composita dei rettangoli per approssimare f, e determina il minimo numero di sottointervalli – dipendente da α – in modo che l'errore sia inferiore a 10^{-1}.

2. (4 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per il problema considerato, e studiane la buona definizione e la convergenza in un intervallo contenente α_* in cui, per esempio, f sia convessa o concava.

3. (4 punti) Per il problema dato, proponi una implementazione dell'algoritmo di Newton mediante funzione Matlab, e lo script associato.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 18 Giugno 2020
Laurea Triennale in Matematica

Esercizio n.1. 9 punti

1. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonale e non singolare.
   (a) Descrivi un algoritmo per determinare la fattorizzazione $A = LU$ (supponendola possibile) con costo computazionale $O(n)$. Descrivi in dettaglio tale costo.
   (b) Descrivi un algoritmo per la risoluzione del problema ai minimi quadrati

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - \begin{bmatrix} A \\ \gamma e_n^T \end{bmatrix} x\|, \qquad \gamma \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^{n+1},$$

   sfruttando la decomposizione ottenuta in precedenza. Il costo computazionale deve mantenersi dell'ordine di n. Descrivi in dettaglio tale costo.

Esercizio n.2. 8 punti

È dato il problema $f_n(x) = 0$ con $f_n(x) = x^n - 1$ con n naturale, $n > 1$. E sia x_* la sua radice positiva.

1. Per $n = 2, 3$ descrivi l'iterazione di Newton e discutine la convergenza al variare di x_0.
2. Per $n = 2$, al variare di x_0 discuti la convergenza delle due iterazioni $x_k = \phi_i(x_{k-1})$, $i = 1, 2$, con

$$\phi_1(x) = x^{n+1},$$

   e

$$\phi_2(x) = x^{1/(n+1)}, \quad x_0 > 0.$$

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 17 Giugno 2020
Laurea Triennale in Matematica

Esercizio n.1. 9 punti.

È dato il problema $f(x) = 0$, con $f(x) = \ln^2(x) - x - 1$, $x > 0$.

1. Mostra graficamente che esiste un solo zero x_* di f nell'intervallo $(0, 1)$. Dimostra perchè.
2. Descrivi l'algoritmo di Newton per determinare la successione $\{x_k\}_{k\geq 0}$ e proponi una implementazione mediante funzione Matlab e script allegato, descrivendo criteri d'arresto opportuni.
3. Determina il più grande valore del dato iniziale $x_0 \leq 1$ tale per cui $x_1 > 0$ cosicchè la seconda iterazione di Newton sia ben definita.

```
% p.1  y = ln^2(x)  e  y = x+1.   La prima \'e decrescente per 0<x<1 e sempre positiva,
%tendente a +inf per x -> 0,  e la seconda e' crescente e maggiore di 1 per x>0, entrambe
% continue.  quindi intersezione  ci sara'.
%
%
%
% p.3 supp x >0. dev'essere x1 >0, cioe:
% i)  dev'essere  x1 = x - f(x)/f'(x)  = x ( -ln^2 x + 2 ln x +1)/( 2 ln x - x) > 0.
%
%   Siccome x>0, dev'essere ( -ln^2 x + 2 ln x +1)/( 2 ln x - x) >0.
%
%   per x<1, 2 ln x - x <0 , quindi dev'essere ( -ln^2 x + 2 ln x +1) < 0.
%   cioe' ln^2 x - ln x - 1 > 0
%   (ln x - (1-sqrt(2)) (ln x - (1+sqrt(2)) > 0
%   Con il vincolo x < 1, questo equivale a ln x - (1-sqrt(2)) < 0, da cui x < exp(1-sqrt(2)).
%
% ii) dev'essere x1 = x( -ln^2 x + 2 ln x +1)/( 2 ln x - x) < exp(1-sqrt(2)),
%
%     cioe', raccogliendo ln x e riportando x al denominatore,
%
%          x1= -(1- (1+sqrt(2))/lnx) (1 - (1-sqrt(2))/ln ) / (2/x - 1/lnx)
%
%   si ha che 1/(2/x - 1/lnx) < = 1/ (2/x) quindi
%
%        x1 <=   ...
```

Esercizio n.2. 9 punti.

Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1. Determina esplicitamente il polinomio di grado 2 interpolante la funzione f nei nodi $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, e dai una stima dell'errore.
2. Usando gli stessi 3 nodi, determina esplicitamente il polinomio di grado 1 che minimizzi la distanza tra i dati.
3. Determina il numero sufficiente m di sottointervalli in modo che la formula composita di Cavalieri-Simpson per approssimare $\int_0^1 f(x)dx$ abbia un errore inferiore a 10^{-1}.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 04 Febbraio 2020
Laurea Triennale in Matematica

1. (12 punti) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonale e non singolare. Descrivi in dettaglio un algoritmo iterativo per approssimare l'autovalore di A più vicino all'origine, con un costo computazionale $\mathcal{O}(n)$ per iterazione.

2. (5 punti) Supponendo di conoscere Q ed R della fattorizzazione QR della matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$, determina la soluzione del problema ai minimi quadrati
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - \begin{bmatrix} A \\ \alpha e_n^T \end{bmatrix} x\|, \qquad \alpha \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

3. È data la funzione $\phi(x) = x^3 + x - 2$.
i) (6 punti) Proponi un metodo localmente convergente per determinare il punto fisso $x_* = \sqrt[3]{2}$ di ϕ, e discutine la convergenza.
ii) (4 punti) Descrivi come usare il metodo di bisezione per determinare il punto fisso in i).

4. (5 punti) Costruisci la formula di quadratura
$$\int_0^h f(x)dx \approx af(0) + bf(h), \quad 0 < h < \pi$$
che sia esatta per $f(x) = \cos(x)$ e $f(x) = \sin(x)$. Questa formula integra le costanti esattamente?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si tratta di descrivere il metodo delle potenze inverse. Siccome la matrice è tridiagonale, la risoluzione del sistema ad ogni iterazione si fa con l'algoritmo di Thomas, con costo $O(n)$. Si noti che la prima parte dell'algoritmo di Thomas, quella in cui vengono calcolati i coefficienti della fattorizzazione, deve essere fatta una sola volta fuori dal ciclo del metodo delle potenze inverse.

ESERCIZIO 2. Si ha $A = QR$ con $R = [R_1; 0]$, $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e Q ortogonale. Quindi

$$\begin{bmatrix} A \\ \alpha e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ \alpha e_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-1} & \\ & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{R}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =: \tilde{Q}\tilde{R},$$

dove G è la matrice delle rotazioni di Givens che coinvolge le righe n e $m+1$, in modo da annullare α, e $\tilde{R}_1$ coincide con R_1 tranne per l'elemento $(R_1)_{n,n}$ che è stato modificato dalla rotazione (dare i dettagli). La matrice $\tilde{Q}$ è quindi ortogonale. Si procede quindi con la risoluzione del problema ai minimi quadrati come con una normale fattorizzazione QR.

In alternativa, si potrebbe usare anche la formula di Sherman-Morrison sull'equazione normale.

ESERCIZIO 3. i) Un metodo localmente convergente è, per esempio, il metodo di Newton (da descrivere e discutere) per l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^3 - 2$, cosicchè $f(x) = \phi(x) - x$.

ii) Sempre usando f si descrive il metodo di bisezione.

ESERCIZIO 4. Vedi esercizi analoghi di prove precedenti.

I modulo - Prova scritta di Calcolo Numerico, 04 Febbraio 2020
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   i) (4 punti) Dimostra che il metodo di Gauss-Seidel applicato ad A converge.
   ii) (6 punti) Scrivi in dettaglio l'algoritmo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $b \neq 0$, e descrivine il costo computazionale.

2. (12 punti) Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonale e non singolare. Descrivi in dettaglio un algoritmo iterativo per approssimare l'autovalore di A più vicino all'origine, con un costo computazionale $\mathcal{O}(n)$ per iterazione.

3. Sia M simmetrica e definita positiva e sia $\kappa_2(M)$ il suo numero di condizionamento, con la norma matriciale indotta dalla norma vettoriale Euclidea.
   i) (3 punti) Sia $M = LL^T$ la fattorizzazione di Cholesky di M. Dimostra che $\kappa_2(M) = \kappa_2(L)^2$.
   ii) (2 punti) Data $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $m > n$ e $M = A^TA$, mostra come determinare $\kappa_2(M)$ senza calcolare esplicitamente M, usando solo eventuali decomposizioni di A.
   iii) (5 punti) Supponendo di conoscere Q ed R della fattorizzazione QR della matrice A del punto ii), determina la soluzione del problema ai minimi quadrati

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - \begin{bmatrix} A \\ \alpha e_n^T \end{bmatrix} x\|, \qquad \alpha \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) La matrice è a diagonale dominante (da verificare), quindi il metodo converge per un risultato noto. ii) come da dispense.

ESERCIZIO 2. Vedi il testo della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3. i) Vedi le dispense. ii) Sia $A = Q_1 R_1$ la fattorizzazione ridotta di A. Allora $M = R_1^T Q_1^T Q_1 R_1 = R_1^T R_1$. (Volendo, è possibile rendere gli elementi diagonali di R_1 tutti positivi moltiplicando le colonne di Q_1 per i segni degli elementi diagonali di R_1). Si procede quindi come in i). iii) Vedi il testo della prova completa nella stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 21 Gennaio 2020
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice tridiagonale simmetrica $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a_{i,i} = \sqrt{i+1}$ e $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1/2$ (qui "i" è l'indice di riga o colonna!)
i) (4 punti) Dimostra che A è definita positiva e determina una stima dall'alto per il suo numero di condizionamento;
ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo SOR(ω) per il sistema lineare $Ax = b$ con A definita sopra e $b \neq 0$, con il suo costo computazionale, e determina una stima del valore ω ottimale.

2. (5 punti) È data la matrice non singolare $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a_{i,i} \neq 0$ e $a_{i,1} \neq 0$ per $i = 1, \dots n$ e $a_{i,i+1} \neq 0$ per $i = 1, \dots n-1$, e zero altrimenti.
i) Descrivi un algoritmo con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$ per la risoluzione di sistemi lineari aventi A come matrice dei coefficienti, e descrivine il costo computazionale;

3. È data l'equazione non lineare $f(x) = 0$ con f sufficientemente regolare.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di una radice semplice x_* di $f(x) = 0$, ed i suoi criteri d'arresto.
ii) (5 punti) Sia α una radice di f di molteplicità $m > 1$, cosicchè $f(x) = (x-\alpha)^m h(x)$ con h funzione non identicamente nulla e $h(\alpha) \neq 0$. Sia x_k l'iterata k-esima del metodo di Newton, che supponiamo convergente. Scrivendo esplicitamente $x_{k+1}-\alpha$ in funzione di $x_k - \alpha$, mostra che
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = 1 - \frac{1}{m}.$$

4. Sia $f(x) = \cos(\pi x)\exp(2x)$ per $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
i) (3 punti) Determina il polinomio interpolante p_2 di grado due di f con nodi equidistanti $x_0 = -1/4, x_1 = 0, x_2 = 1/4$;
ii) (5 punti) Supponi di non aver accesso al valore esatto $y_2 = f(x_2)$, ma di poterlo stimare come $\widetilde{y}_2 = 1.63$ (il valore esatto sarebbe $y_2 = 1.59$). Determina una stima dell'errore $\|p_2 - \widetilde{p}_2\|_\infty$ dove $\widetilde{p}_2$ è il polinomio interpolante ottenuto usando le coppie $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, \widetilde{y}_2)$, senza calcolare esplicitamente $\widetilde{p}_2$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi la prova del Modulo I nella stessa data

ESERCIZIO 2. Vedi la prova del Modulo I nella stessa data

ESERCIZIO 3.

i) Come negli appunti di lezione.

ii) Nel caso in cui f abbia radice multipla, cioè f è della forma: $f(x) = (x - \overline{x})^m \, v(x)$, radice di molteplicità m e $v(x) \neq 0$. Abbiamo che $f'(x) = (x - \overline{x})^{m-1} \underbrace{[m \, v(x) + (x - \overline{x})v'(x)]}_{h(x)}$.

Quindi

$$x_{k+1} - \overline{x} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x = \ldots = (x_k - \overline{x}) \left[1 - \frac{v(x_k)}{h(x_k)}\right]$$

Da cui

$$\frac{x_{k+1} - \overline{x}}{x_k - \overline{x}} = 1 - \frac{v(x_k)}{h(x_k)} \rightarrow_{k \to +\infty} 1 - \frac{v(\overline{x})}{h(\overline{x})} = 1 - \frac{1}{m}.$$

ESERCIZIO 4. i) Si può procedere o mediante matrice di Vandermonde, o scrivendo la formula con i polinomi di Lagrange.

ii) Si usa la stima $\|p_2 - \tilde{p}_2\|_\infty \leq \Lambda_2 \max_{i=0,\ldots,2} |p_2(x_i) - \tilde{p}_2(x_i)|$. Λ_2 può essere calcolata o stimata esplicitamente, e $\max_{i=0,\ldots,2} |p_2(x_i) - \tilde{p}_2(x_i)| = |y_2 - \tilde{y}_2| = 0.04$.

I modulo - Prova scritta di Calcolo Numerico, 21 Gennaio 2020
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice tridiagonale simmetrica $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $a_{i,i} = \sqrt{i+1}$ e $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1/2$. (qui "$i$" è l'indice di riga o colonna!)
i) (4 punti) Dimostra che A è definita positiva e determina una stima dall'alto per il suo numero di condizionamento;
ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo SOR(ω) per il sistema lineare $Ax = b$ con A definita sopra e $b \neq 0$, con il suo costo computazionale, e determina una stima del valore ω ottimale.

2. È data la matrice non singolare $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $a_{i,i} \neq 0$ e $a_{i,1} \neq 0$ per $i = 1, \dots n$ e $a_{i,i+1} \neq 0$ per $i = 1, \dots n-1$, e zero altrimenti.
i) (5 punti) Descrivi un algoritmo con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$ per la risoluzione di sistemi lineari aventi A come matrice dei coefficienti, e descrivine il costo computazionale;
ii) (5 punti) Descrivi un algoritmo per l'approssimazione dell'autocoppia di A con autovalore più vicino a zero, che sfrutti l'algoritmo al punto i), e descrivine criteri d'arresto e costo computazionale.

3. Sono dati la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\gamma > 0$ tali che $\|A\| \leq \gamma$, dove $\| \cdot \|$ è la norma matriciale indotta dalla norma vettoriale Euclidea.
i) (4 punti) Dai una condizione sufficiente su $\alpha > 0$ affinchè la matrice $\alpha I + A$ sia non singolare, e fornisci una stima per la norma della sua inversa.
ii) (5 punti) Supponendo ora che A sia simmetrica, descrivi l'algoritmo dei gradienti coniugati applicato ad $A + \alpha I$, illustrando in che modo la scelta di α possa assicurare la buona definizione dell'algoritmo.
iii) (3 punti) Nelle ipotesi in (ii), fornisci una stima dall'alto per l'errore ad ogni iterazione del metodo, in una norma opportuna, che dipenda da α e da opportuni autovalori di A.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Gli autovalori di A sono contenuti nell'insieme $\cup_i \mathcal{G}_i^{(r)}$ dove $\mathcal{G}_i^{(r)} = \{z : |z - \sqrt{i+1}| \leq 1\}$. Il disco più a sinistra è centrato in $\sqrt{3}$ ed ha raggio 1, quindi è a destra dell'origine, escludendo l'origine, da cui segue che $\lambda_{\min}$ è positivo e vale $\lambda_{\min} \geq \sqrt{3} - 1$. Analogamente, $\lambda_{\max} \leq \sqrt{n+1} - 1$, da cui segue $\kappa(A) \leq (\sqrt{n+1} - 1)/(\sqrt{3} - 1)$.

ii) Per la stima di ω_{opt} ottenuta per matrici simmetriche e definite positive, bisogna stimare $\rho(B_J)$, con $B_J = \frac{1}{2}\text{tridiag}(1/\sqrt{i+1}, 0, 1/\sqrt{i+1})$. Tutti gli autovalori di B_J soddisfano $|\lambda| \leq 2/(2\sqrt{i+1}) \leq 1/\sqrt{2}$. Maggiorando nella stima nota per ω_{opt} si ottiene il risultato.

ESERCIZIO 2. i) Avendo $A = B + uv^T$ con B bidiagonale superiore e $v = e_1$, si usa la formula di Sherman per ottenere $(B + uv^T)^{-1}$, che richiede alcuni prodotto scalari (da esplicitare) e la risoluzione di due sistemi bidiagonali superiori (da scrivere esplicitamente).

ii) Si tratta del metodo delle potenze inverse. I sistemi lineari da risolvere sono con A, scritta come sopra. Alcuni dei prodotti scalari e la risoluzione di uno dei due sistemi possono essere fatti all'inizio, e non ricalcolati ad ogni iterazione.

ESERCIZIO 3. i) Supponiamo A non singolare. Si ha $(\alpha I + A) = \alpha(I + \alpha^{-1}A)$. Per un risultato noto, se $\|\alpha^{-1}A\| < 1$ allora $(I + \alpha^{-1}A)$ è invertibile e vale $\|(I + \alpha^{-1}A)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|\alpha^{-1}A\|)$. Siccome $\|\alpha^{-1}A\| = \alpha^{-1}\|A\| \leq \alpha^{-1}\gamma$, è sufficiente che $\alpha^{-1}\gamma < 1$ per ottenere il risultato, cioè $\alpha > \gamma$. Inoltre, $\|(\alpha I + A)^{-1}\| = 1/\alpha\|(I + \alpha^{-1}A))^{-1}\| \leq (1/\alpha)/(1 - \gamma/\alpha) = 1/(\alpha - \gamma)$.

Per A singolare, è sufficiente considerare $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ in modo tale per cui $\alpha_1 I + A$ sia non singolare. Si prosegue quindi come sopra, usando la matrice $\alpha_1 I + A$ al posto di A.

ii) La scelta $\alpha > \gamma$ rende $A + \alpha I$ definita positiva, così tutte le quantità calcolate nell'algoritmo sono ben definite. In particolare, lo spettro di $A + \alpha I$ è contenuto in $[\lambda_{\min} + \alpha, \lambda_{\max} + \alpha]$, con $\lambda_{\min}$ non necessariamente positivo.

iii) Vale $\kappa(\alpha I + A) \leq \lambda_{\max}(A + \alpha I)/\lambda_{\min}(A + \alpha I) = (\lambda_{\max} + \alpha)/(\lambda_{\min} + \alpha)$. La stima da usare è quella per $\|x_* - x_k\|_{A+\alpha I}$, che coinvolge il numero di condizionamento di $A + \alpha I$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 17 Dicembre 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare, con $a_{i,j} = 0$ per $|i-j| > 2$, e supponi che A ammetta la fattorizzazione LU senza pivoting.
   i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo che permette di ottenere L ed U a banda, con L triangolare inferiore ed U triangolare superiore, tali che $A = LU$, e valutane il costo computazionale.
   ii) (4 punti) Descrivi i due algoritmi per la risoluzione di $LUx = b$ con L ed U determinate sopra, cioè risolvi $Ly = b$ e $Ux = y$, e valutane il costo computazionale.

2. Siano (λ_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$ le autocoppie (non note) di $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, con i λ_i ordinati in modo crescente. Sia $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ una coppia approssimante (λ_1, x_1), calcolata con un certo metodo numerico.
   i) (2 punti) Stima dall'alto l'errore assoluto $|\lambda_1 - \hat{\lambda}|$ usando quantità effettivamente disponibili.
   ii) (6 punti) Supponendo che λ_1 sia l'autovalore di A più vicino a $\hat{\lambda}$, scrivi un algoritmo che migliora l'approssimazione a λ_1 rispetto a $\hat{\lambda}$, e descrivine il costo computazionale.

3. È data la funzione di variabile reale f, di cui sono noti i valori e le sue derivate in $\{x_1, x_2\}$ con $x_1 \neq x_2$.
   i) (6 punti) Descrivi un metodo per determinare i coefficienti di un polinomio p di grado 3 tale che $p(x_i) = f(x_i)$ e $p'(x_i) = f'(x_i)$, $i = 1, 2$ e proponi condizioni sufficienti perchè questo polinomio esista e sia unico.
   ii) (2 punti) Determina tale polinomio per $f(x) = \sin(\pi x)$ e $x_1 = 1/4$, $x_2 = 1/2$.

4. È dato l'integrale $\int_0^\pi f(x)dx$ con $f(x) = x\cos(x)$.
   i) (4 punti) Usa la formula di quadratura di Simpson composita con $m = 5$ sottintervalli per approssimare l'integrale e determina una stima dell'errore.
   ii) (4 punti) Descrivi una modifica della procedura in i) per trattare il caso $f(x) = |x\cos(x)|$, che permetta di ottenere una nuova stima dell'errore mediante gli strumenti noti.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Modifica dell'algoritmo LU di base.

ESERCIZIO 2. i) Supponendo che λ_1 sia l'autovalore più prossimo a $\hat{\lambda}$, il risultato si ottiene dal Teorema 6.3.3 nelle dispense, cosicchè $|\lambda_1 - \hat{\lambda}| \leq \|A\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{x}\|/\|\hat{x}\|$. ii) Si tratta di usare il metodo delle potenze inverse traslate, con λ_1 come shift.

ESERCIZIO 3. i) Sia $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$. Imponendo le condizioni di interpolazione per p e la sua derivata, si ottengono 4 equazioni lineari in $a_0, \ldots, a_3$, quindi un sistema lineare, la cui risoluzione determina l'unico p, se la matrice dei coefficienti è non singolare. ii) L'ipotesi permette di determinare il la matrice dei coefficienti ed il termine noto del sistema lineare e quindi di risolvere il sistema esplicitamente.

ESERCIZIO 4. i) Si procede come per altri esempi dello stesso tipo. ii) Volendo mantenere più o meno lo stesso numero di sottointervalli, una possibilità consiste nello scegliere come nodo della formula composita il punto angoloso, dopo di che si procede come in precedenza. Commentare sulla eventuale scelta di m.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 Settembre 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e tridiagonale non singolare, che ammette la fattorizzazione LU.
   i) (4 punti) Descrivi un algoritmo per il calcolo degli elementi di $L, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con L bidiagonale inferiore, e D diagonale, tali che $A = LDL^T$;
   ii) (4 punti) Proponi un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$, usando la fattorizzazione ottenuta nel punto i).

2. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare.
   i) (5 punti) Descrivi gli algoritmi associati al metodo delle potenze e delle potenze inverse, discutendone il costo computazionale ed i criteri d'arresto;
   ii) (3 punti) Descrivi come utilizzare gli algoritmi del punto i) per stimare $\kappa(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$, dove $\|\cdot\|$ è la norma matriciale indotta dalla norma euclidea.

3. È data la funzione di variabile reale f.
   i) (4 punti) Determina α, β, x_0 in modo che la seguente formula di quadratura abbia massimo grado
$$\int_c^{c+h} f(x)dx \approx \alpha f(x_0) + \beta(f(c+h) - f(c)), \quad h > 0, c > 0;$$
   ii) (4 punti) Partendo dal risultato in i) sviluppa una formula di quadratura composita per $\int_a^b f(x)dx$, con passo $h = (b-a)/m$.

4. Considera l'iterazione di punto fisso $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ con la funzione $\phi(x) = ax + bx^2 + cx^3$.
   i) (5 punti) Dato $x_* > 0$, determina a, b, c in modo che l'iterazione converga localmente ad $1/x_*$ con ordine $p = 3$;
   ii) (3 punti) Determina la condizione sull'errore iniziale $x_0 - 1/x_*$ affinchè l'iterazione converga.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) A è tridiagonale ed ammette LU. La fattorizzazione di Thomas determina L bidiagonale inferiore con diagonale uno, ed U bidiagonale superiore. Ponendo $D = \text{diag}(U)$ e $L_1^T = D^{-1}U$ si ha $A = LDL_1^T$. Per simmetria dev'essere $L_1 = L$. Dall'algoritmo di Thomas (da descrivere), si ha che $D_{i,i} = \alpha_i$ e si verifica che $\beta_{i+1} = c_i/\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.

ii) L'algoritmo completo è quindi una piccola variante del metodo di Thomas, che può essere descritta partendo dalle dispense e la modifica del punto i).

ESERCIZIO 2. i) Come da dispense.

ii) Si noti che $\|Ax\|^2 = x^T A^T Ax$. Quindi si ha che $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$. Quindi basta applicare il metodo delle potenze a $A^T A$ per stimare $\|A\|$. Analogamente, $\|A^{-1}\| = \sqrt{\lambda_{\max}((AA^T)^{-1})}$ per cui si procede con il metodo delle potenze inverse applicato a AA^T.

ESERCIZIO 3. i) Vedi esercizi simili proposti in precedenti prove. ii) Si applica il risultato in (i) ad ogni singolo sottointervallo.

ESERCIZIO 4. Per semplificare la notazione, sia $\alpha = 1/x_*$. i) Si impone $\phi(\alpha) = \alpha$ e $\phi^{(k)}(\alpha) = 0$ per $k = 1, 2$. da cui si ottiene $c = 1/\alpha^2$, $b = -3/\alpha$ e $a = 3$. ii) Per la convergenza locale, siccome $|x_1 - \alpha| \leq |\phi'(\xi_0)|\,|x_0 - \alpha|$ per $\xi_0 \in (x_0, \alpha)$, è sufficiente mostrare che esiste un intorno (x_0, α) tale che $|\phi'(\xi_0)| < 1$ per ogni $\xi_0 \in (x_0, \alpha)$. Per le successive iterazioni la condizione verrà ugualmente verificata. Si ha $|\phi'(\xi_0)| < 1$ se e solo se $|\alpha^2 - 2\alpha\xi_0 + \xi_0^2| < \alpha^2/3$, cioè $|\xi_0 - \alpha|^2 < \alpha^2/3$, cioè se e solo se $|\xi_0 - \alpha| < \sqrt{\alpha^2/3}$, per $\xi_0 \in (x_0, \alpha)$. Se $|x_0 - \alpha| < \sqrt{\alpha^2/3}$ tale disuguaglianza è verificata.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 Settembre 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. È data una funzione positiva, definita in $[a,b]$, tale che

$$\min_{x\in[a,b]} |f(x)| = m_0, \quad \max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| = M_k, \ k = 0,1,2,\ldots$$

i) (5 punti) Sia p_{n-1} il polinomio di grado al più $n-1$ interpolante f agli n nodi di Chebyshev, relativamente a $[a,b]$. Stima l'errore relativo

$$r_n = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_{n-1}(x)|/|f(x)|.$$

ii) (3 punti) Applica il risultato ad $f(x) = \ln x$ con $[a,b] = [e, e^2]$. Determina β tale che $r_n = \alpha\beta^n$ con $0 < \beta < 1$ ed $\alpha = \alpha(n)$ che varia poco con n.

2. È dato il polinomio $p(x) = x^3 - 7x - 6$ avente tutte radici reali.
i) (6 punti) Scrivi l'iterazione di Newton per determinare la radice più a destra sull'asse dei numeri reali, mostrando come sfruttare la regola di Horner. Proponi un algoritmo completo di tale iterazione;
ii) (2 punti) Proponi un dato iniziale che assicuri la convergenza monotona alla radice cercata.

3. È data la funzione di variabile reale f.
i) (4 punti) Determina α, β, x_0 in modo che la seguente formula di quadratura abbia massimo grado

$$\int_c^{c+h} f(x)dx \approx \alpha f(x_0) + \beta(f(c+h) - f(c)), \quad h > 0, c > 0;$$

ii) (4 punti) Partendo dal risultato in i) sviluppa una formula di quadratura composita per $\int_a^b f(x)dx$, con passo $h = (b-a)/m$.

4. Considera l'iterazione di punto fisso $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0,1,\ldots$ con la funzione $\phi(x) = ax + bx^2 + cx^3$.
i) (5 punti) Dato $x_* > 0$, determina a, b, c in modo che l'iterazione converga localmente ad $1/x_*$ con ordine $p = 3$;
ii) (3 punti) Determina la condizione sull'errore iniziale $x_0 - 1/x_*$ perchè l'iterazione converga.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Usando i nodi di Chebyshev si ottiene $r_n \leq \frac{1}{n!}\frac{M_n}{m_0}\frac{(b-a)^n}{2^n}\frac{1}{2^{n-1}}$. ii) Si ha $b-a = e(e-1)$, $|f(x)| \geq 1$ e $|f^{(n)}(x)| \leq (n+1)!/e^n$. Quindi sostituendo nella stima del punto (i), si ha $r_n \leq \frac{2}{n}(\frac{e-1}{4})^n \equiv \alpha(n)\beta^n$.

ESERCIZIO 2. i) Come da dispense. ii) Usa i due teoremi relativi nelle dispense (che usano i dischi di Gerschgorin).

ESERCIZIO 3. Vedi testo della prova completa nello stesso giorno.

ESERCIZIO 4. Vedi testo della prova completa nello stesso giorno.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 Luglio 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice simmetrica $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,i} = 3$, $i = 1, \dots, n$ e $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = (-1)^i$, $i = 1, \dots, n-1$.
   i) (2 punti) Determina una stima per l'intervallo spettrale da cui si deduca che A è definita positiva.
   ii) (6 punti) Descrivi in dettaglio un algoritmo ed il suo costo computazionale, per il calcolo numerico approssimato dell'autocoppia associata all'autovalore di A più a sinistra, sfruttando le informazioni ottenute nel punto i).

2. È data la matrice $A = (a_{i,j})$ non singolare, con $a_{i,j} = 0$ per $i > j + 2$, $j = 1, \dots, n-2$.
   i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss che tenga conto della struttura della matrice;
   ii) (4 punti) Considera il sistema lineare $Ax = b$ con la matrice A data. Descrivi in dettaglio il costo computazionale per il calcolo numerico della soluzione x, sfruttando quanto fatto nel punto i).

3. È data la funzione $f(x) = e^{-x}\cos(x)$, con $x \in [0, \pi]$.
   i) (1 punto) Verifica che la funzione ammette un solo zero x^* nell'intervallo considerato;
   ii) (2 punti) Descrivi il metodo di bisezione per l'approssimazione di x^*, proponendo un intervallo iniziale opportuno;
   iii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab (funzione `bisezione.m`) del metodo, ed uno script di chiamata alla funzione, per la f considerata.

4. (7 punti) È data la funzione $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, con $x \in [-1, 1]$.
   Determina una approssimazione per interpolazione composita mediante funzioni spline di grado $\ell = 1$ su $m = 4$ intervalli.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) I dischi di Gerschgorin assicurano che $|\lambda - 3| \leq 2$, quindi $\lambda_i \geq 1$ per ogni autovalore λ_i di A.

ii) La matrice A è simmetrica definita positiva, quindi l'autovalore più a sinistra è il più vicino a zero. Si descrive quindi il metodo delle potenze inverse. Siccome gli autovalori sono tutti uguali o maggiori di 1, si può considerare il metodo delle potenze inverse traslate con lo shift $\sigma = 1$.

ESERCIZIO 2. i) A è a banda inferiore, quindi nell'algoritmo di Gauss il vettore m_k ha elementi zero sotto la banda. Questa modifica influisce sul costo della costruzione della matrice U.

ii) Il costo computazionale sarà dell'ordine $O(n^2)$ (da mostrare).

ESERCIZIO 3. i) Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $\cos(x) = 0$ se e solo se $x = \pi/2$ per $x \in [0, \pi]$. ii) Vedi gli appunti di lezione per il metodo. L'intervallo considerato è adatto, visto che $f(0) > 0$ e $f(\pi) < 0$. iii) vedi lab.

ESERCIZIO 4. Per il grado 1, l'approssimazione corrisponde all'approssimazione composita. Volendo, si può introdurre la base locale vista a lezione.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 Luglio 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. Considera l'integrale $I = \int_{-1}^{1} |x| dx$ (nota che $I = 1$), e approssima I mediante la formula composita dei trapezi I_m di passo $h = 2/m$, con $m = 1, 2, 3, \ldots$.
   i) (3 punti) Mostra, senza calcolare esplicitamente la formula di quadratura, che $I_m = 1$ per m pari;
   ii) (5 punti) Determina I_m con m dispari e commenta sulla velocità di convergenza.

2. È data l'equazione $f(x) = 0$ con $f(x) = x^3 - a$, con $a > 0$.
   i) (3 punti) Scrivi l'iterazione di Newton per determinare $\sqrt[3]{a}$;
   ii) (5 punti) Considera l'equazione equivalente $f_\lambda(x) = 0$ con $f_\lambda(x) = x^{3-\lambda} - ax^{-\lambda}$, e determina λ in modo che il metodo di Newton converga in modo cubico. Scrivi l'iterazione di Newton associata nella forma più semplice possibile.

3. È data la funzione $f(x) = e^{-x}\cos(x)$, con $x \in [0, \pi]$.
   i) (1 punto) Verifica che la funzione ammette un solo zero x^* nell'intervallo considerato;
   ii) (2 punti) Descrivi il metodo di bisezione per l'approssimazione di x^*, proponendo un intervallo iniziale opportuno;
   iii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab (funzione `bisezione.m`) del metodo, ed uno script di chiamata alla funzione, per la f considerata.

4. (7 punti) È data la funzione $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, con $x \in [-1, 1]$.
   Determina una approssimazione per interpolazione composita mediante funzioni spline di grado $\ell = 1$ su $m = 4$ intervalli.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Dividiamo l'intervallo di integrazione in due sottointervalli [1 0] e [0, 1]. I_m lavorerà sui due intervalli per m pari. La formula dei trapezi è esatta per polinomi di grado 1 e questo è sufficiente per concludere che $I_m = 1$, lavorando sui due intervalli. ii) con m dispari, l'intervallo centrale contiene il punto angoloso, per cui la funzione non è sufficientemente regolare perchè la teoria dell'errore valga.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa della stessa data.

ESERCIZIO 4. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa della stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 Giugno 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati il vettore $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ e la matrice $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ tridiagonale, di rango massimo, definita come

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & a_{n+1,n} \end{bmatrix}, \quad a_{n+1,n} \neq 0.$$

i) (6 punti) Descrivi in modo completo un algoritmo per la risoluzione del problema $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$, con un costo computazionale $O(n)$;
ii) (2 punti) Descrivi in dettaglio tale costo computazionale.

2. È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-x}\mathrm{dx}$.
i) (6 punti) Stima il numero di sottointervalli necessario per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-3}, mediante la formula composita del trapezio, e la formula composita di Cavalieri-Simpson;
ii) (2 punti) Per il numero minimo di sottointervalli trovato in i) in ognuna delle due formule, quale dei due metodi è più efficiente, considerando come misura del costo computazionale il numero di valutazioni della funzione integranda?

3. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e tridiagonale con $a_{i,i} = i$, $i = 1,\ldots,n$ e $a_{i-1,i} = a_{i,i-1} = 1/3$, $i = 2,\ldots,n$ e considera il sistema lineare $Ax = b$ con $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$.
i) (3 punti) Mostra che il metodo iterativo di Jacobi converge;
ii) (5 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave dell'algoritmo di Jacobi, con opportuni criteri d'arresto.

4. Sono dati i nodi $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = \cos(x\pi)e^x$.
i) (3 punti) Calcola il polinomio di grado 2 interpolante la funzione f nella forma $p(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ mediante la matrice di Vandermonde.
ii) (3 punti) Calcola il polinomio di grado 1 che minimizza la distanza di interpolazione (nel senso dei minimi quadrati) rispetto ad f usando i nodi dati.
iii) (2 punti) Supponendo $x_1 = x_2 - \varepsilon$ con $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ piccolo, commenta sul condizionamento del problema al punto i) ed in particolare sulla possibile quasi singolarità della matrice dei coefficienti.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3. i) La matrice è a diagonale dominante per righe, quindi un risultato noto assicura che $\|B_J\|_\infty < 1$ ed il metodo converge.

ii) Vedi l'esercitazione di laboratorio.

ESERCIZIO 4. i) Si ha $f(x_0) = -\frac{1}{e}$, $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = -\frac{1}{e}$. Imponendo le condizioni di interpolazione si risolve il sistema lineare $V\alpha = y$ con $y = [-1/e, 1, -e]^T$ e $V = [1, -1, 1; 0, 0, 1; 1, 1, 1]$. La soluzione di tale sistema determina fornisce i coefficienti $[\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0]$ del polinomio cercato. ii) vedi la soluzione dell' es. 3 del 19 Giugno 2018 iii) Per $\varepsilon \ll 1$ la seconda riga $[(1-\varepsilon)^2, 1-\varepsilon, 1]$ e terza riga $[1, 1, 1]$ di V sono quasi linearmente dipendenti. In particolare, il condizionamento di queste due righe dipende dalla quasi singolarità della matrice $[1-\varepsilon, 1; 1, 1]$, il cui determinante è $-\varepsilon$, quindi la dipendenza da ε è lineare.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 03 Giugno 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il polinomio $p_3(x) = x^3 - 4.5x^2 + 3.5x + 3$ con tutte radici reali.

   i) (6 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per polinomi con la regola di Horner, per determinare la radice più grande.

   ii) (2 punti) Proponi un dato iniziale che assicuri la convergenza del metodo di Newton (senza calcolare le radici).

2. È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-x}\mathrm{dx}$.

   i) (6 punti) Stima il numero di sottointervalli necessario per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-3}, mediante la formula composita del trapezio, e la formula composita di Cavalieri-Simpson;

   ii) (2 punti) Per il numero minimo di sottointervalli trovato in i) in ognuna delle due formule, quale dei due metodi è più efficiente, considerando come misura del costo computazionale il numero di valutazioni della funzione integranda?

3. Sia $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ con $x^* \in (1, 2)$ unica radice reale.

   i) (4 punti) Mostra che l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = 20/(x_k^2 + 2x_k + 10)$ converge e discutine l'ordine di convergenza per un opportuno intervallo di $\mathbb{R}$.
   Mostra che tale punto fisso corrisponde alla radice reale di f.

   ii) (4 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave per una generica iterazione di punto fisso, includendo criteri d'arresto opportuni. Proponi quindi uno script che applichi tale implementazione all'iterazione del punto i).

4. Sono dati i nodi $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ e la funzione $f(x) = \cos(x\pi)e^x$.

   i) (3 punti) Calcola il polinomio di grado 2 interpolante la funzione f nella forma $p(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ mediante la matrice di Vandermonde.

   ii) (3 punti) Calcola il polinomio di grado 1 che minimizza la distanza di interpolazione (nel senso dei minimi quadrati) rispetto ad f usando i nodi dati.

   iii) (2 punti) Supponendo $x_1 = x_2 - \varepsilon$ con $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ piccolo, commenta sul condizionamento del problema al punto i) ed in particolare sulla possibile quasi singolarità della matrice dei coefficienti.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Come da dispense. ii) Usa i due teoremi relativi nelle dispense (che usano i dischi di Gerschgorin).

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3. Sia ϕ la funzione di punto fisso. i) $\phi'(x) = -20(2x+2)/(x^2+2x+10)^2$, e $|\phi'(x)| < 1$ se e solo se $40x + 40 - (x^2 + 2x + 10)^2 < 0$. Per $x \in (1, 2)$ vale $(40x + 40) - (x^2 + 2x + 10)^2 \leq 160 - 13^2 = -9 < 0$ Quindi l'iterazione converge per l'intorno $(1, 2)$. L'ordine è 1 in quanto $\phi'(x) \neq 0$ per $x \in (1, 2)$. L'equazione di punto fisso $x = \phi(x)$, una volta portato tutto al numeratore del membro destro, coincide con $f(x) = 0$.

ii) Come da appunti di lezione.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 11 Febbraio 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$ di rango massimo, ed il vettore $b \in \mathbb{R}^n$.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo della fattorizzazione QR di A, cioè $A = QR$, per la risoluzione del problema $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$, arrivando alla risoluzione del problema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ con $\tilde{A} = R, \tilde{b} = Q^T b$.
ii) (3 punti) Siano
$$A_1 = \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times m}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
con A e b come nel punto i). Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema $\min_{x_1\in\mathbb{R}^m} \|b_1 - A_1x_1\|$, che sfrutti i dati ottenuti dalla fattorizzazione QR del punto i) (cioè che non ricalcoli quantità già calcolate in i)).

2. Per $x_0 \in \mathbb{R}$ opportuno, è data l'iterazione
$$x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \geq 0, \quad \varphi(x) = -x - 2 + 4\sqrt{x+1}.$$
i) (2 punti) Mostra che l'iterazione corrisponde al metodo di Newton per determinare uno zero di $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$.
ii) (3 punti) Mostra che l'iterazione converge, per una scelta opportuna dell'intervallo $[a, b]$, con $\varphi : [a, b] \to [a, b]$.
iii) (6 punti) Proponi una implementazione mediante funzione Matlab/Octave dell'iterazione data, includendo i criteri d'arresto opportuni.

3. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, e siano (λ_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$ le sue autocoppie, con $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$ e $\|x_i\| = 1$. Sia $P = I - x_1x_1^T$.
i) (2 punti) Mostra che $Px_1 = 0$ e che $Px_i = x_i$, per ogni $i = 2, \ldots, n$;
ii) (3 punti) Mostra che gli autovalori di PAP sono gli stessi di A, tranne l'autovalore λ_1 che è ora uguale a zero, e che $\{x_i\}$ è ancora una base di autovettori.
iii) (5 punti) Supponendo che x_1 sia noto, proponi una variante del metodo delle potenze per approssimare l'autocoppia (λ_2, x_2) di A, che tenga in conto i) e ii).

4. (4 punti) Costruisci una formula di quadratura del tipo
$$\int_1^x f(t)dt \approx af(x) + bf(1) - c(f'(1) - f'(x))$$
che abbia esattezza 2.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2. i) Esplicitando $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ si trova l'iterazione richiesta. ii) Il punto fisso è $x_* = 3$, e dev'essere $x \geq -1$. Nota che $\varphi(x) \leq \varphi(3) = 3\ \forall x$. Inoltre, si verifica che per $\delta > 0$, si ha che $\varphi(x) \geq 3 - \delta$ se e solo se $3 + \delta - 4\sqrt{\delta} \leq x \leq 3 + \delta + 4\sqrt{\delta}$. Ponendo per esempio $\delta = 1$, si ha quindi che $\varphi : [2, 3] \to [2, 3]$. Inoltre, si ha che $\varphi'(x) < 1$ per $x > 0$ e $\varphi'(x) > -1$ per ogni $x > -1$, quindi $|\varphi'(x)| < 1$ per $x \in [2, 3]$ e $\varphi \in C^1([2, 3])$. Un teorema noto assicura la convergenza. iii) Come da lezione.

ESERCIZIO 3. i) È una semplice verifica: $Px_i = x_1 - x_1(x_1^T x_1) = x_1 - x_1 = 0$ e $Px_i = x_i - x_1(x_i^T x_1) = x_i$, per l'ortogonalità degli vettori.

ii) Vale $PAPx_i = PAx_i = Px_i\lambda_i = x_i\lambda_i$, cioè (λ_i, x_i) è autocoppia di PAP. Inoltre, siccome $Px_1 = 0$, vale $PAPx_1 = 0 = x_1 0$. Da cui l'asserto.

iii) Si applica il metodo delle potenze alla matrice PAP, il cui autovalore dominante e semplice è ora λ_2. Attenzione: una implementazione efficiente richiede di effettuare il calcolo di $y_k = PAPx_k$ come $y_k = P(A(Pv_k))$ dove P non è costruita esplicitamente, bensì si usa $Pv_k = v_k - x_1(x_1^T v_k)$.

ESERCIZIO 4. Vedi analogo esercizio a lezione.

I modulo - Prova scritta di Calcolo Numerico, 11 Febbraio 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Studia il condizionamento (assoluto e relativo) del problema del calcolo di $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ per $x \in \mathbb{R}$.

2. Sono dati la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq m$ di rango massimo, ed il vettore $b \in \mathbb{R}^n$.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo della fattorizzazione QR di A, cioè $A = QR$, per la risoluzione del problema $\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$, arrivando alla risoluzione del problema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ con $\tilde{A} = R, \tilde{b} = Q^T b$.
ii) (3 punti) Siano
$$A_1 = \begin{bmatrix} A \\ a^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times m}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} b \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$
con A e b come nel punto i). Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema $\min_{x_1 \in \mathbb{R}^m} \|b_1 - A_1 x_1\|$, che sfrutti i dati ottenuti dalla fattorizzazione QR del punto i) (cioè che non ricalcoli quantità già calcolate in i)).

3. È dato il sistema $Ax = b$ con A simmetrica, definita positiva e tridiagonale. Per la sua risoluzione, considera l'algoritmo SOR(ω) con $\omega \in (0, 2)$.
i) (3 punti) Descrivi l'algoritmo SOR(ω) ed il suo costo computazionale;
ii) (2 punti) Sapendo che $\rho(B_J) \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, dove B_J è la matrice di iterazione del metodo di Jacobi per lo stesso problema, dai una stima per il valore ottimale di ω;
iii) (6 punti) Descrivi una implementazione completa dell'algoritmo mediante una funzione Matlab/Octave di nome: `x = sor(A,b,x0,omega,maxit,tol);`

4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica e definita positiva, e siano (λ_i, x_i), $i = 1, \ldots, n$ le sue autocoppie, con $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$ e $\|x_i\| = 1$. Sia $P = I - x_1 x_1^T$.
i) (2 punti) Mostra che $Px_1 = 0$ e che $Px_i = x_i$, per ogni $i = 2, \ldots, n$;
ii) (3 punti) Mostra che gli autovalori di PAP sono gli stessi di A, tranne l'autovalore λ_1 che è ora uguale a zero, e che $\{x_i\}$ è ancora una base di autovettori.
iii) (5 punti) Supponendo che x_1 sia noto, proponi una variante del metodo delle potenze per approssimare l'autocoppia (λ_2, x_2) di A, che tenga in conto i) e ii).

Traccia della risoluzione.
ESERCIZIO 1.
ESERCIZIO 2.
ESERCIZIO 3. i) Vedi le dispense.
ii) Per questo tipo di matrice vale $\omega_{opt} = 2/(1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)})$. Per cui da $1/2 \leq \rho(B_J) \leq 3/4$ segue

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-(1/2)^2}} \leq \omega_{opt} \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-(3/4)^2}}$$

iii) L'implementazione procede in modo simile al metodo di Gauss-Seidel, vedi esercitazioni.
ESERCIZIO 4. Vedi l'esercizio 3 della prova completa nella stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 16 Gennaio 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati il vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e la matrice non singolare $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a_{i,i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{1,n} \neq 0, a_{n,1} \neq 0$, e gli altri elementi zero.
   i) (2 punti) Mostra che la fattorizzazione LU di A senza pivot esiste sempre.
   ii) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss modificato per la risoluzione di $Ax = b$ con la matrice A data, e valutane il costo computazionale.

2. Sia $f(x) = \cos(\pi x)\exp(x)$ per $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
   i) (2 punti) Determina il polinomio interpolante di grado due di f con nodi equidistanti;
   ii) (4 punti) Determina una stima per il suo errore di interpolazione.
   iii) (4 punti) Confronta la stima ottenuta in (ii) con quella ottenuta usando i nodi di Chebyshev sullo stesso intervallo.

3. È data la matrice non singolare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di tipo Hessenberg inferiore.
   i) (3 punti) Descrivi un metodo iterativo per approssimare l'autovalore di A più vicino a zero;
   ii) (2 punti) Descrivi e giustifica in dettaglio il costo computazionale e i criteri d'arresto;
   iii) (6 punti) Proponi una implementazione **completa** mediante funzione Matlab o Octave dell'algoritmo proposto.

4. È data la funzione $f(x) = 2^x + x - 4$.
   i) (2 punti) Mostra che f ha una sola radice in $[1, 2]$;
   ii) (4 punti) Per trovare la radice in (i), considera l'iterazione $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ con $\varphi(x) = -2^x + 4$ e $x_0 \in [1, 2]$, e mostra che $|\varphi'(x)| \geq 2\ln 2$. Usando i risultati noti, concludi sulla convergenza dell'iterazione.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Le matrici principali di testa fino alla dimensione $n-1$ sono diagonali, con elementi diagonali non nulli, quindi sono non singolari. Per un teorema visto questo assicura l'esistenza e l'unicità della LU senza pivot.

ii) vedi le dispense.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. i) Si verifica che $f(1) < 0$ e $f(2) > 0$ con f continua, da cui segue l'esistenza di almeno uno zero. Inoltre $f'(x) = \ln 2 e^{x \ln 2} + 1 > 0$, cioè la funzione è strettamente crescente. Quindi si ha un solo zero nell'intervallo. ii) Si ha $\varphi'(x) = -\ln 2 e^{x \ln 2}$ e $|\varphi'(x)| \geq 2 \ln 2$ in $[1, 2]$. Quindi $|x_{k+1} - x_*| = |\varphi'(\xi_k)|\, |x_k - x_*| \geq 2 \ln 2$.....

I modulo - Prova scritta di Calcolo Numerico, 16 Gennaio 2019
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati il vettore $b \in \mathbb{R}^n$ e la matrice non singolare $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a_{i,i} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, $a_{1,n} \neq 0, a_{n,1} \neq 0$ e gli altri elementi zero.
i) (2 punti) Mostra che la fattorizzazione LU di A senza pivot esiste sempre.
ii) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss modificato per la risoluzione di $Ax = b$ con la matrice A data, e valutane il costo computazionale.

2. È dato il sistema $Ax = b$ con A tridiagonale avente elementi diagonali $a_{i,i} = 3 \cdot (-1)^i$ e sopra e sotto diagonali uguali ad 1.
i) (2 punti) Descrivi il metodo iterativo di Jacobi per la risoluzione del sistema;
ii) (3 punti) Determina una stima per il raggio spettrale della matrice di iterazione associata, e discuti la convergenza del metodo;
iii) (3 punti) Cosa si può dire sulla convergenza del metodo di Gauss-Seidel, sullo stesso problema, rispetto al metodo di Jacobi?

3. È data la matrice non singolare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ di tipo Hessenberg inferiore.
i) (3 punti) Descrivi un metodo iterativo per approssimare l'autovalore di A più vicino a zero;
ii) (2 punti) Descrivi e giustifica in dettaglio il costo computazionale e i criteri d'arresto;
iii) (5 punti) Proponi una implementazione **completa** mediante funzione Matlab o Octave dell'algoritmo proposto.

4. Sono date la matrice simmetrica e definita positiva $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, di cui sono noti gli autovalori estremi, e la matrice $E = -uu^T$, con $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$. Sia $\|\cdot\|$ la norma matriciale indotta Euclidea.
i) (2 punti) Mostra che $\|E\| = \|u\|^2$;
ii) (3 punti) Mostra che $\lambda_{\max}(A) - \|u\|^2 \leq \|A + E\| \leq \lambda_{\max}(A) + \|u\|^2$;
iii) (3 punti) Qual'è il valore minimo di $\|u\|$ tale che $A + E$ sia singolare?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi l'esercizio 1 della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 2. i) Vedi le dispense. ii) Sia (λ, v) l'autocoppia dominante di B_J con $\|v\| = 1$. Si ha che $|\lambda| = \|\lambda v\| = \|B_J v\| \leq \|B_J\|$ per ogni norma di matrice, in particolare per $\|B_J\|_\infty$. La matrice A è a diagonale dominante per righe, per cui $\|B_J\| < 1$. Questo mostra la convergenza ed una stima dall'alto per $\rho(B_J)$.

iii) La matrice A è tridiagonale, quindi si ha $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J)^2$, quindi la convergenza del metodo di Gauss-Seidel è quadratica rispetto a quella del metodo di Jacobi.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. i) La matrice E è simmetrica ed ha rango uno, con u autovettore associato all'unico autovalore non zero, dato che $Eu = -u(u^T u)$ e si ha $|\lambda| = |-u^T u| = \|u\|^2 = \|E\|$ (gli altri autovalori sono zero, e la norma Euclidea di una matrice simmetrica corrisponde al più grande autovalore in valore assoluto).

ii) Si ha $\|A+E\| \leq \|A\|+\|E\| = \lambda(A)+\|u\|^2$. Inoltre $\|A\| = \|A+E-E\| \leq \|A+E\|+\|E\|$, da cui si ottiene la stima da sotto.

iii) Da un risultato noto segue che

$$\min_{A+E\, sing} \|E\| = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Per cui $\|E\| = 1/\lambda_{\min}(A)^{-1} = \lambda_{\min}(A)$. In altro modo, è sufficiente osservare che per $u = \lambda_{\min}^{1/2} v$ dove v è un autovettore corrispondente a $\lambda_{\min}$, si ha $E = -\lambda_{\min} v v^T$ e $(A+E)v = 0$. Altre combinazioni lineari di autovettori di A daranno un valore di $\|u\|$ più grande.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 20 Novembre 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice simmetrica $A = I + uu^T$, con $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$.
   i) (2 punti) Mostra che A è non singolare, e determina gli autovalori di A in funzione di u, giustificando il risultato.
   ii) (3 punti) Proponi una procedura per la risoluzione numerica del sistema $Ax = b$ e valutane il costo computazionale;
   iii) (5 punti) Proponi una implementazione (Matlab/Octave) della procedura del precedente punto, mediante la scrittura di una funzione `x = risolvo(u,b)`.

2. Sia $\Phi(x)$ una funzione nota solo per punti, e supponiamo che $\Phi(1) = \frac{1}{4}\pi$, $\Phi(3) = \pi$ e $\Phi(4) = \frac{3}{2}\pi$. Allora
   i) (4 punti) Ottieni una stima per $\Phi(2.5)$ mediante interpolazione di Lagrange;
   ii) (3 punti) Ottieni il polinomio di interpolazione mediante la formula di Newton;
   iii) (3 punti) Sapendo che $\Phi(2) = \frac{2}{5}\pi$, partendo dal punto ii) costruisci il polinomio interpolante anche questo valore ed ottieni una nuova stima per $\Phi(2.5)$.

3. (6 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ con $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ pentadiagonale, cioè

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & & \\ & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}.$$

   Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema che minimizzi il costo computazionale, e valutane il costo.

4. Considera una formula di quadratura del tipo

$$\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{dx} \approx \alpha f(x_1) + \beta[f(2) - f(0)].$$

   i) (2 punti) Determina α, β e x_1 tali che il grado di precisione sia $k = 2$.
   ii) (4 punti) Notando che la formula di quadratura è di tipo interpolatorio, determina una stima per l'errore, sotto ipotesi di regolarità di f.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) La matrice è definita positiva (identità piu' una matrice semidefinita positiva), quindi non singolare. La matrice simmetrica uu^T ha rango 1, quindi ha uno spazio nullo di dimensione $n-1$ (corrispondente ad $n-1$ autovalori zero). Moltiplicando per u si ottiene $uu^Tu = u(u^Tu)$, quindi u e' autovettore con corrispondente autovalore $\|u\|^2$. La matrice $uu^T + I$ e' una traslazione di uu^T, per cui tutti i suoi autovalori sono $\{1, \|u\|^2 + 1\}$ (da cui si puo' dedurre la non singolarità di A.

ii) Si usa la formula di Sherman-Morrison, per cui $(I + uu^T)^{-1}b = b - u(1 + u^Tu)^{-1}u^Tb$. Il costo è dato da due `dots` ed una `daxpy`, cioè $6n$ (più una costante).

iii) Immediato.

ESERCIZIO 2. Si procede esattamente come nel corrispondente esercizio del 06 Giugno 2016.

ESERCIZIO 3. Si procede mediante fattorizzazione QR con rotazioni di Givens, eliminando così due elementi per ogni colonna. Si noti che le rotazioni non vanno applicate a tutta la riga, ma solo alle 4 colonne interessate. Infatti, innanzi tutto assumiamo che per la colonna corrente la rotazione non sia applicata esplicitamente, visto che sappiamo già che il risultato sarà del tipo $[\alpha; 0]$. Inoltre le rotazioni rendono nonzero gli elementi nella parte triangolare superiore, a destra dell'ultimo elemento non zero di A, in modo che la matrice finale triangolare superiore ha 5 diagonali nonzero.

Ne risulta un costo computazionale $O(n)$ per la fattorizzazione QR. A questo va aggiunto il costo $O(n)$ per la risoluzione del sistema triangolare a banda.

ESERCIZIO 4. Si procede esattamente come nel corrispondente esercizio del prototipo di prova scritta, II semestre (n.1).

Prova scritta di Calcolo Numerico, 11 Settembre 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice simmetrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   i) (2 punti) Dai una stima dell'intervallo spettrale di A, che assicuri che A sia definita positiva.
   ii) (6 punti) Proponi un algoritmo iterativo per il calcolo approssimato di $\lambda_{\min}(A)$ sfruttando il punto i), indicando criteri d'arresto opportuni. Valutane in dettaglio il costo computazionale.

2. Per ogni numero reale $c > 0$ si vuole calcolare $1/c$ senza effettuare divisioni. Il problema è equivalente a determinare lo zero di $f(x) = \frac{1}{x} - c$.
   i) (4 punti) Mostra che l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = x_k(2 - cx_k)$ corrisponde all'iterazione di Newton applicata ad f, e discutine l'ordine di convergenza per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   ii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave per una generica iterazione di punto fisso, includendo criteri d'arresto opportuni. Proponi quindi uno script che applichi tale implementazione all'iterazione del punto i).

3. (8 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$, con A non singolare,

$$A = \begin{bmatrix} S & uv^T \\ 0 & S^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n},\ u, v \in \mathbb{R}^n,$$

   Proponi un algoritmo completo che risolva il sistema in modo efficiente, descrivendo in dettaglio il costo computazionale e le ipotesi sufficienti per la sua buona posizione.

4. È dato l'integrale $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.
   i) (4 punti) Per $f(x) = x\sin(x)\cos(x)$ e $[a, b] = [-\pi/4, \pi/4]$ determina il numero minimo m di sottointervalli in modo che la formula composita dei trapezi abbia un errore inferiore a 10^{-2}.
   ii) (2 punti) Siano I_1 e I_2 due approssimazioni di $I(f)$ ottenute mediante la formula dei trapezi composita con due passi diversi, rispettivamente H_1 ed H_2, dove $H_i = (b - a)/m_i$. Sfruttando la formula dell'errore, e supponendo che $f^{(2)}$ non vari molto, mostra che la formula

$$I_* = I_1 + (I_1 - I_2)\frac{1}{H_2^2/H_1^2 - 1}$$

   è una approssimazione più accurata di $I(f)$ rispetto a I_1, I_2.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) I dischi di Gerschgorin assicurano che tutti gli autovalori sono contenuti nel disco di centro 3 e raggio al più 2, che è tutto nel semipiano complesso positivo. La matrice è simmetrica, per cui è definita positiva.

ii) Si può usare per esempio il metodo delle potenze inverse traslate, con shift $\mu = 1$ (punto più a sinistra del disco). Il resto procede come nelle dispense.

ESERCIZIO 2. i) È sufficiente scrivere l'iterazione di Newton e semplificare. L'ordine di convergenza (ordine 2) si verifica direttamente calcolando derivata prima e seconda della funzione di punto fisso $\phi(x) = x(2 - cx)$.

Per studiare l'intervallo di convergenza, sia $e_k = x_k - 1/c$ e supponiamo $c > 0$. Si ha

$$x_{k+1} = x_k + x_k - cx_k^2, \qquad \Rightarrow \quad e_{k+1} = e_k + x_k c(1/c - x_k) = -ce_k^2.$$

Quindi l'errore ha una relazione quadratica (come ci aspettiamo) ed è sempre negativo, cioè $x_{k+1} - 1/c < 0$ per ogni $k \geq 1$. Inoltre, se $x_k \in [0, 2/c]$, $k \geq 0$ si ha $x_{k+1} = x_k c(2/c - x) > 0$. Quindi, per ogni $x_0 \in [0, 1/c]$ si ha $x_k \in [0, 1/c]$ per ogni $k \geq 1$. Si noti inoltre che per $\phi'(x) = 2 - 2cx$ e $x \in [0, 1/c]$, vale $\phi'(x) > 0$ e $\phi'(x) < 1$ per $x > 1/(2c)$. Quindi nel dominio $[1/(2c), 1/c]$ la convergenza è globale per un teorema noto.

Altri approcci per mostrare la convergenza sono ugualmente validi. In particolare, x_0 può essere preso in $(1/(2c), 3/(2c))$, intervallo in cui vale $|\phi'(x)| < 1$, ma per quanto detto x_1 sarà comunque in $[0, 1/c]$. Il teorema si potrebbe quindi applicare con il dominio $[1/(2c), 3/(2c)]$.

ii) Vedi esercizi di laboratorio

ESERCIZIO 3. Il sistema è a 2×2 a blocchi. Posto $x = [x_1; x_2]$ e $b = [b_1; b_2]$ si può scrivere

$$Ax = b \qquad \Leftrightarrow \qquad Sx_1 + u(v^T x_2) = b_1, \quad S^T x_2 = b_2.$$

Si tratta quindi di risolvere prima il sistema per ottenere x_2, poi quello per ottenere x_1. S può essere fattorizzata mediante LU, se tutti i minori principali di ordine fino ad $n - 1$ sono non singolari. L'algoritmo deve essere inserito. La stessa fattorizzazione può essere sfruttata per S^T, visto che $S^T = (LU)^T = U^T L^T$. L'algoritmo per la risoluzione di sistemi con matrici triangolari deve essere descritta.

ESERCIZIO 4. i) Si prosegue come in altre prove.

ii) Posto $E_k = I_k - I$, per $k = 1, 2, *$, si ha che la relazione vale anche per gli errori, cioè $E_* = E_1 + (E_1 - E_2)/(H_2^2/H_1^2 - 1)$. Sia $\alpha = H_2/H_1$. Supponiamo prima che $\alpha > 1$, per esempio $\alpha = 2$ (l'esempio numerico serve solo per semplificare la presentazione). Allora $H_2 = 2H_1$ e $H_2 > H_1$, per cui $E_2 > E_1$, avendo supposto che f'' non vari molto. Quindi $E_* = E_1 + \frac{1}{3}(E_1 - E_2) < E_1$. D'altra parte, se $\alpha < 1$, per esempio $\alpha = 1/2$, si ha $H_1 = 2H_2$ e $H_1 > H_2$, per cui $E_1 > E_2$. Quindi $E_* = E_1 - \frac{4}{3}(E_1 - E_2) = E_2 + \frac{1}{3}(E_2 - E_1) < E_2$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 19 Giugno 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$, avente tutte radici reali.
   i) (6 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton nel caso di polinomi, ottimizzando il costo computazionale per iterazione.
   ii) (2 punti) Senza calcolare le radici, determina un dato iniziale x_0 che assicuri la convergenza monotona decrescente del metodo di Newton per determinare una radice di ϕ_4.

2. Si vuole determinare lo zero reale di $f(x) = x^3 + 5x - 5$ contenuto nell'intervallo $(0, 1)$.
   i) (3 punti) Studia la convergenza, ed eventualmente l'ordine di convergenza, dell'iterazione $x_{k+1} = (5 - x_k^3)/5$;
   ii) (5 punti) Mostra che l'iterazione $x_{k+1} = (2x^3+5)/(3x^2+5)$ corrisponde all'iterazione di Newton applicata ad f, e discutine l'ordine di convergenza.

3. È dato il sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice di Hessenberg *inferiore*.
   ii) (5 punti) Proponi un algoritmo che risolva il sistema con un costo computazionale $O(n^2)$, fornendo i dettagli di tali costi;
   ii) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo descritto.

4. (5 punti) È data la matrice simmetrica non singolare indefinita $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Proponi un algoritmo per determinare l'autovalore più vicino a zero, discutendone costo computazionale e criteri d'arresto.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Una volta data l'iterazione di Newton con evidenziate le presenze di $\phi_4(x_k)$ e $\phi_4'(x_k)$, si descrive la regola di Horner per il calcolo di tali quantità ad ogni iterazione k.

ii) Avendo tutte le radici reali e coefficienti reali, un teorema assicura che se viene preso x_0 maggiore della radice più a destra, allora la convergenza è monotona e decrescente. Una stima si ottiene usando i dischi di Gerschgorin della matrice Companion. Notiamo che $\phi_4(-x)$ è di grado pari, quindi ha le radici scambiate di segno rispetto a $\phi_4(x)$, per cui per ottenere una stima da sotto della radice più a sinistra (negativa) sarà sufficiente determinare la matrice companion di $\phi(-x)$ ed ottenere una stima dall'alto della sua radice più a destra.

ESERCIZIO 2. i) Si ha $|\phi'(x)| = |-3/5x^2| < 1$ per $x \in (0,1)$, per cui si ha almeno convergenza locale. Inoltre, per $x_0 \in (0,1)$, tutte le successive iterate sono in $(0,1)$, per cui si ha che $\phi(x) : (0,1) \to (0,1)$. Siccome la funzione è almeno C^1, si ha convergenza globale. La convergenza è lineare in quanto $\phi'(x) \neq 0$ per $x \in (0,1)$.

ii) È una semplice verifica da $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. L'ordine di convergenza è almeno 2, dato che $\phi'(x) = 6xf(x)|_{x=x_*} = 0$.

ESERCIZIO 3. Una possibilità è di applicare le rotazioni di Givens da destra, e memorizzarle. In alternativa, è possibile fare la fattorizzazione QR di A^T, cioè $G_{n-1} \cdots ....G_1 A^T = R$, salvando in memoria ad ogni iterazione gli elementi delle rotazioni di ogni G_i. Quindi

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad R^T(G_{n-1} \cdots G_1 x) = b.$$

Quindi si ottiene $\hat{x} := G_{n-1} \cdots G_1 x$ risolvendo il sistema triangolare inferiore $R^T \hat{x} = b$, e poi si ricava $x = G_1^T \cdots G_{n-1}^T x$ (da applicare usando i coefficienti memorizzati).

ESERCIZIO 4. Si applica il metodo delle potenze inverse. Si procede come da dispense.

Prova scritta di Calcolo Numerico, II Modulo - 19 Giugno 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$, avente tutte radici reali.
   ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton nel caso di polinomi, ottimizzando il costo computazionale per iterazione.
   i) (2 punti) Senza calcolare le radici, determina un dato iniziale x_0 e l'uso dell'algoritmo di Newton, che assicurino la convergenza monotona decrescente del metodo di Newton alla radice (negativa) di ϕ_4 più a sinistra sull'asse reale.

2. Si vuole determinare lo zero reale di $f(x) = x^3 + 5x - 5$ contenuto nell'intervallo $(0, 1)$.
   i) (3 punti) Studia la convergenza, ed eventualmente l'ordine di convergenza, dell'iterazione $x_{k+1} = (5 - x_k^3)/5$;
   ii) (5 punti) Mostra che l'iterazione $x_{k+1} = (2x^3+5)/(3x^2+5)$ corrisponde all'iterazione di Newton applicata ad f, e discutine l'ordine di convergenza.

3. (6 punti) Sono dati i nodi $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ con corrispondenti valori dei dati osservati $y_0 = 3.2, y_1 = 2.4, y_2 = 2.8$. Determina esplicitamente i coefficienti del polinomio p_1 di *grado 1* che minimizzi la distanza dai dati.

4. È dato l'integrale $\int_0^{2\pi} x \cos x \sin x dx$.
   i) (4 punti) Usa la formula di quadratura di Simpson composita con $m = 4$ sottintervalli per approssimare l'integrale.
   ii) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi la formula al punto (i) con m generico, e descrivi mediante script la chiamata per il caso particolare in esame.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi prova completa.

ESERCIZIO 2. Vedi prova completa.

ESERCIZIO 3. Si tratta di un problema sovradeterminato. Imponendo la condizione di interpolazione si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad Va = y, \quad V \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Risolvendo il problema ai minimi quadrati $\min_a \|y - Va\|$ si ottiene la soluzione richiesta, $p_1(x) = a_0 + a_1 x$.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 6 Giugno 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati i nodi $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, ed i corrispondenti valori $y_0 = 1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$.
i) (4 punti) Determina il polinomio di grado 2, $p_2(x)$, interpolante 3 dei nodi dati, usando la base monomiale.
ii) (4 punti) Proponi una procedura per il calcolo di p_2 e della sua derivata, a basso costo computazionale, nel valore x_j non considerato in precedenza. Determinane il costo computazionale.

2. È data la seguente iterazione di punto fisso:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + e^{1-x^{(k)}} - 1$$

i) (4 punti) Studiane la convergenza al variare di $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, ed il suo ordine.
ii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave di questa procedura, fornendo criteri di arresto opportuni. Giustifica le tue scelte implementative.

3. È dato il sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrice di Hessenberg superiore.
i) (4 punti) Proponi una procedura per calcolare il determinante di A ad un costo $O(n^p)$ con $p \in \mathbb{N}$ moderato.
ii) (3 punti) Sfrutta quanto fatto nel punto (i) per risolvere il sistema lineare, fornendo i dettagli algoritmici per determinare la soluzione x.

4. Sono dati i sistemi lineari $Ax = b$ e $(A + \alpha I)z = b$, con $\alpha > 0$ ed A simmetrica e definita positiva.
i) (1 punti) Mostra come varia il numero di condizionamento della matrice dei coefficienti nei due casi, in funzione di α;
ii) (4 punti) Descrivi il metodo dei gradienti coniugati, e discuti le proprietà di convergenza nei due casi.
iii) (2 punti) Supponendo A simmetrica ma non necessariamente definita positiva, dai una condizione sufficiente per α affinchè il metodo dei gradienti coniugati possa essere usato per la risoluzione di $(A + \alpha I)z = b$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Si costruisce il sistema con matrice di Vandermonde, la cui soluzione dà il polinomio di grado 2 cercato.

ii) Si usa la regola di Horner.

ESERCIZIO 2. i) Sia $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Si noti che $x_* = 1$ è un punto fisso. Si ha $\phi'(x) = 1 - e^{1-x}$, che è monotona crescente e con limite 1 per $x \to +\infty$. Inoltre, $\phi'(x) > -1$ per $x > 1 - \ln(2)$, quindi si ha convergenza locale per $x_0 \in (1 - \ln(2), +\infty)$. Dato che $\phi(x) \geq 0$ per ogni x, è possibile definire $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ e si ha convergenza globale in tale intervallo ad x_*. La convergenza ad x_* è di ordine 2.

ESERCIZIO 3. i) Sia $A = QR$, ottenuta mediante rotazioni di Givens (da descrivere). Allora $\det(A) = \det(Q)\det(R) = \prod_{i=1}^{n} R_{ii}$, per un costo totale di $O(n^2)$ (da descrivere).

ii) Durante la costruzione di R si applicano le rotazioni anche a b, ottenendo alla fine $\hat{b} = Q^T b$. Quindi Risolvere $Ax = b$ corrisponde a risolvere $Rx = \hat{b}$ (descrivere la risoluzione con matrice triangolare superiore).

ESERCIZIO 4. i) $A + \alpha I$ è simmetrica e definita positiva per ogni $\alpha \geq 0$. Si ha $\kappa(A + \alpha I) = \lambda_{\max}(A + \alpha I)/\lambda_{\min}(A + \alpha I) = \frac{\lambda_{\max}(A)+\alpha}{\lambda_{\min}(A)+\alpha}$, che vale anche per $\alpha = 0$. Si verifica facilmente che $\kappa(A + \alpha I) < \kappa(A)$ per $\alpha > 0$.

ii) Per la convergenza, si ha che il corrispondente errore dipende da $\sqrt{\kappa}$ (descrivere la stima), per cui la stima dell'errore dopo k iterazioni sarà più piccola per κ più piccolo.

iii) Deve valere $\lambda_{\min}(A) + \alpha > 0$ perchè la matrice traslata sia definita positiva, in modo da poter applicare in sicurezza il metodo. Quindi dev'essere $\alpha > -\lambda_{\min}(A)$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, II Modulo, 6 Giugno 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. Sono dati i nodi $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, ed i corrispondenti valori $y_0 = 1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$.
   i) (4 punti) Determina il polinomio di grado 2, $p_2(x)$, interpolante 3 dei nodi dati, usando la base monomiale.
   ii) (4 punti) Proponi una procedura per il calcolo di p_2 e della sua derivata, a basso costo computazionale, nel valore x_j non considerato in precedenza. Determinane il costo computazionale.

2. È data la seguente iterazione di punto fisso:
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + e^{1-x^{(k)}} - 1$$
   i) (4 punti) Studiane la convergenza al variare di $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, ed il suo ordine.
   ii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave di questa procedura, fornendo criteri di arresto opportuni. Giustifica le tue scelte implementative.

3. È dato l'integrale
$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} e^{-x} \tan(x) \mathrm{dx}.$$
   (6 punti) Stima il numero di sottointervalli necessario per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-6}, mediante la formula composita di Cavalieri-Simpson e la formula dei trapezi. Confronta i risultati.

4. Costruisci una formula di quadratura
$$\int_0^1 x^\alpha f(x)dx \approx a_1 \int_0^1 f(x)dx + a_2 \int_0^1 xf(x)dx, \quad 0 < \alpha < 1$$
   i) (4 punti) Che è esatta per tutti i polinomi di grado minore o uguale ad 1;
   ii) (4 punti) Che è esatta per tutte le funzioni $f(x) = x^{1/2} p_1(x)$, con p_1 polinomio di grado minore o uguale ad 1.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa nella stessa data.
ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa nella stessa data.
ESERCIZIO 3.
ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 7 Febbraio 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il polinomio $p_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ con tutte radici reali e positive.
   i) (6 punti) Descrivi il metodo di Newton per determinare la radice più grande, in modo da minimizzare il numero di operazioni per iterazione.
   ii) (4 punti) Proponi un dato iniziale che assicuri la convergenza del metodo di Newton (senza calcolare le radici).

2. (6 punti) Determina x_0 e ω tali che la formula di quadratura $\int_0^b f(x)\sqrt{x}dx \approx \omega f(x_0)$ abbia la massima precisione.

3. Siano $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E = -E^T$ ed i l'unità immaginaria.
   i) (2 punti) Dimostra che se $n = 2m$ con $m > 0$ intero, allora gli autovalori di E sono $\{\pm i\mu_j, \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m\}$; se $n = 2m+1$ allora gli autovalori sono $\{0\} \cup \{\pm i\mu_j, \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m\}$, con $m > 0$ intero.
   ii) (4 punti) Siano $\rho(E) = 2$, $A = I - E$, $M = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $N = M - A$. Dimostra che il metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, dato dal partizionamento $A = M - N$ è convergente se e solo se $\alpha > 5/2$.

4. È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
   i) (2 punti) Mostra mediante un esempio che la risoluzione dell'equazione normale può portare ad instabilità numerica.
   ii) (4 punti) Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema, per $m = n + 1$, $A = \begin{bmatrix} v^T \\ R \end{bmatrix}$ di rango massimo, con $v \in \mathbb{R}^n$ e $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore.
   iii) (4 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale dell'algoritmo in ii).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si implementa l'iterazione di Newton con regola di Horner e dato iniziale iniziale derivante dal teorema di localizzazione delle radici (tutte reali).

ESERCIZIO 2. Si impone che la formula sia esatta per polinomi di grado zero e di grado 1, da cui si deducono i valori di ω ed x_0.

ESERCIZIO 3. i) Sia $Ex = \lambda x$. Allora $-E^T Ex = \lambda(-E^T)x = \lambda Ex = \lambda^2 x$, cioè vale $E^T Ex = -\lambda^2 x$. Poniamo $\theta = -\lambda^2$. Siccome $E^T E$ è simmetrica ed almeno semidefinita positiva, si ha $\theta \geq 0$. Quindi $\lambda^2 = -\theta$, da cui $\lambda = \pm\sqrt{-\theta} = \pm\imath\mu_j$, $\mu_j = \sqrt{\theta_j}$. Il numero di autovalori zero è zero oppure un numero pari, per $n = 2m$.

ii) Si ha $N = \alpha I - (I - E) = (\alpha - 1)I + E$ e $M = \alpha I$, per cui la matrice di iterazione è $M^{-1}N = \alpha^{-1}((\alpha - 1)I + E)$. Se λ_j è un autovalore di E, con $|\lambda_j| = |\mu_j| < 2$, si ha $\lambda_j(M^{-1}N) = \alpha^{-1}(\alpha - 1 + \lambda_j)$. Quindi $|\alpha^{-1}(\alpha - 1 + \lambda_j)| < 1$ se e solo se $\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} + \frac{\mu_j^2}{\alpha^2} < 1$ da cui si ottiene $\alpha > (1 + \mu^2)/2$, che deve valere per ogni μ_j considerato, ed in particolare anche per il più grande in valore assoluto, da cui $\alpha > 5/2$.

ESERCIZIO 4. i) Si può considerare l'esempio 3×2 delle dispense, con due colonne quasi linearmente dipendenti.

ii) La matrice A è di Hessenberg superiore, quindi si procede con la fattorizzazione QR mediante rotazioni di Givens (procedura da descrivere) applicate anche a b.

iii) Il costo è come da dispense (costo delle rotazioni + costo del sistema triangolare superiore).

Modulo I - Prova scritta di Calcolo Numerico, 7 Febbraio 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il blocco di Jordan $J = \lambda I + N \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con N matrice nilpotente con elementi unitari sulla sopradiagonale e tutti gli altri elementi zero. Vale la relazione $J^k = \sum_{r=0}^{\min\{n,k-1\}} \binom{n}{r} \lambda^{k-r} N^r$.
   i) (2 punti) Data la matrice $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non diagonalizzabile con autovalori in modulo tutti minori di uno, mostra che $\lim_{k\to\infty} B^k = 0$ (Sfrutta la proprietà di J^k).
   ii) (8 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave del metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ non singolare. Descrivi in dettaglio il costo computazionale.

2. (6 punti) È data la matrice non singolare $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $a_{i,j} = 0$ per $i > j + 1$. Proponi una variante dell'algoritmo di eliminazione di Gauss per la risoluzione di $Ax = b$, $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$, e discutine il costo computazionale.

3. Siano $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $E = -E^T$ ed i l'unità immaginaria.
   i) (2 punti) Dimostra che se $n = 2m$ con $m > 0$ intero, allora gli autovalori di E sono $\{\pm i\mu_j, \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m\}$; se $n = 2m+1$ allora gli autovalori sono $\{0\} \cup \{\pm i\mu_j, \mu_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, m\}$, con $m > 0$ intero.
   ii) (4 punti) Siano $\rho(E) = 2$, $A = I - E$, $M = \alpha I$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $N = M - A$. Dimostra che il metodo iterativo per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, dato dal partizionamento $A = M - N$ è convergente se e solo se $\alpha > 5/2$.

4. È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.
   i) (2 punti) Mostra mediante un esempio che la risoluzione dell'equazione normale può portare ad instabilità numerica.
   ii) (4 punti) Proponi un algoritmo per la risoluzione del problema, per $m = n + 1$, $A = \begin{bmatrix} v^T \\ R \end{bmatrix}$ di rango massimo, con $v \in \mathbb{R}^n$ e $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore.
   iii) (4 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale dell'algoritmo in ii).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Si noti che per $k > n$ la sommatoria rimane di al più $n + 1$ termini (cioè non diventa una serie). Per cui è possibile scambiare il limite con la sommatoria, e trovare il limite di λ^{k-r} per $k \to \infty$ ($\|N^r\|$ rimane limitata, per esempio $\|N^r\|_F = \sqrt{n-r}$).

ii) Vedi esercizi di laboratorio.

ESERCIZIO 2. Nell'eliminazione di Gauss, bisogna notare che $m_i^{(k)} = 0$ per ogni $i > k + 1$, quindi per ogni k, le corrispondenti righe di $A^{(k)}$ non devono essere aggiornate (cioè non c'è un aggiornamento completo nell'indice di riga). Il costo computazionale quindi diventa $O(n^2)$ invece che $O(n^3)$ (da mostrare).

ESERCIZIO 3. Vedi l'esercizio corrispondente della prova completa.

ESERCIZIO 4. Vedi l'esercizio corrispondente della prova completa.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 24 Gennaio 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il sistema lineare
$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \alpha I & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$
con matrice dei coefficienti non singolare, in cui $A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è tridiagonale simmetrica e $A_2 = \beta I + \mathbf{1}\mathbf{1}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{1}$ è il vettore con tutti valori uguali ad 1).
i) (4 punti) Proponi un algoritmo che risolva il sistema con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, descrivendo il costo in modo dettagliato.
ii) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo descritto.

2. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
i) (3 punti) Proponi ipotesi sufficienti su $\alpha > 0$ in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti.
ii) (3 punti) Nelle ipotesi del punto i), fornisci una stima dell'intervallo spettrale contenente tutti gli autovalori di A, in funzione di α.

3. È data l'equazione non lineare $\sqrt{x} + 4\sin(x) = 0$.
i) (2 punti) Determina un intervallo contenente la prima radice positiva dell'equazione, ed in cui sia possibile applicare il metodo di bisezione.
ii) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di bisezione e la sua convergenza.
iii) (4 punti) Determina una iterazione di punto fisso associata all'equazione e commentane la convergenza.

4. È data la funzione $f(x) = \sin(2x)$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
i) (3 punti) Determina il polinomio interpolatore di Lagrange di grado cinque.
ii) (3 punti) Stima dall'alto l'errore di interpolazione risultante.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Si risolvono in cascata

$$A_1x_1 = b_1, \quad A_2x_2 - b_2 - \alpha x_1.$$

Per il sistema con A_1 si usa l'algoritmo di Thomas (da descrivere), mentre per il sistema con A_2 si usa la formula di Sherman-Morrison (vedi esercizi simili, per esempio l'esercizio 1 del 20 Novembre 2018). Entrambi hanno costo computazionale $O(n)$ (da descrivere).

ii) Come da esercitazione.

ESERCIZIO 2. i) Considerando i dischi di Gerschgorin per righe, si ottiene $|\lambda - 3| \leq 1$, $|\lambda - \alpha| \leq 3/2$ e $|\lambda + 3| < 1$. Quindi per avere intersezione nulla dei dischi (e quindi autovalori distinti) per α interno a $(-3, 3)$ dev'essere $|\alpha| < 1/2$. Si può prendere $0 < \alpha < 1/2$. Altrimenti si può comunque prendere $\alpha - 3/2 > 3 + 1$ (per righe).

ii) Nel caso in cui $\alpha \in (-3, 3)$, $\mathrm{spec}(A) \subset [-4, 4]$ (per righe). Se α è esterno ad uno dei due valori, si prenderà estremo corrispondente del disco in α come estremo.

ESERCIZIO 3. i) La prima radice positiva si trova nell'intervallo $[\pi/2, 3/2\pi]$. Si ha $f(\pi/2) = \sqrt{\pi} > 0$ e $f(3/2\pi) = \sqrt{3/2\pi} - 4 < 0$. ii) come da esercizi di laboratorio. iii) L'iterazione di Newton con la funzione Φ_N associata può essere usato, con la quale si ha convergenza locale.

ESERCIZIO 4.

Modulo I - Prova scritta di Calcolo Numerico, 24 Gennaio 2018
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il sistema lineare
$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ \alpha I & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad 0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$$
con matrice dei coefficienti non singolare, in cui $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è tridiagonale simmetrica e $A_2 = \beta I + \mathbf{1}\mathbf{1}^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbf{1}$ è il vettore con tutti valori uguali ad 1).
i) (4 punti) Proponi un algoritmo che risolva il sistema con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, descrivendo il costo in modo dettagliato.
ii) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo descritto.

2. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
i) (3 punti) Proponi ipotesi sufficienti su $\alpha > 0$ in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti.
ii) (3 punti) Nelle ipotesi del punto i), fornisci una stima dell'intervallo spettrale contenente tutti gli autovalori di A, in funzione di α.

3. È dato il seguente problema ai minimi quadrati
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \\ a_{31} & & a_{33} & a_{34} & & \\ a_{41} & & & a_{44} & a_{45} & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots \\ a_{n,1} & & & & & a_{n,n} \\ a_{n+1,1} & & & & & 0 \end{bmatrix},$$
con $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ di rango massimo ed avente elementi non nulli solo sulla prima colonna, sulla diagonale principale, e sulla diagonale sopra alla diagonale principale.
i) (8 punti) Descrivi in dettaglio un algoritmo per la risoluzione del problema con costo computazionale basso;
ii) (2 punti) Fornisci i dettagli dei costi computazionali.

4. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica, indefinita e non singolare.
i) (4 punti) Proponi una variante del metodo delle potenze per l'approssimazione dell'autovalore più vicino all'origine.
ii) (2 punti) Discutine la convergenza.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi l'esercizio corrispondente della prova completa.

ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente della prova completa.

ESERCIZIO 3. i) Si può procedere per esempio con la fattorizzazione QR mediante rotazioni di Givens (partendo dal basso). La matrice triangolare risultante avrà solo tre diagonali nonzero (da verificare), per cui il costo del sistema triangolare sarà ordine n (da calcolare).

Si può procedere anche notando che $A = R + ue_1^T$, per un certo vettore u, dove $R = [R_1; 0] \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ e R_1 è triangolare superiore. Quindi l'equazione normale $A^T Ax = A^T b$ ha matrice dei coefficienti

$$\begin{aligned} A^T A &= R^T R + R^T ue_1^T + e_1 u^T R + e_1 u^T ue_1^T \\ &= R_1^T R_1 + R^T ue_1^T + e_1(u^T R + u^T ue_1^T) = R_1^T R_1 + [R^T u, e_1][e_1, (u^T R + u^T ue_1^T)^T]^T. \end{aligned}$$

Quindi $A^T A$ è una modifica di rango 2 della matrice $R_1^T R_1$. Si procede quindi con la formula di (Woodbury)-Sherman-Morrison, tenendo anche in conto che i sistemi con $R_1^T R_1$ possono essere risolti mediante la risoluzione a cascata di due sistemi triangolari.

ESERCIZIO 4. i) Si usa il metodo delle potenze inverse. Descrivere l'algoritmo come da dispense.

ii) La convergenza dipenderà dal rapporto tra i due autovalori successivi più vicini all'origine. (da sviluppare)

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 Settembre 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Supponi di aver tabulato la funzione $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$ per valori equidistanti di x con passo $h = 0.1$.
   i) (2 punti) Scrivi il polinomio di Lagrange di grado 3, $p_3(x)$ per $x \in [0, \pi/2]$, facendo uso di alcuni dei valori tabulati, in modo generico.
   ii) (4 punti) Qual'e' l'errore massimo che si può commettere se si utilizza p_3 per stimare $f(\bar{x})$ per $\bar{x} \in [0, \pi/2]$?

2. È dato il polinomio $\phi(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ avente radici $\{-3, -1, 1, 2\}$.
   i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione della radice di ϕ più grande in modulo;
   ii) (2 punti) Suggerisci un dato iniziale che assicuri la convergenza monotona del metodo;
   iii) (4 punti) Descrivi l'uso della regola di Horner per l'algoritmo in (i).

3. È dato l'integrale
$$\mathcal{I} = \int_0^\pi e^{-x}\sin(x)\mathrm{dx}.$$
   i) (3 punti) Stima il numero di sottointervalli necessario per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-6}, mediante la formula composita di Cavalieri-Simpson;
   ii) (5 punti) Scrivi la funzione Matlab/Octave per la formula di Cavalieri-Simpson composita, per un generico numero m di nodi e per una generica funzione f su un intervallo dato. Mostra poi uno script che usi la funzione per il problema dato, in modo che soddisfi (i).

4. Siano $g_1(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, $g_2(x) = \frac{1}{2}x(3 - \frac{x^2}{a})$, dove $a > 0$.
   i) (2 punti) Verifica che $\sqrt{a}$ è punto fisso di g_1 e g_2 .
   ii) (3 punti) Studia l'ordine di convergenza dei metodi di iterazione individuati da g_1 e da g_2.
   iii) (3 punti) Determina due costanti α, β tali che $G(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$ abbia punto fisso $\sqrt{a}$ e ordine di convergenza più alto possibile. Dire qual'è l'ordine.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. i) La verifica è immediata. ii) Si ha $g_1'(\sqrt{a}) = 0$ e ${g_1}''(\sqrt{a}) \neq 0$ (ordine 2), e $g_2'(\sqrt{a}) = 0$ e ${g_2}''(\sqrt{a}) \neq 0$ (ordine 2). iii) Si pone $G(\sqrt{a}) = a$ e $G''(\sqrt{a}) = 0$ (ordine 3), da cui si ottiene $\beta = 1/4$ e $\alpha = 3\beta$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 Settembre 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica, definita positiva e tridiagonale.
i) (4 punti) Proponi una decomposizione di T del tipo $T = LDL^T$, con D diagonale.
ii) (6 punti) Proponi una implementazione mediante funzione Matlab/Octave di questa decomposizione, scegliendo in modo opportuno la memorizzazione dei dati.

2. È dato il polinomio $\phi(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ avente radici $\{-3, -1, 1, 2\}$.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione della radice di ϕ più grande in modulo;
ii) (2 punti) Suggerisci un dato iniziale che assicuri la convergenza monotona del metodo.

3. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
i) (3 punti) Ricava la forma di Schur di A dalla forma di Jordan, $A = XJX^{-1}$.
ii) (5 punti) Descrivi l'iterazione QR applicata ad A, in modo che ogni iterazione abbia costo computazionale $\mathcal{O}(n^3)$.

4. Siano $g_1(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, $g_2(x) = \frac{1}{2}x(3 - \frac{x^2}{a})$, dove $a > 0$.
i) (2 punti) Verifica che $\sqrt{a}$ è punto fisso di g_1 e g_2 .
ii) (3 punti) Studia l'ordine di convergenza dei metodi di iterazione individuati da g_1 e da g_2.
iii) (3 punti) Determina due costanti α, β tali che $G(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$ abbia punto fisso $\sqrt{a}$ e ordine di convergenza più alto possibile. Dire qual'è l'ordine.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Si può riscrivere l'algoritmo di Thomas per $A = LU$, in cui la matrice U viene scritta come prodotto $U = D(D^{-1}U) = DL^T$, dove D è la diagonale di U.

ii) Si procedere come per l'algoritmo di Thomas, facendo la modifica suggerita in i). Vengono memorizzate solo le diagonali nonzero di D ed L.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3. i) Sia $X = QR$ la fattorizzazione QR di X. Allora $A = XJX^{-1} = QRJR^{-1}Q^H = Q\tilde{R}Q^H$ (il prodotto di matrici triangolari sup. è ancora triangolare sup.).

ii) Come da dispense, partendo con $T_0 = Hess(A)$.

ESERCIZIO 4. Vedi l'esercizio corrispondente del Modulo II nella stessa data.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 1 Settembre 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. È data una funzione $f : [-1, 0] \to \mathbb{R}$, considera i nodi $x_0 = -1, x_1 = 0$.
i) (2 punti) Determina il polinomio di interpolazione di Lagrange associato ai nodi dati;
ii) (3 punti) Determina una stima dell'errore di interpolazione per il polinomio in (i), citato le ipotesi opportune;
iii) (3 punti) Determina una stima dell'errore prendendo i nodi di Chebyshev.

2. È dato l'integrale $\int_0^{2\pi} x(\sin x)^2 dx$.
i) (3 punti) Usa la formula di quadratura di Simpson composita con 4 sottintervalli per approssimare l'integrale.
ii) (3 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi la formula al punto (i), e descrivi mediante script la chiamata per il caso particolare in esame.

3. È data la funzione $f(x) = e^{-x^2/2} - x$. Dopo aver verificato graficamente che esiste un solo zero di f, e che questo appartiene all'intervallo $(0, 1)$, discuti se ognuna della seguenti iterazioni di punto fisso può essere convergente, ed in tal caso valutarne l'ordine:
i) (3 punti) $x_{k+1} = \varphi_1(x_k)$ con $\varphi_1(x) = \ln x + x + \frac{1}{2}x^2$;
ii) (5 punti) $x_{k+1} = \varphi_2(x_k)$ con $\varphi_2(x) = e^{-x^2/2}$.

4. i) (2 punti) Individua un intervallo utile per applicare il metodo delle corde all'equazione
$$\sqrt{x} + 4 \sin x = 0$$
nell'intorno della prima radice positiva,
ii) (8 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave del metodo, che includa criteri di arresto opportuni.

Traccia della risoluzione.
ESERCIZIO 1.
ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa nella stessa data.
ESERCIZIO 3.
ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 1 Settembre 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Studia il condizionamento delle seguenti operazioni: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

2. (8 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|$, con $b \in \mathbb{R}^m$, $m = 2n$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, con $A = [A_1; A_2]$, A_1 triangolare superiore non singolare e $A_2 = ue_1^T$, $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, $e_1 = [1; 0; \ldots; 0]$.
Descrivi in dettaglio un algoritmo per la risoluzione del problema che ottimizzi il costo computazionale, fornendo una descrizione accurata dei costi.

3. È dato l'integrale $\int_0^{2\pi} x(\sin x)^2 dx$.
i) (4 punti) Usa la formula di quadratura di Simpson composita con 4 sottintervalli per approssimare l'integrale.
ii) (2 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi la formula al punto (i), e descrivi mediante script la chiamata per il caso particolare in esame.

4. (6 punti) È data la funzione $f(x) = e^{-x^2/2} - x$. Dopo aver verificato graficamente che esiste un solo zero di f, e che questo appartiene all'intervallo $(0, 1)$, discuti se l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ con $\varphi(x) = \ln x + x + \frac{1}{2}x^2$ è convergente.

5. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $A_{ij} = 0$ per $i > j+1$, e con $A_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo iterativo SOR per risolvere il sistema lineare;
ii) (4 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale di una generica iterazione dell'algoritmo, incluso il costo della risoluzione del sistema lineare associato.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Per $f(x) = \sin(x)$: $C(x) \approx |f'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$ (ben condizionata in senso assoluto) e $\kappa(x) \approx |x\cos(x)/\sin(x)|$ (mal condizionata in senso relativo per $x \approx k\pi$, $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$).

Per $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$: $C(x) \approx |(x - \sqrt{x^2+1})/\sqrt{x^2+1}|$ (ben condizionata in senso assoluto) e e $\kappa(x) \approx |(x^2 - x\sqrt{x^2+1})/(\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x))|$ (ben condizionata sempre).

ESERCIZIO 2. Volendo usare l'equazione normale, si nota che $A^TA = A_1^TA_1 + e_1u^Tue_1^T$. Con la formula di Sherman-Morrison è possibile risolvere il sistema $A^TAx = A^Tb$ mediante la risoluzione di due sistemi con $A_1^TA_1$ (si noti che la matrice è già fattorizzata in due matrici triangolari). Anche il costo della operazione A^Tb può tenere conto della forma di A. Dare tutti i dettagli.

Volendo usare la fattorizzazione QR, si può prima trasformare u in αe_1 mediante una trasformazione di Householder $P = \text{blkdiag}(I_n, P_1)$ con $P_1 = I - \beta vv^T$ scelto in modo opportuno. Poi mediante rotazioni di Givens, si può eliminare l'elemento non zero in posizione $(n+1,1)$ e gli eventuali nonzeri risultanti dalla prima rotazione. (dare i dettagli dell'intera procedura).

ESERCIZIO 3. Si ha $H = (b-a)/m = \pi/2$ con $m = 4$.

Con i $2m$ nodi $\{0, \pi/4, \pi/2, 3/4\pi, \ldots, 7/4\pi, 2\pi\}$ si ottiene $I_{2,m} = \pi^2$.

ESERCIZIO 4. Siano $g_1(x) = e^{-x^2/2}$ e $g_2(x) = x$. La funzione g_1 è la funzione a campana, sempre positiva, con massimo per $x = 0$ e decrescente per $x > 0$, cioè $g_1(x) \leq 1$ per $x > 0$. Il grafico di g_2 è la bisettrice ed è crescente per $x > 0$. Dunque f ha un solo zero, x_*, e questo è in $(0,1)$.

Si nota che x_* è punto fisso di ϕ, dato che $x_* = \phi(x_*)$. D'altra parte, $\phi'(x) = 1/x+1+x \geq 1$ per $x > 0$, quindi il metodo non converge.

ESERCIZIO 5. A è di tipo Hessenberg superiore, quindi la matrice P di SOR è bidiagonale inferiore, da cui si deduce il costo computazionale (dare i dettagli).

Prova scritta di Calcolo Numerico, 5 Luglio 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ non singolare, di dimensioni moderate, e
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$
i) (6 punti) Sapendo che A_{11} è simmetrica e definita positiva e A_{22} è tridiagonale, proponi una procedura algoritmica efficiente che risolva il sistema dato.
ii) (2 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale della procedura proposta.

2. Si vuole approssimare l'integrale $\int_0^x f(t)\mathrm{dt}$.
i) (4 punti) Costruisci una formula di quadratura del tipo
$$\alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 (f'(x) - f'(0)),$$
che abbia grado di esattezza 2.
ii) (6 punti) Proponi l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione, per $f(t) = \sin(t)\cos(t)$.

3. (6 punti) È data la funzione $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$. Proponi un metodo di punto fisso convergente per la determinazione di uno zero di f, e determinane l'ordine.

4. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$
i) (6 punti) Presenta un algoritmo efficiente per l'approssimazione dell'autovalore di A più vicino a $\mu = 1.2$, e discutine il costo computazionale.
ii) (2 punti) Giustifica la convergenza del metodo.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Scrivendo il sistema a blocchi si ottiene $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = b_1$ e $A_{22}x_2 = b_2$ con notazione degli indici di x, b conforme ai blocchi di A. Il blocco x_2 si ottiene mediante risoluzione del secondo sistema, con A_{22} matrice tridiagonale (metodo di Thomas da descrivere). Il blocco x_1 si ottiene quindi risolvendo $A_{11}x_1 = b_1 - A_{12}x_2$: A_{11} è SDP quindi si può usare Cholesky.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. Si usa il metodo delle potenze inverse traslate, che ad ogni iterazione richiede la risoluzione di sistemi con $(A - \mu I)$.

Mediante i dischi di Gerschgorin, si nota che il disco centrato in -2 è isolato. Quindi A ammette o due autovalori reali e gli altri due complessi, oppure tutti autovalori reali. Il valore μ è contenuto nel disco centrato in 1, ma questo disco non è isolato dagli altri, per cui non è possibile assicurare la convergenza, in quanto non è possibile concludere che esiste un solo autovalore λ_j per qualche $j \in \{1, \dots 4\}$, per cui $|\lambda_j - \mu| < |\lambda_i - \mu|$ per ogni altro i.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 5 Luglio 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x - 30$, avente tutte radici reali.
   i) (2 punti) Senza calcolare le radici, determina un dato iniziale x_0 che assicuri la convergenza monotona decrescente del metodo di Newton per determinare una radice di ϕ_4.
   ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo associato al metodo delle secanti, e proponi criteri di arresto affidabili giustificando le scelte.

2. Si vuole approssimare l'integrale $\int_0^x f(t)\mathrm{dt}$.
   i) (4 punti) Costruisci una formula di quadratura del tipo
   $$\alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(x) + \alpha_2(f'(x) - f'(0)),$$
   che abbia grado di esattezza 2.
   ii) (6 punti) Proponi l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione, per $f(t) = \sin(t)\cos(t)$.

3. (6 punti) È data la funzione $f(x) = e^{-x} - \sin(x)$. Proponi un metodo di punto fisso convergente per la determinazione di uno zero di f, e determinane l'ordine.

4. Sono dati i punti $x_0 = 0, x_1 = \pi/8$ e $x_2 = \pi/4$, e la funzione $f(x) = \tan(x)^2 \cos(2x)$,
   i) (3 punti) Determina il polinomio, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
   ii) (3 punti) Dai una maggiorazione dell'errore di approssimazione sull'intero intervallo $[0, \pi/4]$.
   iii) (2 punti) Mostra come cambia la stima dell'errore mediante l'uso dei nodi di Chebyshev relativi all'intervallo $[0, \pi/4]$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 Giugno 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $B = (b_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b_{i,j} \geq 0$ con $n \geq 2$.
   i) (4 punti) Se $B\mathbf{1} = \mathbf{1}$, dimostra che $A = \alpha I - B$ è invertibile per $\alpha > 1$ e gli autovalori di A hanno parte reale positiva.
   ii) (3 punti) Dimostra la tesi del punto (i) nell'ipotesi in cui esista $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $Bv = v$ e $v_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.
   iii)(4 punti) Supponendo che esista e sia unica la fattorizzazione LU di A sia nel caso (i) che nel caso (ii), mostra che L ed U hanno elementi positivi sulla diagonale e non positivi fuori dalla diagonale (*sugg.: usa la costruzione degli elementi di L e poi di U*).

2. Considera i dati $f(-1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 5$ e $f(4) = 12$.
   i) (5 punti) Ottieni il polinomio interpolatorio di Lagrange di grado 3 in forma classica e di Newton.
   ii) (3 punti) Dai una stima del minimo di f, che potrebbe trovarsi nell'intervallo $[1, 3]$.

3. (4 punti) Determina il numero minimo di nodi di una formula di quadratura composita del trapezio per approssimare l'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-x}dx$ con un errore non superiore a $\frac{1}{2}10^{-3}$.

4. È data la matrice $A = D + uu^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con D matrice diagonale con elementi diagonali non nulli e maggiori di uno, e $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$.
   i) (5 punti) Proponi una implementazione matlab/octave del metodo delle potenze inverse traslate per l'approssimazione dell'autovalore di A più vicino a $\mu = 1$, con un criterio d'arresto opportuno.
   ii) (4 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale di ogni iterazione.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) La condizione implica che $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Sia x un generico autovettore di B, normalizzato in modo che $\max_i |x_i| = 1$. Allora per tale i, si ha che l'autovalore associato λ, per cui vale $Bx = \lambda x$, soddisfa $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j$ da cui $|\lambda| \le 1$, cioè tutti gli autovalori di B sono non maggiori di 1 in modulo. Sia $B = X\Lambda X^{-1}$. Allora $A = X(\alpha I - \Lambda)X^{-1}$ da cui segue che gli autovalori di A hanno tutti parte reale positiva, essendo $\lambda(A) = (\alpha - \Re(\lambda(B))) + \imath\Im(\lambda(B))$.

ii) Per tale v, sia $i = \arg\min_i v_i$. Allora posto $\tilde v = v/v_i$, da $\tilde v = B\tilde v$ si ottiene $1 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\tilde v_j \ge \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$. Il resto procede come in (i).

iii) Consideriamo il primo passo della eliminazione di Gauss (viene usata la notazione delle dispense, con $A^{(1)} = A$). Si nota che $0 \le b_{ij} \le 1\ \forall i, j$, quindi $A_{ii} = \alpha - b_{ii} > 0$ e $A_{ij} = -b_{ij} \le 0$, $i \ne j$. Sia $j = 1$. Per $i > 1$ si ha $L_{i1}(= m_{i1}) = A_{i1}/A_{11} < 0$. Inoltre $A_{i\ell}^{(2)} = A_{i\ell} - m_{i1}A_{1\ell} < 0$, $i, \ell = 2, \ldots, n$, $i \ne \ell$. Per verificare la positività di $A_{22}^{(2)}$ scriviamo $M^{(1)} = I - m_1 e_1^T$ e

$$M^{(1)}A = \begin{bmatrix} A_{11}^{(1)} & A_{12}^{(1)} & \ldots & A_{1n}^{(1)} \\ 0 & A_{22}^{(2)} & \ldots & A_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_{n2}^{(2)} & \ldots & A_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \equiv A^{(2)}.$$

Per (i), la condizione $A\mathbf{1} = (\alpha - 1)\mathbf{1}$ implica $A^{(2)}\mathbf{1} = (\alpha - 1)M^{(1)}\mathbf{1}$. La seconda riga è data da

$$\sum_{j\ge 2} A_{2j}^{(2)} = (\alpha - 1)(-m_{21} + 1), \quad \Leftrightarrow \quad A_{22}^{(2)} = -\sum_{j \ge 3} A_{2j}^{(2)} + (\alpha - 1)(-m_{21} + 1).$$

Le quantità a destra sono tutte positive, da cui segue la positività di $A_{22}^{(2)}$. Lo stesso vale per gli altri elementi diagonali di $A^{(2)}$. Per gli elementi successivi di U (ottenuti da $A^{(3)}, A^{(4)}, \ldots$, si procede in modo analogo.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. Ad ogni iterazione è richiesta la risoluzione di un sistema lineare con matrice $A - \mu I$, cioè $(D - \mu I) + uu^T$. Usando la formula di Sherman-Morrison, se $D - \mu I$ è invertibile questo sistema può essere risolto con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, dato che $D - \mu I$ è diagonale.

Modulo II - Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 Giugno 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Considera l'equazione non lineare tg$x + \lambda x = 0$, con $\lambda \in (0,1)$.
   i) (2 punti) Mostra graficamente che esiste un solo zero α nell'intervallo $[\pi/2, \pi]$.
   ii) (4 punti) Il metodo di Newton converge ad α del punto precedente, se l'approssimazione iniziale è $x^{(0)} = \pi$? Giustifica la risposta.
   iii) (6 punti) Proponi una funzione matlab/octave per una implementazione del metodo di Newton, fornendo uno script con la chiamata alla funzione per il problema considerato. Descrivi in modo dettagliato i criteri d'arresto utilizzati.

2. Considera i dati $f(-1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 5$ e $f(4) = 12$.
   i) (5 punti) Ottieni il polinomio interpolatorio di Lagrange di grado 3 in forma classica e di Newton.
   ii) (3 punti) Dai una stima del minimo di f, che potrebbe trovarsi nell'intervallo $[1, 3]$.

3. (4 punti) Determina il numero minimo di nodi di una formula di quadratura composita del trapezio per approssimare l'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-x}dx$ con un errore non superiore a $\frac{1}{2}10^{-3}$.

4. L'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ ha radici 1 e 2. Scritta nella forma di punto fisso $x = \frac{1}{\omega}(x^2 - (3-\omega)x + 2)$, con $\omega \neq 0$, suggerisce l'iterazione

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{\omega}((x^{(k)})^2 - (3-\omega)x^{(k)} + 2), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

   i) (5 punti) Identifica il più grande intervallo possibile in ω per i cui valori di ω l'iterazione converga alla radice 1.
   ii) (3 punti) Per quali valori di ω si ha convergenza quadratica nel punto (i)?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Siano $g_1(x) = \tan(x)$, $g_2(x) = -\lambda x$. i) Entrambe le funzioni sono monotone (una crescente ed una decrescente) nel loro dominio. Questo giustifica una sola intersezione.

ii) Sia $f(x) = \tan(x) + \lambda x$. Una possibilità consiste nel considerare $f(x) = f(\pi) + f'(\xi)(x - \pi)$ per $\xi \in (x, \pi)$, con $x \in [\pi/2, \pi]$. Applicando il teorema per polinomi a coefficienti reali con radici reali, si ottiene che il metodo di Newton converge per ogni $x_0 \geq \alpha$, ed in particolare per $x_0 = \pi$.

iii) Come da laboratorio.

ESERCIZIO 2. i) Si ha $p_3(x) = -(1/12)(x-2)(x-3)(x-4) + 0.5(x-1)(x-3)(x-4) - 5/4(x+1)(x-2)(x-4) + 6/5(x+1)(x-2)(x-3)$. In forma di Newton: $p_3(x) = 5 - 2/3(x+1) + 2/3(x+1)(x-2) + 11/30(x+1)(x-2)(x-3)$.

ii) Il minimo di $p_3(x)$ si ottiene per $x_* = 21/11$, ad cui si ottiene $\min f \approx \min p_3 = p_3(21/11)$.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. Sia $\phi(x) = \frac{1}{\omega}(x^2 - (3-\omega)x + 2)$. i) Per applicare Ostrowski, dev'essere $|\phi'(1)| < 1$, cioè $|1/\omega(-1+\omega)| < 1$, da cui segue $\omega > 1/2$. L'intervallo è quindi $(1/2, \infty)$.

ii) Per la convergenza quadratica, $\phi'(1) = 0$, cioè $\omega = 1$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 9 Febbraio 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica definita positiva e tridiagonale, e sia I_n la matrice identità di dimensioni n. Sia infine
$$A = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n + H \end{bmatrix}.$$
i) (2 punti) Determina la fattorizzazione LU di A, $A = LU$, mettendo in relazione L ed U con la fattorizzazione di H.
ii) (10 punti) Sfruttando il punto precedente, descrivi un algoritmo che risolva il sistema lineare $Ax = b$ con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, includendo una descrizione di tali costi.

2. Per $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$ a rango massimo e $b \in \mathbb{R}^m$, è dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$.
i) (4 punti) Determina la soluzione x del problema mediante trasformazioni di Householder, minimizzando il costo computazionale, includendo una descrizione di tali costi.
ii) (6 punti) Descrivi una implementazione Matlab/Octave dell'algoritmo al punto i).
ii) (6 punti) Sia $a \in \mathbb{R}^m$, $a \neq 0$. Supponendo che v_i, β_i, $i = 1, \dots, n$ siano i vettori e scalari di Householder usati in i), descrivi una procedura per risolvere il problema
$$\min_{z\in\mathbb{R}^m} \|b - A_1 z\|, \qquad A_1 = [A, a]$$
che minimizzi il costo computazionale, supponendo che tutte le quantità calcolate al punto precedente siano disponibili.

3. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & \alpha & -1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
i) (4 punti) Proponi ipotesi sufficienti su α in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti e positivi. Stima l'intervallo spettrale di A in funzione di α.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa con la stessa data.
ESERCIZIO 2.
ESERCIZIO 3.
ESERCIZIO 4. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa con la stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 9 Febbraio 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica definita positiva e tridiagonale, e sia I_n la matrice identità di dimensioni n. Sia infine
$$A = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n + H \end{bmatrix}.$$
i) (2 punti) Determina la fattorizzazione LU di A, $A = LU$, mettendo in relazione L ed U con la fattorizzazione di H.
ii) (10 punti) Sfruttando il punto precedente, descrivi un algoritmo che risolva il sistema lineare $Ax = b$ con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, includendo una descrizione di tali costi.

2. È data l'equazione non lineare $xe^{-x} = e^{-p}$ con p parametro reale.
i) (2 punti) Trova il numero di radici dell'equazione al variare di p
ii) (4 punti) Per $p = 3$ studia la convergenza dell'iterazione $x_{k+1} = e^{x_k - 3}$ al suo punto fisso.
iii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave dell'iterazione data, giustificando i criteri d'arresto.

3. (4 punti) Determina il numero minimo di nodi di una formula di quadratura composita del trapezio per approssimare l'integrale $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ con un errore non superiore a $\frac{1}{2}10^{-3}$.

4. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1/2 & 1 \\ 1/3 & \alpha & -1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
i) (4 punti) Proponi ipotesi sufficienti su α in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti e positivi. Stima l'intervallo spettrale di A in funzione di α.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Sia $H = LU$ ottenuta per esempio con l'algoritmo di Thomas (da descrivere), con L ed U bidiagonali. Allora

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & U \end{bmatrix} = \widetilde{L}\widetilde{U}.$$

Quindi $Ax = b$ diventa $\widetilde{L}\widetilde{U}x = b$ che corrisponde a risolvere $\widetilde{L}y = b$ e poi $\widetilde{U}x = y$. Scrivendo $b = [b_1; b_2]$ e $y = [y_1; y_2]$ si ha $y_1 = b_1$ e $Ly_2 = b_2 - y_1$ (discutere in dettaglio la risoluzione del sistema con L). Dopo di che, da $\widetilde{U}x = y$ si ottiene $Ux_2 = y_2$ (da descrivere in dettaglio) e $x_1 = y_1 - x_2$. Commentare sulla somma dei vari costi.

ESERCIZIO 2. i) Per esempio, si studia l'equazione di punto fisso $x = \phi(x)$ con $\phi(x) = e^{x-p}$. Per $p \leq 0$ ϕ non ha punti fissi. Per $p > 0$ ($p \neq 1$) ϕ ha 2 punti fissi distinti. Per $p = 1$ ha un solo punto fisso.

ii) Per $p = 3$, si ha che $\phi'(x)| < 1$ per $|e^{x-3}| < 1$ cioè per $x < 3$. Dev'essere quindi $x_0 < 3$ per avere convergenza al punto fisso più piccolo.

iii) Si procede come da esercizi in aula/laboratorio.

ESERCIZIO 3. Dato che $\|f''\|_\infty = 1$ in $[0, 1]$, si ha $|E_{1,m}| \leq 1/2 \cdot 10^{-3}$. Inoltre, $m > \lceil \sqrt{10^3/6} \rceil$.

ESERCIZIO 4. I dischi di Gerschgorin per righe sono $G_1^{(r)} = \mathcal{B}(5, 3/2)$, $G_2^{(r)} = \mathcal{B}(\alpha, 2/3)$, $G_3^{(r)} = \mathcal{B}(2, 1)$, $G_4^{(r)} = \mathcal{B}(8, 1)$. A ha autovalori distinti per $\alpha - 2/3 > 9$, cioè $\alpha > 29/3$, oppure per $\alpha + 2/3 < 1$, cioè $\alpha < 1/3$. Nel primo caso l'intervallo spettrale è $[1, \alpha + 2/3]$. Nel secondo caso, si otterrebbe l'intervallo $[\alpha - 2/3, 9]$, che però non è necessariamente tutto positivo. Per avere autovalori tutti positivi, dovrebbe essere $\alpha - 2/3 > 0$, che però non soddisfa la condizione $\alpha < 1/3$. Quindi si considera solo il primo intervallo.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 19 Gennaio 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica con autocoppie (λ_i, u_i), $i = 1, \ldots, n$. Per la risoluzione del sistema $Ax = b$ considera il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$, dove $A = M - N$ e M è non singolare.
   i) (2 punti) Dai condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinchè il metodo ottenuto con $M = I$ sia convergente.
   ii) (6 punti) Supponendo $0 < \lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, ..., n-1$ e assumendo di conoscere (λ_1, u_1), determina i valori di α per cui il metodo iterativo ottenuto con $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ sia convergente. Determina un valore di α che massimizzi la velocità di convergenza del metodo.
   iii) (8 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi in modo efficiente la procedura proposta, con M come in (ii), e descrivine il costo computazionale.

2. Sia $n > 2$ un intero e siano e_i, $i = 1, \ldots, n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   i) (2 punti) Determina $v \in \mathbb{R}^n$ e una costante β tali che la matrice di Householder $P = I - \beta vv^T$ trasformi il vettore $be_1 + e_2$ in αe_1, dove $b, \alpha \in \mathbb{R}$.
   ii) (2 punti) Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che $a_{i,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove, dove $b_i \in \mathbb{R}$. Dimostra che dopo un passo del metodo di Householder per la fattorizzazione QR di $A_1 = A$, la matrice $A_2 = P_1 A_1$ differisce da A solo nella sottomatrice principale di testa 2×2 che vale $[\hat{b}_1, c_1; 0, d_1]$, e determina le espressioni di $\hat{b}_1, c_1$ e d_1.
   iii) (4 punti) Dimostra che la matrice R della fattorizzazione $A = QR$ è bidiagonale superiore e descrivi un algoritmo per il calcolo dei suoi elementi diagonali e sopra-diagonali di costo computazionale $\mathcal{O}(n)$.

3. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} -4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
   i) (3 punti) Descrivi una strategia per stimare dall'alto, senza calcolarlo, il rapporto $|\lambda_2|/|\lambda_1|$, dove gli autovalori λ_i sono ordinati in modo decrescente in modulo.
   ii) (4 punti) Descrivi il metodo delle potenze per l'approssimazione dell'autovalore massimo, includendo una discussione del costo computazionale della procedura.
   iii) (1 punti) Riporta una stima della velocità di convergenza per l'approssimazione dell'autovalore massimo in modulo.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) $M^{-1}N = I - M^{-1}A$. Quindi per $M = I$, si ha che $\rho(M^{-1}N) < 1$ se e solo se $|1 - \lambda_i| < 1$, cioè se e solo se $0 < \lambda_i < 2$.

ii) Per $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ con $\|u_1\| = 1$ si ha, mediante la formula di Sherman-Morrison,

$$M^{-1}N = I - (I + \alpha u_1 u_1^T)^{-1}A = I - (A - \frac{\alpha}{1+\alpha} u_1 u_1^T A) = I - (A - \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha} u_1 u_1^T).$$

Si noti che $\mathrm{spec}(A - \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha} u_1 u_1^T) = \{\lambda_1 - \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha}, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ per cui $\mathrm{spec}(I - A + \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha} u_1 u_1^T) = \{1 - \lambda_1 + \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha}, 1 - \lambda_2, \ldots, 1 - \lambda_n\}$. Ne segue

$$\rho(M^{-1}N) < 1 \Leftrightarrow |1 - \lambda_1 + \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha}| < 1, \ |1 - \lambda_j| < 1, j = 2, \ldots, n.$$

La seconda condizione è sempre verificata per $\lambda \in (0,1)$. La prima è verificata per $\alpha > (\lambda_1 - 2)/2$. Considerando la funzione $f(\alpha)(= \rho^2(\alpha)) = (1 - \lambda_1 + \lambda_1 \frac{\alpha}{1+\alpha})^2$, questa ha un solo minimo per $\alpha_* = \lambda_1 - 1$.

ESERCIZIO 2. i) Si ha $v = (b - \alpha)e_1 + e_2$ con $\alpha = \sqrt{b^2 + 1}$, e $\beta = 1/(\alpha^2 - b\alpha)$. In particolare solo le prime due componenti di v sono non nulle.

ii) A è bidiagonale inferiore. Il primo passo lavora sul blocco 2×2 in alto, ed il vettore considerato (la prima colonna di A) è proprio del tipo $be_1 + e_2$, come sopra. Quindi l'applicazione di P, cioè la moltiplicazione per v^T, non modifica le righe successive alla seconda, avendo v solo i primi due elementi non zero. (dare i dettagli)

iii) Essendo A bidiagonale inferiore, si mostra che $v^T A_{:,j} = 0$ per $j > i + 1$ per ogni i, da cui la forma bidiagonale di R. (dare i dettagli)

ESERCIZIO 3. i) I dischi di Gerschgorin per righe sono $\mathcal{G}_1^{(r)} = \mathcal{B}(-4, 1/2)$, $\mathcal{G}_2^{(r)} = \mathcal{B}(2, 1)$, $\mathcal{G}_3^{(r)} = \mathcal{B}(1, 1/4)$, $\mathcal{G}_4^{(r)} = \mathcal{B}(2, 1/4)$. Quindi $\lambda_1 \in \mathcal{G}_1^{(r)}$ e $|\lambda_1| \geq 7/2$, inoltre $\lambda_2 < 3$. Quindi $|\lambda_2/\lambda_1| le 6/7$.

ii) Come da laboratorio.

iii) La matrice è simmetrica, quindi la velocità della convergenza degli autovalori è maggiorata da $(6/7)^2$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 19 Gennaio 2017
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica con autocoppie (λ_i, u_i), $i = 1, \ldots, n$. Per la risoluzione del sistema $Ax = b$ considera il metodo iterativo $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$, dove $A = M - N$ e M è non singolare.
   i) (2 punti) Dai condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinchè il metodo ottenuto con $M = I$ sia convergente.
   ii) (6 punti) Supponendo $0 < \lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 1$ per $i = 1, 2, ..., n-1$ e assumendo di conoscere (λ_1, u_1), determina i valori di α per cui il metodo iterativo ottenuto con $M = I + \alpha u_1 u_1^T$ sia convergente. Determina un valore di α che massimizzi la velocità di convergenza del metodo.

2. Sia $n > 2$ un intero e siano e_i, $i = 1, \ldots, n$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
   i) (2 punti) Determina $v \in \mathbb{R}^n$ e una costante β tali che la matrice di Householder $P = I - \beta vv^T$ trasformi il vettore $be_1 + e_2$ in αe_1, dove $b, \alpha \in \mathbb{R}$.
   ii) (2 punti) Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $a_{i,i} = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i+1,i} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,j} = 0$ altrove, dove $b_i \in \mathbb{R}$. Dimostra che dopo un passo del metodo di Householder per la fattorizzazione QR di $A_1 = A$, la matrice $A_2 = P_1 A_1$ differisce da A solo nella sottomatrice principale di testa 2×2 che vale $[\hat{b}_1, c_1; 0, d_1]$, e determina le espressioni di $\hat{b}_1, c_1$ e d_1.
   iii) (4 punti) Dimostra che la matrice R della fattorizzazione $A = QR$ è bidiagonale superiore e descrivi un algoritmo per il calcolo dei suoi elementi diagonali e sopra-diagonali di costo computazionale $\mathcal{O}(n)$.

3. È data la funzione $f(x) = (2x^2 - 3x - 2)/(x - 1)$ con radici $x_1 = -1/2$ e $x_2 = 2$, e l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = \phi(x_k)$ con $\phi(x) = x - 2 + x/(x - 1)$.
   i) (4 punti) Verifica che l'iterazione è convergente (a quale radice?) e determina l'ordine di convergenza.
   ii) (4 punti) Proponi una implementazione dell'iterazione data mediante funzione Matlab/Octave, includendo opportuni criteri d'arresto, giustificando la loro scelta.

4. Sia $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)e^x$, $x \in [-1, 1]$.
   i) (2 punti) Determina il polinomio interpolante di grado due di f con nodi equidistanti;
   ii) (4 punti) Determina una stima per il suo errore di interpolazione.
   iii) (2 punti) Confronta la stima ottenuta in (ii) con quella ottenuta usando i nodi di Chebyshev sullo stesso intervallo.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi corrispondente esercizio del Modulo I nella stessa data.

ESERCIZIO 2. Vedi corrispondente esercizio del Modulo I nella stessa data.

ESERCIZIO 3. i) Si ha $\phi(x_2) = 0$ e $\phi(x_1) \neq 0$ quindi $x_2 = 2$ è l'unico punto fisso di ϕ. Inoltre $\phi'(x_2) = 0$, in particolare, $|\phi'(x_2)| < 1$ quindi l'iterazione converge in un intorno di x_2. Essendo $\phi''(x_2) \neq 0$, la convergenza è di ordine 2. ii) L'implementazione è simile ad altri metodi per equazioni non lineari. Il criterio d'arresto deve prevedere una tolleranza assoluta ed una relativa.

ESERCIZIO 4. iii) I polinomi di Chebyshev hanno proprieta' di ottimalità, per cui su $[-1, 1]$ si ottiene $||w_*(x)||_\infty = 1/2^n$ per n nodi di Chebyshev, dove w_* è il polinomio nodale.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 14 Novembre 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
   i) (4 punti) Proponi ipotesi sufficienti su $\alpha > 0$ in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti.
   ii) (3 punti) Determina tutti i valori di α in modo che l'intervallo spettrale di A sia contenuto in $[-2, 5]$.

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $A_{ij} = 0$ per $i > j+2$, e con $A_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$.
   i) (5 punti) Descrivi l'algoritmo iterativo SOR per risolvere il sistema lineare;
   ii) (6 punti) Descrivi in dettaglio il costo computazionale di una generica iterazione dell'algoritmo, incluso il costo della risoluzione del sistema lineare associato;
   iii) (6 punti) Proponi una implementazione dell'algoritmo mediante una funzione, inclusa la risoluzione del sistema associato.

3. (8 punti) Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $m \leq n$ ed il vettore $b \in \mathbb{R}^n$, considera il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$.
   Descrivi il metodo dell'equazione normale per la sua risoluzione, e proponi un algoritmo che non richieda il calcolo esplicito di $A^T A$, descrivendone il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) La matrice A è simmetrica per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, quindi il suo spettro è reale indipendentemente dalla scelta di α. Per assicurare che gli autovalori di A siano tutti distinti possiamo imporre, ad esempio, che i cerchi di Gerschgorin per righe siano disgiunti. Si ha, $\mathcal{G}_1^{(r)} = \mathcal{B}(4,1)$, $\mathcal{G}_2^{(r)} = \mathcal{B}(\alpha,2)$, $\mathcal{G}_3^{(r)} = \mathcal{B}(-1,1)$, e, ricordando che lo spettro è reale, ci'o significa che $\lambda_1 \in [3,5]$, $\lambda_2 \in [\alpha-2,\alpha+2]$, $\lambda_3 \in [-2,0]$. Si mostra che la condizione $\alpha > 7$, assicura che questi intervalli siano disgiunti.

ii) Poichè $\lambda_1, \lambda_3 \in [-2,5]$, per assicurare che lo spettro di A sia incluso in $[-2,5]$ dobbiamo chiedere che $\lambda_2 \in [-2,5]$. Una condizione sufficiente consiste nel richiedere che $\alpha - 2 \geq -2$ e $\alpha + 2 \leq 5$, cioè $\alpha \in [0,3]$.

ESERCIZIO 2. La matrice A è a banda inferiore con $\beta_L = 2$. Quindi la matrice triangolare inferiore di SOR è a banda stretta. La risoluzione del sistema triangolare ha quindi costo $\mathcal{O}(n)$ (dare i dettagli).

ESERCIZIO 3. La fattorizzazione QR ridotta di A, $A = Q_1 R_1$, determina $R_1 = L^T$ dove L è il fattore di Cholesky. Per cui l'equazione normale si può risolvere usando R_1^T al posto di L.

Prova scritta completa di Calcolo Numerico, 14 Novembre 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   i) (4 punti) Proponi ipotesi sufficienti su $\alpha > 0$ in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti.

   ii) (3 punti) Determina tutti i valori di α in modo che l'intervallo spettrale di A sia contenuto in $[-2, 5]$.

2. È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\cos(2x)dx$.

   i) (2 punti) Descrivi la formula di quadratura dei trapezi composita;

   ii) (2 punti) Determina il numero di sottointervalli di tale formula di quadratura affinchè l'approssimazione di $\mathcal{I}$ abbia un errore inferiore a 10^{-2}.

   iii) (5 punti) Proponi una implementazione in Matlab/Octave della formula al punto i) ed uno script di chiamata della funzione per l'integrale considerato.

3. (8 punti) Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $m \le n$ ed il vettore $b \in \mathbb{R}^n$, considera il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$.
   Descrivi il metodo dell'equazione normale per la sua risoluzione, e proponi un algoritmo che non richieda il calcolo esplicito di A^TA, descrivendone il costo computazionale.

4. È dato il polinomio $\phi(x) = x^4 - 10x^3 - 35x^2 - 50x + 24$ avente tutte radici reali.
   i) (5 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione della radice di ϕ più grande in modulo, scegliendo opportunamente il dato iniziale;
   ii) (3 punti) Descrivi la regola di Horner ed il suo uso al punto (i).

Traccia della risoluzione.
ESERCIZIO 1. Vedi la soluzione dell'esercizio 1 del Modulo I nella stessa data.
ESERCIZIO 2.
ESERCIZIO 3.
ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 16 Settembre 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, e sia $M = LL^T$ la sua fattorizzazione di Cholesky.
i) (3 punti) Mostra che $\lambda_{\min}(M) = 1/\|L^{-1}\|_2^2$ e $\lambda_{\max}(M) = \|L\|_2^2$, dove $\|L\|_2$ è la norma matriciale indotta dalla norma vettoriale euclidea
ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo del metodo delle potenze inverse per l'approssimazione di $\lambda_{\min}(M)$, in modo che sfrutti tale fattorizzazione. Discutine il costo computazionale.

2. (8 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di $f(x) = \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}$ per $x > 0$ e $|\delta|$ molto piccolo. Mostra con un esempio che il calcolo di f è soggetto a forti cancellazioni per $|\delta| \to 0$ e proponi un modo alternativo per scrivere la funzione.

3. (5 punti) Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$ di tipo Hessenberg superiore, e $B \in \mathbb{R}^{n\times s}$, $s \ll n$, $B = [b_1, \ldots, b_s]$, $b_j \in \mathbb{R}^n$. È dato il problema ai minimi quadrati
$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times s}} \|AX - B\|_F$$
dove $\|AX - B\|_F^2 = \sum_{j=1}^{s} \|Ax_j - b_j\|_2^2$, con $X = [x_1, \ldots, x_s]$. Descrivi i passi di un metodo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema, descrivendone in dettaglio il costo.

4. È dato il sistema lineare
$$\begin{bmatrix} D & Q \\ Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$
con $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonale non singolare e $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonale, Q matrice di Householder.
i) (5 punti) Descrivi un algoritmo con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$ per la risoluzione del sistema lineare.
ii) (5 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave dell'algoritmo proposto.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Siccome M è simmetrica e definita positiva, $\lambda_{\max} = \max_{\|x\|=1} x^T Mx = \max_{\|x\|=1} x^T LL^T x = \max_{\|x\|=1} \|L^T x\|^2 = \|L^T\|^2$. Siccome $\|L\| = \|L^T\|$, ne segue il risultato su $\lambda_{\max}$. Per $\lambda_{\min}$ si procede come sopra, lavorando con M^{-1}.

ii) L'algoritmo da descrivere deve sfruttare la fattorizzazione fornita nella risoluzione del sistema lineare con M ($y = M^{-1}x = L^{-T}(L^{-1}x)$). A seconda della sparsità di M, può convenire anche sfruttare i fattori nel calcolo del quoziente di Rayleigh ($x^T Mx = (x^T L)(L^T x) = z^T z$, $z := L^T x$) e nel calcolo del residuo ($Mx - \lambda x = L(L^T x) - \lambda x$).

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3. Il problema si riconduce alla risoluzione di s problemi ai minimi quadrati "standard" (con un singolo termine noto) con la stessa matrice dei coefficienti:

$$\min_{x_j \in \mathbb{R}^m} \|Ax_j - b_j\|, j = 1, ..., s.$$

Calcoliamo quindi la fattorizzazione QR di A una volta per tutte sfruttando la sua struttura: essendo Hessenberg superiore, per triangolarizzare A basterà azzerare la prima sotto-diagonale applicando m rotazioni di Givens, ottenendo $A = QR$. Il costo di questa procedura sarà $3m^2$ flops. Le rotazioni di Givens dovranno essere applicate anche ai termini noti b_j, $j = 1, ..., s$, al costo di $6ms$ flops. Se $Q = [Q_1, Q_2]$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)}$, $R = [R_1; 0]$, $R_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, e definendo $\tilde{b}_j := Q_1^T b_j$, $j = 1, ..., s$, dovremo risolvere gli s sistemi lineari con matrice triangolare superiore di dimensione $m \times m$, $R_1 x_j = \tilde{b}_j$, $j = 1, \ldots, s$ il cui costo totale ammonta a $\mathcal{O}(m^2 s)$ flops.

ESERCIZIO 4. i) Sfruttando la sua struttura a blocchi, il sistema lineare dato può essere scritto come

$$\begin{cases} Dx_1 + Qx_2 & = & b_1, \\ Q^T x_1 & = & b_2, \end{cases}$$

da cui $x_1 = Qb_2$, $x_2 = Q^T(b_1 - Dx_1)$, essendo Q ortogonale. Le ipotesi D diagonale e Q matrice di Householder, $Q = I - \beta vv^T$, $\beta \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$, ci permettono di mostrare che il calcolo di x_1, x_2 richieda $\mathcal{O}(n)$ flops. Si noti come l'uso delle parentesi sia essenziale (anche nell'implementazione da proporre) per evitare la creazione esplicita di matrici piene.

ii) non proposto.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 16 Settembre 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. Sia $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, e sia $M = LL^T$ la sua fattorizzazione di Cholesky.
   i) (3 punti) Mostra che $\lambda_{\min}(M) = 1/\|L^{-1}\|_2^2$ e $\lambda_{\max}(M) = \|L\|_2^2$, dove $\|L\|_2$ è la norma matriciale indotta dalla norma vettoriale euclidea
   ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo del metodo delle potenze inverse per l'approssimazione di $\lambda_{\min}(M)$, in modo che sfrutti tale fattorizzazione. Discutine il costo computazionale.

2. È data l'equazione non lineare $\sin^2(x) - x\cos(x) = 0$.
   i) (3 punti) Individua un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione all'equazione nell'intorno della radice più vicina a zero, e calcola il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore inferiore a 10^{-5}.
   ii) (7 punti) Descrivi l'algoritmo con un criterio di arresto affidabile, spiegando perchè tale criterio è stato scelto.

3. (5 punti) Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n \geq m$ di tipo Hessenberg superiore, e $B \in \mathbb{R}^{n\times s}$, $s \ll n$, $B = [b_1, \ldots, b_s]$, $b_j \in \mathbb{R}^n$. È dato il problema ai minimi quadrati

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times s}} \|AX - B\|_F$$

   dove $\|AX - B\|_F^2 = \sum_{j=1}^s \|Ax_j - b_j\|_2^2$, con $X = [x_1, \ldots, x_s]$. Descrivi i passi di un metodo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema, descrivendone in dettaglio il costo.

4. Considera la formula di quadratura

$$\int_0^1 x^\alpha f(x)\mathrm{d}x \approx af(0) + b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, \quad \alpha > -1,\ \alpha \neq 0.$$

   1) (4 punti) Determina a e b in modo che la formula abbia grado di esattezza $d = 1$.
   2) (4 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave di questa formula per una funzione f data, fornendo uno script del suo uso per una f a scelta.

Traccia della risoluzione.
ESERCIZIO 1. Si veda esercizio 1, Modulo I nella stessa data.
ESERCIZIO 2.
ESERCIZIO 3. Si veda esercizio 3, Modulo I nella stessa data.
ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, I Modulo, 1 Settembre 2016
Laurea Triennale in Matematica a.a. 2014-2015

1. (6 punti) Siano
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \mathbf{1}.$$
È data una approssimazione della soluzione $\tilde{x}$ del sistema lineare $Ax = b$. Il residuo $r = b - A\tilde{x}$ soddisfa $\|r\| \leq 10^{-4}$, dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea. Senza fare calcoli espliciti della soluzione o dello spettro di A, fornisci una stima dall'alto della norma dell'errore relativo $\|x - \tilde{x}\|/\|x\|$.

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$ dove
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
a) (5 punti) Determina i valori di α per i quali i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono entrambi convergenti;
b) (2 punti) Per tali valori di α, determina quale dei due metodi ha migliore tasso asintotico di convergenza;
c) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab del metodo di Gauss-Seidel, includendo criteri d'arresto opportuni. Descrivine inoltre il costo computazionale per un sistema lineare con matrice dei coefficienti di dimensione n.

3. (8 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con matrice invertibile $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avente banda inferiore e superiore uguale a $\beta > 0$ (cioè $a_{ij} = 0$ per $|i - j| > \beta$).
Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss per la matrice A, e discutine il costo computazionale.

4. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ di tipo Hessenberg superiore di rango massimo.
1) (4 punti) Descrivi un algoritmo per determinare la fattorizzazione $A = Q_1 R_1$ (ridotta) di A
2) (2 punti) Mostra che la matrice triangolare superiore R_1 è legata alla fattorizzazione di Cholesky di $A^T A$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si ha $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, da cui $1/\|x\| \leq \|A\|/\|b\|$. Quindi

$$\|x - x_k\|/\|x\| = \|A^{-1}b - (A^{-1}r + A^{-1}b)\|/\|x\| = \|A^{-1}r\|/\|x\| \leq \|A^{-1}\|\|A\|\|r\|/\|b\|,$$

con $\|b\| = \sqrt{3}$. Dobbiamo quindi stimare, senza fare calcoli, $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. Essendo A simmetrica, $\kappa(A) = |\lambda_{\max}|/|\lambda_{\min}|$, dove $\lambda_{\min,\max}$ sono gli autovalori estremi, in modulo. Una stima di questi autovalori può essere ottenuta mediante i cerchi di Gerschgorin. Si ha, $\mathcal{G}_1^{(r)} = \mathcal{B}(3,1)$, $\mathcal{G}_2^{(r)} = \mathcal{B}(4,2)$, $\mathcal{G}_3^{(r)} = \mathcal{B}(5,3)$. Ciò implica che A è definita positiva e $2 \leq \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max} \leq 8$. Quindi $\kappa(A) \leq 8/2 = 4$. Concludendo, $\|x - x_k\|/\|x\| \leq \kappa(A)\|r\|/\|b\| \leq 4 10^{-4}/\sqrt{3}$.

ESERCIZIO 2. a) Calcoliamo i raggi spettrali delle matrici di iterazione B_J e B_G dei due metodi. Per Jacobi, si ha

$$B_J = P^{-1}N = N = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ -1 & 0 & -1 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcolando esplicitamente i suoi autovalori come radici del polinomio caratteristico, si ottiene $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2\alpha - \alpha^2}$. Quindi $\rho(B_J) = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}$ e imponendo $\rho(B_J) < 1$ si ottengono i seguenti valori di α: $0 \leq \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$. Per Gauss-Seidel si segue la stessa procedura. Da notare che per calcolare esplicitamente B_G, indicando con n_i la i-esima colonna di N e con b_i quella di B_G, bisogna risolvere il sistema triangolare inferiore 3×3, $Pb_i = n_i$, $i = 1, 2, 3$. La matrice che si ottiene è

$$B_G = P^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & -1-\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

da cui $\rho(B_G) = |\alpha|$. Imponendo $\rho(B_G) < 1$ si ottiene $-1 < \alpha < 1$. Il metodo di Jacobi e quello di Gauss-Seidel sono quindi entrambi convergenti per $0 \leq \alpha < 1$.

b) Per verificare quale dei due metodi abbia un migliore tasso asintotico di convergenza studiamo, ad esempio, $\rho(B_J) < \rho(B_G)$ (avremmo potuto studiare $\rho(B_J) > \rho(B_G)$); questa condizione corrisponde a $2\alpha - \alpha^2 < |\alpha|$. Tale disequazione non ha soluzioni nell'intervallo $[0, 1[$ in cui entrambi i metodi convergono, quindi vale $\rho(B_J) \geq \rho(B_G)$, cioè il metodo di Gauss-Seidel ha un migliore tasso asintotico di convergenza.

c) L'implementazione da proporre ricalca esattamente quella vista in laboratorio.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. Essendo $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ Hessenberg superiore, per calcolare la sua fattorizzazione QR ridotta $A = Q_1R_1$, possiamo azzerare la prima sotto-diagonale applicando n rotazioni di Givens. Questa procedura costerà $3n^2$ flops. Inoltre, se $A = Q_1R_1$, vale $A^TA = R_1^TQ_1^TQ_1R_1 = R_1^TR_1$, cioè la matrice triangolare R_1 è il fattore di Cholesky di A^TA.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 1 Settembre 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. Considera l'equazione non lineare $x = e^{-x}$.
1) (3 punti) Mostra che c'è una unica radice reale x_* e determina un intervallo che la contiene.
2) (3 punti) Mostra che l'iterazione di punto fisso $x_{k+1} = e^{-x_k}$, $k = 1, 2, \ldots$ converge localmente ad x_* e determina la costante asintotica per l'errore.

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) (5 punti) Determina i valori di α per i quali i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono entrambi convergenti;
b) (2 punti) Per tali valori di α, determina quale dei due metodi ha migliore tasso asintotico di convergenza;
c) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab del metodo di Gauss-Seidel, includendo criteri d'arresto opportuni. Descrivine inoltre il costo computazionale per un sistema lineare con matrice dei coefficienti di dimensione n.

3. (8 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con matrice invertibile $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avente banda inferiore e superiore uguale a $\beta > 0$ (cioè $a_{ij} = 0$ per $|i - j| > \beta$).
Descrivi l'algoritmo di eliminazione di Gauss per la matrice A, e discutine il costo computazionale.

4. Considera i dati $f(0) = 5$, $f(1) = 3$, $f(3) = 5$ e $f(4) = 12$.
1) (3 punti) Determina il polinomio interpolante di grado 3 in forma di Newton
2) (4 punti) I dati suggeriscono che f abbia un minimo tra $x = 1$ e $x = 3$, $f_{\min} = f(x_{\min})$. Trova un valore approssimato per $x_{\min}$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. La funzione $y = x$ è funzione crescente strettamente e $y = 1/e^x$ è funzione sempre strettamente positiva e strettamente decrescente. Le due funzioni si possono incontrare solo per $x > 0$, e quindi in un unico punto. Inoltre $f(x) = x - e^{-x}$ è continua e soddisfa $f(1) > 0$ e $f(0) < 0$, quindi esiste uno zero di f in $[0, 1]$.a Sia $\phi(x) = e^{-x} \in C^1(\mathbb{R})$. Si ha $|\phi'(x)| = e^{-x} < 1$ se e solo se $x > 0$, quindi $|\phi(x_*)| < 1$ essendo $x_* > 0$. Per il teorema di Ostrowski esiste un intorno I_δ in cui l'iterazione converge. Allora $|x_{k+1} - x^*| \leq |\phi'(\xi_k)|\,|x_k - x^*| < |x_k - x^*|$ con $\xi_k \in (x^*, x_k) \subset I_\delta$. Quindi se $x_k \in I_\delta$ allora anche $x_{k+1} \in I_\delta$. La costante asintotica è $\rho = |\phi'(x^*)| \leq \sup_{x \in I_\delta} |\phi'(x)|$.

ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente nel Modulo I nella stessa data.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 28 Giugno 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Considera la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \alpha_1 \int_{-1}^{-1/2} f(t)dt + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 \int_{1/2}^{1} f(t)dt.$$

   Determina α_j, $j = 1, .., 3$ in modo che il grado di esattezza sia massimo.

2. Per $a > 0$, è data l'iterazione di punto fisso

$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

   (5 punti) Mostra che converge ad $\alpha = \sqrt{a}$ per una opportuna scelta di x_0, con convergenza cubica.
   (3 punti) Determina la costante asintotica ρ tale che $|x_{k+1} - \alpha| \leq \rho |x_k - \alpha|^3$.
   (5 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi questa iterazione, includendo opportuni criteri d'arresto.

3. È data la matrice non singolare a "punta di freccia"

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

   avente elementi tutti nonzero sulla diagonale principale, nell'ultima riga e nell'ultima colonna. Tutti gli altri elementi sono zero, incluso l'elemento (n, n).
   (6 punti) Proponi una procedura per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, dandone i dettagli computazionali.
   (4 punti) Scrivi un algoritmo che implementa la procedura descritta.

4. Sono dati il polinomio $\phi_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - \frac{1}{4}$ e la matrice companion associata.
   i) (3 punti) Descrivi una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice $x_\star$ di ϕ_3 più grande in modulo.
   ii) (2 punti) Sapendo che tutte le radici di ϕ_3 sono reali, proponi una scelta opportuna del dato iniziale per il metodo di Newton per determinare la radice $x_\star$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi esercizi simili in precedenti prove.

ESERCIZIO 2. i) Il punto $x = \sqrt{a}$ è punto fisso della funzione ϕ definita dall'iterazione. Inoltre $\phi'(x) = ((3x^2+a)(3x^2+3a)-6x(x^3+3ax))/(3x^2+a)^2|_{x=\sqrt{a}} = 0$ (da cui la convergenza per un opportuno intorno di $\sqrt{a}$), e lo stesso per $\phi''(x) = 48ax(x^2-a)/(3x^2+a)^3$, mentre $\phi'''(\sqrt{a}) = -48a(9x^4-18ax^2+a^2)/(3x^2+a)^3 \neq 0$[2]. Segue quindi la convergenza cubica.

ii) Posto $I = (\sqrt{a}-\delta, \sqrt{a}+\delta)$ l'intorno di convergenza con $x_0 \in I$, allora si può prendere $\rho = \max_I |\phi'''|$.

iii) Vedi appunti di lezione. ESERCIZIO 3. La matrice A può essere scritta come la somma di una matrice $\bar{A}$ più un termine di rango basso. Ad esempio, se definiamo

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix},\ a_{nn} \neq 0, u := \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \\ -a_{nn} \end{bmatrix}, v = e_n,$$

si ha $A = \bar{A} + uv^T$. L'ipotesi $a_{nn} \neq 0$ è essenziale per assicurare la non singolarità di $\bar{A}$. Risolvere il sistema lineare $Ax = b$ equivale quindi a risolvere $(\bar{A} + uvT)x = b$ in cui possiamo applicare la formula di Sherman-Morrison, $x = \bar{A}^{-1}b - \bar{A}^{-1}u(1+v^T\bar{A}^{-1}u)^{-1}v^T\bar{A}^{-1}b$. Il calcolo di x prevede quindi la risoluzione di due sistemi triangolari inferiori con $\bar{A}$: $\bar{A}y = b$, $\bar{A}z = u$. Sfruttando la sparsità di $\bar{A}$ si mostra che la risoluzione di ognuno di questi sistemi lineari costa $3n-2$ flops. Si ha quindi $x = y - z(1+v^Tz)^{-1}v^Ty$. Se $y = (y_1, ..., y_n)^T$, possiamo calcolare v^Ty senza fare alcuna operazione, infatti $v^Ty = e_n^Ty = y_n$. In conclusione, $x = y - y_n/(1+z_n)z$ ed il costo dell'intera procedura ammonta a $8n-2 = \mathcal{O}(n)$ flops. L'implementazione da proporre dovrà tenere conto della sparsità di $\bar{A}$ nel calcolo di y e z.

Un altro approccio consiste nel riscrivere il sistema iniziale come

$$\begin{bmatrix} D & a_1 \\ a_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \beta \end{bmatrix},$$

con D diagonale e non singolare. Scrivendo esplicitamente i blocchi si ha $Dx_1 + a_1\xi = b_1$ e $a_2^Tx_1 = \beta$. Ricavando x_1 dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si trova $-a_2^TD^{-1}a_1\xi = \beta - a_2^TD^{-1}b_1$, da cui si ottiene ξ. Sostituendo tale valore nella prima equazione si ottiene anche x_1. Il costo computazionale è analogo a quello dell'approccio precedente (i dettagli sono da includere).

ESERCIZIO 4.

[2] Non assicuro la correttezza numerica della derivata.

Prova scritta di Calcolo Numerico, I Modulo, 28 Giugno 2016
Laurea Triennale in Matematica a.a. 2014-2015

1. Sia A la matrice tridiagonale $n\times n$, dove n è pari, tale che $a_{i,i} = (-1)^i\alpha$, per $i = 1, ..., n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$ per $i = 1, ..., n-1$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$. Per la risoluzione del sistema $Ax = b$ si consideri il metodo iterativo $Mx_{k+1} = Nx_k + b$, ottenuto dal partizionamento $A = M - N$, dove M è la matrice diagonale a blocchi 2×2 con blocchi diagonali $\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$.
a) (3 punti) Dimostra che la successione $\{x_k\}$ è ben definita per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) (6 punti) Dai una limitazione superiore al raggio spettrale della matrice di iterazione, eventualmente in funzione di α.
c) (4 punti) Confronta il metodo col metodo di Jacobi, più precisamente mostra che esistono valori di α per cui il metodo è convergente mentre il metodo di Jacobi non lo è.

2. È data la matrice non singolare a "punta di freccia"

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & & & a_{1,n} \\ & a_{2,2} & & & a_{2,n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

avente elementi tutti nonzero sulla diagonale principale, nell'ultima riga e nell'ultima colonna. Tutti gli altri elementi sono zero, incluso l'elemento (n, n).
(6 punti) Proponi una procedura per risolvere il sistema lineare $Ax = b$ con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$, dandone i dettagli computazionali.
(4 punti) Scrivi un algoritmo che implementa la procedura descritta.

3. Sono dati il polinomio $\phi_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - \frac{1}{4}$, avente tutte le radici reali, e la matrice companion associata.
i) (3 punti) Descrivi una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice $x_\star$ di ϕ_3 più grande in modulo.
ii) (6 punti) Descrivi un algoritmo per l'approssimazione della radice più grande (cioè più a destra sull'asse dei numeri reali), e discutine in dettaglio il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova completa I nella stessa data.

ESERCIZIO 3. i) Si procede con il teorema noto. ii) Si tratta di descrivere in metodo di Newton con la regola di Horner.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo II, 28 Giugno 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Considera la formula di quadratura
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt \approx \alpha_1 \int_{-1}^{-1/2} f(t)dt + \alpha_2 f(0) + \alpha_3 \int_{1/2}^{1} f(t)dt.$$
Determina α_j, $j = 1, .., 3$ in modo che il grado di esattezza sia massimo.

2. Per $a > 0$, è data l'iterazione di punto fisso
$$x_{k+1} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a)}{3x_k^2 + a}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
(5 punti) Mostra che converge ad $\alpha = \sqrt{a}$ per una opportuna scelta di x_0, con convergenza cubica.
(3 punti) Determina la costante asintotica ρ tale che $|x_{k+1} - \alpha| \leq \rho |x_k - \alpha|^3$.
(5 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi questa iterazione, includendo opportuni criteri d'arresto.

3. (4 punti) Sono dati i nodi $x_0 = -\pi/4, x_1 = 0, x_2 = \pi/4$. Calcola il polinomio di Lagrange interpolante la funzione $f(x) = \cos(x)$, e dai una stima di $f(\pi/6)$.

4. Sono dati il polinomio $\phi_3(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - \frac{1}{4}$ e la matrice companion associata.
i) (3 punti) Descrivi una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice $x_\star$ di ϕ_3 più grande in modulo.
ii) (2 punti) Sapendo che tutte le radici di ϕ_3 sono reali, proponi una scelta opportuna del dato iniziale per il metodo di Newton per determinare la radice $x_\star$.
iii) (6 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave del metodo di Newton, che sfrutti la regola di Horner.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi esercizi analoghi svolti in precedenti prove.

ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3. Si ha $L_0(x) = 8x/\pi^2(x - \pi/4)$, $L_1(x) = 16/\pi^2(x^2 - \pi^2/16)$, $L_2(x) = 8x/\pi^2(x + \pi/4)$, e $f(x_0) = -\sqrt{2}/2$, $f(x_1) = 1$ e $f(x_2) = \sqrt{2}/2$. Quindi $p_2(x) = -\sqrt{2}/2L_0(x) + L_1(x) + \sqrt{2}/2L_2(x)$ e $p_2(\pi/6) = \sqrt{2}/2(1/9) - 5/9 + \sqrt{2}/2(5/9) = ...$

ESERCIZIO 4. i) Si usano i dischi di Gerschgorin per la matrice Companion. ii) Basta prendere $x_0 > \xi$ dove ξ l'estremo (in modulo) più esterno del disco più a destra o più a sinistra. iii) Vedi esercitazione di laboratorio.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 06 Giugno 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = x^{1/n}, \quad x > 0,\ n > 0 \text{ intero.}$$

2. Nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ c'è un solo zero $x_\star$ dell'equazione non lineare $x = \cos(x)$.
i) (2 punti) Mostra la convergenza dell'iterazione $x_{k+1} = \cos(x_k)$ nell'intervallo considerato.
ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di $x_\star$ e mostra che converge in modo quadratico nell'intervallo considerato.

3. Sono dati i vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$.
(2 punti) Mostra che la matrice $M := uv^T$ ha al più un autovalore non nullo.
(4 punti) Mostra che la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix}$$
ha autovalori $\lambda \in \{0, \sigma, -\sigma\}$, con $\sigma \in \mathbb{R}^+$.
(3 punti) Dai condizioni sufficienti su $\alpha \in \mathbb{R}$ affinchè il metodo di Jacobi applicato al sistema $(I + \alpha A)x = b$ sia convergente.
(5 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave dell'algoritmo di Jacobi, e descrivi lo script che chiama la funzione, avendo prima definito A e $b = \mathbf{1}$.

4. (6 punti) È dato il seguente problema ai minimi quadrati
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A = \begin{bmatrix} L \\ a^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n},\ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{n+1},$$
con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare inferiore e non singolare.
Descrivi tutti i passi di un algoritmo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema e valutane il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. $C = |f'(x)| = 1/n|x^{1/n-1}|$ quindi il problema è ben condizionato (in senso assoluto) per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per $n \leq 1$, mentre è mal condizionato per $n > 1$ in un intorno dell'origine. $\kappa = |f'(x)||x/f(x)| = 1/n$ quindi il problema è sempre ben condizionato (in senso relativo).

ESERCIZIO 2. i) Dato che $\phi(x) \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$, si ha $\phi : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$. Inoltre, siccome $x_\star < \pi/2$, si ha $|\sin((x_k + x_\star)/2)| < 1$ per cui

$$|x_{k+1} - x_\star| = |\cos(x_k) - \cos(x_\star)| = |2\sin(\frac{x_k + x_\star}{2})\sin(\frac{x_k - x_\star}{2})| < 2|\sin(\frac{x_k - x_\star}{2})| \leq |x_k - x_\star|,$$

da cui segue la convergenza.

ii) L'iterazione di Newton è data da $x_{k+1} = (x_k \sin x_k + \cos x_k)/(1 + \sin x_k) = \phi_N(x_k)$. Si ha $\phi_N'(x) = (x\cos x - \cos^2(x))/(1 + \sin x)^2|_{x=x_\star} = 0$ mentre $\phi_N''(x) \neq 0$. Si verifica che $\phi_N : [0, \pi/2] \to [0, \pi/2]$, facendo vedere che $0 \leq \phi_N(x) \leq \pi/2$ per ogni $x \in [0, \pi/2]$. Inoltre, $\phi_N \in C^1([0, \pi/2])$ e si verifica che $\phi_N'(x) < 1$ per ogni $x \in [0, \pi/2]$ mentre $\phi_N'(x) \geq 1$ per ogni $x \in [0, \pi/2]$. Infatti $\phi_N'(x) > -1$ se e solo se $x\cos x + 2\sin^2(x) + 2\sin x > 0$, che è verificata solo per $x > 0$. La convergenza globale non è quindi assicurata dal teorema. D'altra parte, vale $\phi_N'(x_\star) = 0$ e $\phi_N'(x) > 0$ se e solo se $x - \cos(x) > 0$. Si verifica a questo proposito che $x_\star$ è punto di minimo di ϕ_N. Dunque, per $x \in [0, \pi/2]$ si ha $\phi_N(x) \geq \phi_N(x_\star) = x_\star > 0$. Ne segue che: se $x_0 \in [x_\star, \pi/2]$ allora $x_k \in [x_\star, \pi/2]$ $\forall k \geq 0$, $\phi_N(x) \in [x_\star, \pi/2]$ e $|\phi_N'(x)| < 1$. Se invece $x_0 \in [0, x_\star]$ allora $x_1 \in [x_\star, \pi/2]$ e $\phi_N(x_k) \geq x_\star$ $\forall k \geq 1$. In questo caso restringo la funzione $\phi_N : [x_\star, \pi/2] \to [x_\star, \pi/2]$ in cui è una contrazione, e l'iterazione converge.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 06 Giugno 2016
Modulo I a.a. 2014-2015. Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = x^{1/n}, \quad x > 0, \ n > 0 \text{ intero.}$$

2. È data la matrice non singolare $A = G + aa^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con G bidiagonale superiore non singolare e $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo delle potenze inverse per l'approssimazione del più piccolo autovalore in modulo di A, includendo criteri d'arresto appropriati.
ii) (4 punti) Discutine in dettaglio il costo computazione per iterazione.

3. Sono dati i vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^{2n}$.
i) (2 punti) Mostra che la matrice $M := uv^T$ ha al più un autovalore non nullo.
ii) (4 punti) Mostra che la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix}$$
ha autovalori $\lambda \in \{0, \sigma, -\sigma\}$, con $\sigma \in \mathbb{R}^+$.
iii) (3 punti) Dai condizioni sufficienti su $\alpha \in \mathbb{R}$ affinchè il metodo di Jacobi applicato al sistema $(I + \alpha A)x = b$ sia convergente.
iv) (5 punti) Proponi una implementazione Matlab/Octave dell'algoritmo di Jacobi, e descrivi lo script che chiama la funzione, avendo prima definito A e $b = \mathbf{1}$.

4. (6 punti) È dato il seguente problema ai minimi quadrati
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A = \begin{bmatrix} L \\ a^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}, \ a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^{n+1},$$
con $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare inferiore e non singolare.
Descrivi tutti i passi di un algoritmo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema e valutane il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi esercizio corrispondente nella prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. Vedi esercizio corrispondente nella prova completa nella stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico - Modulo II, 06 Giugno 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. Nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ c'è un solo zero $x_\star$ dell'equazione non lineare $x = \cos(x)$.
i) (2 punti) Mostra la convergenza dell'iterazione $x_{k+1} = \cos(x_k)$ nell'intervallo considerato.
ii) (6 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di $x_\star$ e mostra che converge in modo quadratico nell'intervallo considerato.
iii) (4 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo di Newton.

2. Sia $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ la funzione Gamma.
È noto che $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3) = 2$ e $\Gamma(4) = 3!$ Allora
i) (4 punti) Ottieni una stima per $\Gamma(3.2)$ mediante interpolazione di Lagrange;
ii) (4 punti) Ottieni il polinomio di interpolazione mediante la formula di Newton;
iii) (4 punti) Sapendo che $\Gamma(\frac{7}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, partendo dal punto ii) costruisci il polinomio interpolante anche questo valore, ed ottieni una nuova stima per $\Gamma(3.2)$.

3. Integrazione numerica.
i) (3 punti) Costruisci una formula di quadratura del tipo
$$\int_1^a f(t)tdt \approx \alpha f(1) + \beta f(a) - \gamma(f'(a) - f'(1))$$
che abbia massima esattezza.
ii) (5 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che calcoli la formula di quadratura avendo in input f, f' e a. Proponi inoltre uno script che chiami tale funzione per $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ e $a = 2$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi esercizio corrispondente della prova completa nello stesso giorno.

ESERCIZIO 2. i) Si considerano i nodi $x_0 = 1/2$, $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$. Si costruisce il polinomio p_2 che interpola Γ nei nodi considerati (per i quali Γ è tabulata). Quindi si calcola $p_2(3.2) \approx \Gamma(3.2)$. ii) Segui gli appunti di lezione. iii) Partendo dal punto ii) si aggiunge il nodo $x_3 = 7/2$ e si modifica il polinomio trovato in ii) per ottenere p_3. Si ha quindi $p_3(3.2) \approx \Gamma(3.2)$.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 27 Aprile 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato l'integrale
$$\mathcal{I} = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{dx}.$$
i) (6 punti) Stima il numero di sottointervalli necessario per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-6}, mediante la formula composita del trapezio, e la formula composita di Cavalieri-Simpson;
ii) (2 punti) Per il numero minimo di sottointervalli trovato in i) in ognuna delle due formule, quale dei due metodi è più efficiente, considerando come misura del costo computazionale il numero di valutazioni della funzione integranda?
iii) (2 punti) Scrivi la funzione Matlab/Octave della formula di Cavalieri-Simpson composita, per un generico numero m di sottointervalli e per una generica funzione f su un intervallo dato $[a, b]$.

2. È data l'iterazione di punto fisso
$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad \varphi(x) = \sqrt{2+x}.$$
con $x^* = 2$ punto fisso.
i) (2 punti) Mostra che per ogni $x_0 > 0$, le iterate x_k rimangono dalla stessa parte di $x^* = 2$ rispetto ad x_0;
ii) (2 punti) Mostra che la convergenza a x^* è monotona (*sugg.: per* $x_0 > 2$*, mostra che* $x_{k+1} - x_k \leq 0$ *per ogni* k*, mentre per* $x_0 < 2$*,* $x_{k+1} - x_k \geq 0$);
iii) (2 punti) Mostra che c'è convergenza, e che può essere al più lineare (per $x_0 \neq 2$);
iv) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi questa iterazione di punto fisso, includendo un criterio d'arresto.

3. Sia $n > 2$ un intero e siano $e = [1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, $e_1 = [1, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$.
i) (3 punti) Costruisci esplicitamente il vettore e lo scalare associati alla matrice di Householder P tale che $Pe = \theta e_1$, con $\theta \in \mathbb{R}$;
ii) (3 punti) Sia $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matrice tale che $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ per $i = 2, \ldots, n$ e $a_{ij} = 0$ altrove. Costruisci una matrice ortogonale Q tale che $B = QAQ^T$ abbia elementi tutti nulli tranne $b_{21} = b_{12}$ e determina il valore di b_{21}. Sfruttando questa decomposizione, calcola gli autovalori di A.
iii) (2 punti) Dai condizioni su α affinchè il metodo di Jacobi applicato al sistema $(I - \alpha A)\mathbf{x} = \mathbf{f}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ sia convergente;
iv) (2 punti) Descrivi l'algoritmo di Jacobi per il sistema al punto iii).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2. Vedi l'esercizio corrispondente nella prova Modulo II della stessa data.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 27 Aprile 2016
Modulo I a.a. 2014-2015 - Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice tridiagonale non singolare $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   i) (5 punti) Dai i dettagli di un algoritmo per determinare le matrici L ed U della fattorizzazione LU di T senza pivoting (si supponga che essa esista);
   ii) (5 punti) Usa la fattorizzazione al punto precedente per proporre un algoritmo per la risoluzione del sistema $Ax = b$ con matrice dei coefficienti non singolare e tridiagonale a blocchi (gli elementi non indicati sono tutti nulli)

$$A = \begin{bmatrix} O & T & & & & \\ T & O & T & & & \\ & T & O & T & & \\ & & T & O & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

   Valutane il costo computazionale.
   iii) (5 punti) Proponi una implementazione Matlab della procedura del punto ii), richiamando le funzioni opportune (senza riportarle) per la risoluzione con U ed L.

2. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

   i) (4 punti) Proponi ipotesi sufficienti su $\alpha > 0$ in modo che la matrice A abbia tutti autovalori reali distinti. ii) (3 punti) Nelle ipotesi del punto i), fornisci una stima dell'intervallo spettrale contenente tutti gli autovalori di A, in funzione di α.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 27 Aprile 2016
Modulo II - Laurea Triennale in Matematica

1. È dato l'integrale
$$\mathcal{I} = \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{dx}.$$
i) (6 punti) Stima il numero di sottointervalli necessario per ottenere un errore di approssimazione minore di 10^{-6}, mediante la formula composita del trapezio, e la formula composita di Cavalieri-Simpson;
ii) (2 punti) Per il numero minimo di sottointervalli trovato in i) in ognuna delle due formule, quale dei due metodi è più efficiente, considerando come misura del costo computazionale il numero di valutazioni della funzione integranda?
iii) (2 punti) Scrivi la funzione Matlab/Octave della formula di Cavalieri-Simpson composita, per un generico numero m di nodi e per una generica funzione f su un intervallo dato.

2. È data l'iterazione di punto fisso
$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \qquad \varphi(x) = \sqrt{2+x}.$$
con $x^* = 2$ punto fisso.
i) (2 punti) Mostra che per ogni $x_0 > 0$, le iterate x_k rimangono dalla stessa parte di $x^* = 2$ rispetto ad x_0;
ii) (2 punti) Mostra che la convergenza a x^* è monotona (*sugg.: per* $x_0 > 2$, *mostra che* $x_{k+1} - x_k \leq 0$ *per ogni* k, *mentre per* $x_0 < 2$, $x_{k+1} - x_k \geq 0$);
iii) (2 punti) Mostra che c'è convergenza, e che può essere al più lineare (per $x_0 \neq 2$);
iv) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi questa iterazione di punto fisso, includendo un criterio d'arresto.

3. Sia $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ la funzione Gamma. È noto che $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(3) = 2$ e $\Gamma(4) = 3!$. Allora
i) (4 punti) Ottieni una stima per $\Gamma(3.2)$ mediante interpolazione di Lagrange;
ii) (3 punti) Ottieni il polinomio di interpolazione mediante la formula di Newton;
iii) (3 punti) Sapendo che $\Gamma(7/2) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, partendo dal punto ii) costruisci il polinomio interpolante anche questo valore ed ottieni una nuova stima per $\Gamma(3.2)$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2. i) Se $x_k < 2$ allora $x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + 2} = 2$. Analogamente s $x_k > 2$. ii) Supp. $x_k > 2$. Si ha $x_{k+1} = \phi(x_k) = \sqrt{x_k + 2} < x_k$ se e solo se $x_k + 2 < x_k^2$, che è verificata per $x_k > 2$. Analogamente se $x_k < 2$. iii) Siccome $\phi'(x_\star) = 1/(2\sqrt{x_\star + 2}) = 1/4 < 1$ la convergenza è assicurata. Chiaramente, $\phi''(x) \neq 0$.

iv) Vedi appunti di lezione.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 8 Febbraio 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. È dato l'integrale
$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2-\cos(\frac{\pi x}{2})}\mathrm{dx}.$$
i) (4 punti) Usa la formula composita del trapezio con 3 suddivisioni dell'intervallo di integrazione e calcola l'approssimazione $\tilde{\mathcal{I}}$.
ii) (2 punti) Sia f la funzione integranda. Sapendo che $|f''(x)| \leq (\pi/2)^2$ per $x \in [-1, 2]$, determina una stima per l'errore relativo $|(\mathcal{I} - \tilde{\mathcal{I}})/\tilde{\mathcal{I}}|$.
iii) (4 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi la formula dei trapezi composita, per un generico numero m di nodi e per una generica funzione f su un intervallo dato. Includi uno script che applichi la funzione Matlab/Octave ottenuta all'esempio considerato.

2. (4 punti) Sono dati i nodi $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 1$. Calcola il polinomio di Lagrange interpolante la funzione $f(x) = x^2 - |x|$, nella forma $p(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$.

3. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
i) (4 punti) Descrivi una strategia per stimare dall'alto, senza calcolarlo, il rapporto $|\lambda_1|/|\lambda_4|$, dove gli autovalori λ_i sono ordinati in modo decrescente in modulo.
ii) (6 punti) Descrivi il metodo delle potenze inverse traslate per l'approssimazione dell'autovalore più vicino ad $1/2$, includendo una discussione del costo computazionale della procedura.

4. È dato il problema ai minimi quadrati
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ O_s & A_{22} & A_{23} \\ O_s & O_s & A_{33} \\ O_s & O_s & A_{43} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{s\times s}$$
con $s \geq 1$ e $n = 3s$ (tutte le matrici A_{ij} sono quadrate di dimensioni $s \times s$), $b \in \mathbb{R}^{4s}$, e O_s è la matrice $s \times s$ di tutti zeri.
i) (2 punti) Proponi condizioni sufficienti sui blocchi A_{ij} affinchè il problema ammetta una sola soluzione;
ii) (6 punti) Proponi un metodo di risoluzione che sfrutti la struttura di A e descrivine il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2. Vedi risoluzione del Modulo II nella stessa data.

ESERCIZIO 3. i) Usando i dischi di Gerschgorin, si ha che per tutti gli autovalori λ si ha $|\lambda| < 5 + 1/3$. Inoltre, usando i dischi per righe, si ha che il più piccolo autovalore in modulo soddisfa $|\lambda - 1| < \frac{1}{2}$, cioè $\lambda\frac{1}{2}$. Quindi

$$\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_4|} \leq \frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{32}{3}$$

ii) L'esercizio procede come sulla dispense. Il costo computazionale dev'essere discusso per n generico.

ESERCIZIO 4. i) È sufficiente che i blocchi diagonali A_{ii}, $i = 1, 3$ siano non singolari perchè A abbia rango massimo.

ii) Si procede innanzi tutto eliminando gli elementi del solo blocco $A_{4,3}$ mediante l'uso, per esempio, di s^2 rotazioni di Givens. Le rotazioni vengono applicate al solo blocco $[A_{3,3}; A_{4,3}]$ per cui il costo dipende solo da potenze di s. Si è cosi trovata la fattorizzazione ridotta tipo QR del tipo $A = QR$, dove

$$R = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \mathcal{O} & A_{22} & A_{23} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix}$$

è triangolare *a blocchi.* Si può procedere o completando la fattorizzazione QR rendendo R triangolare superiore, oppure risolvendo direttamente il sistema $Rx = \tilde{b}_1$ con una procedura tipo LU o QR che tenga conto dei blocchi; qui $\tilde{b}_1 \in \mathbb{R}^{3s}$ è la porzione superiore di b dopo l'applicazione delle rotazioni.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 8 Febbraio 2016
II Modulo, Laurea Triennale in Matematica

1. È dato l'integrale
$$\mathcal{I} = \int_{-1}^{2} \frac{1}{2 - \cos(\frac{\pi x}{2})} \mathrm{dx}.$$
i) (4 punti) Usa la formula composita del trapezio con 3 suddivisioni dell'intervallo di integrazione e calcola l'approssimazione $\mathcal{I}_4$.
ii) (2 punti) Sia f la funzione integranda. Sapendo che $|f''(x)| \leq (\pi/2)^2$ per $x \in [-1, 2]$, determina una stima per l'errore relativo $|(\mathcal{I} - \mathcal{I}_4)/\mathcal{I}_4|$.
iii) (6 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi la formula dei trapezi composita, per un generico numero m di nodi e per una generica funzione f su un intervallo dato. Includi uno script che applichi la funzione Matlab/Octave ottenuta all'esempio considerato.

2. Sono dati i nodi $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 1$.
i) (4 punti) Calcola il polinomio di Lagrange interpolante la funzione $f(x) = x^2 - |x|$, nella forma $p(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$.
ii) (4 punti) Scrivi il polinomio interpolante mediante la forma di Newton.
iii) (2 punti) Sfruttando il punto (ii), scrivi il nuovo polinomio interpolante ottenuto dopo aver aggiunto il nodo $x_3 = 3$.

3. È dato il polinomio $\phi(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$ avente tutte radici reali.
i) (2 punti) Sfruttando i coefficienti del polinomio, dai condizioni sul dato iniziale x_0 affinchè il metodo di Newton converga.
ii) (4 punti) Descrivi l'algoritmo di Newton per l'approssimazione della radice di ϕ più grande in modulo.
iii) (4 punti) Descrivi la regola di Horner ed il suo uso al punto (ii).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2. i) La base di Lagrange è data da $L_0(x) = \frac{x}{6}(x-1)$, $L_1(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x-1)$ e $L_2(x) = \frac{x}{3}(x+2)$. Inoltre $f(x_0) = 2, f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$. Quindi il polinomio interpolante è dato da

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x) = f(x_0)L_0(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x).$$

ii) La forma di Newton è data da $p_2(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)$. Imponendo le condizioni di interpolazione (oppure mediante la tabella delle differenze divise) si ottiene $a_0 = f(x_0) = 2$, $a_1 = (f(x_1) - a_0)/(x_1 - x_0) = -1$, $a_2 = ...$

iii) Per un ulteriore nodo, la forma di Newton permette di scrivere $p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x-x_1)(x-x_2)$. L'ulteriore condizione di interpolazione, $p_3(x_3) = f(x_3)$ determina a_3.

ESERCIZIO 3. i) È sufficiente che x_0 sia più grande della radice più grande sull'asse dei numeri reali. A tal fine, costruendo la matrice Companion, è possibile dare stime della radice più grande mediante i dischi di Gerschgorin.

Prova scritta parziale di Calcolo Numerico, (Modulo I) 8 Febbraio 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice tridiagonale non singolare $A = \text{tridiag}(b, \underline{a}, c) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $a \in \mathbb{R}^n$ e $b, c \in \mathbb{R}^{n-1}$. Si suppone che esista e sia unica la fattorizzazione LU di A.
i) (4 punti) Determina i fattori L ed U della fattorizzazione LU di A.
ii) (2 punti) Calcola $\det(A)$ sfruttando il punto i)
iii) (4 punti) Per A anche simmetrica e definita positiva, ottieni da i) la fattorizzazione di Cholesky di A.

2. (4 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $\kappa(A) = 10^4$ e $\|A\| = 10$, dove $\kappa(\cdot)$ è il numero di condizionamento associato alla norma matriciale indotta considerata. Sia $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ il sistema risultante da una perturbazione δA della matrice dei coefficienti. Ricordando che $\|\delta x\|/\|x\|$ può essere maggiorato in termini di $\kappa(A), \|A\|$ e $\|\delta A\|$, determina la massima perturbazione $\|\delta A\|$ tale che $\|\delta x\|/\|x\| \le 10^{-5}$.

3. È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
i) (4 punti) Descrivi una strategia per stimare dall'alto, senza calcolarlo, il rapporto $|\lambda_1|/|\lambda_4|$, dove gli autovalori λ_i sono ordinati in modo decrescente in modulo.
ii) (6 punti) Descrivi il metodo delle potenze inverse traslate per l'approssimazione dell'autovalore più vicino ad $1/2$, includendo una discussione del costo computazionale della procedura.

4. È dato il problema ai minimi quadrati
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ O_s & A_{22} & A_{23} \\ O_s & O_s & A_{33} \\ O_s & O_s & A_{43} \end{bmatrix}, \quad A_{ij} \in \mathbb{R}^{s\times s}$$
con $s \ge 1$ e $n = 3s$ (tutte le matrici A_{ij} sono quadrate di dimensioni $s \times s$), $b \in \mathbb{R}^{4s}$, e O_s è la matrice $s \times s$ di tutti zeri.
i) (2 punti) Proponi condizioni sufficienti sui blocchi A_{ij} affinchè il problema ammetta una sola soluzione;
ii) (6 punti) Proponi un metodo di risoluzione che sfrutti la struttura di A e descrivine il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3. Vedi esercizio della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 13 Gennaio 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. (4 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = \sin(x) - \cos(x), \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

2. È data l'iterazione
$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right), \quad a > 0.$$
i) (2 punti) Mostra che l'iterazione corrisponde al metodo di Newton per determinare la radice quadrata $x_* = \sqrt{a}$.
ii) (2 punti) Suggerisci un dato iniziale che assicuri la convergenza alla radice voluta.
iii) (6 punti) Proponi una implementazione mediante funzione Matlab/Octave dell'iterazione data, includendo i criteri d'arresto opportuni.

3. Per $t \in \mathbb{R}$ è data la matrice $n \times n$
$$A(t) = D + t\,C, \quad D = \mathrm{diag}([1, 2, \ldots, n]), \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
i) (2 punti) Proponi condizioni sufficienti su t perchè A abbia autovalori tutti reali;
ii) (8 punti) Per i valori di t soddisfacenti (i), descrivi il metodo delle potenze per la stima dell'autovalore massimo di A, evidenziandone il costo computazionale per la matrice A data, e stimando la sua velocità di convergenza in funzione di t.

4. È dato il sistema lineare $Ax = f$ con
$$A = \begin{bmatrix} a & b & & \ldots & & \\ b & a & b & & & \\ & b & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b & a & b \\ & & & & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$
tridiagonale con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
i) (3 punti) Proponi una condizione sufficiente sugli elementi di A perchè il metodo di Jacobi converga. Fornisci quindi una stima della velocità asintotica di convergenza.
ii) (5 punti) Descrivi l'algoritmo di Jacobi per la matrice tridiagonale data, includendo criteri d'arresto adeguati.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Scrivendo il numero di condizionamento assoluto e relativo, si vede che il calcolo della funzione è mal condizionato in senso relativo per $x \to \pi/4$.

ESERCIZIO 2. i) La funzione associata alla determinazione della radice quadrata è ovviamente $f(x) = x^2 - a$, e x_* è uno zero di f. L'iterazione di Newton per questa funzione è data da

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + a}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k}),$$

che coincide con l'iterazione data.

ii) Visto che f è un polinomio con sole radici reali, un teorema noto enuncia che se $x_0 > \sqrt{a}$ la convergenza del metodo di Newton è assicurata.

iii)

ESERCIZIO 3. i) Per il secondo teorema di Gerschgorin, gli autovalori sono tutti reali se i dischi di Gerschgorin sono tutti disgiunti. Questo si ha se i dischi $|\lambda - k| < |t|$, $k = 1, \dots, n$ sono disgiunti, e questo si ottiene per $|t| < 1/2$.

ii) Si riporta l'algoritmo del metodo delle potenze dalle dispense, incluso il calcolo del residuo e della sua norma. Si nota che il prodotto matrice-vettore ha un costo di $3n$ circa, in quanto A ha solo due componenti per riga.

Infine, per la velocità asintotica di convergenza $|\lambda_2/\lambda_1|$, si nota che $n - 1 - |t| < \lambda_2 < n - 1 + |t|$ e $n - |t| < \lambda_1 < n + |t|$, per cui una stima dal basso e dall'alto è data da

$$\frac{n - 1 - |t|}{n + |t|} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \frac{n - 1 + |t|}{n - |t|}.$$

ESERCIZIO 4. i) La matrice di iterazione di Jacobi è $B_J = \text{tridiag}(b/a, 0, b/a)$. Quindi per il primo teorema di Gerschgorin, tutti gli autovalori di B_J soddisfano $|\lambda| \leq 2|b/a|$. Condizione sufficiente perchè l'iterazione converga è quindi che $2|b/a| < 1$.

ii) L'algoritmo è come sulle dispense. I criteri d'arresto da inserire sono sulla norma del residuo (relativa), ed il numero massimo di iterazioni possibili (si veda esercitazione in laboratorio).

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 13 Gennaio 2016
Laurea Triennale in Matematica

1. È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & & u_n \\ 1 & 0 & \cdots & & v_2 \\ 0 & 1 & 0 & & v_3 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & v_n \end{bmatrix}.$$

i) (4 punti) Proponi condizioni sufficienti affinchè esista la fattorizzazione LU di A.
ii) (8 punti) Descrivi un algoritmo per la risoluzione del sistema $Ax = b$ che richieda $\mathcal{O}(n)$ operazioni aritmetiche, sfruttando la fattorizzazione LU di A.

2. Per $t \in \mathbb{R}$ è data la matrice $n \times n$

$$A(t) = D + t\,C, \quad D = \mathrm{diag}([1, 2, \ldots, n]), \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

i) (2 punti) Proponi condizioni sufficienti su t perchè A abbia autovalori tutti reali;
ii) (8 punti) Per i valori di t soddisfacenti (i), descrivi il metodo delle potenze per la stima dell'autovalore massimo di A, evidenziandone il costo computazionale per la matrice A data, e stimando la sua velocità di convergenza in funzione di t.

3. È dato il sistema lineare $Ax = f$ con

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & \cdots & & \\ b & a & b & & & \\ & b & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b & a & b \\ & & & & b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

tridiagonale con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
i) (2 punti) Proponi condizioni sufficienti sugli elementi di A perchè il metodo di Jacobi converga.
iii) (8 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo di Jacobi per la matrice tridiagonale data, e valutane in dettaglio il costo computazionale per iterazione.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Se tutti i minori principali di testa della matrice sono non zero fino a quella di dim. $n-1$, allora esiste ed è unica la fattorizzazione LU. Per ogni sottomatrice di testa A_k di dimensioni $k \times k$ di A si ha $|\det(A_k)| = |u_k|$. Quindi condizione sufficiente è che $u_k \neq 0$ per $k = 1, \ldots, n-1$. Per risolvere il sistema dovrà anche essere $u_n \neq 0$.

ii) Innanzi tutto scambiamo le righe della matrice (e del termine noto) in modo che la prima riga vada per ultima, e tutte le altre scorrano in su di uno. Questo può essere implementato mediante prodotto di matrici di permutazioni con blocchetti del tipo $[0,1;1,0]$. Quindi $Ax = b$ è equivalente a $\widetilde{A}x = \tilde{b}$ dove

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & v_2 \\ 0 & 1 & 0 & & v_3 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & v_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{u}^T & u_n \end{bmatrix}.$$

Si può dunque procedere in vari modi, ne vediamo 2.

Metodo I: si scrive esplicitamente l'algoritmo di eliminazione di Gauss, e si nota che ad ogni passo k c'è un solo elemento da eliminare, ed inoltre l'iterazione si riduce a

$$\widetilde{A}^{(k+1)}_{kj} = \widetilde{A}^{(k)}_{kj} - m_{kk}\widetilde{A}^{(k)}_{kj}, \quad \mathbf{j = k+1, j = n}$$

poichè tutti gli altri elementi aggiungerebbero un termine che è zero; il costo è quindi di 6 flops. Si deduce che l'intera procedura di eliminazione di Gauss costa $\mathcal{O}(n)$ (dare maggiori dettagli). La matrice finale triangolare superiore $\widetilde{A}^{(n-1)}$ ha elementi non zero solo sulla diagonale e nell'ultima colonna. Quindi per risolvere con $\widetilde{A}^{(n-1)}$ si ha ancora un costo di $\mathcal{O}(n)$ (dare maggiori dettagli).

Metodo II: Si prova a scrivere la fattorizzazione, come segue

$$\widetilde{A} = LU = \begin{bmatrix} I_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{u}^T & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \mathbf{d}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n-1} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0}^T & \alpha \end{bmatrix}.$$

Moltiplicando le matrici a destra e confrontando le quantità si ottiene che dev'essere:

$$I_{n-1}U_{n-1} = I_{n-1}, \quad I_{n-1}\mathbf{c} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{d}^T U_{n-1} = \mathbf{u}^T, \quad \mathbf{d}^T\mathbf{c} + \alpha = u_n.$$

Si ottiene dunque $U_{n-1} = I_{n-1}$, $\mathbf{c} = \mathbf{v}$, $\mathbf{d} = \mathbf{u}$ e $\alpha = u_n - \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ ($\alpha \neq 0$ per avere la non singolarità di U e quindi di A). Il costo computazione per risolvere con U ed L è dell'ordine di n.

(È interessante notare che se riportiamo l'ultima riga di L in alto, si ottiene una fattorizzazione della matrice originale A del tipo $A = \widetilde{L}U$, dove $\widetilde{L}$ non è triangolare inferiore, ma la risoluzione ha lo stesso costo che con L. $\widetilde{L}$ è in effetti "anti"-triangolare, triangolare superiore rispetto alla diagonale secondaria. È ovviamente possibile ottenere questa fattorizzazione direttamente, senza passare da $\widetilde{A}$.)

ESERCIZIO 2. Vedi svolgimento della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3. Vedi svolgimento della prova completa nella stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 23 Novembre 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. (4 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad x \in [0,1].$$

2. i) (3 punti) Dato il vettore $u = [n-3, 2, ..., 2]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$, costruisci una matrice di Householder P tale che $Pu = \alpha e_1$, dove e_1 è il primo versore della base canonica e $\alpha \in \mathbb{R}$.
ii) (8 punti) Sia $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con elementi diagonali uguali ad 1, $a_{2,1} = a_{1,2} = n-3$, $a_{i,1} = a_{1,i} = 2$, $i = 3, ..., n$, ed elementi nulli altrove, cioè $A = \begin{bmatrix} 1 & u^T \\ u & I \end{bmatrix}$.
Determina una matrice ortogonale Q tale che QAQ^T ha la forma
$$QAQ^T = \begin{bmatrix} b & c & & & \\ c & d & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$
per opportuni $b, c, d \in \mathbb{R}$. Determina gli autovalori di A.

3. (4 punti) È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} \frac{20}{3} & 2 & 1 \\ -1 & \frac{5}{2} & -1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$
i) Stabilisci, senza calcolare gli autovalori, se A può essere singolare;
ii) Localizza il raggio spettrale di A.

4. È data la matrice $A = B + uv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con A e B non singolari e B diagonale.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo delle potenze inverse per approssimare il più piccolo autovalore in modulo di A.
ii) (4 punti) Mostra in dettaglio che il costo computazionale per iterazione è un $\mathcal{O}(n)$.
iii) (5 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo, in modo che B, u e v siano dati in input separatamente.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si ha $\kappa_{ass} = |f'(x)| = \exp(\sqrt{x})/(2\sqrt{x})$ e Si ha $\kappa_{rel} = |f'(x)x/f(x)| = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Quindi il calcolo di f è mal condizionato in senso assoluto per x piccolo, mentre è sempre ben condizionato in senso relativo.

ESERCIZIO 2. i) Si scrive $P = I - \beta vv^T$ con $v = u - \alpha e_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ con $\alpha = \|u\| = ... = \sqrt{(n-1)^2} = n-1$, e $\beta = 2/v^T v$. Quindi $Pu = \alpha e_1$.

ii) Posto $Q = \begin{bmatrix} 1 & \\ & P \end{bmatrix}$ con P definita sopra (si noti che $Q = Q^T$ e $P \cdot P = I$), si ha

$$\begin{aligned} QAQ^T &= \begin{bmatrix} 1 & u^T \\ Pu & P \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 1 & u^T \\ \alpha e_1 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & u^T P \\ \alpha e_1 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha e_1^T \\ \alpha e_1 & I \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Quindi si ottiene $b = 1 = d$ e $c = \alpha$. Per cui gli autovalori sono o uguali ad 1 (con molteplicità $n-2$), oppure sono gli autovalori del blocco 2×2 principale, cioè $\lambda = 1 + \alpha$ e $\lambda = 1 - \alpha$.

ESERCIZIO 3. i) I dischi di Gerschgorin per righe sono $|z - 20/3| \leq 3$, $|z - 5/2| \leq 2$ e $|z + 3| \leq -2$. Nessuno di questi interseca l'origine, quindi nessun autovalore di A può essere nullo.

ii) I dischi per righe o per colonne sono gli stessi. il disco in $\mathbb{C}^+$ più lontano dall'origine ha al più $|z| = 20/3 + 3$ che quindi è una stima del raggio spettrale (il disco in $\mathbb{C}^-$ corrisponde a valori più piccoli.

ESERCIZIO 4. i) L'algoritmo è dato da:

Fissati $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\| = 1$, $maxit$ e tol, $y = A^{-1}x$ (che richiede: $w = B^{-1}u$ e $\delta = 1 + v^T B^{-1} u$)

Per $k = 1, 2, ...$
$x = y/\|y\|$ ($2n$ flops)
$y = A^{-1}x$ (vedi sotto)
$e = 1/(x^T y)$ ($2n$ flops)
$r = y - ex$ ($2n$ flops)
Se $\|r\|/e < tol$ esci ($2n$ flops)
end

RIVEDERE:

ii) La risoluzione del sistema $Ay = x$ può essere effettuata sfruttando la formula di Sherman-Morrison, per cui:

$$y = A^{-1}x = B^{-1}x - B^{-1}u(1 + v^T B^{-1}u)^{-1} v^T B^{-1}x = B^{-1}x - w\delta^{-1} v^T B^{-1}x.$$

Dato che B è diagonale, il costo computazionale di $B^{-1}x$ è di n flops. Considerando gli altri prodotti scalari e somme, il calcolo completo di y richiede $5n$ flops. Si noti che la formula richiede anche $w = B^{-1}u$ e $\delta = 1 + v^T B^{-1} u$, che vengono calcolati una volta per tutte all'inizio.

Le altre operazioni sono riprodotte nell'algoritmo. Il costo computazionale di una singola iterazione è dunque di $17n$ flops.

iii) L'algoritmo è come visto nell'esercitazione del xx.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 23 Novembre 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Studia il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = e^{\sqrt{x}}, \quad x \in [0,1].$$

2. (11 punti) È data l'equazione non lineare $\sin(x)x^2 - 3x + \cos(x) = 0$.
i) Individua un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione all'equazione nell'intorno della radice più vicina a zero, e calcola il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore inferiore a 10^{-5}.
ii) Descrivi l'algoritmo con un criterio di arresto affidabile, spiegando perchè tale criterio è stato scelto.

3. (4 punti) Costruisci una formula di quadratura del tipo
$$\int_x^1 f(t)dt \approx af(x) + bf(1) - c(f'(1) - f'(x))$$
che abbia esattezza 2.

4. È data la matrice $A = B + uv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, con A e B non singolari e B diagonale.
i) (4 punti) Descrivi l'algoritmo delle potenze inverse per approssimare il più piccolo autovalore in modulo di A.
ii) (4 punti) Mostra in dettaglio che il costo computazionale per iterazione è un $\mathcal{O}(n)$.
iii) (5 punti) Proponi una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo, in modo che B, u e v siano dati in input separatamente.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi prova parziale nella stessa data

ESERCIZIO 2.

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4. Vedi prova parziale nella stessa data

Prova scritta di Calcolo Numerico, 18 Settembre 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014 e precedenti

1. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $A = P - N$ dove $P = \mathrm{diag}(A)$ è invertibile. Si consideri la tecnica di rilassamento applicata al metodo di Jacobi nel seguente modo:
$$x_k = x_{k-1} + \omega(y_k - x_{k-1}), \quad 0 \neq \omega \in \mathbb{R},$$
dove $y_k = P^{-1}Nx_{k-1} + P^{-1}b$.
i) (2 punti) Determinare una condizione necessaria in termini degli autovalori di $P^{-1}A$ perchè il metodo iterativo ottenuto converga per qualche ω.
ii) (8 punti) Implementare mediante funzione Matlab/Octave l'iterazione ottenuta e descriverne il costo computazionale

2. (8 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $N = 2n$, dove $a_{ii} \neq 0$ e $a_{ni} \neq 0$, $i = 1, \ldots, N$ e tutti gli altri elementi zero. Proporre un metodo di costo computazionale $\mathcal{O}(N)$ per la risoluzione del sistema, includendo, se necessario, condizioni per la sua esistenza.

3. Si consideri la formula di quadratura
$$\int_0^a f(x)dx \approx \alpha f(x_1) + \beta(f(a) - f(0)), \qquad a > 0.$$
i) (4 punti) Determinare α, β e x_1 in modo che il grado di esattezza sia massimo.
ii) (4 punti) Determinare una stima dell'errore della formula ottenuta.

4. Sono dati il polinomio $\phi_3(x) = x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ e la matrice companion associata.
i) (3 punti) Descrivere una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice di ϕ_3 più grande in modulo.
ii) (3 punti) Descrivere l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di zeri di funzioni. Sapendo che tutte le radici di ϕ_3 sono reali, proporre una scelta opportuna del dato iniziale per il metodo di Newton per determinare la radice al punto precedente.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si veda la corrispondente traccia nella prova del Modulo I nella stessa data

ESERCIZIO 2. Si veda la corrispondente traccia nella prova del Modulo I nella stessa data

ESERCIZIO 3.

ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 18 Settembre 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $A = P - N$ dove $P = \mathrm{diag}(A)$ è invertibile. Si consideri la tecnica di rilassamento applicata al metodo di Jacobi nel seguente modo:
$$x_k = x_{k-1} + \omega(y_k - x_{k-1}), \quad 0 \neq \omega \in \mathbb{R},$$
dove $y_k = P^{-1}Nx_{k-1} + P^{-1}b$.
i) (2 punti) Determinare una condizione necessaria in termini degli autovalori di $P^{-1}A$ perchè il metodo iterativo ottenuto converga per qualche ω.
ii) (8 punti) Implementare mediante funzione Matlab/Octave l'iterazione ottenuta e descriverne il costo computazionale

2. (8 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $N = 2n$, dove $a_{ii} \neq 0$ e $a_{ni} \neq 0$, $i = 1, \ldots, N$ e tutti gli altri elementi zero. Proporre un metodo di costo computazionale $\mathcal{O}(N)$ per la risoluzione del sistema, includendo, se necessario, condizioni per la sua esistenza.

3. Sono dati il sistema lineare $Ax = b$ con soluzione esatta $x^* \neq 0$, ed una sua approssimazione $\widetilde{x}$.
i) (3 punti) Dimostrare che
$$\frac{\|x^* - \widetilde{x}\|}{\|x^*\|} \leq \kappa_2(A)\frac{\|r\|}{\|b\|}$$
dove $r = b - A\widetilde{x}$ e $\kappa_2(A)$ è il numero di condizionamento di A.
ii) (3 punti) Siano $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1+\epsilon \end{bmatrix}$ e $b = [1; -1]$. Sapendo che $\|A\| \approx 2 - \epsilon/2$ e $\|A^{-1}\| \approx \frac{1}{\epsilon}(2 - \frac{\epsilon}{2})$, applicare la stima del punto precedente al caso $\widetilde{x} = [1/2; 1/2]$ e commentare, giustificando il risultato ottenuto.

4. Sono dati il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 3x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ e la matrice companion associata.
i) (4 punti) Descrivere una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice di ϕ_4 più grande in modulo.
ii) (4 punti) Descrivere il metodo delle potenze per approssimare tale radice mediante la matrice companion, dando una stima per la velocità di convergenza del metodo.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Ricordiamo che vale $P^{-1}A = I - P^{-1}N$. Sostituendo y_k nell'iterazione, si ottiene $x_k = (I - \omega I + \omega P^{-1}N)x_{k-1} + \omega P^{-1}b = (I - \omega P^{-1}A)x_{k-1} + \omega P^{-1}b$. La matrice di iterazione è quindi $B_\omega = I - \omega P^{-1}A$. Perchè valga $\rho(B_\omega) < 1$ gli autovalori λ di $P^{-1}A$ devono soddisfare $|1 - \omega\lambda| < 1$. Svolgendo i calcoli si ottiene che questo è equivalente a $\Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2 < 2/\omega\Re(\lambda)$. Se supponiamo $\omega > 0$, allora dev'essere $\omega < 2\Re(\lambda)/(\Re(\lambda)^2 + \Im(\lambda)^2)$ quindi esiste ω se $\Re(\lambda)$ sono tutti positivi. Se invece supponiamo $\omega < 0$, allora esisteranno degli ω se $\Re(\lambda)$ sono tutti negativi. Riassumendo, esistono dei valori di ω se $\Re(\lambda)$ ha sempre lo stesso segno, per ogni autovalore λ.

ii) L'implementazione procede come per il metodo di Jacobi, con l'aggiunta della moltiplicazione per ω.

ESERCIZIO 2. Si può procedere in almeno due modi diversi. Esplicitamente si ha

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \ldots, n-1, n+1, \ldots N \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - \sum_{j \neq n} x_j a_{nj}). \end{aligned}$$

Sotto le condizioni date di non singolarità di a_{ii}, non ci sono ulteriori condizioni.

Diversamente, si può scrivere $A = D + e_n d^T$ dove il vettore d contiene gli elementi della riga n-esima di A, escluso l'elemento diagonale, quindi $d_n = 0$. Usando la formula di Sherman-Morrison, $x = A^{-1}b = D^{-1}b - e_n(1 + d^T D^{-1}e_n)^{-1} d^T D^{-1}b$, avendo supposto $1 + d^T D^{-1}e_n \neq 0$. D'altra parte, $1 + d^T D^{-1}e_n = 1 + d_n/a_{nn} = 1$ e quindi è sempre diverso da zero. Si noti che la formula ottenuta è la forma compatta dell'iterazione del primo metodo.

ESERCIZIO 3. i) Ricordando che $\|b\| = \|Ax^*\| \leq \|A\| \, \|x^*\|$ (da cui $1/\|x^*\| \leq \|A\|/\|b\|$) e $\|\widetilde{x} - x^*\| = \|A^{-1}r\| \leq \|A^{-1}\| \, \|r\|$ si ottiene la stima.

ii) Sostituendo i valori si ottiene $\|r\| = \mathcal{O}(\epsilon)$, mentre $\|x^* - \widetilde{x}\| = 1/\sqrt{2}$. Quindi a fronte di un residuo piccolo per $\epsilon \ll 1$, non si ha un errore piccolo, in norma. Questo è atteso in quanto la matrice A è mal condizionata, avendo $\kappa_2(A) \approx 1/\epsilon$. La stima non è altro che la dimostrazione di questa osservazione.

ESERCIZIO 4. i) La matrice companion è data da

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Usando la teoria di Gerschgorin si ottiene che gli autovalori di C, e quindi le radici di ϕ_4, sono contenuti nei dischi (per colonne) $D_1 = D_2 = D_3 = \{|z| \leq 1\}$ e $D_4 = \{|z - 3| \leq 5/6\}$. Quindi D_4 contiene l'autovalore più grande in modulo ed è l'unico autovalore contenuto in D_4.

ii) L'algoritmo è come descritto nelle dispense. Per la velocità di convergenza si nota che il secondo autovalore pìu grande ha modulo al più 1, quindi la velocità di convergenza è stimabile come $|\lambda_2/\lambda_1| \approx 1/(3 - 5/6)$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 08 Aprile 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (8 punti) Dati i punti $x_0 = 0, x_1 = \pi/4$ e $x_2 = \pi/2$, e la funzione $f(x) = \sin(x)^2 \cos(x)$,
   i) Determinare il polinomio, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
   ii) Dare una maggiorazione dell'errore di approssimazione sull'intero intervallo $[0, \pi/2]$.

2. È dato il polinomio $p(x)$ con tutte radici reali.
   i) (10 punti) Dopo averne descritto l'algoritmo, proporre una implementazione mediante una funzione Matlab/Octave del metodo di Newton per l'approssimazione della radice più grande di p, che usi la regola di Horner per la valutazione di p e p'.
   ii) (2 punti) Per $p(x) = x^3 - 3x + 1$, scrivere uno script contenente la definizione degli input della funzione, inclusa una buona stima iniziale x_0, e la chiamata alla funzione, al fine di approssimare la radice più grande.

3. (4 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = \text{tridiag}(1, 3, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($a_{ii} = 3, a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = 1, i = 1, 2, \ldots$), con $n > 1$.
   Dimostrare che vale $\rho(B_J) \leq 2/3$ e $\rho(B_{GS}) \leq 4/9$, dove B_J e B_{GS} sono risp. le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel, e $\rho(\cdot)$ indica il raggio spettrale.

4. Siano $B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e
   $$A_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n + B_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$
   dove $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la matrice identità. Si supponga che esista la fattorizzazione LU di B_n, cioè $B_n = L_n U_n$.
   i) (3 punti) Sfruttando la forma a blocchi, determinare la fattorizzazione LU di A_{2n}, mettendo il relazione L_{2n} con L_n e U_{2n} con U_n.
   ii) (5 punti) Usando (i), per A_{2n} non singolare si descriva un metodo per la risoluzione del sistema $A_{2n}x = b$ e se ne valuti il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta parziale di Calcolo Numerico, 08 Aprile 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. È data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in forma di Hessenberg superiore.
   i) (7 punti) Descrivere l'iterazione QR per arrivare alla forma di Schur della matrice; mostrare inoltre che vengono costruite matrici simili e spiegarne l'importanza.
   ii) (7 punti) Descrivere in dettaglio la costruzione della fattorizzazione utilizzata dall'iterazione QR.

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A = \text{tridiag}(1, 3, 1) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($a_{ii} = 3, a_{i+1,i} = a_{i,i+1} = 1, i = 1, 2, \ldots$), con $n > 1$.
   i) (8 punti) Descrivere l'algoritmo SOR(ω) per la risoluzione del sistema lineare, descrivendone il costo computazionale. Proporne una implementazione in Matlab/Octave mediante funzione.
   ii) (2 punti) Dare, se possibile, condizioni necessarie e sufficienti sul parametro ω affinchè SOR(ω) converga.

3. Siano $B_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e
   $$A_{2n} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n + B_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$
   dove $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è la matrice identità. Si supponga che esista la fattorizzazione LU di B_n, cioè $B_n = L_n U_n$.
   i) (3 punti) Sfruttando la forma a blocchi, determinare la fattorizzazione LU di A_{2n}, mettendo il relazione L_{2n} con L_n e U_{2n} con U_n.
   ii) (5 punti) Usando (i), per A_{2n} non singolare si descriva un metodo per la risoluzione del sistema $A_{2n}x = b$ e se ne valuti il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 09 Giugno 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è ben condizionato (in senso relativo ed assoluto) il problema del calcolo di
$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3.$$

2. (12 punti) Descrivere il metodo di Newton scalare e le sue proprietà di convergenza. Inoltre, analizzare al variare di $x_0 \in \mathbb{R}$ la convergenza delle successioni $\{x_i\}$ costruite mediante il metodo di Newton per le seguenti funzioni:
$$f_1(x) = x^{2/3}, \qquad f_2(x) = |x|^{1/3}.$$
(per ogni funzione, costruire esplicitamente la successione degli iterati e valutare se converge alla radice cercata)

3. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 10 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 11 \end{bmatrix},$$
mentre la matrice simmetrica A_2 ha autovalori tutti compresi nell'intervallo $[3, 8]$.
i) (3 punti) Dimostrare che A è definita positiva, senza determinarne gli autovalori.
ii) (3 punti) Se $x^{(k)}$ è la soluzione approssimata ottenuta dopo k iterazioni del metodo dei gradienti coniugati applicato al sistema dato, fornire una stima dall'alto dell'errore relativo $\|x - x^{(k)}\|_A / \|x - x^{(0)}\|_A$, dove la norma usata è la norma energia.

4. È data la funzione $f(x) = \exp(-x)\cos(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
i) (2 punti) Descrivere la formula generale dell'interpolazione composita con polinomi di grado 2, $P_h^{(2)}$.
ii) (4 punti) Determinare il numero m di nodi in cui suddividere l'intervallo, affinchè l'errore di interpolazione, $\max_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - P_h^{(2)}(x)|$ sia inferiore a 10^{-3}.
iii) (4 punti) Per x_0 fissato, proporre una funzione Matlab/Octave che, dati in input f, gli estremi dell'intervallo, x_0 ed m, dia come risultato $P_h^{(2)}(x_0)$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 09 Giugno 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. (4 punti) Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ è ben condizionato (in senso relativo ed assoluto) il problema del calcolo di
$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3.$$

2. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 \\ 1/3 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 10 & 1/3 \\ 1/3 & 11 \end{bmatrix},$$
mentre la matrice simmetrica A_2 ha autovalori tutti compresi nell'intervallo $[3, 8]$.
i) (3 punti) Dimostrare che A è definita positiva, senza calcolarne gli autovalori.
ii) (3 punti) Sia $x^{(k)}$ è la soluzione approssimata dopo k iterazioni del metodo dei gradienti coniugati applicato al sistema dato. Usando le informazioni del punto precedente, fornire una stima dall'alto dell'errore relativo $\|x - x^{(k)}\|_A / \|x - x^{(0)}\|_A$, dove la norma usata è la norma energia.

3. Sia
$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$
i) (3 punti) Determinare un valore di α per cui A sia definita positiva, ma per cui il metodo di Jacobi non sia convergente
ii) (8 punti) Per matrici come in (*), descrivere il metodo di Jacobi, ed il suo costo computazionale.

4. (11 punti) è dato il sistema lineare $Ax = b$ con A non singolare, triangolare inferiore a banda, come segue
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$
Proporre un algoritmo per la risoluzione del sistema con un costo computazionale $O(n)$, ed una sua implementazione mediante funzione Matlab/Octave (passare come input l'intera matrice).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 07 Luglio 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con A non singolare e $b \neq 0$, ed una approssimazione $\tilde{x}$ della soluzione.
   i) (4 punti) Dopo aver dato la definizione di vettore residuo r e di vettore errore e, determinare $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tali che
   $$\gamma_1 \|e\| \leq \|r\| \leq \gamma_2 \|e\|,$$
   dove $\|\cdot\|$ è la norma Euclidea.
   ii) (4 punti) Usare r ed e per descrivere i concetti di stabilità in termini di analisi dell'errore in avanti e all'indietro.

2. Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $m \leq n$ ed il vettore $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri il problema ai minimi quadrati $\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$.
   i) (2 punti) Descrivere il metodo dell'equazione normale per la sua risoluzione, dando condizioni per l'esistenza della soluzione.
   ii) (8 punti) Supponendo che m sia grande, discutere l'applicabilità del metodo dei gradienti coniugati per il sistema lineare risultante. Descriverne l'algoritmo e discutere le proprietà di convergenza per la matrice del problema considerato.

3. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare e $b \in \mathbb{R}^n$.
   i) (8 punti) Proporre un algoritmo per la risoluzione del sistema che usi la fattorizzazione QR mediante trasformazioni di Householder di A.
   ii) (6 punti) Descrivere come modificare la procedura precedente per minimizzare il costo computazionale nel caso A sia di tipo Hessenberg *inferiore*.

Traccia della risoluzione.
ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 07 Luglio 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con A non singolare e $b \neq 0$, ed una approssimazione $\tilde{x}$ della soluzione.
   Dopo aver dato la definizione di vettore residuo r e di vettore errore e, determinare $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tali che
   $$\gamma_1 \|e\| \leq \|r\| \leq \gamma_2 \|e\|,$$
   dove $\| \cdot \|$ è la norma Euclidea.

2. È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_{-1}^{1} \exp(-2x)dx$.
   i) (3 punti) Descrivere la formula di quadratura dei trapezi composita e fornire una stima dell'errore;
   ii) (2 punti) Determinare il numero di sottointervalli di tale formula di quadratura affinchè l'approssimazione di $\mathcal{I}$ abbia un errore inferiore a 10^{-2}.
   iii) (5 punti) Proporre una implementazione in Matlab/Octave della formula al punto i) ed uno script di chiamata della funzione per l'integrale considerato.

3. (4 punti) Data la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $m \leq n$ ed il vettore $b \in \mathbb{R}^n$, si consideri il problema ai minimi quadrati $\min_{x \in \mathbb{R}^m} \|b - Ax\|$.
   Descrivere il metodo dell'equazione normale per la sua risoluzione, dando condizioni per l'esistenza della soluzione. Supponendo che m sia grande, discutere l'applicabilità del metodo dei gradienti coniugati per il sistema lineare risultante.

4. È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ non singolare e $b \in \mathbb{R}^n$.
   i) (8 punti) Proporre un algoritmo per la risoluzione del sistema che usi la fattorizzazione QR mediante trasformazioni di Householder di A.
   ii) (6 punti) Descrivere come modificare la procedura precedente per minimizzare il costo computazionale nel caso A sia di tipo Hessenberg *inferiore*.

Traccia della risoluzione.
ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, Modulo I, 02 Settembre 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. Sono dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ alta (cioè $m < n$) e di rango m e

$$\mathcal{A} := \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B^T A^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

   i) (2 punti) Sfruttando la fattorizzazione sopra, determinare il numero di autovalori positivi, negativi e nulli di $\mathcal{A}$, cioè la sua inerzia.
   ii) (8 punti) Supponendo che A sia anche tridiagonale, descrivere l'algoritmo del metodo delle potenze per la determinazione dell'autovalore più grande di $B^T A^{-1} B$, descrivendo in dettaglio il costo computazionale per iterazione.

2. (8 punti) Sia $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ tridiagonale (cioè tale che $a_{ij} \neq 0$ per $i = j$ o $i = j \pm 1$, e zero altrimenti). Dato $b \in \mathbb{R}^{n+1}$, proporre un algoritmo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$$

   e descriverne in dettaglio il costo computazionale.

3. È data la matrice $A = \begin{bmatrix} 3+\alpha & 1+\alpha \\ -1+\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
   i) (2 punti) Determinare entrambi gli autovalori, e gli autovettori destro e sinistro relativi all'autovalore (reale) massimo.
   ii) (4 punti) Determinare il numero di condizionamento dell'autovalore massimo e studiarne il suo andamento per $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tale che la sua fattorizzazione LU esista.
   i) (3 punti) Descrivere l'algoritmo di eliminazione di Gauss per il sistema $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^n$.
   ii) (5 punti) Per A avente banda inferiore $\beta = 5$ (cioè $a_{ij} = 0$ per $i > j + \beta$), modificare l'algoritmo del punto i) in modo da minimizzare il numero di operazioni.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 02 Settembre 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014 e precedenti

1. Sono dati $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonale, simmetrica e definita positiva, e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ alta (cioè $m < n$) e di rango m.
   i) (8 punti) Descrivi l'algoritmo del metodo delle potenze per la determinazione dell'autovalore più grande di $B^T A^{-1} B$, descrivendo in dettaglio il costo computazionale per iterazione.
   ii) (2 punti) Proponi una implementazione Matlab dell'algoritmo del punto i).

2. (8 punti) Sia $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ tridiagonale (cioè tale che $a_{ij} \neq 0$ per $i = j$ o $i = j \pm 1$, e zero altrimenti). Dato $b \in \mathbb{R}^{n+1}$, proponi un algoritmo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$$
   e descrivine in dettaglio il costo computazionale.

3. Sia $f(x) = e^x$, $x \in [x_0, x_0 + 2h]$ con $h > 0$.
   i) (4 punti) Per l'interpolazione quadratica sui nodi $\{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h\}$ determina una stima per l'errore di interpolazione.
   ii) (2 punti) Confronta la stima ottenuta in (i) con quella ottenuta usando i nodi di Chebyshev sullo stesso intervallo $[x_0, x_0 + 2h]$.

4. Stima il numero di sottointervalli richiesti per approssimare $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con 6 decimali corretti (cioè errore assoluto $\leq \frac{1}{2}10^{-6}$) mediante
   i) (4 punti) La formula composita dei trapezi
   ii) (4 punti) La formula composita di Simpson

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. ESERCIZIO 2. ESERCIZIO 3. ESERCIZIO 4.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 15 Gennaio 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti due operazioni:

$$f_1 = \text{fl}(a^2 - b^2), \quad \text{e} \quad f_2 = \text{fl}((a-b)(a+b)).$$

In aritmetica esatta, $f_1 = f_2$. Cosa succede in aritmetica con precisione finita? Discutere la precisione delle due operazioni, argomentando anche con un semplice esempio.
(fl(.) indica la sequenza di operazioni tutte in aritmetica floating point)

2. (8 punti) Si supponga che la funzione $f(x) = \exp(-x)$ sia data solo mediante i suoi valori tabulati in $x \in \{1, 1.5, 2\}$. Determinare un'approssimazione di $\exp(-1.8)$ mediante interpolazione quadratica nei nodi tabulati e stimarne l'errore.

3. È data la matrice non singolare

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_n & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

i) (4 punti) Calcolare $\rho(B_{GS})$, $\rho(B_J)$ mostrando che $\rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^n$, dove $\rho(B)$ è il raggio spettrale della matrice B, e B_{GS}, B_J sono rispettivamente le matrici di iterazione dei metodi di Gauss-Seidel e Jacobi. Cosa implica questa relazione per il confronto della convergenza dei due metodi?
ii) (4 punti) Descrivere l'algoritmo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = f$ con $f \in \mathbb{R}^n$.
iii) (4 punti) Proporre una implementazione dell'algoritmo al punto ii), inclusa l'implementazione della funzione per la risoluzione del sistema triangolare associato.
iv) (4 punti) Evidenziarne il costo computazionale per iterazione, completo della risoluzione del sistema.

4. (4 punti) Si consideri una formula di quadratura del tipo

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha f(\frac{1}{3}) + \beta f(\frac{2}{3}) + f(x_1).$$

Determinare α, β, x_1 tali che il grado di precisione sia $k = 2$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Se a, b non sono noti esattamente, allora le due operazioni hanno le stesse caratteristiche di inaccuratezza in aritmetica finita. Se invece supponiamo che a e b siano inseriti in macchina in modo esatto, allora in f_2 l'operazione di somma algebrica non è affetta da errori. Quindi l'unica operazione in aritmetica finita è quella di prodotto, che sappiamo essere stabile. Nel caso di f_1, invece, l'operazione di somma algebrica è fatta tra due numeri floating point, per cui in generale si possono avere amplificazioni degli errori se a^2 e b^2 sono molto vicini.

ESERCIZIO 2. Si procede come nell'esercizio n.2 del Prototipo 4.

ESERCIZIO 3. i) Si ha

$$B_J = -\begin{bmatrix} 0 & & & \frac{b_1}{a_1} \\ \frac{b_2}{a_2} & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{b_n}{a_n} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det(B_J - \lambda) = -\lambda^n + (-1)^{n+1}\frac{b_1}{a_1}\prod_{i=2}^{n}\frac{b_i}{a_i},$$

$$B_{GS} = -\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_n & a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & & & b_1 \\ & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} = -[0, 0, \ldots, 0, u], \quad u = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_n & a_n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

con $\det(B_{GS} - \lambda I) = (-\lambda)^{n-1}(-\lambda + u_n)$. Risolvendo il sistema triangolare inferiore sopra, si trova $u_1 = b_1/a_1$ e $u_{j+1} = -b_j/a_j u_j$, e quindi $u_n = (-1)^n \prod_{j=1}^n b_j/a_j$. Ne segue $\rho(B_J) = |\prod_{j=1}^n b_j/a_j|^{1/n}$ e $\rho(B_{GS}) = |\prod_{j=1}^n b_j/a_j|$, da cui il risultato. La relazione implica che 1) entrambi i metodi o divergono o convergono, perchè i raggi spettrali sono o entrambi più piccoli di uno, o entrambi più grandi di uno; 2) in caso di convergenza, GS sarà più veloce di J, mentre in caso di divergenza, GS divergerà più in fretta di J.

ii,iii) Si procede come nelle dispense.

iv) Il costo computazionale è dato dalle due `daxpy` ($4n$), dal prodotto matrice-vettore il cui costo è $3n$ perchè A ha solo due elementi non zero per riga, e dalla risoluzione del sistema triangolare. Essendo la matrice bidiagonale, il costo della risoluzione è $\mathcal{O}(n)$ (possibilmente dare la costante).

ESERCIZIO 4. Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) \in \{1, x, x^2\}$ si ottiene che dev'essere $\alpha + \beta = 0$, $\alpha + 2\beta + 3x_1 = \frac{3}{2}$ e $\alpha + 4\beta + 9x_1^2 = 3$. Da cui si ottiene $x_1 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\beta = \frac{3}{2} - 3x_1$ e $\alpha = -\beta$. Quindi ci sono due formule di quadratura che danno il grado di precisione richiesto.

Prova scritta Parziale di Calcolo Numerico - 15 Gennaio 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. (4 punti) Dati $a, b \in \mathbb{R}$, si considerino le seguenti due operazioni:

$$f_1 = \mathrm{fl}(a^2 - b^2), \quad \text{e} \quad f_2 = \mathrm{fl}((a-b)(a+b)).$$

In aritmetica esatta, $f_1 = f_2$. Cosa succede in aritmetica con precisione finita? Discutere la precisione delle due operazioni, argomentando anche con un semplice esempio.
(fl(.) indica la sequenza di operazioni tutte in aritmetica floating point)

2. È data la matrice non singolare

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_n & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

i) (4 punti) Calcolare $\rho(B_{GS})$, $\rho(B_J)$ mostrando che $\rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^n$, dove $\rho(B)$ è il raggio spettrale della matrice B, e B_{GS}, B_J sono rispettivamente le matrici di iterazione dei metodi di Gauss-Seidel e Jacobi. Cosa implica questa relazione per il confronto della convergenza dei due metodi?
ii) (4 punti) Descrivere l'algoritmo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = f$ con $f \in \mathbb{R}^n$.
iii) (4 punti) Proporre una implementazione dell'algoritmo al punto ii), inclusa l'implementazione della funzione per la risoluzione del sistema triangolare associato.
iv) (4 punti) Evidenziarne il costo computazionale per iterazione, completo della risoluzione del sistema.

3. Sia $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e definita positiva, $b \in \mathbb{R}^n$, e sia

$$A = \begin{bmatrix} M & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}.$$

i) (5 punti) Mostrare che A ha esattamente n autovalori positivi ed 1 negativo (sfruttare eventualmente una fattorizzazione opportuna);
ii) (5 punti) Descrivere il metodo delle potenze inverse traslate per l'approssimazione dell'autovalore negativo;
iii) (2 punti) Proporre una strategia di scelta del parametro di traslazione.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si veda la traccia della prova completa, nella stessa data.

ESERCIZIO 2. Si veda la traccia della prova completa, nella stessa data.

ESERCIZIO 3. i) La matrice può essere fattorizzata come

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ b^T M^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & -b^T M^{-1} b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & M^{-1}b \\ 0 & I \end{bmatrix} = LDL^T,$$

per cui A e D hanno la stessa inerzia (o segnatura). Siccome M, e quindi M^{-1}, è definita positiva, e $-b^T M^{-1} b < 0$, D ha n autovalori positivi (quelli di M), e l'autovalore negativo $b^T M^{-1} b$.

ii) Si procede come nelle dispense, con matrice inversa traslata $(A - \alpha I)^{-1}$.

iii) Intuitivamente, è ragionevole scegliere $\alpha < 0$, se si vuole approssimare l'autovalore negativo. D'altra parte, un valore di $\alpha < 0$ potrebbe ancora essere più vicino ad un autovalore positivo che all'autovalore negativo cercato. Usando la teoria di Gerschgorin, il disco centrato in $a_{n,n} = 0$ e raggio $\sum |b_i|$ conterrà un autovalore, e potrebbe essere quello negativo cercato. Si potrebbe scegliere quindi α in modo che $\alpha < -\sum |b_i|$, in modo che α sia più vicino a tale autovalore che a tutti gli altri. Una valutazione più precisa si ottiene stimando i raggi degli altri dischi, e prendendo α a sinistra di tutti i dischi determinati.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 05 Febbraio 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Applicare la formula di quadratura di Simpson composita con 4 sottointervalli per approssimare l'integrale $\int_0^{2\pi} x\cos^2(x)\mathrm{dx}$.

2. Sia $f(x) = (x-1)\ln(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.
i) (8 punti) Dopo averne descritto l'algoritmo, proporre una implementazione mediante una funzione Matlab/Octave del metodo di Newton per l'approssimazione dello zero di f. Scrivere inoltre uno script contenente la definizione degli input della funzione stessa, e la chiamata alla funzione;
ii) (2 punti) Discutere le proprietà di convergenza del metodo per questa specifica funzione f.

3. (4 punti) È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$. Descrivere una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice di ϕ_4 più grande in modulo.

4. È dato il seguente problema ai minimi quadrati

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A = \begin{bmatrix} R \\ \alpha e_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n},\ b \in \mathbb{R}^{n+1},$$

con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore e non singolare.
i) (7 punti) Descrivere un algoritmo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema;
ii) (3 punti) Valutarne in dettaglio il costo computazionale;
iii) (2 punti) Confrontare tale costo con quello del metodo dell'equazione normale.
iv) (2 punti) Come cambierebbe l'algoritmo del punto (i) se l'ultima riga di A fosse αe_{n-1}^T (cioè unico elemento non nullo $a_{n+1,n-1} = \alpha$) ?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si opera come nell'esercizio n.2 del Prototipo 3.

ESERCIZIO 2. i) L'algoritmo e la sua implementazione sono come descritti a lezioni. L'implementazione è descritta nell'esercitazione delle equazioni non lineari.

ii) Si noti che la funzione ha uno zero in $x = 1$ di molteplicità $m = 2$, e quindi la convergenza è lineare e locale, con fattore $C = 1 - 1/m$.

ESERCIZIO 3. Il polinomio dato è associato alla matrice companion

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per la teoria di Gerschgorin, gli autovalori di C, e quindi le radici di ϕ_4, sono contenuti nei dischi $D_4 = \{|z - 4| \leq 1\}$, $D_1 = D_2 = D_3 = \{|z| \leq 1\}$. Essendo D_4 disgiunto da D_1, conterrà un autovalore. Quindi la radice ξ di ϕ_4 più grande in modulo è stimabile come $3 \leq |\xi| \leq 5$.

ESERCIZIO 4. i,ii) La matrice è già quasi in forma triangolare superiore. Per eliminare l'elemento in posizione $a_{n+1,n}$ è sufficiente applicare una rotazione di Givens alle righe $n, n+1$ di A, e contemporaneamente agli elementi n e $n+1$ di b. Il costo computazionale è $\mathcal{O}(n)$, e si ottiene il problema equivalente $\min_x \|\hat{b} - [\hat{R}; 0]x\|$, dove $\hat{b}$ e $\hat{R}$ indicato le matrici modificate dalla rotazione. (descrivere le rotazioni di Givens ed il loro uso in questo caso). La soluzione x si ottiene come $x = \hat{R}^{-1}\hat{b}$, il cui costo computazionale è n^2.

iii) Con l'equazione normale, si ottiene il seguente sistema lineare: $A^T Ax = A^T b$, cioè $(R^T R + \alpha^2 e_n e_n^T)x = A^T b$. La matrice dei coefficienti è la modifica di rango uno di una matrice già fattorizzata, quindi usando la formula di Sherman-Morrison si ha

$$x = (R^T R)^{-1} A^T b - (R^T R)^{-1} e_n \alpha^2 (1 + \alpha^2 e_n^T (R^T R)^{-1} e_n)^{-1} e_n^T (R^T R)^{-1} A^T b.$$

Il calcolo di x richiede la risoluzione di due sistemi con $R^T R$ (con termini noti $A^T b$ e con e_n), ed alcune somme di vettori. Il costo principale è quindi dato da quattro risoluzioni con R (o R^T), quindi $4n^2 + \mathcal{O}(n)$, il cui costo è superiore a quello del metodo precedente.

iv) In questo caso, la rotazione di Givens sulle righe n ed $n + 1$ modificherebbero anche gli elementi $a_{n,n}$ e $a_{n+1,n}$, trasformando quest'ultimo in un elemento non zero. Quindi bisognerebbe applicare due rotazioni di Givens: la prima per azzerare l'elemento in posizione $(n + 1, n - 1)$, la seconda per azzerare il nuovo elemento non zero in posizione $(n + 1, n)$.

Prova scritta parziale di Calcolo Numerico, 05 Febbraio 2015
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2014-2015

1. È data la matrice simmetrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalori $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ tali che $|\lambda_1| = |\lambda_n|$.
   - (2 punti) Valutare la convergenza del metodo delle potenze applicato ad A;
   - (4 punti) Per opportune scelte di $\alpha \in \mathbb{R}$ (dire quali), descrivere il metodo delle potenze applicato a $A+\alpha I$ per l'approssimazione di λ_1, mostrando come ottenere la stima di λ_1 durante l'iterazione;
   - (5 punti) Descrivere una implementazione (in Matlab/Octave) del metodo del punto precedente, includendo un criterio d'arresto;
   - (3 punti) Descrivere il costo computazionale per iterazione dell'algoritmo implementato al punto precedente.

2. (4 punti) È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 4x^3 - x + 1$. Descrivere una strategia per localizzare, senza calcolarla, la radice di ϕ_4 più grande in modulo.

3. È dato il seguente problema ai minimi quadrati

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|, \quad A = \begin{bmatrix} R \\ \alpha e_n^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n},\ b \in \mathbb{R}^{n+1},$$

   con $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ triangolare superiore e non singolare.
   i) (7 punti) Descrivere un algoritmo a basso costo computazionale per la risoluzione del problema;
   ii) (3 punti) Valutarne in dettaglio il costo computazionale;
   iii) (2 punti) Confrontare tale costo con quello del metodo dell'equazione normale.
   iv) (2 punti) Come cambierebbe l'algoritmo del punto (i) se l'ultima riga di A fosse αe_{n-1}^T (cioè unico elemento non nullo $a_{n+1,n-1} = \alpha$) ?

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. - La matrice ha due autovalori massimi in modulo, quindi il metodo delle potenze non converge, per un generico dato iniziale.

- Per poter convergere all'autovalore positivo più grande, è sufficiente traslare la matrice in avanti, in modo che $|\lambda_1 + \alpha| > |\lambda_n + \alpha|$, e siccome λ_n è negativo, questo avviene per qualsiasi $\alpha > 0$. Grazie all'invarianza degli autovettori per traslazione, all'iterazione n con $A + \alpha I$, è sufficiente stimare $\lambda_1^{(n)} = (x^{(n)})^T A x^{(n)}$, dove $x^{(n)}$ è l'autovettore approssimato corrente, e si ha $\lambda_1^{(n)} \to_{n\to\infty} \lambda_1$.

- Si procede come nelle dispense.

- Si procede come nelle dispense. L'uso dello shift α aumenta il costo computazione di $2n$ (prodotto scalare per vettore, e somma di vettori, in $y = Ax + \alpha x$).

ESERCIZIO 2. Si veda la soluzione dell'esercizio 3 della prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3. Si veda la soluzione dell'esercizio 4 della prova completa nella stessa data.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 20 Novembre 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014
Appello straordinario per studenti fuori corso

1. (8 punti) Determinare a, b, c in modo che la formula di quadratura
$$af(0) + bf\left(\frac{1}{2}\right) + cf'(1) \approx \int_0^1 f(t)\mathrm{dt}$$
abbia grado di esattezza 2. Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno script che definisca l'input e la chiamata della funzione, per una f scelta, di tipo non polinomiale.

2. (10 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_2$ con $b \in \mathbb{R}^{n+1}$, ed A bidiagonale inferiore di rango massimo,
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & & & \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ddots & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & \ddots & \\ \ddots & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \\ & & & & & a_{n+1,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}.$$
i) Proporre una strategia di basso costo computazionale per la risoluzione del problema;
ii) Discuterne in dettaglio il costo computazionale.

3. (8 punti) È dato il problema $f(x) = 0$, dove $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.
i) Descrivere il metodo di Newton ed il metodo delle secanti, sottolineando le differenze;
ii) Confrontare il costo computazionale e la velocità di convergenza dei due metodi.

4. (6 punti) Siano $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$. È dato il metodo iterativo
$$x_{k+1} = -\frac{1}{\omega}(A - \omega I)x_k + \frac{1}{\omega}b, \qquad k \geq 0.$$
i) Determinare il limite della successione $\{x_k\}$, supponendo che il metodo converga;
ii) Per A simmetrica definita positiva, determinare i valori di ω per i quali il metodo è convergente.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Imponendo che la formula di quadratura sia esatta per polinomi fino al grado 2, si ottengono le tre equazioni $a + b = 1$, $b + 2c = 1$ e $b + 8c = 4/3$, da cui si ottiene $a = 1/9, b = 8/9, c = 1/18$.

Per il resto si procede come nell'esercizio 1 del 20 Giugno 2014.

ESERCIZIO 2. È possibile risolvere il problema usando la fattorizzazione QR, in modo da scrivere $x = R_1^{-1}(Q^T b)$ dove $A = Q[R_1; 0]$. La matrice è bidiagonale, quindi si possono applicare n rotazioni di Givens. Si nota quindi che ogni rotazione (matrice 2×2) va applicata a solo due colonne, in quanto gli altri elementi sono nulli; quindi il costo computazionale per l'intera fattorizzazione è $\mathcal{O}(n)$ (aggiungere qualche dettaglio). Le rotazioni possono essere applicate in contemporanea al vettore b, cosi il costo computazionale è ancora $\mathcal{O}(n)$. Infine, la risoluzione del sistema triangolare con matrice dei coefficienti R_1 bidiagonale superiore (aggiungere i dettagli sulla risoluzione) ha un costo computazionale di nuovo $\mathcal{O}(n)$ (aggiungere i dettagli).

Sarebbe anche possibile formare l'equazione normale, in cui $A^T A$ è tridiagonale e $A^T b$ ha un costo di $\mathcal{O}(n)$. In questo caso, si procede spiegando l'algoritmo di Thomas per matrici tridiagonali, discutendone il costo computazionale.

ESERCIZIO 3. Si tratta di una breve descrizione, con riferimento gli appunti di lezione. Il costo computazionale deve tenere conto del fatto che per il metodo di Newton devono essere note sia f che f' nell'iterato corrente ad ogni passo, mentre per il metodo delle secanti è solo necessaria una valutazione per iterazione.

ESERCIZIO 4. Il metodo iterativo proposto è un metodo di punto fisso, cioè $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

i) Convergenza vuol dire che $x_k \to x_*$ per $k \to \infty$ con $x_* = \Phi(x_*)$. Sostituendo si ha

$$x_* = -\frac{1}{\omega}(A - \omega I)x_* + \frac{1}{\omega}b$$

cioè $x_* = -\frac{1}{\omega}Ax_* + x_* + \frac{1}{\omega}b$, da cui $0 = -\frac{1}{\omega}Ax_* + \frac{1}{\omega}b$. Quindi x_* è soluzione del sistema lineare $Ax = b$. Si noti che A è non singolare, infatti, dato che $x_{k+1} - x_* = -\frac{1}{\omega}(A - \omega I)(x_k - x_*)$, con matrice di iterazione $B = -\frac{1}{\omega}(A - \omega I)$, si ha convergenza se e solo se $\rho(B) < 1$; se A fosse singolare allora B avrebbe almeno un autovalore uguale ad 1.

ii) Gli autovalori μ di B sono dati da $\mu = -\frac{1}{\omega}\lambda + 1$, dove λ è un autovalore di A; A è s.d.p. quindi λ è reale e positivo. Per la convergenza dev'essere $|\mu| < 1$ per ogni μ, cioè $|1 - \frac{1}{\omega}\lambda| < 1$, da cui segue che $\omega > \frac{1}{2}\lambda$ per ogni λ autovalore di A, cioè $\omega > \frac{1}{2}\lambda_{\max}$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 15 Settembre 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) È data la funzione $f(x) = (1 - \cos(x))/x^2$.
   Per $x = 1.2 \cdot 10^{-5}$, si ha $\cos(x) = 0.9999999999$ (arrotondato), cosicchè $1 - \cos(x) = 10^{-10}$ e $(1 - \cos(x))/x^2 \approx 0.694$, che è chiaramente sbagliato (perchè?).
   Dopo aver descritto il problema delle cancellazioni associato a questo esempio, proporre un modo per riscrivere $f(x)$ che eviti le cancellazioni.

2. (10 punti) Sono dati due nodi simmetrici $x_0 = -a$ e $x_2 = a$ nell'intervallo [-1,1].
   i) Calcolare la norma $\|\omega_2\|_\infty$ del polinomio $\omega_2 = (x - x_0)(x - x_2)$ se $a = 1$;
   ii) Scegliere a in modo da massimizzare il grado di precisione di una formula di quadratura costruita sui due nodi considerati; calcolare $\|\omega_2\|_\infty$ per tale scelta di a;
   iii) Scrivere le formule di quadratura corrispondenti alle scelte dei nodi in i) e ii).

3. (10 punti) È data la seguente matrice non singolare in forma di Hessenberg inferiore:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & a_{n-1,4} & \dots & \dots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n,4} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

   i) Con un costo computazionale di $\mathcal{O}(n^2)$ operazioni, determinare due matrici A_1, A_2 non singolari, di cui almeno una triangolare, tali che $A = A_1 A_2$;
   ii) Descrivere un algoritmo per la risoluzione di $Ax = b$, con $A = A_1 A_2$ come determinato in i), con A_1, A_2 già calcolate. Descriverne il costo computazionale.

4. (8 punti) È data l'equazione non lineare $\sin(x)\cos(x) = 0$.
   i) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione all'equazione nell'intorno della prima radice strettamente positiva, e calcolare il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore inferiore a 10^{-5}.
   ii) Descrivere una possibile implementazione del metodo del punto i).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si vedano i lucidi delle lezioni sull'aritmetica in precisione finita.

ESERCIZIO 2. Si ha

i) Dato che $\omega_2(x) = x^2 - 1$ si ha $\max_{x\in[-1,1]} |\omega_2(x)| = |\omega_2(0)| = 1$.

ii) La formula di quadratura sarà $I_2(f) = \alpha_1 f(-a) + \alpha_2 f(a)$. Imponendo che questa formula sia esatta per polinomi di grado al più 2 e per $a \neq 0$, si ottengono le seguenti equazioni: $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, $-\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 a^2 + \alpha_2 a^2 = 2/3$. Dalle prime due segue $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e quindi $a = 1/\sqrt{3}$. Infine, $\omega_2(x) = (x + 1/\sqrt{3})(x - 1/\sqrt{3})$ e vale $\|\omega_2\|_\infty = |\omega_2(\pm 1)| = 2/3$ (la norma infinito è calcolata sull'intervallo $[-1, 1]$). In particolare la scelta di questi nodi darà un errore inferiore rispetto alla scelta al punto (i).

iii) Per $a = 1/\sqrt{3}$ si ha $I_2(f) = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$ mentre per $a = 1$ si ha $I_2(f) = f(-1) + f(1)$.

ESERCIZIO 3. i) La matrice A^T è in forma di Hessenberg superiore, quindi è possibile fare una fattorizzazione QR di A^T a basso costo computazionale mediante rotazioni di Givens (dare i dettagli sulle rotazioni di Givens e sul costo computazionale della procedura): $A^T = QR$, quindi $A = R^T Q^T$ con R^T triangolare inferiore.

ii) Il sistema $Ax = b$ è equivalente a $R^T Q^T x = b$. Quindi $x = Q((R^T)^{-1}b)$ e si procede come segue:

1. Risolvo $R^T y = b$ (costo computazionale n^2 con un metodo di risoluzione in avanti (dare dettagli))

2. Calcolo $x = Qy$ (costo computazionale $(2n - 1)n$)

L'esercizio può anche essere risolto con il metodo di eliminazione di Gauss, del quale è necessario dare i dettagli implementativi che permettano la fattorizzazione in $\mathcal{O}(n^2)$.

ESERCIZIO 4. Si procede in modo analogo all'esercizio 3 del prototipo di prova scritta, II semestre (n.1).

Prova scritta di Calcolo Numerico, 02 Settembre 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014 - II Prova parziale

1. (10 punti) Determinare a, b, c in modo che la formula di quadratura
$$af(0) + bf\left(\frac{\pi}{4}\right) + cf\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{dt},$$
sia esatta per le funzioni $\{\sin(x), \cos(x), \sin^2(x)\}$. Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione.

2. (12 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|_2$ con $b \in \mathbb{R}^n$,
$$A = \begin{bmatrix} I_m \\ uv^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad u \in \mathbb{R}^{n_2}, v \in \mathbb{R}^m,$$
e $n = m + n_2$ (uv^T è una matrice di dimensioni $n_2 \times m$ e di rango uno).
i) Proporre una strategia di basso costo computazionale per la risoluzione del problema;
ii) Discuterne in dettaglio il costo computazionale.

3. (10 punti) È data la funzione $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
i) Descrivere la formula generale dell'interpolazione composita con polinomi di grado 2, $P_h^{(2)}$.
ii) Determinare il numero di nodi in cui suddividere l'intervallo, affinchè l'errore di interpolazione, $\max_{x\in[0,\pi]} |f(x) - P_h^{(2)}(x)|$ sia inferiore a 10^{-2}.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Imponendo l'esattezza per le funzioni richieste, si ottengono le equazioni $1 = \frac{\sqrt{2}}{2}b + c$, $1 = a + \frac{\sqrt{2}}{2}b$ e $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}b + c$, da cui si ottengono i valori di a, b, c della formula di quadratura. Il resto segue come nella prova del 20 Giugno 2014.

ESERCIZIO 2. Per questo problema, l'equazione normale è data da $A^T Ax = A^T b$ con

$$A^T A = I + v(u^T u)v^T, \qquad A^T b = b_1 + v(u^T b_2)$$

dove $b = [b_1; b_2]$ è stato partizionato in modo conforme con A. Posto $\alpha = u^T u$, per la formula di Sherman-Morrison si ha

$$\begin{aligned} x &= (A^T A)^{-1} A^T b = \left(I - \frac{\alpha}{(1 + \alpha v^T v)} v v^T \right) (b_1 + v(u^T b_2)) \\ &= b_1 + v(u^T b_2) - \frac{\alpha v^T b_1}{1 + \alpha v^T v} v - v \frac{\alpha u^T b_2}{1 + \alpha v^T v} (v^T v). \end{aligned}$$

Posto $\omega_1 = v^T b_1$ e $\omega_2 = u^T b_2$, il cui costo computazionale è rispettivamente $O(m)$ e $O(n_2)$, si ha

$$x = b_1 + \omega_2 v - \frac{\alpha\omega_1}{1 + \alpha\|v\|^2} v - v \frac{\alpha\omega_2\|v\|^2}{1 + \alpha\|v\|^2} = b_1 + \left(\omega_2 - \frac{\alpha\omega_1}{1 + \alpha\|v\|^2} - \frac{\alpha\omega_2\|v\|^2}{1 + \alpha\|v\|^2} \right) v$$

il cui costo computazionale è dato dal costo di prodotti scalari e di somma di vettori con m componenti, quindi è $O(m)$.

Nota: La matrice $(A^T A)^{-1}$ **non deve** essere costruita esplicitamente, a pena di un costo computazionale di $O(m^3)$ per risolvere il sistema con la matrice piena.

ESERCIZIO 3. Si procede come nell'esercizio 3 del Prototipo di prova scritta completa n.1.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 02 Settembre 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (10 punti) Determinare a, b, c in modo che la formula di quadratura

$$af(0) + bf\left(\frac{\pi}{4}\right) + cf\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{dt},$$

sia esatta per le funzioni $\{\sin(x), \cos(x), \sin^2(x)\}$. Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione.

2. (10 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|_2$ con $b \in \mathbb{R}^n$,

$$A = \begin{bmatrix} I_m \\ uv^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad u \in \mathbb{R}^{n_2}, v \in \mathbb{R}^m,$$

e $n = m + n_2$ (uv^T è una matrice di dimensioni $n_2 \times m$ e di rango uno).
i) Proporre una strategia di basso costo computazionale per la risoluzione del problema;
ii) Discuterne in dettaglio il costo computazionale.

3. (8 punti) È data la funzione $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
i) Descrivere la formula generale dell'interpolazione composita con polinomi di grado 2, $P_h^{(2)}$.
ii) Determinare il numero di nodi in cui suddividere l'intervallo, affinchè l'errore di interpolazione, $\max_{x\in[0,\pi]} |f(x) - P_h^{(2)}(x)|$ sia inferiore a 10^{-2}.

4. (4 punti) È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 2 \\ -1 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

i) Stabilire, senza calcolare gli autovalori, se A ammette autovalori non reali;
ii) localizzare il raggio spettrale di A.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Vedi svolgimento della II prova parziale del 2 Settembre 2014.

ESERCIZIO 2. Vedi svolgimento della II prova parziale del 2 Settembre 2014.

ESERCIZIO 3. Vedi svolgimento della II prova parziale del 2 Settembre 2014.

ESERCIZIO 4.

i) I tre dischi di Gerschgorin per colonne, per esempio, dicono che gli autovalori di A soddisfano $|\lambda - 15| \leq 2$, $|\lambda - 6| \leq 1$, $|\lambda + 2| \leq 4$. I dischi sono tutti isolati, quindi i tre autovalori sono necessariamente reali (uno per ogni disco, per il II teorema di Gerschgorin). Essendo la matrice reale, autovalori complessi apparirebbero a coppie di complessi coniugati, e quindi apparterrebbero allo stesso disco centrato sull'asse dei numeri reali.

ii) Il disco più lontano dall'origine è quello centrato in 15. Quindi l'autovalore più grande in modulo deve appartenere a quel disco, quindi $13 \leq \rho(A) \leq 17$.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 3 Luglio 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Si studi il condizionamento (in senso relativo ed e assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x.$$

2. (8 punti) Dati i punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, e la funzione $f(x) = (x - 1)\cos(x)$,
i) Determinare il polinomio, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
ii) Dare una maggiorazione dell'errore di approssimazione sull'intero intervallo $[x_0, x_2]$.

3. (6 punti) È data la matrice simmetrica A con autovalori $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2.5$.
i) Descrivere l'algoritmo delle potenze inverse traslate per l'approssimazione del secondo più grande autovalore di A;
ii) Stimare la velocità di convergenza per la seguente scelta del parametro di traslazione: $\mu = 2.2$.

4. (14 punti) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica, avente autocoppie (λ_i, u_i), $i = 1, \dots, n$. Per la risoluzione del sistema si consideri il metodo iterativo
$$x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b), \quad \text{dove} \quad A = M - N, \qquad \det(M) \neq 0.$$
i) Si diano condizioni necessarie e sufficienti sui λ_i affinchè il metodo ottenuto con $M = I$ sia convergente;
ii) Si supponga che sia possibile scegliere $M = (m_{ij})$ con $m_{i,i} = a_{i,i}$, $i = 1, \dots, n$, $m_{i+1,i} = a_{i+1,i}$ e $m_{i,i+1} = a_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, e zero altrimenti (M è la parte tridiagonale di A). Descrivere una funzione Matlab/Octave che implementi l'algoritmo, e descriverne il costo computazionale, includendo la risoluzione del sistema con M.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si ha $\kappa_{ass} = |f'(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1\right|$ e $\kappa_{rel} = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \frac{|x^2-x\sqrt{x^2-1}|}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$. Quindi il problema è mal condizionato, sia in senso assoluto che relativo, per x in un intorno di ± 1.

ESERCIZIO 2. i) Si ha $L_0(x) = ... = \frac{x}{2}(x-1)$, $L_1(x) = 1 - x^2$, $L_2(x) = \frac{x}{2}(x+1)$, e $f(x_0) = -2\cos(-1)$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 0$. Quindi $p_2(x) = -\cos(1)x(x-1) + x^2 - 1$.

ii) La stima è data da $\|f-p_2\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{6}\|w\|_\infty$ con $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x^3-x$.

Si ha $f'''(x) = -3\cos(x) + (x-1)\sin(x)$ per cui per esempio $|f'''(x)| \leq 3 + \sqrt{3}$ per $x \in [-1,1]$. Inoltre, $\|w\|_\infty = |w(\pm\sqrt{3}/3)| = 2\sqrt{3}/9$. Quindi $\|f-p_2\|_\infty \leq (1+\sqrt{3})/9$.

ESERCIZIO 3. i) [Si veda l'esercizio 1.3 dell'esercitazione dell' 17/12/2013]

ii) La matrice A è simmetrica quindi la convergenza è quadratica. La velocità di convergenza è circa $((\lambda_3-\mu)^{-1}/(\lambda_2-\mu)^{-1})^2 = ... = 4/9$.

ESERCIZIO 4. La matrice di iterazione è $B = M^{-1}N$.

i) Per $M = I$ si ha $B = N = I - A$. $\rho(B) < 1$ se e solo se $|1-\lambda_i| < 1$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, cioè $\lambda_i \in]0, 2[$, $i = 1, \ldots, n$.

ii) Una implementazione si trova nella risoluzione dell'esercizio 1 nell'esercitazione del 03/12/2013, dove bisogna però sostituire il risolutore con P (qui M) ad ogni iterazione. Per M tridiagonale (simmetrica, e si suppone non singolare), si può usare l'algoritmo di Thomas, come descritto nella risoluzione dell'esercitazione del 14/11/2013.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 15 Settembre 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014
II parziale

1. (12 punti) È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$.
   i) Descrivere la formula di quadratura di Simpson e fornire una stima dell'errore;
   ii) Applicare la formula di quadratura di Simpson composita con 4 sottintervalli per approssimare $\mathcal{I}$;
   iii) Proporre una implementazione della funzione al punto ii) ed uno script di chiamata della funzione.

2. (10 punti) Sono dati due nodi simmetrici $x_0 = -a$ e $x_2 = a$ nell'intervallo [-1,1].
   i) Calcolare la norma $\|\omega_2\|_\infty$ del polinomio $\omega_2 = (x - x_0)(x - x_2)$ se $a = 1$;
   ii) Scegliere a in modo da massimizzare il grado di precisione di una formula di quadratura costruita sui due nodi considerati; calcolare $\|\omega_2\|_\infty$ per tale scelta di a;
   iii) Scrivere le formule di quadratura corrispondenti alle scelte dei nodi in i) e ii).

3. (10 punti) È data l'equazione non lineare $\sin(x)\cos(x) = 0$.
   i) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione all'equazione nell'intorno della prima radice strettamente positiva, e calcolare il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore inferiore a 10^{-5}.
   ii) Descrivere una possibile implementazione del metodo del punto i).

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. i) Si ha $I_2(f) = \pi/6(f(0) + 4f(\pi/2) + f(\pi))$. L'errore è dato da $|E_2(f)| = \pi^5/90|f^{(4)}(\xi)| \leq \pi^5/90(12 + \pi^2)$.

ii) Si ha $H = (b-a)/m = \pi/4$ e nodi (pari) $x_0 = 0, x_2 = \pi/4, x_4 = \pi/2, x_6 = 3/4\pi, x_8 = \pi$. Si ha

$$\mathcal{I}_{2,m} = \frac{H}{6}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8\right)$$

dove $f_i = f(x_i)$. Sostituendo i valori di f si ottiene il risultato.

Script:

```
f=@(x)(x.^2.*cos(x));
a=0; b=pi;
m=4;
Ic=Simpson_comp(f,a,b,m);
```

Funzione:

```
function I = Simpson_comp(f,a,b,m)

h=(b-a)/m; x=a:h/2:b;
I=(h/6)*(f(x(1))+2*sum(f(x(3:2:2*m-1)))+4*sum(f(x(2:2:2*m)))+f(x(2*m+1)));
```

ESERCIZIO 2. Si veda l'esercizio 2 della prova scritta completa del 15 settembre 2014.

ESERCIZIO 3. Si veda l'esercizio 4 della prova scritta completa del 15 settembre 2014.

Prova scritta Parziale di Calcolo Numerico - 18 Febbraio 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Dato un triangolo, siano a, b le lunghezze di due lati e θ l'ampiezza in radianti dell'angolo tra essi compreso. Analizzare il condizionamento del calcolo dell'area ($\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\theta$) del triangolo al variare di θ.

2. (14 punti) Sia $D = \mathrm{diag}(\mathrm{d}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matrice diagonale con elementi diagonali non nulli (il vettore $d \in \mathbb{R}^n$ contiene gli elementi della diagonale), e siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due vettori non identicamente zero.

   i) Descrivere un metodo con costo computazionale $\mathcal{O}(n)$ per la risoluzione numerica del sistema lineare $(D + uv^T)x = b$ con $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$, eventualmente evidenziando condizioni sui dati affinchè il metodo sia ben definito;

   ii) Descrivere una funzione `x = nomefunzione(d,u,v,b);` che implementi il metodo;

   iii) Descrivere nel dettaglio il costo computazionale della funzione.

3. (14 punti) Per $\varepsilon \in \mathbb{R}$, è data la matrice

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 20 & 20 & & & & \\ & 19 & 20 & & & \\ & & 18 & 20 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 2 & 20 \\ \varepsilon & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

   i) Determinare gli autovettori destro e sinistro di $\lambda_1(A_0) = 20$ (cioè per $\varepsilon = 0$) ed il numero di condizionamento di $\lambda_1(A_0)$;

   ii) Scrivendo $A_\varepsilon = A_0 + E_\varepsilon$, dare una stima al prim'ordine dell' errore di perturbazione $|\lambda_1(A_\varepsilon) - \lambda_1(A_0)|$ per $\varepsilon \to 0$
   ($\lambda_1(A)$ indica l'autovalore massimo in modulo della matrice A);

   iii) Descrivere l'algoritmo delle potenze per l'approssimazione di $\lambda_1(A_\varepsilon)$, evidenziandone il costo computazionale, incluso il costo delle operazioni $y = A_\varepsilon \cdot x$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si calcola la derivata prima della funzione $\mathcal{A}(\theta)$, e si scrive il numero di condizionamento relativo ed assoluto. Si valuta intorno a quali valori della variabile $\theta \in (0, \pi)$, i due numeri di condizionamento tendono ad un valore non finito.

ESERCIZIO 2. Si tratta di usare la formula di Sherman-Morrison per $A = D + uv^T$:

$$A^{-1} = D^{-1} - D^{-1}u(1 + v^T D^{-1}u)^{-1}v^T D^{-1}$$

la cui applicazione per determinare $x = A^{-1}b$ richiede operazioni con vettori (costo $\mathcal{O}(n)$), e risoluzione di sistemi lineari con D diagonale (costo $\mathcal{O}(n)$). Oltre alla non singolarità di D, ipotesi data dal testo, occorre che $1 + v^T D^{-1}u \neq 0$.

Per una implementazione efficiente in Matlab(R) o Octave, si tenga presente che:

a) Le operazioni $w = D^{-1}b, z = D^{-1}u$ si scrivono in modo efficiente come

```
>> w = b./d; z = u./d;
```

b) Bisogna usare le parentesi in modo opportuno per non creare inutilmente matrici piene di grandi dimensioni, che causerebbero un costo computazionale matrice-vettore dell'ordine di n^2: `x = w - (z /(1+v'*z))*(v'*w);`

ESERCIZIO 3.

i) L'autovettore destro è $x = e_1$. Per l'autovettore sinistro, da $A_0^T\hat{y} = \hat{y}20$ segue che le componenti $\hat{y}_i$ di $\hat{y}$ verificano

$$20\hat{y}_1 = 20\hat{y}_1, \quad 20\hat{y}_1 + 19\hat{y}_2 = 20\hat{y}_2, \quad 20\hat{y}_2 + 18\hat{y}_3 = 20\hat{y}_3, \ldots,$$

da cui

$$20\hat{y}_k + (20 - k)\hat{y}_{k+1} = 20\hat{y}_{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, 19.$$

Quindi $\hat{y}_{k+1} = (20/k)\hat{y}_k = (20^k/k!)\hat{y}_1$. Posto $\hat{y}_1 = 1$, vale

$$\|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{20^{k-1}}{(k-1)!}\right)^2.$$

Per l'autovettore sinistro di norma unitaria, $y = \hat{y}/\|\hat{y}\|$, si ha quindi $y_1 = 1/\|\hat{y}\| \ll 1$. Il numero di condizionamento di $\lambda = 20$ è $1/|y^*x| = 1/y_1 \gg 1$.

[Il resto dell'esercizio si svolge usando il risultato della teoria della perturbazione per autovalori semplici, e l'algoritmo del metodo delle potenze.]

Prova scritta parziale di Calcolo Numerico - 20 Gennaio 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Si studi il condizionamento (in senso relativo ed assoluto) del problema del calcolo di
$$f(x) = 1 - \sqrt{1-x}, \qquad x \leq 1.$$

2. (14 punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con $b \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in forma di Hessenberg superiore (cioè, $A_{ij} = 0$ per $i > j+1$).
Supponendo che esista e sia unica la fattorizzazione LU di A:
   i) Scrivere un algoritmo che determina il fattore U mediante eliminazione di Gauss, valutandone il costo computazionale;
   ii) Implementare tale algoritmo mediante una funzione che prende in input A e b e fornisce in output la matrice U ed il termine noto modificato.

3. (14 punti) È data la matrice $n \times n$ tridiagonale simmetrica
$$A = \mathrm{tridiag}(b, \underline{a}, b),$$
dove $a \in \mathbb{R}$ è il valore degli elementi diagonali, e $b \in \mathbb{R}$ il valore degli elementi sulla diagonale subito sopra e subito sotto la diagonale principale (diagonali a valori costanti).
   i) Mediante l'uso dei dischi di Gerschgorin, dare condizioni sufficienti su $a, b \in \mathbb{R}$ affinchè la matrice sia definita positiva.
   ii) Mediante l'uso delle rotazioni di Givens, mostrare un procedimento per il calcolo del fattore R della fattorizzazione $A = QR$ con Q ortogonale ed R triangolare superiore (in modo equivalente, la fattorizzazione può essere pensata come $Q^T A = R$). Mostrare che $R = (r_{i,j})$ è tale che $r_{i,j} = 0$ per $j > i+2$ e $Q = (q_{i,j})$ è tale che $q_{i,j} = 0$ per $i > j+1$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si calcola la derivata prima della funzione, e si esprime il numero di condizionamento relativo ed assoluto. Si valuta intorno a quali valori della variabile x, i due numeri di condizionamento tendono ad un valore non finito.

ESERCIZIO 2. La matrice A è in forma di Hessenberg, quindi è necessario solo eliminare gli elementi di A nella diagonale sotto alla diagonale principale. In particolare, per ogni colonna k, è necessario calcolare ed applicare solo $m_{k+1,k}$. Il costo computazionale si riduce di un fattore n. L'esercizio chiede di valutare il costo computazionale in modo più dettagliato.

ESERCIZIO 3 i) I dischi di Gerschgorin sono del tipo $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq 2|b|\}$ and $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq |b|\}$. Una condizione sufficiente affinchè la matrice sia definita positiva, è che i dischi siano contenuti nel semipiano positivo. Quindi, se $2|b| < a$ tutti gli autovalori sono positivi.

ii) La matrice è tridiagonale, e quindi per ottenere la decomposizione QR è sufficiente annullare gli elementi sotto alla diagonale principale mediante rotazioni di Givens. Si ha

$$A^{(i)} = \mathcal{G}_i A^{(i-1)}, \qquad i = 1, \dots, n-1, \qquad A^{(0)} = A$$

dove, denotando con I_k la matrice identità di dimensione k,

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & G_i & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{bmatrix},$$

e $G_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sono le rotazioni di Givens. Quindi, $R = A^{(n-1)} = \mathcal{G}_{n-1} \cdots \mathcal{G}_1 A$ e $Q^T = \mathcal{G}_{n-1} \cdots \mathcal{G}_1$. Essendo le matrici $\mathcal{G}_i$ a blocchetti, il loro prodotto, iniziando da destra è dato da (senza perdita di generalità ci limitiamo ad un esempio 5×5):

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_4 \cdots \mathcal{G}_1 &= \begin{bmatrix} * &&&& \\ & * &&& \\ && * && \\ &&& * & * \\ &&& * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * &&&& \\ & * &&& \\ && * & * & \\ && * & * & \\ &&&& * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * &&&& \\ & * & * && \\ & * & * && \\ &&& * & \\ &&&& * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * &&& \\ * & * &&& \\ && * && \\ &&& * & \\ &&&& * \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} * &&&& \\ & * &&& \\ && * && \\ &&& * & * \\ &&& * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * &&&& \\ & * &&& \\ && * & * & \\ && * & * & \\ &&&& * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * &&& \\ * & * & * && \\ * & * & * && \\ &&& * & \\ &&&& * \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} * &&&& \\ & * &&& \\ && * && \\ &&& * & * \\ &&& * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * &&& \\ * & * & * && \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & \\ &&&& * \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} * & * &&& \\ * & * & * && \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Questo mostra che Q^T è Hessenberg inferiore, da cui Q è Hessenberg superiore, come richiesto. Moltiplicando $Q^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ per $A = (a_{i,j})$, si nota che per $n > 2$, $r_{1,n} = q_1^T a_{1:n,n} = 0$, e per $n > 3$, $r_{2,n} = q_2^T a_{:,n} = 0$ e cosi via. Il primo elemento non nullo è dato da $r_{n-2,n} = q_{n-2}^T a_{1:n,n}$. Questo mostra che tutti gli elementi della colonna n-esima di $R = (r_{i,j})$ sono zero, per $i < n-2$. In modo analogo si trattano le colonne precedenti.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 20 Giugno 2014
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (10 punti) Costruire una formula di quadratura del tipo

$$\int_0^x f(t)\mathrm{dt} \approx af(0) + bf(x) - c(f'(x) - f'(0)),$$

che abbia grado di esattezza 2. Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione.

2. (6 punti) Siano $r \in \mathbb{R}^4$ e

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che il metodo di Jacobi applicato al sistema lineare $(I - W)x = r$ non è convergente, ma esiste una permutazione delle equazioni del sistema per cui il metodo di Jacobi è convergente.

3. (10 punti) È dato un polinomio di cui si vuole approssimare una radice ξ.
i) Descrivere l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di ξ;
ii) Descrivere l'uso della regola di Horner all'interno dell'iterazione di Newton, valutandone il costo computazionale.

4. (6 punti) Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u_1 = v_1$ e si definisca la matrice $n \times n$ $A_n = (a_{ij})$ tale che $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \ldots, n-1$, $a_{i,i} = u_i$, $a_{i,1} = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, e zero altrimenti, cioè

$$A_n = \begin{bmatrix} u_1 & 1 & & & & \\ v_2 & u_2 & 1 & & & \\ v_3 & 0 & u_3 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ v_{n-1} & & & & u_{n-1} & 1 \\ v_n & & & & & u_n \end{bmatrix}.$$

Sia $d_n = \det(A_n)$.
i) Partendo dall'elemento di posizione (n, n), scrivere una relazione che lega d_n con d_{n-1} e ricavarne un algoritmo per il calcolo di d_n;
ii) Valutare il costo computazionale dell'algoritmo determinato.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si impone che la soluzione sia esatta per polinomi di grado al più 2. prendendo $f(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$. Si ottiene $a + b = x, b = \frac{1}{2}x$, e $c = \frac{1}{12}x^2$, da cui si ottiene anche il valore di $a = \frac{1}{2}x$.

Un possibile script è dato da (supponendo per esempio $f(x) = \sin(x)\cos(x)$):

```
f=@(x)(sin(x).*cos(x));
df=@(x)(cos(x).^2-sin(x).^2);
x=3;
I=formula_quadr(f,df,x);
```

che chiama per esempio la funzione:

```
function I=formula_quadr(f,df,x);

a= 1/2*x; b=a; c=1/12*x.^2;
I = a*f(0)+b*f(x)-c*(df(x)-df(0));

end
```

ESERCIZIO 2. Scrivendo $I - W = A = D - E - F$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \quad B = D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha $\det(B - \lambda I) = (\lambda^2 - \frac{1}{12})(\lambda^2 - \frac{5}{2})$ per cui $\rho(B) = \sqrt{\frac{5}{2}} > 1$ e il metodo di Jacobi non converge. Scambiando la prima e l'ultima riga, la matrice A diventa a diagonale dominante per cui il metodo converge.

ESERCIZIO 3. [Si veda l'esercizio 3 dell'esercitazione dell' 8/5/2014]

ESERCIZIO 4. L'iterazione è data da:

$$d_1 = u_1, \qquad d_{k+1} = u_{k+1} d_k + (-1)^{k+2} v_{k+1}, \; k = 1, \ldots, n-1$$

Il costo computazionale è di 2 operazioni floating point per iterazione, per un totale di $2(n-1)$ operazioni.

Prova scritta di Calcolo Numerico, 3 Luglio 2014 (secondo parziale)
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (12 punti)
i) Costruire una formula di quadratura del tipo

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}} f(x)\mathrm{dx} \approx af(0) + b\int_0^1 f(x)\mathrm{dx},$$

che abbia grado di esattezza 1.
ii) Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, includendo una funzione che approssimi l'integrale nella formula di quadratura stessa.
iii) Proporre inoltre uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione.

2. (8 punti) Dati i punti $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, e la funzione $f(x) = (x-1)\cos(x)$,
i) Determinare il polinomio, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
ii) Dare una maggiorazione dell'errore di approssimazione sull'intero intervallo $[x_0, x_2]$.

3. (12 punti) È dato il problema ai minimi quadrati $\min_{x\in\mathbb{R}^m} \|b - Ax\|_2$ con

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,m} \\ & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,m} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & a_{m,m} \\ & & & & a_{m+1,m} \\ & & & & \vdots \\ & & & & a_{n,m} \end{bmatrix},$$

e A avente rango massimo (A è triangolare superiore eccetto per l'ultima colonna).
i) Descrivere un algoritmo efficiente per determinare la soluzione del problema;
ii) Discuterne in dettaglio il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si impone che la soluzione sia esatta per polinomi di grado al più 2. prendendo $f(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$. Si ottiene $a + b = x, b = \frac{1}{2}x$, e .... da cui si ottengono i valori di a, b, c.

L'implementazione dell'algoritmo segue quanto visto nelle esercitazioni.

Si può interpretare l'esercizio anche considerando che l'integrale sia esatto per funzioni *integrande* polinomiali. In tal caso si procederà con $f(t) = t^{i-1/2}$, $i = 0, 1, 2$.

ESERCIZIO 2. Si veda la risoluzione dello stesso esercizio nella prova completa nella stessa data.

ESERCIZIO 3. Per annullare tutti gli elementi di A sotto a $a_{m,m}$ si può usare una matrice di Householder partendo dagli elementi $d = [a_{m,m}; a_{m+1,m}; \dots; a_{n,m}]$. La costruzione del vettore di Householder e la sua applicazione alle ultime $n-m+1$ componenti di A ed a b cost $\mathcal{O}(n-m)$. La risoluzione del sistema triangolare superiore risultante costa n^2 [dare i dettagli di entrambe le operazioni ed i loro costi].

Prova scritta di Calcolo Numerico, 20 Giugno 2014 (secondo parziale)
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (10 punti) Costruire una formula di quadratura del tipo

$$\int_0^x f(t)\mathrm{dt} \approx af(0) + bf(x) - c(f'(x) - f'(0)),$$

che abbia grado di esattezza 2. Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di quadratura trovata, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione.

2. (12 punti) È data la funzione $F(x) = \sin(x)\cos(x) + x^2$, di cui si vuole trovare il punto critico giacente vicino all'origine.
i) Descrivere il metodo di bisezione per determinare il punto critico.
ii) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione e calcolare il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore di 10^{-2}.

3. (10 punti) È dato un polinomio di cui si vuole approssimare una radice ξ.
i) Descrivere l'algoritmo di Newton per l'approssimazione di ξ;
ii) Descrivere l'uso della regola di Horner all'interno dell'iterazione di Newton, valutandone il costo computazionale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

Si impone che la soluzione sia esatta per polinomi di grado al più 2. prendendo $f(t) = t^i$, $i = 0, 1, 2$. Si ottiene $a + b = x, b = \frac{1}{2}x$, e .... da cui si ottengono i valori di a, b, c.

L'implementazione dell'algoritmo segue quanto visto nelle esercitazioni.

ESERCIZIO 2. Si lavora con la funzione $F'(x)$ (da scrivere esplicitamente), e si procedere come nell'esercizio del Prototipo n.1 del II parziale.

ESERCIZIO 3. [Si veda l'esercizio 3 dell'esercitazione dell' 8/5/2014]

Prototipo di prova scritta, II semestre (n.1)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (xx punti) Si consideri una formula di quadratura del tipo

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{dx} \approx \alpha f(x_1) + \beta[f(1) - f(0)].$$

i) Determinare α, β e x_1 tali che il grado di precisione sia $k = 2$.
ii) Notando che la formula di quadratura è di tipo interpolatorio, determinare una stima per l'errore, sotto ipotesi di regolarità di f.

2. (xx punti) Per $\alpha \in \mathbb{R}$, è data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

i) Calcolare i valori singolari di A ed il suo numero di condizionamento $\kappa(A)$. Come varia $\kappa(A)$ per $\alpha \to -2$? Giustificare
ii) Per $b \in \mathbb{R}^3$, proporre una procedure per la risoluzione numerica del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|b - Ax\|_2$$

che abbia un buon comportamento per $\kappa(A) \gg 1$ (non è necessario descrivere come si ottiene la fattorizzazione usata).

3. (xx punti) Sia data l'equazione non lineare $e^{-x}\sin(x) = 0$.
i) Individuare un intervallo utile per applicare il metodo di bisezione all'equazione nell'intorno della prima radice strettamente positiva, e calcolare il numero di iterazioni necessarie per ottenere un errore di 10^{-6}.
ii) Descrivere una possibile implementazione del metodo di bisezione.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Perchè la formula sia esatta per polinomi di grado al più 2, deve sussistere l'uguaglianza per $f \in \{1, x, x^2\}$. Sostituendo e calcolando i 3 integrali esplicitamente si ottiene il sistema

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ x_1 + \beta &= \frac{1}{2} \\ x_1^2 + \beta &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

che, grazie al termine x_1^2, ammette due soluzioni $(\alpha, \beta, x_1) = (1, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{3}}))$ e $(\alpha, \beta, x_1) = (1, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{3}}))$.

La formula ottenuta è di tipo interpolatorio con nodi $\{0, x_1, 1\}$. Sia p_2 tale polinomio interpolatorio. Quindi vale il teorema sull'errore di interpolazione, e si ha

$$E = \int_0^1 (f(x) - p_2(x))\mathrm{dx} = \int_0^1 \omega(x) \frac{f^{(3)}(\xi(x))}{6} \mathrm{dx},$$

con $\omega(x) = x(x-1)(x-x_1)$, supponendo $f \in C^{(3)}([0,1])$.

Quindi $|E| \le \frac{1}{6} \|f^{(3)}\|_\infty \int_0^1 x(1-x)|x-x_1|\mathrm{dx}$. Il calcolo esplicito dell'integrale nella stima fornisce $\int_0^1 x(1-x)|x-x_1|\mathrm{dx} = \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{12}x_1^4$, da cui la stima richiesta.

ESERCIZIO 2. I valori singolari di A si possono ottenere in forma chiusa come $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $i = 1, 2$, dove λ_i sono gli autovalori di $A^T A$. Si ha

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = \lambda^2 - \lambda(8+\alpha^2) + 2(\alpha+2)^2,$$

da cui si ottiene $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left((8+\alpha^2) \pm \sqrt{(8+\alpha^2)^2 - 8(\alpha+2)^2}\right)$.

Si nota che per $\alpha \to -2$, si ha $\lambda_1 \to 24$ e $\lambda_2 \to 0$, e quindi A diventa di rango 1. Questo poteva essere verificato direttamente dalla dipendenza lineare delle colonne di A, per $\alpha = 2$.

Sia la fattorizzazione QR che la SVD hanno un buon comportamento per $\kappa(A) \gg 1$ [L'applicazione del metodo scelto deve poi essere descritta].

ESERCIZIO 3. Sia $f(x) = e^{-x}\sin(x)$. Allora si ha $f(\frac{1}{2}\pi) > 0$ e $f(\frac{3}{2}\pi) < 0$, quindi $a = \frac{1}{2}\pi$ e $b = \frac{3}{2}\pi$ sono due valori iniziali accettabili. Ricordando che l'errore decresce con $|e^{(k)}| \le (b-a)/2^k$, si otterrà un errore $|e^{(k)}| \le 10^{-6}$ dopo $k \ge \log_2((b-a)/10^{-6})$ iterazioni.

[Segue una descrizione della funzione Matlab che implementa il metodo di bisezione]

Prototipo di prova scritta (n.1)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Si dica per quali $x > 0$ è ben condizionato (in senso relativo ed assoluto) il problema del calcolo di
$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}.$$

2. (20 punti) Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in forma di Hessenberg superiore (cioè, $A_{ij} = 0$ per $i > j + 1$), e con $A_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
   i) Descrivere l'algoritmo di Gauss-Seidel per risolvere il sistema lineare;
   ii) Descrivere in dettaglio il costo computazionale (in operazioni floating point) di una generica iterazione dell'algoritmo, incluso il costo della risoluzione del sistema lineare associato;
   iii) Proporre una implementazione dell'algoritmo mediante una funzione.

3. (8 punti) È data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 7 & \alpha & 1 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$
   i) Determinare i valori di α per cui i cerchi di Gerschgorin di A sono a due a due disgiunti. Dimostrare che per tali valori di α la matrice A ha autovalori reali.
   ii) Per $\alpha = 1$, determinare una stima della peggiore possibile velocità di convergenza del metodo delle potenze applicato ad A.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Si calcola la derivata prima della funzione, e si esprime il numero di condizionamento relativo ed assoluto. Si valuta intorno a quali valori della variabile x, i due numeri di condizionamento tendono ad un valore non finito.

ESERCIZIO 2. [Come da lezione] Si noti che, essendo $A = P - N$ Hessenberg superiore, la matrice P è bidiagonale inferiore, e quindi la risoluzione di sistemi con P è poco costosa. Questo costo va esplicitato nella discussione sul costo computazionale.

ESERCIZIO 3. i) La matrice A è reale, quindi i suoi autovalori sono o reali, o complessi coniugati. Se i dischi di Gerschgorin (tutti centrati sull'asse delle ascisse) sono tutti disgiunti, allora ogni disco contiene al più un autovalore di A (II teorema), che dev'essere necessariamente reale, altrimenti il disco conterrebbe anche il suo complesso coniugato. È sufficiente quindi prendere α in modo che i dischi siano disgiunti.

ii) Si tratta di calcolare λ_2/λ_1, dove λ_1 è il più grande autovalore di A.

Prototipo di prova scritta, II semestre (n.2)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (xx punti) Sia data la funzione $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$, e sia p_n il polinomio interpolatorio di f di grado n sui nodi $x_i = i/n$, $0 \leq i \leq n$.
   i) Scrivere il polinomio p_n nella forma di Lagrange e l'errore di interpolazione $E_n = f(x) - p_n(x)$, $x \in [0,1]$;
   ii) Dimostrare che $\max_{0 \leq x \leq 1} |(x - i/n)(x - (n-i)/n)| \leq \frac{1}{4}$;
   iii) Usare (ii) per ottenere una stima di E_n in $[0,1]$, e determinare il grado minimo n che garantisca un errore inferiore a 10^{-2}.

2. (xx punti) i) Dare la definizione di matrice trasformazione di Householder e spiegarne l'utilità.
   ii) Implementare mediante una funzione l'algoritmo per la fattorizzazione QR di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n \geq m$ con trasformazioni di Householder.
   Discuterne il costo computazionale.

3. (xx punti) È dato l'integrale $\mathcal{I} = \int_{-1}^{1} |x| \mathrm{dx} = 1$.
   i) Mostrare che la formula dei trapezi composita $\mathcal{I}_{1,m}$ con $h = 2/m$ è esatta per m pari;
   ii) Determinare $\mathcal{I}_{1,m}$ per m dispari e commentare sull'ordine di convergenza rispetto ad h.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1. Per (ii), occorre notare che ognuno di questi polinomi è di secondo grado, e che il valore massimo assoluto è ottenuto per $x = 1/2$ [fornire i dettagli], da cui segue la stima.

Per (iii), usando $\|f^{(n+1)}\|_\infty = e$, si ottiene

$$|E_n| \le \|f - p_n\|_\infty \le \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}} e = \frac{e}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

Per $n = 3$ tale quantità è minore di 10^{-2}.

ESERCIZIO 2.

[Descrizione della funzione Matlab che implementa l'algoritmo. Vedi esercitazione in Laboratorio Computazionale del 05/03/2014]

ESERCIZIO 3.

i) Ricordiamo che la formula dei trapezi è esatta per polinomi di grado al più 1. La formula dei trapezi, $\mathcal{I}_{1,m} = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{m-1} f(x_j) + f(x_m))$, può essere spezzata come

$$\mathcal{I}_{1,m} = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{m/2-1} f(x_j) + f(x_{m/2})\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_{m/2}) + 2\sum_{j=m/2+1}^{m-1} f(x_j) + f(x_m)\right).$$

In questo modo, la formula per i primi $m/2 + 1$ nodi è esatta per $\mathcal{I}_- = -\int_{-1}^{0} x\mathrm{dx}$, e per i successivi $m/2 + 1$ nodi (ripetendo il punto medio) è esatta per $\mathcal{I}_+ = \int_0^1 x\mathrm{dx}$.

ii) Per m dispari i nodi sono $x_j = -1 + 2j/m$, $j = 0, \ldots, m$ e $h = 2/m$. Quindi

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{1,m} &= \frac{1}{m}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{m-1}\left|-1 + \frac{2j}{m}\right| + 1\right) = \frac{1}{m}\left(2 + 4\sum_{j=1}^{(m-1)/2}\left(1 - \frac{2j}{m}\right)\right) \\
&= \ldots = \frac{1}{m}\left(2 + (2m-2) - \frac{m^2-1}{m}\right) = \frac{m^2+1}{m^2}.
\end{aligned}$$

L'errore è $\mathcal{I} - \mathcal{I}_{1,m} = -\frac{1}{m^2} = O(h^2)$. La velocità di convergenza teorica si preserva, nonostante il fatto che $f(x) = |x|$ non sia di classe $C^{(2)}([-1,1])$.

Prototipo di prova scritta (n.2)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (4 punti) Dopo aver brevemente introdotto il problema degli errori di cancellazione, discutere il caso particolare dell'operazione in aritmetica floating point

$$\sin(x) - \sin(y), \qquad \text{per} \quad x \approx y;$$

proporre quindi una espressione alternativa che eviti problemi di cancellazione.

2. (20 punti) È dato il sistema lineare $Ax = f$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & & b_n \end{bmatrix}$$

i) Dimostrare che esiste ed è unica la fattorizzazione LU di A e dare condizioni di invertibilità di A su $b_1, \ldots, b_n$;
ii) Determinare il fattore U mediante eliminazione di Gauss e mostrare che il costo computazionale associato è di ordine inferiore a $\mathcal{O}(n^3)$;
iii) Si implementi tale algoritmo mediante una funzione che prende in input i vettori $b = [b_1, \ldots, b_n]$ e $f = [f_1, \ldots, f_n]$ e fornisce in output la soluzione x.

3. (8 punti) È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

i) Determinare il numero di condizionamento di $\lambda = 1$;
ii) Determinare la perturbazione al primo ordine, indotta nell'autovalore $\lambda = 1$, quando la matrice A viene perturbata in $A + E$, con

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

Commentare sul ruolo della grandezza di α nell'analisi di perturbazione.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

x e y possono essere inseriti esattamente, mentre in generale $fl(\sin(x))$ e $fl(\sin(y))$ sono approssimati, e quindi la loro sottrazione è affetta da possibili cancellazioni.....[aggiungere considerazioni sulla teoria]

Una possibile soluzione è data dal calcolo di $\sin(x) - \sin(y)$ come

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$

dove, se x e y sono noti esattamente, $x - y$ è calcolata in modo più accurato di $\sin(x) - \sin(y)$.

ESERCIZIO 2.

i) Basta verificare che tutti i minori principali di ordine fino a $n-1$ sono non zero. Siccome le sottomatrici principali sono tutte triangolari superiori con diagonale unitaria, queste matrici sono invertibili, e quindi la condizione è immediatamente verificata senza condizioni sui dati. Per l'invertibilità di A, facendo il determinante usando l'ultima colonna, si nota che

$$\det(A) = b_n + \det(A^{(n-1)})$$

dove $A^{(n-1)}$ ha la stessa forma di A ma con ultima riga $b_1, \ldots, b_{n-1}$. Quindi la formula vale di nuovo per $\det(A^{(n-1)})$, e si ottiene

$$\det(A^{(k)}) = b_k + \det(A^{(k-1)}), k = n-1, \ldots, 2$$

da cui si ottiene che $\det(\mathrm{A}) = b_1 + \ldots + b_n$. Quindi, A è invertibile se e solo se $\sum_i b_i \neq 0$.

[Il resto dell'esercizio si svolge come da lezione]

ESERCIZIO 3.

Si calcolano gli autovettori destro e sinistro di $\lambda = 1$, risp. x e y, ed il suo numero di condizionamento è dato da $1/(y^* x)$.

[Il resto dell'esercizio si svolge usando la teoria sulla perturbazione di autovalori semplici]

Prototipo di prova scritta completa (n.1)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (XX punti) Si consideri la seguente formula di quadratura:

$$\int_0^b \sqrt{x} f(x) dx \approx w \cdot f(x_1).$$

Trovare w e x_1 in modo da ottenere la massima precisione.

2. (XX punti) È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha > 0$$

   (a) Analizzare la convergenza del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel per il sistema $Ax = b$, $0 \neq b \in \mathbb{R}^3$, al variare di α;
   (b) Per i valori di α per cui entrambi i metodi convergono, si dica quale dei due, asintoticamente, converge più velocemente;
   (c) Proporre una implementazione mediante una funzione Matlab, del metodo di Gauss-Seidel e discuterne il costo computazionale in funzione di n, la dimensione del problema.

3. (XX punti) È data la funzione $f(x) = e^{-x}$ nell'intervallo $[0, 5]$.
i) Descrivere la forma generale del polinomio di interpolazione composita di grado 2, $P_h^{(2)}$.
ii) Determinare il numero di nodi in cui suddividere l'intervallo, affinchè l'errore di interpolazione, $\max_{x \in [0,5]} |f(x) - P_h^{(2)}(x)|$ sia inferiore a 10^{-2}.

4. (XX punti) Determinare se il problema del calcolo delle radici reali dell'equazione

$$x^2 - 2x + c = 0$$

risulta mal condizionato al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

Si impone che la soluzione sia esatta per funzioni integrande costanti, cioè prendendo $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Si ottiene

$$\int_0^b \sqrt{x} f(x) dx = \ldots = b, \qquad \text{quindi} \qquad b = w \frac{1}{\sqrt{x_1}}$$

da cui si ottiene $w = b\sqrt{x_1}$.

Si impone quindi l'esattezza per funzioni integrande che siano polinomi di grado 1, ottenute prendendo $f(x) = \sqrt{x}$. Si ottiene

$$\int_0^b \sqrt{x} f(x) dx = \ldots = \frac{b^2}{2}, \qquad \text{quindi} \qquad \frac{b^2}{2} = w\sqrt{x_1}$$

da cui, usando w sopra, si ha $x_1 = \frac{b}{2}$ e quindi $w = \sqrt{\frac{b^3}{2}}$. Quindi la formula trovata ha grado di esattezza uguale a 1.

Verifichiamo che con polinomi di grado 2, ottenuti prendendo $f(x) = x\sqrt{x}$, la formula non è esatta: $\int_0^b \sqrt{x} f(x) dx = \frac{b^3}{3}$ mentre $w f(x_1) = \sqrt{\frac{b^3}{2}} x_1 \sqrt{x_1} = \frac{b^3}{4}$.

ESERCIZIO 2.

Nei due casi, la matrice di iterazione B è data da:

$$B_J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ -1 & 0 & -1 \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha - 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Per la matrice B_J, il polinomio caratteristico è $-\lambda^3 + (-\alpha^2 + 2\alpha)\lambda$, per cui $\rho(B_J) = |\sqrt{2\alpha - \alpha^2}|$. Quindi il metodo di Jacobi è convergente per $|2\alpha - \alpha^2| < 1$, cioè per $0 < \alpha < 1 + \sqrt{2}, \alpha \neq 1$.

Per B_{GS} si ottiene subito $\rho(B_{GS}) = \alpha$, e quindi è sufficiente che $\alpha < 1$.

Poichè per $0 < \alpha < 1$ si ha $\sqrt{|\alpha^2 - 2\alpha|} > \alpha$, il metodo di Gauss-Seidel ha velocità asintotica di convergenza maggiore.

[Per l'implementazione, si veda l'esercitazione del 3/12/2013]

ESERCIZIO 3.

[Descrivere come costruire il polinomio di Lagrange composito]

L'errore uniforme su ogni intervallo I_k di lunghezza h è maggiorato come $\max_{x \in I_k} |f(x) - P_h^{(2)}(x)| \leq \frac{1}{6} \|f^{(3)}\|_\infty \|w\|_\infty$ dove $\|f^{(3)}\|_\infty \leq 1$ e $w(x)$ soddisfa $\|w(x)\| \leq h^3$ [determinare eventualmente una stima più accurata]. Ponendo $\frac{1}{6} h^3 \leq 10^{-2}$ si ottiene $h < (6 \cdot 10^{-2})^{1/3}$.

Il numero m di nodi soddisfa $h = (5 - 0)/m$, per cui $m = 5/h > 5/(6 \cdot 10^{-2})^{1/3}$.

ESERCIZIO 4. Per la radice $x_1(c) = 1 - \sqrt{1 - c}$, il numero di condizionamento relativo è dato da

$$\frac{c x_1(c)'}{x_1(c)} = \ldots = \frac{1 + \sqrt{1 - c}}{2\sqrt{1 - c}},$$

che risulta illimitata per $c \to 1^-$, per cui il problema è mal condizionato per c che tende ad 1 da sinistra. Analogamente si conclude per $x_2(c)$.

Prototipo di prova scritta completa (n.2)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (XX punti) Descrivere la formula di Simpson ed il relativo errore. Proporre l'implementazione mediante funzione della formula di Simpson composita, ed uno *script* che definisca l'input e la chiamata della funzione.

2. (XX punti) Dati i punti $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$, e la funzione $f(x) = e^x$, i) Determinare il polinomio, nella forma di Lagrange, che interpola la funzione data nei punti assegnati;
   iii) Dare una maggiorazione dell'errore di approssimazione sull'intero intervallo [0, 1].

3. (XX punti) è Dato il sistema lineare $Ax = b$, con $A = G - 2Gvv^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|v\| = 1$ e G triangolare inferiore.
   i) Verificare che $Q = I - 2vv^T$ è una matrice ortogonale.
   ii) Sfruttare la proprietà del punto (i) per proporre un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare con un costo computazionale $\mathcal{O}(n^2)$.

4. (XX punti) Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 17 & 2 & 2 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
   i) stabilire se ammette autovalori complessi;
   ii) localizzarne il raggio spettrale.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

[Vedi codice allegato alla esercitazione dell' 8/5/2014]

ESERCIZIO 2. Il polinomio è dato da $p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)L_i(x)$. Si ottiene $L_0(x) = 2(x - 1/2)(x-1)$, $L_1(x) = -4x(x-1)$ e $L_2(x) = 2x(x-1/2)$.

Per l'errore si ottiene

$$\max_{x\in[0,1]} |e^x - p_2(x)| = \frac{1}{6} \max_{\xi\in[0,1]} e^{\xi} \|w(x)\|_\infty.$$

Il polinomio di terzo grado $w(x) = x(x - \frac{1}{2})(x-1)$ ha estremi in $x_{1,2} = (3 \pm \sqrt{3})/6 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$, nei quali si ha

$$w(x_{1,2}) = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}(\pm\frac{\sqrt{3}}{6})(\mp\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2})$$

Quindi $|w(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{18}$, da cui $\max_{x\in[0,1]} |e^x - p_2(x)| \le e\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}}{36}$.

ESERCIZIO 3.

La matrice Q è una matrice elementare di Householder. Si verifica facilmente che $QQ^T = I$ [da mostrare].

La matrice A del sistema può essere scritta come $A = G(I - 2vv^T)$, per cui il sistema può essere risolto in due stadi, sfruttando il fatto che $Ax = b$ corrisponde a $G(Qx) = b$:

1) Risoluzione del sistema lineare $Gu = b$, con G matrice triangolare inferiore [costo computazionale da discutere];

2) Calcolo di $x = Q^{-1}u = Q^Tu = Qu$ [costo computazionale da discutere]; Si noti esplicitamente che l'operazione Qu non richiede di calcolare Q, che è in generale piena, e fornire le operazioni corrette.

ESERCIZIO 4.

i) Il polinomio caratteristico della matrice è un polinomio di terzo grado a coefficienti reali; quindi la matrice ha almeno un autovalore reale e gli altri due autovalori, in caso siano complessi, devono essere complessi coniugati. I cerchi di Gershgorin per colonne sono disgiunti ed hanno centro sull'asse reale. Ne segue che, dal secondo teorema di Gerschgorin, in ogni cerchio si trova esattamente un autovalore. La matrice non può quindi avere autovalori complessi perchè due autovalori complessi coniugati, avendo la stessa parte reale, dovrebbero appartenere ad uno stesso cerchio.

ii) Dati i cerchi di Gershgorin per colonne, risulta che la matrice ha un solo autovalore di modulo massimo e che questo si trova nel cerchio di centro 17 e raggio 2. Quindi per il raggio spettrale della matrice valgono le seguenti limitazioni $15 \le \rho(A) \le 19$.

Prototipo di prova scritta completa (n.3)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (XX punti) Sia $f(x) = x^2 \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
   i) Proporre una implementazione mediante una funzione Matlab del metodo di Newton per l'approssimazione dello zero di f in un intorno di $x_0 = \frac{3}{4}\pi$. Scrivere inoltre uno script contenente la definizione degli input della funzione stessa, e la chiamata alla funzione;
   ii) Come cambia la velocità di convergenza del metodo se viene approssimato uno zero di f intorno a $x_0 = \frac{1}{4}\pi$?

2. (XX punti) Applicare la formula di quadratura di Simpson composita con 4 sottointervalli per approssimare l'integrale $\int_0^{2\pi} x \sin^2(x)\mathrm{dx}$.

3. (XX punti) È dato il sistema lineare $Ax = b$, con $A = T + uu^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertibile, dove $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$ e T è tridiagonale e simmetrica. Descrivere un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare che abbia un costo computazionale $\mathcal{O}(n)$. Discutere inoltre qual'è l'occupazione di memoria dell'intera procedura.

4. (XX punti) È dato il problema ai minimi quadrati

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|b - Ax\|, \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & \alpha \\ -3 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   i) Descrivere il metodo dell'equazione normale e risolvere il problema al variare di α.
   ii) Valutare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ questo metodo non è numericamente affidabile.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

[Vedi esercitazione del 16/04/2014]

Per il punto (ii), il metodo tenderà ad approssimare lo zero $x_* = 0$, che ha molteplicità $m = 3$. Quindi la convergenza passerà da quadratica a lineare con coefficiente $1-1/m = 1-1/3$.

ESERCIZIO 2.

Si ha $H = (b-a)/m = 2\pi/4$ e nodi (pari) $x_0 = 0, x_2 = \pi/2, x_4 = \pi, x_6 = 3/2\pi, x_8 = 2\pi$. Si ha

$$\mathcal{I}_{2,m} = \frac{H}{6}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8\right)$$

dove $f_i = f(x_i)$. Sostituendo i valori di f si ottiene $\mathcal{I}_{2,m} = \pi^2$.

ESERCIZIO 3. [Vedi esercitazione del 14/11/2013]

La formula di Sherman-Morrison permette di ottenere la soluzione come $x = T^{-1}b - T^{-1}u(1 + u^T T^{-1}u)^{-1}u^T T^{-1}b$. La procedura richiede dunque la risoluzione di due sistemi lineari con con una matrice tridiagonale e simmetrica. L'algorithmo di Thomas puo' essere utilizzato a tal fine [Descrivere l'algoritmo di Thomas e la procedura con cui si ottiene x dalla formula di Sherman-Morrison].

L'occupazione di memoria è data dai coefficienti α_i, $i = 1, \ldots, n$ e β_i, $i = 2, \ldots, n$ della fattorizzazione di Thomas, e da un vettore w di n componenti, contenente $w = T^{-1}u$. E' possibile usare x anche come vettore di lavoro: per esempio calcolando $x = T^{-1}b$, si scrive

$$x \leftarrow x - w(1 + u^T w)^{-1}u^T x,$$

quindi la risoluzione di $Tx = b$ non richiede la creazione di un vettore aggiuntivo.

Si noti che nell'algoritmo di Thomas, una implementazione oculata della sostituzione all'indietro non necessita di ulteriori allocazioni di memoria.

ESERCIZIO 4. Il metodo dell'equazione normale risolve $A^T Ax = A^T b$ [Descrivere come si arriva a questa equazione], con $A^T A = [34, 34; 34, 34+\alpha^2]$. La soluzione è $x = [5/34-1/\alpha; 1/\alpha]$.

La matrice è numericamente singolare per $\alpha^2 < \texttt{eps}$, dove $\texttt{eps}$ è la precisione macchina; nel caso di Matlab, $\texttt{eps} = 2 \cdot 10^{-16}$. Più precisamente,

$$\lambda_{1,2}(A^T A) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 68 \pm \sqrt{\alpha^4 + 68^2}) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 68 \pm (68 + \mathcal{O}(\alpha^4))), \quad \alpha \to 0.$$

Quindi per $\alpha < \sqrt{\texttt{eps}}$ uno degli autovalori è dell'ordine della precisione macchina, per cui la matrice è numericamente singolare.

Prototipo di prova scritta completa (n.4)
Calcolo Numerico
Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2013-2014

1. (XX punti) Costruire una formula di quadratura di tipo Trapezi,

$$\int_0^h f(x)\mathrm{dx} \approx af(0) + bf(h), \qquad 0 < h < \pi,$$

   che sia esatta per $f \in \{\sin(x), \cos(x)\}$.
   Proporre una implementazione della formula nel caso *composito*, mediante una funzione Matlab.

2. Si supponga che la funzione $f(x) = \ln(x)$ sia data solo mediante i suoi valori tabulati in $x_{0,1,2} = 10, 11, 12$. Determinare un'approssimazione di $\ln(11.1)$ mediante interpolazione quadratica nei nodi $\{x_i\}$ e stimarne l'errore.

3. (XX punti) Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n pari, una matrice i cui elementi $a_{i,j}$ sono non nulli se e solo se $|i - j| = 1$.
   Descrivere un algoritmo per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con $0 \neq b \in \mathbb{R}^n$, con il minimo costo computazionale. Descriverne il costo computazionale.

4. (XX punti) È dato il polinomio $\phi_4(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$, avente tutte radici reali. Determinare un dato iniziale x_0 che assicuri la convergenza monotona decrescente del metodo di Newton per determinare una radice di ϕ_4.

Traccia della risoluzione.

ESERCIZIO 1.

Imponendo l'esattezza per $f(x) = \sin(x)$ e per $f(x) = \cos(x)$ si ottiene $a = \frac{1}{\sin(h)} - \frac{\cos(h)}{\sin(x)}$ e $b = \frac{1-\cos(h)}{\sin(h)}$. Si noti che $a = a(h), b = b(h)$.

L'implementazione procede in modo analogo a quella dei trapezi compositi [vedi esercitazione del 08/05/2014]. L'unico cambiamento è che anche i coefficienti dipendono dall'estremo.

ESERCIZIO 2.

Mediante il polinomio di interpolazione di Lagrange, otteniamo $p_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$ con

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(x-11)(x-12),\ L_1(x) = -(x-10)(x-12),\ L_2(x) = \frac{1}{2}(x-10)(x-11),$$

da cui $p_2(11.1) = f(x_0)\frac{1}{2}(0.1)(-0.9) + (-f(x_1)(1.1)(-0.9)) + f(x_2)\frac{1}{2}(1.1)(0.1)$. Per $x_* = 11.1$, l'errore è dato da $p_2(x_*) - f(x_*) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{6}\omega(x_*)$, dove $\omega(x) = (x-10)(x-11)(x-12)$. Quindi $|p_2(x_*) - f(x_*)| \leq \frac{2\cdot 10^{-3}}{6}|(1.1)(0.1)(0.9)|$.

ESERCIZIO 3.

La matrice A è tridiagonale, con diagonale zero. In modo iterativo, dalla prima riga si ottiene x_2, e poi dalle successive righe dispari si ottengono le altre componenti x_k con k pari. Procedendo in modo analogo partendo dall'ultima riga, si ottengono tutte le componenti dispari di x. Per le righe dispari, la procedura è come segue:

$x_2 = b_1/a_{1,2}, \qquad x_{j+1} = \frac{1}{a_{j,j+1}}(b_j - a_{j,j-1}x_{j-1}),\ j = 3, 5, \ldots, n-1$

Analogamente per le righe dispari [da includere, dando maggiori dettagli]. Il costo computazione per i comandi sopra è dunque di $3(n/2-1)$ operazioni in aritmetica floating point.

ESERCIZIO 4.

La matrice Companion del polinomio dato è

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dai cerchi di Gerschgorin otteniamo che gli autovalori soddisfano $|\lambda_i(C)| \leq \max\{0, 3, 2, 3\}$ e $|\lambda_i(C)| \leq \max\{1, 2+1+2\}$. Quindi è sufficiente prendere un qualsiasi $x_0 > 3$ per ottenere una sequenza di valori monotoni decrescenti per il metodo di Newton.