Marco Manetti

TOPOLOGIA

UNITEXT

Springer

Topologia

Marco Manetti

Topologia

Springer

Marco Manetti
Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"
Università "La Sapienza", Roma

In copertina: "Colori nello spazio" di Filippo Maconi (2006). Acrilico su tela. Per gentile concessione dell'autore.

ISBN 978-88-470-0756-7

Springer Milan Berlin Heidelberg New York

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media
springer.com

Impianti forniti dall'autore secondo le macro Springer

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Impianti: PTP-Berlin Protago TEX Production GmbH, www.ptp-berlin.eu
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano
Stampa: Signum, Bollate (Mi)
Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia srl – Via Decembrio 28 – 20137 Milano

Prefazione

Per lo studente

Questo libro contiene un insegnamento base di topologia generale ed una introduzione alla topologia algebrica. È rivolto a studenti dotati delle conoscenze matematiche che solitamente si insegnano al primo anno dei corsi di laurea in Matematica e Fisica.

La topologia generale è il linguaggio con il quale è scritta una parte consistente della Matematica. Non a caso il nome originario “topologia analitica” è stato rimpiazzato da “topologia generale”, anche a significare che si tratta della topologia che è usata dalla grande maggioranza dei matematici e che è necessaria a molti settori della matematica. Il suo continuo uso ha agito come una ripetuta limatura e lucidatura dei suoi teoremi e delle sue definizioni, facendone una materia di studio molto elegante. È inoltre innegabile che la topologia generale ha un notevole valore formativo, in quanto costringe ed abitua la mente a lavorare con oggetti estremamente astratti, definiti esclusivamente per conto di assiomi. Vi renderete conto voi stessi, studiando questo libro, che la topologia generale somiglia più ad un linguaggio che ad una teoria. Ci sono molti nomi nuovi da imparare, molte definizioni e molti teoremi la cui dimostrazione è spesso molto semplice e quasi mai supera le venti righe di lunghezza. Naturalmente ci sono anche risultati profondi e non banali, come ad esempio i teoremi di Baire, Alexander e Tyconoff.

La parte di topologia algebrica, sulla quale daremo maggiori dettagli e le necessarie motivazioni nel Capitolo 9, è dedicata allo studio dell’omotopia, del gruppo fondamentale e dei rivestimenti.

Ho inserito nel volume circa 400 esercizi: affrontarli con passione è il modo migliore per impadronirsi della materia, per adattarla al proprio modo di pensare e per imparare a sviluppare idee originali. Alcuni esercizi sono, completamente o quasi, svolti nel testo, e vengono chiamati *Esempi*. La loro importanza non deve essere assolutamente sottovalutata: studiarli è il modo migliore per rendere concreti i concetti astratti. Di altri esercizi, segnalati dal simbolo ♡, le soluzioni sono differite al Capitolo 16.

È un dato di fatto che il modo migliore di studiare è quello di frequentare le lezioni, o in alternativa studiare i libri, cercando di capire bene le definizioni, i teoremi ed i collegamenti esistenti tra loro, e contemporaneamente svolgere gli esercizi, senza paura di sbagliare, confrontando successivamente le proprie soluzioni con quelle proposte dal libro, dal docente, dai compagni di corso, dai siti internet eccetera. Alla pagina web indicata al termine della prefazione troverete una sezione con ulteriori soluzioni degli esercizi proposti.

Questo libro contiene anche alcuni esercizi, indicati dal simbolo $*$, da me ritenuti più difficili di quanto è ragionevole assegnare alle prove d'esame. Tali esercizi devono pertanto essere interpretati come stimoli creativi e sfide all'intelligenza, dove non bisogna seguire pazientemente un sentiero fatto di idee e suggestioni abituali ma abbandonarsi a nuove combinazioni di elementi, guidate da analogie più sottili.

Per il docente

Negli anni accademici 2004-05 e 2005-06 ho insegnato il corso denominato "Topologia" agli studenti della laurea triennale in Matematica della Sapienza Università di Roma con l'obiettivo di adattare alle esigenze dei nuovi ordinamenti didattici parte della matematica tradizionalmente insegnata nel corso di Geometria 2 della laurea quadriennale. La scelta degli argomenti è stata fatta tenendo conto degli aspetti formativi e culturali dei singoli temi e della loro utilità ai fini dell'attività di studio e ricerca in matematica. Alcune scelte di programma sono di indubbia rottura con il tradizionale insegnamento della topologia nelle Università Italiane e mi sono state probabilmente suggerite dalla mia attività di ricerca nei settori dell'algebra e della geometria algebrica. Ho preferito andare subito al sodo, enunciando prima possibile i teoremi e le definizioni più importanti e cercando di limitare gli aspetti teratopologici.

Nel passaggio dal progetto iniziale alla stesura finale delle note, ho lavorato sull'esposizione in modo da presentare le difficoltà concettuali in maniera graduale e di rendere teoria ed esempi il più possibile interessanti e dilettevoli agli occhi dello studente. In che misura tali obiettivi siano stati raggiunti saranno i lettori a giudicarlo.

Ho assunto come prerequisiti le conoscenze matematiche tipicamente insegnate al primo anno dei corsi di laurea in Matematica e Fisica. Si richiede quindi la conoscenza del linguaggio degli insiemi, dell'algebra lineare, delle nozioni base di teoria dei gruppi, delle proprietà delle funzioni, delle serie e delle successioni di numeri reali insegnate nei corsi di Calcolo e Analisi 1. All'aritmetica cardinale ed al lemma di Zorn, due importanti prerequisiti non sempre trattati nei corsi del primo anno, è dedicato il secondo capitolo: sarà compito del docente decidere, dopo aver valutato le competenze dei propri studenti, se trattare o meno tali argomenti a lezione.

Il materiale presente in questo volume è più che sufficiente per 90 ore di lezioni ed esercitazioni, anche se la tendenza attuale nei corsi laurea di Matematica è quella di dedicare alla topologia un tempo inferiore. Per facilitare il docente nella scelta dei contenuti eventualmente da omettere, ho introdotto il simbolo $\curvearrowright$ per segnalare gli argomenti di natura complementare che possono essere omessi del tutto od in parte ad una prima lettura. Bisogna comunque tenere presente che i capitoli 3,4,5 e 6, con l'eccezione delle sezioni segnalate da $\curvearrowright$, formano il nocciolo duro della topologia e non possono essere tralasciati.

La bibliografia è necessariamente incompleta e contiene i testi che mi sono stati più utili assieme ad una selezione di libri e articoli dove lo studente interessato può approfondire alcuni argomenti trattati, o solamente accennati, in questo volume.

Ringraziamenti. Voglio qui ringraziare Ciro Ciliberto e Domenico Fiorenza per la lettura delle versioni preliminari e per i suggerimenti che ho ricevuto da loro, la dottoressa Francesca Bonadei della Springer-Verlag Italia per la collaborazione nella stesura finale del manoscritto e gli studenti che hanno "subìto" i miei corsi di topologia per tutte le osservazioni, quasi sempre utili e pertinenti, che mi hanno permesso di correggere e migliorare il presente volume.

Aggiornamenti. Ulteriori soluzioni degli esercizi proposti ed aggiornamenti futuri saranno consultabili alla pagina
`http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/librotopologia.html`

Roma, ottobre 2007 *Marco Manetti*

Indice

1

Introduzione geometrica alla topologia

Una gita in bicicletta per le strade di Roma – Sartoria topologica – La nozione di continuità – Omeomorfismi – Informazioni senza dimostrazioni

Iniziamo con un estratto dall'introduzione al Capitolo V del libro *Che cos'è la matematica* di R. Courant e H. Robbins.

> "Verso la metà del XIX secolo la geometria prese uno sviluppo completamente nuovo e destinato a divenire presto una delle grandi forze della matematica moderna. Il nuovo argomento detto *analysis situs* o **topologia**, ha come oggetto lo studio delle proprietà delle figure geometriche che persistono anche quando le figure sono sottoposte a deformazioni così profonde da perdere tutte le loro proprietà metriche e proiettive." (...) "Quando Bernhard Riemann andò a Gottinga come studente, trovò l'ambiente matematico di quell'università tutto pervaso da un vivo interesse per queste nuove e strane idee geometriche. Presto si accorse che esse rappresentavano la chiave per la comprensione delle più profonde proprietà delle funzioni analitiche di variabile complessa."

Il termine "deformazioni così profonde" è alquanto vago e la moderna topologia studia varie classi di trasformazioni di figure geometriche, le più importanti delle quali sono gli **omeomorfismi** e le **equivalenze omotopiche**: le definizioni precise, complete e rigorose saranno date più avanti.

In questo capitolo daremo una definizione parziale e provvisoria di omeomorfismo e ne illustreremo alcuni esempi. Non esiteremo ad evitare un eccessivo rigore nelle definizioni e nelle dimostrazioni e ad affidarci all'intuizione geometrica del lettore, con la ragionevole certezza di facilitare in tal modo l'apprendimento delle idee fondamentali da parte di chi muove i primi passi in questo campo.

1.1 Una gita in bicicletta per le strade di Roma

1.1. *Problema.* È domenica mattina, il signor B. esce dalla sua residenza romana in bicicletta con l'intenzione di *fare un percorso che attraversi tutti i*

Manetti M, Topologia. © Springer-Verlag Italia, Milano, 2008

ponti di Roma una ed una sola volta ciascuno. Sapendo che il signor B. può scegliere sia il punto iniziale che quello finale del percorso, sarà egli in grado di mantenere il suo proposito?

Tanto per capirci, per Roma intendiamo la zona interna al grande raccordo anulare e consideriamo solamente i ponti sul Tevere e sull'Aniene. Ricordiamo, per chi non è pratico, che Roma è divisa in tre zone "continentali" dal fiume Tevere e dal suo affluente Aniene e che l'isola Tiberina è situata in mezzo al Tevere ed è collegata con un ponte ad entrambe le sponde.

Per risolvere il problema non è necessario percorrere le strade di Roma sulle due ruote e nemmeno di sporcare con il pennarello la mappa stradale della città.

Per visualizzare il problema disegniamo su di un semplice foglio di carta 4 cerchi corrispondenti alle 4 zone di Roma e congiungiamo due cerchi con tanti segmenti quanti sono i ponti che uniscono le zone corrispondenti (Figura 1.1).

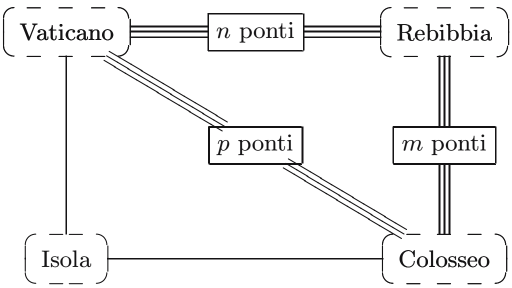


Figura 1.1. La topologia dei ponti di Roma.

Un tale disegno contiene dentro di sé tutte le informazioni necessarie a risolvere il problema e, se siete d'accordo con questa affermazione, significa che avete fatto un **ragionamento topologico**. Avete infatti capito che la possibilità o meno di effettuare un percorso simile non dipende da alcune proprietà metriche e proiettive quali ad esempio la lunghezza dei ponti, l'area delle zone di terraferma, la struttura architettonica ponti ecc. Se invece insistete a voler risolvere il problema con la mappa stradale di Roma tra le mani, supponete che essa sia disegnata su di un sottile foglio di gomma e che poi si contorca il foglio in tutti i modi possibili, senza lacerarlo e senza far venire a contatto punti distinti: converrete che la risposta al problema rimane inalterata.

1.2. *Problema.* Nell'antica città di Königsberg, sul fiume Pregel, c'erano due isolette e sette ponti come in Figura 1.2. Si racconta che il signor C. volle *fare un percorso che attraversasse tutti i ponti di Königsberg una ed una sola volta ciascuno*. Sapendo che il signor C. aveva la possibilità di scegliere sia il punto iniziale che quello finale del percorso, sarà mai stato in grado di portare a termine il suo progetto?

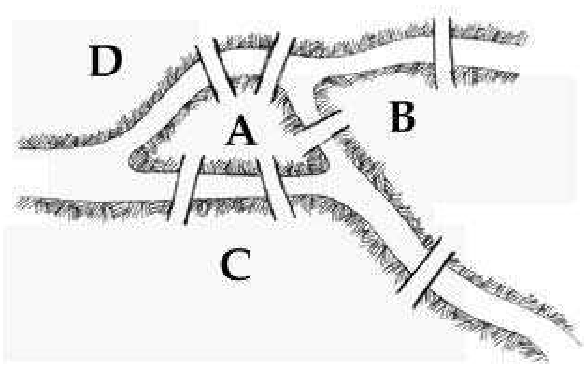


Figura 1.2. I ponti dell'antica città di Königsberg.

Un altro esempio di problema topologico è il seguente:

1.3. È possibile fare il percorso Roma-Ancona completamente in autostrada?

Dato che l'autostrada passa sia per Roma che per Ancona, il problema è sostanzialmente un problema di **connessione** della rete autostradale italiana: una rete stradale si intende connessa se è possibile spostarsi in automobile da un punto ad un altro, con i due punti comunque scelti. È anche qui chiaro che la risposta al problema non dipende da quanto sono lunghi i singoli tratti autostradali, da quante curve ci sono, da quante salite eccetera.

Un concetto matematico utile per risolvere i problemi precedenti è quello di **grafo**. Nello spazio euclideo si dice grafo un insieme non vuoto di V punti, detti **nodi** o **vertici**, alcuni dei quali sono uniti, a coppie da S segmenti detti **lati** o **spigoli**. I lati non sono necessariamente segmenti di retta, ma possono essere di cerchio, di parabola, di ellisse o più in generale di curva "regolare" che non passano più di una volta da uno stesso punto dello spazio. Si fa anche l'ipotesi che lati diversi si possono incontrare solo nei nodi del grafo. Un **cammino di lunghezza** p in un grafo è dato da una successione $v_0, v_1, \ldots, v_p$ di nodi e da una successione $l_1, l_2, \ldots, l_p$ di lati con l_i che unisce v_{i-1} e v_i per ogni i. I nodi v_0 e v_p si dicono gli estremi del cammino. Un grafo si dice **connesso** se dati comunque due suoi nodi u e w, esiste un cammino che ha u e w come estremi.

Se u è un nodo di un grafo Γ, chiameremo **grado di** u **in** Γ il numero di lati che contengono u, contando due volte i lati con entrambi gli estremi in u. È evidente che la somma dei gradi di tutti i nodi di un grafo è uguale al doppio del numero dei lati, in particolare ogni grafo possiede un numero pari di nodi di grado dispari.

Un grafo si dice **euleriano** se esiste un cammino che passa per tutti i lati una ed una sola volta: in particolare la lunghezza del cammino è uguale al numero dei lati del grafo.

Dato un problema dei ponti, Roma o Königsberg non ha importanza, costruiamo un grafo che ha come nodi le zone di terraferma e come lati i ponti. Il problema dell'attraversamento dei ponti ha risposta positiva se e solo se il grafo è euleriano.

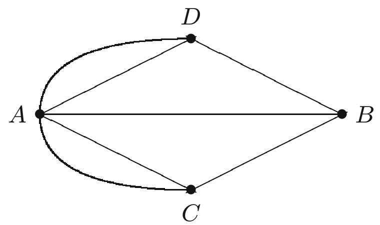


Figura 1.3. Il grafo dei ponti di Königsberg.

Teorema 1.1. *In un grafo euleriano esistono al più due nodi di grado dispari. In particolare il problema dei ponti di Königsberg ha risposta negativa.*

Dimostrazione. Scegliamo una successione di nodi $v_0, \ldots, v_S$ ed una di lati $l_1, \ldots, l_S$ che formino assieme un cammino passante per tutti i lati una ed una sola volta. Ogni nodo u diverso da v_0 e v_S ha grado uguale al doppio del numero di indici i tali che $u = v_i$. □

Esercizi

1.4. Sia Γ un grafo connesso in cui ogni vertice ha grado pari. Dimostrare che ogni grafo ottenuto da Γ togliendo un solo lato è ancora connesso.

1.5. Siano $v_1, \ldots, v_n$ i nodi di un grafo Γ e sia A la matrice di connessione del grafo, ossia la matrice quadrata di ordine n il cui coefficiente a_{ij} è uguale al numero di lati che uniscono il vertice v_i al vertice v_j. Dare una descrizione geometrica dei coefficienti delle potenze di A.

1.6 (Se voi foste il giudice). Il signor V., quando venne eletto sindaco della città di Settevasche, la cui rete stradale è formata esclusivamente da 16 vie di lunghezza 1 km e 2 vie di lunghezza 2 km come in Figura 1.4, si accorse che l'automezzo per la pulizia delle strade consumava carburante per ben 24 km. Egli accusò quindi l'autista di furto di carburante. A sua volta l'autista affermò che il carburante consumato era necessario per uscire dal deposito, pulire tutte le strade e rientrare al deposito.

Se voi foste stato il Giudice, a chi avreste dato ragione?

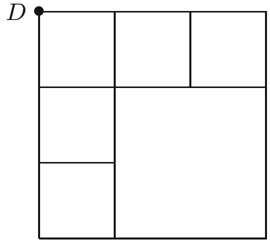


Figura 1.4. La città di Settevasche ed il deposito D.

1.2 Sartoria topologica

La sartoria topologica lavora un sottilissimo tessuto dalle incredibili proprietà elastiche che può essere piegato, modellato, allungato e deformato a piacere senza creare né strappi né lacerazioni. Le prime semplici lavorazioni consistono in:

1. Ritagliare un pezzo X di tessuto a forma di poligono convesso di $n \geq 2$ lati.
2. Scegliere k coppie di lati di X, con $2k \leq n$, e indicare con lettere distinte i lati appartenenti a coppie distinte.
3. Per ognuno dei $2k$ lati scelti al punto 2, indicare un verso di percorrenza.
4. Cucire od incollare i lati di ogni coppia in modo da far coincidere i versi di percorrenza.

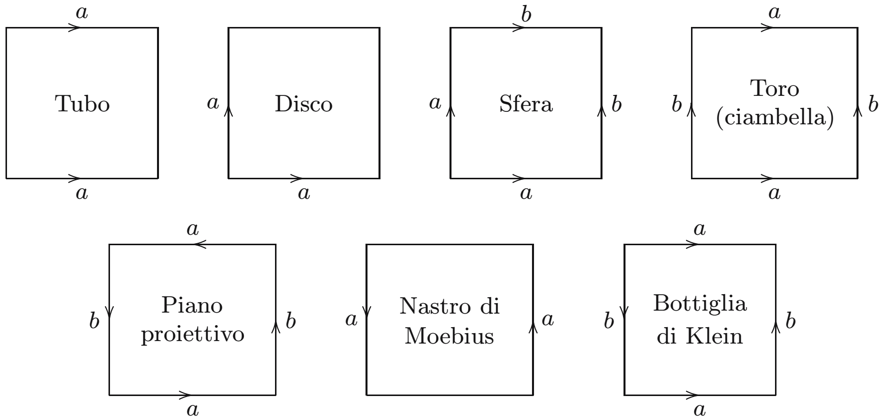


Figura 1.5. Alcune lavorazioni possibili con un quadrato di stoffa. In qualche caso le proprietà elastiche servono fino ad un certo punto e potete anche sostituire il magico tessuto con un foglio di carta.

Esercizi

1.7 (♡). Dire, motivando la risposta, se il prodotto di sartoria della Figura 1.6 è un disco, un tubo, un nastro di Moebius oppure qualcosa di totalmente diverso.

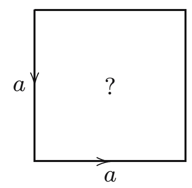


Figura 1.6. Che cos'è?

1.3 La nozione di continuità

In ambito matematico, il termine continuità deriva dal latino *continere* (tenere insieme) ed ha il significato di aderenza, attaccamento, contiguità ecc. Sebbene tali significati figurino tuttora in alcuni dizionari alle voci "continuo" e "continuità", essi sono desueti nell'italiano comune ed è facile rimanere interdetti di fronte alla domanda

Quali sono i punti della retta continui all'intervallo $]0,1[=\{0<x<1\}$*?*

La stessa domanda, tradotta in un linguaggio meno arcaico prende la forma più comprensibile di

Quali sono i punti della retta aderenti (attaccati) all'intervallo $]0,1[$*?*

Nello spazio $\mathbb{R}^n$, cioè nell'insieme delle n-uple $(x_1,\ldots,x_n)$ di numeri reali, la nozione di continuità (=aderenza) si esprime facilmente.

Definizione 1.2. *Un punto $x\in\mathbb{R}^n$ si dice* ***aderente*** *ad un sottoinsieme $A\subset\mathbb{R}^n$ se è possibile trovare punti di A arbitrariamente vicini ad x.*

Ad esempio, ogni numero reale è aderente all'insieme dei numeri razionali, mentre ogni numero reale $t\in[0,1]=\{0\le x\le 1\}$ è aderente all'intervallo $]0,1[\subset\mathbb{R}$.

La distanza tra due punti $x=(x_1,\ldots,x_n)$ e $y=(y_1,\ldots,y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ è data dalla formula Pitagorica

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Equivalentemente $d(x,y)=\|x-y\|$ dove $\|\ \|$ è la norma associata al prodotto scalare canonico, cioè $(x\cdot y)=\sum x_iy_i$ e $\|x\|=\sqrt{(x\cdot x)}$.

Lemma 1.3. *La distanza soddisfa la disuguaglianza triangolare, cioè*

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

per ogni terna di punti $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Ponendo $x - z = u$ e $z - y = v$, la disuguaglianza triangolare equivale a $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Poiché entrambi i membri sono positivi, tale maggiorazione è equivalente a

$$(\|u\| + \|v\|)^2 - \|u+v\|^2 = 2(\|u\|\|v\| - (u \cdot v)) \geq 0$$

e quindi basta dimostrare la cosiddetta **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**:

$$\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 \geq 0.$$

Se $v = 0$ la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è vera. Possiamo quindi supporre $v \neq 0$ e considerare il vettore

$$w = u\|v\| - (u \cdot v)\frac{v}{\|v\|}.$$

Un semplice conto mostra che

$$0 \leq \|w\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

□

La distanza permette di spiegare meglio il concetto di insieme di punti arbitrariamente vicini ad un dato punto e quindi la nozione di aderenza. Più precisamente: *un punto p è aderente ad un insieme A se e solo se per ogni numero reale $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che $d(p,x) < \delta$.*

I concetti intuitivi di strappo e lacerazione vengono intesi come la rottura di una relazione di attaccamento, cioè, se $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto aderente ad un sottoinsieme A, allora diremo che un'applicazione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ strappa x da A se il punto $f(x)$ non è aderente ad $f(A)$.

Le applicazioni continue sono quelle che non producono strappi, ossia quelle che conservano la relazione di continuità (=aderenza) tra punti e sottoinsiemi.

Definizione 1.4. *Siano $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ sottoinsiemi: un'applicazione $f\colon X \to Y$ si dice **continua** se, per ogni sottoinsieme $A \subset X$ e per ogni punto $x \in X$ aderente ad A, il punto $f(x)$ è ancora aderente a $f(A)$.*

Se questa definizione di applicazione continua non coincide a prima vista con quella che avete visto alla Scuola Superiore od ai corsi di Analisi non preoccupatevi. Vedremo in seguito l'equivalenza di questa definizione con quelle a cui siete abituati.

Segue immediatamente dalla definizione che le applicazioni costanti, le traslazioni in $\mathbb{R}^n$ e più in generale tutte le isometrie (applicazioni che preservano le distanze) sono continue.

In molti casi non si utilizza la Definizione 1.4 per verificare che un'applicazione è continua ma si preferisce adoperare alcune proprietà generali della continuità per ricondursi ad un elenco base di funzioni continue notevoli. Nel seguito della sezione indicheremo con le lettere maiuscole $X, Y, Z\dots$ sottoinsiemi di spazi euclidei.

C1 *Sia* $f\colon X \to Y$ *continua,* $W \subset X$ *e* $Z \subset Y$ *sottoinsiemi tali che* $f(W) \subset Z$. *Allora la restrizione* $f\colon W \to Z$ *è continua.*

C2 *Se* $f\colon X \to Y$ *e* $g\colon Y \to Z$ *sono continue, allora anche la composizione* $gf\colon X \to Z$ *è continua.*

C3 *Se* $X \subset Y$, *allora il morfismo di inclusione* $i\colon X \to Y$ *è continuo.*

Siano dati due insiemi $X \subset Y$ ed una applicazione $f\colon Z \to X$. L'applicazione $f\colon Z \to X$ è continua se e solo se l'applicazione $f\colon Z \to Y$ è continua. Infatti se $f\colon Z \to Y$ è continua, allora anche $f\colon Z \to X$ è continua per C1. Viceversa $f\colon Z \to Y$ è la composizione di $f\colon Z \to X$ e dell'inclusione $X \to Y$ che è continua per C3. In buona sostanza, per stabilire la continuità di una applicazione non è restrittivo considerare applicazioni $f\colon X \to \mathbb{R}^n$.

C4 *Siano* $f_i\colon X \to \mathbb{R}$, *per* $i = 1, \dots, n$, *le componenti di un'applicazione* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, *ovvero* $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ *per ogni* $x \in X$. *L'applicazione* f *è continua se e solo se le funzioni* $f_1, \dots, f_n$ *sono tutte continue.*

Prendiamo adesso in prestito dai corsi di Analisi e Calcolo un elenco di funzioni continue.

C5

1. *Ogni applicazione lineare* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è continua.*
2. *La moltiplicazione* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ *è continua.*
3. *Il reciproco* $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $x \mapsto x^{-1}$ *è continuo.*
4. *Il valore assoluto* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ *è continuo.*
5. *Le funzioni esponenziale, logaritmo, seno, coseno e tutte le funzioni trigonometriche sono continue nei loro domini di definizione.*
6. *Le funzioni* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ *e* $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ *sono continue.*

Le condizioni C1,..., C5 implicano la continuità di altre applicazioni. Ad esempio se $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ sono continue allora sono continue $f + g$, fg e, se g non si annulla in X, anche f/g.

Infatti l'applicazione $(f, g) \colon X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$, è continua e $f + g$ è la composizione di (f, g) con l'applicazione lineare $(x, y) \mapsto x + y$; fg è la composizione di (f, g) con l'applicazione prodotto $(x, y) \mapsto xy$. Ragionamento simile per f/g. Proseguendo sulla stessa linea di pensiero è facile dimostrare per induzione che ogni espressione polinomiale di funzioni continue è ancora una funzione continua. Gli esempi possibili sono praticamente infiniti e non ci dilungheremo oltre.

Strettamente legata ai concetti di aderenza e continuità è la nozione di **insieme chiuso**.

Definizione 1.5. *Siano $C \subset X$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Diremo che C è* ***chiuso*** *in X se coincide con l'insieme dei punti di X che sono aderenti a C. Equivalentemente, C è chiuso in X se per ogni $x \in X - C = \{x \in X \mid x \notin C\}$ esiste un $\delta > 0$ tale che $d(x, y) \geq \delta$ per ogni $y \in C$.*

Esempio 1.6. Per ogni $X \subset \mathbb{R}^n$, ogni $r > 0$ ed ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$, l'insieme $C = \{x' \in X \mid d(x, x') \leq r\}$ è chiuso in X. Infatti se $y \in X - C$, allora $\delta = d(x, y) - r > 0$. Per la disuguaglianza triangolare vale

$$d(y, x') \geq d(x, y) - d(x', x) \geq \delta$$

per ogni $x' \in C$ e quindi y non è aderente a C.

Esempio 1.7. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme e sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ continua. Allora l'insieme $C = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ è chiuso in X. Sia infatti $x \in X$ aderente a C, allora $f(x)$ è aderente a $\{0\}$ e quindi $f(x) = 0$, ossia $x \in C$ e C è chiuso. La stessa dimostrazione prova che per ogni sottoinsieme chiuso $Z \subset \mathbb{R}$, la sua controimmagine $\{x \in X \mid f(x) \in Z\}$ è chiusa in X.

Teorema 1.8 (taglia e cuci). *Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione e siano A, B due chiusi in X tali che $X = A \cup B$ e le due restrizioni $f \colon A \to Y$, $f \colon B \to Y$ sono entrambe continue. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $C \subset X$ un sottoinsieme e $x \in X$ un punto aderente a C. Dobbiamo dimostrare che $f(x)$ è aderente a $f(C)$. Osserviamo che x è aderente ad almeno uno degli insiemi $C \cap A$ e $C \cap B$. Infatti, se così non fosse esisterebbero due costanti positive δ_A e δ_B tali che

$$d(x, y) \geq \delta_A \quad \text{per ogni} \quad y \in C \cap A,$$

$$d(x, y) \geq \delta_B \quad \text{per ogni} \quad y \in C \cap B$$

e quindi, se δ è il minimo tra δ_A e δ_B, si avrebbe $d(x, y) \geq \delta$ per ogni $y \in C$ e quindi x non sarebbe aderente a C. Supponiamo per fissare le idee che x sia aderente a $C \cap A$; a maggior ragione x è aderente ad A e, siccome A è chiuso, vale $x \in A$. Adesso, la restrizione $f \colon A \to Y$ è continua e quindi $f(x)$ è aderente a $f(A \cap C)$. Siccome $f(A \cap C) \subset f(C)$, a maggior ragione $f(x)$ è aderente a $f(C)$. $\square$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è in bigezione naturale con il piano $\mathbb{R}^2$. La distanza tra due numeri complessi z e u coincide con il modulo della loro differenza $|z-u|$. Tale bigezione si estende ad una identificazione di $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$ e quindi tutto quanto detto finora vale anche per sottoinsiemi di $\mathbb{C}^n$ e per le applicazioni tra essi.

Esercizi

1.8. Degli otto tipi di **intervallo**:

1. $]a,b[=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$,
2. $[a,b[=\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$,
3. $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$,
4. $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$,
5. $]-\infty,a[=\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$,
6. $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$,
7. $]a,+\infty[=\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$,
8. $[a,+\infty[=\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$,

dire quali sono sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$ secondo la Definizione 1.5, dove si intende che a, b siano numeri reali con $a < b$.

1.9. Dire quali dei seguenti insiemi sono chiusi in $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,y) \mid x^2+2y^2=1\}, \qquad \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y < 1\},$$

$$\{(x,y) \mid 0 \le x,\ 0 \le y\}, \qquad \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x+y \le 1\},$$

$$\{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\}, \qquad \{(x,y) \mid 0 \le x,\ 0 \le y \le \sin(x)\}.$$

1.10. Dire quali dei seguenti insiemi sono chiusi in $\mathbb{C}$ ($i=\sqrt{-1}$):

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{R}\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - z| \le 1\},$$

$$\{2^n + i2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \{2^{-n} + i2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

1.11. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme fissato. Dimostrare che, se $A, Y \subset X$ e A è chiuso in X, allora $A \cap Y$ è chiuso in Y.

1.12. Provare che per un'applicazione $f\colon X \to Y$ le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. f è continua.
2. Per ogni chiuso C di Y l'insieme $\{x \in X \mid f(x) \in C\}$ è chiuso in X.

1.13. Dimostrare che, nello spazio $\mathbb{R}^n$:

1. L'unione di due sottoinsiemi chiusi è un chiuso.
2. Intersezione arbitraria di sottoinsiemi chiusi è un chiuso.

1.14 (L'insieme di Mandelbrot). Per ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ definiamo per ricorrenza la successione $\{p_n(z)\} \subset \mathbb{C}$ ponendo $p_0(z) = z$ e $p_{n+1}(z) = p_n(z)^2 + z$. Dimostrare:

1. Se la successione $p_n(z)$ è limitata allora $|p_n(z)| \leq 2$ per ogni $n \geq 0$. (Sugg.: se così non fosse sia n il minimo intero tale che $|p_n(z)| = 2(1 + a)$ con $a > 0$ e dimostrare che per ogni $s > 0$ vale $|p_{n+s}(z)| \geq 2(1 + a)^{s+1}$.)
2. Per ogni $n \geq 0$ la funzione $z \mapsto p_n(z)$ è continua.
3. Sia $M \subset \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi z tali che la successione $p_n(z)$ è limitata. Dimostrare che M è un chiuso.

L'insieme M (rappresentato in Figura 1.7) si chiama **insieme di Mandelbrot**.

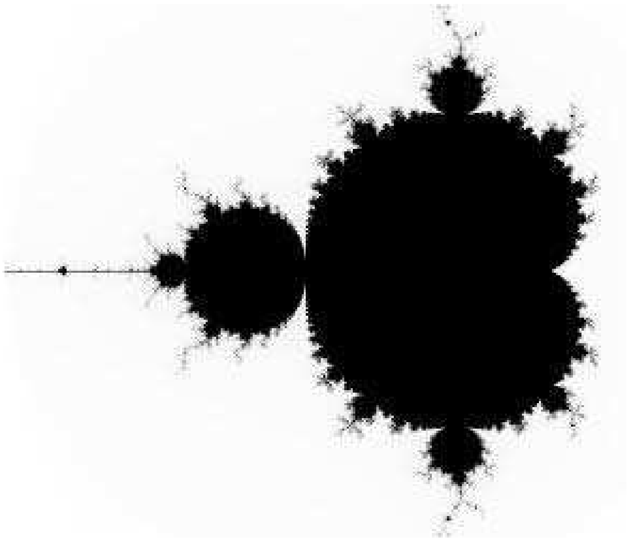


Figura 1.7. L'insieme di Mandelbrot, ben noto nell'ambiente dei cosiddetti frattali.

1.4 Omeomorfismi

Definizione 1.9. *Un* ***omeomorfismo*** *è una applicazione continua, bigettiva e con inversa continua. Due sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$ *si dicono* ***omeomorfi*** *se esiste un omeomorfismo tra essi.*

Per il topologo, spazi omeomorfi sono indistinguibili. Ad esempio, per il topologo non c'è alcuna differenza fra i quattro intervalli (per la notazione adottata vedi Esercizio 1.8)

$$]0,1[\,,\qquad]0,2[\,,\qquad]0,+\infty[\,,\qquad]-\infty,+\infty[\,.$$

Sono infatti omeomorfismi le applicazioni

$$f\colon\ ]-\infty,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\quad \text{data da}\quad f(x)=e^x,$$

$$g\colon\ ]0,+\infty[\longrightarrow]0,1[\quad \text{data da}\quad g(x)=e^{-x},$$

$$h\colon\ ]0,1[\longrightarrow]0,2[\quad \text{data da}\quad h(x)=2x.$$

Il topologo non sa distinguere il quadrato dal tondo: considerando infatti i due sottoinsiemi del piano

$$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}\quad \text{e}\quad P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|=1\},$$

possiamo facilmente verificare che le due applicazioni

$$f\colon S^1\to P,\qquad f(x,y)=\left(\frac{x}{|x|+|y|},\frac{y}{|x|+|y|}\right)$$

e

$$g\colon P\to S^1,\qquad g(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

sono continue ed inverse l'una dell'altra.

Introduciamo alcune notazioni: per ogni intero $n\geq 0$ definiamo:

$$D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}\ \text{ il \textbf{disco} unitario di dimensione } n,$$
$$S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\}\ \text{ la \textbf{sfera} unitaria di dimensione } n.$$

Infine, per ogni punto $x\in\mathbb{R}^n$ e per ogni numero reale $r>0$ si definisce

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n \mid d(x,y)<r\}\quad \text{la \textbf{palla aperta} di centro } x \text{ e raggio } r.$$

Esempio 1.10. Le affinità del piano $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfismi. In particolare tutti i triangoli sono tra loro omeomorfi e pure tutti i parallelogrammi sono tra loro omeomorfi. Consideriamo il quadrato Q ed il triangolo T definiti in coordinate da

$$Q=\{(x,y) \mid |x|+|y|\leq 1\},\qquad T=\{(x,y)\in Q \mid y\leq 0\}.$$

Allora l'applicazione

$$f\colon Q\to T,\qquad f(x,y)=\left(x,\frac{1}{2}(y+|x|-1)\right),$$

è un omeomorfismo che lascia fissi i due lati in comune ai bordi di Q e T.

Esempio 1.11. I tre spazi seguenti:

- Il piano punturato $X=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

- Il cilindro circolare $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
- L'iperboloide ad una faglia $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$.

sono tra loro omeomorfi. Per dimostrarlo possiamo considerare le applicazioni

$$f \colon Y \to X \quad \text{data da} \quad f(x, y, z) = (xe^z, ye^z) \quad \text{e}$$

$$g \colon Z \to Y \quad \text{data da} \quad g(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, z \right).$$

Lasciamo al lettore la verifica che f e g sono invertibili e con inverse continue.

Esempio 1.12. Le palle aperte in $\mathbb{R}^n$ sono tutte omeomorfe a $\mathbb{R}^n$. Infatti per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, l'applicazione $x \mapsto rx + p$ induce un omeomorfismo tra $B(0, 1)$ e $B(p, r)$, mentre

$$g \colon \mathbb{R}^n \to B(0, 1), \qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + \|x\|^2}}$$

è un omeomorfismo con inverso $g^{-1}(y) = y/\sqrt{1 - \|y\|^2}$.

*Esempio 1.13 (**La proiezione stereografica**).* Sia $N = (1, 0, \ldots, 0)$ il "polo nord" della sfera $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$. La proiezione stereografica

$$f \colon S^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$$

è definita identificando $\mathbb{R}^n$ con l'iperpiano $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di equazione $x_0 = 0$ e ponendo $f(x)$ come l'intersezione di H con la retta passante per i punti x e N. In coordinate, f e la sua inversa sono date da

$$f(x_0, \ldots, x_n) = \frac{1}{1 - x_0}(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \left(\frac{1 - \sum_i y_i^2}{1 + \sum_i y_i^2}, \frac{2y_1}{1 + \sum_i y_i^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1 + \sum_i y_i^2} \right).$$

Le funzioni f e f^{-1} sono continue e dunque la proiezione stereografica è un omeomorfismo. Un semplice esercizio sulle proporzioni mostra che se identifichiamo $\mathbb{R}^n$ con l'iperpiano $x_0 = c$, con $c \neq 1$, allora l'applicazione f deve essere moltiplicata per il fattore $1 - c$.

Esempio 1.14. Sia $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua e consideriamo gli spazi

$$X = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \leq 0\},$$
$$Y = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 \leq h(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Allora l'applicazione

$$f \colon X \to Y, \qquad f(x_0, \ldots, x_n) = (x_0 + h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n)$$

è un omeomorfismo.

Esempio 1.15. Il complementare in $\mathbb{R}^3$ di una circonferenza è omeomorfo al complementare in $\mathbb{R}^3$ di una retta ed un punto. Sia $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ la base canonica. Consideriamo la circonferenza

$$K = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x \cdot e_3) = 0,\ \|x - e_1\|^2 = 1\}$$

passante per l'origine e l'applicazione di inversione

$$r \colon \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^3 - \{0\}, \qquad r(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

Osserviamo che r è un omeomorfismo che coincide con il proprio inverso e dunque $\mathbb{R}^3 - K$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^3 - (\{0\} \cup r(K - \{0\}))$. Basta quindi dimostrare che $r(K - \{0\})$ è una retta affine non passante per l'origine. Questo può essere visto sia usando la geometria sintetica (ed i teoremi di Euclide in particolare), sia i metodi analitici. Infatti, ponendo $y = r(x)$ si ha $x = y/\|y\|^2$, il piano $(x \cdot e_3) = 0$ diventa il piano $(y \cdot e_3) = 0$ mentre la sfera $\|x - e_1\|^2 = 1$ diventa il luogo geometrico di equazione

$$0 = \|x - e_1\|^2 - 1 = \|x\|^2 - 2(x \cdot e_1) = \frac{1}{\|y\|^2} - 2\left(\frac{y}{\|y\|^2} \cdot e_1\right) = \frac{1 - 2(y \cdot e_1)}{\|y\|^2}.$$

In conclusione l'immagine $r(K - \{0\})$ è uguale all'intersezione dei due piani di equazioni $(y \cdot e_3) = 0$ e $2(y \cdot e_1) = 1$.

Esempio 1.16. Una matrice 2×2 a coefficienti complessi

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

appartiene per definizione al gruppo speciale unitario $\mathrm{SU}(2)$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} = I \quad \text{e} \quad ad - bc = 1,$$

ossia se e solo se valgono le uguaglianze

$$ad - bc = |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \qquad \overline{a}c + d\overline{b} = \overline{c}a + b\overline{d} = 0.$$

Moltiplicando per a l'uguaglianza $\overline{a}c + d\overline{b} = 0$ e sostituendo ad con $1 + bc$ si ottiene $(|a|^2 + |b|^2)c + \overline{b} = 0$ da cui $c = -\overline{b}$. In modo simile si prova che $d = \overline{a}$ e quindi le matrici speciali unitarie sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \quad \text{al variare di } (a, b) \in S^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1\}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\mathrm{SU}(2)$ è omeomorfo alla sfera S^3.

Esempio 1.17. Siano $p, q \in \mathbb{C}$ due numeri complessi aventi lo stesso modulo $|p| = |q| = r \geq 0$. Allora per ogni $\delta > 0$ esiste un omeomorfismo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(p) = q$ e $f(x) = x$ se $||x| - r| > \delta$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, denotiamo $R(\alpha, x) = (\cos\alpha + i\sin\alpha)x$. Scegliamo un angolo $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $R(\alpha, p) = q$ ed una funzione continua $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(r) = \alpha$ e $g(t) = 0$ se $t \notin [r-\delta, r+\delta]$ (ad esempio $g(t) = \alpha \max(0, 1 - |t-r|/\delta)$). L'applicazione continua

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad f(x) = R(g(|x|), x),$$

è un omeomorfismo con inverso $f^{-1}(y) = R(-g(|y|), y)$ e soddisfa le condizioni richieste.

Esempio 1.18. Siano $A, B \subset \mathbb{C}$ due sottoinsiemi finiti con lo stesso numero di punti. Allora $\mathbb{C} - A$ e $\mathbb{C} - B$ sono omeomorfi. Poiché composizione di omeomorfismi è ancora un omeomorfismo, ragionando per induzione sul numero di elementi di $A - B$, basta dimostrare la seguente asserzione.

Siano $x, y, v_1, \ldots, v_s$ punti distinti di $\mathbb{C}$. Allora esiste un omeomorfismo $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $f(x) = y$ e $f(v_i) = v_i$ per ogni i.

A meno di traslazioni possiamo supporre (esercizio) che $|x| = |y| \neq |v_i|$ per ogni i. Siano $r = |x| = |y|$ e $\delta > 0$ tale che $|v_i| \notin [r-\delta, r+\delta]$ per ogni i. Basta adesso applicare il risultato dell'Esempio 1.17.

Non tutti gli spazi sono tra loro omeomorfi, ad esempio $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $[0,1]$: un ipotetico omeomorfismo $[0,1] \to \mathbb{R}$ sarebbe in particolare surgettivo e quindi violerebbe il teorema di Weierstrass di esistenza del massimo per funzioni continue definite su intervalli chiusi e limitati.

Dire se due sottoinsiemi dello spazio euclideo sono omeomorfi o meno non è sempre facile: in certi casi il problema diventa talmente difficile che nemmeno i più brillanti matematici riescono a risolverlo. In questo corso vedremo le tecniche topologiche più elementari che ci permetteranno di trattare e risolvere il suddetto problema in alcuni casi interessanti. Mostreremo in seguito che i due spazi dell'Esempio 1.18 sono omeomorfi solo se A e B hanno la stessa cardinalità.

Esercizi

1.15. Provare che se X è omeomorfo a Y e Z è omeomorfo a W, allora $X \times Z$ è omeomorfo a $Y \times W$.

1.16. Verificare che la proiezione ortogonale induce un omeomorfismo tra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ in $\mathbb{R}^3$ ed il piano di equazione $z = 0$.

1.17. Trovare un omeomorfismo tra $S^n \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$.

1.18. Provare che l'applicazione

$$\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \to \mathrm{U}(2), \qquad (A, z) \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un omeomorfismo (ricordiamo che $\mathrm{U}(n) = \{A \in M(n,n,\mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = I\}$).

1.19. Trovare un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

1.20. Determinare un omeomorfismo tra $S^2 \times S^2$ ed un sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$. (Sugg.: identificare $S^2 \times S^2$ con un sottoinsieme di S^5.)

1.21. Dimostrare che la quadrica in $\mathbb{R}^n$ di equazione

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 1 \qquad (\text{dove } p + q \leq n)$$

è omeomorfa a $S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$.

1.22. Abbiamo visto che $]0,1[$ è omeomorfo a $\mathbb{R}$ e quindi non è omeomorfo a $[0,1]$. Si consideri l'applicazione $f\colon]0,1[\times[0,1[\to [0,1] \times [0,1[$ illustrata nella Figura 1.8 e definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y}{3}, 1 - 3x\right) & \text{se } 3x + y \leq 1, \\ \left(x + (1-2x)\dfrac{2y-1}{2y+1}, y\right) & \text{se } 1 - y \leq 3x \leq 2 + y, \\ \left(1 - \dfrac{y}{3}, 3x - 2\right) & \text{se } 3x - y \geq 2. \end{cases}$$

Verificare, anche con l'aiuto del taglia e cuci (Teorema 1.8), che f è un omeomorfismo.

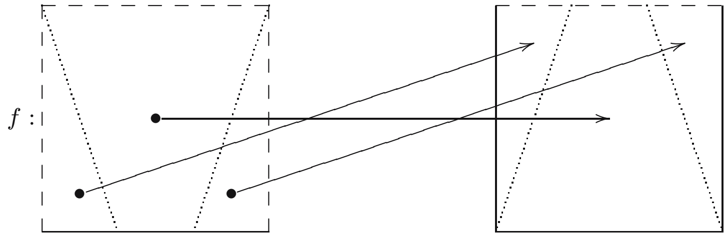


Figura 1.8. In topologia non vale la legge di cancellazione, e cioè, se $X \times Z$ è omeomorfo a $Y \times Z$, non è detto che X sia omeomorfo a Y.

1.23. Sia $h\colon \mathbb{R}^n \to]0, +\infty[$ continua e consideriamo i due spazi

$$X = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_0 \leq 1\}$$

e

$$Y = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_0 \leq h(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Mostrare che l'applicazione

$$f\colon X \to Y, \qquad f(x_0, \ldots, x_n) = (x_0 h(x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n),$$

è un omeomorfismo.

1.24. Perché i topologi, se hanno le corna, non se ne accorgono? (Nell'Esercizio 1.23 considerare una funzione "bernoccolo" $h\colon \mathbb{R}^n \to [1, +\infty[$ tale che $h(x) = 1$ se $\|x\| \geq 1$.)

1.25. Dimostrare che il semipiano $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$ è omeomorfo a $Y = X \cup ([-1, 1] \times [0, 1])$. (Sugg.: usare l'Esempio 1.10 ed il taglia e cuci per dimostrare che Y è omeomorfo a $X \cup \{(x, y) \mid y \leq 1 - |x|\}$ e poi usare l'Esercizio 1.23.)

1.26. Trovare un omeomorfismo tra l'ipercubo $I^n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ ed il disco unitario D^n (Sugg.: I^n è omeomorfo a $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \leq 1\}$.)

1.27 (♡). Verificare che l'applicazione

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib,\ b > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

è un omeomorfismo e descriverne l'inverso.

1.5 Informazioni senza dimostrazioni

Alcuni risultati interessanti e/o fondamentali di topologia, la cui dimostrazione va al di là degli obiettivi di questo libro sono:

Teorema 1.19. *La sfera S^n non è omeomorfa al disco D^m, per ogni $n, m \geq 1$.*

Teorema 1.20. *Due prodotti di sfere $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ e $S^{m_1} \times \cdots \times S^{m_h}$ sono omeomorfi solamente se $h = k$ e se, a meno di permutazioni degli indici, vale $n_i = m_i$ per ogni i.*

Teorema 1.21. *$\mathbb{R}^n$ è omeomorfo ad $\mathbb{R}^m$ se e solo se $n = m$.*

Teorema 1.22. *Ogni applicazione continua $f\colon D^n \to D^n$ possiede almeno un punto fisso.*

Teorema 1.23. *Sia $f\colon S^{2n} \to S^{2n}$ un'applicazione continua. Allora esiste un punto $x \in S^{2n}$ tale che $f(x) = \pm x$.*

Teorema 1.24. *Sia $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua. Allora esiste un punto $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$.*

Con alcuni stratagemmi riusciremo a dimostrare i teoremi precedenti in alcuni casi particolari. Le dimostrazioni in generale richiedono quella che si dice una **teoria coomologica**, argomento di grande fascino e punto centrale nei corsi di **topologia algebrica**. Pur non presentando particolari difficoltà, lo studio delle teorie coomologiche richiede una lunga serie di preliminari algebrici e topologici e questo ne preclude, purtroppo, l'insegnamento nei corsi matematici di base.

Il lettore interessato troverà le dimostrazioni dei Teoremi 1.19, 1.20, 1.21, 1.22 e 1.23 (o versioni equivalenti) su qualunque testo introduttivo di omologia e coomologia singolare, come ad esempio [Do80], [Ma91], [GH81] e [Vi94].

Il Teorema 1.24 è attribuito a Borsuk ed è più avanzato dei precedenti: è possibile trovarne la dimostrazione su [Fu95]. Dimostrazioni alternative del teorema di Borsuk che non utilizzano teorie coomologiche si trovano in [Du66] e [GP74].

Esercizi

1.28. Utilizzare il risultato del Teorema 1.24 per dimostrare i Teoremi 1.19 e 1.21.

1.29. Mostrare che il risultato del Teorema 1.23 non vale per applicazioni continue $f\colon S^1 \to S^1$ e più in generale per le $f\colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ continue.

2

Insiemi

Notazioni e riscaldamento – Induzione e completezza – Cardinalità – L'assioma della scelta – Il lemma di Zorn – La cardinalità del prodotto

Utilizzeremo la teoria ingenua degli insiemi, cioè eviteremo, con una sola eccezione, di dare impostazioni assiomatiche e lasceremo che ognuno usi le nozioni di insieme e di appartenenza che gli sono suggerite dal senso comune e che gli hanno permesso di superare gli esami di algebra, analisi e geometria: l'eccezione riguarderà l'assioma della scelta, il cui contenuto è meno evidente dal punto di vista del pensiero comune e della logica elementare.

Adotteremo volutamente la strategia dello struzzo per non vedere i paradossi[1] a cui questo approccio può portare. Una sana regola che costa poco e che aiuta ad evitare i più classici paradossi è questa: non dire *l'insieme degli insiemi tali che ...* ma preferire *la famiglia degli insiemi ...*; questo eviterà inoltre monotone ripetizioni. La stessa regola si applica alle famiglie e quindi diremo: *la classe delle famiglie...*, *la collezione delle classi ...* e così via.

2.1 Notazioni e riscaldamento

Se X è un insieme scriveremo $x \in X$ se x appartiene a X, cioè se x è un elemento di X. Indicheremo con $\emptyset$ l'insieme vuoto, mentre i simboli $\{*\}$ e $\{\infty\}$ denoteranno entrambi la **singoletta**, ossia l'insieme formato da un solo elemento. Un insieme si dice **finito** se contiene al più finiti elementi ed in tal caso scriveremo $|X| = n$ se X contiene esattamente n elementi. Un insieme che non è finito si dice **infinito**.

Se A e B sono insiemi scriveremo $A \subset B$ se A è contenuto in B, ovvero se ogni elemento di A è anche elemento di B. Scriveremo invece $A \subset B$, $A \neq B$, se A è contenuto strettamente in B.

Esempio 2.1. Segue dalla definizione di $\subset$ che, per ogni insieme A, vale $\emptyset \subset A$. Se questo fatto non vi convince del tutto accettatelo comunque, al limite come convenzione. Così facendo, per qualunque proprietà P definita sugli elementi di A, ha senso scrivere

[1] Quello di Russell è il più famoso, vedi Sezione 8.1.

$$\{a \in A \mid P(a)\} \subset A,$$

dove $\{a \in A \mid P(a)\}$ denota l'insieme degli elementi di A per i quali P è vera.

Denoteremo con $A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$ l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B. Se $x_1, \ldots, x_n$ appartengono ad un insieme X, denoteremo con $\{x_1, \ldots, x_n\}$ il sottoinsieme di X i cui elementi sono esattamente $x_1, \ldots, x_n$.

Scriveremo $f \colon X \to Y$ o $X \xrightarrow{f} Y$ per indicare che f è un'applicazione da X a Y e $x \mapsto y$ per indicare che $y = f(x)$. Data un'applicazione $f \colon X \to Y$, per ogni sottoinsieme $A \subset Y$ denoteremo

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

I sottoinsiemi di X della forma $f^{-1}(A)$ si dicono **saturi** rispetto ad f. Se $y \in Y$ chiameremo $f^{-1}(\{y\})$ la **fibra** di f su y. Spesso, con un leggero abuso di notazione, scriveremo $f^{-1}(y)$ con il medesimo significato di $f^{-1}(\{y\})$.

Se $f \colon X \to Y$ è un'applicazione di insiemi e A, B sono due sottoinsiemi di X, si verifica facilmente che $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, mentre è generalmente falso che $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Quello che si può invece affermare è espresso dalla seguente proposizione di immediata verifica.

Proposizione 2.2 (Formula di proiezione). *Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione di insiemi e siano $A \subset X$, $B \subset Y$ due sottoinsiemi. Allora vale*

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Per indicare che un'applicazione $f \colon X \to Y$ è iniettiva si utilizza talvolta la freccia uncinata $f \colon X \hookrightarrow Y$, oppure $X \overset{f}{\hookrightarrow} Y$. Per indicare che una funzione $f \colon X \to Y$ è surgettiva utilizza talvolta la freccia a due teste $f \colon X \twoheadrightarrow Y$, oppure $X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y$.

Se $\mathcal{A}$ è una famiglia di insiemi, i simboli

$$\cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\} \qquad \text{e} \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

ne denotano l'unione. Notazioni analoghe, con il simbolo $\cap$ al posto di $\cup$, per l'intersezione.

Per **indicizzazione** di una famiglia $\mathcal{A}$ si intende un'applicazione surgettiva $A \colon I \to \mathcal{A}$; l'insieme I è detto insieme degli **indici** e si scrive solitamente A_i in luogo di $A(i)$ e $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ in luogo di $\cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$. **Parametri** e **parametrizzazione** sono sinonimi rispettivamente di indici e indicizzazione.

Le **formule di De Morgan** sentenziano che il passaggio al complementare scambia i ruoli di unione e intersezione: questo significa che se $A, B \subset X$, allora

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B), \qquad X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B).$$

Questo è vero più in generale per ogni famiglia $\{A_i \mid i \in I\}$ di sottoinsiemi di X: in formule

$$X - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(X - A_i), \qquad X - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(X - A_i).$$

Il **prodotto cartesiano** di una famiglia finita $X_1, \ldots, X_n$ di insiemi si denota con

$$X_1 \times \cdots \times X_n, \quad \text{oppure con} \quad \prod_{i=1}^{n} X_i,$$

ed è per definizione l'insieme delle n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i \in X_i$ per ogni i. Per ogni insieme X e per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con X^n il prodotto cartesiano di X con se stesso n volte.

Se A è un sottoinsieme di $X \times Y$ e B è un sottoinsieme non vuoto di Y, allora ha senso considerare la **divisione** $(A : B) \subset X$ che definiamo come

$$(A : B) = \{x \in X \mid \{x\} \times B \subset A\}.$$

Notiamo che $(X \times Y : Y) = X$.

Esercizi

2.1. Dimostrare la Proposizione 2.2.

2.2. Dimostrare che per ogni terna di insiemi A, B, C vale

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

2.3. Mostrare che se $\{A_i \mid i \in I\}$ e $\{B_j \mid j \in J\}$ sono due famiglie qualsiasi di insiemi, allora valgono le **leggi distributive** di unione ed intersezione:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j),$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j).$$

2.4 (♡). Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione e siano A, B sottoinsiemi di X. Dire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere e quali no:

1. $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
3. $f(X - A) \subset Y - f(A)$.
4. $f(X - A) \supset Y - f(A)$.
5. $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
6. $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

2.2 Induzione e completezza

Indicheremo con:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali (interi positivi).
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme degli interi non negativi.
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ l'anello degli interi.
- $\mathbb{Z}/n$ il gruppo delle classi di resto modulo n.
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ i campi dei numeri razionali, reali e complessi.

Assumeremo che il lettore abbia familiarità con il principio di induzione e le altre proprietà dei numeri naturali.

Principio di induzione. *Sia*

$$P\colon \mathbb{N} \to \{\text{vero}, \text{falso}\}$$

un'applicazione tale che $P(1) = \text{vero}$ *e tale che* $P(n) = \text{vero}$ *ogni volta che* $P(n-1) = \text{vero}$. *Allora* $P(n) = \text{vero}$ *per ogni* n.

Oltre al principio di induzione, faremo spesso uso dei seguenti due principi ad esso equivalenti.

Principio del minimo intero (o del buon ordinamento). *Ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *possiede un elemento minimo.*

Principio di definizione ricorsiva. *Sia* X *un insieme non vuoto e sia data, per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *un'applicazione*

$$r_n\colon X^n \to X.$$

Allora, per ogni $x \in X$ *esiste un'unica applicazione* $f\colon \mathbb{N} \to X$ *tale che*

$$f(1) = x, \qquad f(n+1) = r_n(f(1), f(2), \ldots, f(n)) \quad \textit{per ogni } n \geq 1.$$

Alcune tipiche applicazioni del principio di definizione ricorsiva (il fattoriale, il triangolo di Tartaglia, i numeri di Fibonacci ecc.) sono note a tutti. Vediamo adesso un'altra applicazione che sarà utilizzata in seguito.

Lemma 2.3. *Sia* $X \subset \mathbb{N}$ *un sottoinsieme infinito. Allora esiste un'applicazione bigettiva e strettamente crescente* $f\colon \mathbb{N} \to X$.

Dimostrazione. Per ogni sottoinsieme finito $Y \subset X$ il complementare $X - Y$ non è vuoto e quindi ammette minimo. Basta definire f in modo ricorsivo come

$$f(1) = \min(X), \qquad f(n+1) = \min(X - \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}).$$

$\square$

Per quanto riguarda i numeri reali, risulta essere di particolare importanza il seguente principio.

Principio di completezza dei numeri reali. *Ogni insieme non vuoto e limitato superiormente di numeri reali possiede estremo superiore.*

Tanto per rinfrescare la memoria, ricordiamo che $X \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $M \geq x$ per ogni $x \in X$. Un numero reale $s \in \mathbb{R}$ si dice **estremo superiore** di X, ed in tal caso scriveremo $s = \sup(X)$, se:

1. vale $s \geq x$ per ogni $x \in X$,
2. per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x \in X$ tale che $x \geq s - \varepsilon$.

Scambiando $\geq$ con $\leq$ nelle definizioni precedenti si ottengono le nozioni di insieme limitato inferiormente e di estremo inferiore $\inf(X)$. Per denotare gli intervalli useremo la notazione dell'Esercizio 1.8.

Esercizi

2.5. Utilizzare il principio del minimo intero per dimostrare che per ogni applicazione surgettiva $f\colon \mathbb{N} \to X$ esiste un'applicazione $g\colon X \to \mathbb{N}$ tale che $fg(x) = x$ per ogni $x \in X$.

2.6 (♡). Definire di $3^{\sqrt{2}}$ utilizzando solamente le potenze ad esponente intero, il principio del minimo intero ed il principio di completezza dei numeri reali.

2.7 (♡). Usare il principio di definizione ricorsiva per dimostrare che per ogni numero reale x esiste un'applicazione bigettiva $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{g(i)}}{g(i)} = x.$$

2.3 Cardinalità

Definizione 2.4. *Diremo che due insiemi X, Y hanno la stessa* ***cardinalità****, e scriveremo $|X| = |Y|$, se esiste un'applicazione bigettiva $X \to Y$.*

È chiaro che se $|X| = |Y|$ e $|Y| = |Z|$, allora anche $|X| = |Z|$. Talvolta la notazione $|X|$ potrebbe essere ambigua (ad esempio se siamo in un contesto nel quale intervengono anche dei valori assoluti); in tal caso è possibile utilizzare una delle due notazioni alternative $\mathrm{Card}(X)$ e $\sharp(X)$

Definizione 2.5. *Un insieme si dice* ***infinito numerabile*** *se ha la stessa cardinalità dell'insieme* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ *dei numeri naturali. Un insieme si dice* ***numerabile*** *se è finito oppure se è infinito numerabile.*

Per il Lemma 2.3 un insieme è numerabile se e soltanto se ha la stessa cardinalità di un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. Vediamo adesso alcuni esempi.

Esempio 2.6. Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}_0$ sono numerabili. Infatti le applicazioni $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n > 0 \\ 1 - 2n & \text{se } n \leq 0 \end{cases}$$

e $g\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1$, sono bigettive.

Esempio 2.7. L'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie di numeri naturali è numerabile. Per dimostrarlo, osserviamo che l'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$ è numerabile poiché per ogni intero $n \geq 0$ esiste un unico elemento $(x, y) \in C$ tale che $n = x + \sum_{i=0}^{y} i$. Inoltre l'applicazione

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to C, \qquad (a, b) \mapsto (a, a + b)$$

è bigettiva. In conclusione, una bigezione esplicita tra $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}$ è data da

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad (a, b) \mapsto a + \sum_{i=0}^{a+b-2} i = \frac{1}{2}(a + b - 2)(a + b - 1) + a$$

Per ogni insieme X denotiamo con $\mathcal{P}(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi di X e con $\mathcal{P}_0(X) \subset \mathcal{P}(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi finiti di X.

Esempio 2.8. La famiglia $\mathcal{P}_0(X)$ dei sottoinsiemi finiti di un sottoinsieme numerabile X è ancora numerabile. Infatti possiamo identificare X con $\mathbb{N}_0$ e osservare che ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{N}_0$ può essere interpretato come l'insieme delle cifre uguali ad 1 di un opportuno numero binario: questo fatto è equivalente a dire che l'applicazione

$$\mathcal{P}_0(\mathbb{N}_0) \to \mathbb{N}_0, \qquad \{\emptyset\} \mapsto 0, \quad \{n_1, \ldots, n_k\} \mapsto \sum_{i=1}^{k} 2^{n_i},$$

è bigettiva.

Dimostreremo più avanti (Corollario 2.31) che per ogni insieme infinito X vale $|\mathcal{P}_0(X)| = |X|$.

Teorema 2.9 (Cantor). *Sia X un insieme non vuoto, allora non esistono applicazioni surgettive $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$. In particolare X e $\mathcal{P}(X)$ non hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Supponimao per assurdo che esista un'applicazione surgettiva $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ e proviamo che ciò conduce ad una contraddizione. Consideriamo il sottoinsieme

$$S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

e scegliamo un elemento $s \in X$ tale che $f(s) = S$. Se si assume che $s \in S$, allora dalla definizione di S segue che $s \notin f(s) = S$. Se invece si assume $s \notin S = f(s)$, allora dalla definizione di S segue che $s \in f(s) = S$. In ogni caso si arriva ad una contraddizione. □

Esempio 2.10. Ogni intervallo aperto $]a,b[\subset \mathbb{R}$, con $a < b$, ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$. Infatti, fissato un numero reale $c \in \;]a,b[$, l'applicazione $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-c}{b-x} & \text{se } c \le x < b \\[2ex] \dfrac{x-c}{x-a} & \text{se } a < x \le c \end{cases}$$

è bigettiva.

Lemma 2.11. *Siano X, Y insiemi e siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ applicazioni. Allora esiste un sottoinsieme $A \subset X$ tale che*

$$A \cap g(Y - f(A)) = \emptyset, \qquad A \cup g(Y - f(A)) = X.$$

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia $\mathcal{A}$ dei sottoinsiemi $B \subset X$ tali che $B \cap g(Y - f(B)) = \emptyset$. Sicuramente $\mathcal{A}$ non è vuota poiché contiene il sottoinsieme vuoto. Verifichiamo che $A = \cup\{B \mid B \in \mathcal{A}\}$ ha le proprietà richieste. Se $x \in A$, allora esiste $B \in \mathcal{A}$ tale che $x \in B$, quindi $x \notin g(Y - f(B))$ ed a maggior ragione $x \notin g(Y - f(A))$. Se esistesse $x \notin A \cup g(Y - f(A))$ allora, ponendo $C = A \cup \{x\}$ si avrebbe $g(Y - f(C)) \subset g(Y - f(A))$ e quindi $C \cap g(Y - f(C)) = \emptyset$ in contraddizione con la definizione di A. □

Dal Lemma 2.11 segue facilmente il seguente utile criterio per determinare se due insiemi hanno la stessa cardinalità.

Teorema 2.12 (di Cantor-Schröder-Bernstein). *Siano X, Y due insiemi e siano $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ due applicazioni iniettive. Allora X e Y hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Per il Lemma 2.11 esiste un sottoinsieme $A \subset X$ tale che, ponendo $B = Y - f(A)$ vale

$$A \cap g(B) = \emptyset \quad \text{ e } \quad A \cup g(B) = X.$$

Per come abbiamo definito B si ha inoltre che $B \cap f(A) = \emptyset$ e $B \cup f(A) = Y$, mentre dall'iniettività di f e g segue che le due applicazioni $f\colon A \to f(A)$ e $g\colon B \to g(B)$ sono bigettive. Basta adesso osservare che l'applicazione

$$h\colon X \to Y, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in g(B) \end{cases}$$

è bigettiva. □

Se X e Y sono insiemi scriveremo $|X| \leq |Y|$ se esiste un'applicazione iniettiva $X \to Y$. Abbiamo appena dimostrato che valgono le proprietà:

Riflessiva: $|X| \leq |X|$ *per ogni insieme* X.
Antisimmetrica: *se* $|X| \leq |Y|$ *e* $|Y| \leq |X|$, *allora* $|X| = |Y|$.
Transitiva: *se* $|X| \leq |Y|$ *e* $|Y| \leq |Z|$, *allora* $|X| \leq |Z|$.

Scriveremo $|X| \geq |Y|$ se e solo se $|Y| \leq |X|$.

Osservazione 2.13. È possibile dimostrare, e lo faremo più avanti (Proposizione 2.25), che le cardinalità di due insiemi sono sempre confrontabili, cioè che per ogni coppia di insiemi X, Y vale $|X| \leq |Y|$ oppure $|Y| \leq |X|$.

Per ogni coppia di insiemi X, Y denotiamo con X^Y l'insieme di tutte le applicazioni $f\colon Y \to X$. Ad esempio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indica l'insieme di tutte le successioni $a_1, a_2, \ldots$ di numeri reali. Esiste una bigezione naturale

$$\alpha\colon (X^Y)^Z \to X^{Y \times Z}, \qquad \alpha(g)(y, z) = g(z)(y).$$

Proposizione 2.14. *Gli insiemi* $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $2^{\mathbb{N}}$ *e* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *hanno tutti la stessa cardinalità. In particolare l'insieme* $\mathbb{R}$ *dei numeri reali non è numerabile.*

Dimostrazione. Prima di iniziare la dimostrazione, ricordiamo che per ogni insieme X esiste una bigezione naturale tra $\mathcal{P}(X)$ e l'insieme di tutte le applicazioni da X nell'insieme $\{0, 1\}$. Tale bigezione associa ad ogni funzione $f\colon X \to \{0, 1\}$ il sottoinsieme $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Quindi $\mathcal{P}(X)$ e 2^X hanno la stessa cardinalità.

Sia C l'insieme delle successioni $\{f_n\}$ strettamente crescenti di numeri naturali. Allora C ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: basta ad esempio considerare l'applicazione

$$\alpha\colon \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to C, \qquad \alpha(f)_n = \sum_{i=1}^{n} f(i).$$

L'applicazione

$$\beta\colon]1, +\infty[\to C, \qquad \beta(x)_n = \text{ parte intera di } 10^n x,$$

è iniettiva e quindi $|\mathbb{R}| \leq |C|$. Viceversa l'applicazione $\gamma\colon C \to \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{f_n}} = \sup\left\{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{10^{f_n}} \mid N \in \mathbb{N}\right\}$$

è anch'essa iniettiva e quindi $|\mathbb{R}| \geq |C|$. Per il Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein si ha $|\mathbb{R}| = |C| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

Poiché esiste una bigezione tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, gli insiemi $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ hanno la stessa cardinalità e quindi $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$. Similmente si ha $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}| = |(2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}|$ e poiché esistono delle naturali applicazioni iniettive $2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne segue che

$$|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \le |\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}| = |2^{\mathbb{N}}| \le |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|.$$

□

Esercizi

2.8. Mostrare che se $A \subset \mathbb{R}$ contiene un intervallo aperto non vuoto, allora $|A| = |\mathbb{R}|$.

2.9. Provare che l'insieme dei numeri razionali è numerabile.

2.10 ($*, \heartsuit$). Si dimostri l'esistenza, sull'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, di una famiglia infinita non numerabile di sottoinsiemi C_i tali che $C_i \cap C_j$ abbia cardinalità finita per ogni $i \neq j$.

2.4 L'assioma della scelta

Supponiamo di avere un'applicazione surgettiva di insiemi $g\colon Y \to X$ e cerchiamo di costruire un'applicazione $f\colon X \to Y$ tale che $g(f(x)) = x$ per ogni x. Possiamo procedere nel modo seguente: si prende un elemento $x_1 \in X$ e si *sceglie* un elemento $f(x_1)$ nell'insieme non vuoto $g^{-1}(\{x_1\})$, poi si prende un elemento $x_2 \in X - \{x_1\}$ e si *sceglie* un elemento $f(x_2)$ nell'insieme non vuoto $g^{-1}(\{x_2\})$ eccetera. Se X è un insieme finito, allora tale procedura ha termine e ci fornisce l'applicazione f cercata. Se invece X è infinito, in assenza di altre informazioni non c'è alcuna ragione elementare che ci assicuri la possibilità di fare le *infinite scelte* necessarie per poter definire f. Per questo motivo, se vogliamo fare qualche progresso matematico, dobbiamo aggiungere al nostro arsenale il celeberrimo assioma della scelta, che enunceremo in due versioni equivalenti.

Assioma della scelta (prima versione): *Se $g\colon Y \to X$ è un'applicazione surgettiva di insiemi, allora esiste un'applicazione $f\colon X \to Y$ tale che $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$.*

C'è da dire che, in un certo senso, l'assioma della scelta non è né vero né falso ed ognuno può crederci o meno (con le relative conseguenze). Per maggiori informazioni e delucidazioni su questo argomento rimandiamo a [To03]. Tuttavia l'assioma della scelta è accettato dalla quasi totalità dei matematici ed anche noi accetteremo la sua validità senza riserva alcuna.

Proposizione 2.15. *Dati due insiemi non vuoti X e Y, vale $|X| \leq |Y|$ se e solo se esiste un'applicazione surgettiva $Y \twoheadrightarrow X$.*

Dimostrazione. È chiaro che se esiste un'applicazione iniettiva $f\colon X \to Y$ di insiemi non vuoti, allora esiste anche un'applicazione surgettiva $g\colon Y \to X$. Infatti basta fissare un elemento $x_0 \in X$ e porre $g(y) = f^{-1}(y)$ se $y \in f(X)$ e $g(y) = x_0$ altrimenti.

Viceversa se esiste $g\colon Y \to X$ surgettiva, allora per l'assioma della scelta esiste $f\colon X \to Y$ tale che $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$. Una tale applicazione f è iniettiva, infatti se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. □

Una **relazione** in un insieme X è un qualsiasi sottoinsieme $\mathfrak{R} \subset X \times X$. È consuetudine scrivere $x\mathfrak{R}y$ se e solo se $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

Una **relazione di equivalenza** su di un insieme X è una relazione $\sim$ che soddisfa le proprietà:

Riflessiva: *$x \sim x$ per ogni $x \in X$.*
Simmetrica: *se $x \sim y$, allora $y \sim x$.*
Transitiva: *se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora $x \sim z$.*

Definizione 2.16. *Sia $\sim$ una relazione di equivalenza su un insieme X. La **classe di equivalenza** di un elemento $x \in X$ è il sottoinsieme*

$$[x] \subset X, \qquad [x] = \{y \in X \mid y \sim x\}.$$

Le classi di equivalenza determinano univocamente la relazione di equivalenza e le tre proprietà precedenti diventano:

Riflessiva: *$x \in [x]$ per ogni $x \in X$.*
Simmetrica: *se $x \in [y]$, allora $y \in [x]$.*
Transitiva: *se $x \in [y]$ e $y \in [z]$, allora $x \in [z]$.*

Si dimostra facilmente che se $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ allora $x \sim y$ e $[x] = [y]$. L'insieme delle classi di equivalenza $X/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$ viene detto **quoziente** di X per la relazione $\sim$. È ben definita un'applicazione

$$\pi\colon X \to X/\sim, \qquad \pi(x) = [x],$$

detta **proiezione al quoziente**. Per l'assioma della scelta esiste un'applicazione $f\colon X/\sim \to X$ tale che $f([x]) \in [x]$ per ogni classe di equivalenza. L'immagine di f è quello che viene detto **insieme di rappresentanti**, ossia un sottoinsieme $S \subset X$ che interseca ogni classe di equivalenza in uno ed un solo punto.

Esempio 2.17. Sull'insieme $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ dei vettori non nulli a $n + 1$ dimensioni definiamo $x \sim y$ se esiste $t \in]0, +\infty[$ tale che $x = ty$. È immediato osservare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e che la sfera S^n è un insieme di rappresentanti.

Lemma 2.18. *Siano $\sim$ una relazione di equivalenza su X, $\pi\colon X \to X/\!\sim$ la proiezione al quoziente e $f\colon X \to Y$ un'applicazione. Sono fatti equivalenti:*

1. *L'applicazione f è costante sulle classi di equivalenza, ossia $f(x) = f(y)$ ogni volta che $x \sim y$.*
2. *Esiste un'unica applicazione $g\colon X/\!\sim\, \to Y$ tale che $f = g\pi$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\ X/\!\sim \arrow[ur, dashed, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. □

Per alcune applicazioni è più comoda la seguente versione dell'assioma della scelta.

Assioma della scelta (seconda versione): *Sia $X = \cup\{X_i \mid i \in I\}$ l'unione di una famiglia di insiemi non vuoti X_i indicizzati da un insieme I. Allora esiste un'applicazione $f\colon I \to X$ tale che $f(i) \in X_i$ per ogni i.*

Mostriamo che la prima e la seconda versione dell'assioma della scelta sono tra loro equivalenti. Se $X = \cup\{X_i \mid i \in I\}$, allora possiamo considerare l'insieme $Y = \{(x, i) \in X \times I \mid x \in X_i\}$ e le due proiezioni $p\colon Y \to X$, $q\colon Y \to I$. Per ipotesi p e q sono entrambe surgettive e, per la prima versione dell'assioma della scelta, esiste $h\colon I \to Y$ tale che la composizione qh è l'identità su I. Basta allora considerare la funzione $f = ph\colon I \to X$.

Viceversa, se $g\colon X \to I$ è un'applicazione surgettiva di insiemi allora l'insieme $X_i = g^{-1}(i) = \{x \in X \mid g(x) = i\}$ è non vuoto per ogni $i \in I$. Poiché $X = \cup_i X_i$, per la seconda versione dell'assioma della scelta, esiste $f\colon I \to X$ tale che $f(i) \in X_i$, ovvero tale che $gf(i) = i$ per ogni $i \in I$.

Esempio 2.19. Utilizziamo l'assioma della scelta per dimostrare che l'unione numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile. Sia $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, una famiglia numerabile di insiemi numerabili e definiamo l'applicazione

$$\mu\colon \cup_n X_n \to \mathbb{N}, \qquad \mu(x) = \min\{n \mid x \in X_n\}.$$

Per l'assioma della scelta possiamo scegliere per ogni $n \in \mathbb{N}$ un'applicazione iniettiva $f_n\colon X_n \to \mathbb{N}$. Allora l'applicazione

$$\phi\colon \cup_n X_n \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \qquad \phi(x) = (\mu(x), f_{\mu(x)}(x))$$

è iniettiva e quindi $\cup_n X_n$ è numerabile.

Osservazione 2.20. L'assioma della scelta permette di dimostrare alcuni teoremi che urtano con l'intuizione, e questa è una delle ragioni che creano perplessità su di esso. L'esempio più eclatante è probabilmente il risultato noto come *paradosso di Banach-Tarski* [Wa93].

Diciamo che due sottoinsiemi $A, B \subset \mathbb{R}^3$ sono equi-decomponibili se è possibile trovare degli insiemi $A_1, \ldots, A_n$ e delle isometrie dirette (rototraslazioni) $\theta_1, \ldots, \theta_n$ di $\mathbb{R}^3$ tali che A e B sono rispettivamente le unioni disgiute di $A_1, \ldots, A_n$ e $\theta_1(A_1), \ldots, \theta_n(A_n)$. Il teorema di Banach-Tarski afferma che ogni palla chiusa raggio 1 in $\mathbb{R}^3$ è equidecomponibile all'unione disgiunta di due palle chiuse di raggio 1.

D'altra parte, senza l'assioma della scelta gran parte della matematica inevitabilmente collassa. Ad esempio, senza l'assioma della scelta l'unione numerabile di insiemi numerabili potrebbe non essere numerabile, vedi in proposito [To03, pag. 228].

Esercizi

2.11 (♡). Siano $X = \cup\{X_i \mid i \in I\}$ e $Y = \cup\{Y_i \mid i \in I\}$ unioni disgiunte di due famiglie di insiemi indicizzate dallo stesso insieme di indici I. Dimostrare che, se per ogni $i \in I$, l'insieme X_i ha la stessa cardinalità di Y_i, allora X ha la stessa cardinalità di Y.

2.12. Dimostrare che l'assioma della scelta è equivalente al seguente **postulato di Zermelo.** *Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi non vuoti e disgiunti. Allora esiste un insieme C tale che $C \cap A$ è formato da un solo punto per ogni $A \in \mathcal{A}$.*

2.13. Siano dati un insieme X ed una famiglia numerabile $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi di X. Denotiamo con $\mathcal{T}$ la collezione dei sottoinsiemi di X che si possono scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$. Dimostrare che per ogni famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ esiste una sottofamiglia numerabile $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tale che

$$\bigcup_{U \in \mathcal{A}'} U = \bigcup_{V \in \mathcal{A}} V.$$

2.14. Utilizzare l'assioma della scelta per dimostrare in modo matematicamente rigoroso il seguente risultato.

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione surgettiva di insiemi. Se per ogni $y \in Y$ l'insieme $f^{-1}(y)$ è infinito numerabile, allora esiste un'applicazione bigettiva $X \to Y \times \mathbb{N}$.

2.15. Calcolare la cardinalità dell'insieme di tutte le applicazioni bigettive $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (Sugg.: per ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$ con almeno 2 elementi esiste un'applicazione bigettiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(n) = n$ se e solo se $n \notin A$.)

2.5 Il lemma di Zorn

Prima di poter essere applicato alla soluzione di molti problemi matematici, l'assioma della scelta ha bisogno di essere trasformato in enunciati ad esso equivalenti ma dal contenuto meno intuitivo. Fra le varie incarnazioni (vedi

[Ke55, p. 33]), la più celebre è senza dubbio il **lemma di Zorn**. Mentre l'assioma della scelta ha a che fare con le relazioni di equivalenza, il lemma di Zorn riguarda le relazioni d'ordine.

Un **ordinamento** in un insieme X è una relazione $\leq$ che soddisfa le tre proprietà:

Riflessiva: *$x \leq x$ per ogni $x \in X$.*
Antisimmetrica: *se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$.*
Transitiva: *se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$.*

Un ordinamento viene anche detto una **relazione d'ordine**. Se $\leq$ è un ordinamento si definisce $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

Esempio 2.21. Sia Y un insieme; dati due sottoinsiemi $A, B \subset Y$ definiamo

$$A \leq B \quad \text{se} \quad A \subset B.$$

La relazione $\leq$ è un ordinamento su $\mathcal{P}(Y)$ detto di *inclusione*.

Un ordinamento su X si dice **totale** se per ogni $x, y \in X$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Un **insieme ordinato** è un insieme dotato di un ordinamento; un **insieme totalmente ordinato** è un insieme dotato di un ordinamento totale[2].

Ogni sottoinsieme di un insieme ordinato è a sua volta un insieme ordinato, con la relazione di ordine indotta.

Definizione 2.22. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato:*

1. *Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice una **catena** se per ogni $x, y \in C$ vale $x \leq y$ oppure $x \geq y$. In altri termini $C \subset X$ è una catena se e solo se C è un insieme totalmente ordinato per la relazione di ordine indotta.*
2. *Sia $C \subset X$ un sottoinsieme e $x \in X$. Diremo che x è un **maggiorante** di C se $x \geq y$ per ogni $y \in C$.*
3. *Diremo che $m \in X$ è un **elemento massimale** di X se è l'unico maggiorante di se stesso, cioè se $\{x \in X \mid m \leq x\} = \{m\}$.*

Teorema 2.23 (Lemma di Zorn). *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato non vuoto. Se ogni catena in X possiede almeno un maggiorante, allora X possiede elementi massimali.*

Avvertiamo il giovane studioso che le applicazioni del lemma di Zorn sono decisamente più istruttive della sua dimostrazione. Pertanto, la dimostrazione del lemma di Zorn, che richiede l'assioma della scelta e che riportiamo per completezza nella Sezione 8.2, può essere benissimo omessa ad una prima lettura.

[2] Questa definizione non è universalmente accettata: alcuni chiamano ordinamenti gli ordinamenti totali e ordinamenti parziali gli ordinamenti. Altri usano la parola **poset** (dall'inglese Partially Ordered SET) per indicare un insieme ordinato.

Mostriamo che il lemma di Zorn implica l'assioma della scelta. La dimostrazione che daremo rappresenta il più classico ed utile schema di applicazione del lemma di Zorn e pertanto svolgeremo il nostro compito in tutti i dettagli. Consideriamo la prima versione dell'assioma della scelta: sia $g\colon Y \to X$ un'applicazione surgettiva di insiemi non vuoti e mostriamo che il lemma di Zorn implica l'esistenza di un'applicazione $f\colon X \to Y$ tale che $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$. Introduciamo l'insieme $\mathcal{S}$ i cui elementi sono le coppie (E, f) tali che:

1. $E \subset X$ è un sottoinsieme.
2. $f\colon E \to Y$ è un'applicazione tale che $gf(x) = x$ per ogni $x \in E$.

L'insieme $\mathcal{S}$ non è vuoto, esso contiene infatti la coppia $(\emptyset, \emptyset \hookrightarrow Y)$. Su $\mathcal{S}$ è possibile ordinare gli elementi per *estensione*, definiamo cioè $(E, h) \leq (F, k)$ se k estende h: in altri termini $(E, h) \leq (F, k)$ se e solo se $E \subset F$ e $h(x) = k(x)$ per ogni $x \in E$. Mostriamo adesso che ogni catena in $\mathcal{S}$ possiede maggioranti. Sia $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ una catena e consideriamo l'insieme

$$A = \bigcup_{(E,h)\in\mathcal{C}} E.$$

Definiamo poi $a\colon A \to Y$ nel modo seguente: se $x \in A$ allora esiste $(E, h) \in \mathcal{C}$ tale che $x \in E$, e si pone $a(x) = h(x)$. Si tratta di una buona definizione, infatti se $(F, k) \in \mathcal{C}$ e $x \in F$ si ha, poiché $\mathcal{C}$ è una catena $(E, h) \leq (F, k)$ oppure $(E, h) \geq (F, k)$. In entrambi i casi $x \in E \cap F$ e $h(x) = k(x)$. È chiaro che $(A, a) \in \mathcal{S}$ è un maggiorante di $\mathcal{C}$.

Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale $(U, f) \in \mathcal{S}$ e basta dimostrare che $U = X$. Se così non fosse esisterebbe $y \in Y$ tale che $g(y) \notin U$ e la coppia $(U \cup \{g(y)\}, f')$, che estende (U, f) e tale che $f'(g(y)) = y$, appartiene a $\mathcal{S}$ e contraddice la massimalità di (U, f).

Corollario 2.24. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato in cui ogni catena possiede almeno un maggiorante. Allora per ogni $a \in X$ esiste un elemento massimale m di X tale che $m \geq a$.*

Dimostrazione. Si applica il lemma di Zorn all'insieme $\{x \in X \mid x \geq a\}$. □

Proposizione 2.25. *Le cardinalità sono comparabili, e cioè se X e Y sono due insiemi, allora vale $|X| \leq |Y|$ oppure $|Y| \leq |X|$.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia $\mathcal{A}$ dei sottoinsiemi $A \subset X \times Y$ tali che le proiezioni $p\colon A \to X$ e $q\colon A \to Y$ sono entrambe iniettive. L'insieme vuoto appartiene alla famiglia $\mathcal{A}$ che è quindi non vuota ed è ordinata per inclusione. Ogni catena $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ possiede maggioranti: infatti, considerando il candidato naturale $C = \cup\{A \mid A \in \mathcal{C}\}$, si ha che $p\colon C \to X$ e $q\colon C \to Y$ sono entrambe iniettive e pertanto C è un maggiorante di $\mathcal{C}$.

Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale A; dimostriamo che almeno una delle due proiezioni $p\colon A \to X$ e $q\colon A \to Y$ è surgettiva. Se così non fosse esisterebbero $x \in X - p(A)$ e $y \in Y - q(A)$; quindi $A \cup \{(x, y)\} \in \mathcal{A}$ in contraddizione con la massimalità di A.

Se $p\colon A \to X$ è surgettiva allora $|X| = |A| \leq |Y|$. Viceversa, se $q\colon A \to Y$ è surgettiva, allora $|Y| = |A| \leq |X|$. □

Esercizi

2.16. Sia $\prec$ una relazione su di un insieme X tale che:

1. Per ogni $x, y \in X$, almeno una delle due relazioni $x \prec y$, $y \prec x$ è falsa.
2. Se vale $x \prec y$ e $y \prec z$, allora $x \prec z$.

Dimostrare che la relazione

$$x \leq y \quad \iff \quad x \prec y \text{ oppure } x = y$$

è una relazione di ordine.

2.17. Sia V uno spazio vettoriale (non necessariamente di dimensione finita) e consideriamo l'insieme $G(V)$ dei suoi sottospazi vettoriali, ordinato per inclusione (Esempio 2.21). Dimostrare che per ogni sottoinsieme $X \subset V$ che contiene 0 la famiglia

$$\{F \in G(V) \mid F \subset X\}$$

possiede elementi massimali.

2.18 (Lemma di Tukey, ♡). Siano X un insieme e $\mathcal{B}$ una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X con la proprietà che $A \subset X$ appartiene a $\mathcal{B}$ se e soltanto se ogni sottoinsieme finito $B \subset A$ appartiene a $\mathcal{B}$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ contiene elementi massimali rispetto all'inclusione.

2.19. Sia V uno spazio vettoriale su di un campo $\mathbb{K}$. Per ogni sottoinsieme $A \subset V$ denotiamo con $L(A) \subset V$ la chiusura lineare di A, ossia l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali contenenti A; si noti che $L(\emptyset) = 0$. Diremo che un sottoinsieme $A \subset V$ è un **insieme di generatori** di V se $L(A) = V$. Diremo che un sottoinsieme $A \subset V$ è **linearmente indipendente** se $v \notin L(A - \{v\})$ per ogni $v \in A$.

1) Dimostrare che $L(A)$ coincide con l'insieme di tutte le combinazioni lineari finite
$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, \qquad a_i \in \mathbb{K}, \quad v_i \in A,$$
di elementi di A.
2) Dimostrare che un insieme di vettori è linearmente indipendente se e solo se ogni suo sottoinsieme finito è linearmente indipendente.
3) Sia $A \subset V$ linearmente indipendente e sia $v \in V$ un vettore. Dimostrare che $A \cup \{v\}$ è linearmente indipendente se e solo se $v \notin L(A)$.

Sia $\mathcal{B}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi linearmente indipendenti di V; ordiniamo $\mathcal{B}$ per inclusione, ossia $A \leq B$ se $A \subset B$. Chiameremo **base** di V qualsiasi elemento massimale di $\mathcal{B}$.

4) Dimostrare che le basi esistono e che per ogni base B vale $L(B) = V$, ossia che ogni base è anche un insieme di generatori. Mostrare inoltre che ogni insieme linearmente indipendente è contenuto in almeno una base e che ogni insieme di generatori contiene almeno una base.

Siano $B \subset V$ un insieme di generatori ed $A \subset V$ un insieme linearmente indipendente. Per dimostrare che $|A| \leq |B|$ consideriamo l'insieme $\mathcal{C}$ formato dalle coppie (S, f), dove $S \subset A$ ed $f: S \to B$ è un'applicazione iniettiva tale che l'insieme $(A - S) \cup f(S)$ è linearmente indipendente. Chiediamo inoltre che $A \cap B \subset S$ e che $f(v) = v$ per ogni $v \in A \cap B$. Ordiniamo $\mathcal{C}$ per estensione, ossia $(S, f) \leq (T, g)$ se $S \subset T$ e g estende f.

5) Dimostrare che $\mathcal{C}$ è non vuoto, che possiede elementi massimali e che se (S, f) è massimale, allora $S = A$. (Sugg.: se esiste $v \in A - S$, allora B non è contenuto in $L((A - (S \cup \{v\})) \cup f(S))$.)
6) Dimostrare che due basi di uno spazio vettoriale hanno la stessa cardinalità.

2.6 La cardinalità del prodotto

In questa sezione applicheremo l'assioma della scelta ed il lemma di Zorn per dimostrare che se X è un insieme infinito, allora X e X^2 hanno la stessa cardinalità.

Lemma 2.26. *Ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme infinito numerabile.*

Dimostrazione. Dimostriamo che per ogni insieme infinito X esiste un'applicazione iniettiva $f: \mathbb{N} \to X$. L'immagine $f(\mathbb{N})$ sarà il sottoinsieme numerabile cercato. Denotiamo con $\mathcal{P}_0(X)$ la famiglia dei sottoinsiemi finiti di X; per ogni $A \in \mathcal{P}_0(X)$ il complementare $X - A$ è non vuoto e possiamo scrivere

$$X = \cup\{X - A \mid A \in \mathcal{P}_0(X)\}.$$

Per l'assioma della scelta esiste un'applicazione $g: \mathcal{P}_0(X) \to X$ tale che $g(A) \notin A$ per ogni sottoinsieme finito $A \subset X$. Possiamo dunque definire per ricorrenza un'applicazione iniettiva $f: \mathbb{N} \to X$ ponendo

$$f(1) = g(\emptyset) \quad \text{e} \quad f(n) = g(\{f(1), f(2), \dots, f(n-1)\}) \text{ per } n > 1.$$

□

Lemma 2.27. *Se A è un insieme infinito e B è un insieme numerabile, allora $|A \cup B| = |A|$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $A \cap B = \emptyset$. Per il Lemma 2.26 esiste un sottoinsieme $C \subset A$ che è infinito numerabile. Osserviamo che $C \cup B$ è numerabile, ossia ha la stessa cardinalità di C e quindi $A = C \cup (A - C)$ ha la stessa cardinalità di $A \cup B = (C \cup B) \cup (A - C)$. □

Lemma 2.28. *Per ogni insieme infinito X vale $|X \times \mathbb{N}| = |X|$.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia $\mathcal{A}$ delle coppie (E, f) tali che $E \subset X$ e $f\colon E \times \mathbb{N} \to E$ iniettiva. Poiché sappiamo che X contiene sottoinsiemi infiniti numerabili la famiglia $\mathcal{A}$ non è vuota. Ordiniamo $\mathcal{A}$ per estensione, cioè $(E, f) \leq (H, g)$ se e solo se $E \subset H$ e g estende f. Si dimostra facilmente che ogni catena ammette un maggiorante e quindi per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale (A, f).

Dimostriamo che $|A| = |X|$: se per assurdo $|A| < |X|$, allora $X - A$ sarebbe infinito e quindi conterrebbe un sottoinsieme B infinito numerabile. Scelta un'applicazione iniettiva $g\colon B \times \mathbb{N} \to B$ possiamo definire un'applicazione $h\colon (A \cup B) \times \mathbb{N} \to A \cup B$ ponendo $h(x, n) = f(x, n)$ se $x \in A$ e $h(x, n) = g(x, n)$ se $x \in B$. L'applicazione h è iniettiva, estende f e quindi contraddice la massimalità di (A, f). □

Osservazione 2.29. Dal Lemma 2.28 segue in particolare che se Y è infinito, $X = \cup_{i=1}^{+\infty} X_i$ è l'unione di una famiglia numerabile di insiemi e $|X_i| \leq |Y|$ per ogni i allora $|X| \leq |Y|$. Infatti scegliendo per ogni i una applicazione surgettiva $f_i\colon Y \to X_i$ si ha che $f\colon Y \times \mathbb{N} \to X$, $f(y, i) = f_i(y)$, è surgettiva.

Teorema 2.30. *Per ogni insieme infinito X vale $|X| = |X^2|$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella del Lemma 2.28. Consideriamo la famiglia $\mathcal{A}$ delle coppie (E, f), dove E è un sottoinsieme di X e $f\colon E \times E \to E$ è un'applicazione iniettiva. Poiché sappiamo che X contiene sottoinsiemi infiniti numerabili la famiglia $\mathcal{A}$ non è vuota. Ordiniamo $\mathcal{A}$ per estensione, cioè $(E, f) \leq (H, g)$ se e solo se $E \subset H$ e g estende f. Si dimostra facilmente che ogni catena ammette un maggiorante e quindi per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale (A, f). Dimostriamo che $|A| = |X|$: se per assurdo $|A| < |X|$ allora $X - A$ conterrebbe un sottoinsieme B della stessa cardinalità di A. Siccome $(A \cup B) \times (A \cup B) = A \times A \cup A \times B \cup B \times A \cup B \times B$ e per l'Osservazione 2.29 esiste una bigezione tra B e $A \times B \cup B \times A \cup B \times B$ possiamo estendere f in contraddizione con la massimalità di (A, f). □

Dato un insieme X definiamo $S(X)$ come l'unione disgiunta di tutte le potenze cartesiane X^n, per $n \in \mathbb{N}$. Se X è finito non vuoto si ha che $S(X)$ è numerabile. Ricordiamo che con la notazione $\mathcal{P}_0(X)$ abbiamo indicato la famiglia dei sottoinsiemi finiti di X.

Corollario 2.31. *Per ogni insieme infinito X vale $|S(X)| = |\mathcal{P}_0(X)| = |X|$.*

Dimostrazione. Per ogni intero $n > 0$ si ha che $|X^n| = |X|$. Infatti, se $n > 1$ si ha per induzione $|X^n| = |X^{n-1} \times X| = |X \times X| = |X|$ e quindi $S(X)$ è unione numerabile di insiemi con la stessa cardinalità di X. Poiché esiste una naturale applicazione surgettiva $S(X) \to \mathcal{P}_0(X) - \{\emptyset\}$ si ha che per ogni insieme infinito X vale $|X| = |\mathcal{P}_0(X)|$. $\square$

Esercizi

2.20. Dimostrare che ogni insieme infinito è unione disgiunta di sottoinsiemi infiniti numerabili.

2.21. Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito. Dimostrare che l'anello $\mathbb{K}[x]$ dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{K}$.

2.22. Siano X, Y due insiemi infiniti e sia $A \subset X \times Y$ un sottoinsieme tale che:

1. Per ogni $x \in X$, l'insieme $\{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$ è numerabile.
2. Per ogni $y \in Y$, l'insieme $\{x \in X \mid (x, y) \in A\}$ è non vuoto.

Dimostrare che la cardinalità di X è maggiore od uguale a quella di Y. (Sugg.: dimostrare che esiste un'applicazione iniettiva $A \to X \times \mathbb{N}$.)

2.23. Sia $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi che sono radici di un polinomio a coefficienti razionali. Dimostrare che $\overline{\mathbb{Q}}$ è numerabile e dedurne l'esistenza di numeri trascendenti. (Sugg.: Esercizio 2.22. Per definizione, un numero è trascendente se non appartiene a $\overline{\mathbb{Q}}$.)

2.24 (∗). Siano I un insieme infinito, $\mathbb{K}$ un campo e $\mathcal{B}$ una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^I$ di tutte le applicazioni $f\colon I \to \mathbb{K}$. Dimostrare che la cardinalità di $\mathcal{B}$ è strettamente maggiore di quella di I. (Sugg.: considerare prima il caso in cui $\mathbb{K}$ è numerabile. Dimostrare poi che se F è un sottocampo di $\mathbb{K}$, allora, mediante l'inclusione naturale $F^I \subset \mathbb{K}^I$, ogni sottinsieme $A \subset F^I$ linearmente indipendente su F è anche linearmente indipendente su $\mathbb{K}$.)

3

Strutture topologiche

Spazi topologici – Parte interna, chiusura ed intorni – Applicazioni continue – Spazi metrici – Sottospazi ed immersioni – Prodotti topologici – Spazi di Hausdorff

Secondo Jean Piaget, fino all'età di 2 anni e 1/2 i bambini eseguono semplici scarabocchi. Dai 2 e 1/2 ai 4 anni, invece comincia ad affermarsi la capacità di riprodurre tutti i rapporti topologici. Cioè i bambini riproducono tutte le figure in maniera diversa a seconda che siano chiuse o aperte. Dai 4 anni sanno riprodurre tutti i rapporti topologici: il punto interno, esterno o sul limite della figura. Soltanto dai 4 ai 7 anni ha luogo una differenziazione di figure semplici (quadrati, triangoli ecc.) sulla base anche delle dimensioni o degli angoli.

Uno spazio è un insieme i cui elementi vengono chiamati punti. Dotare uno spazio X di una struttura topologica significa saper dire, per ogni suo sottoinsieme, quali sono i suoi punti interni, i suoi punti esterni ed i suoi punti di frontiera. Ovviamente ciò non può essere fatto totalmente ad arbitrio ma devono essere soddisfatte alcune regole dettate dal buonsenso:

1. Ogni punto di X è interno ad X.
2. Se x è interno ad A, allora $x \in A$.
3. Se x è interno ad A e $A \subset B$, allora x è interno a B.
4. Se x è interno sia ad A che a B, allora è interno anche ad $A \cap B$.
5. Se A° denota l'insieme dei punti interni di A, allora ogni punto di A° è interno ad A°.

I punti esterni ad un sottoinsieme saranno i punti interni al suo complementare ed i punti di frontiera saranno quelli che non sono né interni né esterni.

Le precedenti cinque condizioni possono essere prese come definizione assiomatica di struttura topologica (vedi Esercizio 3.12). Tuttavia è oramai considerato standard definire una tale struttura in termini della famiglia degli aperti, ed è quello che faremo a partire dalla prossima sezione.

3.1 Spazi topologici

Definizione 3.1. *Sia X un insieme, una* ***topologia*** *su X è una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X, detti* ***aperti****, che soddisfa le seguenti condizioni:*

(A1) $\emptyset$ *e X sono aperti.*
(A2) *Unione arbitraria di aperti è un sottoinsieme aperto.*
(A3) *Intersezione di due aperti è un sottoinsieme aperto.*

Un insieme dotato di una topologia viene detto ***spazio topologico****. Gli elementi di uno spazio topologico vengono detti* ***punti****.*

Osserviamo che la condizione (A3) implica che ogni intersezione finita di aperti è ancora un sottoinsieme aperto: infatti se $A_1, \ldots, A_n$ sono aperti si può scrivere $A_1 \cap \cdots \cap A_n = (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \cap A_n$. Per induzione su n si ha che $A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}$ è aperto e quindi per A3 anche $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ è aperto.

Ogni insieme possiede topologie. Ad esempio la famiglia $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di X è una topologia che viene detta **discreta**, mentre la famiglia $\mathcal{T}$ formata dal solo insieme vuoto e da tutto X è anch'essa una topologia, detta **indiscreta**.

Esempio 3.2. Nella **topologia euclidea** su $\mathbb{R}$, un sottoinsieme $U \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione di intervalli aperti. Gli aperti così definiti soddisfano le condizioni A1, A2 ed A3 della Definizione 3.1: ad esempio, se

$$A = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[\,, \qquad B = \bigcup_{j\in J}]c_j, d_j[$$

sono due aperti, allora per le leggi distributive la loro intersezione

$$A \cap B = (\bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[\,) \cap (\bigcup_{j\in J}]c_j, d_j[\,) = \bigcup_{i\in I, j\in J}]a_i, b_i[\cap]c_j, d_j[$$

è ancora unione di intervalli aperti.

Esempio 3.3. Nella **topologia della semicontinuità superiore** su $\mathbb{R}$, gli aperti non vuoti sono tutti e soli i sottoinsiemi della forma $]-\infty, a[$, al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Definizione 3.4. *Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme $C \subset X$ si dice* ***chiuso*** *se $X - C$ è aperto.*

Poiché il passaggio al complementare scambia unioni con intersezioni, i chiusi di una topologia su X soddisfano le condizioni:

(C1) $\emptyset$ e X sono chiusi.
(C2) Intersezione arbitraria di chiusi è un sottoinsieme chiuso.
(C3) Unione di due chiusi è un sottoinsieme chiuso.

Come nel caso degli aperti, la condizione (C3) implica che ogni unione finita di chiusi è un sottoinsieme chiuso.

Naturalmente è possibile descrivere una topologia indicando quali sono i chiusi. Ad esempio la **topologia cofinita** su di un insieme X è quella in cui un sottoinsieme $C \subset X$ è chiuso se e solo se $C = X$ oppure C è finito.

Definizione 3.5. *Sia $\mathcal{T}$ una topologia su un insieme X. Una sottofamiglia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ si dice una **base** di $\mathcal{T}$ se ogni aperto $A \in \mathcal{T}$ può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

Esempio 3.6. Gli intervalli aperti sono una base della topologia euclidea sulla retta reale.

Una base determina univocamente la topologia: infatti gli aperti sono tutte e sole le unioni arbitrarie di elementi della base.

Teorema 3.7. *Siano X un insieme e $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ una famiglia di suoi sottoinsiemi. Allora esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e soltanto se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:*

1. *$X = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$.*
2. *Per ogni coppia $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni punto $x \in A \cap B$ esiste $C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subset A \cap B$.*

Dimostrazione. La necessità delle due condizioni è chiara, vediamo la sufficienza. Definiamo gli aperti come unioni qualsiasi di elementi di $\mathcal{B}$; si ha che sono aperti X (unione completa) e l'insieme vuoto (unione vuota) mentre unione di aperti è chiaramente un aperto. La seconda condizione implica che per ogni $A, B \in \mathcal{B}$ vale

$$A \cap B = \cup\{C \mid C \in \mathcal{B},\, C \subset A \cap B\}.$$

Se $U = \cup A_i$ e $V = \cup B_j$ sono unioni arbitrarie di elementi $A_i, B_j \in \mathcal{B}$, allora per le leggi distributive,

$$U \cap V = \bigcup_{i,j}(A_i \cap B_j) = \cup\{C \mid C \in \mathcal{B} \text{ ed esistono } i, j \text{ tali che } C \subset A_i \cap B_j\}.$$

□

Per prevenire un errore comune, invitiamo lo studioso a non confondere la definizione di base con il Teorema 3.7: nella definizione di base la topologia è data, il criterio da verificare è quello che ogni aperto sia unione di aperti della base e non quello esposto nel teorema.

Esiste una naturale relazione d'ordine tra le topologie su di un insieme X.

Definizione 3.8. *Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}$ su X, diremo che $\mathcal{T}$ è **più fine** di $\mathcal{R}$ (e di conseguenza che $\mathcal{R}$ è **meno fine** di $\mathcal{T}$) se $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, cioè se ogni aperto della topologia $\mathcal{R}$ è aperto anche in $\mathcal{T}$.*

Esempio 3.9. La **retta di Sorgenfrey** è per definizione l'insieme di tutti i numeri reali dotato della topologia che ha come base di aperti la famiglia di tutti gli intervalli semichiusi $[a, b[$. Poiché $]a, b[= \cup_{c>a}[c, b[$, questa topologia è più fine della topologia euclidea.[1]

Data una collezione arbitraria $\{\mathcal{T}_i\}$ di topologie su di un insieme X, la loro intersezione $\mathcal{T} = \cap_i \mathcal{T}_i$ è ancora una topologia. Se le $\mathcal{T}_i$ sono tutte e sole le topologie che contengono una data famiglia $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ di sottoinsiemi di X, allora $\mathcal{T}$ è la topologia meno fine tra quelle che contengono gli elementi di $\mathcal{S}$ come aperti.

Esempio 3.10. Sia $\{X_i \mid i \in I\}$ una collezione di spazi topologici disgiunti, ossia tali che $X_i \cap X_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$. Sulla loro unione $X = \cup_i X_i$ possiamo considerare la topologia meno fine tra quelle che contengono tutte le topologie degli spazi X_i. Equivalentemente, un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se e solo se $A \cap X_i$ è aperto in X_i per ogni i. Lo spazio topologico così ottenuto viene detto **unione disgiunta** degli spazi X_i.

Esempio 3.11. Siano $\mathbb{K}$ un campo, $n > 0$ un intero ed indichiamo con $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n coordinate a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per ogni $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ definiamo

$$D(f) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0\}.$$

Siccome $D(1) = \mathbb{K}^n$ e $D(f) \cap D(g) = D(fg)$, si ha che i sottoinsiemi $D(f)$ formano una base di aperti di una topologia su $\mathbb{K}^n$ che viene detta **topologia di Zariski**.

Denotiamo con $V(f)$ il complementare di $D(f)$ e, per ogni sottoinsieme $E \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ poniamo

$$V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall f \in E\}.$$

Se f appartiene all'ideale generato da un sottoinsieme $E \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, allora esistono un intero $n > 0$, $f_1, \ldots, f_n \in E$ e $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tali che $f = f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n$ e quindi $V(E) \subset V(f_1) \cap \cdots V(f_n) \subset V(f)$. In particolare, se I è l'ideale generato da E, allora vale $V(I) = V(E)$. Ne deduciamo che i chiusi della topologia di Zariski sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $V(I)$, al variare di I tra gli ideali dell'anello $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

[1] I matematici non introducono topologie strane per divertimento: ad esempio Sorgenfrey ha introdotto la topologia che ha preso il suo nome per rispondere (negativamente) alla domanda se il prodotto di spazi paracompatti (Definizione 7.20) fosse ancora paracompatto [So47].

Esercizi

3.1 (♡). Vero o falso?

1. Sulla singoletta esiste una sola struttura topologica.
2. In un insieme con due elementi esistono esattamente 4 strutture topologiche.
3. In un insieme finito ogni topologia ha un numero pari di aperti.
4. Su di un insieme infinito dotato della topologia cofinita, ogni coppia di aperti non vuoti ha intersezione non vuota.

3.2. Dimostrare che gli intervalli $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sono chiusi nella topologia euclidea.

3.3. Sia X un insieme e $\infty \in X$ un elemento fissato. Verificare che

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid \infty \notin A \text{ oppure } X - A \text{ è finito } \}$$

è una topologia su X.

3.4. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. Mostrare che i sottoinsiemi

$$M_x = \{y \in X \mid x \leq y\}$$

formano, al variare di $x \in X$, una base di una topologia.

3.5 (Esistono infiniti numeri primi, ♡). Per ogni coppia di numeri interi $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b > 0$, denotiamo $N_{a,b} = \{a + kb \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare:

1. La famiglia $\mathcal{B} = \{N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b > 0\}$ di tutte le progressioni aritmetiche è una base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$.
2. Ogni $N_{a,b}$ è aperto e chiuso nella topologia $\mathcal{T}$.
3. Denotiamo con $P \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei numeri primi. Vale

$$\mathbb{Z} - \{-1, 1\} = \cup\{N_{0,p} \mid p \in P\}$$

e quindi, se P fosse finito, allora $\{-1, 1\}$ sarebbe un aperto in $\mathcal{T}$.

3.2 Parte interna, chiusura ed intorni

Definizione 3.12. *Sia X uno spazio topologico e $B \subset X$. Si denota:*

1. *con B° l'unione di tutti gli aperti contenuti in B,*
2. *con $\overline{B}$ l'intersezione di tutti i chiusi contenenti B,*
3. *$\partial B = \overline{B} - B^\circ$.*

L'insieme B° viene detto ***parte interna*** *di B ed è il più grande aperto contenuto in B; i suoi punti si dicono* ***interni*** *a B.*

L'insieme $\overline{B}$ è il più piccolo chiuso contenente B e viene detto ***chiusura*** *di B; i suoi punti si dicono* ***aderenti*** *a B.*

Il sottoinsieme ∂B è l'intersezione dei due chiusi $\overline{B}$ e $X - B^\circ$ e viene detto ***frontiera*** *di B.*

Si osservi che un sottoinsieme B di uno spazio topologico è aperto se e solo se $B = B^\circ$ ed è chiuso se e solo se $B = \overline{B}$.

Definizione 3.13. *Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X di dice* ***denso*** *se $\overline{A} = X$ o, equivalentemente, se A interseca ogni aperto non vuoto di X.*

Esempio 3.14.
1. In uno spazio con la topologia indiscreta ogni sottoinsieme non vuoto è denso.
2. In uno spazio con la topologia discreta nessun sottoinsieme proprio è denso.
3. L'insieme dei numeri razionali è denso nello spazio $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea.
4. In uno spazio con la topologia cofinita ogni sottoinsieme infinito è denso.

Definizione 3.15. *Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice un* ***intorno di*** *x se x è un punto interno di U, cioè se esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V \subset U$.*

Denotiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x. Per definizione, se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico, allora $A^\circ = \{x \in A \mid A \in \mathcal{I}(x)\}$; in particolare un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Lemma 3.16. *La famiglia $\mathcal{I}(x)$ degli intorni di un punto x è chiusa per estensione ed intersezione finita, ossia:*

1. *Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subset V$, allora $V \in \mathcal{I}(x)$.*
2. *Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$.*

Dimostrazione. Se U è un intorno di x vuol dire che esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$. Se $U \subset V$ a maggior ragione $x \in A \subset V$ e quindi anche V è un intorno di x. Se U, V sono intorni di x vuol dire che esistono due aperti A, B tali che $x \in A \subset U$, $x \in B \subset V$. Dunque $x \in A \cap B \subset U \cap V$. □

Il passaggio al complementare permette di dare una utile caratterizzazione della chiusura di un sottoinsieme.

Lemma 3.17. *Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Un punto $x \in X$ appartiene a $\overline{A}$ se e solo se per ogni intorno $U \in \mathcal{I}(x)$ vale $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Per definizione $x \notin \overline{A}$ se e solo se x è interno a $X - A$, mentre x è interno a $X - A$ se e solo se esiste un intorno $U \in \mathcal{I}(x)$ tale che $U \subset X - A$. □

Esiste per gli intorni l'analogo del concetto di base.

Definizione 3.18. *Sia x un punto di uno spazio topologico X. Una sottofamiglia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$ si dice una* ***base locale*** *oppure un* ***sistema fondamentale di intorni*** *di x, se per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$ esiste $A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subset U$.*

Esempio 3.19. 1. Sia $U \in \mathcal{I}(x)$ un intorno fissato. Allora tutti gli intorni di x contenuti in U formano un sistema fondamentale di intorni di x.
2. Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia, allora gli aperti di $\mathcal{B}$ che contengono x formano un sistema fondamentale di intorni di x.

È possibile descrivere una topologia elencando quali sono gli intorni dei punti: vedere in proposito l'Esercizio 3.12.

Esercizi

3.6 (♡). Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio topologico. Dimostrare che vale $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3.7. Sia A un sottoinsieme denso di uno spazio topologico X; dimostrare che per ogni aperto $U \subset X$ vale $U \subset \overline{U \cap A}$.

3.8. Sul piano $\mathbb{R}^2$ si consideri la famiglia $\mathcal{T}$ formata dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e da tutti i dischi aperti $\{x^2 + y^2 < r^2\}$, per $r > 0$. Dimostrare che si tratta di una topologia e determinare la chiusura dell'insieme $\{xy = 1\}$.

3.9. Mostrare che nella retta reale $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, gli intervalli $[-2^{-n}, 2^{-n}]$, per $n \in \mathbb{N}$, sono un sistema fondamentale di intorni di 0.

3.10. Uno spazio topologico si dice **T1** se ogni sottoinsieme finito è chiuso. Dimostrare che uno spazio topologico X è T1 se e solo se per ogni $x \in X$ vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U.$$

3.11. Sia $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di un punto x in uno spazio topologico. Dimostrare che la famiglia

$$\{V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

è ancora un sistema fondamentale di intorni di x.

3.12 (♡). Sia X un insieme e supponiamo data, per ogni $x \in X$, una famiglia $\mathcal{I}(x)$ di sottoinsiemi di X in modo tale che le seguenti cinque condizioni siano soddsfatte:

1. $X \in \mathcal{I}(x)$ per ogni punto $x \in X$.
2. $x \in U$ per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$.
3. Se $U \in \mathcal{I}(x)$ e $U \subset V$, allora $V \in \mathcal{I}(x)$.
4. Se $U, V \in \mathcal{I}(x)$, allora $U \cap V \in \mathcal{I}(x)$.
5. Se $U \in \mathcal{I}(x)$, allora esiste un sottoinsieme $V \subset U$ tale che $x \in V$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ per ogni $y \in V$.

Dimostrare che esiste un'unica topologia su X, rispetto alla quale $\mathcal{I}(x)$ è la famiglia degli intorni di x, per ogni $x \in X$.

3.13. Sia X un insieme fissato. Chiameremo *operatore di chiusura* su X, un'applicazione $C\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ che soddisfa le seguenti quattro proprietà (dette *di Kuratowski*):

1. $A \subset C(A)$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.
2. $C(A) = C(C(A))$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.
3. $C(\emptyset) = \emptyset$.
4. $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B)$ per ogni $A, B \subset X$.

Dimostrare che per ogni struttura topologica su X, l'applicazione $A \mapsto \overline{A}$ è un operatore di chiusura e, viceversa, che per ogni operatore di chiusura C su X esiste un'unica struttura topologica rispetto alla quale $C(A) = \overline{A}$.

3.3 Applicazioni continue

Definizione 3.20. *Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici si dice* ***continua*** *se, per ogni aperto $A \subset Y$ l'insieme*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

è aperto in X.

Prima di proseguire, osserviamo che l'operatore $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ commuta con le operazioni di passaggio al complementare ed unione, e cioè

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A), \qquad f^{-1}(\cup_i A_i) = \cup_i f^{-1}(A_i).$$

Da ciò segue che:

1. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se, per ogni chiuso $C \subset Y$ l'insieme $f^{-1}(C)$ è chiuso in X (passaggio al complementare).
2. Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Y. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$ l'insieme $f^{-1}(B)$ è aperto in X (ogni aperto in Y è unione di elementi di $\mathcal{B}$).

Lemma 3.21. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici. Allora f è continua se e solo se $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ per ogni sottoinsieme $A \subset X$.*

Dimostrazione. Supponiamo f continua, allora $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso che contiene A e quindi $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$.

Viceversa, supponiamo $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ per ogni $A \subset X$. In particolare per ogni chiuso $C \subset Y$ vale (ponendo $A = f^{-1}(C)$)

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C} = C$$

e quindi $\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}(C)$, che equivale a dire che $f^{-1}(C)$ è chiuso. $\square$

Il Lemma 3.21 implica la totale equivalenza tra la Definizione 1.4 e la Definizione 3.20.

Teorema 3.22. *Composizione di applicazioni continue è continua.*

Dimostrazione. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due applicazioni continue e sia $A \subset Z$ un aperto. Dalla continuità di g segue che $g^{-1}(A)$ è aperto e, dalla continuità di f segue che $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ è aperto. Basta adesso osservare che $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = (gf)^{-1}(A)$. □

Definizione 3.23. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici. Diremo che f è **continua in un punto** $x \in X$ se per ogni intorno U di $f(x)$ esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subset U$.*

Teorema 3.24. *Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra spazi topologici è continua se e solo se è continua in ogni punto di X.*

Dimostrazione. Supponiamo f continua e sia U un intorno di $f(x)$. Per definizione di intorno esiste un aperto $A \subset Y$ tale che $f(x) \in A \subset U$: l'aperto $V = f^{-1}(A)$ è un intorno di x e $f(V) \subset U$.

Viceversa, supponiamo f continua in ogni punto e sia A un aperto di Y, dobbiamo provare che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto; se $x \in f^{-1}(A)$ allora A è un intorno di $f(x)$ ed esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subset A$. Ciò equivale a dire $V \subset f^{-1}(A)$ e dunque $f^{-1}(A)$ è intorno di x. □

Definizione 3.25. *Un **omeomorfismo** è un'applicazione continua e bigettiva con inversa continua. Per essere più precisi, un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice un omeomorfismo se esiste un'applicazione continua $g\colon Y \to X$ tale che le composizioni gf e fg sono le identità in X e Y rispettivamente.*

*Diremo che due spazi topologici sono **omeomorfi** se esiste un omeomorfismo tra di loro.*

Definizione 3.26. *Un'applicazione $f\colon X \to Y$ tra due spazi topologici si dice:*

1. ***aperta** se $f(A)$ è aperto in Y per ogni aperto A di X.*
2. ***chiusa** se $f(C)$ è chiuso in Y per ogni chiuso C di X.*

Lemma 3.27. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua tra due spazi topologici. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *f è un omeomorfismo.*
2. *f è chiusa e bigettiva.*
3. *f è aperta e bigettiva.*

Dimostrazione. [1 ⇒ 2] Ogni omeomorfismo è bigettivo per definizione. Se $g\colon Y \to X$ è l'inversa di f, allora g è continua e per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset X$, $f(C) = g^{-1}(C)$ è chiuso in Y.

[2 ⇒ 3] Sia $A \subset X$ un aperto e poniamo $C = X - A$. Poiché f è bigettiva si ha $f(A) = f(X - C) = Y - f(C)$ e quindi $f(A)$ è il complementare del chiuso $f(C)$.

[3 ⇒ 1] Se $g\colon Y \to X$ è l'inversa di f, allora per ogni sottoinsieme aperto $A \subset X$, $g^{-1}(A) = f(A)$ è aperto e quindi g è continua. □

Con il termine funzione continua (a valori reali) si intende un'applicazione $f\colon X \to \mathbb{R}$ che è continua rispetto alla topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

Esercizi

3.14. Dimostrare che le applicazioni costanti sono continue, indipendentemente dalle topologie considerate.

3.15. Siano date due topologie $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ su di un insieme X. Provare che l'applicazione identica $(X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$, $x \mapsto x$, è continua se e solo se $\mathcal{T}_1$ è più fine di $\mathcal{T}_2$.

3.16. Sia data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; per ogni $k \in \mathbb{R}$ denotiamo

$$M(k) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > k\} \qquad m(k) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < k\}.$$

Dimostrare che f è continua se e solo se $M(k)$ e $m(k)$ sono aperti per ogni k.

3.17. Due sottoinsiemi A, B di uno spazio topologico si dicono **aderenti** se

$$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \neq \emptyset.$$

Dimostrare che un'applicazione è continua se e solo se preserva la relazione di aderenza tra sottoinsiemi.

3.18. Provare che composizione di omeomorfismi è un omeomorfismo, che l'inverso di un omeomorfismo è un omeomorfismo e quindi che l'insieme Omeo(X) degli omeomorfismi di uno spazio topologico X in sé è un gruppo. Mostrare inoltre che la relazione sulla categoria[2] degli spazi topologici, $X \sim Y$ se e solo se X è omeomorfo a Y, è una relazione di equivalenza (detta **equivalenza topologica**).

3.19 (♡). Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Provare che f è aperta se e solo se $f(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

3.20. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione aperta e sia $D \subset Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che $f^{-1}(D)$ è denso in X.

---

[2] A rigore, il concetto matematico di categoria è molto diverso da quello di insieme: in attesa della definizione corretta (Sezione 10.4), il termine categoria può essere usato come sinonimo di collezione.

3.21. Sia dato il seguente diagramma commutativo di applicazioni continue:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & Z \\ Y \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrare che se f è surgettiva e g è chiusa, allora anche h è chiusa.

3.22. Sia X uno spazio topologico. Diremo che un'applicazione $f\colon X \to \mathbb{R}$ è *semicontinua superiormente* se $f^{-1}(]-\infty, a[)$ è aperto in X per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $f\colon X \to \mathbb{R}$ è semicontinua superiormente se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x tale che $f(y) < f(x) + \varepsilon$ per ogni $y \in U$.

3.23. Trovare un esempio di funzione $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continua solamente nel punto 0.

3.24 (♡). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme numerabile. Trovare una funzione $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ che sia continua in tutti e soli i punti di $\mathbb{R} - A$.

3.25 (♡, ∗). Sia X uno spazio topologico e $f\colon X \to \mathbb{R}$ una qualsiasi applicazione. Dimostrare che il sottoinsieme dei punti di X dove f è continua è intersezione di una famiglia numerabile di aperti.

Osservazione 3.28. È possibile dimostrare (Esercizio 6.25) che l'insieme dei numeri razionali non è intersezione numerabile di aperti di $\mathbb{R}$. Come curiosa conseguenza degli esercizi 3.24 e 3.25 abbiamo dunque l'esistenza di funzioni che sono continue in tutti e soli i punti irrazionali, mentre non esiste alcuna funzione continua in tutti e soli i punti razionali.

3.4 Spazi metrici

Definizione 3.29. *Una* ***distanza*** *su di un insieme X è un'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *$d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e vale $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.*
3. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.*

La Condizione 3 viene detta **disuguaglianza triangolare**.

Esempio 3.30. Su di un qualsiasi insieme X, la funzione

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

è una distanza.

Definizione 3.31. *Uno **spazio metrico** è una coppia (X,d), dove X è un insieme e d è una distanza su X.*

Esempio 3.32. La retta $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea $d(x,y) = |x-y|$ è uno spazio metrico.

Esempio 3.33. Lo spazio $\mathbb{R}^n$, dotato della distanza euclidea

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

è uno spazio metrico: abbiamo già dimostrato la disuguaglianza triangolare nel Lemma 1.3.

Esempio 3.34. Estendendo l'identificazione $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ data dal piano di Gauss alle potenze cartesiane si ha $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$; la distanza euclidea su $\mathbb{R}^{2n}$ si esprime nelle coordinate di $\mathbb{C}^n$ tramite la formula

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + \cdots + |x_n-y_n|^2}, \qquad x,y \in \mathbb{C}^n.$$

Chiameremo la funzione $d\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ **distanza euclidea su** $\mathbb{C}^n$.

Esempio 3.35. Su $\mathbb{R}^n$ esistono altre interessanti distanze, come ad esempio

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad \text{e} \quad d_\infty(x,y) = \max_i\{|x_i-y_i|\}.$$

Indicando con d la distanza euclidea si hanno le disuguaglianze

$$d_\infty(x,y) \le d(x,y) \le d_1(x,y) \le n \cdot d_\infty(x,y):$$

l'unica non banale è $d(x,y) \le d_1(x,y)$ che si ricava elevando al quadrato entrambi i membri.

Esempio 3.36. Sia d una distanza su di un insieme X. Allora l'applicazione

$$\overline{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad \overline{d}(x,y) = \min(1, d(x,y))$$

è ancora una distanza detta **limitazione standard** di d. L'unica verifica non banale è la disuguaglianza triangolare, ossia che per ogni $x,y,z \in X$ vale $\overline{d}(x,y) \le \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y)$. Poiché $\overline{d} \le 1$, se $\overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y) \ge 1$ non c'è nulla da dimostrare. Se invece $\overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y) < 1$ allora si ha $\overline{d}(x,z) = d(x,z)$, $\overline{d}(z,y) = d(z,y)$ e quindi

$$\overline{d}(x,y) \le d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).$$

Definizione 3.37. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Il sottoinsieme*

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

*viene detto **palla aperta** di centro x e raggio r (rispetto alla distanza d).*

Il nome “palla” è motivato dall'esempio della distanza euclidea. Le palle delle distanze dell'Esempio 3.35 sono in realtà degli ipercubi.

Ogni distanza induce in modo naturale una struttura topologica.

Definizione 3.38 (Topologia indotta da una distanza). *Sia (X, d) uno spazio metrico. Nella topologia su X indotta dalla distanza d, un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset A$.*

Verifichiamo che la famiglia degli aperti definiti in 3.38 soddisfa gli assiomi A1, A2 e A3. Se $A = \emptyset$ la condizione è verificata tautologicamente, mentre, poiché $x \in B(x, r)$ per ogni $r > 0$, si può scrivere $X = \cup_{x \in X} B(x, 1)$. Se $A = \cup_i A_i$ con A_i aperto per ogni i e $x \in A$, allora esiste un indice j tale che $x \in A_j$ e quindi possiamo trovare $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset A_j \subset A$. Se A, B sono aperti e $x \in A \cap B$ esistono $r, t > 0$ tali che $B(x, r) \subset A$, $B(x, t) \subset B$; se indichiamo con s il minimo tra r e t si ha $B(x, s) \subset A \cap B$.

Esempio 3.39. La **topologia classica** (detta anche **topologia euclidea**) sugli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ è per definizione la topologia indotta dalla distanza euclidea. A meno che non sia specificato diversamente, con i simboli $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ intenderemo i rispettivi insiemi dotati della topologia classica.

Lemma 3.40. *Nella topologia indotta da una distanza si ha:*

1. *Le palle aperte sono sottoinsiemi aperti.*
2. *Un sottoinsieme è aperto se e solo se è unione di palle aperte (e quindi le palle aperte sono una base della topologia).*
3. *Un sottoinsieme U è un intorno di un punto x se e solo se contiene una palla aperta di centro x, cioè se e solo se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset U$.*

Dimostrazione. [1] Se $y \in B(x, r)$ poniamo $s = r - d(x, y) > 0$; se $d(z, y) < s$ allora $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r$ e quindi $B(y, s) \subset B(x, r)$.

[2] Dato che unione di aperti è ancora un aperto l'implicazione “se” è dimostrata. Viceversa se A è un aperto possiamo scegliere per ogni $x \in A$ un numero reale $r(x) > 0$ tale che $B(x, r(x)) \subset A$ e quindi $A = \cup_{x \in A} B(x, r(x))$.

[3] Per definizione, U è un intorno di x se e solo se esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$. Se $B(x, r) \subset U$, poiché $B(x, r)$ è un aperto, si ha che U è un intorno. Viceversa se U è un intorno esiste un aperto A tale che $x \in A \subset U$ e quindi esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset A \subset U$. □

Esempio 3.41. Sia (X, d) uno spazio metrico. La stessa dimostrazione dell'Esempio 1.6 mostra che per ogni $x \in X$ ed ogni numero reale r, il sottoinsieme $C = \{x' \in X \mid d(x, x') \leq r\}$ è chiuso nella topologia indotta dalla distanza. È interessante osservare che, in generale, tale sottoinsieme non coincide con la chiusura della palla aperta $B(x, r)$: basta considerare ad esempio le palle aperte di raggio 1 nella distanza dell'Esempio 3.30.

Per gli spazi metrici ritroviamo la classica definizione di continuità data mediante la famigerata accoppiata epsilon-delta.

Teorema 3.42. *Siano $f\colon (X,d) \to (Y,h)$ un'applicazione tra due spazi metrici ed x un punto di X. Allora f è continua in x se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $h(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ogniqualvolta $d(x,y) < \delta$.*

Dimostrazione. Continuità in x significa che per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subset V$. Basta adesso applicare la descrizione degli intorni in uno spazio metrico espressa nel Lemma 3.40. □

Esempio 3.43 (Distanza da un sottoinsieme). Sia (X,d) uno spazio metrico. Per ogni sottoinsieme non vuoto $Z \subset X$ consideriamo la funzione *distanza da* Z definita come

$$d_Z\colon X \to \mathbb{R}, \qquad d_Z(x) = \inf_{z\in Z} d(x,z).$$

Notiamo che $d_Z(x) = 0$ se e solo se $x \in \overline{Z}$. Inoltre, la funzione d_Z soddisfa la disuguaglianza triangolare $|d_Z(x) - d_Z(y)| \le d(x,y)$, ed è quindi continua. Infatti, per evidenti ragioni di simmetria, basta dimostrare che per ogni coppia di punti $x, y \in X$ vale $d_Z(y) - d_Z(x) \le d(x,y)$. Dalla definizione segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $z \in Z$ tale che $d_Z(x) + \varepsilon \ge d(x,z)$ e quindi

$$d_Z(y) \le d(z,y) \le d(z,x) + d(x,y) \le d_Z(x) + \varepsilon + d(x,y).$$

In particolare $d_Z(y) - d_Z(x) \le \varepsilon + d(x,y)$ e tutto segue prendendo il limite per ε che tende a 0.

Corollario 3.44. *Siano d, h due distanze su di un insieme X. La topologia indotta da d è più fine della topologia indotta da h se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ tale che $d(x,y) < \delta$ implica $h(x,y) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. La topologia indotta da d è più fine di quella indotta da h se e solo se l'applicazione identità $(X,d) \to (X,h)$ è continua. □

Definizione 3.45. *Due distanze su un insieme X si dicono* ***equivalenti*** *se inducono la stessa topologia. Uno spazio topologico X si dice* ***metrizzabile*** *se la topologia è indotta da una distanza opportuna.*

Ad esempio se d è una distanza, allora per ogni numero reale positivo a, l'applicazione ad è una distanza con le stesse palle di d ed è quindi equivalente a d.

Corollario 3.46. *Siano d, h due distanze su X ed a, c due numeri reali positivi. Se*

$$d(x,y) \ge \frac{\min(a, h(x,y))}{c}$$

per ogni $x, y \in X$, allora la topologia indotta da d è più fine di quella indotta da h. In particolare ogni distanza è equivalente alla propria limitazione standard (Esempio 3.36).

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte basta prendere, nell'enunciato del Corollario 3.44, il numero δ come il minimo tra a/c ed ε/c. Indicando con $\overline{d}(x,y) = \min(1, d(x,y))$ la limitazione standard di d, si hanno le disuguaglianze

$$d(x,y) \geq \frac{\min(1, \overline{d}(x,y))}{1}, \qquad \overline{d}(x,y) \geq \frac{\min(1, d(x,y))}{1}.$$

□

Esempio 3.47. Siano (X,h) e (Y,k) spazi metrici e sia $f\colon [0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione tale che:

1. Vale $0 \leq f(c_1,c_2) \leq f(a_1,a_2) + f(b_1,b_2)$ ogniqualvolta $0 \leq c_1 \leq a_1 + b_1$ e $0 \leq c_2 \leq a_2 + b_2$.
2. $f(a,b) = 0$ se e solo se $a = b = 0$.

Allora la funzione $d\colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$, data dalla formula

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = f(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2)),$$

è una distanza su $X \times Y$. In particolare le tre funzioni:

$$d_1, d_2, d_\infty\colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R},$$

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = h(x_1,x_2) + k(y_1,y_2),$$
$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{h(x_1,x_2)^2 + k(y_1,y_2)^2},$$
$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(h(x_1,x_2), k(y_1,y_2)),$$

sono distanze che inducono la stessa topologia su $X \times Y$, come segue dal Corollario 3.46 e dalle disuguaglianze $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$.

Definizione 3.48. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme $A \subset X$ si dice* ***limitato*** *se esiste un numero reale M tale che*

$$d(a,b) \leq M \text{ per ogni } a,b \in Y.$$

Un'applicazione $f\colon Z \to X$, con Z insieme, si dice ***limitata*** *se $f(Z)$ è un sottoinsieme limitato.*

Il Corollario 3.46 mostra tra l'altro che la limitatezza non è una proprietà topologica, cioè che esistono coppie di distanze su un insieme X, che inducono la stessa topologia e tali che X è limitato per una distanza ed illimitato per l'altra.

Esercizi

3.26 (Disuguaglianza quadrangolare, $\heartsuit$). Sia (X,d) uno spazio metrico. Dimostrare che per ogni quaterna di punti $x,y,z,w \in X$ vale

$$|d(x,y) - d(z,w)| \le d(x,z) + d(y,w).$$

Si noti che, per $w = z$ la disuguaglianza quadrangolare diventa quella triangolare, mentre per $w = y$ la disuguaglianza quadrangolare diventa $|d(x,y) - d(z,y)| \le d(x,z)$.

3.27 ($\heartsuit$). Sia d una distanza su di un insieme finito X. Provare che la topologia indotta è quella discreta.

3.28. Sia X un insieme finito, $Y = \mathcal{P}(X)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X e definiamo una funzione $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ mediante la formula

$$d(A,B) = |A| + |B| - 2|A \cap B| \qquad (|A| = \text{cardinalità di } A).$$

Dimostrare che d è una distanza su Y.

3.29. Provare che la topologia indotta da una distanza è la meno fine tra quelle per cui le palle aperte sono insiemi aperti.

3.30. Mostrare che ogni insieme dotato della topologia discreta è metrizzabile.

3.31. Mostrare che ogni insieme con almeno due punti, dotato della topologia indiscreta, non è metrizzabile.

3.32. Dimostrare che, in uno spazio metrico, una palla aperta di raggio 1 non può contenere propriamente una palla aperta di raggio 2. Trovare, o dimostrare che non esiste, uno spazio metrico ed in esso una palla aperta di raggio 2 che contiene propriamente una palla aperta di raggio 3.

3.33 ($\heartsuit$). Sia d una distanza su di un insieme X. Dimostrare che

$$\delta\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

è una distanza che induce la stessa topologia.

3.34 ($\heartsuit$). Sia $f\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ una funzione continua tale che $f^{-1}(0) = 0$ e $f(c) \le f(a) + f(b)$ per ogni $c \le a + b$. Sia d una distanza su un insieme X.

Dimostrare che la funzione $h(x,y) = f(d(x,y))$ è una distanza che induce la stessa topologia di d.

3.35. Sia (X,d) uno spazio metrico e $Z \subset X$ un sottoinsieme non vuoto. Dimostrare che per ogni $x \in X$ vale

$$d_Z(x) = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid B(x,r) \cap Z \neq \emptyset\}.$$

3.36 ($\heartsuit$). Sia (X,d) uno spazio metrico e siano $A, B \subset X$ chiusi disgiunti. Dimostrare che esistono due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $A \subset U$ e $B \subset V$. (Sugg.: utilizzare le funzioni d_A e d_B introdotte nell'Esempio 3.43.)

3.5 Sottospazi ed immersioni

Ogni sottoinsieme Y di uno spazio topologico X eredita in modo naturale una struttura topologica. Diremo che un sottoinsieme $U \subset Y$ è **aperto in** Y se esiste un aperto V di X tale che $U = Y \cap V$: è immediato verificare che gli aperti in Y soddisfano le condizioni A1, A2 ed A3 e quindi definiscono una topologia in Y che chiameremo **topologia di sottospazio**.

Chiameremo **sottospazio topologico** di X un sottoinsieme Y dotato della topologia degli aperti in Y. Poiché $Y - (V \cap Y) = Y \cap (X - V)$, ne segue che $C \subset Y$ è chiuso in Y se e solo se esiste un chiuso B di X tale che $C = Y \cap B$. Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia su X, allora $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base della topologia indotta su Y. L'applicazione $i\colon Y \to X$ di inclusione è continua: infatti per ogni aperto A di X vale $i^{-1}(A) = Y \cap A$ che, per definizione è aperto in Y. Inoltre la topologia di sottospazio è la meno fine tra tutte le topologie di Y che rendono continua l'inclusione.

Esempio 3.49. Se (X, d) è uno spazio metrico e $Y \subset X$, la restrizione di d a $Y \times Y$ induce una struttura di spazio metrico su Y la cui topologia indotta coincide con quella di sottospazio topologico.

Definizione 3.50. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $Z \subset X$ si dice **discreto** se la topologia di sottospazio su Z è discreta.*

Equivalentemente, un sottospazio $Z \subset X$ è discreto se e solo se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subset X$ tale che $U \cap Z = \{z\}$.

Esempio 3.51. Gli interi formano un sottospazio discreto di $\mathbb{R}$, mentre $\mathbb{Q}$ non è un sottospazio discreto di $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.52. *Siano X, Z spazi topologici, Y un sottospazio di X, $f\colon Z \to Y$ un'applicazione e $if\colon Z \to X$ la composizione di f con l'inclusione di Y in X. Se if è continua allora anche f è continua e viceversa.*

Dimostrazione. Se f è continua allora if è composizione di applicazioni continue e quindi continua.

Viceversa supponiamo if continua e sia $A \subset Y$ un aperto di Y. Esiste un aperto U di X tale che $A = Y \cap U$ e quindi $f^{-1}(A) = (if)^{-1}(U)$ è aperto in Z. □

Lemma 3.53. *Siano Y un sottospazio di uno spazio topologico X ed A un sottoinsieme di Y. Allora la chiusura di A in Y è uguale all'intersezione di Y con la chiusura di A in X.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi di X che contengono A. I sottoinsiemi $C \cap Y$, $C \in \mathcal{C}$, sono tutti e soli i chiusi di Y che contengono A e quindi la chiusura di A in Y, che per definizione è $\bigcap_{C \in \mathcal{C}}(Y \cap C)$, coincide con $Y \cap (\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C)$, ossia con la restrizione ad Y della chiusura di A in X. □

Lemma 3.54. *Sia X uno spazio topologico, $Y \subset X$ un sottospazio e $Z \subset Y$ un sottoinsieme.*

1. *Se Y è aperto in X, allora Z è aperto in Y se e solo se è aperto in X.*
2. *Se Y è chiuso in X, allora Z è chiuso in Y se e solo se è chiuso in X.*
3. *Se Y è un intorno di y, allora Z è un intorno di y in Y se e solo se è un intorno di y in X.*

Dimostrazione. L'unica asserzione non banale è la terza. Sia U un aperto di X tale che $y \in U \subset Y$. Se Z è un intorno di y in Y allora esiste un aperto V in Y tale che $x \in V \subset Z$. L'intersezione $V \cap U$ è aperta in U, quindi è aperta anche in X e vale $y \in V \cap U \subset Z$.

Viceversa, se esiste un aperto V in X tale che $x \in V \subset Z$ allora $V = V \cap Y$ è aperto anche in Y. □

Definizione 3.55. *Un'applicazione continua ed iniettiva $f\colon X \to Y$ si dice una* ***immersione (topologica)*** *se gli aperti di X sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$, al variare di A tra gli aperti di Y.*

In altri termini, un'applicazione $f\colon X \to Y$ è una immersione se e solo se induce un omeomorfismo tra X ed il sottospazio topologico $f(X)$.

Non tutte le applicazioni continue ed iniettive sono immersioni. Ad esempio l'applicazione identità

$$Id\colon (\mathbb{R},\ \text{topologia euclidea}) \to (\mathbb{R},\ \text{topologia indiscreta})$$

è continua ed iniettiva ma non è una immersione.

Definizione 3.56. *Una* ***immersione chiusa*** *è una immersione che è anche un'applicazione chiusa.*

Una ***immersione aperta*** *è una immersione che è anche un'applicazione aperta.*

Lemma 3.57. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua:*

1. *Se f è chiusa ed iniettiva, allora f è una immersione chiusa.*
2. *Se f è aperta ed iniettiva, allora f è una immersione aperta.*

Dimostrazione. Supponiamo f è iniettiva, continua e chiusa. Per ogni chiuso $C \subset X$, l'immagine $f(C) \subset f(X)$ è chiusa in Y e quindi è chiusa anche nella topologia di sottospazio su $f(X)$. Ne segue che la restrizione $f\colon X \to f(X)$ è continua, bigettiva e chiusa e quindi un omeomorfismo. Il caso di f aperta è simile ed è lasciato per esercizio. □

Esistono immersioni che non sono né chiuse né aperte. Infatti una immersione $f\colon X \to Y$ è chiusa se e solo se $f(X)$ è chiuso in Y ed è aperta se e solo se $f(X)$ è aperto in Y.

Esercizi

3.37 (♡). Vero o falso?

1. La chiusura di un sottospazio discreto è ancora un sottospazio discreto.
2. Ogni sottospazio discreto di uno spazio metrico è chiuso.

3.38. Due sottoinsiemi A e B di uno spazio topologico X si dicono **separati** se non sono aderenti, e cioè se $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Dimostrare che:

1. Se $F, G \subset X$ sono entrambi aperti o entrambi chiusi, allora $A = F - G$ e $B = G - F$ sono separati.
2. Se $A, B \subset X$ sono separati, allora A, B sono aperti e chiusi in $A \cup B$.

3.39. Si considerino $X = \mathbb{R} - \{1\}$, $Y = \{y^2 = x^2 + x^3\} \subset \mathbb{R}^2$ e $f\colon X \to Y$, $f(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$. Mostrare che f è continua e bigettiva, che ogni $x \in X$ possiede un intorno U tale che $f\colon U \to f(U)$ è un omeomorfismo e che f non è un'applicazione chiusa.

3.40. Sia X uno spazio topologico: un sottoinsieme $Z \subset X$ si dice **localmente chiuso** se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subset X$ tale che $z \in U$ e $Z \cap U$ è chiuso in U.

Siano X uno spazio topologico e $Z \subset X$ un sottoinsieme. Dimostrare che sono fatti equivalenti:

1. Z è localmente chiuso.
2. Z è aperto in $\overline{Z}$ (rispetto alla topologia di sottospazio).
3. Z è intersezione di un chiuso e di un aperto di X.

3.6 Prodotti topologici

Siano P, Q spazi topologici, denotiamo con $P \times Q$ il loro prodotto cartesiano e con $p\colon P \times Q \to P$, $q\colon P \times Q \to Q$ le proiezioni sui fattori. La collezione $\mathfrak{T}$ delle topologie su $P \times Q$ che rendono continue p e q è non vuota poiché contiene la topologia discreta e l'intersezione di tutte le topologie in $\mathfrak{T}$ è la meno fine tra quelle che rendono p e q continue.

Definizione 3.58. *La **topologia prodotto** su $P \times Q$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono continue entrambe le proiezioni.*

Teorema 3.59. *Nelle notazioni precedenti:*

1. *I sottoinsiemi della forma $U \times V$, al variare di U e V tra gli aperti di P e Q, formano una base, che chiameremo **base canonica**, della topologia prodotto.*
2. *Le proiezioni p, q sono applicazioni aperte e per ogni $(x, y) \in P \times Q$ le restrizioni $p\colon P \times \{y\} \to P$, $q\colon \{x\} \times Q \to Q$ sono omeomorfismi.*

3. *Un'applicazione $f\colon X \to P\times Q$, è continua se e solo se le sue componenti $f_1 = pf$ e $f_2 = qf$ sono continue.*

Dimostrazione. [1] Indichiamo momentaneamente con $\mathcal{P}$ la topologia prodotto. Siccome $(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$, per il Teorema 3.7 i sottoinsiemi della forma $U\times V$, con U e V aperti in P e Q rispettivamente, sono una base di una topologia $\mathcal{T}$. La proiezione $p\colon P\times Q \to P$ è continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}$: infatti per ogni aperto $U \subset P$ l'insieme $p^{-1}(U) = U \times Q$ appartiene alla base ed a maggior ragione appartiene alla topologia $\mathcal{T}$. Allo stesso modo si dimostra che q è continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}$ e dunque $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{P}$. D'altra parte, se $U \subset P$ e $V \subset Q$ sono aperti, allora $U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \in \mathcal{P}$. Dunque ogni aperto di $\mathcal{T}$ è unione di aperti della topologia prodotto e questo implica che $\mathcal{T}$ è meno fine di $\mathcal{P}$. In definitiva $\mathcal{T}$ coincide con la topologia prodotto.

[2] Sia $y \in Q$, allora per ogni coppia di aperti $U \subset P$, $V \subset Q$ sui ha

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} U \times \{y\} & \text{se } y \in V \\ \emptyset & \text{se } y \notin V \end{cases}$$

e quindi gli aperti del sottospazio topologico $P\times\{y\}$ sono tutte e sole le unioni di $U \times \{y\}$ al variare di U tra gli aperti di P. Ne segue che $p\colon P \times \{y\} \to P$ è un omeomorfismo. Sia A un aperto di $P\times Q$: per dimostrare che $p(A)$ è aperto basra scrivere $p(A) = \cup_{y\in Q} p(A \cap P \times \{y\})$ e notare che ogni $p(A \cap P \times \{y\})$ è aperto in P.

[3] f è continua se e solo se la controimmagine di ogni aperto di una base è ancora aperto, se e solo se per ogni coppia di aperti $U \subset P$ e $V \subset Q$ il sottoinsieme $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ è aperto in X. □

Esempio 3.60. Sul prodotto cartesiano di due spazi metrici (X, h), (Y, k), le metriche equivalenti d_1, d_2 e d_∞ (Esempio 3.47) inducono la topologia prodotto.

La costruzione precedente si estende al prodotto di un qualsiasi insieme finito $P_1, \ldots, P_n$ di spazi topologici. La topologia prodotto su $P_1 \times \cdots \times P_n$ è la meno fine tra tutte le topologie che rendono le proiezioni continue. La base canonica della topologia prodotto è data dai sottoinsiemi della forma $U_1 \times \cdots \times U_n$, al variare di U_i tra gli aperti in P_i.

Esempio 3.61. La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto di n copie di $\mathbb{R}$.

Esempio 3.62. La proiezione sul primo fattore $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ non è un'applicazione chiusa. Infatti l'iperbole $C = \{xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ è il luogo di zeri dell'applicazione continua $f(x, y) = xy - 1$ ed è quindi un sottoinsieme chiuso. D'altra parte $p(C) = \mathbb{R} - \{0\}$ non è un chiuso.

Esercizi

3.41. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ due applicazioni di spazi topologici e denotiamo

$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W, \qquad (f \times g)(x,z) = (f(x), g(z)).$$

1. Provare che se f e g sono continue, allora $f \times g$ è continua.
2. Provare che se f e g sono aperte, allora $f \times g$ è aperta.
3. Mostrare con un esempio che, se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ può non essere chiusa.

3.42. Dimostrare che il prodotto di spazi topologici è associativo, ossia che dati tre spazi topologici X, Y e Z, gli spazi $(X \times Y) \times Z$, $X \times (Y \times Z)$ e $X \times Y \times Z$ hanno la stessa topologia.

3.43. Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$ sottoinsiemi. Dimostrare che $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. In particolare se A e B sono chiusi allora $A \times B$ è chiuso nel prodotto.

3.44. Sia $g\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ un'applicazione continua tale che $g(1) = 1$ e $g(t) = 0$ se $|t-1| \geq 1/2$. Consideriamo l'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ definita come

$$f(x,0) = 0, \qquad f(x,y) = g(xy^{-1}) \quad \text{se} \quad y \neq 0.$$

Dimostrare che f non è continua ma che per ogni x, y le restrizioni $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto f(t,y)$ sono continue.

3.45. Mostrare che se Y ha la topologia discreta, allora la topologia prodotto su $X \times Y$ coincide con la topologia dell'unione disgiunta $\cup_{y \in Y} X \times \{y\}$.

3.46. Sia (X,d) uno spazio metrico. Mostrare che l'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ è continua rispetto alla topologia prodotto.

3.47. Indichiamo con $\mathbb{R}_{Sf}$ la retta di Sorgenfrey (Esempio 3.9). Dimostrare che il sottospazio

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}_{Sf} \times \mathbb{R}_{Sf} \mid x + y = 0\}$$

è discreto.

3.7 Spazi di Hausdorff

Definizione 3.63. *Uno spazio topologico si dice di **Hausdorff** o **T2** se punti distinti ammettono intorni disgiunti.*

In altri termini, uno spazio topologico X è di Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$, esistono due intorni $U \in \mathcal{I}(x)$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ tali che $U \cap V = \emptyset$.

Non tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff: ad esempio la topologia indiscreta non è di Hausdorff, tranne il caso banale in cui lo spazio è vuoto oppure possiede un solo punto.

Esempio 3.64. Ogni spazio metrico è di Hausdorff. Se d indica la distanza e $x \neq y$ allora $d(x,y) > 0$. Se $0 < r < \dfrac{d(x,y)}{2}$, allora le palle $B(x,r)$ e $B(y,r)$ sono disgiunte: infatti se esistesse $z \in B(x,r) \cap B(y,r)$, dalla disuguaglianza triangolare seguirebbe $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < 2r < d(x,y)$.

Non tutti gli spazi di Hausdorff sono metrizzabili (vedi esercizi 3.53 e 3.54).

Lemma 3.65. *In uno spazio di Hausdorff i sottoinsiemi finiti sono chiusi.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che i punti sono chiusi, ossia che se X è di Hausdorff e $x \in X$, allora $X - \{x\}$ è aperto. Se $y \in X - \{x\}$, allora esistono intorni disgiunti $U \in \mathcal{I}(x)$, $V \in \mathcal{I}(y)$; a maggior ragione $V \subset X - \{x\}$ e quindi $X - \{x\}$ è intorno di ogni suo punto. $\square$

Proposizione 3.66. *Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano X uno spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ un sottospazio e $x, y \in Y$ punti distinti. Esistono allora due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $y \in V$. I sottoinsiemi $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono aperti disgiunti di Y.

Siano X, Y spazi di Hausdorff e $(x,y), (z,w) \in X \times Y$ punti distinti; supponiamo per fissare le idee che $x \neq z$, esistono allora due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $z \in V$. Ne segue che $(x,y) \in U \times Y$, $(z,w) \in V \times Y$ e $U \times Y \cap V \times Y = (U \cap V) \times Y = \emptyset$. $\square$

Teorema 3.67. *Uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.*

Dimostrazione. La diagonale di uno spazio topologico X è il sottoinsieme

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X.$$

Supponiamo che X sia uno spazio di Hausdorff e consideriamo un punto $(x,y) \in X \times X - \Delta$. Per definizione di diagonale si ha $x \neq y$ e dunque esistono due aperti U, V di X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Quindi $(x,y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta$. Questo prova che $X \times X - \Delta$ è intorno di ogni suo punto e che la diagonale è chiusa.

Viceversa se Δ è chiusa in $X \times X$ e $x \neq y$, allora esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $(x,y) \in U \times V \subset X \times X - \Delta$ e quindi $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. $\square$

Corollario 3.68. *Siano $f, g\colon X \to Y$ due applicazioni continue, con Y spazio di Hausdorff. Allora l'insieme $C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. L'applicazione

$$(f, g)\colon X \to Y \times Y, \qquad (f, g)(x) = (f(x), g(x))$$

è continua e vale $C = (f, g)^{-1}\Delta$, dove Δ è la diagonale di Y. □

Esempio 3.69. Se $f\colon X \to X$ è un'applicazione continua di uno spazio topologico in sé, diremo che $x \in X$ è un **punto fisso** per f se $f(x) = x$. Se X è di Hausdorff, allora l'insieme dei punti fissi per f è un sottoinsieme chiuso: basta infatti applicare il Corollario 3.68 con $X = Y$ e g uguale all'identità.

Lemma 3.70. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff e sia $p_1, \ldots, p_n$ una successione finita di punti distinti di X. Allora esiste una successione finita $U_1, \ldots, U_n$ di aperti di X tali che $p_i \in U_i$ per ogni i e $U_i \cap U_j = \emptyset$ per ogni $i \neq j$.*

Dimostrazione. Per ogni coppia $1 \leq i < j \leq n$ possiamo trovare due aperti disgiunti U_{ij} e U_{ji} tali che $p_i \in U_{ij}$ e $p_j \in U_{ji}$. Basta allora considerare, per ogni indice i fissato, l'aperto $U_i = \cap\{U_{ij} \mid j \neq i\}$. □

Esercizi

3.48. Dire, motivando la risposta, se un insieme infinito con la topologia cofinita è di Hausdorff.

3.49. Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue, Y di Hausdorff e $A \subset X$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che se $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in A$, allora $f = g$.

3.50. Determinare la cardinalità dell'insieme $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ di tutte le applicazioni continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Sugg.: le funzioni continue sono univocamente determinate dai valori assunti su $\mathbb{Q}$.)

3.51. Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} \overline{U}.$$

3.52. Sia $f\colon X \to Y$ continua con Y di Hausdorff. Provare che il grafico $\Gamma = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$ è chiuso nel prodotto.

3.53 (Golomb [Go59], $*, \heartsuit$). Per ogni coppia di numeri naturali $a, b \in \mathbb{N}$ relativamente primi denotiamo $N_{a,b} = \{a + kb \mid k \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{N}$. Dimostrare:

1. La famiglia $\mathcal{B} = \{N_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{N},\ MCD(a, b) = 1\}$ è una base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{N}$.
2. La topologia $\mathcal{T}$ è di Hausdorff.
3. Ogni multiplo di b appartiene alla chiusura di $N_{a,b}$.
4. Per ogni coppia di aperti non vuoti $A, B \in \mathcal{T}$ vale $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.
5. La topologia $\mathcal{T}$ non è metrizzabile.

3.54 ($*, \heartsuit$). Nelle notazioni dell'Esercizio 3.47, dimostrare che $\mathbb{R}_{Sf} \times \mathbb{R}_{Sf}$ è di Hausdorff ma non è metrizzabile.

4

Connessione e compattezza

Connessione – Componenti connesse – Ricoprimenti – Spazi topologici compatti – Il teorema di Wallace – Gruppi topologici – Esaustioni in compatti

La nozione di spazio topologico è troppo generica per dimostrare risultati interessanti e sempre validi. Quando i matematici si trovano di fronte a nozioni utili ma troppo generali la cosa da fare è una sola: la **classificazione**.

Senza voler entrare in faccende che, sebbene interessanti riguardano più la metodologia della scienza che la matematica, mostriamo, con un semplice esempio, come il concetto di classificazione si applica alla topologia, tenendo però presente che lo stesso schema di ragionamento è comune a tutta la matematica.

Supponiamo di avere due spazi che l'intuito ci dice essere topologicamente non equivalenti e di voler dimostrare in modo rigoroso che non sono omeomorfi. Per prima cosa guardiamo alle cardinalità dei due spazi: se esse sono diverse abbiamo finito il lavoro, ma se le cardinalità sono uguali non possiamo dedurre alcunché. Per ovvie ragioni di tempo e di spazio, l'idea malsana di scrivere tutte le applicazioni bigettive e per ognuna di esse verificare o meno se è un omeomorfismo, viene tralasciata. Il modo classico di procedere del matematico è il seguente:

Passo 1. Si introducono delle proprietà degli spazi topologici che sono invarianti per omeomorfismo. Ad esempio, le proprietà di essere metrizzabile o di Hausdorff hanno tale caratteristica. In certi casi l'invarianza per omeomorfismo è chiara dalle definizioni; in altri casi non è affatto ovvia (caso tipico è la dimensione di una varietà topologica) e richiederà molto lavoro teorico alla base.

Passo 2. Si testano le proprietà del Passo 1 sui due spazi: se siamo abbastanza bravi da trovare, e qui entra in gioco l'intuito matematico, una proprietà facilmente valutabile rispetto alla quale i due spazi si comportano diversamente, allora possiamo dedurre che i due spazi non sono omeomorfi. In questa fase la teoria ci permette di risparmiare tempo e verifiche con l'utilizzo di teoremi con enunciati del tipo: se uno spazio ha le proprietà $x_1, x_2, \ldots$, allora ha anche le proprietà $y_1, y_2, \ldots$.

In questo capitolo studieremo due importanti proprietà topologiche invarianti per omeomorfismo: la connessione e la compattezza. Altre proprietà topologiche saranno illustrate nei capitoli seguenti.

4.1 Connessione

Fa parte dell'intuizione umana rispondere immediatamente "due" alla domanda "Da quanti pezzi è formato lo spazio $X = \mathbb{R} - \{0\}$?". Questo è possibile perché riusciamo a distinguere in X due parti, $X_- = \{x < 0\}$ e $X_+ = \{x > 0\}$, che nelle nostra mente ben si adattano al vocabolo "pezzo" usato nella domanda.

Le strutture topologiche permettono di definire i modo matematicamente preciso le nozioni di **spazio connesso** e di **componente connessa**, che corrispondono rispettivamente ai concetti intuitivi di "oggetto tutto d'un pezzo" e di "pezzo di torta", dove la torta è intesa già tagliata.

Definizione 4.1. *Uno spazio topologico X si dice* ***connesso*** *se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono $\emptyset$ e X. Uno spazio topologico che non è connesso si dice* ***sconnesso****.*

Lemma 4.2. *Per uno spazio topologico X le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *X è sconnesso.*
2. *X è unione disgiunta di due aperti propri.*
3. *X è unione disgiunta di due chiusi propri.*

Dimostrazione. [$1 \Rightarrow 2 + 3$] Sia $A \subset X$ aperto, chiuso e non vuoto. Se $A \neq X$ allora il complementare $B = X - A$ è aperto, chiuso e non vuoto e X è l'unione disgiunta di A e B.

[$2 \Rightarrow 1$] Se $A_1 \cup A_2 = X$, con A_1, A_2 aperti, non vuoti e disgiunti, allora $A_1 = X - A_2$ è anche chiuso.

[$3 \Rightarrow 1$] Se $C_1 \cup C_2 = X$, con C_1, C_2 chiusi, non vuoti e disgiunti, allora $C_1 = X - C_2$ è anche aperto. □

Esempio 4.3. Lo spazio topologico $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ è sconnesso. Infatti i due sottoinsiemi non vuoti

$$X_- = X \cap \,]-\infty, 0[, \qquad X_+ = X \cap \,]0, +\infty[,$$

sono aperti nella topologia di sottospazio, sono disgiunti e la loro unione è X.

Diremo che un sottospazio topologico è connesso se lo è per la topologia indotta.

Lemma 4.4. *Siano X uno spazio topologico ed $A \subset X$ un sottoinsieme aperto e chiuso. Allora per ogni sottospazio connesso $Y \subset X$ vale $Y \subset A$ oppure $Y \cap A = \emptyset$.*

Dimostrazione. L'intersezione $Y \cap A$ è aperta e chiusa in Y. Siccome Y è connesso deve essere $Y \cap A = Y$ (e quindi $Y \subset A$) oppure $Y \cap A = \emptyset$. □

Esempio 4.5. Siano X uno spazio topologico, $K \subset X$ un sottoinsieme chiuso e $U \subset X$ un aperto che contiene K. Se X e $U - K$ sono connessi, allora anche $X - K$ è connesso. Infatti, supponiamo per assurdo che $X - K = A \cup B$, con A, B aperti disgiunti e non vuoti. Siccome $U - K$ è un sottospazio connesso di $X - K$, per il Lemma 4.4 si ha $U - K \subset A$ oppure $U - K \subset B$; supponiamo tanto per fissare le idee $U - K \subset A$. Allora vale $A \cup K = A \cup U$, $U \cap B = \emptyset$ e quindi $X = (A \cup K) \cup B = (A \cup U) \cup B$ è unione di due aperti disgiunti e non vuoti, in contraddizione con le ipotesi.

Teorema 4.6. *L'intervallo $[0,1]$ è connesso per la topologia euclidea.*

Dimostrazione. Siano C e D due sottospazi chiusi e non vuoti di $[0,1]$ tali che $C \cup D = [0,1]$; vogliamo dimostrare che $C \cap D \neq \emptyset$. Supponiamo per fissare le idee che $0 \in C$ e indichiamo con $d \in [0,1]$ l'estremo inferiore di D: ci basterà dimostrare che $d \in C \cap D$. Poiché D è chiuso deve essere $d \in D$ e quindi, se $d = 0$ abbiamo finito. Se invece $d > 0$, poniamo $E = C \cap [0,d]$: dato che E è chiuso e contiene $[0,d[$ si ha che $d \in E$ e quindi $d \in C$. □

Teorema 4.7. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è connesso, allora $f(X)$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $Z \subset f(X)$ un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso in $f(X)$. Per definizione di topologia di sottospazio, esistono un aperto $A \subset Y$ ed un chiuso $C \subset Y$ tali che $Z = f(X) \cap A = f(X) \cap C$. Siccome f è continua si ha che $f^{-1}(Z) = f^{-1}(A)$ è aperto, ed anche che $f^{-1}(Z) = f^{-1}(C)$ è chiuso. Dato che X è connesso e ne consegue che $f^{-1}(Z) = X$ e quindi che $Z = f(X)$. □

Definizione 4.8. *Uno spazio topologico X si dice* ***connesso per archi***[1] *se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esiste un'applicazione continua $\alpha\colon [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.*

È chiaro che l'immagine continua di uno spazio connesso per archi è ancora connessa per archi. Notiamo che la nozione intuitiva di connessione di un grafo data nel Capitolo 1 corrisponde alla connessione per archi.

Lemma 4.9. *Ogni spazio connesso per archi è connesso.*

[1] In inglese **path-connected**, letteralmente 'cammino-connesso', ossia connesso per cammini.

Dimostrazione. Siano X uno spazio connesso per archi ed $A, B \subset X$ due aperti non vuoti tali che $A \cup B = X$: vogliamo dimostrare che $A \cap B \neq \emptyset$. Scegliamo due punti $x \in A$, $y \in B$ ed un'applicazione continua $\alpha\colon [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Gli aperti $\alpha^{-1}(A)$, $\alpha^{-1}(B)$ sono non vuoti, la loro unione è $[0,1]$ e quindi esiste $t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)$. Il punto $\alpha(t)$ appartiene a $A \cap B$ che quindi è non vuoto. □

Dimostreremo più avanti, come conseguenza della Proposizione 10.5, che ogni aperto connesso di $\mathbb{R}^n$ è anche connesso per archi. Se $n \geq 2$, allora esistono sottoinsiemi chiusi e connessi di $\mathbb{R}^n$ che non sono connessi per archi (vedi Esercizio 4.18). L'esempio più perverso di sottoinsieme connesso ma non connesso per archi è invece dato, a mio avviso, dall'Esercizio 8.9.

Esempio 4.10. La sfera S^n è connessa per archi per ogni $n > 0$. Un possibile modo per dimostrarlo è per induzione su n, essendo il caso $n = 1$ del tutto evidente. Se $x, y \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $n > 1$, allora intersecando S^n con un piano V contenente l'origine ed i punti x, y, troviamo che i due punti sono contenuti nel sottospazio $V \cap S^n$ che è omeomorfo a S^1.

Ricordiamo che un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice **convesso** se per ogni $x, y \in A$ ed ogni $t \in [0,1]$ si ha $tx + (1-t)y \in A$. Ad esempio, gli intervalli sono tutti e soli i sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$. Come altro esempio, per ogni $p \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$ la palla aperta

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|p - x\| < r\}$$

è un sottoinsieme convesso. Infatti se $x, y \in B(p, r)$ e $t \in [0,1]$, allora per la disuguaglianza triangolare si ha

$$\begin{aligned} \|p - (tx + (1-t)y)\| &= \|t(p-x) + (1-t)(p-y)\| \\ &\leq \|t(p-x)\| + \|(1-t)(p-y)\| = t\|p-x\| + (1-t)\|p-y\| \\ &< tr + (1-t)r = r. \end{aligned}$$

e quindi $tx + (1-t)y \in B(p, r)$

Corollario 4.11. *Ogni sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi e quindi connesso.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}^n$; per ogni $x, y \in A$ l'applicazione $\alpha\colon [0,1] \to A$ data da $\alpha(t) = tx + (1-t)y$ è continua. □

Corollario 4.12. *Per un sottoinsieme $I \subset \mathbb{R}$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *I è un intervallo, ossia un sottoinsieme convesso.*
2. *I è connesso per archi.*
3. *I è connesso.*

Dimostrazione. L'unica implicazione non banale è la $[3 \Rightarrow 1]$. Se $I \subset \mathbb{R}$ non è un intervallo, allora esistono $a < b < c$ tali che $a, c \in I$ e $b \notin I$. I due aperti disgiunti $I \cap]-\infty, b[$ e $I \cap]b, +\infty[$ sono non vuoti e quindi I non è connesso. □

Siamo adesso in grado di dare le prime applicazioni della connessione.

Esempio 4.13. L'intervallo $]0,1[$ non è omeomorfo a $[0,1[$. Supponiamo per assurdo che $f\colon [0,1[\to]0,1[$ sia un omeomorfismo, allora f induce per restrizione un omeomorfismo $f\colon\ ]0,1[\to]0,1[- \{f(0)\}$. La contraddizione si ottiene osservando che $]0,1[$ è connesso mentre $]0,1[-\{f(0)\}$ è sconnesso.

Lemma 4.14. *Siano $n > 0$ ed $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora esiste $x \in S^n$ tale che $f(x) = f(-x)$. In particolare f non è iniettiva.*

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione continua

$$g\colon S^n \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f(x) - f(-x).$$

Essendo $n > 0$, la sfera S^n è connessa, l'immagine $g(S^n)$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$ ed è quindi convesso. Scelto un qualsiasi punto $y \in S^n$ l'intervallo $g(S^n)$ contiene $g(y), g(-y)$ e quindi anche la combinazione convessa

$$\frac{1}{2}g(y) + \frac{1}{2}g(-y) = \frac{1}{2}(f(y) - f(-y)) + \frac{1}{2}(f(-y) - f(y)) = 0.$$

Dunque $0 \in g(S^n)$ ed esiste $x \in S^n$ tale che $g(x) = 0$. □

Esempio 4.15. Aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$, per ogni $n > 1$. Infatti ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ contiene al suo interno un sottoinsieme omeomorfo alla sfera S^{n-1} e basta applicare il Lemma 4.14.

Lemma 4.16. *Siano Y uno spazio topologico connesso ed $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e surgettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperta oppure se f è chiusa, allora anche X è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia aperta e siano $A_1, A_2 \subset X$ due aperti non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Dato che $Y = f(A_1) \cup f(A_2)$ e che Y è connesso, esiste $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ e dunque $f^{-1}(y) \cap A_i \neq \emptyset$ per $i = 1, 2$. Siccome $f^{-1}(y)$ è connesso ne segue che $f^{-1}(y) \cap A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ ed a maggior ragione $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Se invece f è chiusa basta ripetere il ragionamento precedente con A_1 e A_2 chiusi. □

Teorema 4.17. *Il prodotto di due spazi topologici connessi è connesso.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se X e Y sono spazi topologici connessi, allora anche $X \times Y$ è connesso. A tal fine è sufficiente osservare che la proiezione $X \times Y \to Y$ è continua, surgettiva, aperta e le fibre sono omeomorfe ad X. La tesi segue dal Lemma 4.16. □

Per induzione si deduce immediatamente che il prodotto di un numero finito di spazi connessi è connesso.

Esercizi

4.1 (♡). Siano $p, q \in \mathbb{R}^2$ i punti di coordinate $(1,0)$ e $(-1,0)$ rispettivamente. Quali dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono connessi?

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-p\| < 1 \text{ oppure } \|x-q\| < 1\};$$
$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-p\| < 1 \text{ oppure } \|x-q\| \leq 1\};$$
$$C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-p\| \leq 1 \text{ oppure } \|x-q\| \leq 1\}.$$

4.2. Quali sono i sottospazi connessi di uno spazio topologico dotato della topologia discreta?

4.3. Siano A, B sottospazi di uno spazio topologico tali che $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi. Provare che se A, B sono entrambi chiusi o entrambi aperti, allora anche A e B sono connessi.

4.4. Per ogni terna di punti $p, q, v \in \mathbb{R}^n$, il cammino

$$\alpha_{p,q,v} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \alpha_{p,q,v}(t) = (1-t)p + tq + t(1-t)v,$$

è un arco di parabola (possibilmente degenere) che ha p e q come suoi estremi.

Dimostrare che se $p \neq q$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n - \{p, q\}$ esiste al più un vettore v perpendicolare a $p - q$ e tale che x appartenga all'immagine del cammino $\alpha_{p,q,v}$.

4.5. Provare che se $n \geq 2$, allora il complementare di un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.

4.6. Siano $n \geq 2$ e $f \colon S^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Denotiamo con A l'insieme dei punti $t \in f(S^n)$ tali che la fibra $f^{-1}(t)$ ha cardinalità finita.

Dimostrare che A contiene al più due punti. Trovare inoltre tre esempi di applicazioni siffatte e tali che A abbia cardinalità 0,1 e 2 rispettivamente.

4.7. Dimostrare che il prodotto di due spazi connessi per archi è connesso per archi.

4.8. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice **stellato** rispetto ad un punto $a \in A$ se per ogni $b \in A$ il segmento che unisce a e b è interamente contenuto in A. Dimostrare che i sottoinsiemi stellati sono connessi per archi.

4.9. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme limitato e convesso. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - X$ è connesso per archi.

4.10 (∗). Sia X uno spazio topologico di Hausdorff con la proprietà che $X - A$ è connesso per ogni sottoinsieme finito $A \subset X$. Dimostrare che per ogni $n > 0$ lo spazio delle configurazioni

$$\mathrm{Conf}_n(X) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ per ogni } i \neq j\}$$

è connesso.

4.2 Componenti connesse

Definizione 4.18. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $C \subset X$ si dice una **componente connessa** di X se soddisfa le seguenti due proprietà:*

1. *C è connesso.*
2. *Se $C \subset A$ ed A è connesso, allora $C = A$.*

Quindi, con altre parole, una componente connessa è un elemento massimale della famiglia dei sottospazi connessi ordinata per inclusione.

Lemma 4.19. *Sia Y un sottospazio connesso di uno spazio topologico X e sia $Y \subset W \subset \overline{Y}$. Allora W è connesso. In particolare la chiusura di un sottospazio topologico connesso è connessa.*

Dimostrazione. Sia $Z \subset W$ un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso in W. A maggior ragione $Z \cap Y$ è aperto e chiuso in Y. Dato che Y è denso e Z è aperto in W, si ha $Z \cap Y \neq \emptyset$. Dato che Y è connesso ne consegue $Y \subset Z$. Dato che Y è denso e Z è chiuso in W si ottiene $Z = W$. □

Lemma 4.20. *Sia x un punto di uno spazio topologico X e sia $\{Z_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di X che contengono x. Allora $W = \bigcup_i Z_i$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $A \subset W$ contemporaneamente aperto, chiuso e non vuoto; per il Lemma 4.4 per ogni indice i vale $Z_i \subset A$ oppure $Z_i \cap A = \emptyset$. Siccome A non è vuoto esiste un indice i tale che $A \cap Z_i \neq \emptyset$, dunque $Z_i \subset A$ ed in particolare $x \in A$. Siccome il punto x appartiene a tutti i sottospazi Z_j si ha che $Z_j \cap A$ non è vuoto per ogni j, dunque $Z_j \subset A$ per ogni j e di conseguenza $W = A$. □

Corollario 4.21. *Siano A, B sottospazi connessi di uno spazio topologico. Se $A \cap B \neq \emptyset$, allora $A \cup B$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $x \in A \cap B$. Basta applicare il Lemma 4.20 alla famiglia $\{A, B\}$. □

Lemma 4.22. *Sia x un punto di uno spazio topologico X e denotiamo con $C(x)$ l'unione di tutti i sottospazi connessi di X che contengono x, ossia*

$$C(x) = \cup\{Y \mid x \in Y \subset X,\ Y \text{ connesso }\}.$$

Allora $C(x)$ è una componente connessa di X che contiene il punto x.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che $\{x\}$ è un sottospazio connesso e quindi $x \in C(x)$. Applicando il Lemma 4.20 alla famiglia di tutti i sottospazi connessi contenenti x, si ricava che $C(x)$ è un sottospazio connesso. Sia $A \subset X$ un sottospazio connesso che contiene $C(x)$, in particolare $x \in A$, per definizione di $C(x)$ si ha $A \subset C(x)$ e quindi $C(x) = A$. □

Definizione 4.23. *Nelle notazioni del Lemma 4.22, chiameremo $C(x)$ la **componente connessa di X che contiene x**, oppure la **componente connessa di x in X**.*

Teorema 4.24. *Ogni spazio topologico è unione delle sue componenti connesse. Ogni componente connessa è chiusa ed ogni punto è contenuto in una ed una sola componente connessa.*

Dimostrazione. Per il Lemma 4.22 ogni punto è contenuto in almeno una componente connessa. Se C, D sono due componenti connesse e $C \cap D \neq \emptyset$, allora per il Corollario 4.21, il sottospazio $C \cup D$ è connesso e le due ovvie inclusioni $C \subset C \cup D$, $D \subset C \cup D$ implicano $C = C \cup D = D$. Infine, se C è una componente connessa, allora per il Lemma 4.19 il sottospazio $\overline{C}$ è connesso e contiene C; ne consegue che $C = \overline{C}$. □

Le componenti connesse non sono in generale aperte (vedi Esercizio 4.11); tuttavia in molti casi concreti saranno aperte in virtù del seguente risultato.

Lemma 4.25. *Se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno connesso, allora le componenti connesse in X sono aperte.*

Dimostrazione. Sia $C \subset X$ una componente connessa, $x \in C$ ed U un intorno connesso di x. Poiché $x \in C \cap U$, l'unione $C \cup U$ è ancora connessa e quindi $C \cup U \subset C$, ovvero $U \subset C$ e C è un intorno di x. □

Ogni omeomorfismo trasforma componenti connesse in componenti connesse e quindi due spazi omeomorfi devono avere lo stesso numero di componenti connesse.

Esempio 4.26. $X = \mathbb{R} - \{0\}$ non è omeomorfo a $Y = \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Infatti X ha due componenti connesse $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$, mentre Y ne ha tre, $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

Esercizi

4.11 (♡). Si consideri il sottospazio $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ formato da tutti i numeri razionali. Descrivere le componenti connesse di $\mathbb{Q}$ e dedurne che, in generale, le componenti connesse in uno spazio topologico non sono aperte.

4.12. Sia $Y \subset X$ un sottospazio connesso e sia $\{Z_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di X che intersecano Y. Dimostrare che $W = Y \cup \bigcup_i Z_i$ è connesso.

4.13. Dimostrare che i due sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ e } y \leq 0\}, \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\}, \end{aligned}$$

non sono omeomorfi. (Sugg.: studiare quante componenti connesse si possono ottenere togliendo un punto ad entrambi gli spazi.)

4.14. Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tali che $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni n. Dimostrare che $A = \cup_n A_n$ è connesso.

4.15. $\{A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottospazi non vuoti e connessi di uno spazio topologico X. Dimostrare che:

1. La famiglia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(I)$, formata da tutti i sottoinsiemi $J \subset I$ tali che l'unione $\cup\{A_j \mid j \in J\}$ è connessa, possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.
2. Se per ogni coppia $i, j \in I$ esiste una successione di indici $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ tale che $i_1 = i$, $i_n = j$ e $A_{i_k} \cap A_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$, allora l'unione $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ è connessa.

4.16 (♡). Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tali che $A_{n+1} \subset A_n$ per ogni n. È vero o falso che $\cap_n A_n$ è connesso?

4.17. Dimostrare che ogni omeomorfismo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di ordine finito, ossia tale che $f^p = Id$ per qualche $p > 0$, possiede almeno un punto fisso. (Sugg.: siano $b = \max(0, f(0), f^2(0), \ldots, f^{p-1}(0))$ ed $a = f^{-1}(b)$. Provare che f ha un punto fisso nell'intervallo $[a, b]$.)

4.18 (♡). Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione del segmento $\{x = 0,\ |y| \leq 1\}$ e dell'immagine dell'applicazione $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^{-1}, \cos(t))$. Provare che X è chiuso in $\mathbb{R}^2$, che è connesso e che non è connesso per archi.

4.3 Ricoprimenti

Definizione 4.27. *Un **ricoprimento** di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi tali che $X = \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$.*

Diremo che il ricoprimento è finito se $\mathcal{A}$ è una famiglia finita; numerabile se $\mathcal{A}$ è una famiglia numerabile.

*Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono ricoprimenti di X e se $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora diremo che $\mathcal{A}$ è un **sottoricoprimento** di $\mathcal{B}$.*

Spesso è conveniente lavorare con ricoprimenti definiti mediante famiglie indicizzate, ovvero $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$. In tal caso, e salvo avviso contrario, è consentito che l'applicazione surgettiva $I \to \mathcal{A}$, $i \mapsto U_i$, possa essere non iniettiva.

Molte importanti proprietà degli spazi topologici riguardano il comportamento rispetto ai ricoprimenti

Definizione 4.28. *Un ricoprimento $\mathcal{A}$ di uno spazio topologico X si dice:*

1. ***aperto** se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto.*
2. ***chiuso** se ogni $A \in \mathcal{A}$ è chiuso.*

3. ***localmente finito*** *se per ogni punto $x \in X$ esiste un aperto $V \subset X$ tale che $x \in V$ e $V \cap A \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $A \in \mathcal{A}$.*

Ad esempio, ogni base della topologia è un ricoprimento aperto. La famiglia $\{[n, n+1] \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito di $\mathbb{R}$.

Definizione 4.29. *Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento di uno spazio topologico X. Se accade che un sottoinsieme $U \subset X$ è aperto se e solo se $U \cap A$ è aperto in A, per ogni $A \in \mathcal{A}$, allora diremo che il ricoprimento $\mathcal{A}$ è **fondamentale**.*

Non tutti i ricoprimenti sono fondamentali: ad esempio $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ è un ricoprimento chiuso di $\mathbb{R}$ che non è fondamentale.

Proposizione 4.30. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento fondamentale di X. Allora f è continua se e solo se per ogni $A \in \mathcal{A}$ la restrizione $f_{|A}\colon A \to Y$ è continua.*

Dimostrazione. Sia $U \subset Y$ un aperto; se la restrizione $f_{|A}\colon A \to Y$ è continua per ogni $A \in \mathcal{A}$, allora $f^{-1}(U) \cap A = f_{|A}^{-1}(U)$ è aperto in A e quindi $f^{-1}(U)$ è aperto in X. □

Teorema 4.31. *I ricoprimenti aperti ed i ricoprimenti chiusi localmente finiti sono fondamentali.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X e sia $U \subset X$. Se $U \cap A$ è aperto in A per ogni $A \in \mathcal{A}$, allora $U \cap A$ è aperto anche in X e dunque $U = \cup\{A \cap U \mid A \in \mathcal{A}\}$ è aperto.

Consideriamo adesso un ricoprimento chiuso finito $X = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ e sia $U \subset X$ tale che $U \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni i. Denotando $B = X - U$ si ha che $B \cap C_i = C_i - (U \cap C_i)$ è chiuso in C_i, e quindi in X, per ogni i. Dunque $B = \cup_{i=1}^{n}(B \cap C_i)$ è chiuso.

Se $\{C_i \mid i \in I\}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito, allora possiamo trovare un ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X tale che $\{C_i \cap A \mid i \in I\}$ è un ricoprimento chiuso finito di A, per ogni $A \in \mathcal{A}$. Dunque, se $U \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni i, allora $U \cap C_i \cap A$ è aperto in $A \cap C_i$ per ogni $A \in \mathcal{A}$, quindi $U \cap A$ è aperto in A per ogni $A \in \mathcal{A}$ e dunque U è aperto in X. □

Esercizi

4.19. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico X e consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ degli aperti di X che sono contenuti in qualche elemento di $\mathcal{A}$. Provare che $\mathcal{B}$ è una base della topologia.

4.20. Provare che $\{[-n, n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento fondamentale di $\mathbb{R}$.

4.21. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento di uno spazio topologico X tale che

$$\cup\{A^o \mid A \in \mathcal{A}\} = X.$$

Dimostrare che $\mathcal{A}$ è un ricoprimento fondamentale.

4.4 Spazi topologici compatti

Definizione 4.32. *Uno spazio topologico si dice* ***compatto*** *se ogni suo ricoprimento aperto possiede un sottoricoprimento finito. Un sottospazio di uno spazio topologico si dice compatto se è compatto per la topologia indotta.*

Equivalentemente, un sottospazio K di uno spazio topologico X è compatto se e solo se per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tali che $K \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$, esistono $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $K \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Esempio 4.33. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ non è compatto per ogni $n > 0$; per dimostrarlo basta trovare un ricoprimento aperto che non ammette un sottoricoprimento finito. Possiamo considerare ad esempio il ricoprimento formato da tutte le palle aperte di centro 0 e raggio numero naturale

$$\mathbb{R}^n = \cup_{m=1}^{+\infty} B(0, m).$$

Se tale ricoprimento ammettesse un sottoricoprimento finito, esisterebbero $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ tali che

$$\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^{k} B(0, m_i) = B(0, \max(m_1, \ldots, m_k)),$$

il che è palesemente falso.

Esempio 4.34. Ogni insieme finito è compatto, indipendentemente dalla topologia su di esso: infatti, dato un qualunque ricoprimento aperto, possiamo trovarne un sottoricoprimento finito scegliendo per ogni punto un aperto che lo contiene.

Uno spazio topologico discreto è compatto se e solo se è finito: infatti in uno spazio discreto X la famiglia delle singolette $\{\{x\} \mid x \in X\}$ è un ricoprimento aperto che possiede un sottoricoprimento finito se e solo se X è finito.

Teorema 4.35. *Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto, allora la sua immagine $f(X)$ è un sottospazio compatto di Y.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ un a famiglia di aperti di Y che ricopre $f(X)$. La famiglia $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ è un ricoprimento aperto di X e quindi esistono $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $X = f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_n)$. Di conseguenza $f(X) \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. □

Teorema 4.36. *L'intervallo chiuso* $[0, 1]$ *è un sottospazio compatto di* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ tali che

$$[0, 1] \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Indichiamo con $X \subset [0, +\infty[$ l'insieme dei punti t tali che l'intervallo chiuso $[0, t]$ è contenuto nell'unione di un numero finito di aperti di $\mathcal{A}$.

L'intervallo $[0,0]$ è contenuto in un aperto della famiglia $\mathcal{A}$ e quindi $0 \in X$: denotiamo con b l'estremo superiore di X. Se $b > 1$ allora esiste $t \in X$ tale che $1 \leq t \leq b$ e quindi $[0,1] \subset [0,t]$ è contenuto nell'unione di un numero finito di aperti di $\mathcal{A}$. Supponiamo adesso $b \leq 1$ e mostriamo che tale ipotesi conduce ad una contraddizione. Infatti, se $b \leq 1$, allora esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $b \in A$ e, dato che A è aperto, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$]b-\delta, b+\delta[\subset A.$$

D'altra parte, per le proprietà dell'estremo superiore, esiste $t \in X$ tale che $b - \delta < t \leq b$. Segue dalla definizione di X che l'intervallo $[0,t]$ è contenuto in una unione finita di aperti del ricoprimento, diciamo

$$[0,t] \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Ne consegue che, se $0 \leq h < \delta$, allora

$$[0, b+h] = [0,t] \cup [t, b+h] \subset [0,t] \cup]b-\delta, b+\delta[\subset A \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n,$$

e quindi $b + h \in X$ per ogni numero reale $0 \leq h < \delta$. □

Esempio 4.37. La retta $\mathbb{R}$ non è omeomorfa all'intervallo $[0,1]$. Infatti $[0,1]$ è compatto, mentre $\mathbb{R}$ non lo è.

Proposizione 4.38. *1. Ogni sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.*
2. Unione finita di sottospazi compatti è compatta.

Dimostrazione. [1] Sia Y un sottospazio chiuso di uno spazio topologico compatto X. Bisogna dimostrare che per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tale che $Y \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}\}$, esistono finiti aperti $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $Y \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. La famiglia di aperti $\mathcal{A} \cup \{X - Y\}$ è un ricoprimento del compatto X e dunque possiamo trovare $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $X = (X-Y) \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n$. È allora immediato osservare che $Y \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

[2] Siano $K_1, \ldots, K_n$ sottospazi compatti di uno spazio topologico X e sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di X che ricopre $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$. Per ogni indice $h = 1, \ldots, n$ esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ che ricopre il compatto K_h e quindi $K \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n\}$. □

Corollario 4.39. *Un sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che la definizione di compattezza coinvolge solamente le nozioni di aperto e di ricoprimento ed è quindi invariante per omeomorfismo, cioè ogni spazio omeomorfo ad un compatto è compatto.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato, allora $A \subset [-a, a]$ per qualche $a > 0$. L'intervallo $[-a, a]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ e quindi compatto. Dunque A è un chiuso di un compatto ed è quindi compatto.

Viceversa, se $A \subset \mathbb{R}$ è un sottospazio compatto, allora la famiglia di intervalli aperti $\{\,]-n, n[\mid n \in \mathbb{N}\}$ ricopre A e quindi possiamo trovare un sottoricoprimento finito $A \subset]-n_1, n_1[\cup \cdots \cup]-n_s, n_s[$. Ne segue che $A \subset]-N, N[$, dove N è un il massimo di $n_1, \ldots, n_s$, e quindi A è limitato. Per ogni $p \notin A$, l'applicazione $f(x) = 1/(x - p)$ è continua e definita in $\mathbb{R} - \{p\}$. L'immagine $f(A)$ è compatta e quindi limitata; da questo segue che $p \notin \overline{A}$ e quindi che A è chiuso. □

Corollario 4.40. *Sia X uno spazio topologico compatto. Allora ogni funzione continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. L'immagine $f(X)$ è compatta in $\mathbb{R}$ e quindi chiusa e limitata. Ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ ammette massimo e minimo. □

Teorema 4.41. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione chiusa. Se Y è compatto e se $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$, allora anche X è compatto.*

Dimostrazione. Per ogni aperto $A \subset X$ definiamo

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset A\},$$

osservando che $Y - A' = f(X - A)$. Poiché f è chiusa ne deduciamo che anche A' è aperto.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X e denotiamo con $\mathcal{B}$ la famiglia delle unioni finite di elementi di $\mathcal{A}$. La famiglia di aperti $\mathcal{B}' = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$ è un ricoprimento aperto di Y. Infatti se $y \in Y$, la fibra $f^{-1}(y)$ è compatta e quindi esistono $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ tali che $f^{-1}(y) \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$ e dunque $y \in B'$, dove $B = A_1 \cup \cdots \cup A_m$.

Dato che Y è compatto, esistono $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ tali che $Y = B_1' \cup \cdots \cup B_n'$. Allora $X = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, e siccome ogni B_i è una unione finita di elementi di $\mathcal{A}$, abbiamo trovato un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$. □

Proposizione 4.42. *Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico X. Se ogni ricoprimento di X fatto con elementi di $\mathcal{B}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.*

Dimostrazione. Per ogni aperto $U \subset X$ indichiamo $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B} \mid B \subset U\}$. Per ipotesi $\mathcal{B}$ è una base e quindi per ogni aperto U vale $U = \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}_U\}$.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X e consideriamo la famiglia di aperti $\mathcal{C} = \cup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$. È chiaro che $\mathcal{C}$ è un ricoprimento di X fatto con aperti della base $\mathcal{B}$ e, per le ipotesi fatte, possiede un sottoricoprimento finito $\mathcal{F}$. Per ogni aperto $U \in \mathcal{F}$ scegliamo un aperto $A(U) \in \mathcal{A}$ tale che $U \in \mathcal{B}_{A(U)}$, ossia tale che $U \subset A(U)$. Ne consegue che famiglia $\{A(U) \mid U \in \mathcal{F}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$. □

Proposizione 4.43. *Sia $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora*

$$\cap\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $K_1 - K_n$ è aperto in K_1. Basta adesso osservare che l'intersezione dei chiusi K_n è vuota se e solo se gli aperti $K_1 - K_n$ formano un ricoprimento di K_1. □

Esercizi

4.22. Diremo che una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{A}$ di un insieme X ha la **proprietà dell'intersezione finita** se per ogni sottofamiglia finita e non vuota $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ vale $\cap\{A \mid A \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$.

Dimostrare che uno spazio topologico è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

4.23. Sia X uno spazio topologico compatto, $U \subset X$ un aperto e $\{C_i \mid i \in I\}$, una famiglia di sottospazi chiusi di X tale che

$$\bigcap_{i\in I} C_i \subset U.$$

Dimostrare che esiste un insieme finito di indici $i_1, \ldots, i_n \in I$ tale che

$$C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_n} \subset U.$$

4.24. Si consideri lo spazio metrico formato dall'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali dotato della distanza euclidea. Dimostrare che

$$K = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\}$$

è chiuso e limitato ma non è compatto.

4.25. Denotiamo con $\mathbb{R}_{scs}$ la retta reale dotata della topologia della semicontinuità superiore (Esempio 3.3).

Provare che ogni compatto non vuoto in $\mathbb{R}_{scs}$ ammette massimo. Dedurne che se X è uno spazio topologico compatto, allora ogni applicazione $f\colon X \to \mathbb{R}$ semicontinua superiormente (Esercizio 3.22) ammette massimo.

4.26 (♡). Siano X uno spazio compatto e $\{f_i\colon X \to [0, +\infty[\mid i \in I\}$ una famiglia non vuota di funzioni continue. Provare che la funzione

$$f\colon X \to [0, +\infty[\,, \qquad f(x) = \inf\{f_i(x) \mid i \in I\},$$

ammette massimo in X. Mostrare con un esempio che in generale non ammette minimo.

4.5 Il teorema di Wallace

Siano X, Y spazi topologici e $A \subset X$, $B \subset Y$ sottoinsiemi. Allora $A \times B$ è un sottoinsieme di $X \times Y$ ed è possibile definire una struttura topologica su $A \times B$ in due modi distinti. Nel primo considerando $A \times B$ come un sottospazio dello spazio topologico $X \times Y$, nel secondo considerando $A \times B$ come il prodotto dei sottospazi A e B. Tuttavia è immediato osservare che la restrizione della base canonica di $X \times Y$ a $A \times B$ coincide con la base canonica di $A \times B$ e quindi le due procedure danno luogo alla stessa topologia.

Teorema 4.44 (Wallace). *Siano X, Y spazi topologici, $A \subset X$, $B \subset Y$ sottospazi compatti e $W \subset X \times Y$ un aperto tale che $A \times B \subset W$. Allora esistono due aperti, $U \subset X$ e $V \subset Y$, tali che*

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad e \quad U \times V \subset W.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso particolare in cui A è formato da un solo punto, diciamo $A = \{a\}$. Per ogni $y \in B$ esiste una coppia di aperti $U_y \subset X, V_y \subset Y$ tali che

$$(a, y) \in U_y \times V_y \subset W.$$

La famiglia $\{V_y \mid y \in B\}$ è un ricoprimento aperto di B; per compattezza esistono $y_1, \ldots, y_n \in B$ tali che $B \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$. Introduciamo gli aperti $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ e $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$: allora vale

$$\{a\} \times B \subset U \times V \subset \cup_i U_{y_i} \times V_{y_i} \subset W.$$

Consideriamo adesso A compatto arbitrario. Abbiamo appena dimostrato che per ogni $a \in A$ esiste una coppia di aperti U_a, V_a tali che

$$\{a\} \times B \subset U_a \times V_a \subset W.$$

La famiglia $\{U_a \mid a \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A; per compattezza esistono $a_1, \ldots, a_m \in A$ tali che $A \subset U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ e dunque gli aperti $U = U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m}$ e $V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_m}$ sono tali che $A \times B \subset U \times V \subset W$. □

Il teorema di Wallace è utile soprattutto perché ha molti interessanti corollari.

Corollario 4.45. *Ogni sottospazio compatto di uno spazio topologico di Hausdorff è chiuso.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $K \subset X$ un sottospazio compatto. Per mostrare che K è chiuso proviamo che se $x \notin K$, allora esiste un aperto $U \subset X$ tale che $x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$.

Il prodotto $\{x\} \times K$ non interseca la diagonale $\Delta \subset X \times X$ e quindi, essendo X di Hausdorff, $\{x\} \times K$ è contenuto nell'aperto $W = X \times X - \Delta$. Per il Teorema di Wallace esistono due sottoinsiemi aperti $U, V \subset X$ tali che $\{x\} \times K \subset U \times V \subset W$. In particolare $x \in U$ e $U \cap K = \emptyset$. □

Corollario 4.46. *Siano X, Y spazi topologici:*

1. *Se X è compatto, allora la proiezione $p\colon X \times Y \to Y$ è un'applicazione chiusa.*
2. *Se X e Y sono compatti, allora $X \times Y$ è compatto.*

Dimostrazione. [1] Sia $C \subset X \times Y$ un chiuso: se $p(C) = Y$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti sia $y \notin p(C)$ e dimostriamo che il punto y possiede un intorno che non interseeca $p(C)$. Dato che $X \times \{y\} \subset X \times Y - C$, per il teorema di Wallace esiste un intorno aperto V di y tale che $X \times V \cap C = \emptyset$ e quindi $V \cap p(C) = \emptyset$.

[2] Basta applicare il Teorema 4.41 alla proiezione $X \times Y \to Y$. □

Per induzione si deduce che il prodotto di un numero finito di spazi compatti è compatto.

Corollario 4.47. *Un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato, allora $A \subset [-a, a]^n$ per qualche $a > 0$. L'intervallo $[-a, a]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ e quindi compatto. Per il Corollario 4.46 il prodotto cartesiano $[-a, a]^n$ è compatto e quindi anche ogni suo sottospazio chiuso è compatto.

Viceversa, se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio compatto, allora la funzione $d_0\colon A \to \mathbb{R}$, $d_0(x) = \|x\|$, è continua e quindi ammette massimo, ossia A è limitato. Inoltre $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff e quindi A è chiuso. □

Esempio 4.48. Le sfere S^n ed i dischi D^n sono chiusi e limitati nello spazio euclideo e quindi sono compatti.

Corollario 4.49. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, con X compatto e Y di Hausdorff. Allora f è un'applicazione chiusa. Se f è anche bigettiva, allora è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $A \subset X$ un sottoinsieme chiuso, allora A è compatto, quindi anche $f(A)$ è compatto e di conseguenza chiuso in Y. Ogni applicazione continua, bigettiva e chiusa è un omeomorfismo. □

Esercizi

4.27. Sia $D^n \subset \mathbb{R}^n$ il disco chiuso unitario e sia $U \subset D^n$ un aperto contenente il bordo $\partial D^n = S^{n-1}$. Provare che esiste un numero reale $r < 1$ tale che $D^n = B(0, r) \cup U$.

4.28. Dimostrare che un'applicazione tra due spazi compatti di Hausdorff è continua se e solo se il grafico è chiuso nel prodotto.

4.29 (Spazi compattamente generati). Uno spazio topologico si dice **compattamente generato** se la famiglia di tutti i suoi sottospazi compatti forma un ricoprimento fondamentale.

Dimostrare che se ogni punto di uno spazio topologico X possiede un intorno compatto, allora X è compattamente generato.

4.30 (Applicazioni proprie). Un'applicazione continua $f\colon Y \to Z$ tra due spazi topologici si dice **propria** se per ogni compatto $K \subset Z$ la sua controimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta.

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Dimostrare che X è compattamente generato (Esercizio 4.29) se e solo se ogni applicazione propria $f\colon Y \to X$ è chiusa.

4.31 (♡). Siano (X, d) uno spazio metrico ed ε un numero reale positivo. Chiameremo ε-cammino in (X, d) una successione finita $x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$ tale che $d(x_{i-1}, x_i) < 2\varepsilon$ per ogni $i = 1, \ldots, n$; in tal caso diremo che gli "estremi" x_0 e x_n sono ε-collegati. Si può pensare che i punti di un ε-cammino siano le impronte lasciate da un omettino dalle gambe di lunghezza ε che passeggia in X. Dimostrare che:

1. Se X è connesso, allora ogni coppia di punti di X è ε-collegata, qualunque sia $\varepsilon > 0$.
2. Se X è compatto e se per qualsivoglia $\varepsilon > 0$, ogni coppia di punti di X è ε-collegata, allora X è connesso.
3. Mostrare con un esempio che il punto 2 è generalmente falso senza l'ipotesi di compattezza.

4.6 Gruppi topologici

Un **gruppo topologico** è un insieme G nel quale convivono una struttura di gruppo ed una struttura topologica. Convivere significa che le operazioni di prodotto

$$G \times G \to G, \qquad (g, h) \mapsto gh,$$

e di inverso

$$G \to G, \qquad g \mapsto g^{-1}$$

sono continue. Per ogni $h \in G$ fissato, l'applicazione

$$R_h\colon G \to G \quad \text{definita come} \quad R_h(g) = gh$$

è la composizione del prodotto in G e dell'inclusione $G \to G \times G$ data da $g \mapsto (g, h)$. Pertanto, l'applicazione R_h, detta **moltiplicazione destra per** h, è composizione di applicazioni continue ed è quindi continua. Inoltre R_h è bigettiva con inversa $R_{h^{-1}}$ ed è quindi un omeomorfismo.

In modo del tutto simile si prova che, per ogni $h \in G$, la **moltiplicazione sinistra per** h

$$L_h \colon G \to G \quad \text{definita come} \quad L_h(g) = hg$$

è un omeomorfismo con inverso $L_{h^{-1}}$.

Lemma 4.50. *Dati comunque due punti g e h in un gruppo topologico G, esiste un omeomorfismo φ di G in sé tale che $\varphi(g) = h$.*

Dimostrazione. Possiamo considerare $\varphi = R_{g^{-1}h}$, oppure $\varphi = L_{hg^{-1}}$. □

Esempio 4.51. Ogni gruppo, dotato della topologia discreta è un gruppo topologico.

Esempio 4.52. I gruppi additivi $(\mathbb{R}^n, +)$ e $(\mathbb{C}^n, +)$, con la topologia euclidea, sono gruppi topologici.

Esempio 4.53. Il gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è un aperto dello spazio $\mathbb{R}^{n^2}$ e quindi ha una naturale struttura topologica. Con tale struttura è un gruppo topologico: infatti i coefficienti del prodotto di due matrici A, B dipendono in maniera continua dai coefficienti di A e B; anche i coefficienti della matrice A^{-1} dipendono in maniera continua dai coefficienti di A.

Lemma 4.54. *Sia G un gruppo topologico con elemento neutro e. Allora G è di Hausdorff se e solo se l'insieme $\{e\}$ è chiuso.*

Dimostrazione. Una implicazione è chiara poiché negli spazi di Hausdorff i punti sono chiusi.

Supponiamo viceversa che $\{e\}$ sia chiuso in G e sia $\phi \colon G \times G \to G$ l'applicazione $\phi(g, h) = gh^{-1}$: essa è composizione di applicazioni continue ed è quindi continua. Si noti che un sottoinsieme non vuoto $A \subset G$ è un sottogruppo se e solo se $\phi(A \times A) \subset A$. Siano $x, y \in G$ punti distinti; poiché ϕ è continua e $\phi(x, y) = xy^{-1} \in G - \{e\}$, esistono due aperti $U, V \subset G$ tali che $x \in U$, $y \in V$ e $\phi(g, h) = gh^{-1} \in G - \{e\}$ per ogni $(g, h) \in U \times V$. Basta osservare che la condizione $\phi(U \times V) \subset G - \{e\}$ è equivalente a $U \cap V = \emptyset$. □

Vediamo adesso alcune caratteristiche topologiche dei principali gruppi lineari, cioè dei gruppi:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}, \\
\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}, \\
\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) &= \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid {}^t\!AA = I,\ \det(A) = 1\}, \\
\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M(n, n, \mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\}, \\
\mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M(n, n, \mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}, \\
\mathrm{U}(n, \mathbb{C}) &= \{A \in M(n, n, \mathbb{C}) \mid {}^t\overline{A}A = I\}, \\
\mathrm{SU}(n, \mathbb{C}) &= \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

Essendo tali gruppi sottospazi topologici di $\mathbb{R}^{n^2}$ o $\mathbb{C}^{n^2}$, essi sono tutti metrizzabili e quindi di Hausdorff.

Proposizione 4.55. *I gruppi* $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$ *e* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *sono connessi.*

Dimostrazione. Proviamo solamente la connessione di $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$: quella di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ si dimostra in modo del tutto simile.

Il gruppo $\mathrm{GL}^+(1,\mathbb{R})$ coincide con l'intervallo $]0,+\infty[$ ed è quindi connesso; per induzione possiamo supporre $n > 1$ e assumere $\mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R})$ connesso. Consideriamo l'applicazione $p\colon M(n,n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ che associa ad ogni matrice la sua prima colonna: se in ogni matrice separiamo la prima colonna dalle altre, possiamo scrivere $M(n,n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times M(n,n-1,\mathbb{R})$ e quindi p coincide con la proiezione sul primo fattore del prodotto. Dunque l'applicazione p è continua ed aperta e quindi anche la sua restrizione all'aperto $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \subset M(n,n,\mathbb{R})$ è aperta; inoltre vale $p(\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})) = \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Dimostriamo adesso che le fibre di $p\colon\ \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ sono tutte connesse: da questo e dal Lemma 4.16 seguirà la connessione di $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$. La fibra $p^{-1}(1,0,\ldots,0)$ è il prodotto $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathrm{GL}^+(n-1,\mathbb{R})$ ed è quindi connessa. Dato un qualsiasi $y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ la fibra $p^{-1}(y)$ non è vuota, sia $A \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ tale che $p(A) = y$. La moltiplicazione sinistra per A, che ricordiamo definita come $L_A(B) = AB$, è un omeomorfismo di $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ in sé. Dalla relazione $p(AB) = Ap(B)$ segue che $L_A\left(p^{-1}(1,0,\ldots,0)\right) = p^{-1}(y)$ e quindi le fibre di p sono tutte omeomorfe tra loro. $\square$

Corollario 4.56. *I gruppi topologici* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ *e* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ *sono connessi. Il gruppo topologico* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *ha esattamente due componenti connesse.*

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ sono connessi. La divisione della prima colonna per il determinante ci dà le applicazioni $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ che sono continue e surgettive.

Il gruppo $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ è l'unione disgiunta dei due aperti $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(]-\infty,0[)$; la moltiplicazione per una qualsiasi matrice a determinante negativo induce un omeomorfismo tra $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$. $\square$

Per lo studio dei gruppi ortogonali ed unitari abbiamo bisogno di un risultato preliminare.

Lemma 4.57. *Sia* $f\colon X \to Y$ *un'applicazione continua e surgettiva di spazi topologici, con* X *compatto e* Y *connesso di Hausdorff. Se la fibra* $f^{-1}(y)$ *è connessa per ogni* $y \in Y$*, allora* X *è connesso.*

Dimostrazione. L'applicazione f è chiusa e quindi basta applicare il Lemma 4.16. $\square$

Proposizione 4.58. *I gruppi topologici* $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}), \mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ *e* $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ *sono compatti e connessi.*

Dimostrazione. Vediamo solamente il caso $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$: per $\mathrm{U}(n,\mathbb{C})$ e $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ la dimostrazione è del tutto analoga.

Consideriamo l'applicazione continua

$$M(n,n,\mathbb{R}) \to M(n,n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \qquad A \mapsto ({}^tAA, \det(A));$$

allora $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ è la controimmagine di $(I,1)$ e quindi è chiuso in $M(n,n,\mathbb{R})$. Siccome in una matrice ortogonale i vettori colonna hanno tutti norma 1, il gruppo $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ è contenuto nell'insieme limitato $\{(a_{ij}) \mid \sum_{i,j} a_{ij}^2 = n\}$ e questo prova la compattezza.

L'applicazione $p\colon \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \to S^{n-1}$ che associa ad ogni matrice il primo vettore colonna è continua; inoltre per ogni $A,B \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ si ha $p(AB) = Ap(B)$, $L_A(p^{-1}(v)) = p^{-1}(Av)$, e da questo segue che le fibre sono tutte omeomorfe tra loro. La fibra sul punto $(1,0,\ldots,0)$ è il gruppo $\mathrm{SO}(n-1,\mathbb{R})$. Siccome $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ è compatto e S^{n-1} è connessa e di Hausdorff, la connessione si dimostra per induzione su n tenendo presente il Lemma 4.57 e che $\mathrm{SO}(1,\mathbb{R}) = \{1\}$. □

Esercizi

4.32. Dimostrare che i gruppi topologici $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ e $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ non sono compatti per ogni $n > 1$.

4.33. Siano G un gruppo topologico e $H \subset G$ un sottogruppo. Dimostrare che se la parte interna di H è non vuota, allora H è aperto e chiuso in G. (Sugg.: scrivere sia H che il suo complementare come unione di aperti del tipo $R_g(H^o)$ per opportuni $g \in G$.)

4.34. Sia G un gruppo topologico con elemento neutro e. Dimostrare che:

1. Se $H \subset G$ è un sottogruppo, allora anche $\overline{H}$ è un sottogruppo.
2. La componente connessa di e in G è un sottogruppo chiuso.

4.35. Sia H un sottogruppo chiuso e connesso di $(\mathbb{R}^n,+)$. Provare che H è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. (Sugg.: provare che $\overline{H} = \cap_n H_n$, dove H_n è il sottospazio vettoriale generato da $B(0,1/n) \cap H$.)

4.36. Sia G un gruppo topologico. Se $A,B \subset G$ sono sottoinsiemi, definiamo $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$, $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

Provare che per ogni sottoinsieme $A \subset G$ vale $\overline{A} = \cap AU = \cap AU^{-1}$, dove U varia tra tutti gli intorni dell'elemento neutro.

4.37. Siano G un gruppo topologico di Hausdorff e $H \subset G$ un sottogruppo discreto (cioè i punti di H sono aperti nella topologia di sottospazio). Dimostrare che H è chiuso in G e confrontare questo risultato con quello dell'Esercizio 3.37. (Sugg.: usare l'Esercizio 4.36; mostrare che esiste un intorno U dell'elemento neutro e tale che $UU^{-1} \cap H = \{e\}$; per ogni $x \in HU$ esiste un unico $h \in H$ tale che $x \in hU$.)

4.38. Dimostrare che:

1. Ogni sottogruppo discreto del gruppo additivo dei reali $(\mathbb{R}, +)$ è del tipo $\mathbb{Z}a$, per qualche $a \in \mathbb{R}$.
2. Ogni sottogruppo discreto di $\mathrm{U}(1, \mathbb{C})$ è ciclico finito.

4.7 Esaustioni in compatti

Definizione 4.59. *Una* ***esaustione in compatti*** *di uno spazio topologico X è una successione di sottospazi compatti $\{K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tale che:*

1. $K_n \subset K_{n+1}^{\circ}$ per ogni n.
2. $\cup_n K_n = X$.

Notiamo che, per ogni esaustione in compatti $\{K_n\}$ di uno spazio X, la famiglia delle parti interne K_n° è un ricoprimento aperto di X e quindi, per ogni compatto $H \subset X$, esiste n tale che $H \subset K_n^{\circ} \subset K_n$.

Esempio 4.60. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $K_n = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\} \subset \mathbb{R}^2$. La successione $\{K_n\}$ è una esaustione in compatti di $\mathbb{R}^2$.

Esempio 4.61. Usiamo l'esaustione dell'Esempio 4.60 per dimostrare che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $Y = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Supponiamo per assurdo che esista un omeomorfismo $f \colon \mathbb{R}^2 \to Y$, allora la successione $D_n = f(K_n)$ è una esaustione in compatti di Y e, per quanto visto sopra, esiste un intero N tale che il compatto $S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ è contenuto in D_N. La funzione

$$f \colon Y \to \,]0, +\infty[\,, \qquad f(x, y) = x^2 + y^2,$$

possiede sul compatto D_N un valore massimo $M > 1$ ed un valore minimo $1 > m > 0$. Quindi

$$\{(x, y) \in Y \mid x^2 + y^2 < m\} \subset \{(x, y) \in Y - D_N \mid x^2 + y^2 < 1\},$$

$$\{(x, y) \in Y \mid x^2 + y^2 > M\} \subset \{(x, y) \in Y - D_N \mid x^2 + y^2 > 1\},$$

e $Y - D_N$ è unione disgiunta dei due aperti non vuoti

$$\{(x, y) \in Y - D_N \mid x^2 + y^2 < 1\} \quad \text{e} \quad \{(x, y) \in Y - D_N \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

Abbiamo quindi trovato una contraddizione, perché $Y - D_N = f(\mathbb{R}^2 - K_N)$ e $\mathbb{R}^2 - K_N$ è connesso.

In un certo senso, con le esaustioni in compatti possiamo descrivere il "comportamento all'infinito" degli spazi topologici.

Il metodo standard per far rientrare il "comportamento all'infinito" di uno spazio topologico X tra le proprietà topologiche usuali è di ricorrere alla **compattificazione di Alexandroff** $\widehat{X}$, definita nel modo seguente.

Sia X uno spazio topologico, sia ∞ un punto non appartenente a X e definiamo $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$. Su $\widehat{X}$ consideriamo la seguente famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi:

$$\mathcal{T} = \{A \mid A \text{ aperto in } X\} \cup \{\widehat{X} - K \mid K \text{ chiuso e compatto in } X\}.$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{T}$ è la famiglia degli aperti di una topologia e che l'inclusione naturale $X \hookrightarrow \widehat{X}$ è una immersione aperta. Dimostriamo adesso che *lo spazio topologico* $\widehat{X}$ *è compatto.* Se $\widehat{X} = \cup U_i$ è un ricoprimento aperto, allora esiste un indice, chiamiamolo 0 tale che $\infty \in U_0$ e dunque $\cup_{i \neq 0} U_i$ è un ricoprimento del compatto $K = \widehat{X} - U_0$. Se $U_1 \cup \cdots \cup U_n$ è un sottoricoprimento finito di K si ha che $\widehat{X} = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Proposizione 4.62. *Nelle notazioni precedenti,* $\widehat{X}$ *è di Hausdorff se e solo se* X *è di Hausdorff ed ogni punto di* X *possiede un intorno compatto.*

Dimostrazione. Sicome X è aperto in $\widehat{X}$, due punti di X hanno intorni disgiunti in X se e solo se hanno intorni disgiunti in $\widehat{X}$. Se $x \in X$, allora x, ∞ hanno intorni disgiunti in $\widehat{X}$ se e solo se esiste un chiuso compatto $K \subset X$ ed un aperto U tali che $x \in U$ e $U \cap (\widehat{X} - K) = \emptyset$. Fissato K, un aperto U come sopra esiste se e solo se x appartiene alla parte interna di K e quindi x, ∞ hanno intorni disgiunti in $\widehat{X}$ se e solo se esiste un chiuso compatto $K \subset X$ tale che $x \in K^o$. $\square$

Proposizione 4.63. *Sia* $f \colon X \to Y$ *una immersione aperta di spazi topologici di Hausdorff. Allora l'applicazione*

$$g \colon Y \to \widehat{X}, \qquad g(y) = \begin{cases} x & \textit{se } y = f(x), \\ \infty & \textit{se } y \notin f(X). \end{cases}$$

è continua. In particolare ogni spazio topologico compatto di Hausdorff Y *coincide con la compattificazione di Alexandroff di* $Y - \{y\}$*, per ogni* $y \in Y$.

Dimostrazione. Sia U un aperto di $\widehat{X}$. Se $U \subset X$ allora $g^{-1}(U) = f(U)$. Se invece $U = \widehat{X} - K$ per qualche compatto $K \subset X$, allora $g^{-1}(U) = Y - f(K)$. Nel caso particolare in cui Y è compatto di Hausdorff, $X = Y - \{y\}$ e f è l'inclusione, si ha che g è continua e bigettiva tra spazi compatti di Hausdorff e quindi è un omeomorfismo. $\square$

Esercizi

4.39 (♡). Utilizzare l'esaustione dell'Esempio 4.60 per dimostrare che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

4.40. Dimostrare che $\mathbb{R} \times [0, 1]$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

4.41. Dimostrare che il cilindro aperto $\{x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^3$ non è omeomorfo al cilindro chiuso $\{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$.

4.42 (♡). Dimostrare che i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ non sono omeomorfi:

$$X = \{(x, y, z) \mid z > 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\},$$

$$Y = \{(x, y, z) \mid z > 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 > 1,\ z = 0\}.$$

4.43. Interpretare lo spazio topologico dell'Esercizio 3.3 come una compattificazione di Alexandroff.

4.44. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione propria (Esercizio 4.30). Dimostrare che f si estende in modo naturale ad un'applicazione continua $\hat{f}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$.

4.45. Sia Y un sottospazio di uno spazio topologico compatto di Hausdorff. Dimostrare che Y è compatto se e solo se per ogni spazio topologico X la proiezione $X \times Y \to X$ è chiusa.

5

Quozienti topologici

Identificazioni – Topologia quoziente – Quozienti per gruppi di omeomorfismi – Gli spazi proiettivi – Spazi localmente compatti – Il teorema fondamentale dell'algebra ↷

5.1 Identificazioni

Il concetto duale di immersione è quello di identificazione.

Definizione 5.1. *Un'applicazione continua e surgettiva $f\colon X \to Y$ si dice una **identificazione** se gli aperti di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi $A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A)$ è aperto in X.*

Notiamo che f^{-1} commuta con il passaggio al complementare e quindi un'applicazione continua e surgettiva $f\colon X \to Y$ è una identificazione se e solo se i chiusi di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi $C \subset Y$ tali che $f^{-1}(C)$ è chiuso in X.

Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua; ricordiamo che un sottoinsieme $A \subset X$ si dice saturo rispetto a f (o anche f-saturo) se ogniqualvolta $x \in A$, $y \in X$ e $f(x) = f(y)$, allora $y \in A$. Equivalentemente A è f-saturo se è del tipo $f^{-1}(B)$ per qualche $B \subset Y$.

Dire che f è una identificazione equivale a dire che gli aperti di Y sono tutti e soli gli insiemi della forma $f(A)$, al variare di A tra gli aperti saturi di X. Per prevenire un errore comune, osserviamo che non tutti gli aperti di X sono saturi e quindi non è detto che le identificazioni siano applicazioni aperte.

Definizione 5.2. *Una **identificazione chiusa** è una identificazione che è anche un'applicazione chiusa.*

*Una **identificazione aperta** è una identificazione che è anche un'applicazione aperta.*

Una identificazione può essere contemporaneamente aperta e chiusa: ad esempio gli omeomorfismi hanno questa proprietà.

Lemma 5.3. *Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e surgettiva:*

Se f è chiusa, allora f è una identificazione chiusa.

Se f è aperta, allora f è una identificazione aperta.

Dimostrazione. Siccome f è surgettiva, vale $f(f^{-1}(A)) = A$ per ogni sottoinsieme $A \subset Y$. Dunque se f è un'applicazione aperta ed $A \subset Y$ è tale che $f^{-1}(A)$ è aperto, allora $A = f(f^{-1}(A))$ è aperto e quindi f è una identificazione. Discorso del tutto simile per le applicazioni chiuse. $\square$

Esempio 5.4. L'applicazione continua

$$f\colon [0, 2\pi] \to S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}, \qquad f(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

è una identificazione chiusa. Infatti è surgettiva ed è continua da un compatto ad un Hausdorff, e quindi chiusa.

Se volessimo dimostrare direttamente che f è chiusa, si può osservare che le due restrizioni

$$f\colon [0, \pi] \to S^1 \cap \{y \geq 0\}, \qquad f\colon [\pi, 2\pi] \to S^1 \cap \{y \leq 0\},$$

sono omeomorfismi e quindi, se $C \subset [0, 2\pi]$ è un sottoinsieme chiuso, allora $f(C) \cap \{y \geq 0\} = f(C \cap [0, \pi])$ e $f(C) \cap \{y \leq 0\} = f(C \cap [\pi, 2\pi])$ sono entrambi chiusi e dunque anche $f(C)$ è chiuso.

Osserviamo che f non è un'applicazione aperta: infatti $[0, 1[$ è aperto in $[0, 2\pi]$ ma la sua immagine in S^1 non è aperta.

Lemma 5.5 (Proprietà universale delle identificazioni).
Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione e $g\colon X \to Z$ un'applicazione continua. Allora esiste un'applicazione continua $h\colon Y \to Z$ tale che $g = hf$ se e solo se g è costante sulle fibre di f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Dire che g è costante sulle fibre di f significa dire che se $x, y \in X$ e $f(x) = f(y)$, allora $g(x) = g(y)$. Tale condizione è chiaramente necessaria per l'esistenza di h; proviamo che è anche sufficiente.

Siccome f è surgettiva, possiamo definire $h\colon Y \to Z$ come $h(y) = g(x)$, dove $x \in X$ è un qualsiasi punto tale che $f(x) = y$: segue dalle ipotesi che h è ben definita e vale $g = hf$. Bisogna dimostrare che h è continua. Sia $U \subset Z$ un sottoinsieme aperto, allora $f^{-1}(h^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$ è aperto in X e, siccome f è una identificazione, ne segue che $h^{-1}(U)$ è aperto in Y. $\square$

Esempio 5.6. Scriviamo il disco e la sfera di dimensione n come

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq 1\}, \qquad S^n = \{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid y^2 + \|x\|^2 = 1\},$$

e consideriamo l'applicazione

$$f\colon D^n \to S^n, \qquad f(x) = (2\|x\|^2 - 1, 2x\sqrt{1-\|x\|^2}).$$

Tale applicazione è continua e surgettiva. La sua restrizione

$$f\colon \{x \in D^n \mid \|x\| < 1\} \to \{(y,x) \in S^n \mid y < 1\}$$

è un omeomorfismo e $f(\partial D^n) = (1,0) \in S^n$, cioè f contrae il bordo del disco ad un punto della sfera. Siccome D^n è compatto e S^n di Hausdorff, f risulta essere una identificazione chiusa.

Esercizi

5.1. Provare che composizione di identificazioni è ancora una identificazione.

5.2. Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione e $g\colon Y \to Z$ un'applicazione continua. Dimostrare che se $gf\colon X \to Z$ è una identificazione, allora anche g è una identificazione.

5.3 (♡). Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Z \to W$ due identificazioni aperte. Dimostrare che l'applicazione

$$f \times g\colon X \times Z \to Y \times W, \qquad (f \times g)(x,z) = (f(x), g(z)),$$

è una identificazione aperta. (Osservazione: se f e g non sono entrambe aperte, allora $f \times g$ potrebbe non essere una identificazione, vedi Esercizio 5.21.)

5.4 (♡). Sia $f\colon X \to Y$ una identificazione. Dimostrare che se le componenti connesse di X sono aperte, allora anche le componenti connesse di Y sono aperte.

5.5 (♡). Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione aperta ed $A \subset X$ un sottoinsieme saturo. Dimostrare che A^o e $\overline{A}$ sono saturi.

5.6 (∗). Siano X, Y, Z spazi topologici di Hausdorff, $f\colon X \to Y$ una identificazione aperta, $g\colon X \to Z$ un'applicazione continua e $D \subset Y$ un sottoinsieme denso. Dimostrare che se g è costante su $f^{-1}(y)$ per ogni $y \in D$, allora esiste $h\colon Y \to Z$ tale che $g = hf$. (Sugg.: dimostrare che l'applicazione

$$\{(x_1,x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\} \to X, \qquad (x_1,x_2) \mapsto x_1,$$

è aperta e utilizzare i risultati degli Esercizi 3.20 e 3.49.)

5.2 Topologia quoziente

Siano X uno spazio topologico, Y un insieme e $f\colon X \to Y$ un'applicazione surgettiva. Poiché f^{-1} commuta con le operazioni di unione ed intersezione, la famiglia dei sottoinsiemi $A \subset Y$ tali che $f^{-1}(A)$ è aperto in X, forma una topologia su Y. Tale topologia viene detta **topologia quoziente** rispetto ad f.

La topologia quoziente è l'unica topologia su Y che rende f una identificazione ed è la topologia più fine tra quelle che rendono continua f.

Supponiamo di avere una relazione di equivalenza $\sim$ su uno spazio topologico X. Denotiamo con $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza e con $\pi\colon X \to X/\sim$ l'applicazione surgettiva che ad ogni elemento $x \in X$ associa la sua classe di equivalenza $\pi(x) = [x]$. Lo spazio topologico $X/\sim$, dotato della topologia quoziente rispetto a π, viene detto **spazio quoziente**.

Proposizione 5.7. *Siano $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, $\sim$ una relazione di equivalenza su X e $\pi\colon X \to X/\sim$ la proiezione al quoziente. Allora esiste $g\colon X/\sim \to Y$ continua tale che $g\pi = f$ se e solo se f è costante sulle classi di equivalenza.*

Dimostrazione. Conseguenza immediata del Lemma 5.5. □

Esempio 5.8. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua e, per $x, y \in X$, definiamo $x \sim y$ se $f(x) = f(y)$. La relazione $\sim$ è di equivalenza e per la Proposizione 5.7, l'applicazione f induce al quoziente un'applicazione continua ed iniettiva $\overline{f}\colon X/\sim \to Y$. Segue immediatamente dalla definizione di topologia quoziente che f è una identificazione se e solo se $\overline{f}$ è un omeomorfismo.

Una classe di quozienti topologici particolarmente interessante è quella delle **contrazioni**: siano X uno spazio topologico, $A \subset X$ un sottoinsieme e consideriamo la più piccola relazione di equivalenza $\sim$ su X che possiede A come classe di equivalenza. In altri termini, per $x, y \in X$ vale

$$x \sim y \quad \text{se e solo se} \quad x = y \ \text{ oppure } \ x, y \in A.$$

È consuetudine indicare con X/A il quoziente topologico di X per la relazione $\sim$; diremo anche che la proiezione al quoziente $X \to X/A$ contrae A ad un punto.

Esempio 5.9. L'applicazione

$$f\colon S^{n-1} \times [0,1] \to D^n, \qquad f(x,t) = tx,$$

è continua e surgettiva. Dato che $S^{n-1} \times [0,1]$ è compatto e D^n di Hausdorff, ne segue che f è chiusa e quindi f è una identificazione. Siccome $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in S^{n-1} \times \{0\}$, segue dall'Esempio 5.8 che f induce un omeomorfismo tra il quoziente $S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\}$ ed il disco D^n.

Esempio 5.10. Consideriamo l'ipercubo $I^n = [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ e la contrazione del suo bordo $\partial I^n = [0,1]^n -]0,1[^n$ ad un punto. Il quoziente topologico $I^n/\partial I^n$ è omeomorfo alla sfera S^n. Infatti l'ipercubo I^n è omeomorfo al disco D^n ed abbiamo visto nell'Esempio 5.6 che esiste una identificazione $D^n \to S^n$ che contrae il bordo del disco ad un punto.

Esempio 5.11. Il nastro di Moebius si ottiene prendendo una striscia rettangolare di materiale flessibile (carta, cuoio, sottile lamiera ecc.) ed incollando tra loro due lati opposti dopo aver fatto fare mezzo giro ad uno di essi.

Topologicamente parlando, il nastro di Moebius M si ottiene prendendo il quadrato $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ ed identificando il punto $(0, y)$ con $(1, 1-y)$, per ogni $y \in [0,1]$: per visualizzare meglio tale identificazione può essere utile il modello di sartoria della Figura 1.5.

Esempio 5.12. La bottiglia di Klein, si definisce come il quoziente del quadrato $Q = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ per la relazione che identifica $(0, y)$ con $(1, 1-y)$ e $(x, 0)$ con $(x, 1)$, per ogni $x, y \in [0,1]$.

Osserviamo infine che ogni quoziente di un compatto è compatto e che ogni quoziente di un connesso è connesso.

Esercizi

5.7 (♡). Sullo spazio topologico $\mathbb{R}$, dotato della topologia euclidea, consideriamo la relazione di equivalenza

$$x \sim y \quad \text{se} \quad x = y \text{ oppure se } |x| = |y| > 1.$$

Provare che il quoziente topologico $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff e che ogni suo punto possiede un intorno aperto omeomorfo all'intervallo $]-1, 1[$.

5.8. Sia $D^2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ il disco unitario. Dimostrare che $\mathbb{R}^2/D^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

5.9. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff, $K \subset X$ un sottospazio compatto e X/K la contrazione di K ad un punto. Dimostrare che:

1. X/K è di Hausdorff.
2. (Proprietà di escissione.) Sia A un aperto di X contenuto in K. Allora l'applicazione naturale $(X - A)/(K - A) \to X/K$ è un omeomorfismo.
3. Se X è compatto, allora X/K coincide con la compattificazione di Alexandroff di $X - K$.

5.3 Quozienti per gruppi di omeomorfismi

Sia X uno spazio topologico e denotiamo con $\mathrm{Omeo}(X)$ l'insieme di tutti gli omeomorfismi di X in sé. Il prodotto di composizione induce su $\mathrm{Omeo}(X)$ una struttura di gruppo, con l'identità su X come elemento neutro.

Se $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ è un qualsiasi sottogruppo e, per $x, y \in X$ definiamo

$$x \sim y \qquad \text{se esiste } \; g \in G \; \text{ tale che } \; y = g(x),$$

allora $\sim$ è una relazione di equivalenza su X, le classi di equivalenza vengono dette **orbite** di G ed il relativo spazio quoziente viene indicato X/G.

Proposizione 5.13. *Sia $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ un gruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico X e sia $\pi\colon X \to X/G$ la proiezione al quoziente. Allora π è un'applicazione aperta. Se il gruppo G è finito, allora π è anche un'applicazione chiusa.*

Dimostrazione. Dato un qualunque sottoinsieme $A \subset X$ si ha

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \cup\{g(A) \mid g \in G\}.$$

Se A è aperto, allora $g(A)$ è aperto per ogni $g \in G$, dunque $\pi^{-1}(\pi(A))$ è unione di aperti e quindi aperto; per definizione di topologia quoziente ne consegue che $\pi(A)$ è aperto.

Se G è finito si ripete lo stesso ragionamento con A chiuso. □

Osservazione 5.14. In generale il quoziente di uno spazio di Hausdorff non è di Hausdorff (vedi Esercizio 5.7). Se $f\colon X \to Z$ è una identificazione, allora Z è di Hausdorff se e solo se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ tali che $f(x) \neq f(y)$ esistono intorni saturi disgiunti di x e y.

Anche il quoziente di uno spazio di Hausdorff per un gruppo di omeomorfismi non è detto che sia di Hausdorff (vedi Esercizio 5.10).

Proposizione 5.15. *Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio di Hausdorff X e indichiamo con $\pi\colon X \to X/G$ la proiezione al quoziente. Si assuma che esista un sottoinsieme aperto $A \subset X$ tale che:*

1. *A interseca ogni orbita di G, ossia la proiezione $\pi\colon A \to X/G$ è surgettiva.*
2. *L'insieme $\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$ è finito.*

Allora il quoziente X/G è di Hausdorff.

Dimostrazione. Indichiamo con $g_1, \ldots, g_n$ tutti e soli gli elementi del gruppo G tali che $g(A) \cap A \neq \emptyset$. Siano $p, q \in X/G$ due punti distinti e scegliamo due loro rappresentanti $x, y \in A$: $\pi(x) = p$, $\pi(y) = q$. Siccome X è di Hausdorff, per ogni indice $i = 1, \ldots, n$ possiamo trovare una coppia (U_i, V_i) di aperti di X tali che $x \in U_i$, $g_i(y) \in V_i$ e $U_i \cap V_i = \emptyset$. Consideriamo adesso i due aperti

$$U = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i, \qquad V = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i)$$

e proviamo che $U \cap g(V) = \emptyset$ per ogni $g \in G$. Se $g(A) \cap A = \emptyset$, allora, poiché $U, V \subset A$ si ha $U \cap g(V) \subset A \cap g(A) = \emptyset$. Se invece $g = g_i$ per qualche i, allora, poiché $U \subset U_i$ e $V \subset g^{-1}(V_i)$ si ha $U \cap g(V) \subset U_i \cap V_i = \emptyset$. Per dimostrare che x, y appartengono ad aperti saturi disgiunti basta dimostrare che

$$\left(\bigcup_{g \in G} g(U)\right) \cap \left(\bigcup_{h \in G} h(V)\right) = \bigcup_{g,h \in G} (g(U) \cap h(V)) = \emptyset.$$

Se fosse $g(U) \cap h(V) \neq \emptyset$ per qualche $g, h \in G$, allora avremmo

$$U \cap g^{-1}h(V) = g^{-1}(g(U) \cap h(V)) \neq \emptyset$$

in contraddizione a quanto dimostrato precedentemente. □

Esempio 5.16. Sia $G \subset \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^n)$ il gruppo delle traslazioni per vettori a coordinate intere, ossia $g \in G$ se e solo se esiste $a \in \mathbb{Z}^n$ tale che $g(x) = x+a$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Allora il quoziente $\mathbb{R}^n/G$ è di Hausdorff. Infatti, se consideriamo l'aperto

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1 \text{ per ogni } i\},$$

la proiezione $A \to \mathbb{R}^n/G$ è surgettiva. Inoltre, se $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, vale $A \cap (A + a) \neq \emptyset$ solo se $|a_i| \leq 1$ per ogni i. Basta quindi applicare la Proposizione 5.15.

Corollario 5.17. *Sia G un gruppo finito di omeomorfismi di uno spazio di Hausdorff X. Allora il quoziente X/G è di Hausdorff.*

Dimostrazione. Basta applicare la Proposizione 5.15 all'aperto $A = X$. □

Proposizione 5.18. *Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico X. Allora il quoziente X/G è di Hausdorff se e solo se l'insieme*

$$K = \{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X,\ g \in G\}$$

è chiuso nel prodotto.

Dimostrazione. La proiezione $\pi\colon X \to X/G$ è aperta e surgettiva. Ne segue che anche l'applicazione

$$p\colon X \times X \to X/G \times X/G, \qquad p(x, y) = (\pi(x), \pi(y)),$$

è aperta e surgettiva e dunque una identificazione.

Notiamo che $p(x, y)$ appartiene alla diagonale Δ di $X/G \times X/G$ se e solo se x e y appartengono alla stessa orbita, ossia se e solo se $(x, y) \in K$. Abbiamo dimostrato che $p^{-1}(\Delta) = K$ e, dal fatto che p è una identificazione, deduciamo che Δ è chiusa se e solo se K è chiuso. □

Esercizi

5.10. Provare che per ogni intero $n > 0$, il quoziente $\mathbb{R}^n/\,\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ non è di Hausdorff.

5.11. Sia $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ un sottogruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico di Hausdorff X. Dimostrare che, se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ esistono un intorno U di x ed un intorno V di y tali che $g(U) \cap V \neq \emptyset$ per al più un insieme finito di elementi $g \in G$, allora X/G è di Hausdorff.

5.12 (♡). Dimostrare che l'applicazione

$$\mathbb{e}\colon \mathbb{R} \to S^1, \qquad \mathbb{e}(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

è una identificazione e quindi induce un omeomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$, dove $\mathbb{Z}$ è inteso come il sottogruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}$ generato dalla traslazione $x \mapsto x + 1$. Mostrare inoltre che l'applicazione $\mathbb{e}$ è aperta ma non è chiusa.

5.13. Siano X uno spazio di Hausdorff e $g\colon X \to X$ un omeomorfismo. Sia $G \simeq \mathbb{Z}$ il gruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}\times X$ generato da $(t,x) \mapsto (t+1, g(x))$. Dimostrare che il quoziente $(\mathbb{R}\times X)/G$ è di Hausdorff.

5.4 Gli spazi proiettivi

Tra gli esempi più importanti di quozienti per gruppi di omeomorfismi troviamo lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Per definizione, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è il quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \;\text{ se esiste } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \;\text{ tale che } x = \lambda y.$$

Possiamo anche considerare $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come il quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/G$, dove G è il gruppo delle omotetie. Notiamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è in bigezione naturale con l'insieme dei sottospazi vettoriali di dimensione 1 di $\mathbb{R}^{n+1}$. Dato un vettore $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, la sua classe di equivalenza in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ viene indicata solitamente $[x_0, \ldots, x_n]$.

Poniamo su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la corrispondente topologia quoziente: dunque la proiezione naturale $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una identificazione aperta.

La composizione dell'inclusione $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ e della proiezione π è un'applicazione continua e surgettiva che si fattorizza ad un'applicazione continua e bigettiva $f\colon S^n/\!\sim\, \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dove, per $x, y \in S^n$ si definisce $x \sim y$ se $x = \pm y$. Vogliamo dimostrare che la bigezione f è un omeomorfismo; a tal fine consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{r} & S^n \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ S^n/\!\sim & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f^{-1}} & S^n/\!\sim \end{array}, \qquad r(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Poiché sia l'inclusione i che l'applicazione r sono continue, anche le composizioni πi e $\pi' r$ sono continue e, per la Proposizione 5.7, le applicazioni f ed f^{-1} risultano continue.

Siccome $S^n/\sim\, = S^n/\pm Id$, dove $\pm Id \subset \mathrm{Omeo}(S^n)$ è il sottogruppo di ordine due formato dall'identità e dall'antipodo, segue dal Corollario 5.17 che gli spazi proiettivi reali sono di Hausdorff.

Esempio 5.19. Consideriamo lo spazio topologico X ottenuto quozientando il disco bidimensionale $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \le 1\}$ per la relazione che identifica i punti del bordo opposti: per meglio dire $X = D^2/\!\sim$, dove

$$x \sim y \quad \text{se} \quad x = y \quad \text{oppure se} \quad \|x\| = \|y\| = 1,\, x = -y.$$

Vogliamo mostrare che X è omeomorfo al piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Per iniziare identifichiamo il disco D^2 con la calotta sferica superiore

$$S^2_+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\, z \geq 0\} \subset S^2$$

tramite l'omeomorfismo $S^2_+ \to D^2$ dato da $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Lo spazio X è quindi omeomorfo a $S^2_+/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica il punto $(x,y,0) \in S^2_+$ con il suo antipodo $(-x,-y,0)$. Denotando con $i\colon S^2_+ \to S^2$ l'inclusione e con $\pi\colon S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $p\colon S^2_+ \to X$ le proiezioni al quoziente, abbiamo un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{array}{ccc} S^2_+ & \xrightarrow{i} & S^2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

L'applicazione j è inoltre bigettiva e va da un compatto ad uno spazio di Hausdorff: dunque j è un omeomorfismo.

Esempio 5.20. Per ogni indice $i = 0, \ldots, n$ il sottoinsieme

$$A_i = \{[x_0,\ldots,x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

è un aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ ed il ricoprimento $\{A_0,\ldots,A_n\}$ è fondamentale. Infatti, denotando con $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proiezione al quoziente, si ha che

$$\pi^{-1}(A_i) = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid x_i \neq 0\}$$

è un aperto. L'applicazione

$$f\colon \mathbb{R}^n \to A_0, \qquad f(y_1,\ldots,y_n) = [1, y_1, \ldots, y_n]$$

è continua e bigettiva. Inoltre

$$f^{-1}\pi\colon \pi^{-1}(A_0) \to \mathbb{R}^n, \qquad f^{-1}\pi(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right).$$

è continua e per la proprietà universale delle identificazioni, anche f^{-1} è continua. Infine, una semplice permutazione degli indici ci dà un omeomorfismo $A_0 \simeq A_i$ per ogni indice i.

Gli spazi proiettivi complessi si definiscono in modo del tutto simile a quelli reali. Per definizione $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è il quoziente di $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ per la relazione di equivalenza

$$x \sim y \text{ se esiste } \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ tale che } x = \lambda y,$$

e quindi $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/G$, dove G è il gruppo delle omotetie complesse. Poniamo su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la topologia quoziente.

Proposizione 5.21. *Gli spazi proiettivi, reali e complessi, sono spazi topologici connessi, compatti e di Hausdorff.*

Dimostrazione. Le applicazioni di proiezione

$$S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \qquad S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

sono continue e surgettive; questo prova che gli spazi proiettivi sono compatti e connessi.

Abbiamo già dimostrato che gli spazi proiettivi reali sono di Hausdorff, consideriamo quindi il caso complesso. Per la Proposizione 5.18, lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è di Hausdorff se e solo se

$$K = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \mid x = \lambda y\}$$

è chiuso. Interpretando ogni elemento di $\mathbb{C}^{n+1}$ come un vettore colonna, si ha che $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ coincide con lo spazio delle matrici $(n+1) \times 2$ con entrambe le colonne non nulle e di conseguenza K corrisponde all'intersezione di $(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ con l'insieme delle matrici di rango 1. Tale insieme è chiuso in quanto è definito dall'annullarsi dei determinanti minori di ordine 2. □

Esercizi

5.14. Dimostrare che le applicazioni di proiezione

$$S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \qquad S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

sono identificazioni chiuse.

5.15. Verificare che l'applicazione $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S^1$,

$$[x_0, x_1] \mapsto \left(\frac{x_0^2 - x_1^2}{x_0^2 + x_1^2}, \frac{2x_0x_1}{x_0^2 + x_1^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

5.16. Verificare che l'applicazione $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$,

$$[z_0, z_1] \mapsto \left(\frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z}_0 z_1 - \overline{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z}_0 z_1 + \overline{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

5.17. Una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un'applicazione $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ indotta per passaggio al quoziente da un'applicazione lineare iniettiva $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Dimostrare che le proiettività sono omeomorfismi.

5.18. Si consideri il sottoinsieme $Z \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^4$ formato dalle coppie $([x_0, x_1], (a_0, a_1, a_2, a_3))$ tali che

$$x_0^4 + a_1 x_0^3 x_1 + a_2 x_0^2 x_1^2 + a_3 x_0 x_1^3 + a_4 x_1^4 = 0$$

Dimostrare che Z è chiuso nel prodotto e dedurne che l'insieme dei vettori (a_0, a_1, a_2, a_3) tali che il polinomio monico $t^4 + a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4$ possiede almeno una radice reale è chiuso in $\mathbb{R}^4$.

5.5 Spazi localmente compatti

Definizione 5.22. *Uno spazio topologico si dice* ***localmente compatto*** *se ogni suo punto possiede un intorno compatto.*

Esempio 5.23. Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono localmente compatti. Infatti se $U \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e $x \in U$ esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset U$; per ogni $0 < R < r$ la palla chiusa $\overline{B(x,R)}$ è un intorno compatto di x in U.

Segue immediatamente dalla definizione che ogni spazio compatto è localmente compatto.

Proposizione 5.24. *Ogni sottospazio chiuso di uno spazio localmente compatto è localmente compatto. Il prodotto di due spazi localmente compatti è localmente compatto.*

Dimostrazione. Sia X localmente compatto ed Y un sottospazio chiuso di X. Per ogni punto $y \in Y$ esiste un intorno compatto $y \in U \subset X$. L'intersezione $Y \cap U$ è un intorno di y in Y ed è anche compatto in quanto sottoinsieme chiuso di U.

Se X, Y sono due spazi localmente compatti ed $(x,y) \in X \times Y$, allora, presi due intorno compatti $x \in U \subset X$ e $y \in V \subset Y$, il loro prodotto $U \times V$ è un intorno compatto di (x,y). □

Al pari della compattezza, la locale compattezza diventa una proprietà particolarmente utile quando riguarda gli spazi di Hausdorff.

Teorema 5.25. *In uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni compatti.*

Dimostrazione. Siano x un punto di uno spazio di Hausdorff X e K un suo intorno compatto; dimostriamo che la famiglia degli intorni compatti di x contenuti in K è un sistema fondamentale di intorni. Sia U un aperto di X che contiene x, consideriamo il compatto $A = K - U$ e le inclusioni

$$\{x\} \times A \subset K \times K - \Delta \subset K \times K,$$

dove Δ è la diagonale. Per il teorema di Wallace esistono due aperti disgiunti $V, W \subset K$ tali che $x \in V$ e $A \subset W$. Il sottoinsieme $V \cap K^o$ è aperto in K^o e quindi è aperto anche in X. Siccome K è chiuso in X, anche $K - W$ è chiuso in X e quindi la chiusura di V in X è contenuta in $K - W$. Dunque

$$x \in V \cap K^o \subset \overline{V} \subset K - W \subset K - A = K \cap U$$

e $\overline{V}$ è un intorno compatto di x contenuto in $K \cap U$. □

Corollario 5.26. *Siano $f\colon X \to Y$ una identificazione e Z uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff. Allora anche*

$$f \times Id\colon X \times Z \to Y \times Z, \qquad (x,z) \mapsto (f(x), z),$$

è una identificazione.

Dimostrazione. Indichiamo per semplicità notazionale $F = f \times Id$. L'osservazione chiave è la seguente: se $A \subset X \times Z$ è F-saturo, allora per ogni $B \subset Z$, il sottoinsieme $(A : B)$, che ricordiamo essere definito come

$$(A : B) = \{x \in X \mid \{x\} \times B \subset A\},$$

è f-saturo. Dobbiamo dimostrare che se $x \in (A : B)$, $x' \in X$ e $f(x) = f(x')$, allora anche $x' \in (A : B)$: questo è chiaro poiché per ogni $b \in B$ si ha $(x, b) \in A$, $F(x, b) = F(x', b)$ e siccome A è saturo ne consegue $(x', b) \in A$.

Sia dunque $U \subset Y \times Z$ un sottoinsieme tale che $A = F^{-1}(U)$ è un aperto di $X \times Z$ e sia $(y, z) \in U$; vogliamo trovare due intorni $V \subset Y$ e $W \subset Z$ tali che $(y, z) \in V \times W \subset U$. Scegliamo un punto $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Siccome Z è localmente compatto, per il Teorema 5.25 possiamo trovare un intorno compatto W di z tale che $\{x\} \times W \subset A$. Adesso la proiezione $\pi\colon X \times W \to X$ è chiusa e quindi

$$(A : W) = X - \pi(X \times W - A)$$

è un aperto che abbiamo visto essere f-saturo. Per definizione di identificazione $V = f((A : W))$ è un aperto e vale $(y, z) \in V \times W \subset U$.

Osserviamo infine che se f è aperta, allora anche $f \times Id$ è aperta ed il risultato è banalmente vero senza alcuna ipotesi sulla locale compattezza di Z. □

Mostreremo nell'Esercizio 5.21 che il risultato del Corollario 5.26 è falso senza l'ipotesi di locale compattezza di Z.

Esercizi

5.19. Sia X uno spazio topologico localmente compatto. Dimostrare che ogni sottospazio compatto possiede un intorno compatto, ossia che per ogni compatto $K \subset X$ esiste un compatto $H \subset X$ tale che $K \subset H^\circ$.

5.20. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi localmente compatti di Hausdorff e sia $K \subset Y$ un sottospazio compatto tale che $f^{-1}(K)$ è compatto in X. Dimostrare che esistono due aperti $f^{-1}(K) \subset U$, $K \subset V$ tali che $f(U) \subset V$ e la restrizione $f\colon U \to V$ è un'applicazione propria (Esercizio 4.30). (Sugg.: sia W un intorno compatto di $f^{-1}(K)$; si osservi che $K \cap f(\partial W) = \emptyset$ e si consideri $U = W - f^{-1}(f(\partial W))$.)

5.21 (♡). Sia $f\colon \mathbb{R} \to X$ una identificazione tale che $f(x) = f(y)$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Denotiamo con $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'insieme dei punti appartenenti all'unione delle rette di equazioni $x + y = n + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che:

1. f è una identificazione chiusa.
2. C è chiuso ed è saturo rispetto all'applicazione

$$f \times Id\colon \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to X \times \mathbb{Q}.$$

3. $(f \times Id)(C)$ non è chiuso nella topologia prodotto; più precisamente il punto $(f(0), 0)$ appartiene alla chiusura di $(f \times Id)(C)$.
4. $f \times Id$ non è una identificazione.

5.6 Il teorema fondamentale dell'algebra ↷

In questa sezione daremo una dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra che utilizza metodi di topologia generale. In seguito ne daremo un'altra che utilizza la teoria dell'omotopia (Corollario 15.27).

Lemma 5.27. *Sia $p(z)$ un polinomio di grado positivo a coefficienti complessi. Se $p(0) \neq 0$, allora esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $|p(z)| < |p(0)|$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $k > 0$ la molteplicità di 0 come radice del polinomio $p(z) - p(0)$. Possiamo quindi scrivere

$$p(z) = p(0) - z^k(b_0 + b_1 z + \cdots + b_r z^r), \qquad \text{con} \quad b_0 \neq 0.$$

Sia c una radice k-esima di $\dfrac{p(0)}{b_0}$ e consideriamo la funzione continua

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(t) = |p(ct)| = \left| p(0) - t^k p(0) - t^{k+1} \sum_{i=1}^{r} b_i c^{k+i} t^{i-1} \right|.$$

Per la disuguaglianza triangolare

$$g(t) \leq |p(0)|(1 - t^k) + t^{k+1} \left| \sum_{i=1}^{r} b_i c^{k+i} t^{i-1} \right|.$$

Per ipotesi $|p(0)| > 0$ e quindi per t positivo e sufficientemente piccolo vale $g(t) < g(0)$. □

Teorema 5.28. *Sia $p(z)$ un polinomio di grado positivo a coefficienti complessi. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $p(z_0) = 0$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che p sia un polinomio monico, ossia

$$p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad n > 0.$$

Consideriamo la funzione continua $f\colon \mathbb{C} \to [0, +\infty[$ definita come $f(z) = |p(z)|$ e mostriamo che possiede un punto di minimo assoluto. Dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$f(z) = |p(z)| \geq |z^n| - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i||z|^i = |z^n| \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{|z|^{n-i}} \right).$$

Scegliamo un numero reale $R > 0$ sufficientemente grande e tale che

$$\frac{|a_0|}{R^n} < \frac{1}{2}, \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{R^{n-i}} < \frac{1}{2}.$$

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| \geq R$ vale

$$f(z) \geq |z^n| \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|a_i|}{R^{n-i}}\right) \geq \frac{|z|^n}{2} \geq \frac{R^n}{2} \geq |a_0| = f(0)$$

e quindi il minimo assoluto della funzione f sul compatto $\{z \mid |z| \leq R\}$ è anche un minimo assoluto per la funzione f definita su tutto il piano complesso.

Abbiamo quindi dimostrato che la funzione $|p(z)|$ possiede un punto, chiamamolo z_0, di minimo assoluto. Dunque la funzione $g(z) = |p(z + z_0)|$ possiede 0 come punto di minimo assoluto; per il Lemma 5.27 il polinomio $q(z) = p(z + z_0)$ si annulla in 0 e quindi $p(z_0) = 0$. □

Definizione 5.29. *Per ogni intero positivo n, le* ***funzioni simmetriche elementari*** $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *sono le funzioni definite dalla relazione*

$$t^n + \sigma_1(z_1, \ldots, z_n)t^{n-1} + \cdots + \sigma_n(z_1, \ldots, z_n) = \prod_{i=1}^{n}(t + z_i).$$

Per meglio dire, i valori delle funzioni simmetriche elementari calcolate su di una n-upla di numeri complessi $(a_1, \ldots, a_n)$ sono i coefficienti del polinomio monico di grado n che ha come radici $-a_1, \ldots, -a_n$. Per $n = 3$ le funzioni simmetriche elementari sono

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \sigma_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1, \quad \sigma_3 = z_1z_2z_3.$$

Lemma 5.30. *L'applicazione*

$$\sigma \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \qquad \sigma(z) = (\sigma_1(z), \ldots, \sigma_n(z)),$$

è una identificazione chiusa.

Dimostrazione. Segue dal teorema fondamentale dell'algebra che σ è surgettiva; dimostriamo che è un'applicazione chiusa. Denotiamo con $V_n \cong \mathbb{C}^{n+1}$ lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n a coefficienti complessi nelle variabili t_0, t_1 e con $\mathbb{P}(V_n) \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ il suo proiettivizzato.

L'applicazione

$$g \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}(V_n), \qquad g(a_1, \ldots, a_n) = [t_1^n + a_1t_0t_1^{n-1} + \cdots + a_nt_0^n]$$

induce un omeomorfismo tra $\mathbb{C}^n$ e l'aperto

$$U = \{[h(t_0, t_1)] \in \mathbb{P}(V_n) \mid h(0, 1) \neq 0\}.$$

Se denotiamo con $p\colon \mathbb{P}(V_1)^n \to \mathbb{P}(V_n)$ l'applicazione indotta dal prodotto

$$p([u_1t_1 + z_1t_0], \dots, [u_nt_1 + z_nt_0]) = [(u_1t_1 + z_1t_0)\cdots(u_nt_1 + z_nt_0)],$$

allora, essendo $\mathbb{P}(V_1)^n$ compatto e $\mathbb{P}(V_n)$ di Hausdorff, l'applicazione p è chiusa e, per la formula di proiezione, anche la restrizione $p\colon p^{-1}(U) \to U$ è chiusa. Basta adesso osservare che l'applicazione

$$f\colon \mathbb{C}^n \to p^{-1}(U), \qquad f(z_1, \dots, z_n) = ([t_1 + z_1t_0], \dots, [t_1 + z_nt_0])$$

è un omeomorfismo e che il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{C}^n \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{P}(V_1)^n \arrow[r, "p"] & \mathbb{P}(V_n). \end{tikzcd}$$

□

Ogni permutazione τ di $\{1, \dots, n\}$ induce, per permutazione degli indici, un omeomorfismo $\tau\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ definito dalla relazione

$$\tau^{-1}(z_1, \dots, z_n) = (z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)}).$$

Esiste dunque una rappresentazione del gruppo simmetrico Σ_n come un sottogruppo di Omeo$(\mathbb{C}^n)$ ed ha senso considerare lo spazio quoziente $\mathbb{C}^n/\Sigma_n$.

Teorema 5.31. *Nelle notazioni precedenti l'applicazione σ induce, per passaggio al quoziente, un omeomorfismo $\mathbb{C}^n/\Sigma_n \simeq \mathbb{C}^n$. In particolare σ è una identificazione aperta e chiusa.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione delle funzioni simmetriche elementari che σ è costante sulle orbite di Σ_n e quindi, per la Proposizione 5.7, esiste un diagramma commutativo di applicazioni continue.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \mathbb{C}^n \\ \mathbb{C}^n/\Sigma_n \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Sappiamo dall'algebra che ogni polinomio di grado n determina univocamente n radici a meno dell'ordine e quindi l'applicazione h è bigettiva. Per il Lemma 5.30 l'applicazione σ è una identificazione e di conseguenza h è un omeomorfismo. Per la Proposizione 5.13, la proiezione $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\Sigma_n$ è aperta e chiusa e quindi anche σ è aperta e chiusa. □

Esercizi

5.22. Consideriamo l'insieme $Y \subset \mathbb{R}^n$ formato dai vettori $(a_1, \ldots, a_n)$ tali che il polinomio $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ possiede almeno un fattore multiplo. Dimostrare che Y è chiuso in $\mathbb{R}^n$. (Sugg.: denotiamo con V_d lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado d a coefficienti reali nelle variabili t_0, t_1. L'applicazione

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}(V_n), \qquad g(a_1, \ldots, a_n) = [t_1^n + a_1 t_0 t_1^{n-1} + \cdots + a_n t_0^n]$$

è continua e $Y = \cup_{2d \le n} g^{-1}(Z_d)$, dove Z_d è l'immagine dell'applicazione chiusa

$$\mathbb{P}(V_d) \times \mathbb{P}(V_{n-2d}) \to \mathbb{P}(V_n), \qquad ([p], [q]) \mapsto [p^2 q].)$$

5.23 (*). Siano T uno spazio topologico e $X \subset T \times \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un sottoinsieme chiuso. Denotiamo con $p\colon T \times \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to T$ e $q\colon T \times \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ le proiezioni e, per ogni $t \in T$, con $X_t = q(p^{-1}(t)) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Dimostrare che, se X_t è un sottospazio proiettivo per ogni t, allora gli insiemi

$$U_k = \{t \in T \mid \dim X_t < k\}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

sono aperti in T. (Sugg.: $t \in U_k$ se e solo se esiste un sottospazio proiettivo $L \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di dimensione $n - k$ tale che $L \cap X_t = \emptyset$.)

5.24 (*). Dimostrare che, per $n \geq 2$, non esiste alcuna applicazione continua $s\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tale che $\sigma s = Id$. (Sugg.: può risultare utile restringere l'applicazione σ allo spazio delle configurazioni introdotto nell'Esercizio 4.10).

6

Successioni

Proprietà di numerabilità – Successioni – Successioni di Cauchy – Spazi metrici compatti – Il teorema di Baire – Completamenti $\curvearrowright$ – Spazi di funzioni e teorema di Ascoli-Arzelà $\curvearrowright$ – Insiemi diretti, reti e successioni generalizzate $\curvearrowright$

I primi termini della successione di Mandrake sono: *fischio maschio senza raschio, vischio maschio senza fischio, rischio maschio senza whisky, fischi maschio senza raschio, whiskio fischio senza maschio, teschio maschio senza fischio, caschio moschio senza fischio,...*

È ragionevole attendersi che questa successione converga? che abbia punti di accumulazione? che ammetta sottosuccessioni convergenti? Questo capitolo ci aiuterà a capire tali domande ed a fornire plausibili risposte.

6.1 Proprietà di numerabilità

Definizione 6.1. *Uno spazio topologico si dice a* ***base numerabile*** *se esiste una base della topologia formata da una quantità numerabile di aperti.*

Alcuni autori chiamano **secondo assioma di numerabilità** la proprietà di essere a base numerabile.

Esempio 6.2. La retta euclidea $\mathbb{R}$ è a base numerabile: la famiglia

$$\{\ ]c,d[\ \mid c,d\in\mathbb{Q}\}$$

degli intervalli aperti ad estremi razionali è numerabile ed è una base della topologia euclidea. Infatti ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione di intervalli aperti, e per ogni intervallo $]a,b[$ vale

$$]a,b[=\bigcup\{\ ]c,d[\ \mid a\le c<d\le b,\ c,d\in\mathbb{Q}\}.$$

Esempio 6.3. Ogni sottospazio di uno spazio a base numerabile è a base numerabile: infatti se $\mathcal{B}$ è una base numerabile di uno spazio X e $Y\subset X$, allora $\{A\cap Y\mid A\in\mathcal{B}\}$ è una base numerabile del sottospazio Y.

Esempio 6.4. Il prodotto di due spazi topologici a base numerabile è ancora a base numerabile. Difatti si mostra facilmente che se $\mathcal{A}$ è una base di aperti di X e $\mathcal{B}$ è una base di aperti di Y, allora la famiglia

$$\mathcal{C} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

è una base di aperti del prodotto $X \times Y$. Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono entrambe numerabili, allora anche $\mathcal{C}$ è numerabile.

Il quoziente di uno spazio a base numerabile potrebbe non essere a base numerabile (Esercizio 6.1).

Ricordiamo (Definizione 3.13) che un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice denso se interseca ogni aperto non vuoto.

Definizione 6.5. *Uno spazio topologico si dice **separabile** se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.*

Lemma 6.6. *Ogni spazio topologico a base numerabile è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di uno spazio topologico X; per ogni aperto $U \in \mathcal{B}$ scegliamo un punto $p_U \in U$. L'insieme $E = \{p_U \mid U \in \mathcal{B}\}$ è numerabile, interseca ogni aperto della base ed è quindi denso. □

Lemma 6.7. *Ogni spazio metrico separabile è a base numerabile.*

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico separabile e scegliamo un sottoinsieme $E \subset X$ denso e numerabile. È sufficiente dimostrare che la famiglia numerabile di palle aperte

$$\mathcal{B} = \{B(e, 2^{-n}) \mid e \in E,\, n \in \mathbb{N}\}$$

è una base della topologia. Siano U un aperto di X ed $x \in U$; sia inoltre $n \in \mathbb{N}$ un intero tale che $B(x, 2^{1-n}) \subset U$. Poiché E è denso esiste $e \in E \cap B(x, 2^{-n})$; per simmetria il punto x appartiene alla palla $B(e, 2^{-n})$ e per la disuguaglianza triangolare $B(e, 2^{-n}) \subset B(x, 2^{1-n}) \subset U$. □

Esempio 6.8. Indichiamo con $\ell^2(\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le successioni $\{a_n\}$ di numeri reali tali che $\sum_n a_n^2 < +\infty$ e, per ogni $a = \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{R})$, denotiamo

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}.$$

Siccome per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ vale $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$, è immediato dimostrare che $\ell^2(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le successioni.

Date due successioni $\{a_n\}, \{b_n\} \in \ell^2(\mathbb{R})$, per ogni $N > 0$ vale la disuguaglianza triangolare

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{N} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{N} b_n^2}.$$

Passando al limite per $N \to \infty$ troviamo la relazione

$$\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

e quindi $\ell^2(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico dotato della distanza $d(a, b) = \|a - b\|$.

Consideriamo il sottoinsieme numerabile $E \subset \ell^2(\mathbb{R})$ formato dalle successioni di numeri razionali definitivamente nulle. Data una qualsiasi successione $a = \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{R})$ ed un qualunque numero reale $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un intero $N > 0$ e N numeri razionali $b_1, \ldots, b_N$ tali che

$$\sum_{n>N} a_n^2 < \varepsilon, \qquad (a_n - b_n)^2 < \frac{\varepsilon}{N} \quad \text{per ogni} \quad n \leq N.$$

Quindi, se poniamo $b_n = 0$ per ogni $n > N$ e indichiamo con $b \in E$ la successione $\{b_n\}$ ne segue che $\|a - b\|^2 \leq 2\varepsilon$. Abbiamo dimostrato che E è un sottoinsieme denso, quindi lo spazio metrico $\ell^2(\mathbb{R})$ è separabile e, per il Lemma 6.7, è anche a base numerabile.

Proposizione 6.9. *In uno spazio topologico a base numerabile, ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.*

Dimostrazione. Siano X uno spazio topologico a base numerabile e $\mathcal{A}$ un suo ricoprimento aperto. Fissiamo una base numerabile $\mathcal{B}$ della topologia, e per ogni $x \in X$ si scelgano un aperto $U_x \in \mathcal{A}$ ed un elemento $B_x \in \mathcal{B}$ tali che $x \in B_x \subset U_x$. La famiglia di aperti $\mathcal{B}' = \{B_x \mid x \in X\}$ è un sottoricoprimento di $\mathcal{B}$ ed è quindi numerabile. Possiamo trovare un sottoinsieme numerabile $E \subset X$ tale che $\mathcal{B}' = \{B_x \mid x \in E\}$ e di conseguenza la famiglia $\{U_x \mid x \in E\}$ è un sottoricoprimento numerabile di $\mathcal{A}$. $\square$

Definizione 6.10. *Uno spazio topologico soddisfa il* ***primo assioma di numerabilità*** *se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile.*

Diremo anche che uno spazio topologico è **primo-numerabile**[1] per indicare che soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Se uno spazio topologico soddisfa il secondo assioma di numerabilità, allora soddisfa anche il primo. Infatti, se $\mathcal{B}$ è una base numerabile, allora gli aperti di $\mathcal{B}$ che contengono un dato punto x formano un sistema fondamentale di intorni di x.

[1] Primo-numerabile è la traduzione brutale del termine *first-countable* usato in lingua inglese. Lo abbiamo preferito a *base locale numerabile* per evitare possibili confusioni con il secondo assioma di numerabilità.

Lemma 6.11. *Gli spazi metrici soddisfano il primo assioma di numerabilità.*

Dimostrazione. Sia x un punto in uno spazio metrico, allora la famiglia di palle aperte $\{B(x, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x. □

Il prossimo esempio mostra che non tutti gli spazi primo-numerabili sono metrizzabili.

Esempio 6.12. La retta di Sorgenfrey (Esempio 3.9), che indicheremo con $\mathbb{R}_{Sf}$, è separabile e primo-numerabile, ma non è a base numerabile. In particolare non è metrizzabile. Infatti il sottoinsieme dei numeri razionali è denso in $\mathbb{R}_{Sf}$ e quindi la retta di Sorgenfrey è separabile. Per ogni numero reale a, la famiglia numerabile di aperti $\{[a, a+2^{-n}[\mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di a. Sia $\mathcal{B}$ una base di aperti di $\mathbb{R}_{Sf}$; per ogni $x \in \mathbb{R}_{Sf}$ l'aperto $[x, +\infty[$ contiene x e quindi esiste $U(x) \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U(x)$ e $U(x) \subset [x, +\infty[$. In particolare, se $x < y$, allora $x \notin U(y)$ e quindi $U(x) \neq U(y)$: dunque l'applicazione $\mathbb{R}_{Sf} \to \mathcal{B}$, $x \mapsto U(x)$, è iniettiva e $\mathcal{B}$ non è numerabile.

Teorema 6.13. *Sia X uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff a base numerabile. Allora esiste una esaustione in compatti di X, cioè, esiste una successione di sottospazi compatti*

$$K_1 \subset K_2 \subset \cdots$$

che ricopre X e tale che $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ per ogni n.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X e denotiamo con $\mathcal{B}_c \subset \mathcal{B}$ la sottofamiglia degli aperti che hanno chiusura compatta. Siccome X è localmente compatto di Hausdorff, la famiglia $\mathcal{B}_c$ è un ricoprimento di X. Denotiamo con $\mathcal{A}$ la famiglia delle unioni finite di elementi di $\mathcal{B}_c$. Per costruzione $\mathcal{A}$ è al più numerabile, ogni $A \in \mathcal{A}$ ha chiusura compatta e per ogni compatto $K \subset X$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $K \subset A$. Fissiamo un'applicazione surgettiva $g \colon \mathbb{N} \to \mathcal{B}_c$ e definiamo per ricorrenza una successione di compatti $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ ponendo

$$K_1 = \overline{g(1)}, \qquad K_n = \overline{A_n \cup g(n)},$$

dove A_n è un aperto di $\mathcal{A}$ scelto tra quelli che contengono K_{n-1}. La famiglia K_n è una esaustione in compatti di X. □

Esercizi

6.1 (♡). Dati due numeri reali $x, y \in \mathbb{R}$, definiamo $x \sim y$ se $x = y$ oppure se $x, y \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che $\mathbb{R}/\sim$ non soddisfa il primo assioma di numerabilità.

6.2. Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico a base numerabile. Dimostrare che esiste una sottofamiglia numerabile $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ che è una base della topologia.

6.3. Sia $f\colon X \to Y$ continua e surgettiva. Provare che se X è separabile allora anche Y è separabile. Se in aggiunta f è aperta e X ha una base numerabile, allora anche Y ha una base numerabile.

6.4. Provare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. Trovare un esempio di spazio separabile e di un suo sottospazio non separabile. (Sugg.: Esercizio 3.47.)

6.5. Siano X, Y due spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua, chiusa e surgettiva tale che $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$. Si dimostri che se X è a base numerabile, allora anche Y è a base numerabile.

6.6 (∗). Consideriamo una famiglia di copie disgiunte $\mathbb{R}_a$ della retta reale parametrizzate da $a \in]-\pi/2, \pi/2[$ e le applicazioni continue

$$f_a\colon (\mathbb{R}_a - \{0\})\times]-1,1[\to \mathbb{R}^2,$$

$$f_a(x,t) = \left(\frac{\cos(a)}{x} - t\sin(a), \frac{\sin(a)}{x} + t\cos(a)\right).$$

Indichiamo con X il quoziente topologico dell'unione disgiunta di $\mathbb{R}^2$ e di tutte le strisce $\mathbb{R}_a\times]-1,1[$:

$$X = \frac{\mathbb{R}^2 \cup_a \mathbb{R}_a\times]-1,1[}{\sim}$$

per la più piccola relazione di equivalenza tale che

$$(x,t) \sim f_a(x,t), \qquad \text{per} \quad (x,t) \in (\mathbb{R}_a - \{0\})\times]-1,1[.$$

Dimostrare che:

1. X è connesso, separabile, di Hausdorff ed ogni punto possiede un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.
2. X contiene un sottoinsieme discreto di cardinalità più che numerabile. In particolare X non è a base numerabile.
3. X non è unione numerabile di compatti.

6.2 Successioni

Una **successione** in uno spazio topologico X è un'applicazione $a\colon \mathbb{N} \to X$; è consuetudine considerare il dominio come insieme di indici e scrivere a_i in luogo di $a(i)$.

Definizione 6.14. *Sia $\{a_n\}$ una successione in uno spazio topologico X. Diremo che:*

1. *La successione* ***converge*** *ad un punto $p \in X$ se per ogni intorno U di p esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n \geq N$.*

2. *Un punto $p \in X$ è di* ***accumulazione*** *della successione, se per ogni intorno U di p e per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq N$ tale che $a_n \in U$.*

Se una successione converge a p allora p è anche un punto di accumulazione; il viceversa è generalmente falso.

In uno spazio di Hausdorff ogni successione converge al più ad un punto. Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ converga a due punti distinti p e q; se X è di Hausdorff, allora esistono due intorni disgiunti $p \in U$, $q \in V$ e due numeri interi N, M tali che $a_n \in U$ per ogni $n \geq N$ e $a_n \in V$ per ogni $n \geq M$; perciò per ogni $n \geq \max(N, M)$ si ha $a_n \in U \cap V$ in contraddizione con l'ipotesi $U \cap V = \emptyset$.

Definizione 6.15. *Diremo che una successione $\{a_n\}$ in X è* ***convergente*** *se converge a qualche punto $p \in X$. Se inoltre X è di Hausdorff, diremo anche che p è il* ***limite*** *di $\{a_n\}$ e scriveremo*

$$a_n \to p, \quad \textit{oppure} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = p.$$

Definizione 6.16. *Una* ***sottosuccessione*** *di una successione $a\colon \mathbb{N} \to X$ è la composizione di a con un'applicazione $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente.*

Lemma 6.17. *Sia $\{a_n\}$ una successione in uno spazio topologico X. Se esiste una sottosuccessione $\{a_{k(n)}\}$ che converge ad un punto $p \in X$, allora p è un punto di accumulazione di $\{a_n\}$.*

Dimostrazione. Sia U un intorno di p. Per definizione di convergenza esiste un intero N tale che $a_{k(n)} \in U$ per ogni $n \geq N$. Dato un qualsiasi intero M possiamo trovare un intero m tale che $a_{k(m)} \in U$ e $k(m) \geq M$: quindi p è di accumulazione per $\{a_n\}$. □

Negli spazi che soddisfano gli assiomi di numerabilità, molte proprietà topologiche possono essere definite in termini di successioni e sottosuccessioni. Per non annoiare troppo il lettore affronteremo tale aspetto solamente per quanto riguarda chiusura e compattezza.

Proposizione 6.18. *Sia X uno spazio topologico che soddisfa il primo assioma di numerabilità e sia $A \subset X$ un sottoinsieme. Per un punto $x \in X$, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Esiste una successione a valori in A che converge ad x.*
2. *x è punto di accumulazione di una successione a valori in A.*
3. *x appartiene alla chiusura di A.*

Dimostrazione. [$1 \Rightarrow 2$] È chiaro.

[$2 \Rightarrow 3$] Supponiamo che x sia un punto di accumulazione di una successione $a\colon \mathbb{N} \to A$ e denotiamo $A' = a(\mathbb{N})$; per ogni intorno U di x si ha $U \cap A' \neq \emptyset$ e quindi $x \in \overline{A'} \subset \overline{A}$.

[3 ⇒ 1] Sia $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di x. Sicome $x \in \overline{A}$, per ogni n vale $U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap A \neq \emptyset$ e possiamo scegliere un punto $a_n \in U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap A$. La successione $\{a_n\}$ converge ad x: difatti se U è un intorno di x, allora esiste un intero N tale che $U_N \subset U$ e quindi $a_n \in U_N \subset U$ per ogni $n \geq N$. □

Lemma 6.19. *In uno spazio topologico compatto, ogni successione possiede punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Siano X uno spazio compatto e $a\colon \mathbb{N} \to X$ una successione. Per ogni m definiamo $C_m = \overline{\{a_n \mid n \geq m\}} \subset X$. Per definizione un punto $x \in X$ è di accumulazione per la successione a se $x \in C_m$ per ogni m. Per la Proposizione 4.43, la catena discendente numerabile di chiusi non vuoti C_m ha intersezione non vuota. □

Definizione 6.20. *Uno spazio topologico X si dice **compatto per successioni** se ogni successione in X possiede una sottosuccessione convergente.*

Lemma 6.21. *Uno spazio topologico primo-numerabile è compatto per successioni se e solo se ogni successione possiede punti di accumulazione. In particolare ogni spazio topologico compatto primo-numerabile è anche compatto per successioni.*

Dimostrazione. Il "solo se" segue direttamente dalle definizioni e dal Lemma 6.17. Viceversa sia p un punto di accumulazione di una successione $\{a_n\}$ e sia $\{U_m\}$ un sistema fondamentale numerabile di intorni di p. A meno di sostituire U_m con $U_1 \cap \cdots \cap U_m$ non è restrittivo supporre $U_{m+1} \subset U_m$. Il fatto che p sia di accumulazione permette di definire per ricorrenza una successione di interi $k(m)$ tale che $k(m+1) > k(m)$ e $a_{k(m)} \in U_m$ per ogni m. In particolare la sottosuccessione $a_{k(m)}$ converge a p. □

Proposizione 6.22. *Per uno spazio topologico X a base numerabile le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *X è compatto.*
2. *Ogni successione in X possiede punti di accumulazione.*
3. *X è compatto per successioni.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che [1 ⇒ 2] è sempre vera e che [2 ⇒ 3] è vera per ogni spazio che soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Rimane da dimostrare che [3 ⇒ 1]: supponiamo che X non sia compatto e mostriamo che esiste una successione in esso senza sottosuccessioni convergenti. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X che non possiede sottoricoprimenti finiti; per la Proposizione 6.9 il ricoprimento $\mathcal{A}$ possiede un sottoricoprimento numerabile $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. A maggior ragione $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ non possiede sottoricoprimenti finiti; dunque per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $a_n \in X - \cup_{j=1}^{n} A_j$. Proviamo che ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ non è convergente. Per qualunque applicazione strettamente crescente $k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e qualsivoglia $p \in X$ esiste N tale che $p \in A_N$, quindi $a_{k(n)} \notin A_N$ per ogni $k(n) \geq N$; in particolare $\{a_{k(n)}\}$ non converge a p. $\square$

Osservazione 6.23. Esistono spazi compatti che non sono compatti per successioni (Esercizio 7.13) ed esistono spazi compatti per successioni che non sono compatti (Esercizio 7.14).

Esercizi

6.7. Sia $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una bigezione tra i numeri naturali ed i numeri razionali. Determinare i punti di accumulazione della successione a. (Sugg.: ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ contiene infiniti numeri razionali.)

6.8. Siano X e Y spazi topologici primo-numerabili di Hausdorff. Dimostrare che un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se trasforma successioni convergenti in successioni convergenti.

6.9 (♡). Dimostrare che ogni spazio di Hausdorff primo-numerabile è compattamente generato (Esercizio 4.29).

6.10. Un punto x di uno spazio topologico X si dice un **punto di accumulazione di un sottoinsieme** $A \subset X$ se ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x.

Dimostrare che un punto $x \in X$ è di accumulazione di una successione $\{a_n\}$ se e soltanto se $(x, 0) \in X \times [0, 1]$ è un punto di accumulazione del sottoinsieme

$$\{(a_n, 2^{-n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X \times [0, 1].$$

6.11 (♡). Se uno spazio topologico non soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora l'implicazione [2 ⇒ 1] della Proposizione 6.18 è generalmente falsa: il seguente esempio è di R. Arens (1950).

Su $X = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ consideriamo la topologia in cui un sottoinsieme $C \subset X$ è chiuso se e solo se $(0, 0) \in C$ oppure $C \cap (\{n\} \times \mathbb{N}_0)$ è infinito per al più finiti valori di n. Si consideri il sottoinsieme $A = X - \{(0, 0)\}$ e si dimostri:

1. Il punto $(0, 0)$ è di accumulazione per una successione a valori in A.
2. Non esiste alcuna successione a valori in A che converge a $(0, 0)$.

6.3 Successioni di Cauchy

Definizione 6.24. *Una successione $\{a_n\}$ in uno spazio metrico (X, d) si dice una **successione di Cauchy** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$.*

Ogni successione convergente è di Cauchy: infatti se p è il limite di una successione $\{a_n\}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $a_n \in B(p, \varepsilon/2)$ per ogni $n \geq N$; la disuguaglianza triangolare implica allora che $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$.

Lemma 6.25. *Una successione di Cauchy è convergente se e solo se possiede punti di accumulazione. In particolare, ogni successione di Cauchy in uno spazio metrico compatto per successioni è convergente.*

Dimostrazione. Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy in uno spazio metrico (X, d) e sia $p \in X$ un suo punto di accumulazione. Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(p, a_n) < \varepsilon$ per ogni $n \geq N$. Poiché la successione è di Cauchy, esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ per ogni $n, m \geq M$; siccome p è di accumulazione esiste $N \geq M$ tale che $d(p, a_N) < \varepsilon/2$. Per la disuguaglianza triangolare

$$d(p, a_n) \leq d(p, a_N) + d(a_N, a_n) < \varepsilon \text{ per ogni } n \geq M.$$

Se una successione di Cauchy possiede una sottosuccessione convergente, allora per il Lemma 6.17 possiede punti di accumulazione. □

Definizione 6.26. *Uno spazio metrico si dice* ***completo*** *se, in esso, ogni successione di Cauchy è convergente.*

Per il Lemma 6.21 ogni spazio metrico compatto è compatto per successioni e quindi, per il Lemma 6.25, è anche completo.

Teorema 6.27. *Gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, dotati della distanza euclidea, sono spazi metrici completi.*

Dimostrazione. Siccome $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ basta dimostrare il teorema per gli spazi $\mathbb{R}^n$. Sia $\{a_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{R}^n$ e sia $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|a_n - a_N\| < 1 \text{ per ogni } n \geq N.$$

Se indichiamo con

$$R = \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_N\|\},$$

allora, per la disuguaglianza triangolare, la successione di Cauchy è contenuta nel sottospazio compatto

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R + 1\}$$

e quindi, per il Lemma 6.25, la successione è convergente. □

Lemma 6.28. *Sia $\{f_n : \mathbb{N} \to A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di applicazioni di insiemi. Se A_n è un insieme finito per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora esiste un'applicazione strettamente crescente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_n(g(m)) = f_n(g(n))$ per ogni $m \geq n$.*

Dimostrazione. L'insieme A_1 è finito e quindi almeno una delle fibre di f_1 contiene infiniti elementi. Per il Lemma 2.3 esiste un'applicazione strettamente crescente $g_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che rende $f_1 g_1$ costante. Per lo stesso motivo almeno una fibra di $f_2 g_1$ è infinita e possiamo trovare un'applicazione strettamente crescente $g_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che rende $f_2 g_1 g_2$ costante. Proseguendo, otteniamo una successione di applicazioni strettamente crescenti $g_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che, per ogni n, l'applicazione $f_n g_1 g_2 \cdots g_n$ è costante.

Consideriamo adesso l'applicazione "diagonale"

$$g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad g(n) = g_1 \cdots g_n(n),$$

e mostriamo che ha le proprietà richieste. Dati $n, m \in \mathbb{N}$, con $n < m$, poniamo $l = g_{n+1} \cdots g_m(m)$; allora si ha $l \geq m$ e vale

$$f_n(g(m)) = f_n g_1 \cdots g_n(l) = f_n g_1 \cdots g_n(n) = f_n(g(n)).$$

□

Nel Teorema 6.27 abbiamo dimostrato la completezza di $\mathbb{R}$ come conseguenza della compattezza per successioni di $[0,1]$. È istruttivo dimostrare l'implicazione opposta, ossia provare la compattezza per successioni di $[0,1]$ come conseguenza della completezza di $\mathbb{R}$. A tal fine basta dimostrare che ogni successione in $[0,1]$ possiede una sottosuccessione di Cauchy.

Supponiamo di avere una successione $\{a_n\}$ a valori nell'intervallo $[0,1]$. Denotiamo con A_n l'insieme formato dai 2^n intervalli

$$[0, 2^{-n}[\, , \ldots , [i2^{-n}, (i+1)2^{-n}[\, , \ldots , [1-2^{-n}, 1], \quad 0 \leq i < 2^n,$$

e con $f_n \colon \mathbb{N} \to A_n$ l'applicazione tale che $a_m \in f_n(m)$ per ogni m. Per il Lemma 6.28 esiste un'applicazione strettamente crescente $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_n(g(n)) = f_n(g(m))$ per ogni $n \leq m$. La sottosuccessione $\{b_n = a_{g(n)}\}$ è tale che $|b_n - b_m| \leq 2^{-n}$ per ogni $n \leq m$ e quindi è di Cauchy.

Proposizione 6.29. *Un sottospazio di uno spazio metrico completo è chiuso se e soltanto se è completo rispetto alla metrica indotta.*

Dimostrazione. Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $A \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Ogni successione di Cauchy in A è di Cauchy anche in X e quindi converge ad un limite $a \in \overline{A}$; di conseguenza se A è chiuso, allora (A, d) è completo.

Viceversa ogni successione a valori in A che converge a $a \in \overline{A}$ è di Cauchy in (A, d) e quindi, se (A, d) è completo, allora $a \in A$. □

Esercizi

6.12 (♡). Mostrare con un esempio che la completezza di uno spazio metrico non è invariante per omeomorfismo.

6.13. Definire una distanza d su $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ per cui lo spazio metrico $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}, d)$ sia completo ed omeomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.

6.14. Dimostrare che lo spazio metrico $\ell^2(\mathbb{R})$ introdotto nell'Esempio 6.8 è completo.

6.15. Sia $\ell^\infty(\mathbb{R})$ lo spazio di tutte le successioni *limitate* $\{a_n\}$ a valori reali dotato della distanza

$$d(\{a_n\}, \{b_n\}) = \sup_n |a_n - b_n|.$$

Dimostrare che $\ell^\infty(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico completo e che non è separabile.

6.16 (Teorema delle contrazioni, ♡). Sia (X, d) uno spazio metrico, un'applicazione $f\colon X \to X$ di dice una **contrazione** se esiste un numero reale $a < 1$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq a d(x, y) \qquad \text{per ogni} \qquad x, y \in X.$$

Dimostrare che se (X, d) è uno spazio metrico completo non vuoto e $f\colon X \to X$ è una contrazione, allora esiste un unico punto $z \in X$ tale che $f(z) = z$. Mostrare inoltre che per ogni $x \in X$ la successione $\{f^n(x)\}$ converge a z.

6.17 (♡). Trovare un'applicazione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ senza punti fissi e tale che

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

per ogni x, y.

6.18 ($*$). Sia A un sottospazio aperto di uno spazio metrico completo (X, d). Dimostrare che esiste una distanza h su A che induce la topologia di sottospazio e tale che (A, h) è uno spazio metrico completo.

6.4 Spazi metrici compatti

Definizione 6.30. *Uno spazio metrico si dice* ***totalmente limitato*** *se, per ogni numero reale positivo r, è possibile ricoprire tale spazio con un numero finito di palle aperte di raggio r.*

Lemma 6.31. *Ogni spazio metrico compatto per successioni è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto per successioni e supponiamo, per assurdo, che esista $r > 0$ tale che non sia possibile ricoprire X con un numero finito di palle aperte di raggio r. Costruiamo per ricorrenza una successione $\{a_n\}$, scegliendo $a_1 \in X$ a piacere e, per ogni $n > 1$, scegliendo come a_n un qualsiasi elemento del chiuso non vuoto

$$X - \bigcup_{i=1}^{n-1} B(a_i, r).$$

Siccome vale $d(a_n, a_m) \geq r$ per ogni $n > m$, ne segue che ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ non può essere convergente. □

Lemma 6.32. *Ogni spazio metrico totalmente limitato è a base numerabile.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico totalmente limitato. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un sottoinsieme finito $E_n \subset X$ tale che $X = \cup\{B(e, 2^{-n}) \mid e \in E_n\}$. Se ne deduce che l'insieme numerabile $E = \cup E_n$ è denso e quindi che X è separabile. Per il Lemma 6.7, lo spazio X è a base numerabile. □

Teorema 6.33. *Per uno spazio metrico X le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *X è compatto.*
2. *Ogni successione in X possiede punti di accumulazione.*
3. *X è compatto per successioni.*
4. *X è completo e totalmente limitato.*

Inoltre, se tali condizioni sono soddisfatte, allora X è a base numerabile.

Dimostrazione. Denotiamo con d la distanza su X. Poiché ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità, le implicazioni $[1 \Rightarrow 2]$ e $[2 \Rightarrow 3]$ le abbiamo già dimostrate.

$[3 \Rightarrow 1]$ I due lemmi precedenti (6.31 e 6.32) provano che che ogni spazio metrico compatto per successioni è a base numerabile; possiamo quindi applicare la Proposizione 6.22.

$[2 + 3 \Rightarrow 4]$ Per il Lemma 6.31 lo spazio è totalmente limitato e per il Lemma 6.25 lo spazio è completo.

$[4 \Rightarrow 3]$ Basta provare che, in uno spazio metrico totalmente limitato, da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy. Sia $\{a_n\}$ una successione; per ogni n sia A_n un insieme finito di palle aperte di raggio 2^{-n} che ricoprono X e scegliamo un'applicazione $f_n \colon \mathbb{N} \to A_n$ con la proprietà che, per ogni i, $f_n(i)$ sia una palla che contiene a_i. Per il Lemma 6.28 esiste una sottosuccessione $\{a_{g(n)}\}$ con la proprietà che se $n < m$ allora $a_{g(n)}$ e $a_{g(m)}$ appartengono ad una medesima palla di raggio 2^{-n}. Quindi $\{a_{g(n)}\}$ è una successione di Cauchy. □

Lemma 6.34. *Un sottospazio A di uno spazio metrico è totalmente limitato se e solo se $\overline{A}$ è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\overline{A}$ sia totalmente limitato e sia $r > 0$; esistono quindi $a_1, \ldots, a_n \in \overline{A}$ tali che

$$\overline{A} \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, r/2).$$

Scegliendo per ogni $i = 1, \ldots, n$ un punto $b_i \in B(a_i, r/2) \cap A$, segue dalla disuguaglianza triangolare che

$$A \subset \overline{A} \subset \cup_{i=1}^n B(b_i, r).$$

Supponiamo adesso che A sia totalmente limitato e sia $r > 0$; esistono quindi $a_1, \ldots, a_n \in A$ tali che

$$A \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, r/2)$$

e quindi

$$\overline{A} \subset \cup_{i=1}^n \overline{B(a_i, r/2)} \subset \cup_{i=1}^n B(a_i, r).$$

□

Definizione 6.35. *Un sottospazio A di uno spazio topologico X si dice* ***relativamente compatto*** *se è contenuto in un sottospazio compatto di X.*

Notiamo che se X è di Hausdorff, un sottoinsieme $A \subset X$ è relativamente compatto se e soltanto se $\overline{A}$ è compatto.

Corollario 6.36. *Un sottospazio di uno spazio metrico completo è relativamente compatto se e soltanto se è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Sia X completo e $A \subset X$ totalmente limitato; allora, per la Proposizione 6.29 ed il Lemma 6.34 il sottospazio $\overline{A}$ è completo e totalmente limitato, quindi compatto.

Viceversa se $\overline{A}$ è compatto, allora è anche totalmente limitato e quindi A è totalmente limitato. □

Esercizi

6.19. Trovare un esempio di spazio metrico limitato ma non totalmente limitato.

6.20. Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e $f\colon X \to X$ un'isometria, ossia un'applicazione che preserva le distanze. Dimostrare che f è un omeomorfismo. (L'unica verifica non banale riguarda la surgettività di f.)

6.21. Provare che le immagini continue di sottospazi relativamente compatti sono relativamente compatte.

6.22. Sia (X, d) uno spazio metrico: per ogni sottoinsieme $C \subset X$ ed ogni numero reale $r > 0$ indichiamo con

$$B(C, r) = \bigcup_{y \in C} B(y, r).$$

Dimostrare che $\cap_{r>0} B(C, r) = \overline{C}$ e che $B(C, r) = \{x \in X \mid d_C(x) < r\}$, dove d_C è la funzione *distanza da* C (Esempio 3.43).

6.23 (Distanza di Hausdorff). Sia (X, d) uno spazio metrico e indichiamo con $\mathcal{X}$ la famiglia dei sottospazi chiusi, non vuoti e limitati di X: per ogni $C, D \in \mathcal{X}$ poniamo, nelle notazioni dell'Esercizio 6.22,

$$h(C, D) = \inf\{r \mid C \subset B(D, r),\ D \subset B(C, r)\}.$$

Dimostrare che:

1. Vale $h(C, D) < r$ se e solo se per ogni $z \in C$ ed ogni $w \in D$ esistono $x \in D$ e $y \in C$ tali che $d(z, x) < r$ e $d(w, y) < r$.
2. h è una distanza su $\mathcal{X}$ (*distanza di Hausdorff*).
3. (X, d) è totalmente limitato se e solo se è limitato e per ogni $r > 0$ esiste un sottoinsieme finito $S \subset X$ tale che $h(X, S) < r$.
4. Siano $C, D \in \mathcal{X}$. Se $h(C, D) < r$ e $A \subset C$, allora $h(A, D \cap B(A, r)) < r$.
5. Se (X, d) è totalmente limitato, allora $(\mathcal{X}, h)$ è totalmente limitato.
6. Sia $\{A_n\}$ una successione in $\mathcal{X}$ tale che $h(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$ per ogni n. Dimostrare che ogni $x_N \in A_N$ si può estendere ad una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \in A_n$ e $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$ per ogni n.
7. Se (X, d) è completo, allora $(\mathcal{X}, h)$ è completo. (Sugg.: sia $\{A_n\}$ una successione in $\mathcal{X}$ tale che $h(A_n, A_{n+1}) < 2^{-n}$ e indichiamo con A l'insieme dei limiti delle successioni $\{x_n\}$ tali che $x_n \in A_n$ e $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$. Dimostrare che A_n converge alla chiusura di A.)
8. Se (X, d) è compatto, allora $(\mathcal{X}, h)$ è compatto.

6.5 Il teorema di Baire

Definizione 6.37. *Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice* ***raro*** *se la sua chiusura non ha punti interni. Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice* ***magro*** *se è contenuto nell'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi rari.*

Si noti che la proprietà, per un sottospazio $C \subset X$, di essere raro o magro dipende anche da X. Ad esempio il punto $\{0\}$ è raro come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ma non è raro (e nemmeno magro) come sottoinsieme di $\mathbb{Z}$.

Definizione 6.38. *Uno spazio topologico X si dice uno* ***spazio di Baire*** *se ogni suo sottoinsieme magro ha parte interna vuota.*

Per verificare che uno spazio è di Baire basta chiaramente dimostrare che l'unione numerabile di chiusi rari non ha parte interna o, equivalentemente, che l'intersezione numerabile di aperti densi è un sottoinsieme denso.

Esempio 6.39. Ogni spazio topologico non vuoto e dotato della topologia discreta è di Baire: infatti l'unico sottoinsieme raro è il vuoto.

Lo spazio $\mathbb{Q}$ non è uno spazio di Baire: infatti ogni punto è un chiuso raro e $\mathbb{Q}$ è unione numerabile dei suoi punti.

Teorema 6.40 (di Baire). *Gli spazi metrici completi e gli spazi topologici localmente compatti di Hausdorff sono spazi di Baire.*

Dimostrazione. I due casi richiedono dimostrazioni distinte, ma accomunate dalla stessa idea base.

Consideriamo prima il caso in cui X è uno spazio localmente compatto di Hausdorff. Siano $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di chiusi rari di X ed $U_0 \subset X$ un aperto non vuoto: bisogna dimostrare che $U_0 \not\subset \cup_n C_n$. Costruiamo per ricorrenza una successione di aperti di X:

$$U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots$$

tale che per ogni $n \geq 1$ valgano le condizioni:

1. $U_n \neq \emptyset$.
2. $\overline{U_n}$ è compatto e contenuto in $U_{n-1} - C_n$.

Per ipotesi C_1 è un chiuso raro di X, in particolare $U_0 - C_1$ è un aperto non vuoto; scegliamo un qualsiasi punto $x \in U_0 - C_1$. Per il Teorema 5.25, il punto x possiede un sistema fondamentale di intorni compatti e quindi possiamo trovare un aperto U_1 contenente x (dunque non vuoto) e tale che $\overline{U_1}$ è compatto e contenuto in $U_0 - C_1$. Il passo ricorsivo è del tutto simile: se abbiamo U_n, il ragionamento precedente ci permette di trovare un aperto non vuoto U_{n+1} tale che $\overline{U_{n+1}}$ è compatto e contenuto in $U_n - C_{n+1}$. Se $A = \cap_{n>0} \overline{U_n} \subset U_0$, allora per costruzione vale $A \subset X - C_n$ per ogni n, mentre per la Proposizione 4.43 vale $A \neq \emptyset$ e quindi U_0 non è contenuto nell'unione dei chiusi rari C_n.

Supponiamo adesso che $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia una famiglia numerabile di chiusi rari di uno spazio metrico completo (X, d) e assumiamo per assurdo che esista una palla aperta $B(x_0, r) \subset \cup_n C_n$. Per ipotesi ogni C_n ha parte interna vuota e quindi per ogni palla $B(x, s)$, con $s > 0$, ed ogni n vale $B(x, s) - C_n \neq \emptyset$. Scegliamo un punto $x_1 \in B(x_0, r/3) - C_1$ ed un numero reale $0 < r_1 \leq r/3$ tale che $B(x_1, r_1) \cap C_1 = \emptyset$. Estendiamo x_1 e r_1 a due successioni $\{x_n\}$, $\{r_n\}$ definite nel seguente modo ricorsivo: scegliamo $x_2 \in B(x_1, r_1/3) - C_2$ ed $0 < r_2 \leq r_1/3$ tali che $B(x_2, r_2) \cap C_2 = \emptyset$. Proseguiamo poi allo stesso modo incrementando gli indici di una unità. Per la disuguaglianza triangolare, se $n < m$ vale

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leq \frac{1}{3}(r_n + \cdots + r_{m-1})$$
$$\leq \frac{1}{3}\left(r_n + \frac{r_n}{3} \cdots + \frac{r_n}{3^{m-n-1}}\right) \leq \frac{1}{2} r_n \leq \frac{r}{3^n}.$$

Quindi la successione $\{x_n\}$ è di Cauchy ed è quindi convergente: indichiamo con h il suo limite. Passando al limite per $m \to \infty$ le disuguaglianze precedenti si ottiene $d(x_n, h) \leq r_n/2$ e quindi $h \notin C_n$ per ogni n. D'altronde $d(x_0, h) < r$ e quindi $h \in B(x_0, r) \subset \cup C_n$. □

Osservazione 6.41. I due enunciati del teorema di Baire sono indipendenti. Infatti esistono spazi compatti di Hausdorff che non sono metrizzabili ed esistono spazi metrici completi che non sono localmente compatti (ad esempio ogni spazio di Banach di dimensione infinita).

Il nome "Baire" si pronuncia alla francese, alla stessa maniera di "faire". René Baire (1874-1932) è noto anche per aver introdotto, nel 1899, la nozione di funzione semicontinua ed aver dimostrato che ogni funzione semicontinua inferiormente su di un intervallo chiuso e limitato ammette minimo.

Alcuni testi di topologia utilizzano le nozioni di prima e seconda categoria per illustrare il teorema di Baire. Uno spazio topologico si dice di **prima categoria** se è unione di una famiglia numerabile di chiusi rari. Si dice di **seconda categoria** se non è di prima categoria. È facile dimostrare che uno spazio è di Baire se e solo se ogni suo aperto è di seconda categoria.

Corollario 6.42. *Sia $\{F_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Se $\cup_m F_m = \mathbb{R}^n$, allora esiste un intero m tale che il chiuso $\overline{F_m}$ ha parte interna non vuota (nella topologia euclidea).*

Dimostrazione. $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Baire. □

Esercizi

6.24. Dimostrare che lo spazio $\mathbb{R}^n$ non è unione numerabile di sottospazi vettoriali propri.

6.25. Dimostrare quanto abbiamo affermato nell'Osservazione 3.28, e cioè che $\mathbb{Q}$ non è intersezione numerabile di aperti di $\mathbb{R}$.

6.26. Siano U e C rispettivamente un aperto ed un sottoinsieme raro di uno spazio topologico. Dimostrare che $C \cap U$ è un sottoinsieme raro di U, nella topologia di sottospazio.

6.27. Siano X uno spazio di Baire e $U \subset X$ un aperto non vuoto. Dimostrare che U e $\overline{U}$ sono spazi di Baire (nella topologia di sottospazio).

6.28 (♡). È possibile definire sull'insieme dei numeri naturali una topologia di Hausdorff che lo renda:

1. Compatto?
2. Connesso?
3. Compatto e connesso?

6.29 ($*, \heartsuit$). Sia $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme denso e numerabile (ad esempio $\mathbb{Q}$). Data una qualunque applicazione di insiemi $f\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, dimostrare che esistono $a \in A$ e $b \in \mathbb{R} - A$ tali che $\min(f(a), f(b)) > |a - b|$.

6.6 Completamenti $\curvearrowright$

Definizione 6.43. *Siano (X, d) e $(\widehat{X}, \hat{d})$ due spazi metrici. Un'applicazione $\Phi\colon X \to \widehat{X}$ si dice un **completamento** di (X, d) se:*

1. *Φ è una isometria, ossia $\hat{d}(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$.*
2. *Lo spazio metrico $(\widehat{X}, \hat{d})$ è completo.*
3. *$\Phi(X)$ è denso in $\widehat{X}$.*

Esempio 6.44. Le inclusioni $(\mathbb{Q}, d) \subset (\mathbb{R}, d)$ e $(]0, 1[\ , d) \subset ([0, 1], d)$ sono completamenti, dove d denota la distanza euclidea.

In questa sezione mostreremo esistenza, unicità e principali proprietà dei completamenti.

Lemma 6.45. *Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni di Cauchy in uno spazio metrico (X, d). Allora esiste, ed è finito, il limite*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \in [0, +\infty[.$$

Dimostrazione. Per la disuguaglianza quadrangolare (Esercizio 3.26) si ha

$$|d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| \leq d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m)$$

e quindi la successione di numeri reali $d(a_n, b_n)$ è di Cauchy. $\square$

Dato uno spazio metrico (X, d), denotiamo con $\mathfrak{c}(X, d)$ l'insieme di tutte le successioni di Cauchy in esso. Su $\mathfrak{c}(X, d)$ possiamo considerare la relazione di equivalenza

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0.$$

Indichiamo con $\widehat{X} = \mathfrak{c}(X, d)/\sim$ il corrispondente insieme quoziente, denotando con $[a_n] \in \widehat{X}$ la classe di equivalenza della successione $\{a_n\}$. Per ogni $a \in X$ denotiamo con $\Phi(a) \in \widehat{X}$ la classe di equivalenza della successione costante $a, a, a, \ldots$; si noti che $[a_n] = \Phi(a)$ se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e quindi l'inclusione naturale

$$\Phi\colon X \to \widehat{X}$$

è surgettiva se e soltanto se (X, d) è uno spazio metrico completo.

Il Lemma 6.45 ci dice in particolare che l'applicazione

$$\hat{d}\colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}, \qquad \hat{d}([a_n],[b_n]) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n)$$

è ben definita. Si noti che $\widehat{X}$ non dipende solamente da X ma anche dalla distanza d.

Lemma 6.46. *Sia A un sottoinsieme denso di uno spazio metrico (X, d). Allora l'applicazione naturale $\widehat{A} \to \widehat{X}$ è bigettiva.*

Dimostrazione. L'unica verifica non banale è quella della surgettività, cioè che ogni successione di Cauchy in X è equivalente ad una successione di Cauchy a valori in A.

Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in X e, per ogni n scegliamo $a_n \in A$ tale che $d(a_n, x_n) \le 2^{-n}$. Per la disuguaglianza quadrangolare,

$$d(a_n, a_m) \le d(x_n, x_m) + 2^{-N}, \qquad \text{per ogni} \quad n, m > N$$

e quindi la successione $\{a_n\}$ è di Cauchy. È infine chiaro che $[a_n] = [x_n]$. $\square$

Teorema 6.47 (Esistenza del completamento). *Nelle notazioni precedenti, l'applicazione $\hat{d}$ è una distanza su $\widehat{X}$ e l'inclusione Φ è un completamento.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione che $\hat{d}([a_n],[b_n]) \ge 0$ e vale $\hat{d}([a_n],[b_n]) = 0$ se e solo se $[a_n] = [b_n]$. Date comunque tre successioni di Cauchy $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ si ha:

$$\hat{d}([a_n],[b_n]) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} d(b_n, a_n) = \hat{d}([b_n],[a_n]).$$

$$\begin{aligned}\hat{d}([a_n],[b_n]) &= \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) \le \lim_{n\to\infty} (d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)) \\ &\le \lim_{n\to\infty} d(a_n, c_n) + \lim_{n\to\infty} d(c_n, b_n) = \hat{d}([a_n],[c_n]) + \hat{d}([c_n],[b_n]).\end{aligned}$$

Dunque $\hat{d}$ è una distanza; per ogni $a, b \in X$ vale

$$\hat{d}(\Phi(a), \Phi(b)) = \lim_{n\to\infty} d(a, b) = d(a, b)$$

e quindi Φ è una isometria.

Dimostriamo adesso che $\Phi(X)$ è denso in $\widehat{X}$, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $[a_n] \in \widehat{X}$ esiste $b \in X$ tale che $\hat{d}([a_n], \Phi(b)) \le \varepsilon$. Siccome $\{a_n\}$ è di Cauchy, esiste un indice N tale che $d(a_N, a_n) \le \varepsilon$ per ogni $n \ge N$; è quindi sufficiente considerare $b = a_N$.

Rimane da dimostrare la completezza di $(\widehat{X}, \hat{d})$. Siccome $X \to \Phi(X)$ è una isometria bigettiva e $\Phi(X)$ è un sottospazio denso di $\widehat{X}$, le due applicazioni naturali

$$\widehat{X} \to \widehat{\Phi(X)} \to \widehat{\widehat{X}}$$

sono bigettive. In particolare $\widehat{X} = \widehat{\widehat{X}}$ e questo equivale a dire che $\widehat{X}$ è completo. □

Teorema 6.48 (Unicità del completamento). *Siano*

$$h\colon (X,d) \to (Y,\delta), \qquad k\colon (X,d) \to (Z,\rho)$$

due completamenti dello stesso spazio metrico (X,d). Allora esiste un'unica isometria bigettiva $f\colon (Y,\delta) \to (Z,\rho)$ tale che $k = fh$.

Dimostrazione. L'unicità di f segue dal fatto che $h(X)$ è denso in Y. Per dimostrare l'esistenza non è restrittivo supporre che $Y = \widehat{X}$ sia il completamento costruito nel Teorema 6.47. L'isometria $k\colon X \to Z$ ha immagine densa e quindi induce una isometria bigettiva

$$\hat{k}\colon \widehat{X} \to \widehat{Z}.$$

Inoltre, siccome (Z,ρ) è completo, $\Phi\colon Z \to \widehat{Z}$ è una isometria bigettiva e quindi $f = \Phi^{-1}\hat{k}$ soddisfa le condizioni richieste. □

Corollario 6.49 (Proprietà universale dei completamenti). *Sia $\Phi\colon (X,d) \to (\widehat{X},\hat{d})$ un completamento. Allora per ogni spazio metrico completo (Y,δ) ed ogni isometria $h\colon (X,d) \to (Y,\delta)$ esiste un'unica isometria $k\colon (\widehat{X},\hat{d}) \to (Y,\delta)$ tale che $k\Phi = h$.*

Dimostrazione. L'applicazione $h\colon X \to \overline{h(X)}$ è un completamento e basta applicare il teorema di unicità 6.48. □

Esercizi

6.30. Sia X uno spazio topologico e indichiamo con $BC(X,\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le applicazioni continue e limitate $f\colon X \to \mathbb{R}$. Si noti che che $BC(X,\mathbb{R})$ possiede una naturale struttura di spazio metrico con la distanza

$$\hat{d}(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|.$$

Supponiamo adesso che X sia uno spazio metrico con distanza d e fissiamo un punto $a \in X$. Dimostrare che l'applicazione

$$\Psi\colon X \to BC(X,\mathbb{R}), \qquad \Psi(x)(y) = d(x,y) - d(a,y),$$

è ben definita ed è una isometria.

Osservazione 6.50. Si può dimostrare, in maniera del tutto simile al prossimo Teorema 6.51, che $(BC(X, \mathbb{R}), \hat{d})$ è uno spazio metrico completo. Di conseguenza la chiusura di $\Psi(X)$ è un completamento di X.

6.31. Sia $\mathbb{K}[x]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che l'applicazione

$$d\colon \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{R}, \qquad d(p, q) = \inf\{2^{-n} \mid x^n \text{ divide } p(x) - q(x)\},$$

è una distanza e che il completamento di $(\mathbb{K}[x], d)$ è canonicamente isomorfo all'anello delle serie di potenze formali $\mathbb{K}[[x]]$.

6.7 Spazi di funzioni e teorema di Ascoli-Arzelà ↷

Se X, Y sono spazi topologici denotiamo con $C(X, Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni continue da X in Y; su tale insieme è possibile introdurre delle topologie naturali e ne vedremo alcune in seguito (Esempio 7.11, Sezione 8.5).

In questa sezione ci occuperemo del caso particolare in cui X è uno spazio topologico compatto e (Y, d) uno spazio metrico; in tal caso, date comunque due applicazioni continue $f, g\colon X \to Y$, l'applicazione

$$X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(f(x), g(x))$$

è continua e quindi ammette massimo e minimo su X.

Teorema 6.51. *Siano X uno spazio topologico compatto e (Y, d) uno spazio metrico. Allora l'applicazione*

$$\rho\colon C(X, Y) \times C(X, Y) \to \mathbb{R}, \qquad \rho(f, g) = \max\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\},$$

è una distanza su $C(X, Y)$. Inoltre:

1. *L'applicazione di* valutazione

$$e\colon C(X, Y) \times X \to Y, \qquad e(f, x) = f(x),$$

è continua.

2. *Lo spazio metrico $(C(X, Y), \rho)$ è completo se e solo se (Y, d) è completo.*

Dimostrazione. Per mostrare che ρ è una distanza, l'unica verifica non banale è la disuguaglianza triangolare. Siano $f, g, h \in C(X, Y)$ e scegliamo un punto $x \in X$ tale che $d(f(x), h(x)) = \rho(f, h)$; per la disuguaglianza triangolare su Y abbiamo

$$\rho(f, h) = d(f(x), h(x)) \le d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \le \rho(f, g) + \rho(g, h).$$

Siano $f \in C(X, Y)$, $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$. Scegliamo un intorno U di x tale che $d(f(x), f(y)) < \varepsilon/2$ per ogni $y \in U$. Se $\rho(f, g) < \varepsilon/2$, allora

$$d(f(x), g(y)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), g(y)) < \varepsilon$$

e questo prova la continuità dell'applicazione di valutazione nel punto (f, x).

Supponiamo adesso che (Y, d) sia uno spazio metrico completo e sia f_n una successione di Cauchy in $C(X, Y)$. Per ogni punto $x \in X$ vale

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq \rho(f_n, f_m)$$

e quindi $f_n(x)$ è una successione di Cauchy in Y; denotando con $f(x)$ il limite della successione $f_n(x)$, bisogna dimostrare che $f\colon X \to Y$ è continua in ogni punto $x_0 \in X$ e che $f_n \to f$ in $C(X, Y)$. Dati $x_0 \in X$ ed $\varepsilon > 0$, scegliamo un intero positivo n tale che $\rho(f_n, f_m) \leq \varepsilon/3$ per ogni $m \geq n$ ed un intorno U di x_0 tale che $d(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon/3$ per ogni $x \in U$. Per la disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_0)) &= \lim_m d(f_m(x), f_m(x_0)) \\ &\leq \lim_m d(f_n(x), f_m(x)) + \lim_m d(f_n(x_0), f_m(x_0)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

per ogni $x \in U$ e quindi f è continua in x_0. Per dimostrare che $f_n \to f$ in $C(X, Y)$, per ogni $\varepsilon > 0$ fissiamo un intero N tale che $\rho(f_n, f_m) \leq \varepsilon$ per ogni $n, m \geq N$; allora per ogni $x \in X$ ed ogni $n \geq N$ vale

$$d(f_n(x), f(x)) = \lim_m d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$$

e di conseguenza $\rho(f_n, f) = \max\{d(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} \leq \varepsilon$.

Infine notiamo che (Y, d) è isometricamente isomorfo al sottospazio chiuso delle applicazioni costanti da X in Y. □

Corollario 6.52. *Sia (Y, d) uno spazio metrico completo. Allora, per ogni intero positivo n, lo spazio metrico (Y^n, ρ), dove*

$$\rho((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_i d(x_i, y_i),$$

è completo.

Dimostrazione. Lo spazio metrico (Y^n, ρ) è canonicamente isometrico allo spazio metrico completo $C(\{1, \ldots, n\}, Y)$. □

Il teorema di Ascoli-Arzelà è la generalizzazione del Corollario 6.36 agli spazi $C(X, Y)$; premettiamo una definizione.

Definizione 6.53. *Siano X uno spazio topologico, (Y, d) uno spazio metrico e $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ una famiglia di applicazioni continue. La famiglia $\mathcal{F}$ si dice* ***equicontinua*** *se per ogni $x_0 \in X$ ed ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di x_0 tale che*

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

per ogni $f \in \mathcal{F}$ *ed ogni* $x \in U$.

La famiglia $\mathcal{F}$ *si dice* ***puntualmente totalmente limitata*** *se per ogni* $x \in X$ *l'insieme*

$$\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$$

è totalmente limitato in Y.

Osserviamo che le nozioni di equicontinuità e di totale limitatezza puntuale dipendono entrambe dalla distanza d.

Teorema 6.54 (Ascoli-Arzelà). *Siano* X *uno spazio topologico compatto e* (Y, d) *uno spazio metrico completo. Una famiglia di applicazioni continue* $\mathcal{F} \subset C(X, Y)$ *è relativamente compatta in* $C(X, Y)$ *se e soltanto se:*

1. $\mathcal{F}$ *è equicontinua.*
2. $\mathcal{F}$ *è puntualmente totalmente limitata.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che le condizioni 1 e 2 sono necessarie. Se $\mathcal{F}$ è contenuta in un sottospazio compatto $K \subset C(X, Y)$, allora, poiché per ogni $x \in X$ l'applicazione di valutazione in x:

$$e_x \colon C(X, Y) \to Y, \qquad e_x(f) = f(x),$$

è continua, ne segue che $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} = e_x(\mathcal{F})$ è contenuto nel compatto $e_x(K)$.

Sia adesso $x_0 \in X$ un punto fissato e consideriamo l'applicazione continua

$$\alpha \colon C(X, Y) \times X \to [0, +\infty[, \qquad \alpha(f, x) = d(f(x_0), f(x)).$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ il compatto $K \times \{x_0\}$ è contenuto nell'aperto $\alpha^{-1}([0, \varepsilon[)$ e per il teorema di Wallace possiamo trovare un aperto $U \subset X$ tale che $x_0 \in U$ e $K \times U \subset \alpha^{-1}([0, \varepsilon[)$; in particolare $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ per ogni $f \in \mathcal{F}$ ed ogni $x \in U$.

Mostriamo adesso che se la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa le condizioni 1 e 2, allora è relativamente compatta nello spazio metrico completo $C(X, Y)$. Per il Corollario 6.36 è sufficiente dimostrare che $\mathcal{F}$ è totalmente limitata. Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$; l'equicontinuità di $\mathcal{F}$ implica che per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x tale che $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ per ogni $y \in U_x$ ed ogni $f \in \mathcal{F}$. Lo spazio X è compatto e quindi possiamo trovare $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

L'immagine dell'applicazione

$$\mathcal{F} \to Y^n, \qquad f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n))$$

è contenuta nel prodotto $\prod e_{x_i}(\mathcal{F})$ di sottospazi totalmente limitati ed è quindi totalmente limitata. Possiamo trovare un sottoinsieme finito $F \subset \mathcal{F}$ tale che, per ogni $f \in \mathcal{F}$ esiste $g \in F$ tale che $d(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon$ per ogni i. Mostriamo che $\mathcal{F}$ è contenuta nell'unione delle palle aperte di centro $g \in F$ e raggio 3ε: siano $f \in \mathcal{F}$ e $g \in F$ tali che $d(f(x_i), g(x_i)) < \varepsilon$ per ogni i, allora per ogni $x \in X$ esiste un indice i tale che $x \in U_{x_i}$ e quindi

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < 3\varepsilon.$$

$\square$

Esercizi

6.32. Dire se la famiglia di applicazioni continue

$$\{f_n\} \subset C([0,1], \mathbb{R}), \qquad f_n(x) = x^n.$$

è equicontinua e se possiede punti di accumulazione in $C([0,1], \mathbb{R})$.

6.33 (Lemma di Dini). Siano X uno spazio compatto e $\{f_n\}$ una successione in $C(X, \mathbb{R})$ tale che per ogni punto $x \in X$ ed ogni m vale $f_m(x) \geq f_{m+1}(x)$ e $\lim_n f_n(x) = 0$. Dimostrare che la successione $\{f_n\}$ converge a 0 in $C(X, \mathbb{R})$. (Sugg.: per ogni numero reale positivo ε si consideri la famiglia di aperti $U_n = \{x \in X \mid f_n(x) < \varepsilon\}$.)

6.34 ($\heartsuit$). Siano X uno spazio topologico compatto ed I un ideale proprio dell'anello $C(X, \mathbb{R})$. Dimostrare che esiste un punto $x \in X$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $f \in I$.

6.8 Insiemi diretti, reti e successioni generalizzate $\curvearrowright$

Le reti, dette anche successioni generalizzate, ampliano la nozione di successione in uno spazio topologico e permettono di generalizzare buona parte dei risultati di questo capitolo a spazi che non soddisfano il primo assioma di numerabilità.

Definizione 6.55. *Un insieme ordinato $(I, \leq)$ si dice un **insieme diretto** se per ogni $i, j \in I$ esiste $h \in I$ tale che $h \geq i$ e $h \geq j$.*

In altri termini, un insieme ordinato è diretto quando ogni sottoinsieme finito possiede maggioranti. Vediamo qualche esempio di insieme diretto:

1. L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali con l'ordinamento usuale e, più in generale, $\mathbb{N}^n$ con l'ordinamento $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n)$ se e solo se $a_i \leq b_i$ per ogni i.
2. L'insieme $\mathcal{P}_0(A)$ delle parti finite di un insieme A con la relazione di inclusione.
3. L'insieme $\mathcal{I}(x)$ di tutti gli intorni di un punto x in uno spazio topologico, con la relazione d'ordine $U \leq V$ se e solo se $V \subset U$.

Definizione 6.56. *Un'applicazione $p\colon J \to I$ di insiemi diretti si dice un* ***morfismo cofinale*** *se conserva le relazioni di ordine (cioè $p(j) \geq p(j')$ se $j \geq j'$) e se per ogni $i \in I$ esiste $j \in J$ tale che $p(j) \geq i$.*

Esempio 6.57. Sia I la famiglia dei sottoinsiemi finiti con un numero pari di elementi di un insieme A. Allora l'inclusione $I \hookrightarrow \mathcal{P}_0(A)$ è un morfismo cofinale.

La composizione di due morfismi cofinali è ancora un morfismo cofinale.

Definizione 6.58. *Una* ***rete*** *in uno spazio topologico X è un'applicazione $f\colon I \to X$, dove I è un insieme diretto.*

Se $I = \mathbb{N}$, allora una rete $f\colon I \to X$ non è altro che una successione in X. Il nome rete è motivato dagli esempi con $I = \mathbb{N}^n$.

Definizione 6.59. *Siano X uno spazio topologico, $f\colon I \to X$ una rete e x un punto di X. Diremo che:*

1. *La rete* ***converge*** *ad x se per ogni intorno $U \in \mathcal{I}(x)$ esiste un indice $i \in I$ tale che $f(j) \in U$ per ogni $j \geq i$.*
2. *Il punto x è di* ***accumulazione*** *della rete, se per ogni intorno $U \in \mathcal{I}(x)$ e per ogni indice $i \in I$ esiste $j \geq i$ tale che $f(j) \in U$.*

Come nel caso delle successioni, se una rete converge ad x, allora x è anche un punto di accumulazione mentre il viceversa è generalmente falso.

Lemma 6.60. *Sia data una rete $f\colon I \to X$. Un punto $x \in X$ è di accumulazione della rete f se e solo se esiste un morfismo cofinale $p\colon J \to I$ tale che la rete $fp\colon J \to X$ converge ad x.*

Dimostrazione. Se fp converge ad un punto x, allora, poiché p è cofinale, il punto x è di accumulazione per f.

Supponiamo viceversa che x sia un punto di accumulazione di f e denotiamo, come al solito, con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia degli intorni di x. Consideriamo l'insieme

$$J = \{(i, U) \in I \times \mathcal{I}(x) \mid f(i) \in U\},$$

dotato della relazione d'ordine

$$(i, U) \leq (j, V) \quad \text{se} \quad i \leq j \text{ e } V \subset U.$$

L'insieme $(J, \leq)$ è diretto: infatti se $(i, U), (j, V) \in J$, allora esiste $h \in I$ tale che $h \geq i$ e $h \geq j$. Per definizione di punto di accumulazione, esiste $k \geq h$ tale che $f(k) \in U \cap V$ e quindi $(k, U \cap V) \geq (i, U), (j, V)$. La proiezione sul primo fattore $p\colon J \to I$ è surgettiva e quindi è un morfismo cofinale: basta infatti osservare che $p(i, X) = i$ per ogni $i \in I$. Sia U un intorno di x e sia $i \in I$ tale che $f(i) \in U$. Per ogni $(j, V) \geq (i, U)$ vale $fp(j, V) \in U$ e fp converge ad x. $\square$

Siamo adesso in grado di generalizzare il risultato della Proposizione 6.18.

Proposizione 6.61. *Sia A un sottoinsieme di uno spazio topologico X. Per un punto $x \in X$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Esiste una rete a valori in A che converge ad x.*
2. *Il punto x è di accumulazione di una rete a valori in A.*
3. *Il punto x appartiene alla chiusura di A.*

Dimostrazione. [$1 \Rightarrow 2$] È banale.

[$2 \Rightarrow 3$] Segue dalla definizione che, se $x \in X$ è un punto di accumulazione di una rete $f : I \to A$, allora x appartiene alla chiusura di $f(I)$.

[$3 \Rightarrow 1$] Se $x \in \overline{A}$ e $\mathcal{I}(x)$ è l'insieme diretto degli intorni di x, allora per l'assioma della scelta esiste una rete $f : \mathcal{I}(x) \to A$ tale che $f(U) \in U \cap A$ per ogni intorno U di x. Si osserva immediatamente che f converge ad x. □

Teorema 6.62. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni rete in X possiede punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia compatto ed esista una rete $f : I \to X$ senza punti di accumulazione: dimostriamo che queste ipotesi portano ad una contraddizione. Per ogni punto $x \in X$, non essendo di accumulazione, esistono un intorno $U(x) \in \mathcal{I}(x)$ ed un indice $i(x) \in I$ tali che $f(j) \notin U(x)$ per ogni $j \geq i(x)$. Per ipotesi X è compatto e quindi esistono $x_1, \ldots, x_n \in X$ tali che $X = U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_n)$. Sia $h \in I$ un maggiorante di $i(x_1), \ldots, i(x_n)$, allora $f(h) \notin U(x_i)$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, il che è assurdo.

Viceversa, sia $X = \cup\{U_a \mid a \in A\}$ un ricoprimento aperto di X e consideriamo l'insieme diretto $\mathcal{P}_0(A)$ delle parti finite di A. Se non esistono sottoricoprimenti finiti, per l'assioma della scelta esiste una rete $f : \mathcal{P}_0(A) \to X$ tale che $f(B) \notin U_a$ per ogni $a \in B$. Se $x \in U_a \subset X$ è un punto di accumulazione, allora esiste un sottoinsieme finito $B \subset A$ che contiene a e tale che $f(B) \in U_a$. Questo è assurdo e quindi la rete f non ha punti di accumulazione. □

Esempio 6.63. Per avere un'idea delle possibili applicazioni delle reti, diamo un condensato della dimostrazione che *ogni sottospazio di dimensione finita di uno spazio vettoriale topologico è chiuso.* Sarà un utilissimo esercizio per lo studioso espandere questo esempio inserendo i dettagli mancanti. Consideriamo per semplicità espositiva il caso di spazi vettoriali reali, per gli spazi definiti sul campo dei numeri complessi la dimostrazione è del tutto simile.

Uno **spazio vettoriale topologico** V è uno spazio vettoriale dotato di una topologia di Hausdorff che rende continue le operazioni di combinazione lineare; in particolare, per ogni n-upla $v_1, \ldots, v_n$ di vettori linearmente indipendenti, l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to V$, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_i v_i$ è continua ed iniettiva: dimostriamo che f è una immersione chiusa. Siano $C \subset \mathbb{R}^n$ un chiuso e $v \in \overline{f(C)}$; dobbiamo dimostrare che $v \in f(C)$. Sia $s : I \to f(C)$ una rete che converge a $v \in V$ e denotiamo $t = f^{-1} \circ s : I \to C$. Immergiamo $\mathbb{R}^n$ nella sua compattificazione di Alexandroff $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \simeq S^n$ ed a meno di una nuova composizione con un morfismo cofinale possiamo supporre che esista $\lim_i t(i) \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

Sono possibili due casi: nel primo il limite di t è contenuto in $\mathbb{R}^n$; siccome C è chiuso in $\mathbb{R}^n$ si ha $v = f(\lim_i t(i)) \in f(C)$.

Nel secondo caso $\lim_i t(i) = \infty$, dunque $\lim_i \|t(i)\| = +\infty$ e quindi $\lim_i \dfrac{s(i)}{\|t(i)\|} = 0$. D'altronde $\dfrac{s(i)}{\|t(i)\|} = f\left(\dfrac{t(i)}{\|t(i)\|}\right)$ e la rete $i \mapsto \dfrac{t(i)}{\|t(i)\|}$ ha almeno un punto di accumulazione $a \in S^{n-1}$. Si ha quindi $f(a) = 0$ in contraddizione con l'iniettività di f.

Esercizi

6.35. Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se ogni rete in esso converge al più ad un punto.

6.36. Dire se esistono i limiti delle seguenti reti $a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e, in caso di risposta affermativa, calcolarli:

$$a(n,m) = \frac{1}{n+m}, \qquad a(n,m) = \frac{1}{(n-m)^2+1}, \qquad a(n,m) = ne^{-m}.$$

6.37. Siano S un insieme non vuoto e $a\colon S \to \mathbb{R}$ una qualsiasi applicazione. Dare un significato all'espressione "la serie $\sum_{s\in S} f(s)$ converge". (Sugg.: considerare l'insieme diretto delle parti finite di S.)

6.38 (∗). Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Consideriamo l'insieme diretto $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ delle parti finite di $\mathbb{N}$ e la rete

$$f\colon \mathcal{P}_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}, \qquad f(A) = \sum_{n\in A} a_n.$$

Dimostrare che la rete f è convergente se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente.

7

Varietà, prodotti infiniti e paracompattezza

Varietà topologiche – Prebasi e teorema di Alexander – Prodotti infiniti – Raffinamenti e paracompattezza $\curvearrowright$ – Spazi normali $\curvearrowright$ – Proprietà di separazione $\curvearrowright$

7.1 Varietà topologiche

Definizione 7.1. *Uno spazio topologico M si dice una* ***varietà topologica di dimensione*** **n** *se:*

1. *M è di Hausdorff.*
2. *Ogni punto di M possiede un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$.*
3. *Ogni componente connessa di M è a base numerabile.*

Esempio 7.2. Ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ è una varietà topologica di dimensione n, mentre ogni sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}^n$ è una varietà topologica di dimensione $2n$.

Esempio 7.3. La sfera S^n è una varietà topologica di dimensione n. Infatti ogni punto x è contenuto nell'aperto $S^n - \{-x\}$ che è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per proiezione stereografica.

Esempio 7.4. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà topologica di dimensione n. Infatti ogni suo punto è contenuto nel complementare di un iperpiano H e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H$ è un aperto omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Esempio 7.5. Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà topologica di dimensione $2n$. Infatti ogni suo punto è contenuto nel complementare di un iperpiano H e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H$ è un aperto omeomorfo a $\mathbb{C}^n$.

Osservazione 7.6. Le tre condizioni della Definizione 7.1 sono indipendenti, cioè due di esse non implicano la terza: lo spazio descritto nell'Esercizio 5.7 è connesso a base numerabile, ogni suo punto possiede un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}$, ma non è di Hausdorff. L'Esercizio 6.6 mostra un esempio di spazio connesso di Hausdorff, localmente omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ ma non a base numerabile.

In molti testi, nella definizione di varietà topologica, la condizione che ogni componente connessa abbia base numerabile viene sostituita con la condizione di paracompattezza. Vedremo più avanti che queste due definizioni sono del tutto equivalenti.

Proposizione 7.7. *Sia M una varietà topologica. Allora M è uno spazio localmente compatto di Hausdorff, ogni sua componente connessa è aperta e possiede una esaustione in compatti.*

Dimostrazione. Sia x un punto di una varietà topologica M di dimensione n. Per ipotesi esiste un intorno aperto U di 0 in $\mathbb{R}^n$ ed una immersione aperta $f\colon U \to M$ tale che $f(0) = x$. Se $B(0,r) \subset U$, allora gli insiemi $f(\overline{B(0,t)})$ formano, al variare di $0 < t < r$, un sistema fondamentale di intorni chiusi, compatti e connessi di x. Per il Lemma 4.25, le componenti connesse di una varietà topologica sono aperte, mentre per il Teorema 6.13, ogni componente connessa possiede esaustioni in compatti. □

Esercizi

7.1. Provare che le varietà topologiche di dimensione 0 sono tutti e soli gli spazi topologici discreti.

7.2. Provare che un sottoinsieme aperto di una varietà topologica è ancora una varietà topologica della stessa dimensione.

7.3. Provare che il prodotto di due varietà topologiche è una varietà topologica.

7.4. Siano M una varietà topologica connessa di dimensione maggiore di 1 e $K \subset M$ un sottoinsieme finito. Dimostrare che $M - K$ è connesso. (Sugg.: vedi Esempio 4.5.)

7.5 (∗). Sia M una varietà topologica connessa e siano $p, q \in M$. Dimostrare che esiste un omeomorfimo $f\colon M \to M$ tale che $f(p) = q$.

7.6 (∗). Dati due interi k, n, con $0 < k < n$, denotiamo con $G(k, n)$ la famiglia dei sottospazi vettoriali di dimensione k di $\mathbb{R}^n$ e con $p\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to G(k, n)$ l'applicazione che associa ad ogni matrice invertibile il sottospazio generato dai primi k vettori colonna. Poniamo su $G(k, n)$ la topologia quoziente rispetto a p. Dimostrare che l'identificazione p è aperta e che $G(k, n)$ è una varietà topologica compatta e connessa di dimensione $k(n - k)$.

7.2 Prebasi e teorema di Alexander

Definizione 7.8. *Una **prebase** di uno spazio topologico è una famiglia $\mathcal{P}$ di aperti tale che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ è una base della topologia.*

Ogni base di uno spazio topologico è anche una prebase.

Esempio 7.9. Una prebase della topologia euclidea su $\mathbb{R}$ è formata dagli aperti $]-\infty, a[\,,\ ]b, +\infty[$ al variare di $a, b \in \mathbb{R}$. Infatti gli intervalli aperti $]a, b[$ sono una base della topologia e possiamo scrivere $]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[$.

Lemma 7.10. *Siano X, Y spazi topologici e $\mathcal{P}$ una prebase di Y. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è continua se e solo se $f^{-1}(U)$ è aperto per ogni $U \in \mathcal{P}$.*

Dimostrazione. Basta osservare che f^{-1} commuta con le operazioni di unione ed intersezione. □

Sia $\mathcal{P}$ un ricoprimento di un insieme X e consideriamo la famiglia $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$. Se $A, B \in \mathcal{B}$, allora $A \cap B \in \mathcal{B}$ e gli elementi di $\mathcal{B}$ ricoprono X. Per il Teorema 3.7 la famiglia $\mathcal{B}$ è base di una topologia su X che ha $\mathcal{P}$ come prebase. È facile dimostrare che tale topologia è la meno fine tra quelle che hanno gli elementi di $\mathcal{P}$ come aperti.

Esempio 7.11. Siano S un insieme ed X uno spazio topologico; sull'insieme X^S di tutte le applicazioni $f\colon S \to X$ consideriamo la famiglia $\mathcal{P}$ formata dai sottoinsiemi

$$P(s, U) = \{f\colon S \to X \mid f(s) \in U\}$$

al variare di $s \in S$ e di U tra gli aperti di X. La topologia su X^S meno fine tra quelle che contengono $\mathcal{P}$ si dice **topologia della convergenza puntuale** ed ha $\mathcal{P}$ come prebase.

Teorema 7.12 (Alexander). *Sia $\mathcal{P}$ una prebase di uno spazio topologico X. Se ogni ricoprimento di X fatto con elementi di $\mathcal{P}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.*

Dimostrazione. Supponiamo che X non sia compatto e dimostriamo che esiste un ricoprimento di X fatto con elementi di $\mathcal{P}$ che non ammette sottoricoprimenti finiti. Denotiamo con $\mathcal{T}$ la famiglia di tutti gli aperti di X e con $\mathbf{Z}$ la collezione delle sottofamiglie $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ che ricoprono X ma che non possiedono sottoricoprimenti finiti. Siccome X non è compatto la famiglia $\mathbf{Z}$ non è vuota. Consideriamo su $\mathbf{Z}$ l'ordinamento per inclusione, ossia definiamo $\mathcal{A} \leq \mathcal{A}'$ se $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Sia $\mathbf{C} \subset \mathbf{Z}$ una catena, allora $\mathcal{C} = \cup\{\mathcal{A} \in \mathbf{C}\} \in \mathbf{Z}$ e quindi $\mathcal{C}$ è un maggiorante di $\mathbf{C}$: infatti se esistesse un sottoricoprimento finito $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{C}$, allora ogni A_i appartiene ad un elemento $\mathcal{A}_i$ della catena $\mathbf{C}$ ed avremmo la contraddizione $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \max(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$. Per il Lemma di Zorn esiste quindi un elemento massimale $\mathcal{Z} \in \mathbf{Z}$.

Proviamo adesso che la famiglia $\mathcal{P} \cap \mathcal{Z}$ è un ricoprimento aperto di X, ossia che per ogni punto x esiste $P \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Z}$ tale che $x \in P$. Sia $x \in X$ un punto e scegliamo $A \in \mathcal{Z}$ tale che $x \in A$; per definizione di prebase esistono $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}$ tali che $x \in P_1 \cap \cdots \cap P_n \subset A$: vogliamo dimostrare che $P_i \in \mathcal{Z}$ per qualche $i = 1, \ldots, n$. Supponiamo il contrario, allora per ogni

$i = 1, \dots, n$ il ricoprimento $\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z} \cup \{P_i\}$ è strettamente maggiore di $\mathcal{Z}$ e quindi non appartiene a $\mathbf{Z}$; di conseguenza esiste un sottoricoprimento finito $X = P_i \cup A_{i,1} \cup \cdots \cup A_{i,s_i}$, dove $A_{i,j} \in \mathcal{Z}$. Se ne deduce che $X = (\cap_i P_i) \cup_{i,j} A_{i,j}$ e quindi $X = A \cup \cup_{i,j} A_{i,j}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{Z}$.

Riepilogando, la famiglia $\mathcal{P} \cap \mathcal{Z}$ è un ricoprimento aperto di X fatto con aperti della prebase; d'altra parte, essendo contenuta in $\mathcal{Z}$, tale famiglia non ammette sottoricoprimenti finiti e questo è esattamente quello che volevamo dimostrare. $\square$

Esercizi

7.7. Sia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$. Per ogni coppia di sottoinsiemi *finiti e disgiunti* $A, B \subset \mathbb{N}$ definiamo

$$U(A, B) = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid A \subset S,\ S \cap B = \emptyset\}.$$

Dimostrare che:

1. I sottoinsiemi $U(A, B)$ formano, al variare di A e B, una base di aperti di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. I sottoinsiemi
$$P(n) = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid n \in S\}, \qquad Q(n) = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid n \notin S\},$$
formano, al variare di $n \in \mathbb{N}$, una prebase della topologia $\mathcal{T}$.
3. Lo spazio topologico $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathcal{T})$ è compatto di Hausdorff. (Sugg.: se $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \cup_{n \in A} P(n) \cup_{m \in B} Q(m)$, allora $B \in \cup_{n \in A} P(n)$ e di conseguenza $A \cap B \neq \emptyset$; applicare il teorema di Alexander.)
4. Per ogni $r > 1$ l'applicazione
$$f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \left[0, \frac{1}{r-1}\right], \qquad f(S) = \sum_{n \in S} \frac{1}{r^n},$$
è continua. Se $r > 2$ allora f è anche iniettiva.

7.8 (♡). Si consideri lo spazio X di tutte le applicazioni $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotato della topologia della convergenza puntuale (Esempio 7.11). Dimostrare che X è di Hausdorff e non soddisfa il primo assioma di numerabilità.

7.3 Prodotti infiniti

Data una famiglia qualsiasi $\{X_i \mid i \in I\}$ di insiemi, si definisce il prodotto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ come l'insieme di tutte le applicazioni $x \colon I \to \cup_i X_i$ tali che $x_i \in X_i$ per ogni indice $i \in I$. In altre parole, ogni elemento del prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ è una collezione $\{x_i\}_{i \in I}$ indicizzata da I e tale che $x_i \in X_i$

per ogni i. L'assioma della scelta garantisce che, se ogni X_i è non vuoto, allora anche il prodotto X è non vuoto. Le proiezioni $p_i : X \to X_i$ sono definite come $p_i(x) = x_i$.

Se gli insiemi X_i sono tutti uguali ad un insieme X_0 allora il prodotto $\prod_{i \in I} X_i = \prod_{i \in I} X_0$ coincide con l'insieme X_0^I di tutte le applicazioni $I \to X_0$. Per ogni insieme Y e per ogni applicazione $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ denotiamo con f_i la composizione di f con la proiezione p_i. Notiamo che f è univocamente determinata dalla famiglia di applicazioni $\{f_i : Y \to X_i \mid i \in I\}$.

Se ogni X_i è uno spazio topologico, definiamo la topologia prodotto in X come la meno fine tra quelle che rendono tutte le proiezioni continue. Questo equivale a dire che i sottoinsiemi $p_i^{-1}(U)$, al variare di $i \in I$ e U negli aperti di X_i, formano una prebase che chiameremo **prebase canonica** . Chiameremo **base canonica** gli aperti che sono intersezione finita di elementi della prebase canonica.

Se gli spazi X_i coincidono tra loro, la topologia prodotto coincide con la topologia della convergenza puntuale (Esempio 7.11), avendo tali topologie la stessa prebase.

Lemma 7.13. *Nelle notazioni precedenti, un'applicazione $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ è continua se e solo se tutte le componenti $f_i : Y \to X_i$ sono continue.*

Dimostrazione. Poiché le proiezioni p_i sono continue, se f è continua, allora anche le componenti $f_i = p_i f$ sono continue.

Viceversa supponiamo che ogni componente f_i sia continua. Allora per ogni aperto $p_i^{-1}(U)$ della prebase canonica si ha $f^{-1}(p_i^{-1}(U)) = f_i^{-1}(U)$ e quindi f è continua. □

Teorema 7.14 (Tyconoff). *Il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi topologici compatti è compatto.*

Dimostrazione. Sia $X = \prod_{i \in I} X_i$ dotato della topologia prodotto e supponiamo ogni X_i compatto. Verifichiamo la compattezza di X utilizzando il teorema di Alexander 7.12.

Consideriamo una collezione $\mathcal{A}$ di aperti della prebase canonica: dare $\mathcal{A}$ equivale a dare, per ogni i, una collezione $\mathcal{A}_i$ di aperti in X_i tale che

$$\mathcal{A} = \{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\, U \in \mathcal{A}_i\}.$$

Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un ricoprimento, allora $\mathcal{A}_i$ è un ricoprimento di X_i per qualche i. Infatti, se $C_i = X_i - \cup\{U \mid U \in \mathcal{A}_i\}$ fosse non vuoto per ogni indice i, per l'assioma della scelta esisterebbe $x \in X$ tale che $x_i \in C_i$ per ogni i e quindi

$$x \notin \cup\{p_i^{-1}(U) \mid i \in I,\, U \in \mathcal{A}_i\} = \cup\{V \mid V \in \mathcal{A}\}.$$

Sia dunque $i \in I$ un indice tale che $\mathcal{A}_i$ è un ricoprimento di X_i. Per compattezza possiamo trovare un sottoricoprimento finito $X_i = U_1 \cup \cdots \cup U_n$, con $U_j \in \mathcal{A}_i$, e quindi $\{p_i^{-1}(U_j)\} \subset \mathcal{A}$ è un sottoricoprimento finito. □

Esistono dimostrazioni del Teorema 7.14 che non utilizzano Alexander; però tutte le dimostrazioni utilizzano l'assioma della scelta o enunciato equivalente: questo perché *il teorema di Tyconoff è equivalente all'assioma della scelta* (Esercizio 7.12).

Teorema 7.15. *Il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi topologici connessi è connesso.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che il prodotto di due spazi connessi è connesso. Segue dunque per induzione che il prodotto di una famiglia finita di spazi connessi è connesso. Consideriamo adesso il prodotto $X = \prod_{i\in I} X_i$ di una famiglia arbitraria di spazi connessi. Se X è vuoto non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi $X \neq \emptyset$ e scegliamo un punto $x \in X$. Denotiamo con $F(x) \subset X$ il sottoinsieme dei punti y tali che $y_i \neq x_i$ per al più un numero finito di indici $i \in I$. Siccome la chiusura di un sottoinsieme connesso è connessa, basta dimostrare le seguenti due affermazioni:

1. $F(x)$ è connesso.
2. $F(x)$ è denso in X.

Per ogni sottoinsieme finito $J \subset I$ denotiamo con $p_J \colon X \to \prod_{j\in J} X_j$ la proiezione sulle J-coordinate e definiamo l'applicazione

$$h_J \colon \prod_{j\in J} X_j \to X, \qquad h_J(z)_i = \begin{cases} z_i & \text{se } i \in J \\ x_i & \text{se } i \notin J \end{cases}$$

Poiché ogni h_J è continua, l'immagine di h_J è un sottospazio connesso che contiene il punto x. Per definizione $F(x)$ è l'unione delle immagini di h_J, al variare di J tra tutti i sottoinsiemi finiti di I e per il Lemma 4.20 si ha che $F(x)$ è connesso.

Dalla definizione di topologia prodotto segue che la famiglia degli aperti $p_J^{-1}(U)$, al variare di J tra i sottoinsiemi finiti di I e di U tra gli aperti di $\prod_{j\in J} X_j$, contiene la base canonica ed è quindi una base. Inoltre vale $h_J^{-1}(p_J^{-1}(U)) = U$ e quindi se U non è vuoto si ha $F(x) \cap p_J^{-1}(U) \neq \emptyset$: in particolare $F(x)$ interseca ogni aperto non vuoto della base canonica. □

Esercizi

7.9. Dimostrare che il prodotto di una famiglia arbitraria di spazi di Hausdorff è ancora di Hausdorff.

7.10. Dimostrare che il prodotto di una famiglia numerabile di spazi a base numerabile è ancora a base numerabile.

7.11. Mostrare che l'insieme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, con la topologia introdotta nell'Esercizio 7.7, è omeomorfo al prodotto di $\mathbb{N}$ copie di $\{0, 1\}$.

7.12. Sia $g\colon Y \to X$ un'applicazione surgettiva di insiemi e consideriamo su Y la topologia i cui chiusi sono Y ed i sottoinsiemi della forma $g^{-1}(A)$, con A sottoinsieme finito di X. Dimostrare che Y è compatto.

Se $A \subset X$ è un sottoinsieme finito, allora esistono applicazioni $f\colon X \to Y$ tali che $g(f(x)) = x$ per ogni $x \in A$: notiamo che per dimostrare l'esistenza di una tale f è richiesto un numero finito di scelte e quindi non è necessario l'assioma della scelta. Provare che, al variare di A tra i sottoinsiemi finiti di X, i sottospazi

$$F(A) = \{f \in Y^X = \prod_{x \in X} Y \mid g(f_x) = x \text{ per ogni } x \in A\}$$

sono chiusi nel prodotto e formano una famiglia con la proprietà dell'intersezione finita (Esercizio 4.22).

Mostrare che il Teorema di Tyconoff implica l'assioma della scelta.

7.13 ($*, \heartsuit$). Sia S l'insieme di tutte le applicazioni $a\colon \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$. Provare che il prodotto di S copie di $[-1, 1]$ è compatto ma non è compatto per successioni.

7.14 ($*$). Sia I l'intervallo $[0, 1]$ e $X = I^I = \{f\colon I \to I\}$ dotato della topologia prodotto. Per il teorema di Tyconoff X è compatto di Hausdorff.

Sia $B \subset X$ il sottospazio di tutte le funzioni $f\colon I \to I$ tali che $f(x) \neq 0$ per al più una quantità numerabile di punti $x \in I$. Dimostrare che B è denso in X, che non è compatto ma che è compatto per successioni.

7.4 Raffinamenti e paracompattezza $\curvearrowright$

La nozione di finitezza locale si estende in modo naturale a famiglie arbitrarie di sottoinsiemi di uno spazio topologico.

Definizione 7.16. *Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X si dice **localmente finita** se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno $V \in \mathcal{I}(x)$ tale che $V \cap A \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $A \in \mathcal{A}$.*

Dato che ogni intorno contiene un aperto, e che un aperto interseca un sottoinsieme A se e soltanto se interseca la sua chiusura, ne segue che una famiglia $\{A_i \mid i \in I\}$ è localmente finita se e solo se la famiglia $\{\overline{A_i} \mid i \in I\}$ è localmente finita.

Lemma 7.17. *Per ogni famiglia localmente finita $\{A_i\}$ di sottoinsiemi di uno spazio topologico X vale*

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}.$$

In particolare l'unione di una famiglia localmente finita di chiusi è un chiuso.

Dimostrazione. La relazione $\cup_i \overline{A_i} \subset \overline{\cup_i A_i}$ è sempre soddisfatta in quanto il chiuso $\overline{\cup_i A_i}$ contiene A_i e quindi $\overline{A_i}$ per ogni i. Rimane da dimostrare che se $\{A_i\}$ è localmente finita, allora $\cup_i \overline{A_i}$ è un sottoinsieme chiuso di X. Possiamo trovare un ricoprimento aperto $X = \cup_j U_j$ tale che U_j interseca al più finiti A_i e quindi $(\cup_i \overline{A_i}) \cap U_j = \cup_i (U_j \cap \overline{A_i})$ è chiuso in U_j. Adesso basta ricordare che ogni ricoprimento aperto è fondamentale. □

Definizione 7.18. *Siano $\{U_i \mid i \in I\}$ e $\{V_j \mid j \in J\}$ due ricoprimenti di uno spazio topologico. Diremo che $\{U_i \mid i \in I\}$ è **più fine**, o anche **un raffinamento** di $\{V_j \mid j \in J\}$, se per ogni $i \in I$ esiste $j \in J$ tale che $U_i \subset V_j$. In tale situazione chiameremo **funzione di raffinamento** qualsiasi applicazione $f \colon I \to J$ tale che $U_i \subset V_{f(i)}$ per ogni $i \in I$.*

Esempio 7.19. Siano $\{U_i \mid i \in I\}$ e $\{V_j \mid j \in J\}$ due ricoprimenti di uno spazio topologico. Il ricoprimento $\{U_i \cap V_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ è un raffinamento di entrambi. Come funzioni di raffinamento è possibile prendere le proiezioni $I \times J \to I$ e $I \times J \to J$.

Definizione 7.20. *Uno spazio topologico si dice **paracompatto** se ogni ricoprimento aperto possiede un raffinamento aperto localmente finito.*

È chiaro che ogni spazio compatto è anche paracompatto. Qualcuno può porsi la domanda del perché chiediamo un raffinamento e non un sottoricoprimento localmente finito: il motivo è che se in X ogni ricoprimento ammette un sottoricoprimento localmente finito, allora X è compatto (facile esercizio). Similmente, se in X ogni ricoprimento ammette un raffinamento finito, allora X è compatto (facilissimo esercizio).

Teorema 7.21. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff:*

1. *Se X possiede una esaustione in compatti, allora X è paracompatto e localmente compatto.*
2. *Se X è connesso, paracompatto e localmente compatto, allora X possiede una esaustione in compatti.*

Dimostrazione. [1] Sia $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ una esaustione in compatti e sia $\mathcal{B}$ una qualunque base di aperti della topologia. Dimostriamo che per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X esiste una sottofamiglia $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ che è un raffinamento localmente finito di $\mathcal{A}$.

Poniamo per convenzione $K_n = \emptyset$ se $n \leq 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in K_n - K^\circ_{n-1}$ scegliamo un aperto $A \in \mathcal{A}$ tale che $x \in A$ ed un aperto della base $B(n,x) \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B(n,x)$ e $B(n,x) \subset A \cap (K^\circ_{n+1} - K_{n-2})$. Gli aperti $B(n,x)$ ricoprono il compatto $K_n - K^\circ_{n-1}$ e possiamo trovare un sottoricoprimento finito $K_n - K^\circ_{n-1} \subset B(n,x_1) \cup \cdots \cup B(n,x_s)$. L'unione, al variare di n, di tali ricoprimenti fornisce la famiglia $\mathcal{C}$ richiesta.

[2] Viceversa, supponiamo X connesso, paracompatto e localmente compatto. La locale compattezza ci dice che possiamo trovare un ricoprimento

aperto $\mathcal{A}$ di X tale che $\overline{A}$ è compatto per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per paracompattezza possiamo trovarne un raffinamento $\mathcal{B}$ localmente finito: chiaramente $\overline{B}$ è compatto per ogni $B \in \mathcal{B}$. Osserviamo infine che, in base al Lemma 7.17, per ogni sottofamiglia $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$, l'unione

$$\cup\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{C}\}$$

è un sottoinsieme chiuso di X. Sia $\mathcal{B}_1$ un qualsiasi sottoinsieme finito di $\mathcal{B}$ tale che il compatto $K_1 = \cup\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}_1\}$ sia non vuoto. Esiste allora una famiglia finita $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ tale che

$$K_1 \subset \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}_2\}.$$

Possiamo procedere in maniera ricorsiva e costruire una successione di sottofamiglie finite $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}$ tali che per ogni n vale

$$K_n = \cup\{\overline{B} \mid B \in \mathcal{B}_n\} \subset \cup\{B \mid B \in \mathcal{B}_{n+1}\}.$$

Per dimostrare che $\{K_n\}$ è una esaustione in compatti di X resta da provare che $\cup_n K_n = X$. Siccome

$$\cup_n K_n = \cup\{\overline{B} \mid B \in \cup_n \mathcal{B}_n\} = \cup\{B \mid B \in \cup_n \mathcal{B}_n\}$$

si ha che $\cup_n K_n$ è un sottospazio aperto e chiuso nello spazio connesso X. □

Corollario 7.22. *Ogni spazio topologico localmente compatto di Hausdorff a base numerabile è paracompatto. In particolare, ogni varietà topologica è paracompatta.*

Dimostrazione. Per il Teorema 6.13 ogni spazio topologico localmente compatto di Hausdorff a base numerabile possiede una esaustione in compatti e quindi è paracompatto per il Teorema 7.21. Ogni varietà topologica connessa è localmente compatta di Hausdorff a base numerabile ed è quindi paracompatta. Ogni varietà topologica è l'unione disgiunta delle sue componenti connesse ed è chiaro dalle definizioni che l'unione disgiunta di spazi paracompatti è paracompatta. □

Corollario 7.23. *Sia M uno spazio paracompatto di Hausdorff tale che ogni punto di M possiede un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora M è una varietà topologica.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato nella Sezione 7.1 che M è localmente compatto ed ogni componente connessa è aperta. Sia M_0 una componente connessa fissata; per il Teorema 7.21 M_0 possiede una esaustione in compatti K_n. Possiamo ricoprire ogni compatto K_n con un numero finito di aperti omeomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$ e quindi M_0 è unione numerabile di aperti, ognuno dei quali è a base numerabile. Quindi anche M_0 è a base numerabile. □

Lemma 7.24. *In uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.*

Dimostrazione. Sia X paracompatto di Hausdorff; bisogna dimostrare che se $U \subset X$ è un aperto che contiene x, allora esiste un aperto $V \subset X$ tale che $X - U \subset V$ e $x \notin \overline{V}$. Ne seguirà che il chiuso $X - V$ è un intorno di x ed è contenuto in U.

Denotiamo $C = X - U$; dato che X è di Hausdorff, ogni punto $y \in C$ possiede un intorno aperto $W_y \in \mathcal{I}(y)$ tale che $x \notin \overline{W_y}$. Dato che X è paracompatto, il ricoprimento aperto $X = U \cup \{W_y \mid y \in C\}$ ammette un raffinamento localmente finito $X = \cup\{V_i \mid i \in I\}$. Consideriamo l'aperto $V = \cup\{V_i \mid i \in I,\, V_i \cap C \neq \emptyset\}$: se $V_i \cap C \neq \emptyset$ allora V_i è contenuto in W_y per qualche $y \in C$, dunque $x \notin \overline{V_i}$ e quindi $x \notin \overline{V} = \cup\{\overline{V_i} \mid V_i \cap C \neq \emptyset\}$. □

Teorema 7.25 (di restringimento). *Sia $X = \cup\{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico paracompatto di Hausdorff. Esiste allora un ricoprimento aperto localmente finito $X = \cup\{V_i \mid i \in I\}$ tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ scegliamo $i(x) \in I$ tale che $x \in U_{i(x)}$ ed un intorno aperto $W(x) \in \mathcal{I}(x)$ tale che $\overline{W(x)} \subset U_{i(x)}$. Se $X = \cup\{A_j \mid j \in J\}$ è un raffinamento localmente finito del ricoprimento aperto $X = \cup\{W(x) \mid x \in X\}$, allora esiste una funzione di raffinamento $f\colon J \to I$ tale che $\overline{A_j} \subset U_{f(j)}$ per ogni $j \in J$. Consideriamo, per ogni $i \in I$, l'aperto $V_i = \cup\{A_j \mid f(j) = i\}$: poiché la famiglia $\{A_j\}$ è localmente finita si può applicare il Lemma 7.17 e quindi vale $\overline{V_i} = \cup\{\overline{A_j} \mid f(j) = i\} \subset U_i$. □

Enunciamo infine un teorema di A.H. Stone. Il lettore interessato può trovarne la dimostrazione in [Du66, Mu00].

Teorema 7.26 (Stone). *Ogni spazio metrizzabile è paracompatto.*

Esercizi

7.15. Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico X. Dimostrare che ogni ricoprimento aperto di X possiede raffinamenti fatti con aperti di $\mathcal{B}$.

7.16. Dimostrare che ogni sottospazio chiuso di uno spazio paracompatto è paracompatto.

7.17 (∗). Dimostrare che il prodotto di uno spazio compatto per uno spazio paracompatto è paracompatto.

7.5 Spazi normali $\curvearrowright$

Definizione 7.27. *Uno spazio topologico X si dice **normale** se è di Hausdorff e se per ogni coppia di chiusi disgiunti $A, B \subset X$ esistono aperti $U, V \subset X$ tali che $A \subset U$, $B \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Proposizione 7.28. *1. Ogni spazio metrizzabile è normale.*
2. Ogni spazio topologico paracompatto di Hausdorff è normale.

Dimostrazione. [1] Supponiamo (X, d) spazio metrico; già sappiamo che X è di Hausdorff. Se A e B sono chiusi disgiunti di X, consideriamo la funzione $f\colon X \to [0, 3]$ definita come

$$f(x) = \frac{3d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}, \qquad \text{dove} \qquad d_Y(x) = \inf_{y \in Y} d(x, y).$$

Per quanto abbiamo visto nell'Esempio 3.43, la funzione f è continua, gli aperti $U = f^{-1}([0, 1[)$ e $V = f^{-1}(]2, 3])$ sono disgiunti e contengono ripettivamente A e B.

[2] Supponiamo X paracompatto di Hausdorff e siano A e B chiusi disgiunti di X. Consideriamo il ricoprimento aperto $X = (X - A) \cup (X - B)$; per il teorema di restringimento 7.25 esistono due aperti U, V tali che

$$U \cup V = X, \qquad \overline{U} \subset X - A \quad \text{e} \quad \overline{V} \subset X - B.$$

Ne segue che $A \subset X - \overline{U}$, che $B \subset X - \overline{V}$ e che $(X - \overline{U}) \cap (X - \overline{V}) = \emptyset$. □

Definizione 7.29. *Siano $X = \cup\{U_i \mid i \in I\}$ e $X = \cup\{V_j \mid j \in J\}$ due ricoprimenti aperti. Diremo che $\{V_j \mid j \in J\}$ è un **raffinamento stellato** di $\{U_i \mid i \in I\}$ se per ogni $x \in X$ l'aperto*

$$V(x) = \cup\{V_j \mid x \in V_j\}$$

*è contenuto in U_i per qualche indice i. Uno spazio topologico si dice **pienamente normale** se è di Hausdorff ed ogni ricoprimento aperto ammette un raffinamento stellato.*

Ogni spazio pienamente normale è anche normale. Infatti se C, D sono chiusi disgiunti possiamo considerare un raffinamento stellato $\{V_j\}$ del ricoprimento $X = (X - C) \cup (X - D)$ e osservare che gli aperti

$$U = \cup\{V_j \mid V_j \cap C \neq \emptyset\}, \qquad W = \cup\{V_j \mid V_j \cap D \neq \emptyset\}$$

sono disgiunti.

Teorema 7.30. *Ogni spazio topologico paracompatto di Hausdorff è pienamente normale.*

Dimostrazione. Sia $X = \cup\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di uno spazio paracompatto di Hausdorff del quale vogliamo trovare un raffinamento stellato. A meno di passare ad un raffinamento non è restrittivo supporre $X = \cup\{U_i\}$ localmente finito. Per il teorema di restringimento esiste un ricoprimento chiuso $X = \cup\{C_i\}$ tale che $C_i \subset U_i$ per ogni i; in particolare anche $\{C_i\}$ è localmente finito. Per ogni $x \in X$ sia $W(x)$ un suo intorno aperto che interseca finiti chiusi della famiglia $\{C_i\}$. A meno di restringere ulteriormente $W(x)$ possiamo assumere che:

1. Se $x \notin C_i$, allora $W(x) \cap C_i = \emptyset$.
2. Se $x \in C_i$, allora $W(x) \subset U_i$.

Sia ora $x \in X$ un punto fissato; esiste un indice i tale che $x \in C_i$ e quindi, se $x \in W(y)$, allora $W(y) \cap C_i \neq \emptyset$, $y \in C_i$ e $W(y) \subset U_i$. Abbiamo dunque provato che $\{W(x)\}$ è un raffinamento stellato di $\{U_i\}$. □

Esercizi

7.18. Dimostrare che ogni sottospazio chiuso di uno spazio normale è normale.

7.19. Utilizzare il teorema di Wallace per dimostrare direttamente che ogni spazio compatto di Hausdorff è normale.

7.20. Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi e compatti di uno spazio topologico di Hausdorff X tali che $A_{n+1} \subset A_n$ per ogni n. Dimostrare che $\cap_n A_n$ è connesso. (Sugg.: non è restrittivo supporre $X = A_1$. Se $\cap_n A_n$ fosse contenuto nell'unione di due aperti disgiunti applicare l'Esercizio 4.23.)

7.21. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e $A \subset X$ un sottoinsieme. Dimostrare che la famiglia dei sottospazi di X compatti e connessi che contengono A possiede elementi minimali rispetto all'inclusione.

7.22 ($*, \heartsuit$). Sia $\{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio topologico normale X. Dimostrare che esiste un ricoprimento aperto $\{V_i \mid i \in I\}$ tale che $\overline{V_i} \subset U_i$ per ogni i. (Sugg.: applicare il lemma di Zorn all'insieme formato dalle coppie $(J, \{V_j \mid j \in J\})$ dove $J \subset I$, $V_j \subset X$ aperto tale che $\overline{V_j} \subset U_j$ per ogni $j \in J$ e $(\cup_{j\in J} V_j) \cup (\cup_{i\notin J} U_i) = X$.)

7.6 Proprietà di separazione $\curvearrowright$

Le proprietà per uno spazio topologico di essere di Hausdorff o normale sono le più note tra quelle che in letteratura vengono dette **proprietà di separazione**[1]. Naturalmente la fantasia dei matematici ne ha inventate molte altre: la prossima definizione riepiloga le più celebri, introdotte da Tietze nel 1921 con il nome di Trennbarkeitsaxiome.

[1] In inglese **separation axioms**, a volte tradotto in "assiomi di separazione"

Definizione 7.31. *Uno spazio topologico:*

- *si dice **T0** (o di Kolmogoroff) se punti distinti hanno chiusure distinte,*
- *si dice **T1** se i punti sono sottoinsiemi chiusi,*
- *si dice **T2** (o di Hausdorff, o separato) se per ogni coppia di punti distinti $c \neq d$ esistono due aperti U, V tali che $c \in U$, $d \in V$ e $U \cap V = \emptyset$,*
- *si dice **T3** se per ogni chiuso C ed ogni punto $d \notin C$ esistono due aperti U, V tali che $C \subset U$, $d \in V$ e $U \cap V = \emptyset$,*
- *si dice **T4** se per ogni coppia di chiusi disgiunti C, D esistono due aperti U, V tali che $C \subset U$, $D \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Si noti che la separabilità (Definizione 6.5) non è una proprietà di separazione: quasi tutti concordano, con il senno di poi, che usare il termine separabile per indicare un assioma di numerabilità non è stata un'idea particolarmente brillante.

Definizione 7.32. *Uno spazio topologico si dice* ***regolare*** *se soddisfa le proprietà T1 e T3.*

Se vale T1, ossia se i punti sono chiusi, allora T3 è un caso particolare di T4 e T2 è un caso particolare di T3. In particolare uno spazio topologico è normale se e solo se soddisfa T1 e T4 e quindi

$$\text{metrizzabile} \Rightarrow \text{normale} \Rightarrow \text{regolare} \Rightarrow \text{Hausdorff} \Rightarrow \text{T1} \Rightarrow \text{T0}.$$

Teorema 7.33. *Ogni spazio regolare a base numerabile è normale. In particolare, sottospazi e prodotti finiti di spazi normali a base numerabile sono ancora normali.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio topologico regolare con base numerabile di aperti $\mathcal{B}$ e siano C, D chiusi disgiunti di X. La condizione di regolarità implica che per ogni $x \in C$ esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U \subset \overline{U} \subset X - D$; proprietà simile per i punti $y \in D$. Consideriamo le due sottofamiglie

$$\mathcal{C} = \{U \in \mathcal{B} \mid \overline{U} \cap D = \emptyset\}, \qquad \mathcal{D} = \{V \in \mathcal{B} \mid \overline{V} \cap C = \emptyset\}.$$

Poiché $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono entrambe numerabili possiamo scrivere $\mathcal{C} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{D} = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; si ha $C \subset \cup\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $D \subset \cup\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per ogni n consideriamo gli aperti

$$A_n = U_n - \bigcup_{j \le n} \overline{V_j}, \qquad B_n = V_n - \bigcup_{j \le n} \overline{U_j}.$$

Se $m \geq n$, allora $A_m \cap V_n = B_m \cap U_n = \emptyset$ e quindi $A_m \cap B_n = B_m \cap A_n = \emptyset$. Quest'ultima relazione equivale a dire che $A_n \cap B_m = \emptyset$ per ogni scelta di $n, m \in \mathbb{N}$. Infine se $A = \cup A_n$ e $B = \cup B_n$ si ha $C \subset A$, $D \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Per finire osserviamo che sottospazi e prodotti di spazi regolari sono ancora regolari (Esercizio 7.23). □

Solitamente il Teorema 7.33 viene abbinato al seguente risultato, che riportiamo senza dimostrazione.

Teorema 7.34 (Urysohn). *Ogni spazio normale a base numerabile è metrizzabile.*

La dimostrazione originale si trova in [Ur25] ed è stata scritta da Alexandroff basandosi sugli appunti lasciati da Urysohn, morto annegato all'età di 26 anni. Per altre dimostrazioni vedi [Du66, Mu00].

Tra i vari risultati preliminari, necessari alla dimostrazione del teorema, uno è particolarmente celebre: viene comunemente detto *lemma di Urysohn* (Lemma 8.28) e si trova dimostrato in quasi tutti i testi di topologia generale.

Esercizi

7.23 (♡). Dimostrare che sottospazi e prodotti di spazi **Tx** sono ancora **Tx** per x=1,2,3.

7.24 (♡). Sia $\{Y_n\}$ una famiglia numerabile di sottospazi chiusi di uno spazio normale. Dimostrare che $Y = \cup_n Y_n$, con la topologia di sottospazio, è normale.

7.25. Sia X uno spazio topologico regolare ma non normale. Dimostrare che esiste un sottospazio chiuso $A \subset X$ tale che il quoziente X/A è di Hausdorff ma non regolare.

7.26. Utilizzare il fatto che la retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_{Sf}$ è normale, mentre il prodotto $\mathbb{R}_{Sf} \times \mathbb{R}_{Sf}$ non è normale (vedi [Mu00, §41]) per dedurre che le implicazioni inverse di

$$\text{metrizzabile} \;\Rightarrow\; \text{normale} \;\Rightarrow\; \text{regolare} \;\Rightarrow\; \text{Hausdorff}\,.$$

sono tutte generalmente false.

8

Complementi di topologia generale $\curvearrowright$

Il paradosso di Russell – Dimostrazione del lemma di Zorn – Il teorema di Zermelo – Ultrafiltri – La topologia compatta-aperta – Spazi topologici Noetheriani – Un lungo esercizio: il teorema di estensione di Tietze

8.1 Il paradosso di Russell

Secondo la definizione intuitiva ed ingenua, per cui un insieme è dato semplicemente dai suoi elementi (senza ulteriori condizioni), risulta essere un insieme anche *l'insieme di tutti gli insiemi*, ossia quello i cui elementi sono tutti i possibili insiemi. Un tale insieme, indichiamolo con X, possiede la strana proprietà che $X \in X$. Consideriamo poi il sottoinsieme

$$Y = \{A \in X \mid A \notin A\}$$

e riflettiamo: se $Y \notin Y$, allora (per la definizione di Y) segue che $Y \in Y$; se $Y \in Y$, allora segue (sempre per la definizione di Y) che $Y \notin Y$.

Abbiamo appena esposto l'arcinoto **paradosso di Russell**. Esso ci insegna è che non esiste l'insieme degli insiemi e ci invita a non dimenticare mai il seguente comandamento: *l'insieme di tutti gli insiemi è privo di valenza ontologica. Quando siamo tentati di parlare di esso, bisogna sempre cercare il modo per evitare di farlo.*

Poiché ogni insieme possiede topologie, ne consegue che non esiste l'insieme degli spazi topologici.

Esercizi

8.1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Chiameremo *compattificazione di Stone-Čech* di X un'applicazione continua $f\colon X \to c(X)$, con $c(X)$ compatto di Hausdorff che gode della seguente proprietà universale: *per ogni spazio compatto di Hausdorff Y ed ogni applicazione continua $g\colon X \to Y$ esiste un'unica applicazione continua $h\colon c(X) \to Y$ tale che $g = hf$.*

Mostriamo adesso una pseudodimostrazione dell'esistenza della compattificazione di Stone-Čech che contiene un **ERRORE MICIDIALE**: a voi il compito di individuarlo. Per la dimostrazione corretta rimandiamo invece ai libri di Kelley [Ke55, pag.53] e Dugundji [Du66, Th. 8.2].

Pseudodimostrazione Indichiamo con $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le coppie (Z, ϕ), con Z spazio compatto di Hausdorff e $\phi\colon X \to Z$ applicazione continua. Consideriamo adesso lo spazio topologico prodotto

$$W = \prod_{(Z,\phi)\in\mathcal{A}} Z,$$

che per il teorema di Tychonoff è compatto di Hausdorff. Denotiamo con $\pi_{(Z,\phi)}\colon W \to Z$ le proiezioni sui fattori e con $f\colon X \to W$ l'applicazione continua di componenti $\pi_{(Z,\phi)} f = \phi$. Poniamo infine $c(X) = \overline{f(X)}$.

Il sottospazio $c(X)$ è chiuso in W ed è quindi compatto di Hausdorff. Se $g\colon X \to Y$ è continua con Y compatto di Hausdorff, allora basta considerare $h = \pi_{(Y,g)}$ per avere $g = hf$. L'unicità di h segue dal fatto che Y è di Hausdorff e $f(X)$ è denso in $c(X)$.

8.2 Dimostrazione del lemma di Zorn

Definizione 8.1. *Siano $(S, \leq)$ un insieme ordinato, $H \subset S$ un sottoinsieme e $h \in S$. Diremo che h è **l'estremo superiore** di H se è un maggiorante di H e se $h \leq x$ per ogni maggiorante x di H.*

Possiamo anche dire che l'estremo superiore, se esiste, è il minimo dei maggioranti ed è unico: infatti se h_1, h_2 sono due estremi superiori allora, poiché h_2 è un maggiorante si ha $h_1 \leq h_2$. Similmente vale $h_2 \leq h_1$ e per la proprietà antisimmetrica $h_1 = h_2$.

Definizione 8.2. *Un insieme ordinato si dice **induttivo** se ogni catena non vuota possiede maggioranti. Un insieme ordinato si dice **strettamente induttivo** se ogni catena non vuota possiede estremo superiore.*

Esempio 8.3. L'intervallo chiuso $[0, 1]$, con l'ordinamento usuale, è un insieme strettamente induttivo: infatti ogni sottoinsieme $H \subset [0, 1]$ è una catena e $\sup(H) \in [0, 1]$.

Teorema 8.4. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, non vuoto e strettamente induttivo, e sia $f\colon X \to X$ un'applicazione tale che $f(x) \geq x$ per ogni $x \in X$. Allora, per ogni $a \in X$ esiste $p \geq a$ tale che $f(p) = p$.*

Dimostrazione. Per la proprietà antisimmetrica basta trovare $p \geq a$ tale che $f(p) \leq p$. Denotiamo con $\mathcal{A}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi $A \subset X$ tali che:

1. $a \in A$.
2. $f(A) \subset A$.
3. Rispetto all'ordinamento ereditato da X, il sottoinsieme A è strettamente induttivo.

La famiglia $\mathcal{A}$ non è vuota perché contiene X e possiede un elemento minimo rispetto all'ordinamento di inclusione. Infatti

$$M = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

soddisfa le tre condizioni precedenti. Notiamo anche che $\{x \in X \mid x \geq a\} \in \mathcal{A}$ e quindi a è il minimo di M.

Per dimostrare il teorema è sufficiente dimostrare che M è una catena di X. Infatti se poniamo $p = \sup(M)$, vale $p \in M$ perché M è strettamente induttivo, vale $f(p) \in M$ perché $f(M) \subset M$ e quindi $f(p) \leq p$.

Per dimostrare che M è una catena abbiamo bisogno di introdurre il sottoinsieme

$$T = \{t \in M \mid f(y) \leq t \ \text{ per ogni } y \in M,\ y < t\}.$$

Per ogni $t \in T$ definiamo poi

$$C(t) = \{x \in M \mid x \leq t \ \text{ oppure } f(t) \leq x\}.$$

L'insieme T contiene a ed è quindi non vuoto; siccome $a \leq t$ per ogni $t \in T$, ne segue che $a \in C(t)$ per ogni $t \in T$.

Asserzione. Per ogni $t \in T$ vale $C(t) = M$.
Sia $t \in T$ fissato: basta dimostrare che $C(t)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{A}$. Per dimostrare che $f(x) \in C(t)$ per ogni $x \in C(t)$ consideriamo la seguente casistica:

1. se $x < t$ allora, dato che $t \in T$ si ha $f(x) \leq t$ e quindi $f(x) \in C(t)$.
2. se $x = t$ allora $f(t) \leq f(x)$ e quindi $f(x) \in C(t)$.
3. se $x \geq f(t)$ allora $f(t) \leq x \leq f(x)$ e $f(x) \in C(t)$.

Mostriamo adesso che $C(t)$ è strettamente induttivo. Sia $H \subset C(t)$ una catena non vuota e sia $h = \sup(H) \in M$ il suo estremo superiore. Se t è un maggiorante di H vale $h \leq t$ e quindi $h \in C(t)$. Se invece t non è un maggiorante di H, la condizione $H \subset C(t)$ implica che esiste $k \in H$ tale che $k \geq f(t)$. Quindi $h \geq k \geq f(t)$ e di conseguenza $h \in C(t)$. Abbiamo quindi dimostrato che il sottoinsieme $C(t) \subset M$ appartiene alla famiglia $\mathcal{A}$ e quindi $C(t) = M$.

Asserzione. Vale $T = M$.
Basta dimostrare che $T \in \mathcal{A}$: mostriamo per prima cosa che $f(T) \subset T$.
Dato un elemento $t \in T$, dimostrare che $f(t) \in T$ equivale a dimostrare che $f(y) \leq f(t)$ per ogni $y < f(t)$. Sia dunque $y < f(t)$, dato che $y \in M = C(t)$ deve necessariamente essere $y \leq t$ ed, essendo $f(y) \leq f(t)$ banalmente vero se $y = t$, non è restrittivo supporre $y < t$. Dato che $t \in T$ ne consegue $f(y) \leq t$, che assieme alla $t \leq f(t)$ ci dà $f(y) \leq f(t)$.

Mostriamo adesso che T è strettamente induttivo. Sia $H \subset T$ una catena e $h \in M$ l'estremo superiore di H. Dobbiamo provare che se $x \in M$ e $x < h$

allora $f(x) \leq h$. Dalla condizione $x < h$ segue che x non è un maggiorante di H e quindi esiste $t \in H$ tale che $t \not\leq x$; a maggior ragione $f(t) \not\leq x$. Dato che $x \in C(t) = M$ deve essere $x \leq t$. Se $x = t$ allora t non è un maggiorante della catena H ed esiste $s \in H$, $s > t = x$. Se $x < t$ poniamo $s = t$ e abbiamo dimostrato in entrambi i casi che *per ogni* $x \in M$, $x < h$ *esiste* $s \in H$ *tale che* $x < s$. In particolare $s \in T$, $f(x) \leq s \leq h$ e quindi $h \in T$: abbiamo quindi provato che T è strettamente induttivo e dunque $T \in \mathcal{A}$.

Siamo adesso in grado di dimostrare che M è una catena: siano $t, x \in M$, poiché $T = M$ si ha $t \in T$ e, poiché $C(t) = M$ si ha $x \in C(t)$ che, per definizione di $C(t)$ equivale a dire che $x \leq t$ oppure $x \geq f(t)$; siccome $f(t) \geq t$ la seconda diseguaglianza implica $x \geq t$. □

Osservazione 8.5. È importante osservare che nella dimostrazione del Teorema 8.4 non abbiamo fatto uso né dell'assioma della scelta, né del Lemma di Zorn. D'altra parte, utilizzando il Lemma di Zorn la dimostrazione di 8.4 si sarebbe ridotta a poche righe, essendo ogni elemento massimale di X necessariamente un punto fisso per f.

Lemma 8.6. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato e sia* $\mathcal{X}$ *l'insieme di tutte le catene in* X *ordinato per inclusione. Allora l'insieme ordinato* $(\mathcal{X}, \subseteq)$ *è strettamente induttivo.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ una catena e consideriamo il sottoinsieme di X

$$E = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

Se $x, y \in E$ allora esistono due catene $H, K \in \mathcal{H}$ tali che $x \in H$ e $y \in K$. Poiché $\mathcal{H}$ è una catena di $\mathcal{X}$ si ha $H \subseteq K$ oppure $K \subseteq H$; se ad esempio $H \subset K$ allora $x, y \in K$ e, dato che K è una catena di X si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Questo prova che E è una catena di X che si verifica immediatamente essere l'estremo superiore di $\mathcal{H}$. □

Corollario 8.7 (Lemma di Kuratowski). *In un insieme ordinato ogni catena è contenuta in una catena massimale.*

Dimostrazione. Sia C una catena in un insieme ordinato X e denotiamo con $(\mathcal{X}, \subseteq)$ la famiglia di tutte le catene in X che contengono C, con l'ordinamento dato dall'inclusione. Per il Lemma 8.6, l'insieme $\mathcal{X}$ è non vuoto e strettamente induttivo. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{X}$ non abbia elementi massimali, allora per ogni $A \in \mathcal{X}$ l'insieme $S_A = \{B \in \mathcal{X} \mid A \subseteq B,\ A \neq B\}$ è non vuoto e per l'assioma della scelta esiste un'applicazione $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ tale che $A \subseteq f(A)$ e $A \neq f(A)$ per ogni A, in contraddizione con il Teorema 8.4. □

Corollario 8.8 (Lemma di Zorn). *Ogni insieme ordinato, non vuoto e induttivo possiede elementi massimali.*

Dimostrazione. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, non vuoto e induttivo. Per il Corollario 8.7 esiste una catena massimale $C \subset X$. Sia m un maggiorante di C e dimostriamo che m è un elemento massimale di X. Se così non fosse esisterebbe $x \in X$ con $x > m$ e $C \cup \{x\}$ sarebbe una catena strettamente maggiore di C. □

Esercizi

8.2 (♡). Sia X uno spazio topologico infinito. Indichiamo con A l'anello delle funzioni continue $f\colon X \to \mathbb{R}$ e con $D \subset A$ il sottoinsieme delle funzioni continue che si annullano in infiniti punti. Dimostrare che esistono ideali primi di A che sono contenuti in D.

8.3 (∗). Kilgore Trout è riuscito a pubblicare il suo ultimo romanzo di fantascienza. Vi si narrano le avventure del dottor Zorn, ministro dei trasporti di un universo parallelo: un universo che contiene infiniti pianeti abitati e collegati tra loro con un efficiente sistema di navette spaziali. Ogni navetta percorre, sia in andata che in ritorno, una rotta ben definita che unisce direttamente due pianeti. Tale sistema permette di spostarsi da un qualsiasi pianeta ad un altro con un numero finito di viaggi interplanetari ed un numero finito di scali intermedi.

I tagli della legge finanziaria costringono il dottor Zorn a cancellare alcune rotte in modo tale che, per ogni coppia di pianeti, esista un unico modo di spostarsi dall'uno all'altro senza prendere più di una volta la stessa navetta.

- Se i pianeti fossero in numero finito - disse Billy - allora il mio cervello terrestre troverebbe certamente una soluzione; ma così più ci penso e meno ne capisco.

Nonostante le perplessità del povero Billy il dottor Zorn riesce a portare a termine il lavoro. Secondo voi, come ha fatto?

8.3 Il teorema di Zermelo

Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato e $S \subset X$ un sottoinsieme: un elemento $s \in X$ si dice il minimo di S, ed in tal caso si scrive $s = \min(S)$, se $s \in S$ e se $s \leq x$ per ogni $x \in S$. Per la proprietà antisimmetrica degli ordinamenti, se esiste il minimo di un sottoinsieme, allora esso è unico.

Definizione 8.9. *Una relazione di ordine su di un insieme X si dice un **buon ordinamento** se ogni sottoinsieme non vuoto A di X possiede minimo, cioè se per ogni $\emptyset \neq A \subset X$ esiste $a \in A$ tale che $a \leq b$ per ogni $b \in A$. Un insieme dotato di un buon ordinamento si dice **bene ordinato**.*

Ad esempio, il principio del minimo intero afferma che l'insieme dei numeri naturali, con l'usuale relazione di ordine, è un insieme bene ordinato.

Denotiamo con $\mathcal{P}(X)'$ la famiglia dei sottoinsiemi non vuoti di X. Se X posside un buon ordinamento, allora è definita l'applicazione di *minimo*

$$\min\colon \mathcal{P}(X)' \to X$$

che gode delle proprietà:

1. $\min(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(X)'$.
2. $\min(A \cup B) = \min(\min(A), \min(B))$ per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)'$.

Dall'applicazione di minimo si può risalire alla relazione di ordine: dati due elementi x, y vale $x \leq y$ se e solo se $x = \min(x, y)$, mentre vale $y \leq x$ se e solo se $y = \min(x, y)$. In particolare ogni insieme X bene ordinato è anche totalmente ordinato.

Lemma 8.10. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\lambda\colon \mathcal{P}(X)' \to X$ un'applicazione tale che:*

1. *$\lambda(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(X)'$.*
2. *$\lambda(A \cup B) = \lambda(\lambda(A), \lambda(B))$ per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)'$.*

Allora esiste un unico buon ordinamento su X per il quale λ è l'applicazione minimo.

Dimostrazione. Poniamo $x \leq y$ se $x = \lambda(x, y)$: verifichiamo che $(X, \leq)$ è un insieme bene ordinato e che $\lambda = \min$. Vale $\lambda(x, x) = \lambda(x) = x$ per ogni $x \in X$ e quindi $\leq$ è riflessiva. Se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora per definizione $x = \lambda(x, y)$ e $y = \lambda(x, y)$ da cui segue $x = y$. Se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora

$$x = \lambda(x, y) = \lambda(\lambda(x), \lambda(y, z)) = \lambda(x, y, z) = \lambda(\lambda(x, y), \lambda(z)) = \lambda(x, z)$$

da cui segue $x \leq z$. Infine, se $A \subset X$ è un qualsiasi sottoinsieme non vuoto e $a = \lambda(A) \in A$, allora per ogni $x \in A$ possiamo scrivere $A = \{x\} \cup A$ e quindi

$$a = \lambda(A) = \lambda(A \cup \{x\}) = \lambda(\lambda(A), \lambda(x)) = \lambda(a, x)$$

che implica $a \leq x$. □

Teorema 8.11. *Per ogni insieme X esiste un'applicazione $\lambda\colon \mathcal{P}(X)' \to X$ tale che:*

1. *$\lambda(A) \in A$ per ogni $A \in \mathcal{P}(X)'$.*
2. *$\lambda(A \cup B) = \lambda(\lambda(A), \lambda(B))$ per ogni $A, B \in \mathcal{P}(X)'$.*

Dimostrazione. Se $X = \emptyset$ non c'è nulla da dimostrare. Se $X \neq \emptyset$ consideriamo la famiglia $\mathcal{A}$ formata da tutte le coppie (E, λ_E) con E sottoinsieme non vuoto di X e $\lambda_E\colon \mathcal{P}(E)' \to X$ che soddisfa le condizioni 1 e 2. Se $x \in X$ e $\lambda_x\colon \{x\} \to X$ denota l'inclusione, allora $(x, \lambda_x) \in \mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{A}$ non è vuoto. Poniamo su $\mathcal{A}$ la relazione di ordine $(E, \lambda_E) \leq (F, \lambda_F)$ se e solo se $E \subset F$ e $\lambda_E(E \cap A) = \lambda_F(A)$ per ogni sottoinsieme $A \subset F$ tale che $A \cap E \neq \emptyset$.

Proviamo, con l'aiuto del Lemma di Zorn, che $\mathcal{A}$ possiede elementi massimali. Sia $\mathcal{C}$ una catena in $\mathcal{A}$ e definiamo la coppia (C, λ_C) nel modo seguente:

$$C = \bigcup \{E \mid (E, \lambda_E) \in \mathcal{C}\}$$

$$\lambda_C(A) = \lambda_E(A \cap E) \text{ per qualche } (E, \lambda_E) \in \mathcal{C} \text{ tale che } A \cap E \neq \emptyset.$$

Lasciamo al lettore il semplice esercizio di dimostrare che $(C, \lambda_C) \in \mathcal{A}$ è un maggiorante della catena $\mathcal{C}$.

Sia dunque (M, λ_M) un elemento massimale e supponiamo per assurdo che esista $m \in X - M$. Possiamo allora considerare la coppia (N, λ_N), dove $N = M \cup \{m\}$, $\lambda_N(m) = m$ e $\lambda_N(A) = \lambda_M(A \cap M)$ per ogni sottoinsieme A di N diverso da $\emptyset$ e $\{m\}$. Dato che $(M, \lambda_M) < (N, \lambda_N)$ abbiamo contraddetto la massimalità di (M, λ_M). □

Si noti che la condizione 1 del Teorema 8.11 è del tutto equivalente all'assioma della scelta.

Corollario 8.12 (Teorema di Zermelo). *Sia X un insieme non vuoto. Allora esiste un buon ordinamento $\leq$ su X tale che per ogni $x \in X$ l'insieme $\{y \in X \mid y < x\}$ ha cardinalità strettamente minore di X.*

Dimostrazione. Per il Teorema 8.11 ed il Lemma 8.10 esiste su X un buon ordinamento $\preceq$. Per ogni $x \in X$ indichiamo con $L(x) = \{z \in X \mid z \prec x\}$. Se per ogni x la cardinalità di $L(x)$ è strettamente minore della cardinalità di X basta prendere $\leq$ uguale a $\preceq$. Altrimenti indichiamo con $a \in X$ il minimo del sottoinsieme non vuoto

$$\{x \in X \mid |L(x)| = |X|\}.$$

Per costruzione l'insieme $L(a)$ ha la stessa cardinalità di X e $\preceq$ induce su $L(a)$ un buon ordinamento con l'ulteriore proprietà che per ogni $x \in L(a)$ vale $|L(x)| < |L(a)|$. Basta quindi prendere una qualsiasi applicazione bigettiva $f\colon X \to L(a)$ e definire

$$x \leq y \quad \text{se e solo se} \quad f(x) \preceq f(y).$$

□

Esercizi

Nei seguenti esercizi denoteremo con $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi di $\mathbb{R}^2$ che hanno la cardinalità del continuo, ossia $C \in \mathcal{C}$ se e solo se C è chiuso e $|C| = |\mathbb{R}|$.

8.4. Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un chiuso connesso. Dimostrare che se K contiene almeno due punti, allora $K \in \mathcal{C}$.

8.5. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto sconnesso per archi. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - A \in \mathcal{C}$.

8.6. Dimostrare che se $C, D \in \mathcal{C}$ e $C \cup D = \mathbb{R}^2$, allora $C \cap D \in \mathcal{C}$ (sugg.: se nessuno dei due chiusi è contenuto nell'altro usare l'Esercizio 8.5).

8.7. Dimostrare che $\mathcal{C}$ ha la cardinalità del continuo (sugg.: $\mathbb{R}^2$ è uno spazio a base numerabile).

8.8 (∗). Fissiamo un ordinamento $\leq$ su $\mathcal{C}$ che soddisfa le condizioni del teorema di Zermelo. Diremo che $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ è un segmento iniziale se per ogni $x \in \mathcal{U}$ ed ogni $y \leq x$ vale $y \in \mathcal{U}$. Indichiamo con $\mathbf{A}$ l'insieme formato dalle triple $(\mathcal{U}, f, g)$, dove $\mathcal{U}$ è un segmento iniziale di $\mathcal{C}$ e $f, g \colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ sono applicazioni tali che:

1. $f(\mathcal{U}) \cap g(\mathcal{U}) = \emptyset$.
2. Per ogni chiuso $C \in \mathcal{U}$ vale $f(C), g(C) \in C$.

Dimostrare che $\mathbf{A}$, ordinato per estensione, possiede elementi massimali. Usare il risultato dell'Esercizio 8.7 per dedurre che esistono due sottoinsiemi disgiunti $A, B \subset \mathbb{R}^2$ tali che per ogni $C \in \mathcal{C}$ vale $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap B \neq \emptyset$.

8.9. Utlilizzare i risultati degli Esercizi 8.8, 8.6 e 8.4 per dimostrare che esiste un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ denso, connesso e tale che ogni cammino continuo $\alpha \colon [0, 1] \to A$ è costante.

Osservazione 8.13. Chi conosce la teoria della misura può dimostrare che i sottoinsiemi A, B dell'Esercizio 8.8 non sono misurabili secondo Lebesgue.

8.10 (∗). Sia X un insieme infinito. Si dimostri che esiste una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:

1. $|A| = |X|$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.
2. $|A \cap B| < |X|$ per ogni $A, B \in \mathcal{A}$, $A \neq B$.
3. $|X| < |\mathcal{A}|$.

(Sugg.: considerare una famiglia massimale tra quelle di cardinalità maggiore od uguale a quella di X e che soddisfano le precedenti condizioni 1 e 2.)

8.11 (∗). Dimostrare che ogni insieme possiede una topologia che lo rende uno spazio topologico compatto di Hausdorff.

8.4 Ultrafiltri

Questa sezione può essere omessa sia ad una prima che ad una seconda lettura del libro: gli argomenti trattati devono essere considerati esclusivamente come folklore topologico e curioso esercizio.

Il concetto di ultrafiltro è stato introdotto da Henri Cartan nel 1937 e trova applicazioni in topologia, logica e teoria della misura. Tra l'altro è stato utilizzato da Gödel nella sua "dimostrazione" dell'esistenza di Dio!

Per la precisione, la definizione che daremo non è quella standard, ma è comunque equivalente ad essa.

Definizione 8.14. *Siano X un insieme e $\mathcal{U}$ una famiglia non vuota di sottoinsiemi di X. Diremo che $\mathcal{U}$ è un* ***ultrafiltro*** *in X se valgono le seguenti quattro condizioni:*

1. *$A \neq \emptyset$ per ogni $A \in \mathcal{U}$.*
2. *Se $A \subset B$ sono sottoinsiemi di X e $A \in \mathcal{U}$, allora $B \in \mathcal{U}$.*
3. *Se $A, B \in \mathcal{U}$, allora $A \cap B \in \mathcal{U}$.*
4. *Se $U \subset X$ e $A \cap U \neq \emptyset$ per ogni $A \in \mathcal{U}$, allora $U \in \mathcal{U}$.*

Lemma 8.15. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro in un insieme X. Allora per ogni sottoinsieme $A \subset X$ vale $A \in \mathcal{U}$ oppure $X - A \in \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $A \notin \mathcal{U}$ e $X - A \notin \mathcal{U}$. Per la condizione 4 esistono $C, D \in \mathcal{U}$ tali che $A \cap C = \emptyset$, $D \cap (X - A) = \emptyset$. Allora

$$C \cap D = (C \cap D) \cap X = (C \cap D) \cap (A \cup (X - A)) = \emptyset$$

in contraddizione con le condizioni 1 e 3 della Definizione 8.14. □

Teorema 8.16 (Lemma degli ultrafiltri). *Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di un insieme X. Allora esiste un ultrafiltro che contiene $\mathcal{A}$ se e soltanto se ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{A}$ ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione. Una implicazione è banale. Viceversa, supponiamo che per ogni $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ vale $A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$, allora la famiglia $\mathcal{F}$ di tutti i sottoinsiemi che contengono una intersezione finita di elementi di $\mathcal{A}$ soddisfa le condizioni 1, 2 e 3 della Definizione 8.14.

Sia $\mathbf{U}$ la collezione di tutte le sottofamiglie $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ che contengono $\mathcal{F}$ e che soddisfano le condizioni 1, 2 e 3 della Definizione 8.14. La collezione $\mathbf{U}$ è ordinata per inclusione e per il lemma di Zorn possiede elementi massimali. Sia $\mathcal{U}$ un elemento massimale di $\mathbf{U}$ e dimostriamo che soddisfa la condizione 4 della Definizione 8.14.

Sia A un sottoinsieme di X, se $A \cap U \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathcal{U}$, allora la famiglia dei sottoinsiemi di X che contengono $A \cap U$ per qualche $U \in \mathcal{U}$ appartiene alla collezione $\mathbf{U}$ e per la massimalità di $\mathcal{U}$ vale $A \in \mathcal{U}$.

□

Prima di passare agli esercizi, che suggeriamo di svolgere nella sequenza proposta, abbiamo bisogno della definizione di convergenza di un ultrafiltro.

Definizione 8.17. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro in uno spazio topologico X. Diremo che $\mathcal{U}$ converge ad un punto $x \in X$ se ogni intorno di x appartiene a $\mathcal{U}$.*

Esercizi

8.12. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di uno spazio topologico che non ammette alcun sottoricoprimento finito. Dimostrare che esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che $\mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

8.13. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro in uno spazio topologico che non converge ad alcun punto. Dimostrare che la famiglia degli aperti che non appartengono a $\mathcal{U}$ è un ricoprimento che non possiede sottoricoprimenti finiti.

8.14. Dimostrare che uno spazio topologico è compatto se e soltanto se ogni ultrafiltro in esso è convergente.

8.15. Siano $\mathcal{P}$ una prebase di uno spazio topologico X e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro in X. Dimostrare che $\mathcal{U}$ converge ad x se e solo se $\{P \in \mathcal{P} \mid x \in P\} \subset \mathcal{U}$.

8.16. Siano $\mathcal{P}$ una prebase di uno spazio topologico X ed $\mathcal{U}$ un ultrafiltro in X. Supponiamo che $\mathcal{U}$ non converga ad alcun punto di X. Dimostrare che $\mathcal{P} - \mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X che non ammette alcun sottoricoprimento finito.

8.17. Utilizzare i risultati degli esercizi precedenti per una dimostrazione alternativa del teorema di Alexander.

8.18. Siano $\mathcal{U}$ un ultrafiltro in un insieme X, $f\colon X \to Y$ un'applicazione surgettiva e denotiamo $f(\mathcal{U}) = \{f(A) \mid A \in \mathcal{U}\}$. Dimostrare che $f(\mathcal{U})$ è un ultrafiltro in Y, che $f(\mathcal{U}) = \{A \subset Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{U}\}$ e che per ogni ultrafiltro $\mathcal{V}$ in Y esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ in X tale che $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

8.19. Sia $X = \prod_i X_i$ un prodotto di spazi topologici e siano $p_i\colon X \to X_i$ le proiezioni. Dimostrare che un ultrafiltro $\mathcal{U}$ in X è convergente se e solo se $p_i(\mathcal{U})$ è convergente per ogni i.

8.20. Utilizzare i risultati degli esercizi 8.14 e 8.19 per dimostrare il teorema di Tyconoff.

Attenzione: nella dimostrazione del teorema di Tyconoff proposta nell'Esercizio 8.20, il lemma degli ultrafiltri non sostituisce completamente l'assioma della scelta, il quale è necessario, ad esempio, per risolvere l'Esercizio 8.19.

8.5 La topologia compatta-aperta

Dati due spazi topologici X, Y denotiamo con $C(X, Y)$ l'insieme di tutte le applicazioni continue da X in Y. La **topologia compatta-aperta** su $C(X, Y)$ è per definizione la topologia che ha come prebase tutti i sottoinsiemi

$$W(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\},$$

al variare di K tra i compatti di X e di U tra gli aperti di Y.

In questa sezione mostreremo che se X è localmente compatto di Hausdorff, allora la topologia compatta-aperta su $C(X, Y)$ ha buone proprietà.

Lemma 8.18. *Siano X, Y due spazi topologici, con X localmente compatto di Hausdorff, e sia $\mathcal{P}$ una prebase della topologia su Y. Allora la famiglia dei sottoinsiemi $W(K,U)$, al variare di K tra i compatti di X e di U in $\mathcal{P}$, è una prebase della topologia compatta-aperta su $C(X,Y)$.*

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che per ogni $f\colon X \to Y$ continua, per ogni compatto $K \subset X$ e per ogni aperto $U \subset Y$ tale che $f(K) \subset U$, esistono dei compatti $K_1, \ldots, K_n$ e degli aperti $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{P}$ tali che

$$f \in W(K_1, U_1) \cap \cdots \cap W(K_n, U_n) \subset W(K,U).$$

Sia $\mathcal{B}$ la famiglia delle intersezioni finite di aperti della prebase $\mathcal{P}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base di aperti di Y e, siccome $f(K)$ è compatto, possiamo trovare $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{B}$ tali che

$$f(K) \subset V_1 \cup \cdots \cup V_m \subset U.$$

Ogni punto $x \in K$ possiede un intorno compatto K_x tale che $f(K_x) \subset V_i$ per qualche i. Siccome la famiglia delle parti interne dei K_x è un ricoprimento aperto di K, esiste un sottoinsieme finito $S \subset K$ tale che $K \subset \cup\{K_x \mid x \in S\}$. Se denotiamo, per ogni $i = 1, \ldots, m$, con

$$K_i = \cup\{K_x \mid x \in S,\ f(K_x) \subset V_i\},$$

si ha che ogni K_i è compatto e vale

$$f \in W(K_1, V_1) \cap \cdots \cap W(K_m, V_m) \subset W(K,U).$$

Per ogni indice i esistono $U_{i1}, \ldots, U_{is} \in \mathcal{P}$ tali che $V_i = U_{i1} \cap \cdots \cap U_{is}$ e basta usare l'ovvia relazione

$$W(K_i, U_{i1}) \cap \cdots \cap W(K_i, U_{is}) = W(K_i, V_i)$$

per concludere la dimostrazione. □

Teorema 8.19 (Legge esponenziale). *Siano X, Y, Z spazi topologici, con X, Y localmente compatti di Hausdorff, e dotiamo tutti gli spazi di applicazioni continue della topologia compatta-aperta. Allora esiste un omeomorfismo naturale*

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y,Z)).$$

Dimostrazione. Per evitare ambiguità, per ogni $f\colon X \times Y \to Z$ continua, denotiamo

$$\hat{f}\colon X \to C(Y,Z), \qquad \hat{f}(x)(y) = f(x,y).$$

La dimostrazione del teorema si articola in vari passaggi.

[1] Se f è continua, allora anche $\hat{f}$ è continua. Bisogna dimostrare che per ogni elemento $W(K,U)$ della prebase di $C(Y,Z)$ e per ogni $x \in X$ tale che

$\hat{f}(x) \in W(K,U)$ esiste un aperto $A \subset X$ tale che $x \in A$ e $\hat{f}(A) \subset W(K,U)$. Dire che $\hat{f}(x) \in W(K,U)$ equivale a dire che $f(\{x\} \times K) \subset U$; per il teorema di Wallace esiste un aperto A tale che $x \in A$ e $A \times K \subset f^{-1}(U)$, ossia $\hat{f}(A) \subset W(K,U)$.

[2] L'applicazione $\hat{}\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$ è bigettiva. L'iniettività è evidente. Bisogna dimostrare che per ogni $g\colon X \to C(Y,Z)$ continua, l'applicazione

$$f\colon X \times Y \to Z, \qquad f(x,y) = g(x)(y),$$

è continua. Siano $U \subset Z$ un aperto e $(x,y) \in f^{-1}(U)$; l'applicazione $g(x)$ è continua e Y è localmente compatto di Hausdorff. Ne segue che esiste un intorno compatto B di y tale che $g(x)(B) \subset U$, e quindi $g(x) \in W(B,U)$. L'applicazione g è continua e quindi esiste un intorno A di x in X tale che $g(A) \subset W(B,U)$ e questo implica che $f(A \times B) \subset U$.

[3] L'applicazione $\hat{}\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z))$ è un omeomorfismo. Per il Lemma 8.18, una prebase della topologia compatta-aperta su $C(X, C(Y,Z))$ è data dagli aperti $W(H, W(K,U))$, al variare di H e K tra i compatti di X e Y rispettivamente e di U tra gli aperti di Z. Dato che l'applicazione $\hat{}$ identifica $W(H \times K, U)$ con $W(H, W(K,U))$, ne segue che $\hat{}$ è continua. Per dimostrare che è un omeomorfismo basta provare che gli aperti $W(H \times K, U)$ formano una prebase della topologia compatta aperta su $C(X \times Y, Z)$. Siano dunque $T \subset X \times Y$ un compatto e $f \in W(T,U)$. Siccome X e Y sono localmente compatti di Hausdorff, per ogni $t \in T$ esistono due compatti $K_t \subset X$ e $H_t \subset Y$ tali che $f(K_t \times H_t) \subset U$ e t è un punto interno di $K_t \times H_t$. Passando ad un sottoricoprimento finito troviamo due successioni finite di compatti $K_1, \ldots, K_n \subset X$, $H_1, \ldots, H_n \subset Y$ tali che

$$T \subset \bigcup_i K_i \times H_i, \qquad f(K_i \times H_i) \subset U,$$

e dunque

$$f \in W(K_1 \times H_1, U) \cap \cdots \cap W(K_n \times H_n, U) \subset W(T,U).$$

□

Esercizi

Salvo avviso contrario, nei prossimi esercizi tutti gli spazi di applicazioni continue saranno dotati della topologia compatta-aperta.

8.21. Siano X, Y, Z spazi topologici, con X localmente compatto di Hausdorff. Dimostrare che $C(X, Y \times Z)$ è omeomorfo a $C(X,Y) \times C(X,Z)$.

8.22. Siano X, Y spazi topologici, con X localmente compatto di Hausdorff. Dimostrare che l'applicazione

$$C(X,Y) \times X \to Y, \qquad (f,x) \mapsto f(x),$$

è continua.

8.23. Sia X un insieme finito di n punti dotato della topologia discreta. Dimostrare che lo spazio $C(X,Y)$ è omeomorfo al prodotto Y^n.

8.24. Siano X, Y, Z, W spazi topologici. Dimostrare che per ogni coppia di applicazioni continue $F\colon Z \to X$, $G\colon Y \to W$, l'applicazione

$$C(X,Y) \to C(Z,W), \qquad f \mapsto G \circ f \circ F,$$

è continua.

8.25. Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff. Provare che la topologia compatta-aperta induce una struttura di gruppo topologico su $\mathrm{Omeo}(X)$.

8.26 (∗). Provare che la topologia compatta-aperta induce una struttura di gruppo topologico su $\mathrm{Omeo}(\mathbb{R})$.

8.27 (∗). Siano X uno spazio compatto di Hausdorff e (Y,d) uno spazio metrico. Provare che la distanza (vedi Teorema 6.51)

$$\delta\colon C(X,Y) \times C(X,Y) \to \mathbb{R}, \qquad \delta(f,g) = \max\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\},$$

induce la topologia compatta-aperta.

8.6 Spazi topologici Noetheriani

La prossima proposizione è molto usata in geometria algebrica ed algebra commutativa.

Proposizione 8.20. *Per un insieme ordinato $(X, \leq)$ sono equivalenti:*

1. *Ogni sottoinsieme non vuoto di X possiede elementi massimali.*
2. *Ogni catena ascendente numerabile $\{x_1 \leq x_2 \leq \cdots\} \subset X$ è stazionaria. (Stazionaria significa che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $x_n = x_m$ per ogni $n \geq m$.)*

Dimostrazione. [1 ⇒ 2] Ogni catena ascendente numerabile $\{x_1 \leq x_2 \leq \cdots\}$ possiede un elemento massimale, diciamo x_m, e necessariamente $x_n = x_m$ per ogni $n \geq m$.

[2 ⇒ 1] Si assuma per assurdo che esista un sottoinsieme non vuoto $S \subset X$ senza elementi massimali, ossia che $\{y \in S \mid y > x\} \neq \emptyset$ per ogni $x \in S$. Per l'assioma della scelta esiste un'applicazione $f\colon S \to S$ tale che $f(x) > x$ per ogni $x \in S$. Sia $x_0 \in S$, allora la catena $\{x_n = f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è ascendente e non stazionaria. □

Definizione 8.21. *Uno spazio topologico si dice* ***Noetheriano*** *se ogni famiglia non vuota di aperti in esso possiede un elemento massimale rispetto all'inclusione.*

Per la Proposizione 8.20 uno spazio topologico è Noetheriano se e solo se ogni catena numerabile ascendente di aperti è stazionaria.

Esempio 8.22. Per ogni campo $\mathbb{K}$, lo spazio affine $\mathbb{K}^n$ dotato della topologia di Zariski (Esempio 3.11) è uno spazio topologico Noetheriano. La dimostrazione è una semplice conseguenza del teorema della base di Hilbert[1] ed è quindi rimandata ai corsi di geometria algebrica e/o algebra commutativa.

Lemma 8.23. *Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora:*

1. *X è compatto.*
2. *Ogni immagine continua di X è Noetheriana.*
3. *Ogni sottospazio topologico di X è Noetheriano.*

Dimostrazione. [1] Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento di X; per trovare un sottoricoprimento finito basta prendere un elemento massimale nella famiglia delle unioni finite di aperti di $\mathcal{U}$.

[2] È banale.

[3] Sia $Y \subset X$ un sottospazio. Denotiamo con $\mathcal{T}(X)$ e $\mathcal{T}(Y)$ le famiglie di aperti di X e Y rispettivamente e con

$$r\colon \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}(Y), \qquad r(U) = U \cap Y,$$

l'applicazione di restrizione. Siano $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}(Y)$ una collezione non vuota di aperti ed $U \in \mathcal{T}(X)$ un elemento massimale della famiglia $r^{-1}(\mathcal{F})$; proviamo che $r(U) = U \cap Y$ è massimale in $\mathcal{F}$. Sia V un aperto di X tale che $r(U) \subset r(V)$ e $r(V) \in \mathcal{F}$; allora $U \cup V \in r^{-1}(\mathcal{F})$, per la massimalità di U vale $V \subset U$ e quindi $r(U) = r(V)$. □

Definizione 8.24. *Uno spazio topologico si dice **irriducibile** se ogni coppia di aperti non vuoti ha intersezione non vuota. Equivalentemente, uno spazio è irriducibile se non è unione finita di chiusi propri. Un sottospazio di uno spazio topologico si dice irriducibile se è irriducibile per la topologia indotta.*

Ad esempio l'insieme vuoto, i punti e, più in generale, qualsiasi spazio topologico dotato della topologia indiscreta è irriducibile.

Lemma 8.25. *Siano X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un sottospazio irriducibile. Allora:*

1. *La chiusura topologica $\overline{Y}$ è irriducibile.*
2. *Se $U \subset X$ è un aperto, allora $Y \cap U$ è irriducibile.*
3. *Se $f\colon X \to Z$ è continua, allora $f(Y)$ è irriducibile.*

Dimostrazione. Facile esercizio. □

[1] **Teorema della base di Hilbert.** *Ogni famiglia non vuota di ideali dell'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ possiede elementi massimali rispetto all'inclusione.*

Definizione 8.26. *Le **componenti irriducibili** di uno spazio topologico sono gli elementi massimali della famiglia dei chiusi irriducibili, ordinata rispetto all'inclusione.*

Notiamo che la famiglia dei chiusi irriducibili non è mai vuota perché contiene l'insieme vuoto. L'Esercizio 8.34 mostra che ogni spazio topologico è unione delle sue componenti irriducibili. Nel prossimo teorema analizzeremo questo fatto nel caso Noetheriano.

Teorema 8.27. *Sia X uno spazio topologico Noetheriano. Allora:*

1. *X possiede un numero finito di componenti irriducibili $X_1, \ldots, X_n$.*
2. *$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$.*
3. *Per ogni indice i, la componente X_i non è contenuta nell'unione delle componenti X_j, per $j \neq i$.*

Dimostrazione. Dimostriamo per cominciare che ogni chiuso di X si può scrivere come unione finita di chiusi irriducibili; a tal fine consideriamo la famiglia $\mathcal{C}$ di tutti i chiusi di X e la sottofamiglia $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ dei chiusi che sono unioni finite di chiusi irriducibili. Se per assurdo $\mathcal{F} \neq \mathcal{C}$, allora esiste $Z \in \mathcal{C} - \mathcal{F}$ minimale; poiché $Z \notin \mathcal{F}$, il chiuso Z non è irriducibile e quindi esistono due chiusi propri Z_1, Z_2 tali che $Z = Z_1 \cup Z_2$. Per la minimalità di Z si ha che $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ e quindi anche $Z \in \mathcal{F}$.

Possiamo quindi scrivere $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, dove ogni X_i è un chiuso irriducibile; a meno di eliminare alcuni chiusi superflui si può supporre che la condizione 3 sia soddisfatta. Dimostriamo che $X_1, \ldots, X_n$ sono tutte e sole le componenti irriducibili di X.

Sia $Z \subset X$ un chiuso irriducibile, allora $Z = (Z \cap X_1) \cup \cdots \cup (Z \cap X_n)$ e quindi i chiusi $Z \cap X_i$ non possono essere tutti propri, ossia esiste un indice i tale che $Z \subset X_i$. Lo stesso vale se Z è una componente irriducibile e quindi, tenendo presente la massimalità, deduciamo che ogni componente irriducibile di X è uguale ad X_i per qualche i.

Viceversa, se qualche X_i non è una componente irriducibile, allora esiste una inclusione propria $X_i \subset Z$ con Z irriducibile; per l'argomento precedente Z è contenuto in qualche X_j in contraddizione con la condizione 3. $\square$

Esercizi

8.28. Dimostrare che, in ogni insieme, la topologia cofinita è Noetheriana.

8.29. Dimostrare che unione finita di spazi topologici Noetheriani è Noetheriana.

8.30. Dimostrare che in uno spazio topologico di Hausdorff ogni sottospazio irriducibile non vuoto è formato da un solo punto.

8.31. Provare che se $\mathbb{K}$ è un campo infinito, allora per ogni $n > 0$ lo spazio $\mathbb{K}^n$, dotato della topologia di Zariski, è irriducibile.

8.32 (♡). Siano dati due spazi topologici irriducibili X, Y ed una topologia sul prodotto cartesiano $X \times Y$ tale che, per ogni $(x_0, y_0) \in X \times Y$, le inclusioni

$$X \to X \times Y, \qquad x \mapsto (x, y_0),$$

e

$$Y \to X \times Y, \qquad y \mapsto (x_0, y),$$

sono continue. Dimostrare che $X \times Y$ è irriducibile.

8.33. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua ed aperta. Dimostrare che se le fibre di f sono irriducibili e $Z \subset Y$ è irriducibile, allora $f^{-1}(Z)$ è irriducibile.

8.34. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia dei chiusi irriducibili di uno spazio topologico X ordinata per inclusione. Provare che ogni punto di X è contenuto in almeno un elemento massimale di $\mathcal{C}$. (Sugg.: lemma di Zorn e Lemma 8.25).

8.7 Un lungo esercizio: il teorema di estensione di Tietze

Ricordiamo che uno spazio topologico si dice normale se è di Hausdorff e se chiusi disgiunti hanno intorni disgiunti. Gli esercizi di questa sezione, svolti nella sequenza proposta, forniranno una dimostrazione dei seguenti risultati.

Lemma 8.28 (di Urysohn). *Siano A, C chiusi disgiunti in uno spazio normale X. Esiste allora una funzione continua $f\colon X \to [0,1]$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x \in A$ e $f(x) = 1$ per ogni $x \in C$.*

Teorema 8.29 (di estensione di Tietze). *Siano B un chiuso in uno spazio normale X, $J \subset \mathbb{R}$ un sottospazio convesso e $f\colon B \to J$ una funzione continua. Esiste allora $g\colon X \to J$ continua tale che $g(x) = f(x)$ per ogni $x \in B$.*

Per gli spazi metrici il lemma di Urysohn è del tutto banale: basta ripetere il ragionamento fatto nella dimostrazione della Proposizione 7.28.

Notiamo che il Lemma 8.28 è un caso particolare del Teorema 8.29 con $J = [0,1]$ e $B = A \cup C$. La dimostrazione classica del Teorema 8.29, per la quale rimandiamo il lettore a [Mu00, Du66], utilizza il lemma di Urysohn e la completezza dello spazio $BC(X, \mathbb{R})$ delle funzioni reali continue e limitate su X.

Esercizi

8.35. Siano $f\colon B \to [0,1]$ un'applicazione continua, $S \subset [0,1]$ un sottoinsieme denso e per ogni $s \in S$ denotiamo $B(s) = \{x \in B \mid f(x) < s\}$. Dimostrare che per ogni $x \in B$ vale

$$\begin{cases} f(x) = \inf\{s \in S \mid x \in B(s)\} & \text{se } x \in \cup\{B(s) \mid s \in S\} \\ f(x) = 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

8.36 (♡). Siano X uno spazio topologico e $S \subset [0,1]$ un sottoinsieme denso. Supponiamo che per ogni $s \in S$ sia dato un aperto $X(s) \subset X$ in modo tale che, se $s, t \in S$ e $s < t$, allora $\overline{X(s)} \subset X(t)$. Definiamo un'applicazione $g\colon X \to [0,1]$ ponendo

$$\begin{cases} g(x) = \inf\{s \in S \mid x \in X(s)\} & \text{se } x \in \cup\{X(s) \mid s \in S\} \\ g(x) = 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che g è continua.

8.37 (♡). Siano A, B, C chiusi di uno spazio normale X e $f\colon B \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Si supponga che $A \cap C = \emptyset$ e che esistano due numeri reali $a < c$ tali che:

$$A \cap B \subset \{x \in B \mid f(x) \leq a\}, \qquad C \cap B \subset \{x \in B \mid f(x) \geq c\}.$$

Dimostrare che per ogni $b \in \,]a, c[$ esistono due aperti *disgiunti* $U, V \subset X$ tali che:

$$A \subset U, \qquad U \cap B = \{x \in B \mid f(x) < b\}, \qquad \overline{U} \cap B \subset \{x \in B \mid f(x) \leq b\},$$

$$C \subset V, \qquad V \cap B = \{x \in B \mid f(x) > b\}, \qquad \overline{V} \cap B \subset \{x \in B \mid f(x) \geq b\}.$$

(Sugg.: scrivere $A \cup \{x \in B \mid f(x) < b\}$ e $C \cup \{x \in B \mid f(x) > b\}$ come unioni numerabili di chiusi e usare un argomento simile alla dimostrazione del Teorema 7.33.)

8.38. Sia B un chiuso di uno spazio normale X e sia $f\colon B \to [0,1]$ un'applicazione continua. Indichiamo con $\Delta \subset [0,1]$ l'insieme dei numeri razionali della forma $\frac{r}{2^n}$, con $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq 2^n$. Per ogni $s \in \Delta$ poniamo $B(s) = \{x \in B \mid f(x) < s\}$; scegliamo poi un aperto $X(1) \subset X$ tale che $X(1) \cap B = B(1)$ e denotiamo $X(0) = \emptyset$.

Dimostrare che si può estendere la coppia $X(0), X(1)$ ad una famiglia $\{X(s) \mid s \in \Delta\}$ di sottospazi aperti tali che

$$X(s) \cap B = B(s), \qquad \overline{X(s)} \cap B \subset \{x \in B \mid f(x) \leq s\}$$

per ogni $s \in \Delta$ e, se $s < t$, allora $\overline{X(s)} \subset X(t)$.

Suggerimento: ogni elemento di $\Delta - \{0,1\}$ si scrive in modo unico come $r/2^n$ con $n > 0$ e r intero dispari. Costruire gli aperti $X(r/2^n)$ per induzione su n applicando l'Esercizio 8.37 al dato

$$A = \overline{X\left(\frac{r-1}{2^n}\right)}, \qquad C = X - X\left(\frac{r+1}{2^n}\right),$$

$$a = \frac{r-1}{2^n}, \qquad b = \frac{r}{2^n}, \qquad c = \frac{r+1}{2^n}.$$

8.39. Sia B un chiuso di uno spazio normale X e sia $f\colon B \to [0,1]$ un'applicazione continua. Combinare i risultati degli esercizi 8.38, 8.36 e 8.35 per dimostrare che f si estende ad una funzione continua $g\colon X \to [0,1]$.

8.40. Dimostrare il lemma di Urysohn.

8.41. Siano B un sottoinsieme chiuso di uno spazio normale X, J un aperto convesso di $[0,1]$ e $f\colon B \to J$ un'applicazione continua. Sia $k\colon X \to [0,1]$ una estensione continua di f e denotiamo $A = k^{-1}([0,1] - J)$. Sia $h\colon X \to [0,1]$ continua e tale che $h(A) = 0$, $h(B) = 1$. Sia $j \in J$ un qualsiasi punto e consideriamo la combinazione convessa

$$g(x) = h(x)k(x) + (1 - h(x))j.$$

Dimostrare che $g\colon X \to J$ è una estensione continua di f.

8.42. Dimostrare il Teorema 8.29.

8.43. Siano B un chiuso di uno spazio normale X e $f\colon B \to S^n$ un'applicazione continua. Dimostrare che f si estende ad un intorno aperto di B in X.

8.44 (∗). Sia B un sottospazio chiuso di uno spazio topologico normale X e siano $f\colon X \to S^n$, $F\colon B \times [0,1] \to S^n$ due applicazioni continue tali che $f(x) = F(x,0)$ per ogni $x \in B$. Dimostrare che l'applicazione

$$g\colon B \to S^n, \qquad g(x) = F(x,1),$$

si estende ad un'applicazione continua $X \to S^n$. (Sugg.: estendere F ad un opportuno aperto di $X \times [0,1]$ e poi considerarne la restrizione al grafico di un'opportuna applicazione continua $X \to [0,1]$.)

9

Intermezzo ↷

Gli alberi – Polimattoncini e numeri di Betti – Che cos'è la topologia algebrica

In questo breve capitolo abbasseremo momentaneamente il livello di rigore matematico e di precisione dei concetti per illustrare in modo intuitivo, e a tratti semiserio, alcune idee fondamentali di quella branca della matematica nota come "topologia algebrica".

9.1 Gli alberi

Nel Capitolo 1 abbiamo introdotto la nozione intuitiva di grafo, di grafo connesso e di cammino in un grafo. Chiameremo lunghezza di un cammino il numero di lati che lo compongono. Una **stringa** è un cammino senza nodi ripetuti. In un grafo connesso, due nodi distinti comunque presi sono estremi di una stringa: basta infatti considerare un cammino di lunghezza minima tra quelli che hanno tali nodi come estremi. Diremo che un cammino è chiuso se i suoi nodi estremi coincidono. Chiameremo **ciclo** un cammino chiuso senza lati ripetuti. Un **albero** è un grafo connesso che non contiene cicli.

Definizione 9.1. *Sia Γ un grafo con V nodi e S lati. Il numero $e(\Gamma) = V - S$ si dice **caratteristica di Eulero-Poincaré** di Γ.*

Teorema 9.2. *Sia Γ un grafo connesso, allora $e(\Gamma) \leq 1$ e l'uguaglianza vale se e solo se Γ è un albero.*

Dimostrazione. Se un grafo Γ contiene un ciclo, allora togliendo da Γ un qualsiasi lato del ciclo si ottiene un nuovo grafo Γ' che è ancora connesso e $e(\Gamma) = e(\Gamma')-1$. Questo mostra in particolare che, se un grafo Γ contiene cicli, allora possiamo togliere da esso un numero finito di lati in modo da ottenere un albero Λ. In tal caso $e(\Gamma) < e(\Lambda)$ e per concludere la dimostrazione basta quindi dimostrare che se Γ è un albero allora $e(\Gamma) = 1$.

Dimostriamo per induzione sul numero dei nodi che gli alberi hanno caratteristica di Eulero-Poincaré uguale ad 1; gli alberi con un solo nodo non hanno lati ed in tal caso l'asserto è banalmente dimostrato.

Ogni albero Γ contiene delle stringhe (ad esempio i singoli nodi) e la lunghezza di ogni stringa è limitata dal numero dei lati. Sia H l'insieme dei nodi di una stringa di lunghezza massima contenuta in Γ e sia $v_0 \in H$ un nodo estremo; v_0 è collegato con un lato l_1 a $v_1 \in H$. Affermiamo adesso che l_1 è l'unico lato di Γ passante per v_0: infatti se v_0 fosse collegato ad un nodo u con un lato $l \neq l_1$ si avrebbe o che $u \in H$, ed in tal caso Γ conterrebbe un ciclo, oppure $u \notin H$ ed in tal caso potremmo allungare la stringa aggiungendo il lato l ed il nodo u. In ogni caso giungiamo ad una contraddizione. Dunque, il grafo Γ' ottenuto da Γ togliendo l_1 e v_0 è ancora connesso, non contiene cicli e per l'ipotesi induttiva $e(\Gamma) = e(\Gamma') = 1$. □

Esercizi

9.1. Dimostrare che vale anche il viceversa del Teorema 1.1, cioè che se un grafo connesso possiede al più due nodi di grado dispari allora esso è Euleriano. (Sugg.: la dimostrazione è simile a quella del Teorema 9.2.)

9.2 Polimattoncini e numeri di Betti

Questa sezione contiene alcuni concetti tipici dei corsi avanzati di topologia e può risultare poco comprensibile al lettore meno esperto. Ad ogni modo, il materiale esposto non è propedeutico al resto del libro e la sua omissione non reca alcun danno.

Billy possiede una splendida collezione di mattoncini Lego, di forma parallelepipedale, splendidamente colorati e tutti numerati, dal numero 1 al numero n. Egli dedica molte ore della sua giornata a giocare con i mattoncini e dà sempre sfoggio di creatività nell'unirli assieme fino a formare oggetti $X \subset \mathbb{R}^3$ che chiameremo polimattoncini, ed è talmente soddisfatto delle sue costruzioni che non esita a prendere nota di tutte le posizioni relative dei singoli pezzi per poter ricostruire le sue opere migliori durante i congressi internazionali di optometria.

A seguito di interessanti conversazioni con il signor Čech, Billy ha iniziato a prendere nota, per ogni polimattoncino costruito X, dell'insieme $N_0 \subset \{1, \ldots, n\}$ dei mattoncini utilizzati e dell'insieme $N_1 \subset N_0 \times N_0$ delle coppie (a, b) tali che $a < b$ ed i mattoncini a e b si toccano in almeno un punto. Più in generale, per ogni $i \geq 0$ si denota con N_i la famiglia delle $i+1$-uple $(a_0, a_1, \ldots, a_i) \in N_0^{i+1}$ tali che $a_0 < a_1 < \cdots < a_i$ ed i mattoncini $a_0, \ldots, a_n$ si toccano tutti in almeno un punto.

La ricetta del signor Čech prevede adesso di indicare con C^i lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni $f \colon N_i \to \mathbb{R}$ e di definire, per ogni indice i l'applicazione lineare $d_i \colon C^i \to C^{i+1}$:

$$d_0 f(a, b) = f(b) - f(a), \qquad d_1 f(a, b, c) = f(b, c) - f(a, c) + f(a, b),$$

e più in generale

$$d_i f(a_0, \ldots, a_{i+1}) = \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j f(a_0, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_{i+1}),$$

dove il cappello $\widehat{\ }$ indica l'omissione della variabile sottostante. Grazie alla consulenza del suocero, Billy è riuscito a dimostrare che la composizione di d_i con d_{i+1} è sempre uguale a 0 (esercizio per il lettore) ed è quindi possibile definire gli spazi vettoriali

$$H^i(X) = \frac{\text{Nucleo di } d_i \colon C^i \to C^{i+1}}{\text{Immagine di } d_{i-1} \colon C^{i-1} \to C^i}, \qquad i \geq 0.$$

Un fatto abbastanza sorprendente è che le dimensioni degli spazi $H^i(X)$ dipendono solamente dalla classe di omeomorfismo del polimattoncino X. I numeri $b_i(X) = \dim H^i(X)$, per $i = 0, 1, \ldots$, si chiamano **numeri di Betti**, in onore di Enrico Betti (Pistoia 1823-Pisa 1892), autore di un trattato di topologia nel 1871 e precursore, assieme a Riemann, della moderna topologia. Il lettore può dimostrare per esercizio che b_0 coincide con il numero delle componenti connesse; invece, la dimostrazione completa rigorosa che tutti i numeri di Betti sono invarianti per omeomorfismo non è affatto banale e si è avuta attorno al 1940.

La caratteristica di Eulero-Poincaré di un polimattoncino si definisce come la somma alterna dei numeri di Betti

$$e(X) = b_0(X) - b_1(X) + b_2(X) + \cdots + (-1)^i b_i(X) + \cdots$$

ed è un invariante topologico. La sua proprietà fondamentale è che (esercizio di algebra lineare per il lettore) essa è uguale alla somma alterna delle cardinalità degli insiemi N_i, ossia

$$e(X) = |N_0| - |N_1| + |N_2| + \cdots + (-1)^i |N_i| + \cdots$$

e quindi si calcola molto facilmente.

Supponiamo di avere un polimattoncino con la proprietà che ogni punto è adiacente a non più di due mattoncini, ossia $N_2 = \emptyset$. Un tale oggetto può essere rappresentato con un grafo avente come vertici N_0 e come lati N_1 (nel senso che due verici $a, b \in N_0$ sono uniti da uno spigolo se e solo se una delle due coppie ordinate $(a, b), (b, a)$ appartiene ad N_1.) In questo caso le caratteristiche di Eulero-Poincaré del polimattoncino e del grafo coincidono.

È possibile generalizzare la definizione dei numeri di Betti a qualsivoglia spazio topologico come dimensioni di opportuni spazi vettoriali ed in modo che siano invarianti topologici. Sfortunatamente tali spazi vettoriali possono avere dimensione infinita, ragion per cui in generale $b_i(X) \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

9.3 Che cos'è la topologia algebrica

Supponiamo di avere una famiglia $\mathcal{F}$ di spazi topologici e di voler studiare la relazione di omeomorfismo tra elementi di $\mathcal{F}$; tanto per fissare le idee la famiglia $\mathcal{F}$ potrebbe essere formata da tutti i sottospazi connessi di $\mathbb{R}^3$.

Vogliamo trovare delle funzioni $f\colon \mathcal{F} \to I$ tali che se $X, Y \in \mathcal{F}$ sono omeomorfi, in simboli $X \sim Y$, allora $f(X) = f(Y)$. Una tale funzione viene detta un **invariante topologico** in $\mathcal{F}$ ed il suo grado di utilità dipende dal prodotto di due fattori: il grado di completezza ed il grado di concretezza. Ogni applicazione costante $f\colon \mathcal{F} \to I$ è un invariante che però ha utilità nulla; all'altro estremo ci sono i cosiddetti invarianti **completi** $f\colon \mathcal{F} \to I$ caratterizzati dal fatto che $X \sim Y$ se e solo se $f(X) = f(Y)$.

Un invariante completo esiste sempre: basta prendere $I = \mathcal{F}/\sim$ ed f la proiezione al quoziente. Tuttavia lo scopo di trovare degli invarianti è quello di capire meglio la struttura di $\mathcal{F}/\sim$, in genere assai complessa e misteriosa. Ecco quindi che agli invarianti si richiede anche di essere *concreti*, ossia che il codominio I sia un insieme più semplice di $\mathcal{F}/\sim$ e che l'applicazione f corrisponda a qualche procedura o criterio geometrico.

Nei precedenti capitoli abbiamo definito molti invarianti siffatti dove $I = \{\text{vero, falso}\}$ e dove le f rappresentavano le proprietà di compattezza, connessione, metrizzabilità eccetera.

Un altro esempio di invariante è il $b_0\colon \mathcal{F} \to I = \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ che associa ad ogni spazio il numero delle sue componenti connesse. Più in generale ogni numero di Betti b_n è un invariante topologico a valori in $I = \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

A partire da Poincaré, i matematici hanno trovato una gran quantità di invarianti topologici $f\colon \mathcal{F} \to I$ in cui gli elementi dell'insieme I sono enti algebrici, ossia gruppi, spazi vettoriali, polinomi eccetera. Un esempio è dato dagli spazi di **coomologia di Čech** $H^i(X)$ che abbiamo visto nella sezione precedente per i polimattoncini e la cui definizione può essere estesa ad ogni spazio topologico paracompatto di Hausdorff: un'introduzione eccellente alla coomologia di Čech si trova nella Sezione 3.3 del libro di Kodaira [Ko86].

La **topologia algebrica** si occupa di questo tipo di invarianti e delle problematiche ad essi collegate. Nei prossimi capitoli ci occuperemo del gruppo fondamentale: si tratta di un invariante introdotto da Poincaré e denotato $\pi_1\colon \mathcal{F} \to I$, dove $\mathcal{F}$ è la famiglia degli spazi topologici connessi per archi e I è la famiglia delle classi di isomorfismo di gruppi.

10

Omotopia

Spazi localmente connessi e funtore π_0 – Omotopia – Retrazioni e deformazioni – Categorie e funtori – Una digressione $\curvearrowright$

Esiste in topologia una nozione intuitiva di "equivalenza di forme" che è più ampia della nozione di omeomorfismo. Due sottoinsiemi connessi e regolari di $\mathbb{R}^2$, dove regolare è inteso in senso intuitivo, come opposto di complicato, bizzaro, patologico, perverso ecc., hanno forme equivalenti se hanno lo stesso numero di buchi. Ad esempio le lettere che formano la parola OMOTOPIA, pensate ciascuna come un'unione connessa di linee e segmenti di $\mathbb{R}^2$, si dividono in 2 classi di equivalenza di forme: difatti, le tre lettere O,P,A hanno forme equivalenti perché aventi un solo buco, mentre M,T,I hanno forme equivalenti perché senza buchi.

Come altro esempio, hanno forme equivalenti la lettera B, l'unione della circonferenza e di un diametro dello stesso cerchio e l'unione di due circonferenze tangenti (Figura 10.1).

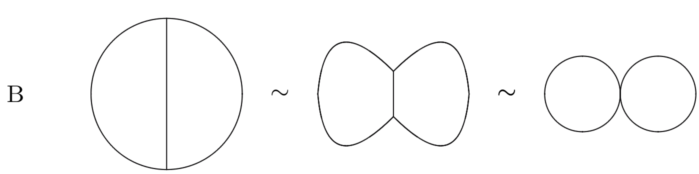


Figura 10.1. Sottoinsiemi del piano con forme equivalenti.

In questo capitolo definiremo in termini matematicamente precisi la nozione di **omotopia**: avere lo stesso tipo di omotopia corrisponderà alla nozione intuitiva di avere forme equivalenti.

10.1 Spazi localmente connessi e funtore π_0

Definizione 10.1. *Uno spazio topologico si dice* ***localmente connesso*** *se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi.*

Segue dal Lemma 4.25 che negli spazi localmente connessi le componenti connesse sono aperte. In generale uno spazio connesso può non essere localmente connesso (Esercizio 10.1).

Gli aperti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti localmente connessi. Il prodotto di due spazi localmente connessi è ancora localmente connesso.

Definizione 10.2. *Sia X uno spazio topologico. Si definisce $\pi_0(X) = X/\sim$, dove $\sim$ è la relazione che identifica due punti se e solo se essi sono gli estremi di un cammino in X.*

Se vogliamo essere più precisi, per ogni spazio topologico X e per ogni coppia di punti $x, y \in X$ definiamo

$$\Omega(X, x, y) = \{\alpha \colon [0,1] \to X \mid \alpha \text{ continua}, \alpha(0) = x, \alpha(1) = y\}$$

e

$$\pi_0(X) = X/\sim, \quad \text{dove} \quad x \sim y \iff \Omega(X, x, y) \neq \emptyset.$$

Dobbiamo verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Riflessività. Per mostrare che $x \sim x$ è sufficiente considerare il cammino costante

$$1_x \colon [0,1] \to X, \quad 1_x(t) = x \text{ per ogni } t \in [0,1].$$

Simmetria. Per ogni coppia di punti $x, y \in X$ è definito l'operatore "di inversione"

$$i \colon \Omega(X, x, y) \to \Omega(X, y, x), \qquad i(\alpha)(t) = \alpha(1-t),$$

che è chiaramente bigettivo. In particolare $\Omega(X, x, y)$ è vuoto se e solo se $\Omega(X, y, x)$ è vuoto.

Transitività. È sufficiente considerare l'operatore "di giunzione"

$$* \colon \Omega(X, x, y) \times \Omega(X, y, z) \to \Omega(X, x, z), \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta,$$

dove

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2. \\ \beta(2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definizione 10.3. *Siano X uno spazio topologico e $\alpha \colon [a,b] \to X$ un'applicazione continua, con $a \leq b$ numeri reali. Chiameremo **parametrizzazione standard** di α il cammino*

$$\tilde{\alpha} \in \Omega(X, \alpha(a), \alpha(b)), \qquad \tilde{\alpha}(t) = \alpha((1-t)a + tb).$$

Ad esempio, se $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ e $\beta \in \Omega(X, y, z)$, allora α coincide con la parametrizzazione standard della restrizione di $\alpha * \beta$ all'intervallo $[0, 1/2]$.

Appare chiaro come la scelta dell'intervallo $[0,1]$ nella definizione della relazione $\sim$ sia puramente convenzionale e nulla di sostanziale sarebbe cambiato se avessimo scelto di lavorare con cammini definiti in un generico intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, con $a < b$; sarebbero invece cambiate (in peggio) le formule nelle definizioni dell'inversione e della giunzione.

Le classi di equivalenza della relazione $\sim$ si dicono le **componenti connesse per archi** di X. In generale, tali componenti non sono né aperte né chiuse. Quindi il π_0 di uno spazio topologico è l'insieme delle sue componenti connesse per archi.

Definizione 10.4. *Uno spazio topologico X si dice* ***localmente connesso per archi*** *se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.*

Ad esempio, ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è localmente connesso per archi: infatti se $X \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e $x \in X$, allora esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subset X$. Ne segue che le palle $B(x, t)$, con $0 < t < r$, formano un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.

Proposizione 10.5. *Sia X uno spazio topologico localmente connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi di X sono aperte e coincidono con le componenti connesse.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ un punto fissato e sia $A = \{y \mid \Omega(X, x, y) \neq \emptyset\}$ la sua componente connessa per archi. Vogliamo dimostrare che A è aperto, o equivalentemente che è intorno di ogni suo punto. Sia $y \in A$ e scegliamo un cammino $\alpha \in \Omega(X, x, y)$; per ipotesi esiste un intorno U di y che è connesso per archi e quindi per ogni $z \in U$ esiste $\beta \in \Omega(U, y, z)$. La giunzione $\alpha * \beta$ appartiene a $\Omega(X, x, z)$ e dunque $z \in A$, da cui segue $U \subset A$. Il complementare di A è l'unione di tutte le componenti connesse per archi diverse da A, dunque è unione di aperti e di conseguenza A è chiuso. Sia $C(x)$ la componente connessa di x. Siccome $A \cap C(x)$ è aperto e chiuso in $C(x)$ ne segue che $C(x) \subset A$. D'altra parte A è connesso per archi, quindi A è connesso e $A \subset C(x)$. $\square$

Si consideri adesso un'applicazione continua $f \colon X \to Y$. Siccome la composizione di un cammino continuo $\alpha \colon [0, 1] \to X$ con f è un cammino continuo $f\alpha \colon [0, 1] \to Y$, se $x_1, x_2 \in X$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, allora anche $f(x_1), f(x_2)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi e quindi f induce per passaggio al quoziente un'applicazione

$$\pi_0(f) \colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y), \qquad f([x]) = [f(x)].$$

Le seguenti proprietà sono di immediata verifica:

F1 Sia $Id \colon X \to X$ l'identità. Allora anche $\pi_0(Id) \colon \pi_0(X) \to \pi_0(X)$ è l'identità.

F2 Se $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ sono applicazioni continue, allora

$$\pi_0(gf) = \pi_0(g)\pi_0(f) \colon \pi_0(X) \to \pi_0(Z).$$

La validità di **F1** ed **F2** autorizza a chiamare **funtore** la costruzione

$$\pi_0\colon \{\text{ spazi topologici }\} \to \{\text{ insiemi }\}.$$

Non possiamo chiamare π_0 applicazione perché dominio e codominio non sono insiemi ma **categorie**: daremo le definizioni precise di funtore e categoria nella Sezione 10.4.

Esempio 10.6. Sia $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ una esaustione in compatti di uno spazio topologico X tale che, per ogni n, l'inclusione $i\colon X - K_{n+1} \to X - K_n$ induce un'applicazione bigettiva

$$\pi_0(i)\colon \pi_0(X - K_{n+1}) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(X - K_n).$$

Allora la cardinalità di $\pi_0(X - K_{n+1})$ è un invariante topologico di X, cioè non dipende dalla particolare esaustione. Supponiamo infatti che $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ sia un'altra esaustione con le medesime proprietà. Allora possiamo trovare interi $n < m$ e $h < k$ tali che $H_n \subset K_h \subset H_m \subset K_k$. Di conseguenza abbiamo una serie di inclusioni

$$X - K_k \xrightarrow{\alpha} X - H_m \xrightarrow{\beta} X - K_h \xrightarrow{\gamma} X - H_n.$$

Applicando il funtore π_0 si ottiene

$$\pi_0(X - K_k) \xrightarrow{\pi_0(\alpha)} \pi_0(X - H_m) \xrightarrow{\pi_0(\beta)} \pi_0(X - K_h) \xrightarrow{\pi_0(\gamma)} \pi_0(X - H_n).$$

Per ipotesi $\pi_0(\beta)\pi_0(\alpha)$ e $\pi_0(\gamma)\pi_0(\beta)$ sono bigettive ed è facile dedurre che $\pi_0(\alpha)$ è bigettiva (vedi anche il Lemma 11.21).

Esempio 10.7. Come promesso precedentemente, dimostriamo che, se $m > 1$ e $s \neq t$, allora $\mathbb{R}^m - \{s \text{ punti}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m - \{t \text{ punti}\}$.

Siano $p_1, \ldots, p_t$ punti distinti in $\mathbb{R}^m$ e proviamo che il numero $t + 1$ è un invariante topologico di $\mathbb{R}^m - \{p_1, \ldots, p_t\}$. Per ogni $n > 0$ consideriamo il compatto

$$K_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq n,\ \|x - p_i\| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Se $n >> 0$, allora $\mathbb{R}^m - K_n$ ha esattamente $t + 1$ componenti connesse e l'inclusione $X - K_{n+1} \to X - K_n$ induce una bigezione tra i rispettivi π_0. L'invarianza topologica di $t + 1$ segue quindi dall'Esempio 10.6.

Esercizi

10.1. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ l'unione di tutte le rette di equazione $ax = by$, con $a, b \in \mathbb{Z}$ non entrambi nulli. Provare che X è connesso ma non localmente connesso.

10.2 (♡). Sia X uno spazio topologico con la proprietà che per ogni punto $x \in X$ e per ogni intorno U di x, esiste un intorno V di x tale che ogni coppia di punti di V può essere congiunta con un cammino in U. Dimostrare che X è localmente connesso per archi.

10.3. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Provare che per ogni $p, q \in A$ esiste un cammino continuo e lineare a tratti $\gamma\colon [0,1] \to A$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

10.4 (Il π_0 locale, $*$). Siano X uno spazio topologico, $x \in X$ un suo punto ed $\mathcal{A}$ un sistema fondamentale di intorni di x. Definiamo l'insieme

$$\pi_0(X - \{x\}, x) = \{s \in \prod_{U \in \mathcal{A}} \pi_0(U - \{x\}) \mid s \text{ è coerente } \},$$

dove s coerente significa che per ogni $U, V \in \mathcal{A}$ tali che $U \subset V$ si ha $\pi_0(i)(s_U) = s_V$, con $i\colon U - \{x\} \to V - \{x\}$ morfismo di inclusione.

Dimostrare che $\pi_0(X - \{x\}, x)$ non dipende dal sistema fondamentale di intorni scelto.

10.5. Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ il luogo di equazione $xy(x + y)(x^2 - 4)(y^2 - 1) = 0$ (Figura 10.2). Utilizzare il risultato dell'Esercizio 10.4 per dimostrare che ogni omeomorfismo di X in sé lascia fisso il punto $(0, 0)$.

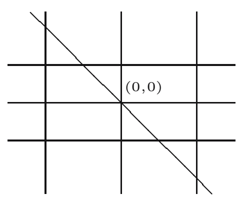


Figura 10.2. Ogni omeomorfismo lascia fisso il punto $(0, 0)$.

10.2 Omotopia

Definizione 10.8. *Due applicazioni continue $f_0, f_1\colon X \to Y$ si dicono **omotope** se esiste un'applicazione continua*

$$F\colon X \times [0,1] \to Y$$

*tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ e $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$. Un'applicazione F come sopra viene detta **omotopia** tra f_0 ed f_1.*

Per visualizzare meglio il contenuto intuitivo della definizione, scriviamo $f_t(x) = F(x, t)$ per ogni $(x, t) \in X \times [0, 1]$. Per ogni $t \in [0, 1]$ l'applicazione

$$f_t\colon X \to Y$$

è continua. Per $t = 0$ abbiamo l'applicazione f_0 che, al variare di t, si deforma in maniera continua fino ad arrivare, per $t = 1$, a coincidere con l'applicazione f_1.

Esempio 10.9. Sia $Y \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso. Allora, qualunque sia lo spazio X, due qualsiasi applicazioni continue $f, g\colon X \to Y$ sono omotope. Basta infatti definire l'omotopia

$$F\colon X \times [0,1] \to Y, \qquad F(x,t) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Esempio 10.10. Sia $f\colon S^n \to S^n$ l'applicazione antipodo, ossia $f(x) = -x$. Se n è dispari, allora f è omotopa all'identità: se $n = 2k-1$ possiamo scrivere $S^n = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| = 1\}$ ed una omotopia è data da $F(z,t) = ze^{\pi i t}$. Se n è pari, allora f non è omotopa all'identità ma questo, come potete immaginare, è molto più difficile da dimostrare.

Notazione. Da ora in poi, salvo avviso contrario, con la lettera I indicheremo sempre l'intervallo chiuso $[0,1]$ dotato della topologia euclidea.

Lemma 10.11. *Siano X, Y due spazi topologici. Allora la relazione di omotopia è una relazione di equivalenza nell'insieme $C(X,Y)$ di tutte le applicazioni continue da X in Y.*

Dimostrazione. Siano $f\colon X \to Y$ continua ed $I = [0,1]$, allora l'applicazione

$$F\colon X \times I \to Y, \qquad F(x,t) = f(x),$$

è un'omotopia tra f ed f.

Se $F(x,t)$ è una omotopia tra f e g, allora $F(x, 1-t)$ è una omotopia tra g ed f.

Se $F(x,t)$ è una omotopia tra f e g, e se $G(x,t)$ è una omotopia tra g ed h, allora l'applicazione

$$H\colon X \times I \to Y, \qquad H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{se } 0 \le t \le 1/2. \\ G(x,2t-1) & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

è una omotopia tra f ed h. □

La relazione di omotopia è stabile per composizione, nel senso meglio precisato dal prossimo lemma.

Lemma 10.12. *Siano date quattro applicazioni continue come nel diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_0"] \arrow[r, bend right, "f_1"'] & Y \arrow[r, bend left, "g_0"] \arrow[r, bend right, "g_1"'] & Z \end{tikzcd} .$$

Se f_0 è omotopa a f_1 e se g_0 è omotopa a g_1, allora $g_0 f_0$ è omotopa a $g_1 f_1$.

Dimostrazione. Siano $F\colon X \times I \to Y$ e $G\colon Y \times I \to Z$ le due omotopie, cioè $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$, $G(y,0) = g_0(y)$ e $G(y,1) = g_1(y)$. Si verifica immediatamente che l'applicazione

$$H\colon X \times I \to Z, \qquad H(x,t) = G(F(x,t),t),$$

è una omotopia tra $g_0 f_0$ e $g_1 f_1$. □

Definizione 10.13. *Un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice una* ***equivalenza omotopica*** *se esiste un'applicazione continua $g\colon Y \to X$ tale che fg è omotopa all'identità su Y e gf è omotopa all'identità su X. Due spazi topologici si dicono* ***omotopicamente equivalenti*** *se esiste un'equivalenza omotopica tra di loro.*

Segue subito dalla definizione che spazi topologici omeomorfi sono anche omotopicamente equivalenti. Il prossimo esempio mostra che il viceversa è generalmente falso.

Esempio 10.14. Tutti i sottoinsiemi convessi e non vuoti di $\mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti.

Siano infatti $X \subset \mathbb{R}^n$ ed $Y \subset \mathbb{R}^m$ due sottoinsiemi convessi e non vuoti: scegliamo due applicazioni continue qualsiasi (ad esempio costanti) $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$. Per ipotesi X è convesso e abbiamo dimostrato nell'Esempio 10.9 che l'applicazione $gf\colon X \to X$ è omotopa all'identità. Similmente, siccome Y è convesso, anche fg è omotopa all'identità.

Lemma 10.15. *Siano $f, g\colon X \to Y$ due applicazioni continue. Se f e g sono omotope, allora vale*

$$\pi_0(f) = \pi_0(g)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y).$$

In particolare se $f\colon X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, allora $\pi_0(f)$ è bigettiva.

Dimostrazione. Dire che $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ equivale a dire che per ogni $x \in X$ i punti $f(x)$ e $g(x)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi in Y. Sia $F\colon X \times I \to Y$ un'omotopia tra f e g, allora $f(x)$ e $g(x)$ sono gli estremi del cammino

$$F_x\colon I \to Y, \qquad F_x(t) = F(x, t).$$

Supponiamo adesso che $f\colon X \to Y$ sia un'equivalenza omotopica e sia $g\colon Y \to X$ continua e tale che le composizioni gf e fg siano entrambe omotope all'identità. Allora, per la prima parte del lemma le due applicazioni:

$$\pi_0(fg) = \pi_0(f)\pi_0(g)\colon \pi_0(Y) \to \pi_0(Y),$$

$$\pi_0(gf) = \pi_0(g)\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(X),$$

sono uguali all'identità e quindi $\pi_0(f)$ è invertibile con inversa $\pi_0(g)$. □

Definizione 10.16. *Uno spazio topologico si dice* ***contrattile*** *se è omotopicamente equivalente al punto. Equivalentemente, uno spazio X è contrattile se l'identità su X è omotopa ad una applicazione costante.*

Spesso si dice che due spazi sono **omotopi**, oppure che hanno lo **stesso tipo di omotopia** se sono omotopicamente equivalenti.

Per il Lemma 10.15 ogni spazio contrattile è connesso per archi e viene naturale domandarsi se esistono spazi topologici connessi per archi che non sono contrattili. La risposta è sì, anche se dovremo faticare un po' per dimostrare che la circonferenza S^1 non è contrattile. È anche vero che la sfera S^n, per ogni $n \geq 2$, non è contrattile, ma la dimostrazione di tale fatto va oltre gli obiettivi di questo libro.

Esercizi

10.6. Nelle notazioni della Definizione 10.13, l'applicazione g viene detta **inversa omotopica** di f. Sia dunque $f\colon X \to Y$ una equivalenza omotopica. Dimostrare che l'inversa omotopica di f è unica a meno di omotopia.

10.7. Dimostrare che l'equivalenza omotopica è transitiva, e cioè che se X ha il tipo di omotopia di Y e Y ha il tipo di omotopia di Z, allora X ha il tipo di omotopia di Z.

10.8. Provare che il prodotto di due spazi contrattili è ancora contrattile.

10.9. Sia X uno spazio topologico e siano $f, g\colon X \to S^n$ due applicazioni continue. Utilizzando l'espressione algebrica

$$\frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}, \qquad t \in [0,1],$$

mostrare che se $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in X$, allora f è omotopa a g.

10.10. Sia $S^\infty \subset \ell^2(\mathbb{R})$ (vedi Esempio 6.8) lo spazio delle successioni a quadrato sommabile e di norma 1, ossia

$$S^\infty = \{\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{R}) \mid \sum a_n^2 = 1\}.$$

Dimostrare che l'identità e l'applicazione costante $(a_1, a_2, \ldots) \mapsto (1, 0, \ldots)$ sono entrambe omotope all'applicazione $(a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto (0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ e dedurne che S^∞ è contrattile.

10.3 Retrazioni e deformazioni

Definizione 10.17. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $Y \subset X$ si dice un* ***retratto*** *di X se esiste un'applicazione continua $r\colon X \to Y$, detta* ***retrazione****, tale che $r(y) = y$ per ogni $y \in Y$.*

Esempio 10.18. Siano $A, B \subset \mathbb{R}^2$ due circonferenze tangenti in un punto p. Allora l'applicazione

$$r\colon A \cup B \to A, \qquad r(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in A, \\ p & \text{se } x \in B, \end{cases}$$

è una retrazione.

Definizione 10.19. *Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio topologico $Y \subset X$ si dice un* ***retratto per deformazione*** *di X se esiste un'applicazione continua $R\colon X \times I \to X$, detta* ***deformazione*** *di X su Y, tale che:*

1. *$R(x, 0) \in Y$ e $R(x, 1) = x$ per ogni $x \in X$.*
2. *$R(y, t) = y$ per ogni $y \in Y$ e $t \in I$.*

Esempio 10.20. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme stellato rispetto ad un punto $p \in A$ (Esercizio 4.8). Allora p è un retratto per deformazione di A. Basta considerare la deformazione

$$R\colon A \times I \to A, \qquad R(x, t) = tx + (1 - t)p.$$

Proposizione 10.21. *Siano X uno spazio topologico e $Y \subset X$ un retratto per deformazione di X. Allora Y è un retratto di X e l'inclusione $i\colon Y \hookrightarrow X$ è una equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. Indichiamo con $R\colon X \times I \to X$ la deformazione di X su Y. Indicando con $r\colon X \to Y$ l'applicazione tale che $R(x, 0) = i(r(x))$, ne segue che $r\colon X \to Y$ è una retrazione e R è una omotopia tra $i \circ r$ e l'identità su X. Siccome $r \circ i = Id_Y$, si ha che i e r sono equivalenze omotopiche. $\square$

Esempio 10.22. La sfera S^n è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Si ha infatti la deformazione

$$R\colon (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, \qquad R(x, t) = tx + (1 - t)\frac{x}{\|x\|}.$$

Esempio 10.23. Sia Y l'unione di due lati di un triangolo X. Allora Y è un retratto per deformazione di X.

Non è restrittivo supporre che X sia definito nel piano dall'intersezione dei tre semipiani $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ e che Y sia l'intersezione di X con l'unione dei due assi cartesiani $x = 0$, $y = 0$. Una deformazione possibile di X su Y è

$$R(x, y, t) = t(x, y) + (1 - t)(x - \min(x, y), y - \min(x, y)).$$

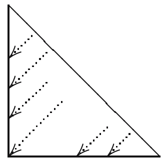


Figura 10.3. Retrazione per deformazione di un triangolo su due suoi lati.

Esercizi

10.11 (♡). Provare che in uno spazio di Hausdorff ogni retratto è chiuso.

10.12 (♡). Mostrare che il bicchiere vuoto è un retratto per deformazione del bicchiere pieno. Più precisamente, mostrare che $Y = D^2 \times \{0\} \cup S^1 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ è un retratto per deformazione di $X = D^2 \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$.

10.13 (♡). Sia $X = \{(tx, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1],\ x \in \mathbb{Q}\}$. Provare che:

1. Il punto $(0,0)$ è un retratto per deformazione di X: in particolare X è contrattile.
2. Il punto $(0,1)$ non è un retratto per deformazione di X.

10.14. Sia $X = \{(p,q) \in S^n \times S^n \mid p \neq q\}$. Dimostrare che X ha il tipo di omotopia di S^n. (Sugg.: provare che il grafico dell'antipodo è un retratto per deformazione.)

10.15 (♡). Mostrare che $X = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b^2 > 4ac\}$ ha il tipo di omotopia di S^1.

10.16. Mostrare che $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ è un retratto per deformazione di $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$.

10.17. Indichiamo con $S^1 \vee S^1$ lo spazio topologico ottenuto come unione di due circonferenze con un punto in comune.

Provare che gli spazi $\mathbb{R}^2 - \{2 \text{ punti}\}$, $S^2 - \{3 \text{ punti}\}$, $S^1 \times S^1 - \{1 \text{ punto}\}$ e $S^1 \vee S^1$ hanno lo stesso tipo di omotopia. Non è richiesta una dimostrazione formale ma solamente intuitiva. (Sugg.: mostrare che ognuno dei primi tre spazi possiede un retratto per deformazione omeomorfo a $S^1 \vee S^1$; interpretare $S^1 \times S^1 - \{1 \text{ punto}\}$ come il quoziente di $I^2 - \{1 \text{ punto interno}\}$ per la relazione di equivalenza illustrata nella sartoria topologica.)

10.18 (∗, ♡). Sia X lo spazio delle matrici reali $n \times (n-1)$ di rango massimo. Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$.

10.19 (∗, ♡). Sia $X \subset \mathrm{Omeo}(D^n)$ l'insieme degli omeomorfismi del disco in sé che sono l'identità su S^{n-1}. Dotiamo X della topologia di sottospazio di $C(D^n, D^n)$ (Teorema 6.51). Dimostrare che l'identità $Id \in X$ è un retratto per deformazione di X.

10.4 Categorie e funtori

L'utilizzo in matematica dei termini di categoria e funtore inizia intorno al 1940 sotto forma di un linguaggio in grado di semplificare concettualmente alcuni fenomeni di topologia algebrica. Successivamente, grazie soprattutto ad alcune idee geniali di A. Grothendieck, la teoria delle categorie ha consentito enormi progressi nei settori più astratti (per capirci: logica, topologia, algebra e geometria algebrica) tanto da diventarne una parte imprescindibile. Attualmente si assiste ad una lenta ma inesorabile espansione della teoria delle categorie a tutti i campi del sapere matematico.

Dare una **categoria $\mathbf{A}$** significa dare:

1. Una certa collezione $\mathrm{Ob}(\mathbf{A})$, i cui elementi sono detti **oggetti** della categoria $\mathbf{A}$.
2. Per ogni coppia di oggetti X, Y di $\mathbf{A}$, un insieme $\mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Y)$ i cui elementi sono detti **morfismi** tra X e Y nella categoria $\mathbf{A}$.
3. Per ogni terna di oggetti $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$, un'applicazione, che chiameremo legge di composizione,

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Y, Z) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Z), \qquad (f, g) \mapsto gf.$$

Il tutto deve soddisfare i seguenti assiomi:

1. $\mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Y) \cap \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Z, W) = \emptyset$ a meno che $X = Z$ e $Y = W$.
2. Per ogni oggetto X esiste il morfismo identità $1_X \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, X)$ con la proprietà che $1_X f = f$ e $g1_X = g$ per ogni $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Y, X)$ ed ogni $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Z)$.
3. La composizione di morfismi è associativa: per ogni $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Y, Z)$ e $h \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Z, W)$ vale $h(gf) = (hg)f$.

Alla stessa maniera di come si dimostra che l'elemento neutro di un gruppo è unico, si dimostra che che il morfismo identità è unico. Un morfismo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Y, X)$ sarà detto un **isomorfismo** se esiste $f^{-1} \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(Y, X)$ tale che $ff^{-1} = 1_Y$ e $f^{-1}f = 1_X$. Il morfismo f^{-1} se esiste è unico e viene detto **inverso** di f.

Quasi sempre, con un abuso di notazione, si scrive $X \in \mathbf{A}$ per indicare che X è un oggetto nella categoria $\mathbf{A}$.

Esempio 10.24. La categoria degli aperti di uno spazio topologico X è la categoria che ha come oggetti gli aperti di X e come morfismi le inclusioni.

Esempio 10.25. La categoria **Set** degli insiemi è la categoria che ha come oggetti gli insiemi e come morfismi le applicazioni.

Esempio 10.26. La categoria **Grp** dei gruppi ha come oggetti i gruppi e come morfismi gli omomorfismi di gruppi.

Esempio 10.27. La categoria **Top** degli spazi topologici ha come oggetti gli spazi topologici e come morfismi le applicazioni continue.

Esempio 10.28. La categoria **KTop** ha come oggetti gli spazi topologici e come morfismi le classi di omotopia di applicazioni continue. Il Lemma 10.12 garantisce che la legge di composizione è ben definita.

Esempio 10.29. Ad ogni insieme S possiamo associare una categoria che ha S come collezione degli oggetti ed ha come morfismi le identità e nient'altro.

Esempio 10.30. Ad ogni gruppo G possiamo associare la categoria $\mathbf{G}$ che ha un solo oggetto, chiamiamolo $*$, e come morfismi $\mathrm{Mor}_{\mathbf{G}}(*,*) = G$. La legge di composizione è data dal prodotto in G.

L'osservazione che gli assiomi di categoria sono preservati dal "cambiamento di verso" di tutti i morfismi, porta alla definizione di categoria opposta.

Definizione 10.31. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. La* ***categoria opposta*** *di* $\mathbf{C}$ *è la categoria, denotata con* $\mathbf{C^o}$*, che ha gli stessi oggetti* $\mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{C^o})$ *e tale che*

$$\mathrm{Mor}_{\mathbf{C^o}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(Y,X) \quad \textit{per ogni} \quad X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{C^o}).$$

Notiamo che $(\mathbf{C^o})^{\mathbf{o}} = \mathbf{C}$.

Definizione 10.32. *Siano* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *due categorie; un* ***funtore*** *da* $\mathbf{A}$ *in* $\mathbf{B}$ *si indica con* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e consiste di due funzioni (entrambe indicate con la lettera* F*):*

1. *La* funzione sugli oggetti*, ossia una certa legge che ad ogni oggetto* X *di* $\mathbf{A}$ *associa uno ed un solo oggetto* $F(X)$ *di* $\mathbf{B}$*.*
2. *La* funzione sui morfismi *che consiste, per ogni coppia* X, Y *di oggetti di* $\mathbf{A}$*, di un'applicazione*

$$F\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(F(X),F(Y)), \qquad f \mapsto F(f).$$

Inoltre la funzione sui morfismi deve preservare le identità e le leggi di composizione, ossia $F(1_X) = 1_{F(X)}$ *e* $F(fg) = F(f)F(g)$*.*

Esempio 10.33. Il π_0 è un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli insiemi.

Esempio 10.34. Siano G, H due gruppi. Nelle notazioni dell'Esempio 10.30, esiste una bigezione naturale tra l'insieme degli omomorfismi $F\colon G \to H$ e quello dei funtori $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{H}$.

Osservazione 10.35. Fino a qualche anno fa, un funtore come alla Definizione 10.32 veniva detto *funtore covariante*. Si dava poi la nozione di *funtore controvariante* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ che si differenzia da uno covariante dal fatto che, se $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X,Y)$, allora $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(F(Y),F(X))$ e la conservazione della composizione diventa $F(fg) = F(g)F(f)$.

Ad ogni funtore controvariante $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ corrisponde in maniera tautologica un funtore covariante $F\colon \mathbf{A}^{\mathbf{o}} \to \mathbf{B}$ e viceversa. Oggi si preferisce, di norma, non considerare funtori controvarianti ma introdurre quando necessario le categorie opposte.

Esempio 10.36. Sia $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ la categoria degli spazi vettoriali su di un campo $\mathbb{K}$: gli oggetti sono tutti gli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ed i morfismi le applicazioni lineari. L'applicazione $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-,\mathbb{K})$ che ad ogni spazio vettoriale V associa il suo duale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V,\mathbb{K})$ definisce un funtore

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-,\mathbb{K})\colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}^{\mathbf{o}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}.$$

Esercizi

10.20. Per ogni intero $n \geq 0$ denotiamo con $[\mathbf{n}]$ la categoria che ha come oggetti i numeri $0,1,\ldots,n$ e come morfismi

$$\mathrm{Mor}_{[\mathbf{n}]}(a,b) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a > b \\ \text{un solo morfismo} & \text{se } a \leq b \end{cases}$$

Mostrare che esiste una bigezione naturale tra funtori $[\mathbf{n}] \to [\mathbf{m}]$ ed applicazioni non decrescenti $\{0,1,\ldots,n\} \to \{0,1,\ldots,m\}$.

10.21. Dimostrare che due spazi topologici sono omotopicamente equivalenti se e solo se sono isomorfi nella categoria **KTop**.

10.22. Sia Y uno spazio topologico fissato. Mostrare che la costruzione che associa ad ogni spazio topologico X l'insieme $C(Y,X)$ delle applicazioni continue $Y \to X$ è un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli insiemi.

10.23. Per ogni intero $n \geq 0$ denotiamo con $[n] = \{0,1,\ldots,n\}$. Indichiamo con $\boldsymbol{\Delta}$ la categoria degli **ordinali finiti**, e cioè la categoria che ha come oggetti $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{\Delta}) = \{[n] \mid n \geq 0\}$ e come morfismi

$$\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{\Delta}}([n],[m]) = \{f\colon [n] \to [m] \text{ non decrescenti}\}.$$

Per ogni $n \geq 0$ definiamo il **simplesso standard** di dimensione n come il sottospazio topologico di $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta^n = \{(t_0,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}.$$

Verificare che l'applicazione $[n] \mapsto \Delta^n$ definisce un funtore dalla categoria $\mathbf{\Delta}$ alla categoria degli spazi topologici, dove ad ogni morfismo $f\colon [n] \to [m]$ è associata l'applicazione continua

$$f_*\colon \Delta^n \to \Delta^m, \qquad f_*(t_0, \ldots, t_n) = \left(\sum_{f(i)=0} t_i, \sum_{f(i)=1} t_i, \ldots, \sum_{f(i)=m} t_i \right),$$

e la sommatoria $\sum_{f(i)=j} t_i$ si intende uguale a 0 se $f(i) \neq j$ per ogni $i \in [n]$.

10.24 (Prodotti). Un diagramma di tre oggetti e due morfismi

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

in una categoria $\mathbf{C}$ viene detto un **prodotto** se per ogni altro diagramma $A \leftarrow X \to B$ esiste un unico morfismo $X \to P$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\exists!"] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ & A & & B \end{tikzcd}$$

In tal caso diremo che l'oggetto P è il prodotto di A e B nella categoria $\mathbf{C}$ e si scrive $P = A \times B$. Il prodotto di due oggetti può anche non esistere, ma se esiste è unico a meno di isomorfismo.

Verificare che nelle categorie **Set**, **Grp** e **Top** i prodotti esistono sempre e corrispondono rispettivamente al prodotto cartesiano di insiemi, al prodotto di gruppi ed al prodotto di spazi topologici.

Dimostrare che l'intersezione di due aperti coincide con il loro prodotto nella categoria dell'Esempio 10.24.

Dire infine se esiste il prodotto di $[1] \times [1]$ nella categoria degli ordinali finiti (Esercizio 10.23).

10.25 (Coprodotti). Un diagramma di tre oggetti e due morfismi

$$A \to Q \leftarrow B$$

in una categoria $\mathbf{A}$ viene detto un **coprodotto** se è un prodotto nella categoria opposta $\mathbf{A}^{\mathbf{o}}$. Enunciare la proprietà universale dei coprodotti. Verificare che nelle categorie **Set** e **Top** i coprodotti esistono sempre e corrispondono all'unione disgiunta.

10.5 Una digressione ↷

A volte le grandi idee matematiche nascono da semplici, se non banali, osservazioni. Consideriamo lo spazio topologico $\{*\}$ formato da un solo punto. Allora ogni spazio topologico Y è omeomorfo in modo naturale allo spazio $C(\{*\}, Y)$ di tutte le applicazioni continue da $\{*\}$ in Y dotato della topologia compatta-aperta e di conseguenza

$$\pi_0(Y) = \pi_0(C(\{*\}, Y)).$$

Chi ci dice che dobbiamo limitarci allo spazio $\{*\}$? Nulla ci impedisce di fissare uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff X, di considerare lo spazio $C(X, Y)$ di tutte le applicazioni continue $f : X \to Y$, di dotarlo della topologia compatta-aperta e di definire l'insieme

$$[X, Y] = \pi_0(C(X, Y)).$$

Ogni omeomorfismo $Y \cong Z$ induce un omeomorfismo $C(X, Y) \cong C(X, Z)$ e di conseguenza una bigezione di insiemi $[X, Y] \cong [X, Z]$. Ecco quindi che per dimostrare ad esempio che la sfera S^2 non è omeomorfa al toro $S^1 \times S^1$, basterà provare che $[S^2, S^1 \times S^1]$ è formato da un solo punto, mentre $[S^2, S^2]$ è un insieme infinito numerabile. L'idea è certamente stimolante ed il Teorema 8.19 implica che due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \to Y$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di $C(X, Y)$ se e solo se sono omotope.

Per ragioni tecniche che saranno chiare in seguito, conviene lavorare con gli spazi topologici puntati, ossia con le coppie (X, x_0), dove X è uno spazio topologico e $x_0 \in X$. Definiremo quindi $[(X, x_0), (Y, y_0)] = \pi_0(C((X, x_0), (Y, y_0)))$, dove

$$C((X, x_0), (Y, y_0)) = \{f \in C(X, Y) \mid f(x_0) = y_0\}.$$

Particolarmente interessante risulterà il caso in cui $X = S^n$ è una sfera ed $x_0 = N$ il suo polo. Per ogni $n \geq 0$, si denota con

$$\pi_n(Y, y_0) = [(S^n, N), (Y, y_0)]$$

e non è difficile dimostrare che, se $n \geq 1$, allora π_n possiede una struttura di gruppo, chiamato **n-esimo gruppo di omotopia**.

Del gruppo π_1 ci occuperemo nei prossimi capitoli, mentre lo studio dei gruppi π_n, per $n \geq 2$, va al di là degli obiettivi di questo volume.

11

Il gruppo fondamentale

Omotopia di cammini – Il gruppo fondamentale – Il funtore π_1 – Semplice connessione di S^n $(n \geq 2)$ – Monoidi topologici $\curvearrowright$

Continuiamo ad indicare con I l'intervallo chiuso $[0,1]$. Dato un cammino continuo $\alpha\colon I \to X$, punti $\alpha(0)$ e $\alpha(1)$ ne sono detti gli estremi; chiameremo $\alpha(0)$ punto iniziale e $\alpha(1)$ punto finale: se $\alpha(0) = \alpha(1) = a$, allora diremo che il cammino α è **chiuso** con **punto base** $a \in X$.

11.1 Omotopia di cammini

Per ogni spazio topologico X e per ogni coppia di punti $a, b \in X$ abbiamo già introdotto lo **spazio dei cammini**

$$\Omega(X,a,b) = \{\alpha\colon I \to X \mid \alpha \;\text{ continua}, \alpha(0) = a,\, \alpha(1) = b\}.$$

Abbiamo inoltre definito le operazioni di giunzione ed inversione rispettivamente come

$$*\colon \Omega(X,a,b)\times\Omega(X,b,c) \to \Omega(X,a,c), \quad \alpha*\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$i\colon \Omega(X,a,b) \to \Omega(X,b,a), \qquad i(\alpha)(t) = \alpha(1-t).$$

Notiamo che $i(i(\alpha)) = \alpha$ e che $i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$.

Definizione 11.1. *Diremo che $\alpha, \beta \in \Omega(X,a,b)$ sono **cammini omotopicamente equivalenti** se esiste un'applicazione continua*

$$F\colon I \times I \to X$$

tale che:

1. *$F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \beta(t)$ per ogni $t \in I$.*
2. *$F(0,s) = a$, $F(1,s) = b$ per ogni $s \in I$.*

*Una tale applicazione F viene detta una **omotopia di cammini**.*

Notiamo immediatamente che la nozione di omotopia di cammini è più restrittiva della nozione di omotopia di applicazioni. Infatti si richiede in aggiunta che i cammini

$$F_s \colon I \to X, \qquad F_s(t) = F(t, s),$$

devono avere, al variare di $s \in I$, tutti lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale. Scriveremo $\alpha \sim \beta$ per indicare che α e β sono cammini omotopicamente equivalenti.

Abbiamo dimostrato che l'omotopia di applicazioni continue è una relazione di equivalenza. La stessa dimostrazione, con lievi modifiche, si applica per dimostrare che *l'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza.*

Esempio 11.2. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso e siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ due cammini con gli stessi estremi. Allora α e β sono cammini omotopicamente equivalenti: infatti l'applicazione

$$F \colon I \times I \to X, \qquad F(t, s) = s\beta(t) + (1 - s)\alpha(t),$$

è una omotopia di cammini.

Le operazioni di giunzione ed inversione commutano con la relazione di equivalenza omotopica. Questo significa che:

1. Dati quattro cammini $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$, $\beta, \beta' \in \Omega(X, b, c)$, se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$, allora $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.
2. Se $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$ e $\alpha \sim \alpha'$, allora $i(\alpha) \sim i(\alpha')$.

Infatti, se $F(t, s)$ è un'omotopia tra α ed α', e se $G(t, s)$ è un'omotopia tra β e β', allora $F(1 - t, s)$ è un'omotopia tra $i(\alpha)$ e $i(\alpha')$, mentre la "giunzione di omotopie"

$$F * G(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(2t - 1, s) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

è un'omotopia di cammini tra $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$.

Lemma 11.3. *Sia $\alpha \colon I \to X$ un cammino e sia $\phi \colon I \to I$ una qualsiasi applicazione continua tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$. Allora il cammino $\alpha(t)$ è omotopicamente equivalente al cammino $\beta(t) = \alpha(\phi(t))$.*

Dimostrazione. È sufficiente considerare l'omotopia

$$F \colon I \times I \to X, \qquad F(t, s) = \alpha(s\phi(t) + (1 - s)t).$$

$\square$

Proposizione 11.4. *Il prodotto $*$ è associativo a meno di omotopia di cammini, e cioè, dati uno spazio topologico X e tre cammini $\alpha \in \Omega(X,a,b)$, $\beta \in \Omega(X,b,c)$ e $\gamma \in \Omega(X,c,d)$ vale:*

$$\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma.$$

In particolare è ben definita la classe di omotopia del cammino $\alpha * \beta * \gamma$.

Dimostrazione. Il cammino $(\alpha * \beta) * \gamma$ è ottenuto da $\alpha * (\beta * \gamma)$ tramite un cambio di parametro. Per essere più precisi vale

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = (\alpha * (\beta * \gamma))(\phi(t)), \quad \text{dove } \phi(t) = \begin{cases} 2t & \text{per } 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4} & \text{per } \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{t+1}{2} & \text{per } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

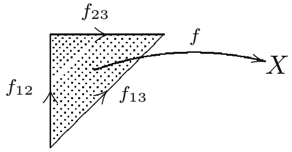
Basta quindi applicare il Lemma 11.3. □

Lemma 11.5. *Siano $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$ ed indichiamo con $T \subset \mathbb{R}^n$ il triangolo (possibilmente degenere) di vertici p_1, p_2, p_3, ossia*

$$T = \{t_1p_1 + t_2p_2 + t_3p_3 \mid t_1, t_2, t_3 \ge 0,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$

Data un'applicazione continua $f\colon T \to X$, indichiamo con f_{ij} la parametrizzazione standard della restrizione di f al lato di estremi p_i, p_j: più precisamente

$$f_{ij}\colon [0,1] \to X, \qquad f_{ij}(t) = f(\,(1-t)p_i + tp_j).$$



Allora vale $f_{13} \sim f_{12} * f_{23}$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione

$$F\colon I \times I \to X, \qquad F(t,s) = f(q(t,s)),$$

dove $q\colon I \times I \to T$ è data da

$$q(t,s) = \begin{cases} (1-t-ts)p_1 + 2tsp_2 + (t-ts)p_3 & \text{per } t \le \frac{1}{2} \\ (1-t-s+ts)p_1 + 2(1-t)sp_2 + (t-s+ts)p_3 & \text{per } t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ha:

$$F(0,s) = f(p_1), \qquad F(1,s) = f(p_3),$$

$$F(t,0) = \begin{cases} f((1-t)p_1 + tp_3) = f_{13}(t) & t \le \frac{1}{2} \\ f((1-t)p_1 + tp_3) = f_{13}(t) & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(t,1) = \begin{cases} f((1-2t)p_1 + 2tp_2) = f_{12}(2t) & t \le \frac{1}{2} \\ f((1-(2t-1))p_2 + (2t-1)p_3) = f_{23}(2t-1) & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

e quindi F è un'omotopia tra i cammini f_{13} e $f_{12} * f_{23}$. □

Proposizione 11.6. *Per un qualsiasi cammino* $\alpha \in \Omega(X,a,b)$ *si ha:*

1. $1_a * \alpha \sim \alpha * 1_b \sim \alpha$,
2. $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$,

dove 1_a *e* 1_b *sono i cammini costanti in* a *e* b *rispettivamente.*

Dimostrazione. I cammini $1_a * \alpha$ e $\alpha * 1_b$ sono ottenuti da α con un cambio di parametro. Più precisamente

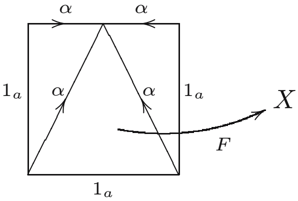
$$(1_a * \alpha)(t) = \alpha(\psi(t)), \qquad \text{dove } \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ 2t-1 & \text{per } \dfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

$$(\alpha * 1_b)(t) = \alpha(\eta(t)), \qquad \text{dove } \eta(t) = \begin{cases} 2t & \text{per } 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{per } \dfrac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Per il Lemma 11.3 si hanno quindi le equivalenze $1_a * \alpha \sim \alpha * 1_b \sim \alpha$.

Consideriamo l'omotopia $F\colon I \times I \to X$ definita da

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{per } 0 \le t \le s/2 \\ \alpha(s) & \text{per } s/2 \le t \le 1 - s/2 \\ \alpha(2-2t) & \text{per } 1 - s/2 \le t \le 1. \end{cases}$$



Siccome $F(t,0) = 1_a(t)$ e $F(t,1) = \alpha * i(\alpha)(t)$ per ogni t nell'intervallo $[0,1]$, ne segue che $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$.

Una dimostrazione alternativa si ottiene interpretando l'intervallo I come il triangolo degenere in $\mathbb{R}$ di vertici $p_1, p_2, p_3 \in \{0,1\}$, con i p_i non tutti uguali tra loro, ed applicare il Lemma 11.5 al cammino $\alpha\colon I \to X$: si ottengono le sei omotopie di cammini descritte nella Tabella 11.1. □

$p_1 = p_2 = 0,\ p_3 = 1$	$\alpha \sim 1_a * \alpha$
$p_1 = 0,\ p_2 = p_3 = 1$	$\alpha \sim \alpha * 1_b$
$p_1 = p_3 = 0,\ p_2 = 1$	$1_a \sim \alpha * i(\alpha)$
$p_2 = 0,\ p_1 = p_3 = 1$	$1_b \sim i(\alpha) * \alpha$
$p_3 = 0,\ p_1 = p_2 = 1$	$i(\alpha) \sim 1_b * i(\alpha)$
$p_2 = p_3 = 0,\ p_1 = 1$	$i(\alpha) \sim i(\alpha) * 1_a$

Tabella 11.1. Il Lemma 11.5 applicato ad un triangolo degenere.

Corollario 11.7. *Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ un cammino e sia $p \in [0, 1]$ un qualsiasi punto dell'intervallo. Denotiamo $d = \alpha(p) \in X$ e con α_0 ed α_1 le parametrizzazioni standard delle restrizioni di α agli intervalli $[0, p]$ e $[p, 1]$ ripettivamente, ossia*

$$\alpha_0 \in \Omega(X, a, d), \qquad \alpha_0(t) = \alpha(tp),$$

$$\alpha_1 \in \Omega(X, d, b), \qquad \alpha_1(t) = \alpha((1 - t)p + t).$$

Allora:

1. *Vale $\alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha$.*
2. *Per ogni punto $c \in X$ e per ogni cammino $\beta \in \Omega(X, d, c)$ vale*

$$\alpha_0 * \beta * i(\beta) * \alpha_1 \sim \alpha.$$

Dimostrazione. [1] Per definizione si ha $\alpha_0 * \alpha_1(t) = \alpha(\phi(t))$, dove

$$\phi(t) = \begin{cases} 2tp & \text{se } 0 \le t \le 1/2 \\ p + (2t - 1)(1 - p) & \text{se } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

e tutto segue dal Lemma 11.3.

[2] Il prodotto $*$ è associativo a meno di omotopia e quindi

$$\alpha_0 * \beta_1 * i(\beta_1) * \alpha_1 \sim (\alpha_0 * (\beta_1 * i(\beta_1))) * \alpha_1 \sim (\alpha_0 * 1_d) * \alpha_1 \sim \alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha.$$

□

Corollario 11.8. *Siano $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ un cammino e $0 \le p_1 \le \cdots \le p_n \le 1$ una successione finita crescente di numeri reali. Per ogni $i = 0, \ldots, n$ denotiamo con α_i la parametrizzazione standard della restrizione di α all'intervallo $[p_i, p_{i+1}]$, cioè $\alpha_i(t) = \alpha((1-t)p_i + tp_{i+1})$, dove si intende $p_0 = 0$ e $p_{n+1} = 1$.*

Allora α è un cammino omotopicamente equivalente al prodotto $\alpha_0 * \cdots * \alpha_n$.

Dimostrazione. Per il Corollario 11.7 il prodotto $\alpha_{n-1} * \alpha_n$ è omotopicamente equivalente alla paremetrizzazione standard della restrizione di α all'intervallo $[p_{n-1}, 1]$. Si prosegue per induzione su n. □

Infine, osserviamo che la relazione di omotopia e gli operatori $*$ ed i si comportano bene rispetto alla composizione con applicazioni continue.

Proposizione 11.9. *Sia* $f: X \to Y$ *un'applicazione continua:*

1. *Dati* $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$*, se* $\alpha \sim \beta$*, allora* $f\alpha \sim f\beta$*.*
2. *Siano* $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ *e* $\beta \in \Omega(X, b, c)$*. Allora* $f(\alpha * \beta) = f\alpha * f\beta$ *e* $i(f\alpha) = f(i(\alpha))$*.*

Dimostrazione. Se $F: I^2 \to X$ è una omotopia di cammini, allora anche $fF: I^2 \to Y$ è una omotopia di cammini.

Gli operatori di giunzione ed inversione coinvolgono esclusivamente operazioni sul dominio I e pertanto commutano con la composizione con applicazioni continue. □

Esercizi

11.1. Provare che i due cammini $\alpha, \beta: I \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t)), \qquad \beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t)),$$

sono omotopicamente equivalenti.

11.2. Provare che i cammini $\alpha_c: I \to S^2$,

$$\alpha_c(t) = (\sin(c)\sin(\pi t), \cos(c)\sin(\pi t), \cos(\pi t)),$$

sono, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutti omotopicamente equivalenti.

11.3. Siano dati due cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$. Dimostrare che $\alpha \sim \beta$ se e solo se $\alpha * i(\beta) \sim 1_a$.

11.4 (♡). Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, a, a)$ tali che $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$. Provare che se X è di Hausdorff, allora α, β e γ sono costanti.

11.2 Il gruppo fondamentale

Denotiamo con $\pi_1(X, a)$ il quoziente di $\Omega(X, a, a)$ per la relazione di equivalenza omotopica. Per ogni $\alpha \in \Omega(X, a, a)$ denotiamo con $[\alpha] \in \pi_1(X, a)$ la classe di omotopia corrispondente.

Teorema 11.10. *L'insieme* $\pi_1(X, a)$ *possiede una struttura di gruppo con elemento neutro* $[1_a]$ *e con le operazioni di prodotto ed inverso definite come*

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta], \qquad [\alpha]^{-1} = [i(\alpha)].$$

Dimostrazione. Conseguenza immediata delle proposizioni 11.4 e 11.6. □

Definizione 11.11. *Il gruppo $\pi_1(X,a)$ viene detto* ***gruppo fondamentale****, o anche* ***primo gruppo di omotopia****, o anche* ***gruppo di Poincaré****, di X con punto base a.*

Notiamo che $\pi_1(X,a)$ dipende solamente dalla componente connessa per archi di a in X.

Esempio 11.12. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio convesso. Allora per ogni $a \in X$ vale $\pi_1(X,a) = 0$. Infatti, se $\alpha \in \Omega(X,a,a)$, allora

$$F\colon I^2 \to X, \qquad F(t,s) = sa + (1-s)\alpha(t),$$

è una omotopia tra α ed il cammino costante 1_a. Quindi ogni cammino chiuso è omotopo in X al cammino costante.

Cosa succede al gruppo fondamentale se cambiamo il punto base? È chiaro che se a, b appartengono a diverse componenti connesse per archi, allora non c'è alcuna relazione tra $\pi_1(X,a)$ e $\pi_1(X,b)$. Viceversa si ha:

Lemma 11.13. *Sia $\gamma \in \Omega(X,a,b)$ e definiamo*

$$\gamma_\sharp\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b), \qquad \gamma_\sharp[\alpha] = [i(\gamma) * \alpha * \gamma].$$

Allora $\gamma_\sharp$ è ben definito ed è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che il prodotto $*$ commuta con l'equivalenza omotopica e quindi l'applicazione $\gamma_\sharp\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ è ben definita. Inoltre $\gamma_\sharp$ è un omomorfismo di gruppi perché

$$\begin{aligned}\gamma_\sharp[\alpha]\gamma_\sharp[\beta] &= [i(\gamma) * \alpha * \gamma][i(\gamma) * \beta * \gamma] = [i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma) * \beta * \gamma]\\ &= [i(\gamma) * \alpha * 1_a * \beta * \gamma] = [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] = \gamma_\sharp[\alpha][\beta].\end{aligned}$$

Infine vale

$$i(\gamma)_\sharp(\gamma_\sharp[\alpha]) = [\gamma * i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma)] = [1_a * \alpha * 1_a] = [\alpha]$$

e quindi $\gamma_\sharp$ è un isomorfismo con inverso $i(\gamma)_\sharp$. □

Grazie al Lemma 11.13 è possibile dire che il gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi è, a seconda dei casi, isomorfo oppure non isomorfo ad un dato gruppo G, senza bisogno di specificare il punto base. Se uno spazio topologico X è connesso per archi si denota con $\pi_1(X)$ la *classe di isomorfismo* del suo gruppo fondamentale, calcolato rispetto ad un qualsiasi punto base.

Definizione 11.14. *Uno spazio topologico si dice* ***semplicemente connesso*** *se è connesso per archi e se il suo gruppo fondamentale è banale.*

Equivalentemente, uno spazio topologico X è semplicemente connesso se è connesso per archi e se $\pi_1(X,a) = 0$, con a punto di X comunque scelto.

Esempio 11.15. L'ipercubo I^n è semplicemente connesso. Infatti è un sottospazio convesso di $\mathbb{R}^n$ e basta applicare l'Esempio 11.12.

Da questo momento in poi, per comodità, considereremo la circonferenza S^1 come l'insieme dei numeri complessi di norma 1, ossia identificheremo S^1 con il gruppo topologico $U(1, \mathbb{C})$.

Esempio 11.16. Per ogni intero $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $\alpha_n \colon I \to S^1$ il cammino $\alpha_n(t) = \exp(2i\pi nt) = e^{2i\pi nt}$. Allora l'applicazione

$$\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1), \qquad n \mapsto [\alpha_n],$$

è un omomorfismo di gruppi (dimostreremo in seguito che è un isomorfismo). Infatti α_0 è il cammino costante, mentre il Corollario 11.7 implica che α_{n+m} è omotopicamente equivalente a $\alpha_n * \alpha_m$ per ogni $n, m \geq 0$. Infine osserviamo che $\alpha_{-n} = i(\alpha_n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Proposizione 11.17. *Il gruppo fondamentale del prodotto è isomorfo al prodotto dei gruppi fondamentali, ossia*

$$\pi_1(X \times Y, (a, b)) = \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b).$$

Dimostrazione. Ogni cammino $\alpha \colon I \to X \times Y$ è univocamente determinato dalle sue componenti $\alpha_1 \colon I \to X$ e $\alpha_2 \colon I \to Y$. Esiste quindi una bigezione naturale

$$\Omega(X \times Y, (a, b), (a, b)) = \Omega(X, a, a) \times \Omega(Y, b, b).$$

Similmente ogni omotopia $F \colon I^2 \to X \times Y$ è univocamente determinata dalle sue componenti $F_1 \colon I^2 \to X$ e $F_2 \colon I^2 \to Y$ e la precedente bigezione induce per passaggio ai quozienti un isomorfismo di gruppi

$$\pi_1(X \times Y, (a, b)) = \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b).$$

□

Esercizi

11.5. Dimostrare che $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$ sono semplicemente connessi.

11.6. Siano X uno spazio topologico connesso per archi e $a, b \in X$ due punti. Dimostrare che $\pi_1(X, a)$ è un gruppo abeliano se e solo se l'isomorfismo $\gamma_\sharp \colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$ non dipende dalla scelta di $\gamma \in \Omega(X, a, b)$.

11.7. Siano G un gruppo topologico connesso e $f \colon \mathbb{R} \to G$ un omomorfismo continuo di gruppi topologici. Indichiamo con e l'elemento neutro di G e, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, con $\alpha_n \colon I \to G$ il cammino $\alpha_n(t) = f(nt)$. Dimostrare che se $\mathbb{Z} \subset \ker(f) = f^{-1}(e)$, allora l'applicazione

$$\mathbb{Z} \to \pi_1(G, e), \qquad n \mapsto [\alpha_n],$$

è un omomorfismo di gruppi.

11.8 (♡). Siano X uno spazio topologico ed $a \in X$ un punto base. Mostrare che esiste una bigezione naturale tra lo spazio dei cammini chiusi $\Omega(X, a, a)$ e l'insieme delle applicazioni continue $f\colon S^1 \to X$ tali che $f(1) = a$.

11.9 (∗). Sia X uno spazio topologico connesso per archi e denotiamo con $[S^1, X]$ l'insieme delle classi di omotopia di applicazioni continue $S^1 \to X$. Dimostrare che $[S^1, X]$ è in bigezione con l'insieme delle classi di coniugio del gruppo $\pi_1(X, a)$, qualsiasi sia la scelta di a.

11.3 Il funtore π_1

La Proposizione 11.9 implica in particolare che, per ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ e per ogni punto base $a \in X$, l'applicazione

$$\pi_1(f)\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a)), \qquad \pi_1(f)([\alpha]) = [f\alpha],$$

è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi. Per semplificare le notazioni, se non vi sono ambiguità si usa solitamente il simbolo f_* in luogo di $\pi_1(f)$.

Esempio 11.18. Siano X uno spazio topologico, $i\colon A \to X$ l'inclusione di un suo sottospazio ed $a \in A$ un punto base. In generale l'omomorfismo di gruppi $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ non è iniettivo perché possono esistere cammini omotopicamente non banali in A che sono omotopicamente banali in X. Si ha tuttavia che:

1. Se A è un retratto di X, allora $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ è iniettiva.
2. Se A è un retratto per deformazione di X, allora $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, x)$ è un isomorfismo di gruppi.

Sia infatti α un cammino chiuso in A con punto base a tale che $i_*[\alpha] = 0$, allora esiste una omotopia di cammini $F\colon I^2 \to X$ tale che $F(t, 0) = \alpha(t)$ e $F(t, 1) = a$. Se $r\colon X \to A$ è una retrazione, allora $rF\colon I^2 \to A$ è ancora una omotopia di cammini e quindi $[\alpha] = 0$ in $\pi_1(A, a)$.

Supponiamo adesso che $R\colon X \times I \to X$ sia una deformazione di X su A e sia $\beta \in \Omega(X, a, a)$. Definiamo l'applicazione continua

$$F\colon I^2 \to X, \qquad F(t, s) = R(\beta(t), s).$$

Si osserva subito che F è una omotopia di cammini tra β e $r\beta \in \Omega(A, a, a)$, dove $r = R(-, 0)$. Abbiamo quindi dimostrato che $i_*([r\beta]) = [\beta]$ e quindi che i_* è surgettiva.

Sono del tutto evidenti le proprietà funtoriali di $f \mapsto f_*$, ossia:

1. Se $Id\colon X \to X$ denota l'identità, allora per ogni punto base $a \in X$ l'omomorfismo $Id_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, a)$ è l'identità.

2. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due applicazioni continue e $a \in X$ un punto base. Allora vale
$$g_* f_* = (gf)_* \colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(Z, gf(a)).$$

Per quanto riguarda l'invarianza omotopica la situazione è leggermente più complicata rispetto al π_0.

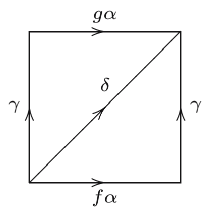
Proposizione 11.19. *Sia $F\colon X \times I \to Y$ un'omotopia tra due applicazioni continue $f = F_0$ e $g = F_1$, e sia $a \in X$ un punto base. Se $\gamma \in \Omega(Y, f(a), g(a))$ denota il cammino $\gamma(s) = F(a,s)$, allora il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(X,a) \arrow[dl, "f_*"'] \arrow[dr, "g_*"] & \\ \pi_1(Y, f(a)) \arrow[rr, "\gamma_\sharp"] & & \pi_1(Y, g(a)) \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che per ogni $\alpha \in \Omega(X,a,a)$ i cammini $\gamma * g\alpha$ e $f\alpha * \gamma$ sono omotopicamente equivalenti. Guardiamo le restrizioni ai lati del quadrato dell'applicazione continua

$$I^2 \to Y, \qquad (t,s) \mapsto F(\alpha(t), s),$$



Il Lemma 11.5, applicato ai due triangoli in figura, ci dà le due equivalenze omotopiche $\gamma * g\alpha \sim \delta$ e $\delta \sim f\alpha * \gamma$, dove δ è il cammino $\delta(t) = F(\alpha(t), t)$. Basta adesso utilizzare la transitività dell'equivalenza omotopica. $\square$

Corollario 11.20. *Siano X uno spazio topologico e $g\colon X \to X$ un'applicazione continua omotopa all'identità. Allora per ogni punto $a \in X$ l'applicazione $g_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X, g(a))$ è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Sia $F\colon X \times I \to X$ un'omotopia tra le applicazioni $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = g(x)$. Se γ denota il cammino $\gamma(t) = F(a,t)$, la Proposizione 11.19 implica che
$$g_* = \gamma_\sharp \colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(X, g(a))$$
e quindi g_* è un isomorfismo. $\square$

Siamo adesso in grado di dimostrare che la classe di isomorfismo del gruppo fondamentale è un invariante omotopico; prima abbiamo bisogno di un semplice lemma insiemistico.

Lemma 11.21. *Siano date tre applicazioni di insiemi*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

Se gf è bigettiva e hg è iniettiva, allora f è bigettiva.

Dimostrazione. Siccome gf e hg sono iniettive, a maggior ragione anche f e g sono iniettive. Siccome gf è surgettiva, per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $gf(a) = g(b)$ e dalla iniettività di g segue che $f(a) = b$; dunque f è surgettiva. $\square$

Teorema 11.22. *Sia $f\colon X \to Y$ un'equivalenza omotopica di spazi topologici. Allora per ogni $a \in X$ l'applicazione $f_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(Y, f(a))$ è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Sia $g\colon Y \to X$ una inversa omotopica di f, cioè un'applicazione continua tale che fg e gf siano entrambe omotope all'identità. Si hanno gli omomorfismi di gruppi

$$\pi_1(X,a) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(a)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, gf(a)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, fgf(a)).$$

Per il Corollario 11.20 le composizioni f_*g_* e g_*f_* sono isomorfismi e quindi per il Lemma 11.21 f_* è bigettivo. $\square$

Esercizi

11.10. Dimostrare che se, in via del tutto ipotetica, la circonferenza S^1 fosse semplicemente connessa (in realtà non lo è), allora $\pi_1(X) = 0$ per ogni spazio topologico X.

11.11. Provare che ogni applicazione continua omotopa ad una costante induce l'omomorfismo nullo tra i rispettivi gruppi fondamentali.

11.12 (♡). Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Dimostrare che X è semplicemente connesso se e solo se ogni applicazione continua $f\colon S^1 \to X$ si estende ad un'applicazione continua $D^2 \to X$.

11.13. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Dimostrare che per ogni cammino $\gamma \in \Omega(X,a,b)$ si ha un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,a) & \xrightarrow{\gamma_\sharp} & \pi_1(X,b) \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ \pi_1(Y,f(a)) & \xrightarrow{(f\gamma)_\sharp} & \pi_1(Y,f(b)). \end{array}$$

11.14. Siano X, Y spazi topologici connessi per archi e $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Provare che la eventuale iniettività o surgettività dell'omomorfismo $f_*: \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$ non dipende dalla scelta del punto base a.

11.15 (♡). Siano Y un retratto di X, $y \in Y$ e denotiamo con $i: Y \to X$ l'inclusione. Dimostrare che se $i_*\pi_1(Y, y)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x)$, allora per ogni retrazione $r: X \to Y$ esiste un isomorfismo di gruppi

$$\pi_1(X, y) \simeq \pi_1(Y, y) \times \ker(r_*).$$

11.4 Semplice connessione di S^n $(n \geq 2)$

In questa sezione mostreremo che per ogni $n \geq 2$ la sfera S^n è semplicemente connessa. L'idea della dimostrazione è abbastanza semplice. Supponiamo infatti che $\alpha \in \Omega(S^n, a, a)$ e facciamo l'ipotesi che l'applicazione $\alpha: I \to S^n$ non sia surgettiva, ossia che esista $b \in S^n$ tale che $\alpha(I) \subset S^n - \{b\}$. Siccome $S^n - \{b\}$ è omeomorfo allo spazio semplicemente connesso $\mathbb{R}^n$, ne segue che α è omotopicamente banale in $S^n - \{b\}$ ed a maggior ragione è omotopicamente banale in S^n. Siccome I ha "dimensione 1" mentre S^n ha "dimensione n", per $n \geq 2$ l'ipotesi che α non sia surgettiva non è del tutto assurda.

Sfortunatamente, per ogni $n \geq 2$, esistono dei cammini $I \to S^n$ che sono continui e surgettivi: sono le cosiddette *curve di Peano* (Teorema 15.17 ed Esercizio 15.9).

Fortunatamente, esistono alcuni sistemi per ovviare a questo inconveniente; i due più noti sono:

1. Mostrare che α è omotopo ad un cammino di classe C^∞; dopo di che utilizzare il lemma di Sard per dimostrare che ogni cammino $I \to S^n$ di classe C^∞ non è surgettivo se $n \geq 2$.
2. Mostrare che α è omotopicamente equivalente alla giunzione di un numero finito di cammini chiusi non surgettivi.

Qui percorreremo la seconda strada, dimostrando un risultato più generale noto al pubblico come **teorema di Van Kampen**. Rimandiamo invece alla lettura di [Mi65, GP74] per maggiori informazioni sul primo dei due metodi esposti.

Teorema 11.23 (del numero di Lebesgue). *Siano (Y, d) uno spazio metrico compatto, $f: Y \to X$ un'applicazione continua e $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Esiste allora un numero reale positivo δ tale che per ogni $y \in Y$ l'insieme $f(B(y, \delta))$ è interamente contenuto in un aperto del ricoprimento $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. L'immagine $f(Y)$ è un sottospazio compatto di X e possiamo trovare $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $f(Y) \subset A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$

denotiamo con $C_i = f^{-1}(X - A_i) = Y - f^{-1}(A_i)$ e con $d_i \colon Y \to \mathbb{R}$ la funzione che misura la distanza dal chiuso C_i, ossia $d_i(y) = \inf\{d(z, y) \mid z \in C_i\}$. Abbiamo dimostrato che le funzioni d_i sono continue e che $d_i(y) = 0$ se e solo se $y \in C_i$. Siccome i chiusi C_i hanno intersezione vuota possiamo considerare la funzione

$$g \colon Y \to]0, +\infty[\,, \qquad g(y) = \max(d_1(y), \ldots, d_n(y)).$$

Siccome g è continua e Y è compatto, possiamo definire il numero $\delta > 0$ come il minimo di g su Y. Se $y \in Y$, siccome $g(y) \geq \delta$, esiste un indice i tale che $d_i(y) \geq \delta$ e quindi $B(y, \delta) \subset f^{-1}(A_i)$. □

Corollario 11.24. *Sia $\alpha \colon I \to X$ un cammino continuo e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un intero positivo n tale che, per ogni $i = 0, \ldots, n-1$, l'immagine dell'applicazione $\alpha \colon \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to X$ è interamente contenuta in un aperto del ricoprimento $\mathcal{A}$.*

Dimostrazione. L'intervallo I è uno spazio metrico compatto e possiamo applicare il Teorema 11.23. □

Teorema 11.25 (Van Kampen: prima parte). *Siano A, B due aperti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$. Sia $x_0 \in A \cap B$ un punto e denotiamo con $f_* \colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ e $g_* \colon \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ gli omomorfismi di gruppi indotti dalle inclusioni $A \subset X$ e $B \subset X$.*
Se gli aperti A, B ed $A \cap B$ sono connessi per archi, allora il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di f_* e g_*.

Ricordiamo che un gruppo G si dice generato da un sottoinsieme $S \subset G$ se è possibile scrivere ogni elemento di G come un prodotto di elementi di $S \cup S^{-1}$, dove $S^{-1} = \{g^{-1} \mid g \in S\}$. Similmente diremo che G è generato da due sottoinsiemi S_1 ed S_2 se è generato dalla loro unione $S = S_1 \cup S_2$.

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$ un cammino, bisogna mostrare che α è omotopicamente equivalente alla giunzione di un numero finito di cammini $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Omega(X, x_0, x_0)$, ognuno dei quali interamente contenuto in A oppure in B.
Per il Corollario 11.24 esiste $n > 0$ tale che la restrizione di α ad ognuno degli intervalli $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, per $i = 1, \ldots, n$, è contenuta interamente in A o in B. Indichiamo con α_i la parametrizzazione standard della restrizione di α all'intervallo $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, ossia $\alpha_i(t) = \alpha\left(\frac{i-1+t}{n}\right)$.

Per ogni $i = 1, \ldots, n-1$ denotiamo $x_i = \alpha(i/n)$. Poiché gli aperti A, B e $A \cap B$ sono per ipotesi connessi per archi, per ogni indice i possiamo trovare un cammino $\beta_i \in \Omega(X, x_i, x_0)$ in modo tale che:

1. Se $x_i \in A \cap B$, allora $\beta_i \in \Omega(A \cap B, x_i, x_0)$.
2. Se $x_i \in A - B$, allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, x_0)$.
3. Se $x_i \in B - A$, allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, x_0)$.

Le precedenti tre condizioni implicano in particolare che:

1. Se $x_i \in A$, allora $\beta_i \in \Omega(A, x_i, x_0)$.
2. Se $x_i \in B$, allora $\beta_i \in \Omega(B, x_i, x_0)$.

Ecco quindi che α è omotopicamente equivalente a $\gamma_1 * \cdots * \gamma_n$, dove

$$\begin{aligned}\gamma_1 = \alpha_1 * \beta_1,\ \gamma_2 = i(\beta_1) * \alpha_2 * \beta_2,\ \ldots \\ \ldots, \gamma_j = i(\beta_{j-1}) * \alpha_j * \beta_j,\ \ldots \\ \ldots, \gamma_{n-1} = i(\beta_{n-2}) * \alpha_{n-1} * \beta_{n-1},\ \gamma_n = i(\beta_{n-1}) * \alpha_n.\end{aligned}$$

Ogni γ_i appartiene a $\Omega(A, x_0, x_0) \cup \Omega(B, x_0, x_0)$ e quindi il teorema è dimostrato. □

Corollario 11.26. *Siano A, B due aperti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Se gli aperti A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi e se A, B sono semplicemente connessi, allora anche X è semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Che X è connesso per archi è evidente. Sia $x_0 \in A \cap B$ un punto base; siccome $\pi_1(A, x_0) = \pi_1(B, x_0) = 0$, per il Teorema 11.25 il gruppo $\pi_1(X, x_0)$ è generato dall'elemento neutro ed è quindi banale. □

Corollario 11.27. *La sfera S^n è semplicemente connessa per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere $S^n = A \cup B$, dove $A = S^n - \{(1, 0, \ldots, 0)\}$ e $B = S^n - \{(-1, 0, \ldots, 0)\}$. Gli aperti A e B sono omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ e sono quindi semplicemente connessi, mentre $A \cap B$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{0\}$ che è connesso per ogni $n \geq 2$. □

Corollario 11.28. *Il complementare di un insieme finito in $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso per $n \geq 3$.*

Dimostrazione. Supponiamo $n \geq 3$ e dimostriamo per induzione su m che lo spazio $X = \mathbb{R}^n - \{p_1, \ldots, p_m\}$ è semplicemente connesso, dove $p_1, \ldots, p_m$ sono punti distinti. Per $m = 0$ lo spazio X è convesso ed è quindi semplicemente connesso. Per $m = 1$ la sfera $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p_1\| = 1\} \simeq S^{m-1}$ è un retratto per deformazione di X e la tesi segue dal Corollario 11.27.

Supponiamo adesso $m \geq 2$ ed il risultato valido per $\mathbb{R}^n - \{k \text{ punti}\}$ per ogni $k < m$. Siccome $p_1 \neq p_2$ esiste un'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $f(p_1) \neq f(p_2)$; a meno di cambiare f con $-f$ (o p_1 con p_2) non è restrittivo supporre $f(p_1) < f(p_2)$. Adesso scriviamo $X = A \cup B$, dove

$$A = \{x \in X \mid f(x) < f(p_2)\}, \qquad B = \{x \in X \mid f(x) > f(p_1)\}.$$

Gli aperti $A, B, A \cap B$ sono tutti omeomorfi a $\mathbb{R}^n - \{k \text{ punti}\}$ con $k < m$ e basta applicare l'ipotesi induttiva ed il Corollario 11.26. □

Corollario 11.29. *Lo spazio proiettivo complesso* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *è semplicemente connesso per ogni* $n \geq 0$.

Dimostrazione. Induzione su n, osservando che $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ è lo spazio formato da un punto ed è quindi semplicemente connesso.

Sia $z_0, \dots, z_n$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e denotiamo con $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ l'iperpiano di equazione $z_0 = 0$. Siccome $H \cong \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$, per l'ipotesi induttiva possiamo supporre che H sia semplicemente connesso. Scriviamo adesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = A \cup B$, dove A e B sono gli aperti

$$A = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - H, \qquad B = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - \{[1, 0, \dots, 0]\}.$$

Osserviamo poi che:

1. L'applicazione $\mathbb{C}^n \to A$, $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [1, z_1, \dots, z_n]$, è un omeomorfismo e quindi A è semplicemente connesso.
2. L'intersezione $A \cap B$, vista come un sottoinsieme A, è omeomorfa a $\mathbb{C}^n - \{0\}$ ed è quindi connessa.
3. L'applicazione

$$R \colon B \times I \to B, \qquad R([z_0, z_1, \dots, z_n], t) = [tz_0, z_1, \dots, z_n],$$

   è una deformazione di B su H e di conseguenza B è semplicemente connesso.

Segue dal Corollario 11.26 che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso. □

La dimostrazione precedente non funziona con gli spazi proiettivi reali poiché per $n = 1$ lo spazio $A \cap B \cong \mathbb{R} - \{0\}$ non è connesso. In effetti si dimostrerà che per ogni $n > 0$ lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non è semplicemente connesso. Tuttavia la costruzione utilizzata nella dimostrazione del Corollario 11.29, applicata agli spazi proiettivi reali dimostra che $\pi_1(\mathbb{P}^n)$, $n > 0$, è generato dal gruppo fondamentale di una sua retta (Esercizio 11.20).

Esercizi

11.16. Siano A, B due aperti di uno spazio topologico. Dimostrare che se $A \cup B$ e $A \cap B$ sono connessi per archi, allora A e B sono connessi per archi.

11.17. Calcolare il gruppo fondamentale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ unione della sfera S^2 e dei tre piani coordinati.

11.18. Provare che per ogni coppia di interi $0 \leq n \leq m - 3$, il complementare in $\mathbb{R}^m$ di un sottospazio vettoriale di dimensione n è semplicemente connesso.

11.19. Dimostrare che, se in aggiunta alle ipotesi del Teorema 11.25, l'inclusione $A \cap B \to B$ induce un omomorfismo surgettivo tra i rispettivi gruppi fondamentali, allora l'omomorfismo $f_* \colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è surgettivo.

11.20. Siano a un punto dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ed $H \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ un iperpiano che contiene a. Provare che, se $n \geq 2$, allora l'inclusione $H \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ induce un'applicazione surgettiva $\pi_1(H, a) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), a)$.

11.21 (♡). Sia $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ una esaustione in compatti di uno spazio topologico X. Provare che se K_n è semplicemente connesso per ogni n, allora anche X è semplicemente connesso. Più in generale, dimostrare che se $x \in K_1$ e se l'inclusione $K_n \subset K_{n+1}$ induce un isomorfismo $\pi_1(K_n, x) \simeq \pi_1(K_{n+1}, x)$ per ogni n, allora ogni inclusione $K_n \subset X$ induce un isomorfismo di gruppi $\pi_1(K_n, x) \simeq \pi_1(X, x)$.

11.22 ($*$, ♡). Dimostrare che gli spazi (vedi Figura 11.1):

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \sin^2(\pi z)\},$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \max(0, \sin(\pi z))\},$$

sono semplicemente connessi.

Figura 11.1. Le salsicce e la collana.

11.5 Monoidi topologici $\curvearrowright$

Definizione 11.30. *Uno **spazio $\mathbf{A_2}$** è una terna (X, μ, e), dove X è uno spazio topologico, $\mu\colon X \times X \to X$ è un'applicazione continua ed e è un punto di X, che chiameremo **unità**, tale che*

$$\mu(x, e) = \mu(e, x) = x$$

*per ogni $x \in X$. Uno spazio A_2 si dice un **monoide topologico** se μ è un prodotto associativo, ossia se*

$$\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), z)$$

per ogni $x, y, z \in X$.

Notiamo che l'unità e è univocamente determinata dal prodotto μ: infatti se $e_1, e_2 \in X$ hanno la proprietà che $\mu(x, e_1) = \mu(e_2, x) = x$ per ogni x, allora si ha $e_2 = \mu(e_2, e_1) = e_1$. Ogni gruppo topologico è un monoide topologico; ogni retratto di uno spazio A_2 che contiene l'unità è ancora uno spazio A_2.

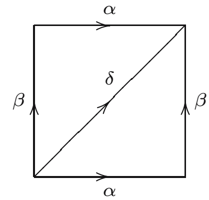
Teorema 11.31. *Sia (X, μ, e) uno spazio A_2. Allora:*

1. *Il gruppo $\pi_1(X, e)$ è abeliano.*
2. *Tramite l'isomorfismo naturale $\pi_1(X \times X, (e, e)) = \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e)$ l'omomorfismo μ_* si identifica con il prodotto in $\pi_1(X, e)$, ossia*

$$\mu_* \colon \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) \to \pi_1(X, e), \qquad \mu_*([\alpha], [\beta]) = [\alpha][\beta].$$

Dimostrazione. Dati due cammini α e β con punto base e, per definizione si ha $\mu_*([\alpha], [\beta]) = [\delta]$ dove $\delta(t) = \mu(\alpha(t), \beta(t))$. Considerando l'applicazione

$$F \colon I^2 \to X, \qquad F(t, s) = \mu(\alpha(t), \beta(s)),$$



il Lemma 11.5 ci dà le equivalenze omotopiche

$$\alpha * \beta \sim \delta \sim \beta * \alpha.$$

□

Osservazione 11.32. Tra le nozioni di monoide e spazio A_2 ci sono molte nozioni intermedie. Ad esempio uno spazio A_3 è una quaterna (X, μ, e, h) dove (X, μ, e) è uno spazio A_2 ed $h \colon X^3 \times I \to X$ è una omotopia tra le due applicazioni

$$(x, y, z) \mapsto \mu(\mu(x, y), z), \qquad (x, y, z) \mapsto \mu(x, \mu(y, z)).$$

In particolare in uno spazio A_3 il prodotto è associativo a meno di omotopia. Un'altra nozione intermedia (troppo avanzata per essere esposta in questo volume) è quella di spazio A_∞, introdotta negli anni '60 da J. Stasheff [St63], che ha la notevole proprietà di essere invariante per omotopia: questa ed altre proprietà hanno fatto sì che gli spazi A_∞ ed i suoi analoghi (algebre A_∞, categorie A_∞) siano un argomento di grande interesse e dalle molte applicazioni nella matematica contemporanea.

Esercizi

11.23. Dimostrare che i gruppi fondamentali di $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ e $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ sono abeliani.

11.24. Sia (X, μ, e) un monoide topologico ed indichiamo con $p_n \colon X \to X$ l'elevazione alla n-esima potenza, $n > 0$. Dimostrare che l'omomorfismo di gruppi $(p_n)_* \colon \pi_1(X, e) \to \pi_1(X, e)$ coincide con l'elevazione alla n-esima potenza nel gruppo abeliano $\pi_1(X, e)$.

11.25. Sia G un gruppo topologico connesso per archi con elemento neutro e. Per ogni $g \in G$ definiamo l'applicazione continua

$$\mathrm{Inn}_g \colon G \to G, \qquad \mathrm{Inn}_g(a) = gag^{-1}.$$

Dimostrare che gli omomorfismi $(\mathrm{Inn}_g)_* \colon \pi_1(G,e) \to \pi_1(G,e)$ sono uguali all'identità.

11.26. Sia X uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff. Provare che lo spazio $C(X,X)$, con la topologia compatta-aperta ed il prodotto di composizione è un monoide topologico.

12

Rivestimenti

Omeomorfismi locali – Rivestimenti – Quozienti per azioni propriamente discontinue – Parliamo un po' di sezioni – Sollevamento dell'omotopia – I teoremi di Brouwer e Borsuk – Un esempio di gruppo fondamentale non abeliano

Fino a questo momento sappiamo solamente dimostrare che certi spazi sono semplicemente connessi, ed infatti è solitamente difficile dimostrare direttamente l'esistenza di cammini chiusi non omotopi al cammino costante. Esistono però dei metodi indiretti: ad uno di questi è dedicato questo capitolo.

Introdurremo la nozione di **rivestimento** di uno spazio topologico e dimostreremo che i rivestimenti di uno spazio topologico semplicemente connesso sono tutti di un certo tipo che chiameremo "banale". Sarà poi immediato osservare che esistono rivestimenti non banali di alcuni spazi topologici di uso comune, come le circonferenze e gli spazi proiettivi reali.

In questo capitolo tutti gli spazi topologici sono assunti, salvo avviso contrario, localmente connessi per archi. Ricordiamo che in uno spazio localmente connesso per archi, ogni sottoinsieme aperto è ancora localmente connesso per archi e le componenti connesse per archi sono aperte e coincidono con le componenti connesse.

12.1 Omeomorfismi locali

Definizione 12.1. *Un'applicazione continua $f\colon X \to Y$ si dice un* ***omeomorfismo locale*** *se per ogni $x \in X$ esistono due aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f\colon A \to B$ è un omeomorfismo.*

Esempio 12.2. Ogni applicazione continua, iniettiva ed aperta è un omeomorfismo locale.

Lemma 12.3. *Ogni omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.*

Dimostrazione. Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo locale e sia $V \subset X$ un aperto. Vogliamo dimostrare che $f(V)$ è intorno di ogni suo punto, ossia che per ogni $y \in f(V)$ esiste un aperto $U \subset Y$ tale che $y \in U \subset f(V)$.

Sia $x \in V$ tale che $f(x) = y$, per ipotesi esistono due aperti $A \subset X$, $B \subset Y$ tali che $x \in A$, $f(A) = B$ e la restrizione $f\colon A \to B$ è un omeomorfismo. In particolare $y \in f(V \cap A)$, $U = f(V \cap A)$ è aperto in B e quindi anche in Y. $\square$

Esercizi

12.1. Dimostrare che le fibre di un omeomorfismo locale sono discrete.

12.2. Dire se l'applicazione f dell'Esercizio 3.39 è un omeomorfismo locale.

12.3 (♡). Sia $p\colon E \to X$ un omeomorfismo locale, con E di Hausdorff. Dimostrare che:

1. La diagonale di $E \times E$ è aperta e chiusa in
$$E \times_X E = \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid p(e_1) = p(e_2)\}.$$
2. Sia Y uno spazio connesso e siano $f, g\colon Y \to E$ due applicazioni continue tali che $pf = pg$. Allora $f = g$ oppure $f(y) \neq g(y)$ per ogni $y \in Y$.

12.4. Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo locale. Dimostrare che:

1. Se Y soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora anche X soddisfa il primo assioma di numerabilità.
2. Se Y è separabile e ogni fibra di f è al più numerabile, allora X è separabile.

12.2 Rivestimenti

Definizione 12.4. *Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Un'applicazione continua e surgettiva $p\colon E \to X$ si dice un* ***rivestimento di*** X *se per ogni $x \in X$ esiste un aperto connesso $V \subset X$ tale che:*

1. $x \in V$.
2. Se $U \subset E$ è una componente connessa di $p^{-1}(V)$, allora $p\colon U \to V$ è un omeomorfismo.

Lo spazio X viene detto la **base** del rivestimento, lo spazio E viene detto **spazio totale** del rivestimento, mentre gli insiemi $p^{-1}(x)$, al variare di $x \in X$, sono detti le **fibre** del rivestimento.

Diremo che un aperto connesso $V \subset X$ è un **aperto banalizzante** di p se soddisfa la precedente condizione 2. Diremo che il rivestimento è **banale** se la base X è un aperto banalizzante.

Se $p\colon E \to X$ è un rivestimento, segue dalla definizione che ogni punto $e \in E$ possiede un intorno aperto omeomorfo ad un intorno aperto di $p(e)$: basta infatti considerare la componente connessa di e in $p^{-1}(V)$, dove V è un qualunque aperto banalizzante che contiene $p(e)$. In particolare anche E è localmente connesso per archi.

Definizione 12.5. *Diremo che un rivestimento* $p\colon E \to X$ *è* ***connesso*** *se lo spazio totale* E *è connesso.*

Esempio 12.6. Sia X uno spazio connesso ed F uno spazio non vuoto con la topologia discreta. Allora la proiezione sul primo fattore $X \times F \to X$ è un rivestimento banale che è connesso se e solo se F è formato da un solo punto.

Esempio 12.7. Identifichiamo la circonferenza S^1 con l'insieme dei numeri complessi di modulo 1. L'applicazione

$$\mathbb{e}\colon \mathbb{R} \to S^1, \qquad \mathbb{e}(t) = e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t)$$

è un rivestimento connesso. Infatti $\mathbb{e}$ è surgettiva e per ogni intervallo aperto $]a,b[\subset \mathbb{R}$ si ha

$$\mathbb{e}^{-1}(\mathbb{e}(\,]a,b[\,)) = \cup\{\,]a+n, b+n[\;|\; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Se $|b-a| < 1$, allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'intervallo $]a+n, b+n[$ è una componente connessa di $\mathbb{e}^{-1}(\mathbb{e}(\,]a,b[\,))$ e l'applicazione $\mathbb{e}\colon\,]a+n, b+n[\to S^1$ è un omeomorfismo sull'immagine.

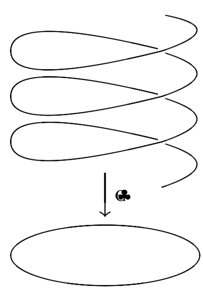


Figura 12.1. Identificando $\mathbb{R}$ con l'elica regolare $E = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid z = \mathbb{e}(t)\}$ tramite l'omeomorfismo $t \mapsto (\mathbb{e}(t), t)$, il rivestimento $\mathbb{e}\colon \mathbb{R} \to S^1$ coincide con la restrizione all'elica della proiezione $p\colon \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Esempio 12.8. La proiezione naturale $p\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento. Infatti per ogni $x \in S^n$ l'aperto $U = \{y \in S^n \mid (x \cdot y) \neq 0\}$ è saturo rispetto a p ed ha come componenti connesse gli aperti

$$\{y \in S^n \mid (x \cdot y) > 0\}, \qquad \{y \in S^n \mid (x \cdot y) < 0\}.$$

La restrizione di p ad ognuna delle due componenti connesse è un omeomorfismo sull'immagine.

Esempio 12.9. L'applicazione $p\colon \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C}-\{0\}$, $p(z) = z^2$, è un rivestimento. Infatti un aperto $U \subset \mathbb{C}-\{0\}$ è banalizzante se e solo se ammette una determinazione continua della radice quadrata. Siccome la determinazione continua della radice quadrata esiste sul complementare di ogni semiretta reale del piano di Gauss con estremo nel punto 0, ne segue che gli aperti banalizzanti ricoprono $\mathbb{C}-\{0\}$.

Esempio 12.10. L'applicazione

$$\mathbb{e}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}-\{0\}, \qquad \mathbb{e}(z) = \exp(2\pi i z) = e^{2\pi i z},$$

è un rivestimento. Gli aperti banalizzanti sono esattamente gli aperti dove esiste la determinazione continua del logaritmo. Alcuni autori usano il termine *esponenziale tagliato* per indicare l'applicazione $\mathbb{e}$.

Proposizione 12.11. *Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Allora:*

1. *p è un omeomorfismo locale; in particolare p è un'applicazione aperta.*
2. *Per ogni coppia di punti $x, y \in X$, le fibre $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(y)$ hanno la stessa cardinalità.*
3. *Per ogni sottospazio $Y \subset X$ connesso e localmente connesso per archi, la restrizione $p\colon p^{-1}(Y) \to Y$ è ancora un rivestimento.*

Dimostrazione. [1] Se $V \subset X$ è un aperto banalizzante di p, allora segue dalla definizione di rivestimento che la restrizione $p\colon p^{-1}(V) \to V$ è un omeomorfismo locale. Siccome gli aperti $p^{-1}(V)$, con V aperto banalizzante, ricoprono E, ne segue che anche $p\colon E \to X$ è un omeomorfismo locale.

[2] Sia $x_0 \in X$ un punto fissato e denotiamo con $A \subset X$ l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $p^{-1}(x)$ ha la stessa cardinalità di $p^{-1}(x_0)$. Siccome X è connesso ed A non è vuoto, basta dimostrare che A è aperto e chiuso.

Osserviamo che, se $V \subset X$ è un aperto banalizzante, allora per ogni $x \in V$, la fibra $p^{-1}(x)$ interseca ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ in esattamente un punto e pertanto le fibre $p^{-1}(x)$, per $x \in V$, hanno tutte la stessa cardinalità. Di conseguenza si ha $V \subset A$ oppure $V \cap A = \emptyset$. Siccome gli aperti banalizzanti ricoprono X, questo prova che A e $X - A$ sono entrambi aperti.

[3] Siano $y \in Y$ un punto e $V \subset X$ un aperto banalizzante del rivestimento $p\colon E \to X$ che contiene y. Siccome Y è localmente connesso per archi e $V \cap Y$ è aperto in Y, esiste un aperto $B \subset X$ tale che $B \cap Y$ è la componente connessa di y in $V \cap Y$. Sia A la componente connessa di $B \cap V$ che contiene $B \cap Y$, allora $A \cap Y = B \cap Y$. Poiché X è localmente connesso per archi, A risulta essere un aperto connesso per archi e, siccome $A \subset V$, ne segue che A è un aperto banalizzante di $p\colon E \to X$ tale che $A \cap Y$ è ancora connesso per archi. Siano $\{A_i\}$ le componenti connesse di $p^{-1}(A)$; dato che $p\colon A_i \to A$ è un omeomorfismo per ogni indice i, ne segue che anche $p\colon A_i \cap p^{-1}(Y) \to A \cap Y$ è un omemorfismo per ogni i ed in particolare $\{A_i \cap p^{-1}(Y)\}$ sono tutte e sole le componenti connesse di $p^{-1}(A \cap Y)$. $\square$

Definizione 12.12. *Se ogni fibra di un rivestimento $p\colon E \to X$ è finita ed ha cardinalità d, allora diremo che p è un **rivestimento di grado** d.*

Ad esempio: la proiezione $S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento di grado 2, l'applicazione $p\colon S^1 \to S^1$, $p(z) = z^3$, è un rivestimento di grado 3, mentre l'applicazione $S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$, $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^2, z_2^2)$, è un rivestimento di grado 4.

Esercizi

12.5. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Provare che se X è di Hausdorff, allora anche E è di Hausdorff.

12.6. Siano $p\colon E \to X$ e $q\colon F \to Y$ due rivestimenti. Dimostrare che

$$p \times q\colon E \times F \to X \times Y, \qquad (p \times q)(e, f) = (p(e), q(f))$$

è un rivestimento.

12.7. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Dimostrare che per ogni spazio connesso e localmente connesso per archi Y e per ogni applicazione continua $f\colon Y \to X$, l'applicazione

$$f^*p\colon \{(e, y) \in E \times Y \mid p(e) = f(y)\} \to Y, \qquad f^*p(e, y) = y,$$

è un rivestimento. (Sugg.: identificare Y con il grafico di f.)

12.8 (♡). Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, l'applicazione

$$\mathbb{e}\colon]a, b[\to S^1, \qquad \mathbb{e}(t) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$$

è un omeomorfismo locale ma non è un rivestimento. Perché?

12.9 (♡). Sia $p\colon E \to X$ un omeomorfismo locale di spazi connessi e localmente connessi per archi. Dimostrare che se E è compatto di Hausdorff e X di Hausdorff, allora p è un rivestimento di grado finito.

12.10. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento e si considerino i seguenti due sottospazi del prodotto $E \times E$

$$E \times_X E = \{(u, v) \in E \times E \mid p(u) = p(v)\}, \quad \Delta = \{(u, u) \in E \times E \mid u \in E\}.$$

Dimostrare che Δ è aperto e chiuso in $E \times_X E$.

12.11 (∗). Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2 a coefficienti interi e consideriamo l'applicazione

$$p_A\colon S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1, \qquad p_A(z_1, z_2) = (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d).$$

Dimostrare che se $\det(A) \neq 0$, allora p_A è un rivestimento di grado uguale a $|\det(A)|$.

12.3 Quozienti per azioni propriamente discontinue

Definizione 12.13. *Sia G un sottogruppo del gruppo* $\mathrm{Omeo}(E)$ *degli omeomorfismi di uno spazio topologico E in sé. Diremo che G agisce in modo* ***propriamente discontinuo*** *se ogni punto $e \in E$ possiede un intorno U tale che $g(U) \cap U = \emptyset$ per ogni $g \in G$ diverso dall'identità.*

Esempio 12.14. La traslazione $t \mapsto t+1$ genera un sottogruppo di $\mathrm{Omeo}(\mathbb{R})$ che agisce in modo propriamente discontinuo.

Esempio 12.15. Il sottogruppo di $\mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2 - \{0\})$ generato dalla moltiplicazione per uno scalare $\lambda > 1$ agisce in modo propriamente discontinuo.

Teorema 12.16. *Sia E uno spazio topologico localmente connesso per archi e sia $G \subset$* $\mathrm{Omeo}(E)$ *un sottogruppo che agisce in modo propriamente discontinuo. Se il quoziente E/G è connesso, allora la proiezione al quoziente $p\colon E \to E/G$ è un rivestimento.*

Dimostrazione. Fissiamo un punto $e \in E$ e scegliamo un aperto $\widehat{U} \subset E$ tale che $e \in \widehat{U}$ e $g(\widehat{U}) \cap \widehat{U} = \emptyset$ per ogni g diverso dall'identità. Per ipotesi E è localmente connesso per archi e quindi anche $\widehat{U}$ è localmente connesso per archi. Se denotiamo con $U \subset \widehat{U}$ la componente connessa per archi che contiene e, allora U è aperto in $\widehat{U}$ e dunque U è un aperto connesso di E. A maggior ragione vale $g(U) \cap U = \emptyset$ per ogni g diverso dall'identità.

Per la Proposizione 5.13, la proiezione $p\colon E \to E/G$ è un'applicazione aperta e si ha
$$p^{-1}(p(U)) = \cup\{g(U) \mid g \in G\}.$$
Basta quindi dimostrare che gli aperti connessi $g(U)$ sono, al variare di $g \in G$, tutte e sole le componenti connesse di $p^{-1}(p(U))$ e che, per ogni $g \in G$, la proiezione $p\colon g(U) \to p(U)$ è un omeomorfismo.

Siccome $g(U) \cap h(U) = h(h^{-1}g(U) \cap U)$, si ha che $g(U) \cap h(U) = \emptyset$ per ogni $g \neq h$. Dunque $p^{-1}(p(U))$ è l'unione della famiglia di aperti connessi e disgiunti $\{g(U) \mid g \in G\}$ che di conseguenza risulta essere la famiglia delle componenti connesse in $p^{-1}(p(U))$. La proiezione $p\colon U \to p(U)$ è aperta e bigettiva ed è quindi un omeomorfismo. La proiezione $p\colon g(U) \to p(U)$ è la composizione dell'omeomorfismo $g^{-1}\colon g(U) \to U$ e dell'omeomorfismo $p\colon U \to p(U)$. $\square$

Proposizione 12.17. *Sia $G \subset$* $\mathrm{Omeo}(E)$ *un sottogruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico di Hausdorff E. Se:*

1. *G agisce liberamente, ossia $g(e) \neq e$ per ogni $e \in E$ e per ogni g diverso dall'identità.*
2. *Ogni punto $e \in E$ possiede un intorno aperto U tale che $g(U) \cap U \neq \emptyset$ per al più un insieme finito di $g \in G$. (Si noti che questa condizione è automaticamente soddisfatta se G è finito.)*

Allora G agisce in modo propriamente discontinuo.

Dimostrazione. Siano e ed U come nell'enunciato; bisogna provare che esiste un intorno V di e tale che $g(V) \cap V = \emptyset$ per ogni g diverso dall'identità. Indichiamo con

$$\{g_1, \ldots, g_n\} = \{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Siccome E è di Hausdorff e G agisce liberamente, per il Lemma 3.70 esistono n aperti disgiunti $U_1, \ldots, U_n \subset E$ tali che $g_i(e) \in U_i$ per ogni i. Si verifica facilmente che

$$V = U \cap g_1^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap g_n^{-1}(U_n)$$

è un intorno di e con le proprietà richieste. □

Osservazione 12.18. Il quoziente di uno spazio di Hausdorff per un gruppo che agisce in modo propriamente discontinuo potrebbe non essere di Hausdorff. Rimandiamo il lettore al libro di Massey [Ma67, pag. 167] per un esempio con $E = \mathbb{R}^2$, con il gruppo $G = \mathbb{Z}$ che agisce in modo propriamente discontinuo ed il quoziente E/G non di Hausdorff.

Esempio 12.19. Sia $G \subset \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ il sottogruppo di omeomorfismi generato dalle due traslazioni

$$a, b \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad a(x,y) = (x+1, y), \qquad b(x,y) = (x, y+1).$$

Notiamo che $ab = ba$, che l'applicazione $\mathbb{Z}^2 \to G$, $(n,m) \mapsto a^n b^m$, è un isomorfismo di gruppi e che, se $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto contenuto in una palla di raggio $< 1/2$, allora $g(U) \cap U = \emptyset$ per ogni g diverso dall'identità.

Il quoziente $\mathbb{R}^2/G$ è omeomorfo al toro $S^1 \times S^1$: infatti l'applicazione

$$\mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1, \qquad (x,y) \mapsto (\mathbb{e}(x), \mathbb{e}(y)),$$

si fattorizza ad una applicazione continua e bigettiva $\mathbb{R}^2/G \to S^1 \times S^1$. Basta adesso osservare che $\mathbb{R}^2/G$ è compatto ed il prodotto di circonferenze è di Hausdorff.

Esempio 12.20. Sia $G \subset \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ il sottogruppo di omeomorfismi generato dalle due isometrie

$$a, b \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad a(x,y) = (x+1, 1-y), \qquad b(x,y) = (x, y+1).$$

Notiamo che $bab = a$ e che gli elementi di G sono le isometrie della forma $g(x,y) = (x+n, (-1)^n y + m)$ per qualche $n, m \in \mathbb{Z}$. Dunque, se $U \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto contenuto in una palla di raggio $< 1/2$, allora $g(U) \cap U = \emptyset$ per ogni g diverso dall'identità. La proiezione $p \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G$ è quindi un rivestimento connesso.

Lo stesso ragionamento usato nell'Esempio 5.16 mostra che il quoziente $\mathbb{R}^2/G$ è di Hausdorff e che la composizione dell'inclusione $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ con la proiezione p si fattorizza ad un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2/G$ e la bottiglia di Klein.

Esercizi

12.12. Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio di Hausdorff che agisce in modo propriamente discontinuo. Dimostrare che le orbite di G sono insiemi chiusi e discreti. (Sugg.: ogni punto possiede un intorno che interseca ogni orbita al più una volta.)

12.13. Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio localmente compatto di Hausdorff E. Si assuma che:

1. G agisce liberamente su E.
2. Per ogni sottospazio compatto $K \subset E$, si ha $g(K) \cap K \neq \emptyset$ per al più un numero finito di $g \in G$.

Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo e che il quoziente E/G è localmente compatto di Hausdorff.

12.14. Sia G un gruppo di isometrie di uno spazio metrico (E, d). Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo se e solo se per ogni $e \in E$ esiste $l > 0$ tale che $d(e, g(e)) \geq l$ per ogni $g \in G$ diverso dall'identità.

12.15. Siano $0 < p < q$ due interi relativamente primi e fissiamo una radice primitiva q-esima dell'unità $\xi \in \mathbb{C}$. Provare che il gruppo degli omeomorfismi di $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\}$ generato da $(z_1, z_2) \mapsto (\xi z_1, \xi^p z_2)$ è isomorfo a gruppo ciclico $\mathbb{Z}/q$ ed agisce in modo propriamente discontinuo. Lo spazio quoziente viene detto **spazio lenticolare**.

12.16 (∗). Siano $H \subset \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi z con parte immaginaria maggiore di 0 e $G \subset \mathrm{Omeo}(H)$ l'insieme degli omeomorfismi della forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{con } \ a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1.$$

Dimostrare che G è un sottogruppo che agisce in modo propriamente discontinuo su $H - (Gi \cup G\omega)$, dove Gi e $G\omega$ sono rispettivamente le orbite delle radici quadrate e cubiche di -1, ossia $i^2 + 1 = 0$ e $\omega^2 - \omega + 1 = 0$. (Sugg.: può essere utile dimostrare che la parte immaginaria di $(az + b)/(cz + d)$ è uguale alla parte immaginaria di z diviso $|cz + d|^2$. Usare l'Esercizio 12.13.)

12.4 Parliamo un po' di sezioni

Se $p\colon X \to Y$ è un'applicazione di insiemi, diremo che $s\colon Y \to X$ è una **sezione** di p se $p(s(y)) = y$ per ogni $y \in Y$. Condizione necessaria affinché p possieda sezioni è che p sia surgettiva; viceversa, l'assioma della scelta dice esattamente che ogni applicazione surgettiva possiede sezioni.

Passando al caso topologico, si verifica che in generale non esistono sezioni continue di applicazioni continue surgettive.

Proposizione 12.21. *Siano $p\colon X \to Y$ un'applicazione continua e $s\colon Y \to X$ una sezione continua di p, ossia un'applicazione continua tale che $p(s(y)) = y$ per ogni $y \in Y$. Allora:*

1. *p è una identificazione.*
2. *Se X è di Hausdorff, allora s è una immersione chiusa.*

Dimostrazione. [1] È chiaro che p deve essere surgettiva. Per dimostrare che p è una identificazione bisogna provare che, se $A \subset Y$ è un sottoinsieme tale che $p^{-1}(A)$ è aperto, allora A è aperto in Y. Siccome $s^{-1}(p^{-1}(A)) = A$, e s è continua, ne consegue che A è aperto in Y.

[2] È chiaro che s è iniettiva; occorre dimostrare che se X è di Hausdorff, allora s è chiusa. Siccome $s(C) = s(Y) \cap p^{-1}(C)$ per ogni sottoinsieme $C \subset Y$, basta dimostrare che $s(Y)$ è un sottoinsieme chiuso di X. Dato che $x \in s(Y)$ se e solo se $x = sp(x)$, possiamo scrivere $s(Y) = f^{-1}(\Delta)$, dove $\Delta \subset X \times X$ è la diagonale e

$$f\colon X \to X \times X, \qquad f(x) = (x, sp(x)).$$

Basta adesso ricordare che in uno spazio di Hausdorff la diagonale è chiusa nel prodotto. □

Dunque condizione necessaria affinché p abbia una sezione continua è che p sia una identificazione. Tale condizione **non è** tuttavia sufficiente: ad esempio, siccome non esistono applicazioni continue ed iniettive $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ (Lemma 4.14), ne consegue che non esistono sezioni continue del rivestimento $\mathrm{e}\colon \mathbb{R} \to S^1$ (Esempio 12.7).

Lemma 12.22. *Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, allora per ogni aperto banalizzante $V \subset X$ ed ogni punto $e \in p^{-1}(V)$ esiste un'unica sezione continua $s_e\colon V \to p^{-1}(V)$ di p tale che $s_e(p(e)) = e$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $U \subset p^{-1}(V)$ la componente connessa che contiene il punto e. Dato che $p_{|U}\colon U \to V$ è un omeomorfismo, la sua inversa $s_e = p_{|U}^{-1}$ è una sezione con le proprietà richieste.

Se $u\colon V \to E$ è un'altra sezione continua tale che $u(p(e)) = e$, allora, siccome $u(V) \subset p^{-1}(V)$ e V è connesso, ne consegue che $u(V)$ è contenuto nella componente connessa di $p^{-1}(V)$ che contiene e, ossia $u\colon V \to U$ ed è necessariamente uguale all'inverso di $p_{|U}$. □

Il Lemma 12.22 permette di definire, per ogni $x \in X$ ed ogni aperto banalizzante $V \subset X$ tale che $x \in V$, un'applicazione continua

$$p^{-1}(x) \times V \xrightarrow{\Phi} p^{-1}(V), \qquad \Phi(e, y) = s_e(y).$$

Non è difficile dimostrare che Φ è aperta e bigettiva, e quindi un omeomorfismo.

Esercizi

12.17. Dimostrare che per ogni $n > 0$ la proiezione naturale $p\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non possiede sezioni continue.

12.5 Sollevamento dell'omotopia

Definizione 12.23. *Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento e sia $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua. Diremo che un'applicazione continua $g\colon Y \to E$ è un* ***sollevamento*** *di f se $f = pg$, ossia se il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Teorema 12.24 (Unicità del sollevamento). *Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento, Y uno spazio topologico connesso e $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua. Allora per ogni coppia $g, h\colon Y \to E$ di sollevamenti di f vale $g = h$ oppure $g(y) \neq h(y)$ per ogni $y \in Y$.*

Dimostrazione. Siano $g, h\colon Y \to E$ due sollevamenti di f e consideriamo l'insieme

$$A = \{y \in Y \mid g(y) = h(y)\}.$$

Siccome Y è connesso basta dimostrare che A ed il suo complementare $Y - A$ sono entrambi aperti in Y.

Sia $y \in Y$, scegliamo un aperto banalizzante $V \subset X$ che contiene $f(y)$, denotiamo con $U_g, U_h \subset p^{-1}(V)$ le componenti connesse tali che $g(y) \in U_g$, $h(y) \in U_h$ e consideriamo l'aperto $W = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$. Se $y \in A$, allora $g(y) = h(y)$ e quindi $U_g = U_h$. Siccome la restrizione di p all'aperto $U_g = U_h$ è iniettiva, segue che $g(w) = h(w)$ per ogni $w \in W$ e quindi $W \subset A$. Questo prova che A è aperto. Se $y \in Y - A$ allora $U_g \cap U_h = \emptyset$ e quindi $W \cap A = \emptyset$. Questo prova che $Y - A$ è aperto. □

Corollario 12.25. *Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento, Y uno spazio topologico connesso e $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua. Allora per ogni $y \in Y$ ed ogni $e \in E$ tali che $p(e) = f(y)$ esiste al più un sollevamento $g\colon Y \to E$ di f tale che $g(y) = e$.*

Dimostrazione. Conseguenza immediata del Teorema 12.24. □

È facile capire che non sempre i sollevamenti esistono: infatti ogni sollevamento dell'identità è una sezione continua ed abbiamo osservato che il rivestimento $\mathrm{e}\colon \mathbb{R} \to S^1$ non possiede sezioni continue.

Teorema 12.26 (Sollevamento di cammini). *Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento, $\alpha\colon I \to X$ un cammino continuo ed $e \in E$ un punto tale che $p(e) = \alpha(0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\alpha_e\colon I \to E$ di α tale che $\alpha_e(0) = e$.*

Dimostrazione. L'unicità segue dal Corollario 12.25 ed è sufficiente dimostrare l'esistenza del sollevamento. Per il Corollario 11.24 esistono un intero positivo n ed n aperti banalizzanti $V_1, \ldots, V_n \subset X$ tali che l'immagine della restrizione di α all'intervallo $\left[\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right]$ è contenuta in V_i per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Definiamo per ricorrenza una successione di n applicazioni continue

$$\gamma_i\colon \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \to E,$$

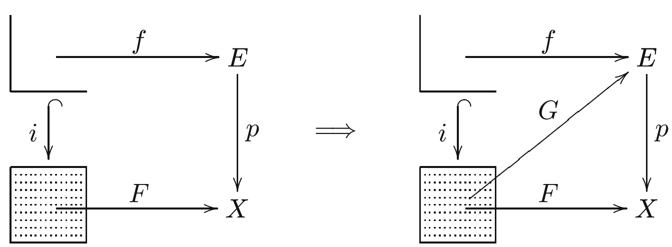
tali che $p(\gamma_i(t)) = \alpha(t)$, $\gamma_1(0) = e$ e $\gamma_i(i/n) = \gamma_{i+1}(i/n)$ per ogni i. L'incollamento delle applicazioni γ_i ci fornirà il cammino α_e richiesto. Supponiamo di aver definito γ_i, denotiamo con $e_i = \gamma_i(i/n)$ e con $s_{i+1}\colon V_{i+1} \to p^{-1}(V_{i+1})$ la sezione di p tale che $s_{i+1}(\alpha(i/n)) = e_i$ (Lemma 12.22). Basta definire $\gamma_{i+1}(t) = s_{i+1}(\alpha(t))$ per $i/n \le t \le (i+1)/n$ e tutto funziona. □

Lemma 12.27. *Indichiamo con*

$$L = \{(t, s) \in I^2 \mid ts = 0\}$$

l'unione di due lati contigui del quadrato e con $i\colon L \hookrightarrow I^2$ il morfismo di inclusione.

Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento e siano date due applicazioni continue $F\colon I^2 \to X$ e $f\colon L \to E$ tali che $pf = Fi$. Esiste allora un sollevamento $G\colon I^2 \to E$ di F tale che $Gi = f$.



Dimostrazione. Consideriamo prima il caso particolare in cui l'immagine di F è interamente contenuta in un aperto banalizzante V. Dalla condizione $pf = Fi$ segue che $f(L) \subset p^{-1}(V)$ e, siccome L è connesso ne segue che $f(L)$ è contenuto in una componente connessa U di $p^{-1}(V)$. Indicando con $s\colon V \to U$ l'inverso dell'omeomorfismo $p\colon U \to V$ e ponendo $G = sF$ si ha $pG = psF = F$ e quindi G è un sollevamento di F. Inoltre, $f = spf = sFi = Gi$ come volevasi dimostrare.

Passiamo adesso al caso generale; per il Corollario 11.24 esistono un intero positivo n ed n^2 aperti banalizzanti $V_{ij} \subset X$ tali che

$$F(Q(i,j)) \subset V_{ij}, \quad \text{dove} \quad Q(i,j) = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right],$$

per ogni $i, j = 1, \ldots, n$. Dotando $\mathbb{N}^2$ dell'ordinamento totale

$$(i,j) \le (h,k) \qquad \text{se} \;\; i+j < h+k \;\; \text{oppure} \; i+j = h+k, \; j \le k,$$

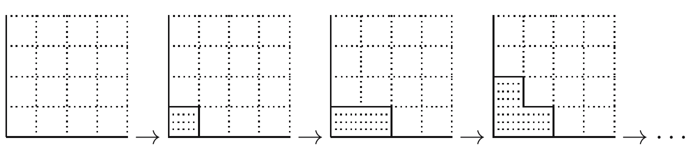
si osserva che per ogni coppia (h,k), con $1 \le h, k \le n$, l'intersezione

$$Q(h,k) \cap \left(L \cup \bigcup_{(i,j)<(h,k)} Q(i,j) \right)$$

è uguale all'unione di due lati contigui del quadrato $Q(h,k)$. Possiamo quindi applicare la costruzione del sollevamento fatta nel caso particolare ai quadratini $Q(h,k)$ per costruire in maniera ricorsiva dei sollevamenti

$$G_{hk} \colon L \cup \bigcup_{(i,j)\le(h,k)} Q(i,j) \to E.$$

Per meglio capire la costruzione ricorsiva è utile disegnare la successione dei domini delle applicazioni G_{hk}



ed il sollevamento $G = G_{nn}$ è quello richiesto. □

Teorema 12.28 (Sollevamento dell'omotopia). *Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento e siano $F \colon I^2 \to X$, $\alpha \colon I \to E$ due applicazioni continue tali che $F(t,0) = p(\alpha(t))$ per ogni $t \in I$. Allora esiste un unico sollevamento $G \colon I^2 \to E$ di F tale che $G(t,0) = \alpha(t)$ per ogni t.*

Dimostrazione. Basta dimostrare l'esistenza: l'unicità segue dalla connessione di I^2 e dal Teorema 12.24. Denotiamo con $\beta \colon I \to E$ il sollevamento del cammino $s \mapsto F(0,s)$ tale che $\beta(0) = \alpha(0)$; l'incollamento dei due cammini α, β definisce un'applicazione continua

$$f \colon L = \{(t,s) \in I^2 \mid ts = 0\} \to E, \qquad f(t,0) = \alpha(t), \; f(0,s) = \beta(s),$$

che per costruzione verifica, assieme ad F, le ipotesi del Lemma 12.27. □

I teoremi di esistenza ed unicità del sollevamento hanno importanti applicazioni per quanto riguarda il gruppo fondamentale.

Lemma 12.29. *Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento, $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ due cammini con gli stessi estremi ed $e \in E$ un punto tale che $p(e) = a$. Indichiamo con $\alpha_e, \beta_e\colon I \to E$ i sollevamenti di α e β tali che $\alpha_e(0) = \beta_e(0) = e$. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *α e β sono cammini omotopicamente equivalenti.*
2. *$\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ ed i cammini α_e e β_e sono omotopicamente equivalenti.*

Dimostrazione. [1 $\Rightarrow$ 2] Sia $F\colon I^2 \to X$ una omotopia di cammini tale che $F(0, t) = \alpha(t)$, $F(1, t) = \beta(t)$, $F(s, 0) = a$, $F(s, 1) = b$. Per il teorema del sollevamento dell'omotopia esiste $G\colon I^2 \to E$ continua e tale che $G(s, 0) = e$. Per l'unicità del sollevamento si ha $G(0, t) = \alpha_e(t)$ e $G(1, t) = \beta_e(t)$. Il cammino $G(s, 1)$ è un sollevamento continuo del cammino costante 1_b e pertanto deve essere costante. Ne segue che $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$ e che G è una omotopia di cammini.

[2 $\Rightarrow$ 1] Se i cammini α_e e β_e sono omotopicamente equivalenti, allora anche i cammini $\alpha = p\alpha_e$ e $\beta = p\beta_e$ lo sono. □

Teorema 12.30. *Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso. Allora ogni rivestimento connesso $p\colon E \to X$ è banale, ossia un omeomorfismo.*

Dimostrazione. I rivestimenti sono applicazioni aperte e surgettive, di conseguenza sono omeomorfismi se e solo se sono iniettivi. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento connesso e siano $e, u \in E$ tali che $p(e) = p(u) = x \in X$. Prendiamo un qualsiasi cammino $\alpha\colon I \to E$ tale che $\alpha(0) = e$ e $\alpha(1) = u$; siccome $\pi_1(X) = 0$, il cammino $p\alpha$ è omotopicamente equivalente ad un cammino costante e, per il Lemma 12.29, gli estremi di α coincidono, ossia $u = e$ e p è iniettiva. □

Corollario 12.31. *La circonferenza S^1 non è semplicemente connessa.*

Dimostrazione. La circonferenza possiede rivestimenti connessi non banali (Esempio 12.7) e basta applicare il Teorema 12.30. □

Corollario 12.32. *Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento e $f\colon S^2 \to X$ un'applicazione continua. Per ogni $y \in S^2$ ed ogni $e \in p^{-1}(f(y))$ esiste un unico sollevamento $g\colon S^2 \to E$ dell'applicazione f tale che $g(y) = e$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che y sia il punto $(1, 0, 0)$. Ricordiamo che esiste un'identificazione $q\colon I^2 \to S^2$ che contrae il bordo del quadrato nel punto $(1, 0, 0)$ ed induce un omeomorfismo tra $]0, 1[^2$ e $S^2 - \{(1, 0, 0)\}$.

Per il Teorema 12.28 esiste un'applicazione continua $h\colon I^2 \to E$ che solleva fq e che vale costantemente e su di un lato del quadrato

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "fq"] & E \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Sia F una fibra di q, allora la restrizione $h_{|F}\colon F \to E$ è un sollevamento di un'applicazione costante; siccome F è connessa, ne segue che $h_{|F}$ è costante e, per la proprietà universale delle identificazioni (Lemma 5.5), esiste un'applicazione continua $k\colon S^2 \to E$ tale che $kq = h$. Dunque $pkq = ph = fq$ e, siccome q è surgettiva, si ha $pk = f$.

$$\begin{tikzcd} I^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"] & E \arrow[d, "p"] \\ S^2 \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "k"] & X \end{tikzcd}$$

□

Esercizi

12.18. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Dimostrare che:

1. Ogni applicazione continua $f\colon D^2 \to X$ possiede un sollevamento.
2. Ogni applicazione continua $f\colon \mathbb{R}^2 \to X$ possiede un sollevamento.
3. Sia $q\colon I^2 \to Y$ una identificazione tale che la fibra $q^{-1}(y)$ è connessa per ogni $y \in Y$. Allora ogni applicazione continua $f\colon Y \to X$ possiede un sollevamento.

12.19. Dimostrare che ogni applicazione continua $S^2 \to S^1$ è omotopa ad una costante.

12.20 (♡). Sia $p\colon G \to H$ un omomorfismo di gruppi topologici connessi e localmente connessi per archi. Dimostrare che, se p è un rivestimento, allora il suo nucleo è contenuto nel centro di G, ossia $kg = gk$ per ogni $g \in G$ ed ogni $k \in \ker(p)$.

12.21. Siano $p\colon E \to F$ e $q\colon F \to X$ applicazioni continue e surgettive di spazi topologici connessi. Dimostrare:

1. Se $qp\colon E \to X$ è un rivestimento, allora anche p e q sono rivestimenti.
2. Se p e q sono rivestimenti e q ha grado finito, allora anche qp è un rivestimento.
3. Se p e q sono rivestimenti e se ogni punto di X possiede un intorno aperto semplicemente connesso, allora anche qp è un rivestimento.

12.6 I teoremi di Brouwer e Borsuk

Teorema 12.33 (Borsuk). *Non esistono applicazioni continue $f\colon S^2 \to S^1$ tali che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$.*

In questo libro vedremo quattro dimostrazioni del Teorema 12.33, ognuna delle quali metterà in luce un diverso aspetto della teoria.

Dimostrazione (Prima dimostrazione del Teorema 12.33). Sia $f\colon S^2 \to S^1$ un'applicazione continua, vogliamo dimostrare che esiste $x_0 \in S^2$ tale che $f(-x_0) \neq -f(x_0)$. Consideriamo il rivestimento $\mathrm{e}\colon \mathbb{R} \to S^1$; per il Corollario 12.32 esiste un'applicazione continua $g\colon S^2 \to \mathbb{R}$ che solleva f, ossia tale che $\mathrm{e}g = f$. Per il Lemma 4.14 esiste $x_0 \in S^2$ tale che $g(x_0) = g(-x_0)$ e di conseguenza $f(x_0) = f(-x_0)$: in particolare $f(-x_0) \neq -f(x_0)$. □

Corollario 12.34. *Per ogni applicazione continua $g\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ esiste un punto $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$.*

Dimostrazione. Se per assurdo fosse $g(x) - g(-x) \neq 0$ per ogni $x \in S^2$, allora l'applicazione continua

$$f\colon S^2 \to S^1, \qquad f(x) = \frac{g(x) - g(-x)}{\|g(x) - g(-x)\|},$$

sarebbe tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x, in contraddizione con il teorema di Borsuk. □

Corollario 12.35. *Siano $n \geq 3$ ed $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua $f\colon A \to \mathbb{R}^2$ non è iniettiva.*

Dimostrazione. Basta osservare che A contiene un sottospazio omeomorfo a S^2 ed applicare il Corollario 12.34. □

Corollario 12.36. *Non esistono applicazioni continue $r\colon D^2 \to S^1$ tali che $r(-x) = -r(x)$ per ogni $x \in S^1$.*

Dimostrazione. Tanto per fissare le notazioni, poniamo

$$D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \qquad S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Supponiamo che esista $r\colon D^2 \to S^1$ continua e tale che $r(-x) = -r(x)$ per ogni $x \in S^1$. Allora l'applicazione

$$f\colon S^2 \to S^1, \qquad f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} r(x_1, x_2) & \text{se } x_3 \geq 0, \\ -r(-x_1, -x_2) & \text{se } x_3 \leq 0, \end{cases}$$

contraddice il Teorema 12.33. □

Corollario 12.37. *La circonferenza S^1 non è un retratto del disco D^2, ossia non esistono applicazioni continue $r\colon D^2 \to S^1$ tali che $r(x) = x$ per ogni $x \in S^1$.*

Dimostrazione. Conseguenza immediata del Corollario 12.36. Un'altra dimostrazione si ottiene osservando che, se S^1 fosse un retratto di D^2, allora, per quanto visto nell'Esempio 11.18, l'inclusione $S^1 \to D^2$ indurrebbe un omomorfismo iniettivo tra i rispettivi gruppi fondamentali. □

Corollario 12.38 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Ogni applicazione continua $f\colon D^2 \to D^2$ possiede almeno un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni x. Possiamo definire l'applicazione

$$r\colon D^2 \to S^1, \quad r(x) = x + t(x - f(x)),$$
$$\text{dove } t \geq 0, \quad \|r(x)\| = 1.$$

Se $f(x) \notin S^1$, allora $r(x)$ è il punto di intersezione di S^1 con la semiretta affine passante per x e con estremo in $f(x)$ (Figura 12.2). Se $f(x) \in S^1$, allora tale semiretta interseca la circonferenza nei due punti distinti $r(x)$ e $f(x)$. L'applicazione r è continua (vedi anche Esercizio 12.28) e $r(x) = x$ per ogni $x \in S^1$. Dunque r è una retrazione del disco sul bordo e questo contraddice il Corollario 12.37. □

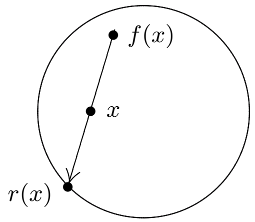


Figura 12.2. Dimostrazione del teorema del punto fisso di Brouwer.

Corollario 12.39. *Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua. Si assuma che esistano due costanti positive a, b, con $a < 1$ e tali che $\|x - f(x)\| \leq a\|x\| + b$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. Allora f è surgettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $p \in \mathbb{R}^2$ non appartenente all'immagine di f e scegliamo un numero reale positivo R sufficientemente grande e tale che $aR + b < R - \|p\|$.

Siano $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq R\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = R\}$ e definiamo

$$r\colon D \to S, \qquad r(x) = p + t(f(x) - p), \qquad \text{dove } t > 0,\ \|r(x)\| = R.$$

In altri termini $r(x)$ è il punto di intersezione di S con la semiretta affine passante per $f(x)$ e con estremo in p.

Se $x \in S$, allora $\|x - f(x)\| < \|x\| - \|p\| \leq \|x - p\|$ e quindi $r(x) \neq -x$; di conseguenza l'applicazione $h\colon D \to D$, $h(x) = -r(x)$ non ha punti fissi. □

Esercizi

12.22. Mostrare che ad ogni istante, esistono sulla superfice terrestre due punti antipodali con la stessa temperatura e la stessa pressione atmosferica.

12.23. Sia $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^2$. Dimostrare che esiste $x \in S^2$ tale che $f(x) = 0$.

12.24 (Teorema del cocomero). Siano dati un cocomero (di massa finita) ed un suo punto c. Dimostrare che è possibile trovare un piano passante per c che divide sia la polpa che i semi in parti uguali (in peso). (Sugg.: fissiamo un sistema di assi cartesiani in $\mathbb{R}^3$ con origine nel punto c; per ogni $x \in S^2$ consideriamo il vettore $f(x) = (p_+ - p_-, s_+ - s_-)$, dove p_+ è la quantità di polpa contenuta nel semipiano $\{y \in \mathbb{R}^3 \mid (x \cdot y) > 0\}$ ecc.)

12.25 (Teorema del pane, prosciutto e formaggio). Siano dati nello spazio $\mathbb{R}^3$ tre aperti limitati B (la fetta di pane), H (il prosciutto) e C (il formaggio). Si assuma inoltre che B sia connesso.

Dimostrare che esiste un piano in $\mathbb{R}^3$ che divide ognuno dei tre aperti in due parti dello stesso volume.

12.26 (Teorema di Lusternik-Schnirelmann). Siano $A_1, A_2, A_3 \subset S^2$ tre chiusi tali che $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S^2$. Dimostrare che esiste almeno un indice i tale che il chiuso A_i contiene una coppia di punti antipodali. (Sugg.: siano $B_i = \{-x \mid x \in A_i\}$ e supponiamo $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$. Si consideri l'applicazione

$$f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x) = \left(\frac{d_{A_1}(x)}{d_{A_1}(x) + d_{B_1}(x)}, \frac{d_{A_2}(x)}{d_{A_2}(x) + d_{B_2}(x)}\right),$$

dove d_Z indica la distanza dal chiuso Z. Mostrare che se $f(x) = f(-x)$ allora $x \in A_3 \cap B_3$.)

12.27. Siano $A_1, A_2, A_3 \subset S^2$ tre chiusi connessi tali che $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S^2$. Dimostrare che esiste almeno un indice i tale che, per ogni numero reale $0 \leq d \leq 2$, il chiuso A_i contiene una coppia di punti x, y tali che $\|x - y\| = d$ (Sugg.: Esercizio 12.26).

12.28 ($\heartsuit$). Scrivere l'espressione analitica della funzione $r(x)$ introdotta nella dimostrazione del Corollario 12.38

12.29. Siano $f, g\colon S^1 \to S^1$ due applicazioni continue tali che $f(x) \neq g(x)$ per ogni x. Provare che f e g sono omotope.

12.30. Dimostrare che $\mathbb{R}^2$ non è omeomorfo a $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

12.7 Un esempio di gruppo fondamentale non abeliano

Consideriamo lo spazio topologico X unione di due circonferenze tangenti. Conviene pensare X come ad un grafo formato da un vertice e e da due lati a, b. Fissiamo delle orientazioni dei due lati; sono allora ben definiti due elementi $[a], [b] \in \pi_1(X, e)$ corrispondenti alle classi di omotopia dei cammini semplici chiusi ottenuti percorrendo i lati nel verso indicato dalle rispettive orientazioni. Vogliamo dimostrare che $[a][b] \neq [b][a]$ e quindi che *il gruppo fondamentale di X non è abeliano.*

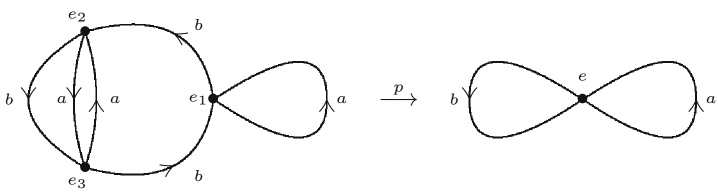


Figura 12.3. Un rivestimento dell'otto.

Consideriamo il rivestimento connesso $p\colon E \to X$ di grado 3 descritto graficamente in Figura 12.3. I vertici e_1, e_2, e_3 del grafo E (a sinistra nella figura) vengono mandati tramite p nell'unico vertice e di X, mentre la parte interna di ogni lato di E viene mandata omeomorficamente nella parte interna del lato di X indicizzato dalla stessa lettera. Si noti che ogni vertice dei due grafi possiede un lato a entrante, un lato a uscente, un lato b entrante ed un lato b uscente.

Il sollevamento del cammino $a * b \in \Omega(X, e, e)$ con punto iniziale e_1 è il prodotto di $a \in \Omega(E, e_1, e_1)$ e $b \in \Omega(E, e_1, e_2)$ e quindi ha come punto finale e_2. Il sollevamento del cammino $b * a \in \Omega(X, e, e)$ con punto iniziale e_1 è il prodotto di $b \in \Omega(E, e_1, e_2)$ e $a \in \Omega(E, e_2, e_3)$ e quindi ha come punto finale e_3. Siccome i due sollevamenti hanno lo stesso punto iniziale ma diversi punti finali, segue dal Lemma 12.29 che $a * b$ non è omotopo a $b * a$ in $\Omega(X, e, e)$.

Esercizi

Nei seguenti esercizi manteniamo le notazioni usate nella sezione.

12.31. Dimostrare che $p_*\pi_1(E, e_1) \neq p_*\pi_1(E, e_2)$ e che $p_*\pi_1(E, e_1)$ non è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, e)$.

12.32. Dimostrare che $([a][b])^n \neq ([b][a])^n$ in $\pi_1(X, e)$ per ogni $n > 0$.

13

Monodromia

Monodromia del rivestimento – Azioni di gruppi su insiemi – Un teorema di isomorfismo – Sollevamento di applicazioni qualsiasi – Rivestimenti regolari $\curvearrowright$ – Rivestimenti universali $\curvearrowright$ – Rivestimenti con monodromia assegnata $\curvearrowright$

Continua a valere la convenzione che, salvo avviso contrario, tutti gli spazi topologici sono assunti localmente connessi per archi.

In certe situazioni è ben definita un'azione, detta **monodromia**, del gruppo fondamentale su di un opportuno insieme. Di conseguenza, cammini con monodromia non banale sono di necessità omotopicamente non banali. In questo capitolo ci occuperemo delle monodromie derivanti dai rivestimenti e mostreremo che in alcuni casi tali azioni permettono di derscrivere completamente il gruppo fondamentale.

13.1 Monodromia del rivestimento

Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento e siano $x, y \in X$ due punti. Chiameremo **monodromia** l'applicazione

$$\mathrm{Mon}\colon p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) \to p^{-1}(y), \qquad \mathrm{Mon}(e, \alpha) = \alpha_e(1),$$

dove $\alpha_e\colon I \to E$ è l'unico sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$. Osserviamo che per ogni cammino $\beta \in \Omega(X, y, z)$ si ha $(\alpha * \beta)_e = \alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)}$ e quindi

$$\mathrm{Mon}(e, \alpha * \beta) = \mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(e, \alpha), \beta).$$

Il Lemma 12.29 implica che $\mathrm{Mon}(e, \alpha)$ dipende solo dalla classe di omotopia del cammino α. In particolare $\mathrm{Mon}(e, \alpha * i(\alpha)) = \mathrm{Mon}(e, 1_x) = e$ e quindi, per ogni cammino $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ fissato, l'applicazione

$$p^{-1}(x) \to p^{-1}(y), \qquad e \mapsto \mathrm{Mon}(e, \alpha),$$

è bigettiva con inversa

$$p^{-1}(y) \to p^{-1}(x), \qquad u \mapsto \mathrm{Mon}(u, i(\alpha)).$$

Se $x = y$, allora la monodromia induce un'applicazione

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X,x) \to p^{-1}(x), \qquad (e,[\alpha]) \mapsto e \cdot [\alpha] = \mathrm{Mon}(e,\alpha).$$

Segue facilmente dalle definizioni che valgono le identità

$$e \cdot [1_x] = e. \qquad e \cdot ([\alpha][\beta]) = (e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta],$$

per ogni $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,a)$ ed ogni $e \in p^{-1}(x)$.

Teorema 13.1. *Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento connesso, $e \in E$ un punto base e $x = p(e)$. Allora:*

1. *L'omomorfismo di gruppi $p_*\colon \pi_1(E,e) \to \pi_1(X,x)$ è iniettivo e vale*
$$p_*\pi_1(E,e) = \{[\alpha] \in \pi_1(X,x) \mid e \cdot [\alpha] = e\}.$$
2. *Esiste una bigezione tra la fibra $p^{-1}(x)$ e l'insieme dei laterali destri di $p_*\pi_1(E,e)$ in $\pi_1(X,x)$.*
3. *Per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ vale $[\alpha]^{-1}p_*\pi_1(E,e)[\alpha] = p_*\pi_1(E,e \cdot [\alpha])$.*
In particolare i sottogruppi $\{p_*\pi_1(E,u) \mid p(u) = x\}$ sono tutti e soli i coniugati di $p_*\pi_1(E,e)$ in $\pi_1(X,x)$.

Ricordiamo che i laterali destri di un sottogruppo H in un gruppo G sono i sottoinsiemi di G del tipo Hg, con $g \in G$. Equivalentemente, i laterali destri di H in G sono le classi di equivalenza della relazione "$g_1 \sim g_2$ se $g_1 g_2^{-1} \in H$".

Dimostrazione. [1] L'iniettività è una conseguenza immediata del Lemma 12.29 (con $a = b = x$). Se $[\alpha] \in p_*\pi_1(E,e)$, allora esiste un cammino $\beta\colon I \to E$ con $\beta(0) = \beta(1) = e$ e tale che $[\alpha] = [p\beta]$. Per il Lemma 12.29 vale $\beta(1) = \alpha_e(1)$ e quindi $e \cdot [\alpha] = e$. Viceversa se $\alpha \in \Omega(X,x,x)$ e $\mathrm{Mon}(e,\alpha) = e \cdot [\alpha] = e$, allora il sollevamento α_e è chiuso e di conseguenza $[\alpha] = [p\alpha_e] \in p_*\pi_1(E,e)$.

[2] La monodromia permette di definire l'applicazione

$$\pi_1(X,x) \to p^{-1}(x), \qquad [\alpha] \mapsto e \cdot [\alpha] = \mathrm{Mon}(e,\alpha).$$

Dimostriamo che l'applicazione $[\alpha] \mapsto e \cdot [\alpha]$ è surgettiva e che $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta]$ se e solo se $[\alpha][\beta]^{-1} \in p_*\pi_1(E,e)$. Se $u \in p^{-1}(x)$, allora poiché per ipotesi E è uno spazio connesso per archi, esiste un cammino $\gamma\colon I \to E$ tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = u$. Per l'unicità del sollevamento vale $\gamma = (p\gamma)_e$ e segue quindi dalla definizione di monodromia che $u = e \cdot [p\gamma]$. Osserviamo infine che, date due classi di omotopia di cammini $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X,x)$, vale $e \cdot [\alpha] = e \cdot [\beta]$ se e solo se $e \cdot [\alpha] \cdot [\beta]^{-1} = e$, che vale se e solo se $[\alpha][\beta]^{-1} \in p_*\pi_1(E,e)$.

[3] Basta far vedere che per ogni $\alpha \in \Omega(X,x,x)$ vale

$$[\alpha]^{-1}p_*\pi_1(E,e)[\alpha] \subset p_*\pi_1(E,e \cdot a).$$

Sia $\alpha_e\colon I \to E$ il sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$; allora $\alpha_e(1) = e \cdot [\alpha]$ e vale

$$i(\alpha_e) * \Omega(E,e,e) * \alpha_e \subset \Omega(E, e \cdot [\alpha], e \cdot [\alpha]).$$

□

Corollario 13.2. *Il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$ per ogni $n \geq 2$.*

Dimostrazione. La proiezione $p\colon S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento connesso di grado 2. Siano $e \in S^n$ un punto e $x = p(e)$ la sua immagine; il Teorema 13.1 implica che il sottogruppo $p_*\pi_1(S^n, e) \subset \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x)$ ha esattamente due laterali destri. Se $n \geq 2$, allora la sfera S^n è semplicemente connessa, il sottogruppo $p_*\pi_1(S^n, e)$ è banale e quindi il gruppo $\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x)$ ha esattamente due elementi. Basta adesso osservare che, a meno di isomorfismo, esiste un unico gruppo con due elementi. □

Le azioni di monodromia commutano con le applicazioni continue:

Proposizione 13.3. *Sia dato un diagramma commutativo di applicazioni continue*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"] & F \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

con p e q rivestimenti. Allora, per ogni $e \in E$ ed ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, p(e))$ vale

$$\varphi(e \cdot [\alpha]) = \varphi(e) \cdot f_*([\alpha]).$$

Dimostrazione. Siano $\alpha\colon I \to X$ un cammino chiuso con punto base $p(e)$ e $\alpha_e\colon I \to E$ l'unico sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$. Per definizione di monodromia vale $\alpha_e(1) = e \cdot [\alpha]$ e quindi $\varphi(e \cdot [\alpha]) = \varphi(\alpha_e(1))$.

Consideriamo adesso il cammino $\beta\colon I \to F$, $\beta(t) = \varphi(\alpha_e(t))$. Siccome $q(\beta(t)) = q\varphi\alpha_e(t) = fp\alpha_e(t) = f\alpha(t)$ per ogni t, si ha che β è il sollevamento di $f\alpha$ tale che $\beta(0) = \varphi(e)$ e quindi

$$\varphi(e) \cdot f_*([\alpha]) = \varphi(e) \cdot [f\alpha] = \beta(1) = \varphi\alpha_e(1).$$

□

Esercizi

13.1 ($\heartsuit, *$). Calcolare il gruppo fondamentale dello spazio delle matrici reali 3×3 di rango 1.

13.2 Azioni di gruppi su insiemi

Siano G un gruppo e T un insieme.

Definizione 13.4. *Una **azione sinistra** di G su T è un'applicazione*

$$G \times T \to T, \qquad (g, t) \mapsto g \cdot t,$$

tale che:

1. $1 \cdot t = t$ *per ogni* $t \in T$*, dove* $1 \in G$ *è l'elemento neutro.*
2. $(gh) \cdot t = g \cdot (h \cdot t)$ *per ogni* $t \in T$*,* $g, h \in G$*.*

Esempio 13.5. Sia E uno spazio topologico e $\mathrm{Omeo}(E)$ il gruppo degli omeomorfismi di E in sé dotato del prodotto di composizione. Allora l'applicazione

$$\mathrm{Omeo}(E) \times E \to E, \qquad \phi \cdot e = \phi(e),$$

è un'azione sinistra.

Se G agisce a sinistra su T, per ogni $g \in G$ possiamo definire l'applicazione

$$L_g \colon T \to T, \qquad L_g(t) = g \cdot t.$$

Poiché $L_g L_h = L_{gh}$, si ha che per ogni g l'applicazione L_g è bigettiva con inversa $L_{g^{-1}}$.

Definizione 13.6. *Una* ***azione destra*** *di* G *su* T *è un'applicazione*

$$T \times G \to T, \qquad (t, g) \mapsto t \cdot g,$$

tale che:

1. $t \cdot 1 = t$ *per ogni* $t \in T$*, dove* $1 \in G$ *è l'elemento neutro.*
2. $t \cdot (gh) = (t \cdot g) \cdot h$ *per ogni* $t \in T$*,* $g, h \in G$*.*

Esempio 13.7. Sia $p \colon E \to X$ un rivestimento. Allora per ogni $x \in X$ l'applicazione di monodromia

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x), \qquad (u, [\alpha]) \mapsto u \cdot [\alpha],$$

è un'azione destra.

Se G agisce a destra su T, per ogni $g \in G$ possiamo definire l'applicazione

$$R_g \colon T \to T, \qquad R_g(t) = t \cdot g.$$

Dalla formula $R_g R_h = R_{hg}$ segue in particolare che per ogni g l'applicazione R_g è bigettiva con inversa $R_{g^{-1}}$.

Osserviamo infine che ogni azione destra induce in modo canonico un'azione sinistra, e viceversa, mediante la regola $g \cdot t = t \cdot g^{-1}$.

Definizione 13.8. *Sia* G *un gruppo che agisce a sinistra su un insieme non vuoto* T*. Diremo che* G *agisce:*

1. ***fedelmente*** *se per ogni* $g \neq 1$ *esiste* $t \in T$ *tale che* $g \cdot t \neq t$*.*
2. ***liberamente*** *se per ogni* $g \neq 1$ *ed ogni* $t \in X$ *vale* $g \cdot t \neq t$*.*
3. ***transitivamente*** *se per ogni* $t, s \in T$ *esiste* $g \in G$ *tale che* $g \cdot t = s$*.*

Analoghe definizioni si hanno per le azioni destre.

Notiamo che ogni azione libera è fedele, mentre se G agisce liberamente e transitivamente su T, allora per ogni $t, s \in X$ esiste un unico $g \in G$ tale che $g \cdot t = s$.

Definizione 13.9. *Siano dati un insieme T, un'azione sinistra di G su T ed un'azione destra di H su T. Diremo che tali azioni sono* ***compatibili*** *se per ogni $t \in T$, $g \in G$ e $h \in H$ vale*

$$g \cdot (t \cdot h) = (g \cdot t) \cdot h.$$

Esempio 13.10. Sia G un gruppo; il prodotto $G \times G \to G$ può essere pensato sia come azione destra che come azione sinistra di G su se stesso. L'associatività del prodotto implica che tali azioni sono compatibili.

Esempio 13.11. Siano V, W spazi vettoriali e $\mathrm{Hom}(V, W)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V a W. Il gruppo $\mathrm{GL}(W)$ agisce a sinistra su $\mathrm{Hom}(V, W)$, il gruppo $\mathrm{GL}(V)$ agisce a destra su $\mathrm{Hom}(V, W)$ e le due azioni sono compatibili.

Proposizione 13.12. *Siano dati due gruppi G e H, un insieme T, un'azione sinistra libera e transitiva di G su T ed un'azione destra di H su T compatibile con l'azione di G. Per ogni $e \in T$ definiamo l'applicazione*

$$\theta_e \colon H \to G, \qquad \theta_e(h) = \text{l'unico } g \in G \text{ tale che } g \cdot e = e \cdot h.$$

Allora θ_e è un omomorfismo di gruppi e l'insieme $\{h \in H \mid e \cdot h = e\}$ è un sottogruppo normale di H.

Dimostrazione. Siccome le azioni sono compatibili, per ogni $h, k \in H$ vale

$$\begin{aligned}\theta_e(hk) \cdot e = e \cdot hk = (e \cdot h) \cdot k = (\theta_e(h) \cdot e) \cdot k = \\ = \theta_e(h) \cdot (e \cdot k) = \theta_e(h) \cdot (\theta_e(k) \cdot e) = \theta_e(h)\theta_e(k) \cdot e\end{aligned}$$

e quindi $\theta_e(hk) = \theta_e(h)\theta_e(k)$. L'insieme $\{h \in H \mid e \cdot h = e\}$ è esattamente il nucleo di θ_e. □

L'omomorfismo θ_e dipende dalla scelta di $e \in T$. Infatti se $u \in T$ e $g \in G$ è l'unico elemento tale che $g \cdot e = u$, allora per ogni $h \in H$ vale

$$u \cdot h = \theta_u(h) \cdot u = \theta_u(h) \cdot (g \cdot e), \qquad u \cdot h = (g \cdot e) \cdot h = g \cdot (\theta_e(h) \cdot e),$$

da cui segue $\theta_u(h)g = g\theta_e(h)$. Dunque θ_u è uguale alla composizione di θ_e con l'automorfismo interno $G \to G$, $\hat{g} \mapsto g\hat{g}g^{-1}$.

Esercizi

13.2. Siano dati due gruppi G e H, un insieme T, un'azione sinistra di G su T ed un'azione destra di H su T compatibile con l'azione di G.

Mostrare che G agisce a sinistra sul quoziente T/H, che H agisce a destra sul quoziente T/G e che esiste una bigezione naturale $(T/H)/G = (T/G)/H$. (Alcuni autori utilizzano la notazione $G\backslash T/H$ per denotare il doppio quoziente $(T/H)/G = (T/G)/H$.)

13.3 Un teorema di isomorfismo

Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico E che agisce in modo propriamente discontinuo. Supponiamo che $X = E/G$ sia connesso e denotiamo con $p\colon E \to X$ la proiezione al quoziente che, per il Teorema 12.16, è un rivestimento. Dato un punto $x \in X$, per ogni coppia di punti $u, v \in p^{-1}(x)$ esiste un unico elemento $g \in G$ tale che $g(u) = v$. Di conseguenza l'azione

$$G \times p^{-1}(x) \to p^{-1}(x), \qquad (g, u) \mapsto g(u),$$

è libera e transitiva.

Lemma 13.13. *Nelle notazioni precedenti, l'azione sinistra di G su $p^{-1}(x)$ è compatibile con l'azione destra di monodromia*

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x), \qquad (e, [\alpha]) \mapsto e \cdot [\alpha].$$

Dimostrazione. Siano $e \in p^{-1}(x)$, $g \in G$ e $\alpha\colon I \to X$ un cammino chiuso con punto base x. Dobbiamo dimostrare che $g(e \cdot [\alpha]) = g(e) \cdot [\alpha]$ ed a tal fine basta applicare la Proposizione 13.3 al diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "Id"] & X. \end{tikzcd}$$

□

Adesso fissiamo un punto $e \in p^{-1}(x)$ e definiamo l'applicazione

$$\theta_e\colon \pi_1(X, x) \to G, \qquad \theta_e([\alpha]) = \text{l'unico } g \in G \text{ tale che } g(e) = e \cdot [\alpha].$$

In altri termini, se $\alpha_e\colon I \to E$ è il sollevamento del cammino α tale che $\alpha_e(0) = e$, allora $\theta_e([\alpha])$ è l'unico elemento di G tale che $\theta_e([\alpha])(e) = \alpha_e(1)$.

Teorema 13.14. *Nelle notazioni precedenti, l'applicazione $\theta_e\colon \pi_1(X, x) \to G$ è un omomorfismo di gruppi che ha come nucleo $p_*\pi_1(E, e)$; in particolare*

$p_*\pi_1(E,e)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X,x)$. Se E è connesso, allora θ_e si fattorizza ad un isomorfismo di gruppi

$$\theta_e\colon \frac{\pi_1(X,x)}{p_*\pi_1(E,e)} \xrightarrow{\sim} G.$$

Dimostrazione. Che θ_e è un omomorfismo di gruppi con nucleo $p_*\pi_1(E,e)$ segue immediatamente dal Lemma 13.13 e dalla Proposizione 13.12.

Se E è connesso allora θ_e è surgettivo. Infatti, per ogni $g\in G$ esiste un cammino β in E tale che $\beta(0)=e$ e $\beta(1)=g(e)$. Il cammino $\alpha=p\beta$ è chiuso e vale $g(e)=e\cdot[\alpha]$, ossia $\theta_e([\alpha])=g$. □

È spesso utile descrivere l'inverso di θ_e: nelle notazioni precedenti, e supponendo E connesso, si ha

$$\theta_e^{-1}\colon G \xrightarrow{\sim} \frac{\pi_1(X,x)}{p_*\pi_1(E,e)}, \qquad \theta_e^{-1}(g)=[p\gamma] \text{ dove } \gamma\in \Omega(E,e,g(e)).$$

Possiamo quindi dire che $\theta_e^{-1}(g)$ è la classe laterale contenente la classe di omotopia dell'immagine tramite p di un qualunque cammino in E con punto iniziale e e punto finale $g(e)$.

Corollario 13.15. *Sia E uno spazio topologico semplicemente connesso e sia G un gruppo di omeomorfismi di E che agisce in modo propriamente discontinuo. Allora il gruppo fondamentale di E/G è isomorfo a G.*

Esempio 13.16. Dato che $S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dove $\mathbb{Z}$ agisce a sinistra tramite la formula $n\cdot x=n+x$, segue dal Corollario 13.15 che l'applicazione

$$\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}, \qquad [\alpha]\mapsto 0\cdot[\alpha]\in\mathbb{Z},$$

è un isomorfismo di gruppi.

Esempio 13.17. Applicando il Corollario 13.15 alla costruzione dell'Esempio 12.20, si deduce che il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein è isomorfo al gruppo generato da due generatori a,b soggetti alla relazione $bab=a$. Notiamo che tale gruppo non è abeliano.

Abbiamo visto che il gruppo fondamentale di S^1 è isomorfo a $\mathbb{Z}$; possiamo usare questo fatto per dare un'altra dimostrazione del teorema di Borsuk.

Dimostrazione (seconda dimostrazione del Teorema 12.33). Supponiamo per assurdo di avere un'applicazione continua $f\colon S^2\to S^1$ tale che $f(-x)=-f(x)$ per ogni x. Identifichiamo S^1 con l'insieme dei numeri complessi di modulo 1 e consideriamo il rivestimento a due fogli $h\colon S^1\to S^1$, $h(z)=z^2$.

Sia $\alpha\colon I\to S^2$ un cammino che ha come estremi due punti antipodali. Allora $hf\alpha\colon I\to S^1$ è un cammino chiuso che non è omotopicamente banale poiché il suo sollevamento $f\alpha$ non è chiuso. Se denotiamo con $\beta\colon I\to S^2$ il cammino $\beta(t) = -\alpha(t)$, allora $hf\beta = hf\alpha$, il cammino $\alpha * \beta$ è chiuso in S^2 e quindi omotopicamente banale. Abbiamo dunque

$$0 = [hf(\alpha * \beta)] = [hf\alpha][hf\beta] = [hf\alpha][hf\alpha]$$

che è una contraddizione poiché il gruppo $\pi_1(S^1)$ non contiene elementi non banali di ordine 2. □

Esercizi

13.3. Calcolare il gruppo fondamentale di

$$\mathbb{R}^3 - \left(\{x = y = 0\} \cup \{z = 0,\ x^2 + y^2 = 1\}\right).$$

(Sugg.: tale sottoinsieme è ottenuto facendo ruotare attorno all'asse $x = y = 0$ la porzione di semipiano $\{(r, z) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, (r, z) \neq (1, 0)\}$.)

13.4. Calcolare il gruppo fondamentale del nastro di Moebius. Dimostrare inoltre che non esiste alcuna retrazione del nastro di Moebius sul suo bordo.

13.5. Calcolare, per ogni $n \geq 3$, il gruppo fondamentale di

$$X = \{(x_0, \ldots, x_n) \in S^n \mid x_0^2 + x_1^2 < 1\}.$$

13.6. Sia $f\colon S^1 \times S^1 \to S^2$ un'applicazione continua e sia $\Gamma \subset S^1 \times S^1 \times S^2$ il grafico di f. Determinare il gruppo fondamentale di $S^1 \times S^1 \times S^2 - \Gamma$.

13.7. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2,\ z \neq 0\}$ e sia $G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ il sottogruppo generato da $a, b\colon X \to X$, dove

$$a(x, y, z) = (-x, -y, z), \qquad b(x, y, z) = (x, y, -z).$$

Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ ed agisce in modo propriamente discontinuo. Dire inoltre, motivando la risposta, se il quoziente X/G è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

13.8 (♡). Dimostrare che il gruppo fondamentale di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ è infinito.

13.9 ($*$, ♡). Siano $\alpha\colon I \to I^2$ e $\beta\colon I \to I^2$ due cammini tali che $\alpha(0) = (0, 0)$, $\alpha(1) = (1, 1)$, $\beta(0) = (1, 0)$ e $\beta(1) = (0, 1)$. Dimostrare che i due cammini si intersecano, ossia che esistono $t, s \in I$ tali che $\alpha(t) = \beta(s)$.

13.10 ($*$). Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme omeomorfo ad S^1. Si assuma che esistano un punto $x \in X$ ed un numero reale $r > 0$ tali che l'itersezione di X con la palla $B(x, r)$ sia uguale all'intersezione di una retta con $B(x, r)$. Provare che $\mathbb{R}^2 - X$ non è connesso. (Sugg.: identificare il piano con la sfera meno un punto; per ogni $0 < t \leq r$ il chiuso $S^2 - B(x, t)$ è omeomorfo a I^2; applicare l'Esercizio 13.9 per dimostrare che $\pi_0(B(x, r) - X) \to \pi_0(S^2 - X)$ è iniettiva.)

13.4 Sollevamento di applicazioni qualsiasi

Consideriamo un rivestimento $p\colon E \to X$, uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi Y ed un'applicazione continua $f\colon Y \to X$. Vogliamo determinare una condizione necessaria e sufficiente affinché esista un sollevamento di f.

Sia $y_0 \in Y$ un punto fissato e supponiamo che esista $g\colon Y \to E$ tale che $pg = f$; se denotiamo $e_0 = g(y_0)$ e $x_0 = f(y_0) = p(e_0)$, allora l'omomorfismo di gruppi $f_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ è uguale alla composizione dei due omomorfismi

$$\pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0)$$

e quindi l'immagine di f_* è contenuta nell'immagine di p_*.

Teorema 13.18. *Siano $f\colon Y \to X$ un'applicazione continua di spazi topologici connessi e localmente connessi per archi, $p\colon E \to X$ un rivestimento e $y_0 \in Y$, $e_0 \in E$ due punti tali che $f(y_0) = p(e_0)$. Allora esiste un'applicazione continua $g\colon Y \to E$ tale che $pg = f$ e $g(y_0) = e_0$ se e solo se*

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(E, e_0).$$

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che tale condizione è necessaria, bisogna dimostrare che è anche sufficiente.

Denotiamo $x_0 = f(y_0)$ e, per ogni punto $y \in Y$, scegliamo un cammino $\alpha\colon I \to Y$ tale che $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = y$. La composizione di $f\alpha\colon I \to X$ è un cammino con inizio in $f(y_0)$; consideriamo la monodromia

$$\mathrm{Mon}\colon p^{-1}(x_0) \times \Omega(X, x_0, f(y)) \to p^{-1}(f(y))$$

e poniamo $g(y) = \mathrm{Mon}(e_0, f\alpha)$. Dimostriamo che g è ben definita: se $\beta\colon I \to Y$ è un altro cammino tale che $\beta(0) = y_0$ e $\beta(1) = y$, allora il cammino $\alpha * i(\beta)$ è chiuso con punto base y_0 e la classe di omotopia di $f\alpha * i(f\beta) = f(\alpha * i(\beta))$ appartiene a $f_*\pi_1(Y, y_0)$. Dunque per ipotesi $[f\alpha * i(f\beta)] \in p_*\pi_1(E, e_0)$ e questo equivale a dire che $\mathrm{Mon}(e_0, f\alpha) = \mathrm{Mon}(e_0, f\beta)$.

Dimostriamo adesso che g è continua in ogni punto. Siano $y \in Y$ ed $A \subset E$ un intorno aperto di $g(y)$. Scegliamo un aperto banalizzante $V \subset X$ che contiene $f(y)$ e indichiamo con $U \subset p^{-1}(V)$ la componente connessa che contiene $g(y)$. La restrizione $p\colon U \to V$ è un omeomorfismo e dalla continuità di f segue che esiste un aperto connesso per archi $W \subset Y$ tale che $y \in W$ e $f(W) \subset p(U \cap A) \subset V$; vogliamo provare che $g(W) \subset A$. Fissiamo un cammino $\alpha \in \Omega(Y, y_0, y)$, allora per ogni punto $w \in W$ possiamo trovare un cammino $\beta\colon I \to W$ di estremi y e w. Il sollevamento di $f\beta$ con inizio in $g(y)$ è interamente contenuto in $U \cap A$; poiché vale $g(y) = \mathrm{Mon}(e_0, f\alpha)$ e $g(w) = \mathrm{Mon}(e_0, f(\alpha * \beta)) = \mathrm{Mon}(g(y), f\beta)$, ne segue che $g(w) \in U \cap A$. $\square$

Esempio 13.19. Il gruppo topologico $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ è omeomorfo alla sfera S^3 (Esempio 1.16) ed è quindi compatto e semplicemente connesso. Consideriamo adesso un omomorfismo continuo di gruppi $f\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to S^1$: vogliamo dimostrare che $f(A) = 1$ per ogni $A \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$.

Indichiamo con $Id \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ la matrice identità; siccome $f(Id) = 1$, per il Teorema 13.18 esiste un unico sollevamento $g\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{e}g = f$ e $g(Id) = 0$. Vogliamo dimostrare che g è un omomorfismo di gruppi, o equivalentemente che l'applicazione

$$G\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, \qquad G(A,B) = g(AB) - g(B) - g(A),$$

è identicamente nulla. Siccome $\mathbb{e}$ è un omomorfismo di gruppi, si ha

$$\mathbb{e}G(A,B) = f(AB)f(B)^{-1}f(A)^{-1} = 1,$$

e quindi G è il sollevamento di un'applicazione costante. La connessione di $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ implica che G è costante e vale identicamente $G(Id,Id) = 0$.

L'immagine di g è un sottospazio compatto di $\mathbb{R}$ e quindi limitato; d'altronde per ogni $A \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ ed ogni $n \in \mathbb{Z}$ vale $g(A^n) = ng(A)$ e questo implica che $g(A) = 0$, e cioè che g è costante.

Dimostrazione (terza dimostrazione del Teorema 12.33). Supponiamo che esista un'applicazione continua $f\colon S^2 \to S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x e mostriamo che questa ipotesi conduce ad una contraddizione.

Denotiamo con $q\colon S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $p\colon S^1 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ le proiezioni e consideriamo il diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{g} & \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \end{array} \qquad \text{dove} \qquad g([x]) = [f(x)].$$

Notiamo adesso che il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$, mentre la retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfa a S^1 e quindi ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$. Siccome ogni omomorfismo da $\mathbb{Z}/2$ in $\mathbb{Z}$ è banale, per il Teorema 13.18 l'applicazione g si solleva ad una applicazione continua $h\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to S^1$ tale che $ph = g$.

Scegliamo un punto $x \in S^2$, allora vale $hq(x) = \pm f(x)$: di conseguenza $hq(x) = f(x)$ oppure $hq(-x) = hq(x) = -f(x) = f(-x)$; in entrambi i casi le applicazioni hq e f coincidono in almeno un punto. Ne segue che f e hq, essendo sollevamenti di $pf = gq$, coincidono ovunque e questo contraddice il fatto che $f(x) \neq f(-x)$. $\square$

Esercizi

13.11 (♡). Consideriamo un diagramma commutativo di applicazioni continue di spazi connessi e localmente connessi per archi

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ Y & \xrightarrow{F} & X. \end{array}$$

Dimostrare che, se p è un rivestimento e q induce un omomorfismo surgettivo tra i gruppi fondamentali, allora esiste un'applicazione continua $G\colon Y \to E$ tale che $pG = F$ e $Gq = f$.

13.12. Sia $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\}$ un cammino chiuso con punto base 1 e tale che $\alpha(t) = \alpha(t + 1/2)$ per ogni $0 \le t \le 1/2$. Dimostrare che $[\alpha]$ è un multiplo pari del generatore di $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$.

13.13. Sia $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C} - \{0\}$ un cammino chiuso con punto base 1 e tale che $\alpha(t) = -\alpha(t + 1/2)$ per ogni $0 \le t \le 1/2$. Dimostrare che $[\alpha]$ è un multiplo dispari del generatore di $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}, 1)$. (Sugg.: si consideri il rivestimento $\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $z \mapsto z^2$, e sia α_1 il sollevamento di α tale che $\alpha_1(0) = 1$. Dimostrare che vale $\alpha_1(t + 1/2) = i\alpha_1(t)$ oppure $\alpha_1(t + 1/2) = -i\alpha_1(t)$ per ogni $0 \le t \le 1/2$.)

13.14 (Quarta dimostrazione del Teorema 12.33). Utilizzare il risultato dell'Esercizio 13.13 per dimostrare che non esiste alcuna applicazione continua $f\colon D^2 \to S^1$ tale che $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in S^1$.

13.15. Determinare tutti gli omomorfismi di gruppi $S^1 \to S^1$ che sono continui. (Sugg.: classificare preliminarmente gli omomorfismi continui da $(\mathbb{R}, +)$ in sé e da $(\mathbb{R}, +)$ a S^1.)

13.16. Sia $p\colon E \to G$ un rivestimento connesso di un gruppo topologico G con elemento neutro $1 \in G$. Dato un qualsiasi punto $e \in E$ tale che $p(e) = 1$, dimostrare che esiste un unico prodotto $E \times E \to E$ che rende E un gruppo topologico con elemento neutro e e p un omomorfismo. Provare inoltre che se G è un gruppo abeliano, allora anche E è abeliano.

13.17 ($*$). Sia G un gruppo topologico connesso, localmente connesso per archi e compatto con elemento neutro e. Dimostrare che ogni omomorfismo continuo $f\colon G \to S^1$ è univocamente determinato dall'omomorfismo di gruppi abeliani $f_*\colon \pi_1(G, e) \to \pi_1(S^1, 1)$.

13.5 Rivestimenti regolari ↷

Lemma 13.20. *Siano X uno spazio topologico connesso per archi, $x_1, x_2 \in X$ due punti e $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora esiste un isomorfismo di gruppi $\gamma_\sharp\colon \pi_1(Y, f(x_1)) \to \pi_1(Y, f(x_2))$ tale che $\gamma_\sharp(f_*\pi_1(X, x_1)) = f_*\pi_1(X, x_2)$. In particolare $f_*\pi_1(X, x_1)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y, f(x_1))$ se e solo se $f_*\pi_1(X, x_2)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y, f(x_2))$.

Dimostrazione. Sia $\delta\colon [0,1] \to X$ un cammino continuo tale che $\delta(0) = x_1$, $\delta(1) = x_2$ e denotiamo $\gamma = f\delta\colon [0,1] \to Y$. Per il Lemma 11.13 si hanno due isomorfismi di gruppi:

$$\delta_\sharp\colon \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_2), \qquad \delta_\sharp[\beta] = [i(\delta) * \beta * \delta],$$

$$\gamma_\sharp\colon \pi_1(Y, f(x_1)) \to \pi_1(Y, f(x_2)), \qquad \gamma_\sharp[\alpha] = [i(\gamma) * \alpha * \gamma].$$

Mostriamo che $\gamma_\sharp$ ha le proprietà richieste: se $\beta \in \Omega(X, x_1, x_1)$, allora

$$\gamma_\sharp f_*[\beta] = \gamma_\sharp[f\beta] = [i(f\delta) * f\beta * f\delta] = [f(i(\delta) * \beta * \delta)] = f_*\delta_\sharp[\beta].$$

□

Definizione 13.21. *Un rivestimento connesso $p\colon E \to X$ si dice* ***regolare*** *se $p_*\pi_1(E, e)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, p(e))$, dove e è un qualsiasi punto di E.*

Il Lemma 13.20 implica che la 13.21 è una buona definizione.

Esempio 13.22. 1. Se E è uno spazio semplicemente connesso, allora ogni rivestimento $p\colon E \to X$ è regolare.
2. Se X è uno spazio connesso e $\pi_1(X)$ è abeliano, allora ogni rivestimento connesso $p\colon E \to X$ è regolare.
3. Ogni rivestimento connesso di grado 2 è regolare: è infatti ben noto dai corsi di algebra che ogni sottogruppo di indice 2 è normale.
4. Il rivestimento di grado 3 descritto nella Sezione 12.7 non è regolare.

Segue dal Teorema 13.14 che se un gruppo G agisce in modo propriamente discontinuo su uno spazio connesso E, allora il rivestimento $E \to E/G$ è regolare. In questa sezione dimostreremo che vale anche il viceversa e quindi che i rivestimenti regolari sono tutti e soli quelli ottenuti per quozienti di azioni propriamente discontinue.

Definizione 13.23. *Siano $p_1\colon E_1 \to X$, $p_2\colon E_2 \to X$ due rivestimenti di uno stesso spazio topologico. Diremo che un'applicazione continua $\varphi\colon E_1 \to E_2$ è un* ***morfismo di rivestimenti*** *se commuta con p_1 e p_2, ossia se il diagramma*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

è commutativo.

Possiamo anche dire che i morfismi di rivestimenti $\varphi\colon E_1 \to E_2$ sono tutti e soli i sollevamenti di p_1. In particolare, se E_1 è connesso, allora dati due morfismi distinti $\varphi, \psi\colon E_1 \to E_2$ vale $\varphi(e) \neq \psi(e)$ per ogni $e \in E_1$. La composizione di due morfismi di rivestimenti è ancora un morfismo di rivestimenti.

Definizione 13.24. *Siano* $p_1 \colon E_1 \to X$, $p_2 \colon E_2 \to X$ *due rivestimenti di uno stesso spazio topologico. Diremo che un morfismo di rivestimenti* $\varphi \colon E_1 \to E_2$ *è un **isomorfismo** se è bigettivo e se* $\varphi^{-1} \colon E_2 \to E_1$ *è ancora un morfismo di rivestimenti.*

Definizione 13.25. *Denotiamo con* $\operatorname{Aut}(E,p)$ *il gruppo degli automorfismi di un rivestimento* $p \colon E \to X$*, ossia l'insieme degli isomorfismi di rivestimento* $\varphi \colon E \to E$*, dotato del prodotto di composizione.*

Il gruppo $\operatorname{Aut}(E,p)$ agisce su E; notiamo che p è costante sulle orbite e quindi, per la proprietà universale dei quozienti topologici, si ha una fattorizzazione

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d] & X \\ E/\operatorname{Aut}(E,p) \arrow[ur, "\tilde{p}"'] & \end{tikzcd}$$

con $\tilde{p}$ applicazione aperta e surgettiva. Ne deduciamo che $\tilde{p}$ è un omeomorfismo se e solo se il gruppo $\operatorname{Aut}(E,p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p.

Teorema 13.26. *Sia* $p \colon E \to X$ *un rivestimento connesso. Allora:*

1. *Dati due punti* $e_1, e_2 \in E$*, esiste un automorfismo* $\varphi \in \operatorname{Aut}(E,p)$ *tale che* $\varphi(e_1) = e_2$ *se e solo se*

$$p(e_1) = p(e_2), \qquad p_*\pi_1(E,e_1) = p_*\pi_1(E,e_2).$$

2. $\operatorname{Aut}(E,p)$ *agisce su* E *in modo propriamente discontinuo.*

Dimostrazione. [1] Se esiste $\varphi \in \operatorname{Aut}(E,p)$ tale che $\varphi(e_1) = e_2$, allora vale $p(e_2) = p\varphi(e_1) = p(e_1)$ e $p_*\pi_1(E,e_2) = p_*\varphi_*\pi_1(E,e_1) = p_*\pi_1(E,e_1)$.

Viceversa, se $p(e_1) = p(e_2)$ e $p_*\pi_1(E,e_1) = p_*\pi_1(E,e_2)$, per il Teorema 13.18 esistono due morfismi di rivestimenti $\varphi, \psi \colon E \to E$ tali che $\varphi(e_1) = e_2$ e $\psi(e_2) = e_1$. Siccome $\psi\varphi(e_1) = e_1$, e $\varphi\psi(e_2) = e_2$, per l'unicità del sollevamento deve essere $\varphi\psi = \psi\varphi = Id$.

[2] Sia $e \in E$ fissato; scegliamo un aperto banalizzante $V \subset X$ che contiene $p(e)$ e sia $U \subset p^{-1}(V)$ la componente connessa che contiene e. Sia $\varphi \in \operatorname{Aut}(E,p)$ tale che $U \cap \varphi(U) \neq \emptyset$: bisogna dimostrare che $\varphi = Id$. Scegliamo un punto $u \in U \cap \varphi(U)$, allora $u, \varphi^{-1}(u) \in U$ e, siccome $p \colon U \to X$ è iniettiva, si ha $u = \varphi^{-1}(u)$. L'unicità del sollevamento implica che $\varphi = Id$. □

Corollario 13.27. *Un rivestimento connesso* $p \colon E \to X$ *è regolare se e solo se il gruppo* $\operatorname{Aut}(E,p)$ *agisce transitivamente sulle fibre di* p*. In tal caso vale* $E/\operatorname{Aut}(E,p) \simeq X$ *e per ogni* $e \in E$ *esiste un isomorfismo di gruppi*

$$\frac{\pi_1(X,p(e))}{p_*\pi_1(E,e)} \simeq \operatorname{Aut}(E,p).$$

Dimostrazione. La prima parte segue immediatamente dal Teorema 13.26 e dal fatto che, per ogni $e_1 \in E$ fissato, i sottogruppi $p_*\pi_1(E, e_2)$, al variare di e_2 tra i punti di E tali che $p(e_2) = p(e_1)$, sono tutti e soli i coniugati di $p_*\pi_1(E, e_1)$.

Se $\operatorname{Aut}(E, p)$ agisce transitivamente sulle fibre, abbiamo già osservato che $E/\operatorname{Aut}(E, p) \simeq X$ e l'isomorfismo $\frac{\pi_1(X,p(e))}{p_*\pi_1(E,e)} \simeq \operatorname{Aut}(E, p)$ segue dal Teorema 13.14. □

Osservazione 13.28. Esiste una interessante analogia tra la teoria dei rivestimenti e la teoria delle estensioni algebriche di campi. Secondo tale analogia le estensioni di Galois corrispondono ai rivestimenti regolari: per tale motivo i rivestimenti regolari vengono talvolta detti **Galoisiani**.

Esercizi

13.18. Sia $\varphi\colon E_1 \to E_2$ un morfismo di rivestimenti. Dimostrare che se E_2 è connesso, allora φ è un rivestimento.

13.19. Dato un gruppo G ed un sottogruppo $H \subset G$, il **normalizzatore** di H in G è definito come

$$N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Dimostrare che $N(H)$ è un sottogruppo di G, che H è un sottogruppo normale di $N(H)$ e che $N(H)$ è il più grande sottogruppo di G che contiene H come sottogruppo normale. In particolare vale $N(H) = G$ se e solo se H è un sottogruppo normale di G.

13.20. Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento connesso ed $e \in E$. Allora per ogni $[\alpha] \in N(p_*\pi_1(E, e))$ esiste un unico automorfismo $\varphi \in \operatorname{Aut}(E, p)$ tale che $\varphi(e) = e\cdot[\alpha]$ (per la definizione di N vedi l'Esercizio 13.19). Dimostrare che l'applicazione $N(p_*\pi_1(E, e)) \to \operatorname{Aut}(E, p)$ che ne deriva è surgettiva ed induce un isomorfismo di gruppi

$$\frac{N(p_*\pi_1(E, e))}{p_*\pi_1(E, e)} \simeq \operatorname{Aut}(E, p).$$

13.6 Rivestimenti universali $\curvearrowright$

Definizione 13.29. *Un rivestimento $u\colon \widetilde{X} \to X$ si dice **universale** se $\widetilde{X}$ è connesso e semplicemente connesso.*

Abbiamo già osservato nell'Esempio 13.22 che ogni rivestimento universale è regolare. In particolare, se $u\colon \widetilde{X} \to X$ è universale, allora $\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ agisce liberamente e transitivamente sulle fibre di u ed esiste un isomorfismo di gruppi $\pi_1(X) \simeq \operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$.

Proposizione 13.30 (Proprietà universale del rivestimento universale). *Sia $u\colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento universale e $p\colon E \to X$ un rivestimento. Allora, per ogni coppia di punti $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, $e \in E$ tali che $u(\tilde{x}) = p(e)$, esiste un unico morfismo di rivestimenti $\phi\colon \widetilde{X} \to E$ tale che $\phi(\tilde{x}) = e$. In particolare, i rivestimenti universali di uno spazio topologico X sono tutti isomorfi tra loro.*

Dimostrazione. Siccome $0 = u_*\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}) \subset p_*\pi_1(E, e)$, l'esistenza di ϕ segue dal Teorema 13.18. Se anche $p\colon E \to X$ è un rivestimento universale, il precedente argomento mostra che esiste un morfismo di rivestimenti $\psi\colon E \to \widetilde{X}$ tale che $\psi(e) = \tilde{x}$. Siccome $\widetilde{X}$ ed E sono connessi per definizione, l'unicità del sollevamento implica che le due composizioni $\phi\psi$ e $\psi\phi$ sono uguali alle identità. □

Abbiamo dimostrato l'unicità del rivestimento universale. Il resto di questa sezione è interamente dedicato allo studio dell'esistenza: iniziamo con la descrizione di una semplice condizione necessaria.

Definizione 13.31. *Uno spazio topologico X si dice* ***semilocalmente semplicemente connesso*** *se ogni punto $x \in X$ possiede un intorno connesso per archi V tale che $i_*\pi_1(V) = 0$ in $\pi_1(X)$ dove $i\colon V \to X$ denota l'inclusione.*

Quindi, uno spazio localmente connesso per archi X è semilocalmente semplicemente connesso se e solo se ogni suo punto è contenuto in un aperto V tale che ogni cammino chiuso in V è omotopicamente banale in X.

Lemma 13.32. *Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Se X possiede un rivestimento universale, allora X è semilocalmente semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Sia $u\colon \widetilde{X} \to X$ un rivestimento universale, sia $U \subset X$ un aperto banalizzante e indichiamo con $i\colon U \to X$ l'inclusione. Siccome esiste una sezione continua $s\colon U \to \widetilde{X}$, per ogni $x \in U$ si ha

$$i_*\pi_1(U, x) = u_*s_*\pi_1(U, x) \subset u_*\pi_1(\widetilde{X}, s(x)) = 0.$$

□

Esempio 13.33. Esistono degli spazi topologici connessi e localmente connessi per archi che non sono semilocalmente semplicemente connessi e quindi non possiedono alcun rivestimento universale. Un esempio è dato da

$$X = \mathbb{R}^2 - \{(2^{-n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Sia infatti $U \subset X$ un qualunque intorno di 0 e fissiamo un numero irrazionale $r > 0$ tale che

$$\{x \in X \mid \|x\| \leq 2r\} \subset U.$$

Scegliamo un intero N tale che $2^{-N} < 2r$ e si considerino i sottospazi

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (r, 0)\| = r\}, \qquad Z = \mathbb{R}^2 - \{(2^{-N}, 0)\}.$$

Le inclusioni $0 \in Y \subset U \subset X \subset Z$ inducono un isomorfismo di gruppi $\pi_1(Y, 0) \to \pi_1(Z, 0)$ e quindi il morfismo $\pi_1(U, 0) \to \pi_1(X, 0)$ non può essere banale.

Sia $u\colon \widetilde{X} \to X$ il rivestimento universale di uno spazio X. Ogni scelta di un punto $\tilde{x} \in \widetilde{X}$ determina una bigezione

$$\Phi\colon \widetilde{X} \xrightarrow{\simeq} \bigcup_{y \in X} \pi(X, x, y),$$

dove $x = u(\tilde{x})$ e $\pi(X, x, y) = \Omega(X, x, y)/\sim$ è l'insieme delle classi di omotopia dei cammini di estremi x e y. Infatti, dato un punto $\tilde{y} \in \widetilde{X}$ esiste una unica classe di omotopia $\xi \in \pi(\widetilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y})$ ed è quindi ben definito $\Phi(\tilde{y}) = u_*(\xi)$. L'inversa di Φ è data dalla monodromia del rivestimento.

Teorema 13.34. *Uno spazio topologico, connesso e localmente connesso per archi, possiede un rivestimento universale se e soltanto se è semilocalmente semplicemente connesso.*

Dimostrazione. Una implicazione segue dal Lemma 13.32. Resta da dimostrare che se X è connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso, allora esiste un rivestimento universale $u\colon \widetilde{X} \to X$.

Il ragionamento precedente ci suggerisce di scegliere un punto $x \in X$ e di considerare l'insieme

$$\widetilde{X} = \bigcup_{y \in X} \pi(X, x, y), \qquad \text{dove} \quad \pi(X, x, y) = \frac{\Omega(X, x, y)}{\text{omotopia di cammini}}.$$

Per definizione l'omotopia di cammini conserva gli estremi e quindi è ben definita un'applicazione surgettiva

$$u\colon \widetilde{X} \to X, \qquad u([\alpha]) = \alpha(1).$$

Si noti che esiste una bigezione naturale tra $p^{-1}(x)$ e $\pi_1(X, x)$. Vogliamo adesso definire una topologia su $\widetilde{X}$ in modo tale che u sia un rivestimento universale. Dato un cammino $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ ed un intorno aperto $y \in U$, definiamo $W(\alpha, U) \subset \widetilde{X}$ come l'insieme delle classi di omotopia di cammini del tipo $\alpha * \beta$, dove β è un cammino in U con punto iniziale y. È chiaro che $W(\alpha, U) = W(\alpha, U')$, dove U' è la componente connessa di U che contiene $\alpha(1)$ e che, se $\beta \in W(\alpha, U)$ e $V \subset U$ è un aperto contenente $\beta(1)$, allora $W(\beta, V) \subset W(\alpha, U)$.

I sottoinsiemi $W(\alpha, U)$ formano una base di una topologia su $\widetilde{X}$. Infatti ogni $[\alpha] \in \pi(X, x, y)$ appartiene a $W(\alpha, X)$ e, se $[\gamma] \in W(\alpha, U) \cap W(\beta, V)$, allora $\gamma(1) \in U \cap V$ e

$$[\gamma] \in W(\gamma, U \cap V) \subset W(\alpha, U) \cap W(\beta, V).$$

In tale topologia la proiezione naturale $u\colon \widetilde{X} \to X$ è continua e aperta, infatti per ogni aperto connesso $U \subset X$ vale

$$u^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha(1) \in U} W(\alpha, U), \qquad u(W(\alpha, U)) = U.$$

Supponiamo adesso che $U \subset X$ sia un aperto connesso tale che ogni cammino chiuso in U sia omotopicamente banale in X. Fissato un cammino $\alpha\colon I \to X$ con punto iniziale x e tale che $\alpha(1) = u([\alpha]) \in U$, la proiezione $u\colon W(\alpha, U) \to U$ è un omeomorfismo. Infatti, se $u([\alpha * \beta]) = u([\alpha * \gamma])$, il cammino $i(\beta) * \gamma$ è chiuso in U, quindi β e γ sono omotopi in X e $[\alpha * \beta] = [\alpha * \gamma]$ in $\widetilde{X}$, ossia u è iniettiva su $W(\alpha, U)$.

Dati due cammini α, β in X con punto iniziale x e punto finale in U, vale $W(\alpha, U) = W(\beta, U)$ oppure $W(\alpha, U) \cap W(\beta, U) = \emptyset$. Infatti se esiste un cammino γ in X tale che $[\gamma] \in W(\alpha, U) \cap W(\beta, U)$, allora possiamo scrivere $[\alpha] = [\gamma * \alpha']$, $[\beta] = [\gamma * \beta']$ e quindi $[\beta] = [\alpha * i(\alpha') * \beta'] \in W(\alpha, U)$. Ne segue che $W(\beta, U) \subset W(\alpha, U)$ e per simmetria $W(\alpha, U) \subset W(\beta, U)$.

Abbiamo quindi dimostrato che u è un rivestimento. Dato un cammino $\alpha \in \Omega(X, x, y)$, consideriamo i cammini

$$\alpha_s\colon [0,1] \to X, \qquad \alpha_s(t) = \alpha(ts), \qquad s \in [0,1],$$

e definiamo

$$\hat{\alpha}\colon [0,1] \to \widetilde{X}, \qquad \hat{\alpha}(s) = [\alpha_s] \in \pi(X, x, \alpha(s)).$$

Fissiamo $s \in [0,1]$ ed un aperto U contenente il punto $\alpha(s)$. Allora esiste un numero reale positivo ε tale che $\alpha(t) \in U$ per ogni $s - \varepsilon \leq t \leq s + \varepsilon$. Per il Corollario 11.7 vale $[\alpha_t] \in W(\alpha_s, U)$ per ogni $s - \varepsilon \leq t \leq s + \varepsilon$. Abbiamo dimostrato che l'applicazione $\hat{\alpha}$ è continua e quindi che $\widetilde{X}$ è connesso per archi. Notiamo inoltre che $u(\hat{\alpha}(s)) = \alpha(s)$ e dunque $\hat{\alpha}$ è il sollevamento di α tale che $\hat{\alpha}(0) = [1_x]$. Questo dimostra che $[\alpha] = \hat{\alpha}(1) = \mathrm{Mon}([1_x], \alpha)$; in particolare l'azione di monodromia del rivestimento u è libera e di conseguenza $u_* \pi_1(\widetilde{X}, [1_x]) = 0$. □

Esercizi

13.21. Siano $p\colon E \to F$ e $q\colon F \to X$ applicazioni continue e surgettive di spazi topologici connessi. Dimostrare che se p e q sono rivestimenti e se X possiede un rivestimento universale allora anche qp è un rivestimento.

13.22. Provare che ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ si solleva ad una aplicazione continua $\widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ tra i rispettivi rivestimenti universali (ammeso che essi esistano).

13.23. Sia X il quoziente della sfera S^2 ottenuto identificando il polo sud con il polo nord. Determinarne il rivestimento universale ed il gruppo fondamentale. (Sugg.: scrivere X come il quoziente delle salsicce, Esercizio 11.22, per un'azione propriamente discontinua.)

13.7 Rivestimenti con monodromia assegnata $\curvearrowright$

Supponiamo che $p\colon E \to X$ sia un rivestimento, sia $x \in X$ e consideriamo l'azione di monodromia

$$p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x).$$

È facile dimostrare che E è connesso se e solo se l'azione di monodromia è transitiva. Infatti, se E è connesso, allora per ogni coppia di punti $a, b \in p^{-1}(x)$ possiamo trovare un cammino $\alpha \in \Omega(E, a, b)$ e di conseguenza $b = a \cdot [p\alpha]$. Viceversa, se la monodromia è transitiva, allora la fibra $p^{-1}(x)$ è contenuta in una componente connessa per archi. Dato un qualsiasi punto $a \in E$ scegliamo un cammino $\alpha\colon I \to X$ tale che $\alpha(0) = p(a)$, $\alpha(1) = x$: il sollevamento $\alpha_a\colon I \to E$ connette il punto a ad un punto di $p^{-1}(x)$ e quindi a appartiene alla stessa componente connessa di $p^{-1}(x)$.

Abbiamo già dimostrato nel Teorema 13.1 che per ogni $e \in p^{-1}(x)$ il suo stabilizzatore, ossia il sottogruppo

$$Stab(e) = \{a \in \pi_1(X, x) \mid e \cdot a = e\},$$

coincide con $p_*\pi_1(E, e)$. In particolare il rivestimento $p\colon E \to X$ è universale se e solo se l'azione di monodromia è libera e transitiva. Infine il rivestimento è regolare se e solo se l'azione di monodromia è transitiva e gli stabilizzatori sono sottogruppi normali.

Teorema 13.35. *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Per ogni insieme T e per ogni azione destra*

$$T \times \pi_1(X, x) \xrightarrow{\bullet} T$$

esiste un rivestimento $p\colon E \to X$ ed una bigezione $\phi\colon T \to p^{-1}(x)$ tale che $\phi(t \bullet a) = \phi(t) \cdot a$ per ogni $t \in T$ ed ogni $a \in \pi_1(X, x)$. Inoltre la coppia (p, ϕ) è unica a meno di isomorfismo.

Prima di passare alla dimostrazione spieghiamo meglio l'enunciato del teorema. Dire che la coppia (p, ϕ) è unica a meno di isomorfismo significa che se $\hat{p}\colon \hat{E} \to X$ e $\psi\colon T \to \hat{p}^{-1}(x)$ è un'altra coppia rivestimento-bigezione come nella prima parte del teorema, allora esiste un isomorfismo di rivestimenti $E \to \hat{E}$ che estende $\psi\phi^{-1}$.

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'unicità a meno di isomorfismo: tale dimostrazione ci fornirà anche un utile suggerimento per dimostrare l'esistenza.

Siano dunque $p\colon E \to X$ un rivestimento e $\phi\colon T \to p^{-1}(x)$ una bigezione tali che $\phi(t \bullet a) = \phi(t) \cdot a$, per ogni $t \in T$ ed ogni $a \in \pi_1(X, x)$. Denotiamo con $u\colon \widetilde{X} \to X$ il rivestimento universale e fissiamo un punto $\tilde{x} \in u^{-1}(x)$. Per la Proposizione 13.30, per ogni $e \in p^{-1}(x)$ esiste un unico morfismo di rivestimenti $\eta_e\colon \widetilde{X} \to E$ tale che $\eta_e(\tilde{x}) = e$. Si ha poi un isomorfismo di gruppi

$$\theta\colon \operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u) \to \pi_1(X, x), \qquad \tilde{x} \cdot \theta(g) = g(\tilde{x}).$$

La monodromia commuta con i morfismi di rivestimenti e quindi, per ogni $e \in p^{-1}(x)$ e $g \in \operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ vale

$$e \cdot \theta(g) = \eta_e(\tilde{x}) \cdot \theta(g) = \eta_e(\tilde{x} \cdot \theta(g)) = \eta_e(g(\tilde{x}))$$

e quindi $\eta_e g = \eta_{e \cdot \theta(g)}$. Dotiamo T della topologia discreta e denotiamo con $q\colon T \times \widetilde{X} \to X$ la composizione di u e della proiezione $T \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$. L'applicazione

$$\eta\colon T \times \widetilde{X} \to E, \qquad \eta(t, \tilde{y}) = \eta_{\phi(t)}(\tilde{y})$$

è un morfismo di rivestimenti di X. Notiamo che η è surgettivo e, per ogni $g \in \operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ vale

$$\eta(t, g(\tilde{y})) = \eta_{\phi(t)}(g(\tilde{y})) = \eta_{\phi(t) \cdot \theta(g)}(\tilde{y}) = \eta(t \bullet \theta(g), \tilde{y}).$$

Possiamo quindi considerare $\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ come un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di $T \times \widetilde{X}$ che commutano con η, facendo corrispondere ad ogni $g \in \operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ l'applicazione

$$T \times \widetilde{X} \to T \times \widetilde{X}, \qquad (t, \tilde{y}) \mapsto (t \bullet \theta(g)^{-1}, g(\tilde{y})).$$

Il gruppo $\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ agisce in modo propriamente discontinuo su $\widetilde{X}$ e quindi, a maggior ragione, agisce in modo propriamente discontinuo su $T \times \widetilde{X}$. L'azione di $\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)$ sulla fibra $q^{-1}(x) = T \times u^{-1}(x)$ è libera e ogni orbita interseca $T \times \{\tilde{x}\}$ in un unico punto. D'altra parte vale $\eta(t, \tilde{x}) = \phi(t)$ e quindi η induce per passaggio al quoziente un'applicazione bigettiva

$$q^{-1}(x)/\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u) \to p^{-1}(x).$$

Come consequenza η induce per passaggio al quoziente un isomorfismo di rivestimenti

$$\frac{T \times \widetilde{X}}{\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u)} \simeq E.$$

Il rivestimento $h\colon T \times \widetilde{X}/\operatorname{Aut}(\widetilde{X}, u) \to X$ è stato costruito utilizzando solamente X e l'azione $\bullet$ senza riferimento alcuno ad E. Quindi abbiamo dimostrato l'unicità e contemporaneamente anche l'esistenza. $\square$

Corollario 13.36. *Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso. Dato un punto $x \in X$ ed un sottogruppo $H \subset \pi_1(X, x)$, esiste un rivestimento $p\colon E \to X$ ed un punto $e \in p^{-1}(x)$ tali che $p_*\pi_1(E, e) = H$.*

Dimostrazione. Sia $T = \{Ha \mid a \in \pi_1(X, x)\}$ l'insieme dei laterali destri di H. Esiste una ovvia azione destra

$$T \times \pi_1(X, x) \xrightarrow{\bullet} T, \qquad \{Ha\} \bullet b = \{Hab\},$$

e per il Teorema 13.35 esiste un rivestimento $p\colon E \to X$ tale che $p^{-1}(x) = T$ per cui $\bullet$ è uguale all'azione di monodromia. Se definiamo $e \in T \subset E$ come il punto corrispondente al laterale banale, ossia $e = \{H\}$, allora

$$p_*\pi_1(E, e) = \{a \in \pi_1(X, x) \mid \{H\} \bullet a = \{H\}\} = H.$$

□

Esercizi

13.24. Siano $p\colon E \to X$ un rivestimento connesso, $A \subset X$ un sottoinsieme aperto ed $e \in p^{-1}(A)$. Dimostrare che $p^{-1}(A)$ è connesso se e solo se l'immagine di $\pi_1(A, p(e)) \to \pi_1(X, p(e))$ interseca ogni laterale destro di $p_*\pi_1(E, e)$.

13.25. Sia X uno spazio topologico connesso, localmente connesso e semilocalmente semplicemente connesso che contiene un retratto omeomorfo alla circonferenza S^1. Dimostrare che X possiede rivestimenti connessi e regolari di grado d, per ogni intero $d > 0$.

13.26 ($*$). Si consideri il gruppo delle matrici 3×3 reali triangolari superiori unipotenti (cioè con coefficienti uguali ad 1 sulla diagonale), ed il sottogruppo Γ delle matrici di G con coefficienti interi. Dire, motivando la risposta, se G/Γ o qualche suo rivestimento è omeomorfo al prodotto $(S^1)^3$ di tre circonferenze.

14

Il teorema di Van Kampen

Van Kampen in versione universale – Gruppi liberi – Prodotti liberi di gruppi – Prodotti liberi e teorema di Van Kampen – Attaccamenti e grafi topologici – Attaccamenti di celle

In questo capitolo useremo la seguente notazione: se G è un gruppo e $S \subset G$ un sottoinsieme, denotiamo con $\langle S \rangle \subset G$, o anche con $\langle s \mid s \in S \rangle \subset G$, il sottogruppo **normale** generato da S, ossia l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G contenenti S. È facile dimostrare che $\langle S \rangle$ coincide con il sottogruppo generato da tutti gli elementi del tipo gsg^{-1}, al variare di $s \in S$ e $g \in G$.

14.1 Van Kampen in versione universale

Siano A, B due aperti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$; supponiamo che A, B ed $A \cap B$ siano **connessi per archi** e sia $x_0 \in A \cap B$ un punto fissato. Le inclusioni $A \subset X$, $B \subset X$, $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$ inducono un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A, x_0) \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & & \pi_1(X, x_0). \\
 & \pi_1(B, x_0) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 14.1 (Van Kampen). *Nelle notazioni precedenti, per ogni gruppo G ed ogni coppia di omomorfismi $h\colon \pi_1(A, x_0) \to G$, $k\colon \pi_1(B, x_0) \to G$ tali che $h\alpha_* = k\beta_*$, esiste un unico omomorfismo di gruppi $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to G$ che rende commutativo il diagramma*

Manetti M, Topologia. © Springer-Verlag Italia, Milano, 2008

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & G & \pi_1(X, x_0). \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & \pi_1(B, x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione (Parziale). Abbiamo già visto, nella dimostrazione del Teorema 11.25, che ogni cammino in $\Omega(X, x_0, x_0)$ è omotopo al prodotto di un numero finito di cammini chiusi interamente contenuti in A o in B. Questo significa che per ogni $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ possiamo trovare $a_1, \ldots, a_n \in \pi_1(A, x_0)$, $b_1, \ldots, b_n \in \pi_1(B, x_0)$ tali che

$$\gamma = f_*(a_1)g_*(b_1) \cdots f_*(a_n)g_*(b_n).$$

Dunque, se vogliamo φ come nell'enunciato, si dovrà avere

$$\varphi(\gamma) = h(a_1)k(b_1) \cdots h(a_n)k(b_n).$$

Abbiamo quindi dimostrato l'unicità di φ e ne abbiamo anche dato una definizione, della quale dobbiamo però dobbiamo verificarne la sensatezza, ossia che $\varphi(\gamma)$ non dipende dalla scelta degli a_i e dei b_j. Questa è la parte più complicata della dimostrazione, per la quale rimandiamo il lettore ai libri di Massey [Ma67, Ma91]. Tuttavia, come per il lemma di Zorn, le applicazioni del teorema di Van Kampen sono molto più istruttive della dimostrazione.

Nella Sezione 15.7, mostreremo invece che, sotto alcune lievi ipotesi aggiuntive, il Teorema 14.1 segue facilmente dal Teorema 13.35. □

Corollario 14.2. *Nelle notazioni precedenti, se* $\beta_* \colon \pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$ *è surgettivo, allora anche l'omomorfismo* $f_* \colon \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *è surgettivo ed ha come nucleo il sottogruppo normale generato da* $\alpha_*(\ker \beta_*)$*. In altri termini*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\ker \beta_*) \rangle}.$$

Dimostrazione. Indichiamo con $h \colon \pi_1(A, x_0) \to \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\ker \beta_*) \rangle}$ la proiezione al quoziente. L'omomorfismo $h\alpha_*$ annulla il nucleo di β_* e quindi si fattorizza ad un omomorfismo

$$k \colon \pi_1(B, x_0) \simeq \frac{\pi_1(A \cap B, x_0)}{\ker \beta_*} \to \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\ker \beta_*) \rangle}.$$

Per il Teorema 14.1 esiste un unico omomorfismo $\varphi \colon \pi_1(X, x_0) \to \frac{\pi_1(A, x_0)}{\langle \alpha_*(\ker \beta_*) \rangle}$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \frac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_*(\ker\beta_*)\rangle} & \pi_1(X,x_0). \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "k"] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Siccome h è surgettivo, anche φ è surgettivo. D'altra parte, il nucleo di $f_*\alpha_*$ contiene il nucleo di β_*, quindi $\alpha_*(\ker\beta_*) \subset \ker f_*$ e di conseguenza f_* si fattorizza ad un omomorfismo $\psi\colon \frac{\pi_1(A,x_0)}{\langle \alpha_*(\ker\beta_*)\rangle} \to \pi_1(X,x_0)$. Per l'unicità la composizione $\psi\varphi$ deve essere l'identità e quindi φ è iniettivo. □

Corollario 14.3. *Nelle notazioni precedenti, se $\beta_*\colon \pi_1(A\cap B,x_0) \to \pi_1(B,x_0)$ è un isomorfismo, allora anche $f_*\colon \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ è un isomorfismo.*

Esempio 14.4. Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e siano $p,q \in X$ due punti distinti. Allora l'omomorfismo $f_*\colon \pi_1(X-\{p\},q) \to \pi_1(X,q)$ indotto dall'inclusione $X-\{p\} \subset X$ è:

1. Surgettivo per $n=2$.
2. Bigettivo per $n \geq 3$.

Ai fini della dimostrazione, consideriamo un numero reale positivo r tale che la palla $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-p\| < r\}$ sia interamente contenuta in X. Denotando con $A = X - \{p\}$, se $n \geq 2$ allora A, B e $A\cap B$ sono connessi e vale $X = A\cup B$. Scegliamo adesso un punto $x_0 \in A\cap B$ ed un cammino $\gamma \in \Omega(X-\{p\},q,x_0)$. Abbiamo un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(A,q) & \xrightarrow{\gamma_\sharp} & \pi_1(A,x_0) \\
\downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\
\pi_1(X,q) & \xrightarrow{\gamma_\sharp} & \pi_1(X,x_0).
\end{array}$$

e, siccome l'omomorfismo $\pi_1(A\cap B,x_0) \to \pi_1(B,x_0)$ è surgettivo per $n\geq 2$ e bigettivo per $n \geq 3$, basta applicare i due corollari precedenti.

Esempio 14.5. Lo stesso ragionamento dell'Esempio 14.4 si applica, con lievi modifiche lasciate per esercizio al lettore, anche nel caso più generale di X varietà topologica connessa di dimensione n.

Esempio 14.6. Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ il complementare di una circonferenza; abbiamo osservato nell'Esempio 1.15 che X è omeomorfo a $\mathbb{R}^3 - (\text{retta} \cup \text{punto})$. Per l'Esempio 14.4 l'inclusione

$$\mathbb{R}^3 - (\text{retta} \cup \text{punto}) \subset \mathbb{R}^3 - (\text{retta})$$

induce un isomorfismo tra i rispettivi gruppi fondamentali e quindi si ha $\pi_1(X) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 - (\text{retta}))$. D'altra parte, il complementare di una retta è ottenuto facendo ruotare un semipiano aperto attorno ad una retta. Quindi $\mathbb{R}^3 - (\text{retta})$ è omeomorfo a $S^1 \times \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ ed il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Esempio 14.7. Si può dimostrare l'isomorfismo

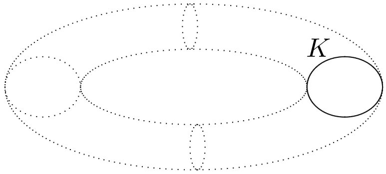
$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - (\text{circonferenza})) \cong \mathbb{Z}$$

applicando direttamente il Corollario 14.3. Supponiamo infatti che K sia la circonferenza di equazione

$$y = 0, \qquad (x-4)^2 + z^2 = 1$$

e scriviamo $\mathbb{R}^3 - K = A \cup B$ dove:

1. B è il complementare del disco chiuso di centro $(4,0,0)$, raggio 1 e contenuto nel piano $y = 0$, ossia
$$B = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \mid y = 0,\ (x-4)^2 + z^2 \leq 1\}.$$
2. A è il toro pieno ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z la palla aperta di centro $(4,0)$ e raggio 1, ossia, nelle coordinate cilindriche (r, θ, z)
$$A = \{(r-4)^2 + z^2 < 1\}, \qquad x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$



È chiaro che B ha il tipo di omotopia di S^2 ed è quindi semplicemente connesso, mentre $A \cap B$ è contrattile. Dunque, per il Corollario 14.3, l'inclusione $A \subset \mathbb{R}^3 - K$ induce un isomorfismo tra i rispettivi gruppi fondamentali.

Esercizi

14.1 (♡). Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di

$$\{(x,y,z) \mid y = 0,\ x^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x,y,z) \mid y = z = 0,\ x \geq 1\}.$$

14.2. Calcolare il gruppo fondamentale dell'unione di tre sfere S^2 tangenti due a due.

14.3. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di

$$\{(x,y,z) \mid y = 0,\ x^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x,y,z) \mid z = 0,\ (x-1)^2 + y^2 = 1\}.$$

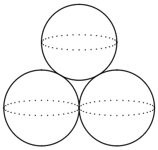


Figura 14.1. Esercizio 14.2: qual è il gruppo fondamentale?

14.2 Gruppi liberi

Definizione 14.8. *Sia S un insieme. Un **gruppo libero generato da** S è il dato di un gruppo F e di un'applicazione $\phi\colon S \to F$ che gode della seguente proprietà universale: per ogni gruppo H e per ogni applicazione $\psi\colon S \to H$ esiste un unico omomorfismo di gruppi $\eta\colon F \to H$ tale che $\psi = \eta\phi$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi"] & H \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\eta"'] & \end{tikzcd}$$

Esempio 14.9. Il gruppo banale $F = 0$ è il gruppo libero generato dall'insieme vuoto. Se S è formato da un solo elemento, diciamo $S = \{*\}$, allora il gruppo $F = \mathbb{Z}$ con l'applicazione $\phi\colon \{*\} \to \mathbb{Z}$, $\phi(*) = 1$, definisce un gruppo libero generato da S.

Assumiamo per il momento l'esistenza dei gruppi liberi, che dimostreremo più avanti, e studiamo le loro proprietà:

Lemma 14.10. *Sia $\phi\colon S \to F$ un gruppo libero generato da S. Allora l'applicazione ϕ è iniettiva e la sua immagine $\phi(S)$ genera il gruppo F.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in S$ due elementi distinti e consideriamo un'applicazione $\psi\colon S \to \mathbb{Z}$ tale che $\psi(a) = 0$, $\psi(b) = 1$. Segue dalla definizione di gruppo libero che esiste un omomorfismo $\eta\colon F \to \mathbb{Z}$ tale che $\psi = \eta\phi$ e questo implica che $\phi(a) \neq \phi(b)$.

Indichiamo con $G \subset F$ il sottogruppo generato da $\phi(S)$ e con $i\colon G \to F$ il morfismo di inclusione; vogliamo dimostrare che i è surgettivo. Dato che $\phi(S) \subset G$, possiamo decomporre $\phi = i\psi$ per qualche $\psi\colon S \to G$ e per la proprietà universale esiste un unico omomorfismo di gruppi $\eta\colon F \to G$ tale che $\eta\phi = \psi$. Consideriamo adesso i due omomorfismi

$$\mathrm{Id}\colon F \to F, \qquad i\eta\colon F \to F.$$

Siccome $\mathrm{Id}\,\phi = i\eta\phi = \phi$, per l'unicità essi devono coincidere, ossia $\mathrm{Id} = i\eta$ e di conseguenza i è surgettivo. $\square$

Lemma 14.11. *Due gruppi liberi generati dallo stesso insieme sono canonicamente isomorfi: più precisamente, se $\phi\colon S \to F$ e $\phi'\colon S \to F'$ sono due gruppi liberi generati dallo stesso insieme S, allora esiste un unico isomorfismo di gruppi $\eta\colon F \to F'$ tale che $\eta\phi = \phi'$.*

Dimostrazione. Dal fatto che $\phi\colon S \to F$ è un gruppo libero segue che esiste un omomorfismo di gruppi $\eta\colon F \to F'$ tale che $\eta\phi = \phi'$. Similmente, dal fatto che $\phi'\colon S \to F'$ è un gruppo libero segue che esiste un omomorfismo di gruppi $\eta'\colon F' \to F$ tale che $\eta'\phi' = \phi$. Dunque $\eta\eta'\phi' = \phi'$ e per unicità si ha $\eta\eta' = \mathrm{Id}$. Similmente $\eta'\eta = \mathrm{Id}$ e quindi η è un isomorfismo. □

Lemma 14.12. *Siano F e G i gruppi liberi generati da due insiemi S e T, almeno uno dei quali finito. Se F è isomorfo a G allora S e T hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione di gruppo libero che esiste una bigezione naturale tra l'insieme delle applicazioni $S \to \mathbb{Z}/2$, che ha cardinalità $2^{|S|}$, e l'insieme degli omomorfismi $F \to \mathbb{Z}/2$. Quindi il gruppo libero F determina $2^{|S|}$ e, per gli stessi motivi, il gruppo libero G determina $2^{|T|}$. Se F e G sono isomorfi, allora $2^{|S|} = 2^{|T|}$. □

Osservazione 14.13. Il risultato del Lemma 14.12 è vero anche se S, T sono entrambi infiniti: per provare ciò serve però una diversa dimostrazione, vedi Esercizio 14.7.

Teorema 14.14. *Per ogni insieme esiste il gruppo libero da esso generato.*

Dimostrazione. La dimostrazione che presentiamo non è la più semplice possibile ma ha il vantaggio di fornire una descrizione esplicita del gruppo libero: dato un qualunque insieme S costruiremo un suo soprainsieme $S \subset F_S$ ed una struttura di gruppo su F_S; proveremo poi che la coppia formata da F_S e dall'inclusione $S \hookrightarrow F_S$ soddisfa la proprietà universale della Definizione 14.8.

Definiamo F_S come l'insieme delle parole ridotte nell'alfabeto $S \cup S^{-1}$. Ciò significa che l'insieme F_S è formato dalla parola vuota, che denoteremo 1, e da tutte le espressioni finite del tipo

$$s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$$

al variare di $s_i \in S$, con $a_i \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $s_i \neq s_{i+1}$ per ogni i. Ad esempio, se $S = \{a, b\}$, allora appartengono a F_S le parole a, a^2, ab, aba, $ab^2a^{-1}b, \ldots$, mentre non vi appertengono (perché non ridotte) le parole $aa^{-1}, aab^2, \ldots$.

La struttura di gruppo su F_S è definita ponendo 1 come elemento neutro; definendo l'inversione tramite la formula

$$(s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n})^{-1} = s_n^{-a_n} \cdots s_2^{-a_2} s_1^{-a_1}$$

e definendo il prodotto in maniera ricorsiva

$$(s_1^{a_1}\cdots s_n^{a_n})(t_1^{b_1}\cdots t_m^{b_m})=\begin{cases} s_1^{a_1}\cdots s_n^{a_n}t_1^{b_1}\cdots t_m^{b_m} & \text{se } s_n\neq t_1,\\ \\ s_1^{a_1}\cdots s_n^{a_n+b_1}t_2^{b_2}\cdots t_m^{b_m} & \text{se } s_n=t_1,\ a_n+b_1\neq 0,\\ \\ (s_1^{a_1}\cdots s_{n-1}^{a_{n-1}})(t_2^{b_2}\cdots t_m^{b_m}) & \text{se } s_n=t_1,\ a_n+b_1=0.\end{cases}$$

È intuitivo e non difficile da dimostrare che F_S soddisfa gli assiomi di gruppo. A dire il vero, la verifica rigorosa della proprietà associativa è un po' noiosa; per questo, in molti testi di teoria dei gruppi, viene adottato il trucco di Van der Waerden (Esercizio 14.5) oppure l'argomento di Artin [Ar47].

Risulta spesso utile ragionare per induzione sulla lunghezza, dove la lunghezza $l(u)$ di una parola ridotta $u\in F_S$ è definita dalla formula

$$l(1)=0,\qquad l(s_1^{a_1}\cdots s_n^{a_n})=|a_1|+\cdots+|a_n|.$$

È chiaro che S genera F_S. Inoltre ogni applicazione $\psi\colon S\to G$ a valori in un gruppo G si estende all'omomorfismo

$$\eta\colon F_S\to G,\qquad \eta(s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n})=\psi(s_1)^{a_1}\psi(s_2)^{a_2}\cdots\psi(s_n)^{a_n}.$$

□

Esempio 14.15. Il gruppo libero generato da due elementi a,b è infinito ma esistono al più finiti elementi di lunghezza fissata.

Esercizi

14.4. Sia F il gruppo libero generato da $S\subset F$. Dimostrare che se $a,b\in S$, $a\neq b$, allora $ab\neq ba$.

14.5. Dato un insieme A con un elemento fissato $1\in A$, indichiamo con $P(A)$ l'insieme di tutte le successioni $a_1,a_2,\ldots$ in A definitivamente uguali a 1, ossia $a_n=1$ per $n>>0$. Supponiamo adesso che sia $A=S\cup S^{-1}\cup\{1\}$, dove S è un insieme e S^{-1} è l'insieme degli inversi formali degli elementi di S: denotiamo con Σ il gruppo di tutte le applicazioni bigettive $\sigma\colon P(A)\to P(A)$.

Possiamo definire un'applicazione iniettiva $\phi\colon S\to\Sigma$ tramite la regola

$$\phi(s)(a_1,a_2,\ldots)=\begin{cases} s,a_1,a_2,\ldots & \text{se } a_1\neq s^{-1},\\ \\ a_2,a_3,\ldots & \text{se } a_1=s^{-1}.\end{cases}$$

Verificare che ϕ è ben definita ed iniettiva e dimostrare che il sottogruppo di Σ generato dall'immagine di ϕ è in bigezione naturale con F_S.

14.6. Mostrare che in un gruppo libero non esistono elementi di ordine finito diversi da 1. (Sugg.: se $u^p = 1$, considerare il coniugato di u di lunghezza minima.)

14.7. Dato un qualsiasi gruppo G indichiamo con $G(x^2) \subset G$ il sottogruppo generato da $\{a^2 \mid a \in G\}$. Dimostrare che:

1. $G(x^2)$ è un sottogruppo normale di G, il quoziente $G/G(x^2)$ è abeliano ed ogni suo elemento ha ordine 2.
2. Sia $\phi\colon G \to H$ un omomorfismo di gruppi, allora $\phi(G(x^2)) \subset H(x^2)$. In particolare se G è isomorfo ad H, allora $G/G(x^2)$ è isomorfo ad $H/H(x^2)$.
3. $G/G(x^2)$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/2$ e la sua dimensione (la cardinalità di una sua base) dipende solo dalla classe di isomorfismo di G.
4. Sia F_S il gruppo libero generato da un insieme S, allora l'applicazione $S \to F_S/F_S(x^2)$ è iniettiva e la sua immagine è una base come spazio vettoriale su $\mathbb{Z}/2$.

14.3 Prodotti liberi di gruppi

La definizione di prodotto libero di gruppi è molto simile a quella di gruppo libero ed in un certo senso la generalizza.

Definizione 14.16. *Sia $\{G_s \mid s \in S\}$ una famiglia di gruppi. Il* ***prodotto libero*** *della famiglia $\{G_s \mid s \in S\}$ è il dato di un gruppo F e, per ogni $s \in S$, di un omomorfismo $\phi_s\colon G_s \to F$ in modo tale che sia soddisfatta la seguente proprietà universale: per ogni gruppo H e per ogni famiglia di omomorfismi $\psi_s\colon G_s \to H$, $s \in S$, esiste un unico omomorfismo di gruppi $\eta\colon F \to H$ tale che $\psi_s = \eta\phi_s$ per ogni s.*

$$\begin{tikzcd} G_s \arrow[r, "\psi_s"] \arrow[d, "\phi_s"'] & H \\ F \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\eta"'] & \end{tikzcd}$$

La precedente proprietà universale implica in particolare che se ψ_s è iniettivo, allora anche ϕ_s è iniettivo. Siccome per ogni $s \in S$ possiamo considerare $H = G_s$, $\psi_s = Id$ e $\psi_i = 0$ per $i \neq s$, se ne deduce che ogni ϕ_s è un omomorfismo iniettivo.

Esempio 14.17. Il prodotto libero di due gruppi G_1, G_2 è il dato di un gruppo $G_1 * G_2$ e due omomorfismi $\phi_i\colon G_i \to G_1 * G_2$, $i = 1, 2$, tali che per ogni gruppo H e per ogni coppia di omomorfismi $\psi_i\colon G_i \to H$ esiste un unico omomorfismo $\eta\colon G_1 * G_2 \to H$ che fa commutare il diagramma

$$
\begin{tikzcd}
 & G_1 * G_2 \arrow[dd, dashed, "\exists!\,\eta"] & \\
G_1 \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & G_2 \arrow[ul, "\phi_2"'] \arrow[dl, "\psi_2"] \\
 & H &
\end{tikzcd}
$$

Proposizione 14.18. *Ogni famiglia di gruppi possiede il prodotto libero.*

Dimostrazione. Sia $\{G_s \mid s \in S\}$ una famiglia di gruppi e per semplicità notazionale supponiamo che ogni coppia abbia in comune solamente l'elemento neutro 1, ossia $G_s \cap G_h = \{1\}$ per ogni $s \neq h$. Su $\cup_s G_s - \{1\}$ consideriamo la relazione di equivalenza

$$g \sim h \text{ se } g, h \in G_s \text{ per qualche } s \in S.$$

Definiamo F come l'insieme delle parole ridotte nell'alfabeto $\cup_s G_s$. Ciò significa che F è formato dalla parola vuota 1 e da tutte le successioni finite

$$g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_n$$

al variare di $g_i \in \cup_s G_s$; si richiede inoltre che per ogni i si abbia $g_i \neq 1$ e $g_i \not\sim g_{i+1}$. La struttura di gruppo su F è definita ponendo 1 come elemento neutro, definendo l'inversione tramite la formula

$$(g_1 \cdot g_2 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$$

e definendo il prodotto in maniera ricorsiva

$$(g_1 \cdots g_n) \cdot (t_1 \cdots t_m) = \begin{cases} g_1 \cdots g_n \cdot t_1 \cdot \cdots t_m & \text{se } g_n \not\sim t_1, \\ \\ g_1 \cdots g_{n-1} \cdot g_n t_1 \cdot t_2 \cdots t_m & \text{se } g_n \sim t_1,\ g_n t_1 \neq 1, \\ \\ (g_1 \cdots g_{n-1}) \cdot (t_2 \cdots t_m) & \text{se } g_n \sim t_1,\ g_n t_1 = 1. \end{cases}$$

In maniera del tutto simile al caso dei gruppi liberi si dimostra che F è il prodotto libero della famiglia $\{G_s \mid s \in S\}$. □

Esercizi

14.8. Siano G_s, $s \in S$, dei gruppi isomorfi a $\mathbb{Z}$. Dimostrare che il prodotto libero della famiglia $\{G_s \mid s \in S\}$ è isomorfo al gruppo libero generato da S.

14.9. Dimostrare che il prodotto libero di una famiglia di gruppi liberi è ancora un gruppo libero.

14.10. Dimostrare che il prodotto libero di due gruppi non banali è infinito.

14.11. Dimostrare che il gruppo delle permutazioni su n elementi è un quoziente del prodotto libero di $n-1$ copie di $\mathbb{Z}/2$.

14.12. Dimostrare che il prodotto libero di due gruppi coincide con il coprodotto nella categoria dei gruppi (Esercizio 10.25).

14.4 Prodotti liberi e teorema di Van Kampen

Esiste una certa similitudine tra l'enunciato del Teorema 14.1 e la proprietà universale del prodotto libero di due gruppi. È quindi possibile, ed è quello che faremo in questa sezione, sostituire la proprietà universale che caratterizza il teorema di Van Kampen con una costruzione più esplicita che utilizza opportuni quozienti di un prodotto libero di gruppi.

Ritorniamo alla stessa situazione della Sezione 14.1, e cioè supponiamo di avere uno spazio topologico X che sia unione di due aperti A, B tali che A, B ed $A \cap B$ siano **connessi per archi**. Sia $x_0 \in A \cap B$ un punto; le inclusioni $A \subset X$, $B \subset X$, $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$ inducono un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi fondamentali:

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A, x_0) \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & & \pi_1(X, x_0) \\
 & \pi_1(B, x_0) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Per definizione di prodotto libero esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$h\colon \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A, x_0) \arrow[d] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \arrow[r, "h"] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(B, x_0) \arrow[u] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

dove le due frecce verticali denotano le inclusioni dei gruppi nel loro prodotto libero. L'immagine di h è esattamente il sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ generato dalle immagini di f_* e g_*. Quindi, siccome abbiamo assunto $A, B, A \cap B$ connessi per archi, per la prima parte del teorema di Van Kampen l'omomorfismo h è surgettivo.

In generale h non è iniettivo: indichiamo con $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ le composizioni di α_* e β_* con i morfismi di inclusione nel prodotto libero:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\hat{\alpha}"'] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d] \arrow[dr, "f_*"] & \\
& \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \arrow[r, "h"] & \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[r, "\beta_*"'] \arrow[ur, "\hat{\beta}"] & \pi_1(B, x_0) \arrow[u] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Il nucleo di h contiene tutti gli elementi della forma $\hat{\alpha}(\gamma) \cdot \hat{\beta}(\gamma^{-1})$, al variare di $\gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)$. Infatti si ha $h\hat{\alpha} = f_*\alpha_* = g_*\beta_* = h\hat{\beta}$ e quindi

$$h(\hat{\alpha}(\gamma) \cdot \hat{\beta}(\gamma^{-1})) = h(\hat{\alpha}(\gamma))h(\hat{\beta}(\gamma^{-1})) = (h\hat{\alpha}(\gamma))(h\hat{\beta}(\gamma))^{-1} = 1.$$

Teorema 14.19 (Van Kampen). *Nelle notazioni precedenti, se A, B ed $A \cap B$ sono connessi per archi, allora il nucleo di h è il più piccolo sottogruppo normale contenente tutti gli elementi $\hat{\alpha}(\gamma) \cdot \hat{\beta}(\gamma^{-1})$, con $\gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $N \subset \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ il sottogruppo normale generato da tutti gli elementi $\hat{\alpha}(\gamma)\hat{\beta}(\gamma^{-1})$. Abbiamo visto che $N \subset \ker(h)$ e che, per costruzione vale $\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{N}$. Abbiamo quindi un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A, x_0) \arrow[d] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \dfrac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{N} \arrow[r, "h"] & \pi_1(X, x_0) \\
& \pi_1(B, x_0) \arrow[u] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

e per il Teorema 14.1 esiste un unico omomorfismo di gruppi

$$\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to \frac{\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)}{N}$$

che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(A,x_0) \arrow[d] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & \dfrac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{N} & \pi_1(X,x_0) \arrow[l, "\varphi"'] \\
 & \pi_1(B,x_0) \arrow[u] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Per l'unicità $h\varphi$ deve essere l'identità e quindi φ è iniettivo. D'altra parte il gruppo $\dfrac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{N}$ è generato dalle immagini di $\pi_1(A,x_0)$ e $\pi_1(B,x_0)$ e quindi φ è anche surgettivo. □

Corollario 14.20. *Nelle notazioni precedenti, si assuma che A, B ed $A\cap B$ siano connessi per archi, e sia S un insieme di generatori di $\pi_1(A\cap B,x_0)$. Allora vale*

$$\pi_1(X,x_0)=\frac{\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0)}{\langle\hat{\alpha}(s)\hat{\beta}(s^{-1})\mid s\in S\rangle}.$$

Dimostrazione. Denotiamo con

$$H=\langle\hat{\alpha}(s)\hat{\beta}(s^{-1})\mid s\in S\rangle,\qquad T=\{\gamma\in\pi_1(A\cap B,x_0)\mid \hat{\alpha}(\gamma)\hat{\beta}(\gamma)^{-1}\in H\}.$$

Per il Teorema 14.19 basta dimostrare che $T=\pi_1(A\cap B,x_0)$; siccome $S\subset T$, e S genera il gruppo $\pi_1(A\cap B,x_0)$, basta dimostrare che T è un sottogruppo. Poiché $T\neq\emptyset$ basta dimostrare che per ogni $\gamma,\delta\in T$ vale $\gamma\delta^{-1}\in T$:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(\gamma\delta^{-1})\hat{\beta}(\delta\gamma^{-1})&=\hat{\alpha}(\gamma)\hat{\alpha}(\delta)^{-1}\hat{\beta}(\delta)\hat{\beta}(\gamma)^{-1}\\&=(\hat{\alpha}(\gamma)\hat{\beta}(\gamma)^{-1})\,(\hat{\beta}(\gamma)\hat{\beta}(\delta)^{-1})\,(\hat{\alpha}(\delta)\hat{\beta}(\delta)^{-1})^{-1}\,(\hat{\beta}(\gamma)\hat{\beta}(\delta)^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

Siccome H è un sottogruppo normale, ne segue che il membro più a destra nella precedente equazione appartiene ad H. □

Corollario 14.21. *Nelle notazioni precedenti, se $A\cap B$ è semplicemente connesso, allora*

$$\pi_1(X,x_0)=\pi_1(A,x_0)*\pi_1(B,x_0).$$

Dimostrazione. Ovvia conseguenza del Teorema 14.19. □

Esempio 14.22. Consideriamo lo spazio X formato da due circonferenze tangenti e calcoliamone il gruppo fondamentale. Conviene pensare ad X come ad un grafo contenuto nel piano e formato da un vertice x_0 e da due lati a,b. Una scelta dei sensi di percorrenza dei due lati definisce in modo naturale due cammini chiusi e quindi due elementi del gruppo fondamentale $\pi_1(X,x_0)$.

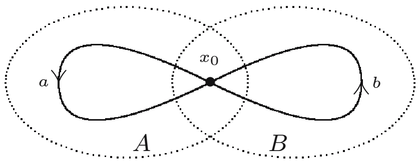


Figura 14.2. Calcolo del gruppo fondamentale di due circonferenze tangenti usando Van Kampen.

Prendiamo come A e B due piccoli intorni aperti dei lati a e b rispettivamente come nella Figura 14.2. Allora $A \cap B$ è contrattile, mentre sia A che B hanno il tipo di omotopia della circonferenza. Dunque

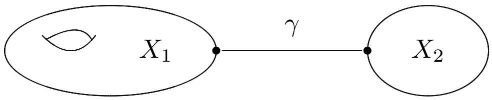
$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) = (\mathbb{Z}a) * (\mathbb{Z}b)$$

ed il gruppo fondamentale di X è il gruppo libero su due generatori.

Usando lo stesso ragionamento ed induzione su n si dimostra che il gruppo fondamentale dell'unione di n circonferenze con un punto in comune è isomorfo al gruppo libero su n generatori.

Esercizi

14.13. Siano X_1, X_2 due spazi topologici disgiunti e connessi per archi. Denotiamo con X lo spazio topologico ottenuto congiungendo X_1 e X_2 con un cammino γ.



Dimostrare che $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X_1) * \pi_1(X_2)$.

14.14. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ di

$$\{(x, y, z) \mid y = 0,\ (x+2)^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, y, z) \mid y = 0,\ (x-2)^2 + z^2 = 1\}.$$

14.15 (♡). Calcolare il gruppo fondamentale del complementare in $\mathbb{R}^3$ dell'unione dei 3 semiassi coordinati

$$\{z = y = 0,\ x \geq 0\} \cup \{z = x = 0,\ y \geq 0\} \cup \{y = x = 0,\ z \geq 0\}.$$

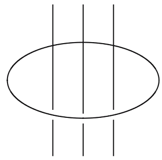
14.16. Calcolare il gruppo fondamentale del complementare di n punti in S^2.

14.17. Sia $K \subset S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ un sottoinsieme chiuso tale che:

1. $S^2 - K$ è connesso.
2. $\{(x, y, z) \in K \mid x > 0\}$ è un insieme finito di n punti.

Dimostrare che, se $n \geq 2$ allora $\pi_1(S^2 - K) \neq 0$, mentre se $n \geq 3$ allora $\pi_1(S^2 - K)$ non è abeliano.

14.18. Sia X il complementare in $\mathbb{R}^3$ di una circonferenza e di n rette parallele passanti internamente ad essa. Dimostrare che: se $n \geq 1$, allora $\pi_1(X)$ non è un gruppo libero, mentre se $n \geq 2$, allora $\pi_1(X)$ non è abeliano.



14.19 (♡). Sia F il gruppo libero generato da due elementi. Dimostrare che per ogni $n > 0$ esiste un sottogruppo $G \subset F$ di indice n che è un gruppo libero a $n+1$ generatori.

14.5 Attaccamenti e grafi topologici

Le nozioni di cucitura e incollamento che abbiamo trattato in maniera intuitiva nel Capitolo 1 possono essere formalizzate utilizzando i quozienti topologici secondo il seguente schema generale.

Siano X, Y spazi topologici disgiunti, $K \subset X$ un sottospazio e $f : K \to Y$ un'applicazione continua. Dotiamo $X \cup Y$ della topologia dell'unione disgiunta (Esempio 3.10), ossia della topologia per la quale le inclusioni $X \to X \cup Y$ e $Y \to X \cup Y$ sono immersioni aperte. Definiamo un nuovo spazio topologico

$$X \cup_f Y = (X \cup Y)/\sim,$$

dove $\sim$ è la più piccola relazione di equivalenza tale che $x \sim f(x)$ per ogni $x \in K$; è utile osservare che la definizione di $X \cup_f Y$ ha senso anche per $K = \emptyset$.

Diremo che $X \cup_f Y$ è ottenuto **attaccando X ad Y via f**; l'applicazione f viene detta **funzione di attaccamento**.

Esempio 14.23. Nel caso in cui la funzione di attaccamento $f : K \to Y$ è surgettiva si ha $X \cup_f Y = X/\approx$, dove $\approx$ è la più piccola relazione di equivalenza in X tale che $x \approx y$ se $x, y \in K$ e $f(x) = f(y)$. In particolare, se Y è formato da un solo punto e $K \neq \emptyset$, allora $X \cup_f Y = X/K$.

Lemma 14.24. *Nelle notazioni precedenti, se $H \subset X$ e se $g : H \cap K \to Y$ è la restrizione di f, allora l'inclusione naturale*

$$\Phi : H \cup_g Y \hookrightarrow X \cup_f Y$$

è continua. Se $H \cup K = X$ e se H, K sono entrambi chiusi oppure entrambi aperti, allora Φ è un omeomorfismo. Come caso particolare, se $K = X$ allora $X \cup_f Y = Y$.

Dimostrazione. L'inclusione $H \cup Y \subset X \cup Y$ induce per passaggio al quoziente l'inclusione Φ che, per la proprietà universale delle identificazioni è continua. Indichiamo con

$$q\colon X \to X \cup_f Y, \qquad i\colon Y \to X \cup_f Y$$

le restrizioni ad X e Y della proiezione al quoziente $p\colon X \cup Y \to X \cup_f Y$. Allora i è iniettiva ed un sottoinsieme $A \subset X \cup_f Y$ è aperto (risp.: chiuso) se e solo se $i^{-1}(A)$ e $q^{-1}(A)$ sono entrambi aperti (risp.: chiusi).

Indichiamo con

$$j\colon Y \to H \cup_g Y, \qquad r\colon H \to H \cup_g Y$$

le applicazioni naturali, allora per ogni sottoinsieme $A \subset H \cup_g Y$ vale

$$i^{-1}(\Phi(A)) = j^{-1}(A), \qquad q^{-1}(\Phi(A)) = r^{-1}(A) \cup f^{-1}(j^{-1}(A)).$$

Quindi se H e K sono entrambi aperti, allora l'applicazione Φ è aperta, mentre se H e K sono entrambi chiusi, allora l'applicazione Φ è chiusa. Per concludere la dimostrazione basta osservare che se $H \cup K = X$, allora Φ è bigettiva. □

Gli attaccamenti commutano con le retrazioni e con le retrazioni per deformazione.

Proposizione 14.25. *Nelle notazioni precedenti, se $K \subset Z \subset X$ e se Z è un retratto per deformazione di X, allora $Z \cup_f Y$ è un retratto per deformazione di $X \cup_f Y$.*

Dimostrazione. Sia $R\colon X \times I \to X$ una deformazione di X su Z e consideriamo l'applicazione continua

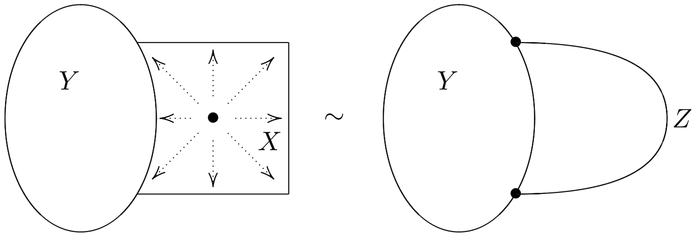
$$g\colon (X \cup Y) \times I \to X \cup Y, \qquad \begin{cases} g(x,t) = R(x,t), & \text{per } x \in X,\\ g(y,t) = y, & \text{per } y \in Y. \end{cases}$$

Per il Corollario 5.26, la proiezione $(X \cup Y) \times I \to (X \cup_f Y) \times I$ è una identificazione e, per la proprietà universale delle identificazioni, l'applicazione g induce per passaggio al quoziente un'applicazione continua

$$G\colon (X \cup_f Y) \times I \to X \cup_f Y$$

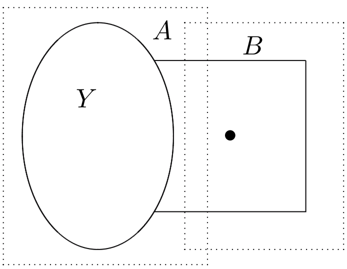
che è una deformazione di $X \cup_f Y$ su $Z \cup_f Y$. □

Esempio 14.26. Sempre nelle notazioni precedenti, consideriamo il caso in cui X è un quadrato meno un punto interno, mentre Z e K sono rispettivamente il perimetro ed un lato del quadrato. Tanto per fissare le idee poniamo $X = [-1,1]^2 - \{(0,0)\}$ e $K = \{-1\} \times [-1,1]$. Siccome Z è un retratto per deformazione di X, segue dalla Proposizione 14.25 che $Z \cup_f Y$ è un retratto per deformazione di $X \cup_f Y$.



Consideriamo adesso due numeri reali $-1 < b < a < 0$ ed i due aperti di $X \cup_f Y$:

$$A = ([-1, a[\times[-1, 1]) \cup_f Y, \qquad B =]b, 1] \times [-1, 1].$$



Poiché $A \cap B$ è semplicemente connesso, possiamo applicare il Corollario 14.21 e dedurre che $\pi_1(X \cup_f Y) = \pi_1(A) * \pi_1(B) = \pi_1(A) * \mathbb{Z}$. D'altra parte K è un retratto per deformazione di $[-1, a[\times[-1, 1]$; quindi $Y = K \cup_f Y$ è un retratto per deformazione di A. In conclusione

$$\pi_1(Z \cup_f Y) = \pi_1(X \cup_f Y) \simeq \pi_1(Y) * \mathbb{Z}.$$

Esempio 14.27. Dal punto di vista combinatorio, un grafo (possibilmente infinito) è il dato di un insieme di lati L, di un insieme di nodi V e di un'applicazione $f\colon L \times \{0, 1\} \to V$ che ad ogni lato l associa i suoi estremi $f(l, 0)$ e $f(l, 1)$.

Per passare dal punto di vista combinatorio al punto di vista topologico occorre far corrispondere i nodi ai punti ed i lati agli archi di curva "regolare". Definiamo un **grafo topologico** come lo spazio

$$G = (L \times [0, 1]) \cup_f V,$$

dove L e V sono dotati della topologia discreta. Si noti che per ogni lato l l'applicazione naturale $\{l\} \times [0, 1] \to G$ definisce un cammino $q_l\colon [0, 1] \to G$ di estremi $q_l(0) = f(l, 0)$, $q_l(1) = f(l, 1)$ e la cui immagine coincide con la nozione intuitiva di lato che abbiamo dato nel Capitolo 1.

Siccome L e V hanno la topologia discreta, ne segue che un sottoinsieme $A \subset G$ è aperto (risp.: chiuso) se e solo se $q_l^{-1}(A)$ è aperto (risp.: chiuso) per ogni $l \in L$. In particolare, un'applicazione $\phi\colon G \to X$ è continua se e solo se le composizioni ϕq_l sono tutte continue, e questo implica che la topologia di un grafo topologico è più fine delle sue eventuali rappresentazioni come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$: vedi in proposito l'Esercizio 14.21.

Un grafo topologico si dice un **albero** se è semplicemente connesso; si dice un **bouquet di circonferenze** se ha un solo nodo.

Esercizi

14.20. Sia $G = (L \times [0,1]) \cup_f V$ un grafo topologico (Esempio 14.27). Dimostrare che:

1. G è di Hausdorff ed ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni contrattili.
2. Ogni sottografo $(H \times [0,1]) \cup_f S$, dove $H \subset L$ e $f(H \times \{0,1\}) \subset S \subset V$, è chiuso in G.
3. I sottospazi V e $L \times \{\frac{1}{2}\}$ sono chiusi e discreti. Dedurne che G è compatto se e solo se V ed L sono insiemi finiti.

14.21. Trovare un esempio di grafo topologico G e di un'applicazione continua ed iniettiva $G \to \mathbb{R}^2$ che non è un omeomorfismo sull'immagine (Sugg.: Esercizio 10.13)

14.22. Siano X, Y spazi topologici di Hausdorff, $U \subset X$ un aperto e $C \subset U$, $D \subset Y$ due compatti. Sia poi $f \colon Y - D \to U - C$ un omeomorfismo: lo spazio topologico $Y \cup_f (X - C)$ è ottenuto "trapiantando" D al posto di C. Dimostrare che $Y \cup_f (X - C)$ è di Hausdorff. Mostrare con un esempio che $Y \cup_f X$ non è di Hausdorff in generale.

14.23. Poniamo $Y = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $X = Y \times [0,1]$ e $K = Y \times \{0,1\}$. Consideriamo le due funzioni $f, g \colon K \to Y$

$$f(x, y, t) = (x, y), \qquad g(x, y, t) = (x, (-1)^t y).$$

Mostrare che $X \cup_f Y$ è omeomorfo al toro $S^1 \times S^1$, mentre $X \cup_g Y$ è omeomorfo alla bottiglia di Klein.

14.24 (∗). Dimostrare che un albero topologico si retrae per deformazione ad ogni suo punto.

14.6 Attaccamenti di celle

Definizione 14.28. *Siano Y uno spazio topologico e $f \colon S^{n-1} \to Y$ un'applicazione continua. Diremo che lo spazio $D^n \cup_f Y$ è ottenuto per* ***attaccamento di una n-cella*** *ad Y.*

Esempio 14.29. Ogni grafo topologico finito è ottenuto attaccando un numero finito di 1-celle (i lati) ad un insieme finito dotato della topologia discreta (i nodi).

Esempio 14.30. La sfera S^n è ottenuta attaccando una n-cella allo spazio formato da un solo punto. Infatti $D^n \cup_f \{*\}$ coincide con il quoziente D^n/S^{n-1}.

Esempio 14.31. Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si può ottenere attaccando una n-cella a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Infatti se $f\colon S^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ è la proiezione naturale, allora $D^n \cup_f \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ coincide con il quoziente di D^n per la relazione che identifica punti del bordo antipodali.

Esempio 14.32. Le lavorazioni di sartoria descritte nella Sezione 1.2 sono ottenute attaccando una 2-cella (la parte interna del poligono) ad un grafo finito (il quoziente del bordo del poligono per la relazione di equivalenza).

Vogliamo adesso investigare gli effetti sul gruppo fondamentale dell'attaccamento di una n-cella ad uno spazio topologico connesso per archi. Tratteremo separatamente i tre casi $n = 1$, $n = 2$ e $n \geq 3$.

Attaccamento di 1-celle

Sia Y uno spazio connesso per archi: attaccare una 1-cella ad Y significa scegliere due punti y_0, y_1 (non necessariamente distinti), e prendere l'unione di Y e dell'intervallo $[0, 1]$ con il punto 0 identificato a y_0 ed il punto 1 identificato a y_1.

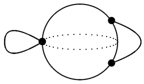


Figura 14.3. Due 1-celle attaccate alla sfera S^2.

Per ipotesi Y è connesso per archi e possiamo trovare un cammino $\gamma\colon [-1, 1] \to Y$ tale che $\gamma(-1) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$. Consideriamo il quadrato bucato $X = [-1, 1]^2 - \{(0, 0)\}$, un suo lato $K = \{-1\} \times [-1, 1]$ e la funzione di incollamento

$$f\colon K \to Y, \qquad f(-1, t) = \gamma(t).$$

Abbiamo visto nell'Esempio 14.26 che $X \cup_f Y$ ha il tipo di omotopia dello spazio ottenuto attaccando ad Y una 1-cella con estremi in y_0, y_1 e quindi

$$\pi_1(D^1 \cup_f Y) = \pi_1(Y) * \mathbb{Z}.$$

Attaccamento di 2-celle

Attacchiamo adesso ad Y una 2-cella $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ con funzione di attaccamento $f\colon S^1 \to Y$ e denotiamo $y_0 = f(1)$. L'applicazione f definisce un cammino chiuso

$$\gamma \in \Omega(Y, y_0, y_0), \qquad \gamma(t) = f(\mathrm{e}(t)).$$

Dimostriamo che l'inclusione $Y \subset D^2 \cup_f Y$ induce un omomorfismo *surgettivo* $\pi_1(Y, y_0) \twoheadrightarrow \pi_1(D^2 \cup_f Y, y_0)$ il cui nucleo è il sottospazio normale generato dalla classe di omotopia di γ. Possiamo scrivere infatti $D^2 \cup_f Y = A \cup B$, dove

$$A = (D^2 - \{0\}) \cup_f Y, \qquad B = D^2 - S^1.$$

L'aperto B è semplicemente connesso, mentre l'intersezione $A \cap B$ è connessa ed il suo gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$. Per il Corollario 14.2

$$\pi_1(D^2 \cup_f Y) = \frac{\pi_1(A)}{\langle a \rangle},$$

dove a è l'immagine in $\pi_1(A)$ del generatore di $\pi_1(A \cap B)$. Basta adesso osservare che Y è un retratto per deformazione di A e che, tramite l'isomorfismo indotto $\pi_1(Y) \simeq \pi_1(A)$, l'elemento a corrisponde alla classe di omotopia del cammino γ.

Attaccamento di 3-celle, $n \geq 3$

Se attacchiamo ad Y la n-cella $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ si può scrivere $D_n \cup_f Y = A \cup B$, dove

$$A = (D^n - \{0\}) \cup_f Y, \qquad B = D^n - S^{n-1}.$$

Se $n \geq 3$, allora sia B che $A \cap B$ sono semplicemente connessi e per il Corollario 14.3 si ha $\pi_1(D^n \cup_f Y) = \pi_1(A)$. D'altronde, come abbiamo già osservato Y è un retratto per deformazione di A e quindi $\pi_1(D^n \cup_f Y) = \pi_1(Y)$.

Esercizi

14.25. Provare che se Y è uno spazio topologico di Hausdorff, allora anche $D^n \cup_f Y$ è di Hausdorff, qualunque sia la funzione di attaccamento f.

14.26. Calcolare i gruppi fondamentali dei grafi descritti alla Figura 14.4.

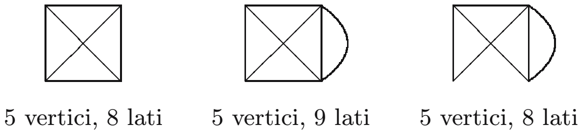


Figura 14.4. Tre grafi topologici finiti contenuti in $\mathbb{R}^2$.

14.27 (♡). Sia X un grafo connesso con v vertici, l lati e caratteristica di Eulero-Poincaré $e(X) = v - l$. Dimostrare che il gruppo fondamentale di X è un gruppo libero a $1 - e(X)$ generatori.

14.28 (Formula di Eulero per i poliedri). Sia $G \subset S^2$ un grafo finito, di l lati e v vertici, immerso nella sfera e sia $F \subset S^2 - G$ un insieme non vuoto e finito di f punti distinti. Dimostrare che se $S^2 - F$ si retrae per deformazione a G, allora $v - l + f = 2$. (Sugg.: $S^2 - F$ ha il tipo di omotopia di un bouquet di $f - 1$ circonferenze.)

14.29 (Formula di Eulero per le ciambelle). Sia $G \subset S^1 \times S^1$ un grafo finito, di l lati e v vertici, immerso nella sfera e sia $F \subset S^1 \times S^1 - G$ un insieme non vuoto e finito di f punti distinti. Dimostrare che se $S^1 \times S^1 - F$ si retrae per deformazione a G, allora $v - l + f = 0$. (Sugg. $S^1 \times S^1 - F$ ha il tipo di omotopia di un bouquet di $f + 1$ circonferenze.)

14.30 (∗). Siano $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una retta proiettiva ed X uno spazio topologico connesso il cui gruppo fondamentale è finito ciclico di ordine dispari. Dimostrare che se $f\colon L \to X$ induce un omomorfismo surgettivo tra i rispettivi gruppi fondamentali, allora $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cup_f X$ è semplicemente connesso.

15

Complementi di topologia algebrica $\curvearrowright$

Gruppoidi, trasformazioni naturali ed equivalenza di categorie – Automorfismi interni ed esterni – Insieme di Cantor e curve di Peano – Topologia di $SO(3,\mathbb{R})$ – La sfera impettinabile – Funzioni polinomiali complesse – La dimostrazione di Grothendieck del teorema di Van Kampen – Un lungo esercizio: il teorema di Poincaré-Volterra

15.1 Gruppoidi, trasformazioni naturali ed equivalenza di categorie

Definizione 15.1. *Una categoria* $\mathbf{G}$ *si dice un* ***gruppoide*** *se ogni morfismo in* $\mathbf{G}$ *è un isomorfismo.*

Esempio 15.2. Il **gruppoide fondamentale** $\boldsymbol{\pi}(X)$ di uno spazio topologico X è la categoria che ha come oggetti i punti di X e come morfismi

$$\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{\pi}(X)}(x,y) = \frac{\Omega(X,x,y)}{\text{omotopia di cammini}}.$$

La composizione di morfismi è data dal prodotto di giunzione: ogni cammino α è quindi invertibile come morfismo nella categoria $\boldsymbol{\pi}(X)$ con inverso $i(\alpha)$. Per ogni $x \in X$ vale $\pi_1(X,x) = \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{\pi}(X)}(x,x)$ ed ogni applicazione continua $f\colon X \to Y$ determina in maniera naturale un funtore $f_*\colon \boldsymbol{\pi}(X) \to \boldsymbol{\pi}(Y)$.

Tra i concetti maggiormente interessanti in teoria delle categorie troviamo quello di trasformazione naturale e quello di equivalenza di categorie: molta della matematica degli ultimi 60 anni non potrebbe esistere senza queste due nozioni. Citando Mac Lane [ML71], si può dire che i funtori sono stati introdotti per definire le trasformazioni naturali e le categorie sono state introdotte per definire i funtori.

Siano $\mathbf{A},\mathbf{B}$ due categorie e $F,G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ due funtori. Dare una **trasformazione naturale** $\gamma\colon F \to G$, significa dare, per ogni oggetto X di $\mathbf{A}$, un morfismo $\gamma_X \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(F(X),G(X))$ tale che, per ogni morfismo $f \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X,Y)$ si abbia un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_X} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_Y} \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y). \end{array}$$

Diremo inoltre che una trasformazione naturale $\gamma\colon F \to G$ è un **isomorfismo di funtori** se γ_X è un isomorfismo nella categoria $\mathbf{B}$ per ogni $X \in \mathbf{A}$.

Esempio 15.3. Per ogni funtore $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ si definisce l'identità su F come la trasformazione naturale $1_F\colon F \to F$ tale che $(1_F)_X = 1_{F(X)}$ per ogni $X \in \mathbf{A}$.

Esempio 15.4. Siano X, Y due insiemi della stessa cardinalità. Allora i due funtori

$$F, G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}, \qquad F(Z) = Z \times X, \quad G(Z) = Z \times Y,$$

sono isomorfi. Se $f\colon X \to Y$ è bigettiva, allora la trasformazione naturale

$$\gamma\colon F \to G, \qquad \gamma_Z(z, x) = (z, f(x)),$$

è un isomorfismo di funtori.

Esempio 15.5. Nelle notazioni dell'Esempio 15.2, siano X, Y spazi topologici e $F\colon X \times I \to Y$ un'omotopia tra $f = F_0$ e $g = F_1$. Esiste allora un isomorfismo di funtori $\gamma\colon f_* \to g_*$, dove per ogni punto $x \in X$, il morfismo $\gamma_x \in \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{\pi}(Y)}(f(x), g(x))$ è la classe di omotopia del cammino $t \mapsto F(x, t)$.

Le trasformazioni naturali si possono comporre: se $\gamma\colon F \to G$ e $\delta\colon G \to H$ sono due trasformazioni naturali, la loro composizione $\delta\gamma\colon F \to H$ è definita dalla regola

$$\delta\gamma_X = \delta_X\gamma_X, \qquad \text{per ogni} \quad X \in \mathbf{A}.$$

A volte le trasformazioni naturali vengono dette **morfismi di funtori**.

Lemma 15.6. *Siano $F, G\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ due funtori. Una trasformazione naturale $\gamma\colon F \to G$ è un isomorfismo di funtori se e solo se esiste una trasformazione naurale $\delta\colon G \to F$ tale che $\delta\gamma = 1_F$, $\gamma\delta = 1_G$.*

Dimostrazione. Se esiste $\delta\colon G \to F$ tale che $\delta\gamma = 1_F$ e $\gamma\delta = 1_G$, allora per ogni $X \in \mathbf{A}$ si ha $\gamma_X\delta_X = 1_{G(X)}$, $\delta_X\gamma_X = 1_{F(X)}$ e quindi γ_X è un isomorfismo.

Viceversa se γ è un isomorfismo basta definire $\delta_X = \gamma_X^{-1}$ per ogni oggetto $X \in \mathbf{A}$. □

Definizione 15.7. *Un funtore $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ si dice:*

1. ***Pienamente fedele*** *se per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathbf{A}$ l'applicazione*
$$F\colon \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{B}}(F(X), F(Y))$$
è bigettiva.
2. ***Essenzialmente surgettivo*** *se ogni oggetto $Z \in \mathbf{B}$ è isomorfo a $F(X)$ per qualche $X \in \mathbf{A}$.*

Esempio 15.8. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione continua. Allora il funtore $f_*\colon \boldsymbol{\pi}(X) \to \boldsymbol{\pi}(Y)$ è essenzialmente surgettivo se e solo se l'applicazione $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ è surgettiva. Il funtore f_* è pienamente fedele se e solo se $f_*\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ è iniettiva e se per ogni $x \in X$ l'applicazione $f_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,f(x))$ è bigettiva.

Definizione 15.9. *Un funtore $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ si dice una* ***equivalenza di categorie*** *se esiste un funtore $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tale che le composizioni GF e FG sono isomorfe ai funtori identità (in $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ rispettivamente). Due categorie si dicono* ***equivalenti*** *se esiste una equivalenza tra di loro.*

Esempio 15.10. Se due spazi topologici X, Y hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i loro gruppoidi fondamentali $\boldsymbol{\pi}(X), \boldsymbol{\pi}(Y)$ sono equivalenti come categorie.

Teorema 15.11. *Un funtore $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ è una equivalenza di categorie se e solo se è pienamente fedele ed essenzialmente surgettivo.*

Dimostrazione. Supponiamo che $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sia un'equivalenza di categorie. Per definizione, esistono un funtore $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ e due isomorfismi di funtori $\gamma\colon 1_{\mathbf{A}} \to GF$, $\delta\colon 1_{\mathbf{B}} \to FG$. Sia $Z \in \mathbf{B}$ un oggetto, allora $\delta_Z\colon Z \to FG(Z)$ è un isomorfismo: questo prova che F è essenzialmente surgettivo. Dati due oggetti $X, Y \in \mathbf{A}$, per ogni morfismo $f\colon X \to Y$ vale $GF(f) = \gamma_Y f \gamma_X^{-1}$. In particolare l'applicazione

$$GF\colon\ \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(GF(X), GF(Y))$$

è bigettiva, ossia GF è pienamente fedele. Analogamente si dimostra che anche FG è pienamente fedele e lo stesso argomento utilizzato nel Lemma 11.21 mostra che F e G sono pienamente fedeli.

Supponiamo adesso che F sia pienamente fedele ed essenzialmente surgettivo. Per ogni oggetto $Z \in \mathbf{B}$ scegliamo un oggetto $G(Z) \in \mathbf{A}$ ed un isomorfismo $\delta_Z\colon Z \to F(G(Z))$. Siccome F è pienamente fedele, dato un morfismo $h\colon Z \to W$ nella categoria $\mathbf{B}$ esiste un unico morfismo $G(h)\colon G(Z) \to G(W)$ tale che $FG(h) = \delta_W h \delta_Z^{-1}$. Lasciamo al lettore il semplice compito di verificare che G è un funtore da $\mathbf{B}$ ad $\mathbf{A}$ e che $\delta\colon 1_{\mathbf{B}} \to FG$ è un isomorfismo di funtori. Per ogni $X \in \mathbf{A}$ sia $\gamma_X\colon X \to GF(X)$ l'unico isomorfismo tale che $F(\gamma_X) = \delta_{F(X)}\colon F(X) \to FGF(X)$; la piena fedeltà di F implica che γ è un isomorfismo di funtori. □

Esempio 15.12. Il teorema di esistenza e unicità di rivestimenti con monodromia assegnata (Teorema 13.35) può essere interpretato come una equivalenza di categorie.

Sia X uno spazio topologico connesso e semilocalmente semplicemente connesso e sia $x_0 \in X$ un punto fissato. Consideriamo la categoria $\mathbf{Riv}_X$ dei rivestimenti di X: gli oggetti di $\mathbf{Riv}_X$ sono i rivestimenti di X ed i morfismi in $\mathbf{Riv}_X$ sono i morfismi di rivestimenti. Indichiamo con $\mathbf{B}$ la categoria i cui oggetti sono le coppie $(T, \bullet)$, dove T è un insieme e $\bullet\colon T \times \pi_1(X, x_0) \to T$ è un'azione destra. Una freccia $f\colon (T, \bullet) \to (\hat{T}, \hat{\bullet})$ definisce un morfismo in $\mathbf{B}$ se $f\colon T \to \hat{T}$ è un'applicazione di insiemi tale che $f(t \bullet a) = f(t) \hat{\bullet} a$ per ogni $t \in T$ ed ogni $a \in \pi_1(X, x_0)$. Possiamo riscrivere il Teorema 13.35 in un enunciato completamente equivalente dicendo che il funtore

$$\mathbf{Riv}_X \to \mathbf{B}, \qquad \text{Rivestimento} \mapsto \text{Monodromia},$$

è una equivalenza di categorie.

Esercizi

15.1. Sia $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtore pienamente fedele. Dimostrare che F è essenzialmente iniettivo, ossia che se $X, Y \in \mathbf{A}$ e $F(X)$ è isomorfo a $F(Y)$, allora X è isomorfo ad Y.

15.2 (Lemma di Yoneda). Sia $\mathbf{A}$ una categoria. Per ogni oggetto $X \in \mathbf{A}$ denotiamo con h_X il funtore la cui funzione sugli oggetti è

$$h_X\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}, \qquad h_X(Y) = \mathrm{Mor}_{\mathbf{A}}(X, Y).$$

e $h_X(f)$ = composizione con f, per f morfismo in $\mathbf{A}$. Precisare meglio la funzione sui morfismi di h_X e verificare che si tratta di un funtore.

Dato un funtore $K\colon \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ denotiamo con $\mathrm{Nat}(h_X, K)$ l'insieme delle trasformazioni naturali $\gamma\colon h_X \to K$. Dimostrare che per ogni oggetto $X \in \mathbf{A}$ l'applicazione

$$\mathrm{Nat}(h_X, K) \to K(X), \qquad \gamma \mapsto \gamma_X(1_X),$$

è bigettiva. Dimostrare inoltre che h_X è isomorfo ad h_Y se e solo se X è isomorfo ad Y.

15.3. Sia $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ la categoria degli spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$ e denotiamo con $D\colon \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ il funtore che ad ogni spazio vettoriale V associa il suo doppio duale $D(V) = V^{**}$.

Dimostrare che le inclusioni naturali $i_V\colon V \hookrightarrow V^{**}$ definiscono una trasformazione naturale tra il funtore identità ed il funtore D.

15.4. Interpretare il teorema di Van Kampen (Teorema 14.1) come un'equivalenza di categorie.

15.2 Automorfismi interni ed esterni

Per ogni gruppo G indichiamo con $\mathrm{Aut}(G)$ l'insieme dei suoi **automorfismi**, ossia l'insieme degli isomorfismi di G in sé. Con il prodotto di composizione $\mathrm{Aut}(G)$ è un gruppo ed è un sottogruppo del gruppo di tutte le permutazioni di G.

Esempio 15.13. Il gruppo $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ è isomorfo al gruppo delle matrici $n \times n$ a coefficienti interi e determinante ± 1.

Dato un gruppo G, esiste un omomorfismo di gruppi

$$\mathrm{Inn}\colon G \to \mathrm{Aut}(G), \qquad g \mapsto \mathrm{Inn}_g,$$

dove Inn_g è la coniugazione per g, ossia $\mathrm{Inn}_g(a) = gag^{-1}$ per ogni $a \in G$. Infatti, per ogni $g \in G$, l'applicazione $a \mapsto gag^{-1}$ è un automorfismo di G.

Definizione 15.14. *Gli automorfismi di G della forma Inn_g si dicono **automorfismi interni**; gli automorfismi di G che non sono interni si dicono **esterni**. Il sottogruppo $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$, immagine dell'omomorfismo Inn, viene detto **gruppo degli automorfismi interni** di G.*

Il sottogruppo $\mathrm{Inn}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ è normale: sia infatti ϕ un automorfismo di G, allora per ogni $g, a \in G$ si ha

$$\phi\,\mathrm{Inn}_g\,\phi^{-1}(a) = \phi(g\phi^{-1}(a)g^{-1}) = \phi(g)a\phi(g)^{-1} = \mathrm{Inn}_{\phi(g)}(a)$$

e quindi in $\mathrm{Aut}(G)$ vale la relazione $\phi\,\mathrm{Inn}_g\,\phi^{-1} = \mathrm{Inn}_{\phi(g)}$. Il relativo gruppo quoziente viene indicato con il simbolo

$$\mathrm{Out}(G) = \frac{\mathrm{Aut}(G)}{\mathrm{Inn}(G)}.$$

Nella lingua inglese, gli automorfismi interni ed esterni vengono chiamati rispettivamente *inner and outer automorphisms*.

Esercizi

15.5. Se G è abeliano, allora $\mathrm{Inn}(G) = 0$. Più in generale, dimostrare che il nucleo dell omomorfismo Inn è uguale al centro di G. Ricordiamo che il centro di un gruppo G è l'insieme $\{a \in G \mid ab = ba \quad \forall b \in G\}$ degli elementi che commutano con tutti gli altri.

15.6. Sia X uno spazio topologico connesso per archi e sia $x \in X$ un punto base. Mostrare che è ben definito un omomorfismo naturale di gruppi

$$r\colon\ \mathrm{Omeo}(X) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X, x)).$$

Mostrare inoltre che gli omeomorfismi omotopi all'identità sono contenuti nel nucleo di r.

15.7. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice **caratteristico** se $\phi(H) = H$ per ogni $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Dimostrare che:

1. Ogni sottogruppo caratteristico è normale.
2. Il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

3. Il sottogruppo G' dei commutatori di G, ossia il sottogruppo generato da tutti gli elementi $aba^{-1}b^{-1}$, al variare di $a, b \in G$, è un sottogruppo caratteristico.
4. Per ogni gruppo G esiste un omomorfismo naturale
$$\mathrm{Out}(G) \to \mathrm{Aut}(G/G'),$$
dove G' è il sottogruppo dei commutatori di G.

15.3 Insieme di Cantor e curve di Peano

Indichiamo con X lo spazio di tutte le successioni $a\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Possiamo pensare X come il prodotto di $\mathbb{N}$ copie dello spazio discreto $\{0,1\}$ e quindi, con la topologia prodotto, risulta essere uno spazio topologico compatto di Hausdorff.

Data una successione $a \in X$, gli insiemi
$$U(N,a) = \{b \in X \mid b_n = a_n \text{ per ogni } n \leq N\}, \qquad N \in \mathbb{N},$$
formano un sistema fondamentale di intorni di a. In particolare, lo spazio X soddisfa il primo assioma di numerabilità e quindi è anche compatto per successioni.

Lemma 15.15. *Nelle notazioni precedenti:*

1. *Per ogni intero positivo n e per ogni numero reale $r > 1$ l'applicazione*
$$f\colon X \to \mathbb{R}^n, \qquad f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k}(a_{kn+1}, a_{kn+2}, \ldots, a_{kn+n}),$$
è continua.
2. *Per ogni intero positivo n l'applicazione*
$$p\colon X \to [0,1]^n, \qquad p(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}(a_{kn+1}, a_{kn+2}, \ldots, a_{kn+n}),$$
è continua e surgettiva.
3. *L'applicazione*
$$g\colon X \to [0,1], \qquad g(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k,$$
è continua e iniettiva.

Dimostrazione. Consideriamo su $\mathbb{R}^n$ la distanza $d(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|$. Se $b \in U(nN, a)$, allora vale

$$d(f(b), f(a)) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{n}{r^k} = \frac{nr}{r^N(r-1)}.$$

La surgettività di p segue dal fatto che ogni numero reale $x \in [0,1]$ può essere scritto (in maniera non unica) come $x = \sum_{k>0} a_k/2^k$ per una opportuna successione a_k a valori in $\{0,1\}$.

Siano $a, b \in X$ due successioni distinte e sia N il massimo intero tale che $a_i = b_i$ per ogni $i < N$. Supponiamo per fissare le idee che $a_N = 0$ e $b_N = 1$. Allora vale

$$g(b) - g(a) = \frac{2}{3^N} + \sum_{k>N} \frac{2}{3^k}(b_k - a_k) \geq \frac{2}{3^N} - \sum_{k>N} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^N} > 0.$$

□

Definizione 15.16. *L'immagine $C = g(X) \subset [0,1]$ dell'applicazione g definita nel Lemma 15.15 viene detta* ***insieme di Cantor****.*

In altri termini, l'insieme di Cantor è l'insieme dei numeri compresi tra 0 e 1, nel cui sviluppo decimale in base 3 non compare mai la cifra 1. Poiché X è compatto e $[0,1]$ di Hausdorff, segue dal Corollario 4.49 che C è un sottoinsieme chiuso dell'intervallo $[0,1]$.

Teorema 15.17 (Curve di Peano). *Per ogni intero $n > 0$ esiste un'applicazione continua e surgettiva $[0,1] \to [0,1]^n$.*

Dimostrazione. Siano p e g le applicazioni introdotte nel Lemma 15.15. Siccome X è compatto e $C \subset [0,1]$ è di Hausdorff, l'applicazione bigettiva $g\colon X \to C$ è un omeomorfismo e quindi l'applicazione $pg^{-1}\colon C \to [0,1]^n$ è continua e surgettiva. Il teorema di estensione di Tietze (Teorema 8.29), applicato alle componenti di pg^{-1}, ci assicura che pg^{-1} si estende ad una applicazione continua $[0,1] \to [0,1]^n$. □

Per un altro approccio alle curve di Peano, basato sulla completezza dello spazio metrico $C(I, I^n)$, rimandiamo il lettore a [Mu00, Thm. 44.1].

Esercizi

15.8. Per ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ definiamo per ricorrenza la successione $\{p_n(x)\}$ ponendo $p_1(x) = x$ e

$$p_{n+1}(x) = \frac{3}{2} - \left| 3p_n(x) - \frac{3}{2} \right|.$$

Denotiamo poi con A l'insieme dei punti x tali che la successione $p_n(x)$ è limitata. Dimostrare:

1. A è un sottoinsieme chiuso di $[0,1]$.
2. $x \in A$ se e solo se vale $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ dove a_n è uguale a 0 o 2 per ogni n.
3. A coincide con l'insieme di Cantor C.

15.9. Usare l'omeomorfismo $S^n \simeq I^n/\partial I^n$ per dedurre che per ogni $n > 0$ esiste un cammino chiuso e surgettivo $\alpha\colon I \to S^n$.

15.4 Topologia di SO(3, ℝ)

In questa sezione ci occuperemo del gruppo topologico $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, sulla cui importanza, specialmente in meccanica dei solidi ed in fisica delle particelle, non abbiamo nulla da aggiungere. Sappiamo già che $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ è compatto, connesso e di Hausdorff. A breve mostreremo che è anche una varietà topologica di dimensione 3 e ne calcoleremo il gruppo fondamentale.

Ogni $A \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, $A \neq Id$, è una rotazione attorno ad una retta di $\mathbb{R}^3$ e quindi è ben definita un'applicazione

$$r\colon\ \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}), \qquad r(A) = \text{asse di rotazione di } A.$$

Per ogni retta $L \subset \mathbb{R}^3$, la simmetria s_L rispetto ad essa appartiene a $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ ed è quindi definita un'applicazione

$$s\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\}, \qquad L \mapsto s_L$$

tale che $rs = Id$.

Proposizione 15.18. *Nelle notazioni precedenti le applicazioni r ed s sono continue. Inoltre non esiste alcuna applicazione continua*

$$f\colon\ \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \{0\}$$

tale che $Af(A) = f(A)$ per ogni $A \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, $A \neq Id$.

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio

$$Z = \{(A,x) \in (\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\}) \times S^2 \mid Ax = x\}$$

e siano $p\colon Z \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\}$, $q\colon Z \to S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le proiezioni. Per ogni sottoinsieme chiuso $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vale $r^{-1}(C) = p(q^{-1}(C))$: siccome S^2 è compatto e Z è chiuso nel prodotto, l'applicazione p è chiusa e quindi anche $r^{-1}(C)$ è chiuso.

Per ogni $A \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ possiamo trovare una base ortonormale rispetto alla quale A si rappresenta con una matrice del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

e quindi A appartiene all'immagine di s se e solo se traccia$(A) = -1$. Dunque l'immagine di s è il compatto $W = \{A \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \mid \text{traccia}(A) = -1\}$ e s è l'inversa dell'applicazione bigettiva $r_{|W} \colon W \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Dato che W è compatto e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è di Hausdorff, l'applicazione $r_{|W}$ è un omeomorfismo.

Supponiamo che esista un'applicazione f come nell'enunciato; a meno di dividere per $\|f(A)\|$ non è restrittivo supporre $f\colon \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\} \to S^2$. Ma allora la composizione fs sarebbe una sezione del rivestimento non banale $S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. □

Teorema 15.19. *Il gruppo topologico* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *è omeomorfo allo spazio proiettivo* $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. *L'applicazione* $r\colon \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) - \{Id\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ *è un'equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. Sia $o \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, allora $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \{o\}$ si retrae per deformazione a qualunque piano proiettivo non passante per o e quindi, per dimostrare il teorema, basta trovare un omeomorfismo $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \cong \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, che fa corrispondere il sottospazio W delle simmetrie ad un piano proiettivo.

Definiamo un'applicazione surgettiva $f\colon S^2 \times \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ nel modo seguente: consideriamo un vettore unitario $x \in S^2$, apriamo la mano destra ed infiliamola in $\mathbb{R}^3$ con il pollice sovrapposto ad x, definiamo $f(x,\alpha)$ come la rotazione di angolo α attorno alla retta $\mathbb{R}x$ nel senso di rotazione che si ottiene chiudendo la mano a pugno. Poiché $f(x,\alpha) = f(-x, 2\pi-\alpha) = f(x, 2\pi+\alpha)$, la restrizione

$$f\colon S^2 \times [0,\pi] \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$$

è continua e surgettiva; siccome $S^2 \times [0,\pi]$ è compatto e $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ di Hausdorff, l'applicazione f è una identificazione chiusa. Si dimostra facilmente che $f(x,\alpha) = f(y,\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta$ e $x = y$, oppure $\alpha = \beta = 0$, oppure $\alpha = \beta = \pi$ e $x = -y$. Notiamo in proposito che $f(x,0)$ è l'identità per ogni $x \in S^2$, mentre $f(x,\pi)$ è la simmetria rispetto al sottospazio vettoriale generato da x. Consideriamo poi l'applicazione

$$g\colon S^2 \times [0,\pi] \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \qquad g((x_1,x_2,x_3),\alpha) = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \pi-\alpha].$$

È facile dimostrare che g è surgettiva e che $g(x) = g(y)$ se e solo se $f(x) = f(y)$. Per la proprietà universale delle identificazioni esiste quindi un omeomorfismo $\phi\colon \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ tale che $g = \phi f$. Vale inoltre $g(Id) = [0,0,0,1]$ e $g(W) = f(\{\alpha = \pi\}) = \{[x_1,x_2,x_3,0]\}$. □

Il gruppo $\mathrm{PSU}(n,\mathbb{C})$ è per definizione il quoziente di $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ per il sottogruppo ciclico finito dei multipli dell'identità a determinante 1: in particolare $\mathrm{PSU}(2,\mathbb{C}) = \dfrac{\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})}{\pm Id}$. Con la topologia quoziente, i gruppi $\mathrm{PSU}(n,\mathbb{C})$ sono gruppi topologici compatti, connessi e di Hausdorff.

Proposizione 15.20. *Esiste un isomorfismo di gruppi* $\mathrm{PSU}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ *che è anche un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che esiste un omomorfismo di gruppi continuo e surgettivo $\rho\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ tale che $\ker\rho = \{\pm Id\}$. Dato che $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ e $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ sono spazi compatti di Hausdorff, la fattorizzazione al quoziente $\dfrac{\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})}{\pm Id} \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ risulterà essere un omeomorfismo.

Per definire ρ introduciamo lo spazio vettoriale reale $H \subset M(2,2,\mathbb{C})$ delle matrici Hermitiane a traccia nulla. Esiste un isomorfismo naturale di spazi vettoriali reali

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \to H, \qquad \phi(t_1,t_2,t_3) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2+it_3 \\ t_2-it_3 & -t_1 \end{pmatrix}.$$

Tramite l'isomorfismo ϕ, la forma bilineare

$$H \times H \to \mathbb{R}, \qquad (A,B) \mapsto \frac{1}{2}\,\mathrm{traccia}(AB),$$

coincide con il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^3$. Inoltre, per ogni $U \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ l'applicazione

$$\rho(U)\colon H \to H, \qquad \rho(U)(A) = UAU^{-1}$$

è un'isometria e quindi, tramite ϕ definisce un omomorfismo di gruppi $\rho\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Dal punto di vista topologico l'applicazione ρ è continua e quindi l'immagine è contenuta nella componente connessa dell'identità che è uguale a $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

Mostriamo adesso che

$$\rho\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$$

è un omomorfismo surgettivo che ha come nucleo il sottogruppo $\{\pm Id\}$. Abbiamo osservato nell'Esempio 1.16 che le matrici del gruppo speciale unitario $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}, \qquad \text{con } a,b \in \mathbb{C} \text{ tali che } |a|^2+|b|^2 = 1.$$

Per semplicità notazionale denotiamo con

$$\rho(a,b) = \rho\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

e con $p\colon \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to S^2$ la proiezione sulla prima colonna. Allora, dalla formula

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{a} & b \\ -\overline{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2-|b|^2 & 2ab \\ 2\overline{a}\overline{b} & |b|^2-|a|^2 \end{pmatrix},$$

segue che $p\rho(a,b) = (1,0,0)$ se e solo se $b = 0$ e, con un pizzico di trigonometria, otteniamo

$$p\rho(\cos(\alpha),\sin(\alpha)e^{i\beta}) = (\cos(2\alpha),\sin(2\alpha)\cos(\beta),\sin(2\alpha)\sin(\beta)).$$

In particolare, la composizione $p\rho$ è surgettiva e se $\rho(a,b)=Id$, allora $b=0$. Un facile conto che omettiamo mostra inoltre che

$$\rho(e^{i\alpha},0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha)\\ 0 & \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha)\end{pmatrix}$$

e quindi $\rho(a,b)=Id$ se e solo se $b=0$ e $a=\pm1$.

Adesso è facile provare che ρ è surgettiva, sia infatti $A\in\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ e scegliamo una matrice $U\in\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ tale che $p(A)=p\rho(U)$. Se poniamo $B=\rho(U)^{-1}A$, allora $p(B)=(1,0,0)$ e quindi $B=\rho(e^{i\alpha},0)$ per qualche α. □

La Proposizione 15.20 può essere utilizzata per un'altra dimostrazione dell'omeomorfismo $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})\cong\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Infatti $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ è omeomorfo alla sfera S^3 e la moltiplicazione in $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ per la matrice $-Id$ corrisponde all'involuzione antipodale in S^3. Ne deduciamo che il gruppo $\mathrm{PSU}(2,\mathbb{C})=\dfrac{\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})}{\pm Id}$, dotato della topologia quoziente, è omeomorfo allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Esercizi

15.10. Se sapete cosa sono gli angoli di Eulero, utilizzateli per una dimostrazione alternativa della surgettività di $\rho\colon \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})\to\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

15.11. Sia $G\subset\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ il sottogruppo delle matrici che hanno come prima riga il vettore $(1,0,0)$. Dimostrare che G non è un retratto di $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

15.12. Dimostrare ogni omomorfismo continuo di gruppi $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})\to S^1$ è banale.

15.13. Descrivere, per ogni $n>2$ un omomorfismo continuo ed iniettivo di gruppi topologici $\mathrm{PSU}(n,\mathbb{C})\to\mathrm{SO}(n^2-1,\mathbb{R})$.

15.14 (∗). Sia n un intero positivo e denotiamo con $p\colon \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})\to S^n$ la proiezione sulla prima colonna, ossia $p(A)=Ae_1$, dove e_1 è il primo vettore della base canonica.

Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha\neq0$, denotiamo con $S_\alpha\in\mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})$ la riflessione rispetto all'iperpiano perpendicolare ad α: in formule

$$S_\alpha(x)=x-2\frac{(x\cdot\alpha)}{(\alpha\cdot\alpha)}\alpha.$$

Si noti che se $u,v\in S^n$, allora $S_{u-v}(u)=v$.

1. Dimostrare che per ogni $u \in S^n$ esiste un'applicazione continua
$$s\colon S^n - \{u\} \to \mathrm{SO}(n+1,\mathbb{R})$$
tale che $ps(v) = v$ per ogni $v \in S^n - \{u\}$.
2. Dimostrare che per ogni $u \in S^n$ esiste un omeomorfismo
$$\phi\colon (S^n - \{u\}) \times \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \to p^{-1}(S^n - \{u\})$$
tale che $p\phi$ è uguale alla proiezione sul primo fattore.
3. Usare il Corollario 14.3 per dimostrare che $\pi_1(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2$ per ogni $n \geq 3$.
4. Ripetere il ragionamento precedente nel caso complesso per dimostrare che $\mathrm{SU}(n,\mathbb{C})$ è semplicemente connesso per ogni $n \geq 2$.

15.5 La sfera impettinabile

Definizione 15.21. *Diremo che una sfera S^n è **pettinabile** se esiste un'applicazione continua $f\colon S^n \to S^n$ tale che $f(x)$ è ortogonale a x per ogni $x \in S^n$.*

Esempio 15.22. Se $n = 2m-1$ è dispari, allora S^n è pettinabile. Infatti basta considerare $S^{2m-1} \subset \mathbb{C}^m$ e definire l'applicazione f come la moltiplicazione per l'unità immaginaria.

Se n è pari, allora S^n non è pettinabile; come al solito, per $n > 2$ dobbiamo rimandare il lettore ai corsi di topologia algebrica (è una delle prime applicazioni dell'omologia).

Teorema 15.23. *La sfera S^2 non è pettinabile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $f\colon S^2 \to S^2$ continua e tale che $(x \cdot f(x)) = 0$ per ogni $x \in S^2$. Consideriamo l'applicazione continua
$$g\colon S^2 \to S^2, \qquad g(x) = x \wedge f(x),$$
dove $\wedge$ indica il prodotto esterno:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}.$$
I vettori di norma 1 ed ortogonali ad x sono tutti e soli quelli del tipo $\cos(\alpha)f(x) + \sin(\alpha)g(x)$. Interpretando $x, f(x)$ e $g(x)$ come vettori colonna, possiamo definire un'applicazione continua e bigettiva $F\colon S^2 \times S^1 \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$:
$$F(x, e^{i\alpha}) = (x, \cos(\alpha)f(x) + \sin(\alpha)g(x), -\sin(\alpha)f(x) + \cos(\alpha)g(x)).$$

Siccome dominio e codominio sono compatti di Hausdorff, ne segue che F è un omeomorfismo. Questo non è possibile perché il gruppo fondamentale di $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/2$, mentre il gruppo fondamentale di $S^2 \times S^1$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$. $\square$

Corollario 15.24. *Sia $g\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione continua. Allora esiste un punto $x \in S^2$ tale che $g(x)$ è un multiplo scalare di x.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni $x \in S^2$ il vettore $g(x)$ sia linearmente indipendente con x. Possiamo allora effettuare l'ortonormalizzazione

$$f\colon S^2 \to S^2, \qquad f(x) = \frac{g(x) - (g(x)\cdot x)x}{\|g(x) - (g(x)\cdot x)x\|}$$

che contraddice la non pettinabilità di S^2. $\square$

Una versione divulgativa del Corollario 15.24 afferma che esiste almeno un punto sulla superfice terrestre in cui il vento soffia in direzione perpendicolare al suolo.

Esercizi

15.15 (♡). Dimostrare che ogni applicazione continua $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ possiede un punto fisso.

15.16. Dimostrare che se una sfera S^n è pettinabile allora l'applicazione antipodale in S^n è omotopa all'identità.

15.17 (∗). Sia $p\colon \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to S^2$ l'applicazione che ad ogni matrice associa il primo vettore colonna. Dimostrare che per ogni cammino $\alpha\colon I \to S^2$ esiste un cammino $\beta\colon I \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ tale che $p\beta = \alpha$.

15.6 Funzioni polinomiali complesse

Lemma 15.25. *Siano $U \subset \mathbb{C}$ un intorno di 0 e $f\colon U \to \mathbb{C}$ un'applicazione definita dalla formula $f(z) = z^n g(z)$, dove n è un intero positivo e $g\colon U \to \mathbb{C}$ è un'applicazione continua tale che $g(0) \neq 0$. Allora l'immagine $f(U)$ è un intorno di 0.*

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che U sia una palla chiusa di centro 0, ossia $U = \{z \mid |z| \leq r\}$, $r > 0$. A meno di restringere U possiamo supporre che la parte reale di $\frac{g(z)}{g(r)}$ sia maggiore di $1/2$ per ogni $z \in U$ e a meno di moltiplicazione per una costante possiamo supporre $g(r) = 1$: dimostriamo che $f(U)$ contiene la palla aperta di centro 0 e raggio $\frac{r^n}{2}$. Supponiamo per assurdo che esista un punto $p \in \mathbb{C}$ tale che $|p| < \frac{r^n}{2}$ e $p \notin f(U)$. Allora si ha

$f(U) \subset \mathbb{C} - \{p\}$ ed il cammino $\alpha(t) = f(r\mathbb{e}(t))$ è omotopicamente banale in $\mathbb{C} - \{p\}$.

Dimostriamo adesso che il cammino α è omotopicamente equivalente al cammino $\beta(t) = (r\mathbb{e}(t))^n$, dove l'omotopia è data dalla combinazione convessa

$$F(t, s) = s\alpha(t) + (1 - s)\beta(t).$$

Per verificare che p non appartiene all'immagine di F scriviamo

$$F(t, s) = (r\mathbb{e}(t))^n (sg(r\mathbb{e}(t)) + (1 - s)) :$$

per ogni $s \in [0, 1]$, il numero complesso $sg(r\mathbb{e}(t)) + (1 - s)$ ha parte reale maggiore od uguale ad $1/2$ e quindi il valore assoluto di $F(t, s)$ è sempre maggiore od uguale a $r^n/2$.

Osserviamo adesso che la classe di omotopia di β in $\pi_1(\mathbb{C} - \{p\}, f(r))$ è non banale, in quanto potenza n-esima del generatore. Abbiamo trovato una contraddizione. □

Teorema 15.26. *Sia $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ un polinomio a coefficienti complessi di grado positivo. Allora l'applicazione associata $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è continua, aperta e chiusa.*

Dimostrazione. La continuità è chiara e l'apertura segue immediatamente dal Lemma 15.25. Per dimostrare la chiusura osserviamo che f si estende ad un'applicazione continua $\hat{f} \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ponendo $\hat{f}(\infty) = \infty$. Siccome $\mathbb{C} = \hat{f}^{-1}(\mathbb{C})$ e $\hat{f}$ è un'applicazione chiusa (da compatto a Hausdorff), segue dalla formula di proiezione che anche f è un'applicazione chiusa. □

Corollario 15.27. *Ogni polinomio di grado positivo a coefficienti complessi possiede radici complesse.*

Dimostrazione. Sia f polinomio di grado positivo. Per il teorema precedente l'applicazione $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è aperta e chiusa. In particolare $f(\mathbb{C})$ è un sottoinsieme aperto e chiuso e quindi, siccome $\mathbb{C}$ è connesso, f è surgettiva. □

15.7 La dimostrazione di Grothendieck del teorema di Van Kampen

Vogliamo adesso dimostrare una versione leggermente più debole del Teorema di Van Kampen 14.1 utilizzando la teoria dei rivestimenti. Fonti autorevoli [Fu95, Go71] indicano che tale dimostrazione si deve a Grothendieck.

Siano A, B due aperti di uno spazio topologico X tali che $X = A \cup B$; supponiamo che A, B ed $A \cap B$ siano **connessi per archi** e sia $x_0 \in A \cap B$ un punto fissato. Le inclusioni $A \subset X$, $B \subset X$, $A \cap B \subset A$ e $A \cap B \subset B$ inducono un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A,x_0) \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & & \pi_1(X,x_0). \\
& \pi_1(B,x_0) \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema 15.28. *Nelle notazioni precedenti, si assuma che ogni punto di X possieda un sistema fondamentale di intorni semplicemente connessi.*

Allora per ogni gruppo T ed ogni coppia di omomorfismi $h\colon \pi_1(A,x_0)\to T$, $k\colon \pi_1(B,x_0)\to T$ tali che $h\alpha_* = k\beta_*$, esiste un unico omomorfismo di gruppi $\pi\colon \pi_1(X,x_0)\to T$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A,x_0) \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_*"] & \\
\pi_1(A\cap B,x_0) \arrow[ur, "\alpha_*"] \arrow[dr, "\beta_*"'] & T & \pi_1(X,x_0). \arrow[l, "\pi"'] \\
& \pi_1(B,x_0) \arrow[u, "k"'] \arrow[ur, "g_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Osservazione 15.29. Il Teorema 15.28 richiede, rispetto al Teorema 14.1, l'ipotesi aggiuntiva che X sia localmente semplicemente connesso. Tale ipotesi è, fortunatamente, soddisfatta dalla stragrande maggioranza degli spazi topologici di uso comune.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che $\pi_1(X,x_0)$ è generato dalle immagini di f_* e g_* e questo implica immediatamente l'unicità di π.

Ogni sottoinsieme aperto di X è localmente connesso per archi e semilocalmente semplicemente connesso e quindi si possono applicare tutti i risultati di teoria dei rivestimenti, compreso il teorema di esistenza e unicità di rivestimenti con monodromia assegnata.

Gli omomorfismi h, k permettono di definire due azioni destre

$$T\times \pi_1(A,x_0)\to T,\qquad (t,a)\mapsto t\bullet a = th(a),$$

$$T\times \pi_1(B,x_0)\to T,\qquad (t,b)\mapsto t\bullet b = tk(b),$$

compatibili con l'azione sinistra data dal prodotto $T\times T\to T$. Per il Teorema 13.35 esistono due rivestimenti

$$p\colon E\to A,\qquad q\colon F\to B,$$

e due bigezioni $\varphi\colon T \to p^{-1}(x_0)$, $\psi\colon T \to q^{-1}(x_0)$ che fanno corrispondere le precedenti azioni alle azioni di monodromia. Consideriamo adesso l'azione di monodromia associata al rivestimento

$$p\colon p^{-1}(A \cap B) \to A \cap B.$$

Per ogni $a \in \pi_1(A \cap B, x_0)$ e $t \in T$ si ha chiaramente

$$\varphi(t) \cdot a = \varphi(t \bullet \alpha_*(a)) = \varphi(th(\alpha_*(a))).$$

Similmente, considerando l'azione di monodromia associata al rivestimento

$$q\colon q^{-1}(A \cap B) \to A \cap B$$

si ottiene

$$\psi(t) \cdot a = \psi(t \bullet \beta_*(a)) = \psi(tk(\beta_*(a))).$$

Per ipotesi $h\alpha_* = k\beta_*$ e quindi le due azioni di monodromia sono isomorfe; per il Teorema 13.35 esiste un omeomorfismo $\varPhi\colon p^{-1}(A \cap B) \to q^{-1}(A \cap B)$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(A \cap B) \arrow[dd, "\varPhi"] \arrow[dr, "p"] & \\ T \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & A \cap B \\ & q^{-1}(A \cap B) \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

Incolliamo assieme E e F utilizzando come funzione di attaccamento $\varPhi$: otteniamo un rivestimento $E \cup_{\varPhi} F \to X$ con la fibra su x_0 isomorfa a T e di conseguenza un'azione di monodromia

$$T \times \pi_1(X, x_0) \to T.$$

Indichiamo con $1 \in T$ l'elemento neutro e definiamo $\pi\colon \pi_1(X, x_0) \to T$ come $\pi(a) = 1 \cdot a$. Osserviamo che se $a \in \pi_1(A, x_0)$ allora $1 \cdot f_*(a) = 1 \bullet a = h(a)$, mentre se $b \in \pi_1(B, x_0)$ allora $1 \cdot g_*(b) = 1 \bullet b = k(b)$.

L'azione sinistra data dalla moltiplicazione $T \times T \to T$ è compatibile con la restrizione della monodromia ai sottogruppi $f_*\pi_1(A, x_0)$ e $g_*\pi_1(B, x_0)$. Siccome tali sottogruppi generano $\pi_1(X, x_0)$ ne segue che l'azione di monodromia $T \times \pi_1(X, x_0) \to T$ è compatibile con la moltiplicazione $T \times T \to T$. Per la Proposizione 13.12 l'applicazione π è un omomorfismo di gruppi e questo conclude la dimostrazione. □

15.8 Un lungo esercizio: il teorema di Poincaré-Volterra

Gli esercizi di questa sezione, svolti nella sequenza proposta, forniranno le dimostrazioni dei seguenti risultati:

Teorema 15.30 (Poincaré-Volterra classico). *Sia E uno spazio topologico connesso di Hausdorff e sia $p\colon E \to \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo locale. Allora ogni fibra di p è al più numerabile ed E è a base numerabile.*

Teorema 15.31 (Poincaré-Volterra per rivestimenti). *Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Se X è una varietà topologica, allora anche E è una varietà topologica.*

Esercizi

15.18. Se non lo avete già fatto, risolvete gli esercizi 12.3, 12.4 e 12.5.

15.19. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di uno spazio topologico localmente connesso. Dimostrare che le componenti connesse degli aperti di $\mathcal{B}$ formano una famiglia numerabile.

15.20. Siano E uno spazio topologico di Hausdorff e separabile, X uno spazio topologico localmente connesso a base numerabile e $p\colon E \to X$ un omeomorfismo locale. Dimostrare che E è a base numerabile. (Sugg.: siano $S \subset E$ denso e numerabile, $\mathcal{A}$ la famiglia delle componenti connesse degli aperti di una base numerabile di X e $\mathcal{B}$ la famiglia degli aperti $U \subset E$ tali che $p(U) \in \mathcal{A}$ e $p\colon U \to p(U)$ è un omeomorfismo. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è una base di E e che per ogni coppia $(V, s) \in \mathcal{A} \times S$ esiste al più un aperto $U \in \mathcal{B}$ tale che $p(U) = V$ e $s \in U$.)

15.21. Sia E uno spazio topologico connesso per archi e sia $p\colon E \to \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo locale. Dimostrare che per ogni coppia di punti $e_1, e_2 \in p^{-1}(0)$ esiste un cammino $\alpha \in \Omega(E, e_1, e_2)$ tale che $p\alpha$ è una poligonale chiusa con vertici in $\mathbb{Q}^n$. (Sugg.: prendere un cammino qualsiasi con estremi e_1, e_2 e ricoprirlo con un numero finito di aperti U_i tali che gli aperti $p(U_i)$ siano convessi.)

15.22. Dimostrare il Teorema 15.30.

15.23. Mostrare con un esempio che il teorema di Poincaré-Volterra classico diventa falso senza l'ipotesi di Hausdorff.

15.24. Sia X una varietà topologica connessa. Dimostrare che esiste un ricoprimento di X formato da una famiglia numerabile di aperti contrattili.

15.25. Siano X una varietà topologica connessa, $S \subset X$ un sottoinsieme denso e numerabile ed $\mathcal{A}$ un ricoprimento numerabile di X formato da aperti semplicemente connessi. Consideriamo l'insieme numerabile

$$P = \{(U, x, y) \mid U \in \mathcal{A},\ x, y \in S \cap U\}$$

e per ogni $\xi = (U, x, y) \in P$ scegliamo un cammino $\alpha_\xi \colon [0, 1] \to U$ tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Dimostrare che ogni cammino in X con estremi in S è omotopo ad un prodotto finito di cammini α_ξ, con $\xi \in P$. Dedurne che il gruppo fondamentale di X è numerabile.

15.26. Siano X una varietà topologica connessa ed $E \to X$ un rivestimento connesso. Dimostrare che E è a base numerabile.

15.27. Dimostrare il Teorema 15.31.

15.28 (∗). Nelle stesse ipotesi del Teorema 15.30, per ogni $e \in E$ denotiamo con $R(e)$ l'insieme dei numeri reali positivi r tali che esiste un intorno aperto $e \in U$ con la proprietà che $p \colon U \to B(p(e), r)$ è un omeomorfismo. Dimostrare che se l'applicazione p non è bigettiva, allora per ogni $e \in E$ l'insieme $R(e)$ è limitato superiormente e l'applicazione

$$f \colon E \to \mathbb{R}, \qquad f(e) = \sup R(e),$$

è continua.

16

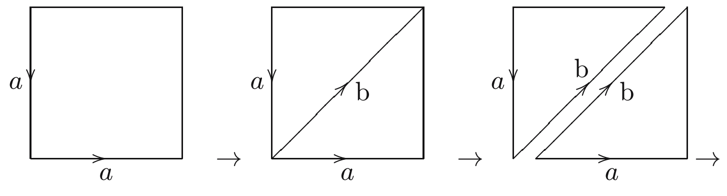
Suggerimenti e soluzioni di alcuni esercizi

Riportiamo suggerimenti e soluzioni degli esercizi segnalati con il cuoricino ♡. Altre soluzioni si trovano alla pagina web citata in prefazione, e comunque rintracciabile facilmente digitando *marco manetti* in un qualunque motore di ricerca.

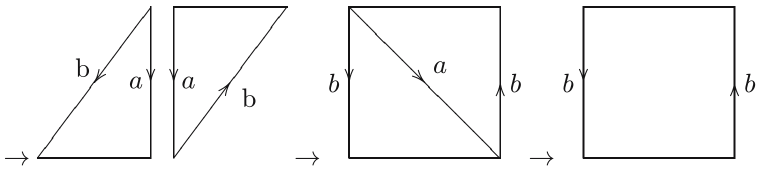
Capitolo 1

1.1 La risposta al Problema 1.1 è positiva, indipendentemente dal numero di ponti che unisce ogni coppia di zone "continentali".

1.7 Tagliando il quadrato lungo la diagonale



e poi invertendo l'ordine delle cuciture



ritroviamo il nastro di Moebius.

1.27 Le due applicazioni

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib,\, b > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \qquad z \mapsto \frac{z-i}{z+i},$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \to \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib,\, b > 0\}, \qquad z \mapsto i\,\frac{1+z}{1-z},$$

sono continue e sono una l'inversa dell'altra.

Capitolo 2

2.4 Le formule 2,4 e 6 sono sempre vere, mentre le 1,3 e 5 sono generalmente false: basta considerare ad esempio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = \{x \le 0\}$, $B = \{x \ge 0\}$.

2.6 Ad esempio

$$3^{\sqrt{2}} = \sup\left\{x \in \mathbb{R} \mid x^n \le 3^{\min\{m\in\mathbb{N} \mid m^2 \ge 2n^2\}} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2.7 Indicando con $P, D \subset \mathbb{N}$ i sottoinsiemi dei numeri pari e dispari rispettivamente, definiamo in maniera ricorsiva $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo $g(1) = 1$ e

$$g(n+1) = \begin{cases} \min(P - \{g(1), g(2), \ldots, g(n)\}) & \text{se } \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{g(i)}}{g(i)} \le x, \\ \\ \min(D - \{g(1), g(2), \ldots, g(n)\}) & \text{se } \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{g(i)}}{g(i)} > x. \end{cases}$$

Siccome

$$\sum_{n\in P} \frac{1}{n} = \sum_{n\in D} \frac{1}{n} = +\infty$$

l'applicazione g è bigettiva e vale

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{g(i)}}{g(i)} - x \right| = 0.$$

2.10 Suggerimento: per ogni numero reale $x \in [1, 10[$ consideriamo l'applicazione

$$f_x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f_x(n) = [10^n x],$$

dove $[\cdot]$ indica la parte intera: $[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \le t\}$. Provare che $\lim_n f_x(n)/10^n = x$ e che, siccome $10^n \le f_x(n) < 10^{n+1}$, ogni $x \in [1, 10[$ è univocamente determinato dall'immagine di f_x. Mostrare infine che se $f_x(n) < f_y(n)$, allora $f_x(m) < f_y(m)$ per ogni $m \ge n$.

2.11 Per l'assioma della scelta possiamo scegliere per ogni $i \in I$ un'applicazione bigettiva $f_i\colon X_i \to Y_i$. Basta allora considerare l'applicazione

$$f\colon X \to Y, \qquad f(x) = f_i(x) \text{ se } x \in X_i.$$

2.18 Per il Lemma di Zorn, basta dimostrare che ogni catena $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ possiede maggioranti: a tal fine è sufficiente dimostrare che

$$\cup\{A \mid A \in \mathcal{C}\} \in \mathcal{B}.$$

Se $B \subset \cup\{A \mid A \in \mathcal{C}\}$ è un sottoinsieme finito, allora esiste $C \in \mathcal{C}$ tale che $B \subset C$ e quindi, siccome $C \in \mathcal{B}$ ne segue che $B \in \mathcal{B}$. Abbiamo quindi provato che ogni sottoinsieme finito di $\cup\{A \mid A \in \mathcal{C}\}$ appartiene a $\mathcal{B}$ e di conseguenza $\cup\{A \mid A \in \mathcal{C}\} \in \mathcal{B}$.

Capitolo 3

3.1 Le 1,2 e 4 sono vere. La 3 è invece falsa.

3.5 Occorre dimostrare che la famiglia delle progressioni $N_{a,b}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 3.7: questo segue immediatamente dalle formule

$$N_{0,1} = \mathbb{Z}, \qquad N_{a,b} \cap N_{c,d} = \cup\{N_{s,bd} \mid s \in N_{a,b} \cap N_{c,d}\}.$$

Sicccome $N_{a,b}$ è il complementare in $\mathbb{Z}$ dell'unione di aperti

$$N_{a+1,b} \cup N_{a+2,b} \cup \cdots \cup N_{a+b-1,b}\,,$$

ne consegue che l'aperto $N_{a,b}$ è anche chiuso. Osserviamo infine che ogni aperto non vuoto contiene almeno una progressione aritmetica e quindi è infinito.

3.6 Siccome $A \subset A \cup B$ si ha $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$; similmente $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ e quindi $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. D'altra parte $\overline{A} \cup \overline{B}$ è un chiuso che contiene $A \cup B$ e quindi $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

3.12 Definiamo una topologia $\mathcal{T}$ su X ponendo come aperti i sottoinsiemi che sono intorni di ogni loro punto, ovvero $A \in \mathcal{T}$ se e solo se $A \in \mathcal{I}(x)$ per ogni $x \in A$. Verifichiamo che con questa scelta le condizioni (A1), (A2) e (A3) della Definizione 3.1 sono soddisfatte.

L'insieme vuoto, non avendo punti, è intorno di ogni suo punto, mentre la condizione 1 implica che X è aperto. Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di aperti e indichiamo con $A = \cup\{A_i \mid i \in I\}$ la loro unione. Se $x \in A$, allora $x \in A_j$ per qualche j, quindi A_j è un intorno di x e, per 3, anche A è un intorno di x. Se A e B sono aperti e $x \in A \cap B$, allora $A, B \in \mathcal{I}(x)$ e per la 4 anche $A \cap B \in \mathcal{I}(x)$.

Abbiamo finora dimostrato che $\mathcal{T}$ è una topologia, denotiamo momentaneamente con $J(x)$ la famiglia degli intorni di x relativi alla topologia $\mathcal{T}$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{I}(x) = J(x)$. Se $U \in J(x)$ significa che esiste un aperto A tale che $x \in A$ e $A \subset U$. Per definizione $A \in \mathcal{I}(x)$ e quindi per 3 anche $U \in \mathcal{I}(x)$. Viceversa sia $U \in \mathcal{I}(x)$ e sia V come alla condizione 5, allora $V \in \mathcal{T}$ e quindi $U \in J(x)$.

3.19 Supponiamo che $f(A)$ sia aperto in Y per ogni elemento A della base $\mathcal{B}$. Se $U \subset X$ è un aperto, possiamo trovare una sottofamiglia $\{A_i\}$ di aperti della base $\mathcal{B}$ tale che $U = \cup_i A_i$. Dunque $f(U) = \cup_i f(A_i)$ è unione di aperti in Y.

3.24 Scriviamo A come unione di una famiglia numerabile $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, di insiemi finiti e definiamo

$$f\colon \mathbb{R} \to [0,1], \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A, \\ \dfrac{1}{\min\{n \mid x \in A_n\}} & \text{se } x \in A. \end{cases}$$

3.25 Suggerimento: per ogni $n > 0$ considerare l'insieme $A_n \subset X$ dei punti x che possiedono un intorno U tale che $|f(y) - f(z)| < 1/n$ per ogni $y, z \in U$. Considerare inoltre l'insieme B_n dei punti x che possiedono un intorno U tale che $|f(y) - f(x)| < 1/n$ per ogni $y \in U$. Mostrare che $\cap A_n = \cap B_n$.

3.26 Supponiamo per fissare le idee che $d(x,y) \geq d(z,w)$. Per la disuguaglianza triangolare si ha

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(y,w)$$

e quindi

$$d(x,y) - d(z,w) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(y,w) - d(z,w) = d(x,z) + d(y,w).$$

3.27 Se X contiene un solo punto non c'è nulla da dimostrare. Possiamo quindi supporre che X sia un insieme finito con almeno due punti. Sia $x \in X$ e poniamo

$$r = \min\{d(x,y) \mid y \in X,\ y \neq x\}.$$

È chiaro che $r > 0$ e che $B(x,r) = \{x\}$; da questo segue che la topologia su X è discreta ed ogni sottoinsieme è aperto e chiuso. Osserviamo inoltre che, nelle notazioni precedenti, esiste $y \in X$ tale che $d(x,y) = r$ e quindi

$$\{x\} = \overline{B(x,r)} \neq \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}.$$

3.33 La funzione $f(t) = \frac{t}{1+t}$ è tale che $f^{-1}(0) = 0$. Inoltre f è concava crescente per $t \geq 0$ e quindi $\alpha f(t) \leq f(\alpha t)$ per ogni $t > 0$, $\alpha \in [0,1]$. In particolare, per ogni $0 \leq c \leq a + b$ si ha

$$f(c) \leq f(a+b) = \frac{a}{a+b} f(a+b) + \frac{b}{a+b} f(a+b) \leq f(a) + f(b)$$

e questo implica che $\delta = f \circ d$ è una distanza. Per dimostrare che è equivalente a d basta osservare che

$$d(x,y) \geq \delta(x,y) \geq \overline{d}(x,y)/2,$$

dove $\overline{d}$ è la limitazione standard di d, ed applicare il Corollario 3.46.

3.34 Dalla continuità di f in 0 segue che la topologia indotta da d è più fine di quella indotta da h.

Viceversa, notiamo che f è non decrescente e che per ogni intero positivo n vale $f(1/n) \geq f(1)/n$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ consideriamo un intero n tale che $1/n < \varepsilon$. Se $h(x,y) < f(1)/n$, allora $f(d(x,y)) \leq f(1/n)$ e di conseguenza $d(x,y) < \varepsilon$; per il Corollario 3.44 la topologia indotta da h è più fine di quella indotta da d.

3.36 Vedi Proposizione 7.28.

3.37 Sono false entrambe le affermazioni. Un possibile controesempio è dato dal sottospazio discreto $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

3.53 Dati quattro numeri naturali a, b, c, d, con $MCD(a,b) = MCD(c,d) = 1$, il prodotto bd è relativamente primo con ogni elemento dell'intersezione $N_{a,b} \cap N_{c,d}$: infatti se $n = a + kb = c + hd$ e p è un numero primo che divide bd, allora o p divide b e quindi $MCD(p,n) = MCD(p,a) = 1$, oppure p divide d e quindi $MCD(p,n) = MCD(p,c) = 1$. Dunque possiamo scrivere

$$\mathbb{N} = N_{1,1}, \qquad N_{a,b} \cap N_{c,d} = \cup\{N_{n,bd} \mid n \in N_{a,b} \cap N_{c,d}\}$$

e questo prova che $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$.

Dati due interi positivi distinti n, m, per ogni numero primo $p > \max(n,m)$ si ha

$$n \in N_{n,p}\ , \quad m \in N_{m,p}\ , \quad N_{n,p} \cap N_{m,p} = \emptyset$$

e dunque la topologia $\mathcal{T}$ è di Hausdorff.

Siano a, b relativamente primi, fissiamo un multiplo hb di b e proviamo che se $hb \in N_{c,d}$, allora

$$N_{a,b} \cap N_{c,d} \neq \emptyset.$$

Dalla condizione $hb \in N_{c,d}$ segue che b e d non hanno fattori comuni ed è possibile trovare due interi positivi t, s tali che $tb - sd = c - a$. Dunque

$$a + tb = c + sd \in N_{a,b} \cap N_{c,d}\ .$$

Siano A, B due aperti non vuoti; esistono allora quattro numeri naturali a, b, c, d tali che $MCD(a,b) = MCD(c,d) = 1$ e

$$N_{a,b} \subset A, \qquad N_{c,d} \subset B.$$

Per quanto visto sopra,

$$bd \in \overline{N_{a,b}} \cap \overline{N_{c,d}} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

In ogni spazio metrico (X,d) con almeno due punti, è sempre possibile trovare due aperti non vuoti con chiusure disgiunte: infatti, per ogni punto $x \in X$ ed ogni numero reale positivo r si ha

$$\overline{B(x,r)} \subset \{z \in X \mid d(x,z) \leq r\}.$$

Presi due punti distinti x, y ed un numero reale $r < d(x,y)/2$, segue dalla disuguaglianza triangolare che

$$\overline{B(x,r)} \cap \overline{B(y,r)} = \emptyset.$$

3.54 Suggerimento: sia per assurdo d una distanza su $\mathbb{R}_{Sf} \times \mathbb{R}_{Sf}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ scegliamo un numero reale positivo $h(t)$ tale che

$$[t, t + h(t)[\times[-t, -t + h(t)[\subset B\left((t, -t), \frac{\inf\{d((t,-t),(r,-r)) \mid r \neq t\}}{2}\right).$$

Dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $\{t \in \mathbb{R} \mid h(t) > \varepsilon\}$ è numerabile.

Capitolo 4

4.1 Gli spazi B e C sono connessi, lo spazio A è sconnesso.

4.11 Ogni sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ che contiene almeno due punti distinti è sconnesso. Infatti se $X \subset \mathbb{Q}$ e $a, b \in X$, allora preso un qualsiasi numero irrazionale ξ compreso tra a e b si ha che X è l'unione dei due aperti non vuoti e disgiunti

$$X = (X \cap]-\infty, \xi[) \cup (X \cap]\xi, +\infty[).$$

Dunque ogni componente connessa di $\mathbb{Q}$ è formata da un solo punto.

4.16 È falso: considerare ad esempio come A_n il complementare in $\mathbb{R}^2$ del segmento $y = 0$, $|x| \leq n$.

4.18 Denotiamo con $Y \subset X$ l'immagine dell'applicazione $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^{-1}, \cos(t))$. Chiaramente Y è connesso per archi e quindi è anche connesso. Per dimostrare che X è connesso basta far vedere che X è la chiusura di Y in $\mathbb{R}^2$. Il complementare di X è l'unione dei tre aperti

$$\{x < 0\}, \quad \{|y| > 1\} \quad \text{e} \quad \{(x,y) \mid x > 0,\ y \neq \cos(x^{-1})\},$$

quindi è chiuso in $\mathbb{R}^2$ e basta dimostrare che i punti di $X - Y$ sono aderenti a Y. Sia $p \in X - Y$ un punto fissato e scegliamo $t > 0$ tale che $p = (0, \cos(t))$; allora per ogni intorno U del punto p ed ogni intero n sufficientemente grande il punto $f(t + 2\pi n)$ appartiene ad $U \cap Y$.

Supponiamo adesso per assurdo che X sia connesso per archi e scegliamo un cammino continuo $\alpha\colon [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = (0,0)$ e $\alpha(1) \in Y$. Indichiamo con $\alpha_1, \alpha_2\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ le componenti di α e sia c il massimo dell'insieme chiuso e limitato $\{t \in [0,1] \mid \alpha_1(t) = 0\}$. Supponiamo, per fissare le idee, che $\alpha_2(c) \geq 0$: il caso $\alpha_2(c) \leq 0$ è perfettamente speculare. Per continuità deve esistere un $\delta > 0$ tale che se $t \in [c, c+\delta]$, allora $\alpha_2(t) \geq -1/2$. D'altra parte $\alpha_1([c, c+\delta])$ è un connesso che contiene almeno due punti e quindi esiste $\gamma > 0$ tale che $[0, \gamma] \subset \alpha_1([c, c+\delta])$. In particolare possiamo trovare $t \in]c, c+\delta]$ tale che $\alpha_1(t) > 0$ e $\cos((\alpha_1(t))^{-1}) = -1$. Osserviamo adesso che se $\alpha_1(t) = a > 0$, allora $\alpha(t) = (a, \cos(a^{-1}))$: contraddizione.

4.26 Fissato un qualunque indice $i \in I$, si ha $f(x) \leq \max f_i(X) < +\infty$ per ogni $x \in X$ e dunque la funzione f è limitata. Indichiamo com $M = \sup f(X)$ il suo estremo superiore e consideriamo, per ogni indice $i \in I$ ed ogni intero positivo n, il sottoinsieme aperto

$$U_{i,n} = \{x \in X \mid f_i(x) < M - 1/n\}.$$

Supponiamo per assurdo $f(x) < M$ per ogni $x \in X$. Allora per ogni $x \in X$ esiste un intero positivo n tale che $f(x) < M - 1/n$ ed un indice $i \in I$ tale che $f_i(x) < M - 1/n$. Di conseguenza $\{U_{i,n}\}$ è un ricoprimento aperto di X e possiamo estrarne un sottoricoprimento finito

$$X = U_{i_1,n_1} \cup \cdots \cup U_{i_s,n_s}.$$

Se $N = \max(n_1, \ldots, n_s)$, allora $f(x) < M - 1/N$ per ogni $x \in X$, in contraddizione con la definizione di M.

4.31 Fissato $\varepsilon > 0$, la relazione $x \sim y$ *se* x *ed* y *sono* ε*-collegati* è una relazione di equivalenza e le classi di equivalenza sono aperte. Dunque X è unione disgiunta di classi di equivalenza aperte e, se X è connesso, allora esiste una sola classe.

Se X è compatto e sconnesso, allora esso è unione di due chiusi disgiunti non vuoti C_1, C_2. Il prodotto $C_1 \times C_2$ è compatto e quindi esiste

$$r = \min_{x \in C_1, y \in C_2} d(x, y).$$

È allora chiaro che se $2\varepsilon < r$, i punti di C_1 non possono essere ε-collegati a punti di C_2.

4.39 Supponiamo per assurdo che esista un omeomorfismo $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \times [0, 1]$ e denotiamo $D_n = f(K_n)$. Allora $\{D_n\}$ è una esaustione in compatti ed esiste un intero N tale che $\{0\} \times [0, 1]$ è contenuto in D_N. D'altra parte, essendo D_N compatto, la sua proiezione sul primo fattore è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$ e quindi entrambi gli aperti $]-\infty, 0[\times[0, 1] - D_N$ e $]0, +\infty[\times[0, 1] - D_N$ sono non vuoti. Ne segue che $\mathbb{R} \times [0, 1] - D_N$ non è connesso, in contraddizione con la connessione di $\mathbb{R}^2 - K_N$.

4.42 Suggerimento: considerare l'esaustione in compatti $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ data da:

$$K_n = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n},\ 0 \leq z \leq n\} \cup$$
$$\cup \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq n,\ \frac{1}{n} \leq z \leq n\}.$$

Capitolo 5

5.3 Le applicazioni f e g sono surgettive e quindi anche $f \times g$ è surgettiva. Per il Lemma 5.3 basta dimostrare che se $U \subset X \times Z$ è un aperto, allora anche $(f \times g)(U)$ è aperto. Possiamo scrivere U come unione di aperti della base canonica, diciamo $U = \cup_i A_i \times B_i$. Quindi $(f \times g)(U) = \cup_i f(A_i) \times g(B_i)$ è unione di aperti.

5.4 Suggerimento: per ogni componente connessa $C \subset Y$, dimostrare che $p^{-1}(C)$ è unione di componenti connesse di X.

5.5 Per ipotesi l'applicazione f è aperta, quindi $f(A^o) \subset f(A)^o$. Di conseguenza $A^o \subset f^{-1}(f(A)^o) \subset A$ e quindi $A^o = f^{-1}(f(A)^o)$. Che $\overline{A}$ è saturo si dimostra passando al complementare, tenendo presente che $\overline{A} = X - (X - A)^0$ ed il complementare in X di un sottoinsieme saturo è ancora saturo.

5.7 Indichiamo con $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ la proiezione al quoziente. Siccome vale $\pi(1) \neq \pi(-1)$, ma 1 e -1 non hanno intorni saturi disgiunti, ne segue che $\mathbb{R}/\sim$ non è di Hausdorff. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la restrizione

$$\pi\colon]x-1, x+1[\to X$$

è una immersione aperta e quindi ogni punto $\pi(x)$ possiede un intorno omeomorfo ad un intervallo aperto.

5.12 L'inclusione $[0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ e l'applicazione $\mathbb{e}$ si fattorizzano a due applicazioni continue e bigettive $[0,1]/\{0,1\} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$. Abbiamo già dimostrato che la restrizione di $\mathbb{e}$ all'intervallo $[0,1]$ è una identificazione e quindi la composizione delle due applicazioni $[0,1]/\{0,1\} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ è un omeomorfismo. Di conseguenza $[0,1]/\{0,1\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

La proiezione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è aperta e quindi anche $\mathbb{e}$ è aperta. Il sottoinsieme $C = \{n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\, n \geq 2\} \subset \mathbb{R}$ è chiuso, mentre $\mathbb{e}(C)$ possiede $(1,0)$ come punto di accumulazione.

5.21 L'unico punto non banale è il terzo. Bisogna dimostrare che per ogni aperto $U \subset \mathbb{Q}$ tale che $0 \in U$ ed ogni aperto f-saturo $V \subset \mathbb{R}$ tale che $0 \in V$ vale

$$(f(V) \times U) \cap (f \times Id)(C) = (f \times Id)((V \times U) \cap C) \neq \emptyset.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande e tale che $[0, \sqrt{2}/n] \cap \mathbb{Q} \subset U$ e scegliamo un numero reale $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e tale che $[n, n+\varepsilon] \subset V$. Poiché $[n, n+\varepsilon] \times ([0, \sqrt{2}/n] \cap \mathbb{Q})$ interseca la retta $x + y = n + \sqrt{2}/n$, ne segue che $(V \times U) \cap C \neq \emptyset$.

Capitolo 6

6.1 Indichiamo con $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ la proiezione al quoziente e con $z = p(\mathbb{Z})$ la classe di equivalenza dei numeri interi. Si supponga che z abbia un sistema fondamentale numerabile U_n, $n \in \mathbb{N}$, di intorni e scegliamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ un numero $0 < d_n < 1/2$ tale che $[n - d_n, n + d_n] \subset p^{-1}(U_n)$. L'aperto

$$]-\infty, \frac{1}{2}[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n-d_n, n+d_n[$$

è saturo e quindi corrisponde ad un intorno di z che però non contiene alcuno degli intorni U_n.

6.9 Sia X di Hausdorff e primo numerabile e sia C un sottoinsieme di X tale che $K \cap C$ è chiuso in K per ogni compatto K; bisogna dimostrare che C è chiuso in X.

Sia $p \in \overline{C}$ e scegliamo una successione $\{a_n\}$ in C che converge a p. Osserviamo che $K = \{p\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un sottospazio compatto di X. Infatti se $K \subset \cup A_i$, con ogni A_i aperto in X, allora esiste un indice, chiamiamolo i_0, tale che $p \in A_{i_0}$. Siccome $\{a_n\}$ converge a p, esiste un intero N tale che $a_n \in A_{i_0}$ per ogni $n > N$. Per ogni $n < N$ scegliamo un indice i_n tale che $a_n \in A_{i_n}$ e quindi

$$K \subset A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_N}.$$

Per ipotesi C è chiuso in K e quindi $p \in C$.

6.11 Per ogni intorno U di $(0,0)$ l'intersezione $U \cap A$ è infinita e quindi $(0,0)$ è di accumulazione per ogni $a\colon \mathbb{N} \to A$ surgettiva. Se $b\colon \mathbb{N} \to A$ converge a $(0,0)$, allora per ogni n, si ha $b_m \in X - (\{n\} \times \mathbb{N}_0)$ definitivamente e quindi $b(\mathbb{N}) \cap (\{n\} \times \mathbb{N}_0)$ è un insieme finito. Dunque $b(\mathbb{N})$ è chiuso in X e la successione b non può convergere a $(0,0)$.

6.12 Lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$, dove $d(x,y) = |x-y|$, è completo ed è omeomorfo allo spazio metrico $(\,]0,1[\,, d)$, che però non è completo.

6.16 Se esistessero due punti fissi z_1, z_2, allora

$$d(z_1, z_2) = d(f(z_1), f(z_2)) \leq a d(z_1, z_2).$$

Siccome $a < 1$ e $d(z_1, z_2) \geq 0$ ne segue che $d(z_1, z_2) = 0$, ossia $z_1 = z_2$.

Sia $x \in X$ un punto; allora la successione $x_1 = f(x), x_2 = f(x_1), \ldots$ è di Cauchy. Infatti per ogni n vale

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq a^n d(x, x_1)$$

e per la disuguaglianza triangolare, dato $m > n$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \leq d(x, x_1) \sum_{i=n}^{m-1} a^i \leq a^n \frac{d(x, x_1)}{1-a}.$$

Denotiamo con z il limite della successione x_n. Dalla continuità di f segue che $f(z) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = z$.

6.17 Suggerimento: sia $h\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ derivabile con derivata $0 < h' < 1$ (ad esempio $h(x) = 1 + \frac{\arctan(x)}{2}$) e considerare l'applicazione $f(x) = x - h(x)$.

6.28 Le risposte sono:

1. Sì.
2. Sì (sugg.: Esercizio 3.53).
3. No (sugg.: teorema di Baire).

6.29 Suggerimento: considerare gli insiemi

$$F_n = \{x \in \mathbb{R} - A \mid f(x) \geq 1/n\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

ed usare il Corollario 6.42 per mostrare che esiste $a \in A \cap \overline{F_n}$ per n sufficientemente grande.

6.34 Per ogni $f \in I$ denotiamo $D(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$. Siccome f è invertibile in $C(X, \mathbb{R})$ se e solo se $D(f) = X$, dal fatto che I è un ideale proprio segue che $D(f) \neq X$ per ogni $f \in I$.

Se per assurdo $\{D(f) \mid f \in I\}$ è un ricoprimento, per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito $X = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_n)$. La funzione $g = f_1^2 + \cdots + f_n^2$ appartiene all'ideale I e non si annulla in alcun punto.

Capitolo 7

7.8 Consideriamo due applicazioni distinte $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e scegliamo un punto $s \in \mathbb{R}$ tale che $f(s) \neq g(s)$. Prendiamo poi due aperti disgiunti $U, V \subset \mathbb{R}$ tali che $f(s) \in U$ e $g(s) \in V$. Allora le applicazioni f, g appartengono rispettivamente ai due aperti disgiunti

$$P(s, U) = \{h \in X \mid h(s) \in U\}, \qquad P(s, V) = \{h \in X \mid h(s) \in V\}.$$

Supponiamo per assurdo che il punto $0 \in X$, corrispondente all'applicazione identicamente nulla, possieda un sistema fondamentale numerabile di intorni $\{V_n\}$. Essendo X di Hausdorff, per ogni $f \neq 0$ esiste n tale che $f \notin V_n$ e quindi $\cap_n V_n = \{0\}$. D'altra parte, per ogni n esiste un numero finito di aperti della prebase $P(s_1, U_1), \ldots, P(s_k, U_k)$ tali che

$$0 \in P(s_1, U_1) \cap \cdots \cap P(s_k, U_k) \subset V_n$$

e possiamo dedurre che $\{0\}$ è intersezione numerabile di aperti della prebase. Questo è assurdo perché $\mathbb{R}$ non è numerabile.

7.13 Suggerimento: per ogni applicazione strettamente crescente $k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ scegliere un'applicazione $a_k \colon \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ tale che $a_k(k(n)) = (-1)^n$ per ogni n. Considerare la successione $\{x_n\}$ in $[-1, 1]^S$ data da

$$x_n \colon S \to [-1, 1], \qquad x_n(a) = a(n).$$

7.22 Sia $X = \cup\{U_i \mid i \in I\}$ un ricoprimento aperto localmente finito di uno spazio topologico normale X. Indichiamo con $\mathcal{A}$ la collezione i cui oggetti sono le coppie $(J, \{V_j \mid j \in J\})$ tali che $J \subset I$, $\{V_j \mid j \in J\}$ è una famiglia di aperti di X, $\overline{V_j} \subset U_j$ per ogni $j \in J$ e $(\cup_{j\in J} V_j) \cup (\cup_{i\notin J} U_i) = X$. L'insieme $\mathcal{A}$ è ordinato per estensione, ossia $(J, \{V_j \mid j \in J\}) \leq (H, \{W_h \mid h \in H\})$ se e solo se $J \subset H$ e $V_j = W_j$ per ogni $j \in J$.

Vogliamo dimostrare che $\mathcal{A}$ possiede elementi massimali, per il lemma di Zorn basta dimostrare che ogni catena $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$ possiede maggioranti. Sia dunque $\mathcal{C} = \{(J_s, \{V_j \mid j \in J_s\}) \mid s \in S\}$ una catena e consideriamo il candidato naturale alla maggiorazione

$$(\cup_s J_s, \{V_j \mid j \in \cup_s J_s\}).$$

Per dimostrare che il candidato naturale appartiene ad $\mathcal{A}$ l'unica verifica non banale è mostrare che

$$\left(\bigcup_{j\in\cup_s J_s} V_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j\notin\cup_s J_s} U_j\right) = X.$$

Sia $x \in X$ fissato, siccome il ricoprimento $\{U_i\}$ è localmente finito, l'insieme $I(x) = \{i \in I \mid x \in U_i\}$ è finito. Se $I(x) \not\subset \cup_s J_s$, allora $x \in \left(\bigcup_{j\notin\cup_s J_s} U_j\right)$. Altrimenti esiste $s \in S$ tale che $I(x) \subset J_s$ e quindi

$$x \in X - \left(\bigcup_{j\notin J_s} U_j\right) \subset \bigcup_{j\in J_s} V_j \subset \bigcup_{j\in\cup_s J_s} V_j.$$

Prendiamo un elemento massimale $(J, \{V_j \mid j \in J\})$ di $\mathcal{A}$ e dimostriamo che $J = I$: questo concluderà la dimostrazione. Supponiamo che esista un indice $i \notin J$ e consideriamo il chiuso

$$A_i = X - \left(\bigcup_{j\in J} V_j\right) \bigcup \left(\bigcup_{j\notin J\cup\{i\}} U_j\right).$$

Vale $A_i \subset U_i$ e per la normalità di X possiamo trovare un aperto V_i tale che $A_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$. Dunque $(J \cup \{i\}, \{V_j \mid j \in J \cup \{i\}\}) \in \mathcal{A}$ in contraddizione con la massimalità di $(J, \{V_j \mid j \in J\})$.

7.23 Dimostriamo il caso T3, i casi T1 e T2 sono completamente analoghi. Siano X, Y due spazi T3, $C \subset X \times Y$ un chiuso e $(x, y) \notin C$. Esistono quindi due aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ tali che $(x, y) \in U \times V \subset X \times Y - C$. Inoltre esistono aperti $A \subset X$ e $B \subset Y$ tali che

$$x \in A \subset \overline{A} \subset U, \qquad y \in B \subset \overline{B} \subset V$$

e quindi $(x, y) \in A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B} \subset X \times Y - C$.

7.24 Suggerimento: sia X lo spazio normale contenente i chiusi Y_n e siano A, B due chiusi di X tali che $A \cap B \cap Y = \emptyset$. Per ogni n, si considerino i chiusi $A_n = A \cap Y_n$ e $B_n = B \cap Y_n$ osservando che $A_n \cap B = A \cap B_n = \emptyset$. Ragionare come nella dimostrazione del Teorema 7.33, oppure come nella soluzione dell'Esercizio 8.37.

Capitolo 8

8.2 Suggerimento: sia $\mathcal{D}$ la famiglia di tutti gli ideali contenuti in D: essa non è vuota perché contiene l'ideale nullo. Sia $P \in \mathcal{D}$ massimale rispetto all'inclusione e supponiamo che $fg \in P$. Se per assurdo gli ideali $P + (f)$ e $P + (g)$ sono entrambi non contenuti in D, allora esistono quattro funzioni continue $a, b \in A$, $c, d \in P$, tali che $af + c$ e $bg + d$ si annullano entrambe in un numero finito di punti; il loro prodotto appartiene a P e si annulla in un numero finito di punti: contraddizione.

8.32 Siano $U_1, U_2 \subset X \times Y$ aperti non vuoti, $(x_1, y_1) \in U_1$, $(x_2, y_2) \in U_2$. Per ipotesi i sottoinsiemi $V_1 = \{y \in Y \mid (x_1, y) \in U_1\}$ e $V_2 = \{y \in Y \mid (x_2, y) \in U_2\}$ sono aperti non vuoti di Y e quindi esiste $y_0 \in Y$ tale che $(x_1, y_0) \in U_1$ e $(x_2, y_0) \in U_2$. Ne segue che $W_1 = \{x \in X \mid (x, y_0) \in U_1\}$ e $W_2 = \{x \in X \mid (x, y_0) \in U_2\}$ sono aperti non vuoti di X e quindi esiste $x_0 \in X$ tale che $(x_0, y_0) \in U_1 \cap U_2$.

8.36 Suggerimento: per ogni $a \in]0, 1[$ vale

$$g^{-1}([0, a[) = \bigcup_{s<a} X(s), \qquad g^{-1}([0, a]) = \bigcap_{s>a} \overline{X(s)}.$$

8.37 Per ogni intero positivo n possiamo trovare due aperti U_n, V_n tali che:

$$A \cup \{x \in B \mid f(x) \leq b - 1/n\} \subset U_n, \qquad \overline{U}_n \cap (\{x \in B \mid f(x) \geq b\} \cup C) = \emptyset,$$

$$C \cup \{x \in B \mid f(x) \geq b + 1/n\} \subset V_n, \qquad \overline{V}_n \cap (\{x \in B \mid f(x) \leq b\} \cup A) = \emptyset.$$

Gli aperti

$$U = \bigcup_n \left(U_n - \bigcup_{i \leq n} \overline{V}_i \right), \qquad V = \bigcup_n \left(V_n - \bigcup_{i \leq n} \overline{U}_i \right),$$

hanno le proprietà richieste.

Capitolo 10

10.2 Siano $x \in X$ e U un intorno di x. Bisogna dimostrare che esiste un intorno W di x che è contenuto in U e che è connesso per archi. A meno di considerare la parte interna di U, non è restrittivo supporre U aperto.

Sia W la componente connessa per archi di U contenente il punto x: è sufficiente dimostrare che W è aperto in U e quindi che è un intorno di x. Per ogni $y \in W$ esiste un intorno V di y tale che ogni coppia di punti di V può essere unita con un cammino in U e quindi $V \subset W$.

10.11 Suggerimento: utilizzare l'Esempio 3.69.

10.12 L'applicazione

$$R\colon X\times[0,1]\to X,\qquad R(x,t)=tx+(1-t)r(x),$$

dove $r(x)$ è il punto di intersezione di Y con la retta passante per i punti x e $(0,0,2)$, è una deformazione di X su Y.

10.13 L'applicazione $X\times I\to X$, $(x,y,t)\mapsto(tx,ty)$, è una deformazione di X su $(0,0)$.

Supponiamo per assurdo che esista una deformazione $R\colon X\times I\to X$ di X sul punto $(0,1)$ e consideriamo l'aperto

$$U=\{(x,y)\in X\mid y>0\}.$$

Per ogni numero razionale $a\neq 0$, i due punti $(0,1)$, $(a,1)$ appartengono a diverse componenti connesse di U. L'aperto $R^{-1}(U)$ contiene $\{(0,1)\}\times I$ e per il teorema di Wallace esiste un aperto $V\subset X$ tale che $(0,1)\in V$ e $V\times I\subset R^{-1}(U)$, ossia $R(x,y,t)\in U$ per ogni $t\in I$ ed ogni $(x,y)\in V$. Fissato un qualunque numero razionale $a\neq 0$ tale che $(a,1)\in V$, il cammino $\alpha\colon I\to U$, $\alpha(t)=R(a,1,t)$, ha come estremi $(0,1)$ e $(a,1)$: contraddizione.

10.15 Possiamo riscrivere l'equazione nella forma $b^2+(a-c)^2>(a+c)^2$ e quindi, ponendo $z=b+i(a-c)$, $x=a+c$, possiamo identificare X con l'insieme $\{(z,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\mid |z|^2>x^2\}$.

Il sottospazio $Y=\{(z,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}\mid |z|^2=1,\ x=0\}$ è omeomorfo a S^1 ed è un retratto per deformazione di X. Una possibile deformazione è

$$R(z,x,t)=\left(tz+(1-t)\frac{z}{|z|},tx\right).$$

10.18 Suggerimento: denotare con $p\colon\ \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})\to X$ la proiezione sui primi $n-1$ vettori colonna. Utilizzare lo sviluppo di Laplace del determinante per dimostrare che esiste $s\colon X\to\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ continua tale che $ps=Id_X$. Mostrare che sp è omotopa all'identità.

10.19 Suggerimento: considerare l'applicazione

$$R\colon X\times I\to X,\qquad R(f,t)(x)=\max(\|x\|,t)f\left(\frac{x}{\max(\|x\|,t)}\right).$$

Capitolo 11

11.4 Mostriamo che il cammino α è costante; la dimostrazione che anche β e γ sono costanti è del tutto simile. Dalla relazione $\alpha*(\beta*\gamma)=(\alpha*\beta)*\gamma$ segue in particolare che per ogni $t\leq 1/4$ vale $\alpha(2t)=\alpha(4t)$. Ponendo $4t=s$ si ottiene che per ogni $s\in I$ vale

$$\alpha(s) = \alpha(s/2) = \alpha(s/4) = \cdots = \lim_{n\to\infty} \alpha\left(\frac{s}{2^n}\right) = \alpha(0).$$

11.8 L'applicazione $q\colon [0,1] \to S^1$, $q(t) = e^{2i\pi t}$, è una identificazione. Per la proprietà universale delle identificazioni, la composizione con q induce una bigezione tra le applicazioni continue $f\colon S^1 \to X$ ed i cammini $\alpha\colon [0,1] \to X$ tali che $\alpha(0) = \alpha(1)$.

11.12 Suggerimento: esiste una identificazione $I^2 \to D^2$ che contrae tre lati del quadrato ad un unico punto del bordo.

11.15 Per semplicità di notazioni denotiamo $G = i_*\pi_1(Y, y)$ e $K = \ker(r_*)$. Per funtorialità, la retrazione r induce un omomorfismo di gruppi fondamentali $r_*\colon \pi_1(X, y) \to G$ tale che $r_*(a) = a$ per ogni $a \in G$.

Dimostriamo che se G è un sottogruppo normale, allora vale $ab = ba$ per ogni $a \in G$ ed ogni $b \in K$. Infatti si ha $r_*(aba^{-1}b^{-1}) = aa^{-1} = 1$ e dunque $aba^{-1}b^{-1} \in K$; d'altra parte, siccome G è normale, vale $ba^{-1}b^{-1} \in G$ e quindi anche il prodotto $a(ba^{-1}b^{-1}) \in G$. In conclusione $aba^{-1}b^{-1} \in K \cap G = 1$ e quindi $ab = ba$. Possiamo quindi definire un omomorfismo di gruppi

$$\Phi\colon G \times K \to \pi_1(X, y), \qquad \Phi(a, b) = ab\,,$$

e lasciamo al lettore la semplice verifica della sua bigettività.

11.21 Fissiamo un qualsiasi intero positivo N; per ogni $n \geq N$ denotiamo con $f_n\colon \pi_1(K_N, x) \to \pi_1(K_n, x)$ e $g\colon \pi_1(K_N, x) \to \pi_1(X, x)$ gli omomorfismi di gruppi indotti dalle inclusioni naturali. Supponiamo che f_n sia un isomorfismo per ogni n e dimostriamo che anche g è un isomorfismo.

g è surgettivo: Sia $a \in \pi_1(X, x)$ e sia $\alpha\colon I \to X$ un cammino chiuso tale che $[\alpha] = a$. Siccome $\alpha(I)$ è un sottospazio compatto, esiste un intero n sufficientemente grande tale che $\alpha(I) \subset K_n$ e dunque $[\alpha] \in \pi_1(K_n, x)$. Siccome f_n è surgettivo, esiste un cammino chiuso $\beta\colon I \to K_N$ che è omotopo ad α in K_n; a maggior ragione α è omotopo a β in X e quindi $a = g([\beta])$.

g è iniettivo: Sia $\alpha\colon I \to K_N$ tale che $g([\alpha]) = 0$: ciò significa che esiste una omotopia di cammini $F\colon I^2 \to X$ tra α ed il cammino costante. Siccome $F(I^2)$ è compatto esiste $n > N$ tale che $F(I^2) \subset K_n$ e quindi α è omotopicamente banale in K_n, ossia $f_n([\alpha]) = 0$. Però f_n è iniettivo per ipotesi e quindi $[\alpha] = 0$.

11.22 Suggerimento: per ogni intervallo chiuso e limitato $J \subset \mathbb{R}$ denotiamo con

$$S(J) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times J \mid x^2 + y^2 = \sin^2(\pi z)\,\},$$

$$C(J) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times J \mid \sqrt{x^2 + y^2} = \max(0, \sin(\pi z))\,\}.$$

Per l'Esercizio 11.21 è sufficiente dimostrare che se $J \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$, allora $S(J)$ e $C(J)$ sono semplicemente connessi. Se J contiene esattamente un intero, allora $S(J)$ è contrattile. Usare Van Kampen e induzione sul numero di interi contenuti in J. Per $C(J)$ la situazione è del tutto simile.

Capitolo 12

12.3 Per ipotesi E è di Hausdorff, quindi la diagonale Δ è chiusa in $E \times E$ ed a maggior ragione è chiusa in $E \times_X E$. Per dimostrare che è aperta, sia $e \in E$ un qualsiasi punto e scegliamo un aperto $U \subset E$ tale che $e \in U$ e $f \colon U \to X$ è iniettiva. Allora

$$(e, e) \in U \times U \cap E \times_X E = \{(e_1, e_2) \in U \times U \mid p(e_1) = p(e_2)\} \subset \Delta.$$

Sia Y connesso e siano $f, g \colon Y \to E$ continue tali che $pf = pg$. Allora l'applicazione

$$(f, g) \colon Y \to E \times_X E, \qquad (f, g)(y) = (f(y), g(y)),$$

è continua e $(f, g)^{-1}(\Delta)$ è aperto e chiuso in Y.

12.8 Se $b - a \leq 1$, allora l'applicazione non è surgettiva. Se invece $b - a > 1$, dimostriamo che non tutte le fibre hanno la stessa cardinalità. Indichiamo con n il massimo intero tale che $a + n < b$. Se $x \in]a, b - n[$, allora la fibra di $\mathbb{e}(x)$ contiene esattamente gli $n + 1$ punti $x, x + 1, \ldots, x + n$. Poiché $b - n - 1 \leq a$, la fibra di $\mathbb{e}(b - n)$ contiene esattamente gli n punti $b - n, b - n + 1, \ldots, b - 1$.

12.9 Suggerimento: l'applicazione p è aperta perché omeomorfismo locale ed è chiusa perché da un compatto ad un Hausdorff. In particolare $p(E)$ è aperto e chiuso in X e quindi p è surgettiva. Sia $x \in X$; la fibra $p^{-1}(x)$ è discreta e chiusa in uno spazio compatto e quindi è finita. Per ogni $e \in p^{-1}(x)$ scegliamo due aperti $e \in U_e \subset E$ e $x \in V_e \subset X$ tali che $p \colon U_e \to V_e$ sia un omeomorfismo. Siccome E è di Hausdorff non è restrittivo supporre gli aperti U_e disgiunti tra loro. Consideriamo poi il chiuso $C = E - \cup_{e \in p^{-1}(x)} U_e$; allora la sua immagine $p(C)$ è chiusa in X e vale $x \in X - p(C)$. Se V è la componente connessa per archi di x in $(X - p(C)) \cap (\cap_e V_e)$, allora V è un aperto banalizzante.

12.20 Sia $k \in \ker(p)$. L'applicazione $G \to G$, $g \mapsto kgk^{-1}$ è un sollevamento di p.

12.28 Consideriamo l'applicazione continua

$$g \colon D^2 \to S^1, \qquad g(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}.$$

Dalle relazioni $r(x) = x + tg(x)$, $t \geq 0$ e $\|r(x)\|^2 = 1$ si ricava

$$t^2 + 2t(x \cdot g(x)) + \|x\|^2 = 1, \quad t = -(x \cdot g(x)) + \sqrt{(x \cdot g(x))^2 + 1 - \|x\|^2}.$$

Capitolo 13

13.1 Suggerimento: provare che tale spazio è la base di un rivestimento di grado 2 con spazio totale $E = S^2 \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$.

13.8 Suggerimento: trovare due applicazioni continue $S^1 \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ e $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to S^1$ la cui composizione è l'identità su S^1.

13.9 Siano $\alpha \colon I \to I^2$ e $\beta \colon I \to I^2$ due cammini tali che $\alpha(0) = (0,0)$, $\alpha(1) = (1,1)$, $\beta(0) = (1,0)$ e $\beta(1) = (0,1)$. Consideriamo l'applicazione

$$f \colon I^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(t,s) = \alpha(t) - \beta(s),$$

e supponiamo per assurdo che il punto $(0,0)$ non appartenga all'immagine di f.

Sia $L \subset I^2$ un lato del quadrato: dimostriamo che la classe di omotopia del cammino $f \colon L \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ non dipende da α e β: supponiamo per fissare le idee che $L = \{(t,0) \mid t \in I\}$; per gli altri tre lati del quadrato la situazione è del tutto simile. Si ha $f(t,0) = \alpha(t) - \beta(0) = \alpha(t) - (1,0)$, quindi $f(L)$ è contenuto nel sottospazio convesso

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ y \geq 0,\ (x,y) \neq (0,0)\}$$

ed il cammino $f_{|L}$ è omotopicamente equivalente a $g(t,0) = (t-1,t)$. Ripetendo il ragionamento per gli altri tre lati del quadrato di trova che il cammino chiuso $f \colon \partial I^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ è omotopicamente equivalente a $g \colon \partial I^2 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, dove

$$g(t,0) = (t-1,t), \qquad g(1,s) = (s, 1-s),$$

$$g(t,1) = (t, t-1), \qquad g(0,s) = (s-1, -s).$$

Ma il cammino g è un generatore del gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, mentre il cammino $f_{|\partial I^2}$ è omotopicamente banale perché si estende a tutto il quadrato.

13.11 Scegliamo $a \in A$ e denotiamo $e = \tilde{f}(a)$, $y = q(a)$, $x = F(y) = p(e)$. Per funtorialità abbiamo un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(A,a) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & \pi_1(E,e) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle q_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_*} \\
\pi_1(Y,y) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(X,x).
\end{array}$$

Per ipotesi q_* è surgettivo e quindi

$$F_*\pi_1(Y,y) = F_*q_*\pi_1(A,a) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(A,a) \subset p_*\pi_1(E,e).$$

Per il Teorema 13.18 esiste un unico sollevamento $\tilde{F} \colon Y \to E$ di p tale che $\tilde{F}(y) = e$. Siccome $\tilde{f}$ e $\tilde{F}q$ sono sollevamenti di $p\tilde{f} = Fq$ e $\tilde{f}(a) = \tilde{F}q(a) = e$, dalla connessione di A segue che $\tilde{f} = \tilde{F}q$.

Capitolo 14

14.1 Denotiamo con A il complementare in $\mathbb{R}^3$ di

$$\{(x,y,z) \mid y=0,\ x^2+z^2=1\} \cup \{(x,y,z) \mid y=z=0,\ x \geq 1\}.$$

Per dimostrare che $\pi_1(A)=\mathbb{Z}$ posssiamo considerare l'aperto semplicemente connesso.

$$B=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2>1\}.$$

Dato che $A \cap B$ è semplicemente connesso, l'inclusione $A \subset A \cup B$ induce un isomorfismo tra i rispettivi gruppi fondamentali: basta adesso osservare che $A \cup B$ è il complementare di una circonferenza e quindi $\pi_1(A)=\mathbb{Z}$.

14.15 Il complementare dei tre semiassi si retrae per deformazione a

$$S^2 - \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

che per proiezione stereografica è omeomorfo al complementare di due punti in $\mathbb{R}^2$. Dunque il gruppo fondamentale è il gruppo libero a due generatori.

14.19 Suggerimento: sia $p\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $p(z)=z^n$, e si consideri il rivestimento

$$\mathbb{C} - p^{-1}(\{0,1\}) \xrightarrow{p} \mathbb{C} - \{0,1\}.$$

14.27 Ogni albero è contrattile e quindi semplicemente connesso. D'altra parte ogni grafo è ottenuto attaccando 1-celle ad un albero. Ogni albero ha caratteristica di Eulero-Poincaré uguale ad 1 ed ogni attaccamento di una 1-cella abbassa tale caratteristica di 1.

Capitolo 15

15.15 Ogni applicazione continua $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si solleva ad un'applicazione continua tra i rispettivi rivestimenti universali, esiste cioè un diagramma commutativo di applicazioni continue

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & S^2 \arrow[d] \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

e per il Corollario 15.24 esiste $x \in S^2$ tale che $g(x)=\pm x$.

Riferimenti bibliografici

[Ar47] Artin, E.: The free product of groups. American Journal of Mathematics, Vol. **69**, 1–4 (1947).

[BB85] Borisovich, Y., Bliznyakov, N., Izrailevich, Y., Fomenko, T.: Introduction to topology. Mir publishers, Moscow (1985).

[Do80] Dold, A.: Lectures on algebraic topology. Second edition, Springer, Berlin Heidelberg New York (1980).

[Du66] Dugundji, J.: Topology. Allyn and Bacon, Inc. Boston (1966).

[Fu95] Fulton, W.: Algebraic Topology. Springer, Berlin Heidelberg New York (1995).

[Go71] Godbillon, C.: Elements de topologie algebrique. Hermann, Paris (1971).

[Go59] Golomb, S.W: A connected topology for the integers. Amer. Math. Monthly, **66**, 663–665 (1959).

[GH81] Greenberg, M., Harper, J.: Algebraic Topology: A First Course. Addison-Wesley (1981).

[GP74] Guillemin, V., Pollack, A.: Differential topology. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1974).

[Ke55] Kelley, J.L.: General topology. D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, (1955).

[Ko86] Kodaira, K.: Complex manifolds and deformation of complex structures. Springer Berlin Heidelberg New York (1986).

[ML71] Mac Lane, S.: Categories for the working mathematician. Springer, Berlin Heidelberg New York (1971).

[Ma67] Massey, W.: Algebraic topology: an introduction. Harcourt, Brace and World (1967).

[Ma91] Massey, W.: Basic course in algebraic topology. Springer, Berlin Heidelberg New York (1991).

[Mi65] Milnor, J. W.: Topology from differentiable viewpoint. The University Press of Virginia, Charlottesville, Va. (1965).

[Mu00] Munkres, J.R.: Topology. Second edition, Prenctice-Hall, Upper Saddle River, NJ (2000).

[Se94] Sernesi, E.: Geometria 2. Bollati Boringhieri, Torino (1994).

[ST67] Singer, I.M., Thorpe, J.A.: Lecture notes on elementary topology and geometry. Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill. (1967).

[So47] Sorgenfrey, R.H.: On the topological product of paracompact spaces. Bull. AMS, **53**, 631–632 (1947).
[St63] Stasheff, J.D.: On the homotopy associativity of H-spaces I,II. Trans. AMS, **108**, 275–292, 293–312 (1963).
[To03] Tourlakis, G.: Lectures in logic and set theory Volume 2. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
[Ur25] Urysohn, P.: Zum Metrisationsproblem. Math. Ann. **94**, 309–315 (1925).
[Vi94] Vick, J.W.: Homology theory. Springer, Berlin Heidelberg New York (1994).
[Wa93] Wagon, S.: The Banach-Tarski paradox. Cambridge University Press, Cambridge (1993).

Indice analitico