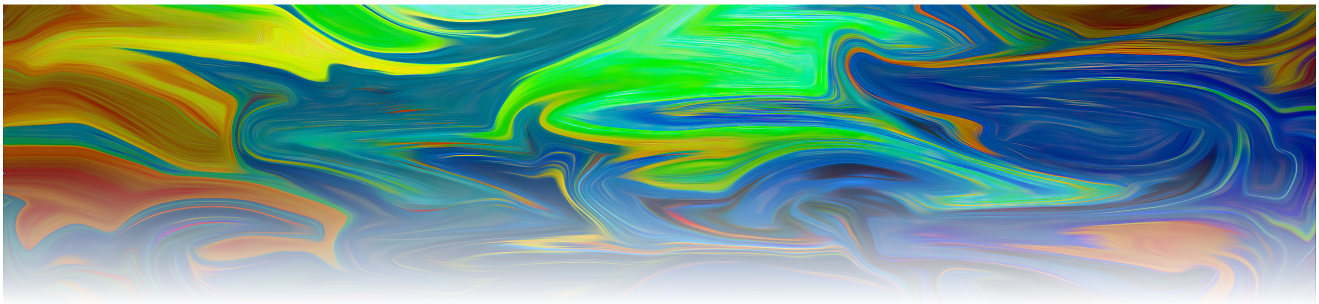

Analisi 1B

Dispense di Cupini Dispense di Cupini.pdf

Criterio Integrale Criterio Integrale.pdf

Dispense di Dore Dispense di Dore.pdf

Integrali con Facilità

Lista Teoremi Analisi 1B

> 1 - Parte Preliminare
>
> - **D** Funzioni Lipschitziane
> - **T** Sia $A \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$. Se f è lipschitziana allora è uniformemente continua
> - **D** Funzioni Localmente Lipschitziane
> - **D** Punto di Accumulazione da Destra e da Sinistra
> - **D** Punto di Accumulazione Bilatero
> - **D** Derivata da Destra e da Sinistra
> - **E** Se x_0 è un punto di accumulazione da destra e f derivabile in x_0 allora $f'(x_0) = f'_+(x_0)$ (Analogo per i punti di accumulazione da sinistra)
> - **E** Sono equivalenti
>   1. f derivabile in x_0
>   2. esistono $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ ed esse coincidono
>
>   e in tal caso $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

> 2 - Funzioni Monotone e Estremanti Locali
>
> **Punti Estremanti Assoluti e Locali**
>
> - **D** Punti Estremanti Assoluti
> - **D** Punti Estremanti Locali
> - **D** Punti Estremanti Locali Forti
> - **E** $\{x \in A : x \text{ è un punto di massimo assoluto di } f\} \subseteq \{x \in A : x \text{ è un punto di massimo locale di } f\}$
>
> **Punti Estremanti Locali e Monotonia**
>
> - **T** Condizioni sufficienti di ordine zero per gli estremanti locali
> - **T** Condizioni sufficienti di ordine zero per gli estremanti locali forti
>
> **Punti Estremanti Locali e Derivabilità**

- **P** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$ un punto di accumulazione da destra. Se
  1. x_0 è un punto di minimo locale per $f|_{A\cap[x_0,+\infty[}$
  2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

  Allora $\ell \in [0,+\infty]$ e se $\ell \neq +\infty$, $f'_+(x_0) \geq 0$
- **P** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$ un punto di accumulazione da sinistra. Se
  1. x_0 è un punto di minimo locale per $f|_{A\cap]-\infty,x_0]}$
  2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

  Allora $\ell \in [-\infty,0]$ e se $\ell \neq +\infty$, $f'_-(x_0) \leq 0$
- **E** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$ un punto di accumulazione da destra. Se
  1. x_0 è un punto di massimo locale per $f|_{A\cap[x_0,+\infty[}$
  2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

  Allora $\ell \in [-\infty,0]$ e se $\ell \neq +\infty$, $f'_+(x_0) \leq 0$
- **P** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$ un punto di accumulazione da destra. Se
  1. x_0 è un punto di massimo locale per $f|_{A\cap]-\infty,x_0]}$
  2. $\exists \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

  Allora $\ell \in [0,+\infty]$ e se $\ell \neq +\infty$, $f'_-(x_0) \geq 0$

Funzioni Monotone e Derivabilità

- **P** Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A \cap D(A)$, allora se f è crescente si ha $f'(x_0) \geq 0$
- **T** Criterio di Monotonia
- **T** Criterio di Stretta Monotonia
- **P** Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e f continua in I e derivabile in $int(I)$, allora $f'(x) > 0\ \forall x \in int(I) \Rightarrow f$ è strettamente crescente in f

Teorema di Fermat

- **D** Punto Critico
- **T** Teorema di Fermat
- **T** Condizioni Sufficienti del I ordine per gli Estremanti Locali
- **T** Condizioni Sufficienti del I ordine per gli Estremanti Locali Forti
- **T** Condizioni Sufficienti del II ordine per gli Estremanti Locali Forti
- **T** Condizioni Necessarie del II ordine per gli Estremanti Locali

---

3 - Concavità e Convessità

Significato Geometrico di Convessità

- **P** Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ allora sono equivalenti:
  1. $]x_1, x_2[$
  2. $\{z \in \mathbb{R} : x_1 < z < x_2\}$
  3. $\{x_1 + t(x_2 - x_1) : t \in]0,1[\}$
  4. $\{(1-t)x_1 + tx_2 : t \in]0,1[\}$
  5. $\{(1-s)x_2 + sx_1 : s \in]0,1[\}$
  6. $\{x_2 + s(x_1 - x_2) : s \in]0,1[\}$
- **D** Funzione Concava e Convessa
- **E** Sia $f : I \to \mathbb{R}$, sono equivalenti:
  1. f è convessa
  2. $\forall x, y \in I$ e $\forall t \in [0,1]$, $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$
  3. $\forall x, y \in I$ e $\forall t \in [0,1]$, $f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t(f(y) - f(x))$

Caratterizzazioni del I Ordine

- **T** Caratterizzazione del I Ordine delle Funzioni Convesse
- **T** Seconda Caratterizzazione del I Ordine delle Funzioni Convesse

Caratterizzazione del II Ordine

- **T** Caratterizzazione del II Ordine delle Funzioni Convesse
- **C** Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in I, allora sono equivalenti:
  1. f è convessa
  2. f' è crescente in I
  3. $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in int(I)$

Regolarità delle Funzioni Convesse

- **T** Continuità delle Funzioni Convesse
- **L** Siano $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in int(I)$ e $g : int(I) \setminus \{x_0\}, g(x) := \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$. Se f è convessa, allora g è crescente
- **E** Se f è convessa allora è localmente lipschitziana

Funzioni Strettamente Convesse

- **D** Funzione Strettamente Convessa e Strettamente Concava
- **T** I Caratterizzazione del I Ordine delle Funzioni Strettamente Convesse
- **T** II Caratterizzazione del I Ordine delle Funzioni Strettamente Convesse
- **T** Caratterizzazione del II Ordine delle Funzioni Strettamente Convesse
- **C** Condizione Sufficiente del II Ordine per le Funzioni Strettamente Convesse

---

4 - Integrale di Riemann

Somme Integrali Superiori e Inferiori

- **D** Scomposizione
- **D** Intervallo k-esimo di una scomposizione
- **D** Somme Integrali
- **L** Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e $\sigma \in \Omega_{a,b}$, allora $s(f, \sigma)$ e $S(f, \sigma)$ sono numeri reali e $\inf_{[a,b]} f \cdot (b - a) \leq s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \leq \sup_{a,b} f \cdot (b - a)$
- **L** Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}, \sigma \subset \sigma'$, allora $s(f, \sigma) \leq s(f, \sigma')$ e $S(f, \sigma') \leq S(f, \sigma)$
- **P** Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$, allora $s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma'), \forall \sigma, \sigma' \in \Omega_{a,b}$

Funzioni Integrabili

- **D** Integrale Superiore e Inferiore
- **P** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora $\inf_{[a,b]} f \cdot (b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \sup_{[a,b]} f \cdot (b - a)$
- **D** Funzione Integrabile
- **D** Area del Sottografico
- **P** Stima dell'Integrale Definito
- **C** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se $f \in \mathscr{R}([a, b])$, allora $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **C** Le costanti sono integrabili

Formula Fondamentale del Calcolo Integrale

- **D** Funzione Primitiva
- **P** Formula Fondamentale del Calcolo Integrale
- **D** Notazioni delle Primitive
- **T** Teorema di Darboux
- **P** Condizione necessaria per l'esistenza di una primitiva

Caratterizzazione delle Funzioni Integrabili

- **T** Teorema di Riemann - Caratterizzazione delle Funzioni Integrabili

Proprietà dell'Integrale Definito

- **D** Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora si hanno $\lambda A := \{\lambda a \mid a \in A\}$ e $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
- **L** Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, allora si hanno:
  1. $\lambda \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \inf(\lambda A) = \lambda \mathrm{inf(A)} \quad \sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$
  2. $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \inf(\lambda A) = \lambda \sup(A) \quad \sup(\lambda A) = \lambda \inf(A)$
  3. $\inf(A + B) \geq \inf(A) + \inf(B) \quad \sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$
- **D** Parte Positiva e Parte Negativa di una funzione
- **L** Proprietà della Parte Positiva e Parte Negativa di una funzione
- **P** Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, f, g \in \mathscr{R}([a, b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:
  1. $(\lambda f) \in \mathscr{R}([a, b])$ e $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
  2. $(f + g) \in \mathscr{R}([a, b])$ e $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$
  3. (monotonia) se $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
  4. $|f| \in \mathscr{R}([a, b])$ e $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- **C** $\mathscr{R}([a, b])$ è uno spazio vettoriale e $\mathscr{F} : \mathscr{R}([a, b]) \to \mathbb{R},\ \mathscr{F}(f) := \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ è lineare
- **D** Sia $f : I \to \mathbb{R}, a, b \in I, a < b$. Se $f \in \mathscr{R}([\,b])$ allora $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ e $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

Additività dell'Integrale

- **P** Additività dell'Integrale
- **P** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, allora $f \in \mathscr{R}([a, b]) \Leftrightarrow f \in \mathscr{R}([x_{k-1}, x_k]), \forall k \in \{1, \ldots, n\}$ e in tal caso si ha che $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$
- **P** Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ e poniamo $a = \min\{\alpha, \beta, \gamma$ e $b = \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Sia $f \in \mathscr{R}([a, b])$, allora $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

Funzione Integrale

- **D** Funzione Integrale
- **P** Sia $f \in \mathscr{R}([a, b])$ e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, allora F è lipschitziana e per ogni $x \in [a, b]$ si ha $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \int_x^{x+\delta} f(t)dt = 0$

Classi di Funzioni Integrali

- **T** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona, allora $f \in \mathscr{R}([a, b])$
- **T** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora $f \in \mathscr{R}([a, b])$
- **T** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f limitata in $[a, b]$ e continua in $]a, b[$. Allora $f \in \mathscr{R}([a, b])$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ non dipende da $f(a)$ e $f(b)$

- **T** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata ed esiste $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\{x \in [a, b] \mid f \text{ è discontinua in } x\} = \{x0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_0 < x_1 <\ldots< x_n$. Allora $f \in \mathscr{R}([a, b])$ e $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \int_{x_n}^{b} f(x)dx$
- **T** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$, allora $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in [a, b]$

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

- **T** Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (generale)
- **T** Teorema della Media Integrale (Primo Approccio)
- **T** Teorema della Media Integrale (Secondo Approccio)
- **T** Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (ridotta)

Teorema di Torricelli

- **T** Teorema di Torricelli

Integrale Indefinito

- **D** Integrale Indefinito
- **T** Caratterizzazione delle Primitive

Integrazione Per Sostituzione

- **T** Formula di Integrazione per Sostituzione per l'Integrale Indefinito
- **T** Prima Formula di Integrazione per Sostituzione negli Integrali Definiti
- **T** Seconda Formula di Integrazione per Sostituzione negli Integrali Definiti
- **L** Sia $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ con $a > 0$, allora $\displaystyle\int_{-a}^{0} g(y)dy = \int_0^a g(-y)dy$
- **P** Sia $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ con $a > 0$ e g continua
  > 1. Se g è pari, allora $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(y)dy = 2\int_0^a g(y)dy$
  > 2. Se g è dispari, allora $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(y)dy = 0$

Integrazione per Parti

- **D** $y + A := \{y + a \mid a \in A\}$
- **T** Formula di Integrazione per Parti per l'Integrale Indefinito
- **T** Formula di Integrazione per Parti per l'Integrale Definito

---

5 - Integrali Generalizzati

Definizioni

- **D** Integrale Generalizzato (Esistenza e non)
- **D** Integrale Generalizzato (Convergenza e Divergenza)
- **D** Funzione Integrabile in senso generalizzato in $[a, b[$
- **D** Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R},\ -\infty \leq a < b \leq +\infty$. Diciamo che f è integrabile in senso generalizzato in $]a, b[$ se, preso $c \in]a, b[$, è integrabile in senso generalizzato in $]a, c]$ e in $[c, b[$ e in tal caso si pone $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Proprietà dell'Integtale Generalizzato

- **P** Siano $f : [a, b[\to \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se esiste $\int_a^b f(x)dx$, allora esiste $\int_a^b \lambda f(x)dx$ e $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
- **P** Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, se esistono $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ e $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ non si presenta come una forma indeterminata, allora esiste $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- **L** Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$ tale che $f \in \mathscr{R}([a, \beta]), \forall \beta \in [a, b[$. Sia $c \in]a, b[$, allora $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_c^b f(x)dx$ hanno lo stesso carattere
- **T** Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$ tale che:
  1. $f \in \mathscr{R}([a, \beta]), \forall \beta \in [a, b[$
  2. $f \geq 0$

  Allora esiste $\int_a^b f(x)dx$ e converge ad un numero non negativo oppure diverge a $+\infty$

Intervalli Limitati: Condizione Sufficiente per la Convergenza

- **L** Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty$, allora f continua e limitata $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergente
- **P** Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}, -\infty < a < b < +\infty$, allora f contintua e $\exists \lim_{x \to a^+} f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ convergente

Intervalli Illimitati: Condizione Necessaria per la Convergenza

- **T** Intervalli Illimitati: Condizione Necessaria per la Convergenza
- **C** Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che:
  1. $f \in \mathscr{R}([a, \beta]), \forall \beta \in]a, b[$
  2. $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, +\infty[$

  Allora $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$

Criteri di Convergenza

- **L** Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}, -\infty < a < b \leq +\infty$ tali che:
  1. $f, g \in \mathscr{R}([a, \beta]), \forall \beta \in [a, b[$
  2. $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b[$

  Se esistono $\int_a^b f(x)dx$ e $\int_a^b g(x)dx$ allora $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- **T** Primo Teorema del Confronto: Caso della Divergenza
- **T** Secondo Teorema del Confronto: Caso della Convergenza
- **T** Teorema del Confronto Asintotico

Integrazione per Parti per gli Integrali Generalizzati

- **T** Formula di Integrazione per Parti per gli Integrali Generalizzati

Assoluta Integrabilità

- **D** Funzione Assolutamente Integrabile in Senso Generealizzato in $[a, b[$
- **T** Assoluta Integrabilità implica Integrabilità
- **T** Criterio di Convergenza per le Funzioni Oscillanti

6 - Serie Numeriche

Definizioni

- **D** Serie Numerica
- **D** Successione delle Somme Parziali
- **D** Convergenza, Divergenza e Irregolarità di una Serie Numerica

Serie Geometrica

- **D** Serie Geometrica
- **T** Carattere della Serie Geometrica

Proprietà delle Serie

- **P** Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è regolare, allora anche $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n$ lo è e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$
- **P** Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali tali che le serie ad esse associate siano regolari. Se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ non si presenta in una forma irregolare, allora la serie associata alla successione $(a_n + b_n)$ è regolare e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
- **T** Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione reale tale che $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad un numero non negativo o diverge a $+\infty$

Criteri di Convergenza

- **T** Condizione Necessaria per la Convergenza
- **T** Criterio di Cauchy
- **T** Criterio Integrale
- **E** Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ tale che:
  1. $f \in \mathscr{R}([a, \beta]), \forall \beta \in]a, +\infty[$
  2. f è decrescente in un intorno di $+\infty$
  3. $f \geq 0$ in un intorno di $+\infty$

  Allora $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ha lo stesso carattere di $\displaystyle\sum_{n=\tilde{n}}^{+\infty} f(n)$ con $\tilde{n} \in \mathbb{N}, \tilde{n} \geq a$
- **T** Primo Criterio del Confronto (Caso della Divergenza)
- **T** Secondo Criterio del Confronto (Caso della Convergenza)
- **T** Criterio del Confronto Asintotico
- **T** Criterio della Radice
- **T** Criterio del Rapporto

Serie Armonica e Serie Armonica Generalizzata

- **D** Serie Armonica e Serie Armonica Generalizzata
- **T** Carattere della Serie Armonica Generalizzata

Serie a Segno Alterno

- **D** Serie a Segno Alterno
- **T** Criterio di Liebniz

Serie Assolutamente Convergente

- **D** Serie Assolutamente Convergente
- **T** Assoluta Convergenza implica Convergenza
- **E** Criterio di Dirichlet

7 - Numeri Complessi

Definizione e Piano di Gauss

- **D** Unità Immaginaria
- **D** Numero Complesso
- **D** Insieme dei Numeri Complessi
- **D** Parte Reale $\Re(z)$ e Parte Immaginaria $\Im(z)$
- **P** $F : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, F(a+ib) := (a,b)$ è biunivoca

Somma e Prodotto

- **D** Somma e Prodotto in $\mathbb{C}$
- **P** Somma e Prodotto in $\mathbb{C}$ seguono le stesse regole di somma e prodotto in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ è chiuso rispetto a somma e prodotto definite in $\mathbb{C}$
- **D** Somma e Prodotto in $\mathbb{R}^2$
- **P** L'applicazione $F : (\mathbb{C}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot), F(a+ib) = (a,b)$ gode delle seguenti proprietà:
  1. $F(z+w) = F(z) \oplus F(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$
  2. $F(z \cdot w) = F(z) \odot F(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$
- **T** $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo

Coniugato e Modulo

- **D** Coniugato di un Numero Complesso
- **P** Proprietà del Coniugato:
  1. $z = 0$ se e solo se $\overline{z} = 0$
  2. $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
  3. $\overline{\overline{z}} = z$
  4. $\overline{z} = z$ se e solo se $\Im(z) = 0$
  5. $\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$
  6. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
  7. $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ se $w \neq 0$
  8. $z\overline{z} = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2$
  9. $z\overline{z} = 0$ se e solo se $z = 0$
- **D** Modulo di un Numero Complesso
- **P** Proprietà del Modulo:
  1. $|z| \geq 0$
  2. $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$
  3. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$
  4. $|z| = |\overline{z}|$
  5. $|zw| = |z| \cdot |w|$
  6. $|\underbrace{t}_{\in\mathbb{R}}| = |\underbrace{t+0i}_{\in\mathbb{C}}|$
  7. $|\underbrace{t}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{z}_{\in\mathbb{C}}| = |\underbrace{t}_{\in\mathbb{R}}| \cdot |\underbrace{z}_{\in\mathbb{C}}|$
  8. $|\Re(z)| \leq |z|$ e $|\Im(z)| \leq |z|$
  9. (Disuguaglianza Triangolare) $|z+w| \leq |z| + |w|$
  10. $|z| \leq |\Re(z)| + |\Im(z)|$
  11. Se $z \neq 0$, si ha $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Argomento

- **L** Se $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora $\frac{z}{|z|}$ si trova sulla circonferenza con centro nell'origine e di raggio 1

- **L** Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sono equivalenti:
  1. $|w| = 1$
  2. $w = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, con $\theta \in \mathbb{R}$

  E in tal caso $w = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \Re(w) \\ \sin(\theta) = \Im(w) \end{cases}$
- **D** Argomento di un Numero Complesso
- **L** Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, allora l'insieme $arg(z)$ è non vuoto e se $\theta \in arg(z)$, allora $arg(z) = \{\theta + 2k\pi : n \in \mathbb{Z}\}$
- **D** Argomento Principale
- **T** Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$, allora

  $$Arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & a < 0, b < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a = 0, b < 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & a > 0, b < 0 \\ 0 & a > 0, b = 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) & a > 0, b > 0 \\ \frac{\pi}{2} & a = 0, b > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & a < 0, b > 0 \\ \pi & a < 0, b = 0 \end{cases}$$

Forma Trigonometrica

- **D** Forma Algebrica e Forma Trigonometrica
- **P** Siano $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ e $w = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$, allora valgono le seguenti:
  1. $z = w$ se e solo se $\rho = r$ e $\exists n \in \mathbb{Z} : \theta = \phi + 2n\pi$
  2. $\overline{z} = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
  3. $z^{-1} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$
  4. $zw = \rho \cdot r(\cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi))$
  5. $\frac{z}{w} = \frac{\rho}{r}(\cos(\theta - \phi) + i\sin(\theta - \phi))$

Forma Trigonometrica e Potenze n-esime

- **D** Potenza n-esima
- **T** Formula di De Moivre

Forma Esponenziale e Potenze n-esime

- **D** Forma Esponenziale
- **P** Proprietà della Forma Esponenziale:
  1. $|e^{i\theta}| = 1$
  2. $e^{i2n\pi} = 1$
  3. $\rho e^{i\theta} \cdot re^{i\phi} = \rho re^{i(\theta+\phi)}$
  4. $\frac{\rho e^{i\theta}}{re^{i\phi}} = \frac{\rho}{r}e^{i(\theta-\phi)}$
  5. (Formula di De Moivre) $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

Radici n-esime

- **D** Radice n-esima
- **T** Siano $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora l'insieme $\sqrt[n]{w}$ ha n elementi e se $w = \rho e^{i\theta}$, si ha $\sqrt[n]{w} = \{\sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} : k \in \{0, 1, \ldots, n.1\}\}$
- **E** Radici Quadrate Complesse

Equazioni Algebriche in $\mathbb{C}$

- **T** Sia l'equazione $az^2 + bz + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$, allora le soluzioni sono tutte e solo $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- **E** Equazioni in $\mathbb{C}$ caso generale
- **D** Radice o Zero di un Polinomio
- **D** Molteplicità di uno Zero di Polinomio

- **E** Teorema fondamentale dell'Algebra
- **E** (Corollario) Un'equazione del tipo $P_n(z) = 0$ con $P_n(z)$ un polinomio ha n soluzioni contate con le loro molteplicità
- **P** Sia $P_n(z)$ un polinomio in variabile complessa a coefficienti reali, se z_0 è uno zero del polinomio, allora anche $\overline{z_0}$ lo è e ha la stessa molteplicità di z_0

Esponenziale Complesso

- **D** Funzione Esponenziale Complessa
- **P** Proprietà dell'Esponenziale Complesso:
    1. $|exp_{\mathbb{C}}(z)| = e^{\Re(z)}$
    2. $exp_{\mathbb{C}}(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
    3. $exp_{\mathbb{C}}(i2n\pi) = 1$
    4. $exp_{\mathbb{C}}(z+w) = exp_{\mathbb{C}}(z) \cdot exp_{\mathbb{C}}(w)$
    5. $exp_{\mathbb{C}}(z+i2n\pi) = exp_{\mathbb{C}}(z)$
- **P** La funzione $exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ non è iniettiva e se $z, w \in \mathbb{C}$, allora $exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp_{\mathbb{C}}(w) \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = \Re(w) \\ \Im(z) = \Im(w) + 2n\pi \end{cases}$
- **T** Sia $\theta \in \mathbb{R}$. Si definisce $S(]\theta, \theta+2\pi]) := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \in]\theta, \theta+2\pi]\}$. Allora $exp_{\mathbb{C}} : S(]\theta, \theta+2\pi]) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è biunivoca
- **D** Determinazione Principale del Logaritmo Complesso

---

8 - Spazi Metrici

Definizione di Spazio Metrico

- **D** Distanza
- **D** Spazio Metrico
- **D** Metrica Euclidea
- **D** Distanza della Convergenza Uniforme

Palle, Aperti, Intorni

- **D** Palla
- **D** Insieme Limitato
- **D** Punto Interno
- **D** Interno di un Insieme
- **D** Insieme Aperto
- **P** Le palle di uno spazio metrico (X, d) sono aperte
- **D** Insieme Complementare
- **D** Insieme Chiuso
- **E** Sia (X, d) uno spazio metrico, valgono le seguenti:
    1. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di X, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è un aperto di X
    2. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia finita di aperti di X, allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è un aperto di X
    3. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di chiusi di X, allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è un chiuso di X
    4. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia finita di chiusi di X, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è un chiuso di X
- **D** Intorno di uno Spazio Metrico
- **D** Punto di Accumulazione
- **D** Derivato di un $A \subseteq X$
- **D** Punto di Frontiera
- **D** Frontiera di un $A \subseteq X$
- **D** Chiusura di un Insieme

- **E** A è un insieme chiuso se e solo se $A = \overline{A} \Leftrightarrow \partial(A) \subseteq A \Leftrightarrow D(A) \subseteq A$

Convergenza negli Spazi Metrici

- **D** Successione Convergente
- **E** Unicità del Limite
- **E** Caratterizzazione dei Chiusi
- **D** Insieme Limitato
- **E** Caratterizzazione degli Insiemi Limitati
- **D** Insieme Totalmente Limitato
- **P** A totalmente limitato $\Rightarrow A$ limitato

Compattezza

- **D** Ricoprimento (Aperto/Finito)
- **D** Compatto
- **T** Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$, allora K compatto $\Rightarrow K$ chiuso e limitato
- **D** Insieme Sequenzialmente Compatto

Completezza

- **D** Successione di Cauchy in (X, d)
- **E** Siano (X, d) uno spazio metrico e (x_n) una successione in X, allora se (x_N) è convergente a $x_0 \in X$, allora è di Cauchy
- **D** Spazio Metrico Completo
- **T** $(\mathbb{R}^n, d_e)$ è Completo
- **E** Se (X, d) è uno spazio metrico e $K \subseteq X$, allora (K, d) è uno spazio metrico, e se K è chiuso, allora se (X, d) è completo $\Rightarrow (K, d)$ è completo
- **E** Sia (X, d) uno spazio metrico e $K \subseteq X$, sono equivalenti:
  1. K è Compatto
  2. K è Compatto per Successioni
  3. K è Compatto e Totalmente Limitato
  4. (Se (X, d) è completo) K è Chiuso e Totalmente Limitato
- **T** Teorema di Heine - Borel

Funzioni tra Spazi Metrici

- **D** Funzione tra Spazi Metrici e Limite
- **E** Caratterizzazione del Limite

Funzioni Continue tra Spazi Metrici

- **D** Funzione Continua tra Spazi Metrici
- **E** Caratterizzazione della Continuità
- **L** La funzione Distanza è Continua

Parte Finale

- **T** Teorema di Weierstrass
- **D** Componenti di una Funzione tra Spazi Metrici
- **D** Contrazione
- **D** Punto Fisso
- **E** Teorema del Punto Fisso - Teorema di Banach - Caccioppoli