ANALISI MATEMATICA 1A

MODULO 2 - ESERCITAZIONI

Appunti di lezione - 29 Dicembre 2022

G. Cupini

Corso di Laurea in Matematica
Università di Bologna

A.A. 2022-2023

Queste note per il Modulo 2 di Analisi Matematica 1a sono a complemento delle dispense del prof. Dore, docente del Modulo 1.
Si troveranno richiami, esempi, la descrizione delle funzioni elementari, applicazioni della teoria, esercizi proposti, esercizi risolti e degli errori (si spera pochi): la collaborazione degli studenti nella segnalazione di errori sarà preziosa e gradita. Se sarà possibile arricchire queste note, anche su stimolo di domande, commenti da parte degli studenti, esso verrà fatto, mettendo così a disposizione degli aggiornamenti di queste note.

I testi di riferimento sono stati:

Acerbi-Buttazzo: Primo corso di Analisi Matematica - ed. Pitagora,
Barozzi-Dore-Obrecht: Elementi di analisi matematica - ed. Zanichelli
Cecconi-Stampacchia: Analisi Matematica I vol. - ed. Liguori
Giusti: Analisi Matematica 1 - II ed. - Bollati Boringhieri,
Giusti: Esercizi e complementi di Analisi Matematica 1 - vol. primo - Bollati Boringhieri,
Lanconelli: Lezioni di Analisi matematica 1 - ed. Pitagora
Marcellini-Sbordone: Analisi Matematica uno - ed. Liguori
Marcellini-Sbordone: Esercitazioni di Matematica - primo e secondo vol. - ed. Liguori

e le note:
Cupini-Di Fabio: note per *AlmaMathematica*
`https://almaorienta.unibo.it/it/almamathematica`
G. Mauceri:La funzione esponenziale e il logaritmo
`http://www.dima.unige.it/~mauceri/CORSI/funz_espon.pdf`

Molti dei disegni (quelli più belli) sono stati eseguiti dalla dott.ssa Di Fabio, la quale gentilmente ne ha consentito l'uso.

Alcune soluzioni di esercizi sono state scritte dai tutor dell'AA 2022-2023: Enrico Aldrovandi, Federico Ferri e Davide Tramontana.

Indice

CAPITOLO 1

Simboli e notazioni

Simboli universalmente accettati dalla comunità matematica:
$\forall$ si legge per ogni, per tutti,
$\exists$ si legge esiste, esistono
: oppure | si leggono tale che, tali che
$\Rightarrow$ si legge allora, implica, implicano
$\Leftarrow$ si legge se, è implicato da, sono implicati da,
$\Leftrightarrow$ si legge se e solo se, è equivalente a, sono equivalenti a
$\wedge$ si legge e
$\vee$ si legge o, oppure
$:=$ si legge per definizione uguale a

La nozione di insieme è presa come nozione primitiva (ossia: non la si spiega, contando sull'intuizione di ciascuno: da qualcosa di deve pur partire, altrimenti si va nelle spiegazioni a ritroso all'infinito) e ha come sinonimi *collezione* o *famiglia*.
Un insieme può essere descritto in più modi, ad esempio l'insieme A i cui elementi sono le vocali dell'alfabeto italiano può essere rappresentato per elencazione

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

o per descrizione

$$A = \{x : x \text{ è una vocale dell'alfabeto italiano}\}.$$

In tale esempio, a, e, i, o, u sono gli elementi di A.
Dato un insieme A e un simbolo a si dice che a è appartenente ad A o a appartiene ad A, se a è un elemento di A e si scrive:

$$a \in A \qquad [a \text{ appartiene ad } A].$$

Se a non è elemento di A, si scrive

$$a \notin A \qquad [a \text{ non appartiene ad } A].$$

Dati gli insiemi A e B, si dice che B è incluso in A, oppure B è un sottoinsieme di A se ogni elemento di B è anche elemento di A e si scrive:

$$B \subseteq A \qquad [B \text{ è incluso in } A].$$

Se volessimo scrivere in “matematichese” il significato di $B \subseteq A$ è:

$$x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Ovviamente:

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A$$

Se B è incluso in A, ma non coincide con esso, si dice che B è un sottoinsieme proprio di A e si scrive:

$$B \subset A \qquad \text{oppure} \qquad B \subsetneq A.$$

Dati gli insiemi A e B, l’insieme costituito dagli elementi che sono sia in A che in B è l’insieme intersezione di A e B e si scrive:

$$A \cap B \qquad [A \text{ intersecato } B].$$

Ovviamente:

$$A \cap B = B \cap A.$$

Dati gli insiemi A e B, l’insieme costituito dagli elementi che sono in A o in B è l’insieme unione di A e B e si scrive:

$$A \cup B \qquad [A \text{ unione } B].$$

Ovviamente:

$$A \cup B = B \cup A.$$

Dati gli insiemi A e B, l’insieme costituito dagli elementi che sono in A ma non in B è l’insieme differenza di A con B e si scrive:

$$A \setminus B \qquad [A \text{ meno } B].$$

Dati gli insiemi A e B, l’insieme costituito dalle coppie ordinate aventi come primo elemento un elemento di A e come secondo elemento uno di B è il prodotto cartesiano di A e B e si scrive:

$$A \times B \qquad [A \text{ prodotto cartesiano } B].$$

In simboli:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Insiemi numerici:
$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali e $\mathbb{R}^+$ denoterà l'insieme dei numeri reali positivi:

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

$\mathbb{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali
$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi
$\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali.
Attenzione! I matematici si dividono in due classi: quelli che in $\mathbb{N}$ includono lo zero e quelli che non lo includono. Nelle dispense del prof. Dore, e anche qui, lo zero è incluso in $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

$\mathbb{R}^2$ è l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, costituito dalle coppie ordinate dei numeri reali, ossia

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Per semplicità, così come universalmente riconosciuto, quando si scriverà:

$$\forall \epsilon > 0, \qquad x \geq 2$$

senza specificare altro, si intenderà che ϵ e x sono numeri reali.
Quando si scriverà

$$n \geq 3, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2$$

senza specificare altro, si intenderà che n e i sono numeri naturali. Si capirà immediatamente dal contesto che cosa si intende.

CAPITOLO 2

Riferimento cartesiano

2.1. Retta orientata

Presa una retta e due punti distinti su di essa, uno detto 0 e l'altro 1, viene assegnato in modo ovvio un verso alla retta. Il segmento di estremi 0 e 1 individua l'unità di misura.

Figura 1. Retta orientata

E' possibile far corrispondere a ogni punto della retta uno e un solo numero reale, e, viceversa, a ogni numero reale corrisponde, in modo unico, un punto della retta.

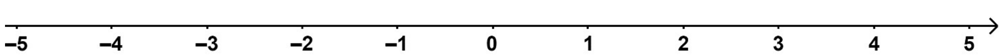

Figura 2. Retta orientata: punti in corrispondenza coi numeri reali

La semiretta di origine 0 e contenente 1 viene detta semiretta positiva e i suoi punti sono in corrispondenza con tutti i numeri reali ≥ 0. Quelli dell'altra semiretta a tutti i numeri ≤ 0.

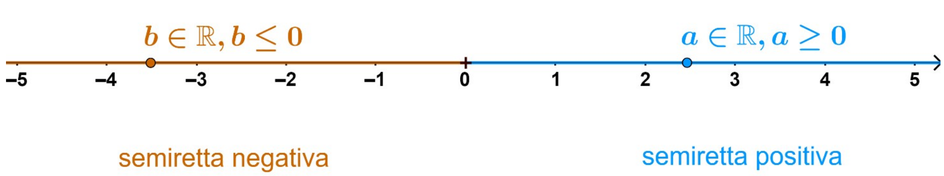

Figura 3. Retta orientata e numeri reali positivi e negativi

2.2. Piano cartesiano

Utilizzando l'identificazione tra punti di una retta e numeri reali, è possibile associare, in modo unico, ad un punto del piano una coppia di numeri reali; ad un punto dello spazio una terna di numeri reali; in generale, ad un punto in uno spazio di dimensione n una n-pla di numeri reali.
Consideriamo due rette ortogonali del piano sulle quali abbiamo posizionato 0 nel punto di intersezione e fissato un'unità di misura.
Le rette si dicono assi cartesiani e il piano si dice dotato di un sistema di riferimento cartesiano e prende il nome di piano cartesiano.
Il punto di intersezione degli assi è detto origine degli assi o del sistema di riferimento cartesiano.
L'origine degli assi solitamente viene indicata con O e il piano cartesiano con Oxy.
La retta tale che la sua semiretta positiva, ruotata di 90° in senso antiorario, si sovrappone alla semiretta positiva dell'altra retta si chiama asse delle ascisse o asse delle x. L'altra retta è detta asse delle ordinate o asse delle y.

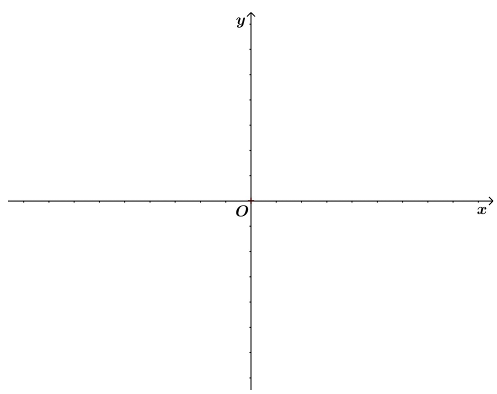

Figura 4. Piano cartesiano

Le semirette positive e negative si chiamano, rispettivamente, semiassi positivi e semiassi negativi.

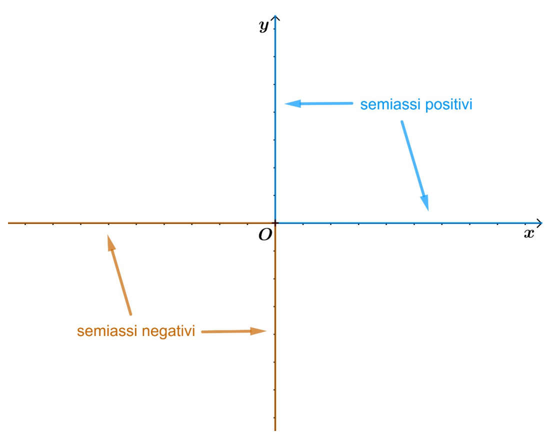

Figura 5. Semiassi

Fissato un punto P del piano, consideriamo le rette ortogonali agli assi passanti per P. La retta ortogonale all'asse delle x individua un punto sull'asse delle x (e quindi un numero reale) che si chiama ascissa di P; mentre la retta ortogonale all'asse delle y individua un punto sull'asse delle y (e quindi un altro numero reale) che si chiama ordinata di P. Tali due numeri, presi come coppia ordinata (ascissa di P, ordinata di P) individuano univocamente il punto P nel piano e si chiamano coordinate cartesiane di P.
Viceversa, ogni coppia di numeri reali (x, y) è rappresentato da un punto di cui x è l'ascissa e y è l'ordinata.

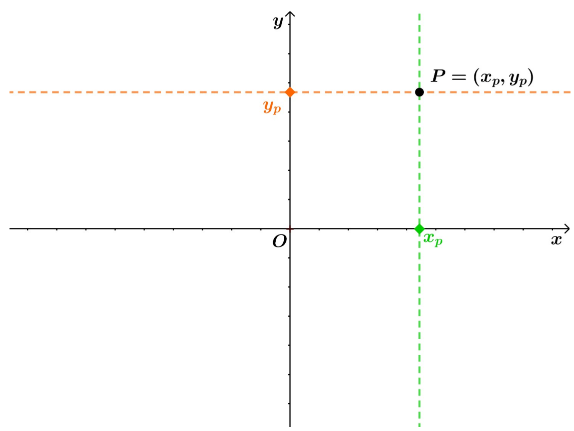

Figura 6. Coordinate di un punto di Oxy

L'origine degli assi ha entrambe le coordinate nulle, e si scrive $O = (0, 0)$.
Se P è un punto sull'asse delle x, la sua ordinata è nulla e quindi risulta $P = (x_p, 0)$ dove x_p è il numero reale corrispondente all'ascissa di P; se P è un punto sull'asse delle y, allora la sua ascissa è nulla e si ha $P = (0, y_p)$ per un certo $y_p \in \mathbb{R}$.
Gli assi cartesiani dividono il piano in quattro quadranti:
I quadrante: è la regione dei punti con entrambe le coordinate positive
II quadrante: è la regione dei punti con ascissa negativa e ordinata positiva
III quadrante: è la regione dei punti con entrambe le coordinate negative
IV quadrante: è la regione dei punti con ascissa positiva e ordinata negativa

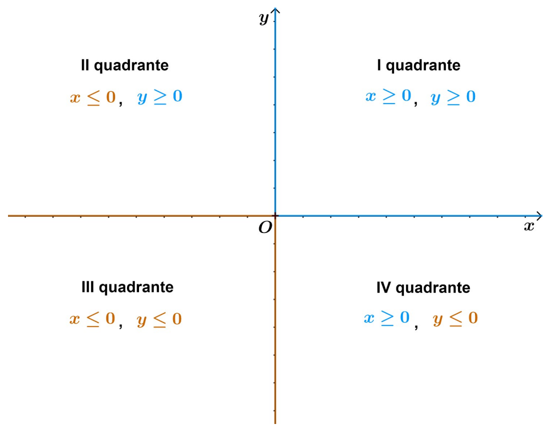

Figura 7. I quattro quadranti del piano Oxy

Esercizio 2.2.1. Dimostrare che in un piano cartesiano Oxy il simmetrico del punto (x, y) rispetto alla bisettrice del I-III quadrante è il punto (y, x).

SOLUZIONE ES. 2.2.1. Si può ragionare con la geometria euclidea, oppure in modo analitico. Seguiamo questo approccio.
Se un punto P è sulla bisettrice del I-III quadrante allora ha coordinate $P = (x, x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Il suo simmetrico rispetto alla bisettrice è lui stesso, e ciò è concorde con quanto dovevamo dimostrare.
Sia $P = (x, y)$ un punto del piano, ma non sulla bisettrice del I-III quadrante. Allora il punto simmetrico del punto P rispetto alla bisettrice del I-III quadrante è il punto $Q = (x_Q, y_Q)$ con le seguenti proprietà:
1) la retta passante per P e Q è ortogonale alla bisettrice del I-III quadrante: essendo il coefficiente angolare della bisettrice I-III quadrante 1 ed essendo il coefficiente angolare della retta per P e Q il numero $\frac{y-y_Q}{x-x_Q}$ dovrà essere, per la condizione di ortogonalità:

$$\frac{y - y_Q}{x - x_Q} = -1.$$

2) il punto medio del segmento $\overline{PQ}$ è sulla bisettrice del I-III quadrante: essendo il punto medio il punto $M = \left(\frac{x+x_Q}{2}, \frac{y+y_Q}{2}\right)$ si deve richiedere

$$\frac{x + x_Q}{2} = \frac{y + y_Q}{2}.$$

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} \frac{y-y_Q}{x-x_Q} = -1 \\ \frac{x+x_Q}{2} = \frac{y+y_Q}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + x_Q = y - y_Q \\ x + x_Q = y + y_Q \end{cases}$$

$$\overset{\text{sommando}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2x_Q = 2y \\ x + x_Q = y + y_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = y \\ x + y = y + y_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = y \\ y_Q = x. \end{cases}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizio 2.2.2. Dimostrare che in un piano cartesiano Oxy il simmetrico del punto (x, y) rispetto all'asse y è il punto $(-x, y)$.

Esercizio 2.2.3. Dimostrare che in un piano cartesiano Oxy il simmetrico del punto (x, y) rispetto all'origine è il punto $(-x, -y)$.

CAPITOLO 3

Funzioni: definizioni e generalità

Nel corso di Analisi matematica 1a e 1b si studiano le proprietà delle funzioni a valori reali di una variabile reale, ossia (usando una notazione che si introdurrà qui sotto) delle funzioni $f : A \to B$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Per non appesantire la presentazione scrivendo $f : A \to B$ si sottintenderà che gi insiemi A, B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

C'è più di un modo di definire una funzione:
un modo, più comune, che probabilmente è quella che vi è stata data nella scuola superiore è:

"una funzione è una terna (A, B, f) dove:
A è un insieme detto dominio della funzione,
B è un insieme detto codominio della funzione,
f è una legge che ad ogni elemento x di A fa corrispondere uno e un solo elemento di B."

Un altro modo è il seguente:

"una funzione di dominio A e codominio B è una *relazione f da A a B* (ossia è un sottoinsieme f di $A \times B$) tale che:

$$\text{per ogni } a \in A \text{ esiste uno e un solo } b \in B \text{ tale che } (a, b) \in f.$$

In breve, in quest'ultima definizione la funzione coincide con quello che, nella prima definizione, è il *grafico* della funzione.
Il mio prof. di Analisi Matematica 1 ha definito la funzione come relazione, la mia prof.ssa di Algebra come terna. Ne sono sopravvissuto e sono grato a loro per avermele fatte conoscere.
Per agevolare lo studio a studenti che hanno avuto un ultimo anno scolastico travagliato, presentiamo le funzioni come terna, probabilmente a loro più familiare.

Definizione 3.0.1. Una funzione reale di variabile reale è una terna (A, B, f) dove:
$A \subseteq \mathbb{R}$ è detto dominio della funzione,
$B \subseteq \mathbb{R}$ è detto codominio della funzione,
f è una legge che ad ogni elemento x di A fa corrispondere uno e un solo elemento di B, il quale viene denotato $f(x)$ e si chiama immagine di x mediante f.
Anzichè (A, B, f) si è soliti scrivere $f : A \to B$.

Dominio: Il dominio della funzione $f : A \to B$ è l'insieme A. Lo si indica anche con $\mathscr{D}(f)$.
Se si assegna una legge $x \mapsto f(x)$ a valori reali di variabile reale e non si danno altre indicazioni del dominio (dato che f è di variabile reale, sappiamo solo che un suo dominio deve essere un sottoinsieme di $\mathbb{R}$), parliamo di *dominio massimale di* f o di *dominio naturale di* f per intendere l'insieme che ha per elementi gli $x \in \mathbb{R}$ per cui $f(x)$ "ha senso".

Immagine:
L'immagine della funzione $f : A \to B$ è l'insieme delle immagini degli elementi del dominio mediante f. Tale insieme lo si denota $Im(f)$.
In simboli:

$$Im(f) = \{f(x) : x \in \mathscr{D}(f)\}.$$

Ovviamente, $Im(f) \subseteq B$.

Grafico:
Il grafico della funzione $f : A \to B$ è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$ tali che $x \in A$, ossia:

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Osservazione 3.0.2. Ogni coppia di numeri reali (x, y) è rappresentato da un punto di un sistema di riferimento cartesiano Oxy, e viceversa. Dunque il grafico di una funzione reale di variabile reale è identificabile con un sottoinsieme di Oxy essendo

$$Gr(f) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Osservazione 3.0.3. Essendo f una legge che ad ogni elemento x di A fa corrispondere **uno e un solo** elemento di B è facile individuare se un sottoinsieme di Oxy è grafico di una funzione reale di variabile reale. Basta applicare il *test della retta verticale*:

un sottoinsieme di Oxy è grafico di una funzione reale di variabile reale se ogni retta retta verticale del piano cartesiano Oxy o non interseca l'insieme o lo interseca in un solo punto.

Conoscere $Gr(f)$ è utile, perché fornisce molte informazioni. Per ora ci limitiamo a dire che:

proiettando il grafico di f sull'asse x si ottiene $\mathscr{D}(f)$.

proiettando il grafico di f sull'asse y si ottiene $Im(f)$.

3.1. Operazioni tra funzioni reali di variabile reale

Tra due o più funzioni reali di variabile reale è possibile definire operazioni algebriche per ottenere nuove funzioni. Ricordiamo qui di seguito come vengono definite:

Funzione somma:
La somma di due funzioni $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ è la funzione $f_1 + f_2 : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x) \qquad \forall x \in A.$$

Funzione differenza:
La differenza di due funzioni $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ è la funzione $f_1 - f_2 : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$(f_1 - f_2)(x) := f_1(x) - f_2(x) \qquad \forall x \in A.$$

Funzione prodotto:
Il prodotto di due funzioni $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ è la funzione $f_1 \cdot f_2 : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$(f_1 \cdot f_2)(x) := f_1(x) \cdot f_2(x) \qquad \forall x \in A.$$

Funzione quoziente:
Il rapporto di due funzioni $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ è possibile nei punti $x \in A$ in cui $f_2(x) \neq 0$. Precisamente, il rapporto di f_1 con f_2 è la funzione $\frac{f_1}{f_2} : A \setminus \{x \in A : f_2(x) = 0\} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{f_1}{f_2}(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \qquad \forall x \in A \setminus \{x \in A : f_2(x) = 0\}.$$

Funzione composta:
La funzione composta di $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ è possibile definirla se $Im(f) \subseteq B$. In tal caso la funzione composta è la funzione $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in A.$$

3.2. Proprietà principali

Di seguito, le definizioni principali che useremo per caratterizzare le funzioni reali di variabile reale.

3.2.1. Funzioni con segno.

Definizione 3.2.1. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice:
positiva su $C \subseteq A$, se $f(x) > 0$ per ogni $x \in C$;
negativa su $C \subseteq A$, se $f(x) < 0$ per ogni $x \in C$;
nulla su $C \subseteq A$, se $f(x) = 0$ per ogni $x \in C$;
non negativa su $C \subseteq A$, se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in C$;
non positiva su $C \subseteq A$, se $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in C$.

3.2.2. Funzioni limitate.

Definizione 3.2.2. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice <u>limitata</u> se la sua immagine è un insieme limitato, ossia

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \; : \; c_1 \le f(x) \le c_2 \qquad \forall x \in A.$$

Osservazione 3.2.3. Per la definizione di insieme limitato si veda la Definizione 4.1.5.

Proposizione 3.2.4. *Si consideri $f : A \to \mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti:*

(a) *f è limitata*
(b) *esiste $M \in \mathbb{R}$, $M \ge 0$, tale che*

$$|f(x)| \le M \qquad \forall x \in A.$$

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$:
Si scelga $M := \max\{|c_1|, |c_2|\}$. Da

$$c_1 \le f(x) \le c_2$$

segue

$$-M \le -|c_1| \le c_1 \le f(x) \le c_2 \le |c_2| \le M$$

da cui la tesi.
$(b) \Rightarrow (a)$:
Basta scegliere $c_1 = -M$ e $c_2 = M$. □

3.2.3. Funzioni suriettive.

Definizione 3.2.5. Una funzione $f : A \to B$ si dice <u>suriettiva</u> se l'immagine coincide col codominio, ossia se $Im(f) = B$.
Ciò si può esprimere nel seguente modo:

$$\forall y \in B \; \exists x \in \mathscr{D}(f) \; : \; y = f(x).$$

Esempio 3.2.6. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, non è suriettiva.
La funzione $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$, è suriettiva.

Esercizio 3.2.7. Dimostrare che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 7$ è suriettiva.

Sol. Es. 3.2.7:
Sia $y \in \mathbb{R}$. Vogliamo dimostrare che esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$, ossia tale che $2x + 7 = y$. Si ha

$$2x + 7 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y-7}{2} \in \mathbb{R}.$$

Dunque abbiamo trovato un elemento del dominio $\mathbb{R}$ che ha come immagine mediante f il numero y. Esso è il numero reale $\frac{y-7}{2}$. Infatti: $f(\frac{y-7}{2}) = y$.

3.2.4. Funzioni iniettive.

Definizione 3.2.8. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva se, elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Ossia: per ogni coppia di punti del dominio $x, x' \in \mathcal{D}(f)$, se $x \neq x'$ allora $f(x) \neq f(x')$.
In simboli:

$$\forall x, x' \in \mathcal{D}(f) \quad (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')).$$

In modo equivalente l'iniettività di $f : A \to \mathbb{R}$ si può formulare nel seguente modo:

$$\forall x, x' \in \mathcal{D}(f) \quad (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'),$$

Osservazione 3.2.9. Per riconoscere dal suo grafico se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ di variabile reale è iniettiva, basta applicare il *test della retta orizzontale*:

f è **iniettiva** se ogni retta orizzontale del piano cartesiano Oxy
o non interseca il grafico di f o lo interseca in un solo punto.

Esercizio 3.2.10. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, è iniettiva.
Sugg:

(i) Dimostrare che $x^2 + xy + y^2 > 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
(ii) Dimostrare che $x^2 + xy + y^2 = 0$ se e solo se $x = y = 0$.
(iii) Concludere la dimostrazione.

Sol:
(i):
Se $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ci sono due casi: $xy > 0$ e $xy < 0$.
Se $xy > 0$ allora

$$x^2 + xy + y^2 > x^2 + y^2 \geq 0$$

e si ottiene la tesi.
Se $xy < 0$ allora

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - xy = (x + y)^2 - xy \geq -xy > 0$$

e si ottiene la tesi.
(ii):
L'implicazione da destra a sinistra è facile. Se $x = y = 0$ allora $x^2 + xy + y^2 = 0$.
Proviamo il viceversa.

Per (i)

$$x^2+xy+y^2=0 \overset{(i)}{\Rightarrow} \begin{cases} x^2+xy+y^2=0 \\ x=0 \vee y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ x=0 \vee y=0 \end{cases} \Rightarrow\ x=y=0,$$

che è esattamente quel che si voleva dimostrare.
(iii):
Vogliamo dimostrare che se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$x_1^3 - x_2^3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Si ha:

$$x_1^3 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1^2+x_1x_2+x_2^2=0$$
$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} x_1 = x_2 \vee x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Definizione 3.2.11. Una funzione $f : A \to B$ si dice biunivoca o biettiva o bigettiva o invertibile se è iniettiva e suriettiva.

La più ovvia funzione invertibile è la funzione *identità*.

Definizione 3.2.12. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ si chiama funzione identità su A o funzione identica su A, la funzione $\mathrm{id}_A : A \to A$,

$$\mathrm{id}_A(x) = x \qquad \forall x \in A.$$

Se $A = \mathbb{R}$ scriviamo id anziché $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$; il suo grafico è la retta di equazione cartesiana $y = x$. Tale retta è la bisettrice del I-III quadrante.

Definizione 3.2.13 (Funzione inversa). Se una funzione $f : A \to B$ è biunivoca allora esiste una funzione detta inversa di f, usualmente denotata f^{-1}. Essa è la seguente:
$f^{-1} : B \to A$, tale che, per ogni $y \in B$,

$$f^{-1}(y) \text{ è quell'unico elemento } x \in A \text{ tale che } f(x) = y.$$

Per la definizione di funzione inversa si ha che se $f : A \to B$ è invertibile, allora

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B. \tag{3.2.1}$$

Vediamo altre proprietà.

Proposizione 3.2.14. *Sia $f : A \to B$ biunivoca.*
Valgono le seguenti:

(a) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$
(b) $f^{-1} : B \to A$ *è invertibile e* $(f^{-1})^{-1} = f$
(c) *il grafico di f^{-1} è il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del I-III quadrante.*

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Sia $x \in A$. Allora $f(x) \in B$. Per definizione, $\tilde{x} := f^{-1}(f(x))$ è quell'unico elemento in A tale che $f(\tilde{x}) = f(x)$. Essendo f iniettiva, deve essere $\tilde{x} = x$, ossia

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

(b):
Dimostriamo che f^{-1} è iniettiva:
Se $y_1, y_2 \in B$ e $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$ allora

$$y_1 \overset{(3.2.1)}{=} f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

Dimostriamo che f^{-1} è suriettiva:
Se $x \in A$ allora, per (a), $f^{-1} \circ f(x) = x$, ossia $f^{-1}(f(x)) = x$. Dunque x è un elemento dell'immagine di f^{-1}.

Abbiamo così dimostrato che $f^{-1} : B \to A$ ha inversa. Essa è $(f^{-1})^{-1} : A \to B$ con la proprietà

$$f^{-1} \circ (f^{-1})^{-1} = \mathrm{id}_A$$

vale a dire: preso $x \in A$, $(f^{-1})^{-1}(x)$ è quell'unico elemento di B tale che

$$f^{-1}((f^{-1})^{-1}(x)) = x.$$

Essendo, per (a),

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

segue dall'unicità di $(f^{-1})^{-1}(x)$ che

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x).$$

(c)
Sia $(y, f^{-1}(y)) \in Gr(f^{-1}) \subseteq B \times A$. In particolare, $y \in B$ e, per la suriettività di f, esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$. Allora, per definizione di funzione inversa, $f^{-1}(y) = x$. Dunque

$$(y, f^{-1}(y)) = (f(x), x).$$

Il punto $(f(x), x)$ è il simmetrico, rispetto alla bisettrice del I-III quadrante, di $(x, f(x))$.
Abbiamo così dimostrato, si veda l'Esercizio 2.2.1, che il grafico di f^{-1} è contenuto nel simmetrico, rispetto alla bisettrice del I-III quadrante, del grafico di f.
In modo analogo si dimostra che il grafico di f è contenuto nel simmetrico, rispetto alla bisettrice del I-III quadrante, del grafico di f^{-1} e la dimostrazione è conclusa. $\square$

3.2.5. Funzioni monotone.

Definizione 3.2.15. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice:
crescente se

$$\forall x, x' \in A \qquad (x < x' \ \Rightarrow\ f(x) \le f(x');$$

decrescente se

$$\forall x, x' \in A \qquad (x < x' \ \Rightarrow\ f(x) \le f(x').$$

Tra le funzioni crescenti ci sono quelle strettamente crescenti.
Esse sono tali che:

$$\forall x, x' \in A \qquad (x < x' \ \Rightarrow\ f(x) < f(x').$$

Tra le funzioni decrescenti ci sono quelle strettamente decrescenti.
Esse sono tali che:

$$\forall x, x' \in A \qquad (x < x' \ \Rightarrow\ f(x) > f(x').$$

Per convenzione, se A ha un solo elemento, allora f è sia crescente che decrescente.
Una funzione si dice monotona se è crescente o decrescente.
Una funzione si dice strettamente monotona se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Osservazione 3.2.16. Dato che se $x = x'$, allora è banalmente $f(x) = f(x')$ otteniamo che valgono sia $f(x) \le f(x')$ che $f(x) \ge f(x')$. Dunque, sono equivalenti alle definizioni di funzione crescente e decrescente le seguenti:

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice: crescente se

$$\forall x, x' \in A \qquad (x \le x' \ \Rightarrow\ f(x) \le f(x');$$

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice: decrescente se

$$\forall x, x' \in A \qquad (x \le x' \ \Rightarrow\ f(x) \ge f(x').$$

Proposizione 3.2.17. *Le funzioni strettamente crescenti o strettamente decrescenti sono iniettive.*

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio. □

Esercizio 3.2.18. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in A$.

(a) Dimostrare che se f è (strettamente) crescente in $A \cap (-\infty, \bar{x}]$ e in $A \cap [\bar{x}, +\infty)$ allora f è (strettamente) crescente.
(b) L'affermazione è ancora vera se $\bar{x} \notin A$? Se sì dimostrarla, se no fornire un controesempio.

SOLUZIONE ES. 3.2.18. Trattiamo il caso della stretta crescenza, ma il ragionamento è del tutto simile per la crescenza.
(a): Trattiamo il caso della stretta crescenza, ma il ragionamento è del tutto simile per la crescenza. Si deve dimostrare che se $x_1, x_2 \in A$ allora

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Caso (I): Se $x_1, x_2 \in (-\infty, \bar{x}]$ l'implicazione sopra è conseguenza della (stretta) crescenza di $f|_{A\cap(-\infty,\bar{x}]}$
Caso (II): Se $x_1, x_2 \in [\bar{x}, +\infty)$ l'implicazione è conseguenza della stretta crescenza di $f|_{A\cap[\bar{x},+\infty)}$
Caso (III): $x_1 < \bar{x} < x_2$.
Essendo $\bar{x} \in A$, applicando il caso (I) ai punti x_1 e $\bar{x}$ deduciamo

$$f(x_1) < f(\bar{x}). \tag{3.2.2}$$

Essendo $\bar{x} \in A$, applicando il caso (II) ai punti $\bar{x}$ e x_2 deduciamo

$$f(\bar{x}) < f(x_2). \tag{3.2.3}$$

Da (3.2.2) e (3.2.3) e per la proprietà transitiva di $<$, deduciamo

$$f(x_1) < f(x_2).$$

(b): Trattiamo il caso della stretta crescenza.
Si consideri $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{x}$.
Si ponga $A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione è strettamente crescente in $]-\infty, 0[$, insieme che si può scrivere anche $A \cap]-\infty, 0]$. Infatti

$$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}.$$

La funzione è strettamente crescente in $]0, +\infty[$, insieme che si può scrivere anche $A \cap [0, +\infty[$. Infatti

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}.$$

Eppure f non è strettamente crescente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: se considero $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, si ha

$$f(x_1) = f(-1) = 1, \quad f(x_2) = f(1) = -1$$

quindi non è $f(x_1) < f(x_2)$. □

Un altro esempio per la pura crescenza: $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 3.2.19. Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ e $cf : A \to \mathbb{R}$ così definita:

$$(cf)(x) = cf(x).$$

Dimostrare le seguenti:

(a) Se $c > 0$ allora f è crescente/decrescente/strettamente crescente/strettamente decrescente se e solo se cf è crescente/decrescente/strettamente crescente/strettamente decrescente.

(b) Se $c < 0$ allora f è crescente/decrescente/strettamente crescente/strettamente decrescente se e solo se cf è decrescente/crescente/strettamente decrescente/strettamente crescente.

(c) Se $c = 0$ allora cf è costante (quindi sia crescente che decrescente).

Esercizio 3.2.20. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$. Dimostrare le seguenti:

(a) vale l'implicazione:

$$\begin{cases} f \text{ crescente e } f > 0 \\ g \text{ strettamente crescente e } g \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad fg : A \to \mathbb{R} \text{ è strettamente crescente}$$

(b)

$$\begin{cases} f \text{ decrescente e } f < 0 \\ g \text{ strettamente crescente e } g \geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad fg : A \to \mathbb{R} \text{ è strettamente decrescente.}$$

Sol.:

(a):

Usiamo l'Esercizio 3.2.19 (a).

Se $x < y$ allora $0 \leq g(x) < g(y)$. Quindi:

$$f(x)g(x) \overset{f(x)>0+\text{Es. 3.2.19 (a)}}{<} f(x)g(y) \overset{g(y)>0+\text{Es. 3.2.19 (a)}}{\leq} f(y)g(y).$$

(b):

Usiamo l'Esercizio 3.2.19 (b).

Se $x < y$

$$f(x)g(x) \overset{f(x)<0+\text{Es. 3.2.19 (b)}}{>} f(x)g(y) \overset{g(y)>0+\text{Es. 3.2.19}}{\geq} f(y)g(y).$$

Esercizio 3.2.21. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni.

Dimostrare le seguenti:

(a) Se f e g sono entrambe crescenti, allora $f + g$ è crescente

(b) Se f e g sono tali che una è strettamente crescente e l'altra è crescente, allora $f + g$ è strettamente crescente.

Enunciare e dimostrare un risultato analogo per le funzioni decrescenti.

Esercizio 3.2.22. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e positiva.
Dimostrare le seguenti:

(a) f è crescente/decrescente/strettamente crescente/strettamente decrescente se e solo se $\frac{1}{f}$ è decrescente/crescente/strettamente decrescente/strettamente crescente.
(b) f è crescente/decrescente/strettamente crescente/strettamente decrescente se e solo se $\frac{-1}{f}$ è crescente/decrescente/strettamente crescente/strettamente decrescente .
Analogamente, per le funzioni decrescenti/strettamente decrescenti:

Esercizio 3.2.23. Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : C \to \mathbb{R}$, con $Im(f) \subseteq C$ e sia $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ la loro funzione composta.
Dimostrare le seguenti:

(a) Se f e g sono entrambe crescenti o entrambe decrescenti, allora $g \circ f$ è crescente
(b) Se f e g sono entrambe strettamente crescenti o entrambe strettamente decrescenti, allora $g \circ f$ è strettamente crescente
(c) Se f e g sono una decrescente e l'altra crescente, allora $g \circ f$ è decrescente
(d) Se f e g sono una strettamente decrescente e l'altra strettamente crescente, allora $g \circ f$ è strettamente decrescente.

Esercizio 3.2.24. Sia $f : A \to B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$, una funzione invertibile.
Dimostrare le seguenti:

(a) f è strettamente crescente se e solo se f^{-1} è strettamente crescente
(b) f è strettamente decrescente se e solo se f^{-1} è strettamente decrescente

3.2.6. Funzioni pari e dispari.

Definizione 3.2.25. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice <u>pari</u> se valgono le due condizioni seguenti:
$x \in A \Leftrightarrow -x \in A$;
$\forall x \in A \quad f(-x) = f(x)$.

Osservazione 3.2.26. Il grafico $Gr(f)$ di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y del sistema di riferimento cartesiano Oxy.

Definizione 3.2.27. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice <u>dispari</u> se valgono le due condizioni seguenti:
$x \in A \Leftrightarrow -x \in A$;
$\forall x \in A \quad f(-x) = -f(x)$.

Osservazione 3.2.28. Il grafico $Gr(f)$ di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine degli assi del sistema di riferimento cartesiano Oxy.

Esercizio 3.2.29. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia $h : A \to \mathbb{R}$ una qualunque di queste funzioni

$$f \cdot g : A \to \mathbb{R}, \quad \frac{f}{g} : A \setminus \{x \in A : g(x) = 0\} \to \mathbb{R}.$$

Dimostrare le seguenti:

(a) Se f e g sono entrambe pari o entrambe dispari, allora h è pari
(b) Se f e g sono una pari e l'altra dispari, allora h è dispari.

Esercizio 3.2.30. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia $h : A \to \mathbb{R}$ una qualunque di queste funzioni

$$f \pm g : A \to \mathbb{R}.$$

(a) Se f e g sono entrambe pari o entrambe dispari, allora h è pari? Se sì fornire una dimostrazione, se no dare un controesempio.
(b) Se f e g sono una pari e l'altra dispari, allora h è dispari? Se sì fornire una dimostrazione, se no dare un controesempio.

Esercizio 3.2.31. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione pari e si definiscano

$$A^+ := A \cap [0, \infty), \qquad A^- := A \cap (-\infty, 0]$$

Dimostrare le seguenti:

(a) $f|_{A^+}$ è (strettamente) crescente se e solo se $f|_{A^-}$ è (strettamente) decrescente
(b) $f|_{A^+}$ è (strettamente) decrescente se e solo se $f|_{A^-}$ è (strettamente) crescente.

Esercizio 3.2.32. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione dispari e si definiscano

$$A^+ := A \cap [0, \infty), \qquad A^- := A \cap (-\infty, 0]$$

Dimostrare le seguenti:

(a) $f|_{A^+}$ è (strettamente) crescente se e solo se $f|_{A^-}$ è (strettamente) crescente
(b) $f|_{A^+}$ è (strettamente) decrescente se e solo se $f|_{A^-}$ è (strettamente) decrescente.

Esercizio 3.2.33. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $0 \in A$.
Dimostrare che se f è dispari allora $f(0) = 0$.
Sol: Se f è dispari allora $f(0) = f(-0) = -f(0)$. Dunque $f(0) = 0$.

3.2.7. Asintoti e funzioni pari/dispari. Anticipiamo qui la definizione di asintoto di una funzione, la quale fa uso della nozione di limite.

Definizione 3.2.34. Sia $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$. Si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto di f a $+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - q) = 0.$$

Se $m = 0$, ossia se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = q,$$

allora la retta $y = q$ è un asintoto orizzontale di f a $+\infty$, se $m \neq 0$ allora la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo di f a $+\infty$,

Esercizio 3.2.35. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $\sup A = +\infty$.
Sia la retta di equazione $y = mx + q$ un asintoto di f a $+\infty$.
Dimostrare che se f è pari allora la retta di equazione $y = -mx + q$ è un asintoto di f a $-\infty$.
Dimostrare che se f è dispari allora la retta di equazione $y = mx - q$ è un asintoto di f a $-\infty$.

3.2.8. Funzioni periodiche.

Definizione 3.2.36. Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ non costante si dice periodica di periodo T o T-periodica, con $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$ se

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in A \Leftrightarrow x + T \in A)$
(b) $\forall x \in A \quad f(x) = f(x + T)$.

Osservazione 3.2.37. Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è periodica di periodo T, allora conoscere una sua restrizione $f : A \cap [a, a + T) \to \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $b = a + T$, è sufficiente per conoscere tutte le sue proprietà.

Esercizio 3.2.38. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ non costante e periodica. Dire se si può verificare

$$\inf\{T : f : A \to \mathbb{R} \text{ è periodica di periodo } T\} = 0.$$

Se sí fornire un esempio, se no, giustificare.
N.B.: per la definizione di inf si veda la Definizione 4.1.10.
Sol: La risposta è sì. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Allora la funzione è q-periodica, per ogni $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$, eppure non è costante.

Si rinvia al Capitolo 5 un'altra proprietà delle funzioni periodiche, v. Esercizio 5.3.37.

3.3. Trasformazioni elementari del grafico di funzione

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione elementare. Consideriamo le seguenti funzioni g ottenute operando delle semplici operazioni sulle funzioni elementari di partenza e vediamo come ne varia il grafico associato.
Sia $g(x) = f(x) + c$, con $c > 0$. Il grafico di g si ottiene traslando il grafico di f verso l'alto di c unità.
Sia $g(x) = f(x) - c$ con $c > 0$. Il grafico di g si ottiene traslando il grafico di f verso il basso di c unità. Qui sotto alcuni esempi.

Attenzione: nella figura qui sotto, leggere il simbolo $x^{\frac{1}{n}}$ come $\sqrt[n]{x}$.

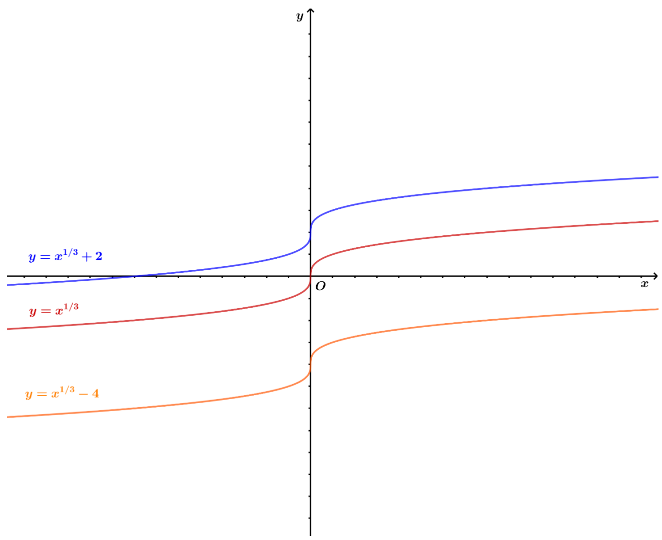

Figura 1. Grafico di $g(x) = f(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$

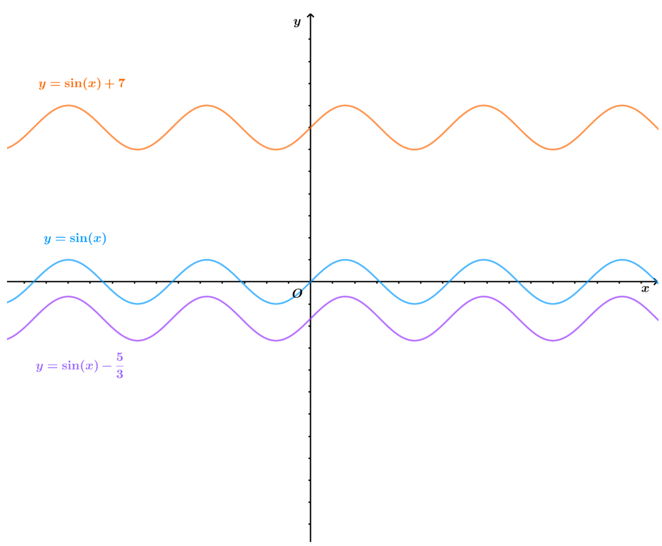

Figura 2. Grafico di $g(x) = f(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$

Sia $g(x) = f(x+c)$, con $c > 0$. Il grafico di g si ottiene traslando il grafico di f verso sinistra (!) di c unità;
Sia $g(x) = f(x-c)$, con $c > 0$. Il grafico di g si ottiene traslando il grafico di f verso destra (!) di c unità.
Qui sotto alcuni esempi.

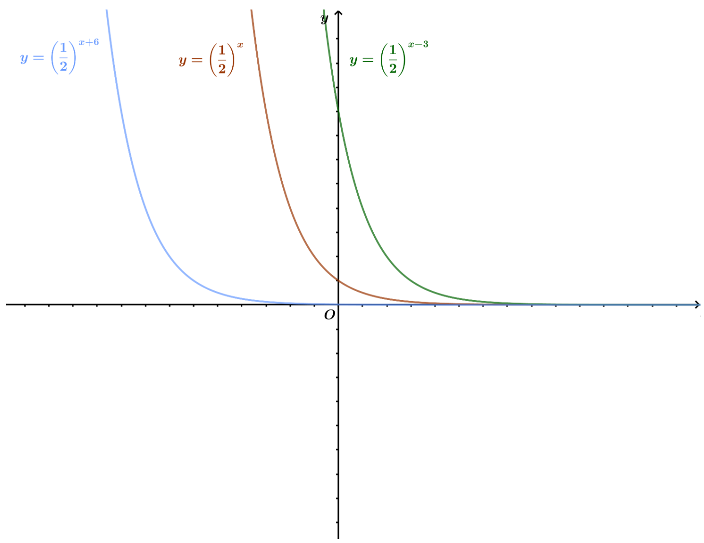

Figura 3. Grafico di $g(x) = f(x+c)$ con $c \in \mathbb{R}$ - I esempio

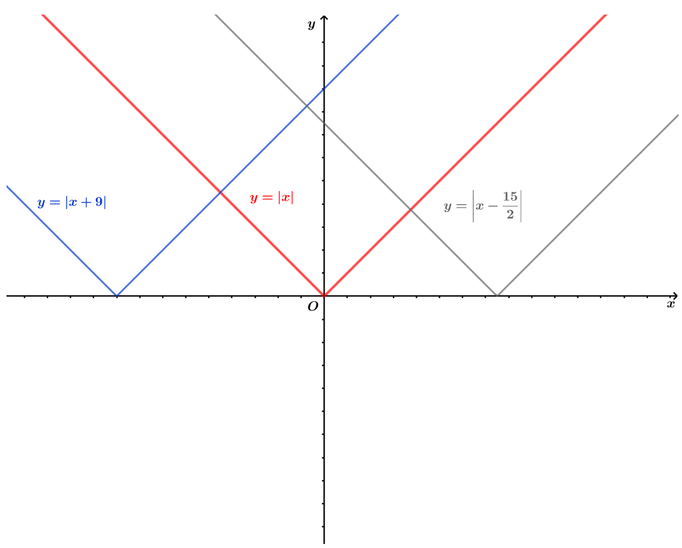

Figura 4. Grafico di $g(x) = f(x+c)$ con $c \in \mathbb{R}$ - II esempio

Sia $g(x) = -f(x)$. Il grafico di g si ottiene facendo il simmetrico del grafico di f rispetto all'asse delle ascisse.
Qui di sotto alcuni esempi.

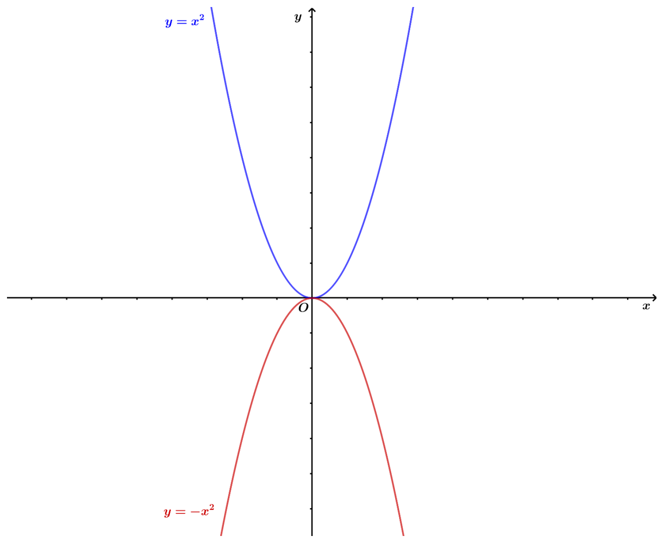

Figura 5. Grafico di $g(x) = -f(x)$ - I esempio

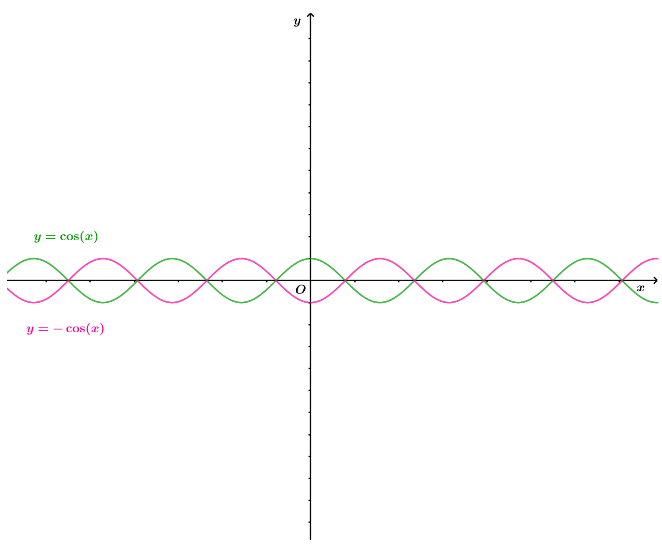

Figura 6. Grafico di $g(x) = -f(x)$ - II esempio

Sia $g(x) = f(-x)$. Il grafico di g si ottiene facendo il simmetrico del grafico di f rispetto all'asse delle ordinate.
Qui sotto alcuni esempi.

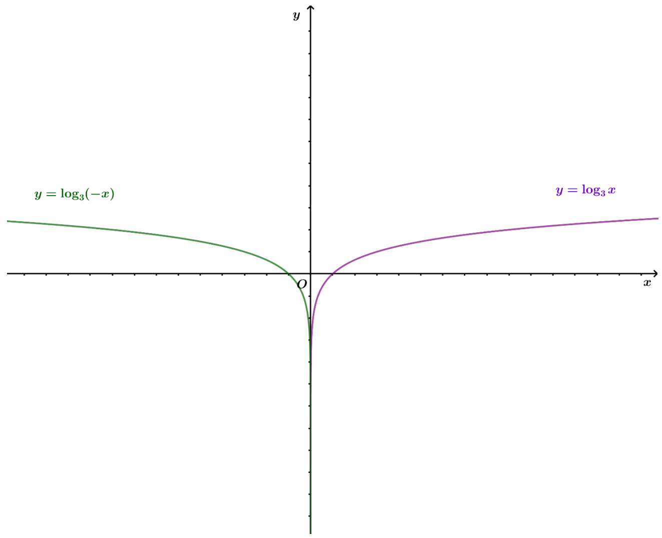

Figura 7. Grafico di $g(x) = f(-x)$ - I esempio

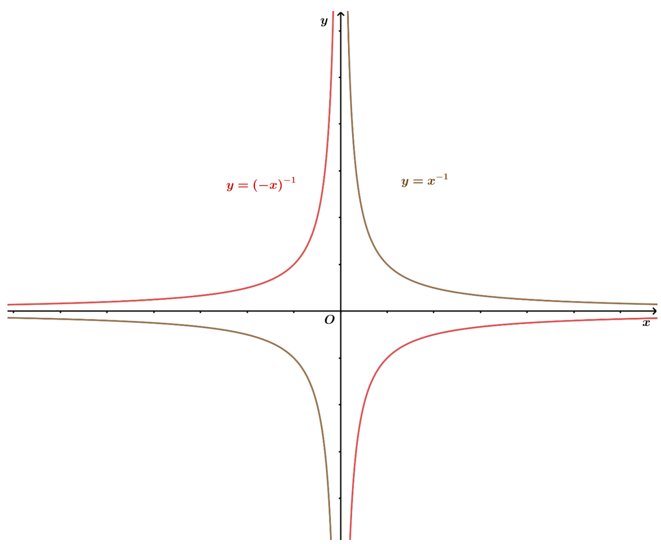

Figura 8. Grafico di $g(x) = f(-x)$ - II esempio

Sia $g(x) = cf(x)$, con $c \in \mathbb{R}, c > 0$. Il grafico di g si ottiene moltiplicando tutte le ordinate dei punti di $Gr(f)$ per il fattore c. Quindi, $Gr(g)$ si costruisce applicando una contrazione verticale a $Gr(f)$ del fattore c se $0 < c < 1$; una dilatazione verticale a $Gr(f)$ del fattore c se $c > 1$. Qui di sotto alcuni esempi.

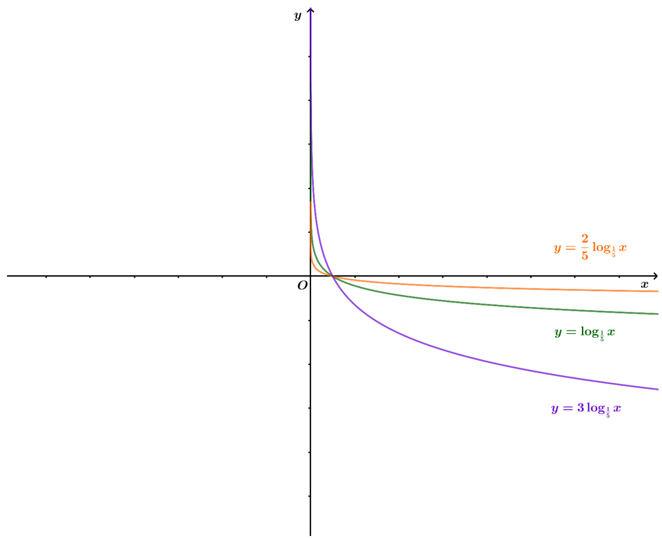

Figura 9. Grafico di $g(x) = cf(x)$ - I esempio

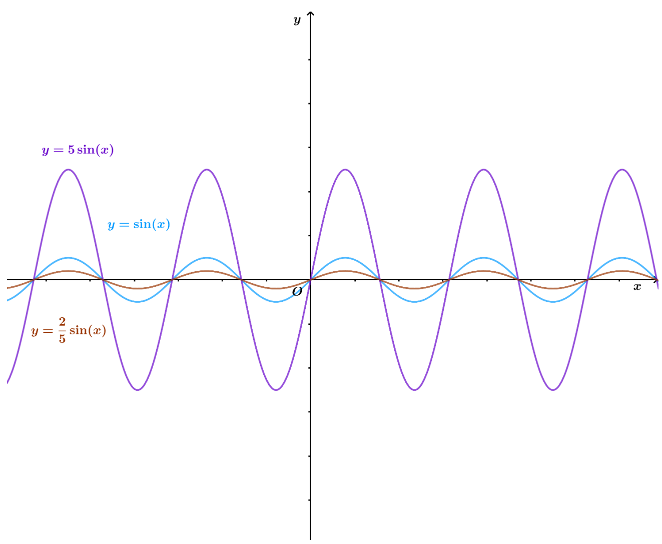

Figura 10. Grafico di $g(x) = cf(x)$ - II esempio

Sia $g(x) = f(cx)$, con $c > 0$. Il grafico di g si costruisce applicando una contrazione (!) orizzontale a $Gr(f)$ del fattore $\frac{1}{c}$ se $c > 1$; una dilatazione (!) orizzontale a $Gr(f)$ del fattore c se $0 < c < 1$.
Qui di sotto alcuni esempi.

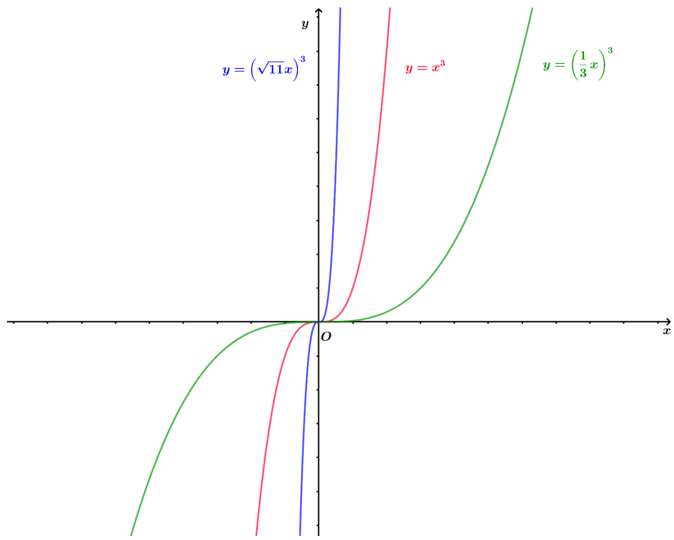

Figura 11. Grafico di $g(x) = f(cx)$ - I esempio

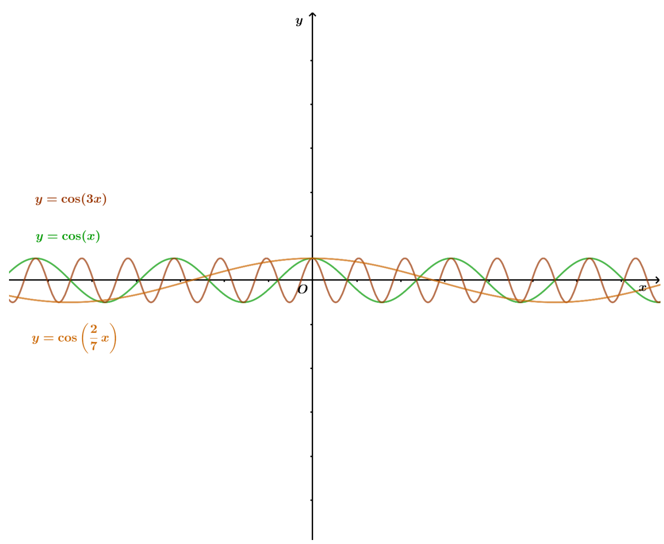

Figura 12. Grafico di $g(x) = f(cx)$ - II esempio

Sia $g(x) = |f(x)|$. Il grafico di g si ottiene mantenendo invariate le parti del grafico di f che si trovano nel semipiano delle y maggiori o uguali di 0 e ribaltando le parti del grafico di f che si trovano nel semipiano delle y negative. Qui sotto alcuni esempi.

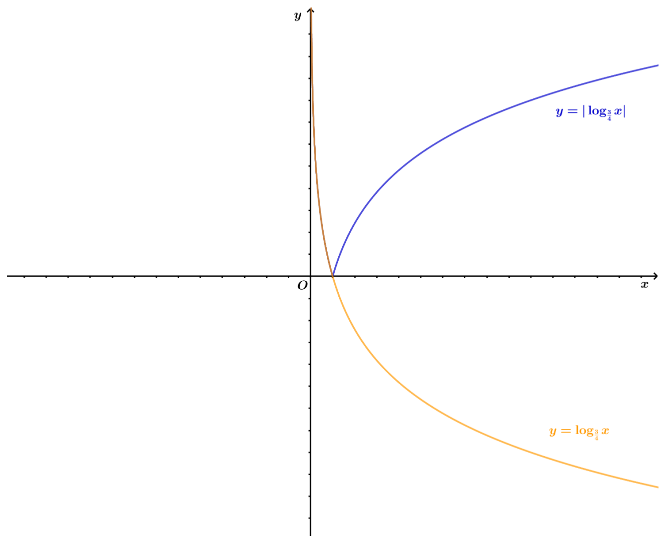

Figura 13. Grafico di $g(x) = |f(x)|$ - I esempio

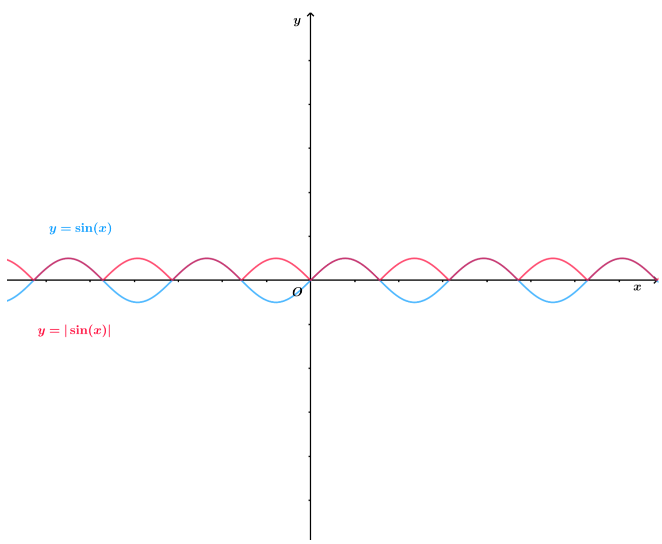

Figura 14. Grafico di $g(x) = |f(x)|$ - II esempio

Sia $g(x) = f(|x|)$. Il grafico di g si ottiene mantenendo invariate le parti del grafico di f che si trovano nel semipiano delle x maggiori o uguali di 0 e riflettendole nel semipiano delle x negative rispetto all'asse delle y.
Qui sotto alcuni esempi.

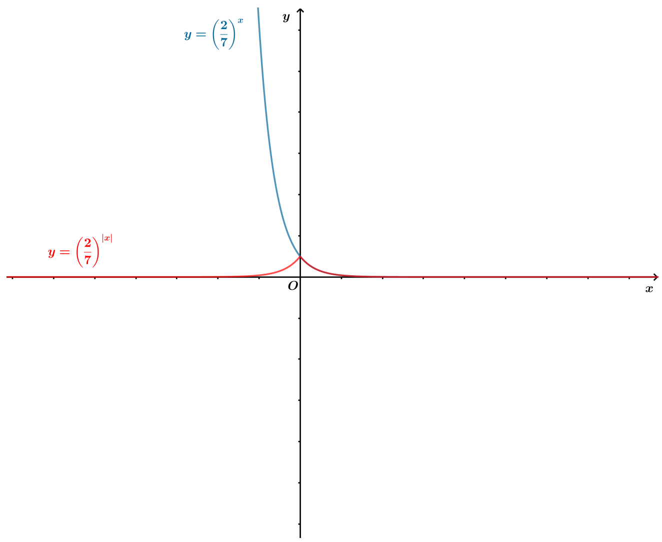

Figura 15. Grafico di $g(x) = f(|x|)$ - I esempio

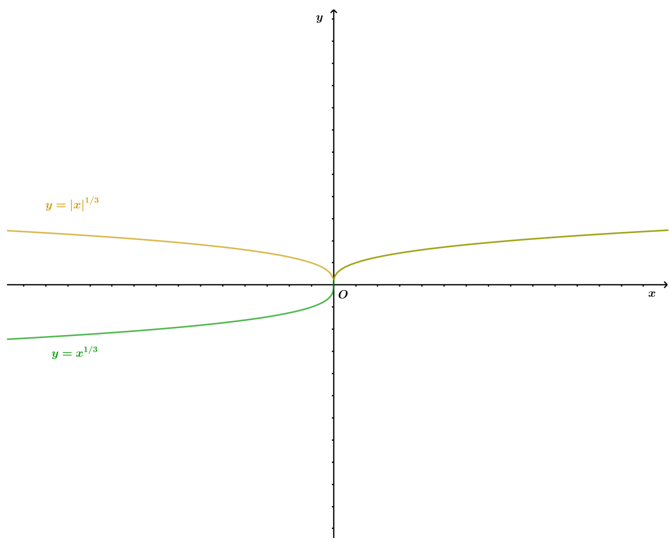

Figura 16. Grafico di $g(x) = f(|x|)$ - II esempio

3.4. Esercizi sulle operazioni tra funzioni e sulle trasformazioni elementari dei grafici

Per gli esercizi qui sotto, è necessario conoscere le funzioni elementari e i loro grafici.

Esercizio 3.4.1. Per la seguente funzione, si determinino: le funzioni elementari che le compongono, il dominio, ed eventuali simmetrie del grafico rispetto ad un piano cartesiano ortogonale Oxy.

$$f(x) = \frac{\sin|x|}{2\cos(x^2)}.$$

Esercizio 3.4.2. Per la seguente funzione, si determinino: le funzioni elementari che le compongono, il dominio, ed eventuali simmetrie del grafico rispetto ad un piano cartesiano ortogonale Oxy.

$$g(x) = e^{\frac{-x^2+x}{1+x}} + \tan(x).$$

Esercizio 3.4.3. Per la seguente funzione, si determinino: le funzioni elementari che le compongono, il dominio, ed eventuali simmetrie del grafico rispetto ad un piano cartesiano ortogonale Oxy.

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^3(3x-1)}}{1+x^6}.$$

Esercizio 3.4.4. Per la seguente funzione, si determinino: le funzioni elementari che le compongono, il dominio, ed eventuali simmetrie del grafico rispetto ad un piano cartesiano ortogonale Oxy.

$$k(x) = \frac{5}{\log(x^4)}.$$

Esercizio 3.4.5. Si rappresenti il grafico della seguente funzione utilizzando le trasformazioni geometriche sui grafici delle funzioni elementari che le compongono.

$$f(x) = \left|\left|\frac{1}{2}x\right| - 3\right|.$$

Esercizio 3.4.6. Si rappresenti il grafico della seguente funzione utilizzando le trasformazioni geometriche sui grafici delle funzioni elementari che le compongono.

$$g(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1.$$

Esercizio 3.4.7. Si rappresenti il grafico della seguente funzione utilizzando le trasformazioni geometriche sui grafici delle funzioni elementari che le compongono.

$$h(x) = -e^{|x|} + 1.$$

Esercizio 3.4.8. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti, studiandone dominio, immagine, monotonia:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \\ e^{-x} - e & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

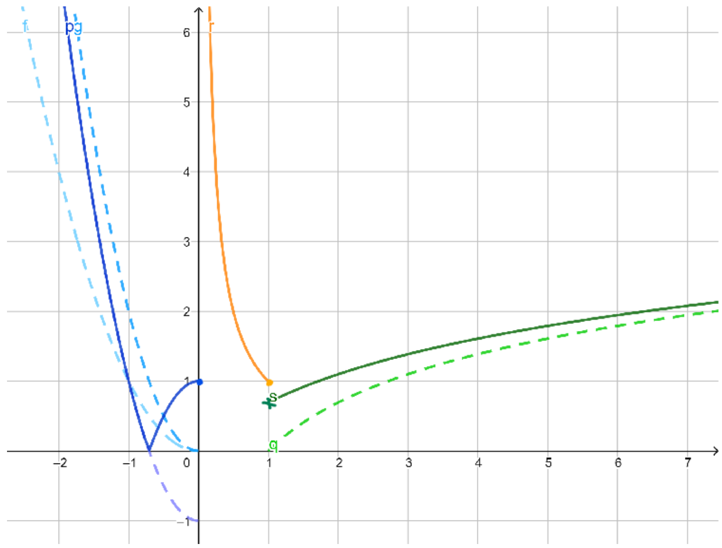

Figura 17. Grafico relativo all'es. 3.4.9

Esercizio 3.4.9. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti, studiandone dominio, immagine, monotonia:

$$f(x) = \begin{cases} |2x^2 - 1| & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \\ \log(x+1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

SOL. ES. 3.4.9. Nella figura seguente è mostrato il grafico di $f(x)$: esso è quello realizzato con la linea continua ed è diviso in tre colori: uno per l'intervallo $(-\infty, 0]$, uno per $(0, 1]$ e l'altro per $(1 + \infty)$.
In ognuna delle tre parti del dominio, attraverso le linee tratteggiate e le tonalità di colore, sono messe in evidenza le trasformazioni elementari dei grafici effettuate per arrivare al grafico di $f(x)$.
In $(-\infty, 0]$ si è determinato il grafico di f mediante tre passaggi. La sequenza è stata:

$$f_1(x) = x^2 \longrightarrow f_2(x) = 2x^2 \longrightarrow f_3(x) = 2x^(2) - 1 \longrightarrow f(x) = |2x^(2) - 1|.$$

In $(0, 1]$: $f(x) = \frac{1}{x}$.

In $(1, +\infty)$: si è determinato il grafico di f mediante tre passaggi. La sequenza è stata:

$$f_1(x) = \log(x) \longrightarrow f(x) = \log(x+1).$$

Dominio: $\mathbb{R}$
Immagine: $[0,+\infty)$
Intervalli massimali di crescenza: $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right]$ e $(1,+\infty)$
Intervalli massimali di decrescenza: $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ e $(0,1]$ (N.B.: $(0,1]$ e non $(0,1)$. Perché?)

□

Esercizio 3.4.10. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti, studiandone dominio, immagine, monotonia:

$$f(x) = \begin{cases} |2-x| & \text{se } x \le 0 \\ \\ 2-|x| & \text{se } 0 < x \le 2 \\ \\ 5-x & \text{se } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

SOL. ES. 3.4.10. Nella figura seguente è mostrato il grafico di $f(x)$: esso è quello realizzato con la linea continua ed è diviso in tre colori: uno per l'intervallo $(-\infty,0]$, uno per $(0,2]$ e l'altro per $(2,4]$.
In ognuna delle tre parti del dominio, attraverso le linee tratteggiate e le tonalità di colore, sono messe in evidenza le trasformazioni elementari dei grafici effettuate per arrivare al grafico di $f(x)$.

In $(-\infty,0)$ si è determinato il grafico di f mediante tre passaggi. La sequenza è stata:

$$f_1(x) = x \longrightarrow f_2(x) = -x \longrightarrow f_3(x) = 2-x \longrightarrow f(x) = |2-x|.$$

In $(0,2)$ si è determinato il grafico di f mediante tre passaggi. La sequenza è stata:

$$f_1(x) = x \longrightarrow f_2(x) = |x| \longrightarrow f_3(x) = -|x| \longrightarrow f(x) = 2-|x|.$$

In $(2,4)$ si è determinato il grafico di f mediante due passaggi. La sequenza è stata:

$$f_1(x) = x \longrightarrow f_2(x) = -x \longrightarrow f(x) = 5-x.$$

Dominio: $(-\infty,4]$
Immagine: $[0,+\infty)$
Intervalli massimali di crescenza: non ve ne sono
Intervalli massimali di decrescenza: $(-\infty,2]$ e $(2,4]$.

□

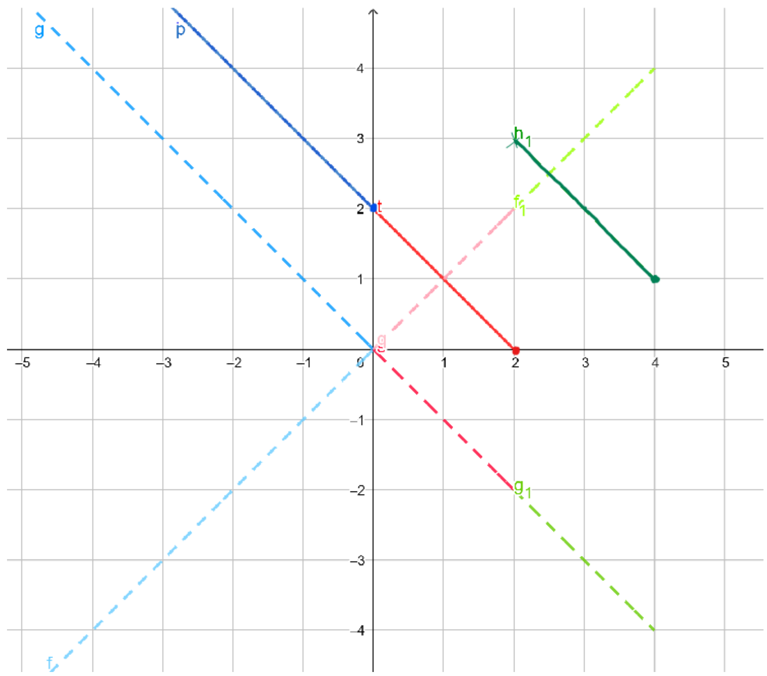

Figura 18. Grafico relativo all'es. 3.4.10

Esercizio 3.4.11. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti, studiandone dominio, immagine, monotonia:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan|x| & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.4.12. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti, studiandone dominio, immagine, monotonia:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{|x|} & \text{se } x \in (-\infty, \pi) \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin(2x) & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$$

Esercizio 3.4.13. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti, studiandone dominio, immagine, monotonia:

$$f(x) = \begin{cases} \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \\ e^{\log_3(2x)} & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Sugg.: $\log_3(2x) = \dfrac{\log(2x)}{\log 3}$.

Esercizio 3.4.14. Utilizzando le trasformazioni elementari dei grafici, disegnare il grafico della funzioni definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} |2 - x| & \text{se } x \leq 0 \\ \\ \big|1 - |x|\big| & \text{se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

SOL. ES. 3.4.14. Svolta dal tutor il 17 ottobre 2022. □

CAPITOLO 4

Estremo superiore e inferiore

Le nozioni di estremo superiore e inferiore di un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ sono qui discusse. Dopo le definizioni e le principali proprietà si dedica un paragrafo a illustrare alcune conseguenze delle operazioni tra insiemi sugli estremi superiori e inferiori e che, opportunamente usate, possono essere di aiuto a risolvere gli esercizi. Alcuni esercizi sono proposti nell'ultima sezione.
Quando si scriverà $A \subseteq \mathbb{R}$ si sottintende che A sia non vuoto.

4.1. Principali definizioni e proprietà

Definizione 4.1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un <u>maggiorante</u> di A se

$$\lambda \geq a \qquad \forall a \in A.$$

Analogamente, si dice che λ è un <u>minorante</u> di A se

$$\lambda \leq a \qquad \forall a \in A.$$

Definizione 4.1.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Denotiamo $\mathcal{M}_A$ e $\mathcal{N}_A$ l'insieme dei maggioranti e dei minoranti di A, rispettivamente.

Proposizione 4.1.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se A ha un maggiorante, allora ne ha infiniti.*
Più precisamente: se $\mathcal{M}_A$ è l'insieme dei maggioranti di A e $\lambda \in \mathcal{M}_A$, allora

$$[\lambda, +\infty[\subseteq \mathcal{M}_A.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla proprietà transitiva della relazione d'ordine $\leq$. □

Definizione 4.1.4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Si dice che A è <u>limitato superiormente</u> se esiste almeno un maggiorante di A.
Analogamente, si dice che A è <u>limitato inferiormente</u> se esiste almeno un minorante di A.

Definizione 4.1.5. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Si dice che A è <u>limitato</u> se A è sia limitato superiormente che limitato inferiormente.

Esercizio 4.1.6. Siano $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ e sia B limitato superiormente.
Dimostrare che A è limitato superiormente e, usando le notazioni della Definizione 4.1.2, che $\mathcal{M}_B \subseteq \mathcal{M}_A$.
Scrivere inoltre un esercizio analogo per il caso di B limitato inferiormente.

Definizione 4.1.7. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Si dice che λ è <u>massimo</u> di A se valgono le seguenti:

(a) λ è un maggiorante di A
(b) $\lambda \in A$.

In tal caso, si scrive
$$\lambda = \max A.$$
Analogamente, si dice che λ è <u>minimo</u> di A se valgono le seguenti:

(a) λ è un minorante di A
(b) $\lambda \in A$.

In tal caso, si scrive
$$\lambda = \min A.$$

Teorema 4.1.8. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$.
Se esiste $\min A$*, esso è unico.*
Analogamente, se esiste $\max A$*, esso è unico.*

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione per il minimo.
Supponiamo che esistano λ_1, λ_2 numeri reali che siano entrambi minimo di A.
Allora, per Definizione 4.1.7,
$$\begin{cases} \lambda_1 \le a & \forall a \in A \\ \lambda_1 \in A & \\ \lambda_2 \le a & \forall a \in A \\ \lambda_2 \in A & \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \le \lambda_2 \\ \lambda_2 \le \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$
□

La definizione di estremo superiore e inferiore, qui sotto, poggia su una proprietà di $\mathbb{R}$, non goduta da $\mathbb{Q}$, dimostrabile con l'Assioma di completezza o di Dedekind.

Teorema 4.1.9. *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$.
Se A è limitato superiormente, allora l'insieme dei maggioranti di A ha minimo.
Se A è inferiormente limitato, allora l'insieme dei maggioranti di A ha massimo.

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione per gli insiemi superiormente limitati.
Sia $\mathcal{M}_A$ l'insieme dei magggioranti di A. Essendo A limitato superiormente, $\mathcal{M}_A \neq \emptyset$. Gli insiemi A e $\mathcal{M}_A$ sono tali che

$$\forall a \in A,\ \forall \lambda \in \mathcal{M}_A \quad a \leq \lambda.$$

Dunque, per l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A,\ \forall \lambda \in \mathcal{M}_A \quad a \leq c \leq \lambda.$$

Dalla seconda disuguaglianza si ha che c è un minorante di $\mathcal{M}_A$ e dalla prima disuguaglianza si ha che c è un maggiorante di A (ossia che $c \in \mathcal{M}_A$).
Per la Definizione 4.1.7 si ha $c = \min \mathcal{M}_A$. □

Il Teorema 4.1.9 giustifica la definizione qui sotto.

Definizione 4.1.10. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Se A è superiormente limitato, si chiama estremo superiore di A il numero reale

$$\sup A := \min\{x \in \mathbb{R} : x \text{ è un maggiorante di } A\}.$$

Se A non è superiormente limitato si pone

$$\sup A = +\infty.$$

Analogamente, se A è inferiormente limitato, si chiama estremo inferiore di A il numero reale

$$\inf A := \max\{x \in \mathbb{R} : x \text{ è un minorante di } A\}.$$

Se A non è inferiormente limitato si pone

$$\inf A = +\infty.$$

Esercizio 4.1.11. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente.
Sia $\mathcal{M}_A$ l'insieme dei maggioranti di A. Dimostrare che $\mathcal{M}_A = [\sup A, +\infty[$.
Scrivere un'analoga affermazione per l'insieme $\mathcal{N}_A$ dei minoranti di A.
Sol:
Essendo $\sup A$ un maggiorante di A si ha dall'Esercizio 4.1.3

$$[\sup A, +\infty[\subseteq \mathcal{M}_A.$$

Dimostriamo che vale l'inclusione inversa. Se ci fosse $\lambda \in \mathcal{M}_A \setminus [\sup A, +\infty[$ allora ci sarebbe un maggiorante di A che è più piccolo di $\sup A$, il che è assurdo, in quanto $\sup A$ è, per definizione, il minimo dei maggioranti.

Esercizio 4.1.12. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Dimostrare che se $\inf A \in A$, allora

$$\exists \min A = \inf A.$$

Analogamente, dimostrare che se $\sup A \in A$, allora

$$\exists \max A = \sup A.$$

Esercizio 4.1.13. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Dimostrare che se esiste $\min A$, allora

$$\min A = \inf A.$$

Analogamente, dimostrare che se esiste $\max A$, allora

$$\max A = \sup A.$$

Sol:
Consideriamo il caso del minimo.
Se esiste $\min A$ allora A è inferiormente limitato. Per definizione di estremo inferiore, $\inf A$ è un minorante di A, quindi,

$$\inf A \leq a \qquad \forall a \in A.$$

In particolare, essendo $\min A \in A$, dovrà essere

$$\inf A \leq \min A.$$

Per definizione di minimo, esso è un minorante, ossia

$$\min A \leq a \qquad \forall a \in A.$$

Essendo $\inf A$ il massimo dei minoranti, allora deve essere

$$\min A \leq \inf A.$$

La tesi è dimostrata.

Teorema 4.1.14 (Caratterizzazione del sup per insiemi superiormente limitati). *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\sup A = \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ *soddisfa*

$$\begin{cases} \lambda \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \mu < \lambda \ \exists a \in A \ : \ \mu < a \end{cases}$$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ *soddisfa*

$$\begin{cases} \lambda \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0\, \exists a \in A\, :\, \lambda - \epsilon < a. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE.
$(i) \Rightarrow (ii)$:
Se denotiamo

$$\mathscr{M}_A := \{x \in \mathbb{R}\, :\, x \text{ è un maggiorante di } A\}$$

si ha che se $\lambda = \sup A$ allora λ è sia un minorante di $\mathscr{M}_A$ che un elemento di $\mathscr{M}_A$) ossia

$$\begin{cases} \lambda \geq a \quad \forall a \in A \quad (\text{cioè } \lambda \in \mathscr{M}_A) \\ \lambda \leq x \quad \forall x \in \mathscr{M}_A \quad \text{cioè } \lambda \text{ è un minorante di } \mathscr{M}_A. \end{cases}$$

Sia $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\mu < \lambda$. Allora $\mu \notin \mathscr{M}_A$, altrimenti si contraddirebbe la minimalità di λ. Dovrà quindi esistere $a \in A$ tale che $\mu < a$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$:
Fissato $\epsilon > 0$ scegliere $\mu = \lambda - \epsilon$. Per (ii)

$$(\exists a \in A\, :\, \mu < a) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists a \in A\, :\, \lambda - \epsilon < a).$$

$(iii) \Rightarrow (i)$:
Per ipotesi:

$$\begin{cases} \lambda \geq a \quad \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0\, \exists a \in A\, :\, \lambda - \epsilon < a. \; (*) \end{cases}$$

Quindi λ è un maggiorante di A. Supponiamo che non sia il minimo dei maggioranti di A. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale che $\lambda - \epsilon$ è un maggiorante di A, ossia

$$a \leq \lambda - \epsilon \qquad \forall a \in A.$$

Ciò contraddice l'ipotesi $(*)$. □

Teorema 4.1.15 (Caratterizzazione del sup per insiemi non superiormente limitati). *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto.*
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\sup A = +\infty$
(ii) $\forall \mu \in \mathbb{R}\ \exists a \in A\, : \mu < a.$

Analogamente alle caratterizzazioni dell'estremo superiore enunciate sopra si possono dare analoghe caratterizzazioni dell'estremo inferiore.

Teorema 4.1.16 (Caratterizzazione dell'inf per insiemi inferiormente limitati). *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\inf A = \lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ *soddisfa*

$$\begin{cases} \lambda \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \mu > \lambda \, \exists a \in A \, : \, \mu > a \end{cases}$$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ *soddisfa*

$$\begin{cases} \lambda \leq a \quad \forall a \in A \\ \forall \epsilon > 0 \, \exists a \in A \, : \, \lambda + \epsilon > a. \end{cases}$$

Teorema 4.1.17 (Caratterizzazione dell'inf per insiemi non inferiormente limitati). *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *non vuoto.*
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\inf A = -\infty$

(ii) $\forall \mu \in \mathbb{R} \;\; \exists a \in A \; : \mu > a.$

4.2. Il calcolo di sup e inf: semplificazioni

E' utile estendere la relazione d'ordine totale in $\mathbb{R}$ all'insieme $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, come descritto sotto.

Definizione 4.2.1. Per convenzione, si pone

$$-\infty < x < +\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 4.2.2. *Con la Definizione 4.2.1 l'insieme* $\overline{\mathbb{R}}$ *è un insieme totalmente ordinato.*

E' utile estendere alcuni risultati di operazioni in $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 4.2.3. Si definiscono le seguenti:

$$-(+\infty) = -\infty$$

$$-(-\infty) = +\infty$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\forall c \in [-\infty, +\infty[\quad c + (-\infty) = -\infty$$

$$\forall c \in]-\infty, +\infty] \quad c + (+\infty) = +\infty$$

$$\forall c \in]0, +\infty] \quad c \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\forall c \in [-\infty, 0[\quad c \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$\forall c \in]0,+\infty] \quad c\cdot(-\infty) = -\infty$$
$$\forall c \in [-\infty, 0[\quad c\cdot(-\infty) = +\infty$$

Osservazione 4.2.4. Si noti che non sono definite (non hanno senso) le operazioni

$$+\infty + (-\infty), \qquad \pm\infty\cdot 0.$$

Definizione 4.2.5. Introduciamo le seguenti notazioni. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ denotiamo

$$-A := \{-a : a \in A\}$$

e, se $r \in \mathbb{R}$,

$$r + A := \{r + a : a \in A\}$$
$$rA := \{ra : a \in A\}.$$

Esercizio 4.2.6. Siano $r \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\inf(r + A) = r + \inf A, \qquad \sup(r + A) = r + \sup A.$$

Dimostrare inoltre che esiste $\min A$ se e solo se esiste $\min(r + A)$. Analogamente, esiste $\max A$ se e solo se esiste $\max(r + A)$.

Esercizio 4.2.7. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che se A è superiormente limitato, allora $-A$ è inferiormente limitato e si ha

$$\mathcal{N}_{-A} = -\mathcal{M}_A.$$

Sol:

$$\lambda \in \mathcal{N}_{-A} \Leftrightarrow (\lambda \le -a \ \ \forall a \in A) \Leftrightarrow (-\lambda \ge a \ \ \forall a \in A) \Leftrightarrow -\lambda \in \mathcal{M}_A \Leftrightarrow \lambda = -(-\lambda) \in -\mathcal{M}_A$$

dove l'ultima implicazione, quella da sinistra a destra, è dovuta al fatto che λ è l'opposto di un elemento di $\mathcal{M}_A$.

Esercizio 4.2.8. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\inf(-A) = -\sup A, \qquad \sup(-A) = -\inf A.$$

Sol:
Dimostriamo qui $\inf(-A) = -\sup A$ nel caso $\inf(-A) \in \mathbb{R}$. Si lasciano tutte le altre verifiche per esercizio.
Sia $\lambda = \inf(-A) \in \mathbb{R}$. Allora, per il Teorema 4.1.14,

(i) per ogni $a \in A$ è $\lambda \le -a$
(ii) per ogni $\epsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $\lambda + \epsilon > -a$.

ossia, equivalentemente,

(i') per ogni $a \in A$ è $-\lambda \geq a$

(ii') per ogni $\epsilon > 0$ esiste $a \in A$ tale che $-\lambda - \epsilon < a$.

Per il Teorema 4.1.14 si ha $-\lambda = \sup A$.

Esercizio 4.2.9. Siano $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\begin{aligned} &\text{se } r > 0 \text{ allora} \quad \inf(rA) = r\inf A, \qquad \sup(rA) = r\sup A \\ &\text{se } r < 0 \text{ allora} \quad \inf(rA) = r\sup A, \qquad \sup(rA) = r\inf A \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Dimostrare inoltre che

$$\forall r > 0 \qquad \begin{array}{l} (\exists \min A \Leftrightarrow \exists \min(rA)) \\ (\exists \max A \Leftrightarrow \exists \max(rA)) \end{array}$$

e

$$\forall r < 0 \qquad \begin{array}{l} (\exists \min A \Leftrightarrow \exists \max(rA)) \\ (\exists \max A \Leftrightarrow \exists \min(rA)). \end{array}$$

Sol: il caso $r > 0$ lo si lascia al lettore.
Studiamo il caso $r < 0$:

$$\inf(rA) = \inf(-|r|A) \overset{\text{Es. 4.2.8}}{=} -\sup(|r|A) \overset{(4.2.1)}{=} -|r|\sup A = r\sup A.$$

Analogamente si ragione per il sup.

Esercizio 4.2.10. Siano $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti. Dimostrare le seguenti:

(i) se A e B hanno minimo, allora $\min A \geq \min B$

(ii) se A e B hanno massimo, allora $\max A \leq \max B$

(iii) $\inf A \geq \inf B$ e $\sup A \leq \sup B$.

SOLUZIONE ES. 4.2.10. (i):
Siano $\bar{a} = \min A$ e $\bar{b} = \min B$.
Si ha in particolare che $\bar{b}$ è un minorante di B, quindi

$$\bar{b} \leq b \qquad \forall b \in B.$$

Essendo $A \subseteq B$ si deduce che $\bar{b}$ è anche minorante di A. Per l'Esercizio 4.1.13 $\bar{a} = \inf A$, vale a dire $\bar{a}$ è il massimo dei minoranti di A. Si ha quindi $\bar{b} \leq \bar{a}$.
(ii):
Si lascia al lettore la soluzione: basta adattare i ragionamenti svolti in (i).
(iii):
Dimostriamo solo la disuguaglianza relativa agli estremi superiori.

Se $\sup B = +\infty$ non c'è niente da dimostrare.
Sia $\sup B \in \mathbb{R}$. Allora l'insieme $\mathcal{M}_B$ dei maggioranti di B è non vuoto. Essendo $A \subseteq B$, per l'Esercizio 4.1.6 si ha

$$\mathcal{M}_B \subseteq \mathcal{M}_A.$$

In particolare, anche l'insieme $\mathcal{M}_A$ dei maggioranti di A è non vuoto, quindi A è superiormente limitato.
Per il Teorema 4.1.9 esistono $\overline{b} = \min \mathcal{M}_B$ e $\overline{a} = \min \mathcal{M}_A$ e, per (i), $\overline{b} \geq \overline{a}$.
Per definizione di estremo superiore si ha la tesi:

$$\sup B = \min \mathcal{M}_B = \overline{b} \geq \overline{a} = \min \mathcal{M}_A = \sup A.$$

□

Esercizio 4.2.11. Siano $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti.
Dimostrare che se $B \setminus A$ è un insieme con un numero finito di elementi allora

$$\sup B = +\infty \Leftrightarrow \sup A = +\infty.$$

e

$$\inf B = -\infty \Leftrightarrow \inf A = -\infty.$$

SOL. ES. 4.2.11. $\Leftarrow$:
Segue immediatamente dall'Esercizio 4.2.10.
$\Rightarrow$:
Consideriamo il caso degli estremi superiori.
Per ipotesi, esistono $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e dei numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_h$ in B tali che

$$B \setminus A = \{a_1, a_2, \ldots, a_h\}.$$

Se esistesse un maggiorante λ di A allora

$$\Lambda := \max\{\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_h\}$$

sarebbe un maggiorante di B, contraddicendo l'ipotesi $\sup B = +\infty$.
Non ci possono quindi essere maggioranti di A, ossia $\sup A = +\infty$.
Si lascia al lettore la dimostrazione dell'analoga implicazione riguardante gli estremi inferiori. □

Esercizio 4.2.12. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti. Dimostrare che

$$\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}, \qquad \sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

(si usano le convenzioni, giustificate dalla Definizione 4.2.1, $\min\{-\infty, c\} = -\infty$ e $\max\{+\infty, c\} = +\infty$ qualunque sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$).

SOL. ES. 4.2.12. Dato che $A, B \subseteq A \cup B$ segue dall'Esercizio 4.2.10 che

$$(\sup A \le \sup A \cup B, \quad \sup B \le \sup A \cup B) \quad \Rightarrow \quad \max\{\sup A, \sup B\} \le \sup A \cup B. \tag{4.2.2}$$

Poniamo $\alpha := \sup A$, $\beta := \sup B$. Supponiamo, senza perdita di generalità, che sia $\alpha \le \beta$. Allora $\max\{\sup A, \sup B\} = \beta$.
Se $\beta = +\infty$ segue da (4.2.2) che

$$\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A \cup B = +\infty.$$

Sia $\beta \in \mathbb{R}$.
Si ha che β è un maggiorante di $A \cup B$ infatti

$$\beta = \max\{\sup A, \sup B\} \left[\begin{array}{ll} \ge \sup B \ge b & \forall b \in B \\ \ge \sup A \ge a & \forall a \in A. \end{array} \right. \Rightarrow \beta \in \mathcal{M}_{A \cup B}.$$

Inoltre, essendo $\beta = \sup B$ si ha, per il Teorema 4.1.14, che per ogni $\mu < \beta$ esiste $b \in B$ tale che $\mu < b$ da cui, essendo $B \subseteq A \cup B$,

$$\forall \mu < \beta \qquad \exists b \in A \cup B \ : \ \mu < b.$$

Abbiamo così dimostrato che β soddisfa le proprietà (ii) in Teorema 4.1.14 sull'insieme $A \cup B$, ossia $\beta = \sup A \cup B$. □

Esercizio 4.2.13. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti tali che

$$a \le b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Dimostrare che

$$\inf A \cup B = \inf A, \qquad \sup A \cup B = \sup B.$$

Inoltre, se esiste $\min A$ allora esiste $\min A \cup B$ e

$$\min A \cup B = \min A$$

Analogamente, se esiste, $\max B$, allora esiste $\max A \cup B$ e

$$\max A \cup B = \max B.$$

Sugg: Applicazione dell'Esercizio 4.2.12 e dell'Esercizio 4.1.13.

Esercizio 4.2.14. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ con intersezione non vuota. Dire se le seguenti uguaglianze

$$\inf A \cap B = \min\{\inf A, \inf B\}, \qquad \sup A \cap B = \max\{\sup A, \sup B\}$$

sono vere o false.

Esercizio 4.2.15. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^+$ non vuoto e

$$\frac{1}{A} := \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\}.$$

Usando quando necessario anche le convenzioni $\frac{1}{+\infty} = 0$ e $\frac{1}{0} = +\infty$ dimostrare che

$$\inf\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\sup A}, \qquad \sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}.$$

Inoltre, se esiste $\min A > 0$ allora esiste $\max\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\min A}$.

Sol. Es. 4.2.15. Dimostriamo la prima uguaglianza nel caso $\sup A \in \mathbb{R}$. Essendo $A \subseteq \mathbb{R}^+$ risulta $\lambda := \sup A > 0$.

Per il Teorema 4.1.14

$$\lambda \geq a \quad \forall a \in A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{a} \quad \forall a \in A \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \leq b \quad \forall b \in \frac{1}{A}$$

e

$$\forall \mu < \lambda \; \exists a \in A \,:\, \mu < a.$$

Quest'ultima proprietà implica, in particolare, che

$$\forall \mu \in]0, \lambda[\; \exists a \in A \,:\, \frac{1}{a} < \frac{1}{\mu}.$$

Col cambio di variabile: $\nu = \frac{1}{\mu}$ e tenuto conto della definizione di B l'ultima affermazione è equivalente a:

$$\forall \nu > \frac{1}{\lambda} \; \exists b \in \frac{1}{A} \,:\, b < \nu.$$

Per il Teorema 4.1.16 si ha che $\frac{1}{\lambda} = \inf\left(\frac{1}{A}\right)$.

Si lasciano al lettore le altre dimostrazioni. □

4.3. Esercizi su sup, inf, max, min

Esercizio 4.3.1. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Sol. Es. 4.3.1. Poniamo

$$A_1 := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ n dispari} \right\} = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ n dispari} \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots \right\}$$

$$A_2 := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ n pari} \right\} = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \text{ n pari} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right\}.$$

Si hanno

$$A = A_1 \cup A_2, \qquad a < 0 < b \ \ \forall a \in A_1, \forall b \in A_2.$$

Per l'Esercizio 4.2.13 si ha:

$$\inf A = \inf A_1, \qquad \sup A = \sup A_2.$$

Per ogni $k, h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha:

$$k > h \Rightarrow \frac{1}{2k} < \frac{1}{2h},$$

quindi

$$\frac{1}{2} \geq b \qquad \forall b \in A_2.$$

Dunque $\frac{1}{2} \in \mathscr{M}_{A_2}$. D'altra parte $\frac{1}{2} \in A_2$. Quindi $\frac{1}{2} = \max A_2$. Segue dall'Esercizio 4.1.13 che $\frac{1}{2} = \sup A_2$.
Consideriamo ora A_1.
I numeri dispari di $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ sono tutti e soli i numeri naturali della forma $2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$.
Si ha

$$-1 \leq \frac{-1}{2k+1} \ \Leftrightarrow \ 1 \geq \frac{1}{2k+1} \ \Leftrightarrow \ 2k+1 \geq 1 \ \Leftrightarrow \ 2k \geq 0$$

e quest'ultima affermazione è vera. Quindi $-1 \in \mathscr{N}_{A_1}$ e $-1 \in A_1$ in quanto $-1 = \frac{-1}{1}$. Ne deduciamo che $-1 = \min A_1$. Segue dall'Esercizio 4.1.13 che $-1 = \inf A_1$.
Conclusione:

$$-1 = \inf A = \min A, \qquad \frac{1}{2} = \max A = \sup A.$$

□

Esercizio 4.3.2. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Sol. Es. 4.3.2. Si ha

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha:

$$1 \geq \frac{1}{k}.$$

Allora $1 \in \mathscr{M}_A$ e $1 \in A$ poiché $1 = \frac{1}{1}$. Di conseguenza $1 = \max A = \sup A$.
Invece, per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha:

$$0 < \frac{1}{k}.$$

Allora $0 \in \mathcal{N}_A$, ma $0 \notin A$ poiché $\nexists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $\frac{1}{n} = 0$. Inoltre, 0 è il massimo dei minoranti di A. Infatti se esistesse $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, minorante di A si avrebbe:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \frac{1}{n} \geq \lambda$$

ossia

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad n \leq \frac{1}{\lambda}$$

il che è assurdo, in quanto $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ non è superiormente limitato.
Di conseguenza $0 = \inf A$ e non esiste il minimo di A.

In conclusione: $\inf A = 0$, $\nexists \min A$, $\sup A = \max A = 1$. □

Esercizio 4.3.3. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{n+1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Sol. Es. 4.3.3. Sia

$$B := \left\{ \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Allora

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = 1 + B.$$

Dunque, per l'Esercizio 4.2.6,

$$\inf A = 1 + \inf B, \qquad \sup A = 1 + \sup B$$

e analogamente per i minimi e i massimi, qualora esistano.
La conclusione la si ottiene avendo risolto l'Esercizio 4.3.2. □

Esercizio 4.3.4. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Esercizio 4.3.5. Si consideri

$$A = \left\{ (-1)^n \, : \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Esercizio 4.3.6. Si consideri

$$A = \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

SOL. ES. 4.3.6. Si ha

$$A = \left\{(-1)^n \frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}.$$

Poniamo

$$A_1 := \left\{-\frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \text{ dispari}\right\} = \left\{0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, \dots\right\}$$

$$A_2 := \left\{\frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \text{ pari}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6} \dots\right\}.$$

Si ha

$$A = A_1 \cup A_2.$$

Per l'Esercizio 4.2.13 si ha:

$$\inf A = \inf A_1, \qquad \sup A = \sup A_2.$$

Risulta

$$A_1 = \left\{-1 + \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \text{ dispari}\right\}$$

allora

$$\inf A = \inf A_1 = -1 + \inf B$$

dove

$$B := \left\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \text{ dispari}\right\}.$$

Ovviamente 0 è un minorante di B. E' anche il massimo dei minoranti, in quanto, se ci fosse un minorante $\lambda > 0$ avremmo

$$\lambda \leq \frac{1}{2k+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

dove abbiamo usato che, se n è dispari, allora $n = 2k + 1$ con $k \in \mathbb{N}$. Dalla disuguaglianza sopra segue che

$$2k + 1 \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

da cui

$$k \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

il che è assurdo, perché $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato.

Pertanto: $\inf B = 0$ e non esiste $\min B$. Allora:

$$\inf A = -1 + \inf B = -1, \qquad \nexists \min A.$$

Consideriamo ora A_2. Risulta

$$A_2 = \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \text{ pari} \right\}.$$

Ovviamente 1 è un maggiorante di A_2. E' anche il minimo dei maggioranti. Infatti, se esistesse $\epsilon > 0$ tale che $1 - \epsilon$ è maggiorante di A_2 sarebbe

$$1 - \epsilon \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ n \text{ pari}$$

ossia

$$n \leq \frac{1}{\epsilon} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \forall n \ \text{ pari}$$

ossia

$$2k \leq \frac{1}{\epsilon} : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

da cui

$$k \leq \frac{1}{2\epsilon} : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

e ciò contraddice che $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ non è superiormente limitato.

Pertanto: $\sup A = \sup A_2 = 1$, non esiste $\max A$. □

Esercizio 4.3.7. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{n^4}{n^4 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.
[R. $\min A = 0$, $\sup A = \frac{\pi}{2}$, $\nexists \max A$]

Esercizio 4.3.8. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{2n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.
[R.: $\min A = -1$, $\max A = 1$]

Esercizio 4.3.9. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{xy}{x + y} : x, y \in]0, 1[\right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

SOL. ES. 4.3.9. Notando che

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 0$$

si ha

$$A = \left\{ \frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} : x, y \in]0,1[\right\} = \left\{ \frac{1}{s+t} : s, t \in \mathbb{R},\ s>1,\ t>1 \right\}.$$

Studiamo l'insieme

$$\frac{1}{A} := \{s+t : s, t \in \mathbb{R},\ s>1,\ t>1\}.$$

E' facile dimostrare che tale insieme coincide con $]2,+\infty[$.
Infatti ogni elemento di $\frac{1}{A}$ è maggiore di 2 e quindi $\frac{1}{A} \subseteq]2,+\infty[$. Per dimostrare l'inclusione inversa osserviamo che ogni numero reale $r>2$ è tale che

$$r = \frac{r}{2}+\frac{r}{2}.$$

Essendo $\frac{r}{2}>1$ deduciamo che $]2,+\infty[\subseteq \frac{1}{A}$.
Pertanto: $\frac{1}{A} =]2,+\infty[$.
Si ha che

$$\sup\frac{1}{A} = +\infty, \qquad \inf\frac{1}{A} = 2.$$

Non esiste il minimo di $\frac{1}{A}$. Allora, per l'Esercizio 4.2.15 deduciamo

$$\inf A = 0, \qquad \sup A = \frac{1}{2}.$$

Si noti che non esiste il minimo di A in quanto $0 \notin A$ e che non esiste il massimo di A: se esistesse sarebbe $\max A = \frac{1}{2}$ e quindi, per l'Esercizio 4.2.15, avremmo $\min\frac{1}{A} = 2$ che sappiamo essere falso.

□

Esercizio 4.3.10. Si consideri

$$A = \left\{x^2 < 2 : x \in \mathbb{Q}\right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Esercizio 4.3.11. Si consideri

$$A = \{|\pi - n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

SOL. ES. 4.3.11. Si ha

$$|\pi - n| = \begin{cases} \pi - n & \text{se } n \in \{0,1,2,3\} \\ n - \pi & \text{se } n \in \mathbb{N},\ n \geq 4 \end{cases}$$

Dunque si ha

$$A = \{\pi, \pi-1, \pi-2, \pi-3\} \cup \{n - \pi : n \in \mathbb{N},\ n \geq 4\} =: A_1 \cup A_2.$$

L'insieme A_2 non è superiormente limitato. Infatti, se esistesse $\lambda \in \mathbb{R}$ maggiorante di A_2 sarebbe

$$(n - \pi \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4) \Leftrightarrow (n \leq \lambda + \pi \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4)$$

che è assurdo in quanto, per l'Esercizio 4.2.11

$$\sup\{n \in \mathbb{N},\ n \geq 4\} = \sup \mathbb{N} = +\infty.$$

Pertanto, essendo $A \setminus A_2$ un insieme finito (=con un numero finito di elementi) allora, per l'Esercizio 4.2.11, $\sup A = +\infty$.
Studiamo ora l'estremo inferiore.
Si ha

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4 \Rightarrow n - \pi \geq 4 - \pi > \frac{1}{2}.$$

Dunque $\frac{1}{2}$ è un minorante di A_2.
D'altra parte, esiste il minimo di A_1 e

$$\min A_1 = \min\{\pi, \pi-1, \pi-2, \pi-3\} = \pi - 3 < \frac{1}{2}.$$

Allora, $\pi - 3$ è un elemento di A che è anche minorante di A, essendo

$$\pi - 3 \leq \left[\begin{array}{ll} a & \forall a \in A_1 \\ < \frac{1}{2} < n - \pi & \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4. \end{array} \right]$$

Abbiamo così dimostrato che esiste $\min A = \pi - 3$. In particolare, esso è anche l'estremo inferiore di A per l'Esercizio 4.1.13. □

Esercizio 4.3.12. Si consideri

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x(x^2 - 8x + 7)}{\sqrt{x^2 - 2x - 2}} \geq 0 \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Esercizio 4.3.13. Si consideri

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sin x < 0, x^2 - 13x + 22 \leq 0 \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Esercizio 4.3.14. Si consideri

$$A = \left\{ \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| : x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x \neq y \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

SOL. ES. 4.3.14. Dato che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$,

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > 0$$

allora

$$A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} : x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x \neq y \right\}.$$

Studiamo l'estremo inferiore di A.
0 è un minorante di A. Esso è anche il massimo dei minoranti, in quanto se ci fosse $\lambda > 0$ minorante di A sarebbe anche λ minorante del suo sottoinsieme

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{(n+1)^2}} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Si avrebbe, quindi

$$0 < \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{2n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

da cui

$$2n + 1 \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Essendo $n \leq 2n + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ avremmo

$$n \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Da ciò seguirebbe che $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ è superiormente limitato, che sappiamo essere falso.
Conclusione: $\inf A = 0$. Dato che $0 \notin A$ allora non esiste $\min A$.
Studiamo l'estremo superiore di A.
Essendo

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > 1 + 1 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x \neq y$$

si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < \frac{1}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ x \geq 1,\ y \geq 1,\ x \neq y. \tag{4.3.1}$$

Abbiamo così dimostrato che $\frac{1}{2}$ è un maggiorante di A. Esso è anche il minimo dei maggioranti, in quanto se ci fosse $\lambda < \frac{1}{2}$ maggiorante di A sarebbe anche λ maggiorante del suo sottoinsieme

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{(1+\epsilon)^2}} : \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0 \right\}.$$

Si avrebbe, quindi

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{(1+\epsilon)^2}} \le \lambda < \frac{1}{2} \qquad \forall \epsilon > 0$$

da cui

$$\frac{1}{2+\epsilon} \le \lambda < \frac{1}{2} \qquad \forall \epsilon > 0$$

e quindi

$$\begin{cases} 2 < \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} \le 2 + \epsilon \ \forall \epsilon > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} \le 2 \end{cases}$$

che non ha soluzione. Non potendo esserci maggioranti più piccoli del maggiorante $\frac{1}{2}$ risulta $\sup A = \frac{1}{2}$.
Notiamo che per (4.3.1) si ha $\frac{1}{2} \notin A$.
Conclusione: $\sup A = \frac{1}{2}$ e non esiste $\max A$. □

Esercizio 4.3.15. Si consideri

$$A = \left\{ \frac{xy}{x^2 + y^2} : x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x < y \right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

SOL. ES. 4.3.15. Dato che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si hanno

$$0 \le (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \ \Rightarrow -2xy \le x^2 + y^2$$

e

$$0 \le (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \ \Rightarrow 2xy \le x^2 + y^2$$

allora

$$-\frac{1}{2} \le \frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Dunque $\frac{1}{2}$ è un maggiorante di A e $-\frac{1}{2}$ è un minorante di A.
Dimostriamo che non ci sono maggioranti di A più piccoli di $\frac{1}{2}$. L'insieme

$$B = \left\{ \frac{1 \cdot (1+\epsilon)}{1^2 + (1+\epsilon)^2} : \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1+\epsilon}{2 + 2\epsilon + \epsilon^2} : \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2 + \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}} : \epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0 \right\}$$

è un sottoinsieme di A, quindi un maggiorante di A deve essere anche un maggiorante di B.
Sia λ un maggiorante di B. In particolare $\lambda > 0$ e

$$\left(\frac{1}{2+\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon}} \leq \lambda \qquad \forall \epsilon > 0\right) \Leftrightarrow \left(2+\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon} \geq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \epsilon > 0\right)$$

Essendo

$$\frac{\epsilon^2}{1+\epsilon} < \epsilon^2 \qquad \forall \epsilon > 0$$

segue che deve essere

$$2+\epsilon^2 > \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \epsilon > 0$$

e quindi

$$\epsilon^2 > \frac{1}{\lambda} - 2 \qquad \forall \epsilon > 0,$$

da cui, dovendo essere $\lambda > 0$

$$\frac{1}{\lambda} - 2 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \geq \frac{1}{2}.$$

Ciò dimostra che $\sup A = \frac{1}{2}$.
Notiamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ è

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$$

quindi non esiste il massimo di A.
Si lascia al lettore dimostrare che $\inf A = -\frac{1}{2}$ e che non esiste il minimo di A. □

Esercizio 4.3.16. Si consideri

$$A = \left\{n^2 - 3n + 2 \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.

Esercizio 4.3.17. Si consideri

$$A = \left\{\frac{n^\lambda + k^{1/\lambda}}{n+k} \,:\, (n,k) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}\right\} \qquad (\lambda > 0)$$

con la convenzione $0^\gamma := 0$ se $\gamma \in \mathbb{R}^+$.
Studiare e calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e, qualora esistano, $\min A$ e $\max A$.
[Sugg: E' utile la conoscenza del limite di una potenza.]

SOL. ES. 4.3.17. I caso:
Sia $\lambda > 1$.

$$B := \left\{ \frac{n^\lambda}{n} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ n^{\lambda-1} \,:\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Si ha $B \subseteq A$, infatti

$$\frac{n^\lambda}{n} = \frac{n^\lambda + 0^{\frac{1}{\lambda}}}{n+0}.$$

Per l'Esercizio 4.2.10 si ha $\sup B \le \sup A$.
Dimostriamo che $\sup B = +\infty$. Se non fosse così esisterebbe $M > 0$ tale che

$$n^{\lambda-1} \le M \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

, da cui

$$n \le M^{\frac{1}{\lambda-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

che è assurdo perché $\sup(\mathbb{N} \setminus \{0\}) = \sup \mathbb{N} = +\infty$.
Dunque

$$+\infty = \sup B \le \sup A,$$

da cui $\sup A = +\infty$.
Studiamo ora l'$\inf A$, sempre con la condizione $\lambda > 1$. 0 è un minorante di A, quindi $0 \le \inf A$.
Consideriamo

$$C := \left\{ \frac{k^{1/\lambda}}{k} \,:\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\lambda}}} \,:\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Si ha $C \subseteq A$, infatti

$$\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\lambda}}} = \frac{k^{1/\lambda}}{k} = \frac{0^\lambda + k^{1/\lambda}}{0+k}.$$

Allora

$$\inf C \ge \inf A.$$

Posto

$$D = \left\{ k^{1-\frac{1}{\lambda}} \,:\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

si ha $\inf C = \frac{1}{\sup D}$ per l'Esercizio 4.2.15. Dimostriamo che $\sup D = +\infty$ ragionando come per B.
Se non fosse così esisterebbe $M > 0$ tale che

$$k^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} = k^{1-\frac{1}{\lambda}} \le M \qquad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

da cui

$$k \le M^{\frac{\lambda}{\lambda-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

che è assurdo perché $\sup(\mathbb{N} \setminus \{0\}) = \sup \mathbb{N} = +\infty$.

Si è così dimostrato che $\sup D = +\infty$. Allora

$$0 \le \inf A \le \inf C = \frac{1}{\sup D} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dunque $\inf A = 0$.

Caso $0 < \lambda < 1$:
basta osservare che $\frac{1}{\lambda} > 1$ e usare le informazioni ottenute nel punto precedente, invertendo i ruoli di n e k.

Caso $\lambda = 1$:
Risulta $A = \{1\}$ da cui $\min A = \max A = 1$ e quindi anche $\inf A$ e $\sup A$ sono uguali a 1. $\square$

CAPITOLO 5

Induzione

Si vedano le dispense del prof. Dore per la definizione di insieme induttivo e del principio di induzione.

5.1. Richiami

Ricordiamo qui alcuni risultati.

Definizione 5.1.1. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice induttivo se valgono le seguenti:

(i) $0 \in A$
(ii) $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$.

Definizione 5.1.2. L'insieme dei numeri naturali è l'insieme

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ appartiene a ogni insieme induttivo}\}.$$

Esempio 5.1.3. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ è induttivo

Esempio 5.1.4. $\{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ è induttivo

Definizione 5.1.5.

$$\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} : x \in I \ \forall I \subseteq \mathbb{R},\ I \text{ induttivo}\}$$

Proposizione 5.1.6. *$\mathbb{N}$ è induttivo.*

Proposizione 5.1.7. *Se $M \subseteq \mathbb{N}$ allora (M induttivo $\Rightarrow$ $M = \mathbb{N}$).*

Proposizione 5.1.8. $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 0\}$

Proposizione 5.1.9. $\{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1,\ n-1 \in \mathbb{N}\}$ *è induttivo.*

Conseguenze
1. Se $n \in \mathbb{N}$ allora $(n \geq 1 \ \Rightarrow \ n-1 \in \mathbb{N})$]
2. $\mathbb{N} = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1,\ n-1 \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathbb{N} = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$

Teorema 5.1.10. *[Principio d'induzione, I vers.] Sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che valgano*

(1) *$\mathscr{P}(0)$ è vera*
(2) *$\forall n \in \mathbb{N}$ ($\mathscr{P}(n)$ è vera $\Rightarrow$ $\mathscr{P}(n+1)$ è vera).*

Allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.1.11. *Sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Sia $n_0 \in \mathbb{N}$. Supponiamo che valgano*

(1) *$\mathscr{P}(n_0)$ è vera*
(2) *$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ($\mathscr{P}(n)$ è vera $\Rightarrow$ $\mathscr{P}(n+1)$ è vera).*

Allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definire $\mathscr{Q}(n) = \mathscr{P}(n + n_0)$ e applicare il Teorema 5.1.10. □

Teorema 5.1.12 (Principio d'induzione, II versione). *Sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione dipendente da $n \in \mathbb{N}$.*
Supponiamo che valgano

(1) *$\mathscr{P}(0)$ è vera*
(2) *$\forall n \in \mathbb{N}$ ($\mathscr{P}(k)$ è vera $\forall k \leq n \Rightarrow$ $\mathscr{P}(n+1)$ è vera).*

Allora $\mathscr{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5.2. Applicazioni

Proposizione 5.2.1. *Sia $f : A \to A$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $a \in A$. Allora la formula*

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f(g(n)) \quad \textit{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to A$.

DIMOSTRAZIONE. Si deve solo verificare che il dominio di g è $\mathbb{N}$.
Procediamo per induzione. Sia

$$S := \{n \in \mathbb{N} : g(n) \in A\}.$$

Di certo, $0 \in S$. Sia $n \in S$, allora possiamo calcolare $g(n) \in A$, da cui segue che esiste $f(g(n)) \in A$. Essendo $g(n+1) = f(g(n))$ si ha $n+1 \in S$. Abbiamo così dimostrato che S è induttivo. Ne deduciamo che $S = \mathbb{N}$. □

Esempio 5.2.2. Sia $x \in \mathbb{R}$ e si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(t) = tx$. Allora la formula

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(n+1) = f(g(n)) \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Essa è la funzione $g(n) = x^n$.
Si noti che se $x \in \mathbb{R}^+$ e si considera $f|_{\mathbb{R}^+} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, allora l'immagine è contenuta in $\mathbb{R}^+$. Allora $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, ossia per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $x^n > 0$ se $x > 0$.

Più esplicitamente:

Definizione 5.2.3. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la successione $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$, è definita in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n x \\ x^0 = 1. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Proposizione 5.2.4. *Sia $f : \mathbb{N} \times A \to A$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $a \in A$. Allora la formula*

$$\begin{cases} g(0) = a \\ g(n+1) = f(n, g(n)) \quad \textit{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

definisce una funzione $g : \mathbb{N} \to A$.

DIMOSTRAZIONE. Si deve solo verificare che il dominio di g è $\mathbb{N}$.
Procediamo per induzione. Sia

$$S := \{n \in \mathbb{N} : g(n) \in A\}.$$

Di certo, $0 \in S$. Sia $n \in S$, allora possiamo calcolare $g(n) \in A$ e quindi $f(n, g(n))$, che appartiene ad A. Essendo $g(n+1) = f(n, g(n))$ si ha $n+1 \in S$. Abbiamo così dimostrato che S è induttivo. Ne deduciamo che $S = \mathbb{N}$. □

5.2.1. Formula di Gauss.

Esercizio 5.2.5. [Formula di Gauss] Dimostrare che:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5.2.2. Disuguaglianze di Bernoulli.

Esercizio 5.2.6. [Dis. di Bernoulli - I v.] Dimostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > -1, \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

[Oss: Se si pone $0^0 = 1$, allora la disuguaglianza sopra vale anche per $x = -1$.]

SOL. ES. 5.2.6. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{P}_n$ la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > -1 \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

$\mathscr{P}_0$ è vera:

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1.$$

Sia vera per la proposizione per n e dimostriamo che è vera per $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{1+x\geq 0+\text{Hp. indutt.}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \overset{nx^2\geq 0}{\geq} 1 + (n+1)x.$$

□

Esercizio 5.2.7. [Dis. di Bernoulli - II v.] Dimostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

SOL. ES. 5.2.7. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia $\mathscr{P}_n$ la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

$\mathscr{P}_1$ è vera:

$$(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + x.$$

Sia vera la proposizione per n e dimostriamo che è vera per $n+1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \overset{1+x\geq 0+\text{Hp. indutt.}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 \overset{nx^2\geq 0}{\geq} 1 + (n+1)x.$$

□

Esercizio 5.2.8. [Dis. di Bernoulli - III v.] Dimostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,\ (1+x)^n > 1 + nx.$$

Esercizio 5.2.9. [Dis. di Bernoulli - II ordine] Dimostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

SOL. ES. 5.2.9. Svolta dal tutor il 17 ottobre 2022. □

Per applicazioni: vedi Esercizi 6.3.36, 6.3.39, Lemma 6.3.41.

5.2.3. Esponenziali, fattoriali, potenze.

Esercizio 5.2.10. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è $0^n = 0$.

SOL. ES. 5.2.10. Ragioniamo per induzione. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sia $P(n)$ la proposizione

$$0^n = 0.$$

Se $n = 1$ è ovvia.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera:

$$0^{n+1} = 0(0^n) \overset{P(n) \text{ vera}}{=} 0 \cdot 0 = 0.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizio 5.2.11. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $1^n = 1$.

SOL. ES. 5.2.11. Ragioniamo per induzione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $P(n)$ la proposizione

$$1^n = 1.$$

Se $n = 0$ è ovvia.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera:

$$1^{n+1} = 1(1^n) \overset{P(n) \text{ vera}}{=} 1 \cdot 1 = 1.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Il seguente esercizio è importante per la sua applicazione alle serie geometriche (v. Analisi matematica 1b).

Esercizio 5.2.12. Dimostrare che

$$\forall q \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1}.$$

Qui si intende $0^0 := 1$. Se si vuole evitare ciò bisogna limitarsi a considerare $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ oppure $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

SOL. ES. 5.2.12. Sia $P(n)$ l'affermazione:

$$(1-q)\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 - q^{n+1} \qquad \forall q \in \mathbb{R}.$$

$P(0)$ è vera, infatti:

$$(1-q)1 = 1 - q \qquad \forall q \in \mathbb{R}.$$

Sia vera la proposizione per n e dimostriamo che è vera per $n+1$.

$$(1-q)\sum_{i=0}^{n+1} q^i = (1-q)\left(\sum_{i=0}^{n} q^i\right) + (1-q)q^{n+1} \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} 1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2} = 1-q^{n+2}.$$

□

Esempio 5.2.13. Il numero fattoriale $n!$ è definito in modo ricorsivo nel seguente modo:

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(n+1) = (n+1)n! \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Che tale formula definisca una successione $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori in $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ segue da dalla Proposizione 5.2.4, considerando $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f(n,m) = (n+1)m$.

Usando le regole delle potenze con esponente naturale, che verranno richiamate nel capitolo successivo, è facile risolvere i segueni esercizi.

Esercizio 5.2.14. Dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$n! \geq n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall n \geq 4$$

Esercizio 5.2.15. Dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$2^n \geq n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esercizio 5.2.16. Dimostrare per induzione che

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Sol. es. 5.2.16. Dimostriamo la prima disuguaglianza.
Chiamiamo (P_n) la proposizione

$$2^{n-1} \leq n!$$

Se $n = 1$ è vera: $1 \leq 1$.
Sia $n \geq 1$: se $P(n)$ è vera, dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$2^{n+1-1} = 2^n = 2^{n-1}2 \leq 2\cdot n! \overset{n\geq 1 \Rightarrow n+1\geq 2}{\leq} (n+1)n! = (n+1)!.$$

Dimostriamo la seconda disuguaglianza.
Chiamiamo (P_n) la proposizione

$$n! \leq n^{n-1}.$$

Se $n = 1$ la disuguaglianza è vera.
Sia vera (P_n), con $n \geq 1$, e dimostriamo che (P_{n+1}) è vera.

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{\text{Hp. induttiva}}{\leq} (n+1)n^{n-1}.$$

Dalla Proposizione 6.3.10

$$n^{n-1} < (n+1)^{n-1},$$

quindi si ha

$$(n+1)! \leq (n+1)n^{n-1} < (n+1)^{n-1} \overset{n+1>1}{<} (n+1)^{n-1}(n+1) = (n+1)^{n+1-1}.$$

Dunque (P_{n+1}) è vera. □

Esercizio 5.2.17. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è

$$P(n): \qquad n^n \geq n!$$

SOL. ES. 5.2.17. $n = 1$: ovvio.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$(n+1)^{n+1} = (n+1)(n+1)^n \overset{\text{Prop. 6.3.10}}{=} (n+1)n^n \overset{\text{Hp. induttiva}}{\geq} (n+1)n! = (n+1)!.$$

□

5.3. Esercizi sul principio d'induzione

Esercizio 5.3.1. Legata alla storia della nascita del gioco degli scacchi vi è la leggenda che l'inventore del gioco chiese come ricompensa un chicco di grano per la prima casella della scacchiera, due chicchi per la seconda, quattro chicchi per la terza, e via a raddoppiare fino all'ultima casella. Le caselle della scacchiera sono 64. Quanti chicchi di riso servono per pagare l'inventore degli scacchi?

SOL. ES. 5.3.1. Per l'Esercizio 5.2.12 i chicchi sono:

$$\sum_{i=0}^{63} 2^i = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$

□

Esercizio 5.3.2. Sia (a_n) una successione positiva e sia $q \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$a_{n+1} < q a_n \quad \forall n.$$

Allora

$$a_n < q^n a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

SOL. ES. 5.3.2. Ragioniamo per induzione. Sia $P(n)$ la proposizione

$$a_n < q^n a_0.$$

Per $n = 1$ l'affermazione è vera.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$a_{n+2} < q a_{n+1} \overset{\text{Hp. induttiva}}{<} q q^n a_0 = q^{n+1} a_0.$$

□

Esercizio 5.3.3. Sa (a_n) una successione.
Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

SOL. ES. 5.3.3. Sia

$$\alpha_i := a_i - a_{i-1}.$$

Ragioniamo per induzione. Sia $P(n)$ la proposizione

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0.$$

Per $n = 1$ l'affermazione è vera.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$\sum_{i=1}^{n+1} (a_i - a_{i-1}) = a_{n+1} - a_n + \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} a_{n+1} - a_n + (a_n - a_0) = a_{n+1} - a_0.$$

□

Esercizio 5.3.4. Sa (a_n) una successione a termini non nulli.
Dimostrare che

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_n}{a_0} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

SOL. ES. 5.3.4. Sia

$$\alpha_i := \frac{a_i}{a_{i-1}}.$$

Ragioniamo per induzione. Sia $P(n)$ la proposizione

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{a_n}{a_0}.$$

Per $n = 1$ l'affermazione è vera.

Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$\prod_{i=1}^{n+1} \alpha_i = \alpha_{n+1} \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \stackrel{\text{Hp. induttiva}}{=} \alpha_{n+1} \frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n+1}}{a_0}.$$

□

Esercizio 5.3.5. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è

$$P(n): \qquad n! \geq n.$$

Sol. es. 5.3.5. $n = 1$: ovvio.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$(n+1)! = (n+1)n! \stackrel{\text{Hp. induttiva}}{\geq} (n+1)n \stackrel{n \geq 1}{\geq} n+1.$$

□

Esercizio 5.3.6. Dimostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} n! = +\infty.$$

Sol. es. 5.3.6. Dall'Esercizio 5.3.5 si ha

$$n! \geq n$$

e la tesi segue dal Teorema del confronto. □

Esercizio 5.3.7. Dimostrare che

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log(i) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sol. es. 5.3.7. Ragioniamo per induzione su $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Sia $P(n)$ la proposizione

$$\log(n!) = \sum_{i=1}^{n} \log(i).$$

Per $n = 1$ l'affermazione è vera.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera.

$$\log((n+1)!) = \log((n+1)n!) = \log(n+1) + \log(n!) \stackrel{\text{Hp. induttiva}}{=} \log(n+1) + \sum_{i=1}^{n} \log(i) = \sum_{i=1}^{n+1} \log(i).$$

□

Esercizio 5.3.8. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{(n+2)}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Esercizio 5.3.9. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} k \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Esercizio 5.3.10. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Esercizio 5.3.11. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Esercizio 5.3.12. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Esercizio 5.3.13. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Esercizio 5.3.14. Dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$2^n + 4^n < 5^n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

SOL. ES. 5.3.14. Svolta dal tutor il 17 ottobre 2022. □

Esercizio 5.3.15. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 5.3.16. Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 5.3.17. Dimostrare, usando il principio d'induzione, che:

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sugg. Può essere utile usare la disuguaglianza di Bernoulli, vedi Es. 5.2.6.

SOL. ES. 5.3.17. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia $\mathscr{P}_n$ la proposizione

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La proposizione $\mathscr{P}_1$ è vera, essendo

$$\frac{1!}{1^1} = 1, \quad \frac{1}{2^{1-1}} = 1.$$

Supponiamo vera $\mathscr{P}_n$ e dimostriamo che è vera $\mathscr{P}_{n+1}$, ossia

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} &= \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n}\frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &\overset{\mathscr{P}_n \text{ vera}}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}}\frac{n^n}{(n+1)^n}.\end{aligned}$$

Se dimostriamo che

$$\frac{1}{2^{n-1}}\frac{n^n}{(n+1)^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

ossia che

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} \geq 2,$$

cioè

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$$

abbiamo concluso.
Per la disuguaglianza di Bernoulli, v. Es. 5.2.6, si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{1}{n} = 2$$

che è quanto si voleva dimostrare. Essendo soddisfatte le ipotesi del Principio d'induzione, le proposizioni $\mathscr{P}_n$ sono vere per ogni n. □

Esercizio 5.3.18 (Da prova scritta CdL Matematica 14-1-2019). Dimostrare per induzione:

$$(9 + 3x^2)^n \geq (x^2 + 9)\frac{n+1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

SOL. ES. 5.3.18. Svolto anche dal tutor il 17 ottobre 2022.
La proposizione da dimostrare è

$$P_n : \text{“}(9 + 3x^2)^n \geq (x^2 + 9)\frac{n+1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\text{"}$$

Passo base: Ci chiediamo se P_n è vera per $n = 1$, cioè se la disequazione

$$(9+3x^2)^1 \geq (x^2+9)\frac{1+1}{2}$$

è vera per ogni $x \in \mathbb{R}$. Svolgendo i calcoli, si ottiene

$$9+3x^2 \geq x^2+9,$$

cioè $2x^2 \geq 0$, che è chiaramente verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Passo induttivo: Supponiamo vera P_n (ipotesi induttiva) e dimostriamo P_{n+1}. Si deve provare che

$$(9+3x^2)^{n+1} \geq (x^2+9)\frac{n+2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$(9+3x^2)^{n+1} = (9+3x^2)^n(9+3x^2) \overset{\text{hp ind.}}{\geq} (x^2+9)\frac{n+1}{2}(9+3x^2).$$

Se riusciamo a dimostrare che

$$\frac{n+1}{2}(9+3x^2) \geq \frac{n+2}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, che

$$9+3x^2 \geq \frac{n+2}{n+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

possiamo concludere. Osservando che

$$9+3x^2 > 9 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \frac{n+2}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si ricava

$$9+3x^2 > 9 > 2 > 1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

che è quello che volevamo dimostrare. □

Esercizio 5.3.19 (Da prova scritta CdL Matematica 4-2-2019). Dimostrare per induzione:

$$n! \geq (n-1)! + 2n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$$

SOLUZ. 5.3.19. Dobbiamo dimostrare la proposizione

$$P_n : \text{“}n! \geq (n-1)! + 2n^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.\text{"}$$

Passo base: Ci chiediamo se P_n è vera per $n = 5$. Valutiamo entrambi i membri della disequazione per $n = 5$:

$$5! = 120,$$

$$(5-1)! + 2 \cdot 5^2 = 24 + 50 = 74.$$

Quindi la proposizione è vera per $n = 5$.
Passo Induttivo: Supponiamo vera P_n (ipotesi induttiva) e dimostriamo P_{n+1}. Si deve provare che

$$(n+1)! \geq n! + 2(n+1)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$$

Si ha

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \overset{\text{hp. ind.}}{\geq} (n+1)\cdot((n-1)! + 2n^2) = (n+1)(n-1)! + (n+1)2n^2 \geq n! + (n+1)2n^2.$$

Se riusciamo a dimostrare che

$$(n+1)2n^2 \geq 2(n+1)^2 \qquad \text{per ogni } n \geq 5,$$

o, equivalentemente, che

$$n^2 \geq n+1 \qquad \text{per ogni } n \geq 5,$$

allora possiamo concludere la dimostrazione. Ma questo è immediato, infatti risolvendo la disequazione di secondo grado si trova che la disuguaglianza è vera per $n \geq 2$, quindi in particolare per $n \geq 5$.

□

Esercizio 5.3.20 (Da prova scritta CdL Matematica 3-6-2019). Dimostrare per induzione:

$$(a+b)^n + (b+c)^n + (a+c)^n \leq 2(a+b+c)^n \qquad \forall a,b,c > 0, \;\; \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

SOL. ES. 5.3.20. Per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ si deve provare la veridicità della proposizione

$$P_n : \text{“}(a+b)^n + (b+c)^n + (a+c)^n \leq 2(a+b+c)^n \qquad \forall a,b,c > 0,.\text{"}$$

Passobase : Ci chiediamo se P_n è vera per $n = 1$. Questo è immediato, infatti

$$(a+b) + (b+c) + (a+c) = 2(a+b+c) \qquad \text{per ogni } a,b,c > 0.$$

Passo Induttivo : Supponiamo vera P_n (ipotesi induttiva) e dimostriamo P_{n+1}. Si deve provare che

$$(a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (a+c)^{n+1} \leq 2(a+b+c)^{n+1} \qquad \text{per ogni } a,b,c > 0.$$

Ricordando che $a,b,c > 0$,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} + (b+c)^{n+1} + (a+c)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n + (b+c)(b+c)^n + (a+c)(a+c)^n \leq \\ &\leq (a+b+c)(a+b)^n + (a+b+c)(b+c)^n + (a+b+c)(a+c)^n = \\ &= (a+b+c)((a+b)^n + (b+c)^n + (a+c)^n) \overset{\text{hp. ind.}}{\leq} \\ &\leq (a+b+c)(a+b+c)^n = (a+b+c)^{n+1}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.3.21 (Da prova scritta CdL Matematica 1-7-2019). Dimostrare per induzione: $\sum_{k=1}^{n}(n-k)k = \frac{n(n^2-1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

SOL. ES. 5.3.21. Osserviamo che l'ultimo termine della somma, corrispondente all'indice $k = n$, è nullo, pertanto

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)k = \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k.$$

A partire da questo, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, desideriamo dimostrare la veridicità della proposizione

$$P_n : \text{“}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k = \frac{n(n^2-1)}{6}.\text{"}$$

Base Induttiva : Ci chiediamo se P_n è vera per $n = 1$. Studiando entrambi i membri dell'uguaglianza,

$$\sum_{k=1}^{1}(1-k)k = 0,$$

$$\frac{1(1-1)}{6} = 0,$$

pertanto P_1 è vera.
Passo base : Supponiamo vera P_n (ipotesi induttiva) e dimostriamo P_{n+1}. Si deve provare che

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k = \frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{6} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)k &= \sum_{k=1}^{n-1}((n+1-k)k) + (n+1-n)n = \sum_{k=1}^{n-1}((n-k)k+k) + n = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)k + \sum_{k=1}^{n-1}k + n \overset{\text{hp. ind.}}{=} \frac{n(n^2-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + n = \\ &= \frac{(n+1)n(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(n^2+2n)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)^2-1)}{6}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 5.3.22 (Da prova scritta CdL Matematica 16-9-2019). Dimostrare per induzione:

$$n(x-1) \ge n + x \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 3,\ \forall x \ge 3.$$

SOL. ES. 5.3.22. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, si deve provare la veridicità della proposizione

$$P_n : \text{“} n(x-1) \geq n + x \qquad \forall x \geq 3.\text{"}$$

Passobase : Ci chiediamo se P_n è vera per $n = 3$, cioè se è vero che

$$3(x-1) \geq 3 + x \qquad \text{per ogni } x \geq 3.$$

Questo è immediato, infatti risolvendo la disequazione si trova $2x \geq 6$, cioè $x \geq 3$. Pertanto P_3 è vera.

Passo Induttivo : Supponiamo vera P_n (ipotesi induttiva) e dimostriamo P_{n+1}. Si deve provare che

$$(n+1)(x-1) \geq n + 1 + x \qquad \text{per ogni } x \geq 3.$$

Infatti,

$$(n+1)(x-1) = n(x-1) + x - 1 \overset{\text{hp. ind.}}{\geq} n + x + x - 1 = n + 2x - 1.$$

Se riusciamo a dimostrare che $2x - 1 \geq x + 1$ per ogni $x \geq 3$, allora abbiamo concluso. Ma questo è vero, infatti $2x - 1 \geq x + 1$ per ogni $x \geq 2$, quindi in particolare per $x \geq 3$. Allora concludiamo che

$$(n+1)(x-1) \geq n + 1 + x$$

che è quanto volevamo. □

Esercizio 5.3.23 (Da prova scritta CdL Matematica 15-2-2021). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$a^n b + b^n a \leq a^{n+1} + b^{n+1}$$

SOL. ES. 5.3.23. Sia $P(n)$ la proposizione

$$a^n b + b^n a \leq a^{n+1} + b^{n+1} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

$P(0)$ è banalmente vera.
Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se

$$a^{n+1} b + b^{n+1} a \leq a^{n+2} + b^{n+2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

Si ha:

$$a^{n+1} b + b^{n+1} a = a a^n b + b^{n+1} a \overset{P_n}{\leq} a(a^{n+1} + b^{n+1} - b^n a) + b^{n+1} a = a^{n+2} + a b^{n+1} - b^n a^2 + b^{n+1} a.$$

La tesi segue se dimostriamo che

$$a^{n+2} + a b^{n+1} - b^n a^2 + b^{n+1} a \leq a^{n+2} + b^{n+2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

ossia

$$ab^{n+1} - b^n a^2 + b^{n+1} a \leq b^{n+2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

da cui, dividendo per b^n

$$ab - a^2 + ba \leq b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

cioè

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

che è vera.
Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Esercizio 5.3.24 (Da autovalutazione CdL Matematica 7-12-2018). Usando la disuguaglianza di Bernoulli, dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$(1-a)^n < \frac{1}{1+na}.$$

SOLUZIONE ES. 5.3.24. Ciò che si vuole dimostrare è equivalente a

$$(1+na)(1-a)^n < 1.$$

Si ha

$$(1+na)(1-a)^n \leq \; [\text{Dis. Bern. e } 1-a>0] \; (1+a)^n(1-a)^n = ((1+a)(1-a))^n = (1-a^2)^n.$$

Dato che $0 < a < 1$ allora $a^2 < a < 1$, quindi

$$(1-a^2)^n < 1^n = 1.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$(1+na)(1-a)^n \leq (1-a^2)^n < 1.$$

□

Esercizio 5.3.25 (Da autovalutazione CdL Matematica 7-12-2018). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, e per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k \leq n^2 a^n.$$

SOLUZIONE ES. 5.3.25. Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sia $P(n)$ la proposizione

$$\sum_{k=1}^{n} ka^k \leq n^2 a^n \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ a \geq 1.$$

Dimostriamo che $P(1)$ è vera e che, fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora ($P(n)$ vera $\Rightarrow P(n+1)$ vera).
1) $P(1)$ è

$$a \leq a \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ a \geq 1,$$

banalmente vera.
2) Fissato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, supponiamo che $P(n)$ sia vera e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera, cioè che

$$\sum_{k=1}^{n+1} ka^k \leq (n+1)^2 a^{n+1} \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ a \geq 1.$$

Supposta vera $P(n)$ e fissato $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} ka^k = \sum_{k=1}^{n} ka^k + (n+1)a^{n+1} \leq&\ [P(n) \text{ è vera}]\\ \leq n^2 a^n + (n+1)a^{n+1} \leq&\ [a \geq 1]\\ \leq n^2 a^{n+1} + (n+1)a^{n+1} = (n^2+n+1)a^{n+1}&\\ \leq (n^2+2n+1)a^{n+1} = (n+1)^2 a^{n+1}&.\end{aligned}$$

Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 1$. □

Esercizio 5.3.26 (Da prova scritta CdL Matematica 25-1-2021). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)k \leq \frac{n^3}{6}.$$

SOL. ES. 5.3.26. Sia $P(n)$ la proposizione

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k)k \leq \frac{n^3}{6}.$$

Dimostriamo che $P(0)$ è vera, ossia :

$$\sum_{k=0}^{0} (0-k)k \leq 0.$$

Essa è vera, in quanto

$$\sum_{k=0}^{0} (0-k)k = 0 \leq \frac{0^3}{6}.$$

Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se

$$\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)k \le \frac{(n+1)^3}{6}.$$

Si ha:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(n+1-k)k = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)k + (n+1-(n+1))(n+1) = \sum_{k=0}^{n}(n+1-k)k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)k = \sum_{k=0}^{n}((n-k)k+k) = \sum_{k=0}^{n}(n-k)k + \sum_{k=0}^{n}k$$

Usando l'ipotesi $P(n)$ vera e la formula di Gauss (v. Esercizio 5.2.5)

$$\sum_{k=0}^{n}k = \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$$

otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)k + \sum_{k=0}^{n}k \le \frac{n^3}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{6} + \frac{n^2+n}{2}.$$

Se dimostriamo che

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2+n}{2} \le \frac{(n+1)^3}{6}$$

ossia che

$$\frac{n^3}{6} + \frac{n^2+n}{2} \le \frac{n^3}{6} + \frac{3n^2+3n}{6} + \frac{1}{6}$$

abbiamo concluso. La disuguaglianza sopra è equivalente a

$$0 \le \frac{1}{6}$$

che è vera.
Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Esercizio 5.3.27 (Da prova scritta CdL Matematica 28-6-2021). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$2n10^n - \sum_{k=1}^{n} k \cdot 10^k \ge 0.$$

SOL. ES. 5.3.27. Sia $P(n)$ la proposizione

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 10^k \le 2n10^n.$$

$P(1)$ è vera: $1 \cdot 10 \le 2 \cdot 10$
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Da $P(n)$ vera si ha

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 10^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 10^k + (n+1)10^{n+1} \le 2n10^n + (n+1)10^{n+1} = 10^n(2n+10n+10) = 10^n(12n+10)$$

e tale ultimo termine è minore o uguale di

$$2(n+1)10^{n+1}$$

in quanto

$$10^n(12n+10) \le 2(n+1)10^{n+1} \Leftrightarrow (12n+10) \le 2(n+1)10 \Leftrightarrow 10 \le 8n+20 \Leftrightarrow -10 \le 8n$$

e l'ultima disuguaglianza è vera. Ciò basta per concludere. □

Esercizio 5.3.28 (Da prova scritta CdL Matematica 7-9-2021). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $a \in \mathbb{R}^+$

$$na \le a^n + n - 1.$$

SOL. ES. 5.3.28. Sia $P(n)$ la proposizione

$$\forall\ a \in \mathbb{R}^+ \quad a^n \ge na - n + 1.$$

$P(0)$ è vera: $a^0 \ge 0 \cdot a - 0 + 1 \Leftrightarrow 1 \ge 1$.
Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Da $P(n)$ vera si ha

$$a^{n+1} = aa^n \ge a(na - n + 1)$$

Se dimostriamo che

$$a(na-n+1) \overset{a>0\ +\ P(n)}{\ge} (n+1)a - (n+1) + 1 \tag{5.3.1}$$

abbiamo concluso. Si ha

$$a(na-n+1) \ge (n+1)a - (n+1) + 1 \Leftrightarrow na^2 - na + a \ge na + a - n \Leftrightarrow na^2 - na \ge na - n$$

$$\Leftrightarrow a^2 - a \ge a - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \ge 0.$$

Quest'ultima disuguaglianza è vera.
La (5.3.1) è quindi dimostrata. Sono soddisfatte quindi le ipotesi del Principio d'induzione. Ciò è sufficiente per concludere. □

Esercizio 5.3.29 (Da autovalutazione CdL Matematica 1-12-2022). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, si ha

$$2^n(n-1) < 3^n.$$

SOL. ES. 5.3.29. **I modo:**
Sia $P(n)$ la proposizione

$$3^n > 2^n(n-1).$$

$P(3)$ è vera, infatti:

$$3^3 = 27 > 4 \cdot 2 = 8.$$

Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se

$$3^{n+1} > 2^{n+1}n.$$

Si ha:

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{P(n) \text{ vera}}{>} 3 \cdot 2^n(n-1).$$

Se dimostriamo che

$$3 \cdot 2^n(n-1) \geq 2^{n+1}n$$

abbiamo concluso. Ora:

$$3 \cdot 2^n(n-1) \geq 2^{n+1}n \Leftrightarrow 3(n-1) \geq 2n \Leftrightarrow n \geq 3.$$

Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 3$.

II modo:
Sia $P(n)$ la proposizione

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n-1.$$

$P(3)$ è vera, infatti:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} > 2.$$

Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} > n.$$

Si ha:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n \overset{P(n) \text{ vera}}{>} \frac{3}{2}(n-1).$$

Se dimostriamo che

$$\frac{3}{2}(n-1) \geq n$$

abbiamo concluso. Ora:

$$\frac{3}{2}(n-1) \geq n \Leftrightarrow 3n-3 \geq 2n \Leftrightarrow n \geq 3.$$

Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \geq 3$.

$\square$

Esercizio 5.3.30 (Da prova scritta CdL Matematica 16-1-2023). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$,

$$n2^n + 3^n < 4^n.$$

SOL. ES. 5.3.30. Sia $P(n)$ la proposizione

$$n2^n + 3^n < 4^n$$

Dimostriamo che $P(3)$ è vera, ossia :

$$3 \cdot 2^3 + 3^3 < 4^3.$$

Essa è vera, in quanto

$$3 \cdot 2^3 + 3^3 = 51, \qquad 4^3 = 64.$$

Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se

$$(n+1)\, 2^{n+1} + 3^{n+1} < 4^{n+1}.$$

I MODO:
Si ha:

$$4^{n+1} = 4 \cdot 4^n \overset{P(n)}{>} 4(n2^n + 3^n) > n2^{n+2} + 4 \cdot 3^n.$$

Osservo che

$$4 \cdot 3^n > 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Allora abbiamo che

$$4^{n+1} > n2^{n+2} + 3^{n+1}.$$

Se dimostro che

$$n2^{n+2} \geq (n+1)2^{n+1}$$

ho concluso. Si ha

$$n2^{n+2} \geq (n+1)2^{n+1} \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

che è soddisfatta perché $n \geq 3$.
Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
II MODO:
Si ha:

$$\begin{aligned}(n+1)\,2^{n+1}+3^{n+1} &= n2^{n+1}+2^{n+1}+3^{n+1}\\ &< 3n2^n+2^{n+1}+3\cdot 3^n = 3(n2^n+3^n)+2^{n+1}.\end{aligned}$$

L'ultimo membro si stima con $P(n)$ ottenendo

$$3(n2^n+3^n)+2^{n+1} < 4^n+2^{n+1}.$$

Se dimostriamo che

$$4^n+2^{n+1} < 4^{n+1}$$

abbiamo concluso. Abbiamo

$$\begin{aligned}4^n+2^{n+1} < 4^{n+1} \Leftrightarrow 2^{n+1} < 4^{n+1}-4^n \Leftrightarrow 2^{n+1} < 4^n(4-1)\\ \Leftrightarrow 2^n 2 < 4^n 3\end{aligned}$$

che è vera.
Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
III MODO:
Si ha:

$$\begin{aligned}(n+1)\,2^{n+1}+3^{n+1} &= n2^{n+1}+2^{n+1}+3^{n+1}\\ &= (3-1)n2^n+2^{n+1}+3\cdot 3^n = 3(n2^n+3^n)+2^{n+1}-n2^n\\ &= 3(n2^n+3^n)+2^n(2-n).\end{aligned}$$

L'ultimo membro si stima con $P(n)$ ottenendo

$$3(n2^n+3^n)+2^n(2-n) < 3\cdot 4^n+2^n(2-n)$$

Essendo $n \geq 3$ è:

$$3\cdot 4^n+2^n(2-n) < 3\cdot 4^n < 4^{n+1}.$$

Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. □

Esercizio 5.3.31 (Da prova scritta CdL Matematica 6-2-2023). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$,

$$4n^2 < (n+1)2^n.$$

SOL. ES. 5.3.31.
$$4n^2 < (n+1)2^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4n^2}{n+1} < 2^n.$$
Sia $P(n)$ la proposizione
$$2^n > \frac{4n^2}{n+1}$$
Dimostriamo che $P(4)$ è vera:
$$16 > \frac{4\cdot 16}{5} \Leftrightarrow 5\cdot 16 > 4\cdot 16.$$
Essa è vera.
Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se
$$2^{n+1} > \frac{4(n+1)^2}{n+2}.$$
Si ha
$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2\cdot\frac{4n^2}{n+1}.$$
Se dimostriamo che
$$2\cdot\frac{4n^2}{n+1} > \frac{4(n+1)^2}{n+2}$$
abbiamo concluso. Abbiamo
$$2\cdot\frac{4n^2}{n+1} > \frac{4(n+1)^2}{n+2} \Leftrightarrow 2\cdot 2n^2(n+2) > (n+1)^3$$
$$\Leftrightarrow 2n^3+4n^2 > n^3+3n^2+3n+1 \Leftrightarrow n^3+n^2-3n-1 > 0$$
$$\Leftrightarrow n^3-1+n^2-3n > 0 \Leftrightarrow (n-1)(n^2+n+1)+n(n-3) > 0$$
che è vera in quanto $n \geq 4$ e $n^2+n+1 > 0$ per ogni n.
Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Esercizio 5.3.32 (Da prova scritta CdL Matematica 6-6-2023). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2k}{k^2-1} < n.$$

SOL. ES. 5.3.32. Sia $P(n)$ la proposizione
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2k}{k^2-1} < n$$
Dimostriamo che $P(2)$ è vera, ossia :
$$\sum_{k=2}^{2}\frac{2k}{k^2-1} < 2.$$

Essa è vera, in quanto
$$\sum_{k=2}^{2} \frac{2k}{k^2-1} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} < 2.$$
Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k}{k^2-1} < n+1.$$
Si ha:
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2k}{k^2-1} + \frac{2(n+1)}{(n+1)^2-1}$$
$$\overset{P(n)}{<} n + \frac{2(n+1)}{(n+1)^2-1} = n + \frac{2(n+1)}{n^2+2n}.$$
Se dimostro che
$$n + \frac{2(n+1)}{n^2+2n} \leq n+1$$
ho concluso.
Si ha
$$n + \frac{2(n+1)}{n^2+2n} \leq n+1 \Leftrightarrow \frac{2(n+1)}{n^2+2n} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 2n+2 \leq n^2+2n \Leftrightarrow 2 \leq n^2$$
che è soddisfatta in quanto per ogni $n \geq 2$:
$$2 \leq n \leq 2n \leq n^2.$$
Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

□

Esercizio 5.3.33 (Da prova scritta CdL Matematica 26-6-2023). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{2n+1}.$$

Sol. es. 5.3.33. Sia $P(n)$ la proposizione
$$\sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{1+2n}.$$
Dimostriamo che $P(0)$ è vera:
$$\sum_{i=-0}^{0} \frac{1}{1-2i} = 1 = \frac{1}{2\cdot 0+1}.$$
Dunque $P(0)$ è vera.

Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$, si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se

$$\sum_{i=-(n+1)}^{n+1} \frac{1}{1-2i} = \frac{1}{2(n+1)+1}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=-(n+1)}^{n+1} \frac{1}{1-2i} &= \left(\sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{1-2i}\right) + \frac{1}{1-2(n+1)} + \frac{1}{1-2(-n-1)} \\ &\overset{P(n)\text{ vera}}{=} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{-2n-1} + \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{2(n+1)+1}.\end{aligned}$$

Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 5.3.34 (Da prova scritta CdL Matematica 17-7-2023). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, e per ogni successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$2a_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n a_0^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

SOL. ES. 5.3.34. Sia $P(n)$ la proposizione:

$$\text{per ogni successione } (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ vale} \quad 2a_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n a_0^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Dimostriamo che $P(1)$ è vera:

$$2a_0 \sum_{i=1}^{1} a_i \leq a_0^2 + \sum_{i=1}^{1} a_i^2$$

ossia

$$2a_0 a_1 \leq a_0^2 + a_1^2$$

che è vera perché equivalente a

$$a_0^2 + a_1^2 - 2a_0 a_1 \geq 0 \Leftrightarrow (a_0 - a_1)^2 \geq 0.$$

Dimostriamo ora che, fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha $P(n)$ vera $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vera.
$P(n+1)$ è vera se "per ogni successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$$2a_0 \sum_{i=1}^{n+1} a_i \leq (n+1) a_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \text{ ".}$$

Si ha

$$2a_0 \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 2a_0 \sum_{i=1}^{n} a_i + 2a_0 a_{n+1}$$

Sappiamo che $P(n)$ sia vera, quindi

$$2a_0\sum_{i=1}^n a_i \le n a_0^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Sappiamo che

$$2a_0 a_{n+1} \le a_0^2 + a_{n+1}^2.$$

Allora, sommando membro a membro,

$$\begin{aligned}2a_0\sum_{i=1}^n a_i + 2a_0 a_{n+1} &\le n a_0^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_0^2 + a_{n+1}^2 \\ &= (n+1)a_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2.\end{aligned}$$

Le ipotesi del principio d'induzione sono verificate. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$. □

Esercizio 5.3.35. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$|x^n| = |x|^n.$$

SOL. ES. 5.3.35. Sia $P(n)$ la proposizione

$$|x^n| = |x|^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$P(1)$ è vera.
Se $P(n)$ è vera per un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, usando la Proposizione 6.2.7 (d) si ha

$$|x^{n+1}| = |x^n x| \overset{\text{Prop. 6.2.7}}{=} |x^n||x| \overset{P(n)\text{ è vera}}{=} |x|^n|x| = |x|^{n+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 5.3.36 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).
Dimostrare per induzione la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la quale afferma che se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ sono numeri reali allora

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

SOL. ES. 5.3.36. Per induzione, usando la Proposizione 6.2.7 (a) [Dis. triangolare] e (d).
Caso $n = 1$: ovvio.
Caso $n = 2$ verifica diretta:

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \overset{\text{Prop. 6.3.24}}{\Leftrightarrow} (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + 2a_1a_2b_1b_2 \le (a_1b_1)^2 + (a_2b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a_1a_2b_1b_2 \le (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 \Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \ge 0$$

e quest'ultima affermazione è vera.
Sia vera per n, dimostriamo che è vera per $n+1$.

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_ib_i\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) + a_{n+1}b_{n+1}\right| \overset{Prop. 6.2.7(a)}{\le} \left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| + |a_{n+1}b_{n+1}|.$$

Per ipotesi induttiva e la Prop. 6.2.7 (d)

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right| + |a_{n+1}b_{n+1}| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + |a_{n+1}||b_{n+1}| =: A_1B_1 + A_2B_2$$

dove si è posto

$$A_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$B_1 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$A_2 := |a_{n+1}| \qquad B_2 := |b_{n+1}|$$

Essi sono tutti termini non negativi. Il termine a secondo membro della disuguaglianza sopra si può stimare usando il caso $n = 2$ già dimostrato:

$$A_1B_1 + A_2B_2 = |A_1B_1 + A_2B_2| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{2} A_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{2} B_i^2}$$

$$= \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} a_i^2) + |a_{n+1}|^2}\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) + |b_{n+1}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2}.$$

La tesi segue. □

Esercizio 5.3.37. Dimostrare che una funzione T-periodica è anche nT-periodica per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

SOL. ES. 5.3.37. Per induzione:
Se $n = 1$ è ovvio.
Sia nT periodica. Dimostriamo che

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad (x \in A \Leftrightarrow x + (n+1)T \in A)$
(b) $\forall x \in A \quad (f(x) = f(x + (n+1)T)$.

(a):

Per ogni $x \in A$

$$x \in A \overset{f\ T\text{-periodica}}{\Rightarrow} x+T \in A \overset{x+T\in A + \text{ Hp induttiva}}{\Rightarrow} \begin{cases} x+T \in A \\ x+T+nT \in A \end{cases} \Rightarrow x+(n+1)T \in A.$$

Viceversa

$$x+(n+1)T \in A \Rightarrow x+T+nT \in A \overset{\text{Hp induttiva}}{\Rightarrow} x+T \in A \overset{f\ T\text{-periodica}}{\Rightarrow} x \in A.$$

(b):

$\forall x \in A \quad (f(x) = f(x+(n+1)T)$.

$$f(x) \overset{f\ T\text{-periodica}}{=} f(x+T) \overset{x+T\in A + \text{ Hp induttiva}}{=} f((x+T)+nT) = f(x+(n+1)T).$$

□

5.3.1. Coefficienti binomiali. Introduciamo il seguente simbolo: $\binom{n}{k}$, spesso indicato con $C_{n,k}$, che prende il nome di coefficiente binomiale, in virtù del Teorema 5.3.41.

Definizione 5.3.38. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se } n \ge k \ge 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Vale il seguente lemma:

Lemma 5.3.39. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j} \qquad \forall j \in \mathbb{Z}. \tag{5.3.2}$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza (5.3.2) è ovvia se $j < 0$ oppure $j > n+1$ (tutti i termini sono 0). Se $j = 0$ si ha

$$\binom{n}{0-1} = 0, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n+1}{0} = 1$$

e l'uguaglianza (5.3.2) è dimostrata.

Se $j = n+1$ si ha

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n+1} = 0, \quad \binom{n+1}{n+1} = 1$$

e l'uguaglianza (5.3.2) è dimostrata.

Se $1 \le j \le n+1$ allora $0 \le j-1 \le n$: la uguaglianza (5.3.2) risulta vera mediante verifica diretta. $\square$

Esercizio 5.3.40. Dimostrare la seguente uguaglianza usando il ragionamento per induzione:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

L'uguaglianza dell'Esercizio 5.3.40 è un caso particolare della formula descritta nel Teorema 5.3.41.

Teorema 5.3.41 (Potenza di un binomio). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Allora*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{5.3.3}$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è un esercizio sull'induzione, tenendo presente il Lemma 5.3.39.

Ragioniamo per induzione. Sia $P(n)$ la proposizione:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$P(1)$ è vera:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b = (a+b)^0.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $P(n)$ sia vera. Dimostriamo che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{5.3.4}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = [P(n) \text{ vera}] \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j}.
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Nella prima sommatoria compiamo la seguente sostituzione: $j = k+1$ ottenendo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j}. \tag{5.3.6}$$

Da (5.3.5) e (5.3.6) si ha

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j}. \tag{5.3.7}$$

Dalla prima sommatoria di (5.3.7) separiamo l'ultimo addendo e dalla seconda separiamo il primo ottenendo

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n}a^{n+1}b^0 + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{0}a^0 b^{n+1} = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right)a^j b^{n+1-j} + a^{n+1}b^0 + a^0 b^{n+1} = [\text{Lemma 5.3.39}] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j} + a^{n+1}b^0 + a^0 b^{n+1} \left[\text{USANDO } \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j} + \binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0 + \binom{n+1}{0}a^0 b^{n+1} = \\
&= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^j b^{n+1-j},
\end{aligned}$$

che è quanto desideravamo dimostrare. □

Osservazione 5.3.42. Se si pone $0^0 = 1$, formula (5.3.3) vale anche per $n = 0$.

Esercizio 5.3.43. Dimostrare la seguente uguaglianza usando il ragionamento per induzione:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

SOLUZIONE:
Sia $P(n)$ la proposizione

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

$P(0)$ è vera: $0 = 0 \cdot 2^{-1}$ è vera.
Supponiamo vera $P(n)$ e dimostriamo che $P(n+1)$ è vera, ossia

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = (n+1)2^{n}.$$

Si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1)\binom{n+1}{n+1}.$$

Essendo

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n+1}{k} \overset{\text{Lemma 5.3.39}}{=} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + n + 1$$
$$\overset{\mathscr{P}_n}{=} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k-1} + n2^{n-1} + n + 1. \tag{5.3.8}$$

Effettuando il cambio di variabile $h = k-1$ ossia $k = h+1$, si ha

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k-1} = \sum_{h=0}^{n-1}(h+1)\binom{n}{h}$$
$$= \sum_{h=0}^{n}(h+1)\binom{n}{h} - (n+1)\binom{n}{n} =$$
$$= \sum_{h=0}^{n} h\binom{n}{h} + \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h} - (n+1)\binom{n}{n}.$$

Essendo

$$\binom{n}{n} = 1$$

deduciamo

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k-1} = \sum_{h=0}^{n} h\binom{n}{h} + \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h} - n - 1$$
$$\overset{\mathscr{P}_n}{=} n2^{n-1} + \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h} - n - 1.$$

Per l'Esercizio 5.3.40 si ha

$$\sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h} = 2^n.$$

Allora

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k-1} = n2^{n-1} + 2^n - n - 1.$$

Dunque, ricordando la (5.3.8), si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k-1} + n2^{n-1} + n + 1$$
$$= n2^{n-1} + 2^n - n - 1 + n2^{n-1} + n + 1 = 2n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n.$$

CAPITOLO 6

Funzioni elementari

Le funzioni elementari sono le funzioni che costituiscono gli "elementi" costituenti funzioni matematiche più complesse. Queste ultime, infatti, sono generalmente espresse come l'esito di una combinazione finita di somme, differenze, prodotti, quozienti, composizioni e/o inverse delle prime.

Esempio: La funzione reale di variabile reale $f(x) = \dfrac{x^2 \sin(3x+1)}{\log(5^x) - \tan(x)}$ ha un'espressione molto complessa, ottenibile considerando diverse funzioni elementari. Infatti $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ con $g(x) = x^2 \sin(3x+1)$ e $h(x) = \log(5^x) - \tan(x)$.

Se denotiamo:

$g_1(x) = x^2,\ g_2(x) = \sin(x),\ g_3(x) = 3,\ g_4(x) = x,\ g_5(x) = 1$

e

$h_1(x) = \log(x),\ h_2(x) = 5^x,\ h_3(x) = \tan(x),$

allora

$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{g_1(x) \cdot g_2(g_3(x) \cdot g_4(x) + g_5(x))}{h_1(h_2(x)) - h_3(x)}$. Le funzioni $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, h_1, h_2, h_3$ sono le funzioni elementari costituenti, rispettivamente, g e h, e quindi f.

L'individuazione delle funzioni elementari coinvolte nell'espressione algebrica di una determinata funzione e la conoscenza delle loro proprietà (come ad es. l'insieme di definizione, intervalli di positività, eventuali simmetrie del grafico) ci permettono di comprendere più facilmente quali siano le caratteristiche della funzione stessa.

6.1. Funzioni costanti

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice <u>costante</u> se esiste un numero reale a tale che

$$f(x) = a \qquad \forall x \in A.$$

Dunque, $Im(f) = \{a\}$.

I punti del grafico sono della forma (x, a), con $x \in A$. Dato che le ordinate di questi punti valgono tutte a, essi si trovano sulla retta orizzontale di equazione $y = a$ del piano cartesiano Oxy.

Se $A = \mathbb{R}$ il grafico di f è la retta orizzontale di equazione $y = a$:

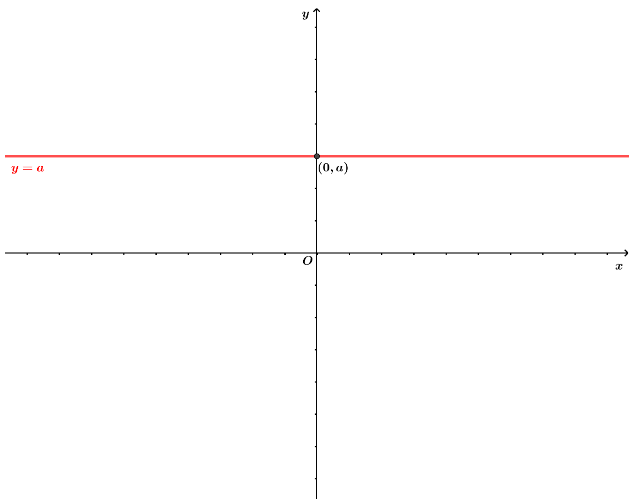

Figura 1. Grafico di $f(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$

Tale funzione f è una funzione positiva/negativa/nulla a seconda che a sia positivo, negativo o uguale a 0.
Il dominio massimale è $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$.

6.2. Valore assoluto

Definizione 6.2.1. La funzione *valore assoluto* è la funzione abs : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le cui immagini abs$(x)$ si denotano $|x|$, così definita:

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

che possiamo scrivere in forma più esplicita:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Il suo grafico è il seguente:

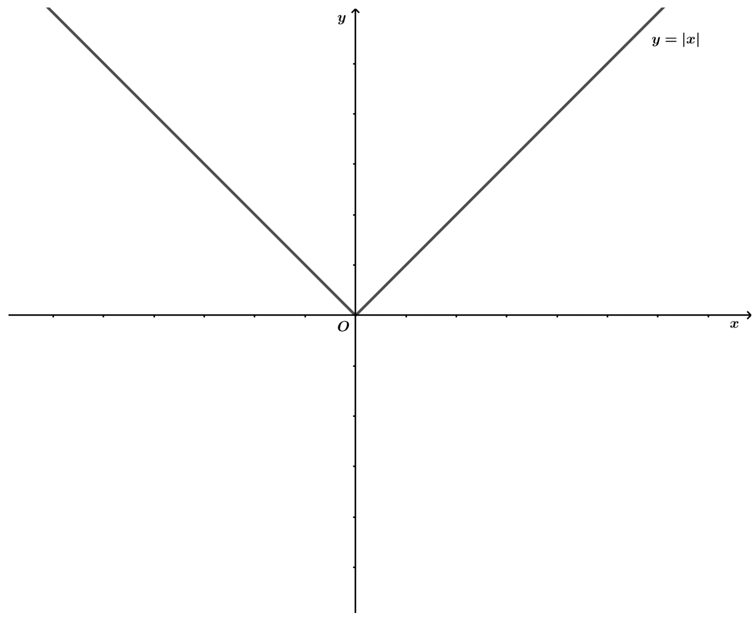

Figura 2. Grafico del valore assoluto

Ne possiamo dedurre quindi le seguenti proprietà:

$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;

$Im(f) = [0, +\infty[$ (Prop. 6.2.2 (b))

$Gr(f)$ interseca gli assi nell'origine del sistema di riferimento $(0,0)$ (Prop. 6.2.2 (c))

$|x| \geq 0$ e $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$; (Prop. 6.2.2 (b), (c))

f è una funzione pari: $|-x| = |x|$ quindi il grafico della funzione valore assoluto risulta simmetrico rispetto all'asse delle y (Prop. 6.2.2 (a))

f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$ (Prop. 6.2.4)

Proposizione 6.2.2 (Proprietà del valore assoluto). *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti:*

(a) $|x| = |-x|$
(b) $|x| \geq 0$
(c) $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$
(d) $\pm x \leq |x|$
(e) $-|x| \leq x \leq |x|$
(f) $||x|| = |x|$.

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio. In particolare, (f) è una conseguenza immediata di (b). $\square$

Osservazione 6.2.3. (a) in Proposizione 6.2.2 esprime che $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|$ è una funzione pari.

Proposizione 6.2.4 (Disequazioni col valore assoluto - I). *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti:*

(a) *se* $0 \leq x < y$, *allora* $|x| < |y|$

(b) *se* $x < y \leq 0$, *allora* $|x| > |y|$.

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio. □

Osservazione 6.2.5. (a) in Proposizione 6.2.4 esprime che $x \mapsto |x|$ è strettamente crescente in $[0, +\infty)$.
(b) in Proposizione 6.2.4 esprime che $x \mapsto |x|$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$.

Proposizione 6.2.6 (Disequazioni col valore assoluto - II). *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *valgono le seguenti:*

(a) *se* $M \geq 0$, *allora*

$$|x| \geq M \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -M \ \vee \ x \geq M$$

(b) *se* $M \geq 0$, *allora*

$$|x| \leq M \quad \Leftrightarrow \quad -M \leq x \leq M$$

(c) *se* $M > 0$, *allora*

$$|x| < M \quad \Leftrightarrow \quad -M < x < M$$

(d) *se* $M < 0$, *allora* $|x| \leq M$ *non ha soluzione.*

(e) $|x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio. □

Proposizione 6.2.7. *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *valgono le seguenti:*

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Disuguaglianza triangolare)*

(b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

(c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

(d) $|xy| = |x||y|$

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Per la Proposizione 6.2.2 (e)

$$\begin{cases} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y|. \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Usando la Proposizione 6.2.6 (a) con M sostituito da $|x| + |y|$ e con $x + y$ al posto di x si ha

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(b):
Da (a), segue che

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

(c):
Analogamente a quanto svolto in (b):

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|$$

da cui

$$|x| - |y| \geq |y - x|.$$

Dato che per la Proposizione 6.2.2 (a) $|y - x| = |x - y|$ si ottiene la tesi.
(d):
Si ha

$$|xy| = \begin{cases} xy & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \\ -xy & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

D'altra parte,

$$xy > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0, y > 0 \\ \text{oppure} \\ x < 0, y < 0 \end{array}\right] \Rightarrow |x||y| = xy$$

$$xy = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{oppure} \\ y = 0 \end{array}\right] \Rightarrow |x||y| = 0$$

$$xy < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0, y < 0 \\ \text{oppure} \\ x < 0, y > 0 \end{array}\right] \Rightarrow |x||y| = -xy.$$

Quindi

$$|x||y| = \begin{cases} xy & \text{se } xy > 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \\ -xy & \text{se } xy < 0. \end{cases}$$

Dunque, $|xy| = |x||y|$.

$\square$

Esercizio 6.2.8. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali.
Dimostrare che
$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$
Sol: Per induzione, usando la Proposizione 6.2.7 (a).

Esercizio 6.2.9. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numeri reali.
Dimostrare per induzione che
$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |a_i|.$$
Sol: Per induzione, usando la Proposizione 6.2.7 (d).

6.2.1. Anticipazione di argomenti avanzati.

Lemma 6.2.10. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Si ha*
$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. L'affermazione
$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = 0$$
significa:
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ ||f(x)|| < \epsilon \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$
L'affermazione
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$
significa:
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta.$$
Essendo, vedi Proposizione 6.2.2 (f), $||f(x)|| = |f(x)|$ non vi è differenza tra le due affermazioni. □

Teorema 6.2.11. *La funzione valore assoluto abs* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *abs*$(x) = |x|$, *è una funzione continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Vogliamo dimostrare che
$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0|$$
ossia che
$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0\ :\ (x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow ||x| - |x_0|| < \epsilon).$$
Per la Proposizione 6.2.7 (c) si ha
$$||x| - |x_0|| \le |x - x_0|,$$
quindi basta scegliere $\delta = \epsilon$ per concludere che l'affermazione è vera. □

6.3. Potenze

Le funzioni potenza sono quelle aventi come legge: $f(x) = x^a$, dove a è un numero reale.
Parliamo di *dominio massimale di definizione* o di *dominio naturale* per intendere l'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ tale che x^a ha senso.
La questione del loro dominio massimale di definizione è delicata, dato che dipende da a.
Analizziamo i seguenti casi a seconda dei valori che può assumere a:
$a = 0$:
In tal caso $f(x) = x^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se si accetta la convenzione $0^0 = 1$, altrimenti si assume $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In queste note, quando non diversamente indicato, accetteremo il caso $x = 0$.
Si tratta quindi della funzione costante uguale a 1. Il dominio massimale è $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;
$a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:
Ci sono proprietà distinte di $f(x) = x^a$ a seconda che a sia pari o dispari. Per tale motivo, trattiamo i due casi separatamente.
Commentiamo le proprietà di $f(x) = x^a$ nel caso che a sia un numero pari, a partire dal suo grafico. Rinviamo la giustificazione di alcune di queste proprietà più avanti.

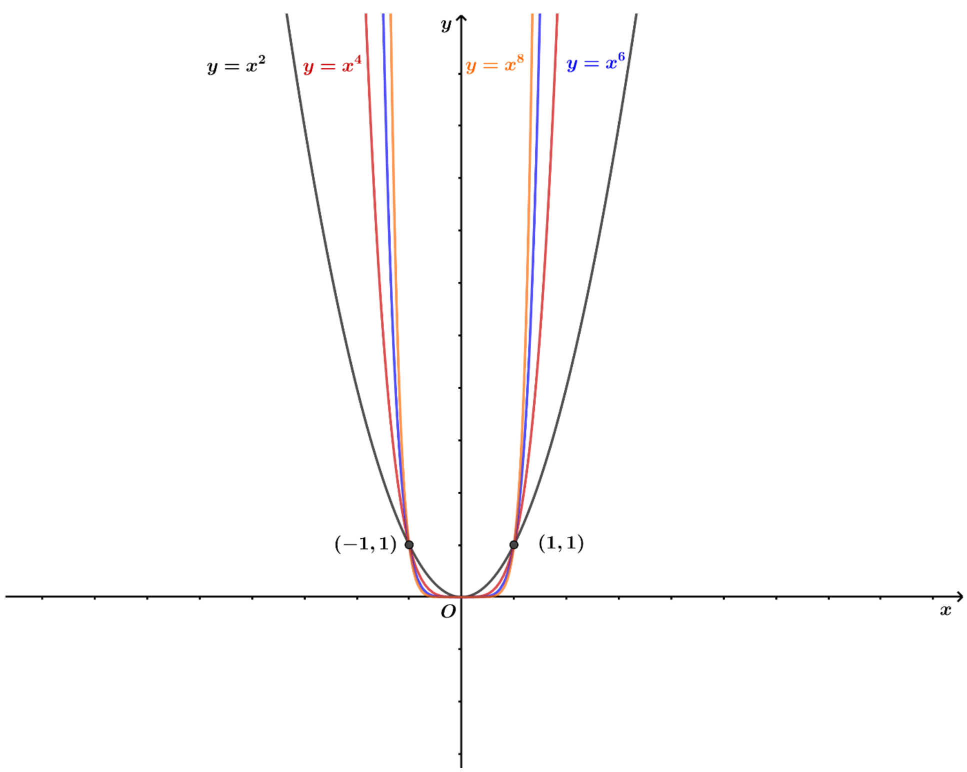

Figura 3. Grafico di $f(x) = x^n$ con n pari

Possiamo dedurre che:
Il dominio massimale è $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;
L'immagine è $Im(f) = [0, +\infty[$;
$Gr(f)$ interseca gli assi cartesiani solo nell'origine $O = (0,0)$ del sistema di riferimento; Inoltre passa sempre per i punti $(-1,1)$ e $(1,1)$;
$f(x) \geq 0$ per ogni x;
$f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$ e strettamente crescente in $[0, +\infty)$;
f non è iniettiva;
Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y, quindi f è pari.

Osservazione 6.3.1. Il grafico della funzione $f(x) = x^2$ è ben noto: i suoi punti hanno coordinate (x, x^2), dunque si tratta dei punti della parabola di equazione $y = x^2$, avente per vertice l'origine degli assi, avente per asse l'asse y e "rivolta verso l'alto".

Commentiamo ora le proprietà di $f(x) = x^a$ nel caso in cui a sia un numero dispari, a partire dal suo grafico.

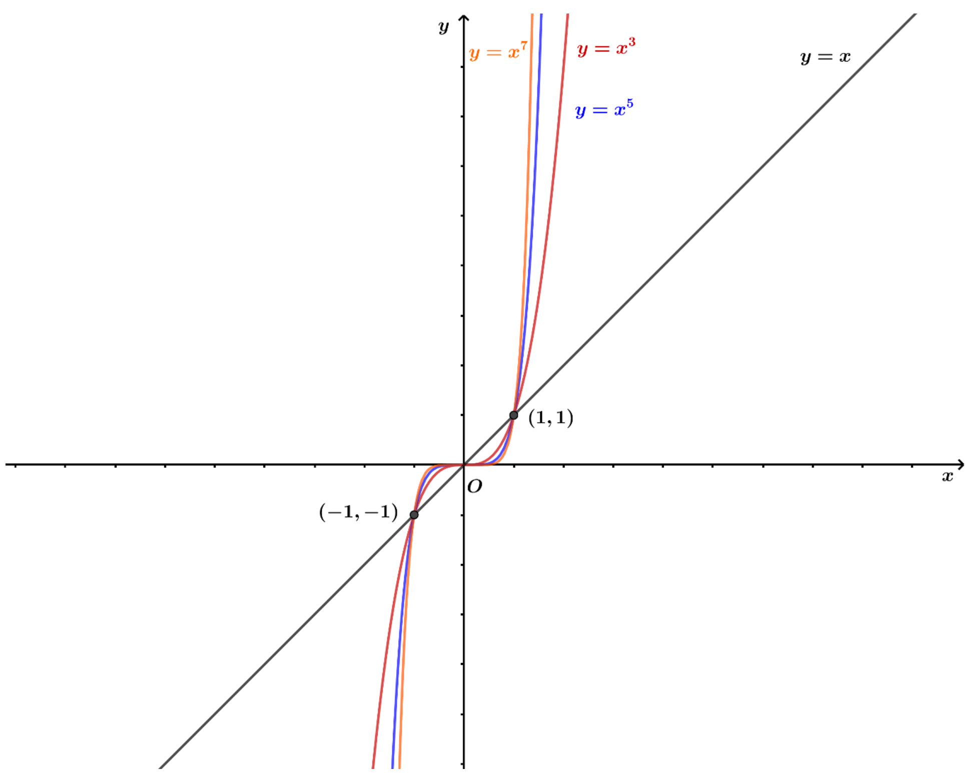

Figura 4. Grafico di $f(x) = x^n$ con n dispari

Possiamo dedurre che:
Il dominio massimale è $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;
L'immagine è $Im(f) = \mathbb{R}$;
$Gr(f)$ interseca gli assi cartesiani solo nell'origine $O = (0,0)$ del sistema di riferimento; Inoltre contiene sempre i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$;
f è una funzione negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$;
f è strettamente crescente;
f è iniettiva.
Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema Oxy, quindi f è dispari.
Osservazione: Se $a = 1$ si ha la funzione $f(x) = x$. Questa funzione è detta <u>funzione identità</u> o <u>funzione identica</u> e il suo grafico è la retta di equazione cartesiana $y = x$. Tale retta è la bisettrice del I e III quadrante.

6.3.1. Potenze a esponente naturale. Ricordiamo qui quanto già visto nel Capitolo 5.

Definizione 6.3.2. Per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la successione $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$, è definita in modo ricorsivo:

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n x \\ x^0 = 1. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

Se si accetta la convenzione $0^0 = 1$ la definizione sopra può essere estesa a ogni $x \in \mathbb{R}$.

Già sappiamo (v. Esercizi 5.2.10 e 5.2.11) che

$$0^n = 0, \qquad 1^n = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Proposizione 6.3.3. *Per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ valgono le seguenti:*

(a) $x > 0 \Rightarrow x^n > 0$
(b) $x^n x^m = x^{n+m}$
(c) $(x^n)^m = x^{nm}$.

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Segue, facilmente, per induzione, dalla Definizione 6.3.2
(b):
Fissato $k \in \mathbb{N}$ sia $P(k)$ la proposizione

$$\text{se } n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n + m = k \text{ allora per ogni } x \in \mathbb{R},\ x^n x^m = x^{n+m}.$$

$P(0)$ è vera:

Infatti, se $n, m \in \mathbb{N}$ e $n+m=0$ allora $n=m=0$. Basta quindi osservare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $x^0 x^0 = 1 \cdot 1 = 1 = x^0 = x^{0+0}$.
Fissato $k \in \mathbb{N}$ supponiamo che $P(k)$ sia vera e dimostriamo che $P(k+1)$ è vera.
Siano $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $n+m=k+1$.
Ci sono tre casi:
$n=0$
$n>0$ e $m=0$
$n>0$ e $m>0$
Se $n=0$, allora

$$x^0 x^m = 1 \cdot x^m = x^m = x^{0+m}.$$

Se $n>0$ e $m=0$, allora

$$x^n x^0 = x^n \cdot 1 = x^n = x^{n+0}.$$

Se $n>0$ e $m>0$, allora

$$m-1 \in \mathbb{N}$$

e

$$n+(m-1)=k.$$

Si ha:

$$x^n x^m = x^n x^{(m-1)+1} \overset{(6.3.1)}{=} x^n x^{m-1} x^1 \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} x^{n+m-1} x^1 \overset{(6.3.1)}{=} x^{n+m}.$$

La dimostrazione è conclusa.
(c):
Sia P_m la proposizione

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dimostriamo che P_0 è vera.
Se $x=0$ e $n=0$

$$(x^n)^m = (0^0)^0 = 1^0 = 1$$

$$x^{nm} = 0^{0 \cdot 0} = 0^0 = 1$$

Se $x=0$ e $n \geq 1$

$$(x^n)^m = (0^n)^0 = 0^0 = 1$$

$$x^{nm} = 0^{n \cdot 0} = 0^0 = 1$$

Dunque P_0 è vera.
Supponiamo ora che, se per $m \in \mathbb{N}$ è vera

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$$

allora
$$(x^n)^{m+1} = x^{n\cdot(m+1)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}.$$
Si ha
$$(x^n)^{m+1} \overset{(6.3.2)}{=} (x^n)^m x^n \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} x^{nm} x^n \overset{(b)}{=} x^{nm+n} = x^{n(m+1)}.$$
La proprietà è dimostrata. □

Proposizione 6.3.4. *Sia $n \in \mathbb{N}$.*
Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$(xy)^n = x^n y^n$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione.
Sia P_n la proposizione
$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Se $n = 0$ l'affermazione è ovvia
$$(xy)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = x^0 y^0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
Sia vera P_n e dimostriamo che è vera P_{n+1}.
$$(xy)^{n+1} \overset{\text{Def. } 6.3.2}{=} (xy)(xy)^n \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} xyx^n y^n \overset{\text{Def. } 6.3.2}{=} x^{n+1} y^{n+1}.$$
Dunque la tesi segue. □

Proposizione 6.3.5. *Sia $n \in \mathbb{N}$.*
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha
$$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha
$$x^n = \left(\frac{x}{y} y\right)^n \overset{\text{Prop. } 6.3.4}{=} \left(\frac{x}{y}\right)^n y^n$$
da cui la tesi. □

Corollario 6.3.6. *Sia $n \in \mathbb{N}$*
Per ogni $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha
$$\frac{1}{y^n} = \left(\frac{1}{y}\right)^n.$$

DIMOSTRAZIONE. Immediata conseguenza della Proposizione 6.3.5 e dell'Esercizio 5.2.11:

$$\frac{1}{y^n} \overset{\text{Esercizio 5.2.11}}{=} \frac{1^n}{y^n} \overset{\text{Prop. 6.3.5}}{=} \left(\frac{1}{y}\right)^n.$$

□

Lemma 6.3.7. *Valgono le seguenti:*

(a) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ pari è $(-1)^n = 1$.*
(b) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari è $(-1)^n = -1$.*

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Ragioniamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $P(k)$ la proposizione

$$(-1)^{2k} = 1.$$

Se $k = 0$ la proposizione è vera per definizione.
Se $k = 1$:

$$(-1)^2 = (-1)(-1) = -1(-1) \overset{\text{1 el. neutro del prodotto}}{=} -(-1) \overset{\text{opposto dell'opposto}}{=} 1.$$

Sia vera $P(k)$ e dimostriamo che $P(k+1)$ è vera:

$$(-1)^{2(k+1)} = (-1)^{2k+2} \overset{\text{Prop. 6.3.3 (b)}}{=} (-1)^2(-1)^{2k} \overset{P(1)\text{ vera}}{=} 1(-1)^{2k} \overset{P(k)\text{ vera}}{=} 1 \cdot 1 = 1.$$

Ciò conclude la dimostrazione della prima affermazione.
(b):
Ragioniamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia $P(k)$ la proposizione

$$(-1)^{2k+1} = -1.$$

Se $k = 0$ è ovvia.
Sia vera $P(k)$ e dimostriamo che $P(k+1)$ è vera:

$$(-1)^{2(k+1)+1} = (-1)^{2k+1+2} \overset{\text{Prop. 6.3.3 (b)}}{=} (-1)^2(-1)^{2k+1} \overset{\text{(a)}}{=} 1(-1)^{2k+1} \overset{P(k)\text{ vera}}{=} 1 \cdot (-1) = -1.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Proposizione 6.3.8. *Valgono le seguenti:*

(a) *Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pari, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari in $\mathbb{R}$.*
(b) *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari, la funzione $x \mapsto x^n$ è dispari in $\mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Dimostriamo che, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pari, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari in $\mathbb{R}$, equivalentemente,

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}\ (-x)^{2k} = x^{2k}. \tag{6.3.2}$$

Ragioniamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $P(k)$ la proposizione

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (-x)^{2k} = x^{2k}.$$

Per $k = 1$ l'affermazione è vera, in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$(-x)^2 = (-x)(-x) = (-1)x(-1)x = (-1)^2 x^2 \overset{\text{Lemma 6.3.7}}{=} 1 \cdot x^2 = x^2.$$

Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e supponiamo che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^{2k} = -x^{2k}.$$

Dimostriamo che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^{2(k+1)} = x^{2(k+1)}$$

ossia

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^{2k+2} = x^{2k+2}.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$(-x)^{2k+2} = (-x)^{2k}(-x)^2 \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} x^{2k}(-x)^2 \overset{(P1) vera}{=} x^{2k}x^2 = x^{2k+2}.$$

Abbiamo quindi dimostrato, per induzione, (6.3.2).
(b):
Dimostriamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ dispari, la funzione $x \mapsto x^n$ è dispari in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}. \tag{6.3.3}$$

Ragioniamo per induzione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $P(k)$ la proposizione

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}.$$

Per $k = 0$ l'affermazione è vera:

$$(-x)^1 = -x = -x^1.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ e supponiamo che

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}.$$

Dimostriamo che

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (-x)^{2(k+1)+1} = -x^{2(k+1)+1}$$

ossia
$$\forall x \in \mathbb{R}\ (-x)^{2k+3} = -x^{2k+3}.$$
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:
$$(-x)^{2k+3} = (-x)^{2k+1}(-x)^2 \overset{\text{Hp. induttiva}}{=} -x^{2k+1}(-x)^2 \overset{(a)}{=} -x^{2k+1}x^2 = -x^{2k+3}.$$
Abbiamo quindi dimostrato, per induzione, (6.3.3). □

Proposizione 6.3.9 (Segno della funzione potenza n-esima). *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. allora*
$$x \mapsto x^n \textit{ è nulla in } 0.$$
Se n è pari, $n \geq 2$, allora
$$x \mapsto x^n \textit{ è positiva in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
Se n è dispari, allora
$$x \mapsto x^n \textit{ è positiva in } (0, \infty)$$
$$x \mapsto x^n \textit{ è negativa in } (-\infty, 0).$$

DIMOSTRAZIONE.
Per l'Esercizio 5.2.10 $0^n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Per induzione dimostriamo che per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$$x \mapsto x^n \text{ è positiva in } (0, \infty).$$
Se $n = 1$ e $x > 0$ allora, ovviamente, $x^1 > 0$. Dunque:
$$x \mapsto x^1 \text{ è positiva in } (0, \infty).$$
Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e supponiamo che
$$x \mapsto x^n \text{ sia positiva in } (0, \infty).$$
Dimostriamo che
$$x \mapsto x^{n+1} \text{ è positiva in } (0, \infty).$$
Se $x > 0$ abbiamo, per l'ipotesi induttiva,
$$x^n > 0.$$
Moltiplicando questa disuguaglianza per il numero positivo x otteniamo
$$x^{n+1} > 0.$$
Abbiamo quindi dimostrato, per induzione, che
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \ x \mapsto x^n \text{ è positiva in } (0, \infty). \tag{6.3.4}$$

Dimostriamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ n \text{ pari } \ x \mapsto x^n \text{ è positiva in } (-\infty, 0). \tag{6.3.5}$$

Dalla Proposizione 6.3.8, se n è pari la funzione $x \mapsto x^n$ è pari in $\mathbb{R}$.
Allora si ha, per ogni $x < 0$,

$$x^n = (-x)^n \overset{-x>0+(6.3.4)}{>} 0.$$

Dalla Proposizione 6.3.8, se n è dispari la funzione $x \mapsto x^n$ è dispari in $\mathbb{R}$.
Allora si ha, per ogni $x < 0$,

$$x^n = (-(-x))^n = (-1)^n(-x)^n \overset{\text{Lemma 6.3.7}}{=} -(-x)^n \overset{-x>0+(6.3.4)}{<} 0.$$

□

Proposizione 6.3.10 (Monotonia della funzione potenza). *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
Se n è pari, allora

$$x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } [0, \infty).$$

$$x \mapsto x^n \text{ è strettamente decrescente in } (-\infty, 0].$$

Se n è dispari, allora

$$x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per induzione dimostriamo che, preso $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } [0, \infty).$$

Se $n = 1$ è ovvio. Se $0 < x < y$ abbiamo, ovviamente,

$$0^1 < x^1 < y^1.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che

$$x \mapsto x^n \text{ sia strettamente crescente in } [0, \infty).$$

Dimostriamo che

$$x \mapsto x^{n+1} \text{ è strettamente crescente in } [0, \infty).$$

Se $0 < x < y$ abbiamo, per l'ipotesi induttiva e l'Esercizio 5.2.10

$$0^n = 0 < x^n < y^n.$$

Moltiplicando queste disuguaglianze per il numero positivo x otteniamo

$$0 < x^{n+1} < xy^n.$$

Moltiplicando $0 < x < y$ per il numero positivo y^n otteniamo

$$0 < xy^n < y^{n+1}.$$

Dunque:

$$0 < x^{n+1} < xy^n < y^{n+1}.$$

da cui

$$0 < x^{n+1} < y^{n+1}.$$

per la proprietà transitiva.
Abbiamo quindi dimostrato, per induzione, che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\; x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } [0, \infty). \tag{6.3.6}$$

Dimostriamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \text{ pari } \;\; x \mapsto x^n \text{ è strettamente decrescente in } (-\infty, 0]. \tag{6.3.7}$$

Dalla Proposizione 6.3.8, se n è pari la funzione $x \mapsto x^n$ è pari in $\mathbb{R}$.
Allora, se $x < y < 0$, da cui $0 < (-y) < (-x)$, si ha

$$x < y < 0 \Leftrightarrow 0 < (-y) < (-x) \Leftrightarrow (-x) > (-y) > 0 \overset{(6.3.6)}{\Rightarrow} (-x)^n > (-y)^n > 0$$
$$\overset{\text{Prop. 6.3.8}}{\Rightarrow} x^n > y^n > 0 = 0^n.$$

La conclusione segue.
Congiungendo (6.3.6) e (6.3.7) otteniamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \text{ dispari } \;\; x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } \mathbb{R}.$$

Dimostriamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \text{ dispari } \;\; x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } (-\infty, 0]. \tag{6.3.8}$$

Dalla Proposizione 6.3.8, se n è dispari la funzione $x \mapsto x^n$ è dispari in $\mathbb{R}$.
Allora, se $x < y < 0$, da cui $0 < (-y) < (-x)$. Si ha da

$$x < y < 0 \Leftrightarrow 0 < (-y) < (-x) \Leftrightarrow (-x) > -(-y) > 0 \overset{(6.3.6)}{\Rightarrow} (-x)^n > (-y)^n > 0$$
$$\overset{\text{Prop. 6.3.8}}{\Rightarrow} -x^n > -y^n > 0 \Leftrightarrow x^n < y^n < 0 = 0^n.$$

Ciò dimostra che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \text{ dispari } \;\; x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } (-\infty, 0].$$

Congiungendo (6.3.6) e (6.3.8) otteniamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \text{ dispari } \; x \mapsto x^n \text{ è strettamente crescente in } \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 6.3.11. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dimostrare che

$$x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

Sol.: procedere per induzione (vedi dispense prof. Dore).

Esercizio 6.3.12. Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} > 0.$$

Sol:
Non è restrittivo supporre $x > y$ (se non fosse cosí basterebbe invertire i ruoli di x e di y in quanto scritto sotto).
Dalla Proposizione 6.3.10

$$x > y \overset{\text{Prop. 6.3.10}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^n - y^n > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \overset{\text{Esercizio 6.3.11}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} > 0 \\ x - y > 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} > 0.$$

Esercizio 6.3.13. Sia $x \in \mathbb{R}^+$. Dimostrare che valgono le seguenti:

(a) se $x \geq 1$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ allora $x^n \geq x$
(b) se $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ allora $0 \leq x^n \leq x$.

Sol:
(a):
Per induzione.
per $n = 1$: ovvia.
Sia vera per n. Allora

$$x^{n+1} = xx^n \overset{x>0+\text{Hp. induttiva}}{\geq} x^2 = xx \overset{x\geq 1}{\geq} x.$$

(b):
Applicare (a) a $y = \frac{1}{x}$, che risulta essere > 1.

Proposizione 6.3.14. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e si consideri $f_n : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $f_n(x) = x^n$.*
Tale funzione è biunivoca.

DIMOSTRAZIONE. La funzione è iniettiva, conseguenza della stretta monotonia, vedi Proposizione 6.3.10.
Dimostriamo la suriettività.
Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, tale che $x^n = a$.
Se $n = 1$ è ovvio. Se $n \geq 2$ si vedano le dispense del prof. Dore. □

Osservazione 6.3.15. Un secondo modo di dimostrare la suriettività è proposto successivamente (v. Proposizione 6.3.19).

Proposizione 6.3.16. *Sia* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *e si consideri* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.
Sono iniettive, suriettive e strettamente crescenti le seguenti funzioni:
se n è pari:
$f_n|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$
$f_n|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$

se n è dispari:
$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f_n|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$
$f_n|_{(-\infty,0]} : (-\infty,0] \to (-\infty,0]$
$f_n|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$
$f_n|_{(-\infty,0)} : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la funzione $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ è strettamente crescente, v. Proposizione 6.3.10, quindi è anche iniettiva.
$Im(f) = [0,\infty)$ per la Proposizione 6.3.14.
Riassumendo, $f_n|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ è iniettiva, suriettiva e strettamente crescente.
Di conseguenza, dovendo essere $f_n(0) = 0$, risulta che $f_n|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ è iniettiva, suriettiva e strettamente crescente.
Se n è dispari, $f_n|_{(-\infty,0]} : (-\infty,0] \to (-\infty,0]$ è invertibile perchè, essendo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una funzione dispari (v. Proposizione 6.3.8), se non lo fosse neppure $f_n|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ potrebbe esserlo.
$f_n|_{(-\infty,0]} : (-\infty,0] \to (-\infty,0]$ è strettamente crescente perché, anche in questo caso, se non lo fosse, neppure $f_n|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ potrebbe esserlo (v. Esercizio 3.2.32).
Dalle affermazioni precedenti segue che se n è dispari allora la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, è invertibile. Che sia strettamente crescente era già noto, v. Proposizione 6.3.10. □

6.3.2. Anticipazione di argomenti avanzati.

Teorema 6.3.17. *Sia* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Si consideri* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.
La funzione f_n *è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n. \tag{6.3.9}$$

Per ogni $x \in]x_0 - 1, x_0 + 1[$, si ha

$$|x| \leq \max\{|x_0 - 1|, |x_0 + 1|\} =: c(x_0).$$

Inoltre, usando l'Esercizio 6.3.11,

$$|x^n - x_0^n| = \left|(x - x_0)\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right| \overset{\text{Dis. triangolare}}{\leq} |x - x_0| \left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right|.$$

Stimiamo l'ultimo termine usando la disuguaglianza triangolare e la stretta monotonia della funzione potenza in $[0,\infty[$ (v. Proposizione 6.3.10):

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}\right| \overset{\text{Esercizio 6.2.8}}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} |x^k x_0^{n-1-k}| \overset{\text{Esercizio 6.2.9}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |x_0|^{n-1-k} \overset{\text{Prop. 6.3.10}}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} c(x_0)^k |x_0|^{n-1-k} =: M(x_0, n).$$

Allora,

$$0 \leq |x^n - x_0^n| \leq M(x_0, n)\,|x - x_0|\,.$$

Dato che $|x - x_0| \to 0$ per x che tende a x_0, si conclude che, per il Teorema dei carabinieri, $|x^n - x_0^n| \to 0$ per x che tende a x_0. Ciò è equivalente, per il Lemma 6.2.10, a (6.3.9).
Dall'arbitrarietà di x_0 segue la tesi. □

Teorema 6.3.18. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si consideri $f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[$, $f_n(x) = x^n$. Essa è una funzione biunivoca.*
Se n è dispari, la funzione $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ è anch'essa biunivoca.

DIMOSTRAZIONE. La iniettività è conseguenza della stretta monotonia, vedi Proposizione 6.4.2. La suriettività segue dalla continuità (Teorema 6.4.5), dalla Proposizione 6.4.6 e dal Teorema di Bolzano (una funzione continua manda intervalli in intervalli). □

L'esistenza della radice n-esima, che vedremo all'inizio del prossimo paragrafo, è una conseguenza della Proposizione 6.3.14. Una dimostrazione alternativa della Proposizione 6.3.14, che poggia su risultati avanzati, è proposta qui.

Proposizione 6.3.19. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e si consideri $f_n : [0,\infty[\to [0,\infty[$, $f_n(x) = x^n$.*
Tale funzione è biunivoca.

DIMOSTRAZIONE. Si ha $f_n([0,\infty[) \subseteq [0,\infty[$, vedi la Proposizione 6.3.9.
La suriettività segue dal fatto che

$$\sup\{f_n(x) : x \in [0,\infty[\} \overset{\text{Prop. 6.3.10}}{=} \lim_{x\to\infty} f_n(x) \overset{\text{Esercizio 6.3.36}}{=} +\infty$$

che, per la Proposizione 6.3.9 risulta

$$f_n(0) = 0,$$

dalla continuità (Teorema 6.3.17) e dal Teorema di Bolzano (una funzione continua manda intervalli in intervalli).
Si noti che la funzione è anche iniettiva, conseguenza della stretta monotonia, vedi Proposizione 6.3.10. $\square$

6.3.3. Radice n-esima.

Per la Proposizione 6.3.16 se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si hanno

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = x^n \qquad \text{con } n \text{ dispari}$$

e

$$f_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \qquad f_n(x) = x^n \qquad \text{con } n \text{ pari}$$

biunivoche e strettamente crescenti.
Dunque tali funzioni hanno inversa.
Se n è dispari e $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ è quell'unico numero reale che, elevato a n, dà x.
Se n è pari e $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $\sqrt[n]{x}$ è quell'unico numero reale non negativo che, elevato a n, dà x.

Definizione 6.3.20. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R}$.
Se n è dispari chiamiamo radice n-esima quell'unico numero reale y tale che $y^n = x$.
Se n è pari e $x \geq 0$ chiamiamo radice n-esima quell'unico numero reale **non negativo** y tale che $y^n = x$. Tale numero lo denotiamo $\sqrt[n]{x}$.

Definizione 6.3.21. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$, allora l'elemento $\sqrt[n]{x}$ lo denotiamo anche col simbolo $x^{\frac{1}{n}}$.

Rappresentiamo qui sotto i grafici della funzione $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ per alcuni numeri naturali pari e deduciamone da lì alcune proprietà che verranno poi giustificate.
Nella figura qui sotto, leggere il simbolo $x^{\frac{1}{n}}$ come $\sqrt[n]{x}$

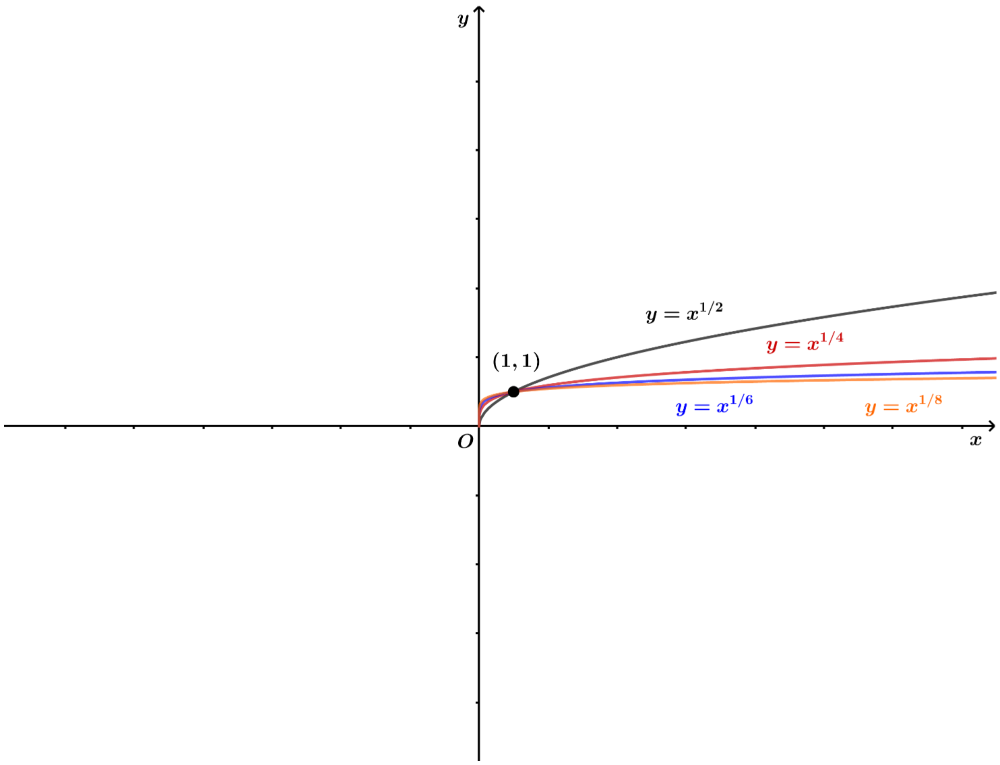

Figura 5. Grafico di $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con n pari

Ne possiamo dedurre le seguenti proprietà:
$\mathscr{D}(f) = [0, +\infty[$;
$Im(f) = [0, +\infty[$;
$f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$;
$Gr(f)$ contiene il punto $(1\,1)$;
f è strettamente crescente.

Consideriamo ora n numero naturale dispari. Qui sotto i grafici di $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ per alcuni valori dispari di n.
Attenzione: nella figura qui sotto, leggere il simbolo $x^{\frac{1}{n}}$ come $\sqrt[n]{x}$.

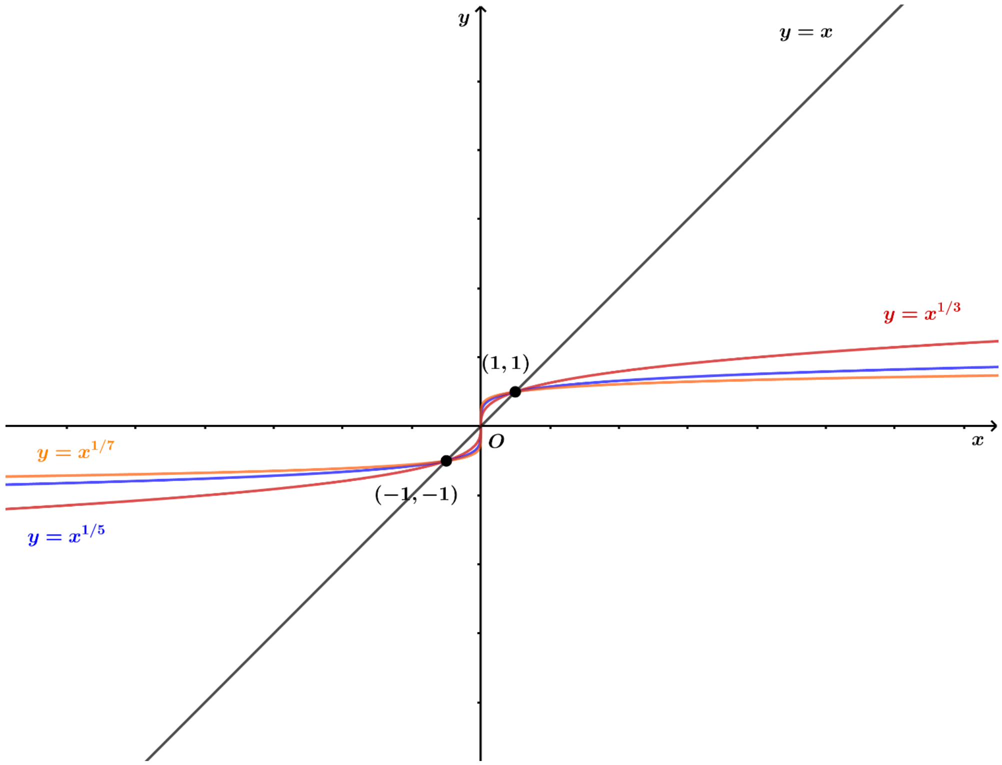

Figura 6. Grafico di $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con n dispari

Deduciamo che:
Il dominio massimale è $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = \mathbb{R}$;
$f(x) < 0$ per $x < 0$, $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$;
$Gr(f)$ passa per i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$;
f è strettamente crescente.

Lemma 6.3.22. *Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si hanno:*

$$\sqrt[n]{0} = 0, \qquad \sqrt[n]{1} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dagli Esercizi 5.2.10 e 5.2.11. □

Teorema 6.3.23. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
Sono biunivoche e strettamente crescenti le seguenti funzioni:
- *se n è pari:*

$sqrt[n] : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $sqrt[n](x) := \sqrt[n]{x}$
e la sua restrizione

$sqrt[n]|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$.

- *se n è dispari:*

$sqrt[n] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $sqrt[n](x) := \sqrt[n]{x}$,
e le sue restrizioni
$sqrt[n]|_{[0,\infty)} : [0,\infty) \to [0,\infty)$
$sqrt[n]|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to (0,\infty)$
$sqrt[n]|_{(-\infty,0]} : (-\infty,0] \to (-\infty,0]$
$sqrt[n]|_{(-\infty,0)} : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla Proposizione 6.3.16. □

Proposizione 6.3.24. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
Se n è pari valgono le seguenti per ogni $x, y \in [0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^n < y^n \\
\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^n = y^n \\
\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leq y^n.
\end{aligned}$$

Se n è dispari valgono le seguenti per ogni $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x < y \quad \Leftrightarrow \quad x^n < y^n \\
\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x = y \quad \Leftrightarrow \quad x^n = y^n \\
\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x^n \leq y^n.
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE.
Se n è pari, per ogni $x, y \in [0,\infty)$ valgono le seguenti:

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \overset{\text{Prop.6.3.16}}{\Rightarrow} \quad x = (\sqrt[n]{x})^n < (\sqrt[n]{y})^n = y \quad \overset{\text{Prop.6.3.16}}{\Rightarrow} \quad x^n < y^n$$

e

$$x^n < y^n \quad \overset{\text{Prop.6.3.23}}{\Rightarrow} \quad x = \sqrt[n]{x^n} < \sqrt[n]{y^n} = y \quad \overset{\text{Prop.6.3.23}}{\Rightarrow} \quad \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}.$$

□

Proposizione 6.3.25 (n pari). *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n pari.*
Sia $x \geq 0$.
Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\sqrt[n]{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x^n > 0$$

$$\sqrt[n]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x^n = 0$$

e

$$\sqrt[n]{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x^n > 1$$

$$\sqrt[n]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x^n = 1$$

$$\sqrt[n]{x} < 1 \Leftrightarrow (0 \leq) x < 1 \Leftrightarrow x^n < 1.$$

DIMOSTRAZIONE.
Seguono dalla Proposizione 6.3.24 e ricordando che $0^n = 0 = \sqrt[n]{0}$ e $1^n = 1 = \sqrt[n]{1}$. □

Proposizione 6.3.26 (n dispari). *Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, n dispari.*
Sia $x \in \mathbb{R}$.
Allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\sqrt[n]{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$\sqrt[n]{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x^n > 1$$

$$\sqrt[n]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow x^n = 1$$

$$\sqrt[n]{x} = -1 \Leftrightarrow x = -1 \Leftrightarrow x^n = -1$$

$$\sqrt[n]{x} < -1 \Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x^n < -1.$$

DIMOSTRAZIONE. Seguono dalla Proposizione 6.3.24 e ricordando che $0^n = 0 = \sqrt[n]{0}$, $1^n = 1 = \sqrt[n]{1}$ e, essendo n dispari, $(-1)^n = -1 = \sqrt[n]{-1}$. □

Proposizione 6.3.27. *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*
Se n è dispari vale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

Se n è pari vale che per ogni $x \in [0, \infty[$ e $y \in]0, \infty[$

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Si ha

$$\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n \overset{\text{Prop. 6.3.5}}{=} \frac{(\sqrt[n]{x})^n}{(\sqrt[n]{y})^n} = \frac{x}{y}.$$

Dunque, per definizione di radice n-esima,

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

□

Corollario 6.3.28. *Siano $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
Se n è dispari

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

Se n è pari e $x > 0$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Segue dalla Proposizione 6.3.27 ricordando che $\sqrt[n]{1} = 1$. □

6.3.4. Potenze con esponente intero. $a \in \mathbb{Z}, a < 0$:

Per definizione $x^a = \dfrac{1}{x^{-a}}$.
Notiamo che abbiamo una frazione. Perchè questa abbia senso, il denominatore non deve annullarsi, pertanto x non può essere zero. Il dominio massimale è quindi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Inoltre, la frazione non può annullarsi perchè il numeratore è 1. Queste due informazioni ci dicono che il grafico della funzione non ha intersezioni con gli assi.
Distinguendo le due situazioni in cui $-a \in \mathbb{N}$ è un numero pari o dispari, possiamo osservare proprietà ulteriori della funzione f a partire dal suo grafico.
Il grafico di f per alcuni valori di $-a$ pari è il seguente:

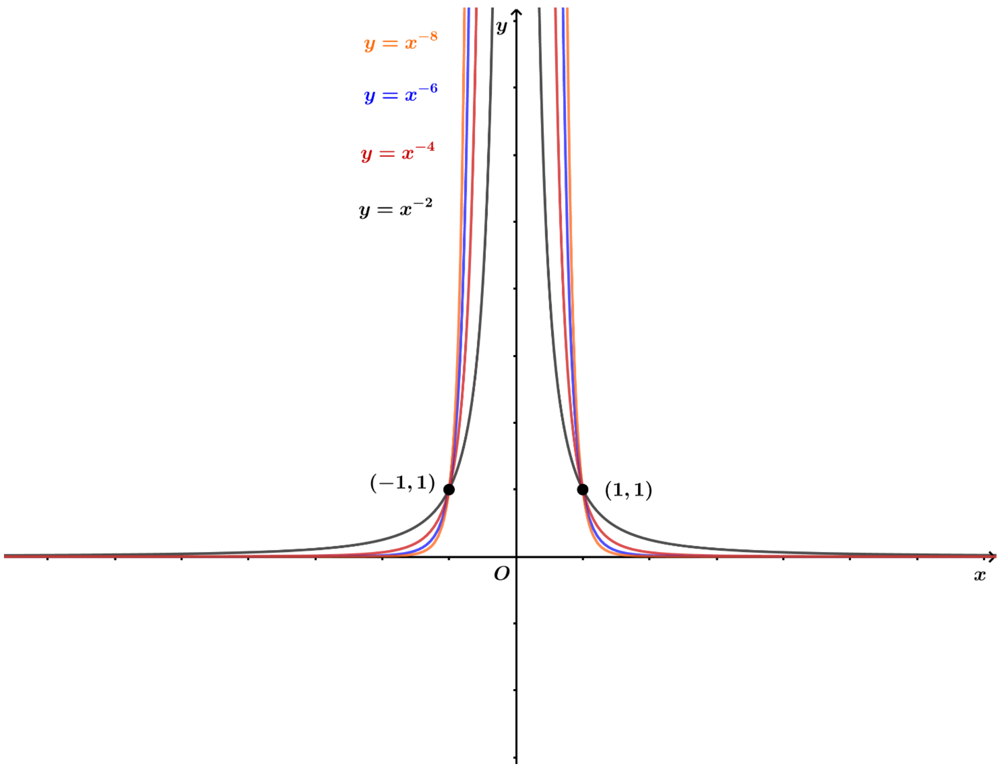

Figura 7. Grafico di $f(x) = x^{-n}$ con n pari

Possiamo quindi dedurre che:
$\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$Im(f) = \mathbb{R}^{+}$;
$Gr(f)$ non interseca gli assi cartesiani e passa per i punti $(-1,1)$ e $(1,1)$;
La funzione f è positiva;
La funzione f è pari e il $Gr(f)$ è simmetrico rispetto all'asse y;
La funzione f è strettamente crescente per $x < 0$ e strettamente decrescente per $x > 0$.

Il grafico di f per alcuni valori di $-a$ dispari è invece il seguente:

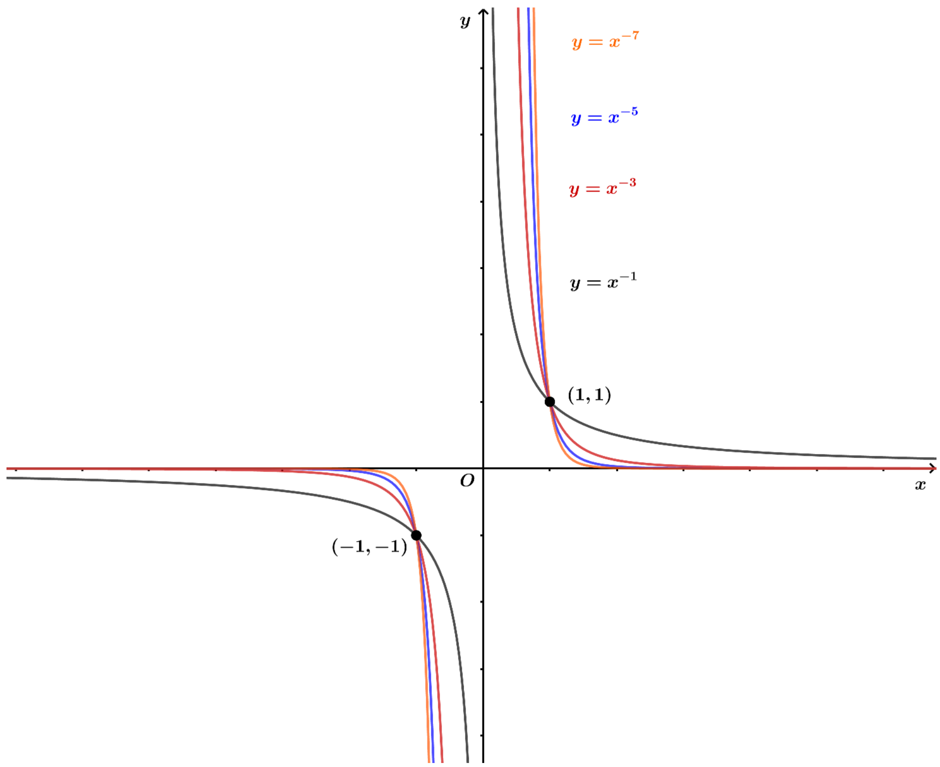

Figura 8. Grafico di $f(x) = x^{-n}$ con n dispari

Possiamo quindi dedurre che:
Il dominio massimale è $\mathscr{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$Gr(f)$ non interseca gli assi cartesiani e passa per i punti $(-1,-1)$ e $(1,1)$;
La funzione f è dispari e $Gr(f)$ è simmetrico rispetto all'origine degli assi;
La funzione f è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$; La funzione f è strettamente decrescente negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$.

Definizione 6.3.29. Se $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiamo

$$x^n := \frac{1}{x^{-n}}. \tag{6.3.10}$$

Osservazione 6.3.30. Si noti che la definizione in (6.3.10) è ben posta. Infatti se $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ allora $-n \in \mathbb{N}$. Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si ha $x^{-n} \neq 0$: se $n \neq 0$ segue dalla Proposizione 6.3.9, se $n = 0$ segue dal fatto che, per definizione, $x^0 = 1$.

Proposizione 6.3.31. *Per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$ e per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ valgono le seguenti:*

(a) $x > 0 \Rightarrow x^n > 0$

(b) $x^n x^m = x^{n+m}$

(c) $(x^n)^m = x^{nm}$.

DIMOSTRAZIONE. (a):
Segue da (a) della Proposizione 6.3.3 e dal fatto che se $x > 0$ allora $\frac{1}{x} > 0$.
(b):
Se $n, m \in \mathbb{N}$ la tesi segue segue da (b) della Proposizione 6.3.3
Siano $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Allora

$$x^n x^m = \frac{1}{x^{-n}} \frac{1}{x^{-m}} = \frac{1}{x^{-n} x^{-m}} = \frac{1}{x^{-n-m}} = \frac{1}{x^{-(n+m)}} \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} x^{n+m}.$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ abbiamo due casi:
Caso $n + m \geq 0$:

$$x^n x^m = x^{n+m-m} x^m$$
$$\overset{n+m\in\mathbb{N}, -m\in\mathbb{N}+\text{Pr. 6.3.3 + Def. 6.3.29}}{=} x^{n+m} x^{-m} \frac{1}{x^{-m}} = x^{n+m}.$$

Caso $n + m < 0$:

$$x^n x^m \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} x^n \frac{1}{x^{-m}} = x^n \frac{1}{x^{(-m-n)+n}} \overset{-n-m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}+\text{Pr. 6.3.3}}{=} x^n \frac{1}{x^{-m-n} x^n} = x^n \frac{1}{x^{-m-n}} \frac{1}{x^n}$$
$$= \frac{1}{x^{-m-n}} = \frac{1}{x^{-(m+n)}} \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} x^{n+m}.$$

(c):
Se $n, m \in \mathbb{N}$ la tesi segue segue da (c) della Proposizione 6.3.3
Siano $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Allora

$$(x^n)^m \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)^m \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right)^{-m}} \overset{\text{Prop. 6.3.3}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{(-n)(-m)}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{nm}} \overset{\text{Es. 6.3.32}}{=} \frac{1}{\frac{1}{x^{nm}}} = x^{nm}.$$

Supponiamo ora $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$.

$$(x^n)^m \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)^m \overset{\text{Es. 6.3.32}}{=} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}\right)^m \overset{\text{Prop. 6.3.3}}{=} \left(\frac{1}{x}\right)^{-nm}$$
$$\overset{-1, nm\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}+\text{caso prec.}}{=} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\right)^{nm} \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{nm} = x^{nm}$$

Supponiamo ora $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

$$(x^n)^m = (x^n)^{-(-m)} \overset{-1\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, -m\in\mathbb{N}+\text{caso prec.}}{=} \left((x^n)^{-1}\right)^{-m} \overset{\text{Def. 6.3.29}}{=} \left(\frac{1}{x^n}\right)^{-m}$$
$$\overset{\text{Es. 6.3.32}}{=} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right)^{-m} \overset{n,-m\in\mathbb{N}+\text{Prop. 6.3.3}}{=} \left(\frac{1}{x}\right)^{n(-m)}$$

$$= \left(\frac{1}{x}\right)^{-1(nm)} \overset{-1,nm\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}+\text{caso prec.}}{=} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}\right)^{nm} = x^{nm}.$$

□

Esercizio 6.3.32. Dimostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (x^n)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sol.:
è il Corollario 6.3.6.

6.3.5. Potenze con esponente razionale. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Conosciamo la definizione di a^n con $n \in \mathbb{N}$ e sappiamo dalle Proposizioni 6.3.25 e 6.3.26 che

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (a > 1 \Rightarrow a^n > 1) \quad \text{e} \quad (0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^n < 1). \tag{6.3.11}$$

Se $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ sappiamo che si definisce (v. Definizione 6.3.29)

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Ricordiamo che, per la Proposizione 6.3.31,

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (a > 0 \Rightarrow a^n > 0) \tag{6.3.12}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad a^n a^m = a^{n+m} \tag{6.3.13}$$

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad (a^n)^m = a^{nm}. \tag{6.3.14}$$

Se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si definisce

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a},$$

dove $\sqrt[n]{a}$ è la radice n-esima di a (v. Definizione 6.3.21).
Sappiamo che, vedi Proposizioni 6.3.25 e 6.3.26,

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1) \quad \text{e} \quad (0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^{\frac{1}{n}} < 1). \tag{6.3.15}$$

Se $a > 0$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, poniamo

$$a^{\frac{1}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{1}{-n}}}.$$

Notiamo quindi che

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (a > 0 \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 0). \tag{6.3.16}$$

Posto $a > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, definiamo

$$a^{\frac{n}{m}} := (a^{\frac{1}{m}})^n.$$

Lemma 6.3.33. *Posto $a > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$,*

$$a^{\frac{n}{m}} := (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x := a^{\frac{1}{m}}$. Allora, usando (6.3.14),

$$(x^n)^m = (x^m)^n = a^n.$$

Dunque $x^n = (a^n)^{\frac{1}{m}}$, cioè la tesi. □

Lemma 6.3.34. *Posto $a > 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$,*

$$(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x := (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}$. Allora, usando (6.3.14),

$$x^{nm} = (x^n)^m = (a^{\frac{1}{m}})^m = a.$$

Dunque

$$x = a^{\frac{1}{nm}}$$

ossia

$$(a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}}.$$

Scambiando i ruoli di m e n si ha la tesi. □

Esaminiamo le proprietà di a^r con $r \in \mathbb{Q}$.

Lemma 6.3.35. *Sia $a > 0$. Valgono le seguenti:*

(P1) *per ogni $r \in \mathbb{Q}$, $a^r > 0$*

(P2) *per ogni $r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0$,*

$$(a > 1 \Rightarrow a^r > 1) \quad e \quad (0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^r < 1)$$

(P3) *per ogni $r, s \in \mathbb{Q}$*

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

(P4) *per ogni $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$*

$$(a > 1 \Rightarrow a^r < a^s) \quad e \quad (0 < a < 1 \Rightarrow a^r > a^s)$$

(P5) *per ogni $r, s \in \mathbb{Q}$,*

$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

DIMOSTRAZIONE. (P1) è ovvia, segue infatti da (6.3.12), (6.3.16).

(P2) : Se $r \in \mathbb{Q}$ con $r > 0$, allora $r = \frac{n}{m}$ con $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La tesi segue da (6.3.11) e (6.3.15).

(P3) : Se $r, s \in \mathbb{Q}$, con $r = \frac{n}{m}$, $s = \frac{n'}{m'}$, si ha, usando (6.3.13),

$$a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{n'}{m'}} = a^{\frac{nm'}{mm'}} a^{\frac{mn'}{mm'}} = (a^{\frac{1}{mm'}})^{nm'} (a^{\frac{1}{mm'}})^{mn'} = (a^{\frac{1}{mm'}})^{nm'+mn'} = a^{\frac{nm'+mn'}{mm'}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}}.$$

(P4) : Se $r, s \in \mathbb{Q}$, con $r = \frac{n}{m}$ e $s = \frac{n'}{m'}$, se $r < s$, cioè se

$$\frac{n'}{m'} - \frac{n}{m} > 0,$$

si ha, per (P3),

$$a^s = a^{\frac{n'}{m'}} = a^{\frac{n'}{m'}-\frac{n}{m}} a^{\frac{n}{m}}.$$

Se $a > 1$, da (P2) si ha

$$a^{\frac{n'}{m'}-\frac{n}{m}} a^{\frac{n}{m}} > 1 \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^r,$$

da cui

$$a^s > a^r.$$

Se invece è $0 < a < 1$, da (P2) si ha

$$a^{\frac{n'}{m'}-\frac{n}{m}} a^{\frac{n}{m}} < 1 \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^r$$

da cui la tesi

(P5) : Se $r, s \in \mathbb{Q}$, con $r = \frac{n}{m}$, $s = \frac{n'}{m'}$, si ha, usando il Lemma 6.3.33,

$$(a^{\frac{n}{m}})^{\frac{n'}{m'}} = \left(\left((a^{\frac{1}{m}})^n\right)^{\frac{1}{m'}}\right)^{n'}$$

$$\overset{\text{L. 6.3.33}}{=} \left(\left((a^n)^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m'}}\right)^{n'} \overset{\text{L. 6.3.34}}{=} \left((a^n)^{\frac{1}{mm'}}\right)^{n'}$$

$$\overset{\text{L. 6.3.33}}{=} \left((a^n)^{n'}\right)^{\frac{1}{mm'}} \overset{(6.3.14)}{=} \left(a^{nn'}\right)^{\frac{1}{mm'}} \overset{\text{L. 6.3.33}}{=} a^{\frac{nn'}{mm'}}.$$

□

6.3.6. Limiti con le potenze aventi esponente n e $1/n$.

Esercizio 6.3.36. Usando l'Esercizio 5.2.6 dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Sol: Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = \lim_{x\to+\infty} (1+x-1)^k \overset{\text{Esercizio 5.2.6}}{\geq} \lim_{x\to+\infty} (1+k(x-1)) = +\infty$$

e la tesi segue dal criterio del confronto.

Esercizio 6.3.37. Usando l'Esercizio 5.2.6 dimostrare che se $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k \left[\begin{array}{ll} = +\infty & \text{se } k \text{ è pari} \\ = -\infty & \text{se } k \text{ è dispari.} \end{array}\right.$$

Sol: Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} x^k = \lim_{x\to-\infty} (-|x|)^k = \lim_{x\to-\infty} (-1)^k |x|^k$$

Se k è pari:

$$\lim_{x\to-\infty} (-1)^k |x|^k = \lim_{x\to-\infty} |x|^k \overset{\text{Esercizio 6.3.36}}{=} +\infty$$

Se k è dispari:

$$\lim_{x\to-\infty} (-1)^k |x|^k = \lim_{x\to-\infty} -|x|^k \overset{\text{Esercizio 6.3.36}}{=} -\infty$$

Esercizio 6.3.38. Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Sol:
Se $n = 1$ è ovvia.
Sia $n \neq 0, 1$. Preso $M \in \mathbb{R}^+$, si ha (v. Definizione 6.3.20) $M = \sqrt[n]{M^n}$ allora, per la Proposizione 6.3.24

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \; \sqrt[n]{x} > M \overset{\text{Prop. 6.3.24}}{\Leftrightarrow} x > M^n =: K(M) \in \mathbb{R}^+.$$

Dunque,

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \exists K(M) \;:\; \sqrt[n]{x} > M \; \forall x > K(M).$$

Ciò significa che

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Esercizio 6.3.39. Usando l'Esercizio 5.2.6 dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ a > 1.$$

Sol: Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \lim_{n\to+\infty} (1 + a - 1)^n \overset{\text{Esercizio 5.2.6}}{\geq} \lim_{n\to+\infty} (1 + n(a-1)) = +\infty$$

e la tesi segue dal criterio del confronto.

Lemma 6.3.40. *Sia $a \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \begin{bmatrix} = +\infty & \textit{se } a > 1 \\ = 1 & \textit{se } a = 1 \\ = 0 & \textit{se } |a| < 1 \\ \nexists & \textit{se } a \leq -1 \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE.
$a > 1$:
vedi Esercizio 6.3.39.
$a = 1$:
vedi l'Esercizio 5.2.11.
$a = 0$:
vedi l'Esercizio 5.2.10.
$|a| < 1$, con $a \neq 0$:
Ricordando che data una successione (b_n), è

$$|b_n| \to 0 \Leftrightarrow b_n \to 0,$$

basta dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} |a^n| = 0.$$

Si ha

$$|a^n| = \frac{1}{\frac{1}{|a^n|}} \overset{\text{Es. 5.3.35}}{=} \frac{1}{\frac{1}{|a|^n}} = \overset{\text{Esercizio 6.3.32}}{=} \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} = \frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n}.$$

Essendo

$$\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|} > 1$$

si ha dall'Esercizio 6.3.39

$$\lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} = \frac{1}{\left|\frac{1}{a}\right|^n} = 0.$$

$a = -1$:

Dal Lemma 6.3.7 si deduce che $((-1)^{2n})$ e $((-1)^{2n+1})$ sono due sottosuccessioni di $((-1)^n)$ aventi limiti diversi:

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \tag{6.3.17}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -1 = -1 \tag{6.3.18}$$

quindi non esiste il limite di $((-1)^n)$.
$a < -1$:
$a < -1$ allora $|a| > 1$. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}(a)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}(-|a|)^{2n} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}|a|^{2n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}\lim_{n\to+\infty}|a|^{2n} \overset{(6.3.17)}{=} \lim_{n\to+\infty}|a|^{2n} \overset{|a|>1}{=} +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}(a)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}(-|a|)^{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n}|a|^{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(-1)^{2n+1}\lim_{n\to+\infty}|a|^{2n+1} \overset{(6.3.18)}{=} \lim_{n\to+\infty} -|a|^{2n+1} \overset{|a|>1}{=} -\infty$$

□

Lemma 6.3.41. *Se $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. $(a = 1)$: ovvio.
$(a > 1)$: Se $a > 1$, dalle Proposizioni 6.3.25 e 6.3.26 segue che $\sqrt[n]{a} > 1$, quindi

$$\exists\ h_n > 0 : \sqrt[n]{a} = 1 + h_n.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. Esercizio 5.2.6)

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n.$$

Quindi

$$0 < h_n \leq \frac{a-1}{n}.$$

Per il teorema dei carabinieri $\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, quindi $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.
$(0 < a < 1)$: Se $0 < a < 1$, la tesi segue riconducendosi al caso precedente. Infatti, per il Corollario 6.3.28,

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$

con $\frac{1}{a} > 1$. □

6.3.7. Potenze con esponente reale.

Lemma 6.3.42. *[Approssimazione di un numero reale con numeri razionali] Sia $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo*

$$x_n := \frac{[10^n x]}{10^n}.$$

Allora

(i) (x_n) *è una successione in $\mathbb{Q}$ e crescente*

(ii) (x_n) *è una successione limitata e*

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$$

(iii) $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

DIMOSTRAZIONE. (i) : Si ha

$$x_n \leq x_{n+1} \Leftrightarrow \frac{[10^n x]}{10^n} \leq \frac{[10^{n+1} x]}{10^{n+1}} \Leftrightarrow 10[10^n x] \leq [10^{n+1} x].$$

Dimostriamo quest'ultima disuguaglianza. Dato che $[10^n x] \leq 10^n x$, allora

$$10[10^n x] \leq 10 \cdot 10^n x = 10^{n+1} x$$

e quindi, per definizione di parte intera.

$$10[10^n x] \leq [10^{n+1} x].$$

(ii) : Dimostriamo che

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}, \tag{6.3.19}$$

da cui deriva anche la limitatezza.
La (6.3.19) è equivalente a

$$\frac{[10^n x]}{10^n} \leq x < \frac{[10^n x]}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

ossia a

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1$$

che sappiamo essere vera.
(iii) : Da (i) e (ii) la successione (x_n) è convergente. Inoltre da (6.3.19)

$$0 \leq x - x_n < \frac{1}{10^n}$$

quindi, per il teorema dei carabinieri, $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. □

Lemma 6.3.43. *Se (q_n) è una successione in $\mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora*

$$(q_n \to 0 \ \Rightarrow \ a^{q_n} \to 1).$$

DIMOSTRAZIONE. Iniziamo col dimostrare il lemma per $a > 1$.
Per il Lemma 6.3.41,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Quindi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left(1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N(\varepsilon)}} \quad \text{e} \quad a^{\frac{1}{N(\varepsilon)}} < 1 + \varepsilon\right). \tag{6.3.20}$$

Sia (q_n) una successione in $\mathbb{Q}$ tale che $q_n \to 0$. Allora, preso $\varepsilon > 0$ e il corrispondente $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ proveniente da (6.3.20), si ha

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : -\frac{1}{N(\varepsilon)} < q_n < \frac{1}{N(\varepsilon)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}.$$

Dato che $a > 1$, usando (P4) del Lemma 6.3.35 otteniamo che

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N(\varepsilon)}} < a^{q_n} < a^{\frac{1}{N(\varepsilon)}} < 1 + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}.$$

In particolare abbiamo dimostrato che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : 1 - \varepsilon < a^{q_n} < 1 + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}.$$

Ciò è esattamente quel che volevamo dimostrare.

Se invece $0 < a < 1$ allora la tesi segue, considerando che

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

$\square$

Teorema 6.3.44. *Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Allora esiste $L > 0$ tale che*

$$\forall (q_n) \text{ successione in } \mathbb{Q} \qquad (q_n \to \alpha \quad \Rightarrow \quad a^{q_n} \to L).$$

Ciò permette di dare la seguente definizione.

Definizione 6.3.45. Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Si pone $a^\alpha := \lim_{n\to+\infty} a^{q_n}$ dove (q_n) è una successione in $\mathbb{Q}$, tale che $q_n \to \alpha$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.3.44. Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
$(a = 1)$: ovvio.
$(a > 1)$: Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e sia (r_n) una successione in $\mathbb{Q}$, crescente e convergente a α (una successione siffatta esiste, v. Lemma 6.3.42). Dato che $a > 1$ e (r_n) è crescente, allora per (P4) in Lemma 6.3.35 anche la successione (a^{r_n}) è crescente. Inoltre (a^{r_n}) è anche una successione limitata: infatti, se $m \in \mathbb{Z}$ è tale che $m > \alpha$ allora

$$a^{r_n} < a^m \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque, essendo (a^{r_n}) una successione crescente e limitata essa è convergente ed avrà un limite $L \in \mathbb{R}$. Dovrà essere $L > 0$, in quanto da (P1) in Lemma 6.3.35 e dalla monotonia di (a^{r_n}) si ha

$$0 < a^{r_1} \leq L$$

Sia (q_n) una successione in $\mathbb{Q}$ convergente a α. Dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = L.$$

Si ha

$$a^{q_n} = a^{q_n - r_n} a^{r_n}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} (q_n - r_n) = \alpha - \alpha = 0,$$

allora per il Lemma 6.3.43

$$\lim_{n\to+\infty} a^{q_n - r_n} = 1$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a^{q_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{q_n - r_n} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = L.$$

Ciò conclude la dimostrazione nel caso $a > 1$.
$(a < 1)$: Basta osservare che per ogni (q_n) successione in $\mathbb{Q}$

$$a^{q_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{q_n}}$$

e usare quanto già si sa ($\frac{1}{a} > 1$). □

Esaminiamo le proprietà di a^r con $r \in \mathbb{R}$.

Proposizione 6.3.46. *Sia $a > 0$. Valgono le seguenti:*

(P1) *per ogni $r \in \mathbb{R}$, $a^r > 0$*
(P2) *per ogni $r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$,*

$$(a > 1 \ \Rightarrow\ a^r > 1) \quad e \quad (0 < a < 1 \ \Rightarrow\ 0 < a^r < 1)$$

(P3) *per ogni* $r, s \in \mathbb{R}$
$$a^r a^s = a^{r+s}$$

(P4) *per ogni* $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$
$$(a > 1 \Rightarrow a^r < a^s) \quad e \quad (0 < a < 1 \Rightarrow a^r > a^s)$$

(P5) *per ogni* $r, s \in \mathbb{R}$,
$$(a^r)^s = a^{rs}.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è basata sull'analogo risultato per potenze razionali, Lemma 6.3.35. Ad esempio, dimostriamo la (P3).
(P3): Se $r, s \in \mathbb{Q}$ l'affermazione è vera per la (P3) del Lemma 6.3.35.
Siano $r, s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Siano (r_n) e (s_n) successioni in $\mathbb{Q}$ convergenti, rispettivamente, a r e a s. Allora per (P3) del Lemma 6.3.35
$$a^{r_n} a^{s_n} = a^{r_n + s_n}.$$
Dato che $r_n + s_n \to r + s$, dalla Definizione 6.3.45 si ottiene la tesi.
Se $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $s \in \mathbb{Q}$, si consideri solo la successione (r_n) in $\mathbb{Q}$ convergente a r. Dato che $r_n + s \in \mathbb{Q}$ e $r_n + s \to r + s$ e
$$a^{r_n} a^s = a^{r_n + s}$$
si può passare al limite e dalla Definizione 6.3.45 ottenere la tesi. □

Esercizio 6.3.47. Dimostrare che per ogni $r, s \in \mathbb{R}$
$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}.$$
Sol:
Per la Proposizione 6.3.46 (P3) si ha
$$a^r = a^{r-s} a^s$$
da qui la tesi.

6.3.8. Anticipazione di argomenti avanzati.

Teorema 6.3.48. *Per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$, *la funzione potenza* $f_\alpha :]0, \infty[\to]0, \infty[$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ *è continua, ossia*
$$\lim_{x \to x_0} x^\alpha = {x_0}^\alpha \qquad \forall x_0 \in]0, \infty[.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla continuità delle funzioni esponenziale e logaritmica (v. Teoremi 6.4.5 e 6.6.4), dal fatto che
$$x^\alpha = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a(x)},$$
e dall'algebra dei limiti, che comporta che la composizione di funzioni continue è continua. □

Come applicazione delle proprietà di stretta monotonia delle funzioni esponenziale e logaritmica si ha la stretta monotonia della funzione $x \mapsto x^a$, per ogni numero reale $a > 0$, $a \neq 1$.

Proposizione 6.3.49. *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la funzione potenza $f_\alpha :]0, \infty[\to]0, \infty[$, $f_a(x) = x^a$ è strettamente crescente, ossia*

$$x_1, x_2 \in]0, \infty[\quad (x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^a < x_2^a).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $a > 1$ segue dalla stretta crescenza delle funzioni esponenziale e logaritmica aventi base > 1, dato che

$$x \mapsto x^a = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a(x)},$$

che è strettamente crescente in quanto composizione di funzioni strettamente crescenti.
Se $0 < a < 1$ segue dalla stretta decrescenza delle funzioni esponenziale e logaritmica aventi base in $]0, 1[$. Infatti

$$x \mapsto x^a = a^{\log_a(x^\alpha)} = a^{\alpha \log_a(x)},$$

che è strettamente crescente in quanto composizione di funzioni strettamente decrescenti (v. Esercizio 3.2.23). $\square$

Esercizio 6.3.50. Usando gli Esercizi 6.3.36 e 6.3.38 e la Proposizione 6.4.2 dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Sol:
Se $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ segue dall'Esercizio 6.3.36.
Se $\alpha \geq 1$ allora, dalla Proposizione 6.4.2

$$x^\alpha \geq x \qquad \forall x > 1.$$

Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha \geq \lim_{x \to +\infty} x = +\infty.$$

e la tesi segue dal criterio del confronto.
Sia $0 < \alpha < 1$. Essendo $\sup \mathbb{N} = +\infty$, esiste $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tale che

$$k > \frac{1}{\alpha}.$$

Allora, per ogni $x > 1$, per la Proposizione 6.4.2

$$x^\alpha > x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}. \tag{6.3.21}$$

Per l'Esercizio 6.3.38 si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[k]{x} = +\infty.$$

Allora, per (6.3.21) e per il Teorema del confronto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \qquad \forall \alpha \in]0,1[.$$

Se $\alpha = 0$ è ovvio ($x^0 = 1$ per ogni x).
Se $\alpha < 0$, basta osservare che

$$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$$

e applicare quanto già noto, essendo $-\alpha > 0$.

Esercizio 6.3.51. Usando l'Esercizio 6.3.50 dimostrare che

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{bmatrix} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0. \end{bmatrix}$$

Sol:
Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y^\alpha}$$

e la tesi segue dall'Esercizio 6.3.50.

Teorema 6.3.52. *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la funzione potenza $f_\alpha :]0,\infty[\to]0,\infty[$, $f_a(x) = x^a$ è biunivoca.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 6.3.49 si ha che f_α è iniettiva e che $f_\alpha(]0,\infty[)$ è contenuto in un intervallo i cui estremi sono dati dagli estremi inferiori e superiori (non inclusi nell'immagine). Dal Teorema 6.3.48 e dal Teorema di Bolzano si ha che $f_\alpha(]0,\infty[)$ è proprio l'intervallo in cui estremi sono dati dagli estremi inferiori e superiori (non inclusi nell'immagine). Dagli Esercizi 6.3.50 e 6.3.51 deduciamo che $\inf f_\alpha = 0$ e $\sup f_\alpha = +\infty$. Dunque

$$f_\alpha(]0,\infty[) =]0,\infty[.$$

$\square$

6.4. Funzione esponenziale

Consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = a^x$, dove $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Tale funzione viene usualmente indicata $\exp_a$ anziché f.

Definizione 6.4.1. La funzione esponenziale di base $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, è la funzione

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, \infty[, \qquad \exp_a(x) = a^x.$$

Il caso $a = 1$ è elementare, dato che $1^x = 1$ qualunque sia x, generando così la funzione costante uguale a 1. Ci dedichiamo quindi a esaminare le proprietà principali delle funzioni $\exp_a$, dove $0 < a < 1$ o $a > 1$. I loro grafici sono rispettivamente

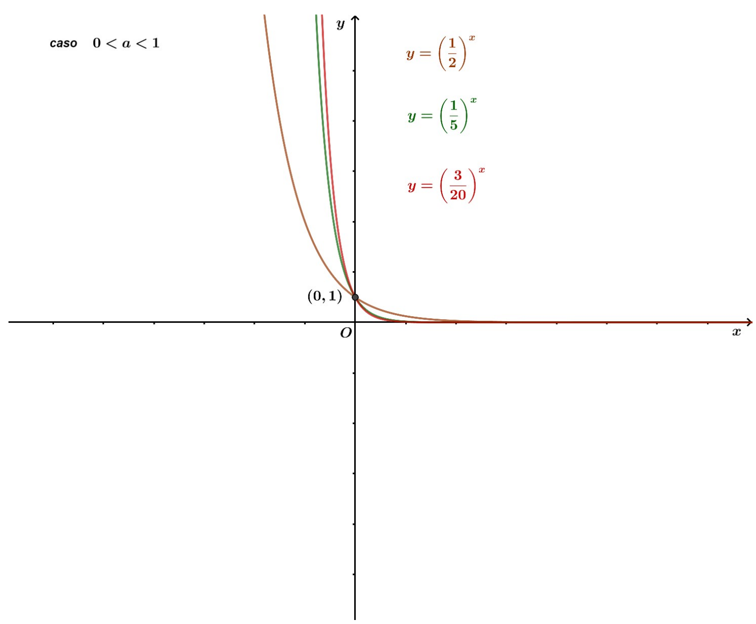

Figura 9. Grafico di $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

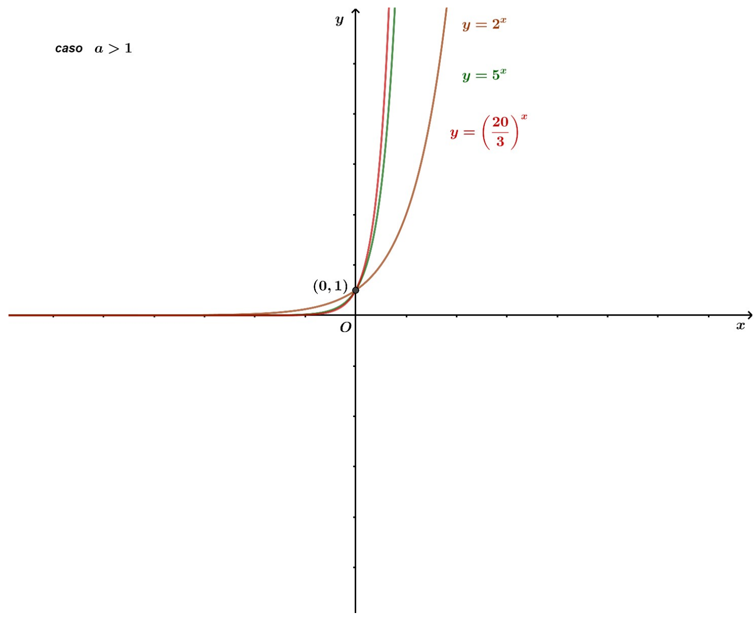

Figura 10. Grafico di $f(x) = a^x$ con $a > 1$

Da essi possiamo dedurre le seguenti proprietà:
$\mathscr{D}(\exp_a) = \mathbb{R}$;
$Im(\exp_a) = \mathbb{R}^+$;
$G(\exp_a)$ si trova nel semipiano delle $y > 0$ e interseca l'asse y in $]0,1[$;
$a^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
$\exp_a$ è strettamente decrescente se $0 < a < 1$ e strettamente crescente se $a > 1$ (v. Proposizione 6.4.2)
Formalizziamo e dimostriamo alcune proprietà della funzione esponenziale.

Proposizione 6.4.2. *$\exp_a : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ è una funzione strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue da (P4) in Proposizione 6.3.46. □

Proposizione 6.4.3. *Se (q_n) è una successione in $\mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora*

$$(q_n \to 0 \;\Rightarrow\; a^{q_n} \to 1).$$

DIMOSTRAZIONE. Stessa dimostrazione del Lemma 6.3.43, considerando ora $q_n \in \mathbb{R}$ anzichè $q_n \in \mathbb{Q}$. □

Proposizione 6.4.4. *Se (α_n) è una successione in $\mathbb{R}$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$ allora*

$$\lim_{n \to +\infty} a^{\alpha_n} = a^{\alpha}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia (α_n) una successione in $\mathbb{R}$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalla Proposizione 6.4.3

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\alpha_n-\alpha} = 1,$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{\alpha_n-\alpha} a^{\alpha} = 1 \cdot a^{\alpha} = a^{\alpha}.$$

□

Teorema 6.4.5. *Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Allora $\exp_a : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ è una funzione continua, cioè, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to\alpha} \exp_a(x) = \exp_a(\alpha).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di collegamento, dimostrare la tesi è equivalente a dimostrare che se (α_n) è una successione in $\mathbb{R}$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \exp_a(\alpha_n) = \exp_a(\alpha).$$

Questo è quanto afferma la Proposizione 6.4.4. □

Proposizione 6.4.6. *Valgono i seguenti:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty & \textit{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 & \textit{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 & \textit{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty & \textit{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di collegamento, basta dimostrare che se (x_n) è una successione in $\mathbb{R}$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a^{x_n} = +\infty & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a^{x_n} = 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \tag{6.4.1}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a^{x_n} = 0 & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a^{x_n} = +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases} \tag{6.4.2}$$

Sia $a > 1$. Già sappiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp_a(n) = +\infty$; per dimostrarla si usa la disuguaglianza di Bernoulli (v. Esercizio 5.2.6). Allora,

$$\forall M > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ a^p > M.$$

Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}$ tale che $x_n \to +\infty$. Allora

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} : x_n > p \quad \forall n > \bar{n}.$$

Dunque, dalla Proposizione 6.4.2

$$\forall M > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a^{x_n} > a^p > M \quad \forall n > \bar{n}.$$

Abbiamo così dimostrato che se $a > 1$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = +\infty$$

Sia ora $0 < a < 1$. Basta osservare che

$$a^{x_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_n}}$$

e si ottiene che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = 0.$$

Consideriamo ora una successione (x_n) in $\mathbb{R}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$. Dato che

$$a^{x_n} = \frac{1}{a^{-x_n}}$$

otteniamo agevolmente (6.4.2) da (6.4.1). □

Teorema 6.4.7. *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$,*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0,\infty[, \qquad \exp_a(x) = a^x$$

è una funzione biunivoca.

DIMOSTRAZIONE. La iniettività è conseguenza della stretta monotonia, vedi Proposizione 6.4.2. La suriettività segue dalla continuità (Teorema 6.4.5), dalla Proposizione 6.4.6 e dal Teorema di Bolzano (una funzione continua manda intervalli in intervalli). □

6.5. Il numero di Nepéro

Lemma 6.5.1. *Si considerino le due successioni (a_n) e (b_n)*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Valgono le seguenti:

(i) (a_n) *è strettamente crescente*
(ii) (b_n) *è strettamente decrescente*
(iii) *per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ si ha $a_n < b_n$*

(iv) *esiste* $e \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = e$$

(v) $2 < e < 3$.

DIMOSTRAZIONE. (i) e (ii):
Vedi le dispense del prof. Dore.
(iii):

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = a_n.$$

(iv):
Dato che le successioni (a_n) e (b_n) sono strettamente monotone, esse hanno limite. Essendo

$$a_1 \le a_n < b_n \le b_1$$

i loro limiti devono essere numeri reali.
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Dunque i limiti di (a_n) e (b_n) sono uguali. Esso è denotato e.
(v):
Segue dalla crescenza di (a_n) e dalla decrescenza di (b_n), da cui

$$2 = a_1 < e < b_5 = 2.985984.$$

□

Definizione 6.5.2. [Numero di Nepéro] Il numero e del Lemma 6.5.1, definito come valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

e che è un numero reale in $]2,3[$, viene detto *numero di Nepéro*.

Tale numero è spesso utilizzato come base dell'eponenziale.

6.6. Logaritmo

6.6.1. Funzione logaritmica. La funzione logaritmica $f(x) = \log_a(x)$ è la funzione inversa della funzione esponenziale exp_a. Poiché l'inversa di una funzione esiste solo se tale funzione è iniettiva, la funzione $\log_a$ esiste se e solo se $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$.

Definizione 6.6.1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, si definisce *logaritmo di base a* la funzione inversa di

$$\exp_a : \mathbb{R} \to]0, \infty[, \qquad \exp_a(x) = a^x.$$

Essa la si denota:

$$\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}.$$

Il grafico di $\log_a$ è mostrato qui sotto per alcuni valori di a, considerando la distinzione tra $0 < a < 1$ e $a > 1$.

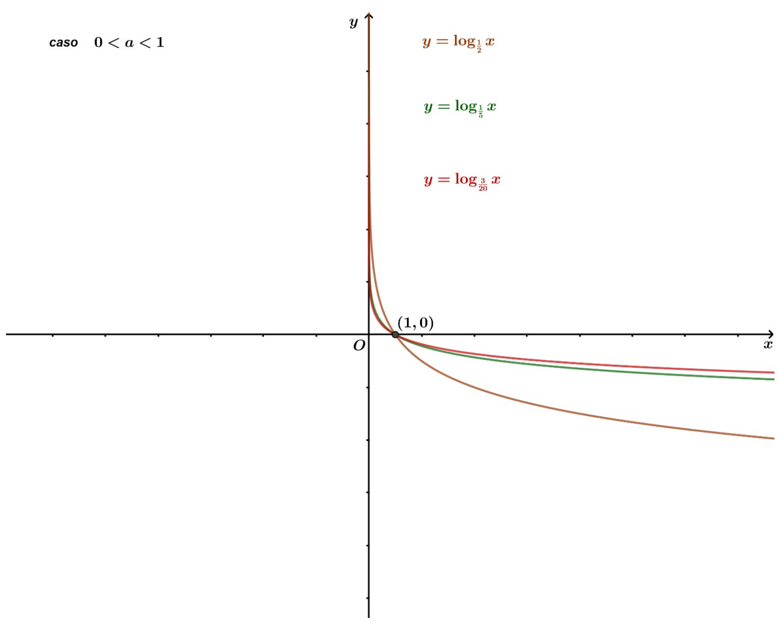

Figura 11. Grafico di $f(x) = \log_a x$ con $0 < a < 1$

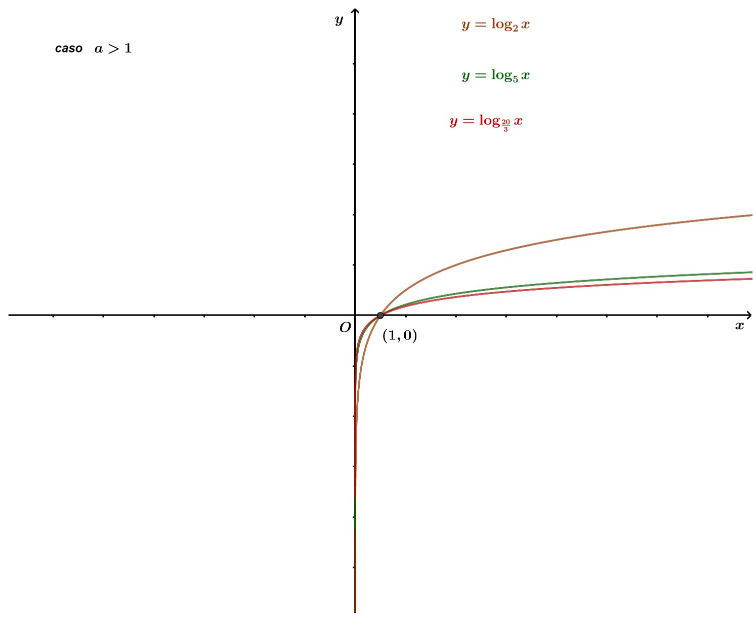

Figura 12. Grafico di $f(x) = \log_a x$ con $a > 1$

Ne possiamo dedurre quindi le seguenti proprietà:
$\mathscr{D}(\log_a) = \mathbb{R}^+$;
$Im(\log_a) = \mathbb{R}$;
$G(\log_a)$ si trova nel semipiano delle $x > 0$ e interseca l'asse x in $(1,0)$;
se $0 < a < 1$ allora $\log_a^x > 0$ se e solo se $0 < x < 1$
se $a > 1$ allora $\log_a^x > 0$ se e solo se $x > 1$
$\log_a$ è strettamente decrescente se $0 < a < 1$ e strettamente crescente se $a > 1$, vedi Proposizione 6.6.3.

Proposizione 6.6.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.*
Valgono le seguenti proprietà della funzione $\log_a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$.

(i) $\log_a(1) = 0$
(ii) $\log_a(a) = 1$
(iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ *per ogni* $x, y > 0$
(iv) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$ *per ogni* $x, y > 0$
(v) $\log_a(x^c) = c \log_a(x)$ *per ogni* $c \in \mathbb{R}$
(vi) *[Cambiamento di base] per ogni* $c > 0$ *si hanno*

$$\log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}, \qquad \log_a(b)\log_b(c) = \log_a(c)$$

(vii) $\log_{\frac{1}{a}} a = \log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$

(viii) $\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x) = \log_a\left(\frac{1}{x}\right)$

DIMOSTRAZIONE.

(i):

Si ha $a^0 = 1$ (v. Definizione 6.3.2) e da qui la tesi per definizione di logaritmo base a.

(ii):

Segue da $a^1 = a$ (v. Definizione 6.3.2) e dalla definizione di logaritmo base a.

(iii):

Per la Proposizione 6.3.46 (P3) si ha

$$a^{\log_a(xy)} = xy = a^{\log_a(x)} a^{\log_a(y)} = a^{\log_a(x)+\log_a(y)}.$$

Essendo la funzione esponenziale di base $a > 0$, $a \neq 1$, strettamente monotona (v. Proposizione 6.4.2) allora è iniettiva, pertanto $\log_a(xy)$ e $\log_a(x) + \log_a(y)$ devono essere uguali.

(iv):

Per l'Esercizio 6.3.47

$$a^{\log_a(\frac{x}{y})} = \frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} \overset{\text{Es. 6.3.47}}{=} a^{\log_a(x)-\log_a(y)}.$$

Essendo la funzione esponenziale di base $a > 0$, $a \neq 1$, strettamente monotona (v. Proposizione 6.4.2) allora è iniettiva, pertanto $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ e $\log_a(x) - \log_a(y)$ devono essere uguali.

(v):

Per la Proposizione 6.3.46 (P5)

$$a^{\log_a(x^c)} = x^c = \left(a^{\log_a(x)}\right)^c = a^{c\log_a(x)}.$$

Essendo la funzione esponenziale di base $a > 0$, $a \neq 1$, strettamente monotona (v. Proposizione 6.4.2) allora è iniettiva, pertanto $\log_a(x^c)$ e $c\log_a(x)$ devono essere uguali.

(vi):

Si ha:

$$\log_a(b)\log_b(c) \overset{(v)}{=} \log_a\left(b^{\log_b(c)}\right) \overset{\text{Def. di logaritmo}}{=} \log_a(c).$$

L'altra uguaglianza segue banalmente da questa, dividendo per $\log_a(b)$ che risulta diverso da zero in quanto $b \neq 1$.

(vii):

Si hanno

$$\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = \log_a(a^{-1}) \overset{(v)}{=} -\log_a(a) \overset{(ii)}{=} -1$$

e

$$\log_{\frac{1}{a}}(a) = \log_{\frac{1}{a}}\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}\right) \overset{(v)}{=} -\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}\right) \overset{(ii)}{=} -1$$

(viii):
Si hanno

$$\log_{\frac{1}{a}}(x) \overset{(vi)}{=} \log_{\frac{1}{a}}(a)\log_a(x) \overset{(vi)}{=} -\log_a(x)$$

e

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a\left(x^{-1}\right) \overset{(v)}{=} -\log_a(x).$$

□

Proposizione 6.6.3. *Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Allora $\log_a :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $0 < a < 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla Proposizione 6.4.2 e dall'Esercizio 3.2.24. □

Teorema 6.6.4. *Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Allora $\log_a :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua, cioè, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{x\to\alpha} \log_a(x) = \log_a(\alpha).$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 6.4.5 e dal Teorema che afferma che se f è continua e invertibile allora f^{-1} è continua (v. Teorema nelle dispense prof. Dore). □

Proposizione 6.6.5. *Valgono i seguenti:*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \log_a x = -\infty & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \log_a x = +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal fatto che la funzione $\log_a :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ è biunivoca, dalla Proposizione 6.6.3 e dal Teorema dei limiti di funzioni monotone (v. dispense prof. Dore). □

Definizione 6.6.6 (Logaritmo naturale). Il logaritmo naturale è la funzione logaritmo avente per base il numero di Nepéro e, v Definizione 6.5.2. In tal caso scriviamo $\log x$ oppure $\ln x$.

6.7. Funzioni trigonometriche

Definizione 6.7.1. Si chiama circonferenza goniometrica del piano Oxy la circonferenza di centro $O = (0,0)$ e raggio 1.

Osservazione 6.7.2. La lunghezza della circonferenza goniometrica è 2π.

Definizione 6.7.3. Sulla circonferenza goniometrica del piano Oxy si prenda un punto $P = (x, y)$. Si considerino la semirette positiva dell'asse x e la semiretta avente origine in O e passante per P e la regione di piano che si ottiene ruotando la semirette positiva dell'asse x in senso antiorario, fino a farla sovrapporre alla semiretta avente origine in O e passante per P. Tale regione di piano è un angolo che, in gradi, ha una misura compresa nell'intervallo $[0°, 360°[$. Esso intercetta sulla circonferenza goniometrica un arco di circonferenza. La lunghezza di tale arco di circonferenza dà la misura in radianti dell'angolo. La misura dell'arco di circonferenza è un numero reale dell'intervallo $[0, 2\pi[$.

Osservazione 6.7.4. Assegnato $\alpha \in \mathbb{R}$, misura in radianti di un angolo, la misura in gradi è $\alpha\frac{360}{2\pi}$. Viceversa, data la misura θ in gradi di un angolo, la sua misura in radianti è $\theta\frac{2\pi}{360}$.

Tabella di conversione:

Gradi	**Radianti**
0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\pi}{2}$
360°	2π

Definizione 6.7.5. Sia $\theta \in \mathbb{R}$.
A tale numero si associa uno e un solo punto P della circonferenza circonferenza goniometrica del piano Oxy secondo la seguente regola: esso è il secondo estremo dell'arco di circonferenza che ha come primo estremo il punto $(1,0)$, lunghezza $|\theta|$ ed è

percorsa in senso **antiorario** se $\theta \geq 0$
percorsa in senso **orario** se $\theta < 0$.

L'ascissa del punto P prende il nome di *coseno di* θ ed è denotato $\cos\theta$ o $\cos(\theta)$,
l'ordinata del punto P si chiama *seno di* θ ed è denotato $\operatorname{sen}\theta$, $\operatorname{sen}(\theta)$, $\sin\theta$ o $\sin(\theta)$.

Grazia alle regola con la quale si associa ad ogni numero reale un punto della circonferenza goniometrica descritta nella Definizione 6.7.5, è possibile definire due funzioni: la funzione *seno* e la la funzione *coseno*.

Definizione 6.7.6. La funzione *coseno* è la funzione $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che a ogni numero reale θ associa l'**ascissa** del punto P individuato sulla circonferenza goniometrica secondo la regola descritta nella Definizione 6.7.5.

Definizione 6.7.7. La funzione *seno* è la funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che a ogni numero reale θ associa l'**ordinata** del punto P individuato sulla circonferenza goniometrica secondo la regola descritta nella Definizione 6.7.5.

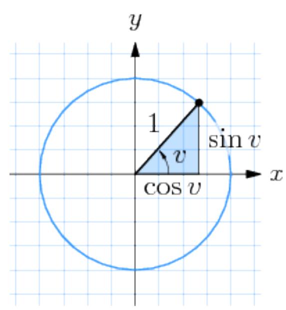

Figura 13. Definizione di coseno e seno

Proposizione 6.7.8. *Le funzioni seno e coseno godono entrambe delle seguenti proprietà:*

(i) *l'immagine è l'intervallo* $[-1,1]$*;*

(ii) *sono funzioni periodiche di periodo* 2π*, cioè se con* f *indichiamo una di tali funzioni, vale la seguente proprietà:*

$$f(x+2\pi) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE.

(i): Il punto P associato a un numero reale θ secondo la regola descritta nella Definizione 6.7.5 giace sulla circonferenza goniometrica. Dunque, l'ascissa e l'ordinata di P sono numeri in $[-1,1]$, cioè $\cos\theta \in [-1,1]$ e $\sin\theta \in [-1,1]$. Dunque

$$\operatorname{Im}\sin \subseteq [-1,1], \qquad \operatorname{Im}\cos \subseteq [-1,1].$$

D'altra parte, preso $y \in [-1,1]$ esiste un punto della circonferenza goniometrica avente ascissa y, ad esempio il punto $P = (y, \sqrt{1-y^2})$

Se $0 \leq t \leq 1$, il punto P si trova nel I quadrante. Consideriamo l'arco, nel primo quadrante, della circonferenza trigonometrica di primo estremo $A = (1,0)$ e secondo estremo $P = (t, \sqrt{1-t^2})$. La misura di tale arco è tale che $|\overset{\frown}{AP}| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Allora $\cos|\overset{\frown}{AP}| = t$.

Se $-1 \leq t < 0$, il punto P si trova nel II quadrante. Consideriamo l'arco, nel secondo quadrante, della circonferenza trigonometrica di primo estremo $A = (1,0)$ e secondo estremo $(t, \sqrt{1-t^2})$. Si ha $\cos(|\overset{\frown}{AP}|) = t$.
Analogamente, preso $t \in [-1,1]$ esiste un punto della circonferenza goniometrica avente ordinata t, ad esempio il punto $P = (\sqrt{1-t^2}, t)$.
Se $0 \leq t \leq 1$, il punto P si trova nel I quadrante. Consideriamo l'arco, nel primo quadrante, della circonferenza trigonometrica di primo estremo $A = (1,0)$ e secondo estremo $P = (\sqrt{1-t^2}, t)$. La misura di tale arco è tale che $|\overset{\frown}{AP}| \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Allora $\sin|\overset{\frown}{AP}| = t$.
Se $-1 \leq t < 0$, il punto P si trova nel IV quadrante. Consideriamo l'arco, nel quarto quadrante, della circonferenza trigonometrica di primo estremo $A = (1,0)$ e secondo estremo $(\sqrt{1-t^2}, t)$. Si ha $\sin(-|\overset{\frown}{AP}|) = t$.
(ii):
Secondo la regola descritta nella Definizione 6.7.5, i numeri reali x e $x + 2\pi$ individuano lo stesso punto della circonferenza goniometrica. Da qui, la tesi.

□

Teorema 6.7.9. *Vale la seguente relazione fondamentale:*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato x, sia P il punto corrispondente, individuato sulla circonferenza goniometrica secondo la regola descritta nella Definizione 6.7.5. La distanza del punto P dall'origine è 1, raggio della circonferenza goniometrica. Dunque, per il Teorema di Pitagora:

$$1 = \sqrt{|\cos x|^2 + |\sin x|^2}$$

e da qui la tesi. □

La funzione coseno, $f(x) = \cos(x)$ ha il seguente grafico

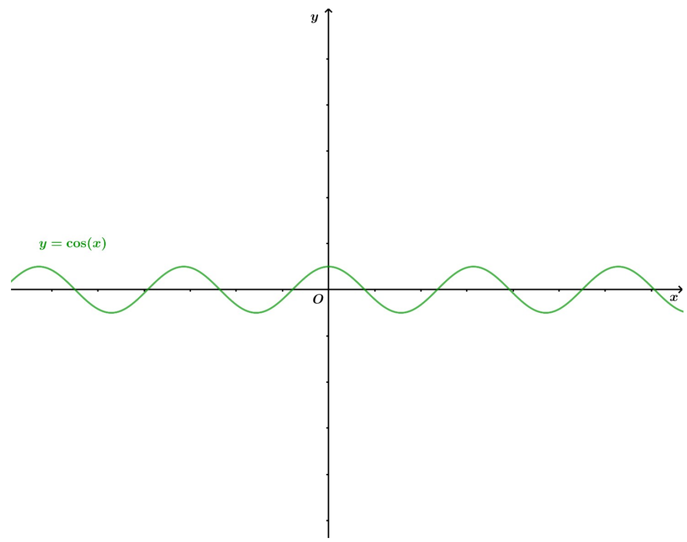

Figura 14. Grafico di $f(x) = \cos x$

di cui mostriamo un ingrandimento:

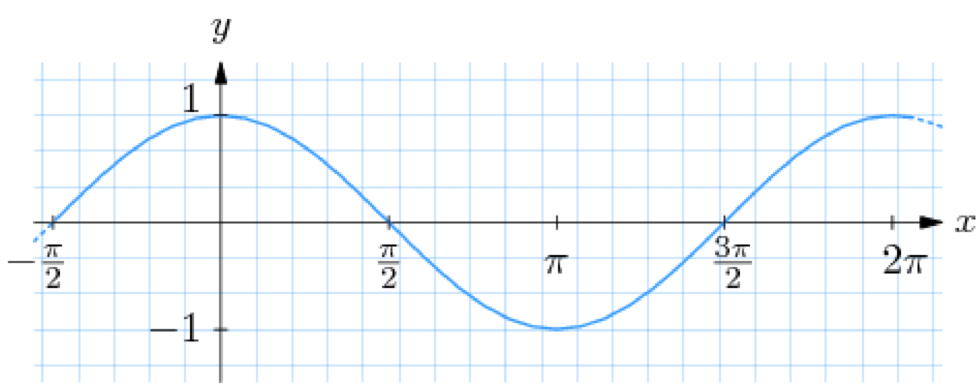

Figura 15. Grafico di $f(x) = \cos x$

La funzione seno, $f(x) = \sin(x)$ ha il seguente grafico:

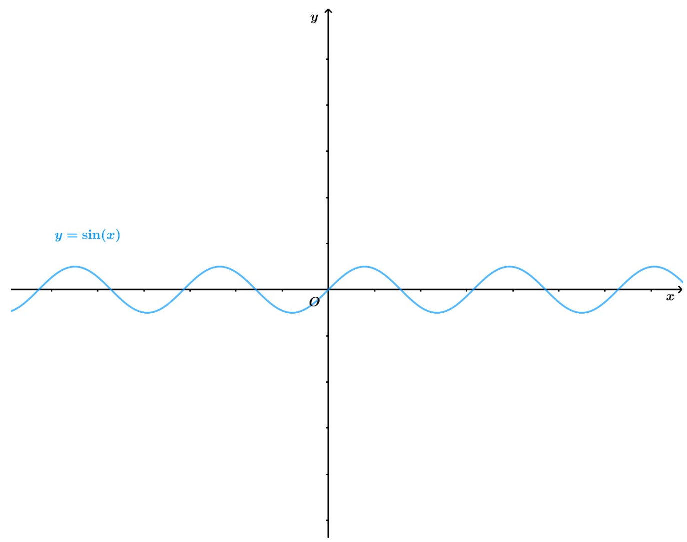

Figura 16. Grafico di $f(x) = \sin x$

di cui mostriamo un ingrandimento:

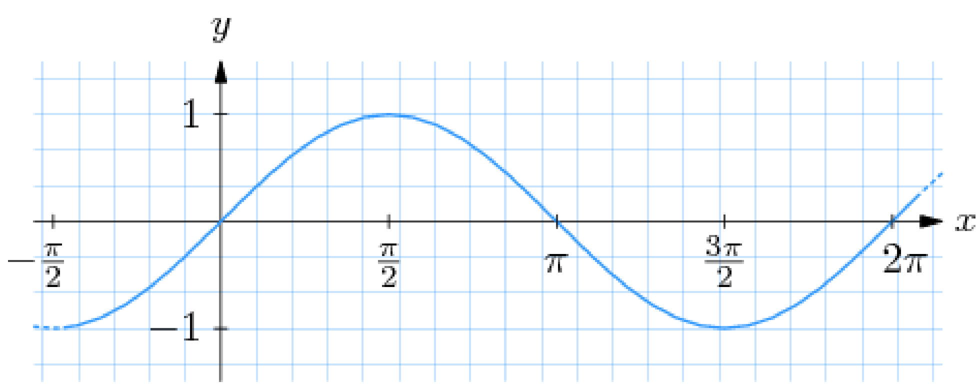

Figura 17. Grafico di $f(x) = \sin x$

Gradi	**Radianti**	**Seno**	**Coseno**	**Tangente**
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$
180	π	0	-1	0
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$
360	2π	0	1	0

Proposizione 6.7.10. *Altre proprietà della funzione seno, oltre a quelle già elencate nella Proposizione 6.7.8, sono:*

(i) *la funzione seno è dispari*
(ii) $\sin x = 0$ *se e solo se* $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
(iii) $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ *è biunivoca e strettamente crescente*

In particolare, seguono da (ii) e (iii) che

$$\sin x < 0 \quad \textit{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[. \tag{6.7.1}$$

DIMOSTRAZIONE.
(i):
Il punto P corrispondente al numero reale x secondo la regola enunciata nella Definizione 6.7.5 è simmetrico rispetto all'asse x rispetto al punto P' corrispondente al numero reale $-x$ secondo la regola enunciata nella Definizione 6.7.5. Dunque l'ordinata di P' è opposta all'ordinata di P. Da qui:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) e (iii):
seguono in modo ovvio dalla definizione della funzione seno. □

Proposizione 6.7.11. *Vale la seguente disuguaglianza:*

$$|\sin x| \le |x| \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $|x| \ge 1$ la disuguaglianza è ovvia:

$$|\sin x| \overset{\text{Prop. 6.7.8 (i)}}{\le} 1 \le |x|.$$

Sia $0 \le x < \frac{\pi}{2}$. Sia P il punto associato a x secondo la regola descritta nella Definizione 6.7.5. Sia $A = (1,0)$.

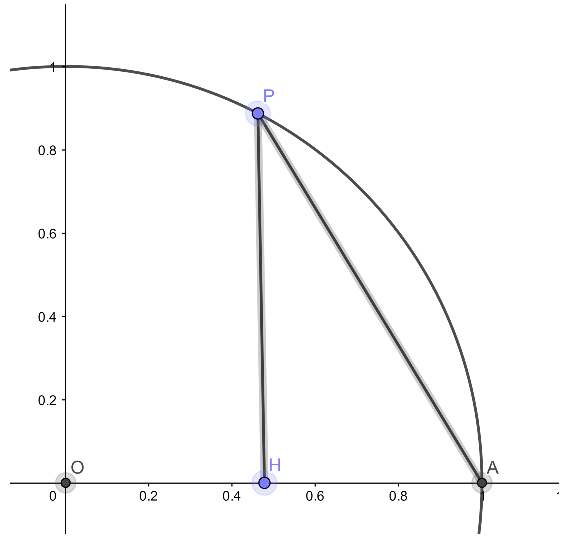

Figura 18. $|\sin x| \leq |x|$: il caso $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

La misura dell'arco $\widehat{AP}$ di primo estremo A e secondo estremo P (l'arco è percorso in senso antiorario) ha lunghezza maggiore o uguale della lunghezza della corda $\overline{AP}$. A sua volta, $\overline{AP}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo HAP, di cui HP è un cateto. Quindi la lunghezza del segmento AP è maggiore o uguale della lunghezza del segmento HP $(= \sin x)$.
Quindi

$$x = |\widehat{AP}| \geq |\overline{AP}| \geq |\overline{HP}| = \sin x.$$

Se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, allora si ha $0 \leq -x < \frac{\pi}{2}$, quindi, per quanto appena dimostrato

$$\sin(-x) \leq -x.$$

Essendo la funzione seno una funzione dispari, v. (i), si deduce.

$$-\sin x \leq -x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \sin x \quad \overset{-\frac{\pi}{2}<x<0\ +\ (6.7.1)}{\Leftrightarrow} \quad |\sin x| \leq |x|.$$

□

Proposizione 6.7.12. *Altre proprietà della funzione coseno, oltre a quelle già elencate nella Proposizione 6.7.8, sono:*

(i) *la funzione coseno è pari*
(ii) $\cos x = 0$ *se e solo se* $x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$
(iii) $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ *è biunivoca e strettamente decrescente*
(iv) $1 - |x| \leq \cos x \leq 1$ *per ogni* $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

DIMOSTRAZIONE.
(i):
Il punto P corrispondente al numero reale x secondo la regola enunciata nella Definizione 6.7.5 è simmetrico rispetto all'asse x rispetto al punto P' corrispondente al numero reale $-x$ secondo la regola enunciata nella Definizione 6.7.5. Dunque l'ascissa di P coincide con l'ascissa di P'. Da qui:

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) e (iii):
seguono in modo ovvio dalla definizione della funzione coseno.
(iv)
Si consideri il numero reale x.
La disuguaglianza di destra è banalmente verificata.
Studiamo la disuguaglianza di sinistra.
Se $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, consideriamo il seguente disegno.

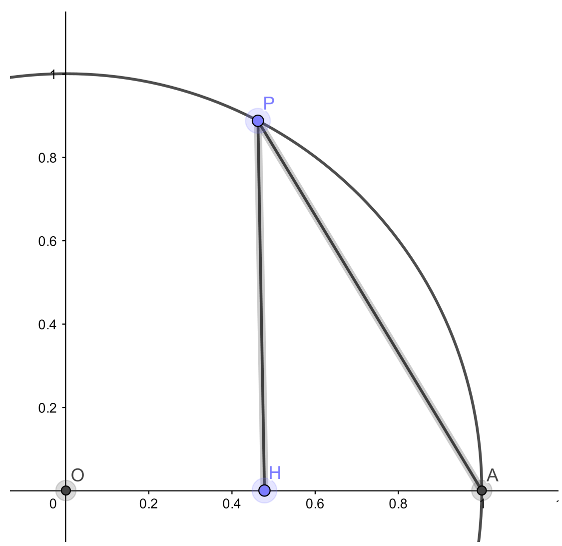

Figura 19. Il caso $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$: il triangolo AHP

La misura dell'arco $\widehat{AP}$ di primo estremo A e secondo estremo P (l'arco è percorso in senso antiorario) ha lunghezza maggiore o uguale della lunghezza della corda $\overline{AP}$. A sua volta, $\overline{AP}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo AHP, di cui HA è un cateto. Quindi

$$x = |\widehat{AP}| \ge |\overline{AP}| \ge |\overline{HA}| = 1 - |\overline{OH}| = 1 - \cos x.$$

Dall disuguaglianza sopra risulta

$$1 - x \leq \cos x \qquad \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Se $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0$ allora $0 \leq -x \leq \frac{\pi}{2}$ quindi, per quanto dimostrato

$$1 - (-x) \leq \cos(-x).$$

Per la parità della funzione coseno, ed essendo $x < 0$ si ha

$$1 - |x| \leq \cos x \qquad \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0.$$

La dimostrazione è conclusa. □

Esercizio 6.7.13. Usando la Proposizione 6.7.11 dimostrare che vale la seguente disuguaglianza:

$$\cos x \leq \frac{\pi}{2} - |x| \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Rappresentare poi su un piano cartesiano le disuguaglianze

$$0 \leq \cos x \leq \min\left\{1, \frac{\pi}{2} - |x|\right\} \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ottenibili dalle informazioni già note e dalla disuguaglianza appena dimostrata.
Sol:
Dalla Proposizione 6.7.11

$$|\cos x| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| \overset{\text{Prop. 6.7.10}}{\leq} \left|\frac{\pi}{2} - x\right|$$

quindi, se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha

$$\cos x \leq \frac{\pi}{2} - x.$$

Da questa disuguaglianza, usando anche la parità di $x \mapsto |x|$ (che implica che $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ è pari) e di $x \mapsto \cos x$, deduciamo

$$|\cos x| \leq \frac{\pi}{2} - |x| \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Dato che la funzione coseno è non negativa in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ deduciamo la disuguaglianza voluta.

Definizione 6.7.14. La funzione *tangente* è la funzione $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

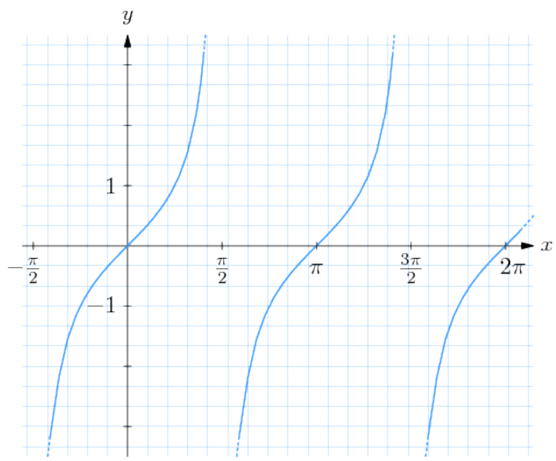

Figura 20. Grafico della funzione tangente

Osservazione 6.7.15. Se $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ allora $\tan x$ rappresenta la lunghezza del segmento AT in figura, dove x è la misura, in radianti, dell'angolo TOA:

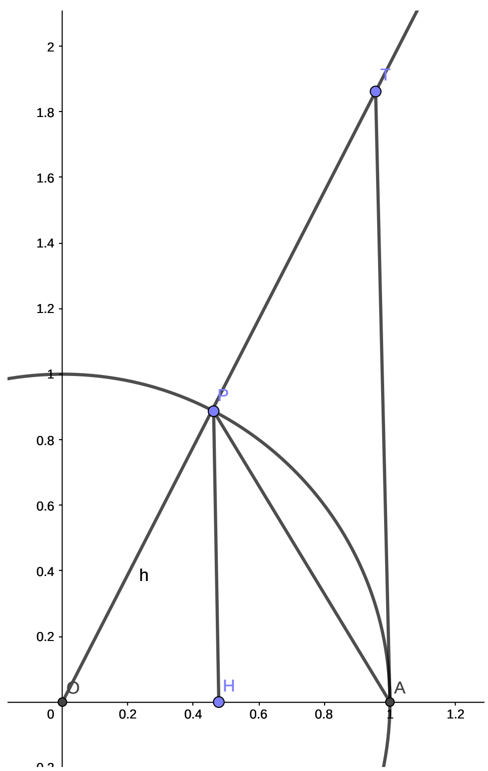

Figura 21. I triangoli OAT e OPH sono simili

Infatti, i triangoli OAT e OPH sono simili, per cui

$$\frac{|\overline{TA}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{PH}|}{|\overline{OP}|} \Leftrightarrow |\overline{TA}| = \frac{|\overline{PH}|}{|\overline{OP}|}|\overline{OA}| = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot 1 = \tan x.$$

Proposizione 6.7.16. *La funzione tangente ha le seguenti proprietà:*

(i) *la funzione tangente è dispari*

(ii) $\tan x = 0$ *se e solo se* $x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(iii) $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ *è strettamente crescente*

DIMOSTRAZIONE.
(i):
Segue dall'Esercizio 3.2.29 e da (i) delle Proposizioni 6.7.10 e 6.7.12.
(ii):
Segue dal fatto che nell'insieme di definizione della tangente questa si annulla se e solo se la funzione seno si annulla. Ciò succede per i punti dell'insieme $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
(iii)
La funzione tangente è dispari per (i). Valutiamo la funzione tangente in $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. La funzione seno è in tale insieme non negativa e strettamente crescente e la funzione coseno è positiva e strettamente decrescente. Quindi $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ è una funzione non negativa e strettamente crescente.
Essendo la funzione tangente dispari, allora essa è strettamente crescente e non positiva in $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$ (v. Eercizio 3.2.32). La tesi segue dall'Esercizio 3.2.18. □

Sono utili le seguenti formule:

Proposizione 6.7.17. *Valgono le seguenti formule:*
FORMULE D'ADDIZIONE

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Da cui, ponendo $\alpha = \beta = x$ *si deducono le*

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Corollario 6.7.18. *Vale la seguente uguaglianza:*

$$\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 6.7.17

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(x)$$

e la tesi segue per il fatto che

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

□

6.7.1. Funzioni trigometriche inverse. Le funzioni $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, $\cos|_{[0,\pi]}$ e $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ sono invertibili, v. le Proposizioni 6.7.10, 6.7.126.7.16. Le loro funzioni sono, rispettivamente,

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

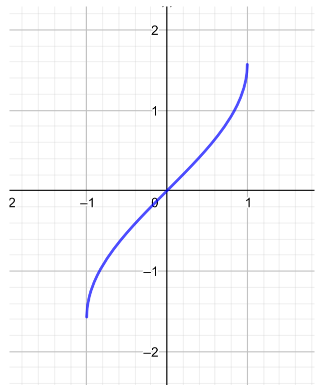

Figura 22. Grafico della funzione arcsin

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

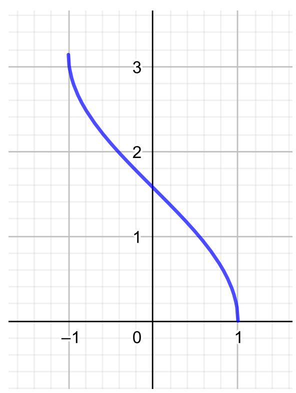

Figura 23. Grafico della funzione arccos

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

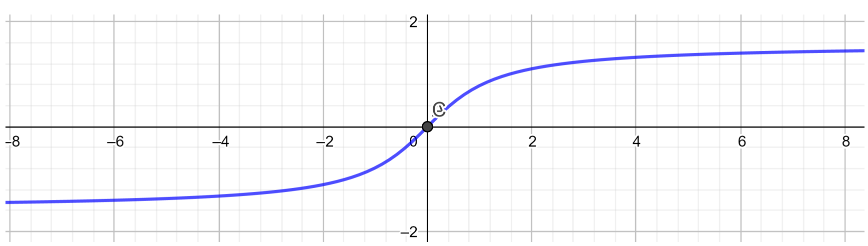

Figura 24. Grafico della funzione arctan

6.7.2. Anticipazione di argomenti avanzati. Le funzioni seno, coseno e tangente sono continue.

Lemma 6.7.19.

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 6.7.10

$$-|x| \le \sin x \le |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il Teorema 6.2.11

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

dunque la tesi segue per il Teorema dei carabinieri. □

Lemma 6.7.20.

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 6.7.12

$$1 - |x| \le \cos x \le 1 \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Per il Teorema 6.2.11

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0,$$

dunque la tesi segue per il Teorema dei carabinieri. □

Teorema 6.7.21. *La funzione seno è continua, ossia*

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. I modo:
Per la formula d'addizione (v. Proposizione 6.7.17)

$$\sin(x) = \sin(x_0 + x - x_0) = \sin(x_0)\cos(x - x_0) + \cos(x_0)\sin(x - x_0).$$

Per il Teorema di calcolo del limite di funzione composta (v. dispense prof. Dore)

$$\lim_{x\to x_0} \cos(x - x_0) = \lim_{y\to 0} \cos(y) \overset{\text{Lemma 6.7.20}}{=} 1$$

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x - x_0) = \lim_{y\to 0} \sin(y) \overset{\text{Lemma 6.7.19}}{=} 0,$$

e quindi, per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0) \lim_{x\to x_0} \cos(x - x_0) + \cos(x_0) \lim_{x\to x_0} \sin(x - x_0)) = \sin(x_0).$$

II modo:

Per le formule di prostaferesi (v. Proposizione 6.7.17)

$$0 \le |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \overset{\text{Prop. 6.7.8 (i)}}{\le} 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \overset{\text{Proposizione 6.7.8 (i)}}{\le} |x-x_0|$$

e la tesi segue dal Teorema dei carabinieri e dal Teorema 6.2.11.

□

Teorema 6.7.22. *La funzione coseno è continua, ossia*

$$\lim_{x\to x_0}\cos(x) = \cos(x_0).$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 6.7.18

$$\lim_{x\to x_0}\cos(x) = \lim_{x\to x_0}\sin(\frac{\pi}{2}-x).$$

Per il Teorema di calcolo del limite di funzione composta (v. dispense prof. Dore) e per la continuità della funzione seno, v. Teorema 6.7.21, posto $y = \frac{\pi}{2} - x$ si ha

$$\lim_{x\to x_0}\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}-x_0}\sin(y) \overset{\text{Teorema 6.7.21}}{=} \sin(\frac{\pi}{2}-x_0).$$

Pertanto:

$$\lim_{x\to x_0}\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x_0) \overset{\text{Corollario 6.7.18}}{=} \cos(x_0).$$

□

Teorema 6.7.23. *La funzione tangente è continua, ossia*

$$\lim_{x\to x_0}\tan(x) = \tan(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,:\, k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla continuità delle funzioni seno e coseno (Teoremi 6.7.21 e 6.7.22) e dall'algebra dei limiti. □

Proposizione 6.7.24. *La funzione tangente* $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *è biunivoca, strettamente crescente e*

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x = +\infty$$

DIMOSTRAZIONE. La funzione $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ è strettamente crescente (v. Proposizione 6.7.16) dunque è iniettiva.

Per la continuità della funzione tangente (Teorema 6.7.23) e per il Teorema di Bolzano, l'immagine di $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$ è un intervallo e, per la stretta crescenza,

$$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\tan(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x)\right[.$$

Essendo le funzioni seno e coseno continue, tenendo anche conto del segno della funzione coseno, si hanno

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1, \qquad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \cos(x) = 0^+$$

da cui, per l'algebra di 0 e di ∞

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty.$$

Analogamente

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$$

da cui, per l'algebra di 0 e di ∞

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty.$$

Dunque

$$\tan(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[) = \mathbb{R}.$$

□

Teorema 6.7.25. *Valgono le seguenti:*

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty} \tan(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra solo la non esistenza del limite della funzione seno per x che tende a $+\infty$. Si lascia per esercizio la dimostrazione delle altre affermazioni.
Si consideri la successione $a_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ e le sue sottosuccessioni (a_{2n}) e (a_{2n+1}).
Si hanno

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = +\infty.$$

Inoltre,

$$\sin(a_{2n}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\cos(a_{2n+1}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Dunque non può esistere il limite della funzione seno per x che tende a $+\infty$. □

6.8. Funzioni iperboliche

Le funzioni iperboliche sono le seguenti.

Definizione 6.8.1 (Seno iperbolico). Si definisce funzione *seno iperbolico* la funzione

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Definizione 6.8.2 (Coseno iperbolico). Si definisce funzione *coseno iperbolico* la funzione

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Definizione 6.8.3 (Tangente iperbolica). Si definisce funzione *tangente iperbolica* la funzione

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Teorema 6.8.4. *Dimostrare la seguente relazione fondamentale:*

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

DIMOSTRAZIONE. Semplice verifica:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = e^0 = 1.$$

□

Osservazione 6.8.5. Tali funzioni si dicono iperboliche perché esse permettono di parametrizzare il ramo destro dell'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Infatti, posto

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

si ha

$$x^2 - y^2 = \cosh^2 x - \sinh^2 x \overset{\text{Teorema 6.8.4}}{=} 1.$$

Se si considera $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cosh t, \sinh t)$, il punto $\gamma(t)$ percorre il ramo d'iperbole situato nel semipiano delle x positive da basso verso l'alto.

Proposizione 6.8.6. *La funzione* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *gode delle seguenti proprietà:*

(i) *è una funzione dispari*
(ii) $\sinh x > 0$ *se e solo se* $x \in]0, \infty[$
(iii) $\sinh x = 0$ *se e solo se* $x = 0$
(iv) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
(v) *è strettamente crescente.*

DIMOSTRAZIONE.
(i) e (iv):
semplice verifica.
(ii) e (iii):

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}\frac{e^{2x}-1}{2} = \left(\frac{1}{e}\right)^x \frac{e^{2x}-1}{2}$$

e la tesi segue dal fatto che $x \mapsto \left(\frac{1}{e}\right)^x$ è una funzione esponenziale, quindi è sempre positiva, e

$$e^{2x} \geq 1 \qquad \forall x \geq 0, \qquad e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

(v):
Per la Proposizione 6.4.2 e per l'Esercizio 3.2.19 (b) la funzione

$$x \mapsto \frac{-e^{-x}}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^x$$

è strettamente crescente. La conclusione segue dalla Proposizione 6.4.2 e dall'Esercizio 3.2.21 (b).

□

Proposizione 6.8.7. *La funzione* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è invertibile e*

$$x = \sinh y \Leftrightarrow y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

DIMOSTRAZIONE.
L'iniettività della funzione sinh segue dalla Proposizione 6.8.6 (v).
Studiamone la suriettività.
Preso $x \in \mathbb{R}$ vogliamo dimostrare che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $x = \sinh y$.
Si ha

$$x = \sinh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \overset{t=e^y}{\Leftrightarrow} 2x = t - \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - 2xt - 1 = 0.$$

Quest'ultima è un'equazione di secondo grado in t, avente $\Delta = 4x^2 + 4 > 0$. Si ha

$$\begin{cases} t^2 - 2xt - 1 = 0 \\ t = e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2x \pm \sqrt{4(x^2+1)}}{2} \\ t = e^y \end{cases} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} e^y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Da cui

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

□

Definizione 6.8.8. La funzione inversa della funzione $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione $\operatorname{sett}\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chiamata *funzione settore seno iperbolico.* e si ha, per la Proposizione 6.8.7,

$$\operatorname{sett}\sinh(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Proposizione 6.8.9. *La funzione* coseno iperbolico *gode delle seguenti proprietà:*

(i) *è una funzione pari*

(ii) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

(iii) $\cosh x \geq 1$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$

(iv) $\cosh x = 1$ *se e solo se* $x = 1$

(v) $\cosh$ *è strettamente crescente in* $[0, \infty[$.

DIMOSTRAZIONE.
(i) e (ii):
semplice verifica.
(iii) e (iv):
Seguono da (ii). Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\cosh x \overset{\text{(ii)}}{=} 1 + 2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 1$$

e

$$\cosh x = 1 \Leftrightarrow \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sinh\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \overset{\text{Proposizione 6.8.6 (ii)}}{\Leftrightarrow} x = 0$$

(v)
Segue da (ii).
Infatti,

$$\cosh x \overset{\text{(ii)}}{=} 1 + 2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

La funzione

$$x \mapsto \frac{x}{2} =: g_1(x) \text{ è strettamente crescente}$$

e $g_1([0,\infty[) = [0,\infty[$.
La funzione sinh è strettamente crescente e, per la Proposizione 6.8.6, $\sinh([0,\infty[) \subseteq [0,\infty[$ (in realtà vale l'=).
La funzione

$$z \mapsto 2z^2 =: g_2(z) \text{ è strettamente crescente in } [0,\infty[$$

per la Proposizione 6.3.10 e $g_2([0,\infty[) \subseteq [0,\infty[$ (in realtà vale l'=).
Dunque

$$g_2 \circ \sinh \circ g_1 : [0,\infty[\to [0,\infty[\qquad g_2 \circ \sinh \circ g_1(x)$$

è composizione di funzioni strettamente crescenti. Essendo

$$g_2 \circ \sinh \circ g_1(x) = 2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

si ha che

$$[0,\infty[\ni x \mapsto 1 + 2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cosh(x)$$

è strettamente crescente per l'Esercizio 3.2.21 (b). □

Esercizio 6.8.10. Ridimostrare la proprietà (v) della Proposizione 6.8.9 usando il Teorema 6.8.4.

Proposizione 6.8.11. *La funzione* $\cosh|_{[0,\infty[} : [0,\infty[\to [1,\infty[$ *è invertibile e*

$$x = \cosh y \Leftrightarrow y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

DIMOSTRAZIONE.
L'iniettività della funzione $\cosh|_{[0,\infty[}$ segue dalla Proposizione 6.8.9 (v).
Studiamone la suriettività.
Preso $x \in [1, +\infty[$ vogliamo dimostrare che esiste $y \in [1, +\infty[$ tale che $x = \cosh y$.
Se $x = 1$, per la Proposizione 6.8.9 (iv) basta scegliere $y = 0$. Si noti che

$$0 = \log\left(1 + \sqrt{1^2 - 1}\right).$$

Supponiamo ora $x > 1$. Si ha

$$x = \cosh y \Leftrightarrow x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \overset{t=e^y}{\Leftrightarrow} 2x = t + \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 - 2xt + 1 = 0.$$

Quest'ultima è un'equazione di secondo grado in t, avente $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1)$ che è positivo in quanto $x > 1$.
Per la Proposizione 6.8.9 (iii) e (iv), si ha $x \geq 0$ Si ha

$$\begin{cases} t^2 - 2xt + 1 = 0 \\ t = e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2x \pm \sqrt{4(x^2-1)}}{2} \\ t = e^y \end{cases} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Da cui

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

□

Definizione 6.8.12. La funzione inversa della funzione $\cosh|_{[0,+\infty[} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è la funzione $\operatorname{sett}\cosh : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, chiamata *funzione settore coseno iperbolico.* e si ha, per la Proposizione 6.8.11,

$$\operatorname{sett}\cosh(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Proposizione 6.8.13. *La funzione* $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ *è strettaemente crescente e biunivoca. Inoltre*

$$x = \tanh y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dalla definizione

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x + e^{-x} - 2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - 2\frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

da cui

$$\tanh x = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}. \tag{6.8.1}$$

Dalla Proposizione 6.4.2 e dagli Esercizi 3.2.21 3.2.19 3.2.22 si ha che la funzione tangente iperbolica è strettamente crescente e quindi iniettiva.
Dalla Proposizione 6.4.6 valgono i seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = 1 - 2 = -1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh x = 1 + 0 = 1.$$

Quindi

$$\tanh(\mathbb{R}) \subseteq]-1,1[.$$

Dimostriamo che in realtà vale

$$\tanh(\mathbb{R}) =]-1,1[.$$

Preso $x \in]-1,1[$ vogliamo dimostrare che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $x = \tanh y$.
Si ha

$$x = \tanh y \overset{(6.8.1)}{\Leftrightarrow} x = 1 - \frac{2}{e^{2y}+1} \overset{t=e^{2y}}{\Leftrightarrow} 1 - x = \frac{2}{t+1} \Leftrightarrow (t+1)(1-x) = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1+x}{1-x}.$$

Da cui

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

e quindi

$$2y = \log\frac{1+x}{1-x}.$$

La conclusione segue. □

Definizione 6.8.14. La funzione inversa della funzione $\tanh : \mathbb{R} \to]-1,1[$ è la funzione $\operatorname{sett}\tanh :]-1,1[\to \mathbb{R}$, chiamata *funzione settore tangente iperbolica* e si ha, per la Proposizione 6.8.13,

$$\operatorname{sett}\tanh(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}.$$

Il seguente teorema giustifica il perché le funzioni inverse del seno iperbolico e del coseno iperbolico (quest'ultima ristretta a $[0,+\infty[$) si è soliti indicarle $\operatorname{sett}\sinh$ e $\operatorname{sett}\cosh$ anziché arcsinh e arccosh.

Teorema 6.8.15. *Sia $P = (x_P, y_P)$ posizionato sul ramo d'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$ situato nel I quadrante e sia P' il suo simmetrico rispetto all'asse x.*
Si ha che $\operatorname{sett}\sinh(y_P)$ *è l'area del* settore iperbolico $P'OP$ *in figura*

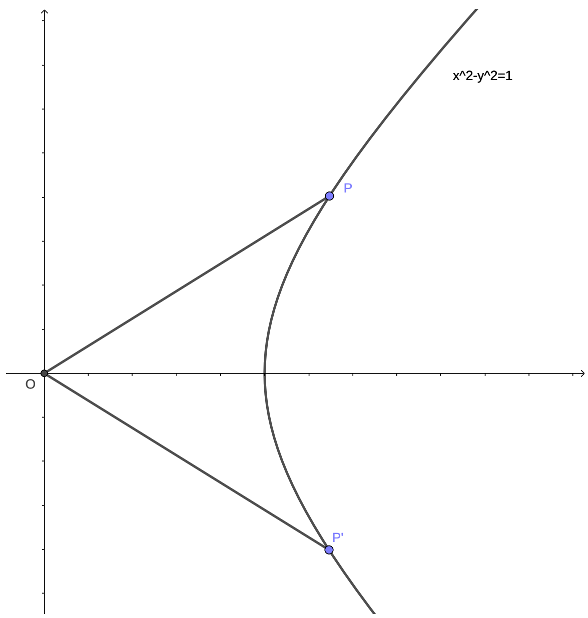

Figura 25

DIMOSTRAZIONE. L'area del *settore iperbolico $P'OP$* ha un'area doppia rispetto a quella dell'area del settore iperbolico AOP. Quest'ultima la si può ottenere come differenza dell'area del trapezoide $OAPH$ e dell'area del triangolo OPH.

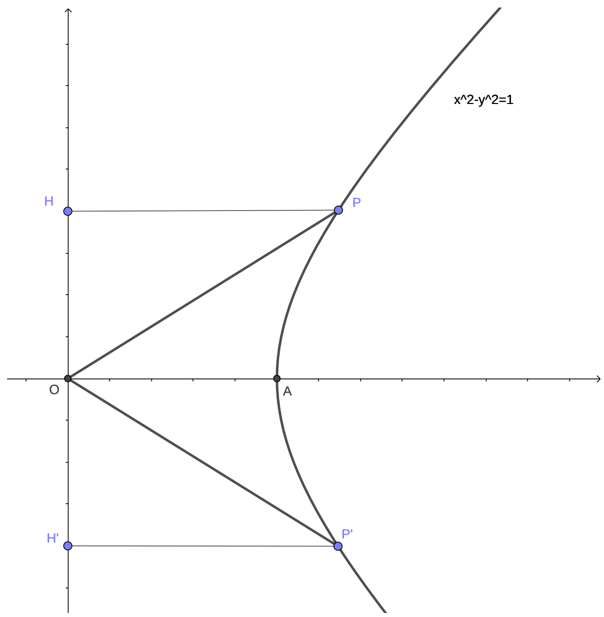

Figura 26. Il trapezoide $OAPH$ e il triangolo OPH

Essendo $P = (x_P, y_P)$ posizionato sul ramo d'iperbole situato nel I quadrante esiste (un unico) $t > 0$ tale che

$$x_P = \cosh t, \qquad y_P = \sinh t.$$

Per il Teorema 6.8.4, il trapezoide $OAPH$ è descritto nel seguente modo:

$$\{(x, y) : 0 \le y \le \sinh t,\ 0 \le x \le \sqrt{1 - y^2}\}$$

quindi la sua area vale

$$\int_0^{\sinh t} \sqrt{1 - y^2}\, dy.$$

L'area del triangolo OPH è

$$\frac{\cosh t \sinh t}{2}.$$

Dunque l'area del settore iperbolico AOP risulta uguale a

$$F(t) := \text{Area del settore iperbolico } AOP \ = \int_0^{\sinh t} \sqrt{1 + y^2}\, dy - \frac{\cosh t \sinh t}{2}.$$

Si noti che $F(0) = 0$ e che, essendo $\sinh'(t) = \cosh(t)$ e $\cosh'(t) = \sinh(t)$,

$$F'(t) = \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cosh t - \frac{\sinh^2 t + \cosh^2 t}{2} \overset{\text{Teor. 6.8.4}}{=} \cosh^2 t - \frac{\sinh^2 t + \cosh^2 t}{2} = \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dunque
$$\begin{cases} F'(t) = \frac{1}{2} \\ F(0) = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad F(t) = \frac{t}{2}.$$
Si è quindi dimostrato che
$$t = 2\text{Area del settore iperbolico } AOP = \text{Area del settore iperbolico } P'OP.$$
Si noti che
$$y_P = \sinh t \;\Leftrightarrow \qquad t = \operatorname{sett}\sinh y_P.$$
Dunque ciò che si è dimostrato è:
$$\operatorname{sett}\sinh y_P = \text{Area del settore iperbolico } P'OP.$$

□

CAPITOLO 7

Limiti

In questo capitolo si inizia col dare esempi di verifiche di limite. Sarà evidente la difficoltà di stabilire in modo diretto il valore di un limite. Nei successivi paragrafi si daranno criteri di convergenza e delle regole per il calcolo dei limiti di successione e di funzione.

7.1. Verifiche di limite

Proposizione 7.1.1. *Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti definizioni di*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$

(ii) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0]\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$$

(iii) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$$

(iv) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \bar{n}$$

(v) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \bar{n}$$

(vi) $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| \leq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \bar{n}$

(vii) *esistono* $c, k > 0$ *tali che*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| \leq c\epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}.$$

In modo analogo si dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 7.1.2. *(a_n) una successione in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti definizioni di*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

(i) $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$

(ii) *esiste* $M_0 =\in \mathbb{R}$ *tale che* $\forall M > M_0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$

(iii) *esiste* $M_0 =\in \mathbb{R}$ *tale che* $\forall M > M_0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}$

(iv) *esiste* $M_0 =\in \mathbb{R}$ *tale che* $\forall M > M_0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \bar{n}$

(v) *esiste* $M_0 =\in \mathbb{R}$ *tale che* $\forall M > M_0\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \bar{n}$

(vi) $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : a_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \bar{n}.$

Proposizione 7.1.3. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in PL(A)$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Sono equivalenti le seguenti definizioni di*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

(i) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon)$

(ii) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0]\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon)$$

(iii) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon)$$

(iv) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| \leq \delta(\epsilon)$$

(v) *esiste* $\epsilon_0 > 0$ *tale che*

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| \leq \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| \leq \delta(\epsilon)$$

(vi) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| \leq \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| \leq \delta(\epsilon)$

(vii) *esistono* $c, k > 0$ *tali che*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < c\epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < k\delta(\epsilon).$$

DIMOSTRAZIONE. Diamo la dimostrazione per $x_0 \in D(A)$, ossia quando $x_0 \in PL(A)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ è ovvia.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: ovvia.
$(iii) \Rightarrow (iv)$:
Dall'ipotesi esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon)$$

Dunque se si pone

$$\tilde{\delta}(\epsilon) := \frac{1}{2}\delta(\epsilon),$$

esso è positivo e si ha che per ogni $x \in A$,

$$0 < |x - x_0| \le \tilde{\delta}(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

$(iv) \Rightarrow (v)$ è ovvia dato che

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| \le \epsilon.$$

$(v) \Rightarrow (vi)$:
Dall'ipotesi esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che

$$\forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| \le \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| \le \delta(\epsilon)$$

Dunque se

$$\tilde{\delta}(\epsilon) := \left[\begin{array}{ll} \delta(\epsilon) & \text{se } 0 < \epsilon < \epsilon_0 \\ \delta(\frac{1}{2}\epsilon_0) & \text{se } \epsilon \ge \epsilon_0 \end{array} \right.$$

esso è positivo e si ha

$$0 < |x - x_0| \le \tilde{\delta}(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{llcl} 0 < |x - x_0| \le \delta(\epsilon) & \text{se } \epsilon < \epsilon_0 & \overset{(v)}{\Rightarrow} & |f(x) - \ell| \le \epsilon \\ 0 < |x - x_0| \le \delta(\frac{1}{2}\epsilon_0) & \text{se } \epsilon \ge \epsilon_0 & \overset{(v)}{\Rightarrow} & |f(x) - \ell| \le \frac{1}{2}\epsilon_0 \le \frac{1}{2}\epsilon \le \epsilon. \end{array} \right.$$

$(vi) \Rightarrow (i)$:
Per ipotesi

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| \le \epsilon \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| \le \delta(\epsilon).$$

Dunque se si pone

$$\tilde{\delta}(\epsilon) := \delta(\frac{1}{2}\epsilon),$$

esso è positivo e si ha che per ogni $x \in A$,

$$0 < |x - x_0| < \tilde{\delta}(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\frac{1}{2}\epsilon) \quad \overset{(vi)}{\Rightarrow} \quad |f(x) - \ell| \le \frac{1}{2}\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

La tesi è dimostrata.
$(i) \Rightarrow (vii)$:

Per ipotesi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon).$$

Dato che

$$\{\varepsilon : \epsilon \in \mathbb{R}^+\} = \{c\varepsilon : \epsilon \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+,$$

allora

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(c\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < c\epsilon \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta(c\epsilon).$$

Ponendo

$$\tilde{\delta}(\epsilon) := \frac{1}{k}\delta(c\epsilon)$$

si ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \tilde{\delta}(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < c\epsilon \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < k\tilde{\delta}(\epsilon).$$

$(vii) \Rightarrow (i)$:

Per ipotesi esistono $c, k > 0$ tali che

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < c\epsilon \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < k\delta(\epsilon).$$

Dato che

$$\{c\varepsilon : \epsilon \in \mathbb{R}^+\} = \{\varepsilon : \epsilon \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+,$$

allora

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\frac{\epsilon}{c}) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < k\delta(\frac{\epsilon}{c}).$$

Ponendo

$$\tilde{\delta}(\epsilon) := k\delta(\frac{\epsilon}{c})$$

si ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \tilde{\delta}(\epsilon) > 0 : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \tilde{\delta}(\epsilon).$$

□

In modo analogo si dimostra la seguente proposizione.

Proposizione 7.1.4. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in D(A)$. Sono equivalenti le seguenti definizioni di*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

(i) $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta(M) > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta(M)$

(ii) $\forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 : f(x) \geq M \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta(M)$

(iii) $\forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| < \delta(M)$

(iv) $\forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| \leq \delta(M)$

(v) $\forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0 : f(x) \geq M \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| \leq \delta(M)$

(vi) $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta(M) > 0 : f(x) \geq M \quad \forall x \in A, \ 0 < |x - x_0| \leq \delta(M)$.

(vii) *esistono $c, k > 0$ tali che*

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta(M) > 0 : f(x) > cM \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < k\delta(M).$$

Si possono dare analoghe proposizioni a coprire i restanti casi, ad es. quelli riguardanti i limiti per $x \to \pm\infty$ o per $f(x) \to \pm\infty$.
Non è facile dimostrare che un limite esiste usando la definizione. Il caso più facile è illustrato nel seguente teorema.

Teorema 7.1.5. *Sia (a_n) una successione. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. La scrittura

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

significa

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} : |a_n| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}.$$

La scrittura

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$$

significa

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} : ||a_n|| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}.$$

Dato che $||a_n|| = |a_n|$ si ha la tesi. □

Un teorema analogo vale anche per le funzioni.

Teorema 7.1.6. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto limite di A (ossia $x_0 \in D(A)$, oppure $x_0 = +\infty$ se $\sup A = +\infty$ oppure $x_0 = -\infty$ se $\inf A = -\infty$). Allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si procede usando la definizione di limite, come per il Teorema 7.1.5. □

Esercizio 7.1.7. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n + (-1)^n}{n^3} = 0.$$

Sol:
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n}(\epsilon) > 0 : -\epsilon < \frac{n + (-1)^n}{n^3} < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \bar{n}(\epsilon).$$

Osserviamo che
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \qquad \frac{n-1}{n^3} \geq 0.$$
Pertanto,
$$-\epsilon < \frac{n+(-1)^n}{n^3} \text{ è verificata se } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$
Osserviamo che
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \qquad \frac{n+(-1)^n}{n^3} \leq \frac{n+1}{n^3} \leq \frac{2n}{n^3} \leq \frac{2}{n^2}.$$
Pertanto se troviamo $\bar{n} \geq 1$ tale che
$$\frac{2}{n^2} < \epsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}. \tag{7.1.1}$$
avremo, per la proprietà transitiva,
$$\frac{n+(-1)^n}{n^3} < \epsilon \ \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$
Per lo studio di (7.1.1) si procede facilmente:
$$\frac{2}{n^2} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{2}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n < -\sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \ \vee \ n > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}.$$
Dunque, scegliendo
$$\bar{n}(\epsilon) := \left[\max\left\{1, \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}\right\}\right] + 1$$
(la parentesi quadra denota la parte intera) si ha quanto desiderato.

Esercizio 7.1.8. Dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-n}{5n^2+1} = \frac{3}{5}.$$
Sol:
Dobbiamo dimostrare che
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} : \frac{3}{5} - \epsilon < \frac{3n^2-n}{5n^2+1} < \frac{3}{5} + \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ n > \bar{n}(\epsilon).$$
Svolgendo la divisione tra polinomi si ha
$$\frac{3n^2-n}{5n^2+1} = \frac{3}{5} + \frac{-n-\frac{3}{5}}{5n^2+1}.$$
Quindi, fissato $\epsilon > 0$
$$\frac{3}{5} - \epsilon < \frac{3n^2-n}{5n^2+1} < \frac{3}{5} + \epsilon \Leftrightarrow \frac{3}{5} - \epsilon < \frac{3}{5} + \frac{-n-\frac{3}{5}}{5n^2+1} < \frac{3}{5} + \epsilon \Leftrightarrow \begin{cases} (I) \ \ \dfrac{-n-\frac{3}{5}}{5n^2+1} < \epsilon \\ (II) \ \ \dfrac{-n-\frac{3}{5}}{5n^2+1} > -\epsilon \end{cases} \Leftrightarrow (II) \frac{-n-\frac{3}{5}}{5n^2+1} > -\epsilon.$$

Nell'utlima implicazione abbiamo usato che la disuguaglianza (I) è verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, in quanto
$$\frac{-n-\frac{3}{5}}{5n^2+1} < 0 < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Per quel che riguarda la disuguaglianza (II), si ha
$$(II) \Leftrightarrow \frac{n+\frac{3}{5}}{5n^2+1} < \epsilon.$$
Per ogni $n \geq 1$ si ha
$$b_n := \frac{n+\frac{3}{5}}{5n^2+1} < \frac{n+1}{5n^2+1} < \frac{2n}{5n^2} = \frac{2}{5n} =: c_n.$$
Cerchiamo $\bar{n}(\epsilon) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che
$$c_n < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}(\epsilon). \tag{7.1.2}$$
Dato che
$$\frac{2}{5n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{5\epsilon},$$
allora (7.1.2) è soddisfatta se si sceglie
$$n(\epsilon) := \max\left\{1, \left[\frac{2}{5\epsilon}\right] + 1\right\} = \left[\frac{2}{5\epsilon}\right] + 1$$
dove ricordiamo che $[x]$ denota la parte intera di x. Dunque,
$$b_n := \frac{n+\frac{3}{5}}{5n^2+1} < c_n < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}(\epsilon).$$
Abbiamo così dimostrato che
$$\forall \epsilon > 0 \ \frac{3}{5} - \epsilon < \frac{3n^2-n}{5n^2+1} < \frac{3}{5} + \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > \left[\frac{2}{5\epsilon}\right] + 1.$$
Ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 7.1.9. Dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sin n}{n^3-n^2+1} = 0.$$

SOL. ES. 7.1.9. Fissiamo $\epsilon > 0$. Cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che
$$\left|\frac{n+\sin n}{n^3-n^2+1}\right| < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$
Si ha
$$|n+\sin n| \leq n + |\sin n| \leq n+1 \leq 2n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$
Inoltre, osserviamo che
$$n^3 - n^2 + 1 = n^2(n-1) + 1 \geq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Allora
$$|n^3-n^2+1| = n^3-n^2+1 \geq n^3-n^2 = n^2(n-1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$
Pertanto,
$$\left|\frac{n+\sin n}{n^3-n^2+1}\right| = \frac{|n+\sin n|}{n^3-n^2+1} \leq \frac{2n}{n^2(n-1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$
Pertanto, essendo
$$n^2(n-1) \geq n^2(2-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$
si ha
$$\left|\frac{n+\sin n}{n^3-n^2+1}\right| \leq \frac{2n}{n^2(n-1)} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$
Risolviamo
$$\frac{2}{n} < \epsilon.$$
Si ha
$$\frac{2}{n} < \epsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\epsilon}.$$
Quindi, scegliendo
$$\bar{n} := \max\left\{2, \left[\frac{2}{\epsilon}\right]+1\right\}$$
si ha
$$\left|\frac{n+\sin n}{n^3-n^2+1}\right| \leq \frac{2}{n} < \epsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$

□

Esercizio 7.1.10. Dimostrare che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{-n+4} = -\infty.$$

SOL. ES. 7.1.10. La successione $\frac{n^2}{-n+4}$ è ben definita per $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 5$. Sia $M \in \mathbb{R}$, $M < 0$. Cerchiamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$, $\bar{n} \geq 5$, tale che
$$\frac{n^2}{-n+4} < M \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$
Si ha
$$\frac{n^2}{-n+4} < M \Leftrightarrow \frac{n^2}{n-4} > -M \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$
Si ha
$$4 > 0 \Leftrightarrow -4 < 0 \Leftrightarrow n-4 < n,$$
quindi
$$\frac{n^2}{n-4} > \frac{n^2}{n} = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 5.$$

Pertanto, se scegliamo

$$\bar{n} := \max\{5, [-M]+1\},$$

abbiamo

$$\frac{n^2}{n-4} > n \geq [-M]+1 > -M \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$

$\square$

Esercizio 7.1.11. Si consideri la successione (a_n), con $a_n = \dfrac{3n^2-n}{5n^2+1}$. Sia L il valore del suo limite. Per ogni $\varepsilon > 0$ determinare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}.$$

SOL. ES. 7.1.11. Vogliamo dimostrare che se $\epsilon > 0$ allora $\exists \bar{n}$ tale che

$$-\epsilon < \frac{3n^2-n}{5n^2+1} - \frac{3}{5} < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}$$

$$\forall n \geq \bar{n} \quad -\epsilon < \frac{5(3n^2-n)-3(5n^2+1)}{5(5n^2+1)} < \epsilon$$

$$\forall n \geq \bar{n} \quad -\epsilon < \frac{-5n-3}{5(5n^2+1)} < \epsilon.$$

Fissato $\epsilon > 0$ mi chiedo se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{-5n-3}{5(5n^2+1)} > -\epsilon \\ \frac{-5n-3}{5(5n^2+1)} < \epsilon \end{cases}$$

La seconda vale $\forall n \in \mathbb{N}$ perché la frazione è sempre negativa.
Considerando la prima, ci chiediamo se fissato $\epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{5n+3}{5(5n^2+1)} < \epsilon$. Sia $a_n = \frac{5n+3}{5(5n^2+1)}$ allora

$$\frac{5n+3}{5(5n^2+1)} < \frac{5n+3}{5(5n^2)} < \frac{5n+3}{5n^2} < \frac{5n+5}{5n^2} = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2}{n} =: b_n$$

Abbiamo che $a_n < bn \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cerco quindi $\bar{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $b_n < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \bar{n}$, cioè tale che $\frac{2}{n} < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \bar{n}$, cioè tale che $n > \frac{2}{\epsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \bar{n}$. Scelgo $\bar{n} = \max\left\{1, \left[\frac{2}{\epsilon}\right]+1\right\} = \left[\frac{2}{\epsilon}\right]+1 \quad \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Con questa scelta si ha

$$a_n = \frac{5n+3}{5(5n^2+1)} < b_n < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq \bar{n}.$$

$\square$

Esercizio 7.1.12. Si consideri la successione (a_n), con $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+(-1)^n}{n+2}}$. Sia L il valore del suo limite. Determinare L e verificare la correttezza della risposta usando la definizione di limite.

SOL. ES. 7.1.12. Osserviamo che

$$n^2 + (-1)^n = 0 + 1 = 1 \text{ se } n = 0$$

$$n^2 + (-1)^n = 1 - 1 = 0 \text{ se } n = 1$$

e

$$n^2 + (-1)^n \geq 4 - 1 = 3 \text{ se } n \geq 2.$$

Pertanto,

$$\frac{n^2 + (-1)^n}{n+2} \geq 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione (a_n) è quindi ben definita per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Si ha $L = +\infty$. Fissiamo $M \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$. Dimostriamo che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt{\frac{n^2 + (-1)^n}{n+2}} > M \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$

Si ha

$$\sqrt{\frac{n^2 + (-1)^n}{n+2}} > M \Leftrightarrow \frac{n^2 + (-1)^n}{n+2} > M^2$$

Siccome è difficile da risolvere, in n, quest'ultima disuguaglianza, ragioniamo nel modo seguente.
Per ogni $n \geq 2$, si ha

$$\frac{n^2 + (-1)^n}{n+2} \geq \frac{n^2 - 1}{n+2} \geq \frac{n^2 - n}{n+2} \geq \frac{n^2 - n}{n+n} = \frac{n-1}{2}.$$

Risolviamo quindi

$$\frac{n-1}{2} > M^2 \quad \text{con } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$$

Essendo

$$\frac{n-1}{2} > M^2 \Leftrightarrow n - 1 > 2M^2 \Leftrightarrow n > 2M^2 + 1,$$

se poniamo

$$\bar{n} := \max\left\{2, [2M^2 + 1] + 1\right\} = [2M^2 + 1] + 1,$$

deduciamo che

$$\frac{n^2 + (-1)^n}{n+2} \geq \frac{n-1}{2} > M^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$

□

Esercizio 7.1.13 (Da autovalutazione CdL Matematica 7-12-2018). Determinare il valore del limite $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e verificarne la correttezza usando la definizione di limite, determinando esplicitamente uno dei possibili $\overline{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2 + 1}{n^2 + 1} = l.$$

SOL. ES. 7.1.13. VALORE DEL LIMITE: -2
VERIFICA e ricerca di $\bar{n}$:
Sia $\varepsilon > 0$. Vogliamo determinare $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$-\varepsilon < \frac{-2n^2+1}{n^2+1} + 2 < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

cioè

$$-\varepsilon < \frac{-2n^2+1+2n^2+2}{n^2+1} < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

equivalente a

$$-\varepsilon < \frac{3}{n^2+1} < \varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}.$$

La prima disequazione ($\frac{3}{n^2+1} > -\varepsilon$) è verificata per ogni n, in quanto $\frac{3}{n^2+1} > 0$.
Studiamo la seconda disequazione. Si ha

$$\frac{3}{n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2+1 > \frac{3}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{3}{\varepsilon} - 1$$

Quest'ultima è soddisfatta da ogni $n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$ se scegliamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\bar{n} > \sqrt{\max\left\{0, \frac{3}{\varepsilon} - 1\right\}}.$$

Ad esempio, possiamo scegliere

$$\bar{n} := \left[\sqrt{\max\{0, \frac{3}{\varepsilon} - 1\}}\right] + 1.$$

$\square$

Esercizio 7.1.14 (Da autovalutazione CdL Matematica 1-12-2022). Verificare con la definizione di limite che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 3\sin n}{n-2} = +\infty.$$

SOL. ES. 7.1.14. Si noti che

$$\frac{n^2 - 3\sin n}{n-2}$$

è ben definito se $n \neq 2$. D'ora in poi, possiamo supporre, $n \geq 3$.
Si vuole dimostrare che

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \frac{n^2 - 3\sin n}{n-2} > M \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Si noti che

$$|\sin n| \leq 1 \qquad \forall n$$

quindi

$$n^2 - 3\sin n \geq n^2 - 3|\sin n| \geq n^2 - 3 \qquad \forall n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, sarà

$$\frac{n^2 - 3\sin n}{n-2} \geq \frac{n^2-3}{n-2}.$$

A questo punto si deve dimostrare che

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \bar{n} \geq 3, \quad : \quad \frac{n^2-3}{n-2} > M \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Lo facciamo in due modi:

I modo

Per ogni $n \geq 3$ è

$$n \geq 3 \Leftrightarrow -3 \geq -n \Leftrightarrow n^2 - 3 \geq n^2 - n.$$

Pertanto

$$\frac{n^2-3}{n-2} \geq \frac{n^2-n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{n-2}.$$

Inoltre,

$$n - 2 \leq n$$

per cui

$$\frac{n(n-1)}{n-2} \geq \frac{n(n-1)}{n} = n - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Consideriamo la disequazione

$$n - 1 > M$$

che vogliamo risolvere in $\mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Si ha

$$\begin{cases} n - 1 > M \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > M + 1 \\ n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \end{cases}$$

Deduciamo quindi che se $\bar{n} := \max\{[M+1]+1, 3\}$ vale

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad : \quad \frac{n^2 - 3\sin n}{n-2} \geq n - 1 > M \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

II modo

Per ogni $M \in \mathbb{R}^+$ e per ogni $n \geq 3$ è

$$\frac{n^2-3}{n-2} > M \Leftrightarrow n^2 - 3 > M(n-2) \Leftrightarrow n^2 - Mn + 2M - 3 > 0. \tag{7.1.3}$$

Risolviamo l'equazione

$$x^2 - Mx + 2M - 3 = 0.$$

Il discriminante è
$$M^2 - 8M + 12$$
il cui discriminante Δ, a sua volta, è tale che
$$\frac{\Delta}{4} = 16 - 12 = 4 > 0.$$
Allora
$$M^2 - 8M + 12 > 0 \Leftrightarrow M < M_1 \vee M > M_2$$
con
$$M_1 = 4 - 2 = 2, \qquad M_2 = 4 + 2 = 6.$$
Possiamo limitarci a dimostrare, in modo equivalente, che per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, $M > 6$, e per ogni $n \geq 3$ è soddisfatta (7.11.1). Per $M > 6$ sappiamo dai conti sopra che il polinomio
$$x^2 - Mx + 2M - 3$$
ha il discrimimante positivo. Quindi
$$x^2 - Mx + 2M - 3 > 0 \Leftrightarrow x < M^- \vee x > M^+$$
con
$$M^- := \frac{M - \sqrt{M^2 - 8M + 12}}{2}, \qquad M^+ := \frac{M + \sqrt{M^2 - 8M + 12}}{2}.$$
Se scegliamo
$$\bar{n} := \max\{[M^+] + 1, 3\}$$
abbiamo concluso.
Si noti che
$$\max\{[M^+] + 1, 3\} = [M^+] + 1.$$
Infatti, essendo $M > 6$,
$$\left[\frac{M + \sqrt{M^2 - 8M + 12}}{2}\right] + 1 \geq \left[\frac{M}{2}\right] + 1 \geq \left[\frac{6}{2}\right] + 1 = 4 > 3.$$
□

Esercizio 7.1.15. Dimostrare che
$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$
Sol:
Dobbiamo dimostrare che
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : -\epsilon < x^2 < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x| < \delta(\epsilon).$$

Risolvendo la doppia disuguaglianza $-\epsilon < x^2 < \epsilon$ si ha:

$$-\epsilon < x^2 < \epsilon \overset{x^2\geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 < \epsilon \Leftrightarrow -\sqrt{\epsilon} < x < \sqrt{\epsilon}.$$

Basta quindi scegliere $\delta(\epsilon) = \sqrt{\epsilon}$.

Esercizio 7.1.16. Dimostrare che

$$\lim_{x\to -1}(x^2 - 6x) = -5.$$

Sol:

I modo:

Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |x^2 - 6x + 5| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-1| < \delta$$

ossia, tenendo conto che

$$x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5),$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |x-1||x-5| < \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-1| < \delta.$$

Possiamo considerare $\delta < 1$, quindi

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

che implica

$$x - 5 \in]-5, -3[$$

da cui

$$|x-5| = 5 - x \in]3, 5[.$$

Usando l'informazione

$$|x-5| = 5 - x < 5$$

abbiamo

$$|x^2 - 6x + 5| = |x-1||x-5| \leq |x-1| \cdot 5 \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-1| < 1.$$

Se scelgo δ tale che

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{\epsilon}{5}, 1\right\}$$

abbiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $0 < |x-1| < \delta$, è

$$|x^2 - 6x + 5| \leq |x-1| \cdot 5 < \delta 5 < \epsilon,$$

che è quanto desideravamo provare.

II modo:
Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : -5-\epsilon < x^2 - 6x < -5+\epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-1| < \delta.$$

Fissato $\epsilon > 0$ risolviamo

$$\begin{cases} (I)\ \ x^2 - 6x + 5 < \epsilon \\ (II)\ \ x^2 - 6x + 5 > -\epsilon \end{cases} \tag{7.1.4}$$

Risolviamo (I):

$$x^2 - 6x + 5 - \epsilon < 0 : \qquad \frac{\Delta}{4} = 9 - (5-\epsilon) = 4+\epsilon.$$

Senza perdita di generalità possiamo limitarci a considerare $\epsilon \in]0,4[$ (v. Proposizione 7.1.1 (iii)), così che per tali ϵ risulta $\Delta > 0$.
Si ha che, per ogni $\epsilon \in]0,4[$,

$$x^2 - 6x + 5 - \epsilon < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - \sqrt{4+\epsilon} < x < 3 + \sqrt{4+\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad -\left(\sqrt{4+\epsilon} - 2\right) < x - 1 < 2 + \sqrt{4+\epsilon}$$

Studiamo (II). Per ogni $\epsilon \in]0,4[$ si ha

$$x^2 - 6x + 5 > -\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 5 + \epsilon > 0$$

Essendo

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - (5+\epsilon) = 4 - \epsilon > 0$$

allora

$$x^2 - 6x + 5 + \epsilon > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 3 - \sqrt{4-\epsilon} \vee x > 3 + \sqrt{4-\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 < 2 - \sqrt{4-\epsilon} \vee x - 1 > 2 + \sqrt{4-\epsilon}.$$

Pertanto

$$\begin{cases} (I)\ \ x^2 - 6x + 5 < \epsilon \\ (II)\ \ x^2 - 6x + 5 > -\epsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\left(\sqrt{4+\epsilon} - 2\right) < x - 1 < 2 + \sqrt{4+\epsilon} \\ x - 1 < 2 - \sqrt{4-\epsilon} \vee x - 1 > 2 + \sqrt{4-\epsilon} \end{cases}$$

Osserviamo che

$$2 - \sqrt{4-\epsilon} > 0$$

e che le soluzioni di

$$\begin{cases} -\left(\sqrt{4+\epsilon} - 2\right) < x - 1 < 2 + \sqrt{4+\epsilon} \\ x - 1 < 2 - \sqrt{4-\epsilon} \end{cases}$$

sono anche soluzioni del sistema in (7.1.4).
Se scegliamo

$$\delta := \delta(\epsilon) = \min\{\left(\sqrt{4+\epsilon} - 2\right), 2 + \sqrt{4+\epsilon}, 2 - \sqrt{4-\epsilon}\} = \min\{\left(\sqrt{4+\epsilon} - 2\right), 2 - \sqrt{4-\epsilon}\}$$

si ha

$$\forall \epsilon \in]0,4[\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : -5-\epsilon < x^2 - 6x < -5+\epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-1| < \delta.$$

Esercizio 7.1.17. Verificare i limiti:

$$\lim_{x\to 1} x^2 - 6x = -5$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = +\infty.$$

Esercizio 7.1.18. Utilizzando la definizione di limite, verificare che si ha

$$\lim_{x\to -1} 2x+5=3; \qquad \lim_{x\to 1} x^2-x+1=1; \qquad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}=0;$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-3x+2}=-\infty; \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+3x+1}=0; \quad \lim_{x\to a} \frac{1}{x}=\frac{1}{a} \quad (a\neq 0).$$

7.2. Aritmetica di 0 e $\pm\infty$

Un teorema fondamentale è quello relativo all'algebra dei limiti che qui richiamiamo in forma sintetica nei casi più complicati: quelli coinvolgenti limiti divergenti o convergenti a 0.
Per capire in che modo vadano interpretate le prossime uguaglianze, facciamo alcuni esempi:

Es. 1: Ciò che si intende con $+\infty\cdot(-\infty)=-\infty$ è che

il limite del prodotto di una funzione che tende a $+\infty$ con una che tende a $-\infty$ è uguale a $-\infty$

Es. 2: Ciò che si intende con $\frac{1}{0^+}=+\infty$ è che

il limite del rapporto tra una funzione a numeratore che tende a 1 e una a denominatore che tende a 0^+ è uguale a $+\infty$.

Es. 3: Ciò che si intende con $1^0=1$ è che

il limite della potenza che ha per base una funzione che tende a 1 e per esponente una funzione che tende a 0 è uguale a 1.

N.B.: Quando non diversamente specificato, c denota un numero reale <u>diverso da 0</u>.

$c+(+\infty)=+\infty$ con $c\in\mathbb{R}$

$c+(-\infty)=-\infty$ con $c\in\mathbb{R}$

$c-(+\infty)=-\infty$ con $c\in\mathbb{R}$

$c-(-\infty)=+\infty$ con $c\in\mathbb{R}$

$$+\infty\cdot c=\left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } c>0 \\ -\infty & \text{se } c<0 \end{array}\right.$$

$$-\infty\cdot c=\left[\begin{array}{ll} -\infty & \text{se } c>0 \\ +\infty & \text{se } c<0 \end{array}\right.$$

$$\frac{c}{+\infty}=0=\left[\begin{array}{ll} 0^+ & \text{se } c>0 \\ 0^- & \text{se } c<0 \end{array}\right.$$

$$\frac{c}{-\infty} = 0 = \left[\begin{array}{ll} 0^- & \text{se } c > 0 \\ 0^+ & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{+\infty}{c} = \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{-\infty}{c} = \left[\begin{array}{ll} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

$\dfrac{0}{\infty} = 0$ Talvolta è utile sapere qualcosa di più: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{0^+}{+\infty} = 0^+ \\[2ex] \dfrac{0^-}{+\infty} = 0^- \\[2ex] \dfrac{0^+}{-\infty} = 0^- \\[2ex] \dfrac{0^-}{-\infty} = 0^+ \end{array}\right.$

$$\frac{c}{0^+} = \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{c}{0^-} = \left[\begin{array}{ll} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{0^+}{c} = 0 \left[\begin{array}{ll} = 0^+ & \text{se } c > 0 \\ = 0^- & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$$\frac{0^-}{c} = 0 \left[\begin{array}{ll} = 0^- & \text{se } c > 0 \\ = 0^+ & \text{se } c < 0 \end{array}\right.$$

$1^0 = 1$

$+\infty^{+\infty} = +\infty$

$+\infty^{-\infty} = 0$ (precisamente: 0^+)

$(0^+)^{+\infty} = 0$

$(0^+)^{-\infty} = +\infty$

Definizione 7.2.1. Si dicono <u>forme indeterminate</u> le seguenti operazioni dell'artimetica di 0 e ∞:

$+\infty + (-\infty)$

$+\infty - (+\infty)$

$\pm\infty \cdot 0$

$\frac{\infty}{\infty}$

$\frac{0}{0}$

$(+\infty)^0$

0^0

1^∞

Le operazioni etichettate come *forme indeterminate* sono tali che per esse si possono formulare esempi di calcolo di limiti per i quali si può avere qualunque esito a seconda della scelta delle funzioni.

Esempio 7.2.2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x$ si presenta nella forma $1^{+\infty}$. Come dimostrato nel Corollario 7.8.13 tale limite è e^α. Esso dunque varia a seconda della scelta di α: facendo variare α in $\mathbb{R}$ il numero reale e^α prende tutti i valori di $]0+\infty[$.

Esempio 7.2.3. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha+1}{n}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$. Risulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha+1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{array}\right.$$

Esempio 7.2.4. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il limite $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^\alpha}{n}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Posto $a_n = \frac{(-1)^n n^\alpha}{n}$ Risulta

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^\alpha}{2n} = \lim_{n\to+\infty}(2n)^{\alpha-1} = \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{array}\right.$$

d'altra parte

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-(2n+1)^\alpha}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -(2n+1)^{\alpha-1} = \left[\begin{array}{ll} -\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ -1 & \text{se } \alpha < 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{array}\right.$$

Pertanto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n n^\alpha}{n}\left[\begin{array}{ll} \nexists & \text{se } \alpha \geq 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{array}\right.$$

7.3. Teoremi utili

Teorema 7.3.1 (Algebra dei limiti: l'esistenza del limite). *Siano (a_n) e (b_n) successioni. Valgono*

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\lim_{n\to+\infty}b_n$$
$$\lim_{n\to+\infty}a_nb_n=\lim_{n\to+\infty}a_n\lim_{n\to+\infty}b_n$$

ogni qual volta il secondo membro ha senso (ossia i limiti esistono e non si presenta una forma indeterminata).
Se poi (b_n) è definitivamente a termini non nulli,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to+\infty}a_n}{\lim_{n\to+\infty}b_n}$$

ogni qual volta il secondo membro ha senso (ossia i limiti esistono e non si presenta una forma indeterminata).

DIMOSTRAZIONE. Rimandiamo alle dispense del prof. Dore per la dimostrazione. □

Vale anche il seguente:

Teorema 7.3.2 (Algebra dei limiti: la non esistenza). *Siano (a_n) e (b_n) successioni.*
Se (b_n) è una successione convergente a $b\in\mathbb{R}$ si hanno:

$$\nexists\lim_{n\to+\infty}a_n \quad\Rightarrow\quad \nexists\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$$

e

$$(b\neq 0 \text{ e } \nexists\lim_{n\to+\infty}a_n)\quad\Rightarrow\quad\nexists\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n).$$

DIMOSTRAZIONE. Per esercizio dimostrare la non esistenza del limite nel caso somma.

Consideriamo qui il caso del prodotto.
I modo:
Dato che $b_n\to b$ con $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ allora (b_n) è definitivamente non nulla.
Se esistesse il limite $\lim_{n\to+\infty}(a_nb_n)$ allora dovrebbe esistere, per il Teorema 7.3.1, anche $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_nb_n}{b_n}$, ossia il limite di (a_n), contraddicendo l'ipotesi.

II modo:
Supponiamo che non esista il limite di (a_n). Allora esistono due sottosuccessioni (a_{h_n}) e (a_{k_n}) che hanno limiti, rispettivamente, ℓ e ℓ' in $\overline{\mathbb{R}}$, con $\ell\neq\ell'$.
Si hanno

$$\lim_{n\to+\infty}a_{h_n}\lim_{n\to+\infty}b_{h_n}=\ell b$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} = \ell' b,$$

dunque, per l'algebra dei limiti, Teorema 7.3.1,

$$\lim_{n\to+\infty} a_{h_n} b_{h_n} = \ell b$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} b_{k_n} = \ell' b.$$

Dato che $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora

$$\ell b \neq \ell' b.$$

Allora abbiamo trovato due sottosuccessioni di $(a_n b_n)$ aventi limiti diverso. Da qui segue che $(a_n b_n)$ non ha limite. □

In virtù dell'algebra dei limiti, alcuni limiti di funzioni apparentemente complicate sono facili da calcolare.
Quando si ha il prodotto di due successioni, una infinitesima e una è limitata (la quale potrebbe anche non avere limite) il limite del prodotto risulta essere zero.

Teorema 7.3.3 (Limitata per infinitesima = infinitesima). *Siano (a_n) e (b_n) successioni.*
Se (a_n) è una successione infinitesima e (b_n) è una successione limitata, allora la successione $(a_n b_n)$ è infinitesima.
In simboli:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \qquad (b_n) \textit{ successione limitata}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi

$$\exists M \geq 0 \,:\, |b_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per ipotesi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

che sappiamo, per il Teorema 7.1.5, essere equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

Allora

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per il Teorema dei carabinieri si conclude che

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n b_n| = 0.$$

Quindi, equivalentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0.$$

□

Un analogo risultato vale per le funzioni. Quando si ha il prodotto di due funzioni, una infinitesima e l'altra limitata (in un intorno del punto limite), allora il limite del prodotto risulta essere zero.

Teorema 7.3.4 (Limitata per infinitesima = infinitesima). *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto limite di A (ossia $x_0 \in D(A)$, oppure $x_0 = +\infty$ se* $\sup A = +\infty$ *oppure $x_0 = -\infty$ se* $\inf A = -\infty$.
Se f è infinitesima per x che tende a x_0 e g è limitata in un intorno di x_0, allora la funzione prodotto fg è infinitesima per x tendente a x_0.

DIMOSTRAZIONE. Dimostrazione analoga a quella del Teorema 7.3.3. □

7.4. Massimo e mimimo limite

Esercizio 7.4.1. Siano (a_n) e (b_n) successioni, con (b_n) convergente. Dimostrare che

$$\max\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \max\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Analogamente,

$$\min\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \min\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Sol:
Diamo la dimostrazione per i maxlim.
≤:
Per un teorema noto, v. Dispense del prof. Dore, esiste una sottosuccessione $(a_{k_n} + b_{k_n})$ della successione $(a_n + b_n)$ tale che

$$\exists \lim_{n\to+\infty}(a_{k_n} + b_{k_n}) = \max\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n).$$

Dato che (b_n) converge

$$\exists \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} b_n = \max\lim_{n\to+\infty} b_n \in \mathbb{R}. \tag{7.4.1}$$

Si ha:

$$\max\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty}(a_{k_n} + b_{k_n}) = \lim_{n\to+\infty}(a_{k_n} + b_{k_n}) - \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} + \lim_{n\to+\infty} b_{k_n}$$

Per l'algebra dei limiti (Teorema 7.3.1, v. anche le dispense del prof. Dore,

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{k_n} + b_{k_n}) - \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} = \lim_{n\to+\infty}(a_{k_n} + b_{k_n} - b_{k_n}) = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}.$$

Per un teorema noto (v. dispense del prof. Dore)

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{k_n}+b_{k_n}) - \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Dunque

$$\max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n) \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} \overset{(7.4.1)}{=} \max\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

$\geq$:
Per un teorema nelle dispense del prof. Dore, esiste una sottosuccessione (a_{k_n}) della successione (a_n) tale che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Si ha:

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} + \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} - \lim_{n\to+\infty} b_{k_n} \overset{\text{Alg. limiti}+(7.4.1)}{=} \lim_{n\to+\infty}(a_{k_n}+b_{k_n}) - \lim_{n\to+\infty} b_n$$

Allora

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}(a_{k_n}+b_{k_n}).$$

Dato che per un teorema nelle dispense del prof. Dore

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{k_n}+b_{k_n}) \leq \max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)$$

si deduce che

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n \leq \max\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n).$$

La dimostrazione è conclusa.

Definizione 7.4.2. Sa (a_n) una successione. Diciamo che $m \in \mathbb{R}$ è un <u>maggiorante definitivo</u> di (a_n) se esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \leq m \qquad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq \bar{n}.$$

Proposizione 7.4.3 (Caratterizzazione di max lim). *Sia (a_n) una successione. Sia*

$$\mathcal{M} := \{m \in \mathbb{R} : m \text{ è un maggiorante definitivo di } (a_n)\}.$$

Valgono le seguenti:

$$\mathcal{M} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \max\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf \mathcal{M} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

$$\mathcal{M} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\mathscr{M}_n := \{m \in \mathbb{R} : m \text{ è un maggiorante di } (a_i)_{i \geq n}\}.$$

Si hanno

$$\mathscr{M}_{n+1} \supseteq \mathscr{M}_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{7.4.2}$$

e

$$\mathscr{M} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{M}_n. \tag{7.4.3}$$

Se $\mathscr{M} = \emptyset$ allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{k \geq n} a_k = +\infty$$

da cui

$$\max\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

Sia $\mathscr{M} \neq \emptyset$. Essendo

$$\sup_{k \geq n} a_k = \inf \mathscr{M}_n$$

allora

$$\max\lim_{n \to +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} \inf \mathscr{M}_n. \tag{7.4.4}$$

Per (7.4.2) la successione $(\inf \mathscr{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente. Allora

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \inf \mathscr{M}_n = \lim_{n \to +\infty} \inf \mathscr{M}_n.$$

Quindi:

$$\max\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \inf \mathscr{M}_n. \tag{7.4.5}$$

Per ogni $m \in \mathscr{M}$ esiste $\bar{n}$ tale che $m \in \mathscr{M}_{\bar{n}}$, da cui

$$\inf \mathscr{M}_{\bar{n}} \leq m.$$

Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} \inf \mathscr{M}_n = \lim_{n \to +\infty, n \geq \bar{n}} \inf \mathscr{M}_n \leq m.$$

Allora

$$\max\lim_{n \to +\infty} a_n \overset{(7.4.5)}{\leq} m \qquad \forall m \in \mathscr{M}.$$

Quindi

$$\max\lim_{n \to +\infty} a_n \leq \inf \mathscr{M}.$$

Dimostriamo la disuguaglianza opposta:

$$\max\lim_{n \to +\infty} a_n \overset{(7.4.4)}{=} \inf_{n \in \mathbb{N}} \inf \mathscr{M}_n \overset{(7.4.3)}{\leq} \inf_{n \in \mathbb{N}} \inf \mathscr{M} = \inf \mathscr{M}.$$

$\square$

Esercizio 7.4.4. Scrivere un analogo della Proposizione 7.4.3 per il min lim.

Corollario 7.4.5. *Sia* (a_n) *una successione in* $\mathbb{R}$ *e sia* $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ *con* $\ell \in \mathbb{R}$.
Allora per ogni $\lambda > \ell$ *esiste* $\bar{n}$ *tale che*

$$a_n < \lambda \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dalla Proposizione 7.4.3.
Dimostriamola comunque.
Supponiamo che la tesi sia falsa. Allora esiste $\lambda > \ell$ tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \geq k$ per cui si ha $a_{n_k} \geq \lambda$.
Allora

$$\sup\{a_n : n \geq k\} \geq a_{n_k} \geq \lambda$$

e quindi

$$\ell = \max\lim_{k\to\infty} a_k = \inf_k \sup\{a_n : n \geq k\} \geq \inf_k a_{n_k} \geq \lambda.$$

Ciò è assurdo. $\square$

Esercizio 7.4.6. Scrivere e dimostrare una versione del Lemma 7.4.5 per il minimo limite.

7.5. Criteri per il calcolo dei limiti di successione con massimo e minimo limite

Teorema 7.5.1 (Criterio del rapporto per le successioni). *Sia* (a_n) *una successione a termini positivi. Se*

$$\max\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, 1[$$

allora la successione (a_n) *tende a* 0.
Se

$$\min\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in]1, +\infty] (=]1, +\infty[\cup \{+\infty\})$$

allora la successione (a_n) *diverge a* $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo sia $\ell \in [0, 1[$
Posto

$$\ell := \max\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

e definito

$$q := \frac{1+\ell}{2} \in]\ell, 1[,$$

per il Corollario 7.4.5 si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ definitivamente, ossia:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Per induzione si dimostra (v. Esercizio 5.3.2) che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}, \quad 0 < a_n < q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$

Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-\bar{n}} \overset{q<1+\text{Lemma 6.3.40}}{=} 0$ deduciamo per il Teorema dei carabinieri che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Si lascia per esercizio la dimostrazione della seconda parte. □

Corollario 7.5.2. *Sia* (a_n) *una successione a termini positivi. Sia*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell \in [0, \infty] (= [0, +\infty[\cup \{+\infty\}).$$

Se $\ell < 1$ *allora la successione* (a_n) *tende a* 0.
Se $\ell > 1$ *oppure* $\ell = +\infty$ *allora la successione* (a_n) *tende a* $+\infty$.

Per la dimostrazione di questo prossimo, e molto utile, risultato faremo uso del Lemma 6.3.40 e del teorema del confronto.

Teorema 7.5.3 (Criterio della radice per le successioni). *Sia* (a_n) *una successione a termini non negativi. Se*

$$\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, 1)$$

allora la successione (a_n) *tende a* 0.
Se

$$\min\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in (1, +\infty]$$

allora la successione (a_n) *diverge a* $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Diamo la dimostrazione nel caso $\ell < 1$.
Osservando che $\ell < \dfrac{1+\ell}{2} < 1$ si ha, per il Corollario 7.4.5

$$\exists \bar{n} \ : \ \sqrt[n]{a_n} < \frac{1+\ell}{2} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

ossia

$$\exists \bar{n} \ : \ a_n < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Per il Lemma 6.3.40, essendo $0 < \dfrac{1+\ell}{2} < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n = 0,$$

deduciamo, per il teorema del confronto, che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Se i limiti esistono, segue immediatamente dal Teorema 7.5.3, il seguente risultato.

Corollario 7.5.4 (Criterio della radice coi limiti). *Sia (a_n) una successione di numeri reali non negativi. Allora*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,1) \qquad &\Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\\
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell \in (1,+\infty] \qquad &\Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.
\end{aligned}$$

Teorema 7.5.5 (Medie aritmetiche). *Sia (a_n) una successione. Valgono le seguenti:*

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \min\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \le \max\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

In particolare, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo l'affermazione coi massimi limiti.
Se $\max\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ la relazione è ovvia.
Se $\max\lim\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$ possiamo scegliere un maggiorante definitivo $m \in \mathbb{R}$ di (a_n), ossia tale che,

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \;\;:\;\; \forall i > \bar{n} \;\; a_i \le m.$$

Preso $n > \bar{n}$ e posto

$$\sigma_n := \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n},$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i + \sum_{i=\bar{n}+1}^{n} a_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=\bar{n}+1}^{n} m\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i + \frac{m(n-\bar{n})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i + m - \frac{m\bar{n}}{n}.
\end{aligned}$$

Prendendo i massimi limiti si ottiene:

$$\max\lim_{n\to+\infty}\sigma_n \le \max\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\bar{n}} a_i + m - \frac{m\bar{n}}{n}\right) = m.$$

Tenuto conto che $\max\lim_{n\to+\infty} a_n$ è l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi (v. Proposizione 7.4.3) si ottiene la tesi.

L'affermazione coi minimi limiti si ottiene passando agli opposti. □

Teorema 7.5.6 (Hopital discreto - il caso $\frac{a_n}{n}$). *Sia* (a_n) *una successione. Valgono le seguenti:*

$$\min\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) \le \min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}, \qquad \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} \le \max\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}).$$

In particolare,

$$\exists \lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) =: \Lambda \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} = \Lambda.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\alpha_n := a_n - a_{n-1}$. Osserviamo che

$$\sigma_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \overset{\text{Es. 5.3.3}}{=} \frac{a_n - a_0}{n}.$$

Applichiamo alla successione (α_n) il Teorema 7.5.5. Si ha

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_0}{n}, \qquad \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_0}{n} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0}{n} = 0,$$

allora

$$\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_0}{n} \overset{\text{Esercizio 7.4.1}}{=} \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} + \lim_{n\to+\infty}\frac{-a_0}{n} = \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}.$$

Analogamente:

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_0}{n} \overset{\text{Esercizio 7.4.1}}{=} \min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n} + \lim_{n\to+\infty}\frac{-a_0}{n} = \min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}.$$

La conclusione segue. □

Teorema 7.5.7 (Hopital discreto: $\infty/+\infty$). *Siano* (a_n) *e* (b_n) *successioni reali, con*

(i) (b_n) *strettamente crescente*
(ii) $b_n \to +\infty$.

Allora

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \le \min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \le \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \le \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

In particolare, se esiste

$$\left(\exists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =: \Lambda \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \Lambda\right).$$

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo la disuguaglianza coi maxlim.
Per la stretta crescenza di (b_n) è ben definito $\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$.
Se $\max\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty$ non c'è nulla da dimostrare.
Sia $\max\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\in\mathbb{R}$. Senza perdita di generalità possiamo supporre (b_n) positiva.
Sia m un maggiorante definitivo di $\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right)_n$, ossia (v. Definizione 7.4.2)

$$\exists\bar{n}\in\mathbb{N}:\ \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\le m \qquad \forall n>\bar{n}$$

da cui

$$\exists\bar{n}\in\mathbb{N}:\ a_i-a_{i-1}\le m(b_i-b_{i-1}) \qquad \forall i>\bar{n}.$$

Sommando su i, per ogni $n\ge\bar{n}$

$$a_n-a_{\bar{n}}\overset{\text{Es. 5.3.3}}{=}\sum_{i=\bar{n}+1}^{n}(a_i-a_{i-1})\le m\sum_{i=\bar{n}+1}^{n}(b_i-b_{i-1})\overset{\text{Es. 5.3.3}}{=}m(b_n-b_{\bar{n}}).$$

Dividendo per b_n (che, come detto è, senza perdita di generalità, positivo) otteniamo

$$\frac{a_n-a_{\bar{n}}}{b_n}\le m\frac{b_n-b_{\bar{n}}}{b_n}$$

da cui

$$\frac{a_n}{b_n}\le m\frac{b_n-b_{\bar{n}}}{b_n}+\frac{a_{\bar{n}}}{b_n}=m+\frac{a_{\bar{n}}-b_{\bar{n}}}{b_n}.$$

Pertanto, mandando n a infinito, dalla (ii) si ha

$$\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}\le m+\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{\bar{n}}-b_{\bar{n}}}{b_n}=m+\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{\bar{n}}-b_{\bar{n}}}{b_n}=m+0=m.$$

Dunque,

$$\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}\le m.$$

Dalla Proposizione 7.4.3

$$\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\inf\left\{m:\ m\text{è un maggiorante definitivo di }\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}\right\}$$

quindi

$$\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}\le\max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

Si lascia per esercizio la dimostrazione per i minlim. □

Teorema 7.5.8 (Hopital discreto: 0/0). *Siano (a_n) e (b_n) successioni reali infinitesime, (b_n) strettamente monotona. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\Lambda\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\Lambda.$$

Prima di enunciare un risultato riguardante i massimi e i minimi limiti della media geometrica, dimostriamo un risultato preliminare.

Lemma 7.5.9. *Sia* (a_n) *una successione a termini positivi. Allora*

$$\max\lim_{n\to+\infty}\log(a_n) = \log\big(\max\lim_{n\to+\infty} a_n\big).$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo dapprima il $\leq$:
Essendo la funzione logaritmo una funzione crescente, si ha

$$\log(a_k) \leq \log\left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \qquad \text{per ogni } k \geq n$$

da cui

$$\sup_{k\geq n}\log(a_k) \leq \log\left(\sup_{k\geq n} a_k\right).$$

Tenendo conto che la funzione esponenziale di base $e > 1$ è crescente, si ha

$$\exp\big(\sup_{k\geq n}\log(a_k)\big) \leq \sup_{k\geq n} a_k. \tag{7.5.1}$$

Essendo

$$\inf_{m\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq m}\log(a_k) \leq \sup_{k\geq n}\log(a_k) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

si ha, per la crescenza di $x \mapsto e^x$,

$$\exp\left(\inf_{m\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq m}\log(a_k)\right) \leq \exp\left(\sup_{k\geq n}\log(a_k)\right) \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

da cui

$$\exp\left(\inf_{m\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq m}\log(a_k)\right) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\exp\left(\sup_{k\geq n}\log(a_k)\right). \tag{7.5.2}$$

Combinando (7.5.1) e (7.5.2) deduciamo

$$\exp\left(\inf_{m\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq m}\log(a_k)\right) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{k\geq n} a_k$$

ossia

$$\exp\left(\max\lim_{n\to+\infty}\log(a_n)\right) \leq \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Per la crescenza della funzione $x \mapsto \log x$ deduciamo

$$\max\lim_{n\to+\infty}\log(a_n) \leq \log\big(\max\lim_{n\to+\infty} a_n\big).$$

Dimostriamo ora il $\geq$:
Fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sup_{h\geq n} a_h \in \{\sup_{k\geq m} a_k \,:\, m \in \mathbb{N}\}$$

da cui

$$\sup_{h\geq n} a_h \geq \inf_{m\in\mathbb{N}} \{\sup_{k\geq m} a_k \,:\, m\in\mathbb{N}\}$$

ossia

$$\sup_{h\geq n} a_h \geq \max\lim_{m\to+\infty} a_m \qquad \text{per ogni } n\in\mathbb{N}.$$

Per la crescenza della funzione $x\mapsto \log x$ deduciamo

$$\log\big(\sup_{h\geq n} a_h\big) \geq \log\big(\max\lim_{m\to+\infty} a_m\big).$$

Da qui deduciamo

$$\log\big(\max\lim_{m\to+\infty} a_m\big) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \log\big(\sup_{h\geq n} a_h\big). \tag{7.5.3}$$

Fissiamo ora $h\in\mathbb{N}$, $h\geq n$. Si ha

$$\log(a_h)\in\{\log(a_k)\,:\,k\geq n\}$$

da cui

$$\log(a_h)\leq \sup_{k\geq n}\log(a_k).$$

Tenendo conto che la funzione esponenziale di base $e>1$ è crescente,

$$a_h \leq \exp\left(\sup_{k\geq n}\log(a_k)\right).$$

Per l'arbitrarietà di $h\geq n$, deduciamo

$$\sup_{h\geq n} a_h \leq \exp\left(\sup_{k\geq n}\log(a_k)\right).$$

Per la crescenza della funzione $x\mapsto \log x$ deduciamo

$$\log\big(\sup_{h\geq n} a_h\big) \leq \sup_{k\geq n}\log(a_k).$$

Passando agli estremi inferiori:

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\log\big(\sup_{h\geq n} a_h\big) \leq \max\lim_{n\to+\infty}\log(a_n). \tag{7.5.4}$$

Combinando (7.5.3) e (7.5.4) deduciamo

$$\log\big(\max\lim_{m\to+\infty} a_m\big) \leq \max\lim_{n\to+\infty}\log(a_n),$$

che è quanto volevamo dimostrare. $\square$

Teorema 7.5.10 (Medie geometriche). *Sia (a_n) una successione a termini positivi. Valgono le seguenti:*

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \min\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}, \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

In particolare, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \overset{\text{Es. 5.3.7}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(a_i).$$

Applicando il Teorema 7.5.5 alla successione $\alpha_n := \log a_n$, essendo

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(a_i) = \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right),$$

si ha

$$\min\lim_{n\to+\infty} \log a_n \le \min\lim_{n\to+\infty} \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right), \qquad \max\lim_{n\to+\infty} \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) \le \max\lim_{n\to+\infty} \log a_n.$$

Per il Lemma 7.5.9

$$\max\lim_{n\to+\infty} \log a_n = \log\left(\max\lim_{n\to+\infty} a_n\right).$$

Analogamente

$$\max\lim_{n\to+\infty} \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) = \log\left(\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right)$$

Abbiamo cosí dimostrato

$$\log\left(\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) \le \log\left(\max\lim_{n\to+\infty} a_n\right).$$

da cui, sempre per la monotonia di log:

$$\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

$$\max\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right) \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Analogamente si procede per i minimi limiti. $\square$

Corollario 7.5.11. *Sia (a_n) una successione a termini positivi.*
Valgono le seguenti:

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \min\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}, \qquad \max\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \le \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

In particolare, se esiste $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *allora*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che se esiste $\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

dimostriamo che

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \min\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

Sia

$$\alpha_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Dato che si ha

$$\prod_{i=1}^{n}\alpha_i = \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i-1}} \overset{\text{Esercizio 5.3.4}}{=} \frac{a_n}{a_0},$$

applicando il Teorema 7.5.10 alla successione α_n si ottiene

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \min\lim_{n\to+\infty}\alpha_n = \min\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i} = \min\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \min\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_0}}.$$

Essendo (v. Lemma 6.3.41)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_0} = 1$$

si deduce

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \min\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

Analogamente si procede coi massimi limiti. □

Esercizio 7.5.12. Trovare una successione (a_n) a termini positivi tale che

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

e

$$\min\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < \max\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

7.6. Criteri per il calcolo dei limiti di successione senza massimo e minimo limite

Riassumiamo qui i criteri esaminati nella sezione precedente, enunciando i teoremi senza usare la nozione di massimo e minimo limite.
Tutti questi risultati sono conseguenza dei precedenti, ma del Teorema 7.6.1, Teorema 7.6.6 e Teorema 7.6.11 si ridà la dimostrazione.

Teorema 7.6.1 (Criterio del rapporto per le successioni). *Sia (a_n) una successione a termini positivi. Se*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,1[$$

allora la successione (a_n) tende a 0.
Se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in]1,+\infty] (=]1,+\infty[\cup \{+\infty\}).$$

allora la successione (a_n) diverge a $+\infty$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo sia $\ell \in [0,1)$
Posto

$$\ell := \lim_{k\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

e definito

$$q := \frac{1+\ell}{2} \in]\ell, 1[,$$

per la definizione di limite si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ definitivamente, ossia:

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Per induzione si dimostra (v. Esercizio 5.3.2) che

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}, \quad 0 < a_n < q^{n-\bar{n}} a_{\bar{n}}.$$

Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n-\bar{n}} \overset{q<1+\text{Lemma 6.3.40}}{=} 0$ deduciamo per il Teorema dei carabinieri che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Si lascia per esercizio la dimostrazione della seconda parte. Basta considerare (b_n), con $b_n := \frac{1}{a_n}$ e applicare il criterio del rapporto a tale successione. □

Osservazione 7.6.2. Il criterio del rapporto non dà informazioni se $\ell = 1$.
Ad esempio le seguenti successioni (a_n) a termini positivi

$$a_n = \ell, \qquad a_n = \frac{\ell n + 1}{n+2} \qquad a_n = n, \qquad a_n = \frac{1}{n}, \qquad a_n = 2 + \sin\sqrt{n}$$

sono tali che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$
ma i loro limiti sono, rispettivamente,
$$\ell, \qquad \ell, \qquad +\infty, \qquad 0, \qquad \nexists.$$

Esercizio 7.6.3. Usando la formula di prostaferesi Dimostrare che la successione (a_n) definita come
$$a_n := 2+\sin\sqrt{n}$$
è tale che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1.$$
Sol.:
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2+\sin\sqrt{n}}{2+\sin\sqrt{n-1}}=1+\frac{\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{n-1})}{2+\sin\sqrt{n-1}}.$$
Ora per le formule di prostaferesi
$$\left|\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{n-1})\right|=2\left|\sin\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}\right|\left|\cos\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{2}\right|.$$
Ricordando che $|\sin x|\le|x|$ otteniamo
$$\left|\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{n-1})\right|\le|\sqrt{n}-\sqrt{n-1}|=\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
e quindi, per il teorema dei carabinieri,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{n-1})\right)=0.$$
Essendo
$$\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\sin\sqrt{n-1}}\le\frac{1}{2-1}=1$$
allora la successione
$$\frac{\sin(\sqrt{n})-\sin(\sqrt{n-1})}{2+\sin\sqrt{n-1}}$$
è infinitesima, in quanto prodotto di una successione infinitesima per una limitata, v. Teorema 7.3.3.
Ciò ci permette di concludere che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1.$$

Teorema 7.6.4 (Criterio della radice per le successioni). *Sia (a_n) una successione a termini non negativi. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in]1,+\infty] \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0,1[\qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Diamo la dimostrazione nel caso $\ell < 1$.
Osservando che $\ell < \frac{1+\ell}{2} < 1$ si ha, per la definizione di limite,

$$\exists \bar{n} : \sqrt[n]{a_n} < \frac{1+\ell}{2} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

ossia

$$\exists \bar{n} : a_n < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Per il Lemma 6.3.40, essendo $0 < \frac{1+\ell}{2} < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n = 0,$$

deduciamo, per il teorema del confronto, che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

Teorema 7.6.5 (Medie aritmetiche). *Sia (a_n) una successione.*
Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Teorema 7.6.6 (Hopital discreto - il caso $\frac{a_n}{n}$). *Sia (a_n) una successione. Allora*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} (a_n - a_{n-1}) =: \Lambda \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \Lambda.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia, per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha_n := a_n - a_{n-1}$. Osserviamo che

$$\sigma_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) \overset{\text{Es. 5.3.3}}{=} \frac{a_n - a_0}{n}.$$

Applichiamo alla successione (α_n) il Teorema 7.6.5. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_0}{n}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0}{n} = 0,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_0}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{-a_0}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}.$$

La conclusione segue. □

Esercizio 7.6.7 (n vince su $\log n$). Sia $a_n := \log n$. Applicare il Teorema 7.5.6 oppure 7.6.6 per dedurre

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n}=0.$$

[N.B.: si usa la continuità della funzione logaritmo]

Sol:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n-a_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}(\log(n)-\log(n-1))=\lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n}{n-1}\right)=\log 1=0.$$

Teorema 7.6.8 (Hopital discreto: $\infty/+\infty$). *Siano* (a_n) *e* (b_n) *successioni reali, con*

(i) (b_n) *strettamente crescente*

(ii) $b_n\to+\infty$.

Allora

$$\left(\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=:\Lambda\in\overline{\mathbb{R}}\Rightarrow\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\Lambda\right).$$

Esercizio 7.6.9. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\frac{k^2+3k}{2k+1}}{n^2-3}.$$

Sol:

La successione (b_n), con $b_n=n^2-3$ è strettamente crescente e divergente a $+\infty$. Possiamo quindi usare il Teorema 7.6.8 (caso particolare del Teorema 7.5.7) con $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k}{2k+1}$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2+3n}{2n+1}}{n^2-3-(n-1)^2+3}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2+3n}{2n+1}}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2+3n}{2n+1}}{2n-1}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3n}{4n^2-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4n^2\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Pertanto, per il Teorema 7.6.8

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^n\frac{n^2+3n}{2n+1}}{n^2-3}=\frac{1}{4}.$$

Teorema 7.6.10 (Hopital discreto: 0/0). *Siano* (a_n) *e* (b_n) *successioni reali infinitesime,* (b_n) *strettamente monotona. Allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \Lambda \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \Lambda.$$

Teorema 7.6.11 (Medie geometriche). *Sia* (a_n) *una successione a termini positivi.*
Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n$ *allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \overset{\text{Es. 5.3.7}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(a_i).$$

Applicando il Teorema 7.6.5 alla successione $\alpha_n := \log a_n$, essendo

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log(a_i) = \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right),$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right)$$

Essendo la funzione logaritmo una funzione continua, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log(a_n) = \log\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \log\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right) = \log\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right).$$

Dunque

$$\log\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = \log\left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}\right).$$

Per la iniettività di log si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}.$$

□

Corollario 7.6.12. *Sia* (a_n) *una successione a termini positivi.*
Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ *allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dato che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

dimostriamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Sia

$$\alpha_n := \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Dato che si ha

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i \overset{\text{Esercizio 5.3.4}}{=} \frac{a_n}{a_0},$$

applicando il Teorema 7.6.11 alla successione α_n si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \alpha_n \leq \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_0}}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_0} = 1$$

si deduce

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

□

Esercizio 7.6.13. Usando il Corollario 7.6.12 dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e,$$

dove e è il numero di Nepéro (v. Definizione 6.5.2).

SOL. ES. 7.6.13. Sia (a_n) la successione a termini positivi

$$a_n := \frac{n^n}{n!}.$$

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{n^n(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Allora, per il Corollario 7.6.12

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e.$$

□

7.7. Limiti notevoli

Le proposizioni enunciate nella sezione 7.9 ci dicono che è possibile talvolta semplificare le espressioni delle funzioni e delle successioni di cui si vuole calcolare il limite, individuando delle relazioni di trascurabilità o di asintoticità.
A tal fine ci sono dei limiti molto importanti, detti *limiti notevoli* che vanno conosciuti e imparati.

7.7.1. Potenze.

$$\text{(Es. 6.3.36)} \quad \lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$\text{(Es. 6.3.37)} \quad \lim_{x\to-\infty} x^k \left[\begin{array}{ll} = +\infty & \text{se } k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ pari} \\ = -\infty & \text{se } k \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ dispari.} \end{array}\right.$$

$$\text{(Es. 6.3.38)} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{k}} = +\infty \qquad \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Più in generale:

$$\text{(Eserc. 6.3.50)} \quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{array}\right.$$

$$\text{(Es. 7.8.17)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

7.7.2. Esponenziali.

$$\text{(Lemma 6.3.40)} \quad \lim_{n\to+\infty} a^n \left[\begin{array}{ll} = +\infty & \text{se } a > 1 \\ = 1 & \text{se } a = 1 \\ = 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{array}\right.$$

$$\text{(Lemma 6.3.41)} \quad \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\text{(Prop. 6.4.6)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\text{(Prop. 6.4.6)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 & \text{se } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\text{(Teor. 7.8.16)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

7.7.3. Logaritmi.

$$\text{(Prop. 6.6.5)}\quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty & \text{se } a>1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to0} \log_a x = -\infty & \text{se } a>1 \\ \lim\limits_{x\to0} \log_a x = +\infty & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

$$\text{(Teor. 7.8.25)}\quad \lim_{x\to0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

7.7.4. Successioni: $n!$ e n^n.

$$\text{(Eserc. 5.3.6)}\quad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

$$\text{(Eserc. 7.8.1)}\quad \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty$$

$$\text{(Eserc. 7.8.2)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

7.7.5. Successioni: radici n-esime.

$$\text{(Es. 7.8.11)}\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1 \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\text{(Es. 7.6.13 e Es. 7.8.15)}\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$$

7.7.6. Successioni: $n!$ e a^n.

$$\text{(Eserc. 7.8.4)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \forall a>0$$

7.7.7. Confronto tra esponenziali e potenze.

$$\text{(Eserc. 7.8.5)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1 \end{cases} \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\text{(Teor. 7.8.18)}\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall a>1, \forall \alpha\in\mathbb{R}.$$

$$\text{(Teor. 7.8.19)}\quad \lim_{x\to+\infty} x^\alpha a^x = 0 \qquad \forall 0<a<1, \forall \alpha\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$$

$$\text{(Teor. 7.8.21)}\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0 \qquad 0<a<1,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\text{(Teor. 7.8.22)} \quad \lim_{x\to-\infty} x^k a^x = 0 \qquad a>1,\ k\in\mathbb{Z}$$

7.7.8. Confronto tra potenze.

$$\text{(Es. 7.8.7)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \text{se } \alpha<\beta \\ 1 & \text{se } \alpha=\beta \\ +\infty & \text{se } \alpha>\beta \end{bmatrix}$$

$$\text{(Da Eserc. 6.3.50)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \text{se } \alpha<\beta \\ 1 & \text{se } \alpha=\beta \\ +\infty & \text{se } \alpha>\beta \end{bmatrix}$$

7.7.9. Confronto tra logaritmi e potenze.

$$\text{(Es. 7.8.9)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\text{(Es. 7.8.10)} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0 \qquad \forall\alpha>0$$

$$\text{(Teor. 7.8.23)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \alpha>0.$$

$$\text{(Teor. 7.8.24)} \quad \lim_{x\to0} |x|^\alpha \log|x| = 0 \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}, \alpha>0.$$

7.7.10. Il caso 1^∞. Ricordiamo che:

$$\text{Definizione 6.5.2} \quad \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

$$\text{(Teor. 7.8.12)} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$$

$$\text{(Cor. 7.8.13)} \quad \lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\text{(Teor. 7.8.14)} \quad \lim_{x\to0} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^\alpha \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

7.7.11. Funzioni trigonometriche.

$$\text{(Lemma 6.7.19)}\quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

$$\text{(Lemma 6.7.20}\quad \lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

$$\text{(Prop. 6.7.24)}\quad \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}\tan x = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\tan x = +\infty$$

$$\text{(Teor. 6.7.25)}\quad \nexists \lim_{x\to\pm\infty}\sin(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty}\cos(x), \qquad \nexists \lim_{x\to\pm\infty}\tan(x)$$

$$\text{(Teor. 7.8.27)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\text{(Cor. 7.8.28)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\text{(Cor. 7.8.29)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(Es. 7.8.30)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\text{(Es. 7.8.31)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\text{(Es. 7.8.32)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1$$

7.8. Dimostrazione dei limiti notevoli

7.8.1. Limiti notevoli di successioni: $n!$ e n^n.

Esercizio 7.8.1. Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty.$$

Sol:

I modo:

Per la disuguaglianza nell'Esercizio 5.2.16

$$n! \le n^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Allora

$$n^n = n n^{n-1} \ge n^{n-1} \ge n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

e la tesi segue dall'Esercizio 5.3.6 e dal Teorema del confronto.
II modo:
Dall'Esercizio 5.2.17 si ha

$$n^n \geq n!$$

e la tesi segue dall'Esercizio 5.3.6 e dal Teorema del confronto.

Esercizio 7.8.2 (n^n vince su $n!$). Vale il seguente limite notevole:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Dimostrarlo nei seguenti due modi:

(a) usando il Corollario 7.5.2
(b) usando la disuguaglianza (v. Esercizio 5.2.16)

$$n! \leq n^{n-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Sol:
(a):
Applichiamo il il criterio del rapporto (v. Corollario 7.5.2) alla successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$.
Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Per il Lemma 6.5.1,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Dunque per il criterio del rapporto concludiamo che la successione (a_n) converge a 0.
(b):
Ovvia.

Esercizio 7.8.3 ($(n!)^\alpha$ vince su n^n se $\alpha > 1$). Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^\alpha}{n^n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \leq 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Sol:
Applichiamo il il criterio del rapporto (v. Corollario 7.5.2) alla successione $a_n = \frac{(n!)^\alpha}{n^n}$.
Si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^\alpha}{(n!)^\alpha}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^\alpha \frac{n^n}{(n+1)^n}\frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)^\alpha}{n+1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = (n+1)^{\alpha-1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\alpha-1} \overset{\text{Esercizio 6.3.50}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha-1<0 \\ 1 & \text{se } \alpha-1=0 \\ +\infty & \text{se } \alpha-1>0. \end{cases}$$

e, per il Lemma 6.5.1,

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}.$$

Dunque:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 0\cdot\frac{1}{e}=0 & \text{se } \alpha<1 \\ 1\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}<1 & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty & \text{se } \alpha>1. \end{cases}$$

Per il criterio del rapporto concludiamo che la successione (a_n) converge a 0 se e solo se $\alpha\le 1$ e diverge a $+\infty$ se e solo se $\alpha>1$.

7.8.2. Limiti notevoli di successioni: $n^!$ e a^n.

Esercizio 7.8.4 ($n!$ vince su a^n). Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \qquad \forall a>0.$$

Sol: Usiamo il criterio del rapporto, ossia il Corollario 7.5.2
Sia $a_n := \frac{a^n}{n!}$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n+1}=0<1.$$

Quindi, dal criterio del rapporto, otteniamo la tesi.

7.8.3. Limiti notevoli di successioni: a^n e n^α. Il confronto tra esponenziali e potenze lo iniziamo qui per le successioni. Lo riprenderemo poi per le funzioni, vedi Paragrafo 7.8.8.

Esercizio 7.8.5 (a^n vince su n^α). Usando il Corollario 7.5.2 e il Teorema 6.3.48 dimostrare che per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

Sol:
Se $\alpha=0$ la tesi segue dal Lemma 6.3.40.
Se $\alpha\neq 0$, applichiamo il criterio del rapporto alla successione (a_n), dove $a_n := \frac{a^n}{n^\alpha}$.
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} a\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha} \overset{\text{Teor. 6.3.48}}{=} a.$$

La tesi segue applicando il criterio del rapporto (v. Corollario 7.5.2).

Per $\alpha < 2$ si può dare un'altra dimostrazione che fa uso della Disuguaglianza di Bernoulli del II ordine.

Esercizio 7.8.6. Dimostrare usando la Disuguaglianza di Bernoulli del II ordine, v. Esercizio 5.2.9, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty$$

per ogni $a > 1$.
Sol:

$$\frac{a^n}{n^\alpha} = \frac{(1+(a-1))^n}{n^\alpha} \geq \frac{1+n(a-1)+n(n-1)(a-1)^2}{n^\alpha} \geq \frac{n(n-1)(a-1)^2}{n^\alpha}.$$

Ora, se $\alpha < 2$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(a-1)^2}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} n^{2-\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right)(a-1)^2 \overset{\text{Es. 6.3.50}}{=} +\infty,$$

dunque la conclusione segue dal Teorema del confronto.
Sia ora $\alpha \geq 2$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}{n}\right)^\alpha .$$

Tale ultimo limite vale $+\infty$. Possiamo infatti usare quanto dimostrato sopra, dato che $a > 1$ e $\alpha > 0$ implicano $a^{\frac{1}{\alpha}} > 1$.

7.8.4. Limiti notevoli di successione: confronto tra potenze.

Esercizio 7.8.7 (All'infinito la potenza di esponente grande vince su quella di esponente piccolo). Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = 0 \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta.$$

Sol:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \overset{\text{Esercizio 6.3.50}}{=} 0.$$

Esercizio 7.8.8 (Verso zero la potenza di esponente piccolo vince su quella di esponente grande). Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{n}\right)^\beta} = +\infty \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta.$$

Sol:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{n}\right)^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{n^\alpha} \overset{\text{Es. 7.8.7}}{=} +\infty.$$

Si confronti quanto dimostrato sopra (Esercizio 7.8.8) col Corollario 7.9.8.

7.8.5. Limiti notevoli di successione: $\log n$ **e** n^α**.** Tale confronto è più facile farlo con le funzioni. Si veda il paragrafo 7.8.9.
Qui anticipiamo i seguenti risultati, con dimostrazioni autonome.

Esercizio 7.8.9 (n vince su $\log n$). Sia $a_n := \log n$. Applicare il Teorema 7.5.6 per dedurre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

Sol:

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty}(\log(n) - \log(n-1)) = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n}{n-1}\right) = \log 1 = 0.$$

Esercizio 7.8.10 (n^α vince su $\log n$). Dimostrare che per ogni $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0.$$

Sol:
Notiamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$, vedi Proposizione 6.6.5 e Esercizio 6.3.50.
Se $\alpha = 1$ è l'Esercizio 7.8.9.
Se $\alpha > 1$ è ovvio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n}\frac{n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n}\frac{1}{n^{\alpha-1}} = 0.$$

Se $\alpha < 1$:

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{\log(n^\alpha)}{n^\alpha} \le \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to+\infty} \frac{\log([n^\alpha]+1)}{[n^\alpha]}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{\log\left([n^\alpha]\left(1+\frac{1}{[n^\alpha]}\right)\right)}{[n^\alpha]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{\log([n^\alpha]) + \log\left(1+\frac{1}{[n^\alpha]}\right)}{[n^\alpha]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\log([n^\alpha])}{[n^\alpha]} + \frac{\log\left(1+\frac{1}{[n^\alpha]}\right)}{[n^\alpha]}\right).$$

Ovviamente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{[n^\alpha]}\right)}{[n^\alpha]} = 0.$$

D'altra parte, posto $f : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{\log(n)}{n}$, e definito, per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a_n := [n^\alpha]$, allora

$$\frac{\log([n^\alpha])}{[n^\alpha]} = f(a_n).$$

Sappiamo dall'Esercizio 7.8.9 che $\lim_{n\to+\infty} f(n) = 0$ e che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} [n^\alpha] \ge \lim_{n\to+\infty} (n^\alpha - 1) \overset{\text{Es. 6.3.50}}{=} +\infty.$$

Dunque, per il Teorema di cambiamento di variabile (o limite di funzione composta)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log([n^\alpha])}{[n^\alpha]}=0.$$

Riassumendo:

$$0\le\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^\alpha}\le\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\log([n^\alpha])}{[n^\alpha]}+\frac{\log\left(1+\frac{1}{[n^\alpha]}\right)}{[n^\alpha]}\right)=0.$$

Da qui la tesi.

7.8.6. Limiti notevoli di successione: $\sqrt[n]{n^\alpha}$. Come applicazione dell'Esercizio 7.8.9 abbiamo il seguente limite notevole

Esercizio 7.8.11. Dimostrare

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^\alpha}=1\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

Sol:

I modo:

Se $\alpha=0$ l'affermazione è ovvia, essendo $\sqrt[n]{n^0}=\sqrt[n]{1}=1$ per ogni n.

Per ogni $\alpha>0$, usando l'Esercizio 7.8.9, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}e^{\log\sqrt[n]{n^\alpha}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\log(n^\alpha)}{n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\alpha\frac{\log n}{n}}\overset{\text{Es. 7.8.9 + Teor. 6.4.5}}{=}e^0=1.$$

Se $\alpha<0$ si ha

$$\sqrt[n]{n^\alpha}=\frac{1}{\sqrt[n]{n^{-\alpha}}}$$

e il limite del denominatore è 1 per quanto dimostrato sopra, essendo $-\alpha>0$.

II modo:

Diamo una dimostrazione autonoma del limite

Se $\alpha=0$ l'affermazione è ovvia, essendo $\sqrt[n]{n^0}=\sqrt[n]{1}=1$ per ogni n.

Per $\alpha\neq0$ osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n})^\alpha.$$

Iniziamo col dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n})=1.$$

Poniamo

$$a_n:=\sqrt[n]{n},\qquad b_n:=\sqrt{a_n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}}.$$

Se $n > 1$ si ha $b_n > 1$ e, per la disuguaglianza di Bernoulli,

$$\sqrt{n} = b_n^n = (1 + (b_n - 1))^n \geq 1 + n(b_n - 1)$$

da cui

$$b_n - 1 \leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Allora

$$1 \leq a_n = b_n^2 = (1 + (b_n - 1))^2 = 1 + 2(b_n - 1) + (b_n - 1)^2 \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}},$$

da cui segue, per il Teorema dei carabinieri, che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Se $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ segue dalla (P5) del Lemma 6.3.35 che

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n})^\alpha = 1^\alpha = 1.$$

Se $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\alpha < 0$

$$\lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{n})^\alpha = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{-\alpha}}$$

e il denominatore tende a 1 per quanto detto sopra.
Se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ si ha

$$\sqrt[n]{n^{[\alpha]}} \leq \sqrt[n]{n^\alpha} \leq \sqrt[n]{n^{[\alpha]+1}}.$$

Dato che le successioni agli estremi tendono a 1 per quanto sopra dimostrato, allora per il Teorema dei carabinieri tende a 1 anche la successione tra esse compresa.
III modo:
Dimostriamo solo il caso $\alpha = 1$. Gli altri procedono come nel caso precedente.
Se $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, poniamo $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Allora, essendo $n > 1$, $a_n > 1$. Inoltre, per il Teorema 5.3.41,

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (a_n + 1)^n \overset{(5.3.3)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

Dunque

$$0 < a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$$

concludiamo per il Teorema dei carabinieri che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, ossia $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

7.8.7. Limiti notevoli col numero e.

Teorema 7.8.12. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il caso $+\infty$. Se $n \le x < n+1$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ si ha

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}.$$

Per la monotonia della funzione potenza (v. Proposizione 6.3.49) e della funzione esponenziale (v. Proposizione 6.3.46 (P4))

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Per il Lemma 6.5.1 e la Definizione 6.5.2 il limite delle successioni agli estremi tende a e, quindi per il teorema del confronto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Per calcolare il limite a $-\infty$ basta effettuare la sostituzione $x=-t-1$ Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{-t-1})^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-t}{-t-1}\right)^{-t-1}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e.$$

□

Corollario 7.8.13. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x = e^\alpha \qquad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha = 0$ è ovvia.

Sia $\alpha > 0$. Usando il Teorema del calcolo del limite di funzione composta, il Teorema 7.8.12 e la continuità della funzione potenza (Teorema 6.3.48), si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x \overset{y=\frac{x}{\alpha}}{=} \lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^{\alpha y} = \lim_{y\to+\infty}\left((1+\frac{1}{y})^y\right)^\alpha \overset{\text{T. 7.8.12 e T. 6.3.48}}{=} e^\alpha.$$

Sia $\alpha < 0$. Usando il Teorema del calcolo del limite di funzione composta, il Teorema 7.8.12 e la continuità della funzione potenza, si ha

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{\alpha}{x})^x \overset{y=\frac{x}{\alpha}}{=} \lim_{y\to-\infty}(1+\frac{1}{y})^{\alpha y} = \lim_{y\to-\infty}\left((1+\frac{1}{y})^y\right)^\alpha \overset{\text{T. 7.8.12 e T. 6.3.48}}{=} e^\alpha.$$

Si lascia al lettore la dimostrazione negli altri casi. □

Teorema 7.8.14. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha = 0$ è ovvia.
Sia $\alpha > 0$. Usando il Teorema del calcolo del limite di funzione composta, il Corollario 7.8.13 si ha la tesi. Infatti:

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to +\infty}(1+\frac{\alpha}{y})^{y} \overset{\text{Cor. 7.8.13}}{=} e^{\alpha}.$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to -\infty}(1+\frac{\alpha}{y})^{y} \overset{\text{Cor. 7.8.13}}{=} e^{\alpha}.$$

Quindi esiste

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$$

Si lascia al lettore la dimostrazione del caso $\alpha < 0$. □

Esercizio 7.8.15. Usando il Corollario 7.5.11 dimostrare che

$$\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e.$$

Sol:
Sia (a_n) la successione a termini positivi

$$a_n := \frac{n^n}{n!}.$$

Si ha

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to +\infty}\frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim_{n\to +\infty}\frac{n^{n-1}n(n-1)!}{(n-1)^{n-1}n!} = \lim_{n\to +\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e.$$

Allora, per il Corollario 7.5.11

$$\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to +\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = e.$$

Teorema 7.8.16. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $0 < x < \frac{1}{2}$. Allora
$$\frac{1}{x} > 2$$
Posto $n := \left[\frac{1}{x}\right]$ si ha
$$2 \le n \le \frac{1}{x} < n+1$$
da cui
$$nx \le 1 \qquad n > \frac{1}{x} - 1.$$
Dal Lemma 6.5.1 si ha
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$
Quindi, per la Proposizione 6.3.49
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)x} < e^x < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{nx}. \tag{7.8.1}$$
Stimiamo l'ultimo membro della disuguaglianza. Essendo $nx \le 1$, per la (P4) della Proposizione 6.3.46
$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{nx} \overset{\text{Proposizione 6.3.46 (P4)}}{\le} 1+\frac{1}{n-1} \overset{n>\frac{1}{x}-1}{<} 1+\frac{1}{\frac{1}{x}-1-1} = 1+\frac{x}{1-2x}.$$
Stimiamo il primo membro della disuguaglianza (7.8.1).
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)x} \overset{n+1>\frac{1}{x}+(P4)}{>} 1+\frac{1}{n+1} \overset{n\le 1/x}{\ge} 1+\frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1+\frac{x}{1+x}.$$
Dalle informazioni ottenute si ha
$$1+\frac{x}{1+x} < e^x < 1+\frac{x}{1-2x} \qquad \forall 0 < x < \frac{1}{2}$$
da cui
$$\frac{1}{1+x} < \frac{e^x-1}{x} < \frac{1}{1-2x} \qquad \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$
Tale doppia disuguaglianza assieme al Teorema dei carabinieri implica
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{7.8.2}$$
Dimostriamo che il limite per x che tende a 0 da sinistra vale anch'esso 1. Si ha
$$\frac{e^x-1}{x} = e^x\frac{1-e^{-x}}{x} = e^x\frac{e^{-x}-1}{-x}.$$
Da (7.8.2) e dal Teorema 6.4.5 deduciamo
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^x \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}-1}{-x} \overset{y=-x}{=} 1\cdot \lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y} \overset{(7.8.2)}{=} 1.$$

L'uguaglianza dei limiti per x tendente a 0^+ e per x tendente a 0^- dà la tesi. $\square$

Conseguenza di tale limite è il seguente limite notevole.

Esercizio 7.8.17. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sol:
Se $\alpha = 0$ allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Se $\alpha \neq 0$ poniamo $y = \log(1+x)$. Si ha $y \to 0$ per $x \to 0$, quindi, per il Teorema di cambiamento di variabile nel calcolo dei limiti,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \overset{y=\log(1+x)}{=} \lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1}.$$

Tale ultimo limite coincide con

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y} \frac{\alpha y}{e^y - 1} \overset{\text{T.7.8.16}}{=} 1 \cdot \alpha.$$

7.8.8. Limiti notevoli di funzioni: confronto tra esponenziali e potenze.

Teorema 7.8.18. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad a > 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Se $\alpha = 0$ la tesi segue dalla Proposizione 6.4.6.
Sia $\alpha < 0$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to +\infty} a^x x^{-\alpha} = +\infty$$

in quanto, per la Proposizione 6.4.6

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty$$

e, ricordando che $-\alpha > 0$, per l'Esercizio 6.3.50

$$\lim_{x\to +\infty} x^{-\alpha} = +\infty.$$

Sia $\alpha > 0$:
Per l'Esercizio 7.8.5, essendo $a > 1$,

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Dato che, per il Teorema 6.3.48,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha=1,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{(n+1)^\alpha}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^\alpha}\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}=+\infty.$$

Per definizione ciò significa:

$$\forall M>0\ \exists\bar{n}=\bar{n}(M)\in\mathbb{N}\ :\ \frac{a^n}{(n+1)^\alpha}>M\qquad\forall n\in\mathbb{N}, n\geq\bar{n}.$$

Quindi

$$\forall M>0\ \exists\bar{n}\in\mathbb{N}\ :\ \frac{a^{[x]}}{([x]+1)^\alpha}>M\qquad\forall x\in\mathbb{R}, x\geq\bar{n}.\tag{7.8.3}$$

Per la Proposizione 6.4.2 la funzione $x\mapsto a^x$ è crescente e, per la Proposizione 6.3.49, $x\mapsto x^\alpha$ è crescente. Dunque si ha

$$\frac{a^x}{x^\alpha}\geq\frac{a^{[x]}}{([x]+1)^\alpha}.$$

da cui, per (7.8.3),

$$\forall M>0\ \exists\bar{n}\in\mathbb{N}\ :\ \frac{a^x}{x^\alpha}>M\qquad\forall x\in\mathbb{R}, x\geq\bar{n}.$$

che è quanto si voleva provare. □

Teorema 7.8.19. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha a^x=0\qquad\text{(precisamente: } 0^+\text{)}\qquad\text{se } 0<a<1,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Osservazione 7.8.20. La funzione

$$x\mapsto x^\alpha a^x \text{ è positiva in }]0,\infty[$$

quindi, a essere precisi, il limite è 0 e ci si arriva passando per valori positivi.

DIM. TEOREMA 7.8.19.
Essendo $0<a<1$, si ha $b:=\frac{1}{a}>1$. Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}x^\alpha a^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{b^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{b^x}{x^\alpha}}\overset{Teor.7.8.18}{=}\text{''}\frac{1}{+\infty}\text{''}=0\quad(0^+).$$

□

Teorema 7.8.21. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^k}{a^x}=0\qquad\text{se } 0<a<1,\ k\in\mathbb{Z}$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^k}{a^x}\overset{y=-x}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{(-y)^k}{a^{-y}}=\lim_{y\to+\infty}a^y(-y)^k.$$

Se k è pari, per la Proposizione 6.3.8 è $(-y)^k=y^k$, da cui

$$\lim_{y\to+\infty}a^y(-y)^k=\lim_{y\to+\infty}a^y y^k\overset{\text{Teor. 7.8.19}}{=}0.$$

Se k è dispari, per la Proposizione 6.3.8 è $(-y)^k=-y^k$, da cui

$$\lim_{y\to+\infty}a^y(-y)^k=\lim_{y\to+\infty}-a^y y^k\overset{\text{Teor. 7.8.19}}{=}0.$$

□

Teorema 7.8.22. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to-\infty}x^k a^x=0\qquad \textit{se } a>1,\ k\in\mathbb{Z}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}x^k a^x\overset{y=-x}{=}\lim_{y\to+\infty}(-y)^k a^{-y}=\lim_{y\to+\infty}(-y)^k\left(\frac{1}{a}\right)^y.$$

Se k è pari, per la Proposizione 6.3.8 è $(-y)^k=y^k$, da cui

$$\lim_{y\to+\infty}(-y)^k\left(\frac{1}{a}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}y^k\left(\frac{1}{a}\right)^y\overset{0<1/a<1\ +\ \text{Teor. 7.8.19}}{=}0.$$

Se k è dispari, per la Proposizione 6.3.8 è $(-y)^k=-y^k$, da cui

$$\lim_{y\to+\infty}(-y)^k\left(\frac{1}{a}\right)^y=\lim_{y\to+\infty}-y^k\left(\frac{1}{a}\right)^y\overset{0<1/a<1\ +\ \text{Teor. 7.8.19}}{=}0.$$

La tesi segue. □

7.8.9. Limiti notevoli di funzioni: confronto tra potenze e logaritmi.

Teorema 7.8.23. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{|x|^\alpha}=0\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R},\alpha>0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{|x|^\alpha}\overset{y=e^x>0}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\log(e^y)}{(e^y)^\alpha}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{(e^\alpha)^y}\overset{e^\alpha>1+\text{Teor. 7.8.18}}{=}0.$$

□

Teorema 7.8.24. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0}|x|^\alpha \log|x| = 0 \qquad \forall \alpha\in\mathbb{R}, \alpha>0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\lim_{x\to 0}|x|^\alpha \log|x| \overset{y=\log(|x|)\Leftrightarrow|x|=e^y}{=} \lim_{y\to-\infty}(e^y)^\alpha y = \lim_{y\to-\infty} y(e^\alpha)^y \overset{e^\alpha>1 \text{ (v. Prop. 6.3.46 (P2)) + Teorema 7.8.22}}{=} 0.$$

□

Teorema 7.8.25. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene la tesi usando il Teorema 7.8.14 e il teorema del limite di funzione composta. Infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log((1+x)^{\frac{1}{x}}) \overset{\text{Teor. 7.8.14}}{=} \log e = 1.$$

□

Corollario 7.8.26. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene la tesi usando il Teorema 7.8.25 e il teorema del limite di funzione composta. Infatti, con la sostituzione $y=x-1$, si ha $y\to 0$ quando $x\to 1$ e

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y} \overset{\text{Teor. 7.8.25}}{=} 1.$$

□

7.8.10. Limiti notevoli di funzioni trigonometriche.

Teorema 7.8.27. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $0<x<\frac{\pi}{2}$.

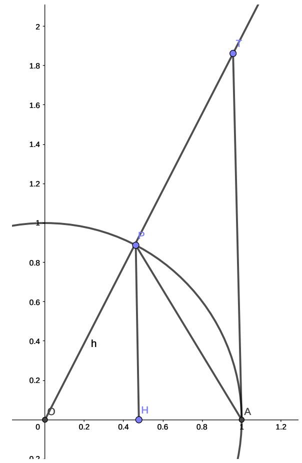

Figura 1. I triangoli OAT e OAP e il settore circolare OAP

L'area del triangolo OAT è maggiore dell'area del settore circolare OAP. L'area di tale settore circolare vale $x/2$. Infatti,

$$\frac{\text{area del settore circolare } OAP}{\text{area del cerchio}} = \frac{\text{lunghezza dell'arco } \widehat{AP}}{\text{lunghezza della circonferenza}}$$

ossia

$$\text{area del settore circolare } OAP = \pi \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$

Dunque, ricordando la definizione di seno e di coseno,

$$\frac{\sin x}{2\cos x} = \frac{\tan x}{2} = \text{area del triangolo } OAT >$$

$$> \text{area del settore circolare } OAP = \frac{x}{2},$$

da cui

$$\frac{\sin x}{2\cos x} > \frac{x}{2} \overset{0<x<\pi/2}{\Leftrightarrow} \cos x < \frac{\sin x}{x}.$$

L'area del triangolo OPA è minore dell'area del settore circolare OAP, ossia

$$\text{area del triangolo } OPA = \frac{1 \cdot \sin x}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \sin x < x \overset{0<x<\pi/2}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Quindi:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{7.8.4}$$

Sia ora $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Applicando (7.8.4) a $-x \in]0, \pi/2[$ si ha

$$\cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$$

La funzione $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ è pari per l'Esercizio 3.2.29, così come la funzione coseno. così si ha

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Abbiamo quindi dimostrato

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}.$$

Per il Lemma 6.7.20 $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ e la tesi segue dal Teorema dei carabinieri. □

Corollario 7.8.28. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema 7.8.27 e dal Lemma 6.7.20

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

Corollario 7.8.29. *Vale il seguente limite notevole:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1+\cos x} \overset{\text{Teor. 6.7.9}}{=} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x}.$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} \overset{\text{Teo. 7.8.27 + Lemma 6.7.20}}{=} 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 7.8.30. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Sol: Per l'algebra dei limiti e il Corollario 7.8.29:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} x \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} x \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Esercizio 7.8.31. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

SOL. ES. 7.8.31. Per il teorema di calcolo del limite di funzione composta e per il Teorema 7.8.27

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\overset{y=\arcsin x}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

□

Esercizio 7.8.32. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1.$$

SOL. ES. 7.8.32. Per il teorema di calcolo del limite di funzione composta e per il Corollario 7.8.28

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\overset{y=\arctan x}{=}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}=1.$$

□

7.9. Asintotici e trascurabili

Per semplificare il calcolo dei limiti di successioni e di funzioni è utile riconoscerne le funzioni trascurabili o asintotiche.

7.9.1. Asintotici e trascurabili per le successioni.

Definizione 7.9.1. Siano (a_n) e (b_n) successioni, con (b_n) definitivamente non nulla. Diciamo che (a_n) è trascurabile rispetto a (b_n) se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0.$$

In tal caso scriviamo $a_n = o(b_n)$.

Definizione 7.9.2. Siano (a_n) e (b_n) successioni, con (b_n) definitivamente non nulla. Diciamo che (a_n) è asintotica a (b_n) se

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1.$$

In tal caso scriviamo $a_n \sim b_n$.

Teorema 7.9.3 (Aritmetica dell'o piccolo per successioni). *Per ogni $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e per ogni successione (a_n) e (b_n) si hanno le seguenti:*

- $-o(a_n)=o(a_n)$
- $c\,o(a_n)=o(a_n)$
- $o(ca_n)=o(a_n)$
- $o(a_n)\pm(a_n)=o(a_n)$
- $o(o(a_n))=o(a_n)$

- $o(a_n + o(a_n)) = o(a_n)$
- $a_n \cdot o(b_n) = o(a_n b_n)$
- $o(a_n) \cdot o(b_n) = o(a_n b_n)$
- *(se $b_n \neq 0$ definitivamente)* $\quad a_n = o(b_n) \Rightarrow \frac{o(a_n)}{b_n} = o\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$
- $a_n + o(a_n) \sim a_n$
- $a_n \sim b_n \ \Rightarrow o(a_n) \sim o(b_n)$

7.9.2. Asintotici e trascurabili per le funzioni. Le definizioni sopra si possono replicare per le funzioni.

Definizione 7.9.4. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in PL(A)$, con g definitivamente non nulla in un intorno di x_0, eccetto al più in x_0. Diciamo che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In tal caso scriviamo $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$.

Definizione 7.9.5. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in PL(A)$, con g definitivamente non nulla in un intorno di x_0, eccetto al più in x_0. Diciamo che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

In tal caso scriviamo $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

Esercizio 7.9.6. Dimostrare che se $f, g : A \to \mathbb{R}$ e se $x_0 \in PL(A)$ allora, se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$, si ha

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

SOL. ES. 7.9.6. Essendo

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

allora, esistendo i limiti di f e di g per $x \to x_0$, non può che essere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Se infatti non fosse così avremmo

$$\frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \neq 1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

contraddicendo l'algebra dei limiti. Pertanto:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$\square$

Teorema 7.9.7 (Aritmetica dell'o per le funzioni). *Per ogni $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e per ogni $f, g : A \to \infty$ si hanno (per $x \to x_0$, con $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) le seguenti:*

- $-o(f(x)) = o(f(x))$
- $c\, o(f(x)) = o(f(x))$
- $o(cf(x)) = o(f(x))$
- $o(f(x)) \pm o(f(x)) = o(f(x))$
- $o(o(f(x))) = o(f(x))$
- $o(f(x) + o(f(x))) = o(f(x))$
- $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$
- $o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x))$
- *(se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 eccetto al più in x_0)* $\qquad f(x) = o(g(x)) \Rightarrow \frac{o(f(x))}{g(x)} = o\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$
- $f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$
- $f(x) \sim g(x) \Rightarrow o(f(x)) \sim o(g(x))$

Come conseguenza del Teorema 7.9.7 abbiamo il seguente confronto tra potenze.

Corollario 7.9.8 (Aritmetica dell' o piccolo per le potenze). *Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ positivi e per $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, valgono le seguenti uguaglianze per $x \to 0$:*

$$-o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$c\, o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(c\, x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha) \pm o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

$$o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

$$x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha).$$

7.9.3. Eliminazione dei trascurabili nella somma.

Proposizione 7.9.9. *Siano (a_n) e (b_n) successioni.*
Sia (b_n) convergente a $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.
Allora valgono le seguenti:
1) se esiste il limite di (a_n) allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n b.$$

2) se (a_n) non ha limite allora $(a_n b_n)$ non ha limite.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista il limite di (a_n). Allora ha senso la scrittura

$$\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)$$

non presentandosi come forma indeterminata. Allora, per l'algebra dei limiti, Teorema 7.3.1, si ottiene la tesi.
La seconda affermazione segue dal Teorema 7.3.2. □

Proposizione 7.9.10 (Principio di eliminazione dei trascurabili nella somma). *Siano (a_n) e (b_n) successioni definitivamente a termini non nulli.*
Se $a'_n = o(a_n)$, $b'_n = o(b_n)$, allora

(a) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + a'_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n + a'_n}{b_n + b'_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

se i limiti a secondo membro esistono.

DIMOSTRAZIONE.
(a):

$$a_n + a'_n = a_n\left(1 + \frac{a'_n}{a_n}\right)$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a'_n}{a_n}\right) = 1,$$

dal Teorema 7.3.1 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n\left(1 + \frac{a'_n}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

(b):
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + a'_n}{b_n + b'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} \frac{1 + \frac{a'_n}{a_n}}{1 + \frac{b'_n}{b_n}}.$$

Per l'Algebra dei limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{a'_n}{a_n}}{1+\frac{b'_n}{b_n}} = 1,$$

quindi, per la Proposizione 7.9.9

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n + a'_n}{b_n + b'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

□

Analoga proprietà vale per le funzioni.

Proposizione 7.9.11 (Principio di eliminazione dei trascurabili nella somma). *Siano $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : A \to \mathbb{R}$ funzioni non nulle in un intorno di $x_0 \in PL(A)$, eccetto al più in x_0.*
Se $\tilde{f} = o(f)$, $\tilde{g} = o(g)$, allora

(a) $\lim_{x\to x_0} (f(x) + \tilde{f}(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

(b) $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) + \tilde{f}(x)}{g(x) + \tilde{g}(x)} = \lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

se i limiti a secondo membro esistono.

7.9.4. Sostituzione con gli asintotici nel prodotto. In generale, nel calcolo del limite di una somma non è consentito sostituire gli addendi coi loro asintotici.

Ad esempio: pur essendo $\sqrt{n+\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \neq \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0.$$

Infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Nel calcolo di un limite di un prodotto, invece, gli asintotici si comportano bene.

Proposizione 7.9.12 (Principio di sostituzione con gli asintotici nel prodotto). *Siano (a_n), (a'_n), (b_n), (b'_n) successioni definitivamente non nulle.*
Se $a_n \sim a'_n$ e $b_n \sim b'_n$, allora

(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \lim_{n\to+\infty} a'_n b'_n$

(b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a'_n}{b'_n}$,

se i limiti a secondo membro esistono.

DIMOSTRAZIONE.
(a):
Per ipotesi e l'algebra dei limiti
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a'_n}\frac{b_n}{b'_n} = 1.$$
Allora, per la Proposizione 7.9.9
$$\lim_{n\to+\infty} a'_n b'_n = \lim_{n\to+\infty} a'_n b'_n \frac{a_n b_n}{a'_n b'_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n b_n.$$
(b):
Per ipotesi e l'algebra dei limiti
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a'_n}\frac{b_n}{b'_n} = 1.$$
Allora, per la Proposizione 7.9.9
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a'_n}{b'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a'_n}{b'_n}\frac{a_n}{a'_n}\frac{b'_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$
□

Analoga proprietà vale per le funzioni.

Proposizione 7.9.13 (Principio di sostituzione con gli asintotici nel prodotto). *Siano $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : A \to \mathbb{R}$ funzioni non nulle in un intorno di $x_0 \in PL(A)$, eccetto al più in x_0.*
Se $f \sim \tilde{f}$, $g \sim \tilde{g}$ per $x \to x_0$, allora

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$
(b) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$,

se i limiti a secondo membro esistono.

7.9.5. Asintotici e radici n-esime.

Esercizio 7.9.14. Dimostrare che se (a_n) e (a'_n) sono successioni a termini positivi tali che $a_n \sim a'_n$, allora
$$\sqrt[k]{a_n} \sim \sqrt[k]{a'_n}$$
qualunque sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

SOL. ES. 7.9.14. Se $k = 1$ è ovvio.
Sia $k \geq 2$.

Per ipotesi, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che

$$\left|\frac{a_n}{a'_n} - 1\right| < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Possiamo supporre $\epsilon \in]0,1[$.
Si noti che

$$\frac{\sqrt[k]{a_n}}{\sqrt[k]{a'_n}} \overset{\text{Prop. 6.3.27}}{=} \sqrt[k]{\frac{a_n}{a'_n}}.$$

Essendo $\frac{1}{n} \leq 1$ e $1+\epsilon > 1$,

$$\sqrt[k]{\frac{a_n}{a'_n}} = \sqrt[k]{1 + \frac{a_n}{a'_n} - 1} \leq \sqrt[k]{1 + \left|\frac{a_n}{a'_n} - 1\right|} \leq \sqrt[k]{1+\epsilon} \overset{1+\epsilon>1+\text{Prop. 6.3.46 (P4)}}{\leq} 1+\epsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Analogamente, essendo $\frac{1}{n} \leq 1$ e $1-\epsilon < 1$,

$$\sqrt[k]{\frac{a_n}{a'_n}} = \sqrt[k]{1 + \frac{a_n}{a'_n} - 1} \geq \sqrt[k]{1 - \left|\frac{a_n}{a'_n} - 1\right|} \geq \sqrt[k]{1-\epsilon} \overset{1-\epsilon<1+\text{Prop. 6.3.46 (P4)}}{\geq} 1-\epsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Quindi: per ogni $\epsilon \in]0,1[$ esiste $\bar{n}$ tale che

$$1-\epsilon \leq \sqrt[k]{\frac{a_n}{a'_n}} \leq 1+\epsilon \qquad \forall n \geq \bar{n}.$$

Basta ciò per concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{a_n}{a'_n}} = 1.$$

□

Si noti che la proprietà descritta nell'Esercizio 7.9.14 vale anche per le funzioni.

Esercizio 7.9.15. Dimostrare che se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni positive, e se $x_0 \in PL(A)$ allora

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{f(x)} \sim \sqrt[k]{g(x)} \quad \text{per } x \to x_0$$

per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

7.9.6. Asintotici e logaritmi. Anticipiamo qui alcuni risultati, molto utili, che richiedono per la loro dimostrazione la conoscenza di alcuni limiti notevoli, che verranno discussi poco più avanti.

Dimostreremo che

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} \log_a(f(x)) = \lim_{x\to x_0} \log_a(g(x)) \\ \log_a(f(x)) \sim \log_a(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0 \end{array} \right.$$

per ogni $a > 0$, $a \neq 1$.

Vediamo le cose più precisamente.

Proposizione 7.9.16. *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni positive e $x_0 \in PL(A)$ allora, se esistono $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$, si ha*

$$f(x) \sim g(x) \quad \textit{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \log_a(f(x)) = \lim_{x\to x_0} \log_a(g(x))$$

per ogni $a > 0$, $a \neq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Per la proprietà di cambiamento di base dei logaritmi, è sufficiente dimostrare il caso $a = e$, numero di Nepéro.

Per ipotesi

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{7.9.1}$$

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \log_e(f(x)) = \lim_{x\to x_0} \log_e\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \left(\log_e(g(x)) + \log_e \frac{f(x)}{g(x)}\right). \tag{7.9.2}$$

Per (7.9.1), per la continuità del logaritmo (vedi il Teorema 6.6.4) e ricordando che $\log_e(1) = 0$, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \log_e\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0.$$

Allora, per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x\to x_0} \left(\log_e(g(x)) + \log_e \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to x_0} \log_e(g(x)) + \lim_{x\to x_0} \log_e \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \log_e(g(x)).$$

Dunque

$$\lim_{x\to x_0} \log_e(f(x)) = \lim_{x\to x_0} \log_e(g(x)).$$

□

Si dimostra, vedi Proposizione 7.9.17, che il logaritmo si comporta bene con gli asintotici:

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \log_a(f(x)) \sim \log_a(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

Per la dimostrazione si usa il Corollario 7.8.26.

Proposizione 7.9.17. *Se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni positive e $x_0 \in PL(A)$ allora, se esistono* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x)$, *si ha*

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \log_a(f(x)) \sim \log_a(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

per ogni $a > 0$, $a \neq 1$.

DIMOSTRAZIONE. Per la proprietà di cambiamento di base dei logaritmi, è sufficiente dimostrare il caso $a = e$, numero di Nepéro.

Consideriamo il caso

$$\lim_{x\to x_0} \log_e(g(x)) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{7.9.3}$$

La tesi segue banalmente dalla Proposizione 7.9.16. Infatti, dall'algebra dei limiti,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\log_e(f(x))}{\log_e(g(x))} = \frac{\lim_{x\to x_0} \log_e(f(x))}{\lim_{x\to x_0} \log_e(g(x))},$$

dal momento che il secondo membro non si presenta come una forma indeterminata in virtù della (7.9.3).

Consideriamo il caso

$$\lim_{x\to x_0} \log_e(g(x)) = +\infty. \tag{7.9.4}$$

Si ha

$$\log_e(f(x)) = \log_e\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_e(g(x)) + \log_e \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{7.9.5}$$

Allora

$$\frac{\log_e(f(x))}{\log_e(g(x))} = \frac{\log_e(g(x)) + \log_e \frac{f(x)}{g(x)}}{\log_e(g(x))} = 1 + \frac{\log_e \frac{f(x)}{g(x)}}{\log_e(g(x))}. \tag{7.9.6}$$

Per l'asintoticità di f con g, per la Proposizione 6.6.2 e il Teorema 6.6.4, si hanno

$$\lim_{x\to x_0} \log_e \frac{f(x)}{g(x)} = \log_e(1) = 0$$

e

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\log_e \frac{f(x)}{g(x)}}{\log_e(g(x))} = '' \frac{0}{+\infty} '' = 0.$$

Pertanto, da (7.9.6), si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\log_e(f(x))}{\log_e(g(x))} = 1.$$

Consideriamo ora il caso

$$\lim_{x \to x_0} \log_e(g(x)) = 0. \tag{7.9.7}$$

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \log_e\left(\frac{1}{g(x)}\right) = +\infty. \tag{7.9.8}$$

Essendo

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)} \quad \text{per } x \to x_0$$

allora, da quanto sopra dimostrato,

$$\log_e\left(\frac{1}{f(x)}\right) \sim \log_e\left(\frac{1}{g(x)}\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

da cui

$$-\log_e(f(x)) \sim -\log_e(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

$\square$

Per esercizio, scrivere gli analoghi risultati per le successioni.

7.9.7. Asintotici e esponenziali.

Esercizio 7.9.18. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in PL(A)$ e sia $a > 0$.
Dimostrare che se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$, si ha

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = \lim_{x \to x_0} a^{g(x)}.$$

Sol. Es. 7.9.18. Se $a = 1$ l'implicazione è ovvia: $1^{f(x)} = 1^{g(x)} = 1$.
Sia $a > 0$, $a \neq 1$.
Per l'Esercizio 7.9.6, essendo

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

allora, esistendo i limiti di f e di g per $x \to x_0$, non può che essere

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Dunque, per il Teorema 6.4.5 e la Proposizione 6.4.6, si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = \lim_{x \to x_0} a^{g(x)}.$$

$\square$

Purtroppo, al contrario dei logaritmi, non è vero che la funzione esponenziale mantenga l'asintoticità, ossia

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \not\Rightarrow \quad a^{f(x)} \sim a^{g(x)} \quad \text{per } x \to x_0.$$

Ad esempio, si considerino le successioni (a_n) e (b_n) così definite:

$$a_n = n^2 + n \qquad b_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si ha

$$a_n \sim b_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}}{e^{b_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty.$$

Si veda anche il meno ovvio Esercizio 10.2.8.

Vale però il seguente risultato:

Esercizio 7.9.19. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in PL(A)$ e sia $a > 0$. Dimostrare che se g è una funzione limitata, si ha

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{per } x \to x_0 \quad \Rightarrow \quad a^{f(x)} \sim a^{g(x)} \quad \text{per } x \to x_0.$$

SOL. ES. 7.9.19. Se $a = 1$ l'implicazione è ovvia, essendo $1^{f(x)} = 1^{g(x)} = 1$.
Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Si ha

$$\frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} = a^{f(x)-g(x)} = a^{g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}.$$

Dato che g è limitata per ipotesi, e $\frac{f(x)}{g(x)} - 1$ è infinitesima per $x \to x_0$, abbiamo (prodotto di funzione limitata per una infinitesima), che

$$\lim_{x\to x_0} g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0,$$

da cui, per la continuità della funzione esponenziale, vedi Teorema 6.4.5,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} = a^0 = 1.$$

□

Per esercizio, scrivere gli analoghi risultati per le successioni.

7.9.8. Asintotici e potenze. E' evidente che, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$a_n \sim a'_n \quad \Rightarrow \quad a_n^k \sim a'^k_n,$$

in quanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^k}{a'^k_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{a'_n}\right)^k = 1^k = 1.$$

Il problema è quando anche l'esponente di a_n e a'_n dipende da n. Consideriamo qui sotto il caso di $a'_n = a > 0$.
Molto utile è il seguente risultato, che proponiamo come esercizio.

Esercizio 7.9.20. Dimostrare che se (a_n) converge ad $a > 1$ e (b_n) è una successione avente limite $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} \left[\begin{array}{ll} = +\infty & \text{se } b = +\infty \\ = a^b & \text{se } b \in \mathbb{R} \\ = 0 & \text{se } b = -\infty \end{array}\right.$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 7.9.20. Per ipotesi

$$\forall \epsilon \in]0, a-1[\ \exists \bar{n} \ : \ 1 < a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Allora, per la monotonia della funzione potenza,

$$\forall \epsilon \in]0, a-1[\ \ \exists \bar{n} \ : \ \ 1 < (a-\epsilon)^{b_n} \overset{(I)}{<} a_n^{b_n} \overset{(II)}{<} (a+\epsilon)^{b_n} \quad \forall n \geq \bar{n}. \tag{7.9.9}$$

Sia $b \to +\infty$.
Essendo $a > 1$ allora, per la Proposizione 6.4.6,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = +\infty.$$

Per lo stesso motivo, essendo $a - \epsilon > 1$ per $\epsilon \in]0, a-1[$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (a-\epsilon)^{b_n} = +\infty,$$

quindi, per (I) e il criterio del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = +\infty.$$

Dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = +\infty.$$

Sia $b \to -\infty$.

Essendo $a > 1$ allora, per la Proposizione 6.4.6,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = 0.$$

Per lo stesso motivo, essendo $a+\epsilon > a > 1$ per $\epsilon > 0$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (a+\epsilon)^{b_n} = +\infty,$$

quindi, per (II) e il criterio del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0.$$

Dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = 0.$$

Sia $b \in \mathbb{R}$.

Da (I) in (7.9.9) si ha

$$\min_{n\to+\infty}\lim(a-\epsilon)^{b_n} \leq \min_{n\to+\infty}\lim a_n^{b_n} \leq \max_{n\to+\infty}\lim a_n^{b_n} \leq \max_{n\to+\infty}\lim(a+\epsilon)^{b_n}. \qquad \forall\epsilon \in]0, a-1[. \tag{7.9.10}$$

Dalla Proposizione 6.4.4 sappiamo che

$$\exists \lim_{n\to+\infty} (a-\epsilon)^{b_n} = (a-\epsilon)^b, \qquad \exists \lim_{n\to+\infty} (a+\epsilon)^{b_n} = (a+\epsilon)^b,$$

allora la (7.9.10) si può riscrivere:

$$(a-\epsilon)^b \leq \min_{n\to+\infty}\lim a_n^{b_n} \leq \max_{n\to+\infty}\lim a_n^{b_n} \leq (a+\epsilon)^b \qquad \forall\epsilon \in]0, a-1[. \tag{7.9.11}$$

Mandando ϵ a 0 si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0}(a-\epsilon)^b = a^b, \qquad \lim_{\epsilon\to 0}(a+\epsilon)^b = a^b.$$

Allora deduciamo da (7.9.11)

$$a^b \leq \min_{n\to+\infty}\lim a_n^{b_n} \leq \max_{n\to+\infty}\lim a_n^{b_n} \leq a^b,$$

da cui

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = a^b.$$

Essendo anche

$$\lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = a^b$$

abbiamo

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = a^b.$$

$\square$

Esercizio 7.9.21. Dimostrare che se (a_n) converge ad $0 < a < 1$ e (b_n) è una successione avente limite $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} \left[\begin{array}{ll} = 0 & \text{se } b = +\infty \\ = a^b & \text{se } b \in \mathbb{R} \\ = +\infty & \text{se } b = -\infty \end{array}\right.$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 7.9.21: Basta applicare Esercizio 7.9.20 a

$$\left(\frac{1}{a_n}\right)^{b_n}$$

dal momento che

$$a_n^{b_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a_n}\right)^{b_n}}.$$

□

Osservazione 7.9.22. Si noti che se (a_n) converge ad $a > 0$, con $a \neq 1$ e (b_n) ha limite $b = \pm\infty$, allora è, per gli Esercizi 7.9.20 e 7.9.21 $\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n}$, ma potrebbe essere $a_n^{b_n} \not\sim a^{b_n}$. Si veda l'Esercizio 10.2.8, dal quale, letto con le successioni, si evince che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Si pongano: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = n$, $a = e$ e $b = +\infty$. Dalla Definizione 6.5.2, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = e$, da cui $a_n \sim e$, e, per l'Esercizio 7.9.20,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty. \end{aligned}$$

Se fosse $a_n^{b_n} \sim a^{b_n}$ sarebbe

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = 1,$$

in contraddizione con quel che succede nella realtà. Il problema è che il rapporto tra $a_n^{b_n}$ e a^{b_n} si presenta come forma indeterminata:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{b_n}}{a^{b_n}} \overset{\text{F.I.}}{=} \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Esercizio 7.9.23. Dimostrare che se (a_n) converge a 1 e (b_n) è una successione avente limite $b \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} 1^{b_n} = 1$$

SOLUZIONE Es. 7.9.23. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{b_n \log(a_n)}.$$

Essendo

$$b_n \to b \in \mathbb{R}, \quad \log(a_n) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} b_n \log(a_n) = 0$$

quindi deduciamo, per la continuità della funzione esponenziale,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 1.$$

□

Esercizio 7.9.24. Dimostrare che se (a_n) converge ad $a > 0$ e (b_n) è una successione convergente a $b \in \mathbb{R}$, allora

$$a_n^{b_n} \sim a^{b_n}.$$

SOLUZIONE Es. 7.9.24. Sa $a \neq 1$. Dagli Esercizi 7.9.20 e 7.9.21 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} = a^b > 0.$$

Allora, per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{b_n}}{a^{b_n}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n}}{\lim_{n\to+\infty} a^{b_n}} = 1.$$

Se $a = 1$ è $a^{b_n} = 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{b_n}}{a^{b_n}} = \lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} \overset{\text{Es.7.9.23}}{=} 1.$$

□

Osservazione 7.9.25. Gli Esercizi 7.9.23 e 7.9.24 richiedono che sia $b \in \mathbb{R}$. Se fosse $b = \pm+\infty$ le affermazioni sarebbero false. Basta considerare

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \to 1, \qquad b_n = n$$

e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} 1^n,$$

dimostrando che l'Esercizio 7.9.23 non vale con $b = +\infty$, e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{b_n}}{1^{b_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{b_n}}{1} = e,$$

dimostrando che l'Esercizio 7.9.24 non vale con $b = +\infty$,
Facilmente si adatta l'esempio per $b = -\infty$.

7.9.9. Gerarchia degli infiniti.

Riassumendo:

Teorema 7.9.26 (Gerarchia degli infiniti). *Siano $\alpha, \beta, a \in \mathbb{R}$. Allora*
1) $\log n = o(n^\alpha)$ *per ogni* $\alpha > 0$
2) $n^\alpha = o(n^\beta)$ *per ogni* $\alpha, \beta > 0$, *con* $\alpha < \beta$
3) $n^\beta = o(a^n)$ *per ogni* $a > 1$
4) $a^n = o(n!)$ *per ogni* $a > 1$
5) $n! = o(n^n)$
6) $n^n = o(e^{n^\alpha})$ *per ogni* $\alpha > 1$.

DIMOSTRAZIONE. 1) Vedere l' Esercizio 7.8.10.
2) $n^\alpha = o(n^\beta)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \overset{\text{Esercizio 6.3.50}}{=} 0.$$

3) Esercizio 7.8.5
4) Esercizio 7.8.4
5) Esercizio 7.8.2
6) Esercizio 7.10.7. □

7.10. Esercizi sui limiti di successione

Come applicazione degli Esercizi 7.9.20 e 7.9.21 proponiamo il seguente esercizio.

Esercizio 7.10.1. Studiare, al variare di $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^4+2n}{n^4+n^2-n}\right)^{n^\alpha}.$$

SOLUZIONE ES. 7.10.1. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4+2n}{n^4+n^2-n} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty,$$

dunque il limite richiesto si presenta come una forma indetermninata della forma 1^∞.
In questi casi è talvolta opportuno usare i limiti notevoli descritti nel Paragrafo 7.7.10.
Si ha

$$\frac{n^4+2n}{n^4+n^2-n} = 1 + \left(\frac{n^4+2n}{n^4+n^2-n} - 1\right) = 1 + \frac{n^4+2n-(n^4+n^2-n)}{n^4+n^2-n} = 1 + \frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}.$$

Si noti che, ovviamente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n} = 0.$$

Abbiamo quindi da calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}\right)^{n^\alpha}$$

che possiamo riscrivere così:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}\right)^{\frac{n^4+n^2-n}{-n^2+3n}}\right)^{n^\alpha\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}}.$$

Cerchiamo di applicare i risultati negli Esercizi 7.9.20 e 7.9.21, con

$$a_n := \left(1+\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}\right)^{\frac{n^4+n^2-n}{-n^2+3n}}$$

$$b_n := n^\alpha\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}.$$

Per il Teorema 7.8.14 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = e > 1.$$

Inoltre,

$$b_n := n^\alpha\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n} \sim \frac{-n^{2+\alpha}}{n^4} = -n^{\alpha-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ll} = -\infty & \text{se } \alpha > 2 \\ = -1 & \text{se } \alpha = 2 \\ = 0 & \text{se } \alpha < 2 \end{array}\right.$$

Allora, per l'Esercizio 7.9.20,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}\right)^{\frac{n^4+n^2-n}{-n^2+3n}}\right)^{n^\alpha\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{n^\alpha\frac{-n^2+3n}{n^4+n^2-n}} = \left[\begin{array}{ll} "e^{-\infty}" = 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ = e^{-1} = \frac{1}{e} & \text{se } \alpha = 2 \\ = e^0 = 1 & \text{se } \alpha < 2 \end{array}\right.$$

□

Esercizio 7.10.2 (Da autovalutazione CdL Matematica 7-12-2018). Determinare per quali numeri interi k, risulta $(n+2)! - n^k n! \sim (n+2)!$

Sol. Es. 7.10.2. Per definizione, $(n+2)! - n^k n! \sim (n+2)!$ se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!-n^k n!}{(n+2)!} = 1. \tag{7.10.1}$$

Dato che

$$\frac{(n+2)!-n^k n!}{(n+2)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2)!} - \frac{n^k n!}{(n+2)!} = 1 - \frac{n^k n!}{(n+2)!}$$

l'uguaglianza (7.10.1) è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k n!}{(n+2)!} = 0.$$

Ora,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k n!}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k n!}{(n+2)(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+2)(n+1)}$$

Essendo

$$(n+2)(n+1) \sim n^2$$

si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{(n+2)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n^{k-2}.$$

Tale limite vale 0 se e solo se $k-2<0$, ossia $k<2$. □

Esercizio 7.10.3. Applicare il Teorema 7.5.5 per dedurre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty.$$

Sol: Sia $a_n := \log(n)$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} \overset{\text{Es. 5.3.7}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n} \log(i)}{n}.$$

Posto $a_n = \log(n)$, essendo $\lim\limits_{n\to+\infty} \log(n) = +\infty$ si deduce la tesi dal Teorema 7.5.5.

Esercizio 7.10.4. Applicare il Teorema 7.5.6 per ridimostrare quanto già affermato nell'Esercizio 7.10.3, ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty.$$

Sol: Sia $a_n := \log(n!)$.

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty}(\log(n!) - \log((n-1)!)) \overset{\text{Pr. 6.6.2 (iv)}}{=} \lim_{n\to+\infty} \log \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n\to+\infty} \log n \overset{\text{Pr. 6.6.5}}{=} +\infty.$$

Quindi, per il Teorema 7.5.6 si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty.$$

Esempio 7.10.5. Applicare il Teorema 7.5.7 per dedurre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n^2} = 0;.$$

Esempio 7.10.6. Applicare il Teorema 7.5.5 per dedurre che, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Sol: Sia $a_n := n^\alpha$.
Dal Teorema 7.5.5 segue che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \overset{\text{Esercizio 6.3.50}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Esercizio 7.10.7. Dimostrare usando il Corollario 7.5.4 che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^\alpha}}{n^n} = +\infty \qquad \forall \alpha > 1.$$

Esercizio 7.10.8. Calcolare

1) $\lim(3n^2 - 2n - 4)$ [R.: $+\infty$]
2) $\lim \dfrac{n^3 - n - 1}{3 - n}$ [R.: $-\infty$]
3) $\lim \dfrac{2^{2n} - 5^{\frac{n+1}{2}}}{-5^{\frac{n-1}{2}} + 2^{n-1}}$ [R.: $-\infty$]

Teorema 7.10.9 (Stirling).

$$n! = \frac{n^n}{e^n}(\sqrt{2\pi n} + a_n), \quad (con\, |a_n| \le 1).$$

Esempio 7.10.10. $\dfrac{\log(n!)}{n \log n} \to 1.$

Esercizio 7.10.11. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

[R.: $+\infty$]

SOL. ES. 7.10.11. I modo.
Per risolvere tale esercizio utilizziamo il criterio del rapporto. Poniamo $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$. Osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = 3\frac{(n+1)\cdot n! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)(n+1)^n} =$$

$$= 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Perciò
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$
Quindi, per il criterio del rapporto,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n n!}{n^n}=+\infty.$$
II modo:

Applichiamo il criterio della radice.

Poniamo $a_n=\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

Per l'Esercizio 7.8.15
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{1}{e}+\infty.$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}3\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\frac{3}{e}>1.$$
Quindi
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$$

□

Esercizio 7.10.12. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n}.$$
[R.: $+\infty$]

SOL. ES. 7.10.12. Per il criterio del rapporto ponendo $a_n=\frac{(2n)!}{n^n}$ si ha
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{2(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{(2n)!}{n^n}}=\frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!n^n}{(n+1)(n+1)^n(2n)!}=$$
$$=\frac{2(2n+1)n^n}{(n+1)^n}=\frac{2(2n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$
Siccome per $n\to+\infty$ il numeratore diverge a $+\infty$ e il denominatore converge ad e, segue che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$
Allora, per il criterio del rapporto,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n^n}=+\infty.$$

□

Esercizio 7.10.13. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}.$$
[R.: 1]

Esercizio 7.10.14. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$
[R.: 0]

SOL. ES. 7.10.14. Usiamo il metodo di razionalizzazione:
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=0.$$
□

Esercizio 7.10.15. Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}{n}.$$
[R.: 0]

Esercizio 7.10.16. Scrivere mediante la definizione di limite ("$\forall\varepsilon>0\,\exists\bar{n}\dots$", oppure "$\forall M>0\,\exists\bar{n}\dots$" ecc. esplicitando la dipendenza di $\bar{n}$ da ε o M):

N.B.: Tra parentesi sono indicati i valori dei limiti.

$$3n^2-2n-4 \quad (+\infty), \qquad -2n^3+n-2 \quad (-\infty), \qquad -n^5+4n^3-3 \quad (-\infty),$$

$$4n^4+5n^3-2n^2-10n+1 \quad (+\infty), \qquad \frac{n+\cos n}{n+\sin n^2} \quad (1), \qquad \frac{n^2-2n+3}{2n+1} \quad (+\infty),$$

$$\frac{n^3-n-1}{3-n} \quad (-\infty), \qquad \frac{3n^2+1}{-2n^2+1} \quad (-\frac{3}{2}), \qquad \frac{\sqrt{n^2+2}}{2n+3} \quad (\frac{1}{2}).$$

Esercizio 7.10.17. Calcolare al variare di $a\in\mathbb{R}$:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!+ae^{n^2}}{3^n-(\sqrt{n})^n+(n+3)!}.$$
[R.: 0 se $a=0$, $+\infty$ se $a>0$, $-\infty$ se $a<0$]

Esercizio 7.10.18. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{2}\right]$.
[R.: $+\infty$.]

SOL. ES. 7.10.18. Per ogni $x\in\mathbb{R}$, vale che $[x]\le x<[x]+1$. In particolare,

$$\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2}<\left[\frac{n}{2}\right]+1.$$

Dalla seconda disuguaglianza, abbiamo

$$\left[\frac{n}{2}\right]>\frac{n}{2}-1\to+\infty\qquad\text{per } n\to+\infty.$$

Pertanto, per il Teorema del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n}{2}\right]=+\infty.$$

□

Esercizio 7.10.19. Calcolare, se esiste, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{2^n}$.
[R.: $+\infty$.]

SOL. ES. 7.10.18. Sia

$$a_n:=\frac{n!}{2^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n!}=\frac{(n+1)n!}{2\cdot2^n}\cdot\frac{2^n}{n!}=\frac{n+1}{2}.$$

Allora, essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2}=+\infty,$$

deduciamo dal criterio del rapporto che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{2^n}=+\infty.$$

□

Esercizio 7.10.20. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}.$$

[R.: 0.]

SOL. ES. 7.10.20. Dato che, per ogni $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\frac{1}{(2n)^2} \le \frac{1}{(n+i)^2} \le \frac{1}{n^2},$$

allora vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$\frac{(n+1)}{(2n)^2} \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \le \frac{(n+1)}{n^2}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{(2n)^2} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{n^2} = 0,$$

allora, per il Teorema dei due carabinieri,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} = 0.$$

□

Esercizio 7.10.21. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

[R.: 1.]

SOL. ES. **??**. Abbiamo che

$$n^2 + 1 \le n^2 + k \le n^2 + n \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots, n.$$

Allora

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \text{per ogni } k = 1, \ldots, n.$$

Poiché gli addendi sono esattamente n,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

Ora,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1,$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+1/n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} = 1.$$

In conclusione, per il Teorema dei carabinieri,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

□

Esercizio 7.10.22. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}.$$

[R.: 2.]

Esercizio 7.10.23. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

[R.: $+\infty$.]

Esercizio 7.10.24. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}.$$

[R.: 3.]

SOL. ES. 7.10.24. Risolviamo tale esercizio utilizzando due approcci diversi.

1° modo: Teorema dei due carabinieri.

Osserviamo che vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \le \sqrt[n]{2^n+3^n} \le \sqrt[n]{3^n+3^n} = \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2}.$$

Ora, per il Lemma 6.3.41,

$$\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,$$

allora

$$\sqrt[n]{2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Quindi, per il Teorema dei due carabinieri

$$\sqrt[n]{2^n+3^n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3.$$

2° modo.

Utilizziamo il Corollario 7.6.12 e studiamo il rapporto tra due termini della successione. Ponendo $a_n = 2^n + 3^n$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)} = 3\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)} = 3,$$

da cui, per il Corollario 7.6.12,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3.$$

$\square$

Esercizio 7.10.25. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n - (\sqrt{n})^n.$$

[R.: $-\infty$.]

SOL. ES. 7.10.25. Studiamo il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{(\sqrt{n})^n}$$

utilizzando il criterio della radice n-esima. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{(\sqrt{n})^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0 < 1$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{(\sqrt{n})^n} = 0,$$

ossia

$$3^n = o((\sqrt{n})^n) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Allora, per il principio di eliminazione dei trascurabili nella somma,

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n - (\sqrt{n})^n = \lim_{n\to+\infty} -(\sqrt{n})^n = -\infty.$$

□

Esercizio 7.10.26. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} [\sqrt{2n}] - [\sqrt{n}].$$

[R.: $+\infty$.]

SOL. ES. 7.10.26. Abbiamo che

$$[\sqrt{2n}] \leq \sqrt{2n} < [\sqrt{2n}] + 1,$$

e

$$[\sqrt{n}] \leq \sqrt{n} < [\sqrt{n}] + 1.$$

In particolare, sfruttiamo il fatto che

$$[\sqrt{2n}] > \sqrt{2n} - 1 \qquad \text{e} \qquad -[\sqrt{n}] \geq -\sqrt{n}.$$

Allora

$$[\sqrt{2n}] - [\sqrt{n}] \geq \sqrt{2n} - \sqrt{n} - 1 = \frac{2n-n}{\sqrt{2n}+\sqrt{n}} - 1 = \frac{n}{\sqrt{2n}+\sqrt{n}} - 1 =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n}(\sqrt{2}+1)} - 1 = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2}+1)} - 1 \to +\infty \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Per il Teorema del confronto, concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} ([\sqrt{2n}] - [\sqrt{n}]) = +\infty.$$

□

Esercizio 7.10.27. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right].$$

[R.: 0.]

SOL. ES. 7.10.27. Osserviamo che, razionalizzando,

$$0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1 \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Pertanto $[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = 0$ per ogni $n \geq 1$, da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

□

Esercizio 7.10.28.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)! - n!(n+3)^2}{n!(3n+2) + (n+1)!}.$$

SOL. ES. 7.10.28. Raccogliendo abbiamo

$$a_n = \frac{(n+2)! - n!(n+3)^2}{n!(3n+2) + (n+1)!} = \frac{n!((n+2)(n+1) - (n+3)^2)}{n!(3n+2+n+1)}$$

$$= \frac{n^2+3n+2-n^2-6n-9}{4n+3} = \frac{-3n-7}{4n+3}.$$

Ora utilizzando la nozione di trascurabili si ha che

$$\frac{-3n-7}{4n+3} \sim \frac{-3n}{4n} = -\frac{3}{4},$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{3}{4}.$$

□

Esercizio 7.10.29. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ con le seguenti successioni (a_n):

$$\text{(a)}\ \ n!;\quad \text{(b)}\ \ \frac{n^n}{n!};\quad \text{(c)}\ \ \sqrt{n!};\quad \text{(d)}\ \ \frac{\sqrt{n^n}}{n!};\quad \text{(e)}\ \ \frac{n^{2n}}{n!};\quad \text{(f)}\ \ \binom{2n}{n}.$$

[R.: (a) $+\infty$, (b) e, (c) $+\infty$, (d) 0, (e) $+\infty$, (f) 4]

SOLUZIONI ES. 7.10.29.

$$\text{(a)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$$

$$\text{(b)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\text{(c)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$$

$$\text{(d)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{(n+1)!}\frac{n!}{\sqrt{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^n\cdot(n+1)}}{(n+1)\cdot n!}\frac{n!}{\sqrt{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 0$$

$$\text{(e)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2n}\cdot(n+1)^2}{(n+1)\cdot n!}\frac{n!}{n^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = +\infty$$

$$\text{(f)}\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

□

Esercizio 7.10.30. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{\alpha^n n!}$ al variare di $\alpha > 0$ con $\alpha \neq e$.
R.: 0 se $\alpha > e$, $+\infty$ se $0 < \alpha < e$.

SOL. ES. 7.10.30. Applichiamo il criterio della radice. Sia $a_n = \frac{n^n}{\alpha^n n!}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{\alpha^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{e}{\alpha}.$$

Dove l'ultima uguaglianza viene dal limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e.$$

Dunque, per il criterio della radice,

$$\alpha > e \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{\alpha} \in [0,1[\quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{\alpha^n n!} = 0$$

$$0 < \alpha < e \quad \Rightarrow \quad \frac{e}{\alpha} \in]1,+\infty] \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{\alpha^n n!} = +\infty.$$

□

Esercizio 7.10.31. Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^n}{(pn)!}$ per $p \in \mathbb{N}$.
R.: 0 se $p \geq 2$, $+\infty$ se $p = 1$.

SOL. ES. 7.10.31. Osserviamo subito che

$$\text{se} \quad p = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^n}{(pn)!} = \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty.$$

Studiamo quindi il caso $p \geq 2$. Proviamo ad applicare il criterio del rapporto.
Sia $a_n = \frac{n!n^n}{(pn)!}$, con $p \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(n+1)^n}{(p(n+1))!} \cdot \frac{(np)!}{n!n^n} = (n+1)(\frac{n+1}{n})^n \frac{(np)!}{(np+p)!} =$$

$$= (n+1)(1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{(np)!}{(np+p)\cdots(np+1)(np)!} = (n+1)(1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{(np+p)\cdots(np+1)}$$

$$= (1+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{n+1}{(np+p)\cdots(np+1)}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$$

segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} e \cdot \frac{n+1}{(np+p)\cdots(np+1)}.$$

Cerchiamo di maggiorare e minorare l'ultimo fattore. Si ha, per ogni $p \geq 2$,

$$np+1 \leq np+i \leq np+p \qquad \forall i \in \{1,\ldots,p\},$$

allora

$$(np+1)^p \leq (np+i)^p \leq (np+p)^p \qquad \forall i \in \{1,\ldots,p\},$$

da cui

$$\frac{n+1}{(np+p)^p} \leq \frac{n+1}{(np+p)\cdots(np+1)} \leq \frac{n+1}{(np+1)^p}.$$

Essendo

$$\frac{n+1}{(np+p)^p} \sim \frac{n}{(np)^p} = \frac{1}{n^{p-1}p^p}$$

abbiamo che, essendo $p-1 \geq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(np+p)^p} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p-1}p^p} = 0.$$

Analogamente, essendo

$$\frac{n+1}{(np+1)^p} \sim \frac{n}{(np)^p} = \frac{1}{n^{p-1}p^p}$$

abbiamo che, essendo $p-1 \geq 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(np+1)^p} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p-1}p^p} = 0.$$

Pertanto, per il Teorema dei carabinieri, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{(np+p)\cdots(np+1)} = 0.$$

Ne deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e\cdot 0 = 0.$$

Quindi per il criterio del rapporto concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^n}{(pn)!} = 0 \quad \text{se} \quad p \geq 2.$$

$\square$

Esercizio 7.10.32. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(pn)^n \cdot n!}{(2n)!} \qquad p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2.$$

R.: $+\infty$

Sol. Es. 7.10.32. Sia $a_n = \frac{(pn)^n\cdot n!}{(2n)!}$ e applichiamo il criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(p(n+1))^{n+1} + (n+1)!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(pn)^n n!}$$

$$= \frac{(p(n+1))^n p(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)(pn)^n} = \frac{(n+1)^n \cdot p(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)n^n}.$$

Allora abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{p(n+1)^2}{2(n+1)(2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot p \cdot \frac{n^2}{(2n)^2} = \frac{e\cdot p}{4}$$

poiché $n+1 \sim n$ e $2n+1 \sim 2n$.

Allora per il criterio del rapporto, otteniamo che

- se $p \geq 2 \Rightarrow \frac{ep}{4} \geq \frac{e \cdot 2}{4} > \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$. Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{ep}{4} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

- se $p = 1 \Rightarrow \frac{ep}{4} = \frac{e}{4} < 1$. Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{4} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

□

Esercizio 7.10.33. Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+p)^n}{(n+q)!}$ per $p, q \in \mathbb{N}$.
R.: $+\infty$

Esercizio 7.10.34. Calcolare $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ per $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$.
R.: $\max\{a, b\}$

Esercizio 7.10.35. Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{5^n - 3^n}.$$

SOL. ES. 7.10.35. Poniamo $a_n = 5^n - 3^n$. Siccome $(a_n)_n$ è una successione a termini positivi possiamo anche in questo caso utilizzare il teorema ausiliario nel seguente modo.
Si ha

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{5^n - 3^n} = \\ &= \frac{5^{n+1}}{5^n\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} - \frac{3^{n+1}}{3^n\left(-1 + \left(\frac{5}{3}\right)^n\right)} = \\ &= \frac{5}{\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)} - \frac{3}{\left(-1 + \left(\frac{5}{3}\right)^n\right)} \xrightarrow{n \to +\infty} 5, \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{5^n - 3^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{5^{n+1} - 3^{n+1}}{5^n - 3^n} = 5$$

□

Esercizio 7.10.36. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni.

$3n^2-2n-4 \quad (+\infty)$, $\quad -2n^3+n-2 \quad (-\infty)$, $\quad -n^5+4n^3-3 \quad (-\infty)$,

$4n^4+5n^3-2n^2-10n+1 \quad (+\infty)$, $\quad \dfrac{n+\cos n}{n+\sin n^2} \quad (1)$, $\quad \dfrac{n^2-2n+3}{2n+1} \quad (+\infty)$,

$\dfrac{n^3-n-1}{3-n} \quad (-\infty)$, $\quad \dfrac{3n^2+1}{-2n^2+1} \quad (-\dfrac{3}{2})$, $\quad \dfrac{n^3-1}{(n+1)(n^2+2n+1)} \quad (1)$,

$\dfrac{(2n+1)(3n^2-n^3+3)}{(n^2+2n+2)\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad (-\infty)$, $\quad \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n+3} \quad (\dfrac{1}{2})$, $\quad \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n}} \quad (0)$,

$\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^3+3}}{2\sqrt{n^3+1}} \quad (-\dfrac{1}{2})$, $\quad (-1)^n\dfrac{n}{n+1} \quad (\nexists)$, $\quad \dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n}} \quad (0)$,

$\dfrac{n}{1+(-1)^{n-1}n} \quad (\nexists)$, $\quad \left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+3} \quad (e)$,

$\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n \quad (1)$, $\quad \left(\dfrac{n^3+1}{n^4+3}\right)^n \quad (0)$,

$\left(\dfrac{1-n}{n}\right)^n \quad (\nexists)$, $\quad \sqrt[n]{\dfrac{2^{n+1}+n^2}{5^n-3^{n+1}}} \quad (\dfrac{2}{5})$, $\quad \dfrac{n!-2n^n}{n^n-n^3} \quad (-2)$,

$\dfrac{2^{n+2}}{n!-3^n} \quad (0)$, $\quad \left(\dfrac{n^2+n-2}{n^2+1}\right)^{\sqrt{n}} \quad (1)$,

$\left(1-\dfrac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\sqrt[4]{n}} \quad (1)$, $\quad \dfrac{2^{2n}+5^{(n+1)/2}}{5^{(n-1)/2}+2^{n+1}} \quad (+\infty)$, $\quad \left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-1}\right)^{-n} \quad (0)$,

$\dfrac{2^{-2n}+2n!}{2^n+n^2} \quad (+\infty)$, $\quad \dfrac{n}{\log_2(2^n+e)} \quad (1)$, $\quad \sqrt{\log_2 n-\log_3(n-2)+2} \quad (+\infty)$,

$\left(1+\dfrac{1}{\log(e^{n+1}+3)}\right)^n \quad (e)$, $\quad \left(\dfrac{n^3+1}{n^4+3}\right)^{n/2} \quad (0)$,

$\left|(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right| \quad (1)$, $\quad \dfrac{\frac{-n^3}{(2+n)^2}+\frac{\arctan((n-1)!)}{4}}{n} \quad (-1)$, $\quad \dfrac{(2n+5)^{2/3}+(2n-1)^{2/3}}{\sqrt{n^2+1}+n^{1/4}} \quad (0)$,

$\dfrac{2^n+(-1)^n(n+1)^2}{-5^n+n} \quad (0)$, $\quad \sqrt[n]{\pi^n+(-1)^n3^n} \quad (\pi)$, $\quad \dfrac{n\sqrt[n]{5^n-3^n}}{\sqrt[n]{n!-5^n}} \quad (5e)$.

Esercizio 7.10.37. Calcolare, se esiste, il limite della successione:

$$\frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}}.$$

R.: 0

SOL. ES. 7.10.37. Sia $a_n = \frac{n^{(-1)^n}}{n^{3/2}}$. Si ha che la sottosuccessione degli indici pari ha elementi

$$a_{2n} = \frac{(2n)^{(-1)^{2n}}}{(2n)^{3/2}} = \frac{(2n)^1}{(2n)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0.$$

Si ha che la sottosuccessione degli indici dispari ha elementi

$$a_{2n+1} = \frac{(2n+1)^{(-1)^{2n+1}}}{(2n+1)^{3/2}} = \frac{(2n+1)^{-1}}{(2n+1)^{3/2}} = \frac{1}{(2n+1)^{5/2}},$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)^{5/2}} = 0.$$

Dato che le sue sottosuccessioni (a_{2n}) e (a_{2n+1}) convergono entrambe a 0, allora esiste il limite di (a_n) e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

□

Esercizio 7.10.38. Calcolare, se esiste, il limite della successione:

$$\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$$

R.: $\nexists$

SOL. ES. 7.10.38. Essendo

$$a_n := \left(\frac{1-n}{n}\right)^n = (-1)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

deduciamo che la successione degli indici pari (a_{2n}) è

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}$$

e

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$$

deduciamo che

$$\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\frac{1}{e},$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}-\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}=-\frac{1}{e}.$$

Ne segue che non esiste il limite di (a_n). □

Esercizio 7.10.39. Calcolare, se esiste, il limite della successione:

$$\frac{-n^{3/2}+n^{7/8}-n+2}{\log_2 2^n+n^{7/5}}.$$

R.: $-\infty$.

Sol. Es. 7.10.39. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{3/2}+n^{7/8}-n+2}{\log_2 2^n+n^{7/5}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{3/2}+n^{7/8}-n+2}{n+n^{7/5}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{3/2}\left(-1+\frac{1}{n^{5/8}}-\frac{1}{n^{1/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}\right)}{n^{7/5}\left(\frac{1}{n^{2/5}}+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}n^{1/10}\frac{\left(-1+\frac{1}{n^{5/8}}-\frac{1}{n^{1/2}}+\frac{2}{n^{3/2}}\right)}{\left(\frac{1}{n^{2/5}}+1\right)}=-\infty.$$

□

Esercizio 7.10.40. Calcolare, se esiste, il limite della successione:

$$\left(\frac{1+\log(n^3)}{3\log n}\right)^{\log(n^3+1)}.$$

R.: e.

Sol. Es. 7.10.40. Si ha

$$\left(\frac{1+\log(n^3)}{3\log n}\right)^{\log(n^3+1)}=\left(\frac{1+3\log n}{3\log n}\right)^{\log(n^3+1)}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3\log n}\right)^{\log(n^3+1)}=\left(\left(1+\frac{1}{3\log n}\right)^{3\log(n)}\right)^{\frac{\log(n^3+1)}{3\log(n)}}.$$

Si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3\log n}\right)^{3\log(n)}=e,$$
allora
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\log(n^3)}{3\log n}\right)^{\log(n^3+1)}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\log(n^3+1)}{\log(n^3)}}.$$
Si ha
$$\begin{aligned}\frac{\log(n^3+1)}{\log(n^3)}&=\frac{\log(n^3(1+\frac{1}{n^3}))}{\log(n^3)}\\&=\frac{\log(n^3)+\log(1+\frac{1}{n^3}))}{\log(n^3)}=1+\frac{\log(1+\frac{1}{n^3})}{\log(n^3)}\end{aligned}$$
da cui deduciamo che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n^3+1)}{\log(n^3)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\log(1+\frac{1}{n^3})}{\log(n^3)}\right)=1.$$
Pertanto,
$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\log(n^3+1)}{\log(n^3)}}=e^1=e.$$
□

Esercizio 7.10.41. Calcolare, se esiste, il limite seguente
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\frac{n}{4}}.$$

SOL. ES. 7.10.41. Posto $a_n=\frac{3\sqrt{n}}{n+2}$ si ha che $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.
Si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\frac{n}{4}}=\lim_{n\to+\infty}(1-a_n)^{\frac{n}{4}}=\lim_{n\to+\infty}\left((1-a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right)^{\frac{na_n}{4}}.$$
Essendo, per il limite notevole del Teorema 7.8.14,
$$\lim_{n\to+\infty}(1-a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e,$$
deduciamo per l'Esercizio 7.9.20 che
$$\lim_{n\to+\infty}\left((1-a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right)^{\frac{na_n}{4}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{na_n}{4}}.$$
Ricordando l'espressione di a_n si è finora arrivati ad affermare che
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\frac{n}{4}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{n\frac{3\sqrt{n}}{n+2}}{4}}$$
e tale limite vale $+\infty$. □

Esercizio 7.10.42. Calcolare, se esiste, il limite seguente

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\sqrt{n}}.$$

SOL. ES. 7.10.41. Posto $a_n=\frac{3\sqrt{n}}{n+2}$ si ha che $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.
Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}(1-a_n)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left((1-a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right)^{a_n\sqrt{n}}.$$

Essendo, per il limite notevole del Teorema 7.8.14,

$$\lim_{n\to+\infty}(1-a_n)^{\frac{1}{a_n}}=e,$$

deduciamo per l'Esercizio 7.9.20 che

$$\lim_{n\to+\infty}\left((1-a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right)^{a_n\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{a_n\sqrt{n}}.$$

Ricordando l'espressione di a_n si è finora arrivati ad affermare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3\sqrt{n}}{n+2}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\sqrt{n}\frac{3\sqrt{n}}{n+2}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{3n}{n+2}}.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{n+2}=3$$

il limite della successione vale e^3. □

Esercizio 7.10.43. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni.

$$\sqrt[3]{\frac{|\sin n|}{n+1}};\qquad \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}};\qquad \left(\frac{\sin(n)+3}{5}\right)^n;\quad (3+\cos n)^n$$
$$\frac{n}{n+1}\sin n\pi 10;\quad \frac{1}{n^2}\log(1+2e^n);$$

Esercizio 7.10.44. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni.

$$\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3};\qquad \frac{(-2)^n+n^2}{3^n+n^3};\qquad \frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+1}{2^n+n};$$

$$\frac{2^{n+2}+3^{n/2}}{2^n+3^{\frac{n+2}{2}}};\qquad \alpha^n+(-1)^n\alpha^{2n}\quad(\alpha\in\mathbb{R});\qquad \frac{n^n+n^2}{n!+3^n};$$

$$\frac{(n+1)^n+n^4}{3^n n!+4^n};\quad (2-n)^n+(4n)!;\quad \left(n!\sin\frac{1}{n^n}\right)^{1/n};\quad \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n};$$

$$\frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{n};\qquad \sqrt[n]{\frac{n^{n/2}}{2^n+1}};\qquad \frac{\log n!}{n};$$

$$\frac{\log n!}{n^2};\qquad \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n}\quad(\alpha\in\mathbb{R});\qquad \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^3};\qquad \frac{n^{n/2}}{n!};$$

$$\frac{n^{kn}}{(kn)!};\qquad \frac{2^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Esercizio 7.10.45. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione:

$$\frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+n^2}{2^{n/2}+n}.$$

SOL. ES. 7.10.45. Studiamo il numeratore e vediamo chi è trascurabile tra $2^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ e n^2.
Ricordiamo che $[x]\le x<[x]+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}$, in particolare $[x]>x-1$.
Allora abbiamo:

$$\frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^2}>\frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n^2}.$$

Siccome, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{n^2}=+\infty,$$

allora, per il criterio del confronto, è:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^2}=+\infty.$$

Dunque $n^2=o(2^{\left[\frac{n}{2}\right]})$.
Studiamo il denominatore e vediamo chi è trascurabile tra $2^{n/2}$ e n. Dalla gerarchia degli infinti, è immediato che $n=o(2^{n/2})$, poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n/2}}{n}=+\infty$.
Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+n^2}{2^{\frac{n}{2}}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2^{\frac{n}{2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]}}.$$

Ora, sia $a_n=2^{\frac{n}{2}-\left[\frac{n}{2}\right]}$. La sottosuccessione con indici pari è

$$a_{2n}=2^{\frac{2n}{2}-\left[\frac{2n}{2}\right]}=2^{n-[n]}=2^{n-n}=2^0=1$$

poiché $[n]=n$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1}=1.$$

Se considero a_{2n+1} ho:

$$\lim_{n\to+\infty}a_{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}2^{\frac{2n+1}{2}-\left[\frac{2n+1}{2}\right]}=\lim_{n\to+\infty}2^{n+\frac{1}{2}-\left[n+\frac{1}{2}\right]}=\lim_{n\to+\infty}2^{n+\frac{1}{2}-n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}.$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_{2n+1}}=\frac{1}{2^{1/2}}\neq 1.$$

Dato che le sottosuccessioni di (a_n) degli indici pari e degli indici dispari hanno limiti diversi, allora non esiste il limite di (a_n). □

Esercizio 7.10.46. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione:

$$\alpha^n+\alpha^{2n}\quad(\alpha\in\mathbb{R}).$$

Sol. Es. 7.10.46. Se $\alpha=1$:

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha^n+\alpha^{2n}=\lim_{n\to+\infty}(1+1)=2.$$

Se $\alpha=0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha^n+\alpha^{2n}=\lim_{n\to+\infty}0+0=0.$$

Consideriamo ora $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ e valutiamo chi comanda tra α^n e α^{2n}.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n}{\alpha^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\alpha^n}=\left[\begin{array}{ll}''\frac{1}{+\infty}''=0 & \text{se } \alpha>1\\ =+\infty & \text{se } 0<\alpha<1\end{array}\right.$$

Allora

$$\alpha^n+\alpha^{2n}\sim\left[\begin{array}{ll}\alpha^{2n} & \text{se } \alpha>1\\ \alpha^n & \text{se } 0<\alpha<1\end{array}\right.$$

Dunque se $\alpha>1$

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha^n+\alpha^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\alpha^{2n}=+\infty.$$

Se $0<\alpha<1$

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha^n+\alpha^{2n}=\lim_{n\to+\infty}\alpha^n=0.$$

Resta ora da considerare il caso $\alpha<0$. Ciò comporta che $\alpha=-|\alpha|$. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha^n+\alpha^{2n}=\lim_{n\to+\infty}(-|\alpha|)^n+(-|\alpha|)^{2n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n(|\alpha|)^n+(-1)^{2n}(|\alpha|)^{2n}=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n(|\alpha|)^n+|\alpha|^{2n}.$$

Sia $\alpha < -1$. In tal caso, $|\alpha| > 1$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n |\alpha|^n + |\alpha|^{2n} = \lim_{n\to+\infty} |\alpha|^{2n} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{|\alpha|^n} + 1 \right).$$

Essendo $((-1)^n)$ una successione limitata e $\left(\frac{1}{|\alpha|^n}\right)$ una successione infinitesima, allora

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{|\alpha|^n} = 0$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{|\alpha|^n} + 1 \right) = 1.$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} |\alpha|^{2n} \left((-1)^n \cdot \frac{1}{|\alpha|^n} + 1 \right) = \lim_{n\to+\infty} |\alpha|^{2n} \cdot 1 = +\infty.$$

Sia, invece, $-1 < \alpha < 0$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n + \alpha^{2n} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n |\alpha|^n + |\alpha|^{2n} = \lim_{n\to+\infty} |\alpha|^n \left(-1 + |\alpha|^n \right) = 0.$$

Consideriamo infine il caso $\alpha = -1$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n + (-1)^{2n} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n + 1.$$

Essendo

$$(-1)^n + 1 = \left[\begin{array}{ll} 1+1=2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1+1=0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{array} \right.$$

deduciamo che

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n + (-1)^{2n}.$$

□

Esercizio 7.10.47. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione:

$$\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!+1}}.$$

SOL. ES. 7.10.47. Per svolgere questo limite utilizziamo il Corollario 7.6.12, il quale afferma che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Allora abbiamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!+1} \cdot \frac{n!+1}{(2n)!}.$$

Essendo $n!+1 \sim n!$ e $(n+1)!+1 \sim (n+1)!$, otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot n!}{(n+1)(n)! \cdot (2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1) = +\infty.$$

In conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1) = +\infty.$$

□

Esercizio 7.10.48. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione:

$$\sqrt[n]{\binom{kn}{n}} \; (k \in \mathbb{N}).$$

SOL. ES. 7.10.48. Ricordiamo innanzitutto che

$$\binom{kn}{n} = \frac{(kn)!}{n!(kn-n)!}.$$

Utilizziamo il Corollario 7.6.12, il quale afferma che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ allora $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Nel caso presente,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(k(n+1))!}{(n+1)!(k(n+1)-(n+1))!} \cdot \frac{n!(kn-n)!}{(kn)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1)}{(n+1)((kn-n+k-1)!)} \cdot (kn-n)! =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1)}{(n+1)(kn-n+k-1)(kn-n+k-2)\cdots(kn-n+1)}.$$

Ora osserviamo che:

(i) $kn+i \sim kn, \quad \forall i \in \{1,\dots,k\}$.
Allora $(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+1) \sim (kn)^k$;

(ii) $(n+1) \sim n$;

(iii) $kn-n+i \sim kn-n, \quad \forall i \in \{1,\dots,k-1\}$.
Allora $(kn-n+k-1)(kn-n+k-2)\cdots(kn-n+1) \sim (kn-n)^{k-1}$.

Dunque otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(kn)^k}{n\cdot(n(k-1))^{k-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^k k^k}{n\cdot n^{k-1}(k-1)^{k-1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}.$$

In conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{kn}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}.$$

□

Esercizio 7.10.49. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n}$$

[R. 3]

Esercizio 7.10.50. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n - (\sqrt{n})^n$$

[R. $-\infty$]

Esercizio 7.10.51. Calcolare al variare di $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(kn)^n - n^{kn}}{(n-1)^{kn} + (n+k)!}.$$

[R. $-e^k$ se $k>1$; 0 se $k=1$]

Sol. Es. 7.10.51. Se $k=1$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n)^n - n^n}{(n-1)^n + (n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{(n-1)^n + (n+1)!} = 0.$$

Se $k \geq 2$ consideriamo il numeratore e vediamo quali tra i due addendi domina l'altro:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(kn)^n}{n^{kn}}.$$

Sia $a_n = \frac{(kn)^n}{n^{kn}}$ e applichiamo il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(kn)^n}{n^{kn}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{kn}{n^{\frac{kn}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{kn}{n^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{k}{n^{k-1}} = 0,$$

poiché $k \geq 2$. Quindi per il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

ossia

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(kn)^n}{n^{kn}} = 0,$$

cioè $(kn)^n = o(n^{kn})$.

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(kn)^n - n^{kn}}{(n-1)^{kn} + (n+k)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^{kn}}{(n-1)^{kn} + (n+k)!}.$$

Consideriamo ora il denominatore e valutiamo chi comanda tra $(n-1)^{kn}$ e $(n+k)!$, se ve n'è uno. Poniamo $a_n := \frac{(n-1)^{kn}}{(n+k)!}$ e studiamone il limite col criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{k(n+1)}}{(n+1+k)!}\cdot\frac{(n+k)!}{(n-1)^{kn}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^{kn}\cdot n^k}{(n+k+1)(n-1)^{kn}} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{kn}\cdot\frac{n^k}{n+k+1}.$$

Essendo $\frac{n^k}{n+k+1} \sim \frac{n^k}{n} = n^{k-1}$, abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{kn}\cdot\frac{n^k}{n+k+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{kn} n^{k-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{kn} n^{k-1} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right)^k n^{k-1}.$$

E' noto che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

da cui anche

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Se non lo si ricorda, osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1},$$

da cui si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e.$$

Riassumendo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n\right)^k n^{k-1} = e^k\cdot\lim_{n\to+\infty} n^{k-1} = +\infty.$$

Quindi per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)^{kn}}{(n+k)!} = +\infty$$

da cui $(n+k)! = o((n-1)^{kn})$.

In conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(kn)^n - n^{kn}}{(n-1)^{kn}-(n+k)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{kn}}{(n-1)^{kn}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^k = -e^k.$$

$\square$

Esercizio 7.10.52. Determinare il minlim e il maxlim della successione $((-1)^n \dfrac{n}{n+1})$.

Esercizio 7.10.53. Determinare il minlim e il maxlim della successione $(\dfrac{n}{1+(-1)^{n-1}n})$.

Esercizio 7.10.54. Determinare il minlim e il maxlim della successione $(\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n)$.

Esercizio 7.10.55. Determinare il minlim e il maxlim della successione $\left(\left(\dfrac{1-n}{n}\right)^n\right)$.

Esercizio 7.10.56. Calcolare maxlim e minlim di

$$a_n := \begin{cases} ne^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ ne^{n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Sol: $\max\lim = +\infty$, $\min\lim = 0$.
Consideriamo la sottosuccessione $(a_{2n}) = \frac{2n}{e^{2n}}$. Essa è una sottusuccessione di (a_n) che tende a 0 per l'Esercizio 7.8.5.
Ne segue che

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 0.$$

Essendo $a_n > 0$ per ogni n risulterà $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Consideriamo la sottosuccessione $(a_{2n+1}) = (2n+1)e^{2n+1}$. Essa è una sottusuccessione di (a_n) che tende a $+\infty$.
Ne segue che

$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n \ge \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = +\infty.$$

da cui $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Esercizio 7.10.57. Calcolare maxlim e minlim di $\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)$.
Sol:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \equiv 0 \mod 4 \\ 1 & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ 0 & \text{se } n \equiv 2 \mod 4 \\ -1 & \text{se } n \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

Da qui: $\max\lim = 1$, $\min\lim = -1$.

Esercizio 7.10.58. Calcolare maxlim e minlim di $(\frac{1+(-1)^n n}{1+n})$.
Sol:

$$\frac{1+(-1)^n n}{1+n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1-n}{1+n} = -1 + \frac{2}{1+n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Da qui: $\max\lim = 1$, $\min\lim = -1$.

Esercizio 7.10.59. Calcolare maxlim e minlim di $((-1)^n \frac{2n}{n+2})$.

Esercizio 7.10.60. Calcolare maxlim e minlim di $([\sqrt{n+1}-\sqrt{n}])$.
Sol:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\in]0,1[$$

quindi

$$\left[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right]=0.$$

Da qui: maxlim = minlim = 0.

Esercizio 7.10.61. Calcolare maxlim e minlim di $(\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}])$.
Sol: maxlim = 1, minlim = 0.

$$\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}]\geq\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\geq 0.$$

Dunque

$$\min\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}])\geq 0.$$

$$\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}]\leq\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}-1)=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+1.$$

Ora:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

quindi

$$\max\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}])\leq\max\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-(\sqrt{n}-1))=\max\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+1\right)=1.$$

Allora:

$$0\leq\min\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}])\leq\max\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}])\leq 1.$$

Se poniamo $a_n:=\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}]$ e consideriamo a_{n^2} si ha

$$a_{n^2}=\sqrt{n^2+1}-[\sqrt{n^2}]=\sqrt{n^2+1}-n=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}\to_{n\to+\infty}0$$

da cui si deduce che

$$\min\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-[\sqrt{n}])=0.$$

Se consideriamo a_{n^2-1} si ha

$$a_{n^2-1}=\sqrt{n^2}-[\sqrt{n^2-1}]=n-[\sqrt{n^2-1}]$$

Ora, essendo

$$n-1\leq\sqrt{n^2-1}\Leftrightarrow n^2-2n+1\leq n^2-1\Leftrightarrow 2\leq 2n$$

ed essendo l'ultima affermazione vera, deduciamo

$$n-1 \leq \sqrt{n^2-1} < n$$

da cui $[\sqrt{n^2-1}] = n-1$. Allora

$$a_{n^2-1} = n-(n-1) = 1$$

che ovviamente tende a 1.
Conclusione:

$$\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - [\sqrt{n}] = 1.$$

Esercizio 7.10.62. Calcolare $\max\lim$ e $\min\lim$ di

$$\left(\left(1+\frac{(-1)^n 2n}{n^2+1}\right)^n\right).$$

SOL. ES. 7.10.62. Andiamo a considerare la sottosuccessione di indici pari:

$$a_{2n} = \left(1+\frac{4n}{(2n)^2+1}\right)^{2n} = \left(\left(1+\frac{4n}{4n^2+1}\right)^{\frac{4n^2+1}{4n}}\right)^{\frac{2n4n}{4n^2+1}}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4n}{4n^2+1}\right)^{\frac{4n^2+1}{4n}} = e$, e $\lim_{n\to+\infty}\frac{8n^2}{4n^2+1} = 2$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = e^2.$$

Considerando la sottosuccessione di indici dispari, invece, si ha:

$$a_{2n+1} = \left(1-\frac{2(2n+1)}{(2n+1)^2+1}\right)^{2n+1} = \left(1-\frac{4n+2}{4n^2+4n+2}\right)^{2n+1} =$$

$$= \left(\left(1-\frac{4n+2}{4n^2+4n+2}\right)^{\frac{4n^2+4n+2}{4n+2}}\right)^{\frac{(2n+1)(4n+2)}{4n^2+4n+2}}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{4n+2}{4n^2+4n+2}\right)^{\frac{4n^2+4n+2}{4n+2}} = \frac{1}{e}$, e $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(4n+2)}{4n^2+4n+2} = 2$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{e^2}.$$

Quindi $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$.
Allora possiamo concludere che

$$\min\lim a_n = \frac{1}{e^2} \qquad \max\lim a_n = e^2.$$

□

Esercizio 7.10.63 (Allineamento 7-11-2020). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2-n}-3^n}{4^{n+5}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}.$$

SOL. ES. 7.10.63. Sia il numeratore che il denominatore, si presentano come una forma indeterminata.
Stabiliamo che comanda tra 2^{n^2-n} e 3^n Per calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2-n}}{3^n}$$

possiamo usare il criterio della radice, Teorema 7.6.4.
Sia $a_n = \frac{2^{n^2-n}}{3^n}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n^2-n}}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n-1}}{3} = +\infty.$$

Dunque, per il criterio della radice,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n^2-n}}{3^n} = +\infty.$$

Allora

$$3^n = o(2^{n^2-n})$$

da cui

$$2^{n^2-n} - 3^n \sim 2^{n^2-n}.$$

Analogamente ragioniamo coi termini a denominatore.
Sia $a_n = \frac{4^{n+5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^{n+5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4^{1+\frac{5}{n}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} ='' \frac{4}{+\infty}'' = 0.$$

Dunque, per il criterio della radice,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n+5}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}} = 0.$$

Allora

$$4^{n+5} = o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}\right)$$

da cui

$$4^{n+5} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n^2} \sim -\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}.$$

Da tutto ciò segue che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n^2-n}-3^n}{4^{n+5}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n^2-n}}{-\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}.$$
Si ha
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n^2-n}}{-\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{2^{n^2-n+n^2}}{3^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{2^{2n^2-n}}{3^{n^2}}.$$
Tale limite si presenta come forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.
Ragioniamo ancora col criterio della radice.
Sia $a_n=\frac{2^{2n^2-n}}{3^{n^2}}$.
Allora
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{2n^2-n}}{3^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n-1}}{3^n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n=+\infty.$$
Dunque, per il criterio della radice,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n^2-n}}{3^{n^2}}=+\infty.$$
Si conclude che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n^2-n}-3^n}{4^{n+5}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n^2}}=-\infty.$$
□

Esercizio 7.10.64 (Prova scritta 14-1-2019). Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\exp(3n+\alpha n^2)}{\sqrt{(n^2)!}(\sqrt{n^4+2n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2-2n})}.$$
[R. 0 per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.]

SOL. ES. 7.10.64. Osserviamo che
$$\sqrt{n^4+2n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2-2n}=\frac{n^4+2n^2+2-(n^4+n^2-2n)}{\sqrt{n^4+2n^2+2}+\sqrt{n^4+n^2-2n}}=$$
$$=\frac{n^2+2n+2}{\sqrt{n^4+2n^2+2}+\sqrt{n^4+n^2-2n}}=$$
$$=\frac{n^2+2n+2}{n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^4}}+n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}}\sim\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2},$$

pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\exp(3n+\alpha n^2)}{\sqrt{(n^2)!}(\sqrt{n^4+2n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2-2n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2e^{3n+\alpha n^2}}{\sqrt{(n^2)!}}.$$

Ora, se $\alpha<0$, per le gerarchie degli infiniti, $2n^2e^{3n+\alpha n^2}\to 0$ per $n\to+\infty$.
Inoltre $\sqrt{(n^2)!}\to+\infty$ per $n\to+\infty$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\exp(3n+\alpha n^2)}{\sqrt{(n^2)!}(\sqrt{n^4+2n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2-2n})} = 0 \quad \text{se } \alpha<0.$$

Supponiamo ora $\alpha\ge 0$.
Per $n\to+\infty$, si ottiene una forma indeterminata del tipo $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.
Poniamo

$$a_n := \frac{2n^2e^{3n+\alpha n^2}}{\sqrt{(n^2)!}}.$$

Osserviamo che $a_n\ge 0$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2(n+1)^2e^{3(n+1)+\alpha(n+1)^2}}{2n^2e^{3n+\alpha n^2}}\cdot\frac{\sqrt{(n^2)!}}{\sqrt{((n+1)^2)!}} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot e^{3n+3+\alpha n^2+2\alpha n+\alpha-3n-\alpha n^2}\cdot\sqrt{\frac{(n^2)!}{(n+1)^2((n+1)^2-1)((n+1)^2-2)\dots(n^2+1)(n^2)!}} \sim \\ &\sim 1\cdot e^{2\alpha n+\alpha+3}\cdot\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2((n+1)^2-1)((n+1)^2-2)\dots(n^2+1)}}\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{2\alpha n+\alpha+3}\cdot\sqrt{\frac{1}{(n+1)^2((n+1)^2-1)((n+1)^2-2)\dots(n^2+1)}}. \tag{7.10.2}$$

Calcoliamo il secondo limite. Osservando che

$$(n+1)^2((n+1)^2-1)((n+1)^2-2)\dots(n^2+1) = (n^2+1)(n^2+2)\dots(n^2+2n+1),$$

(si moltiplicano tutti i termini tra $(n+1)^2$ e n^2+1), e che

$$n^2+k\ge n^2 \qquad \forall k\in\mathbb{N},$$

si ricava che

$$(n^2)^{2n+1}\le(n^2+1)(n^2+2)\dots(n^2+2n+1).$$

Quindi

$$0 \le e^{2\alpha n+\alpha+3} \cdot \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2((n+1)^2-1)((n+1)^2-2)\dots(n^2+1)}} \le \frac{e^{2\alpha n+\alpha+3}}{\sqrt{(n^2)^{2n+1}}} \le \frac{e^{2\alpha n+\alpha+3}}{\sqrt{(n^2)^{2n}}} \to 0.$$

Allora, per il teorema dei carabinieri,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{2\alpha n+\alpha+3} \cdot \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2((n+1)^2-1)((n+1)^2-2)\dots(n^2+1)}} = 0.$$

Allora, per (7.10.2),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,$$

e per il criterio del rapporto, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
In conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \exp(3n+\alpha n^2)}{\sqrt{(n^2)!}(\sqrt{n^4+2n^2+2}-\sqrt{n^4+n^2-2n})} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

□

Esercizio 7.10.65 (Prova scritta 4-2-2019). Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{\sqrt{n^2+4n}-n-3\sqrt{n}}$$

dove $[x]$= parte intera di x.
[R. 0 se $\alpha < \frac{1}{2}$, $\nexists$ se $\alpha \ge \frac{1}{2}$.]

Sol. es. 7.10.65. Se $\alpha \le 0$, si ha $0 \le n^\alpha/3 < 1$ definitivamente. Infatti, se $\alpha = 0$,

$$0 \le \frac{n^0}{3} = \frac{1}{3} < 1, \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

mentre se $\alpha < 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{3} = 0,$$

per cui $0 \le n^\alpha/3 < 1$ definitivamente.
Allora, definitivamente,

$$\left[\frac{n^\alpha}{3}\right] = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha \le 0,$$

per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{\sqrt{n^2+4n}-n-3\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{per ogni } \alpha \le 0.$$

Consideriamo ora $\alpha > 0$. Osserviamo che

$$\sqrt{n^2+4n}-(n+3\sqrt{n}) = \frac{n^2+4n-(n^2+6n^{\frac{3}{2}}+9n)}{\sqrt{n^2+4n}+n+3\sqrt{n}} = \frac{-6n^{\frac{3}{2}}-5n}{n\sqrt{1+4/n}+n+3\sqrt{n}} \approx \frac{-6n^{\frac{3}{2}}}{2n} = -3\sqrt{n},$$

da cui segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{\sqrt{n^2+4n}-n-3\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{-3\sqrt{n}}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale che

$$\frac{n^\alpha}{3}-1 < \left[\frac{n^\alpha}{3}\right] \le \frac{n^\alpha}{3}$$

e quindi, dividendo per $3\sqrt{n}$,

$$\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{9} - \frac{1}{3\sqrt{n}} < \frac{\left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}} \le \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{9} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{7.10.3}$$

Ora, se $\alpha = 1/2$, segue che

$$\frac{1}{9} - \frac{1}{3\sqrt{n}} < \frac{\left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}} \le \frac{1}{9},$$

da cui, per il teorema dei carabinieri, si ottiene che

$$\frac{\left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}} \to \frac{1}{9} \qquad \text{per } n \to +\infty,$$

e quindi non esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{\sqrt{n^2+4n}-n-3\sqrt{n}} =: \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

perché

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = -\frac{1}{9},$$

mentre

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{9}.$$

Avendo trovato due sottosuccessioni convergenti a limiti diversi, concludiamo che il limite non esiste. Se invece $\alpha > 1/2$, allora dalla prima disugaglianza in (7.10.3) si ha che

$$\frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{9} - \frac{1}{3\sqrt{n}} < \frac{\left[\frac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}}.$$

Il membro di sinistra tende a $+\infty$ perché l'esponente $\alpha - 1/2$ è positivo, quindi per il teorema dei carabinieri si trova che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\dfrac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}} = +\infty.$$

Ragionando come nel caso in cui $\alpha = 1/2$ e passando alle sottosuccessioni di indici pari e dispari, si può concludere che anche per $\alpha > 1/2$ il limite non esiste.
L'ultimo caso da esaminare è quello in cui $0 < \alpha < 1/2$. Per la seconda disuguaglianza in (7.10.3),

$$0 \le \frac{\left[\dfrac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}} \le \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{9} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Essendo $\alpha < 1/2$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}{9} = 0,$$

da cui segue, per il teorema dei carabinieri, che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\dfrac{n^\alpha}{3}\right]}{3\sqrt{n}} = 0.$$

Allora esiste

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \frac{\left[\dfrac{n^\alpha}{3}\right]}{-3\sqrt{n}} = 0$$

in quanto prodotto di una successione limitata per una convergente a 0.
In conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n \left[\dfrac{n^\alpha}{3}\right]}{\sqrt{n^2+4n} - n - 3\sqrt{n}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < \frac{1}{2} \\ \nexists & \text{se } \alpha \ge \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$\square$

Esercizio 7.10.66 (Prova scritta 3-6-2019). Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha n} \left(\log(n^n + n^{n-1}) - \log(n^n)\right)^n \arctan \frac{2n^2 n!}{n^n}.$$

[Sugg.: Può essere utile: $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ (formula di Stirling)]
[R. 0 se $\alpha < 1$, $+\infty$ se $\alpha \ge 1$.]

SOL. ES. 7.10.66. Poniamo

$$a_n := \frac{2n^2 n!}{n^n}$$

e studiamone la convergenza con il criterio del rapporto. Per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^2(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2n^2 n!} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \cdot \frac{1}{e} < 1,$$

per cui, dal criterio del rapporto, segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2 n!}{n^n} = 0,$$

e quindi

$$\arctan \frac{2n^2 n!}{n^n} \sim \frac{2n^2 n!}{n^n} \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Inoltre

$$\log(n^n + n^{n-1}) - \log(n^n) = \log\left(\frac{n^n + n^{n-1}}{n^n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha n} \left(\log(n^n + n^{n-1}) - \log(n^n)\right)^n \arctan \frac{2n^2 n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha n} \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n \frac{2n^2 n!}{n^n}.$$

Sia ora

$$b_n := n^{\alpha n} \left(\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n \frac{2n^2 n!}{n^n}.$$

Studiamo la convergenza di tale successione con il criterio della radice n-esima (osserviamo che $b_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).
Ricordando che $\log(1+y) \sim y$ per $y \to 0$ e utilizzando la formula di Stirling,

$$\sqrt[n]{b_n} = n^\alpha \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{\sqrt[n]{2n^2 n!}}{n} \sim n^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{2n^2 n!} \sim n^{\alpha-2} \cdot \sqrt[n]{2n^2} \cdot \sqrt[n]{n!} \sim n^{\alpha-2} \cdot 1 \cdot \frac{n}{e} \left(\sqrt{2\pi n}\right)^{\frac{1}{n}} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e} \cdot 1.$$

Pertanto, segue che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ e^{-1} < 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Per il criterio della radice,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha n}\left(\log(n^n+n^{n-1})-\log(n^n)\right)^n \arctan\frac{2n^2 n!}{n^n}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>1\\ 0 & \text{se } \alpha\le 1.\end{cases}$$

□

Esercizio 7.10.67 (Da prova scritta CdL Matematica 1-7-2019). Calcolare, se esiste, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(7^n-8^{n-2})n!}{n^{n-1}-n^{n-2}}\right).$$

SOL. ES. 7.10.67. Abbiamo che

$$7^n=o(8^{n-2})\qquad \text{e}\qquad n^{n-2}=o(n^{n-1})\qquad \text{per } n\to+\infty,$$

quindi

$$\frac{(7^n-8^{n-2})n!}{n^{n-1}-n^{n-2}}\sim\frac{-8^{n-2}n!}{n^{n-1}}\qquad \text{per } n\to+\infty.$$

Studiamo il limite di questa quantità utilizzando il criterio del rapporto: poniamo

$$b_n:=\frac{8^{n-2}n!}{n^{n-1}}>0\qquad \text{per ogni } n\in\mathbb{N}.$$

Allora

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{8^{n-1}(n+1)!}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^{n-1}}{8^{n-2}n!}=\frac{8^{n-1}}{8^{n-2}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=8\frac{n+1}{n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{8}{e}>1\qquad \text{per } n\to+\infty,$$

pertanto, per il criterio del rapporto,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-8^{n-2}n!}{n^{n-1}}=-\infty.$$

Ora, se $\alpha<0$, allora $n^\alpha\to 0$ per $n\to+\infty$ e $\left(\sin\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\sin\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)=0,$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(7^n-8^{n-2})n!}{n^{n-1}-n^{n-2}}\right)=0-\infty=-\infty.$$

Supponiamo ora $\alpha=0$. In tal caso,

$$\left(n^\alpha\sin\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sin\left(\frac{n+1}{n}\pi\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

è una successione limitata, quindi trascurabile rispetto a $\left(\dfrac{-8^{n-2}n!}{n^{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, che è divergente a $-\infty$.
Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(7^n-8^{n-2})n!}{n^{n-1}-n^{n-2}}\right)=-\infty\qquad\text{per }\alpha\le 0.$$

Rimane da studiare il caso $\alpha>0$.
Osserviamo innanzitutto che

$$\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{n}\right)=\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+\cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sim-\frac{\pi}{n}\qquad\text{per }n\to+\infty,$$

dunque

$$n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)\sim-\pi n^{\alpha-1}\qquad\text{per }n\to+\infty,$$

e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}-\pi n^{\alpha-1}=\begin{cases}0 & \text{se }0<\alpha<1\\ -\pi & \text{se }\alpha=1\\ -\infty & \text{se }\alpha>1.\end{cases}$$

Pertanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(7^n-8^{n-2})n!}{n^{n-1}-n^{n-2}}\right)=\begin{cases}0-\infty=-\infty & \text{se }0<\alpha<1\\ -\pi-\infty=-\infty & \text{se }\alpha=1\\ -\infty-\infty=-\infty & \text{se }\alpha>1.\end{cases}$$

In conclusione,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^\alpha\sin\left(\pi\frac{n+1}{n}\right)+\frac{(7^n-8^{n-2})n!}{n^{n-1}-n^{n-2}}\right)=-\infty\qquad\text{per ogni }\alpha\in\mathbb{R}.$$

$\square$

Esercizio 7.10.68 (Prova scritta 15-2-2021). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{3n/2}+e^{n^2}}{(3n)!-e^{2n^2}}$$

SOLUZIONE Es. 7.10.68
NUMERATORE:
Criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{n^{3n/2}}{e^{n^2}}}=\frac{n^{3/2}}{e^n}\to 0.$$

Dunque
$$n^{3n/2} = o(e^{n^2}).$$
Allora
$$-n^{3n/2} + e^{n^2} \sim e^{n^2}.$$
DENOMINATORE

Criterio del rapporto:
$$\begin{aligned}\frac{(3(n+1))!}{e^{2(n+1)^2}}\frac{e^{2n^2}}{(3n)!} &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{e^{2\left((n+1)^2-n^2\right)}}\\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{e^{2(2n+1)}}.\end{aligned}$$
Dato che
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{e^{2(2n+1)}} = 0$$
allora, per il criterio del rapporto,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n)!}{e^{2n^2}} = 0.$$
Allora
$$(3n)! = o(e^{2n^2}) \qquad \text{per } n \to +\infty,$$
da cui
$$(3n)! - e^{2n^2} \sim -e^{2n^2}.$$
RIASSUMENDO:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{3n/2}+e^{n^2}}{(3n)!-e^{2n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2}}{(3n)!}.$$
Criterio del rapporto:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)^2}}{(3(n+1))!}\frac{(3n)!}{e^{n^2}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)^2-n^2}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n+1}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = +\infty.\end{aligned}$$
Pertanto
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2}}{(3n)!} = +\infty.$$
CONCLUSIONE:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^{3n/2}+e^{n^2}}{(3n)!-e^{2n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n^2}}{-e^{2n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{e^{n^2}} = 0.$$

Esercizio 7.10.69 (Prova scritta 25-1-2021). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+4n}-n\right]^n$$

N.B.: $[x]$ =parte intera di x.

SOLUZIONE Es. 7.10.69:

$$\sqrt{n^2+4n}-n=\frac{n^2+4n-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}.$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1\right)}=2$$

ed essendo

$$\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}<\frac{4n}{\sqrt{n^2}}=2,$$

allora

$$\exists\bar{n}\in\mathbb{N}:1<\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}<2\qquad\forall n\in\mathbb{N},n>\bar{n}.$$

Quindi

$$\exists\bar{n}\in\mathbb{N}:\left[\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}\right]=1\qquad\forall n\in\mathbb{N},n>\bar{n}.$$

Conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+4n}-n\right]^n=\lim_{n\to+\infty}1^n=1.$$

Esercizio 7.10.70 (Prova scritta 28-6-2021). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2k+1}+n\big(\log(n!)+\sin(n)\big)}{n^2+\log(n^3)}$$

SOLUZIONE 7.10.70:

Il denominatore è asintotico a n^2, quindi si tratta di studiare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+k}{2k+1}+n\big(\log(n!)+\sin(n)\big)}{n^2}$$

Per il Teorema di Cesaro (Hopital discreto)

Se (a_n) e (b_n) sono successioni, con (b_n) crescente e $\lim_n b_n=+\infty$ allora

$$\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\ell\Rightarrow\exists\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\ell.$$

Si pongano

$$b_n^{(1)} := n^2 \Rightarrow b_n^{(1)} - b_{n-1}^{(1)} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1.$$

e

$$a_n^{(1)} := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2k+1} \Rightarrow a_n^{(1)} - a_{n-1}^{(1)} = \frac{n^2+n}{2n+1},$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{(1)} - a_{n-1}^{(1)}}{b_n^{(1)} - b_{n-1}^{(1)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+n}{2n+1}}{2n-1} = \frac{n^2+n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{4}$$

da cui, per il teorema ricordato sopra,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2k+1}}{n^2} = \frac{1}{4}.$$

Studiamo ora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\log(n!)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n}$$

Si ponga

$$a_n^{(2)} := \log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log(k) \Rightarrow a_n^{(2)} - a_{n-1}^{(2)} = \log(n).$$

Quindi, posto

$$b_n^{(2)} := n \Rightarrow b_n^{(2)} - b_{n-1}^{(2)} = 1$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n^{(2)} - a_{n-1}^{(2)}}{b_n^{(2)} - b_{n-1}^{(2)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n)}{1} = +\infty$$

da cui, per il teorema ricordato sopra,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n!)}{n} = +\infty.$$

Resta da studiare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sin(n)}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(n)$$

che converge a 0 essendo prodotto di una successione limitata $((\sin n))$ per una infinitesima $((\frac{1}{n}))$.
Conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2k+1} + n\left(\log(n!) + \sin(n)\right)}{n^2} = +\infty.$$

Esercizio 7.10.71 (Prova scritta 7-9-2021). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} n^n \left\{(n^2-1)^{1/n} - (n-1)^{1/n}\right\}^n.$$

SOLUZIONE Es. 7.10.71:
Applichiamo il criterio della radice. Calcoliamo quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left\{(n^2-1)^{1/n}-(n-1)^{1/n}\right\}.$$

$$(n^2-1)^{1/n}-(n-1)^{1/n}=(n-1)^{1/n}(n+1)^{1/n}-(n-1)^{1/n}=(n-1)^{1/n}\left\{(n+1)^{1/n}-1\right\}.$$

Si ha
$$\lim_{n\to+\infty}(n-1)^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{\log(n-1)}{n}}=1$$
quindi
$$(n-1)^{1/n}\sim 1.$$
Vale che
$$(n+1)^{1/n}-1=e^{\frac{\log(n+1)}{n}}-1\sim\frac{\log(n+1)}{n}$$
in quanto $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)}{n}=0$. Dunque
$$(n-1)^{1/n}\left\{(n+1)^{1/n}-1\right\}\sim 1\cdot\frac{\log(n+1)}{n}.$$
Pertanto
$$\lim_{n\to+\infty} n\left\{(n^2-1)^{1/n}-(n-1)^{1/n}\right\}=\lim_{n\to+\infty} n\frac{\log(n+1)}{n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\log(n+1)=+\infty.$$
Allora, per il criterio della radice, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n\left\{(n^2-1)^{1/n}-(n-1)^{1/n}\right\}=+\infty.$$

Esercizio 7.10.72 (Prova scritta 8-6-2021). Calcolare, se esiste,
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}\right)^n$$
al variare di $k\in\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}=\{0,1,2\cdots\}$).

SOLUZIONE ES. 7.10.72. Se $k=0$ è:
$$\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}=\frac{n^0}{\binom{n}{0}}=\frac{1}{1}$$
pertanto
$$\text{se } k=0 \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}\right)^n\to_{n\to+\infty}1^n=1.$$

Per gli altri k usiamo il criterio della radice n-esima.
Si ha

$$(n-k)^k = n^k + \text{potenze di } n \text{ di grado inferiore a } k.$$

Analogamente

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n^k + \text{potenze di } n \text{ di grado inferiore a } k}{k!}.$$

Quindi

$$\sqrt[n]{\left(\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}\right)^n} = \frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}} = \frac{n^k + \text{potenze di } n \text{ di grado inferiore a } k}{\frac{n^k + \text{potenze di } n \text{ di grado inferiore a } k}{k!}} \sim \frac{n^k}{\frac{n^k}{k!}} = k! \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Se $k = 1$ non abbiamo risposta, ma se $k \geq 2$ si ha $k! > 1$ quindi, per il criterio della radice n-esima

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}\right)^n = +\infty \quad \forall k \geq 2.$$

Studiamo il caso $k = 1$.

Se $k = 1$ è:

$$\left(\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}\right)^n = \left(\frac{(n-1)^1}{\binom{n}{1}}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e}.$$

Conclusione:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n-k)^k}{\binom{n}{k}}\right)^n = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{se } k=0 \\ \frac{1}{e} & \text{se } k=1 \\ +\infty & \text{se } k \geq 2. \end{array}\right.$$

□

Esercizio 7.10.73 (Prova scritta 16-1-2023). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n)^2\,(n+10)! + n^{2n}}{(2n)!}.$$

SOLUZIONE ES. 7.10.73. Studiamo chi comanda tra $(n^2+n)^2(n+10)!$ e n^{2n}.
I modo:
Si ha

$$\frac{n^{2n}}{(n^2+n)^2(n+10)!} \geq \frac{n^n}{n!}\,\frac{n^n}{(n^2+n)^2(n+10)\cdot(n+9)\cdot\ldots\cdot(n+1)}.$$

Essendo, per la gerarchia degli infiniti,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

ed essendo

$$(n^2+n)^2 \sim n^4, \quad (n+10)\cdot\ldots\cdot(n+1) \sim n^{10},$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n^2+n)^2(n+10)\cdot(n+9)\ldots\cdot(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n^{14}} = \lim_{n\to+\infty} n^{n-14} = +\infty,$$

otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} \frac{n^n}{(n^2+n)^2(n+10)\cdot\ldots\cdot(n+1)} = +\infty.$$

Allora, per il criterio del confronto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(n^2+n)^2(n+10)!} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n)^2(n+10)!+n^{2n}}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

II modo:
Col criterio del rapporto, posto $a_n = \frac{n^{2n}}{(n^2+n)^2(n+10)!}$, si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}} \cdot \frac{(n^2+n)^2(n+10)!}{((n+1)^2+n+1)^2(n+11)!}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1)^2 \cdot \frac{(n^2+n)^2}{((n+1)^2+n+1)^2(n+11)}.$$

Essendo

$$(n+1)^2 \cdot \frac{(n^2+n)^2}{((n+1)^2+n+1)^2(n+11)} \sim n^2 \cdot \frac{n^4}{n^4\cdot n} = n$$

allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^2 n.$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^2 n ='' e^2 \cdot +\infty'' = +\infty.$$

Abbiamo così dimostrato (in due modi) che $(n^2+n)^2(n+10)! = o(n^{2n})$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n)^2\,(n+10)!+n^{2n}}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}$$

Quest'ultimo limite lo calcoliamo con il criterio del rapporto. Sia $a_n := \frac{n^{2n}}{(2n)!}$ Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} \cdot (n+1)^2 \cdot \frac{(2n)!}{(2(n+1))!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \cdot n^2 \cdot \frac{1}{4n^2} \\
&= e^2 \cdot \frac{1}{4} > 1.
\end{aligned}
$$

Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} = +\infty.$$

□

Esercizio 7.10.74 (Prova scritta 7-2-2023). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n - (n!)^2}{n^n \cdot 2^{n+1} + n \cdot n!}.$$

SOLUZIONE ES. 7.10.74. Studiamo chi comanda tra $(n+1)^n$ e $(n!)^2$. Calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{(n!)^2}$$

con il criterio del rapporto. Sia $a_n := \frac{(n+1)^n}{(n!)^2}$ Allora

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Dato che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{(n+1)^2} = 0$$

otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

da cui
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n}{(n!)^2}=0.$$
Si ha
$$(n+1)^n-(n!)^2\sim-(n!)^2.$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n-(n!)^2}{n^n\cdot 2^{n+1}+n\cdot n!}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{(n!)^2}{n^n\cdot 2^{n+1}+n\cdot n!}$$
Studiamo chi comanda a denominatore, calcoliamo cioè
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n\cdot 2^{n+1}}{n\cdot n!}.$$
Essendo
$$\frac{n^n\cdot 2^{n+1}}{n\cdot n!}=\frac{n^n}{n!}\cdot\frac{2^{n+1}}{n}$$
ed essendo
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$$
e
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}}{n}=+\infty$$
per le gerarchie degli infiniti, deduciamo
$$n^n\cdot 2^{n+1}+n\cdot n!\sim n^n\cdot 2^{n+1}.$$
Quindi
$$\lim_{n\to+\infty}-\frac{(n!)^2}{n^n\cdot 2^{n+1}+n\cdot n!}=\lim_{n\to+\infty}-\frac{(n!)^2}{n^n\cdot 2^{n+1}}$$
Calcoliamo quest'ultimo limite col criterio del rapporto.
Sia $a_n:=\frac{(n!)^2}{n^n\cdot 2^{n+1}}$ Allora
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(n+1)^{n+1}\cdot 2^{n+2}}\cdot\frac{n^n\cdot 2^{n+1}}{(n!)^2}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{n+1}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot 2.$$
Essendo
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$
deduciamo
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty.$$

Quindi a_n diverge a $+\infty$, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{(n!)^2}{n^n \cdot 2^{n+1}} = -\infty.$$

$\square$

Esercizio 7.10.75 (Prova scritta 6-6-2023). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n-[\frac{n}{2}]\right)^n n!}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}(n+1)^n}$$

dove $[x]$ denota la parte intera di x.

SOLUZIONE ES. 7.10.75. Posto $a_n = \dfrac{\left(n-[\frac{n}{2}]\right)^n n!}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}(n+1)^n}$ che è positivo, applichiamo il criterio della radice.

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n} &= \frac{\left(n-[\frac{n}{2}]\right)\sqrt[n]{n!}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}(n+1)}\\ &= \frac{\left(n-[\frac{n}{2}]\right)\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}\frac{n+1}{n}}.\end{aligned}$$

Osservato che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

e che

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$$

deduciamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n-[\frac{n}{2}]\right)\frac{1}{e}}{e^2}.$$

tale limite è $+\infty$ in quanto

$$n - [\frac{n}{2}] \geq n - (\frac{n}{2} + 1) = \frac{n}{2} - 1 \to_{n\to\infty} = +\infty.$$

Allora, per il criterio della radice si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

□

Esercizio 7.10.76 (Prova scritta 26-6-2023). Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^4+n^3)^n}{n^{2n}(n+2)!(2^n n! - n^n)}.$$

SOLUZIONE ES. 7.10.76. Studiamo chi comanda tra $2^n n!$ e n^n.
Calcoliamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

con il criterio della radice. Sia $a_n := \frac{2^n n!}{n^n}$ Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{2}{e} < 1,$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0$$

ossia

$$2^n n! = o(n^n).$$

Pertanto il limite da studiare coincide con

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{(n^4+n^3)^n}{n^{2n}(n+2)!n^n}$$

ossia

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} -\frac{(n^4+n^3)^n}{n^{3n}(n+2)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n^{4n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3n}(n+2)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} -\frac{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{(n+2)!}.
\end{aligned}$$

Ricordando che

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

abbiamo da calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{n^n e}{(n+2)!}.$$
Usando il criterio del rapporto, posto
$$b_n := \frac{n^n}{(n+2)!}$$
abbiamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{n^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n+3} = e > 1,$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty.$$
Pertanto
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{(n+2)!} = -\infty.$$
□

Esercizio 7.10.77 (Prova scritta 17-6-2023). Calcolare
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n \cdot n!}{2^n \cdot (n+2)! - n^2(2n)!}.$$

SOLUZIONE ES. 7.10.77. Studiamo chi comanda tra $2^n \cdot (n+2)!$ e $n^2(2n)!$.
Calcoliamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(n+2)!}{n^2(2n)!}$$
con il criterio del rapporto.
Sia $a_n := \frac{2^n(n+2)!}{n^2(2n)!}$. Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+3)!}{(n+1)^2(2(n+1))!} \frac{n^2(2n)!}{2^n(n+2)!}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+3)}{(2n+2)(2n+1)} = 0.$$
Dunque, per il criterio del rapporto, otteniamo
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(n+2)!}{n^2(2n)!} = 0.$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n \cdot n!}{2^n \cdot (n+2)! - n^2(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n^n \cdot n!}{n^2(2n)!}.$$

Calcoliamo quest'ultimo limite col criterio del rapporto.
Sia $a_n := \frac{n^n \cdot n!}{n^2(2n)!}$ Allora

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^2(2n+2)!}\frac{n^2(2n)!}{n^n\cdot n!}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n+1)^2n^2}{(n+1)^2(2n+2)(2n+1)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{n^2}{(2n)\cdot(2n)}.\end{aligned}$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

deduciamo

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{4} < 1.$$

Quindi a_n converge a 0, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{n^n\cdot n!}{n^2(2n)!} = 0.$$

□

Esercizio 7.10.78. Trovare una successione (a_n) a termini positivi tale che

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$$

e

$$\nexists \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

SOL. ES. 7.10.78. Si consideri (a_n), con $a_n = 2+(-1)^n$.
Si ha

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2+(-1)^n}{2+(-1)^{n-1}} = 1+\frac{(-1)^n-(-1)^{n-1}}{2+(-1)^{n-1}} = \begin{cases} 1+\frac{1-(-1)}{2-1} = 1+2 = 3 & \text{se } n \text{ è pari}\\ 1+\frac{-1-1}{2+1} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} & \text{se } n \text{ è dispari,}\end{cases}$$

dunque non esiste il limite della successione $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$.
D'altra parte,

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n} = 1.$$

Infatti

$$1 = \sqrt[n]{2-1} \le \sqrt[n]{2+(-1)^n} \le \sqrt[n]{2+1} = \sqrt[n]{3}.$$

Essendo, per il Lemma 6.3.41

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3} = 1$$

si ha la tesi dal Teorema dei carabinieri. □

Esercizio 7.10.79 (Da autovalutazione CdL Matematica 7-12-2018). Determinare il massimo e il minimo limite di (a_n), dove

$$a_n := \sqrt{n^2 + (-1)^n n} - n.$$

SOL. ES. 7.10.79. I MODO:
Consideriamo le sottosuccessioni (a_{2n}) e (a_{2n+1}).
Iniziamo studiando (a_{2n}).

$$a_{2n} = \sqrt{(2n)^2 + (-1)^{2n} 2n} - 2n = \sqrt{(2n)^2 + 2n} - 2n$$

e moltiplicando e dividendo per $\sqrt{(2n)^2 + 2n} + 2n$ otteniamo

$$a_{2n} = \frac{(2n)^2 + 2n - (2n)^2}{\sqrt{(2n)^2 + 2n} + 2n} = \frac{2n}{\sqrt{(2n)^2 + 2n} + 2n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2n}} + 1} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2}.$$

Studiamo ora (a_{2n+1}).

$$a_{2n+1} = \sqrt{(2n+1)^2 + (-1)^{2n+1}(2n+1)} - (2n+1) = \sqrt{(2n+1)^2 - (2n+1)} - (2n+1)$$

e moltiplicando e dividendo per $\sqrt{(2n+1)^2 - (2n+1)} + (2n+1)$ otteniamo

$$a_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2 - (2n+1) - (2n+1)^2}{\sqrt{(2n+1)^2 - (2n+1)} + (2n+1)} = -\frac{2n+1}{\sqrt{(2n+1)^2 - (2n+1)} + (2n+1)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n+1}} + 1} \to_{n\to+\infty} -\frac{1}{2}.$$

Basta ciò per concludere che

$$\min\lim a_n = -\frac{1}{2} \qquad \max\lim a_n = \frac{1}{2}.$$

Infatti, da quanto dimostrato segue

$$\min\lim a_n \le -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \le \max\lim a_n,$$

ma è facile dimostrare che non può essere $\min\lim a_n < -\frac{1}{2}$ né $\frac{1}{2} < \max\lim a_n$.
Infatti, supponiamo che sia, ad esempio, $\min\lim a_n < -\frac{1}{2}$. Allora dovrebbe esistere una sottosuccessione (a_{k_n}) di (a_n), tale che

$$\lim a_{k_n} = \min\lim a_n.$$

D'altra parte (a_{k_n}) avrà una infinità di indici k_n che sono numeri pari o una infinità di indici che sono dispari. Quindi da (a_{k_n}) si potrà estrarre una sottosuccessione che sarà anche sottosuccessione di (a_{2n}) (nel primo caso) oppure di (a_{2n+1}) (nel secondo caso). Questa sottosuccessione dovrebbe quindi avere sia limite $\min\lim a_n$ che limite $\frac{1}{2}$ (nel primo caso) o $-\frac{1}{2}$ (nel secondo caso). Ciò è assurdo, avendo supposto $\min\lim a_n < -\frac{1}{2}$.

II MODO:
Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^2+(-1)^n n}+n$ si ha:

$$a_n = \sqrt{n^2+(-1)^n n} - n = \frac{n^2+(-1)^n n - n^2}{\sqrt{n^2+(-1)^n n}+n} = \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+(-1)^n n}+n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+(-1)^n \frac{1}{n}}+1}.$$

Si ha quindi

$$-\frac{1}{\sqrt{1+(-1)^n \frac{1}{n}}+1} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^n \frac{1}{n}}+1}. \tag{7.10.4}$$

Dato che $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = 0$, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+(-1)^n \frac{1}{n}}+1\right) = 2. \tag{7.10.5}$$

Da (7.10.4) e (7.10.5) segue che

$$-\frac{1}{2} \le \min\lim a_n \le \max\lim a_n \le \frac{1}{2}. \tag{7.10.6}$$

Osserviamo che

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2n}}+1} \to \frac{1}{2},$$

quindi usando (7.10.6) abbiamo

$$\max\lim a_n = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo inoltre che

$$a_{2n+1} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{2n+1}}+1} \to -\frac{1}{2},$$

quindi usando (7.10.6) abbiamo

$$\min\lim a_n = -\frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 7.10.80 (Da autovalutazione CdL Matematica 1-12-2022). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n+(n+1)(n+2)!}{3^n n!}.$$

SOL. ES. 7.10.80. **I modo:**

$$\frac{n^n+(n+1)(n+2)!}{3^n n!} = \frac{n^n}{3^n n!} + \frac{(n+1)(n+2)!}{3^n n!}.$$

Consideriamo il secondo termine:

$$\frac{(n+1)(n+2)!}{3^n n!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+1)n!}{3^n n!} = \frac{(n+1)(n+2)(n+1)}{3^n} \sim \frac{n^3}{3^n}.$$

Quindi, per la gerarchia degli infiniti.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)!}{3^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$$

Ne segue, per l'algebra dei limiti che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n + (n+1)(n+2)!}{3^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} + \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)!}{3^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} + 0.$$

Per calcolare quest'ultimo limite, usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{e}{3} < 1.$$

Ne risulta che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} = 0.$$

II modo:

Dimostriamo che $(n+1)(n+2)!$ è trascurabile rispetto a n^n. Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+3)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(n+1)(n+2)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 1 \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Allora, dal criterio del rapporto,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)!}{n^n} = 0.$$

Ne segue che

$$n^n + (n+1)(n+2)! \sim n^n,$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n + (n+1)(n+2)!}{3^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!}.$$

Per concludere, usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{e}{3} < 1.$$

Ne risulta che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} = 0.$$

$\square$

7.11. Esercizi sui limiti di funzione

Esercizio 7.11.1. Studiare al variare di $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^n \sin(x-3)}{|x-3|}.$$

Sol:

Per il cambiamento di variabile, il Teorema 7.8.27 e usando il principio di sostituzione con gli asintotici,

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^n \sin(x-3)}{|x-3|} \overset{y=x-3}{=} \lim_{y\to 0} \frac{y^n \sin(y)}{|y|} = \lim_{y\to 0} \frac{y^n y}{|y|}.$$

Se $n = 0$ si ha

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^n y}{|y|} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{|y|}$$

e tale limite non esiste, in quanto

$$\frac{y}{|y|} = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

per cui

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{y}{|y|} = \lim_{y\to 0^+} 1 = 1, \qquad \lim_{y\to 0^-} \frac{y}{|y|} = \lim_{y\to 0^-} -1 = -1.$$

Se $n \geq 1$ invece il limite esiste, in quanto

$$\lim_{y\to 0} y^n = 0 \qquad \frac{y}{|y|} \text{ funzione limitata}$$

quindi, per il Teorema

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^n y}{|y|} = 0.$$

Esercizio 7.11.2. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1+x} = 1.$$

Sol:

$$\lim_{x\to 0} (1+x) = 1 \quad \lim_{x\to 0} e^x = 1,$$

quindi la tesi segue dal Teorema dell'algebra dei limiti.

Esercizio 7.11.3. Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \alpha \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sol:

Se $\alpha = 0$ allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Sia $\alpha \neq 0$.
Se $y = \alpha x$, allora $y \to 0$ per $x \to 0$ e si ha, usando il Teorema 7.8.16

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{y}-1}{\frac{y}{\alpha}} \overset{\text{Teorema 7.8.16}}{=} \alpha.$$

Esercizio 7.11.4. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti (NB: Tra parentesi graffe i valori a cui far tendere la x e tra parentesi quadre i risultati; es: $f(x)\,\{+\infty,-\infty\}\,[-\infty,0]$ indica che va calcolato il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ (con risultato $-\infty$) e per $x \to -\infty$, con risultato 0)

$$x^4 - x^2 \quad \{+\infty,-\infty\} \quad [+\infty,+\infty], \qquad x^3 - x^2 \quad \{-\infty,+\infty\} \quad [-\infty,+\infty],$$

$$\frac{x^5+3x^2+x}{x^6-1} \quad \{+\infty,0,-\infty\} \quad [0,0,0], \qquad \frac{|x+2|}{x^2-4} \quad \{-2\} \quad [\nexists],$$

$$\frac{(x+2)^2}{|x^2-4|} \quad \{-2\} \quad [0], \qquad \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \quad \{+\infty\} \quad [1],$$

$$\frac{x^2-4}{x+2} \quad \{-2\} \quad [-4], \qquad \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \quad \{1\} \quad [-1],$$

$$\frac{x\sqrt[3]{x}+x^2}{x^4-x} \quad \{0^+\} \quad [0],$$

$$\frac{x+\cos x}{x-\sin x} \quad \{+\infty\} \quad [1], \qquad x^2 + \sin x \quad \{+\infty\} \quad [+\infty].$$

Esercizio 7.11.5. Calcolare

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{|x|+1} + x.$$

SOL. ES. 7.11.5. Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{|x|+1} + x = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 + x|x| + x}{|x|+1}.$$

Ora per il Teorema del limite sulla restrizione di $f(x)$, cioè $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)\big|_{(-\infty,0)}$, posso considerare $|x| = -x$. Allora abbiamo

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 + x|x| + x}{|x|+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - x^2 + x}{-x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x}{-x+1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-1} = +\infty.$$

□

Esercizio 7.11.6. Calcolare i seguenti limiti per $x \to 0$. Tra parentesi quadre alcuni risultati.

$$\frac{\sin x}{x^2} \quad [\nexists], \qquad \frac{\sin(2x)}{x^2} \quad [\nexists], \qquad \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} \quad [\frac{3}{2}],$$

$$\frac{\sin(2x)}{x\cos x} \quad [2], \qquad \sin x \log|x| \quad [0],$$

$$\frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x} \quad [\frac{3}{2}], \qquad \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x} \quad [-1], \quad (\log|x|)\tan x \quad [0],$$

$$\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x} \quad [2],$$

$$\frac{1}{x}\log\left(\sqrt{1+x^2}\right) \quad [0].$$

Esercizio 7.11.7. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan^3 x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos x}.$$

[R. 0]

Sol. Es. 7.11.7. Siccome $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$ allora $\tan x \sim x$, per $x \to 0$, e $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ allora $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, per $x \to 0$.
Quindi

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan(x)^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\cos x} = \lim_{x\to0} \frac{2x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Tale ultimo limite vale 0. Infatti la funzione $x \mapsto 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è prodotto della funzione limitata $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ e della funzione infinitesima $x \mapsto 2x$ per $x \to 0$. □

Esercizio 7.11.8. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to0} \frac{1+\sin^2 x-\cos x}{\cos x-1}.$$

[R. -3]

SOL. ES. 7.11.8.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin^2 x - \cos x}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x - 1} + \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}\right) = -1 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}.$$

Siccome $\sin x \sim x$ per $x \to 0$ e $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$, allora

$$-1 + \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = -1 + \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -1-2 = -3.$$

□

Esercizio 7.11.9. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_{1/2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

[R. $-\frac{1}{\log_e(2)}$]

SOL. ES. 7.11.9. Utilizziamo la proprietà dei logaritmi, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{\left(\log\frac{1}{2}\right)x}.$$

Ricordiamo che $\log(x+1) \sim x$, per $x \to 0$, da cui $\log(y) \sim y-1$, per $y \to 1$. Quindi, poiché $x+\sqrt{1+x^2} \to 1$, per $x \to 0$, allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{\left(\log\frac{1}{2}\right)x} &= \lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{1+x^2}-1}{\left(\log\frac{1}{2}\right)x}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\left(\log\frac{1}{2}\right)x} + \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\left(\log\frac{1}{2}\right)x}\right)\\ &= \frac{1}{\log\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right).\end{aligned}$$

Osserviamo che $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, per $x \to 0$, nel nostro caso abbiamo

$$(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, \qquad \text{per } x \to 0.$$

Quindi concludiamo che

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) &= \frac{1}{\log\frac{1}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}\right)\\ &= \frac{1}{\log\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\log(2)}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.11.10. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti (soluzione tra parentesi quadra)

$$\lim_{x\to 0} x+\frac{1}{x}\ [\nexists]; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x}\ [\nexists]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}\ [\nexists];$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}(\text{con } a\ge 0) \quad [a>0:\text{limite}=\tfrac{1}{\sqrt{2a}};\ a=0:\text{limite}=+\infty].$$

Esercizio 7.11.11. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x}\right)\left(\cos\frac{1}{x}\right).$$

[R.: 0]

SOL. ES. 7.11.11. Osservo che

$$|\sin\frac{1}{x}|\le 1,\quad |\cos\frac{1}{x}|\le 1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Quindi

$$0\le |x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)|\le |x|\longrightarrow 0,\quad \text{se}\quad x\to 0$$

da cui per il Teorema dei due carabinieri si ha

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

□

Esercizio 7.11.12. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^4\left((x^4+3)^{1/2}-x^2\right).$$

[R.: $+\infty$]

SOL. ES. 7.11.12.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 3x^4(\sqrt{x^4+3}-x^2) &= \lim_{x\to+\infty} 3x^4\frac{(\sqrt{x^4+3}-x^2)(\sqrt{x^4+3}+x^2)}{\sqrt{x^4+3}+x^2} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} 3x^4\cdot\frac{3}{x^2(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1)} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{9x^2}{\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1}=+\infty.\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.11.13. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2\left((x^4+3)^{1/2}-x^2\right).$$

[R.: $\frac{9}{2}$]

SOL. ES. 7.11.13.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} 3x^2(\sqrt{x^4+3}-x^2) &= \lim_{x\to+\infty} 3x^2\frac{(\sqrt{x^4+3}-x^2)(\sqrt{x^4+3}+x^2)}{\sqrt{x^4+3}+x^2} =\\ &= \lim_{x\to+\infty} 3x^2\cdot\frac{3}{x^2(\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1}\\ &== \lim_{x\to+\infty}\frac{9}{\sqrt{1+\frac{3}{x^4}}+1} = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.11.14. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2+1}\log_3 e^{-x}.$$

[R.: $-\frac{3}{\log 3}$]

Esercizio 7.11.15. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{x^3}.$$

[R.: e^{-2}]

SOL. ES. 7.11.15. Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}=1$$

siamo in presenza di una forma indeterminata $1^{+\infty}$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{x^3} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}-1\right)^{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x-2}{x^4+2x-1}\right)^{x^3} = \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x^4+2x-1}{2x-2}}\right)^{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x^4+2x-1}{2x-2}}\right)^{\frac{x^4+2x-1}{2x-2}}\right)^{x^3\cdot\frac{2x-2}{x^4+2x-1}} = \\ &= (e^{-1})^2 = e^{-2}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.11.16. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right]^{\sqrt{9x^2+3x+1}}.$$

SOL. ES. 7.11.16. Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\sqrt{\frac{1}{x}}=1$$

siamo in presenza di una forma indeterminata $1^{+\infty}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\sqrt{9x^2+3x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\sqrt{9x^2+3x+1}\log\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\right).$$

Ora, ricordando che

$$\sqrt{9x^2+3x+1}\sim 3x \qquad \text{per } x\to+\infty,$$

$$\log(y)\sim y-1 \qquad \text{per } y\to 1,$$

$$\cos(y)\sim 1-\frac{y^2}{2} \qquad \text{per } y\to 0,$$

si trova che, per $x\to+\infty$,

$$\sqrt{9x^2+3x+1}\log\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)\sim 3x\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}-1\right)\sim 3x\left(-\frac{1}{2x}\right).$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+3x+1}\log\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}-\frac{3x}{2x} = -\frac{3}{2}.$$

Quindi, per la continuità della funzione esponenziale,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^{\sqrt{9x^2+3x+1}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

□

Esercizio 7.11.17. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^4\left[\log(x^4+3)^{1/3}-\log x^{4/3}\right].$$

SOL. ES. 7.11.17. Si ha, per le proprietà dei logaritmi,

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^4(\log\sqrt[3]{x^4+3}-\log\sqrt[3]{x^4}) = \lim_{x\to+\infty} 3x^4\log\sqrt[3]{\frac{x^4+3}{x^4}} = \lim_{x\to+\infty} x^4\log\frac{x^4+3}{x^4}.$$

Dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+3}{x^4}=1$$

e che $\log(y)\sim y-1$ per $y\to 1$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} x^4\log\frac{x^4+3}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(\frac{x^4+3}{x^4}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4\cdot\frac{3}{x^4}=3.$$

□

Esercizio 7.11.18. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2+1}\log_3 e^{-x}.$$

SOL. ES. 7.11.18.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2+1}\log_3 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2+1}\cdot\frac{\log e^{-x}}{\log 3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x^2+1}\cdot\frac{-x}{\log 3} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2-x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\log 3} = -\frac{3}{\log 3}.$$

□

Esercizio 7.11.19. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}}.$$

SOL. ES. 7.11.19. La base tende a 1 e l'esponente tende a 0. Ricordiamo che "1^0" (cioè la base che non è 1, ma tende a 1, e l'esponente non è 0, ma tende a 0, non è una forma indeterminata, ma ha limite $1^0 = 1$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}} = 1.$$

Se uno non se ne accorge, può procedere come al solito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}-1\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2x-2}{x^4+2x-1}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{x^4+2x-1}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}} = \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{x^4+2x-1}{2x-2}}\right)^{\frac{x^4+2x-1}{2x-2}}\right)^{\frac{x^2+3}{x^5+2x}\cdot\frac{2x-2}{x^4+2x-1}} = \\
&= (e^{-1})^0 = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 7.11.20. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)^{\log_3 e^{-x}}.$$

SOL. ES. 7.11.20. La base tende a 1 e l'esponente tende a $-\infty$. Siamo in presenza di una forma indeterminata. Essendo

$$\log_3 e^{-x} = \frac{\log_e e^{-x}}{\log_e(3)} = \frac{-x}{\log_e(3)},$$

si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)^{\log_3 e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1+3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{-x}{\log 3}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3x+1}{x^2+1}\right)^{\frac{-x}{\log 3}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3x+1}}\right)^{\frac{-x}{\log 3}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3x+1}}\right)^{\frac{x^2+1}{3x+1}}\right)^{\frac{-x}{\log 3}\cdot\frac{3x+1}{x^2+1}} = e^{-\frac{3}{\log 3}}.$$

□

Esercizio 7.11.21. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x.$$

SOL. ES. 7.11.21.

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x}+x = \lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+2/x}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+2/x}-x} =$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x(\sqrt{1+2/x}+1)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-(\sqrt{1+2/x}+1)} = -1.$$

□

Esercizio 7.11.22. Calcolare

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\log\left(x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-2}}\right).$$

SOL. ES. 7.11.22. Non siamo in presenza di una forma indeterminata.

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} x^2-2 = 0^+,$$

e

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} x^2-1 = 2-1 = 1$$

allora

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}\frac{x^2-1}{x^2-2} = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \log\left(x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-2}}\right) = +\infty.$$

$\square$

Esercizio 7.11.23. Calcolare

$$\lim_{y\to 1} \frac{1}{1-y} - \frac{3}{1-y^3}.$$

SOL. ES. 7.11.23.

$$\lim_{y\to 1} \frac{1}{1-y} - \frac{3}{1-y^3} = \lim_{y\to 1} \frac{1}{1-y} - \frac{3}{(1-y)(1+y+y^2)} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y-2}{(1-y)(1+y+y^2)} =$$
$$= \lim_{y\to 1} \frac{(y+2)(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)} = \lim_{y\to 1} \frac{(y+2)}{-(1+y+y^2)} = -\frac{3}{3} = -1.$$

$\square$

Esercizio 7.11.24. Calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2+x-6}.$$

SOL. ES. 7.11.24.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x^2-4x+4)}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)^2}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x+3)} = 0.$$

$\square$

Esercizio 7.11.25. Calcolare

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{|x^2-4|}.$$

SOL. ES. 7.11.25. I modo:
Si ha

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{|x^2-4|} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{|x-2||x+2|}.$$

Ricordando che $x^2 = |x|^2$, segue che

$$\lim_{x\to -2} \frac{|x+2|^2}{|x-2||x+2|} = \lim_{x\to -2} \frac{|x+2|}{|x-2|} = \frac{0}{4} = 0.$$

II modo:

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{|x^2-4|} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{|x+2|\cdot|x-2|}.$$

Ora, per $x \to -2^-$, tale limite coincide con

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)^2}{-(x+2)\cdot |x-2|} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)}{-|x-2|} = 0,$$

mentre per $x \to -2^+$, il limite è uguale a

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot |x-2|} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)}{|x-2|} = 0,$$

pertanto

$$\lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{|x^2-4|} = 0.$$

$\square$

Esercizio 7.11.26. Calcolare

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (2\sin^2 x)^{1/\cos(2x)}.$$

SOL. ES. 7.11.26. Essendo $2\sin^2 x \to 1$ per $x \to \pi/4$ ed essendo $\cos(2x) \to 0$ per $x \to \pi/4$ siamo in presenza di una forma indeterminata. Si ha

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (2\sin^2 x)^{1/\cos(2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{\log(2\sin^2 x)}{\cos(2x)}\right).$$

Essendo

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

ed essendo $\log y \sim y - 1$ per $y \to 1$, allora

$$\frac{\log(2\sin^2 x)}{\cos(2x)} \sim \frac{2\sin^2 x - 1}{1 - 2\sin^2 x} = -1 \quad \text{per } x \to \pi/4.$$

Allora

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{\log(2\sin^2 x)}{\cos(2x)}\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{2\sin^2 x - 1}{1-2\sin^2 x}\right) = e^{-1}.$$

$\square$

Esercizio 7.11.27. Calcolare

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^{-2} \log^2 \frac{x}{3}.$$

SOL. ES. 7.11.27. Essendo $\log y \sim y - 1$ per $y \to 1$, allora per il principio di sostituzione con gli asintotici nel prodotto,

$$\lim_{x\to 3} (x-3)^{-2} \log^2 \frac{x}{3} = \lim_{x\to 3} (x-3)^{-2} \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 = \lim_{x\to 3} (x-3)^{-2} \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 = \lim_{x\to 3} \frac{1}{9} = \frac{1}{9}.$$

$\square$

Esercizio 7.11.28. Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\tan(2x).$$

SOL. ES. 7.11.28.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\tan(2x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\tan x)\cdot\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\tan x}{1+\tan x}=1$$

□

Esercizio 7.11.29. Calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|+1}+x.$$

SOL. ES. 7.11.29. Osserviamo che siamo in presenza di una forma indeterminata del tipo $+\infty+(-\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{|x|+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x+1}=-1.$$

□

Esercizio 7.11.30. Calcolare

$$\lim_{x\to3}(x-3)^{-2}\log\frac{x}{3}.$$

SOL. ES. 7.11.30. Essendo $\log y\sim y-1$ per $y\to1$,

$$\lim_{x\to3}(x-3)^{-2}\log\frac{x}{3}=\lim_{x\to3}(x-3)^{-2}\left(\frac{x}{3}-1\right)=\lim_{x\to3}(x-3)^{-2}\left(\frac{x-3}{3}\right)=\lim_{x\to3}\frac{1}{3(x-3)}.$$

Tale limite non esiste, perché il limite da destra è $+\infty$ e il limite da sinistra è $-\infty$. □

Esercizio 7.11.31. Calcolare

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}}\frac{\log^2 x+\log x-1}{\log^2 x-1}.$$

SOL. ES. 7.11.31. Si ha

$$\frac{\log^2 x+\log x-1}{\log^2 x-1}=\frac{\log^2 x-1}{\log^2 x-1}+\frac{\log x}{\log^2 x-1}=1+\frac{\log x}{\log^2 x-1}.$$

Allora

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^+}\frac{\log^2 x+\log x-1}{\log^2 x-1}=1+\lim_{x\to\frac{1}{e}^+}\frac{\log x}{\log^2 x-1}$$

$$1+\lim_{x\to\frac{1}{e}^+}\frac{\log x}{(\log x-1)(\log x+1)}$$

Essendo

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}} \log x = -1,$$

si ha

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}} \frac{\log x}{(\log x - 1)(\log x + 1)} = \lim_{x \to \frac{1}{e}} \frac{-1}{-2(\log x + 1)} = \lim_{x \to \frac{1}{e}} \frac{1}{\log x + 1}.$$

Si ha

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \log x = -1^+, \qquad \lim_{x \to \frac{1}{e}^-} \log x = -1^-,$$

quindi

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \frac{1}{\log x + 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} \frac{1}{\log x + 1} = -\infty.$$

Si conclude che

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} \frac{\log^2 x + \log x - 1}{\log^2 x - 1} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} \frac{\log^2 x + \log x - 1}{\log^2 x - 1} = -\infty.$$

Pertanto, non esiste

$$\lim_{x \to \frac{1}{e}} \frac{\log^2 x + \log x - 1}{\log^2 x - 1}.$$

□

Esercizio 7.11.32. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ è continua su $\mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \\ 3 - 2ax^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Esercizio 7.11.33. Determinare al variare di $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{(x-1)^2}; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{(x-1)^2}.$$

Esercizio 7.11.34. Studiare la continuità in $x=0$ delle seguenti funzioni

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{(\sin^2 x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{e^x-1} & \text{se } x<0\\[2ex] \log(1+x), & \text{se } x\ge 0\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{(1-\cos x)\cos\frac{2}{x}}{\log(1+x)} & \text{se } x>0\\[2ex] \sin x & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{(\tan x)^3\sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} & \text{se } x>0\\[2ex] \cos x & \text{se } x\le 0\end{cases}\qquad f_4(x)=\begin{cases}4\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\log(1+x^2)} & \text{se } x<0\\[2ex] 1+\sqrt{x} & \text{se } x\ge 0\end{cases}$$

$$f_5(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos^3 x}{x(e^x-1)} & \text{se } x<0\\[2ex] \log(\sqrt{x}+1) & \text{se } x\ge 0\end{cases}\qquad f_6(x)=\begin{cases}(\cos\sqrt{|x|})^{1/x} & \text{se } 0<x<1\\[2ex] 0 & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

[Sol: f_1, f_2, f_4 continue, le altre no]

Esercizio 7.11.35. Studiare la continuità in $x=-1$ di

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{x}{\sqrt{-1+x^2}}} & \text{se } x<-1\\[2ex] 0 & \text{se } x=-1\\[2ex] \dfrac{1-e^{x+1}}{\sqrt{x+1}} & \text{se } x>-1\end{cases}$$

[Sol: f è continua.]

Esercizio 7.11.36. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin(x)\tan(x)}.$$

Sol:

Dato che per il Teorema 7.8.27 e il Corollario 7.8.28

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x\qquad \text{per } x\to 0$$

allora, per la Proposizione 7.9.13,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\sin(x)\tan(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}.$$

Ora

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-\cos x}{x^2}\right) \overset{\text{Teor. 7.8.16 + Cor. 7.8.29}}{=} 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Esercizio 7.11.37. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}.$$

Sol: -4

SOL. ES. 7.11.37.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+4x}{x^5-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3x+4)}{x(x^4-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+4}{x^4-1}=-4.$$

□

Esercizio 7.11.38. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+4x)}{x}.$$

Sol: -4

SOL. ES. 7.11.38. Ricordando che $\frac{\sin y}{y}\to 1$ per $y\to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi)\cos(4x)+\cos(\pi)\sin(4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(4x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin(4x)}{4x}=-4\cdot 1=-4.$$

□

Esercizio 7.11.39. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(2-\cos x)}{\sin(x)}$$

Sol: 0.

SOL. ES. 7.11.39. Usando i limiti notevoli,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(2-\cos x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+(1-\cos x))}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x}=0.$$

□

Esercizio 7.11.40. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^3 x}-1}{x\left(\cos x-e^{x^2}\right)}.$$

Sol: $=-\frac{2}{3}$.

SOL. ES. 7.11.40.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan^3 x}-1}{x(\cos x-e^{x^2})} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^3 x}{x(\cos x-e^{x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x(\cos x-e^{x^2})} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-e^{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1+1-e^{x^2}} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cos x-1+1-e^{x^2}}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-e^{x^2}}{x^2}} = \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.11.41. Calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x}$$

Sol: 4

SOL. ES. 7.11.41.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x-3)}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x} = 4.$$

□

Esercizio 7.11.42. Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x\sin x}\right).$$

Sol: $-\frac{1}{2}$

SOL. ES. 7.11.42.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{x\sin x}-\frac{1}{x\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x\cdot x} = -\frac{1}{2}.$$

□

Esercizio 7.11.43. Calcolare

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi x)}{x-1}.$$

Sol: 2π.

SOL. ES. 7.11.43.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi x-2\pi)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi(x-1))}{x-1}.$$

Usando il cambio di variabile $y=x-1$ e ricordando che $\frac{\sin x}{x}\to 1$ per $x\to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2\pi(x-1))}{x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2\pi y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2\pi y)}{2\pi y}2\pi=1\cdot 2\pi.$$

□

Esercizio 7.11.44. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}x^\alpha+4x}{\arctan(x)+6x}$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$.
[R: $+\infty$ se $\alpha>1$, $\frac{2}{3}+\frac{e^2}{6}$ se $\alpha=1$, $\frac{2}{3}$ se $0<\alpha<1$]

SOL. ES. 7.11.44. Osservo anzitutto che la funzione arcotangente è limitata, essendo $|\arctan(x)|<\frac{\pi}{2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Inoltre $6x\longrightarrow+\infty$, per $x\to+\infty$. Quindi

$$\arctan(x)+6x\sim 6x\qquad \text{per } x\to+\infty,$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^\alpha+4x}{\arctan(x)+6x}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^\alpha+4x}{6x}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^\alpha}{6x}+\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^\alpha}{6x}=\\
&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)}{6x}+\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^\alpha}{6x}\right).
\end{aligned}$$

Il limite del primo addendo è immediato, infatti

$$\lim_{x\to+\infty}\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}6x=+\infty,$$

da cui
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)}{6x} = 0.$$
Pertanto
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)}{6x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^{\alpha}}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^{\alpha}}{6x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{6}.$$
Dal noto limite notevole:
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = e^2.$$
quindi
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{6} x^{\alpha-1}.$$
A questo punto
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^2}{6} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ \frac{e^2}{6} & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$
da cui
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right) + \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\cdot x^{\alpha} + 4x}{\arctan(x)+6x} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ \frac{e^2}{6}+\frac{2}{3} & \text{se} \quad \alpha = 1 \\ \frac{2}{3} & \text{se} \quad \alpha < 1. \end{cases}$$
□

Esercizio 7.11.45. Calcolare $\lim_{x\to 0}[\cos x]$
R. 0.

SOL. ES. 7.11.45. Essendo $0 < \cos x < 1$ in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, allora $[\cos x] = 0$ in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$, da cui
$$\lim_{x\to 0}[\cos x] = 0.$$
□

Esercizio 7.11.46. Calcolare $\lim_{x\to 1}[x + (x-[x])^2]$.
Sol: 1

Esercizio 7.11.47. Calcolare $\lim_{x\to 0}\sin(x)\log|x|$
Sol: 0

Esercizio 7.11.48. Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^4+2x-1}\right)^{x^3}.$$
Sol: e^{-2}

Esercizio 7.11.49. Studiare la continuità di $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ al variare di $a,b\in\mathbb{R}$:
$$f(x)=\begin{cases}\frac{|\log(x^2-4)|-\log 12}{x-4} & \text{se } x>4\\ ax+b & \text{se } x\le 4\end{cases}$$
[R.: f è continua se e solo se $4a+b=\frac{2}{3}$.]

SOL. ES. 7.11.49. Dobbiamo verificare che
$$\lim_{x\to4^+}\frac{|\log(x^2-4)|-\log 12}{x-4}=\lim_{x\to4^-}ax+b=f(4),$$
ossia
$$\lim_{x\to4^+}\frac{|\log(x^2-4)|-\log 12}{x-4}=\lim_{x\to4^-}ax+b=a4+b.$$
Innanzitutto osserviamo che senz'altro è
$$\lim_{x\to4^-}ax+b=4a+b=f(4)$$
in quanto $f|_{]-\infty,4]}$ è una funzione polinomiale, che è continua.
Studiamo quindi soloper quali a e b è:
$$\lim_{x\to4^+}\frac{|\log(x^2-4)|-\log 12}{x-4}=f(4),$$
ossia
$$\lim_{x\to4^+}\frac{|\log(x^2-4)|-\log 12}{x-4}=a4+b.$$
Si ha che
$$x^2-4>0\Longleftrightarrow x<-2\vee x>2$$
quindi in un intorno destro di 4, la funzione logaritmica è ben definita.
Guardiamo il segno di $\log(x^2-4)$:
$$\log(x^2-4)>0\Longleftrightarrow x^2-4>1\Leftrightarrow x^2>5\Leftrightarrow x<-\sqrt{5}\vee x>\sqrt{5}.$$
Perciò in un intorno destro di 4, $\log(x^2-4)>0$.
Allora si ha
$$\lim_{x\to4^+}\frac{|\log(x^2-4)|-\log 12}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{\log(x^2-4)-\log 12}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4^+} \frac{\log\left(\frac{x^2-4}{12}\right)}{x-4}.$$

Sia $y = \frac{x^2-4}{12}$. Si ha che $y \to 1$ per $x \to 4$, quindi possiamo usare l'informazione $\log y \sim y-1$ per $y \to 1$. Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4^+} \frac{\log\left(\frac{x^2-4}{12}\right)}{x-4} &= \lim_{x\to 4^+} \frac{\frac{x^2-4}{12}-1}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-4-12}{12(x-4)} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16}{12(x-4)} \\
&= \lim_{x\to 4^+} \frac{(x+4)(x-4)}{12(x-4)} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Perciò la funzione f è continua in 4 se e solo se a e b soddisfano $4a+b=\frac{2}{3}$. □

Esercizio 7.11.50. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la continuità di f in 0, con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{|x-x^2|}\sqrt{|x|}}{e^{-|x|^\alpha}-1} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7.11.51. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^3+3}\right)}{\arctan(x)+6x} = 0$$

Esercizio 7.11.52 (Prova scritta 14-1-2019). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^{3y^4}-(e^{2y^2})^2}{e^{3y^4-4y^2}} \cdot \frac{y^2+2}{3y^2-2y^3}.$$

[R. $-\infty$]

Sol. Es. 7.11.52. Per $y \to +\infty$,

$$\frac{y^2+2}{3y^2-2y^3} \sim \frac{y^2}{-2y^3} = -\frac{1}{2y}.$$

Inoltre, sempre per $y \to +\infty$,

$$e^{3y^4}-(e^{2y^2})^2 = e^{3y^4}-e^{4y^2} = e^{3y^4}\left(1-e^{4y^2-3y^4}\right) \sim e^{3y^4},$$

perché $4y^2-3y^4 \sim -3y^4 \to -\infty$ per $y \to +\infty$, quindi

$$e^{4y^2-3y^4} \to 0 \qquad \text{per } y \to +\infty.$$

Pertanto
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{3y^4}-(e^{2y^2})^2}{e^{3y^4-4y^2}}\cdot\frac{y^2+2}{3y^2-2y^3}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{3y^4}}{e^{3y^4-4y^2}}\cdot\frac{1}{-2y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{4y^2}}{-2y}=-\infty$$
per le gerarchie tra infiniti.

□

Esercizio 7.11.53 (Prova scritta 4-2-2019). Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{4x}-3x\right)-\sin\left(\frac{1}{4x}\right)+\sin\left(3x\right)\right)\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{3x+1}.$$

SOL. ES. 7.11.53. Essendo $\lim_{x\to-\infty}x-1=-\infty$ si ha, per il noto limite notevole,
$$\lim_{y\to-\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}=e^{-1},$$
che implica, cambiando variabile $y=x-1$,
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}=e^{-1}.$$
Dunque,
$$\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{3x+1}=\left(\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{3x-1}{x-1}}\to\left(e^{-1}\right)^{3}=e^{-3}\qquad\text{per } x\to-\infty.$$
Inoltre, per ogni $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}&\sin\left(\frac{1}{4x}-3x\right)-\sin\left(\frac{1}{4x}\right)+\sin(3x)\\&=\sin\left(\frac{1}{4x}\right)\cos(3x)-\cos\left(\frac{1}{4x}\right)\sin(3x)-\sin\left(\frac{1}{4x}\right)+\sin(3x)\\&=\sin\left(\frac{1}{4x}\right)(\cos(3x)-1)+\sin(3x)\left(1-\cos\left(\frac{1}{4x}\right)\right).\end{aligned}$$
Ora,
$$\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{1}{4x}\right)(\cos(3x)-1)=0,$$
infatti la funzione $x\mapsto\cos(3x)-1$ è limitata e
$$\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{1}{4x}\right)=\lim_{y\to0}\sin(y)=0.$$
Allo stesso modo,
$$\lim_{x\to-\infty}\sin(3x)\left(1-\cos\left(\frac{1}{4x}\right)\right)=0,$$
dal momento che $x\mapsto\sin 3x$ è una funzione limitata e
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{4x}\right)\right)=0.$$

Allora possiamo concludere che

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{4x}-3x\right)-\sin\left(\frac{1}{4x}\right)+\sin(3x)\right)\left(1-\frac{1}{x-1}\right)^{3x+1}=0\cdot e^{-3}=0.$$

□

Esercizio 7.11.54 (Prova scritta 3-6-2019). Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^\alpha}-\sqrt{x}\right)-\frac{\sin(x+x^2)}{x^2}\right).$$

[R. $+\infty$ per ogni $\alpha<\frac{1}{2}$, $-\infty$ per ogni $\alpha\geq\frac{1}{2}$]

SOL. ES. 7.11.54. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

e che la funzione $x\mapsto\sin(x^2+x)$ è limitata, pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x^2+x)}{x^2}=0.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^\alpha}-\sqrt{x}\right)-\frac{\sin(x+x^2)}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^\alpha}-\sqrt{x}\right).$$

Studiamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(1+x)^\alpha}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha}-1\right).$$

Si ha

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha}\sim\frac{\sqrt{x}}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}\qquad\text{per } x\to+\infty,$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}=\begin{cases}+\infty & \alpha<\frac{1}{2}\\ 1 & \alpha=\frac{1}{2}\\ 0 & \alpha>\frac{1}{2},\end{cases}$$

da cui segue immediatamente che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha}-1\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha<\frac{1}{2}\\ 0 & \alpha=\frac{1}{2}\\ -1 & \alpha>\frac{1}{2},\end{cases}$$

dunque

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^{\alpha}}-1\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha<\frac{1}{2}\\ -\infty & \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Segue che

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^{\alpha}}-\sqrt{x}\right)=\begin{cases}+\frac{\pi}{2} & \alpha<\frac{1}{2}\\ -\frac{\pi}{2} & \alpha>\frac{1}{2},\end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^{\alpha}}-\sqrt{x}\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha<\frac{1}{2}\\ -\infty & \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Rimane da studiare il caso $\alpha=1/2$, che non è incluso nello studio precedente perché si presentava una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{x-\sqrt{x}\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{x^2-x(1+x)}{\sqrt{1+x}(x+\sqrt{x}\sqrt{1+x})}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{-x}{x\sqrt{1+x}+1+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{-x}{x^{\frac{3}{2}}}\right)=\\&=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\frac{-1}{\sqrt{x}}=-\infty,\end{aligned}$$

dove si è usato che $x\sqrt{1+x}+1+x\sim x^{\frac{3}{2}}$ per $x\to+\infty$ e $\arctan y\sim y$ per $y\to 0$. In conclusione,

$$\lim_{x\to+\infty}x\arctan\left(\frac{x}{(1+x)^{\alpha}}-\sqrt{x}\right)=\begin{cases}+\infty & \alpha<\frac{1}{2}\\ -\infty & \alpha\geq\frac{1}{2}.\end{cases}$$

□

Esercizio 7.11.55 (Prova scritta 1-7-2019). Calcolare al variare di $\alpha>0$:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{3x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}}}\left(\cos(e^{-x})-1\right).$$

[R. $-\infty$ per ogni $\alpha<1$, 0 per ogni $\alpha\geq 1$.]

SOL. ES. 7.11.55. Si ha $e^{-x}\to 0$ per $x\to+\infty$, quindi

$$\cos(e^{-x})-1\sim-\frac{e^{-2x}}{2}\qquad\text{per } x\to+\infty.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} e^{3x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}}}\left(\cos(e^{-x})-1\right) = \lim_{x\to+\infty} -e^{3x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}}}\cdot\frac{e^{-2x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}}}.$$

Studiamo ora il limite dell'esponente.

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right).$$

Se $\alpha\neq 1$ (nel caso $\alpha=1$, il limite è della forma $\infty\cdot 0$),

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=1-\alpha,$$

quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=\begin{cases}+\infty & \text{se } 0<\alpha<1\\ -\infty & \text{se } \alpha>1.\end{cases}$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}}}=\begin{cases}-\infty & \text{se } 0<\alpha<1\\ 0 & \text{se } \alpha>1.\end{cases}$$

Sia ora $\alpha=1$. Abbiamo

$$x-\sqrt{x^2+x^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2-(x^2+x^{\frac{3}{2}})}{x+\sqrt{x^2+x^{\frac{3}{2}}}}\sim\frac{-x^{\frac{3}{2}}}{2x}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\to-\infty \qquad \text{per } x\to+\infty.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x-\sqrt{x^2+x^{3/2}}}=0.$$

In conclusione,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x-\sqrt{\alpha^2x^2+x^{3/2}}}=\begin{cases}-\infty & \text{se } 0<\alpha<1\\ 0 & \text{se } \alpha\geq 1.\end{cases}$$

□

Esercizio 7.11.56 (Da prova scritta CdL Matematica 16-9-2019). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+n}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n}\right)^n.$$

[R. $\nexists$.]

SOL. ES. 7.11.56. Abbiamo
$$\frac{\frac{1}{n}+n}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n} = 1+\frac{\frac{1}{n}+n}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n}-1 = 1+\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-(-1)^n}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n} =: 1+b_n.$$
Notiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$
Ciò comporta che, per il noto limite notevole,
$$\lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}} = e.$$
Pertanto
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{1}{n}+n}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}(1+b_n)^n = \lim_{n\to+\infty}((1+b_n)^{\frac{1}{b_n}})^{n\cdot b_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot b_n}.$$
Ora,
$$n\cdot b_n = \frac{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-(-1)^n\right)}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n} = \frac{1-\frac{1}{n}-n(-1)^n}{\frac{1}{n^2}+n+(-1)^n} \sim \frac{1-\frac{1}{n}-n(-1)^n}{n} \qquad \text{per } n\to+\infty.$$
Ora, per n pari,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}-n(-1)^n}{n} = -1,$$
mentre per n dispari,
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{n}-n(-1)^n}{n} = 1.$$
Pertanto,
$$\lim_{n\to+\infty} e^{n\cdot b_n} = \begin{cases} e^{-1} & \text{se } n \text{ pari} \\ e & \text{se } n \text{ dispari,} \end{cases}$$
dunque il limite non esiste. □

Esercizio 7.11.57 (Da prova scritta CdL Matematica 16-9-2019). Calcolare al variare di $\alpha>0$:
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x^\alpha)\log(2+x^3)}{(e^{2\sin x}-1)\sqrt{x^{2(\alpha-1)}+x^4}}.$$
[R. $\frac{\ln 2}{2}$ se $\alpha<3$, $\frac{\ln 2}{2\sqrt{2}}$ se $\alpha=3$, 0 se $\alpha>3$.]

SOL. ES. 7.11.57. Abbiamo che
$$\log(2+x^3)\to\log 2 \qquad \text{per } x\to0^+,$$
$$\log(1+x^\alpha)\sim x^\alpha \qquad \text{per } x\to0^+,$$
$$e^{2\sin x}-1\sim 2\sin x\sim 2x \qquad \text{per } x\to0^+.$$

Inoltre, ricordando che $x \to 0^+$, consideriamo $x > 0$, quindi

$$\sqrt{x^{2(\alpha-1)} + x^4} \sim \begin{cases} \sqrt{x^4} = x^2 & \alpha > 3, \\ \sqrt{2}x^2 & \alpha = 3, \\ \sqrt{x^{2(\alpha-1)}} = x^{\alpha-1} & \alpha < 3. \end{cases}$$

Pertanto, se $\alpha > 3$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)\log(2+x^3)}{(e^{2\sin x}-1)\sqrt{x^{2(\alpha-1)}+x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log 2 \cdot x^\alpha}{2x\cdot x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log 2}{2} x^{\alpha-3} = 0.$$

Se invece $\alpha = 3$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)\log(2+x^3)}{(e^{2\sin x}-1)\sqrt{x^{2(\alpha-1)}+x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log 2 \cdot x^3}{2x\cdot \sqrt{2}x^2} = \frac{\log 2}{2\sqrt{2}}.$$

Infine, se $\alpha < 3$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)\log(2+x^3)}{(e^{2\sin x}-1)\sqrt{x^{2(\alpha-1)}+x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log 2 \cdot x^\alpha}{2x\cdot x^{\alpha-1}} = \frac{\log 2}{2}.$$

□

Esercizio 7.11.58 (Prova scritta 7-9-2021). Calcolare al variare di $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1}{e^{3x}\sin^k\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)}$$

SOLUZIONE Es. 7.11.58:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1 \sim -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)^2 \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2} \quad \text{se } x\to+\infty$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0 \Rightarrow \sin^k\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \sim \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)^k = \frac{e^{-kx}}{x^k} \quad \text{se } x\to+\infty.$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1}{e^{3x}\sin^k\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}}{e^{3x}\frac{e^{-kx}}{x^k}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\frac{x^k}{x^2}e^{(-3+k)x} \left[\begin{array}{ll} = 0 & \text{se } 0 < k < 3 \\ = -\infty & \text{se } k = 3 \\ = -\infty & \text{se } k > 3 \end{array} \right.$$

Esercizio 7.11.59 (Prova scritta 15-2-2021). Calcolare $\lim_{x\to-\infty}(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}}$

SOLUZIONE Es. 7.11.59:
I MODO:

$$(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}} = e^{\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|}} = e^{\frac{\log(1+|x|^3)}{\log|x|}}$$

Per $x<0$ si ha:

$$\frac{\log(1+|x|^3)}{\log|x|} = \frac{\log\left(|x|^3(\frac{1}{|x|^3}+1)\right)}{\log|x|}$$

$$= \frac{\log(|x|^3)+\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|} = \frac{3\log(|x|)+\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|} = 3+\frac{\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|}.$$

Tenuto conto che

$$\log(\frac{1}{|x|^3}+1) \sim \frac{1}{|x|^3} \quad \text{per } x\to-\infty$$

abbiamo

$$3+\frac{\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|} \sim 3+\frac{\frac{1}{|x|^3}}{\log|x|} = 3+\frac{\log|x|}{|x|^3} \to 3+0=3 \quad \text{per } x\to-\infty.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|}} = e^3.$$

II MODO:
Applicando l'Hopital per calcolare il limite dell'esponente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1-x^3}(-3x^2)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3}{1-x^3} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Dunque

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}} = e^3.$$

Esercizio 7.11.60 (Prova scritta 25-1-2021). Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\right).$$

SOLUZIONE Es. 7.11.60:
Dato che

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=0$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\right)=1$$

da cui

$$\log\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\right)\sim\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}-1\quad\text{per } x\to+\infty$$

Ora:

$$\cos\frac{1}{x}-1=o(\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3})\quad\text{per } x\to+\infty.$$

Infatti

$$\cos\frac{1}{x}-1\sim-\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2\quad\text{per } x\to+\infty.$$

mentre

$$\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\sim\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\sim\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{x}\quad\text{per } x\to+\infty$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2x}=0.$$

Dunque

$$\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}-1\sim\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\sim\frac{1}{x}\quad\text{per } x\to+\infty.$$

Si conlude così che

$$x\log\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\right)\sim x\frac{1}{x}=1\quad\text{per } x\to+\infty.$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty}x\log\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{x^2}{e^{-x}+x+x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}1=1.$$

Esercizio 7.11.61 (Prova scritta 28-6-2021). Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x^\alpha}\right)^x$ al variare di $\alpha>0$.

SOLUZIONE Es. 7.11.61:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x^\alpha}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1\right)^x$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1}}\right)^{x(\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1)}.$$

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1}}\right) = e$$

in quanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1\right) = 0 \qquad \forall\alpha>0.$$

Inoltre

$$x(\cos\frac{\pi}{x^\alpha}-1) \sim -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{x^\alpha}\right)^2 x = -\frac{\pi^2}{2}x^{1-2\alpha} \qquad \text{se } x\to+\infty$$

che tende, per $x\to+\infty$ a:

- $-\infty$ se $1-2\alpha>0$ (ossia $\alpha\in]0,\frac{1}{2}[$)
- $-\frac{\pi^2}{2}$ se $1-2\alpha>0$ (ossia $\alpha=\frac{1}{2}$)
- 0 se $1-2\alpha<0$ (ossia $\alpha>\frac{1}{2}$)

Conclusione:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\pi}{x^\alpha}\right)^x = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha\in]0,\frac{1}{2}[\\ e^{-\frac{\pi^2}{2}} & \text{se } \alpha=\frac{1}{2} \\ 1 & \text{se } \alpha>\frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 7.11.62 (Prova scritta 8-6-2021). Sia $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = x^{-n}\log_e(\cos(\sin(x^n))) \qquad \text{con } n\in\{\pm1\}.$$

Verificare che f è ben definita per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e calcolare $\lim_{x\to0}f(x)$ per $n=1$ e $n=-1$.

SOLUZIONE Es. 7.11.62:

L'argomento del logaritmo deve essere positivo.

Cerchiamo una stima dal basso: Sappiamo che

$$|\sin(t)|\le1, \qquad |\cos(t)|\le1.$$

Inoltre:

$$-1\in]-\frac{\pi}{2},0[\qquad \text{e} \qquad t\mapsto\cos(t) \text{ crescente e positiva in }]-\frac{\pi}{2},0[.$$

Allora

$$\forall x\in\mathbb{R},\ -\frac{\pi}{2}<-1\le\sin(x^n)\le1 \quad\Rightarrow\quad 0=\cos(-\pi/2)<\cos(-1)\le\cos(\sin(x^n)) \overset{|\cos(t)|\le1}{\le} 1. \quad (7.11.1)$$

Quindi,

$$0 = \cos(-\pi/2) < \cos(-1) \leq \cos(\sin(x^n)) \leq 1.$$

Ciò dimostra che la funzione f è ben definita per ogni $x \neq 0$.
Sia $n = 1$:
Il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log_e(\cos(\sin(x)))}{x}$$

si presenta sotto forma indeterminata: $\frac{0}{0}$ ed il limite (se esiste ed è finito) è la derivata di

$$g(x) := \log_e(\cos(\sin(x)))$$

in 0, in quanto $g(0) = 0$. La derivata di g esiste perché g è composizione di funzioni derivabili e la si può calcolare con la regola di derivazione di funzione composta:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos(\sin(x))}(-\sin(\sin(x))\cos(x) \Rightarrow g'(0) = 0.$$

Altro modo:

$$\lim_{x\to 0} \cos(\sin(x)) = 1 \Rightarrow \log(\cos(\sin(x))) \sim \cos(\sin(x)) - 1 \quad \text{per } x \to 0.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \Rightarrow \cos(\sin(x)) - 1 \sim -\frac{1}{2}(\sin(x))^2 \sim -\frac{1}{2}x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

Quindi, se $n = 1$ è :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log_e(\cos(\sin(x))) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{x^2}{x} = 0.$$

Per $n = -1$:
Da (7.11.1)

$$\cos(\sin(x^{-1})) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Essendo, da (7.11.1)

$$-1 \leq \sin(x^{-1}) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e la funzione cos pari e crescente in $[-1, 0]$ e decrescente in $[0, 1]$ allora

$$\cos(-1) \leq \cos(\sin(x^{-1})) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Abbiamo così

$$\cos(-1) \leq \cos(\sin(x^{-1})) \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che, essendo

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} < -1$$

e cos crescente in $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ allora

$$\frac{1}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) < \cos(-1) \tag{7.11.2}$$

quindi, usando anche la stretta crescenza di $\log_e$ e (7.11.1),

$$1 = \log_e(\frac{1}{2}) \overset{(7.11)}{<} \log_e(\cos(-1)) \overset{(7.11.1)}{\leq} \log_e \cos(\sin(x^n)) \overset{(7.11.1)}{\leq} \log_e 1 = 0.$$

Pertanto la funzione

$$x \mapsto \log_e \cos(\sin(x^{-1})) \qquad \text{è limitata in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Quindi, se $n = -1$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \log_e \cos(\sin(x^{-1})) = 0$$

in quanto limite del prodotto di funzione infinitesima per una limitata.

Esercizio 7.11.63 (Da autovalutazione CdL Matematica 1-12-2022). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{-x+1} - |x| \right) x^3 \tan \frac{1}{2x^2}.$$

Sol. Es. 7.11.63. Si noti che

$$\frac{x^2}{-x+1} - |x| = \frac{x^2 + x|x| - |x|}{-x+1}.$$

Dato che intendiamo calcolarne il limite per $x \to -\infty$ possiamo supporre $x < 0$. Per $x < 0$ è $|x| = -x$, da cui

$$\frac{x^2 + x|x| - |x|}{-x+1} = \frac{x^2 - x^2 + x}{-x+1} = \frac{x}{-x+1}.$$

Quindi,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{-x+1} - |x| \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x+1} = -1. \tag{7.11.3}$$

Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \tan(\frac{1}{2x^2}).$$

Posto $y = \frac{1}{x}$ si ha $y \to 0^-$ se $x \to -\infty$. Allora

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \tan(\frac{1}{2x^2}) = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y^3} \tan(\frac{y^2}{2}).$$

Essendo

$$\tan x \sim x \quad \text{per } x \to 0$$

abbiamo, per il principio di sostituzione con gli asintotici nel prodotto,

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y^3} \tan(\frac{y^2}{2}) = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{y^3} \frac{y^2}{2} = \lim_{y\to 0^-} \frac{1}{2y} = -\infty.$$

Ne deduciamo che

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x+1}-|x|\right)x^3\tan(\frac{1}{2x^2}) ='' -1\cdot(-\infty)'' = +\infty.$$

N.B.: Si noti che nel calcolare

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x+1}-|x|\right)$$

non è legittimo sostituire

$$\frac{x^2}{-x+1}$$

col suo asintotico

$$\frac{x^2}{-x}.$$

Siamo infatti in presenza di una differenza tra $\frac{x^2}{-x+1}$ e $|x|$. Tanto è vero che se valesse la uguaglianza sopra avremmo:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x+1}-|x|\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x}-|x|\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{-x}-(-x)\right) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0,$$

che sappiamo essere falso, si veda (7.11.3). □

Esercizio 7.11.64. Calcolare

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(3-2e^x)(\sqrt{2+x}-\sqrt{2+x^2})}{(e^3-e^{3\cos(2x)})(e^3-e^{3\sin(2x)})}.$$

SOL. ES. 7.11.64. Se $x\to0$ allora

$$\sin(2x)\to0$$

quindi

$$\lim_{x\to0}(e^3-e^{3\sin(2x)}) = e^3-1.$$

Allora

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(3-2e^x)(\sqrt{2+x}-\sqrt{2+x^2})}{(e^3-e^{3\cos(2x)})(e^3-e^{3\sin(2x)})} = \lim_{x\to0}\frac{\log(3-2e^x)(\sqrt{2+x}-\sqrt{2+x^2})}{(e^3-e^{3\cos(2x)})(e^3-1)}.$$

Ora moltiplico e divido per $\sqrt{2+x}+\sqrt{2+x^2}$ e ottengo

$$\lim_{x\to0}\frac{\log(3-2e^x)(\sqrt{2+x}-\sqrt{2+x^2})}{(e^3-e^{3\cos(2x)})(e^3-1)} = \lim_{x\to0}\frac{\log(3-2e^x)(2+x-(2+x^2))}{e^3(1-e^{3(\cos(2x)-1)})(e^3-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2+x^2})}.$$

A questo punto, essendo

$$\lim_{x\to0} 3-2e^x = 3-2 = 1,$$

si ha

$$\log(3-2e^x) \sim 3-2e^x-1, \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2+x^2}) = 2\sqrt{2}.$$

Allora abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(3-2e^x)(2+x-(2+x^2))}{e^3(1-e^{3(\cos(2x)-1)})(e^3-1)(\sqrt{2+x}+\sqrt{2+x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(3-2e^x-1)(x-x^2)}{e^3(1-e^{3(\cos(2x)-1)})(e^3-1)2\sqrt{2}}.$$

Osserviamo che $e^x - 1 \sim x$ e $x - x^2 \sim x$ per $x \to 0$, quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3-2e^x-1)(x-x^2)}{e^3(1-e^{3(\cos(2x)-1)})(e^3-1)(\sqrt{2}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1-e^x)\cdot x}{e^3(-3(\cos(2x)-1))(e^3-1)(\sqrt{2}+\sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(-x)\cdot x}{2\sqrt{2}e^3(3(1-\cos(2x)))(e^3-1)}.$$

Ricordando che $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, concludiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(-x)\cdot x}{2\sqrt{2}e^3(3(1-\cos(2x)))(e^3-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{2\sqrt{2}e^3 3(2x^2)(e^3-1)} =$$

$$= -\frac{1}{6\sqrt{2}(e^3-1)e^3}.$$

□

Esercizio 7.11.65. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{x}{x+2}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}.$$

SOL. ES. 7.11.65. Osservo che, se $x \to +\infty$ allora $\frac{x}{x+2} \longrightarrow 1$, e se $y \longrightarrow 1$ allora $\log y \sim y-1$. Quindi otteniamo

$$\log\left(\frac{x}{x+2}\right) \sim \frac{x}{x+2} - 1 = \frac{x-x-2}{x+2} = -\frac{2}{x+2}$$

mentre se $x \to +\infty$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0 \quad \text{allora} \quad 1-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{2}{x}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(\frac{x}{x+2}\right)}{1-\cos\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{x+2}}{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{x+2}=-1.$$

□

Esercizio 7.11.66 (Prova scritta 16-1-2023). Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{2x}-x)\log\left(\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}\right).$$

SOLUZIONE ES. 7.11.66. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}=0 \tag{7.11.4}$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}=1$$

da cui

$$\log\left(\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}\right)\sim\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}-1\quad \text{per } x\to+\infty.$$

Da (7.11.7) si ha

$$\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}-1\sim-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}\right)^2\quad \text{per } x\to+\infty.$$

Quindi

$$\log\left(\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}\right)\sim-\frac{1}{2}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)^2}{e^{2x}}\quad \text{per } x\to+\infty.$$

D'altra parte

$$(e^{2x}-x)\sim e^{2x}\quad \text{per } x\to+\infty.$$

Allora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}&(e^{2x}-x)\log\left(\cos\frac{x-\sqrt{x^2-x}}{e^x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}e^{2x}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)^2}{e^{2x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)^2\end{aligned}$$

Usando il metodo di razionalizzazione:

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)^2=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2-(x^2-x)}{x+\sqrt{x^2-x}}\right)^2$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\left(x+\sqrt{x^2-x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}.$$

□

Esercizio 7.11.67 (Prova scritta 7-2-2023). Calcolare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^\alpha-\sqrt{x})\log\left(\frac{x^2-\cos(x^2)}{x^2}\right).$$

SOLUZIONE ES. 7.11.67. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\cos(x^2)}{x^2} = 1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos(x^2)}{x^2} = 1+0 = 1,$$

allora

$$\log\left(\frac{x^2-\cos(x^2)}{x^2}\right)\sim\frac{-\cos(x^2)}{x^2} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty}(x^\alpha-\sqrt{x})\log\left(\frac{x^2-\cos(x^2)}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)\frac{x^\alpha-\sqrt{x}}{x^2}. \tag{7.11.5}$$

Si ha

$$\frac{x^\alpha-\sqrt{x}}{x^2}\begin{cases} \sim\frac{x^\alpha}{x^2} = x^{\alpha-2} & \text{se } \alpha>\frac{1}{2} \\ = 0 & \text{se } \alpha=\frac{1}{2} \\ \sim-\frac{\sqrt{x}}{x^2} = x^{-3/2} & \text{se } \alpha<\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)\frac{x^\alpha-\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)\cdot 0 = 0 \quad \text{se } \alpha=\frac{1}{2}.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)\frac{x^\alpha-\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)x^{-3/2} = 0 \quad \text{se } \alpha<\frac{1}{2}$$

in quanto limite di un prodotto di funzione limitata per una infinitesima.
Per $\alpha>\frac{1}{2}$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)\frac{x^\alpha-\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}-\cos(x^2)x^{\alpha-2}, \tag{7.11.6}$$

allora bisogna distinguere tra $\alpha>2$, $\alpha=2$ e $\frac{1}{2}<\alpha<2$.
Se $\alpha>2$, il limite in (7.11.6) non esiste (si considerino le successioni divergenti $a_n=\sqrt{2n\pi}$ e $b_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$).

Se $\alpha = 2$, il limite in (7.11.6) non esiste (si considerino ancora le successioni divergenti $a_n = \sqrt{2n\pi}$ e $b_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$).

Se $\frac{1}{2} < \alpha < 2$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} -\cos(x^2)x^{\alpha-2} = 0,$$

in quanto prodotto di funzione limitata per una infinitesima. □

Esercizio 7.11.68 (Prova scritta 6-6-2023). Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{x^n} - x^{n^2}) \log\left(\cos(e^{-x-x^2})\right)$$

esiste ed è divergente.

SOLUZIONE ES. 7.11.68. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x-x^2} = 0 \tag{7.11.7}$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty} \cos(e^{-x-x^2}) = 1$$

da cui

$$\log\left(\cos(e^{-x-x^2})\right) \sim \cos(e^{-x-x^2}) - 1 = -\left(1 - \cos(e^{-x-x^2})\right)$$
$$\sim -\frac{1}{2}\left(e^{-x-x^2}\right)^2 = -\frac{1}{2}e^{-2x-2x^2} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Essendo per $n \geq 1$

$$e^{x^n} - x^{n^2} \sim e^{x^n} \quad \text{per } x \to +\infty$$

in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^n} - x^{n^2}}{e^{x^n}} \overset{y=x^n}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y - y^n}{e^y}$$
$$= 1 - \lim_{y\to+\infty} \frac{y^n}{e^y} = 1 - 0,$$

otteniamo, per $n \geq 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{x^n} - x^{n^2}) \log\left(\cos(e^{-x-x^2})\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x^n}\left(e^{-x-x^2}\right)^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}e^{x^n-2x-2x^2}$$

che diverge se e solo se $n \geq 3$.

Se $n = 0$, si ha

$$e^{x^n} - x^{n^2} = e^1 - 1 \quad \text{per ogni } x > 0,$$

quindi, per $n = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} (e^{x^n} - x^{n^2}) \log\left(\cos(e^{-x-x^2})\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}(e^1 - 1)e^{-2x-2x^2} = 0.$$

Allora il limite è divergente se e solo se $n \geq 3$. □

Esercizio 7.11.69 (Prova scritta 26-6-2023). Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$, con $0 \leq a < 4$,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\left(\sqrt{x^4 + 5x^a} - x^2\right) \log(5x) - \sqrt{x^4 + 5x^a}\right).$$

Soluzione Es. 7.11.69. Per la razionalizzazione:

$$\sqrt{x^4 + 5x^a} - x^2 = \frac{x^4 + 5x^a - x^4}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2} = \frac{5x^a}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2}.$$

Allora il limite da studiare è

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^a}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2} \log(5x) - \sqrt{x^4 + 5x^a}.$$

Si ha

$$\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2 = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x^{4-a}}} + 1\right) \sim 2x^2 \quad \text{per } x \to +\infty$$

Se $a < 4$

$$\frac{5x^a}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2} \sim \frac{5x^a}{2x^2} = \frac{5}{2} x^{a-2}. \tag{7.11.8}$$

Quindi, usando anche la gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^a}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2} \log(5x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2} x^{a-2} \log(5x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 2 \\ +\infty & \text{se } a = 2 \\ 0 & \text{se } a < 2 \end{cases}$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^4 + 5x^a} = +\infty$$

deduciamo

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5x^a}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2} \log(5x) - \sqrt{x^4 + 5x^a}\right) = \text{“}0 - (+\infty)\text{"} = -\infty \quad \text{se } a < 2.$$

Resta aperto il caso $2 \leq a < 4$, che al momento si presenta nella forma indeterminata $+\infty - (+\infty)$. Affermiamo che

$$\frac{5x^a}{\sqrt{x^4 + 5x^a} + x^2} \log(5x) = o\left(\sqrt{x^4 + 5x^a}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Infatti, usando (7.11.8) e anche

$$\sqrt{x^4+5x^a} \sim x^2 \quad \text{per } x \to +\infty, \tag{7.11.9}$$

dove si è usato che per $a<4$ è $x^4+5x^a \sim x^4$, abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x^a}{\sqrt{x^4+5x^a}+x^2}\log(5x)}{\sqrt{x^4+5x^a}}$$

$$\overset{(7.11.8)+(7.11.9)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{2}x^{a-2}\log(5x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^{4-a}}\log(5x) = 0 \quad \text{se } a<4.$$

Ne deduciamo quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^a}{\sqrt{x^4+5x^a}+x^2}\log(5x)-\sqrt{x^4+5x^a}\right) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x^4+5x^a} = -\infty.$$

□

Esercizio 7.11.70 (Prova scritta 17-7-2023). Calcolare al variare di $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x\log(x)-x^\alpha\right)^2}{\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^x x^2}\tan\frac{1}{x}.$$

SOLUZIONE ES. 7.11.70.

$$\tan\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

quindi si tratta di calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x\log(x)-x^\alpha\right)^2}{\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^x x^3}.$$

Si ha

$$\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^x = \left(\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}\right)^{\frac{x}{x^2+1}x}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0$$

allora

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = e.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}x = 1.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)^x$$

$$= \left(\left(1 + \frac{x}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{x}} \right)^{\frac{x}{x^2+1} x} = e.$$

Allora, si tratta di calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x \log(x) - x^\alpha \right)^2}{e \cdot x^3}.$$

Consideriamo il numeratore.
Per $x \to +\infty$ si ha

$$x \log(x) - x^\alpha \sim \left[\begin{array}{ll} -x^\alpha & \text{se } \alpha > 1 \\ x \log(x) & \text{se } \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

da cui

$$(x \log(x) - x^\alpha)^2 \sim \left[\begin{array}{ll} x^{2\alpha} & \text{se } \alpha > 1 \\ x^2 \log^2(x) & \text{se } \alpha \leq 1. \end{array} \right.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x \log(x) - x^\alpha \right)^2}{e \cdot x^3}$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2\alpha}}{e \cdot x^3} & \text{se } \alpha > 1 \\ \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \log^2(x)}{e \cdot x^3} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2\alpha-3}}{e} & \text{se } \alpha > 1 \\ \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\log^2(x)}{e \cdot x} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$= \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \text{ e } 2\alpha - 3 > 0 \\ \\ \frac{1}{e} & \text{se } \alpha > 1 \text{ e } 2\alpha - 3 = 0 \\ \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \text{ e } 2\alpha - 3 < 0 \\ \\ 0 & \text{se } \alpha \leq 1 \end{array} \right.$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > \frac{3}{2} \\ \\ \frac{1}{e} & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \\ \\ 0 & \text{se } \alpha < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

□

7.12. Successioni per ricorrenza

Si chiamano successioni per ricorrenza quelle successioni (a_n) che sono definite nella forma

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N} & (I) \\ a_0 = a & (II). \end{cases} \tag{7.12.1}$$

dove $f : A \to A$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, e $a \in A$.
Un caso più generale è

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(n, a_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N} & (I) \\ a_0 = a & (II). \end{cases}$$

dove $f : \mathbb{N} \times A \to A$, con $A \subseteq \mathbb{R}$, e $a \in A$.
E' possibile visualizzare il comportamento della successione (a_n) definita in (7.12.1). Per illustrarlo usiamo la figura qui sotto, in cui appaiono il grafico della funzione f (in verde) e la bisettrice I-III quadrante (linea continua nera).
Preso a_0 sull'asse x si traccia la perpendicolare all'asse x passante per quel punto. Essa intercetta il grafico di f nel punto

$$F = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1).$$

Si traccia ora la retta orizzontale passante per F. Essa interseca la bisettrice I-III q. nel punto H

$$H = (a_1, a_1).$$

Si traccia ora la perpendicolare all'asse x passante per H. Individuiamo così il numero a_1 sull'asse x. Ora si ripete lo schema sopra descritto con a_1 che prende il ruolo svolto prima da a_0.
L'intersezione della retta verticale per H con il grafico di f è il punto

$$J = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2).$$

Si traccia ora la retta orizzontale passante per J. Essa interseca la bisettrice I-III q. nel punto K

$$K = (a_2, a_2).$$

Si traccia ora la perpendicolare all'asse x passante per K. Individuiamo così il numero a_2 sull'asse x.

Ora si ripete lo schema sopra descritto con a_2 che prende il ruolo svolto prima da a_1.

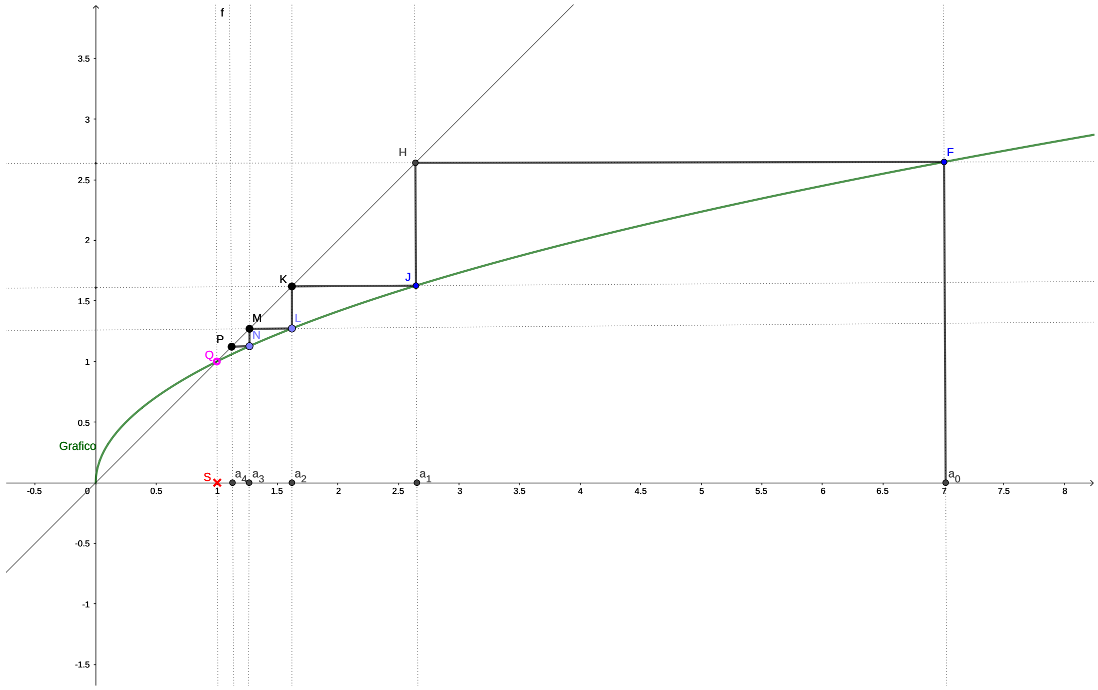

Figura 2. Visualizzazione grafica delle successioni per ricorrenza

Lo schema è facile: bisogna ricordare che si devono tracciare rette orizzontali passanti per i punti (a_n, a_{n+1}) del grafico di f e rette verticali passanti per i punti intersezione che tali rette orizzontali hanno con la bisettrice I-III quadrante.
E' evidente che se f è continua, allora il limite della successione è il numero reale ℓ solo se (ℓ, ℓ) è un punto d'intersezione del grafico di f con la bisettrice I-III quadrante. Infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$$

$$\overset{f \text{ continua}}{\Rightarrow} f(\ell) = \ell \Rightarrow (\ell, f(\ell)) \in \mathrm{Gr}\, f \cap \text{bisettrice}.$$

Dal disegno in figura si deduce, ad esempio, che il limite della successione è il numero reale S.

Esercizio 7.12.1. Studiare la convergenza della successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \ \forall n \in \mathbb{N} & (I) \\ a_0 = 2 & (II). \end{cases}$$

Sol:
Si noti che $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

è una funzione ben posta (infatti se $x > 0$ allora $f(x) > 0$) e che $2 \in]0, +\infty[$. Dunque, per la Proposizione 5.2.1, è ben definita la successione (a_n) a termini positivi.

Il suo limite, se esiste, è $\ell \in [0, +\infty]$. $\ell = +\infty$ è compatibile con (I) e con l'aritmetica di ∞, in quanto

$$\frac{1}{2}\left(+\infty + \frac{2}{+\infty}\right) = +\infty.$$

$\ell = 0$ è incompatibile con (I) e con l'aritmetica di 0 e ∞, in quanto

$$\frac{1}{2}\left(0 + \frac{2}{0^+}\right) = +\infty \neq 0.$$

Pertanto, se esiste il limite di (a_n) esso deve essere $\ell \in]0, +\infty]$.

Dalla prima condizione (I) risulta

$$\begin{cases} \ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \\ \ell > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\ell = \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2 \\ \ell > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}.$$

Dunque, se esiste il limite di (a_n) esso è $\sqrt{2}$ oppure $+\infty$.

Affermiamo che $a_n > \sqrt{2}$ per ogni n. Dimostriamolo per induzione. Sia P_n l'affermazione $a_n > \sqrt{2}$.

Se $n = 0$ l'affermazione è vera per la condizione (II).

Sia vera P_n e dimostriamo che P_{n+1} è vera.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) > \sqrt{2} \overset{a_n>0}{\Leftrightarrow} a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (a_n - \sqrt{2})^2 > 0 \Leftrightarrow a_n \neq \sqrt{2}.$$

L'ultima affermazione è vera per ipotesi, quindi è vera la prima affermazione della catena di implicazioni.

Ciò conclude la dimostrazione che $a_n > \sqrt{2}$ per ogni n.

Affermiamo che (a_n) è una successione strettamente decrescente. Per dimostrarlo, dobbiamo provare che

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora,

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < a_n \Leftrightarrow a_n + \frac{2}{a_n} < 2a_n \Leftrightarrow \frac{2}{a_n} < a_n \overset{a_n>0}{\Leftrightarrow} a_n^2 > 2 \overset{a_n>0}{\Leftrightarrow} a_n > \sqrt{2}.$$

Quest'ultima affermazione è vera per quanto dimostrato prima, quindi è vera la prima affermazione della catena di implicazioni.

Essendo (a_n) strettamente decrescente essa deve avere limite. Non potendo essere $+\infty$ il suo limite, esso dovrà essere $\ell = \sqrt{2}$.

Esercizio 7.12.2. Studiare la convergenza della successione al variare di $\alpha \in]0,1[$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \ \ \forall n \in \mathbb{N} & (I) \\ a_0 = \alpha & (II) \end{cases}$$

Sol:
Si noti che $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

è una funzione ben posta essendo $\alpha > 0$ e, $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Dunque, per la Proposizione 5.2.1, è ben definita la successione (a_n) a termini positivi.
Il suo limite, se esiste, è $\ell \in [0,+\infty]$.
$+\infty$ non è compatibile con (I) e con l'aritmetica di ∞, in quanto

$$\frac{1}{+\infty} \neq +\infty.$$

Per lo stesso motivo 0 non è compatibile con (I) e con l'aritmetica di 0, in quanto

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \neq 0.$$

Pertanto, il limite, se esiste, deve essere $\ell \in]0,+\infty[$. Dalla prima condizione (I) risulta

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \Leftrightarrow \ell^{\frac{3}{2}} = 1 \Leftrightarrow \ell = 1.$$

Dunque, se esiste il limite di (a_n) esso è 1.
Osserviamo che

$$a_n < 1 \Rightarrow a_{n+1} > 1 \Rightarrow a_{n+2} < 1.$$

Non possiamo quindi aspettarci una monotonia della successione.
Sia (b_n) così definita: $b_n := a_{2n}$. Si ha $b_0 = a_0 = \alpha$. Allora

$$b_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a_{2n}}}}} = \sqrt[4]{a_{2n}} = \sqrt[4]{b_n}.$$

Studiamo la successione (b_n), che è definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} b_{n+1} = \sqrt[4]{b_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N} & (III) \\ b_0 = \alpha & (IV) \end{cases}$$

Notiamo che è applicabile la Proposizione 5.2.1, con $f :]0,1[\to]0,1[$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Infatti $\alpha \in]0,1[$ e $0 < f(x) < 1$ per ogni $0 < x < 1$.
Pertanto (b_n) è una successione a termini in $]0,1[$.

Affermiamo che (b_n) è una successione strettamente crescente. Per dimostrarlo, dobbiamo provare che

$$b_{n+1} = \sqrt[4]{b_n} > b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora,

$$\sqrt[4]{b_n} > b_n \Leftrightarrow b_n^{3/4} < 1 \overset{0<b_n<1}{\Leftrightarrow} b_n < 1:$$

quest'ultima affermazione è vera, quindi è vera la prima.
Essendo (b_n) crescente e a termini in $]b_0, 1[$ il limite esiste, ed è un numero reale $\ell' \in]b_0, 1]$.
Da (III) deve essere

$$\ell' = \sqrt[4]{\ell'} \Leftrightarrow \ell'^{3/4} = 1 \Leftrightarrow \ell' = 1.$$

Pertanto $\ell' = 1$. Si è così dimostrato che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1.$$

Sia (c_n) così definita: $c_n := a_{2n+1}$. Si ha

$$c_0 = a_1 = \frac{1}{\sqrt{a_0}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \overset{\alpha<1}{>} 1.$$

Inoltre

$$c_{n+1} = a_{2n+3} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a_{2n+1}}}}} = \sqrt[4]{a_{2n+1}} = \sqrt[4]{c_n}.$$

Studiamo la successione (c_n), che è definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} c_{n+1} = \sqrt[4]{c_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N} & (V) \\ c_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} & (VI) \end{cases}$$

Notiamo che è applicabile la Proposizione 5.2.1, con $f :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$, $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Infatti $\alpha \in]0, 1[$, dunque $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} > 1$ e $f(x) > 1$ per ogni $x > 1$.
Pertanto (c_n) è una successione a termini in $]1, +\infty[$.
Affermiamo che (c_n) è una successione strettamente decrescente. Per dimostrarlo, dobbiamo provare che

$$c_{n+1} := \sqrt[4]{c_n} < c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora,

$$\sqrt[4]{c_n} < c_n \Leftrightarrow c_n^{3/4} > 1 \overset{c_n>1}{\Leftrightarrow} c_n > 1:$$

quest'ultima affermazione è vera, quindi è vera la prima.
Essendo (c_n) decrescente e a termini in $]1, c_0[$ il limite esiste, ed è un numero reale $\ell'' \in [1, c_0[$.
Da (V) deve essere

$$\ell'' = \sqrt[4]{\ell''} \Leftrightarrow \ell''^{3/4} = 1 \Leftrightarrow \ell'' = 1.$$

Pertanto $\ell'' = 1$. Si è così dimostrato che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = 1.$$

Essendo

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1 = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1}$$

concludiamo che la successione (a_n) converge a 1.

Esercizio 7.12.3. Studiare la convergenza della successione

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} & (I) \\ a_0 = 10 & (II) \end{cases}$$

Sol:
Si noti che $f :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

è una funzione ben posta essendo $f(x) > 1$ per ogni $x > 1$. Tenuto conto che $10 > 1$, segue dalla Proposizione 5.2.1, che la successione (a_n) è ben definita e a termini maggiori di 1.
Il suo limite, se esiste, è $\ell \in [1, +\infty]$ e in tal caso da (I) deve essere

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right). \tag{7.12.2}$$

$\ell = +\infty$ non è compatibile con tale uguaglianza e con l'aritmetica di ∞, in quanto

$$1 + \frac{1}{+\infty} = 1 \neq +\infty.$$

Pertanto, il limite, se esiste, deve essere reale, $\ell \in [1, +\infty[$. Da (7.12.2) risulta

$$\ell = 1 + \frac{1}{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 1 = 0 \Leftrightarrow \ell = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \overset{\ell\geq 1}{\Rightarrow} \ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Dunque, se esiste il limite di (a_n) esso è $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Siano (b_n) e (c_n) così definite: $b_n := a_{2n}$ e quindi $b_0 = a_0 = 10$, e $c_n := a_{2n+1}$ e quindi $c_0 = a_1 = \frac{11}{10}$.
Vogliamo dimostrare che pr ogni $n \in \mathbb{N}$ la proposizione

$$(P_n): \qquad c_n < c_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

è vera. Procediamo per induzione.
(P_0) è vera: infatti

$$a_1 = 1 + \frac{1}{a_0} = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} < 10 = a_0, \tag{7.12.3}$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{10}{11} = \frac{21}{11} > \frac{11}{10} = a_1 < a_0 \tag{7.12.4}$$

e

$$a_3 = 1 + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{11}{21} = \frac{32}{21} > \frac{11}{10} = a_1, \tag{7.12.5}$$

da cui

$$c_0 = \frac{11}{10} < \frac{32}{21} = c_1 < \frac{21}{11} = b_1 < 10 = a_0 = b_0.$$

Supponiamo vera (P_n) e dimostriamo che (P_{n+1}) è vera.
Iniziamo con l'osservare che

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \qquad a_n < a_{n+k} \Leftrightarrow a_{n+1} > a_{n+k+1}. \tag{7.12.6}$$

Infatti si ha

$$a_n < a_{n+k} \overset{(a_n)\text{ a termini positivi}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{a_{n+k}} < \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a_{n+k}} < 1 + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_{n+k+1} < a_{n+1}.$$

Analogamente si ha

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \qquad a_n > a_{n+k} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+k+1} \Leftrightarrow a_{n+k+1} > a_{n+1}, \tag{7.12.7}$$

infatti

$$a_n > a_{n+k} \overset{(a_n)\text{ a termini positivi}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{a_{n+k}} > \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a_{n+k}} > 1 + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_{n+k+1} > a_{n+1} \Leftrightarrow a_{n+1} < a_{n+k+1}.$$

Abbiamo che l'ipotesi induttiva è:

$$c_n < c_{n+1} < b_{n+1} < b_n \Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3} < a_{2n+2} < a_{2n}$$

Per (7.12.6) e (7.12.7), usate con $k = 2$, deduciamo

$$b_n > b_{n+1} \Leftrightarrow a_{2n} > a_{2n+2} \overset{(7.12.7)}{\Rightarrow} a_{2n+1} < a_{2n+3} \overset{(7.12.6)}{\Rightarrow} a_{2n+2} > a_{2n+4} \Leftrightarrow b_{n+1} > b_{n+2}.$$

Analogamente:

$$c_n < c_{n+1} \Leftrightarrow a_{2n+1} < a_{2n+3} \overset{(7.12.6)}{\Rightarrow} a_{2n+2} > a_{2n+4} \overset{(7.12.7)}{\Rightarrow} a_{2n+3} < a_{2n+5} \Leftrightarrow c_{n+1} < c_{n+2}. \tag{7.12.8}$$

Infine, usando (7.12.7) e (7.12.6) con $k = 1$:

$$c_{n+1} < b_{n+1} \Leftrightarrow a_{2n+3} < a_{2n+2} \overset{(7.12.7)}{\Rightarrow} a_{2n+4} > a_{2n+3} \overset{(7.12.6)}{\Rightarrow} a_{2n+5} < a_{2n+4} \Leftrightarrow c_{n+2} < b_{n+2}.$$

Pertanto abbiamo dimostrato l'implicazione:

$$c_n < c_{n+1} < b_{n+1} < b_n \Rightarrow c_{n+1} < c_{n+2} < b_{n+2} < b_{n+1},$$

che era quanto desideravamo.
Abbiamo così dimostrato per induzione che (b_n) è decrescente e (c_n) è crescente. e che

$$c_n < b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che le successioni sono limitate:

$$\frac{11}{10} = a_1 = c_0 < c_n < b_n < b_0 = a_0 = 10 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ne deduciamo che esistono $\ell', \ell'' \in \left]\frac{11}{10}, 10\right[$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \ell'' \leq \ell' = \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Per determinarne i valori, osserviamo che deve essere

$$\ell'' = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+3} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{a_{2n+2}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{2n+1}}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\ell''}}\right)$$

da cui

$$\ell'' = 1 + \frac{\ell''}{\ell''+1}.$$

Analogamente: deve essere

$$\ell' = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{a_{2n+1}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{a_{2n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\ell'}}\right)$$

da cui

$$\ell' = 1 + \frac{\ell'}{\ell'+1}.$$

Si ha che per ogni $x > 1$

$$x = 1 + \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ciò comporta che $\ell' = \ell'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Riassumendo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1}$$

concludiamo che la successione (a_n) converge a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Esercizio 7.12.4. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[R.: $\alpha > 1$: $\uparrow$, $+\infty$; $\alpha = 1$: $a_n = 1\ \ \forall n$; $0 < \alpha < 1$: $a_n \downarrow 0$; $\alpha = 0$: $a_n = 0\ \forall n$;
$-1 < \alpha < 0$: $a_n \to 0$; $\alpha = -1$: $a_n \to 1$; $\alpha < -1$: $a_n \to +\infty$]

SOL. ES. 7.12.4. Consideriamo $\alpha = 0$. In questo caso la successione (a_n) è costante uguale a 0 (formalmente si dimostra ciò per induzione) e il suo limite è 0.
Analogamente, se $\alpha = 1$, la successione (a_n) è costante uguale a 1 e il suo limite è 1.
Sia $\alpha > 0$.
E' immediato osservare che la successione ha termini ordinati nel seguente modo: α, α^2, α^4, α^8, α^{16},...,
quindi ci aspettiamo che la successione sia
a termini positivi
strettamente crescente e divergente a $+\infty$ per $\alpha > 1$
strettamente decrescente e convergente a 0 per $0 < \alpha < 1$.
Dimostriamo ora tali affermazioni.
La dimostrazione che (a_n) è a termini positivi è per induzione:

$$a_0 = \alpha > 0, \qquad a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n^2 > 0.$$

Dunque, se esiste il limite di a_n ed esso è ℓ, sarà $\ell \in [0, +\infty]$.
Determiniamo i candidati valori di ℓ, ammesso che esista. Essendo $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, $f(x) = x^2$, una funzione continua, se $\ell \in \mathbb{R}$ deve essere

$$\ell = \ell^2$$

da cui

$$\ell = 0 \ \vee\ \ell = 1.$$

Il caso $\ell = +\infty$ è compatibile con l'aritmetica di ∞, in quanto se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ allora anche $\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = +\infty$.
L'insieme dei candidati limiti è quindi $\{0, 1, +\infty\}$.
Sia $0 < \alpha < 1$. Già sappiamo che $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che $a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Procediamo per induzione: per $n = 0$, si ha

$$a_0 = \alpha \leq 1,$$

che è ovviamente vera perché $0 < \alpha < 1$. Supponiamo ora $a_n < 1$ e dimostriamo che $a_{n+1} < 1$: infatti, dall'ipotesi induttiva,

$$a_{n+1} = a_n^2 = a_n \cdot a_n < a_n \cdot 1 < 1.$$

Riassumento, sappiamo che $a_n \in]0, 1[$ per ogni n.

Proviamo ora che (a_n) è strettamente decrescente. Questo segue immediatamente da quanto appena dimostrato, infatti

$$a_{n+1} < a_n \qquad \text{se e solo se} \qquad a_n^2 < a_n \qquad \overset{0<a_n<1}{\text{se e solo se}} \qquad 0 < a_n < 1,$$

che abbiamo appena dimostrato essere vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Questo dimostra che esiste il limite ℓ di a_n. Dovendo essere

$$\ell < a_0 < 1$$

l'unico candidato limite di a_n compatibile è $\ell = 0$.
Sia infine $\alpha > 1$. Dimostriamo che $a_n > 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Procediamo per induzione: per $n = 0$, si ha

$$a_0 = \alpha > 1,$$

che è ovviamente vera perché $\alpha > 1$. Supponiamo ora $a_n > 1$ e dimostriamo che $a_{n+1} > 1$: infatti, dall'ipotesi induttiva,

$$a_{n+1} = a_n^2 = a_n \cdot a_n > a_n \cdot 1 > 1.$$

Proviamo ora che (a_n) è strettamente crescente. Questo segue immediatamente da quanto appena dimostrato, infatti, tenendo conto che $a_n > 1 > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{se e solo se} \qquad a_n^2 > a_n \qquad \overset{a_n>1}{\text{se e solo se}} \qquad a_n > 1,$$

che abbiamo appena dimostrato essere vero per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Questo dimostra che che esiste il limite ℓ di a_n e che esso non può essere né 0 né 1. Sarà quindi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Riassumendo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \left[\begin{array}{ll} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } 0 \le \alpha < 1. \end{array} \right.$$

Il caso $\alpha < 0$:
Se $a_0 = \alpha < 0$ allora $a_1 = \alpha^2 > 0$. Definiamo

$$b_n := a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La successione $(b_n)_n$ è la successione $(a_n)_n$ privata del primo termine a_0. Quindi il limite di $(b_n)_n$ esiste se e solo se esiste il limite di $(a_n)_n$ e, in tal caso, i limiti coincidono. La successione (b_n) è definita da

$$\begin{cases} b_0 = \alpha^2 \\ b_{n+1} = b_n^2 \end{cases}$$

Essendo $\alpha^2 > 0$, già sappiamo, da quanto studiato sopra, che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{bmatrix} +\infty & \text{se } \alpha^2 > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha^2 = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha^2 < 1. \end{bmatrix}$$

Essendo $\alpha < 0$ ne segue che la classificazione sopra è equivalente a

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{bmatrix} +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } -1 < \alpha < 0. \end{bmatrix}$$

Per quanto detto sul legame tra i limiti di (b_n) e di (a_n), si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{bmatrix} +\infty & \text{se } \alpha < -1 \\ 1 & \text{se } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } -1 < \alpha < 0. \end{bmatrix}$$

□

Esercizio 7.12.5. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \end{cases}$$

al variare di $\alpha > 0$.
[R.: $0 < \alpha < 3$: $a_n \uparrow 3$; $\alpha = 3$: $a_n = 3$; $\alpha > 3$: $a_n \downarrow 3$]

Esercizio 7.12.6. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 4 - a_n \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[R.: $a_{2n} = \alpha$, $a_{2n+1} = 4 - \alpha$. Se $\alpha = 2$ ha limite 2, se $\alpha \neq 2$ $\nexists$ limite]

Esercizio 7.12.7. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 4 - 2a_n \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

[R.: $\alpha > \frac{4}{3}$: $a_{2n} \uparrow +\infty$, $a_{2n+1} \downarrow -\infty$;
$\alpha < \frac{4}{3}$: $a_{2n} \downarrow -\infty$, $a_{2n+1} \uparrow +\infty$]

Esercizio 7.12.8. Calcolare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n} \end{cases}$$

al variare di $\alpha > -1$.

[R.: $\forall \alpha > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: $a_{2n} \downarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $a_{2n+1} \uparrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
$-1 < \alpha < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: $a_{2n} \uparrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $a_{2n+1} \downarrow \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;
$\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$: (a_n) è costante $= \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.]

Esercizio 7.12.9. Calcolare il seguente limite di successione definita per ricorrenza: $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$

(Algoritmo di Erone per approssimare $\sqrt{2}$)

Esercizio 7.12.10. Calcolare il seguente limite di successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \in]0,1[\\ a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}} \end{cases}$$

Esercizio 7.12.11 (Prova scritta 8-6-2021). Dimostrare, usando il Principio d'induzione, che la successione (x_n) definita per ricorrenza

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sin(x_n) \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ha termini in $]0, \frac{1}{2}]$. Concludere poi che la successione è decrescente e se ne calcoli il limite.

SOLUZIONE Es. 7.12.11:
Sia $P(n)$ la proposizione

$$0 < x_n \leq \frac{1}{2}.$$

$P(0)$ è vera.

Sia vera $P(n)$ e dimostriamo che è vera $P(n+1)$. Da $P(n)$ vera si ha

$$0 < x_n \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2} \overset{\text{sin crescente in } [0,\frac{\pi}{2}]}{\Rightarrow} 0 < \sin(x_n) \leq \sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

quindi

$$0 < x_{n+1} \leq \sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

Ora basta osservare che

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

in quanto

$$\sin(x) \leq x \text{ se } x \geq 0 \tag{7.12.9}$$

ottenendo

$$0 < x_{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Così si conclude che la successione è limitata e positiva.
Per la decrescenza: per quanto dimostrato sopra, $x_n > 0$, quindi, per (7.12.9),

$$x_{n+1} = \sin(x_n) \leq x_n \qquad \forall n.$$

Dunque, esiste il limite di (x_n) ed esso è un numero $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$. Per la continuità di sin dovrà essere

$$\begin{cases} \ell = \sin(\ell) \\ \ell \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \ell = 0.$$

7.12.1. Teoremi sulle successioni definite per ricorrenza mediante una funzione continua.

Teorema 7.12.12. *Sia $f : I \to I$ con I intervallo e f continua e crescente. Sia*

$$\Sigma := \{\ell \in \overline{I} \cup \{\pm\infty\} : \ell = f(\ell)\}.$$

Allora la successione (a_n) definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 \in I \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

è monotona.
Precisamente:

(i) *se $a_0 < a_1$ la successione (a_n) è crescente.*
Essa converge al punto di Σ più vicino ad a_0 e maggiore di a_0, qualora esso esista, altrimenti la successione diverge a $+\infty$.

(ii) *se $a_0 > a_1$ la successione è decrescente.*

Essa converge al punto di Σ più vicino ad a_0 e minore di a_0, qualora esso esista, altrimenti la successione diverge a $-\infty$.

Teorema 7.12.13. *Sia $f : I \to I$ con I intervallo e f continua e decrescente.*
Allora la successione (a_n) definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 \in I \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

ha le sottosuccessioni (a_{2n}) e (a_{2n+1}) monotone.
Precisamente:

(i) *se $a_0 \leq a_2$ allora la successione (a_{2n}) è crescente e (a_{2n+1}) è decrescente.*

(ii) *se $a_0 \geq a_2$ allora la successione (a_{2n}) è decrescente e (a_{2n+1}) è crescente.*

Inoltre:

(a) *se $a_0 \leq a_1$ allora $a_{2n} \leq a_{2n+1}$ per ogni n*

(b) *se $a_0 \geq a_1$ allora $a_{2n} \geq a_{2n+1}$ per ogni n.*

E' condizione necessaria per l'esistenza del limite di (a_n) che a_2 sia compreso tra a_0 e a_1.

CAPITOLO 8

Derivate

In fondo a questo capitolo si troverà una sezione riguardante le funzioni uniformemente continue. Alcune classi di funzioni derivabili risultano infatti essere uniformemente continue. Per questo motivo si è preferito inserire in questo capitolo la trattazione della uniforme continuità.

8.1. Derivate delle funzioni elementari

$$\text{(Esercizio 8.1.1)} \qquad D(c) = 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.2)} \qquad D(e^x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.3)} \qquad D(\log(x)) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in]0, \infty[.$$

$$\text{(Esercizio 8.1.4)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\; D(x^n) = nx^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.5)} \qquad D(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.6)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \;\; D(x^{-n}) = -nx^{-n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.7)} \qquad D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\; x > 0$$

$$\text{(Esercizio 8.1.8)} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0$$

$$\text{(Esercizio 8.1.10)} \qquad D \sin x = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(Esercizio 8.1.11)} \qquad D \cos x = -\sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{(Esercizio 8.1.12)} \qquad D\tan x = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.13)} \qquad D\sinh x = \cosh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.14)} \qquad D\cosh x = \sinh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.15)} \qquad D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\text{(Esercizio 8.1.16)} \qquad D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[$$

$$\text{(Esercizio 8.1.17)} \qquad D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(Esercizio 8.1.18)} \qquad D|x| = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ \nexists & \text{se } x=0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Esercizio 8.1.1. Dimostrare che le funzioni costanti hanno derivata nulla, ossia

$$D(c) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sol:
Siano $c \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Esercizio 8.1.2. Dimostrare che

$$D(e^x) = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sol:
Sia $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h-1}{h} \overset{\text{Teor. 7.8.16}}{=} e^x \cdot 1 = e^x.$$

Esercizio 8.1.3. Dimostrare che

$$D(\log(x)) = \frac{1}{x} \qquad \forall x \in]0,\infty[.$$

Sol:
Sia $x \in]0,\infty[$. Usando le proprietà del logaritmo (v. Proposizione 6.6.2)

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h)-\log(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\log\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \log\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right) \overset{\text{Teor. 7.8.14 + Teor. 6.6.4}}{=} \log\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x}.$$

Esercizio 8.1.4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$D(x^n) = nx^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sol:
Per induzione:
Sia (P_n) l'affermazione

$$D(x^n) = nx^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Per $n = 1$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^1 - x^1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 = 1\cdot x^{1-1} \ (= 1).$$

Sia vera (P_n) e dimostriamo che (P_{n+1}) è vera usando le regole di derivazione.

$$D(x^{n+1}) = D(xx^n) = D(x)x^n + xD(x^n) \overset{\text{P(1) e P(n)}}{=} 1\cdot x^n + nxx^{n-1} = (n+1)x^n = (n+1)x^{(n+1)-1}.$$

La tesi segue.

Esercizio 8.1.5. Dimostrare che

$$D(x^{-1}) = -\frac{1}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Sol:
Sia $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{(x+h)(x)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h}\frac{1}{(x+h)(x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Esercizio 8.1.6. Dimostrare per ogni $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$D(x^{-n}) = -nx^{-n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Sol:

La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$ è la composizione di $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $g(z) = \frac{1}{z}$ con $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h(x) = x^n$. Infatti

$$f(x) = (g \circ h)(x).$$

Usando gli esercizi 8.1.4 e 8.1.5 e la formula di derivazione di funzione composta si ha

$$Df(x) = Dg(h(x))Dh(x)$$

ossia

$$D(x^{-n}) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{1}{x^{2n}} n x^{n-1} = -n x^{n-1-2n} = -n x^{-n-1}.$$

Esercizio 8.1.7. Dimostrare che

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

Sol:

Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Allora, usando il metodo di razionalizzazione, la continuità della funzione $x \mapsto \sqrt{x}$ e l'algebra dei limiti, si ha:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

L'Esercizio precedente è un caso particolare del seguente.

Esercizio 8.1.8. Dimostrare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Sol:

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Usando le regole di derivazione di funzione composta si ha

$$D(x^\alpha) = D(e^{\alpha \log(x)}) = e^{\alpha \log(x)} \alpha \frac{1}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Esercizio 8.1.9. Dimostrare che se $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ allora

$$D^{(n)} x^m = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{se } n \le m \\ 0 & \text{se } n > m \end{cases}$$

Sol:

Sia $x \in \mathbb{R}$.

Se $n = 1$ l'affermazione è vera, infatti

$$Dx^0 = D1 = 0, \qquad Dx^m \overset{\text{Es. 8.1.4}}{=} m x^{m-1}$$

e la tesi segue in quanto
$$\frac{m!}{(m-1)!}=\frac{m(m-1)!}{(m-1)!}=m.$$
Sia vera l'affermazione per $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ e dimostriamo che è vera per $n+1$.
Si ha
$$D^{(n+1)}x^m=D(D^{(n)}x^m)\overset{\text{Hp. induttiva}}{=}\begin{cases}\frac{m!}{(m-n)!}Dx^{m-n} & \text{se } n\le m\\ D0=0 & \text{se } n>m\end{cases}\tag{8.1.1}$$
Se $m<n$ allora è anche $m<n+1$. Supponiamo che sia $n\le m$. Ci sono due casi: $n<m$ e $n=m$. Se $n<m$ allora $n+1\le m$. In tal caso, per l'Es. 8.1.4 si ha
$$\frac{m!}{(m-n)!}Dx^{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!}(m-n)x^{m-n-1}$$
$$=\frac{m!}{(m-n)(m-n-1)!}(m-n)x^{m-n-1}=\frac{m!}{(m-(n+1))!}x^{m-(n+1)}.$$
Se invece $n=m$ allora $m<n+1$ e
$$\frac{m!}{(m-m)!}Dx^{m-m}=\frac{m!}{0!}D1=0.$$
Abbiamo così dimostrato che
$$\frac{m!}{(m-n)!}Dx^{m-n}=\begin{cases}\frac{m!}{(m-(n+1))!}x^{m-(n+1)} & \text{se } n+1\le m\\ 0 & \text{se } n=m\Leftrightarrow n+1>m\ge n.\end{cases}$$
Congiungendo questa informazione con (8.1.1) si ha la tesi.

Esercizio 8.1.10. Dimostrare che
$$D\sin x=\cos x\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$
Sol:
Sia $x\in\mathbb{R}$.
$$\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\overset{\text{Prop. 6.7.17}}{=}\lim_{h\to0}\frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\frac{\sin(h)}{h}\cos(x)\right)\overset{\text{Es. 7.8.30 + Teo. 7.8.27}}{=}\sin(x)\cdot0+1\cdot\cos(x)=\cos(x).$$

Esercizio 8.1.11. Dimostrare che
$$D\cos x=-\sin x\qquad\forall x\in\mathbb{R}.$$
Sol:
Sia $x\in\mathbb{R}$.
$$\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\overset{\text{Prop. 6.7.17}}{=}\lim_{h\to0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(h)\sin(x)-\cos(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \frac{\sin(h)}{h}\sin(x)\right) \overset{\text{Es. 7.8.30 + Teo. 7.8.27}}{=} \cos(x)\cdot 0 - 1\cdot\sin(x) = -\sin(x).$$

Esercizio 8.1.12. Dimostrare che

$$D\tan x = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}.$$

Sol:
Sia $x \in \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}$.

$$D\tan x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{D\sin x\cos x - \sin x D\cos x}{\cos^2 x} \overset{\text{Es. 8.1.10 + Es. 8.1.11}}{=} \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ \frac{1}{\cos^2 x}. \end{array}\right.$$

Esercizio 8.1.13. Dimostrare che

$$D\sinh x = \cosh x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Sol:
Sia $x\in\mathbb{R}$.

$$D\sinh x = D\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - (-1)e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x.$$

Esercizio 8.1.14. Dimostrare che

$$D\cosh x = \sinh x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Sol:
Sia $x\in\mathbb{R}$.

$$D\cosh x = D\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + (-1)e^{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x.$$

Esercizio 8.1.15. Dimostrare che

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Sol:
La funzione $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ è la funzione inversa di $\sin : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$.
Sia $x \in]-1,1[$. Allora esiste $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tale che $\sin y = x$. Inoltre, per l'Es. 8.1.10

$$D\sin y = \cos y \overset{y\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}{\neq} 0.$$

Per la formula di derivazione delle funzioni inverse (v. dispense prof. Dore)

$$D\arcsin x = \frac{1}{\cos\arcsin x}.$$

Essendo $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ allora

$$\begin{cases} \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \\ \cos(y) > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos(y) = \sqrt{1-(\sin(y))^2}$$

ossia

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

Pertanto:

$$D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Esercizio 8.1.16. Dimostrare che

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Sol:
La funzione $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ è la funzione inversa di $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$.
Sia $x \in]-1,1[$. Allora esiste $y \in]0,\pi[$ tale che $\cos y = x$. Inoltre, per l'Es. 8.1.11

$$D\cos y = -\sin y \overset{y\in]0,\pi[}{\neq} 0.$$

Per la formula di derivazione delle funzioni inverse (v. dispense prof. Dore)

$$D\arccos x = \frac{1}{-\sin\arccos x}.$$

Essendo $y \in]0,\pi[$ allora

$$\begin{cases} \cos^2(y) + \sin^2(y) = 1 \\ \sin(y) > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin(y) = \sqrt{1-(\cos(y))^2}$$

ossia

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-(\cos(\arccos x))^2} = \sqrt{1-x^2}.$$

Pertanto:

$$D\arccos x = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}.$$

Esercizio 8.1.17. Dimostrare che

$$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sol:
La funzione $\arctan : \mathbb{R} \to]0,\pi[$ è la funzione inversa di $\tan : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.
Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora esiste $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tale che $\tan y = x$. Inoltre, per l'Es. 8.1.12

$$D\tan y = 1+\tan^2 y \neq 0.$$

Per la formula di derivazione delle funzioni inverse (v. dispense prof. Dore)

$$D\arctan x = \frac{1}{1+\tan^2\arctan x} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Esercizio 8.1.18. Dimostrare che la funzione valore assoluto $\mathrm{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R} \setminus 0$, ma non in 0.
Precisamente:

$$D\,\mathrm{abs}(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sol:
Sia $x > 0$. Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ |h|<x}} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Dunque esiste $f'(x) = 1$ se $x > 0$.
Sia $x < 0$. Si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ |h|<-x}} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x+h<0}} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1.$$

Dunque esiste $f'(x) = -1$ se $x > 0$.
Sia $x = 0$. Si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1.$$

Dunque non esiste $f'(0)$

8.2. Caratterizzazioni delle costanti

Teorema 8.2.1 (Caratterizzazione delle funzioni costanti). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo. Allora*

$$f \text{ è una funzione costante} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è derivabile e } f'(x) = 0 \ \forall x \in I.$$

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
Segue dall'Esercizio 8.1.1
$\Leftarrow$
Sia $x_0 \in I$.
Sia $x \in I$, $x > x_0$. Si noti che $[x_0, x] \subseteq I$ essendo I un intervallo. Applichiamo il Teorema di Lagrange a $f|_{[x_0,x]} : [x_0, x] \to \mathbb{R}$, ciò è possibile perché f è derivabile in I, quindi è derivabile (e quindi anche continua) in $[x_0, x]$. Allora

$$\exists \xi \in]x_0, x[\quad : \quad f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \stackrel{f'=0}{=} 0$$

da cui

$$f(x) = f(x_0) \qquad \forall x \in I, x > x_0.$$

Analogamente:
Sia $x \in I$, $x < x_0$. Si noti che $[x, x_0] \subseteq I$ essendo I un intervallo. Applichiamo il Teorema di Lagrange a $f|_{[x,x_0]} : [x, x_0] \to \mathbb{R}$. Allora

$$\exists \xi \in]x, x_0[\quad : \quad f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) \stackrel{f'=0}{=} 0$$

da cui

$$f(x) = f(x_0) \qquad \forall x \in I, x < x_0.$$

Abbiamo così dimostrato che $f(x) = f(x_0)$ per ogni $x \in I$. □

Esercizio 8.2.2. Usando il Teorema 8.2.1, dimostrare che se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ allora

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{array} \right.$$

Sol: In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$D\left(\arctan x + \arctan \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} D\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{x^2+1}\frac{1}{x^2} = 0.$$

Essendo la derivata nulla nell'intervallo $]0,+\infty[$, allora, per il Teorema 8.2.1, la funzione

$$x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

risulta costante in tale intervallo. Sia c il valore di tale costante. Per determinarlo, osserviamo che

$$c = \lim_{x\to+\infty} c = \lim_{x\to+\infty}\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} + \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Essendo la funzione

$$x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

dispari in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ il suo valore in $]-\infty,0[$ sarà $-\frac{\pi}{2}$. Possiamo in alternativa ragionare come sopra:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2} + \arctan 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 8.2.3. Usando il Teorema 8.2.1, dimostrare che se $x\in[-1,1]$ allora

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Sol:
Sia $x \in]-1,1[$. Si ha

$$D(\arcsin x + \arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Essendo la derivata nulla nell'intervallo $]-1,1[$, allora per il Teorema 8.2.1 la funzione

$$x \mapsto \arcsin x + \arccos x$$

risulta costante in tale intervallo. Sia c il valore di tale costante. Per determinarlo, osserviamo che

$$c = \arcsin(0) + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Restano da considerare i casi $x = 1$ e $x = -1$:

$$\arcsin(1) + \arccos(1) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\arcsin(-1) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}.$$

8.3. Condizioni sufficienti per la derivabilità

Ricordiamo qui alcuni risultati che legano il limite del rapporto incrementale col limite delle derivate. Essi forniranno una condizione sufficiente per l'esistenza della derivate.

Lemma 8.3.1. *[Limite da destra delle derivate] Sia* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$*,* $a < b$*.*
Se valgono le seguenti:

(i) f *è continua in* a
(ii) f *è derivabile in* $]a, b[$

allora

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $x \in]a, b[$ si consideri la funzione $f|_{[a,x]} : [a, x] \to \mathbb{R}$. Essa è derivabile e quindi anche continua in $]a, x[$ dato che

$$]a, x[\subseteq]a, b[.$$

Essa è inoltre continua in $[a, x]$, infatti lo è in $]a, x]$ in quanto è ivi addirittura derivabile, e lo è in a per ipotesi. Dal Teorema di Lagrange, esiste $\xi(x) \in]a, x[$ tale che

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi(x)).$$

Dunque,

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(\xi(x)).$$

Dimostriamo che tale ultimo limite è ℓ.
Dato che

$$a < \xi(x) < x$$

allora, per il Teorema dei carabinieri

$$\lim_{x\to a} \xi(x) = a.$$

Per il Teorema di cambiamento di variabile nel calcolo dei limiti si ha

$$\lim_{x\to a^+} f'(\xi(x)) \overset{y=\xi(x)\to a^+ \text{ per } x\to a^+}{=} \lim_{y\to a^+} f'(y) \overset{\text{(ipotesi)}}{=} \ell.$$

□

Lemma 8.3.2. *[Limite da sinistra delle derivate] Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*.*
Se valgono le seguenti:

(i) f *è continua in* b
(ii) f *è derivabile in* $]a, b[$

allora

$$\lim_{x\to b^-} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \ell.$$

Congiungendo i due risultati sopra si ottiene il seguente risultato.

Proposizione 8.3.3. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo con interno non vuoto e sia $x_0 \in I$.*
Se valgono le seguenti:

(i) *f è continua in x_0*
(ii) *f è derivabile in $I \setminus x_0$*

allora

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $x_0 \in \operatorname{int} I$ il teorema è conseguenza dei Lemmi 8.3.1 e 8.3.2. Se $x_0 \in I \setminus \operatorname{int} I$ allora x_0 è un punto di accumulazione unilatero: se lo è da destra la tesi segue dal Lemma 8.3.1 applicato con $a = x_0$ e $b = x_0 + \delta$ con $\delta > 0$ tale che $x_0 + \delta \in I$, se lo è da sinistra allora la tesi segue dal Lemma 8.3.2 applicato con $b = x_0$ e $a = x_0 - \delta$ con $\delta > 0$ tale che $x_0 - \delta \in I$. □

Dal risultato sopra si ottiene la seguente condizione sufficiente per la derivabilità.

Teorema 8.3.4. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo. Sia $x_0 \in I$.*
Se valgono le seguenti:

(i) *f è continua in x_0*
(ii) *f è derivabile in $I \setminus x_0$*

allora vale la seguente implicazione

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \exists f'(x_0) = \ell.$$

DIMOSTRAZIONE. Immediata conseguenza della Proposizione 8.3.3 e dalla definizione di derivata di f in x_0. □

Esercizio 8.3.5. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $0 \in A$ un punto di accumulazione bilatero per A.
Dimostrare che se f è pari allora

$$f \text{ è derivabile in } 0 \Leftrightarrow (f \text{ è derivabile in } 0 \text{ e } f'(0) = 0) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 0.$$

Sol:
Sia f derivabile in 0. Allora esiste $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ ed esso è un numero reale. Dimostriamo che tale numero è 0.

Essendo 0 un punto di accumulazione bilatero, si ha

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{y=-x}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{f(-y)-f(0)}{-y}\overset{f\text{ pari}}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)-f(0)}{-y}=-\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)-f(0)}{y}. \tag{8.3.1}$$

Dunque

$$-f'(0)=-\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)-f(0)}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)-f(0)}{y}=f'(0).$$

Da qui segue $f'(0)=0$.
L'implicazione

$$f\text{ derivabile e }f'(0)=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$$

è ovvia.
L'implicazione

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0\ \Rightarrow\ f\text{ è derivabile}$$

segue da (8.3.1).
Ciò conclude la dimostrazione.

Esercizio 8.3.6. Sia $f: A\to\mathbb{R}$ con $0\in A$ un punto di accumulazione bilatero per A.
Dimostrare che se f è dispari allora

$$(f\text{ è derivabile in 0 e }f'(0)=\ell\in\mathbb{R})\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\ell\in\mathbb{R}.$$

Sol:
$\Rightarrow$:
ovvio.
$\Leftarrow$:
Se f è dispari allora $f(0)=0$ (v. Esercizio 3.2.33). Allora si ha

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}\overset{y=-x}{=}\lim_{y\to 0^+}\frac{f(-y)}{-y}$$

$$=\lim_{y\to 0^+}\frac{-f(y)}{-y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)}{y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{f(y)-f(0)}{y}\in\mathbb{R}.$$

Da qui la tesi.

Proposizione 8.3.7. *Sia $f: A\to\mathbb{R}$ derivabile.*
Dimostrare che

$$f\ \textit{pari}\Rightarrow f'\ \textit{dispari}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia f pari. Se $x_0 \in A$ si ha

$$f'(-x_0) = \lim_{x \to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x} \overset{y=-x}{=} \lim_{y \to 0} \frac{f(-y) - f(x_0)}{-y}$$

$$\overset{f \text{ pari}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(x_0)}{-y} = -\lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(x_0)}{y} = -f'(x_0).$$

Dall'arbitrarietà di x_0 segue la tesi. □

Esercizio 8.3.8. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$, un punto di accumulazione per A. Dimostrare che se f è pari allora

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Leftrightarrow (f \text{ è derivabile in } -x_0)$$

e, in tal caso,

$$f'(-x_0) = -f'(x_0)$$

Sol: Conseguenza della Proposizione 8.3.7.

Proposizione 8.3.9. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile.*
Dimostrare che

$$f \textit{ dispari} \Rightarrow f' \textit{ pari.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia f dispari. Se $x_0 \in A$ si ha

$$f'(-x_0) = \lim_{x \to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x} \overset{y=-x}{=} \lim_{y \to 0} \frac{f(-y) - f(x_0)}{-y}$$

$$\overset{f \text{ dispari}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{-f(y) + f(-x_0)}{-y} = \lim_{y \to 0} \frac{f(y) - f(-x_0)}{y} = f'(x_0).$$

Dall'arbitrarietà di x_0 segue la tesi. □

Esercizio 8.3.10. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in A$, un punto di accumulazione per A. Dimostrare che se f è dispari allora

$$f \text{ è derivabile in } x_0 \Leftrightarrow (f \text{ è derivabile in } -x_0)$$

e, in tal caso,

$$f'(-x_0) = f'(x_0).$$

Sol: Conseguenza della Proposizione 8.3.9.

8.4. Esercizi

Esercizio 8.4.1. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e siano $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$, derivabili in $x \in A \cap D(A)$. Dimostrare che, definita $\prod_{i=1}^{n} f_i : I \to \mathbb{R}$,

$$\prod_{i=1}^{n} f_i(x) := f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x)$$

si ha che $\prod_{i=1}^{n} f_i$ è derivabile in x e

$$(\prod_{i=1}^{n} f_i)'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} f_i(x).$$

Sol: Per induzione. La si lascia al lettore.

Esercizio 8.4.2. Dimostrare per induzione la seguente proprietà relativa a due funzioni f, g derivabili n volte in x_0: la funzione prodotto fg è derivabile n volte in x_0 e si ha

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Sol:
Se $n = 1$ l'affermazione è vera (formula di derivazione di un prodotto).
Sia vera per n e dimostriamo che è vera per $n+1$.

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x_0) = D(fg)^{(n)}(x_0) &\overset{\text{Hp. ind.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D\left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)(x_0) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) + f^{(k)}(x_0) g^{(n-k+1)}(x_0)\right) \\
&= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} f^{(h)}(x_0) g^{(n-(h-1))}(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k+1)}(x_0) \\
&= \binom{n}{n+1-1} f^{(n+1)}(x_0) g^{(n-(n+1-1))}(x_0) + \sum_{h=1}^{n} \binom{n}{h-1} f^{(h)}(x_0) g^{(n-(h-1))}(x_0) \\
&\quad + \binom{n}{0} f^{(0)}(x_0) g^{(n-0+1)}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k+1)}(x_0) \\
&= f^{(n+1)}(x_0) g^{(0)}(x_0) + \sum_{h=1}^{n} \left(\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h}\right) f^{(h)}(x_0) g^{(n-(h-1))}(x_0) + f^{(0)}(x_0) g^{(n-0+1)}(x_0)
\end{aligned}$$

che, per il Lemma 5.3.39, coincide con

$$= f^{(n+1)}(x_0)g^{(0)}(x_0) + \sum_{h=1}^{n} \binom{n+1}{h} f^{(h)}(x_0)g^{(n-(h-1))}(x_0) + f^{(0)}(x_0)g^{(n+1)}(x_0)$$

da cui la tesi, essendo

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 = \binom{n+1}{0}$$

Esercizio 8.4.3. Dimostrare che la funzione arcsin non è derivabile in -1 e in 1.

Sol: Consideriamo solo il caso $x = 1$ e lasciamo il caso $x = -1$ al lettore.

I modo:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\arcsin(1+h) - \arcsin(1)}{h} \overset{\mathrm{Dom}\arcsin=[-1,1]}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{\arcsin(1+h) - \arcsin(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\arcsin(1+h) - \frac{\pi}{2}}{h} \overset{\text{F.I.}}{=} \frac{0}{0}. \tag{8.4.1}$$

Usando il Teorema dell'Hopital:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\arcsin(1+h) - \frac{\pi}{2}}{h} \overset{\text{H}}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(1+h)^2}}}{1}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1-(1+2h+h^2)}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-2h-h^2}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-2h}} = +\infty.$$

II modo:

Procediamo da (8.4.1). Per l'Esercizio 8.2.3 l'ultimo limite coincide con

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-\arccos(1+h)}{h}.$$

Col cambio di variabile $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$\cos(t) - 1 = h$$

si ha

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-\arccos(1+h)}{h} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\arccos(\cos(t))}{\cos(t)-1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{-t}{\cos(t)-1} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\frac{1-\cos(t)}{t}} \overset{Es.7.8.30}{=} (\frac{1}{0^+}) = +\infty.$$

III modo:

Usiamo il Lemma 8.3.2 applicato alla funzione $\arcsin : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Si ha

$$\lim_{x\to 1^-} D\arcsin(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\frac{1}{0^+}) = +\infty.$$

Allora, per il Lemma 8.3.2,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin(x)-\arcsin(1)}{x-1} = +\infty.$$

Esercizio 8.4.4. Calcolare la derivata di $\dfrac{\log\arctan x}{(2x+1)^2}$ usando le formule di derivazione.
Sol:

$$D\left(\frac{\log\arctan x}{(2x+1)^2}\right) = \frac{\frac{1}{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}(2x+1)^2 - \log(\arctan x)2(2x+1)2}{(2x+1)^4}.$$

Esercizio 8.4.5. Calcolare

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2-2).$$

SOL. ES. 8.4.5. Sfruttando la regola di derivazione della funzione composta, cioè

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$$

otteniamo

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2-2) = \cos(x^2-2)\cdot 2x.$$

□

Esercizio 8.4.6. Calcolare

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan(x^2)-2x}{x\sin x}\right).$$

SOL. ES. 8.4.6. Sfruttiamo la regola di derivazione del rapporto:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan(x^2)-2x}{x\sin x}\right) = \\
&= \frac{(\arctan(x^2)-2x)'x\sin x - (\arctan(x^2)-2x)(x\sin x)'}{x^2\sin^2 x} = \\
&= \frac{\left(\frac{1}{1+x^4}\cdot 2x-2\right)x\sin x - (\arctan(x^2)-2x)(\sin x + x\cos x)}{x^2\sin^2 x} = \\
&= \frac{(2x-2(1+x^4))x\sin x - (1+x^4)(\sin x + x\cos x)(\arctan(x^2)-2x)}{(1+x^4)x^2\sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

□

Esercizio 8.4.7. Si calcoli
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin e^x}{\ln(x-\tan(x^2))}\right).$$

SOL. ES. 8.4.7. Utilizziamo la regola di derivazione del rapporto, inoltre sfruttiamo il fatto che:
$$\frac{d}{dx}\sin e^x = \cos e^x \cdot \frac{d}{dx}e^x = e^x \cos e^x,$$
$$\frac{d}{dx}\ln(x-\tan(x^2)) = \frac{1}{x-\tan(x^2)}\cdot\frac{d}{dx}(x-\tan(x^2)) =$$
$$= \frac{1}{x-\tan(x^2)}\left(1-\frac{1}{\cos^2(x^2)}2x\right) = \frac{\cos^2(x^2)-2x}{x\cos^2(x^2)-\sin(x^2)\cos(x^2)}.$$
Allora otteniamo
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin(e^x)}{\ln(x-\tan(x^2))}\right) =$$
$$= \frac{e^x\cos(e^x)\ln(x-\tan(x^2)) - \sin(e^x)\frac{\cos^2(x^2)-2x}{x\cos^2(x^2)-\sin(x^2)\cos(x^2)}}{\ln^2(x-\tan(x^2))}.$$
□

Esercizio 8.4.8. Calcolare
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan(x^2)-2x}{x\sin x}\right).$$

Esercizio 8.4.9. Determinare per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x\neq 0\end{cases}$$
è derivabile in 0.

Sol:

Si noti che f è dispari, quindi, per l'Esercizio 8.3.6 basta studiare il limite del rapporto incrementale di f in 0 da destra.

Si ha
$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{|x|^\alpha\sin\frac{1}{x}}{x} \overset{x\geq0}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{1-\alpha}}.$$
Sia $\alpha<1$:

Per $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$,
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi} = 0$$
e si ha
$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\right)^{1-\alpha}} = \left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)^{1-\alpha}\cdot 1 = +\infty.$$

Dunque f non è derivabile in 0.
Sia $\alpha = 1$. Allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$$
e tale limite non esiste. Infatti
$$\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \sin(y)$$
che sappiamo non esistere (v. Teorema 6.7.25).
Se $\alpha > 1$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{1-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} = 0.$$
Che il limite sia 0 segue dal fatto che è il limite del prodotto di una funzione infinitesima ($x^{\alpha-1}$) per una limitata ($\sin\frac{1}{x}$) per $x \to 0^+$, v. Teorema 7.3.4.
Dunque, per l'Esercizio 8.3.6, si ha che f è derivabile in 0 se e solo se $\alpha > 1$ e tale limite vale 0.

Esercizio 8.4.10. Trovare l'insieme di derivabilità della funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2+1-\cos x}.$$

SOL. ES. 8.4.10. Se $x \neq 0$ allora $x^2 > 0$ e $1-\cos x \geq 0$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, quindi il radicando è positivo in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. La funzione $y \mapsto \sqrt{y}$ è derivabile in $y > 0$. Inoltre, essendo il radicando una somma di funzioni derivabili abbiamo che la funzione f è composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sarà inoltre
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1-\cos x}}(2x+\sin(x)).$$
Studiamo ora la derivabilità di f in $x = 0$:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}}}{x}.$$
Ora abbiamo
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}}}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}}}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}}}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{1+\frac{1-\cos x}{x^2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$
Allora f non è derivabile in $x = 0$. □

Esercizio 8.4.11. Studiare la derivabilità in 0 di

$$f(x) = \sin(x)\sqrt[3]{x-2}e^{2\sqrt[5]{x}}.$$

Sol:
Per definizione si deve calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

ossia

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sqrt[3]{x-2}e^{2\sqrt[5]{x}}}{x}$$

Tenuto conto che per $x \to 0$ è

$$\sin(x) \sim x,$$

che

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$$

e che

$$\lim_{x\to 0} e^{2\sqrt[5]{x}} = e^0 = 1$$

ne segue che il limite sopra coincide con

$$-\sqrt[3]{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = -\sqrt[3]{2}\lim_{x\to 0} 1 = -\sqrt[3]{2}.$$

Dunque, f è derivabile in 0 e $f'(0) = -\sqrt[3]{2}$.

Esercizio 8.4.12. Studiare la derivabilità in 2 di

$$f(x) = \sin(x)\sqrt[3]{x-2}e^{2\sqrt[5]{x}}$$

Sol:
Per definizione si deve calcolare:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(2+h)\sqrt[3]{h}e^{2\sqrt[5]{2+h}}}{h} = \sin(2)e^{2\sqrt[5]{2}}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$

$$= \sin(2)e^{2\sqrt[5]{2}}\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \sin(2)e^{2\sqrt[5]{2}}\lim_{h\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{h^2}} = +\infty$$

in quanto

$$2 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\quad \Rightarrow \quad \sin 2 > 0.$$

Dunque, f non è derivabile in 2.

Esercizio 8.4.13. Calcolare il limite del rapporto incrementale di $f(x) = \cos(x^2)$ in 0 e determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(0, f(0))$.
[R.: 0 e $y = 1$]
Sol.:
f è derivabile in 0 in quanto è composizione di funzioni derivabili in 0.
Si ha

$$f'(x) = -\sin(x^2)2x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0.$$

L'equazione della retta tangente richiesta è

$$y = f(0) + f'(0)(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = 1 + 0(x) \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Esercizio 8.4.14. Studiare la derivabilità in 0 di

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 e^{-x} - x^3) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ a \arcsin(x) + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
SOL:
Se f non è continua in 0 non può essere neppure derivabile. Deve quindi essere, in particolare,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0),$$

ossia

$$\lim_{x \to 0^-} \log(x^2 e^{-x} - x^3) = 0.$$

Dato che

$$\lim_{x \to 0^-} (x^2 e^{-x} - x^3) = 0$$

allora

$$\lim_{x \to 0^-} \log(x^2 e^{-x} - x^3) = -\infty.$$

La funzione f non è continua in 0, quindi neppure derivabile.

Esercizio 8.4.15. Studiare la derivabilità in 0 di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - \cos(x) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ a \arcsin(x) + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.
SOL:

Se f non è continua in 0 non può essere neppure derivabile. Deve quindi essere, in particolare,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \quad \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} (e^{3x} - \cos(x)) = 0$$

cosa che è vera.
Deve essere, inoltre,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0),$$

ossia

$$\lim_{x\to 0^+} (a\arcsin(x) + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot 0 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

Dunque deve essere $b = 0$ e quindi

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - \cos(x) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ a\arcsin(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x} - \cos(x)}{x}$$

ed essendo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x} - \cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x} - 1}{x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{3x}{x} + 0 = 3$$

deduciamo che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3.$$

Affinché f sia derivabile deve essere

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 3.$$

Dato che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a\arcsin(x)}{x} = a$$

si conclude che f è derivabile in 0 se e solo se $a = 3$, $b = 0$.

Esercizio 8.4.16. Trovare i valori del parametro reale a per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(ax)}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ ax & \text{se} \quad x \le 0 \end{cases}$$

è derivabile.

SOL. ES. 8.4.16. La funzione f è senz'altro derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{a\sin(ax)-(1-\cos(ax))2x}{x^2} & \text{se} \quad x>0\\ a & \text{se} \quad x<0\end{cases}$$

Resta da discutere la derivabilità in 0.
Dobbiamo vedere se il limite del rapporto incrementale di f in 0 esiste ed è finito.

- Se $a=0$ allora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è la funzione nulla. Quindi f è derivabile in 0 e la sua derivata vale 0.
- Se $a\neq 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=a^2\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=\frac{a^2}{2},$$

e

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{ax}{x}=a.$$

Allora f è derivabile in 0 se e solo se

$$a=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow a^2-2a=0\Leftrightarrow a(a-2)=0\Leftrightarrow a=0\vee a=2.$$

$\square$

Esercizio 8.4.17. Studiare, usando la definizione, la derivabilità in $0\in\mathbb{R}$ di $f(x)=\sqrt[3]{x}$
Sol:
$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=+\infty$, quindi $\nexists f'(0)$.

Esercizio 8.4.18. Studiare la derivabilità in 0 di

$$f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{se } x<0\\ \sin\left(x^2-\frac{\pi}{x+1}\right) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

[Sol.: f non è derivabile in 0, perché $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0$ e $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=-\pi$, quest'ultimo limite può essere giustificato:
(1) calcolando esplicitamente il limite,
oppure
(2) notando che $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=g'(0)$, dove $g:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$, $g(x):=\sin\left(x^2-\frac{\pi}{x+1}\right)$ è derivabile (è composizione di funzioni derivabili) e calcolando, usando le regole di derivazione di funzione composta, il valore di $g'(0)$, che risulta essere $-\pi$]

Esercizio 8.4.19. Studiare la derivabilità in 1 della funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+2}}.$$

Sol:
I modo:
Usiamo la definizione: essendo 1 un punto di accumulazione unilatero da destra, si deve calcolare

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\frac{(1+h-1)^3}{1+h+2}}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^3}{3+h}}}{h}.$$

Dato che

$$\frac{h^3}{3+h} \sim \frac{1}{3}h^3 \qquad \text{per } h \to 0^+,$$

allora

$$\sqrt{\frac{h^3}{3+h}} \sim \sqrt{\frac{1}{3}h^3} \qquad \text{per } h \to 0^+.$$

Allora, per il principio di sostituzione con gli asintotici nel prodotto, Proposizione 7.9.13, si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{h^3}{3+h}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{\frac{1}{3}h^3}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{h} = 0.$$

II modo:
f è continua in 1 (composizione di funzioni continue).
In $]1, +\infty[$ è

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x+2}}} \frac{3(x-1)^2(x+2)-(x-1)^3}{(x-2)^2} = \frac{\sqrt{\frac{x+2}{(x-1)^3}}}{2} \frac{(x-1)^2(2x+7)}{(x+2)^2}.$$

Si hanno:

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+2} = \sqrt{3}$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+7}{(x+2)^2} = \frac{9}{9} = 1$$

quindi, per il principio di sostituzione con gli asintotici nel prodotto, Proposizione 7.9.13,

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Esercizio 8.4.20. Si consideri $f(x) = |x-1|^\alpha e^{x^2}$. Studiare la derivabilità di f in $x = 1$ al variare di $\alpha \geq 0$.
Sol.:
Se $\alpha = 0$ è $f(x) = e^{x^2}$ che è derivabile perché composizione di funzioni derivabili. Si ha

$$f'(x) = 2xe^{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 2e.$$

Se $\alpha > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|1+h-1|^\alpha e^{(1+h)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha e^{(1+h)^2}}{h}.$$

Notiamo che

$$\lim_{h\to 0} e^{(1+h)^2} = e,$$

quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha e^{(1+h)^2}}{h} = e \lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha}{h}.$$

Ora, se $\alpha \in]0,1[$ si ha

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1-\alpha}} = +\infty,$$

allora f non può essere derivabile in 1.
Se $\alpha = 1$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \operatorname{sgn}(x),$$

limite che sappiamo non esistere.
Se $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} |h|^{1-\alpha}$$

Tale limite esiste e vale 0, in quanto è il limite della funzione limitata $\frac{|h|}{h}$ (è la funzione segno) per la funzione $|h|^{1-\alpha}$ che è infinitesima per h tendente a 0.
Dunque, se $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|^\alpha}{h} = 0.$$

Conclusione: f è derivabile in 1 se e solo se $\alpha = 0$ oppure $\alpha > 1$. Per tutti questi α risulta $f'(1) = 0$.

Esercizio 8.4.21. Sia $f(x) = \sqrt{e^{|x-1|}}$. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 1} f'(x)$,
Sol:
f è derivabile nei punti diversi da 1 in quanto composizione di funzioni derivabili e in tali punti è

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{|x-1|}}} e^{|x-1|} \operatorname{sgn}(x-1) = \frac{\sqrt{e^{|x-1|}}}{2} \operatorname{sgn}(x-1).$$

Ora,

$$x \mapsto \operatorname{sgn}(x-1) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1 \\ -1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{e^{|x-1|}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\frac{1}{2}.$$

Dunque non esiste il limite.

Esercizio 8.4.22. Si consideri $f(x) = \sqrt{e^{|x-1|}}$. Studiare la derivabilità di f in $x = 1$.

Sol:

Usando la definizione:

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{e^{|x-1|}} - \sqrt{e^0}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{e^{|x-1|}} - 1}{x-1}$$
$$\overset{y=x-1}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{e^{|y|}} - 1}{y}.$$

Usando il metodo di razionalizzazione si ha:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{e^{|y|}} - 1}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{|y|} - 1}{y\left(\sqrt{e^{|y|}} + 1\right)}.$$

Per il Teorema 7.8.16

$$e^{|y|} - 1 \sim |y| \quad \text{per } y \to 0,$$

inoltre

$$\sqrt{e^{|y|}} + 1 \sim 2 \quad \text{per } y \to 0.$$

Dunque

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{|y|} - 1}{y\left(\sqrt{e^{|y|}} + 1\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{2} \frac{|y|}{y}.$$

Tale limite non esiste:

$$\lim_{y\to 0^-} \frac{1}{2} \frac{|y|}{y} = -\frac{1}{2}, \qquad \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{2} \frac{|y|}{y} = \frac{1}{2}$$

Allora f non è derivabile in 1.

Esercizio 8.4.23. Studiare la derivabilità in 0 di

$$f(x) = \sqrt{|\sin(2x)|}.$$

SOL. ES. 8.4.23.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|\sin(2h)|}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|2h|}}{h}.$$

Ora, osserviamo che

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{|2h|}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{2h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sqrt{\frac{2}{h}}=+\infty.$$

Questo è sufficiente per concludere che non esiste $f'(0)$. □

Esercizio 8.4.24. Studiare la derivabilità di f in $x=0$, con

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin(2x)-3x & \text{se } x<0 \\ \\ \sqrt{3x} & \text{se } x\geq 0. \end{cases}$$

SOL. ES. 8.4.24. Osserviamo che si devono studiare separatamente i limiti per $h\to 0^+$ e per $h\to 0^-$, perché $f(0+h)=f(h)$ ha due espressioni diverse a seconda del segno di h.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2\sin(2h)-3h}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2\sin(2h)}{h}-\lim_{h\to 0^-}\frac{3h}{h}=4-3=1,$$

mentre

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{3h}}{h}=+\infty.$$

Concludiamo che f non è derivabile in 0. □

Esercizio 8.4.25. Studiare la derivabilità di f in $x=0$, con

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x|x|)}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x=0. \end{cases}$$

SOL. ES. 8.4.25. Studiamo separatamente i limiti destro e sinistro:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(h|h|)}{h^2}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(-h^2)}{h^2}=-1.$$

D'altra parte,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(h|h|)}{h^2}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin(h^2)}{h^2}=1,$$

pertanto la funzione f non è derivabile per $x=0$. □

Esercizio 8.4.26. Studiare la derivabilità di f in $x=0$, con

$$f(x)=\sqrt[5]{x^4}\,|\arctan x|.$$

SOL. ES. 8.4.26.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{h^4}|\arctan h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|\arctan h|}{h^{\frac{1}{5}}}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h^{\frac{1}{5}}}=0.$$

Pertanto $f'(0)=0$. □

Esercizio 8.4.27. Studiare la derivabilità di f in $x=0$ con

$$f(x)=\begin{cases}\arctan(x^2) & \text{se } x<0\\ 0 & \text{se } x=0\\ x\log x & \text{se } x>0.\end{cases}$$

SOL. ES. 8.4.27.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\arctan(h^2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2}{h}=0.$$

D'altra parte,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\log h}{h}=\lim_{h\to 0^+}\log h=-\infty.$$

Dunque f non è derivabile in $x=0$. □

Esercizio 8.4.28. Si consideri

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a|\sin x^2|}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Determinare gli $a\in\mathbb{R}$ tali che f sia derivabile in $x=0$.

SOL. ES. 8.4.28.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a|\sin(h^2)|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{a|h^2|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{ah^2}{h^2}=a,$$

per cui f è derivabile in 0 per ogni $a\in\mathbb{R}$. □

Esercizio 8.4.29. Si consideri $f:[-2,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x):=\begin{cases}||x|-1| & \text{se } -2\le x<0\\ 1-2^{-x} & \text{se } x\ge 0.\end{cases}$$

Determinare i punti di non derivabilità di f.

SOL. ES. 8.4.29. Nei punti $x>0$ la funzione f è chiaramente derivabile. Osserviamo che f non è derivabile in 0 perché non è nemmeno continua. Infatti

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0,$$

mentre
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1.$$
Ora, il valore assoluto si annulla per $|x| = 1$, cioè per $x = -1$ oppure $x = 1$. Il valore $x = 1$ non appartiene all'intervallo in cui $f(x) = ||x|-1|$, per cui si deve studiare solamente la derivabilità per $x = -1$.
Notiamo che se $x < 0$ allora $|x| = -x$.
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{||-1+h|-1|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|(1-h)-1|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$
e tale limite non esiste perché il limite destro è uguale a 1 mentre il limite sinistro è -1.
In conclusione, f non è derivabile nei punti $x = 0$, dove la funzione non è continua, e $x = -1$. □

Esercizio 8.4.30. Studiare la derivabilità di f in $x = 0$ con
$$f(x) = -2|x| + 10 \arctan \frac{|x|}{|x|+1}.$$

SOL. ES. 8.4.30.
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2|h| + 10 \arctan \dfrac{|h|}{|h|+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{10 \arctan \dfrac{|h|}{|h|+1}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{10 \dfrac{|h|}{|h|+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0} 10 \frac{|h|}{h|h|+h}$$
Ora,
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0^+} 10 \frac{|h|}{h|h|+h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h}{h} + \lim_{h\to 0^+} 10 \frac{h}{h^2+h} = -2+10 = 8,$$
mentre
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0^-} 10 \frac{|h|}{h|h|+h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} + \lim_{h\to 0^-} 10 \frac{-h}{-h^2+h} = 2-10 = -8.$$
In conclusione f non è derivabile in $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2|h| + 10 \arctan \dfrac{|h|}{|h|+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{10 \arctan \dfrac{|h|}{|h|+1}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{10 \dfrac{|h|}{|h|+1}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0} 10 \frac{|h|}{h|h|+h}$$
Ora,
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0^+} 10 \frac{|h|}{h|h|+h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h}{h} + \lim_{h\to 0^+} 10 \frac{h}{h^2+h} = -2+10 = 8,$$

mentre

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{-2|h|}{h} + \lim_{h\to 0^-} 10\frac{|h|}{h|h|+h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} + \lim_{h\to 0^-} 10\frac{-h}{-h^2+h} = 2-10=-8.$$

In conclusione f non è derivabile in $x=0$. $\square$

Esercizio 8.4.31. Studiare la derivabilità di f in $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x+x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Sol:

f non è continua in 0, quindi neppure derivabile. Infatti:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0 \neq f(0).$$

Esercizio 8.4.32. Studiare la derivabilità di f in $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x+x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Sol:

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^2)}{x+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x(x+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Dunque esiste $f'(0) = 1$.

Esercizio 8.4.33. Calcolare, usando il calcolo differenziale, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

[R.: 1]

Sol.:

$$(\sin x)^{\tan x} = e^{\tan x \log(\sin(x))}$$

Si ha

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x \log(\sin(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\log(\sin(x))}{\cos x} \overset{\sin(\frac{\pi}{2})=1}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin(x))}{\cos x} \overset{\text{F.I.}}{=} \frac{0}{0}.$$

Si ha, per il Teorema dell'Hopital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin(x))}{\cos x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin(x)}\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Quindi il limite è $e^0 = 1$.

Esercizio 8.4.34 (Prova scritta 14-1-2019). Si consideri $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| \exp\left(\dfrac{-1}{-2x^2+3x}\right)}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Calcolare $f'(-1)$.

(b) Studiare la derivabilità di f in 0.

[R. (a): $-e^{\frac{1}{5}}\frac{57}{25}$, (b): $\nexists f'(0)$.]

SOL. ES. 8.4.34. (a) Se $x < 0$, allora

$$f(x) = \frac{-xe^{\frac{1}{2x^2-3x}}}{x^3} = -\frac{e^{\frac{1}{2x^2-3x}}}{x^2}.$$

Pertanto,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\left(e^{\frac{1}{2x^2-3x}} \cdot \left(-\frac{4x-3}{(2x^2-3x)^2}\right)x^2 - e^{\frac{1}{2x^2-3x}}2x\right) \qquad \text{per ogni } x < 0.$$

Sostituendo il valore $x = -1$, si ottiene

$$f'(-1) = -\left(e^{\frac{1}{5}}\frac{7}{25} + 2e^{\frac{1}{5}}\right) = -\frac{57}{25}e^{\frac{1}{5}}$$

(b) Studiamo la derivabilità di f in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|e^{\frac{1}{2x^2-3x}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|e^{\frac{1}{2x^2-3x}}}{|x|^4} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{2x^2-3x}}}{|x|^3}.$$

Si ha

$$\frac{1}{2x^2-3x} \sim \frac{1}{-3x} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{2x^2-3x}}}{|x|^3} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x^2-3x}-\frac{1}{-3x}}\frac{e^{\frac{1}{-3x}}}{|x|^3}$$

studiamo i limiti dei due fattori.

Vale

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{-3x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{-3x}} = 0,$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{-3x}}}{|x|^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{-3x}}}{-x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{-3x}}}{|x|^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{-3x}}}{x^3} = 0.$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x^2-3x}-\frac{1}{-3x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-3x-2x^2+3x}{-3x(2x^2-3x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-2x^2}{-3x(2x^2-3x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-2x^2}{9x^2}} = e^{\frac{-2}{9}}$$

deduciamo che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = e^{\frac{-2}{9}} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{-3x}}}{-x^3} = +\infty$$

Questo è sufficiente per concludere che non esiste $f'(0)$ ossia che f non è derivabile in $x=0$.

$\square$

Esercizio 8.4.35 (Prova scritta 4-2-2019). Si consideri $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\sin(2x-4)}{|x^2-5x+6|} & \text{se } x \neq 2 \\ \\ 0 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

(a) Calcolare $f'(1)$.

(b) Studiare la derivabilità di f in 2.

[R. (a): $-\cos 2 + \frac{1}{4}\sin 2$, (b): $\nexists f'(2)$.]

Sol. es. 8.4.35. (a) Osserviamo che

$$|x^2-5x+6| = \begin{cases} x^2-5x+6 & \text{se } x<2 \text{ oppure } x>3, \\ -(x^2-5x+6) & \text{se } 2<x<3, \end{cases}$$

pertanto, per $x<2$ (in particolare per $x=1$), $|x^2-5x+6| = x^2-5x+6$.

Allora,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)\sin(2x-4)}{x^2-5x+6} & \text{se } x<2 \text{ oppure } x>3 \\ 0 & \text{se } x=2 \\ -\dfrac{(x-2)\sin(2x-4)}{x^2-5x+6} & \text{se } 2<x<3, \end{cases}$$

quindi, per $x<2$,

$$f'(x) = \frac{\big((x-2)\cdot\cos(2x-4)\cdot 2 + 1\cdot\sin(2x-4)\big)(x^2-5x+6) - (x-2)\sin(2x-4)\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}.$$

Per $x=1$, si trova

$$f'(1) = \frac{2\cdot\big(-1\cdot\cos(-2)\cdot 2+\sin(-2)\big) - (-1)\sin(-2)\cdot(-3)}{2^2}$$

$$= \frac{-4\cos(-2) - \sin(-2)}{4} = -\cos(2) + \frac{1}{4}\sin(2).$$

(b) Studiamo il limite del rapporto incrementale per $x \to 2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{(x-2)\sin(2x-4)}{|x^2-5x+6|} - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{|x^2-5x+6|} = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{|x-2|\cdot|x-3|} = (\bullet).$$

Ricordando che $\sin(2x-4) \sim 2(x-2)$ per $x \to 2$,

$$(\bullet) = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{|x-2|\cdot|x-3|} = \lim_{x\to 2} \frac{2\mathrm{sgn}(x-2)}{|x-3|}.$$

È immediato verificare che tale limite non esiste, dal momento che

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2\mathrm{sgn}(x-2)}{|x-3|} = -2$$

mentre

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2\mathrm{sgn}(x-2)}{|x-3|} = 2.$$

Pertanto f non è derivabile in $x = 2$. $\square$

Esercizio 8.4.36 (Prova scritta 3-6-2019). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |4x^4 - 9x^2|^{|x|} & \text{se } x \notin \{0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\} \\ \\ cx^2 + d & \text{se } x \in \{0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}. \end{cases}$$

(a) Determinare c e d in modo tale che f sia continua,

(b) Sostituendo a c e a d i valori determinati in (a), studiare la derivabilità di f in 0.

[Sugg.: per (b) si suggerisce l'uso della definizione di derivata.]

[R. (a): $c = -\frac{4}{9}$, $d = 1$, (b): $\nexists f'(0)$]

SOL. ES. 8.4.36. (a) Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$,

$$|4x^4 - 9x^2|^{|x|} = e^{|x|\log|4x^4-9x^2|}.$$

Ora,

$$\lim_{x\to 0} |x|\log|4x^4 - 9x^2| = 0,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} e^{|x|\log|4x^4-9x^2|} = e^0 = 1.$$

Affinchè f sia continua in 0, deve essere $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, pertanto deve essere $f(0) = 1$, ossia $c\cdot 0^2 + d = 1$, da cui $d = 1$.

Studiamo ora la continuità in $x = 3/2$. Dal momento che la funzione f è pari, lo studio di f in $x = 3/2$ equivale a quello in $x = -3/2$.

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}} |4x^4 - 9x^2|^{|x|} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} e^{x\log(x^2|4x^2-9|)} = e^{-\infty} = 0,$$

dunque f è continua in $3/2$ se e solo se $f(3/2) = 0$, ossia se e solo se $c(3/2)^2 + 1 = 0$, cioè $c = -4/9$.
(b) Studiamo la derivabilità di f in 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|4x^4 - 9x^2|^{|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{|x|\log|4x^4-9x^2|} - 1}{x}.$$

Abbiamo visto che

$$\lim_{x\to 0} |x|\log|4x^4 - 9x^2| = 0,$$

quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{|x|\log|4x^4-9x^2|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\log|4x^4 - 9x^2|}{x} = \lim_{x\to 0} \mathrm{sign}(x)\log|4x^4 - 9x^2|.$$

Quest'ultimo termine tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e tende a $+\infty$ per $x \to 0^-$, per cui f non è derivabile in $x = 0$.

□

Esercizio 8.4.37 (Prova scritta 1-7-2019). Siano $b \in]0,1[$ e $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (\log(|bx - 1| - |x|))^2 & \text{se } x \in A \setminus \{0\} \\ \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Determinare A, dominio naturale di f

(b) Determinare per quali $b \in]0,1[$ la funzione f è derivabile in 0.

[R. (a) $A = \left]-\frac{1}{1-b}, \frac{1}{1+b}\right[$, (b) esiste $f'(0)$ per ogni $b \in]0,1[$.]

Sol. Es. 8.4.37. (a) Si deve determinare $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid |bx - 1| - |x| > 0\} \cup \{0\}$.
Si deve risolvere la disequazione $|bx - 1| > |x|$, che è equivalente a

$$(bx - 1)^2 > x^2,$$

cioè

$$(b^2 - 1)x^2 - 2bx + 1 > 0.$$

Ricordando che $b \in (0,1)$, si trova

$$A = \left(\frac{1}{b-1}, \frac{1}{b+1}\right).$$

(b) f è continua in $x=0$. Infatti la funzione

$$x \mapsto (\log(|bx-1|-|x|))^2$$

è continua in 0, quindi

$$\lim_{x\to 0}(\log(|bx-1|-|x|))^2 = (\log(|b\cdot 0-1|-|0|))^2 = (\log(1))^2 = 0.$$

Quindi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Ora, calcoliamo $f'(x)$ per ogni $x \in A\setminus\{0\}$.

$$f'(x) = \frac{2\log(|bx-1|-|x|)}{|bx-1|-|x|}\cdot(b\cdot \operatorname{sgn}(bx-1)-\operatorname{sgn}(x)).$$

Abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}(|bx-1|-|x|) = 1,$$

quindi

$$\log(|bx-1|-|x|) \sim |bx-1|-|x|-1 \qquad \text{per } x\to 0.$$

Pertanto

$$f'(x) \sim 2\frac{|bx-1|-|x|-1}{|bx-1|-|x|}\cdot(b\cdot\operatorname{sgn}(bx-1)-\operatorname{sgn}(x)) \sim 2(|bx-1|-|x|-1)(b\cdot\operatorname{sgn}(bx-1)-\operatorname{sgn}(x)) \quad \text{per } x\to 0.$$

Ora,

$$\lim_{x\to 0}(|bx-1|-|x|-1) = 0,$$

e la funzione $x\mapsto (b\cdot\operatorname{sgn}(bx-1)-\operatorname{sgn}(x))$ è limitata, infatti, utilizzando la disuguaglianza triangolare e ricordando che $0<b<1$,

$$|b\cdot\operatorname{sgn}(bx-1)-\operatorname{sgn}(x)| \le b|\operatorname{sgn}(bx-1)|+|\operatorname{sgn}(x)| \le 1+1 = 2.$$

Allora

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2(|bx-1|-|x|-1)(b\cdot\operatorname{sgn}(bx-1)-\operatorname{sgn}(x)) = 0.$$

Concludendo, abbiamo trovato, per ogni $b\in(0,1)$, che f è continua in 0 e che esiste $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, quindi esiste $f'(0)=0$ per ogni $b\in(0,1)$. □

Esercizio 8.4.38 (Da prova scritta CdL Matematica 16-9-2019). Si consideri $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \left|\cos\left(\frac{|x-3|(x-3)}{|x-4|-1}\right)\right|(x-5) & \text{se } x\notin\{3,5\} \\ 1 & \text{se } x=3 \\ 0 & \text{se } x=5 \end{cases}$$

(a) Studiare la continuità e la derivabilità di f in 3

(b) Studiare la continuità e la derivabilità di f in 5.

[R. (a) f discontinua e non derivabile in 3, (b) f continua e non derivabile in 5.

SOL. ES. 8.4.38. Osserviamo che

$$\frac{|x-3|(x-3)}{|x-4|-1} = \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{x-5}, & x \geq 4, x \neq 5, \\ -(x-3), & 3 < x < 4, \\ x-3, & x < 3. \end{cases}$$

Poiché la funzione coseno è pari,

$$\left|\cos\left(\frac{|x-3|(x-3)}{|x-4|-1}\right)\right| = \begin{cases} |\cos(x-3)|, & x < 4, \\ \left|\cos\left(\dfrac{(x-3)^2}{x-5}\right)\right|, & x \geq 4, \end{cases}$$

da cui

$$f(x) = \begin{cases} |\cos(x-3)|(x-5), & x < 4, x \neq 3, \\ 1 & x = 3, \\ \left|\cos\left(\dfrac{(x-3)^2}{x-5}\right)\right|(x-5), & x \geq 4, x \neq 5, \\ 0 & x = 5. \end{cases}$$

(a) Studiamo la continuità di f in 3. Abbiamo

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} |\cos(x-3)|(x-5) = -2 \neq 1 = f(3).$$

f non è continua in 3, dunque non è nemmeno derivabile.

(b) f è continua in 5, infatti

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \left|\cos\left(\frac{(x-3)^2}{x-5}\right)\right|(x-5) = 0 = f(5),$$

perché è il prodotto di un fattore limitato per uno convergente a zero. Un teorema noto ci permette di concludere che il limite è zero.

Studiamo ora la derivabilità di f in $x = 5$.

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \left|\cos\left(\frac{(x-3)^2}{x-5}\right)\right|$$

e tale limite non esiste perché non esiste $\lim_{y\to+\infty} \cos(y)$.

$\square$

Esercizio 8.4.39 (Prova scritta 15-4-2021). Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}}$.

SOLUZIONE Es. 8.4.39:
I MODO:

$$(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}} = e^{\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|}} = e^{\frac{\log(1+|x|^3)}{\log|x|}}$$

Per $x<0$ si ha:

$$\frac{\log(1+|x|^3)}{\log|x|} = \frac{\log\left(|x|^3(\frac{1}{|x|^3}+1)\right)}{\log|x|}$$

$$= \frac{\log(|x|^3)+\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|} = \frac{3\log(|x|)+\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|} = 3+\frac{\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|}.$$

Tenuto conto che

$$\log(\frac{1}{|x|^3}+1) \sim \frac{1}{|x|^3} \quad \text{per } x\to-\infty$$

abbiamo

$$3+\frac{\log(\frac{1}{|x|^3}+1)}{\log|x|} \sim 3+\frac{\frac{1}{|x|^3}}{\log|x|} = 3+\frac{\log|x|}{|x|^3} \to 3+0=3 \quad \text{per } x\to-\infty.$$

Allora

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|}} = e^3.$$

II MODO:
Applicando l'Hopital per calcolare il limite dell'esponente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1-x^3}(-3x^2)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^3}{1-x^3} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Dunque

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}} = e^3.$$

II MODO:

$$(1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}} = e^{\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|}}$$

Applicando l'Hopital per calcolare il limite dell'esponente, si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\log(1-x^3)}{\log|x|} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{1-x^3}(-3x^2)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\alpha x^3}{1-x^3} = -3.$$

Dunque

$$\lim_{x\to-\infty} (1-x^3)^{\frac{1}{\log|x|}} = e^3.$$

Esercizio 8.4.40 (Prova scritta 25-1-2021). Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f(x) = \sin\left(\sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a)\right).$$

Determinare il dominio naturale di f e stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile in -2.

SOLUZIONE 8.4.40:

$$\mathrm{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2|x| \geq 0\}.$$

Si ha

$$x^2 - 2|x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|^2 - 2|x| \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x|(|x|-2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty,-2] \cup \{0\} \cup [2,+\infty[.$$

Pertanto

$$\mathrm{D}(f) =]-\infty,-2] \cup \{0\} \cup [2,+\infty[.$$

f è derivabile in -2 se esiste ed è finito

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}.$$

Si ha $f(-2) = 0$, quindi

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to-2^-} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a)\right)}{x+2}.$$

Dato che

$$\sin(y) \sim y \qquad \text{per } y \to 0$$

ed essendo

$$\lim_{x\to-2^-} \sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

allora $\forall a \in \mathbb{R}$ risulta

$$\sin\left(\sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a)\right) \sim \sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a) \qquad \text{per } y \to 0.$$

Dunque

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a)\right)}{x+2} = \lim_{x\to-2^-} \frac{\sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a)}{x+2}.$$

Tenuto conto che $x \to -2^-$ allora
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{x^2-2|x|}(x^2+x+a)}{x+2} \overset{x<0}{=} \lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{x(x+2)}(x^2+x+a)}{x+2}.$$
Se $\lim_{x\to -2^-}(x^2+x+a) \neq 0$ il limite sopra è divergente. Deve quindi essere
$$\lim_{x\to -2^-}(x^2+x+a) = 0 \quad \text{ossia} \quad 4-2+a=0 \quad \Leftrightarrow a=-2.$$
Per tale valore di a si ha:
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{x(x+2)}(x^2+x+a)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{\sqrt{x(x+2)}(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \sqrt{x(x+2)}(x-1) = 0.$$
Pertanto:
$$f \quad \text{è derivabile in } -2 \quad \Leftrightarrow \quad a=-2$$
e, in tal caso, $f'(-2)=0$.

Esercizio 8.4.41 (Prova scritta 28-6-2021). Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} e^{-(\log|x|)^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$
Studiare la derivabilità di f in 0. Calcolare poi, usando le regole di derivazione: $f'(-1)$.

SOLUZIONE Es. 8.4.41:
Essendo
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-(\log|x|)^2}}{x} \overset{F.I.}{=} \frac{0}{0}.$$
Si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(\log|x|)^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-(\log|x|)^2}}{|x|} \frac{|x|}{x}.$$
Calcoliamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(\log|x|)^2}}{|x|}.$$
Posto $t=\log|x|$ si ha che t tende a $-\infty$ se $x\to 0$ e che $e^t = |x|$. Quindi:
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-(\log|x|)^2}}{|x|} = \lim_{t\to -\infty} \frac{e^{-t^2}}{e^t} = \lim_{t\to -\infty} e^{-t^2+t} = 0$$
in quanto $\lim_{t\to-\infty}(-t^2+t) = \lim_{t\to-\infty}(-t^2) = -\infty$. La funzione è
$$x \mapsto \frac{|x|}{x} \quad \text{è limitata.}$$
Quindi $\exists f'(0)=0$.

In alternativa, usando, il teorema dell'Hopital, si ha da calcolare

$$\lim_{x\to 0}(-2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}\text{sgn}(x)e^{-(\log|x|)^2}).$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} -2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}\text{sgn}(x)e^{-(\log|x|)^2} = \lim_{x\to 0^+}(-2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}e^{-(\log|x|)^2})$$
$$\stackrel{t=\log|x|}{=} \lim_{t\to-\infty}\frac{-2te^{-t^2}}{e^t} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Analogamente:

$$\lim_{x\to 0^-} -2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}\text{sgn}(x)e^{-(\log|x|)^2} = \lim_{x\to 0^-}(2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}e^{-(\log|x|)^2})$$
$$\stackrel{t=\log|x|}{=} \lim_{t\to-\infty}\frac{2te^{-t^2}}{e^t}$$
$$= \lim_{t\to-\infty} 2te^{-t^2-t} = 0.$$

Quindi $\exists f'(0) = 0$.
Calcoliamo ora $f'(-1)$. Essendo $-1 < 0$ possiamo considerare $x < 0$, quindi

$$f'(x) = D(e^{-(\log|x|)^2}) = (-2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}\cdot\text{sgn}(x)e^{-(\log|x|)^2}) = (-2\log|x|\cdot\frac{1}{|x|}\cdot(-1)\cdot e^{-(\log|x|)^2}) = -2\cdot 0\cdot 1\cdot(-1)\cdot e^{-0} = 0.$$

Esercizio 8.4.42 (Prova scritta 15-2-2021). Al variare di $a\in\mathbb{R}$, si consideri

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x/|x-2|} & \text{se } x\neq 2 \\ a & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Stabilire per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione è derivabile in 2.

SOLUZIONE Es. 8.4.42:

$$\lim_{x\to 2} e^{-x/|x-2|} = 0$$

allora deve essere $a = 0$, altrimenti la funzione non è continua in 2 e quindi neppure derivabile in 2.
Sia $a = 0$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{-(2+h)/|h|}}{h}$$

Si ha

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-(2+h)/|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{e^{-(2+h)/h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}e^{-1-\frac{2}{h}} = \lim_{t\to+\infty} te^{-1-2t} = 0$$

per la gerarchia.
D'altra parte: Si ha

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-(2+h)/|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-(2+h)/(-h)}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h} e^{1+\frac{2}{h}} = \lim_{t\to -\infty} t e^{1+2t} = 0$$

ancora per la gerachia.
Dunque se $a=0$ allora

$$\exists f'(2) = 0.$$

Esercizio 8.4.43 (Prova scritta 7-9-2021). Si consideri la funzione $f:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x\sin(4|x^2-x|)}$$

Studiare la derivabilità di f in 0 e in 1. Calcolare poi, usando le regole di derivazione, $f'(x)$ per $x\in]0,1[$.

SOLUZIONE ES.8.4.43. In $[0,1]$ è $x^2-x = x(x-1)\le 0$ quindi

$$f(x) = \sqrt{x\sin(4(x-x^2))}.$$

$f'(0)$:
Essendo $f(0)=0$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x\sin(4(x-x^2))}}{x} \overset{\sin(4(x-x^2))\sim 4(x-x^2)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4x(x-x^2)}}{x}$$
$$\overset{x-x^2\sim x}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{|x|}}{x} = 2.$$

Dunque f è derivabile in 0 e $f'(0)=2$.
$f'(1)$:
Essendo $f(1)=0$, si ha

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x\sin(4(x-x^2))}}{x-1}$$

Vale

$$\lim_{x\to 1^-} x-x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin(4(x-x^2))\sim 4(x-x^2) \text{ se } x\to 1^-,$$

per cui

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x\sin(4(x-x^2))}}{x-1} \overset{\sin(4(x-x^2))\sim 4(x-x^2)}{=} \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{4x(x-x^2)}}{x-1}.$$

Essendo

$$x-x^2 = x(1-x)\sim 1-x \qquad \text{se } x\to 1^-$$

si ha

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{4x(x-x^2)}}{x-1}\overset{x-x^2\sim1-x}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{4x(1-x)}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{4x}\sqrt{1-x}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1^-}-\sqrt{4x}\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}-2\frac{\sqrt{1-x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}-2\frac{1}{\sqrt{1-x}}=-\infty.$$

Dunque f non è derivabile in 1.

$f'(x)$ con $0<x<1$:

$$f'(x)=D(\sqrt{x\sin(4(x-x^2))})=D(\sqrt{x\sin(4x-4x^2)})$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x\sin(4x-4x^2)}}\left[\sin(4x-4x^2)+x\cos(4x-4x^2)(4-8x)\right]$$

$\square$

Esercizio 8.4.44 (Prova scritta 16-1-2023). Al variare di $a\in\mathbb{R}$, si consideri

$$f(x)=\begin{cases}|x|^a\arctan\sqrt{x^2+2|x|} & \text{se } x\neq0\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$

(i) **(2 punti)** Determinare per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione è continua in 0

(ii) **(3 punti)** Determinare per quali $a\in\mathbb{R}$ la funzione è derivabile in 0.

(iii) **(2 punti)** Posto $a=1$, calcolare $f'(-1)$.

SOLUZIONE ES.8.4.44.

(i)

f è continua in 0 se

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to0}|x|^a\arctan\sqrt{x^2+2|x|}=0.$$

Essendo

$$\lim_{x\to0}\sqrt{x^2+2|x|}=0$$

allora

$$\arctan\sqrt{x^2+2|x|}\sim\sqrt{x^2+2|x|}\sim\sqrt{2|x|}\quad\text{per } x\to0.$$

Allora

$$\lim_{x\to0}|x|^a\arctan\sqrt{x^2+2|x|}=\lim_{x\to0}|x|^a\sqrt{2|x|}=\sqrt{2}\lim_{x\to0}|x|^{a+\frac12}$$

da cui otteniamo

$$\sqrt{2}\lim_{x\to0}|x|^{a+\frac12}=0\Leftrightarrow a>-\frac12.$$

(ii)

f è derivabile in 0 se esiste finito

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to0}\frac{|x|^a\arctan\sqrt{x^2+2|x|}}{x}.$$

Dalle osservazioni sopra ciò equivalente a richiedere che esista, finito,

$$\lim_{x\to0}\frac{|x|^a\sqrt{2|x|}}{x}=\lim_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)|x|^{a-1}\sqrt{2|x|}=\sqrt{2}\lim_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)|x|^{a-1+\frac12}.$$

Ciò è possibile se e solo se

$$a-\frac{1}{2}>0\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}.$$

Infatti, se $a=\frac12$ è

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt{2}\lim_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)$$

che non esiste, mentre, se $a<\frac12$, allora

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sqrt{2}\lim_{x\to0}\operatorname{sgn}(x)|x|^{a-\frac12}$$

il quale non esiste, essendo

$$\lim_{x\to0^+}\operatorname{sgn}(x)|x|^{a-\frac12}=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to0^-}\operatorname{sgn}(x)|x|^{a-\frac12}=-\infty.$$

(iii)

Sia $a=1$. Allora in $]-2,0[$ la funzione f coincide con $-x\arctan\sqrt{x^2-2x}$

Da cui

$$f'(x)=-\arctan\sqrt{x^2-2x}-x\frac{1}{1+(\sqrt{x^2-2x})^2}\frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2)$$

da cui

$$f'(-1)=-\arctan\sqrt{3}+\frac{1}{1+3}\frac{1}{2\sqrt{3}}(-4).$$

Essendo $\arctan\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ otteniamo

$$f'(-1)=-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

□

Esercizio 8.4.45 (Prova scritta 7-2-2023). Si consideri $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2\log(|x|^3+x^2) & \text{se } x\neq0\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$

(i) **(2 punti)** Dimostrare che la funzione è continua in 0

(ii) **(2 punti)** Determinare se la funzione è derivabile in 0.

(iii) **(2 punti)** Calcolare $f'(-1)$.

SOLUZIONE ES.8.4.45.

(i)

f è continua in 0 se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \log(|x|^3 + x^2) = 0.$$

E' noto che

$$\log(|x|^3 + x^2) \sim \log(x^2) \qquad \text{per } x \to 0,$$

infatti

$$\frac{\log(|x|^3 + x^2)}{\log(x^2)} = \frac{\log(x^2(|x|+1))}{\log(x^2)}$$

$$= \frac{\log(x^2) + \log(|x|+1)}{\log(x^2)} = 1 + \frac{\log(|x|+1))}{\log(x^2)}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(|x|+1))}{\log(x^2)} = 0.$$

Allora

$$\lim_{x\to 0} x^2 \log(|x|^3 + x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 \log(x^2) = \lim_{t\to 0^+} t \log(t) = 0$$

per i limiti notevoli.

Conclusione: f è continua in 0.

(ii)

I MODO:

f è derivabile in 0 se esiste finito

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log(|x|^3 + x^2)}{x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} x \log(|x|^3 + x^2).$$

Dalle osservazioni sopra ciò equivalente a richiedere che esista, finito,

$$\lim_{x\to 0} x \log(x^2)$$

e ciò succede: il valore del limite è 0.

Quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

II MODO:

La funzione f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, perché prodotto e composizione di funzioni derivabili.

Un condizione necessaria affinché f sia derivabile in 0 è che f sia continua in 0 e che esista, finito,

$$\lim_{x\to 0} f'(x).$$

Per $x \neq 0$ è:

$$f'(x) = 2x\log(|x|^3 + x^2) + x^2\frac{1}{|x|^3 + x^2}(3\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{3-1} + 2x).$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0} 2x\log(|x|^3 + x^2) = 0$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = x^2\frac{1}{|x|^3 + x^2}(3\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{3-1} + 2x).$$

Risulta

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{|x|^3 + x^2}(3\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{3-1} + 2x)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(3\frac{|x|^4}{|x|^3 + x^2}\,\mathrm{sgn}(x) + \frac{2x^3}{|x|^3 + x^2}\right).\end{aligned}$$

Il primo termine converge a 0 perché $\mathrm{sgn}(x)$ è limitata e

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|^4}{|x|^3 + x^2} = 0.$$

Il secondo termine converge a 0 infatti

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{|x|^3 + x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x^2} = 0.$$

Quindi f è derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

(iii)
Dal punto precedente

$$f'(x) = 2x\log(|x|^3 + x^2) + x^2\frac{1}{|x|^3 + x^2}(3\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{3-1} + 2x).$$

per cui

$$f'(-1) = -2\log(2) + \frac{1}{2}(-3-2) = -2\log(2) - \frac{5}{2}.$$

□

Esercizio 8.4.46 (Prova scritta 6-6-2023). Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a\left((\sqrt{|x|} - 1)^2 - |x-1|\right) & \text{se } x \neq 0\\ 0 & \text{se } x = 0.\end{cases}$$

(i) **(3 punti)** Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione è continua in 0

(ii) **(2 punti)** Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione è derivabile in 0

(iii) **(2 punti)** Posto $a = 1$, calcolare $f'(-\frac{1}{4})$.

SOLUZIONE ES.8.4.46. (i)

$f(0) = 0$. Allora f è continua in 0 se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} |x|^a \left((\sqrt{|x|} - 1)^2 - |x-1| \right) = 0.$$

Essendo

$$x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1,$$

allora per x vicino a 0

$$|x-1| = 1 - x.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left((\sqrt{|x|} - 1)^2 - |x-1| \right) &= |x| - 2\sqrt{|x|} + 1 - (1 - x) \\ &= -2\sqrt{|x|} + x + |x|. \end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{gathered} x + |x| = o(\sqrt{|x|}), \\ -2\sqrt{|x|} + x + |x| \sim -2|x|^{1/2} \quad \text{per } x \to 0. \end{gathered} \tag{8.4.2}$$

Allora

$$\lim_{x\to 0} |x|^a \left((\sqrt{|x|} - 1)^2 - |x-1| \right) = \lim_{x\to 0} -2|x|^{a+1/2}$$

che vale 0 se e solo se $a > -\frac{1}{2}$.

(ii)

f è derivabile in 0 se esiste finito

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{|x|^a \left((\sqrt{|x|} - 1)^2 - |x-1| \right)}{x}.$$

Da (8.4.2) esso coincide con

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2|x|^{a+\frac{1}{2}}}{x}.$$

Ora,

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2|x|^{a+\frac{1}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0} -2\frac{|x|}{x}|x|^{a-1/2}$$

che esiste ed è finito (e vale 0) se e solo se $a > \frac{1}{2}$. Se infatti $a = \frac{1}{2}$ è

$$\lim_{x\to 0} -2\frac{|x|}{x}|x|^{a-\frac{1}{2}} \lim_{x\to 0} -2\frac{|x|}{x}$$

che non esiste.

Analogamente per $a < \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -2 \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)|x|^{a-\frac{1}{2}}$$

avendo

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x)|x|^{a-\frac{1}{2}} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x)|x|^{a-\frac{1}{2}} = -\infty.$$

(iii)
Sia $a = 1$. Allora in $]-\frac{1}{2}, 0[$ la funzione f coincide con

$$\begin{aligned} -x\left((\sqrt{-x}-1)^2 - 1 + x\right) &= -x\left(-x - 2\sqrt{-x} + 1 - 1 + x\right) \\ &= -x\left(-2\sqrt{-x}\right) = 2x\sqrt{-x}. \end{aligned}$$

Da cui

$$f'(x) = 2\sqrt{-x} + 2x\frac{-1}{2\sqrt{-x}} = 2\sqrt{-x} - \frac{x}{\sqrt{-x}},$$

da cui

$$f'(-\frac{1}{4}) = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\sqrt{4} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

Esercizio 8.4.47 (Prova scritta 26-6-2023). Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-1)\arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right| & \text{se } x \notin \{-1, 1\} \\ 0 & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 1. \end{cases}$$

(i) **(2 punti)** Studiare la continuità di f in 1.
(ii) **(3 punti)** Studiare la derivabilità di f in 0.
(iii) **(2 punti)** Calcolare $f'(-2)$.

SOLUZIONE ES.8.4.47.
(i) f è continua in 1 se

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1}(x^2-1)\arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right| = 0.$$

Si ha

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$$

e la funzione

$$x \mapsto \arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|$$

è limitata, prendendo valori in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Allora
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$$
in quanto prodotto di funzione infinitesima per una limitata.

(ii)

I modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} \arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|$$

Posto $y = \frac{x}{x^2-1}$ si hanno
$$y = \frac{x}{x^2-1} \to 0^- \quad \text{se } x \to 0^+$$
e
$$y = \frac{x}{x^2-1} \to 0^+ \quad \text{se } x \to 0^-.$$
Allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} \arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|$$
$$\lim_{y\to 0^-} \frac{\arctan|y|}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{\arctan(-y)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{-\arctan(y)}{y} = -1$$
e
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} \arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|$$
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\arctan|y|}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\arctan(y)}{y} = 1.$$
La funzione f non è derivabile in $\{0\}$.

II modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x} \arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|$$
$$\overset{x^2-1\sim-1 \text{ per } x\to 0}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}{x}.$$
Dal momento che
$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{x}{x^2-1}\right| = 0$$
si ha
$$\arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right| \sim \left|\frac{x}{x^2-1}\right| \qquad \text{per } x \to 0.$$
Allora
$$\lim_{x\to 0} -\frac{\arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}{x}.$$

Si noti che per $-1 < x < 0$ è
$$\frac{x}{x^2-1} > 0$$
allora
$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\frac{x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{x^2-1} = 1.$$
Si noti che per $0 < x < 1$ è
$$\frac{x}{x^2-1} < 0$$
allora
$$\lim_{x\to 0^-} -\frac{\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2-1} = -1.$$
La funzione f non è derivabile in $\{0\}$.

(iii)

Per $x < -1$ è
$$\frac{x}{x^2-1} < 0$$
allora
$$(x^2-1)\arctan\left|\frac{x}{x^2-1}\right| = (x^2-1)\arctan\left(-\frac{x}{x^2-1}\right)$$
e per la disparità di arctan otteniamo
$$-(x^2-1)\arctan\frac{x}{x^2-1} \qquad \text{per } x < -1.$$
Quindi f è derivabile per ogni $x < -1$ e
$$f'(x) = -2x\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right) - (x^2-1)\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2-1}\right).$$
Dato che
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{1\cdot(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$
otteniamo
$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right) - (x^2-1)\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2}\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\\ &= -2x\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right) - (x^2-1)\frac{(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2+x^2}\cdot\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}\\ &= -2x\arctan\left(\frac{x}{x^2-1}\right) - (x^2-1)\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2+x^2}.\end{aligned}$$
Allora
$$f'(-2) = 4\arctan\left(\frac{-2}{4-1}\right) - (4-1)\frac{-4-1}{(4-1)^2+4}$$

$$= 4\arctan\left(\frac{-2}{3}\right) - 3\frac{-5}{9+4}$$
$$= 4\arctan\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{15}{13}.$$

$\square$

Esercizio 8.4.48 (Prova scritta 17-7-2023). Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{|x|} & \text{se } x < 0 \\ a\sin(x) & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) **(1.5 punti)** Determinare i valori di a per i quali la funzione è continua in 0.

(ii) **(2.5 punti)** Determinare i valori di a per i quali la funzione è derivabile in 0.

(iii) **(2 punti)** Calcolare $f'(-1)$.

SOLUZIONE ES.8.4.48.

(i)

f è continua in 0 se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{|x|} = a\sin(0) = 0.$$

Essendo

$$\arctan(x^4 - x^2) \sim -x^2 \qquad \text{per } x \to 0$$

allora

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{|x|}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} -|x| = 0$$

CONCLUSIONE: f è continua in 0 per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(ii)

$f|_{[0,+\infty[}(x) = a\sin(x)$. Dunque $f|_{[0,+\infty[}$ è derivabile. Essendo $D\sin(x) = \cos(x)$ deduciamo che la derivata destra di f esiste e

$$f'_+(0) = a\cos(0) = a.$$

Studiamo la derivata sinistra.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\arctan(x^4 - x^2)}{|x|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{x|x|}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-|x|^2}{x|x|}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = 1.$$

Quindi f è derivabile in 0 se e solo se $a = 1$ e in tal caso $f'(0) = 1$.

(iii)

Si tratta di derivare

$$x \mapsto \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{|x|}$$

e calcolarla in -1. Si ha

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan(x^4 - x^2)}{|x|}\right) = \frac{\frac{1}{1+(x^4-x^2)^2}(4x^3 - 2x)|x| - \arctan(x^4 - x^2)\,\mathrm{sgn}(x)}{|x|^2}$$

da cui

$$f'(-1) = \frac{1\cdot(-4+2) - \arctan(0)\cdot(-1)}{1} = -2.$$

□

Esercizio 8.4.49. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} a\sin(2x) - 4, & \text{se } x < 0, \\ b(x-1) + e^x, & \text{se } x \geq 0,, \end{cases}$$

stabilire per quali valori di a e b la funzione f è derivabile in $x = 0$.

Sol. Es. 8.4.49. Affinché f sia derivabile in $x = 0$ è necessario che f sia continua in $x = 0$. Studiamo pertanto la continuità di f in 0.

La funzione f è continua in 0 se e solo se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

ossia, essendo f definita in modo diverso se $x < 0$ e se $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

L'uguaglianza

$$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

è ovvia perché $f|_{[0,+\infty[}$ è continua. Studiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0),$$

ossia, essendo $f(0) = -b + 1$,

$$\lim_{x\to 0^-} a\sin(2x) - 4 = -b + 1 \Leftrightarrow -4 = -b + 1 \Leftrightarrow b = 5.$$

L'espressione della funzione è così:

$$f(x) = \begin{cases} a\sin(2x) - 4, & x < 0, \\ 5(x-1) + e^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\sin(2x) - 4 + 4}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\sin(2x)}{x} = 2a,$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5(x-1) + e^x + 4}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x}{x} + \frac{e^x - 1}{x} = 5 + 1 = 6,$$

pertanto concludiamo che f è derivabile in $x = 0$ se e soltanto se $a = 3$ e $b = 5$. □

Esercizio 8.4.50. Studiare la derivabilità di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - \cos x, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ a\arcsin x + b, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

SOL. ES. 8.4.50. I modo:
Se si vuole f derivabile in 0, dovrà essere in particolare continua in 0. La funzione f è continua in 0 se e solo se

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0),$$

ossia, essendo f definita in modo diverso se $x < 0$ e se $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

La prima uguaglianza è soddisfatta, infatti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{3x} - \cos x = 0 = f(0).$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} a\arcsin x + b = b,$$

concludiamo che f è continua in 0 se e solo se $b = 0$.
Studiamo ora la derivabilità in $x = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x} - \cos x, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ a\arcsin x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x}-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x}-1+1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x}-1}{x} + \frac{1-\cos x}{x} = 3+0=3,$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{a\arcsin x}{x} = a.$$

Concludiamo che f è derivabile in $x=0$ se e solo se $a=3$ e $b=0$.

II modo:

La funzione f f è continua in 0 se e solo se $b=0$ (vedi i primi conti del I modo):

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}-\cos x, & \text{se } x<0, \\ 0, & \text{se } x=0, \\ a\arcsin x, & \text{se } x>0. \end{cases}$$

Osserviamo che f è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{d}{dx}(e^{3x}-\cos x) = \lim_{x\to 0^-} 3e^{3x}+\sin x = 3.$$

Analogamente,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{d}{dx}(a\arcsin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = a,$$

per cui si ha che f è derivabile in 0 se e solo se $a=3$ e $b=0$.

□

CAPITOLO 9

Continuità uniforme

9.1. Premesse

Definizione 9.1.1. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si dice che la retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto di f a $+\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - q) = 0.$$

Se $m = 0$, ossia se

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = q,$$

allora la retta $y = q$ è un asintoto orizzontale di f a $+\infty$, se $m \neq 0$ allora la retta $y = mx + q$ è un asintoto obliquo di f a $+\infty$,

Definizione 9.1.2. Sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$. Diciamo che f *è prolungabile con continuità in a* se

$$\exists \lim_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{R}.$$

In tal caso la funzione $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{se } x \in]a, b] \end{cases}$$

si chiama prolungamento continuo di f.

Lemma 9.1.3. *Siano $f_1 :]a, b] \to \mathbb{R}$ e $f_2 : [b, c[\to \mathbb{R}$ uniformemente continue tali che*

$$f_1(b) = f_2(b).$$

Allora

$$f :]a, c[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \leq b \\ f_2(x) & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Per le due ipotesi,

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_1(\epsilon) > 0 : \left[\begin{array}{l} x, y \in]a, b] \\ |x - y| < \delta_1(\epsilon) \end{array}\right. \Rightarrow |f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon, \tag{9.1.1}$$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_2(\epsilon) > 0 : \left[\begin{array}{l} x, y \in [b, c] \\ |x - y| < \delta_2(\epsilon) \end{array}\right. \Rightarrow |f_2(x) - f_2(y)| < \epsilon. \tag{9.1.2}$$

Definiamo

$$\delta(\epsilon) := \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$$

e siano

$$\left[\begin{array}{l} x, y \in]a, c[\\ |x - y| < \delta(\epsilon). \end{array}\right.$$

Senza perdita di generalità possiamo supporre $x \leq y$.
Abbiamo tre casi:
(1) $x, y \in]a, b]$: in tal caso

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

per (9.1.1)
(2) $x, y \in [b, c[$: in tal caso

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

per (9.1.2)
(3) $x \in]a, b]$, $y \in]b, c[$: in tal caso

$$\left.\begin{array}{l} |x - b| \\ |b - y| \end{array}\right] \leq |x - y| < \delta(\epsilon)$$

per cui

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| \overset{(9.1.1)+(9.1.2)}{<} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \left[\begin{array}{l} x, y \in]a, c[\\ |x - y| < \delta(\epsilon) \end{array}\right. \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 2\epsilon \tag{9.1.3}$$

che è equivalente ad affermare che f è uniformemente continua. □

9.1.1. Intervalli illimitati.

Teorema 9.1.4 (Condizione sufficiente - intervalli illimitati). *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua. Se esistono $m, q \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx - q) = 0$$

allora f è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di limite,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists M(\epsilon) \geq a\ :\ |f(x) - mx - q| < \epsilon \qquad \forall x \in [M(\epsilon), +\infty[,$$

allora

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - mx - q - (f(y) - my - q) + m(x-y)|$$
$$\leq |f(x) - mx - q| + |f(y) - my - q| + m|x-y| < 2\epsilon + m|x-y| \qquad \forall x, y \in [M(\epsilon), +\infty[.$$

Scegliendo $\delta_1(\epsilon) = \epsilon$ si ottiene

$$|f(x) - f(y)| < (2+m)\epsilon \qquad \forall x, y \in [M(\epsilon), +\infty[, |x-y| < \delta_1(\epsilon). \tag{9.1.4}$$

D'altra parte, essendo f continua, allora per ogni $\epsilon > 0$ la funzione $f|_{[a,M(\epsilon)]} : [a, M(\epsilon)] \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor quindi

$$\exists \delta_2(\epsilon) > 0\ :\ |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \forall x \in [a, M(\epsilon)],\ |x-y| < \delta_2(\epsilon). \tag{9.1.5}$$

Allora, fissato $\epsilon > 0$ e scelto $\delta(\epsilon) = \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$ per $x, y \in [a, +\infty[$, $|x-y| < \delta(\epsilon)$, abbiamo tre casi:
(1) $x, y \in [a, M(\epsilon)]$: in tal caso

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon$$

per (9.1.5)
(2) $x, y \in [M(\epsilon), +\infty[$: in tal caso

$$|f(x) - f(y)| < (2+m)\epsilon$$

per (9.1.4)
(3) $x \in [a, M(\epsilon)]$, $y \in]M(\epsilon), +\infty[$: in tal caso

$$\left.\begin{matrix} |x - M(\epsilon)| \\ |M(\epsilon) - y| \end{matrix}\right] \leq |x-y| < \delta(\epsilon)$$

per cui

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(M(\epsilon))| + |f(M(\epsilon)) - f(y)| \overset{(9.1.5)+(9.1.4)}{<} \epsilon + (2+m)\epsilon = (3+m)\epsilon$$

da cui si ottiene che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0\ :\ |f(x) - f(y)| < (3+m)\epsilon \qquad \forall x, y \in [a, +\infty[,\ |x-y| < \delta(\epsilon)$$

e quindi la tesi. □

Proposizione 9.1.5 (Condizione necessaria - insiemi illimitati). *Se* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è uniformemente continua, allora*

$$\exists A, B > 0 : \quad |f(x)| \leq A|x| + B.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \geq 1$.
Per ipotesi f è uniformemente continua, quindi

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \left[\begin{array}{l} x, y \geq a \\ |x-y| \leq \delta \end{array}\right. \quad \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Se $\epsilon = 1$ allora esiste $\delta := \delta(1) > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq 1 \qquad \forall x, y \in [a, +\infty[,\ |x-y| \leq \delta. \tag{9.1.6}$$

Sia $x \geq a + \delta$ e si definisca

$$n(x) := \left[\frac{x-a}{\delta}\right].$$

Si ha $n(x) \geq 1$ e, dalla definizione di parte intera,

$$n(x) \leq \frac{x-a}{\delta} < n(x) + 1,$$

da cui

$$n(x)\delta \leq x - a < n(x)\delta + \delta, \qquad 0 \leq x - (a + n(x)\delta) = x - a - n(x)\delta < \delta. \tag{9.1.7}$$

Dalla disuguaglianza triangolare

$$|f(x) - f(a)| \leq \left|f(x) - f(a + n(x)\delta)\right| + \left|f(a + n(x)\delta) - f(a)\right|$$

Il primo addendo lo si stima con (9.1.6), tenendo conto anche di (9.1.7):

$$\left|f(x) - f(a + n(x)\delta)\right| \leq 1.$$

Essendo

$$f(a + n(x)\delta) - f(a) = \sum_{i=0}^{n(x)-1} \big(f(a + (i+1)\delta) - f(a + i\delta)\big)$$

deduciamo dalla disuguaglianza triangolare e da (9.1.6) che

$$|f(a + n(x)\delta) - f(a)| \leq \sum_{i=0}^{n(x)-1} \left|f(a + (i+1)\delta) - f(a + i\delta)\right| \overset{(9.1.6)}{\leq} n(x).$$

Pertanto,

$$|f(x) - f(a)| \leq \left|f(x) - f(a + n(x)\delta)\right| + \left|f(a + n(x)\delta) - f(a)\right| \leq 1 + n(x).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq 1 + n(x) + |f(a)| \qquad \forall x \in [a + \delta, +\infty[.$$

D'altra parte, se $a \leq x < a + \delta$ si ha $n(x) := \left[\frac{x-a}{\delta}\right] = 0$ e, dalla definizione di δ,

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \overset{(9.1.6)}{\leq} 1 + |f(a)| = 1 + n(x) + |f(a)| \qquad \forall x \in [a, a + \delta[.$$

Essendo $x \geq a + n(x)\delta \geq 1$ si ha

$$\frac{|f(x)|}{|x|+1} = \frac{|f(x)|}{x+1} \overset{(9.1.7)}{\leq} \frac{|f(x)|}{a+n(x)\delta+1} \leq \frac{1+n(x)+|f(a)|}{a+n(x)\delta+1} \qquad \forall x \in [a,+\infty[.$$

La successione $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$,

$$a_k := \frac{1+k+|f(a)|}{a+k\delta+1} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

è limitata, in quanto convergente, essendo

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1+k+|f(a)|}{a+k\delta+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k\delta} = \frac{1}{\delta}.$$

Esiste quindi $A \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1+n(x)+|f(a)|}{n(x)\delta+1} \leq A \qquad \forall x \in [a,+\infty[.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$|f(x)| \leq A(|x|+1) \qquad \forall x \in [a,+\infty[.$$

Ciò conclude la dimostrazione nel caso $a \geq 1$.
Sia ora $a < 1$. Definiamo

$$f_1 := f|_{[a,1]} : [a,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_2 := f|_{[1,+\infty[} : [1,+\infty[\to \mathbb{R}.$$

Esse sono continue.
Per il Teorema di Weierstrass

$$\exists M > 0 \quad : \quad |f_1(x)| \leq M \qquad \forall x \in [a,1].$$

Ovviamente

$$\lim_{x\to+\infty}(f_2(x) - mx - q) = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - q) = 0.$$

Possiamo applicare a f_2 quanto appena dimostrato, ottenendo f_2 uniformemente continua. Per quanto dimostrato sopra

$$\exists A \geq 0 \quad : \quad |f_2(x)| \leq A(|x|+1) \qquad \forall x \in [1,+\infty[.$$

Pertanto

$$|f(x)| \leq A|x| + \max\{A, M\} \qquad \forall x \in [a,+\infty[.$$

□

9.1.2. Intervalli limitati.

Proposizione 9.1.6. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Vale la seguente equivalenza:*

$$f \text{ è uniformemente continua} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

ossia, equivalentemente:

$$f \text{ è uniformemente continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è prolungabile con continuità.}$$

Analogo enunciato vale per $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

DIMOSTRAZIONE.
$\Leftarrow$:
Sia

$$\ell := \lim_{x \to a^+} f(x).$$

e si definisca $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \ell & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{se } x \in]a, b]. \end{cases}$$

Per definizione, $\tilde{f}$ è continua sull'intervallo limitato e chiuso $[a, b]$. Dunque $\tilde{f}$ è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor. Ne segue che f è uniformemente continua perché restrizione di una funzione uniformente continua.
$\Rightarrow$:
Supponiamo per assurdo che $\lim_{x \to a^+} f(x)$ non esista. Allora esistono (a_n), (b_n) tali che

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = a,$$

tali che $(f(a_n))$ e $(f(b_n))$ convergono [essendo f uniformemente continua se (a_n) è una successione in $]a, b]$ convergente ad a, allora $f(a_n)$ è convergente (v. dipense del prof. Dore)] e

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = \ell'$$

con

$$\ell \neq \ell'.$$

Ne segue che

$$\lim_{n \to +\infty} (f(a_n) - f(b_n)) = \ell - \ell' > 0$$

e ciò contraddice la uniforme continuità [essendo f uniformemente continua se $(a_n - b_n)$ converge a 0 allora $(f(a_n) - f(b_n))$ deve convergere a 0, v. dispense del prof. Dore].

□

Teorema 9.1.7 (Condizione necessaria e sufficiente - intervalli limitati). *Sia I un intervallo limitato, e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Vale la seguente equivalenza:*

$$f \text{ è uniformemente continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è prolungabile con continuità in } \overline{I}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{int} I =]a, b[$. Ci sono quattro casi:
I caso: $I = [a, b]$
Non c'è niente da dimostrare, essendo $\overline{I} = I$ e valendo il Teorema di Heine-Cantor.
II caso: $I =]a, b]$
La tesi segue dalla Proposizione 9.1.6
III caso: $I = [a, b[$
La tesi segue dalla variante della Proposizione 9.1.6.
IV caso: $I =]a, b[$
Sia $c = \frac{a+b}{2}$ Per il Lemma 9.1.3, f è uniformemente continua se e solo se $f|_{]a,c]}$ e $f|_{[c,b[}$ sono uniformemente continue. Per la Proposizione 9.1.6

$$f|_{]a,c]} \quad \text{è uniformemente continua se e solo se } \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ esiste ed è reale.}$$

e

$$f|_{[c,b[} \quad \text{è uniformemente continua se e solo se } \lim_{x \to b^-} f(x) \text{ esiste ed è reale.}$$

La tesi segue. □

Corollario 9.1.8 (Condizione necessaria - intervalli limitati). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo limitato.*
Vale la seguente implicazione:

$$f \text{ è uniformemente continua} \quad \Rightarrow \quad f \text{ è limitata.}$$

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal Teorema 9.1.7 e dal Teorema di Weierstrass applicato al prolungamento continuo di f. □

9.2. Classi di funzioni uniformemente continue

Definizione 9.2.1 (Funzione lipschitziana). Sia $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è lipschitziana se

$$\exists L \geq 0 \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall x, y \in A. \tag{9.2.1}$$

In tal caso si dice *costante di lipschitzianità* di f l'estremo inferiore dell'insieme

$$\{L : L \text{ soddisfa } (9.2.1)\}.$$

Proposizione 9.2.2. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.*
Se f è lipschitziana, allora f è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi

$$\exists L \geq 0 \ : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \qquad \forall x, y \in A.$$

Per ogni $\epsilon > 0$, scelto $\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{L}$ si ha

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x-x'| < L\frac{\epsilon}{L} = \epsilon \qquad \forall x, x' \in A, \ |x-x'| < \delta(\epsilon),$$

ossia f è uniformemente continua. □

Teorema 9.2.3 (Composizione di funzioni uniformemente continue è uniformemente continua).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$, $f(A) \subseteq B$.
Se f e g sono uniformemente continue allora $g \circ f$ è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi f è uniformemente continua, quindi

$$\forall \sigma > 0 \ \exists \delta(\sigma) > 0 \ : \ |f(x) - f(x')| < \sigma \qquad \forall x, x' \in A, \ |x-x'| < \delta(\sigma).$$

Per ipotesi g è uniformemente continua, quindi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \sigma(\epsilon) > 0 \ : \ |g(y) - g(y')| < \epsilon \quad \forall y, y' \in B, \ |y-y'| < \sigma(\epsilon).$$

Dunque, se $\epsilon > 0$ è definito un $\sigma(\epsilon) > 0$ e quindi un

$$\tilde{\delta} := \delta(\sigma(\epsilon)) > 0$$

tale che

$$\begin{cases} x, x' \in A \\ |x-x'| < \delta(\sigma) \end{cases} \overset{f \text{ unif. continua}}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x), f(x') \in B \\ |f(x) - f(x')| < \sigma(\epsilon) \end{cases} \overset{g \text{ unif. continua}}{\Rightarrow} |g(f(x)) - g(f(x'))| < \epsilon.$$

□

Esercizio 9.2.4 (Somma di funzioni uniformemente continue è uniformemente continua). Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$.
Se f e g sono uniformemente continue allora $f + g$ è uniformemente continua.
Sol: Per ipotesi f è uniformemente continua, quindi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1(\epsilon) > 0 \ : \ |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall x, x' \in A, \ |x-x'| < \delta_1(\epsilon).$$

Per ipotesi g è uniformemente continua, quindi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_2(\epsilon) > 0 \ : \ |g(x) - g(x')| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall x, x' \in A, \ |x-x'| < \delta_2(\epsilon).$$

Allora, preso $\epsilon > 0$ e definito:

$$\delta(\epsilon) := \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$$

si ha

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ :\ & |(f+g)(x) - (f+g)(x')| = |f(x) + g(x) - f(x') - g(x')| \\ & \le |f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| < \epsilon \qquad \forall x, x' \in A,\ |x - x'| < \delta(\epsilon). \end{aligned}$$

Ciò è quanto si voleva dimostrare.

Esercizio 9.2.5. Sia $f : I \to \mathbb{R}$.
Se f è derivabile e $f' : I \to \mathbb{R}$ è limitata, allora f è lipschitziana (e quindi anche uniformemente continua).
Sol: Per il Teorema di Lagrange,

$$\forall x, y \in I\ \ \exists \xi = \xi(x, y) \in I \quad : \quad f(x) - f(y) = f'(\xi(x, y))(x - y).$$

Per ipotesi

$$\exists M > 0 \quad : \quad |f'(x)| \le M \qquad \forall x \in I.$$

Quindi

$$\forall x, y \in I\ \ |f(x) - f(y)| \le M|x - y|$$

cioè f è lipschitziana. La uniforme continuità segue dalla Proposizione 9.2.2.

9.2.1. Esercizi.

Esercizio 9.2.6. Dimostrare che la funzione identità $\mathrm{id}_A : A \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua.

Esercizio 9.2.7. Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ uniformemente continue.
E' vero che $fg : A \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua?
Sol:
In generale no. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ per ogni x.
f è uniformemente continua (v. Esercizio 9.2.6) eppure $f^2 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f^2(x) = x^2$ per ogni x non è uniformemente continua, in quanto non vale la condizione sufficiente espressa dalla Proposizione 9.1.5. Infatti non possono esistere $A, B > 0$ tali che

$$|f^2(x)| \le A|x| + B \qquad \forall x \in [0, +\infty[,$$

dal momento che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f^2(x)|}{A|x| + B} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{Ax + B} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{Ax} = +\infty.$$

Definizione 9.2.8 (Funzione di classe C^1). Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo.
Diciamo che f è di classe C^1 se f è derivabile e $f' : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Esercizio 9.2.9. Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$.
Usando l'Esercizio 9.2.5 dimostrare che se $f \in C^1([a, +\infty[)$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

allora f è lipschitziana (e quindi è uniformemente continua per la Proposizione 9.2.2).
Sol: Per ipotesi esiste $M \geq a$ tale che

$$|f'(x) - \ell| < 1 \qquad \forall x \in [M, +\infty[$$

da cui

$$|f'(x)| = |f'(x) - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| \qquad \forall x \in [M, +\infty[.$$

Per ipotesi $f'|_{[a,M]} : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, in quanto restrizione della funzione continua $f' : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Dunque, per il Teorema di Weierstrass $f'|_{[a,M]} : [a, M] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata. Esiste quindi $K \geq 0$ tale che

$$|f'(x)| \leq K \qquad \forall x \in [a, M].$$

Possiamo quindi concludere che

$$|f'(x)| \leq \max\{M, K\} \qquad \forall x \in [a, +\infty[.$$

La tesi segue dall'Esercizio 9.2.5.

Esercizio 9.2.10. Stabilire se $f(x) = \log x$ è uniformemente continua nei seguenti insiemi: $]0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, +\infty[$.
Sol:
$f|_{]0,1]}$ non è uniformemente continua per la Proposizione 9.1.6, essendo

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

$f|_{[1,2]}$ è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor, essendo $[1, 2]$ un insieme compatto e f continua.
$f|_{[2,+\infty[}$ è di classe C^1 e

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dunque f' è limitata. Allora f è Lipschitziana per l'Esercizio 9.2.5 e quindi uniformemente continua per l'Esercizio 9.2.5.

Esercizio 9.2.11. Stabilire se $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$ è uniformemente continua nei seguenti insiemi: $]0, 1]$, $[1, 2]$, $[1, +\infty[$, $]0, +\infty[$.
Sol:

$f|_{]0,1]}$ è uniformemente continua per la Proposizione 9.1.6, essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$f|_{[1,2]}$ è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor, essendo f uniformemente continua.

$f|_{[1+\infty[}$ è uniformemente continua per il Teorema 9.1.4. Infatti $f|_{[1+\infty[}$ ha un asintoto orizzontale a $+\infty$, essendo

$$\lim_{x\to +\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0.$$

$f|_{]0,+\infty[}$ è uniformemente continua perché $f|_{]0,1]}$ e $f|_{[1,+\infty[}$ sono entrambe uniformemente continue e la tesi segue dal Lemma 9.1.3

II modo:

Dato che per l'Esercizio 8.2.2

$$\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \qquad \forall x \in]0,+\infty[,$$

allora basta studiare la sola funzione $\arctan :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Essa è uniformemente continua in un intervallo $I \subseteq]0,+\infty[$ se e solo se lo è la funzione f.

Si lascia lo studio di ciò che succede alla funzione arctan al lettore.

Esercizio 9.2.12. Stabilire se $f(x) = \sin x$ è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

Sol:

Si ha $f'(x) = \cos x$ che è una funzione limitata in $\mathbb{R}$. Allora f è Lipschitziana e uniformemente continua, v. Esercizio 9.2.5.

Esercizio 9.2.13. Stabilire se $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0,1]$, è uniformemente continua in $[0,+\infty[$.

Sol:

Se $\alpha = 1$, f è la funzione $\mathrm{id}|_{[0,+\infty[}$ che sappiamo essere uniformemente continua (v. Esercizio 9.2.6).

Se $\alpha \in]0,1[$ allora la funzione $f|_{[0,1]}$ è uniformemente continua per il Teorema di Heine-Cantor.

La funzione $f|_{[1,+\infty[}$ è uniformemente continua per l'Esercizio 9.2.9. Si ha infatti che essa è di classe $C^1([1,+\infty[)$ e

$$\lim_{x\to +\infty} f'(x) = \lim_{x\to +\infty} \alpha \frac{1}{x^{1-\alpha}} = 0.$$

Concludiamo che f è uniformemente continua in $[0,+\infty[$ per Lemma 9.1.3.

Esercizio 9.2.14. Stabilire se $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$, è uniformemente continua in $[0,+\infty[$.

Sol:

f non è uniformemente continua perché non è soddisfatta la crescita lineare, v. Proposizione 9.1.5.

Esercizio 9.2.15. Stabilire se $f(x) = \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x^2+1}$ è uniformemente continua in $[1,+\infty[$.
Sol:
Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} \sin\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0.$$
Dunque f è uniformemente continua in $[1,+\infty[$ per il Teorema 9.1.4. Infatti $f|_{[1+\infty[}$ ha $y=0$ come asintoto orizzontale a $+\infty$.

CAPITOLO 10

Sviluppi di Taylor

Fondamentale nel calcolo dei limiti con Taylor è il corollario 7.9.8 che qui richiamiamo

Corollario 10.0.1 (Aritmetica dell' o piccolo per le potenze). *Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ positivi e per $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, valgono le seguenti uguaglianze per $x \to 0$:*

$$-o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$c\,o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(c\,x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha) \pm o(x^\alpha) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

$$o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$$

$$o(x^\alpha + x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$$

$$x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$o(x^\alpha)o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$$

$$\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha).$$

10.1. Principali sviluppi per $x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \cdots \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

dove

$$(2n+1)!! = \prod_{i=0}^{n} (2i+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2n)!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} (2i) & \text{se } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$$

dove

$$\binom{\alpha}{k} := \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!} & \text{se } k \geq 1 \\ \\ 1 & \text{se } k = 0. \end{array} \right.$$

In particolare, caso $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

10.2. Esercizi

Esercizio 10.2.1. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 6 centrato in 0 con resto di Peano della funzione $f(x) = e^x$.
Sol: Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, per il teorema degli sviluppi di Taylor

$$f(x) = \sum_{i=0}^{6} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Si tratta di scrivere in termini espliciti l'espressione a secondo membro. Dato che per ogni $i \in \mathbb{N}$ è $f^{(i)}(x) = e^x$ e quindi $f^{(i)}(0) = 1$ si ottiene:

$$e^x = \sum_{i=0}^{6} \frac{1}{i!} x^i + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 10.2.2. Determinare i polinomi di Taylor di $\sin(x)$ centrati in 0 calcolati in 1 e di grado $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$.
Sol:
Il polinomio di Taylor di grado $n = 2k+1$, con $k \in \mathbb{N}$, è

$$T_{2k+1}(\sin; 0)(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

da cui

$$T_{2k+1}(\sin; 0)(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}.$$

Analogamente, se $n = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$, allora

$$T_{2k}(\sin; 0)(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

da cui

$$T_{2k}(\sin; 0)(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}.$$

Pertanto:

n	$T_n(\sin; 0)(1)$
1	1
2	1
3	$1 - \frac{1}{6} = 0.8\overline{3}$
4	$1 - \frac{1}{6} = 0.8\overline{3}$
5	$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841666\dots$
6	$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0.841666\dots$
7	$1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = 0.841468\dots$

Esercizio 10.2.3. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in 0 con resto di Peano della funzione $f(x) = \log(1-x)$ in due modi:
1) usando la definizione
2) dando per noto lo sviluppo di $\log(1+x)$.
Sol:
Usiamo la definizione.
Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, per il teorema degli sviluppi di Taylor

$$f(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Si tratta di scrivere in termini espliciti l'espressione a secondo membro. Dato che $D\log(1-x) = -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$
$D^2\log(1-x) = D\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{(x-1)^2}$
$D^3\log(1-x) = D\frac{-1}{(x-1)^2} = -(-2)\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$
si hanno:

$$f^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \\ -1 & \text{se } i = 1 \\ -1 & \text{se } i = 2 \\ -2 & \text{se } i = 3. \end{cases}$$

Pertanto si ottiene

$$\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{6}x^3 + o(x^3) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

2) Dando per noto lo sviluppo di $\log(1+x)$:

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \qquad \text{per } y \to 0.$$

Preso $y = -x$, che tende a 0 per $x \to 0$, si ha:

$$\log(1-x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o((-x)^3) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 10.2.4. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e 6 centrati in 0 con resto di Peano della funzione $f(x) = \sin x$. Quale tra i due sviluppi fornisce più informazioni?
Sol: Essendo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, per il teorema degli sviluppi di Taylor

$$f(x) = \sum_{i=0}^{5} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + o(x^5) \qquad \text{per } x \to 0.$$

e
$$f(x)=\sum_{i=0}^{6}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+o(x^6) \qquad \text{per } x\to 0.$$
Si tratta di scrivere in termini espliciti l'espressione a secondo membro.
Dato che per ogni $i\in\mathbb{N}$ è
$$f^{(i)}(x)=\begin{cases}\sin x & \text{se } i\equiv 0 \bmod 4\\ \cos x & \text{se } i\equiv 1 \bmod 4\\ -\sin x & \text{se } i\equiv 2 \bmod 4\\ -\cos x & \text{se } i\equiv 3 \bmod 4\end{cases}$$
si ha
$$f^{(i)}(0)=\begin{cases}0 & \text{se } i \text{ è pari}\\ 1 & \text{se } i\equiv 1 \bmod 4\\ -1 & \text{se } i\equiv 3 \bmod 4.\end{cases}$$
Dunque si ottengono i seguenti sviluppi di ordinee 5 e 6, rispettivamente:
$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5) \qquad \text{per } x\to 0.$$
e
$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^6) \qquad \text{per } x\to 0.$$
I polinomi di Taylor di ordine 5 e 6 centrati in 0 sono dunwue identici:
$$T_5(f;0)=T_6(f;0)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5,$$
ma lo sviluppo più preciso è il secondo, dato che $o(x^6)$ esclude che ci siano infinitesimi di ordine inferiore o uguale a x^6, cosa che non possiamo affermare se si usa il resto $o(x^5)$.

Una generalizzazione della Definizione 5.3.38 è la seguente.

Definizione 10.2.5. Per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, si definisce
$$\binom{\alpha}{k}:=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} & \text{se } k\geq 1\\[2ex] 1 & \text{se } k=0.\end{cases}$$

Esercizio 10.2.6. Determinare lo sviluppo di Taylor di ordine n centrato in 0 con resto di Peano della funzione $f(x)=(1+x)^\alpha$.
Sol:
Si dimostra per induzione che
$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}.$$

Per $k = 0$ l'affermazione è vera.
Sia essa vera per k e dimostriamola per $k+1$:

$$f^{(k+1)}(x) = Df^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}\frac{d}{dx}(1+x)^{\alpha-k}$$

$$= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(\alpha-k)(1+x)^{\alpha-k-1} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k+1)-1)(1+x)^{\alpha-(k+1)}.$$

L'affermazione è dimostrata.
Pertanto: se $k \geq 1$ è:

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1)) \Leftrightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}.$$

Se $k = 0$ è:

$$f^{(0)}(0) = 1^\alpha = 1 = \binom{\alpha}{0}.$$

Si ha così

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

ossia:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0.$$

Esercizio 10.2.7. Determinare il polinomio di Taylor di grado 4 centrato in 0 di

$$\sin(\sin(2x)) - e^{2x} - \cos(x - x^2). \qquad [-2 - \frac{3}{2}x^2 - 5x^3 - \frac{5}{24}x^4]$$

Esercizio 10.2.8. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}.$$

Sol: Si potrebbe pensare, ingenuamente, al seguente metodo di risoluzione:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Si ha

$$x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim x \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Quindi

$$\exp\left(x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \sim e^x \quad \text{per } x \to +\infty \tag{10.2.1}$$

da cui

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x} = 1.$$

La risoluzione è sbagliata. E' infatti falsa la (10.2.1). E' un'ulteriore conferma che la funzione esponenziale non si comporta bene con gli asintotici (si veda il Paragrafo 7.9.7).

Diamo la risoluzione corretta.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=\frac{\exp\left(x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{e^x}=\exp\left(x\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)\right).$$

Posto $t=\frac{1}{x}$, per $x\to+\infty$ si ha $t\to 0$. Si ha

$$\log(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\quad\text{per } t\to 0$$

da cui

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\quad\text{per } x\to+\infty.$$

Allora

$$x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})\quad\text{per } x\to+\infty.$$

quindi

$$x\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)=x\left(1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})-1\right)$$
$$=x\left(-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})\right)=-\frac{1}{2}+o(1)\quad\text{per } x\to+\infty.$$

Deduciamo quindi che

$$x\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)\sim-\frac{1}{2}\quad\text{per } x\to+\infty.$$

Pertanto, per l'Esercizio 7.9.18:

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\left(x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Esercizio 10.2.9. Calcolare, usando il calcolo differenziale,

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{-x^2}-\sin x+\frac{5}{6}x^5}{(x+2x^2)^2\log^3(1+\frac{x}{2})}$$

Esercizio 10.2.10. Calcolare, usando il calcolo differenziale, $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-x^2\sin\frac{1}{x}\right)$.

Esercizio 10.2.11. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\sqrt{x}}-\sin\sqrt[3]{x}-\cos(x^{5/4})}{\sin(x^2\sqrt{x})\sinh(1+x)}.$$

[R. $-\infty$]

Sol:

Denominatore:
Per il Teorema 7.8.27

$$\sin(x^2\sqrt{x}) \sim x^2\sqrt{x} = x^{5/2} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} \sinh(1+x) = \sinh 1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \Rightarrow \sinh(1+x) \sim \sinh 1 \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Dunque, per la Proposizione 7.9.13

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\sqrt{x}} - \sin\sqrt[3]{x} - \cos(x^{5/4})}{\sin(x^2\sqrt{x})\sinh(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\sqrt{x}} - \sin\sqrt[3]{x} - \cos(x^{5/4})}{\sinh(1)\cdot x^{5/2}}. \tag{10.2.2}$$

Sviluppiamo con precisione il numeratore in modo da tale avere con precisione tutte le potenze di x fino al grado $\frac{5}{2}$ compreso.
Dato che

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

applicandola per $y = x^{3/2}$ si ha

$$e^{x\sqrt{x}} = 1 + x^{3/2} + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = 1 + x^{3/2} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \to 0^+. \tag{10.2.3}$$

Si noti che lo sviluppo

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

si è rivelato solo apparentemente inutilmente preciso: avessimo considerato

$$e^y = 1 + y + o(y) \quad \text{per } y \to 0$$

avremmo avuto

$$e^{x\sqrt{x}} = 1 + x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x \to 0^+.$$

e quell'o piccolo non ci avrebbe dato informazioni sulla precisione dello sviluppo con tutte le potenze di x fino al grado $\frac{5}{2}$, precise, compreso.
Consideriamo ora il termine $\sin(x^{1/3})$.
Dato che

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} + o(y^{10}) \quad \text{per } y \to 0,$$

si ha, per $y = x^{1/3}$,

$$\sin(x^{1/3}) = x^{1/3} - \frac{x}{3!} + \frac{x^{5/3}}{5!} - \frac{x^{7/3}}{7!} + \frac{x^{9/3}}{9!} + o(x^{10/3}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Osserviamo che

$$\frac{7}{3} < \frac{5}{2} < \frac{9}{3}$$

quindi possiamo semplificare lo sviluppo:

$$\sin(x^{1/3}) = x^{1/3} - \frac{x}{3!} + \frac{x^{5/3}}{5!} - \frac{x^{7/3}}{7!} + o(x^{5/2}) \quad \text{per } x \to 0. \tag{10.2.4}$$

Consideriamo ora il termine $\cos(x^{5/4})$.
Dato che

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^5) \quad \text{per } y \to 0.$$

si ha, per $y = x^{5/4}$,

$$\cos(x^{5/4}) = 1 - \frac{x^{5/2}}{2} + \frac{x^5}{4!} + o(x^5) \quad \text{per } y \to 0.$$

Per i nostri scopi, abbiamo esagerato con la precisione. Teniamo quel che ci serve scritto in modo esplicito e il resto lo includiamo nel resto:

$$\cos(x^{5/4}) = 1 - \frac{x^{5/2}}{2} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0^+. \tag{10.2.5}$$

Da (10.2.3), (10.2.4) e (10.2.5) si ha:

$$\begin{aligned} e^{x\sqrt{x}} - \sin\sqrt[3]{x} - \cos(x^{5/4}) &= 1 + x^{3/2} + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = 1 + x^{3/2} + o(x^{5/2}) \\ &-(x^{1/3} - \frac{x}{3!} + \frac{x^{5/3}}{5!} - \frac{x^{7/3}}{7!} + o(x^{5/2})) - (1 - \frac{x^{5/2}}{2} + o(x^4)) \\ &= -x^{1/3} + o(x^{1/3}) \quad \text{per } x \to 0^+. \end{aligned}$$

Allora

$$e^{x\sqrt{x}} - \sin\sqrt[3]{x} - \cos(x^{5/4}) \sim -x^{1/3} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Per la (10.2.2) e la Proposizione 7.9.13 abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\sqrt{x}} - \sin\sqrt[3]{x} - \cos(x^{5/4})}{\sin(x^2\sqrt{x})\sinh(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^{1/3}}{\sinh(1)\cdot x^{5/2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sinh(1)\cdot x^{5/2-1/3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sinh(1)\cdot x^{13/6}} = -\infty.$$

Esercizio 10.2.12. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}\tan(x+2x^2) - x - 2x^2 - \frac{2}{3}\sin(x^3)}{\cos^2(x+2x^2)\sin^3(3x^2+x^3)}.$$

Sol:
Denominatore:

$$\lim_{x\to 0}\cos^2(x+2x^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(x+2x^2) \sim 1 \quad \text{per } x \to 0$$

e, per il Teorema 7.8.27,

$$\lim_{x\to 0} 3x^2 + x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sin(3x^2+x^3))^2 \sim (3x^2+x^3)^2 \sim 9x^4 \quad \text{per } x \to 0$$

da cui si ottiene

$$\cos^2(x+2x^2)\sin^3(3x^2+x^3) \sim 9x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto,

$$\text{DENOMINATORE} \sim 9x^4 \quad \text{per } x \to 0.$$

Dunque si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}\tan(x+2x^2) - x - 2x^2 - \frac{2}{3}\sin(x^3)}{\cos^2(x+2x^2)\sin^3(3x^2+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}\tan(x+2x^2) - x - 2x^2 - \frac{2}{3}\sin(x^3)}{9x^4}.$$

Numeratore:
dato che il denominatore è asintotico a $9x^4$, sviluppiamo il numeratore secondo Taylor, scrivendo con precisione tutte le potenze di x fino al grado 4.
Dato che

$$\sin y = y + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0,$$

si ha $(y = x^3)$

$$\sin(x^3) = x^3 + o(x^6) \quad \text{per } x \to 0.$$

Dato che

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + o(y^2) \quad \text{per } y \to 0$$

applicandola con $y = -x^2$ si ha

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{4x^4}{2!} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Dato che

$$\tan y = y + \frac{y^3}{3} + o(y^4) \quad \text{per } y \to 0$$

applicandola con $y = x + 2x^2$ si ha

$$\tan(x+2x^2) = x + 2x^2 + \frac{(x+2x^2)^3}{3} + o((x+2x^2)^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Sviluppando, e tenendo solo le potenze fino al grado minore o uguale a 4 e includendo le altre nel resto di Peano, si ha:

$$\tan(x+2x^2) = x + 2x^2 + \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 2x^2 + o(x^4)) + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto:

$$e^{-x^2}\tan(x+2x^2) = \left(1 - x^2 + \frac{4x^4}{2!} + o(x^4)\right)\left(x + 2x^2 + \frac{x^3}{3} + 2x^4 + o(x^4)\right)$$

$$= x+2x^2+\frac{x^3}{3}+2x^4+o(x^4) = -x^2x-2x^2x^2+o(x^4)+o(x^4)+o(x^5) = x+2x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^4) = x+2x^2-\frac{2}{3}x^3+o(x^4).$$

Dunque

$$\text{NUMERATORE} = x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) - x - 2x^2 - \frac{2}{3}\left(x^3 + o(x^6)\right) = -\frac{4}{3}x^3 + o(x^4).$$

CONCLUSIONE:
Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}\tan(x+2x^2) - x - 2x^2 - \frac{2}{3}\sin(x^3)}{9x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^4)}{9x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^4)}{9x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3}{9x^4} = -\frac{4}{27}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.$$

Tale limite non esiste, dato che

$$-\frac{4}{27}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\infty$$

$$-\frac{4}{27}\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Esercizio 10.2.13. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\left(e^{2x}-1\right)^2 - (\sin(2x))^3\cos(2x)}{\sin(4x)\log(1+2x^3)}.$$

[R.: 2]

Esercizio 10.2.14. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(3x^2)\sin^2(2x) - \tan(e^{4x^2}-1)}{x^5(\sinh(3x)+\cosh(5x^2))}.$$

[R. $\nexists$]

Esercizio 10.2.15. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)} - \sqrt{\cosh x}}{\left(\log(1+x\arctan x)\right)^2}$$

[R. $-\frac{1}{48}$]

Esercizio 10.2.16. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\log(\cos x + x) + (\sin(2x))^2 - 4x}{x\left(\arcsin(2x+x^2)\right)^3}.$$

[R. $\nexists$]

Esercizio 10.2.17. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+4x+3x^2)\log(1+\sqrt{3x})}{4\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}+x)-\log\left(1+4\sqrt{x}+2x\right)-6x}$$

[R. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$]

Esercizio 10.2.18. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sinh(2x))^2+1-e^{4x^2}\cosh(2x^2)}{x(\cos(3x)-1)}.$$

[R. 0]

Esercizio 10.2.19. Calcolare utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cosh x)^2-1-x^2}{x^4}.$$

SOL. ES. 10.2.19. Ricordiamo che per $\cosh x$ vale il seguente sviluppo

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+o(x^{2n+1})$$

quindi utilizzandolo fino al secondo ordine si ha

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

da cui

$$(\cosh x)^2-1-x^2=\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)^2-1-x^2=1+\frac{x^4}{4}+x^2+o(x^3)-1-x^2=0(x^3).$$

Per cui lo sviluppo fino al secondo ordine non va bene, mi serve una maggiore precisione:

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+0(x^5)$$

in questo modo

$$(\cosh x)^2-1-x^2=\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right)^2-1-x^2=$$

$$=1+\frac{x^4}{4}+x^2+\frac{x^4}{12}+o(x^5)-1-x^2=\frac{x^4}{3}+o(x^5).$$

Allora otteniamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cosh x)^2-1-x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{3}+o(x^5}{x^4}=\frac{1}{3}.$$

$\square$

Esercizio 10.2.20. Calcolare utilizzando gli sviluppi di Taylor

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x^2\ln x}-1)(\sinh(x\ln x)-\sin(x\ln x))}{2x(e^{x^2}-\cos(x\ln x))^2}.$$

SOL. ES. 10.2.20. Siccome $x^\alpha \ln x \xrightarrow{x\to 0^+} 0 \quad \forall \alpha>0$ possiamo utilizzare gli sviluppi di Taylor centrati in $x_0=0$ delle varie funzioni.

$$e^{x^2\ln x}-1 = x^2\ln x(1+o(1)) = x^2\ln x + o(x^2\ln x)$$
$$\sinh(x\ln x) = x\ln x + \frac{x^3\ln^3 x}{3!} + o(x^4\ln^4 x)$$
$$\sin(x\ln x) = x\ln x - \frac{x^3\ln^3 x}{3!} + o(x^4\ln^4 x).$$

Quindi per il numeratore vale

$$(e^{x^2\ln x}-1)(\sinh(x\ln x)-\sin(x\ln x)) =$$
$$= (x^2\ln x + o(x^2\ln x))\left(x^3\frac{\ln^3 x}{3} + o(x^4\ln^4)\right) = x^5\frac{\ln^4 x}{3} + o(x^5\ln^4 x).$$

Mentre per il denominatore procediamo come segue

$$e^{x^2} - \cos(x\ln x) = 1 + x^2 + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2\ln^3 x}{2} + o(x^3\ln^3 x)\right) =$$
$$= \frac{x^2\ln^2 x}{2} + o(x^2\ln^2 x)$$

dove l'ultima uguaglianza si ha perchè $\frac{x^2}{x^2\ln^2 x} \longrightarrow 0 \quad$ per $\quad x\to 0^+$ allora $x^2 = o(x^2\ln^2 x)$.
Allora

$$(e^{x^2}-\cos(x\ln x))^2 = \frac{x^4\ln^4 x}{4} + o(x^4\ln^4 x).$$

Quindi per il denominatore vale

$$2x(e^{x^2}-\cos(x\ln x))^2 = \frac{x^5\ln^4 x}{2} + o(x^5\ln^4 x).$$

In conclusione abbiamo ottenuto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x^2\ln x}-1)(\sinh(x\ln x)-\sin(x\ln x))}{2x(e^{x^2}-\cos(x\ln x))^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^5\ln^4 x}{3}}{\frac{x^5\ln^4 x}{2}} = \frac{2}{3}.$$

□

Esercizio 10.2.21. Calcolare il seguente limite al variare del parametro α

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cosh x^2)^{\sin 3x}-1}{x^\alpha}.$$

SOL. ES. 10.2.21. Studiamo il numeratore: possiamo riscriverlo come segue

$$(\cosh x^2)^{\sin 3x} - 1 = e^{\sin(3x)\ln(\cosh x^2)} - 1.$$

Ora, poiché $\sin 3x \to 0$ e $\cosh(x^2) \to 1 \Longrightarrow \ln(\cosh x^2) \to 0$ entrambi per $x \to 0^+$, abbiamo che

$$e^{\sin(3x)\ln(\cosh x^2)} - 1 \sim \sin(3x)\ln(\cosh(x^2)).$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cosh x^2)^{\sin 3x} - 1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x)\ln(\cosh(x^2))}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x\ln(\cosh(x^2))}{x^\alpha}.$$

Ora utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$$\ln(\cosh(x^2)) = \ln\left(1 + \frac{x^4}{2!} + o(x^7)\right) = \frac{x^4}{2!} + o(x^4).$$

Allora in conclusione otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cosh x^2)^{\sin 3x} - 1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2} \cdot \frac{x^5}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \alpha < 5 \\ \frac{3}{2} & \text{se} \quad \alpha = 5 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha > 5 \end{cases}$$

□

Esercizio 10.2.22. Calcolare il seguente limite al variare di α:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(e^{x^2} - \cos x) - \cosh(\alpha x)}{x(x - \arcsin x)}.$$

SOL. ES. 10.2.22. Per il denominatore, poiché $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, vale

$$x(x - \arcsin x) = x\left(x - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = -\frac{x^4}{6} + o(x^3).$$

Mentre, sfruttando gli sviluppi di e^x, $\cos x$ e $\cosh x$, si ha che il numeratore si può riscrivere come segue

$$\exp(e^{x^2} - \cos x) - \cosh \alpha x =$$

$$= \exp\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \left(1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^4 x^4}{4!} + o(x^4)\right).$$

Ho sviluppato fino al grado 4, poiché nel denominatore ho x^4.
Quindi il nostro limite diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(e^{x^2} - \cos x) - \cosh \alpha x}{x(x - \arcsin x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 + \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \frac{\alpha 4}{4!}x^4 + o(x^4)\right)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{24}x^4 + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}x^4 + o(x^4) - 1 - \frac{\alpha^2}{2}x^2 - \frac{\alpha^4}{4!}x^4}{-\frac{x^4}{6} + 0(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3-\alpha^2}{2}x^2 + \left(\frac{11}{24} + \frac{9}{8} - \frac{\alpha^4}{4!}\right)x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)} =$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad |\alpha| > \sqrt{3} \\ -\infty & \text{se} \quad |\alpha| < \sqrt{3} \\ \frac{\frac{11}{24}+\frac{9}{8}-\frac{9}{24}}{-\frac{1}{6}} = -\frac{29}{4} & \text{se} \quad |\alpha| = \sqrt{3} \end{cases}$$

□

Esercizio 10.2.23 (Prova scritta 4-2-2019). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cosh(4\sqrt{x})} - \left(2-\cos(2\sqrt{x})\right)^2}{\left(\sqrt{1+4\sqrt{x}}-1\right)\log\left(3-2\cos(4x)\right)}.$$

SOL. ES. 10.2.23. Sviluppiamo prima il denominatore. Osserviamo che il limite per $x \to 0$ in questo caso coincide con il limite per $x \to 0^+$. Si hanno

$$3-2\cos(4x) \to 1 \qquad \text{per } x \to 0,$$

e

$$1-\cos(y) \sim \frac{1}{2}y^2 \qquad \text{per } y \to 0,$$

quindi

$$\log(3-2\cos(4x)) \sim 3-2\cos(4x)-1 = 2(1-\cos(4x)) \approx 2\left(\frac{(4x)^2}{2}\right) = 16x^2 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Inoltre,

$$\sqrt{1+4\sqrt{x}}-1 \sim 1+\frac{4}{2}\sqrt{x}-1 = 2\sqrt{x} \qquad \text{per } x \to 0,$$

pertanto il denominatore è asintotico a $32x^{\frac{5}{2}}$.
Sviluppiamo ora il numeratore con precisione fino al grado 5/2.

$$\begin{aligned}\sqrt{\cosh(4\sqrt{x})} &= \sqrt{1+\frac{4^2}{2!}x+\frac{4^4}{4!}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})} = \sqrt{1+8x+\frac{32}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})} = \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(8x+\frac{32}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})\right)-\frac{1}{8}\left(8x+\frac{32}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})\right)^2+o(x^{\frac{5}{2}}) = \\ &= 1+4x-\frac{8}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}}) \qquad \text{per } x\to 0.\end{aligned}$$

Infine,

$$\left(2-\cos(2\sqrt{x})\right)^2 = \left(2-\left(1-\frac{4}{2}x+\frac{16}{24}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})\right)\right)^2 = 1+4x+\frac{8}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}}) \qquad \text{per } x\to 0.$$

Unendo questi risultati, si trova

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cosh(4\sqrt{x})}-\left(2-\cos(2\sqrt{x})\right)^2}{\left(\sqrt{1+4\sqrt{x}}-1\right)\log\left(3-2\cos(4x)\right)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+4x-\frac{8}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})-\left(1+4x+\frac{8}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})\right)}{32x^{\frac{5}{2}}} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{16}{3}x^2+o(x^{\frac{5}{2}})}{32x^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{16}{3}x^2}{32x^{\frac{5}{2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-6\sqrt{x}} = -\infty.\end{aligned}$$

□

Esercizio 10.2.24 (Prova scritta 25-1-2021). Calcolare, usando gli sviluppi di McLaurin,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x-x^2}-x^2\cos(x+2x^3)-e^{-x^2}}{e^{2x+1}(\cos(x^2)-1)}.$$

SOLUZIONE Es. 10.2.24:
Denominatore:

$$e^{2x+1}(\cos(x^2)-1)\sim e\cdot(-\frac{1}{2}x^4) = -\frac{e}{2}x^4$$

Sviluppiamo fino al grado 4 il numeratore

$$x\sin(x)-x^2 = x(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))-x^2 = x^2-\frac{x^4}{6}+o(x^5)-x^2 = -\frac{x^4}{6}+o(x^5)$$

allora

$$\sqrt{1+x\sin x-x^2} = \sqrt{1-\frac{x^4}{6}+o(x^5)} = 1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^4}{6}+o(x^5)\right) = 1-\frac{x^4}{12}+o(x^5)$$

$$x^2\cos(x+2x^3) = x^2\left(1-\frac{1}{2}(x+2x^3)^2+o(x^3)\right) = x^2\left(1-\frac{1}{2}(x^2)+o(x^3)\right) = x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^5).$$

da cui

$$\sqrt{1+x\sin x-x^2}-x^2\cos(x+2x^3)=1-\frac{x^4}{12}+o(x^5)-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)$$
$$=1-x^2+\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{2}\right)x^4+o(x^5)=1-x^2+\frac{5}{12}x^4+o(x^5).$$

Ora

$$e^{-x^2}=1+(-x^2)+\frac{1}{2}(-x^2)^2+o(x^4)=1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)$$

quindi

$$\sqrt{1+x\sin x-x^2}-x^2\cos(x+2x^3)-e^{-x^2}=1-x^2+\frac{5}{12}x^4+o(x^5)-\left(1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\right)$$
$$=\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\right)x^4+o(x^5)$$
$$=-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)=-\frac{1}{12}x^4+o(x^5).$$

Conclusione

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x-x^2}-x^2\cos(x+2x^3)-e^{-x^2}}{e^{2x+1}(\cos(x^2)-1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^5)}{-\frac{e}{2}x^4}=\frac{1}{6e}.$$

Esercizio 10.2.25 (Prova scritta 28-6-2021). Calcolare usando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+\sinh(\sqrt{2x}))-\cos(\sqrt[4]{2x})\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{x^3+x^5}}.$$

SOLUZIONE Es. 10.2.25:
DENOMINATORE $\sim x^{3/2}$
Sviluppiamo il numeratore con precisione con potenze di x fino al grado $\frac{3}{2}$ compreso.

NUMERATORE:
Si ha

$$\sinh(\sqrt{2x})=\sqrt{2x}+\frac{1}{6}(2x)^{3/2}+o(x^{3/2})$$
$$=\sqrt{2x}+\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+o(x^{3/2})$$

allora, essendo

$$\log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\quad \text{per } y\to0,$$

segue che

$$\log(1+\sinh(\sqrt{2x}))=\log(1+\sqrt{2x}+\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2}+o(x^{3/2}))$$

$$= \sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) - \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right)^3 + o(x^{3/2})$$

$$= \sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) - \frac{1}{2}\left((\sqrt{2x})^2 + o(x^{3/2})\right) + \frac{1}{3}(\sqrt{2x})^{3/2} + o(x^{3/2})$$

$$= \sqrt{2x} + \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{2}{2}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

$$= \sqrt{2x} - x + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

$$= \sqrt{2x} - x + \sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2}).$$

Inoltre si ha:

$$\cos(\sqrt[4]{2x})\sin(\sqrt{2x}) = \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2x} + \frac{1}{24}(2x) + o(x^{5/4})\right)\left(\sqrt{2x} - \frac{1}{6}(2x)^{3/2} + o((x)^{3/2})\right)$$

$$= \sqrt{2x} - \frac{2}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{3}x^{3/2} + \frac{\sqrt{2}}{12}x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

$$= \sqrt{2x} - x + \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

Pertanto:

$$\text{NUMERATORE} = \sqrt{2x} - x + \sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2}) - \left(\sqrt{2x} - x + \left(\frac{1}{12} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x^{3/2} + o(x^{3/2})\right)$$

$$= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x^{3/2} + o(x^{3/2})$$

Risulta così:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sinh(\sqrt{2x})) - \cos(\sqrt[4]{2x})\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{x^3+x^5}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x^{3/2} + o(x^{3/2})}{x^{3/2}}$$

$$= \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) = \frac{15}{12}\sqrt{2} = \frac{5}{4}\sqrt{2}.$$

Esercizio 10.2.26 (Prova scritta 15-2-2021). Calcolare, usando gli sviluppi di McLaurin,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin(x\cos(2x) - \sinh(x-x^3)\right)\log(\cos(x)+\sin(x))}{(1+x)^2x^2\cosh(x^2)\log(1-x^2)}.$$

SOLUZIONE Es. 10.2.26:
Denominatore:

$$(1+x)^2 x^2 \cosh(x^2) \log(1-x^2) \sim 1 \cdot x^2 \cdot 1 \cdot (-x^2) = -x^4$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)\log(\cos(x)+\sin(x))}{(1+x)^2 x^2 \cosh(x^2)\log(1-x^2)}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)\log(\cos(x)+\sin(x))}{x^4}$$

Dato che

$$\log(\cos(x)+\sin(x)) \sim (\cos(x)+\sin(x)-1)$$

e

$$\cos(x)+\sin(x)-1 = 1-\frac{x^2}{2}+x-1+o(x^2) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2) \sim x$$

allora

$$\big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)\log(\cos(x)+\sin(x)) \sim \big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)\, x$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)\log(\cos(x)+\sin(x))}{x^4}$$
$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)\, x}{x^4} = \lim_{x\to 0} -\frac{\big(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\big)}{x^3}$$

Sviluppiamo il numeratore fino al grado 3.

$$\sin(x\cos(2x)) = \sin(x(1-\frac{1}{2}(2x)^2+o(x^3))) = \sin(x(1-2x^2+o(x^3)))$$
$$= \sin(x-2x^3+o(x^4)) = x-2x^3+o(x^4)-\frac{1}{6}(x-2x^3+o(x^4))^3+o(x^4)$$
$$= x-2x^3+o(x^4)-\frac{1}{6}x^3+o(x^4) = x-\frac{13}{6}x^3+o(x^4).$$

Analogamente:

$$\sinh(x-x^3) = x-x^3+\frac{1}{6}(x-x^3)^3+o(x^4) = x-x^3+\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$$
$$= x-\frac{5}{6}x^3+o(x^4) = x-\frac{5}{6}x^3+o(x^4).$$

Allora

$$\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3) = x-\frac{13}{6}x^3+o(x^4)-(x-\frac{5}{6}x^3+o(x^4))$$

$$= \left(-\frac{13}{6}+\frac{5}{6}\right)x^3 + o(x^4) = -\frac{8}{6}x^3 + o(x^4) = -\frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$

Conclusione:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\left(\sin(x\cos(2x)) - \sinh(x-x^3)\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = \frac{4}{3}.$$

Esercizio 10.2.27 (Prova scritta 14-1-2019). Usando gli sviluppi di Taylor, calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left((1+6\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{3}}-1\right)\log\left(\frac{\cos x}{2\sin(x^2)+1}\right)}{8x^2+6\log(\cos(2\sqrt{x}))+3\sqrt[3]{x^2}\sin(4\sqrt[3]{x})+32x^{\frac{5}{3}}}.$$

Sol. Es. 10.2.27.

$$(1+6\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{6}{3}\sqrt[3]{x} = 2\sqrt[3]{x}, \qquad x\to 0^+.$$

Inoltre,

$$\frac{\cos x}{2\sin(x^2)+1} \to \frac{1}{1} \qquad \text{per } x\to 0^+,$$

quindi, ricordando che $\log(y)\sim y-1$ per $y\to 1$, si ha

$$\log\left(\frac{\cos x}{2\sin(x^2)+1}\right) \sim \frac{\cos x}{2\sin(x^2)+1} - 1 = \frac{\cos x - 1 - 2\sin x^2}{2\sin(x^2)+1} \sim \cos x - 1 - 2\sin x^2 =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) - 2x^2 + o(x^2) = -\frac{5}{2}x^2 + o(x^2), \qquad \text{per } x\to 0^+.$$

In conclusione, per il numeratore, vale che

$$\left((1+6\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{3}}-1\right)\log\left(\frac{\cos x}{2\sin(x^2)+1}\right) \sim 2\sqrt[3]{x}\left(-\frac{5}{2}x^2\right) = -5x^{\frac{7}{3}}, \qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Sviluppiamo ora il denominatore con potenze precise fino al grado 7/3.

$$\log(\cos(2\sqrt{x})) = \log\left(1 - \frac{(2\sqrt{x})^2}{2} + \frac{(2\sqrt{x})^4}{24} + o\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\right) \qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Ora,

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \qquad \text{per } y\to 0,$$

per cui

$$\log\left(1-2x+\frac{2}{3}x^2+o\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\right) = -2x+\frac{2}{3}x^2+o\left(x^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(-2x+\frac{2}{3}x^2+o\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\right)^2 + o\left(x^{\frac{7}{3}}\right) =$$

$$= -2x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}\cdot 4x^2 + o\left(x^{\frac{7}{3}}\right) = -2x - \frac{4}{3}x^2 + o\left(x^{\frac{7}{3}}\right) \qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Infine,

$$x^{\frac{2}{3}}\sin(4\sqrt[3]{x}) = x^{\frac{2}{3}}\left(4\sqrt[3]{x} - \frac{1}{6}(4\sqrt[3]{x})^3 + \frac{1}{5!}(4\sqrt[3]{x})^5 + o(x^2)\right) = 4x - \frac{32}{3}x^{\frac{5}{3}} + \frac{128}{15}x^{\frac{7}{3}} + o\left(x^{\frac{7}{3}}\right) \qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Sommando i termini simili al denominatore, si ottine

$$8x^2+6\left(-2x-\frac{4}{3}x^2+o\left(x^{\frac{7}{3}}\right)\right)+3\left(4x-\frac{32}{3}x^{\frac{5}{3}}+\frac{128}{15}x^{\frac{7}{3}}+o\left(x^{\frac{7}{3}}\right)\right)+32x^{\frac{5}{3}}=\frac{128}{5}x^{\frac{7}{3}}+o\left(x^{\frac{7}{3}}\right) \qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Concludendo, il limite iniziale coincide con

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-5x^{\frac{7}{3}}}{\frac{128}{5}x^{\frac{7}{3}}+o\left(x^{\frac{7}{3}}\right)}=-\frac{25}{128}.$$

□

Esercizio 10.2.28 (Prova scritta 7-9-2021). Calcolare usando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x\to+\infty}x^3\left\{\sqrt{\sin\left(\frac{4}{x}\right)+1}-\arctan\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)-1\right\}.$$

SOL. ES. 10.2.28.

$$y=\frac{1}{x}\to 0^+ \quad \text{per } x\to+\infty$$

allora si deve calcolare

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin(4y)+1}-\arctan(2(y-y^2))-1}{y^3}.$$

Sviluppiamo il numeratore con precisione con potenze di y fino al grado 3 compreso.

NUMERATORE:

Si ha

$$\sin(4y)=4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)$$

da cui

$$\sqrt{\sin(4y)+1}=\sqrt{4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)+1}.$$

Dato che

$$4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)\to 0 \quad \text{per } y\to 0$$

si ha

$$\begin{aligned}&\sqrt{4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)+1}\\ &=1+\frac{1}{2}\left(4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)\right)-\frac{1}{8}\left(4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)\right)^2+\frac{1}{16}\left(4y-\frac{1}{6}(4y)^3+o(y^4)\right)^3+o(y^3)\\ &=1+2y-\frac{4^3}{12}y^3-\frac{4^2}{8}y^2+o(y^3)+\frac{4^3}{16}y^3+o(y^4)=1+2y-\frac{16}{3}y^3-2y^2+4y^3+o(y^3)\end{aligned}$$

$$= 1 + 2y - 2y^2 + y^3\left(-\frac{16}{3} + 4\right) + o(y^3) = 1 + 2y - 2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + o(y^3)$$

Pertanto:

$$\sqrt{4y - \frac{1}{6}(4y)^3 + o(y^4) + 1} = 1 + 2y - 2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + o(y^3)$$

Consideriamo l'altro addendo:

$$\arctan\left(2(y - y^2)\right) = 2(y - y^2) - \frac{1}{3}(2(y - y^2))^3 + o(y^4) = 2y - 2y^2 - \frac{8}{3}y^3 + o(y^3).$$

Quindi:

$$\sqrt{\sin\left(4y\right) + 1} - \arctan\left(2(y - y^2\right) - 1 = 1 + 2y - 2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + o(y^3) - \left(2y - 2y^2 - \frac{8}{3}y^3 + o(y^3)\right) - 1$$

$$= \left(-\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right)y^3 + o(y^3) = \frac{4}{3}y^3 + o(y^3).$$

Pertanto:

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\sqrt{\sin\left(4y\right) + 1} - \arctan\left(2(y - y^2\right) - 1}{y^3} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{4}{3}y^3 + o(y^3)}{y^3} = \frac{4}{3}.$$

□

Esercizio 10.2.29 (Prova scritta 8-6-2021). Calcolare usando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cos(\sqrt{2x + x^2})} + \left(\sin\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 - 1}{\sinh^2(x + x^5)}.$$

SOLUZIONE:

Essendo $x + x^5$ tendente a 0 e $\sinh x \sim x$ per $x \to 0$, allora il denominatore: è asintotico a

$$\sinh^2(x + x^5) \sim (x + x^5)^2 \sim x^2 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Sviluppiamo il numeratore con precisione con potenze di x fino al grado 2 compreso.

$$\cos(\sqrt{2x + x^2}) = 1 - \frac{2x + x^2}{2} + \frac{(2x + x^2)^2}{4!} + o(x^2)$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^2}{4!} + o(x^2) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

$$= 1 - x - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

Allora, tenuto conto che

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0,$$

si ha

$$\sqrt{\cos(\sqrt{2x+x^2})} = \sqrt{1-x-\frac{x^2}{3}+o(x^2)}$$

$$= 1-\frac{x+\frac{x^2}{3}+o(x^2)}{2}-\frac{(x+\frac{x^2}{3}+o(x^2))^2}{8}+o((x+\frac{x^2}{3}+o(x^2))^2)$$

$$= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^2}{8}+o(x^2) = 1-\frac{x}{2}-\frac{7x^2}{24}+o(x^2).$$

Studiamo ora l'altro addendo:

$$\sin\sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{x}{2}}-\left(\frac{x}{2}\right)^{3/2}6+o(x^2)$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}-x^{3/2}\frac{1}{2^{3/2}6}+o(x^2).$$

Pertanto,

$$\left(\sin\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}-\frac{x^{3/2}}{2^{3/2}6}+o(x^2)\right)^2 = \frac{x}{2}-x^2 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2^{3/2}6}+o(x^2)$$

$$= \frac{x}{2}-x^2\frac{\sqrt{2}}{2^{3/2}6}+o(x^2) = \frac{x}{2}-x^2\frac{1}{2\cdot 6}+o(x^2)$$

$$= \frac{x}{2}-x^2\frac{1}{12}+o(x^2).$$

Pertanto il numeratore risulta:

$$\sqrt{\cos(\sqrt{2x+x^2})}+\left(\sin\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2-1$$

$$= 1-\frac{x}{2}-\frac{7x^2}{24}+o(x^2)+\frac{x}{2}-x^2\frac{1}{12}+o(x^2)-1$$

$$= \left(-\frac{7}{24}-\frac{1}{12}\right)x^2+o(x^2) = -\frac{9}{24}x^2+o(x^2) = -\frac{3}{8}x^2+o(x^2).$$

Risulta così:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\cos(\sqrt{2x+x^2})}+\left(\sin\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2-1}{\sinh^2(x+x^5)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{3}{8}x^2+o(x^2)}{x^2} = -\frac{3}{8}.$$

Esercizio 10.2.30 (Da prova scritta CdL Matematica 3-6-2019). Calcolare usando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin(3x)+\sinh(3x)-6x\cosh(2x))^2-\left(\log\sqrt{x+1}-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{\cosh(3x^4)}-1\right)}}.$$

SOL. ES. 10.2.30. Per quanto riguarda il denominatore,

$$\sqrt{\cosh(3x^4)} = \sqrt{1 + \frac{9}{2}x^8 + o(x^8)} = 1 + \frac{9}{4}x^8 + o(x^8) \qquad \text{per } x \to 0,$$

quindi

$$\sqrt{\sqrt{\cosh(3x^4)} - 1} = \sqrt{\frac{9}{4}x^8 + o(x^8)} \sim \frac{3}{2}x^4 \qquad \text{per } x \to 0.$$

Sviluppiamo ora il numeratore fino al grado 4.

$$\begin{aligned}(\sin(3x) + \sinh(3x) - 6x\cosh(2x))^2 &= \left(\left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^4)\right) + \left(3x + \frac{(3x)^3}{6} + o(x^4)\right) - 6x\left(1 + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)\right)\right)^2 = \\ &= 144x^6 + o(x^7).\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned}\left(\log\sqrt{x+1} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\log(x+1) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48} + o(x^4)\right)\right)^2 = \frac{x^4}{16} + o(x^4).\end{aligned}$$

Concludendo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin(3x) + \sinh(3x) - 6x\cosh(2x))^2 - \left(\log\sqrt{x+1} - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\sqrt{\left(\sqrt{\cosh(3x^4)} - 1\right)}} = \lim_{x\to 0} \frac{144x^6 - \dfrac{x^4}{16} + o(x^4)}{\dfrac{3}{2}x^4} = -\frac{1}{24}.$$

□

Esercizio 10.2.31 (Prova scritta 1-7-2019). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)(\cos(\sin x) - e^{x^2} - \arctan(-x^2))}{e^{x^2 - \sin x} - e^{-x} - x^2}.$$

SOL. ES. 10.2.31. Sviluppiamo il denominatore fino a ordine, ad esempio, 3.

$$\begin{aligned}e^{x^2 - \sin x} &= e^{x^2 - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))} = e^{-x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \\ &= 1 + (-x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4)) + \frac{1}{2}(-x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2 + \frac{1}{6}(-x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o(x^4))^3 + o(x^3) = \\ &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.\end{aligned}$$

Inoltre,

$$-e^{-x} - x^2 = -(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - x^2 = -1 + x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0,$$

pertanto
$$e^{x^2-\sin x}-e^{-x}-x^2=-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)\qquad \text{per } x\to 0.$$
Osservando che $\tan(2x)\sim 2x$ per $x\to 0$,
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)(\cos(\sin x)-e^{x^2}-\arctan(-x^2))}{e^{x^2-\sin x}-e^{-x}-x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x(\cos(\sin x)-e^{x^2}-\arctan(-x^2))}{-\frac{5}{6}x^3}=\\ &=\lim_{x\to 0}-\frac{12}{5}\frac{(\cos(\sin x)-e^{x^2}-\arctan(-x^2))}{x^2}.\end{aligned}$$
Sviluppiamo ora il numeratore fino all'ordine 2:
$$\begin{aligned}&\cos(\sin(x))=\cos(x+o(x^2))=1-\frac{1}{2}(x+o(x^2))^2+o(x^2)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad \text{per } x\to 0,\\ &e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)\qquad \text{per } x\to 0,\\ &-\arctan(-x^2)=\arctan(x^2)=x^2+o(x^2)\qquad \text{per } x\to 0.\end{aligned}$$
Unendo questi risultati,
$$\cos(\sin x)-e^{x^2}-\arctan(-x^2)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad \text{per } x\to 0.$$
In conclusione,
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)(\cos(\sin x)-e^{x^2}-\arctan(-x^2))}{e^{x^2-\sin x}-e^{-x}-x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{12}{5}\cdot\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{6}{5}.$$
□

Esercizio 10.2.32 (Da prova scritta CdL Matematica 16-9-2019). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor, il seguente limite
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)^{x+1}-e^{x^2}-\sinh(x)}{\sin(2x+x^3)(e^x-1)^2}$$
SOL. ES. 10.2.32. Si ha
$$\sin(2x+x^3)(e^x-1)^2\sim(2x+x^3)(x^2)\sim 2x^3\qquad \text{per } x\to 0^+.$$
Sviluppiamo il numeratore fino a ordine 3:
$$(x+1)^{x+1}=e^{(x+1)\log(x+1)}.$$
Abbiamo
$$(x+1)\log(x+1)=(x+1)(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))=x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\qquad \text{per } x\to 0^+,$$

dunque

$$(x+1)^{x+1} = e^{x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Ora,

$$\begin{aligned} e^{x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 + \frac{1}{6}(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^3 + o(x^3) = \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0^+, \end{aligned}$$

quindi

$$(x+1)^{x+1} = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} &\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0^+, \\ &e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0^+. \end{aligned}$$

In conclusione,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)^{x+1} - e^{x^2} - \sinh(x)}{\sin(2x+x^3)(e^x-1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{2x^3} = \frac{1}{6}.$$

□

Esercizio 10.2.33 (Da prova scritta CdL Matematica 16-1-2023). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor,

$$\lim_{x\to 0} \left\{ x^3 \left(-\sinh(\sqrt{x}) + \arctan(\sqrt{x}) \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{(\sin(x)-\arctan(x))^2}}.$$

SOL. ES. 10.2.33. Si tratta di calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left\{ \frac{\log\left(1 + x^3\left(-\sinh(\sqrt{x}) + \arctan(\sqrt{x})\right)^2\right)}{(\sin(x) - \arctan(x))^2} \right\}$$

Consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1 + x^3\left(-\sinh(\sqrt{x}) + \arctan(\sqrt{x})\right)^2\right)}{(\sin(x) - \arctan(x))^2}. \tag{10.2.6}$$

Denominatore di (10.2.6):

$$\sin(x)-\arctan(x)=(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))-(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4))=\frac{x^3}{6}+o(x^4)$$

allora

$$(\sin(x)-\arctan(x))^2=\big(\frac{x^3}{6}+o(x^4)\big)^2\sim\frac{x^6}{36}\qquad \text{per } x\to 0^+.$$

Allora sviluppiamo con precisione fino al grado 6 il numeratore di (10.2.6).
Il termine

$$x^3\big(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\big)^2$$

per essere sviluppato con precisione fino al grado 6 richiede che

$$\big(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\big)^2$$

sia sviluppato con precisione fino al grado 3.
Allora essendo

$$\begin{aligned}-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})&=\\ &=-\big(\sqrt{x}+\frac{1}{6}x^{3/2}+o(x^2)\big)+\big(\sqrt{x}-\frac{1}{3}x^{3/2}+o(x^2)\big)\\ &=-\frac{1}{2}x^{3/2}+o(x^2),\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\big(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\big)^2&=\\ &=\left(-\frac{1}{2}x^{3/2}+o(x^2)\right)^2\\ &=\frac{1}{4}x^3+o(x^{7/2}).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}x^3\big(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\big)^2&=x^3\big(\frac{1}{4}x^3+o(x^{7/2})\big)\\ &=\frac{1}{4}x^6+o(x^{13/2})\end{aligned}$$

Allora

$$\log\Big(1+x^3\big(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\big)^2\Big)=\log\left(1+\frac{1}{4}x^6+o(x^{13/2})\right).$$

Pertanto il limite di (10.2.6) è

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\Big(1+x^3\big(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\big)^2\Big)}{(\sin(x)-\arctan(x))^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\frac{1}{4}x^6+o(x^{13/2})\right)}{\frac{x^6}{36}}$$

Essendo

$$\log\left(1+\frac{1}{4}x^6+o(x^{13/2})\right) \sim \frac{1}{4}x^6+o(x^{13/2})$$
$$\sim \frac{1}{4}x^6 \qquad \text{per } x\to 0^+$$

deduciamo che il limite di (10.2.6) è

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\left(1+\frac{1}{4}x^6+o(x^{13/2})\right)}{\frac{x^6}{36}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}x^6}{\frac{x^6}{36}} = 9.$$

Concludendo:

$$\lim_{x\to 0^+} \exp\left\{ \frac{\log\left(1+x^3\left(-\sinh(\sqrt{x})+\arctan(\sqrt{x})\right)^2\right)}{(\sin(x)-\arctan(x))^2} \right\} = e^9.$$

□

Esercizio 10.2.34 (Da prova scritta CdL Matematica 7-2-2023). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+2x+2x^2)) - e^{2x}+1+2x^2}{\frac{\sin(e^x-1)}{\sin(x)}(\sqrt{4+x^3}-2)}.$$

SOL. ES. 10.2.34. Denominatore:

$$\frac{\sin(e^x-1)}{\sin(x)} \sim \frac{e^x-1}{x} \sim 1 \quad \text{per } x\to 0.$$

e

$$\sqrt{4+x^3}-2 = 2\left(\sqrt{1+\frac{x^3}{4}}-1\right) \sim 2\frac{1}{2}\frac{x^3}{4} = \frac{x^3}{4} \quad \text{per } x\to 0.$$

Allora

$$\frac{\sin(e^x-1)}{\sin(x)}(\sqrt{4+x^3}-2) \sim \frac{x^3}{4} \quad \text{per } x\to 0.$$

Allora sviluppiamo con precisione fino al grado 3 il numeratore.
Si ha

$$\log(1+2x+2x^2) = 2x+2x^2-\frac{1}{2}(2x+2x^2)^2+\frac{1}{3}(2x+2x^2)^3+o((2x+2x^2)^3)$$
$$= 2x+2x^2-\frac{1}{2}(4x^2+8x^3+o(x^3))+\frac{1}{3}8x^3+o(x^3)$$
$$= 2x-4x^3+\frac{8}{3}x^3+o(x^3) = 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3).$$

Allora

$$\begin{aligned}\sin(\log(1+2x+2x^2)) &= \sin(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3))\\ &= 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)-\frac{1}{6}(2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3))^3+o(x^3)\\ &= 2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)-\frac{1}{6}(8x^3)+o(x^3)=2x-\frac{8}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Studiamo gli altri termini.

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 1+2x+\frac{1}{2}4x^2+\frac{1}{6}8x^3+o(x^3)\\ &= 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}-e^{2x}+1+2x^2 &= -\left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)+1+2x^2\\ &= -2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\log(1+2x+2x^2))-e^{2x}+1+2x^2}{\frac{\sin(e^x-1)}{\sin(x)}(\sqrt{4+x^3}-2)}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{8}{3}x^3+o(x^3)-2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{4}}\\ &=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{8}{3}x^3-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{\frac{x^3}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^3}{\frac{x^3}{4}}=-16.\end{aligned}$$

□

Esercizio 10.2.35 (Da prova scritta CdL Matematica 6-6-2023). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)\arctan(2x+x^2)+\left(\arcsin(2x)\right)^2}{e^{x^2}-1-x^2}.$$

SOL. ES. 10.2.35. Denominatore:

$$e^{x^2}-1-x^2=\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\right)-1-x^2\sim\frac{1}{2}x^4 \quad \text{per } x\to 0$$

Allora

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)\arctan(2x+x^2)+\left(\arcsin(2x)\right)^2}{e^{x^2}-1-x^2}\\ &=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2-2x)\arctan(2x+x^2)+\left(\arcsin(2x)\right)^2}{x^4}.\end{aligned}$$

Sviluppiamo il numeratore con precisione fino al grado 4.
Si ha il seguente sviluppo

$$(\arcsin(2x))^2 = \left(2x + \frac{8}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 = 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^5).$$

Per quel che riguarda

$$\sin(x^2 - 2x)\arctan(2x + x^2)$$

dato che

$$\arctan(2x + x^2) \sim 2x \quad \text{per } x \to 0$$

allora è sufficiente sviluppare con precisione fino al grado 3 il fattore $\sin(x^2 - 2x)$, ottenendo

$$\begin{aligned}\sin(x^2 - 2x) &= x^2 - 2x - \frac{1}{6}(x^2 - 2x)^3 + o(x^4)\\ &= x^2 - 2x - \frac{1}{6}(-8x^3 + o(x^3)) = x^2 - 2x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\\ &= -2x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Essendo

$$\sin(x^2 - 2x) \sim -2x \quad \text{per } x \to 0$$

allora è sufficiente sviluppare fino al grado 3 con precisione il fattore $\arctan(2x + x^2)$, ottenendo

$$\begin{aligned}\arctan(2x + x^2) &= (2x + x^2) - \frac{1}{3}(2x + x^2)^3 + o(x^4)\\ &= (2x + x^2) - \frac{1}{3}8x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\sin(x^2 - 2x)\arctan(2x + x^2) &= \left(-2x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)\left(2x + x^2 - \frac{1}{3}8x^3 + o(x^3)\right)\\ &= -4x^2 - 2x^3 + 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^4 + x^4 + o(x^4) == -4x^2 + 9x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Concludendo:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)\arctan(2x + x^2) + \left(\arcsin(2x)\right)^2}{e^{x^2} - 1 - x^2}\\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)\arctan(2x + x^2) + \left(\arcsin(2x)\right)^2}{x^4}\\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{-4x^2 + 9x^4 + o(x^4) + 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^5)}{x^4}\\ &= 2\lim_{x\to 0} \frac{9x^4 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^5)}{x^4}\end{aligned}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{43}{3}x^4}{x^4} = \frac{86}{3}.$$

$\square$

Esercizio 10.2.36 (Da prova scritta CdL Matematica 26-6-2023). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 + x}{\sqrt{\sin(2x) - \arctan(2x)}}.$$

SOL. ES. 10.2.36. Denominatore:

$$\sin(2x) - \arctan(2x) = (2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)) - (2x - \frac{8x^3}{3} + o(x^4)) = \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) \sim \frac{4}{3}x^3 \quad \text{per } x\to 0$$

Dal momento che $x^3 > 0$ se e solo se $x > 0$ allora calcolare $\lim_{x\to 0}$ della funzione significa in realtà calcolare $\lim_{x\to 0^+}$ perché in un intorno sinistro di 0 il denominatore non è definito:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 + x}{\sqrt{\sin(2x) - \arctan(2x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 + x}{\sqrt{\sin(2x) - \arctan(2x)}}.$$

Inoltre

$$\sqrt{\sin(2x) - \arctan(2x)} \sim \frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/2} \quad \text{per } x\to 0^+.$$

Si tratta quindi di calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} + x}{\frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/2}}.$$

Allora sviluppiamo con precisione fino al grado 3/2 il numeratore.

I modo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} + x}{\frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos(\sqrt{2x}) - 1\right)e^{2\sqrt{x}} + x}{\frac{2}{\sqrt{3}}x^{3/2}}.$$

Si ha

$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 = e^{2\sqrt{x}} = 1 + 2\sqrt{x} + 2x + \frac{4}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x\to 0.$$

Si ha
$$\cos(\sqrt{2x}) = 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 - x + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x \to 0.$$
Allora
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\cos(\sqrt{2x}) - 1\right) e^{2\sqrt{x}} + x}{\frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-x + o(x^{3/2})\right)\left(1 + 2\sqrt{x} + 2x + \frac{4}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right) + x}{\frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{3/2} + o(x^{3/2})}{\frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}} = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

II modo:

Si ha
$$\left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 = e^{2\sqrt{x}} = 1 + 2\sqrt{x} + 2x + \frac{4}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x \to 0.$$
Si ha
$$\cos(\sqrt{2x}) = 1 - x + \frac{x^2}{6} + o(x^2) = 1 - x + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x \to 0.$$
Allora
$$\begin{aligned}
\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} &= (1 - x + o(x^{3/2}))\left(1 + 2\sqrt{x} + 2x + \frac{4}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right) \\
&= 1 + 2\sqrt{x} + 2x + \frac{4}{3}x^{3/2} - x - 2x\sqrt{x} + o(x^{3/2}) \\
&= 1 + 2\sqrt{x} + x - \frac{2}{3}x^{3/2} \quad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$
Pertanto il numeratore è:
$$\begin{aligned}
&\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - \left(e^{\sqrt{x}}\right)^2 + x \\
&= 1 + 2\sqrt{x} + x - \frac{2}{3}x^{3/2} - \left(1 + 2\sqrt{x} + 2x + \frac{4}{3}x^{3/2} + o(x^{3/2})\right) + x \\
&= -2x^{3/2} + o(x^{3/2}) \quad \text{per } x \to 0.
\end{aligned}$$
Ne concludiamo che
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{2x})e^{2\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} + x}{\frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^{3/2} + o(x^{3/2})}{\frac{2}{\sqrt{3}} x^{3/2}} = -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$\square$

Esercizio 10.2.37 (Da prova scritta CdL Matematica 17-7-2023). Calcolare, usando gli sviluppi di Taylor,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\big(\log(\cos(x)-x)\big)^2 - \sqrt{x}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3}{(e^{-1/x^2}+2x)^2 \arcsin(2x)}.$$

SOL. ES. 10.2.37. Si noti che deve avere senso $\sqrt{x}$, per cui $x \geq 0$. Si tratta, pertanto, di calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\big(\log(\cos(x)-x)\big)^2 - \sqrt{x}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3}{(e^{-1/x^2}+2x)^2 \arcsin(2x)}.$$

Denominatore:
Osserviamo che

$$e^{-1/x^2} = o(2x) \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Infatti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{2x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{e^{1/x^2}} \\ &\overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{y}{e^{y^2}} = 0,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dai limiti notevoli.
Allora, per $x \to 0^+$,

$$(e^{-1/x^2}+2x)^2 \arcsin(2x) \sim (2x)^2 \arcsin(2x) \sim (2x)^3 = 8x^3.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} \frac{\big(\log(\cos(x)-x)\big)^2 - \sqrt{x}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3}{(e^{-1/x^2}+2x)^2 \arcsin(2x)} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\big(\log(\cos(x)-x)\big)^2 - \sqrt{x}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3}{8x^3}.\end{aligned}$$

Sviluppiamo il numeratore con precisione fino al grado 3.
Si ha

$$\begin{aligned}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3 &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^{3/2} + o(x^2)\right)^3 \\ &= x^{3/2} - \frac{3}{6}x^{5/2} + o(x^{5/2}).\end{aligned}$$

Allora

$$\sqrt{x}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3 = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

Consideriamo ora l'altro termine:

$$\cos(x) - x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - x,$$

quindi

$$\begin{aligned}\log(\cos(x)-x) &= \log(1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \\ &= -x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)-\frac{1}{2}\big(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\big)^2+o(x^2) \\ &= -x-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)-\frac{1}{2}x^2+o(x^2) = -x-x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

Allora

$$(\log(\cos(x)-x))^2 = \big(-x-x^2+o(x^2)\big)^2 = x^2+2x^3+o(x^3).$$

Pertanto

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{\big(\log(\cos(x)-x)\big)^2-\sqrt{x}\big(\sin\sqrt{x}\big)^3}{8x^3} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+2x^3+o(x^3)-\big(x^2-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\big)}{8x^3} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x^3+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{8x^3} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{5}{2}x^3+o(x^3)}{8x^3} = \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

□

10.3. Stima dell'errore

Ricordiamo lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange.

Teorema 10.3.1. *Siano $I\subseteq\mathbb{R}$, $f: I\to\mathbb{R}$, $x_0\in I$ e $n\in\mathbb{N}$. Supponiamo f derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I\setminus\{c\}$.*
Allora, per ogni $x\in I\setminus\{x_0\}$, esiste ξ compreso nell'intervallo aperto di estremi x_0 e x, tale che

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Il polinomio di Taylor è

$$T_n(f;x_0)(x) := \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

e

$$R_n(f;x_0)(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

viene detto resto in forma di Lagrange. Tale resto permette di stimare l'errore di approssimazione compiuto utilizzando il polinomio di Taylor $T_n(f;x_0)(x)$ anziché $f(x)$.

Esercizio 10.3.2. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin(x)$.
Stimate l'errore compiuto approssimando $\sin(1)$ con $T_n(\sin;0)(1)$ al variare di $n\in\{1,\cdots,7\}$.
Sol: Osserviamo che, essendo

$$f^{(n+1)}(x)\in\{\pm\sin(x),\pm\cos(x)\},$$

allora

$$|R_n(\sin;0)(1)| \overset{\exists\xi\in]0,1[}{=} \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}\le\frac{1}{(n+1)!}.$$

Dunque la stima dell'errore che si compie scrivendo $T_n(\sin;0)(1)$ anziché $\sin(1)$ è

$$\text{stima errore}=\frac{1}{(n+1)!}.$$

Dunque la stima dell'errore è:

n	$(n+1)!$	stima errore	ordine di grandezza
1	2	$\frac{1}{2!}=0.5$	$5\cdot10^{-1}$
2	6	$\frac{1}{3!}=0.1\overline{6}$	$2\cdot10^{-1}$
3	24	$\frac{1}{4!}=0.041\overline{6}$	$5\cdot10^{-2}$
4	120	$\frac{1}{5!}=0.008\overline{3}$	$9\cdot10^{-3}$
5	720	$\frac{1}{6!}=0.0013\overline{8}$	$2\cdot10^{-3}$
6	5040	$\frac{1}{7!}=0.000198\ldots$	$2\cdot10^{-4}$
7	40320	$\frac{1}{8!}=0.000024\ldots$	$3\cdot10^{-5}$

Esercizio 10.3.3. Determinare le prime tre cifre decimali di $\sqrt{2}$.
Sol:
Si ha $1.4^2=1.96<2$, quindi $1.4<\sqrt{2}$.
Scriviamo lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange di $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$ centrato in 1.4.
Per farlo, dobbiamo calcolare alcune derivate di f

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}},$$

quindi

$$|f'(x)|\le\frac{1}{2\sqrt{1.96}}=\frac{1}{2\cdot1.4}<\frac{1}{2}\qquad\forall x\in]1.96,2[.$$

Osserviamo ora che

$$|R_0(f;1.96)(2)| \overset{\exists\xi\in]0,1[}{=} \frac{|f'(\xi)|}{1!}(2-1.96)<\frac{1}{2}(0.04)=0.02=2\cdot10^{-2}.$$

Non va bene per l'approssimazione richiesta.

Aumentiamo il grado. Si ha:

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{4\sqrt{1.96}} = \frac{1}{4\cdot 1.4} < \frac{1}{4} \qquad \forall x \in]1.96, 2[.$$

e

$$|R_0(f;1.96)(2)| \overset{\exists \xi \in]0,1[}{=} \frac{|f''(\xi)|}{2!}(2-1.96)^2 < \frac{1}{8}(0.04)^2 = \frac{0.0016}{8} = 0.0002.$$

abbiamo che il polinomio di Taylor di grado 1 centrato in $x_0 = 1.96$ fornisce un'approssimazione corretta fino alla terza cifra decimale di $\sqrt{2}$.

$$T_1(f;1.96)(2) := \sum_{i=0}^{1} \frac{f^{(i)}(1.96)}{i!}(2-1.96)^i = \sqrt{1.96} + + \frac{1}{2\sqrt{1.96}}(2-1.96)$$

$$= 1.4 + \frac{1}{2\cdot 1.4}(0.04) = 1.4 + \frac{4}{100}\frac{10}{28} = 1.4 + \frac{1}{70} = 1.4 + 0.01428\ldots = 1.41428\cdots$$

Allora

$$|\sqrt{2} - T_1(f;1.96)(2)| = |R_1(f;0)(1.96)| < 10^{-3}$$

Dunque:

$$\sqrt{2} < 1.41428\cdots + 0.0002 < 1.41429 + +0.0002 = 1.41449$$

e

$$\sqrt{2} > 1.41428\cdots - 0.0002 > 1.41428 - 0.0002 = 1.41408$$

ossia

$$1.41408 < \sqrt{2} < 1.41449.$$

Pertanto, lo sviluppo decimale di $\sqrt{2}$ fino alle prime tre cifre decimali di $\sqrt{2}$ è:

$$1.414$$