Alcuni esercizi di Geometria 2

Lista aggiornata al 21 febbraio 2024

Questa è una raccolta di domande e di esercizi per il corso di Geometria 2 tenuto nel secondo semestre degli anni accademici 2022/23 e 2023/24 da Giovanni Mongardi e da Andrea Petracci per il secondo anno del corso di laurea in Matematica dell'Università di Bologna.

La lista degli esercizi potrà essere aggiornata, ma si cercherà di mantenere la numerazione degli esercizi nelle nuove versioni. Vi preghiamo di segnalarci errori e sviste.

Gli esercizi non sono ordinati secondo la difficoltà, né secondo un ordine corrispondente allo svolgimento del corso; infatti, è ben possibile che per risolvere un esercizio si debba usare uno strumento teorico trattato in seguito rispetto al titolo della sezione in cui compare.

Salvo avviso contrario, usiamo le seguenti convenzioni. $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri interi non-negativi. Per ogni intero $n \geq 0$, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono dotati della topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$. Per ogni numero intero $n \geq 0$ si considerano i seguenti sottoinsiemi dello spazio euclideo:

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\} \quad \text{sfera unitaria } n\text{-dimensionale}$$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\} \quad \text{disco unitario } n\text{-dimensionale}$$

$$B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\} \quad \text{palla aperta unitaria } n\text{-dimensionale}$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea. Sullo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (rispettivamente sullo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) si considera la topologia quoziente della topologia euclidea di $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ (risp. $\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$); sui sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ o di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si considera la topologia di sottospazio.

Referenze bibliografiche:

- Marco Manetti, *Topologia*, seconda edizione, Springer Unitext
- Stefano Francaviglia, *Topologia*, seconda edizione
- Edoardo Sernesi, *Geometria 2*, seconda edizione, Bollati Boringhieri
- Czes Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli

Legenda della difficoltà:
Di fianco al numero di ogni esercizio compaiono alcuni asterischi, che ne rappresentano la difficoltà, secondo le seguenti convenzioni:

- * Esercizio semplice, richiede una applicazione delle definizioni o una veloce verifica.
- ** Esercizio di ragionevole semplicità, richiede l'applicazione di alcuni risultati di teoria e qualche verifica.
- *** Esercizio complesso, richiede impegno e buona capacità di ragionamento, oppure un gran numero di verifiche.
- **** Esercizio difficile, richiede verifiche complesse o buone idee. É formativo tentare a volte esercizi di questo tipo, indipendentemente dall'esito.
- ***** Esercizio di approfondimento: esercizio molto complesso, la cui risoluzione permette di approfondire argomenti collegati al corso. La sua risoluzione è fortemente sconsigliata a chiunque non riesca a risolvere gli esercizi a difficoltà inferiore.

Il livello di difficoltà si misura (per quanto possibile) in base alle conoscenze acquisite a fine corso: è possibile che alcuni esercizi possano risultare ostici o quasi impossibili all'inizio del corso (ad esempio parte dell'esercizio 3.5), per poi rivelarsi banali in seguito.

1. Insiemi

1.1. Svolgere gli esercizi di §2.1 del libro di Manetti.

1.2.** Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra due insiemi.

(1) Sia $\{V_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di Y. Si provi

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} V_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i) \quad \text{e} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

(2) Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Si provi

$$f\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(U_i) \quad \text{e} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(U_i).$$

Il secondo contenimento può essere stretto?

(3) Sia $V \subseteq Y$. Si stabilisca se ci sono uguaglianze e/o contenimenti tra V, $f(f^{-1}(V))$, $f(f^{-1}(f(f^{-1}(V))))$.

(4) Sia $U \subseteq X$. Si stabilisca se ci sono uguaglianze e/o contenimenti tra U, $f^{-1}(f(U))$, $f^{-1}(f(f^{-1}(f(U))))$.

(5) Se $V \subseteq f(X)$ allora si provi che $f(f^{-1}(V)) = V$.

(6) Se $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$, allora si provi che $f(U) \subseteq V$ se e solo se $U \subseteq f^{-1}(V)$.

(7) Se $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$, che relazione c'è tra $f(U) \supseteq V$ e $U \supseteq f^{-1}(V)$?

1.3.** Sia $f\colon X \to Y$ una funzione. Si consideri la relazione $\sim$ su X definita da: se $x_1, x_2 \in X$, allora $x_1 \sim x_2$ se e solo se $f(x_1) = f(x_2)$.

(1) Si provi che $\sim$ è una relazione di equivalenza su X. Sia $\pi\colon X \to X/\sim$ la proiezione al quoziente.
(2) Si consideri l'inclusione $j\colon f(X) \hookrightarrow Y$. Si provi che esiste un'unica funzione $\overline{f}\colon X/\sim \to f(X)$ tale che $f = j \circ \overline{f} \circ \pi$.
(3) Si provi che $\overline{f}$ è bigettiva. (Questo dice che l'immagine di una funzione f dovrebbe essere pensata come un quoziente del dominio di f. Si confronti con il primo teorema di omomorfismo per spazi vettoriali o per gruppi.)

Osservazione 1: nel caso in cui f è suriettiva, si ottiene una bigezione tra $X/\sim$ e Y. Quindi a partire da una funzione suriettiva $f\colon X \to Y$ si ottiene una una relazione di equivalenza $\sim$ su X tale che il quoziente $X/\sim$ sia in bigezione (tramite f) con Y. Viceversa, a partire da una relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X si costruisce una funzione suriettiva $X \to X/\sim$, che è la proiezione al quoziente. Perciò, dare una funzione suriettiva con dominio l'insieme X equivale a dare una relazione di equivalenza sull'insieme X.
Osservazione 2: nel caso in cui f è iniettiva, si ottiene che $\sim$ è la relazione banale, ovvero per ogni $x_1, x_2 \in X$ vale $x_1 \sim x_2$ se e solo se $x_1 = x_2$, e quindi $\pi\colon X \to X/\sim$ è una bigezione. In questo caso, f identifica X con un sottoinsieme di Y.

1.4.** Siano X e Y due insiemi e siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ due sottoinsiemi. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è sempre vera (e in tal caso la si dimostri) o se può essere falsa (e in tal caso si trovi un controesempio).

(1) $(X \times Y) \smallsetminus (A \times B) = (X \smallsetminus A) \times (Y \smallsetminus B)$
(2) $(X \times Y) \smallsetminus (A \times B) = (X \times (Y \smallsetminus B)) \cup ((X \smallsetminus A) \times B)$
(3) $(X \times Y) \smallsetminus (A \times B) = ((X \smallsetminus A) \times (Y \smallsetminus B)) \cup ((X \smallsetminus A) \times B) \cup (A \times (Y \smallsetminus B))$
(4) $(X \times Y) \smallsetminus ((X \smallsetminus A) \times B) = (A \times Y) \cup ((X \smallsetminus A) \times (Y \smallsetminus B))$
(5) $(A \times Y) \cap (X \times (Y \smallsetminus B)) = A \times (Y \smallsetminus B)$

Se X e Y sono due insiemi, si indica con Y^X l'insieme delle funzioni da X a Y.

1.5.** Se X è un insieme finito con n elementi e Y è un insieme finito con m elementi, si calcoli la cardinalità (cioè il numero di elementi) di Y^X.

1.6.** Siano X, Y, T tre insiemi. Si costruisca una bigezione tra l'insieme $Y^{X\times T}$ (che è l'insieme delle funzioni $X \times T \to Y$) e l'insieme $\left(Y^X\right)^T$ (che è l'insieme delle funzioni $T \to Y^X$, ovvero l'insieme delle famiglie $(f_t)_{t\in T}$ dove $f_t\colon X \to Y$ per ogni $t \in T$).

Cardinalità

Due insiemi si dicono *equipotenti*, o si dice che *hanno la stessa cardinalità*, se esiste una bigezione tra loro.

Un insieme X si dice *finito* se è l'insieme vuoto oppure esiste un numero naturale positivo n tale che X è equipotente a $\{1, \dots, n\}$. Un insieme si dice *infinito* se non è finito.

Se X e Y sono due insiemi equipotenti, si scrive $|X| = |Y|$; si badi bene che, in generale, questa è solo una scrittura, cioè un'abbreviazione della frase "X e Y sono equipotenti", non stiamo dando un significato al simbolo $|X|$. Tuttavia, se X è finito, allora il simbolo $|X|$ denota il numero di elementi di $|X|$; perciò se X e Y sono finiti la scrittura "$|X| = |Y|$" signfica, correttamente, che X e Y hanno lo stesso numero di elementi. (In verità, si potrebbe dare un significato a $|X|$ anche quando X è infinito, ma bisognerebbe parlare di ordinali e cardinali e lo evitiamo.)

1.7.* Siano X, Y, Z tre insiemi. Si provi che se $|X| = |Y|$ e $|Y| = |Z|$ allora $|X| = |Z|$. Attenzione: "essere equipotenti" non è una relazione di equivalenza perché non esiste l'insieme di tutti gli insiemi (paradosso di Russell).

1.8.* Si provi che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \smallsetminus \{2, 5\}$ sono equipotenti.

1.9.* Si provi che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti.

1.10.** Si provi che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sono equipotenti.

1.11.* Siano X e Y due insiemi. Si provi che le due seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) esiste una funzione iniettiva $f\colon X \to Y$,
(2) esiste una funzione suriettiva $g\colon Y \to X$.

In tal caso si dice che X *ha cardinalità minore o uguale* a quella di Y e si scrive $|X| \le |Y|$.

1.12.*** (Teorema di Cantor) Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X, cioè l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di X. Se $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ è una funzione, allora si provi che f non è suriettiva. [Suggerimento: si consideri $S = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$]. Si provi che A non sta nell'immagine di f.]

1.13.*** Si provi che se X è un insieme allora $\mathcal{P}(X)$ ha cardinalità strettamente maggiore di quella di X, cioè $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

1.14.** Se X è un insieme si costruisca una bigezione tra $\mathcal{P}(X)$ e $\{0, 1\}^X$ (che è l'insieme delle funzioni $X \to \{0, 1\}$).

Valgono i seguenti risultati:

Teorema di Cantor–Bernstein. *Siano X e Y due insiemi. Se esistono delle funzioni iniettive $X \to Y$ e $Y \to X$ allora esiste anche una funzione bigettiva $X \to Y$. In altre parole, se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$ allora $|X| = |Y|$.*

Teorema. *Se X è un insieme infinito, allora $|X \times X| = |X|$.*

Un insieme si dice *numerabile* se è equipotente a $\mathbb{N}$. Un insieme si dice *al piú numerabile* se ha cardinalità minore o uguale a quella di $\mathbb{N}$. Si noti la differenza con la Definizione 2.5 del libro di Manetti.

1.15.** Sia X un insieme infinito. Se X è al piú numerabile, allora si mostri che X è numerabile.

1.16.** Se X e Y sono due insiemi numerabili, allora si mostri che $X \cup Y$ è numerabile.

1.17.** Se X è un insieme infinito e Y è un insieme finito, allora si provi che X e $X \cup Y$ hanno la stessa cardinalità.

1.18.* Si dica quali tra i seguenti insiemi sono numerabili: $\mathbb{N} \smallsetminus \{6, 9\}$, $\mathbb{Z}$, $4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \smallsetminus \{-1\}$, $\mathbb{Q} \smallsetminus \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Q}[x]$, $\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ è algebrico su } \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{R} \smallsetminus \overline{\mathbb{Q}} = \{\text{reali trascendenti}\}$, $\mathbb{Q}^7$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, $(-1, 5)$, $(-\infty, 5]$, $\mathbb{Q} \cap [7, 8]$, $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^9$.

1.19.*** (Unione al piú numerabile di al piú numerabili è al piú numerabile) Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi al piú numerabili, cioè X_i è al piú numerabile per ogni $i \in I$. Si supponga che I è al piú numerabile. Si provi che $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ è al piú numerabile. [Suggerimento: si considerino funzioni iniettive $f_i \colon X_i \to \mathbb{N}$ e $g \colon I \to \mathbb{N}$. Si consideri l'"unione disgiunta" $Y = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$. Si costruisca una funzione suriettiva $Y \to X$ e una funzione iniettiva $Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.]

2. Spazi topologici e funzioni continue

Spazi topologici

2.1.* Sia $X = \{x\}$ un insieme costituito da un solo punto x. Si provi che su X esiste un'unica topologia τ. Si provi che lo spazio topologico (X, τ) è discreto, grossolano (cioè indiscreto), cofinito, T2, T4, compatto, connesso per archi, semplicemente connesso.

2.2.** Si costruisca uno spazio topologico X e un sottoinsieme chiuso $Y \subseteq X$ tale che la chiusura della parte interna di Y in X è strettamente contenuta in Y.

2.3.** Si costruisca uno spazio topologico X e un sottoinsieme aperto $Y \subseteq X$ tale che la parte interna della chiusura di Y in X contiene strettamente Y.

2.4.** Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si provi che Y è aperto in X se e solo se Y è intorno di ogni suo punto, cioè per ogni punto $y \in Y$ vale che Y è intorno di y in X.

2.5.* Sia X uno spazio topologico. Si provi che X è discreto se e solo se per ogni punto $x \in X$ il singoletto $\{x\}$ è aperto in X.

2.6.*** Si considerino due insiemi X e Y tali che $\emptyset \neq Y \subsetneq X$. Si fissi una topologia τ_Y su Y.

(1) τ_Y è anche una topologia su X?
(2) Si provi che esiste una topologia τ su X tale che $\tau \supseteq \tau_Y$. In altre parole, si provi che esiste una topologia τ su X tale che per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$ vale l'implicazione $A \in \tau_Y \Rightarrow A \in \tau$.
(3) Tra tutte le topologie τ su X che soddisfano il punto precedente, cioè che soddisfano $\tau \supseteq \tau_Y$, si determini esplicitamente quella meno fine. Si chiami τ_1 questa topologia su X.
(4) Si provi che τ_Y coincide con la topologia su Y di sottospazio di (X, τ_1).
(5) Si provi che Y è denso in (X, τ_1).
(6) Si trovi almeno un'altra topologia τ su X che gode della proprietà del punto (2) e che sia diversa da τ_1.
(7) Per ogni topologia σ su $X \smallsetminus Y$ si ponga

$$\tau_\sigma := \{A \subseteq X \mid A \cap Y \in \tau_Y,\ A \cap (X \smallsetminus Y) \in \sigma\}.$$

  (a) Si provi che τ_σ è una topologia su X.
  (b) Si provi che τ coincide con la topologia su Y di sottospazio di (X, τ_σ).
  (c) Si provi che σ coincide con la topologia su $X \smallsetminus Y$ di sottospazio di (X, τ_σ).
  (d) Si determini la parte interna e la chiusura di Y in (X, τ_σ).
  (e) Si determini la parte interna e la chiusura di $X \smallsetminus Y$ in (X, τ_σ).
  (f) Si provi che (X, τ_σ) è sconnesso.
  (g) Si provi che (X, τ_σ) è discreto se e solo se (Y, τ_Y) e $(X \smallsetminus Y, \sigma)$ sono discreti.
  (h) È vero che (X, τ_σ) è grossolano se (Y, τ_Y) e $(X \smallsetminus Y, \sigma)$ sono grossolani?
  (i) È vero che se $(X \smallsetminus Y, \sigma)$ è grossolano allora τ_σ coincide con τ_1?

2.7.*** (Topologia cofinita) Sia X un insieme non vuoto. Si consideri

$$\tau_{\text{cof}} := \{A \subseteq X \mid X \smallsetminus A \text{ è finito}\} \cup \{\emptyset\}.$$

(1) Si provi che τ_{cof} è una topologia su X.
(2) Per ogni sottoinsieme $C \subseteq X$, si provi che C è chiuso in (X, τ_{cof}) se e solo se C è finito o $C = X$.
(3) Si provi che (X, τ_{cof}) è uno spazio topologico T1.
(4) Se $Y \subseteq X$ è un sottoinsieme infinito, si provi che Y è denso in (X, τ_{cof}).

(5) Si provi che se X è finito allora τ_{cof} coincide con la topologia discreta su X.
(6) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) X è infinito,
  (b) per ogni coppia di aperti non vuoti A e A' di (X, τ_{cof}) si ha $A \cap A' \neq \emptyset$,
  (c) lo spazio topologico (X, τ_{cof}) è connesso,
  (d) lo spazio topologico (X, τ_{cof}) non è T2,
  (e) τ_{cof} è strettamente meno fine della topologia discreta su X.
(7) Si provi che (X, τ_{cof}) è uno spazio topologico compatto.

2.8.** Sia X un insieme e sia $\mathcal{F}$ un insieme di topologie su X. Allora $\bigcap_{\tau \in \mathcal{F}} \tau$ è una topologia ed è la piú fine tra quelle meno fini di ogni topologia appartenente a $\mathcal{F}$.

2.9.*** Sia X un insieme e sia $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un insieme di sottoinsiemi di X.

(1) Si provi che esiste almeno una topologia su X che contiene $\mathcal{S}$.
(2) Si provi che esiste un'unica topologia su X che è la meno fine tra quelle che contengono $\mathcal{S}$. Essa si chiama *topologia generata* da $\mathcal{S}$.
(3) Sia $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle intersezioni finite degli elementi di $\mathcal{S}$. L'intersezione della famiglia vuota è X, perciò $X \in \mathcal{S}'$. Sia $\tau_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ l'insieme delle unioni arbitrarie degli elementi di $\mathcal{S}'$. L'unione della famiglia vuota è $\emptyset$, perciò $\emptyset \in \tau_{\mathcal{S}}$. Si provi che $\tau_{\mathcal{S}}$ è una topologia su X.
(4) Si provi che $\mathcal{S}$ è una prebase di $\tau_{\mathcal{S}}$.
(5) Si provi che $\tau_{\mathcal{S}}$ è la topologia generata da $\mathcal{S}$.
(6) Sia $\mathcal{S}''$ l'insieme delle unioni arbitrarie degli elementi di $\mathcal{S}$. Sia $\mathcal{S}'''$ l'insieme delle intersezioni finite degli elementi di $\mathcal{S}''$. Si provi che $\tau_{\mathcal{S}} \supseteq \mathcal{S}'''$. Si costruisca un esempio in cui $\tau_{\mathcal{S}} \supsetneqq \mathcal{S}'''$.
(7) Per $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$, siano $\mathcal{S}'$, $\tau_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{S}''$, $\mathcal{S}'''$ definiti come sopra. Si provino le seguenti affermazioni:
  (a) $\mathcal{S}' = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{S} \cup \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;
  (b) $\tau_{\mathcal{S}}$ coincide con la topologia euclidea di $\mathbb{R}$;
  (c) $\mathcal{S}'' = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{S} \cup \{(-\infty, a) \cup (b, +\infty) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$;
  (d) per ogni $U \in \mathcal{S}'''$, U ha un numero finito di componenti connesse;
  (e) $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \notin \mathcal{S}'''$;
  (f) $\tau_{\mathcal{S}} \supsetneqq \mathcal{S}'''$.

2.10.** Sia X un insieme e sia $\mathcal{S} = \{X \smallsetminus \{x\} \mid x \in X\}$. Si determini la topologia generata da $\mathcal{S}$. È una topologia nota?

2.11.** Sia X un insieme e siano τ_1 e τ_2 due topologie su X. Si provi che τ_1 è piú fine di τ_2 se e solo se per ogni punto $x \in X$ ogni intorno di x in (X, τ_2) contiene almeno un intorno di x in (X, τ_1).

Funzioni continue

2.12.* Sia $f \colon X \to Y$ una funzione tra spazi topologici. Si provi che se X è discreto o Y è grossolano allora f è continua.

2.13.* Sia $f \colon X \to Y$ una funzione costante tra spazi topologici. Si provi che f è continua.

2.14.** Siano $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ due funzioni tra spazi topologici. È vero che se f non è continua e $g \circ f$ è continua, allora g deve essere continua?

2.15.** Siano X e Y due spazi topologici, sia $f \colon X \to Y$ una funzione, sia $\mathcal{B}_X$ una base di aperti di X e sia $\mathcal{B}_Y$ una base di aperti di Y. Si provino le seguenti affermazioni:

- f è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}_Y$ l'insieme $f^{-1}(B)$ è aperto in X;
- f è aperta se e solo se per ogni $A \in \mathcal{B}_X$ l'insieme $f(A)$ è aperto in Y.

2.16.* (Il punto) Siano X e Y due spazi topologici costituiti da un solo punto. Si provi che X e Y sono omeomorfi.

2.17.* (Spazi topologici con 2 punti) Sia $X = \{a, b\}$ un insieme costituito da 2 elementi distinti a e b.

- Si provi che esistono esattamente 4 topologie su X.
- Per ciascuna topologia su X si dica se lo spazio topologico ottenuto è discreto, grossolano (cioè indiscreto), T1, T2, T3, T4, compatto, connesso, connesso per archi.
- Sia Y uno spazio topologico costituito da 2 punti. Allora si provi che Y è omeomorfo a esattamente uno dei seguenti spazi topologici:
  (1) $(X, \{\emptyset, X\})$,
  (2) $(X, \{\emptyset, \{a\}, X\})$,
  (3) $(X, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\})$.

2.18.** Quante sono le topologie su un insieme costituito da 3 punti? Quante sono le classi di omeomorfismo degli spazi topologici con 3 punti?

2.19.** Siano X e Y due spazi topologici, sia $f\colon X \to Y$ una funzione, sia $x_0 \in X$ un punto e sia $V \subseteq Y$ un sottoinsieme che contiene $f(x_0)$. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) esiste un aperto A di X tale che $x_0 \in A \subseteq f^{-1}(V)$,
(2) esiste un intorno U di x_0 in X tale che $U \subseteq f^{-1}(V)$,
(3) esiste un intorno U di x_0 in X tale che $f(U) \subseteq V$,
(4) $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0 in X.

2.20.*** Siano X e Y due spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ una funzione. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) f è continua, cioè per ogni aperto $B \subseteq Y$ vale che $f^{-1}(B)$ è aperto in X,
(ii) per ogni chiuso $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C)$ è chiuso in X,
(iii) per ogni punto $x_0 \in X$ e per ogni intorno V di $f(x_0)$ in Y, esiste un intorno U di x_0 in X tale che $f(U) \subseteq V$,
(iv) per ogni punto $x_0 \in X$ e per ogni intorno V di $f(x_0)$ in Y, $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0 in X,
(v) per ogni punto $x_0 \in X$, esiste un sistema fondamentale $\mathcal{J}_{f(x_0)}$ di intorni di $f(x_0)$ in Y tale che per ogni $V \in \mathcal{J}_{f(x_0)}$, $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0 in X.

2.21.*** (Teorema della permanenza del segno) Sia X uno spazio topologico, sia $x_0 \in X$ e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 in X tale che per ogni $x \in U$ vale $f(x) > 0$.
(2) Se x_0 non è un punto isolato in X ed esiste un intorno U di x_0 in X tale che per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ vale $f(x) \geq 0$, allora $f(x_0) \geq 0$.

In (1) si può richiedere che U sia aperto in X? Si ricordi che, per definizione, un punto $x_0 \in X$ si dice isolato in X se $\{x_0\}$ è aperto in X.

2.22.* Sia X un insieme e siano τ, τ' due topologie su X. Si provino le seguenti affermazioni.

- L'identità $\mathrm{id}_X\colon (X,\tau) \to (X,\tau')$ è continua se e solo se τ' è meno fine di τ, ovvero τ è piú fine di τ'.
- L'identità $\mathrm{id}_X\colon (X,\tau) \to (X,\tau')$ è un omeomorfismo se e solo se $\tau = \tau'$.

Sottospazi

2.23.* (La continuità è preservata restringendo in partenza) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme munito della topologia indotta. Si provi che la restrizione $f|_A\colon A \to Y$ è continua.

2.24.* (Restringere in arrivo è ininfluente per la continuità) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra spazi topologici. Sia $B \subseteq Y$ un sottoinsieme munito della topologia indotta tale che $B \supseteq f(X)$. Si consideri la funzione $g\colon X \to B$ definita come f. Si provi che f è continua se e solo se g è continua.

2.25.* (La continuità è preservata restringendo in partenza e in arrivo) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme e sia $B \subseteq Y$ un sottoinsieme tale che $B \supseteq f(A)$. Si munisca A (risp. B) della topologia di sottospazio di X (risp. Y). Si provi che la funzione $A \to B$, definita come $f|_A$, è continua.

2.26.** (La proprietà di essere omeomorfi passa ai sottospazi) Sia $f\colon X \to Y$ un omeomorfismo di spazi topologici e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme. Si provi che $f|_A\colon A \to f(A)$ è un omeomorfismo, dove ovviamente su A consideriamo la topologia di sottospazio di X e su $f(A)$ consideriamo la topologia di sottospazio di Y.

2.27.** (Restrizione di basi) Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio. Si provino le seguenti affermazioni.

- Se $\mathcal{B}$ è una base di aperti di X, allora $\{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base di aperti di Y.
- Se $y \in Y$ è un punto e U è un intorno di y in X, allora $U \cap Y$ è un intorno di y in Y.
- Se $y \in Y$ è un punto e $\mathcal{B}_y$ è un sistema fondamentale di intorni di y in X, allora $\{U \cap Y \mid U \in \mathcal{B}_y\}$ è un sistema fondamentale di intorni di y in Y.

2.28.*** Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio. Sia $Z \subseteq Y$ un sottoinsieme.

- Si provi che se Z è aperto in X allora è aperto anche in Y.
- Si provi che se Z è aperto in Y e Y è aperto in X allora Z è aperto in X.
- Si provi che se Y non è aperto in X allora esiste almeno un sottoinsieme $Z' \subseteq Y$ tale che Z' è aperto in Y ma non è aperto in X.

Si ripetano i tre punti precedenti sostituendo la parola 'aperto' con la parola 'chiuso'.

2.29.*** Sia Y un sottospazio di uno spazio topologico X. Sia Z un sottoinsieme di Y. Sia C la chiusura di Z in X. Allora è vero che $C \cap Y$ è la chiusura di Z in Y?

2.30.** Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio. Se Y è discreto, è vero che X è discreto?

2.31.** Dire se la seguente situazione è possibile: X è uno spazio topologico connesso, $\emptyset \neq A \subsetneqq X$ e $\emptyset \neq B \subsetneqq X$ sono due sottoinsiemi dotati della topologia di sottospazio, A è aperto in X, B è chiuso in X, A e B sono omeomorfi.

Indurre topologie

2.32.** (Pullback di una topologia) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione e sia τ_Y una topologia su Y.

- Si mostri che $f^*\tau_Y := \{f^{-1}(B) \mid B \in \tau_Y\}$ è una topologia su X.
- Si mostri che $f^*\tau_Y$ è la topologia meno fine tra le topologie su X che rendono continua la funzione f (dove su Y consideriamo τ_Y).
- Qual è la topologia su X che è la piú fine tra le topologie su X che rendono continua la funzione f (dove su Y consideriamo τ_Y)?
- Nel caso in cui f sia iniettiva, allora si osservi che $f^*\tau_Y$ è la topologia di sottospazio, detta anche topologia indotta; in questo caso f è un'*immersione (topologica)* secondo la Definizione 3.57 nel libro di Manetti.

2.33.*** Sia $f: X \to Y$ una funzione continua e iniettiva tra spazi topologici.

- Si costruisca un esempio in cui la topologia di X è strettamente piú fine della topologia indotta da Y tramite f.
- Si provi che se f è aperta o chiusa allora f è un'immersione, cioè la topologia di X coincide con la topologia indotta da Y tramite f.
- Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) f è un'immersione,
  (ii) f induce un omeomorfismo tra X e $f(X)$, se quest'ultimo è dotato della topologia di sottospazio di Y,
  (iii) per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$, A è aperto in X se e solo se esiste B aperto in Y tale che $A = f^{-1}(B)$,
  (iv) per ogni sottoinsieme $A \subseteq X$, se A è aperto in X allora esiste B aperto in Y tale che $A = f^{-1}(B)$,
  (v) per ogni spazio topologico Z e per ogni funzione $g: Z \to X$, g è continua se e solo se $f \circ g$ è continua,
  (vi) per ogni spazio topologico Z e per ogni funzione $g: Z \to X$, se $f \circ g$ è continua allora g è continua.
  [Suggerimento: per (vi)⇒(i) si consideri la funzione $\mathrm{id}_X: (X, f^*\tau_Y) \to (X, \tau_X)$.]

2.34.*** (Pushforward di una topologia) Sia $f: X \to Y$ una funzione e sia τ_X una topologia su X.

- Si mostri che $f_*\tau_X := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \tau_X\}$ è una topologia su Y.
- Si mostri che $f_*\tau_X$ è la topologia piú fine tra le topologie su Y che rendono continua la funzione f (dove su X consideriamo τ_X).
- Qual è la topologia su Y che è la meno fine tra le topologie su Y che rendono continua la funzione f (dove su X consideriamo τ_X)?
- Nel caso in cui f sia suriettiva, allora si osservi che $f_*\tau_X$ è la topologia quoziente e f è un'identificazione.

2.35.** Sia $f: X \to Y$ una funzione continua e suriettiva tra spazi topologici.

- Si costruisca un esempio in cui la topologia di Y è strettamente meno fine della topologia indotta da X tramite f. In altre parole, si costruisca un esempio in cui f non è un'identificazione.
- Si provi che se f è aperta o chiusa allora f è un'identificazione.

2.36.** (Indurre topologie tramite bigezioni) Sia $f: X \to Y$ una bigezione e sia $f^{-1}: Y \to X$ la funzione inversa. Si mostrino le seguenti affermazioni.

- Se τ_Y è una topologia su Y, allora le due topologie $f^*\tau_Y$ e $(f^{-1})_*\tau_Y$ su X coincidono e inoltre f e f^{-1} sono omeomorfismi se X viene dotato di questa topologia e Y viene dotato della topologia τ_Y.
- Se τ_X è una topologia su X, allora le due topologie $f_*\tau_X$ e $(f^{-1})^*\tau_X$ su Y coincidono e inoltre f e f^{-1} sono omeomorfismi se Y viene dotato di questa topologia e X viene dotato della topologia τ_X.

2.37.* Esistono una topologia τ su $\mathbb{R}$ e una topologia σ su $\mathbb{Q}$ tali che gli spazi topologici $(\mathbb{R}, \tau)$ e $(\mathbb{Q}, \sigma)$ sono omeomorfi?

2.38.** [Domanda preliminare 3, Appello 2, 2022] Esiste una topologia τ su $[0, 1)$ tale che lo spazio topologico $([0, 1), \tau)$ è compatto e T2?

2.39.** Esiste una topologia τ su $\mathbb{R}$ tale che lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto e T2?

2.40.** Esiste una topologia τ su $\mathbb{Z}$ tale che lo spazio topologico $(\mathbb{Z}, \tau)$ è compatto e T2?

2.41.*** Consideriamo una famiglia di funzioni $\{f_\lambda: X \to Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tutte con lo stesso dominio. Per ogni indice $\lambda \in \Lambda$, si fissi una topologia τ_λ su Y_λ.

(1) Si mostri che esiste almeno una topologia τ su X tale che per ogni $\lambda \in \Lambda$ la funzione $f_\lambda: (X, \tau) \to (Y_\lambda, \tau_\lambda)$ è continua.
(2) Si mostri che tra tutte le topologie su X che rendono ogni f_λ continua ne esiste una che è la meno fine tra le topologie su X che rendono continue tutte le funzioni f_λ.
(3) Si provi che la topologia discussa nel punto precedente è quella generata (si veda 2.9) dall'insieme $\{f_\lambda^{-1}(U) \mid \lambda \in \Lambda,\ U \in \tau_\lambda\}$.

2.42.** Sia τ_E la topologia euclidea su $\mathbb{R}$ e sia τ_+ la topologia della semicontinuità superiore su $\mathbb{R}$. Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua come funzione $(\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_+)$ ma che non sia continua come funzione $(\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_E)$? Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua come funzione $(\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_E)$ ma che non sia continua come funzione $(\mathbb{R}, \tau_E) \to (\mathbb{R}, \tau_+)$?

Ricoprimenti fondamentali

2.43.*** (Ricoprimenti aperti) Sia X uno spazio topologico, sia $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un ricoprimento aperto di X e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Y è aperto in X se e solo se per ogni $\lambda \in \Lambda$, $Y \cap U_\lambda$ è aperto in U_λ.
(2) Y è chiuso in X se e solo se per ogni $\lambda \in \Lambda$, $Y \cap U_\lambda$ è chiuso in U_λ.
(3) Sia Z uno spazio topologico e sia $f\colon X \to Z$ una funzione; allora f è continua se e solo se per ogni $\lambda \in \Lambda$ la restrizione $f|_{U_\lambda}\colon U_\lambda \to Z$ è continua.

Sia X uno spazio topologico e sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Diremo che $\{X_i\}_{i\in I}$ è una famiglia *localmente finita* se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ di X tale che per ogni $\lambda \in \Lambda$ l'insieme $\{i \in I \mid X_i \cap U_\lambda \neq \emptyset\}$ è finito.

2.44.*** (Famiglie chiuse localmente finite) Sia X uno spazio topologico e sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di chiusi di X.

(1) È vero che l'unione $\bigcup_{i\in I} X_i$ è chiusa in X?
(2) Si supponga che la famiglia $\{X_i\}_{i\in I}$ sia localmente finita. Allora si provi che l'unione $\bigcup_{i\in I} X_i$ è chiusa in X.
(3) Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme, sia Z uno spazio topologico e sia $f\colon X \to Z$ una funzione. Si supponga che $\{X_i\}_{i\in I}$ sia un ricoprimento (chiuso) di X, cioè $\bigcup_{i\in I} X_i = X$.
   (a) È vero che Y è aperto in X se e solo se per ogni $i \in I$ l'insieme $Y \cap X_i$ è aperto in X_i? Quale delle due implicazioni è sempre vera?
   (b) È vero che Y è chiuso in X se e solo se per ogni $i \in I$ l'insieme $Y \cap X_i$ è chiuso in X_i? Quale delle due implicazioni è sempre vera?
   (c) È vero che f è continua se e solo se per ogni $i \in I$ la restrizione $f|_{X_i}\colon X_i \to Z$ è continua? Quale delle due implicazioni è sempre vera?
   (d) Si faccia vedere che le tre domande sopra hanno risposta affermativa se $\{X_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento chiuso e localmente finito di X.

2.45.*** (Incollamento di funzioni continue) Siano X e Y due spazi topologici e sia $\{X_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento di X. Per ogni $i \in I$ sia data una funzione $f_i\colon X_i \to Y$.

- Si provi che le due affermazioni seguenti sono equivalenti:
  - esiste una funzione $f\colon X \to Y$ tale che per ogni $i \in I$ $f|_{X_i} = f_i$,
  - per ogni coppia di indici $i, j \in I$ vale $f_i|_{X_i\cap X_j} = f_j|_{X_i\cap X_j}$.
- Si provi che se una tale f esiste allora è unica.
- Si supponga che una tale f esista.
  (1) Se f è continua, allora si provi che per ogni $i \in I$ f_i è continua.
  (2) È vero che se per ogni $i \in I$ f_i è continua allora f è continua?
  (3) Si faccia vedere che la risposta alla domanda precedente è affermativa se $\{X_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto oppure se è un ricoprimento chiuso localmente finito. [Questo criterio è molto utile per costruire a mano funzioni continue definendole 'a pezzi'.]

2.46.** Siano X e Y due spazi topologici, sia $f\colon X \to Y$ una funzione e sia $\mathcal{P}$ una prebase della topologia di Y. Si mostri che f è continua se e solo se per ogni $V \in \mathcal{P}$ la preimmagine $f^{-1}(V)$ è aperta in X.

2.47.** Sia X uno spazio topologico, sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di X e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) Y è denso in X, cioè la chiusura di Y in X coincide con X;
(i) la parte interna di $X \smallsetminus Y$ in X è vuota;
(i) per ogni aperto non vuoto $U \subseteq X$ vale $U \cap Y \neq \emptyset$;
(i) per ogni aperto non vuoto $U \in \mathcal{B}$ vale $U \cap Y \neq \emptyset$.

È vero che se Y è denso in X allora la parte interna di Y in X è non-vuota?

2.48.* Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme dotato della topologia di sottospazio. Sia Z un sottoinsieme di Y. Si provi che se Z è denso in X allora è denso anche in Y.

2.49.*** Sia X un insieme, sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme dei sottoinsieme di X e sia $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathcal{P}(X)$. Sia data una funzione

$$I\colon X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$$

che gode delle seguenti proprietà:

(1) per ogni $x \in X$, $X \in I(x)$;
(2) per ogni $x \in X$ e $U \in I(x)$, vale $x \in U$;
(3) per ogni $x \in X$, se $U \in I(x)$ e $V \in \mathcal{P}(x)$ sono tali che $U \subseteq V$ allora $V \in I(x)$;
(4) per ogni $x \in X$, se $U \in I(x)$ e $V \in I(x)$ allora $U \cap V \in I(x)$;
(5) per ogni $x \in X$, per ogni $U \in I(x)$, esiste $V \in I(x)$ tale che per ogni $y \in V$, $U \in I(y)$.

Allora si provi che

$$\tau = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid \forall x \in A,\ A \in I(x)\}$$

è una topologia su X. Inoltre si provi che, per ogni $x \in X$, $I(x)$ è l'insieme degli intorni di x nello spazio topologico (X, τ).

Infine si provi che le 5 proprietà sopra sono soddisfatte nella seguente situazione: X è uno spazio topologico e $I \colon X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ è la funzione che associa a ogni punto $x \in X$ l'insieme degli intorni di x in X.

3. Sottoinsiemi della retta reale

3.1.* Si costruisca esplicitamente un omeomorfismo tra $[2,3]$ e $[7,20]$ e il suo inverso.

3.2.* Si costruisca esplicitamente un omeomorfismo tra $[2,3)$ e $(7,20]$ e il suo inverso.

3.3.* Si costruisca esplicitamente un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $(0,+\infty)$ e il suo inverso.

3.4.* Si costruisca esplicitamente un omeomorfismo tra $(2,3)$ e $(-\infty,0)$ e il suo inverso.

3.5.** (Classi di omeomorfismo di intervalli) Si fissino $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$. Quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono omeomorfi? $\{0\}$, $[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1]$, $(0,1)$, $(-\infty,0)$, $(-\infty,0]$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$, $\mathbb{R}$, $\{a\}$, $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$. Nei casi affermativi si costruisca esplicitamente un omeomorfismo e il suo inverso. Nei casi negativi si dimostri che un omeomorfismo non può esistere.

3.6.* Si dica se $(0,1) \cup (1,2)$ è omeomorfo a $(0,1) \cup (2,3)$.

3.7.* Si dica se $(0,1) \cup (1,2)$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.8.* [Domanda preliminare 1, Appello 5, 2022] Si dica se $(0,1) \cup (2,3)$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.9.* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è compatto?

3.10.** Quali delle seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono una base o una prebase della topologia euclidea di $\mathbb{R}$?

(1) $\{(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \mid \varepsilon \in (0,+\infty)\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato
(2) $\{(x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ con $\varepsilon_0 \in (0,+\infty)$ fissato
(3) $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0,+\infty)\}$
(4) $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0,3)\}$
(5) $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0,3) \cap \mathbb{Q}\}$
(6) $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \mid x \in \mathbb{Q}, \varepsilon \in (0,3) \cap \mathbb{Q}\}$
(7) $\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+\}$
(8) $\{(x - r_n, x + r_n) \mid x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ dove (r_n) è una successione di numeri reali positivi tali che $\inf_n r_n = 0$
(9) $\{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

3.11.* La funzione $f \colon (0,2] \to [-5,7]$ data da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

è ben definita? È continua?

3.12.* $[-1,1]$ è un intorno di 0 nello spazio topologico $\mathbb{R}$?

3.13.* $[0,1]$ è un intorno di 0 nello spazio topologico $\mathbb{R}$?

3.14.* $[0,1]$ è un intorno di 0 nello spazio topologico $[0,2]$?

3.15.* $[0,1]$ è un intorno di 0 nello spazio topologico $[0,2)$?

3.16.* $[0,1]$ è un intorno di 0 nello spazio topologico $[0,1]$?

3.17.* Si determino le parti interne, le chiusure e le frontiere di $[0,1)$ nei seguenti spazi topologici: $\mathbb{R}$, $[-5,5]$, $[0,5]$, $[-5,1]$, $[-5,1)$, $[0,1]$ e $[0,1)$.

3.18.** Sia $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) La parte interna di A nello spazio topologico $\mathbb{R}$ è vuota.
(2) La chiusura di A nello spazio topologico $\mathbb{R}$ è $A \cup \{0\}$.
(3) La frontiera di A nello spazio topologico $\mathbb{R}$ è $A \cup \{0\}$.
(4) Lo spazio topologico A è discreto.
(5) Lo spazio topologico $A \cup \{0\}$ non è discreto.
(6) La parte interna di A nello spazio topologico A è A.
(7) La chiusura di A nello spazio topologico A è A.
(8) La frontiera di A nello spazio topologico A è vuota.
(9) La parte interna di A nello spazio topologico $A \cup \{0\}$ è A.
(10) La chiusura di A nello spazio topologico $A \cup \{0\}$ è $A \cup \{0\}$.
(11) La frontiera di A nello spazio topologico $A \cup \{0\}$ è $\{0\}$.

3.19.* Si determini la frontiera di $\mathbb{Q}$ nello spazio topologico $\mathbb{R}$.

3.20.** (Continuità dell'inversa per funzioni continue e bigettive tra intervalli) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

- $f(X)$ è un intervallo.
- f è strettamente monotona. [Questo è un lemma che dovreste aver visto ad Analisi I. Si ragioni per assurdo e si usi il teorema dei valori intermedi — si veda 9.3.]
- $f\colon X \to f(X)$ è aperta. [Si supponga che f è strettamente crescente, poiché il caso in cui f è decrescente è analogo. Si scelga una base $\mathcal{B}$ di aperti di X costituita da intervalli e si provi che $f(U)$ è aperto in $f(X)$ per ogni $U \in \mathcal{B}$.]
- $f\colon X \to f(X)$ è un omeomorfismo, cioè $f^{-1}\colon f(X) \to X$ è continua.

3.21.** (Continuità dell'inversa per funzioni continue e bigettive tra compatti di $\mathbb{R}$) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme compatto e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva. Allora si dimostri che $f\colon X \to f(X)$ è un omeomorfismo, cioè $f^{-1}\colon f(X) \to X$ è continua.

3.22.** Si dia un esempio di un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ e di una funzione $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva tale che l'inversa $f^{-1}\colon f(X) \to X$ è discontinua.

3.23.*** (Sottogruppi di $\mathbb{R}$) Sia $G \subseteq \mathbb{R}$ un sottogruppo additivo diverso da $\{0\}$.

(1) Si provi che $G \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$. Si ponga $a := \inf G \cap (0, +\infty)$. Ne segue $a \geq 0$.

(2) Supponendo $a = 0$ si provino le seguenti affermazioni:
- per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $g \in G$ tale che $0 < g < \varepsilon$;
- per ogni $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, esiste $y \in G$ tale che $|x - y| < \varepsilon$; [Suggerimento: sia $g \in G$ trovato al punto precedente e si ponga $y = \lfloor \frac{x}{g} \rfloor g \in G$.]
- G è denso in $\mathbb{R}$.

(3) Supponendo $a > 0$ si provino le seguenti affermazioni:
- $a \in G$; [Suggerimento: per assurdo $a \notin G$; per definizione di estremo inferiore esiste $g \in G$ tale che $a < g \leq 2a$; per definizione di estremo inferiore esiste $h \in G$ tale che $a < h < g$; ma allora $0 < g - h < 2a - a = a$ che è un assurdo.]
- a è un generatore di G; [Suggerimento: sia $g \in G$, allora $g - \lfloor \frac{g}{a} \rfloor a$ sta in G e in $[0, a)$, allora per definizione di estremo inferiore deve essere zero.]
- G è discreto e ciclico.

(4) Si ha che o G è denso in $\mathbb{R}$ o (G è discreto e ciclico).

3.24.** Sia $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si provi che $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}r$ è denso in $\mathbb{R}$.

3.25.* $\mathbb{Z}$ è aperto in $\mathbb{R}$?

3.26.* $\mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{R}$?

3.27.* $\mathbb{Q}$ è chiuso in $\mathbb{R}$?

3.28.* $\mathbb{Q}$ è aperto in $\mathbb{R}$?

3.29.* $\{0\}$ è aperto in $\mathbb{Q}$?

3.30.* $\{0, 1\}$ è aperto in $\mathbb{Q}$?

3.31.* $\mathbb{Z}$ è aperto in $\mathbb{Q}$?

3.32.* $\mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{Q}$?

3.33.* $\mathbb{Q}$ è chiuso in $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$?

3.34.* $\mathbb{Q}$ è aperto in $\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$?

3.35.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è chiuso in $\mathbb{R}$?

3.36.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è aperto in $\mathbb{R}$?

3.37.* $\mathbb{Q}$ è discreto?

3.38.* $\mathbb{Q}$ è connesso?

3.39.* Sia X un sottoinsieme non vuoto e compatto di $\mathbb{Q}$. È vero che X è un singoletto?

3.40.** [Domanda preliminare, Maggio 2023] Sia X un sottoinsieme compatto di $\mathbb{Q}$. È vero che X è finito?

3.41.* Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$.

(1) È vero che l'intervallo (a, b) è contenuto in $\mathbb{Q}$?

(2) È vero che l'intervallo (a, b) è contenuto in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

(3) Per un opportuna scelta di a e di b, può $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ essere compatto?

(4) Per un opportuna scelta di a e di b, può $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ essere compatto?

3.42.** È vero che ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$ è unione finita di intervalli chiusi e limitati?

3.43.** È vero che ogni sottoinsieme connesso (e non vuoto) di $\mathbb{R}$ è un intervallo?

3.44.* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ è chiuso in $\mathbb{R}$?

3.45.* Si dimostri che la funzione $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ data da $x \mapsto \sqrt{x}$ è continua.

3.46.* Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(1) A è denso in $\mathbb{R}$, cioè la chiusura di A in $\mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$;
(2) la parte interna di $\mathbb{R} \setminus A$ in $\mathbb{R}$ è vuota;
(3) per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a < b$, si ha $A \cap (a,b) \neq \emptyset$;
(4) per ogni intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ che contiene almeno 2 elementi, si ha $A \cap I \neq \emptyset$;
(5) per ogni aperto B di $\mathbb{R}$ non vuoto, si ha $A \cap B \neq \emptyset$.

3.47.* Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme denso in $\mathbb{R}$. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$.
(1) Si provi che esiste una successione $(a_n)_n$ strettamente decrescente, contenuta in $(x,y) \cap A$, che converge a x.
(2) Si provi che esiste una successione $(b_n)_n$ strettamente crescente, contenuta in $(x,y) \cap A$, che converge a y.

3.48.* Si provi che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

3.49.* Si provi che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

3.50.* Si provi che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

3.51.* Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Si provi che esiste una successione $(a_n)_n$ strettamente decrescente, contenuta in $(x,y) \cap \mathbb{Q}$, che converge a x.

3.52.** Si determini esplicitamente un ricoprimento aperto di $\mathbb{Q} \cap [0,3]$ che non ammette un sottoricoprimento finito.

4. Prodotti

4.1.* Si costruiscano due spazi topologici X e Y e un sottoinsieme $A \subseteq X \times Y$ che sia aperto rispetto alla topologia prodotto, ma che non sia un *rettangolo aperto*, ovvero tale che sia impossibile trovare un sottonsieme aperto U di X e un sottoinsieme aperto V di Y tali che $A = U \times V$.

4.2.* Si costruiscano due spazi topologici X e Y tali che ogni sottoinsieme aperto di $X \times Y$ rispetto alla topologia prodotto è un rettangolo aperto.

4.3.** Siano $f\colon Z \to X$ e $g\colon Z \to Y$ funzioni tra spazi topologici. Si consideri la funzione $(f,g)\colon Z \to X \times Y$ definita da $z \mapsto (f(z), g(z))$. Si provi che f e g sono continue se e solo se (f,g) è continua.

4.4.** Siano $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ funzioni continue tra spazi topologici. Si provi che la funzione prodotto $f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$, definita da $(x,y) \mapsto (f(x), g(y))$ è continua rispetto alle topologie prodotto.

4.5.** (Prodotti e sottospazi sono compatibili) Siano X e Y degli spazi topologici. Consideriamo dei sottoinsiemi $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$, entrambi dotati delle topologie di sottospazio. Si dimostri che la topologia prodotto su $A \times B$ coincide con la topologia di sottospazio dello spazio topologico prodotto $X \times Y$.

4.6.** (Associatività dei prodotti) Siano (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) tre spazi topologici. Si provi che le due topologie $(\tau_X \times \tau_Y) \times \tau_Z$ e $\tau_X \times (\tau_Y \times \tau_Z)$ su $X \times Y \times Z$ coincidono.

4.7.*** Siano X e Y due spazi topologici e sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua. Si consideri il suo grafico $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$. Si doti $X \times Y$ della topologia prodotto e si doti Γ_f della topologia di sottospazio di $X \times Y$.
- Si provi che Γ_f è omeomorfo a X.
- Se Y è T2 allora si provi che Γ_f è chiuso in $X \times Y$.
- Si costruisca un esempio in cui Γ_f non è chiuso in $X \times Y$.

4.8.**** Siano $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ funzioni continue tra spazi topologici. Sia $f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$ la funzione prodotto definita in 4.4.
(1) Se f e g sono iniettive, allora si provi che $f \times g$ è iniettiva.
(2) Se f e g sono suriettive, allora si provi che $f \times g$ è suriettiva.
(3) Se f e g sono aperte, allora si provi che $f \times g$ è aperta.
(4) È vero che se f e g sono chiuse, allora $f \times g$ è chiusa?
(5) È vero che se f e g sono chiuse e suriettive, allora $f \times g$ è chiusa?
(6) È vero che se f è chiusa e suriettiva e g è un omeomorfismo, allora $f \times g$ è chiusa?
(7) Si supponga che
  (a) f e g sono chiuse,
  (b) per ogni punto $x' \in X'$, la fibra $f^{-1}(x')$ è compatta,
  (c) per ogni punto $y' \in Y'$, la fibra $g^{-1}(y')$ è compatta,
allora si provi che $f \times g$ è chiusa. [Osservazione: se X' è un punto, $Y = Y'$ e g è l'identità di Y, allora questo è il Corollario 4.49 del libro di Manetti.] [Suggerimento: Sia $C \subseteq X \times Y$ un chiuso. Si fissi $(x_0', y_0') \in$

$(X \times Y) \smallsetminus (f \times g)(C)$. Usando il teorema di Wallace, si trovino due aperti $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ tali che

$$f^{-1}(x'_0) \times g^{-1}(y'_0) \subseteq U \times V \subseteq (X \times Y) \smallsetminus C.$$

Si faccia vedere che $(X' \smallsetminus f(X \smallsetminus U)) \times (Y' \smallsetminus g(Y \smallsetminus V))$ è un aperto di $X' \times Y'$ contenuto in $(X \times Y) \smallsetminus (f \times g)(C)$ e contenente (x'_0, y'_0).]

(8) Si supponga che
  (a) f è chiusa,
  (b) per ogni punto $x' \in X'$, la fibra $f^{-1}(x')$ è compatta,
  (c) g è un omeomorfismo,

allora si provi che $f \times g$ è chiusa.

5. Spazi metrici

5.1.** Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$ un punto e sia $r > 0$ un numero reale.

- Si provi che la *palla aperta* $B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ è un sottoinsieme aperto di X.
- Si provi che la *palla chiusa* $D(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$ è un sottoinsieme chiuso di X.
- Si faccia un esempio in cui $D(x_0, r)$ contiene strettamente la chiusura di $B(x_0, r)$ in X.

5.2.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Si provi che le palle aperte formano una base della topologia.

5.3.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Per ogni $x \in X$, si provi che un sottoinsieme $U \subseteq X$ è un intorno di x se e solo se esiste un numero reale $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$.

5.4.* Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici. Sia $f\colon X \to X'$ una funzione hölderiana, cioè esistono due numeri reali $C \geq 0$ e $\alpha > 0$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in X$ vale $d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C d(x_1, x_2)^\alpha$. Si provi che f è continua, addirittura è uniformemente continua.

5.5.*** Siano d e d' due distanze sull'insieme X e siano τ e τ' le topologie da loro indotte. Si provino le seguenti affermazioni.

- Se esistono due numeri reali $C \geq 0$ e $\alpha > 0$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in X$ vale $d'(x_1, x_2) \leq C d(x_1, x_2)^\alpha$, allora τ è piú fine di τ'.
- Se esistono quattro numeri reali $C_1, C_2 \geq 0$ e $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ tali che per ogni $x_1, x_2 \in X$ valgono $d'(x_1, x_2) \leq C_1 d(x_1, x_2)^{\alpha_1}$ e $d(x_1, x_2) \leq C_2 d'(x_1, x_2)^{\alpha_2}$, allora $\tau = \tau'$.

5.6. ** (1) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia τ la topologia su X indotta da d. Sia $d'\colon X \times X \to [0, +\infty)$ definita da $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$ per ogni $x, y \in X$. Si provi che d' è una distanza su X e che la topologia su X indotta da d' coincide con τ.

(2) Si provi che ogni spazio metrico è omeomorfo a uno spazio metrico limitato.

5.7.* Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $x_0 \in X$ un punto. Si dimostri che la funzione $d(x_0, \cdot)\colon X \to [0, +\infty)$ definita da $x \mapsto d(x_0, x)$ per ogni $x \in X$ è continua. [Suggerimento: è 1-Lipschitziana.]

5.8.** Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si consideri la funzione $f\colon X \to [0, +\infty)$ definita da

$$f(x) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$$

per ogni $x \in X$.

- Si provi che f è continua.
- Si provi che $f^{-1}(0)$ coincide con la chiusura di Y in X.

5.9.** Si provi che ogni punto di uno spazio metrico ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

5.10.*** Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) esiste un numero reale $M \geq 0$, tale che per ogni $y_1, y_2 \in Y$ vale $d(y_1, y_2) \leq M$;
(ii) il diametro di Y è finito, cioè $\operatorname{diam} Y := \sup_{y_1, y_2 \in Y} d(y_1, y_2) < +\infty$;
(iii) esistono un punto $y_0 \in Y$ e un numero reale $R > 0$ tali che $Y \subseteq B(y_0, R)$, cioè per ogni $y \in Y$ vale $d(y_0, y) < R$;
(iv) esistono un punto $x_0 \in X$ e un numero reale $r > 0$ tali che $Y \subseteq B(x_0, r)$, cioè per ogni $y \in Y$ vale $d(x_0, y) < r$;
(v) esistono un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_n \in X$ e un numero reale $\rho > 0$ tali che $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \rho)$;
(vi) per ogni punto $x \in X$, esiste un numero reale $a > 0$ tale che $Y \subseteq B(x, a)$.

In tal caso si dice che Y è *limitato* nello spazio metrico (X, d).

5.11.* Si provi che uno spazio metrico totalmente limitato è limitato.

5.12.** Si costruisca un esempio di spazio metrico limitato ma non totalmente limitato.

5.13.** Si provi che ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}$, con la distanza euclidea, è totalmente limitato.

5.14.*** Si provi che ogni sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$, con la distanza euclidea, è totalmente limitato.

5.15.** Si costruisca una distanza d su $\mathbb{R}$ tale che lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ sia limitato e la topologia indotta da d sia la topologia euclidea di $\mathbb{R}$.

5.16.** Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici, sia $f: X \to X'$ un omeomorfismo. Se $Y \subseteq X$ un sottoinsieme limitato, è vero che $f(Y)$ è limitato in X'?

5.17.** Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici, sia $f: X \to X'$ un omeomorfismo, sia (x_n) una successione di Cauchy in (X, d). Allora è vero che $(f(x_n))$ è una successione di Cauchy in (X', d')?

5.18.* (Sottospazi di spazi metrici) Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si consideri la restrizione $\delta := d|_{Y\times Y}: Y \times Y \to [0, +\infty)$. Si provi che δ è una distanza su Y e che la topologia indotta su Y da δ coincide con la topologia di sottospazio di X.

5.19.** Sia $g: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ una funzione. Si consideri la seguente proprietà:

(i) per ogni $a, b, c \in [0, +\infty)$ tali che $a \leq b + c$ vale $g(a) \leq g(b) + g(c)$.

(1) Si provi che se g soddisfa (i) allora g è subadditiva, cioè per ogni $a, b \in [0, +\infty)$ vale $g(a + b) \leq g(a) + g(b)$.
(2) Si provi che se g soddisfa (i) e $g(0) = 0$ allora g è debolmente crescente.
(3) Si provi che se g è subadditiva e debolmente crescente, allora g soddisfa (i).
(4) Si provi che se g è concava allora per ogni $x \in [0, +\infty)$ e $t \in [0, 1]$ vale $g(tx) \geq tg(x)$. [Suggerimento: si usi la relazione di concavità tra x e 0.]
(5) Si provi che se g è concava allora g è subadditiva. [Suggerimento: si usi il punto precedente con $x = a + b$ e con $t = \frac{a}{a+b}$ e $t = \frac{b}{a+b}$.]
(6) Si provi che se g è concava e debolmente crescente allora g soddisfa (i).

Sia ora (X, d) uno spazio metrico. Supponiamo $g^{-1}(0) = \{0\}$ e che g sia subadditiva e debolmente crescente.

(7) Si provi che $g \circ d$ è una distanza su X.
(8) Sia $\tau_{g\circ d}$ la topologia indotta dalla distanza $g \circ d$ e sia τ_d la topologia indotta dalla distanza d. Se g è continua in 0, allora si provi $\tau_{g\circ d} \subseteq \tau_d$.
(9) Se esiste $R \in (0, +\infty)$ tale che $g|_{[0,R)}: [0, R) \to [0, g(R))$ è un omeomorfismo, allora si provi $\tau_{g\circ d} = \tau_d$.

[Questo generalizza 5.6.]

5.20.** (Teorema di Heine–Cantor) Siano (X, d) e (Y, d') due spazi metrici e sia $f: X \to Y$ una funzione continua. Se X è compatto, si provi che f è uniformemente continua.

5.21.** Si provi che ogni spazio metrico è N1, ovvero ogni punto ha un sistema fondamentale di intorni al piú numerabile.

5.22.*** Si costruisca uno spazio metrico che non è N2, ovvero non esiste una base al piú numerabile di aperti.

5.23.** Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si provino che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) Y è denso in X;
(b) per ogni punto $x \in X$ e per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ vale $Y \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$;
(c) per ogni punto $x \in X$ esiste una successione $(y_n)_n$ di elementi di Y che converge a x.

5.24.***** (Norma p-adica) Si fissi un numero primo p. Si consideri la funzione $\mathrm{ord}_p: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definita cosí

$$\mathrm{ord}_p(a) := \begin{cases} +\infty & \text{se } a = 0, \\ \text{l'esponente di } p \text{ nella decomposizione in primi di } a & \text{se } a \neq 0. \end{cases}$$

(1) Si calcoli $\mathrm{ord}_2(96)$.
(2) Si provi che per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ valgono:
  (a) $\mathrm{ord}_p(a) = +\infty$ se e solo se $a = 0$,
  (b) $\mathrm{ord}_p(ab) = \mathrm{ord}_p(a) + \mathrm{ord}_p(b)$,
  (c) $\mathrm{ord}_p(a + b) \geq \min\{\mathrm{ord}_p(a), \mathrm{ord}_p(b)\}$.

Si consideri la funzione $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$ data da

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p := p^{-\mathrm{ord}_p(a)+\mathrm{ord}_p(b)}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ on $b \neq 0$.

(3) Si provi che $|\cdot|_p$ è ben definita. Essa si chiama la *norma p-adica*.
(4) Si provi che per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ valgono:
  (a) $|a|_p = 0$ se e solo se $a = 0$,
  (b) $|ab|_p = |a|_p \cdot |b|_p$,
  (c) $|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$.
(5) Si provi che $d_p: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ definita da $d_p(a, b) := |a - b|_p$ per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$ è una distanza su $\mathbb{Q}$. Essa si chiama la *distanza p-adica* e la topologia da essa indotta su $\mathbb{Q}$ si chiama *topologia p-adica*.
(6) Si provi che la successione $(p^n)_n$ converge a 0 rispetto alla norma p-adica
(7) Si provi che la successione $\left(\sum_{i=0}^{n} p^i\right)_n$ converge a $\frac{1}{1-p}$ rispetto alla norma p-adica.

(8) $\mathbb{Z}$ è chiuso in $\mathbb{Q}$ rispetto alla norma p-adica?
(9) Si consideri la palla chiusa unitaria di centro 0 in $(\mathbb{Q}, d_p)$, cioè $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x|_p \leq 1\}$. Si provi che D consiste dei numeri razionali il cui denominatore non è un multiplo di p. Si provi che D è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ e che è denso in $\mathbb{R}$ rispetto alla topologia euclidea.
(10) Si dica se la topologia su $\mathbb{Q}$ indotta dalla norma p-adica è confrontabile con la topologia euclidea di $\mathbb{Q}$.
(11) Sia $(x_n)_n$ una successione in $\mathbb{Z}$. Si provi che se $(x_n)_n$ è di Cauchy rispetto alla norma p-adica allora le due seguenti affermazioni sono vere:
  (i) per ogni numero reale $M > 0$, esiste un intero non-negativo $\bar{n}$ tale che per ogni coppia di interi $n \geq \bar{n}$ e $m \geq \bar{n}$ vale $\operatorname{ord}_p(x_m - x_n) > M$;
  (ii) per ogni numero reale $M > 0$, esiste un intero non-negativo $\bar{n}$ tale che per ogni intero $n \geq \bar{n}$ vale $\operatorname{ord}_p(x_{n+1} - x_n) > M$.
(12) Dire se le successioni $(n)_n$ o $(n^2)_n$ sono di Cauchy rispetto alla norma p-adica.
(13) Dire se le successioni $(\frac{1}{n})_n$ o $(\frac{1}{n^2})_n$ sono di Cauchy rispetto alla norma p-adica.

5.25.*** Per ogni numero primo p sia $|\cdot|_p$ la norma p-adica introdotta nell'esercizio precedente. Sia $|\cdot|_\infty$ l'usuale valore assoluto (euclideo) su $\mathbb{Q}$, cioè

$$|a|_\infty = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0, \\ -a & \text{se } a \leq 0. \end{cases}$$

Si provi che per ogni $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ vale l'uguaglianza

$$|a|_\infty \cdot \prod_{p \text{ primo}} |a|_p = 1.$$

Sia $(x_n)_n$ una successione in uno spazio metrico (X, d). Si dice che $(x_n)_n$ *converge* a un punto $y \in X$ se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un numero naturale N_ε tale che per ogni numero naturale $n \geq N_\varepsilon$ vale $d(x_n, y) < \varepsilon$.

5.26.** Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $(x_n)_n$ una successione in (X, d) che converge a $y \in X$. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme che contiene x_n per ogni n. Allora si provi che y appartiene alla chiusura di Y in X.

5.27.** Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $y \in X$, sia $Y \subseteq X$. Supponiamo che y stia nella chiusura di Y in X. Allora si provi che esiste una successione $(x_n)_n$ di elementi di Y che converge a y.

5.28.** Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(1) Y è chiuso in X,
(2) Y è *chiuso per successioni* in X, cioè: se $(x_n)_n$ è una successione in Y che converge a y in X, allora $y \in Y$.

6. Spazi vettoriali normati

Per ogni $1 \leq p \leq \infty$ (cioè p è un numero reale in $[1, +\infty)$ oppure p è il simbolo ∞) e per ogni vettore $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si definisce

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

6.1.** Si provi che $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme su $\mathbb{R}^n$.

6.2.*** Si provi che per ogni vettore $a \in \mathbb{R}^n$ vale $\|a\|_\infty \leq \|a\|_2 \leq \|a\|_1 \leq n\|a\|_\infty$. Si provi che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r \in (0, +\infty)$ vale la seguente catena di inclusioni di palle in $\mathbb{R}^n$: $B(x_0, r)_{\|\cdot\|_\infty} \supseteq B(x_0, r)_{\|\cdot\|_2} \supseteq B(x_0, r)_{\|\cdot\|_1} \supseteq B(x_0, \frac{r}{n})_{\|\cdot\|_\infty}$. Si deduca che le topologie su $\mathbb{R}^n$ indotte dalle norme $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ coincidono. È la topologia euclidea!

6.3.*** (Disuguaglianza di Young) Siano $p, q \in \mathbb{R}$ tali che $p > 1$, $q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cioè $q = \frac{p}{p-1}$. Allora per ogni coppia di numeri reali $a \geq 0$ e $b \geq 0$ si dimostri che vale

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

[Suggerimento: se $a = 0$ o $b = 0$ non c'è nulla da dimostrare; se $a > 0$ e $b > 0$ allora si usi che la funzione logaritmo è strettamente crescente e concava.]

6.4.*** (Disuguaglianza di Hölder) Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora per ogni coppia di vettori $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ si dimostri che vale

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q.$$

[Suggerimento: se ($p=1$ e $q=\infty$) o ($p=\infty$ e $q=1$) allora è facile; se $1<p,q<\infty$ allora si usi la disuguaglianza di Young per ogni coppia di numeri reali non-negativi $\frac{|a_i|}{\|a\|_p}$, $\frac{|b_i|}{\|b\|_q}$ e poi si sommi per $i=1,\dots,n$.]

6.5.*** (Disuguaglianza di Minkowski) Sia $1\leq p\leq\infty$. Allora per ogni coppia di vettori $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)$ in $\mathbb{R}^n$ si dimostri che vale

$$\|a+b\|_p\leq\|a\|_p+\|b\|_p.$$

[Suggerimento: se $p=1$ o $p=\infty$ è facile. Supponiamo $1<p<\infty$ e sia $1<q<\infty$ tale che $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si consideri il vettore $c=(|a_1+b_1|^{p-1},\dots,|a_n+b_n|^{p-1})\in\mathbb{R}^n$ e si osservi $\|c\|_q^q=\|a+b\|_p^p$ e $\|c\|_q=\|a+b\|_p^{p-1}$. Si dimostri la seguente catena di disuguaglianze

$$\|a+b\|_p^p\leq\sum_{i=1}^n(|a_i|+|b_i|)\,|a_i+b_i|^{p-1}\leq\|a\|_p\cdot\|c\|_q+\|b\|_p\cdot\|c\|_q=(\|a\|_p+\|b\|_p)\,\|a+b\|_p^{p-1}$$

usando la disuguaglianza di Hölder tra a e c e tra b e c.]

Si deduca che $\|\cdot\|_p$ è una norma su $\mathbb{R}^n$. (Questa è una generalizzazione di 6.1.)

6.6.** Sia $f\colon X\to Y$ un'applicazione lineare iniettiva tra spazi vettoriali reali e sia $\|\cdot\|$ una norma su Y. Si provi che $\|\cdot\|\circ f$ è una norma su X.

6.7.** Si costruisca una norma $\|\cdot\|$ su $\mathbb{R}^2$ tale che sia impossibile trovare $C\in[0,+\infty)$ e $1\leq p\leq\infty$ tali che per ogni $a\in\mathbb{R}^2$ vale $\|a\|=C\cdot\|a\|_p$.

6.8.* Sia $1\leq p\leq\infty$. Se $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ e $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ sono tali che $0\leq a_i\leq b_i$ per ogni $i=1,\dots,n$, allora si provi che $\|a\|_p\leq\|b\|_p$.

6.9.* Sia $1\leq p\leq\infty$. Si provi che per ogni $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ e per ogni $i=1,\dots,n$ vale $|a_i|\leq\|a\|_p$.

6.10.*** Siano $1\leq p<p'\leq\infty$. Allora per ogni vettore $a=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ si dimostri che valgono le due disuguaglianze:

(1) $\|a\|_{p'}\leq\|a\|_p$; [Suggerimento: se $a=0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $a\neq0$. Per omogeneità si può supporre $\|a\|_p=1$. Per l'esercizio precedente $|a_i|\leq1$. Se $p'=\infty$ si conclude facilmente. Si supponga $p<p'<\infty$, allora si deduce $|a_i|^{p'}\leq|a_i|^p$. Sommando si ottiene $\|a\|_{p'}^{p'}\leq1$. Elevando all'esponente $\frac{1}{p'}$ si conclude.]

(2) $\|a\|_p\leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}}\|a\|_{p'}$. [Suggerimento: se $p'=\infty$ è facile. Supponiamo $p'<\infty$. Si ponga $b=(|a_1|^p,\dots,|a_n|^p)\in\mathbb{R}^n$, $e=(1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ e $r=\frac{p'}{p}$. Vale $1<r<\infty$. Sia $1\leq s<\infty$ tale che $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. Si usi la disuguaglianza di Hölder con i vettori b ed e rispetto ad r: $\|a\|_p^p\leq\|b\|_r\cdot n^{\frac{1}{s}}=\|a\|_{p'}^p\cdot n^{1-\frac{p}{p'}}$.]

(Questa è una generalizzazione di 6.2.) Si deduca che le norme $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p'}$ su $\mathbb{R}^n$ inducono la stessa topologia.

6.11.*** (Prodotto di spazi metrici) Sia n un intero positivo e siano $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ degli spazi metrici. Si consideri il prodotto cartesiano $X:=X_1\times\cdots\times X_n$. Per ogni $1\leq p\leq\infty$ si consideri la funzione

$$\delta_p\colon X\times X\to[0,+\infty)$$

definita da

$$\delta_p(x,y):=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n(d_i(x_i,y_i))^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1\leq p<\infty\\ \displaystyle\max_{1\leq i\leq n}d_i(x_i,y_i) & \text{se } p=\infty\end{cases}$$

per ogni $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in X$ con $x_i,y_i\in X_i$. Praticamente $\delta_p(x,y)$ è la norma $\|\cdot\|_p$ del vettore $(d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n))\in\mathbb{R}^n$.

- Si provi che δ_p è una distanza su X.
- Si provi che tutte le distanze δ_p, al variare di $1\leq p\leq\infty$, inducono la topologia su X data dal prodotto delle topologie indotte da $d_1,\dots,d_n$.

6.12.*** (Prodotto di spazi vettoriali normati) Sia n un intero positivo e siano $(X_1,\|\cdot\|_1),\dots,(X_n,\|\cdot\|_n)$ degli spazi vettoriali reali normati. Si consideri il prodotto cartesiano $X:=X_1\times\cdots\times X_n$. Per ogni $1\leq p\leq\infty$ si consideri la funzione

$$|\cdot|_p\colon X\to[0,+\infty)$$

definita da

$$|x|_p:=\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n(\|x_i\|_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } 1\leq p<\infty\\ \displaystyle\max_{1\leq i\leq n}\|x_i\|_i & \text{se } p=\infty\end{cases}$$

per ogni $x=(x_1,\dots,x_n)\in X$ con $x_i\in X_i$. (Non si confonda questa funzione con la norma p-adica su $\mathbb{Q}$.)

- Si provi che $|\cdot|_p$ è una norma su X.
- Si provi che tutte le norme $|\cdot|_p$, al variare di $1\leq p\leq\infty$, inducono la topologia su X data dal prodotto delle topologie indotte da $\|\cdot\|_1,\dots,\|\cdot\|_n$.

6.13.*** Sia $\|\cdot\|$ una norma su $\mathbb{R}^n$, sia $\|\cdot\|_2$ la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$, sia $e_1,\dots,e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e sia $M = \max_{1\le i\le n}\|e_i\|$.

(1) Si provi che per ogni $a\in\mathbb{R}^n$ vale $\|a\|\le nM\|a\|_2$.
(2) Si provi che $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è continua rispetto alle topologie euclidee.
(3) Si provi che esiste un numero reale $C>0$ tale che per ogni $v\in\mathbb{R}^n$ vale $\|v\|_2\le C\|v\|$. [Suggerimento: si consideri $m=\sup_{S^{n-1}}\|\cdot\|$, si provi $m>0$ e si ponga $C=m^{-1}$.]
(4) Si provi che la topologia su $\mathbb{R}^n$ indotta da $\|\cdot\|$ coincide con quella euclidea.

6.14.*** Sia X uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e siano $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ due norme su X; si provi che esiste un numero reale $C\ge 0$ tale che per ogni $x\in X$ vale $\|x\|'\le C\|x\|$. Si deduca che tutte le norme su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita inducono la stessa topologia, che chiamiamo topologia euclidea.

6.15.*** Sia X lo spazio vettoriale reale delle funzioni continue $[0,1]\to\mathbb{R}$. Si considerino le funzioni $\|\cdot\|_1\colon X\to[0,+\infty)$ e $\|\cdot\|_\infty\colon X\to[0,+\infty)$ definite da

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \quad \text{e} \quad \|f\|_\infty := \sup_{[0,1]}|f|$$

per ogni $f\in X$.

(1) Si mostri che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono norme su X.
(2) Sia τ_1 (risp. τ_∞) la topologia su X indotta da $\|\cdot\|_1$ (risp. $\|\cdot\|_\infty$). Si provi che τ_∞ è piú fine di τ_1.
(3) Per ogni $\varepsilon\in(0,1]$ si consideri la funzione $f_\varepsilon\in X$ definita da

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} 2-\frac{4}{\varepsilon}t & \text{se } 0\le t\le \frac{\varepsilon}{2},\\ 0 & \text{se } \frac{\varepsilon}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

Si faccia il disegno del grafico di f_ε e si calcolino $\|f_\varepsilon\|_1$ e $\|f_\varepsilon\|_\infty$.
(4) Si consideri $U\subseteq X$ la palla aperta di centro 0 e raggio $\frac{3}{2}$ rispetto a $\|\cdot\|_\infty$. Si provi che $U\notin\tau_1$.
(5) Si provi che τ_∞ è strettamente piú fine di τ_1.

7. Sottoinsiemi dello spazio euclideo

Generalità

7.1.** Sia $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f=(f_1,\dots,f_m)\colon A\to\mathbb{R}^m$ con $f_i\colon A\to\mathbb{R}$. Sia $B\subseteq\mathbb{R}^m$ un sottoinsieme dotato della topologia di sottospazio e tale che $B\supseteq f(A)$. Allora si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) $f\colon A\to\mathbb{R}^m$ è continua,
(ii) la funzione $A\to B$ definita come f è continua,
(iii) per ogni $i=1,\dots,m$, f_i è continua,
(iv) f è continua nel senso dei corsi di Analisi.

7.2.* (Come provare la continuità di funzioni tra sottoinsiemi dello spazio euclideo) Siano $X\subseteq\mathbb{R}^n$ e $Y\subseteq\mathbb{R}^m$ dei sottoinsiemi e sia $f\colon X\to Y$ una funzione. Supponiamo che esistano un aperto A di $\mathbb{R}^n$ e una funzione continua $g\colon A\to\mathbb{R}^m$ tali che $A\supseteq X$ e $f=g|_X$. Allora si dimostri che $f\colon X\to Y$ è continua.

7.3.** Si provino le seguenti affermazioni.

- La somma $+\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ è una funzione continua. [Suggerimento: si scelga la norma 1 su $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{2n}$ in partenza e la norma 1 sull'$\mathbb{R}^n$ in arrivo e si faccia vedere che $+$ è 1-lipschitziana.]
- Il prodotto $\cdot\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione continua.
- La funzione $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\to\mathbb{R}$ data da $t\mapsto\frac{1}{t}$ è continua.

7.4.** Siano X e Y due spazi topologici. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se $f\colon X\to\mathbb{R}$ e $g\colon X\to\mathbb{R}$ sono due funzioni continue, allora anche la somma $f+g\colon X\to\mathbb{R}$ e il prodotto $fg\colon X\to\mathbb{R}$ sono funzioni continue.
(2) Se $f\colon X\to\mathbb{R}$ e $g\colon Y\to\mathbb{R}$ sono funzioni continue, allora anche le funzioni

$$X\times Y\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto f(x)+g(y),$$
$$X\times Y\longrightarrow\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto f(x)g(y),$$

sono continue.
(3) Se $f\colon X\to\mathbb{R}$ è continua e tale $f(x)\ne 0$ per ogni $x\in X$, allora $\frac{1}{f}\colon X\to\mathbb{R}$ è continua.

7.5.** Si dimostri che un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ è continua. Si dimostri che un'affinità di $\mathbb{R}^n$ in sé è un omeomorfismo.

7.6.* Sia $F\in\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ un polinomio a coefficienti reali in n indeterminate. Allora la funzione $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definita da $a\mapsto F(a)$ è continua.

7.7.* Sia $F\in\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ un polinomio a coefficienti complessi in n indeterminate. Allora la funzione $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ definita da $(z_1,\dots,z_n)\mapsto F(z_1,\dots,z_n)$ è continua.

Esempi espliciti

7.8.* Si osservi che D^n è l'unione di B^n e di S^{n-1} e che $B^n \cap S^{n-1} = \emptyset$. Si provi che D^n è la chiusura di B^n in $\mathbb{R}^n$ e che S^{n-1} è la frontiera di D^n (e di B^n) in $\mathbb{R}^n$.

7.9.*** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\}$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$, $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = \frac{1}{n}\}$, $F = E \cup A$.

- Per ciascuno dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sopra, si determini se sono T1, T2, compatti, connessi, connessi per archi, discreti.
- Per ciascuno dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sopra, si determini la parte interna, la chiusura, la parte esterna e la frontiera nello spazio topologico $\mathbb{R}^2$.
- Si determini la parte interna, la chiusura, la parte esterna e la frontiera di A, di C, di E, di F nello spazio topologico D.
- Si determini la parte interna, la chiusura, la parte esterna e la frontiera di E nello spazio topologico C.
- Si determini la parte interna, la chiusura, la parte esterna e la frontiera di A e di E nello spazio topologico F.

7.10.** Si provi che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

7.11.** Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione k.

(1) Si dimostri che W è omeomorfo a $\mathbb{R}^k$.
(2) Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus W$ è omeomorfo a $S^{n-1-k} \times \mathbb{R}^{k+1}$.
(3) Si dimostri che W è contraibile.
(4) Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus W$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1-k}.

7.12.** Sia $C \subseteq \mathbb{R}^2$ una conica non-degenere reale. Se C è un'ellisse reale, si dimostri che C è omeomorfa a S^1. Se C è una parabola, si dimostri che C è omeomorfa a $\mathbb{R}$. Se C è un'iperbole, si dimostri che C è omeomorfa a $(0, 1) \cup (2, 3)$. [Se non avete mai visto le coniche, analizzate solo i seguenti tre casi

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + 4y^2 = 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \;]$$

7.13.* Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Se X è chiuso in $\mathbb{R}^n$ e Y è compatto, allora si provi che $X \cap Y$ è compatto.
- Se X e Y sono compatti, allora si provi che $X \cup Y$ è compatto.

7.14.* Si costruisca un'applicazione continua e bigettiva $[0, 1) \to S^1$. È aperta? È chiusa? È un omeomorfismo?

7.15.* Può esistere un'applicazione continua e bigettiva $[0, 1] \to S^1$?

7.16.* La funzione $f : [0, 1] \to S^1$ data da $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ è ben definita? È continua? È aperta? È chiusa? È un omeomorfismo?

7.17.** Esiste un sottospazio di $\mathbb{R}$ che è omeomorfo a S^1?

7.18.* Può esistere un'applicazione continua e bigettiva $[0, 1] \to [0, 1]^2$? [Si noti che esistono delle applicazioni continue e suriettive $[0, 1] \to [0, 1]^2$, per esempio la curva di Peano.]

7.19.** Per ogni intero $n \geq 1$, si dia esplicitamente un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e $S^n \setminus \{N\}$, dove $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è il polo nord della sfera S^n. [Dapprima si lavori con $n = 1$, facendo il disegno della proiezione stereografica. Poi si generalizzi la formula per $n \geq 2$.]

7.20.** Per ogni intero $n \geq 1$, si dia esplicitamente un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e $S^n \setminus \{S\}$, dove $S = (0, \ldots, 0, -1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è il polo sud della sfera S^n.

7.21.** Per ogni intero $n \geq 1$ e per ogni punto $p \in S^n$, si provi che $S^n \setminus \{p\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

7.22.** Per ogni intero $n \geq 1$, si dia esplicitamente un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^n$ e B^n e il suo inverso.

7.23.** Siano $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ due norme su $\mathbb{R}^n$ e siano D e D' le rispettive palle chiuse di centro l'origine e raggio 1, cioè $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ e $D' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|' \leq 1\}$. Si costruisca esplicitamente un omeomorfismo $D \to D'$ e il suo inverso.

7.24.** Per ogni intero $n \geq 1$ si costruiscano degli omeomorfismi espliciti tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \right\},$$

$$D^n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq 1 \right\}.$$

Si faccia il disegno di questi insiemi per $n = 2$.

7.25.** Per ogni intero $n \geq 1$ si costruiscano degli omeomorfismi espliciti tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$:

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n |x_i| = 1 \right\},$$

$$S^{n-1} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 1 \right\}.$$

Si faccia il disegno di questi insiemi per $n = 2$.

7.26.** Per ogni intero $n \geq 1$, si dia esplicitamente un omeomorfismo tra D^n e $[0,1]^n$ e il suo inverso.

7.27.** Per ogni intero $n \geq 1$ si dica se $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a S^n o a D^n.

7.28.* Per $n = 1, 2$, si dimostri che S^n non è omeomorfo a D^n. [Per $n = 1$ si prendano i complementari di un punto oppure si usi il gruppo fondamentale. Per $n = 2$ si prendano i complementari di un punto e poi si usi il gruppo fondamentale. Il risultato è vero anche per $n \geq 3$, ma servono strumenti piú avanzati di topologia algebrica.]

7.29.* $\mathbb{R}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, per $n \geq 2$?

7.30.** $\mathbb{R}^2$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, per $n \geq 3$?

7.31.* S^1 è omeomorfo a S^2?

7.32.* S^1 è omeomorfo a S^n per un intero $n \geq 2$?

7.33.** S^2 è omeomorfo a S^n per un intero $n \geq 3$?

7.34.** Esistono funzioni continue e iniettive $S^1 \to \mathbb{R}$?

7.35.** Si provi che ogni funzione $S^1 \to S^1$ continua e iniettiva è un omeomorfismo.

7.36.** Si dica se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono affinemente equivalenti e/o omeomorfi.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x - y) = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x - 2y) = 0,\ -2 \leq x \leq 0,\ -1 \leq y \leq 0\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x - y) = 0,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$$

7.37.** Si costruiscano degli omeomorfismi espliciti tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

$$A = S^2 \smallsetminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \neq \pm 1\}$$
$$B = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$
$$C = S^1 \times (-1, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ -1 < z < 1\}$$
$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

7.38.** Si provi che i seguenti spazi topologici sono omeomorfi: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$, $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, $S^1 \times (0, +\infty)$, $S^1 \times \mathbb{R}$ e il complementare di due punti distinti in S^2.

7.39.*** Per ogni intero $n \geq 2$ si provi che i seguenti spazi topologici sono omeomorfi: $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x\| < 1\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 < \|x\| < 2\}$, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$, $S^{n-1} \times (0, +\infty)$, $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ e il complementare di due punti distinti in S^n. Qui $\| \cdot \|$ denota la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$.

La 'multi-funzione' argomento/angolo su S^1. Si ricordi che per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ vale $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. Quindi questo dà una funzione $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Qui ci preoccupiamo di studiare (l'esistenza di) *sezioni* di p, cioè funzioni continue $f\colon A \to \mathbb{R}$ tali che $A \subseteq S^1$ è un aperto non vuoto e $p \circ f\colon A \to S^1$ è l'inclusione $A \hookrightarrow S^1$, cioè $\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(z)} = z$ per ogni $z \in A$. Tali funzioni f si chiamano funzioni argomento su S^1.

7.40.* La funzione $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ data da $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ è ben definita? È continua?

7.41.* Si consideri la funzione $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ data da $f(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. È ben definita? È continua?

7.42.* Si consideri la funzione $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ data da $f(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. È ben definita? È continua?

7.43.* Si consideri la funzione $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ data da $f(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$. È ben definita? È continua?

7.44.** Si fissi $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri la funzione $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ data da $f(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$ per ogni $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Si osservi che f è ben definita ed è tale che, per ogni $z \in S^1$, $f(z)$ è l'unico $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ tale che $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. f è continua?

7.45.*** (Una funzione argomento definita su tutto S^1 non può essere continua) Si dimostri che non esiste alcuna funzione continua $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ tale che $(\cos f(z), \sin f(z)) = z$ per ogni $z \in S^1$. [Questo dimostra che qualsiasi funzione "angolo" o "argomento" su S^1 è discontinua. Per la dimostrazione: si consideri la funzione $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ data da $p(t) = (\cos t, \sin t)$, si supponga per assurdo che una tale f esista, si analizzi cosa è $p \circ f$ e si usi la funtorialità del gruppo fondamentale.]

7.46.** Si provi che la funzione $f\colon S^1 \smallsetminus \{(-1, 0)\} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} & \text{se } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{y} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

è ben definita e continua. [Suggerimento: si usi che $\arctan t + \arctan t^{-1} = \frac{\pi}{2}$ per ogni $t \in (0, +\infty)$ e che $\arctan t + \arctan t^{-1} = -\frac{\pi}{2}$ per ogni $t \in (-\infty, 0)$.] Si provi che per ogni $z \in S^1 \smallsetminus \{(-1, 0)\}$ vale $z = (\cos f(z), \sin f(z))$ e che l'immagine di f è $(-\pi, \pi)$. Si osservi che per ogni $\theta \in (-\pi, \pi)$ vale $f(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$. Si calcoli $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{2}})$.

7.47.* Si costruisca una funzione continua $f\colon S^1 \smallsetminus \{(1, 0)\} \to (6\pi, 8\pi)$ tale che per ogni $z \in S^1 \smallsetminus \{(1, 0)\}$ vale $z = (\cos f(z), \sin f(z))$.

7.48.** Si fissi $\theta_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri la funzione $f\colon S^1 \smallsetminus \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}\} \to \mathbb{R}$ data da $f(\cos\theta, \sin\theta) = \theta$ per ogni $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Si osservi che f è ben definita ed è tale che, per ogni $z \in S^1$, $f(z)$ è l'unico $\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ tale che $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. f è continua?

Ora ci chiediamo se moltiplicare l'angolo per un numero intero è una funzione continua.

7.49.* Si consideri la funzione $g\colon S^1 \to S^1$ definita da $g(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. È ben definita? È continua?

7.50.** Si fissi $m \in \mathbb{Z}$. Si consideri la funzione $g\colon S^1 \to S^1$ definita da $g(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos m\theta, \sin m\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. È ben definita? È continua?

Ora ci chiediamo se dividere l'angolo per un numero intero è una funzione continua.

7.51.* Si consideri la funzione $h\colon S^1 \to S^1$ definita da $h(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. È ben definita? È continua?

7.52.** Si fissi un numero intero $m \geq 2$. Si consideri la funzione $h\colon S^1 \to S^1$ definita da $h(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos \frac{\theta}{m}, \sin \frac{\theta}{m})$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. È ben definita? È continua?

7.53.** Si fissi un numero intero $m \geq 2$. Si consideri la funzione $h\colon S^1 \smallsetminus \{(-1, 0)\} \to S^1$ definita da $h(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos \frac{\theta}{m}, \sin \frac{\theta}{m})$ per ogni $\theta \in (-\pi, \pi)$. È ben definita? È continua?

7.54.*** Si fissi un numero intero $m \geq 2$. Sia $g\colon S^1 \to S^1$ definita come in 7.50. Si provi che non esiste alcuna funzione continua $h\colon S^1 \to S^1$ tale che $g \circ h = \mathrm{id}_{S^1}$. [Suggerimento: si usi la funtorialità del gruppo fondamentale.]

Verso l'analisi complessa. I prossimi esercizi vanno nella direzione dell'analisi complessa (secondo semestre di Geometria 3) e possono essere tralasciati in prima battuta.

7.55.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}^*$ un aperto non vuoto e sia $j\colon U \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ l'inclusione. Sia $f\colon U \to \mathbb{C}$ una funzione tale che $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ per ogni $z \in U$. Una tale funzione, se continua, si chiama *(una determinazione del) logaritmo complesso su U.*

(1) Sia $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ data da $z \mapsto \mathrm{e}^z$. Si provi che $\exp \circ f = j$.
(2) Si provi che per ogni $z \in U$ vale $\operatorname{Re} f(z) = \log |z|$.
(3) Sia $r\colon \mathbb{C}^* \to S^1$ data da $z \mapsto \frac{z}{|z|}$, sia $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ data da $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Si provi $p \circ (\operatorname{Im} f) = r \circ j$.

7.56.** Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ data da $f(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \log\rho + \mathrm{i}\theta$ per ogni $\rho \in (0, +\infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. È ben definita? È continua?

7.57.** Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ data da $f(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \log\rho + \mathrm{i}\theta$ per ogni $\rho \in (0, +\infty)$ e $\theta \in (-\pi, \pi]$. È ben definita? È continua?

7.58.*** Si dimostri che non esiste alcuna funzione continua $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$. [Questo dimostra che non può esistere una funzione "logaritmo" che sia continua su $\mathbb{C}^*$.]

7.59.*** Si costruisca esplicitamente una funzione continua $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

7.60.* Si fissi un numero intero m. Si consideri la funzione $g\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definita da $g(z) = z^m$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$. È ben definita? È continua?

7.61.** Si fissi un numero intero $m \geq 2$. Si dimostri che non esiste alcuna funzione continua $h\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ tale che $h(z)^m = z$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$. [Questo dimostra che non può esistere una funzione "radice m-esima" che sia continua su $\mathbb{C}^*$.]

7.62.** Si fissi un numero intero $m \geq 2$. Si costruisca esplicitamente una funzione continua $h\colon \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ tale che $h(z)^m = z$ per ogni $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.

Miscellanea

7.63. Sia $\mathbb{N}^+$ l'insieme degli interi positivi. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, sia $X_n = \mathbb{R} \times \left\{\frac{1}{n}\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Si ponga $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} X_n$.

(1) Si dica se X è connesso.
(2) Si determini esplicitamente la parte interna di X in $\mathbb{R}^2$.
(3) Sia Y la chiusura di X in $\mathbb{R}^2$. La si determini esplicitamente.
(4) Si dica se X è aperto in Y.
(5) Si determini l'insieme dei punti $p \in Y$ tali che esiste un intorno connesso di p in Y.
(6) Si determini l'insieme dei punti $p \in Y$ tali che esiste un sistema fondamentale di intorni connessi di p in Y.
(7) Si determini l'insieme dei punti $p \in Y$ tali che esiste un intorno compatto di p in Y.
(8) Si determini l'insieme dei punti $p \in Y$ tali che esiste un sistema fondamentale di intorni compatti di p in Y.
(9) Si determini l'insieme dei punti $p \in Y$ tali che esiste un intorno di p in Y omeomorfo a $\mathbb{R}$.

7.64. Si ripeta 7.63 con $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{Q} \cap [0, +\infty))$.

7.65. Si ripeta 7.63 con $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} X_n$, dove $X_n = \{(t, \frac{1}{n}t^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.

7.66. Si ripeta 7.63 con $X = \bigcup_{a\in\mathbb{Q}\cap(0,+\infty)} X_a$, dove $X_a = \{(t, at^2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ per ogni $a \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$.

7.67.***** (Orecchino hawaiano) Si ripeta 7.63 con $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} X_n$, dove $X_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$. Inoltre si faccia vedere che non esiste alcun intorno semplicemente connesso del punto $0 = (0, 0)$ in X.

8. Compattezza

8.1.* Esiste uno spazio topologico che non ha alcun ricoprimento aperto finito?

8.2.* È vero che uno spazio topologico con un numero finito di punti è compatto? [Si confronti con 8.15.]

8.3.* Si faccia un esempio di due spazi topologici X e Y e di una funzione suriettiva e non continua $f\colon X \to Y$ tale che X è compatto e Y non è compatto.

8.4.** Se $f\colon X \to Y$ è una funzione continua tra spazi topologici T2, allora f è chiusa?

8.5.** Se $f\colon X \to Y$ è una funzione continua tra spazi topologici compatti, allora f è chiusa?

8.6.* Si costruisca un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

8.7.** Si costruisca un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$ che ammetta un numero infinito di sottoricoprimenti finiti.

8.8.* Si costruisca un ricoprimento aperto di $(0, 1)$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

8.9.* Si costruisca un ricoprimento aperto di $[0, 1)$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

8.10.* Si costruisca un ricoprimento aperto di $[0, +\infty)$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

8.11.* Si costruisca un ricoprimento aperto di $\mathbb{Q}$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

8.12.** Si costruisca un ricoprimento aperto di $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ che non ammetta sottoricoprimenti finiti.

8.13.** Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) X è compatto;
(2) ogni ricoprimento aperto di X costituito da elementi di $\mathcal{B}$ ammette almeno un sottoricoprimento finito;
(3) per ogni famiglia $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ di chiusi di X tale che $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$, esiste un insieme finito $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tale che $\bigcap_{\lambda\in\Lambda'} F_\lambda = \emptyset$.

8.14.** Uno spazio topologico con la topologia cofinita è compatto?

8.15.* Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti, ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di X. Una *famiglia di sottoinsiemi* di X, denotata con $\{U_i\}_{i\in I}$, formalmente è una funzione $I \to \mathcal{P}(X)$: la funzione è data da $i \mapsto U_i$. Può essere importante distinguere questa funzione dalla sua immagine, cioè dall'insieme $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Diremo che una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X è una famiglia *finita* se I è un insieme finito.

Diremo che una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X è una famiglia *senza ripetizioni* se la funzione corrispondente $I \to \mathcal{P}(X)$ è iniettiva, in altre parole se vale l'implicazione

$$i, j \in I,\ i \neq j \Rightarrow U_i \neq U_j.$$

Diremo che una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X è una *sottofamiglia* di un'altra famiglia $\{V_j\}_{j\in J}$ di sottoinsiemi di X se esiste una funzione iniettiva $\tau\colon I \to J$ tale che $U_i = V_{\tau(i)}$ per ogni $i \in I$.

Diremo che due famiglie $\{U_i\}_{i\in I}$ e $\{V_j\}_{j\in J}$ di sottoinsiemi di X sono *equivalenti* se esiste una funzione bigettiva $\tau\colon I \to J$ tale che $U_i = V_{\tau(i)}$ per ogni $i \in I$.

(1) Si provi che l'insieme delle famiglie di sottoinsiemi di X è infinito.
(2) Si provi che l'insieme delle classi di equivalenza delle famiglie di sottoinsiemi di X è infinito.
(3) Si provi che l'insieme delle famiglie senza ripetizioni di sottoinsiemi di X è infinito.
(4) Si provi che l'insieme delle classi di equivalenza delle famiglie senza ripetizioni di sottoinsiemi di X è in bigezione con $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.
(5) Si provi che se X è un insieme finito allora l'insieme delle classi di equivalenza delle famiglie senza ripetizioni di sottoinsiemi di X è finito.

Un *ricoprimento* di un insieme X è una famiglia $\{U_i\}_{i\in I}$ di sottoinsiemi di X tale che $\bigcup_{i\in I} U_i = X$. Come sopra, parleremo di ricoprimenti finiti e di ricoprimenti senza ripetizioni. Inoltre un sottoricoprimento di un ricoprimento è una sottofamiglia che è un ricoprimento.

(6) Si provi che ogni ricoprimento di X ammette un sottoricoprimento senza ripetizioni.

Sia adesso (X, τ) uno spazio topologico. Un *ricoprimento aperto* è un ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ di X tale che per ogni $i \in I$ vale $U_i \in \tau$, cioè ogni U_i è aperto in X.

(7) Si provi che ogni sottoricoprimento di un ricoprimento aperto di (X, τ) è un ricoprimento aperto.
(8) Si provi che ogni ricoprimento aperto di (X, τ) ammette un sottoricoprimento senza ripetizioni.
(9) Si provi che lo spazio topologico (X, τ) è compatto se e solo se ogni ricoprimento aperto senza ripetizioni ammette un sottoricoprimento finito.
(10) Si provi che se τ è un insieme finito (cioè c'è solo un numero finito di aperti) allora lo spazio topologico (X, τ) è compatto.
(11) Si provi che uno spazio topologico grossolano è compatto.
(12) Si provi che uno spazio topologico con un numero finito di punti è compatto. [8.2.]

8.16.** (Teorema di Weierstrass) Sia X uno spazio topologico compatto e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si provi che f ammette massimo e minimo su X; in altre parole $\inf_X f \in f(X)$ e $\sup_X f \in f(X)$.

8.17.** Sia X uno spazio metrico e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme dotato della topologia indotta. Si provi che se K è compatto allora K è limitato in X.

8.18.** Sia X uno spazio topologico T2 e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme dotato della topologia indotta. Si provi che se K è compatto allora è chiuso in X.

8.19.** Sia X è uno spazio metrico e sia K un sottoinsieme chiuso e limitato di X. È vero che K deve essere compatto?

8.20.** Sia X uno spazio metrico completo e sia K un sottoinsieme chiuso e limitato di X. È vero che K deve essere compatto?

8.21.** Si provi che se uno spazio topologico è compatto e discreto allora ha un numero finito di punti.

8.22.** Sia X uno spazio topologico compatto e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme infinito. Si provi che Y possiede almeno un punto di accumulazione, cioè che esiste almeno un punto $x \in X$ tale che per ogni intorno U di x in X vale $Y \cap (U \smallsetminus \{x\}) \neq \emptyset$. [Suggerimento: si proceda per assurdo e si dimostri, in questo caso, che Y è chiuso in X ed è discreto.]

8.23.*** (Teorema di Bolzano–Weierstrass) Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme infinito e limitato, allora Y possiede almeno un punto di accumulazione, cioè esiste almeno un punto $x \in \mathbb{R}^n$ tale che per ogni intorno U di x in $\mathbb{R}^n$ vale $Y \cap (U \smallsetminus \{x\}) \neq \emptyset$.
(2) Ogni successione limitata in $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una sottosuccessione convergente in $\mathbb{R}^n$.

Compattificazioni. Sia X uno spazio topologico. Una *compattificazione* di X è una coppia (Y, h) tale che

- Y è uno spazio topologico compatto,
- $h\colon X \to Y$ è un'immersione (cioè è continua, è iniettiva e la topologia di X coincide con la topologia di sottospazio di Y tramite h),
- $h(X)$ è denso in Y.

8.24.* Si osservi che uno spazio topologico compatto è compattificazione di se stesso.

8.25.* Si provi che $[0,1]$ è una compattificazione di $(0,1)$, di $[0,1)$.

8.26.** Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una compattificazione di $\mathbb{R}^n$.

8.27.** Si provi che S^n è una compattificazione di $\mathbb{R}^n$.

8.28.** Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una compattificazione di $\mathbb{R}^{2n}$.

8.29.*** Si costruiscano almeno 6 compattificazioni distinte di $S^1 \times \mathbb{R}$.

Ora costruiamo una compattificazione di $\mathbb{R}$ aggiungendo 2 punti all'infinito.

8.30.*** (Retta reale estesa) Consideriamo due elementi distinti $+\infty$ e $-\infty$ che non sono numeri reali. Si consideri l'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Sia τ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Si considerino i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{+\infty} &= \left\{ A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; +\infty \in A,\ -\infty \notin A,\ A \cap \mathbb{R} \in \tau,\ \exists a \in \mathbb{R} : A \cap \mathbb{R} \supseteq (a, +\infty) \right\},\\
\mathcal{A}_{-\infty} &= \left\{ A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; +\infty \notin A,\ -\infty \in A,\ A \cap \mathbb{R} \in \tau,\ \exists a \in \mathbb{R} : A \cap \mathbb{R} \supseteq (-\infty, a) \right\},\\
\mathcal{A}_{\pm\infty} &= \left\{ A \subseteq \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; +\infty \in A,\ -\infty \in A,\ A \cap \mathbb{R} \in \tau,\ \exists a \in \mathbb{R}^+ : A \cap \mathbb{R} \supseteq (-\infty, -a) \cup (a, +\infty) \right\}.
\end{aligned}$$

Si ponga $\overline{\tau} = \tau \cup \mathcal{A}_{+\infty} \cup \mathcal{A}_{-\infty} \cup \mathcal{A}_{\pm\infty}$.

(1) Si provi che $\overline{\tau}$ è una topologia su $\overline{\mathbb{R}}$.
(2) Si provi che su $\mathbb{R}$ la topologia di sottospazio di $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ coincide con la topologia euclidea τ. In altre parole, si provi che l'inclusione $i\colon (\mathbb{R}, \tau) \hookrightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ è un'immersione.
(3) Si provi che $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ è compatto. Perciò $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ è una compattificazione di $\mathbb{R}$.
(4) Si provi che $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ è T2.
(5) Si provi che $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ è connesso.
(6) Si provi che $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ è omeomorfo a $[0,1]$.
(7) Si provi che $\mathcal{A}_{+\infty} \cup \mathcal{A}_{\pm\infty}$ è l'insieme degli intorni aperti di $+\infty$ in $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$. Lo stesso dicasi per $-\infty$.
(8) Si provi che una successione di numeri reali (x_n) converge a $+\infty$ nello spazio topologico $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\tau})$ se e solo se diverge a $+\infty$ nel senso di Analisi 1. Lo stesso dicasi per $-\infty$.

Ora costruiamo una compattificazione di $\mathbb{R}$ aggiungendo 1 punto all'infinito.

8.31.*** (Un'altra compattificazione della retta reale) Consideriamo un elemento ∞ che non è un numero reale. Si consideri l'insieme $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sia τ la topologia euclidea di $\mathbb{R}$. Si considerino l'insieme

$$\mathcal{A}_\infty = \left\{ A \subseteq \widehat{\mathbb{R}} \;\middle|\; \infty \in A,\ A \cap \mathbb{R} \in \tau,\ \exists a \in \mathbb{R}^+ : A \cap \mathbb{R} \supseteq (-\infty, -a) \cup (a, +\infty) \right\}.$$

Si ponga $\widehat{\tau} = \tau \cup \mathcal{A}_\infty$.

(1) Si provi l'uguaglianza

$$\mathcal{A}_\infty = \left\{ A \subseteq \widehat{\mathbb{R}} \;\middle|\; \infty \in A,\ \mathbb{R} \smallsetminus A \text{ è compatto} \right\}.$$

(2) Si provi che $\widehat{\tau}$ è una topologia su $\widehat{\mathbb{R}}$.
(3) Si provi che su $\mathbb{R}$ la topologia di sottospazio di $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ coincide con la topologia euclidea τ. In altre parole, si provi che l'inclusione $i\colon (\mathbb{R}, \tau) \hookrightarrow (\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ è un'immersione.
(4) Si provi che $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ è compatto. Perciò $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ è una compattificazione di $\mathbb{R}$.
(5) Si provi che $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ è T2.
(6) Si provi che $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ è connesso.
(7) Si provi che $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ è omeomorfo a S^1.
(8) Si provi che $\mathcal{A}_\infty$ è l'insieme degli intorni aperti di ∞ in $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$.
(9) Si provi che una successione di numeri reali (x_n) converge a ∞ nello spazio topologico $(\widehat{\mathbb{R}}, \widehat{\tau})$ se e solo se la successione $(|x_n|)_n$ diverge a $+\infty$ nel senso di Analisi 1.

Ora generalizziamo l'esercizio precedente a qualsiasi spazio topologico.

8.32.*** (Compattificazione di Alexandroff) Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia ∞ un elemento che non sta in X. Si ponga $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$,

$$\mathcal{A}_\infty = \left\{ A \subseteq \widehat{X} \;\middle|\; \infty \in A,\ \widehat{X} \smallsetminus A \text{ è chiuso e compatto in } X \right\},$$

$\widehat{\tau} = \tau \cup \mathcal{A}_\infty$.

(1) Si provi che $\widehat{\tau}$ è una topologia su $\widehat{X}$.
(2) Nel caso in cui (X, τ) sia $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea, si provi che $\widehat{\tau}$ coincide con la topologia definita in 8.31.
(3) Si provi che $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$ è compatto. D'ora in poi, omettiamo di menzionare $\widehat{\tau}$.
(4) Si provi che $\{\infty\}$ è chiuso in $\widehat{X}$.
(5) Si provi che X è compatto se e solo se ∞ è isolato in $\widehat{X}$, cioè $\{\infty\}$ è aperto in $\widehat{X}$.
(6) Se X non è compatto, allora si provi che $\widehat{X}$ è una compattificazione di X per mezzo dell'inclusione $X \hookrightarrow \widehat{X}$.
(7) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (a) $\widehat{X}$ è T2,
   (b) X è T2 e ogni punto di X ha un intorno compatto in X.

8.33.** Sia X uno spazio topologico e sia $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ la sua compattificazione di Alexandroff. Sia Y uno spazio topologico T2, sia $Z \subseteq Y$ un sottoinsieme chiuso, sia $f\colon Y \smallsetminus Z \to X$ una funzione continua. Si supponga che per ogni compatto $K \subseteq X$ la preimmagine $f^{-1}(K)$ è compatta. Si provi che la funzione $g\colon Y \to \widehat{X}$ data da

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in Y \smallsetminus Z \\ \infty & \text{se } y \in Z \end{cases}$$

è ben definita e continua.

8.34.** Sia X uno spazio topologico e sia $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ la sua compattificazione di Alexandroff. Sia Y uno spazio topologico T2, sia $Z \subseteq Y$ un sottoinsieme chiuso, sia $f\colon Y \smallsetminus Z \to X$ un omeomorfismo. Si provi che la funzione $g\colon Y \to \widehat{X}$ data da

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in Y \smallsetminus Z \\ \infty & \text{se } y \in Z \end{cases}$$

è ben definita e continua.

8.35.** Sia Y uno spazio topologico compatto e T2. Sia $y_0 \in Y$. Allora si provi che Y è omeomorfo alla compattificazione di Alexandroff di $Y \smallsetminus \{y_0\}$.

8.36.** Siano X e Y due spazi topologici compatti e T2. Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Se $X \smallsetminus \{x_0\}$ e $Y \smallsetminus \{y_0\}$ sono omeomorfi, allora si provi che X e Y sono omeomorfi.

8.37.** Si faccia vedere nell'esercizio precedente che le ipotesi che X e Y siano compatti e T2 sono davvero necessarie. In altre parole, si costruiscano esplicitamente degli esempi delle due seguenti situazioni:

(1) X è uno spazio topologico compatto e T2, Y è uno spazio topologico compatto e non T2, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ sono punti, $X \smallsetminus \{x_0\}$ e $Y \smallsetminus \{y_0\}$ sono omeomorfi;
(2) X è uno spazio topologico compatto e T2, Y è uno spazio topologico T2 e non compatto, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ sono punti, $X \smallsetminus \{x_0\}$ e $Y \smallsetminus \{y_0\}$ sono omeomorfi.

8.38.** Sia $\mathbb{N}$ dotato della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$. Si provi che la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{N}$ è omeomorfa a $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$.

8.39.** Sia X un insieme qualsiasi. Si provi che esiste una topologia τ su X tale che lo spazio topologico (X, τ) è compatto e T2.

9. Connessione

Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice *intervallo* se gode della seguente proprietà: ogni volta che $x, y, z \in \mathbb{R}$ sono tali che $x < y < z$, $x \in X$, $z \in X$, allora deve essere che $y \in X$. In particolare, i singoletti sono intervalli (degeneri).

9.1.** (Sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme. Si provi che X è connesso se e solo se X è un intervallo.

9.2.* (Teorema dei valori intermedi) Sia X uno spazio topologico connesso e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri il contenimento

$$f(X) \supseteq \left(\inf_X f \ , \ \sup_X f\right).$$

9.3.** Sia X uno spazio topologico compatto e connesso e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri l'uguaglianza

$$f(X) = \left[\inf_X f \ , \ \sup_X f\right].$$

9.4.* Si faccia un esempio di due spazi topologici X e Y e di una funzione suriettiva e non continua $f\colon X \to Y$ tale che X è connesso e Y non è connesso.

9.5.** Si provi che S^1 è connesso per archi. Vale anche per S^n?

9.6.** Sia $M_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ con coefficienti reali. Si doti $M_n(\mathbb{R})$ della topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^{n^2}$. Il sottoinsieme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ dotato della topologia di sottospazio è connesso?

9.7.** Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione $k \leq n-2$. Si provi che $\mathbb{R}^n \smallsetminus W$ è connesso per archi.

9.8.** Si faccia un esempio di uno spazio topologico non discreto X tale che ogni suo sottoinsieme (quando dotato della topologia indotta) è connesso se e solo se è connesso per archi.

9.9.** Sia X uno spazio topologico. Si provi che se ogni punto di X ha un intorno aperto in X e connesso per archi, allora le componenti connesse per archi di X sono aperte in X.

9.10.** Si costruisca uno spazio topologico che abbia almeno una componente connessa per archi che non è aperta.

9.11.****** (Seno del topologo) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ x \in (0, +\infty) \right\},$$

$Y = X \cup \{(0,0)\}$ e $Z = X \cup (\{0\} \times [-1,1])$.

(1) Si osservi che $X \subseteq Y \subseteq Z$ e che Z coincide con la chiusura di X in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si provi che X è connesso per archi.
(3) Si provi che Y e Z sono connessi.
(4) Sia $\alpha\colon [0,1] \to Z$ una funzione continua tale che $\alpha(0) = (0,0)$. Si considerino le due proiezioni $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e si ponga $\alpha_i = \mathrm{pr}_i \circ \alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ per $i = 1,2$. Si ponga $E = \alpha_1^{-1}(0)$. Allora si dimostrino le seguenti affermazioni:
   (a) E è non vuoto;
   (b) E è chiuso in $[0,1]$;
   (c) per ogni $t_0 \in E$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \subseteq E$; [Suggerimento: poiché α_2 è continua e $\alpha_2(t_0) = 0$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\cap[0,1] \subseteq \alpha_2^{-1}((-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, cioè per ogni $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\cap[0,1]$ vale $|\alpha_2(t)| < \frac{1}{2}$. Vogliamo dimostrare il contenimento $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \subseteq E$.
   Supponiamo per assurdo che esista $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \setminus E$, cioè $t_1 \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ tale che $\alpha_1(t_1) \neq 0$. Quindi $\alpha_1(t_1) > 0$. Si hanno 2 casi: $t_1 > t_0$ o $t_1 < t_0$. Consideriamo solo il primo caso $t_1 > t_0$, mentre il secondo è lasciato a chi legge. Per n intero sufficientemente grande si ha $\frac{\pi}{2} + 2\pi n > \frac{1}{\alpha_1(t_1)}$, cioè $0 < (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^{-1} < \alpha_1(t_1)$. Poiché α_1 è continua, per il teorema dei valori intermedi si ha $\alpha_1([t_0, t_1]) = [0, \alpha_1(t_1)]$, quindi esiste $t_2 \in (0, t_1)$ tale che $\alpha_1(t_2) = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^{-1}$. Poiché $\alpha(t_2) \in X$, deve essere $\alpha_2(t_2) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 > \frac{1}{2}$, che è un assurdo.]
   (d) E è aperto in $[0,1]$;
   (e) per ogni $t \in [0,1]$ vale $\alpha_1(t) = 0$;
   (f) per ogni $t \in [0,1]$ vale $\alpha(t) \notin X$.
(5) Si provi che Z non è connesso per archi.
(6) Si provi che Y non è connesso per archi.

9.12.**** (Pulce e pettine) Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$X = ((0,1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \subset \mathbb{R}^2,$$

$Y = X \cup \{(0,1)\}$ e $Z = X \cup (\{0\} \times [0,1])$.

(1) Si osservi che $X \subseteq Y \subseteq Z$ e che Z coincide con la chiusura di X in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si provi che X e Z sono connessi per archi.
(3) Si provi che Y è connesso.
(4) Sia $\alpha\colon [0,1] \to Y$ una funzione continua tale che $\alpha(0) = (0,1)$. Si considerino le due proiezioni $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{pr}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e si ponga $\alpha_i = \mathrm{pr}_i \circ \alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ per $i = 1,2$. Si ponga $E = \alpha_1^{-1}(0)$. Allora si dimostrino le seguenti affermazioni:
   (a) E è non vuoto;
   (b) E è chiuso in $[0,1]$;
   (c) $E = \alpha^{-1}((0,0))$;
   (d) per ogni $t_0 \in E$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \subseteq E$; [Suggerimento: poiché α_2 è continua e $\alpha_2(t_0) = 1 > 0$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1] \subseteq \alpha_2^{-1}((0,+\infty))$, cioè per ogni $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\cap[0,1]$ vale $\alpha_2(t) > 0$. Perciò per ogni $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\cap[0,1]$ vale $\alpha_1(t) \in \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. Per la continuità di α_1, poiché $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1]$ è un intervallo, si ha che $\alpha_1((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0,1])$ è un intervallo contenuto in $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ e contenente 0, quindi deve essere il singoletto $\{0\}$.]
   (e) E è aperto in $[0,1]$;
   (f) per ogni $t \in [0,1]$ vale $\alpha(t) = (0,0)$.
(5) Si provi che Y non è connesso per archi.

9.13.** Se $f\colon [0,1] \to [0,+\infty)$ è una funzione continua tale che $f(1) = 0$, allora si provi che esiste $t \in [0,1]$ tale che $f(t) = t$.

9.14.** Sia X un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si provi che se X è connesso allora X è connesso per archi.

9.15.** Sia X un chiuso di $\mathbb{R}^n$. Se X è connesso, allora è necessariamente vero che X è connesso per archi?

10. Separazione

10.1.* Uno spazio topologico discreto è T2 e T4?

10.2.* Uno spazio topologico con la topologia cofinita è T1?

10.3.* Se X è uno spazio topologico T1 con un numero finito di punti, allora è vero che X è discreto?

10.4.* Se X è uno spazio topologico T2 con la topologia cofinita, allora è vero che X ha un numero finito di punti ed è discreto?

10.5.** Sia X uno spazio topologico con un numero finito di punti. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- X è T1,
- X è T2,
- X è discreto.

10.6.* Sia X un insieme, sia τ una topologia su X e sia τ_{cof} la topologia cofinita su X. Si provi che (X,τ) è T1 se e solo se $\tau \supseteq \tau_{\text{cof}}$.

10.7.** Sia $f\colon X \to Y$ un'identificazione tale che la fibra di ogni punto di Y ha cardinalità finita. Si provi che se X è T1 allora anche Y è T1.

10.8.*** (Retta con due origini) Sia $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subset \mathbb{R}^2$ con la relazione di equivalenza $\sim$ definita cosí:

$$(x_1,n_1) \sim (x_2,n_2) \;\Leftrightarrow\; (x_1,n_1) = (x_2,n_2) \text{ o } x_1 = x_2 \neq 0.$$

Si consideri la proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X/\!\sim$ e si considerino i seguenti punti di $X/\!\sim$: $p_0 = [(0,0)]$ e $p_1 = [(0,1)]$.

(1) Si provi che $X/\!\sim$ è T1.
(2) Sia U un qualsiasi intorno di p_0 in $X/\!\sim$. Si provi che esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che

$$\pi^{-1}(U) \supseteq ((-\varepsilon,0) \cup (0,\varepsilon)) \times \{0,1\}.$$

(3) Si provi che $X/\!\sim$ non è T2.
(4) Si provi che ogni punto di $X/\!\sim$ ha un intorno aperto omeomorfo a $\mathbb{R}$.
(5) Si dica se $X/\!\sim$ è compatto.
(6) Si dica se $X/\!\sim$ è connesso e/o connesso per archi.
(7) Si consideri $A = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{(0,1)\} \subseteq X$. Si provi che $\pi|_A\colon A \to X/\!\sim$ è continua e bigettiva. È anche un omeomorfismo?

10.9.** Sia X uno spazio topologico T4 e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio. Si provi che se Y è chiuso in X allora Y è T4.

10.10.** Siano X e Y due spazi topologici non vuoti tali che il prodotto $X \times Y$ è T4. Si provi che X e Y sono T4.

10.11.** Si provi che se uno spazio topologico è compatto e T2 allora è T4.

10.12.*** Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$ un punto. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se X è T3, allora x ammette un sistema fondamentale di intorni chiusi.
(2) Se X è compatto e T2, allora x ammette un sistema fondamentale di intorni compatti.

10.13.** Siano X e Y spazi topologici. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se X e Y sono T1, allora il prodotto $X \times Y$ è T1.
(2) Se X e Y sono T2, allora il prodotto $X \times Y$ è T2.

10.14.*** (Continui topologici) Sia X uno spazio topologico T2 e sia $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X, non vuoti, muniti della topologia di sottospazio e tali che $A_i \supseteq A_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Si ponga $A_\infty = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$.

(1) Se per ogni $i \in \mathbb{N}$ A_i è compatto e connesso, allora si provi che A_∞ è non vuoto, compatto e connesso.
(2) Se per ogni $i \in \mathbb{N}$ A_i è compatto e connesso per archi, allora è vero che A_∞ è connesso per archi?
(3) Si faccia un esempio della seguente situazione: $X = \mathbb{R}^2$, ogni A_i è chiuso in $\mathbb{R}^2$, non vuoto e connesso per archi, $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni i, e A_∞ è non vuoto e sconnesso.

11. Quozienti

Quando si parla di quozienti si può parlare, equivalentemente, di relazioni di equivalenza (e quindi di insiemi quozienti con topologia quoziente) oppure di funzioni suriettive (e quindi di identificazioni). Si veda l'osservazione in 1.3.

11.1.** (Proprietà universale della topologia quoziente) Sia X uno spazio topologico, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X e sia $\pi\colon X \to X/\!\sim$ la proiezione al quoziente. Si doti $X/\sim$ della topologia quoziente di X tramite π. Si provi che π è continua.

Sia ora Y uno spazio topologico e sia $f\colon X \to Y$ una funzione.

- Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  - f è costante su ciascuna classe di $\sim$-equivalenza, cioè se $x_1, x_2 \in X$ sono tali che $x_1 \sim x_2$ allora $f(x_1) = f(x_2)$,
  - esiste una funzione $\overline{f}\colon X/\!\sim \to Y$ tale che $f = \overline{f} \circ \pi$.
- Si provi che se una tale $\overline{f}$ esiste allora è unica.
- Supponiamo che $\overline{f}$ esista. Allora si provino le seguenti affermazioni:
  (1) $\overline{f}$ è continua se e solo se f è continua;
  (2) $\overline{f}$ è suriettiva se e solo se f è suriettiva;
  (3) $\overline{f}$ è iniettiva se e solo se ogni volta che $x_1, x_2 \in X$ sono tali che $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 \sim x_2$;
  (4) se f è continua, X è compatto e Y è T2, allora $\overline{f}$ è continua e chiusa.

11.2.*** Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua e suriettiva tra spazi topologici.

- Si provi che se f è aperta allora f è un'identificazione.
- Si provi che se f è chiusa allora f è un'identificazione.

- Si costruisca un esempio in cui f è un'identificazione né aperta né chiusa.
- Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) f è un'identificazione,
  (ii) per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$, se $f^{-1}(A)$ è aperto in X allora A è aperto in Y,
  (iii) per ogni sottoinsieme $A \subseteq Y$, $f^{-1}(A)$ è aperto in X se e solo se A è aperto in Y,
  (iv) per ogni sottoinsieme $C \subseteq Y$, se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X allora C è chiuso in Y,
  (v) per ogni sottoinsieme $C \subseteq Y$, $f^{-1}(C)$ è chiuso in X se e solo se C è chiuso in Y,
  (vi) per ogni spazio topologico Z e per ogni funzione $g\colon Y \to Z$, se $g \circ f$ è continua allora g è continua,
  (vii) per ogni spazio topologico Z e per ogni funzione $g\colon Y \to Z$, $g \circ f$ è continua se e solo se g è continua.
  [Suggerimento: per (vi)⇒(ii) si consideri Z costituito da due punti con topologia né discreta né grossolana.]

Questo esercizio è l'analogo di 2.33 per le identificazioni.

11.3.** Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ su $[0,1]$ data da: $t \sim s$ se e solo se $t = s$ o $\{t,s\} = \{0,1\}$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $[0,1]/\sim$ e la proiezione al quoziente $p\colon [0,1] \to [0,1]/\sim$. Si dica se p è aperta o chiusa. Si provi che $[0,1]/\sim$ è omeomorfo a S^1.

11.4.** Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ su D^n data da: $x \sim y$ se e solo se $x = y$ o $\|x\| = \|y\| = 1$. Si dimostri che lo spazio topologico quoziente $D^n/\sim$ è omeomorfo a S^n.

11.5.** (Cilindro compatto) Si consideri il quadrato chiuso $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ con la relazione di equivalenza $\sim$ definita come:
$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \text{ o } (\{x_1,x_2\} = \{0,1\} \text{ e } y_1 = y_2)\,.$$
Si provi che lo spazio topologico quoziente $X/\sim$ è omeomorfo a $S^1 \times [0,1]$.

11.6.** (Nastro di Möbius) Si consideri il quadrato chiuso $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ con la relazione di equivalenza $\sim$ definita come:
$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \text{ o } (\{x_1,x_2\} = \{0,1\} \text{ e } y_1 + y_2 = 1)\,.$$
Lo spazio topologico quoziente $X/\sim$ è detto nastro di Möbius. Si provi che è compatto e T2. Si provi che il nastro di Möbius non è omeomorfo al cilindro compatto descritto nell'esercizio precedente.

11.7.** Su S^1 si consideri la relazione di equivalenza di antipodalità $\sim_a$, cioè per ogni $p,q \in S^1$ si ha che $p \sim_a q$ se e solo se $p = q$ o $p = -q$. Si provi che lo spazio topologico quoziente è omeomorfo a S^1.

11.8.*** (Quozienti e sottospazi sono compatibili?) Sia X uno spazio topologico, sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme munito della topologia di sottospazio, sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X e sia $X/\sim$ lo spazio topologico quoziente. Si considerino l'inclusione $i\colon A \hookrightarrow X$ e la proiezione al quoziente $\pi\colon X \twoheadrightarrow X/\sim$.

Su A si consideri la relazione di equivalenza $\approx$ definita cosí: per ogni $a_1,a_2 \in A$, $a_1 \approx a_2$ se e solo se $a_1 \sim a_2$. In altre parole, $\approx$ è la 'restrizione' di $\sim$ ad A. Si considerino lo spazio topologico quoziente $A/\approx$ e la proiezione al quoziente $p\colon A \twoheadrightarrow A/\approx$.

(1) Si provi che esiste un'unica funzione $f\colon A/\approx \to X/\sim$ tale che $f \circ p = \pi \circ i$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ A/\approx \arrow[r, "f"] & X/\sim \end{tikzcd}$$

(2) Si provi che f è continua e iniettiva.
(3) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) f è suriettiva,
  (b) f è bigettiva,
  (c) $\pi \circ i = \pi|_A\colon A \to X/\sim$ è suriettiva,
  (d) A interseca ciascuna classe di $\sim$-equivalenza,
  (e) per ogni $x \in X$, esiste $a \in A$ tale che $a \sim x$.
(4) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) p è iniettiva,
  (b) p è bigettiva,
  (c) $\pi \circ i = \pi|_A\colon A \to X/\sim$ è iniettiva,
  (d) esiste un insieme di rappresentanti per $\sim$ contenente A,
  (e) per ogni $x \in X$, esiste al piú un unico $a \in A$ tale che $a \sim x$,
  (f) se $a_1,a_2 \in A$ sono tali che $a_1 \sim a_2$ allora $a_1 = a_2$.
(5) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) f è suriettiva e p è iniettiva,
  (b) f e p sono bigettive,
  (c) $\pi \circ i = \pi|_A\colon A \to X/\sim$ è bigettiva,
  (d) A è un insieme di rappresentanti per $\sim$,
  (e) per ogni $x \in X$, esiste uno e un solo $a \in A$ tale che $a \sim x$.
(6) Si provi che se A interseca ogni classe di $\sim$-equivalenza e se A è compatto allora $X/\sim$ è compatto.

(7) Si provi che se A è compatto e $X/\sim$ è T2 allora: f è un'immersione chiusa, la topologia di $A/\approx$ (come quoziente di A) coincide con la topologia di sottospazio di $X/\sim$ tramite f, e $f(A/\approx)$ è un sottoinsieme chiuso di $X/\sim$.
(8) Si costruisca un esempio in cui la topologia di $A/\approx$ (come quoziente di A) non coincide con la topologia di sottospazio di $X/\sim$ tramite f. In altre parole, la topologia di $A/\approx$ è strettamente piú fine della topologia indotta da $X/\sim$ tramite f.
(9) Si provi che se $\pi \circ i$ è suriettiva, A è compatto e $X/\sim$ è T2 allora f è un omeomorfismo.
(10) Si costruisca un esempio in cui f è bigettiva ma non è un omeomorfismo.
(11) Se esiste una funzione continua $r\colon X \to A$ tale che
  (i) $r \circ i = \mathrm{id}_A$,
  (ii) per ogni $x \in X$, $r(x) \sim x$,
allora si provi che f è un omeomorfismo.

Suggerimento (generale e impreciso) per i quozienti: nelle notazioni di 11.8, tutte le volte che si ha un quoziente si cerchi sempre di trovare un sottoinsieme $A \subseteq X$ che sia un *dominio fondamentale*, ovvero un sottoinsieme che soddisfi le seguenti proprietà:

- A interseca tutte le classi di $\sim$-equivalenza, perciò $\pi|_A\colon A \to X/\sim$ è suriettiva;
- la relazione residuale $\approx$ su A sia "quasi" banale, cioè per la maggior parte dei punti a_1, a_2 di A vale che $a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$;
- A è chiuso in X.

Un modo è prendere la chiusura di un insieme di rappresentanti. La seconda imprecisa (!) proprietà suggerisce che, in talune circostanze favorevoli come 11.8(9) o 11.8(11), il quoziente $X/\sim$ potrebbe essere ottenuto da A quozientando rispetto a $\approx$, che si spera sia una relazione di equivalenza piú comprensibile rispetto a $\sim$ su X. In tal modo si spera di avere un'intuizione geometrica di $X/\sim$. Inoltre, se un tale A è compatto, si ha immediatamente la compattezza di $X/\sim$.

11.9.** Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$ data da $(n, x) \mapsto x + n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. Si provi che lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ rispetto a quest'azione è omeomorfo a S^1.

11.10.** Si fissi un numero reale $a > 0$. Sia $G \subseteq \mathrm{Omeo}(\mathbb{R})$ il sottogruppo generato dall'omeomorfismo di $\mathbb{R}$ in sé definito da $x \mapsto x + a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si provi che lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}/G$ rispetto a quest'azione è omeomorfo a S^1.

11.11.** Si fissi un numero reale $a > 1$. Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $(0, +\infty)$ data da $(n, y) \mapsto a^n y$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $y \in (0, +\infty)$. Si provi che lo spazio topologico quoziente $(0, +\infty)/\mathbb{Z}$ rispetto a quest'azione è omeomorfo a S^1.

11.12.*** (Toro 2-dimensionale) Si considerino i seguenti spazi topologici:

- il prodotto $S^1 \times S^1 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| = |w| = 1\}$;
- il quoziente $([0, 1] \times [0, 1])/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza sul quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ generata da $(x, 0) \sim (x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, y)$ al variare di $x, y \in [0, 1]$;
- il quoziente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, dove il gruppo $\mathbb{Z}^2$ agisce su $\mathbb{R}^2$ tramite traslazione, cioè $(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n)$ per ogni $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- la ciambella

$$T_{R,r} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2 \right\}$$

  in $\mathbb{R}^3$, ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la circonferenza $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2\}$, dove R e r sono numeri reali fissati tali che $0 < r < R$.

Vogliamo provare che sono tutti omeomorfi tra loro.

(1) Utilizzando la funzione $[0, 1] \times [0, 1] \to S^1 \times S^1$ data da $(x, y) \mapsto (\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y})$ e la proprietà universale della topologia quoziente, si costruisca un omeomorfismo da $[0, 1]^2/\sim$ a $S^1 \times S^1$.
(2) Si faccia vedere che $[0, 1]^2$ è un dominio fondamentale per l'azione di $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{R}^2$.
(3) Si fissi $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ e si consideri $A_\varepsilon = (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \times (-\varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Si determini l'insieme $\{g \in \mathbb{Z}^2 \mid g(A_\varepsilon) \cap A_\varepsilon \neq \emptyset\}$. Cosa succede se $\varepsilon = \frac{2}{3}$?
(4) Si provi che il quoziente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ è T2.
(5) Si consideri l'inclusione $i\colon [0, 1]^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$. Usando 11.8(9), si provi che $[0, 1]^2/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
(6) Si provi che la funzione $[0, 2\pi]^2 \to T_{R,r}$ data da

$$(\theta, \varphi) \mapsto ((R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta)$$

  è ben definita e suriettiva. Si determinino le coppie (θ_1, φ_1) e (θ_2, φ_2) che hanno la stessa immagine.
(7) Si costruisca un omeomorfismo da $[0, 1]^2/\sim$ a $T_{R,r}$.

11.13.*** Si fissino $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}^2$ su $\mathbb{C}$ data da $(n_1, n_2) \cdot z = z + n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2$ per ogni $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ e $z \in \mathbb{C}$. Si provi che lo spazio topologico quoziente $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

11.14.*** (Bottiglia di Klein) Si consideri il quadrato $[0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$ e lo spazio topologico quoziente $K = [0,1]^2/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza su $[0,1]^2$ generata da $(x,0) \sim (x,1)$ e $(0,y) \sim (1,1-y)$ al variare di $x,y \in [0,1]$. Sia $p\colon [0,1]^2 \to K$ la proiezione al quoziente.

(1) Si provi che K è compatto e connesso per archi.
(2) Si provi che K è T2.
(3) Si consideri il bordo del quadrato $C = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$. Si consideri $p(C)$ dotato della topologia di sottospazio di K. Si determini un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ che è omeomorfo a $p(C)$.

Si considerino le due affinità $t\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$t(x,y) = (x, y+1) \qquad \text{e} \qquad s(x,y) = (x+1, 1-y)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sia $G \subseteq \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ il gruppo generato da t e s. Si consideri lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}^2/G$ e la proiezione al quoziente $\pi\colon \mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}^2/G$.

(4) Si provi l'uguaglianza $tst = s$.
(5) Si mostri che ogni elemento di G è del tipo $t^m s^n$ per qualche $m,n \in \mathbb{Z}$.
(6) Si provi che la restrizione $\pi|_{[0,1]^2}\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2/G$ è suriettiva.
(7) Si fissi $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Si consideri $A = (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \times (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Si provi il contenimento

$$\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\} \subseteq \{t^m s^n \mid m,n \in \mathbb{Z},\ |m| \leq 1,\ |n| \leq 1\}.$$

(8) Si provi che $\mathbb{R}^2/G$ è T2.
(9) Si provi che il quoziente $\mathbb{R}^2/G$ è omeomorfo a K.

11.15.*** Sia X uno spazio topologico e sia G un gruppo che agisce su X mediante omeomorfismi. Si consideri lo spazio topologico quoziente X/G e la proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X/G$.

(1) Si provi che π è aperta.
(2) Si provi che se G è finito allora π è chiusa.
(3) Si provi che X/G è T2 se e solo se $K = \{(x, g(x)) \mid x \in X, g \in G\}$ è chiuso in $X \times X$.
(4) Si provi che se X è T2 e G è finito allora X/G è T2.

11.16.** Sia $\pi\colon X \to Y$ un'identificazione. Sia $V \subseteq Y$ un aperto. Si provi che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)}\colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un'identificazione.

11.17.*** (Quozienti e prodotti) Siano X,Y,Z spazi topologici e sia $\pi\colon X \to Y$ un'identificazione. Si consideri la funzione $f = \pi \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$. Sui prodotti consideriamo le topologie prodotto.

(1) Si provi che f è continua e suriettiva.
(2) Si provi che se π è aperta allora f è un'identificazione aperta.
(3) Se π è chiusa, allora è vero che f è un'identificazione chiusa?
(4) Se π è chiusa e tale che per ogni punto $y \in Y$ la fibra $\pi^{-1}(y)$ è compatta, allora si provi che f è un'identificazione chiusa. [Suggerimento: si usi 4.8.]

11.18.*** (Cilindro infinito) Si consideri $X = [0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ con la relazione di equivalenza $\sim$ definita come:

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \ \Leftrightarrow\ (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \text{ o } (\{x_1,x_2\} = \{0,1\} \text{ e } y_1 = y_2).$$

Si provi che lo spazio topologico quoziente $X/\sim$ è omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$.

11.19.*** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$: $X = S^1 \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $Z_+ = S^1 \times [1, +\infty)$, $Z_- = S^1 \times (-\infty, -1]$. Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ su X definita da: $p \sim q$ se e solo se $(p = q)$ o $(p,q \in Z_+)$ o $(p,q \in Z_-)$. Si provi che lo spazio topologico quoziente $X/\sim$ è omeomorfo a S^2.

11.20.** [Esercizio 4, Appello 2, A.A. 2021/22] Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{C}^*$ data da $(n,z) \mapsto 2^n z$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{C}^*$. Sia Y lo spazio topologico quoziente rispetto a quest'azione. Si provi che Y è omeomorfo a $S^1 \times S^1$.

11.21.** Si fissi un intero $n \geq 2$. Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ data da $(k,x) \mapsto 2^k x$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sia Y lo spazio topologico quoziente rispetto a quest'azione. Si provi che Y è omeomorfo a $S^1 \times S^{n-1}$.

11.22.*** Su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim_o$ definita cosí: per ogni $x,y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x \sim_o y$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tale che $y = \lambda x$. Si determini un gruppo G e un'azione di G su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mediante omeomorfismi tale che la relazione di equivalenza indotta sia $\sim_o$. Si provi che lo spazio topologico quoziente $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim_o$ è omeomorfo a S^n.

11.23.*** Su $\mathbb{R}^{n+1}$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ definita cosí: per ogni $x,y \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \sim y$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $y = \lambda x$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $X := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ e la proiezione al quoziente $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to X$.

(1) Si provi che $\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to X$ è aperta.
(2) Si provi che lo spazio topologico X è compatto, connesso per archi, non T1.

Ora si consideri $W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, munito della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^{n+1}$, e si consideri $Y = \pi(W)$, munito della topologia di sottospazio di X.

(3) Si consideri la restrizione $\pi|_W : W \to Y$. È iniettiva? È suriettiva? È continua? È aperta? È chiusa? È un'identificazione?
(4) Si dica se Y è T1.

11.24.*** (Contrazioni o collassamenti) Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme. Si consideri $\sim$ la relazione di equivalenza su X definita cosí: $x_1 \sim x_2$ se e solo se $x_1 = x_2$ o ($x_1 \in A$ e $x_2 \in A$). Si consideri lo spazio topologico quoziente $X/A := X/\sim$, detto *collassamento* o *contrazione* di A a un punto e sia $\pi : X \to X/A$ la proiezione al quoziente. Si denoti con $y_A \in X/A$ il punto che corrisponde alla classe di equivalenza A.

(1) Si provi che se A è costituito da un solo punto, allora π è un omeomorfismo.
(2) Si considerino le seguenti affermazioni:
 (i) π è aperta,
 (ii) A è aperto in X,
 (iii) $\{y_A\}$ è aperto in X/A.
 Si provino le implicazioni (i)$\Leftarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Si provi che se la parte interna di A in X è non vuota allora vale anche (i)$\Rightarrow$(ii). Si costruisca un esempio in cui (i) è vera e (ii) è falsa.
(3) Si considerino le seguenti affermazioni:
 (i) π è chiusa,
 (ii) A è chiuso in X,
 (iii) $\{y_A\}$ è chiuso in X/A.
 Si provino le implicazioni (i)$\Leftarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii). Si costruisca un esempio in cui (i) è vera e (ii) è falsa.
(4) Si provi che se A non è chiuso in X allora X/A non è T1.
(5) Se A è chiuso in X e X è T1, allora si provi che X/A è T1.
(6) Se A è chiuso in X e X è T1 e T3, allora si provi che X/A è T2.
(7) Se A è aperto o chiuso in X, allora si provi che $\pi|_{X\smallsetminus A} : X \smallsetminus A \to X/A \smallsetminus \{y_A\}$ è un omeomorfismo.
(8) Sia $U \subseteq X \smallsetminus A$ un sottoinsieme; allora si provi che $\pi(U)$ è aperto in $X/A \smallsetminus \{y_A\}$ se e solo se U è aperto in X o $U \cup A$ è aperto in X.
(9) Si faccia un esempio in cui $\pi|_{X\smallsetminus A} : X \smallsetminus A \to X/A \smallsetminus \{y_A\}$ non è un omeomorfismo. [Suggerimento: si consideri $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1)$ e l'aperto $U = [1, +\infty)$ di $X \smallsetminus A$.]
(10) Si provi che se X è compatto e T2 e A è chiuso in X allora X/A è T2 ed è la compattificazione di Alexandroff di $X \smallsetminus A$.

11.25.*** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1 \times \mathbb{R}, \\ B &= \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1 \times \{0\}, \\ C &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}. \end{aligned}$$

Si consideri il quoziente A/B ottenuto collassando B a un punto e si provi che A/B è omeomorfo a C. Si provi che C non è una varietà topologica.

11.26.*** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A &= S^1 \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \\ B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x - 1)^2 + y^2 - 1)((x + 1)^2 + y^2 - 1) = 0\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (xy - 1)(x - y) = 0\} \end{aligned}$$

e il collassamento $D = A/(\{0\} \times [-1, 1])$. Si dica quali tra A, B, C, D sono omeomorfi.

11.27.*** Si fissi un intero $n \geq 1$. Su S^1 si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ definita da

$$(\cos\theta, \sin\theta) \sim (\cos\theta', \sin\theta') \quad \text{se e solo se} \quad \theta' - \theta \in \frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}$$

per ogni $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

(1) Si provi che se $n = 2$ allora $\sim$ è la relazione di antipodalità (si veda 11.7).
(2) Si interpreti S^1 come $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ e si ponga $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$. Per ogni $z, w \in S^1$, si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
 (a) $z \sim w$,
 (b) $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $w = \zeta^k z$,
 (c) $\exists k \in \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ t.c. $w = \zeta^k z$,
 (d) $z^n = w^n$.
(3) La funzione $g : S^1 \to S^1$ data da $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, è ben definita? È continua?
(4) Si provi che il quoziente $S^1/\sim$ è omeomorfo a S^1.

11.28.**** (Rotazioni di S^1) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su S^1 data da $(n, z) \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} z$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $z \in S^1$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $S^1/\mathbb{Z}$ e la proiezione al quoziente $p : S^1 \to S^1/\mathbb{Z}$.

(1) Si provi che $S^1/\mathbb{Z}$ è compatto.

Si consideri il sottogruppo additivo H di $\mathbb{R}$ generato da 2π e da α. Si consideri l'azione di H su $\mathbb{R}$ per traslazione, cioè $(h, x) \mapsto x + h$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $h \in H$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $\mathbb{R}/H$ e la proiezione al quoziente $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/H$.

(2) Usando che S^1 è omeomorfo a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, si provi che $S^1/\mathbb{Z}$ è omeomorfo al quoziente $\mathbb{R}/H$.
(3) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) H, con la topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$, è discreto,
  (b) H è ciclico,
  (c) H non è denso in $\mathbb{R}$,
  (d) H è chiuso in $\mathbb{R}$,
  (e) $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$,
  (f) $\{0_{\mathbb{R}/H}\}$ è chiuso in $\mathbb{R}/H$,
  (g) $S^1/\mathbb{Z}$ è T1,
  (h) $S^1/\mathbb{Z}$ è T2,
  (i) $S^1/\mathbb{Z}$ è omeomorfo a S^1.

(Suggerimento: per le equivalenze tra (a), (b), (c) e (d) si usi 3.23; le equivalenze tra (f), (g) e (h) sono vere in tutti i gruppi topologici; per (e)⇒(b) si usi che un sottogruppo additivo di $\mathbb{Q}$ che è finitamente generato è ciclico; per (b)⇒(i) si usi 11.10; per (f)⇔(d) si usi la definizione di topologia quoziente; per (b)⇒(e) si faccia un piccolo ragionamento di algebra.)

11.29.*** Si consideri il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ che agisce su $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tramite $\lambda\cdot(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1}y)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e $(x, y) \in X$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $Y = X/\mathbb{R}^+$ e la proiezione al quoziente $\pi\colon X \to Y$.

(1) Si determini l'orbita di $(1, 1)$.
(2) Si determini l'orbita di $(1, 0)$.
(3) Si determini l'orbita di $(0, 1)$.
(4) Si determini l'orbita di $(1, 2)$.
(5) Si provi che Y è T1.
(6) Se determini un insieme di rappresentanti $A \subseteq X$.
(7) Si costruisca una funzione continua e suriettiva $Y \to \mathbb{R}$.
(8) Si provi che Y non è compatto.
(9) Si determini esplicitamente un ricoprimento aperto di Y che non ammette sottoricoprimenti finiti.
(10) Se $K = [0, 1] \times \{1\}$, si determini la saturazione $\pi^{-1}(\pi(K))$.
(11) Per ogni $\varepsilon > 0$ si provi che $\pi^{-1}(\pi(B((1, 0), \varepsilon))) \cap \pi^{-1}(\pi(B((0, 1), \varepsilon))) \neq \emptyset$. [Suggerimento: si consideri $(1, \frac{\varepsilon}{2}) \sim (\frac{\varepsilon}{2}, 1)$.]
(12) Si provi che Y non è T2.

11.30.**** Si consideri l'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ su $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ data da $n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e $(x, y) \in X$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $Z = X/\mathbb{Z}$ e la proiezione al quoziente $p\colon X \to Z$.

(1) Si determini l'orbita di $(1, 1)$.
(2) Si determini l'orbita di $(1, 0)$.
(3) Si determini l'orbita di $(0, 1)$.
(4) Si determini l'orbita di $(1, 2)$.
(5) Si provi che Z è T1.
(6) Se determini un insieme di rappresentanti $A' \subseteq X$.
(7) Si costruisca una funzione continua e suriettiva $Z \to \mathbb{R}$.
(8) Si provi che Z non è compatto.
(9) Si determini esplicitamente un ricoprimento aperto di Z che non ammette sottoricoprimenti finiti.
(10) Se $K' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 1 \leq y \leq 2, xy \leq 1\}$, si determini la saturazione $\pi^{-1}(\pi(K'))$.
(11) Per ogni $\varepsilon > 0$ si provi che $p^{-1}(p(B((1, 0), \varepsilon))) \cap p^{-1}(p(B((0, 1), \varepsilon))) \neq \emptyset$.
(12) Si provi che Z non è T2.
(13) Sia Y lo spazio topologico considerato nell'esercizio precedente. Si costruisca una funzione continua $Z \to Y$ tale che ogni fibra è omeomorfa a S^1.

11.31.** Si legga attentamente il Teorema 5.14 del libro di Manetti che dà un criterio necessario e sufficiente per avere che un quoziente di uno spazio compatto e T2 sia T2. Sia $\pi\colon X \to Y$ una identificazione tra spazi topologici e sia $K \subseteq X$ un sottoinsieme, munito della topologia di sottospazio di X.

(1) Se X è T2, K è compatto, $\pi(K) = Y$ e $\pi|_K\colon K \to Y$ è chiusa, allora si provi che Y è T2.
(2) Se X è T2, K è compatto, $\pi(K) = Y$ e π è chiusa, allora si provi che Y è T2.

[Suggerimento: in entrambi i casi si provi che $\pi|_K$ è un'identificazione.]

12. Cenni di geometria proiettiva

12.1.* (Spazio proiettivo) In questo esercizio non c'è nessuna menzione alla topologia; cioè consideriamo solo insiemi. Si fissi un campo $\mathbb{K}$ e un intero $n \geq 0$. Sull'insieme $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ si considera la relazione $\sim$ definita cosí: per ogni $x, y \in \mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, $x \sim y$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ tale che $y = \lambda x$.

(1) Si provi che $\sim$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$.

L'insieme quoziente $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ si chiama *spazio proiettivo standard n-dimensionale sul campo* $\mathbb{K}$ e si denota con $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Si denoti con $[x] = [x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ la classe di equivalenza del vettore $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Per ogni $i = 0, \ldots, n$, si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

$$U_i := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i \neq 0\},$$
$$H_i := \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid x_i = 0\}.$$

Si osservi che $U_i = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \smallsetminus H_i$. U_i si chiama *i-esima carta affine standard* e H_i si chiama *i-esimo iperpiano standard.*

(2) Per ogni $i = 0, \ldots, n$, si consideri la funzione $j_i \colon \mathbb{K}^n \to U_i$ definita da

$$j_i(y_1, \ldots, y_n) = [y_1 : \cdots : y_i : 1 : y_{i+1} : \cdots : y_n].$$

Si provi che j_i è bigettiva e la sua inversa $j_i^{-1} \colon U_i \to \mathbb{K}^n$ è data da

$$j_i^{-1}([x_0 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

(Non si dimentichi di mostrare che quella data è una buona definizione per j_i^{-1}.)

(3) Per ogni $i = 0, \ldots, n$, si faccia vedere che la funzione $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \to H_i \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ data da

$$[x_0 : \cdots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \cdots : x_{i-1} : 0 : x_i : \cdots : x_{n-1}]$$

è una bigezione.

(4) Se $\mathbb{K}$ è il campo finito con q elementi, qual è la cardinalità di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$?

(5) Si osservi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$.

(6) Si consideri ora il caso $n = 1$. Si osservi che $H_0 = \{[0 : 1]\}$ e tramite j_0 si costruisca una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un elemento che non sta in $\mathbb{K}$.

(7) Si consideri ora il caso $n = 2$. Si consideri il sottoinsieme $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si determini un'equazione che definisce i seguenti tre sottoinsiemi di $\mathbb{K}^2$: $j_i^{-1}(U_i \cap C)$ per $i = 0, 1, 2$. Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si faccia un disegno di questi tre sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$.

(8) Si ripeta il punto precedente per $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid x_0 x_2 - x_1^2 = 0\}$ e per $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \mid (x_0 x_2 - x_1^2)(x_2 - x_0) = 0\}$.

(9) Si consideri ora un'applicazione lineare iniettiva $f \colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{m+1}$. Si provi che la funzione $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ data da $[x] \mapsto [f(x)]$ è ben definita e iniettiva; si chiama *trasformazione proiettiva* associata a f e si denota con $[f]$.

(10) Si fissi adesso una matrice invertibile $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e un vettore $b \in \mathbb{K}^n$. Si consideri l'applicazione lineare $f \colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}$$

e la corrispondente trasformazione proiettiva $[f]$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ in sé. Si provi che $[f](U_0) \subseteq U_0$, $[f](H_0) \subseteq H_0$ e si determini esplicitamente l'applicazione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ data da $j_0^{-1} \circ [f]|_{U_0} \circ j_0$.

Ora vogliamo considerare la topologia euclidea sullo spazio proiettivo reale.

12.2.** (Spazio proiettivo reale) Si considerino i seguenti tre spazi topologici:

- il quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := (\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\sim$ di $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ con topologia euclidea, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ definita cosí: per ogni $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$, $x \sim y$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ tale che $y = \lambda x$;
- il quoziente $S^n/\sim_a$, dove $\sim_a$ è la relazione di antipodalità su S^n, cioè per ogni $x, y \in S^n$ $x \sim_a y$ se e solo se $x = y$ o $x = -y$;
- il quoziente $D^n/\approx$, dove $\approx$ è la relazione di antipodalità sul bordo, cioè per ogni $x, y \in D^n$ $x \approx y$ se e solo se $x = y$ o ($\|x\| = \|y\| = 1$ e $x = -y$).

Vogliamo provare che sono tutti omeomorfi. Usiamo le seguenti notazioni per le proiezioni al quoziente:

$$\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \qquad p \colon S^n \to S^n/\sim_a \qquad \text{e} \qquad q \colon D^n \to D^n/\approx .$$

(1) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso per archi.

(2) Si consideri l'inclusione $i \colon S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$. Si osservi che $\sim_a$ coincide con la relazione d'equivalenza ottenuta restringendo $\sim$ a S^n.

(3) Si provi che esiste un'unica funzione $\bar{i} \colon S^n/\sim_a \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che $\pi \circ i = \bar{i} \circ p$.

(4) Si provi che S^n interseca ciascuna classe di $\sim$-equivalenza. È vero che S^n è un dominio fondamentale per $\sim$?

(5) Si provi che $\bar{i}$ è bigettiva e continua.

(6) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto.

(7) Si consideri la funzione $r \colon \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to S^n$ data $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Si provi che $r \circ i = \mathrm{id}_{S^n}$ e che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ vale $x \sim y \Rightarrow r(x) \sim r(y)$.

(8) Si provi che $\bar{i}$ è un omeomorfismo.

(9) Si osservi che $\sim_a$ è la relazione di equivalenza indotta da un'azione del gruppo ciclico di ordine 2 su S^n.
(10) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T2.

Si considerino l'emisfero boreale di S^n

$$S^n_{>0} := S^n \cap \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}$$

e la sua chiusura

$$S^n_{\geq 0} := S^n \cap \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \geq 0\}.$$

(11) Si provi che la relazione di equivalenza ottenuta restringendo $\sim$ a $S^n_{>0}$ è banale, cioè per ogni $x, y \in S^n_{>0}$ vale che $x \sim y$ implica $x = y$.
(12) Si provi che $S^n_{\geq 0} \setminus S^n_{>0}$ è omeomorfo a S^{n-1}.
(13) Com'è fatta la relazione di equivalenza ottenuta restringendo $\sim$ a $S^n_{\geq 0} \setminus S^n_{>0}$?

Si consideri la funzione $\psi \colon D^n \to S^n$ data da

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \left(x_1, \ldots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in D^n$.

(14) Si provi che $\psi(D^n) = S^n_{\geq 0}$, che ψ è un'immersione topologica chiusa e che induce un'omeomorfismo tra D^n e $S^n_{\geq 0}$. (Geometricamente ψ gonfia D^n dal basso e lo spinge verso l'alto sulla calotta $S^n_{\geq 0}$.)
(15) Si provi che la relazione di equivalenza su D^n indotta da $\sim_a$ tramite ψ coincide con $\approx$. In altre parole, si provi che per ogni $x, y \in D^n$ vale $x \approx y$ se e solo se $\psi(x) \sim_a \psi(y)$.
(16) Si provi che esiste un'unica funzione $\overline{\psi} \colon D^n/{\approx} \to S^n/{\sim_a}$ tale che $p \circ \psi = \overline{\psi} \circ q$.
(17) Si provi che $\overline{\psi}$ è un omeomorfismo.

In conclusione si è costruito un diagramma commutativo di funzioni continue

$$\begin{tikzcd}
D^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & S^n \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, "\pi"] \\
D^n/{\approx} \arrow[r, "\overline{\psi}"] & S^n/{\sim_a} \arrow[r, "\overline{i}"] & \mathbb{P}^n(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

dove le frecce verticali sono identificazioni, le frecce orizzontali nella riga superiore sono immersioni chiuse, le frecce orizzontali nella riga inferiore sono omeomorfismi.

12.3.** (Carte affini dello spazio proiettivo reale) Usiamo le notazioni dei due esercizi precedenti.

(1) Si provi che $\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è aperta.
(2) Si provi che $\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non è chiusa.
(3) Si provi che $p \colon S^n \to S^n/{\sim_a}$ è aperta e chiusa.
(4) Si provi l'uguaglianza $\pi^{-1}(U_i) = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \neq 0\}$.
(5) Si provi che U_i è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
(6) Si consideri la funzione continua $\alpha_i \colon \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_i) \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ data da

$$\alpha_i(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_i, 1, y_{i+1}, \ldots, y_n).$$

Si provi che $j_i \colon \mathbb{R}^n \to U_i$ è continua.
(7) Si provi che $\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} \colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i$ è un'identificazione — si veda 11.16.
(8) Si consideri la funzione continua $\beta_i \colon \pi^{-1}(U_i) \to \mathbb{R}^n$ data da

$$\beta_i(x_0, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Si provi che $j_i^{-1} \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ è continua. Si deduca che j_i e j_i^{-1} sono omeomorfismi tra U_i e $\mathbb{R}^n$.
(9) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà topologica di dimensione n.
(10) Si consideri il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "j_n"] & U_n \arrow[d, hook] & \overline{i}^{-1}(U_n) \arrow[l] \arrow[d, hook] & \overline{\psi}^{-1}(\overline{i}^{-1}(U_n)) \arrow[l] \arrow[d, hook] \\
& \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & S^n/{\sim_a} \arrow[l, "\overline{i}"'] & D^n/{\approx} \arrow[l, "\overline{\psi}"']
\end{tikzcd}$$

dove tutte le frecce orizzontali sono omeomorfismi e le frecce verticali sono immersioni aperte. Chi sono $\overline{i}^{-1}(U_n)$ e $p^{-1}(\overline{i}^{-1}(U_n))$? Chi sono $\overline{i}^{-1}(H_n)$ e $p^{-1}(\overline{i}^{-1}(H_n))$?
(11) Si consideri la palla unitaria aperta $B^n \subset D^n$. Si provi che la restrizione $q|_{B^n} \colon B^n \to q(B^n)$ è un omeomorfismo.

(12) Si provi l'uguaglianza $q(B^n) = \overline{\psi}^{-1}(\overline{i}^{-1}(U_n))$. Si determini esplicitamente l'omeomorfismo

$$j_n^{-1} \circ \overline{i} \circ \overline{\psi} \circ q|_{B^n} \colon B^n \to \mathbb{R}^n$$

e il suo inverso.

(13) Ora lavoriamo con $n = 2$. Consideriamo le seguenti due rette parallele in $\mathbb{R}^2$: $\ell = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$ e $\ell' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Sia L (risp. L') la chiusura di $j_2(\ell)$ (risp. $j_2(\ell')$) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Si determino L e L', dandone delle equazioni. Si provi che $L \cap L'$ è non vuoto. Si determini esplicitamente un punto di $L \cap L'$. Si determinino le immagini di ℓ e ℓ' tramite l'omeomorfismo tra $\mathbb{R}^2$ e B^2 discusso al punto precedente.

12.4.** Si dica se la successione $\{[1 : n : 1 + 2n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è convergente. Se sí, si trovi il limite. Se no, si trovino i punti limite.

12.5.** Si ripeta l'esercizio precedente per le successioni $\{[n : n-1 : n^2]\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{[n+2 : n : (-1)^n n + 3]\}_{n\in\mathbb{N}}$.

12.6.*** Si provi che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è omeomorfo a S^1. [Primo modo: si usi 11.7. Secondo modo: si faccia vedere che sono entrambi la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}$. Terzo modo: si scriva un omeomorfismo esplicito.]

12.7.*** Si provi che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo al quoziente $([0, 1] \times [0, 1])/\sim$, dove $\sim$ è la relazione di equivalenza su $[0, 1] \times [0, 1]$ generata da $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ e $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ al variare di $x, y \in [0, 1]$.

12.8.*** Si determini una relazione di equivalenza $\simeq$ su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ tale che lo spazio topologico quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})/\simeq$ è omeomorfo a S^n.

12.9.** (Spazio proiettivo complesso) Si provi che i seguenti due spazi topologici sono omeomorfi:

- il quoziente $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, dove su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ consideriamo la topologia euclidea e $\sim$ è la relazione di equivalenza su $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ definita cosí: per ogni $x, y \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $y = \lambda x$;
- il quoziente S^{2n+1}/S^1 cosí definito: S^{2n+1} è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^{2n+2} = \mathbb{C}^{n+1}$, S^1 è la sfera unitaria in $\mathbb{C}$, il gruppo moltiplicativo S^1 agisce su S^{2n+1} tramite moltiplicazione, cioè $\lambda \cdot z = \lambda z$ per ogni $\lambda \in S^1$ e $z \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è compatto, connesso per archi e T2. Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà topologica di dimensione $2n$.

12.10.** Si provi che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è omeomorfo a S^2. [Suggerimento: mostrare che sono entrambi la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, oppure considerare la funzione $S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ data da $(x, y, u) \mapsto [1-u : x+iy] = [x-iy : 1+u]$.]

12.11. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e sia $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ dotato della topologia quoziente della topologia euclidea di $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si fissi un intero positivo d.

(1) Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ un polinomio omogeneo di grado d nelle variabili $x_0, \dots, x_n$. Si provi che se $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ e $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ sono tali che $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n)$ allora vale che $F(a_0, \dots, a_n) = 0$ se e solo se $F(b_0, \dots, b_n) = 0$. Si ponga

$$\mathrm{V}(F) := \{\, [a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid F(a_0, \dots, a_n) = 0 \,\},$$

che, nel caso in cui $F \neq 0$, si chiama *ipersuperficie proiettiva* definita da F; nel caso in cui $n = 2$ si chiama *curva algebrica piana proiettiva*. Si provi che $\mathrm{V}(F)$ è chiuso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, compatto e T2.

(2) Siano $F_0, \dots, F_m \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ dei polinomi omogenei di grado d nelle variabili $x_0, \dots, x_n$. Si supponga $\cap_{i=1}^m \mathrm{V}(F_i) = \emptyset$. Allora si provi che l'applicazione

$$\varphi \colon \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{K}), \quad [a_0 : \cdots : a_n] \mapsto [F_0(a_0, \dots, a_n), \dots, F_m(a_0, \dots, a_n)]$$

è ben definita e continua.

(3) Si studi l'iniettività e l'immagine della funzione $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ costruita partendo dai polinomi x_0^2, x_0x_1, x_1^2.

(4) Si provi che ogni automorfismo lineare $f \colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ induce un omeomorfismo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ponendo $[x] \mapsto [f(x)]$. Tale omeomorfismo si chiama *proiettività*.

12.12.*** (Coniche proiettive reali) Sia $F \in \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]_2$ un polinomio omogeneo di grado 2 diverso da zero, cioè una forma quadratica reale non nulla in 3 variabili. Sia $\mathrm{V}(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Usando la classificazione delle forme quadratiche reali (ovvero delle forme bilineari simmetriche reali), si provi che esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che trasforma $\mathrm{V}(F)$ in una e una sola delle seguenti:

- (conica non-degenere reale) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0\}$ che è omeomorfa a S^1;
- (conica non-degenere immaginaria) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ che è vuota;
- (coppia di rette reali) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0^2 - x_1^2 = 0\}$ che è omeomorfa al bouquet di due S^1;
- (coppia di rette immaginarie) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0^2 + x_1^2 = 0\}$ che è un punto;
- (retta doppia) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_0^2 = 0\}$ che è omeomorfa a S^1.

12.13.*** (Coniche proiettive complesse) Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2$ un polinomio omogeneo di grado 2 diverso da zero, cioè una forma quadratica complessa non nulla in 3 variabili. Sia $\mathrm{V}(F) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si provi che esiste una proiettività di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che trasforma $\mathrm{V}(F)$ in una e una sola delle seguenti:

- (conica non-degenere) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ che è omeomorfa a S^2;

- (coppia di rette) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0^2 + x_1^2 = 0\}$ che è omeomorfa al bouquet di due S^2;
- (retta doppia) $C = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0^2 = 0\}$ che è omeomorfa a S^2.

12.14.**** (Grassmanniane) Si fissino due interi k e n tali che $1 \leq k \leq n$. Sia $M_{n,k}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici con entrate reali, con n righe e k colonne. Su $M_{n,k}(\mathbb{R})$ si consideri la topologia corrispondente alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^{nk}$ attraverso un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineare tra $M_{n,k}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^{nk}$. Sia $W \subseteq M_{n,k}(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici di rango k. Sia $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottospazi vettoriali k-dimensionali di $\mathbb{R}^n$.

(1) Si usi la notazione $[n] := \{1, \ldots, n\}$. Per ogni sottoinsieme $I \subseteq [n]$ di cardinalità $|I| = k$, si consideri il sottoinsieme $W_I \subseteq M_{n,k}(\mathbb{R})$ costituito dalle matrici $n \times k$ tali per cui è invertibile il minore di taglia k individuato dalle righe con indice in I. Si provi che W_I è un aperto di $M_{n,k}(\mathbb{R})$.

(2) Si provi l'uguaglianza
$$W = \bigcup_{I \subseteq [n] \text{ t.c. } |I|=k} W_I.$$

(3) Si provi che W è un aperto di $M_{n,k}(\mathbb{R})$.

(4) Si consideri l'applicazione
$$\pi \colon W \longrightarrow \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$$
che associa alla matrice A il sottospazio $\mathrm{Im}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ generato dalle colonne di A. Si osservi che π è suriettiva e si doti $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ della topologia quoziente della topologia euclidea di W tramite π.

(5) Si osservi che $\mathrm{Gr}(n, \mathbb{R}^n)$ è un punto e che $\mathrm{Gr}(1, \mathbb{R}^n)$ coincide, anche topologicamente, con lo spazio proiettivo reale $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.

(6) Si provi che $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ è compatto.

(7) Se A e A' sono due matrici in W, cioè sono due matrici reali $n \times k$ di rango k, allora si provi che $\pi(A) = \pi(A')$ se e solo se esiste una matrice invertibile $C \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ tale che $A' = AC$.

(8) Si provi che π è aperta.

(9) Per ogni sottoinsieme $I \subseteq [n]$ di cardinalità $|I| = k$, si provi che W_I è un aperto saturo rispetto a π. Si ponga $U_I := \pi(W_I)$; perciò U_I è un aperto di $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$.

(10) Si fissi ora il sottoinsieme $I_0 = \{1, \ldots, k\} \subseteq [n]$. Si consideri lo spazio $M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ delle matrici reali $(n-k) \times k$ dotato della topologia euclidea. Si consideri l'applicazione
$$\alpha \colon M_{n-k,k}(\mathbb{R}) \longrightarrow W_{I_0}$$
definita cosí: per ogni matrice $B \in M_{n-k,k}(\mathbb{R})$, $\alpha(B) \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ è la matrice ottenuta prendendo la matrice identità $k \times k$ e mettendoci sotto la matrice B, cioè
$$\alpha(B) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k \\ B \end{pmatrix}.$$
   (a) Si provi che $\alpha \colon M_{n-k,k}(\mathbb{R}) \to W_{I_0}$ è continua.
   (b) Componendo α con π si ottiene un'applicazione continua $j \colon M_{n-k,k}(\mathbb{R}) \to U_{I_0}$.
   (c) Si consideri la funzione $\beta \colon W_{I_0} \to M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ cosí definita: per ogni $A \in U_{I_0}$, sia $A^{\text{sopra}} \in M_{k,k}(\mathbb{R})$ la sottomatrice di A costituita dalle prime k righe e sia $A^{\text{sotto}} \in M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ la sottomatrice di A costituita dalle ultime $n-k$ righe, allora si ponga $\beta(A) = A^{\text{sotto}} \cdot (A^{\text{sopra}})^{-1}$. Si provi che $\beta \colon W_{I_0} \to M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ è ben definita continua.
   (d) Si provi che β passa al quoziente e induce un'applicazione continua $U_{I_0} \to M_{n-k,k}(\mathbb{R})$.
   (e) Si provi che $j \colon M_{n-k,k}(\mathbb{R}) \to U_{I_0}$ è un omeomorfismo.

(11) Si provi che, per ogni sottoinsieme $I \subseteq [n]$ di cardinalità $|I| = k$, U_I è omeomorfo a $\mathbb{R}^{k(n-k)}$.

(12) Sia $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un automorfismo lineare. Si provi che
$$\overline{f} \colon \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$$
definita da $V \mapsto f(V)$, per ogni sottospazio vettoriale k-dimensionale $V \subseteq \mathbb{R}^n$, è un omeomorfismo.

(13) Si provi che $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ è T2. [Suggerimento: siano V e V' due sottospazi vettoriali distinti di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k; se esiste $I \subseteq [n]$ con $|I| = k$ e $V, V' \in U_I$ allora è possibile trovare due intorni aperti di V e V' in U_I che siano disgiunti. Si faccia vedere che ci si può ricondurre a questa situazione attraverso un automorfismo lineare di $\mathbb{R}^n$.] [Un altro modo è suggerito in Esercizio 5.22.4 del libro di Manetti.] [Un ulteriore modo è utilizzare che $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ è omeomorfo a un sottoinsieme di uno spazio proiettivo reale, come si vede in (15).]

In conclusione, si è dimostrato che $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$ è una varietà topologica compatta di dimensione $k(n-k)$.

(14) Per ogni $V \in \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$, cioè $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale di dimensione k, si indichi con $V^\perp$ l'ortogonale a V rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Si consideri la funzione $D \colon \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}(n-k, \mathbb{R}^n)$ data da $V \mapsto V^\perp$.
   (a) Se $B \in M_{n-k,k}(\mathbb{R})$ e
$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k \\ B \end{pmatrix},$$
   allora si provi che $(\mathrm{Im}(A))^\perp$ coincide con l'immagine della matrice
$$\begin{pmatrix} {}^t B \\ \hline -\mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}.$$

(b) Se $I_0 = \{1, \dots, k\} \subseteq [n]$, allora si provi che $D|_{U_{I_0}} : U_{I_0} \to \mathrm{Gr}(n-k, \mathbb{R}^n)$ è continua. [Suggerimento: si usi il punto precedente.]
(c) Si provi che $D\colon \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}(n-k, \mathbb{R}^n)$ è continua.
(d) Si provi che $D\colon \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}(n-k, \mathbb{R}^n)$ è un omeomorfismo.

(15) Si consideri il numero $N = \binom{n}{k} - 1$. Si fissi un ordine totale sull'insieme dei sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ di cardinalità k, in altre parole si fissi una bigezione tra $\{I \subseteq [n] \mid |I| = k\}$ e $\{0, \dots, N\}$. Inoltre, per ogni $I \subseteq [n]$ con $|I| = k$ e per ogni $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ si indichi con $p_I(A) \in \mathbb{R}$ il determinante della sottomatrice quadrata $k \times k$ di A ottenuta selezionando le righe con gli indici in I. Si provi che l'assegnamento
$$\pi(A) \mapsto [p_I(A)]_{I \subseteq [n] \text{ t.c. } |I|=k} \in \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$$
definisce una immersione chiusa $p\colon \mathrm{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{P}^N(\mathbb{R})$, detta *immersione di Plücker.*

(16) Si provi che se $k \in \{1, n-1, n\}$ allora l'immersione di Plücker p è un omeomorfismo.

(17) Si provi che l'immersione di Plücker $p\colon \mathrm{Gr}(2, \mathbb{R}^4) \to \mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ non è un omeomorfismo. [Suggerimento: l'immagine è contenuta nel sottoinsieme di $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ definito dall'equazione $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$.]

12.15.**** Si ripeta l'esercizio precedente sostituendo il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ con il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

12.16.*** Sia $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una conica non-degenere non vuota e sia $r \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ una retta proiettiva. Si provi che C e r sono omeomorfe. Si provi che non esiste alcun omeomorfismo $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(C) = r$.

13. Complementi di topologia generale

Varietà topologiche. Una *varietà topologica* di dimensione n è uno spazio topologico X che soddisfa le seguenti 3 proprietà:

- X è di Hausdorff,
- per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x in X tale che U è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$,
- ogni componente connessa di X è a base numerabile.

13.1.** Sia X uno spazio topologico di Hausdorff tale che ogni ogni componente connessa è a base numerabile. Allora si provi che X è una varietà topologica di dimensione n se e solo se esiste un ricoprimento aperto di X costituito da aperti omeomorfi a $\mathbb{R}^n$.

13.2.** Si faccia vedere che la richiesta che una varietà topologica sia di Hausdorff non è superflua. Infatti, si costruisca uno spazio topologico X che non è T2 e che soddisfa la seguente proprietà: ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}$.

13.3.* Se X è una varietà topologica di dimensione m e Y è una varietà topologica di dimensione n, allora si provi che il prodotto $X \times Y$ è una varietà topologica di dimensione $m + n$.

13.4.* Si provi che S^n è una varietà topologica di dimensione n.

13.5.*** Si dica se $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ è una varietà topologica di dimensione n, per qualche n.

Topologia di Zariski

13.6.*** (Topologia di Zariski su $\mathbb{K}^n$) Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sia $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi con coefficienti in $\mathbb{K}$ nelle variabili $x_1, \dots, x_n$. Per ogni sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si definisca
$$\mathrm{V}(E) := \{a \in \mathbb{K}^n \mid \forall f \in E, f(a) = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n;$$
i sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$ di questo tipo si chiamano *chiusi algebrici* di $\mathbb{K}^n$. Per brevità se $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si pone $\mathrm{V}(f_1, \dots, f_r) := \mathrm{V}(\{f_1, \dots, f_r\})$.

(1) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si disegnino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$: $\mathrm{V}(x_1^2 + x_2^2 - 1)$, $\mathrm{V}(x_1^2 + x_2^2 + 1)$, $\mathrm{V}(x_1 - 5, x_2 - 3)$, $\mathrm{V}(x_1 + x_2 - 1, x_2^3)$.

(2) Si provino le seguenti affermazioni:
(a) se $E \subseteq E' \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora $\mathrm{V}(E) \supseteq \mathrm{V}(E')$,
(b) se $E \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e I è l'ideale dell'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ generato da E allora $\mathrm{V}(E) = \mathrm{V}(I)$,
(c) se I e J sono ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora $\mathrm{V}(I \cap J) = \mathrm{V}(I) \cup \mathrm{V}(J)$,
(d) se $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ allora vale
$$\mathrm{V}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{V}(E_\lambda),$$
(e) $\mathrm{V}(\emptyset) = \mathrm{V}(0) = \mathbb{K}^n$,
(f) $\mathrm{V}(1) = \mathrm{V}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$.

(3) Si provi che
$$\tau_{\mathbb{K}^n, \mathrm{Zar}} := \{\mathbb{K}^n \smallsetminus \mathrm{V}(E) \mid E \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\}$$
è una topologia su $\mathbb{K}^n$. Si chiama *topologia di Zariski.*

(4) Si faccia vedere che i punti sono chiusi algebrici.

(5) Si provi che $(\mathbb{K}^n, \tau_{\mathbb{K}^n,\mathrm{Zar}})$ è uno spazio topologico T1.
(6) Si provi che se $\mathbb{K}$ è finito allora la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^n$ coincide con la topologia discreta.
(7) Si provi che se $\mathbb{K}$ è infinito allora la topologia di Zariski su $\mathbb{K}$ coincide con la topologia cofinita.
(8) Si provi che se $\mathbb{K}$ è infinito e $n \geq 2$ allora la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^n$ è strettamente piú fine della topologia cofinita.
(9) Si provi che se $\mathbb{K}$ è infinito allora la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^2$ è strettamente piú fine del prodotto della topologia di Zariski su $\mathbb{K}$ con se stessa, cioè

$$\tau_{\mathbb{K}^2,\mathrm{Zar}} \supsetneqq \tau_{\mathbb{K},\mathrm{Zar}} \times \tau_{\mathbb{K},\mathrm{Zar}}.$$

(10) Se $\mathbb{K}$ è infinito e $E \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ è tale che $\mathrm{V}(E) = \mathbb{K}^n$ allora si provi $E \subseteq \{0\}$.
(11) Se $\mathbb{K}$ è finito allora si trovi un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ non nullo tale che $\mathrm{V}(f) = \mathbb{K}^n$.
(12) Se $\mathbb{K}$ è infinito allora si provi che l'intersezione di due qualsiasi aperti non vuoti di $(\mathbb{K}^n, \tau_{\mathbb{K}^n,\mathrm{Zar}})$ è non vuota.
(13) Si provi che se $\mathbb{K}$ è infinito allora $(\mathbb{K}^n, \tau_{\mathbb{K}^n,\mathrm{Zar}})$ non è T2.
(14) Si dia per buono il seguente fatto (che segue dalla noetherianità dell'anello $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$): se $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di ideali di $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$, allora esiste un sottoinsieme finito $\Lambda' \subseteq \Lambda$ tale che $\sum_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda$ coincide con l'ideale generato da $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Si provi che $(\mathbb{K}^n, \tau_{\mathbb{K}^n,\mathrm{Zar}})$ è compatto.
(15) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora si provi che la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^n$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$, cioè $\tau_{\mathbb{R}^n,\mathrm{Zar}} \subsetneqq \tau_{\mathbb{R}^n,\mathrm{eucl}}$.
(16) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora si provi che la topologia di Zariski su $\mathbb{C}^n$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{C}^n$, cioè $\tau_{\mathbb{C}^n,\mathrm{Zar}} \subsetneqq \tau_{\mathbb{C}^n,\mathrm{eucl}}$.
(17) Si provi il seguente principio di identità dei polinomi: siano $S_1,\ldots,S_n$ dei sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{K}$, se $f \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ si annulla su $S_1 \times \cdots \times S_n$ allora f è il polinomio nullo. [Per $n = 1$ è una cosa facile perché il numero di zeri di un polinomio non nullo in 1 variabile è minore o uguale al grado. Per $n \geq 2$ si lavori per induzione scrivendo f come $\sum_i f_i(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^i$.]

(Una domanda cruciale è la seguente. Siano $E, E' \subseteq \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ due sottoinsiemi; sotto quali ipotesi vale l'uguaglianza $\mathrm{V}(E) = \mathrm{V}(E')$? Nel caso in cui $\mathbb{K}$ è un campo algebricamente chiuso esiste una risposta completamente esauriente: il Nullstellensatz di Hilbert. Qui inizia la geometria algebrica...)

13.7.*** Si considerino le funzioni

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto 0$$
$$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x$$
$$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto x^3 + 7x^2 + x - 19$$
$$f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \mathrm{e}^x$$
$$f_5 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto \sin(x).$$

Per ciascuna di esse dire se è continua in ciascuna delle seguenti quattro possibilità:

$$(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{eucl}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{eucl}})$$
$$(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{eucl}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{Zar}})$$
$$(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{Zar}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{eucl}})$$
$$(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{Zar}}) \to (\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R},\mathrm{Zar}}).$$

13.8.**** (Topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$) Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sia $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ l'anello dei polinomi nelle indeterminate $x_0,\ldots,x_n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Un polinomio F si dice *omogeneo* se esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che tutti i monomi che compaiono in F hanno grado d; in tal caso si dice *omogeneo di grado d*. Si noti che il polinomio nullo è omogeneo di qualsiasi grado. Si indica con $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]_d$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ costituito dai polinomi omogenei di grado d.

Un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ si dice *omogeneo* se soddisfa una delle seguenti due condizioni equivalenti:
(a) esiste un insieme di generatori di I costituito da polinomi omogenei,
(b) per ogni $f \in I$, tutte le componenti omogenee di f stanno in I.

Si provi che queste due condizioni sono equivalenti.

Sia $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ lo spazio proiettivo standard di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$, definito in 12.1, e sia $\pi \colon \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ la proiezione al quoziente data da $a \mapsto [a]$. Se $I \subseteq \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ è un ideale omogeneo, si definisce

$$\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I) := \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid \forall f \in I \text{ omogeneo, } f(a_0,\ldots,a_n) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K});$$

i sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ di questo tipo si chiamano *chiusi algebrici (proiettivi)* di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Per brevità se $f_1,\ldots,f_r \in \mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ sono polinomi omoegeni allora si pone $\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(f_1,\ldots,f_r) := \mathrm{V}_{\mathbb{P}}((f_1,\ldots,f_r))$.

(1) Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si disegnino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ usando il modello del disco con l'antipodalità sul bordo: $\mathrm{V}(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2)$, $\mathrm{V}(x_1^2 + x_2^2 + x_0^2)$, $\mathrm{V}(x_1 - 5x_0, x_2 - 3x_0)$, $\mathrm{V}(x_1 + x_2 - x_0, x_2^3)$.
(2) Si provino le seguenti affermazioni:
   (a) se $I \subseteq J \subseteq \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ sono ideali omogenei allora $\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I) \supseteq \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(J)$,
   (b) se I e J sono ideali omogenei di $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ allora $\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I \cap J) = \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I) \cup \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(J)$,

(c) se $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ è una famiglia di ideali omogenei di $\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ allora vale
$$\mathrm{V}_{\mathbb{P}}\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I_\lambda),$$
(d) $\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(0) = \mathbb{K}^n$,
(e) $\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(1) = \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]) = \emptyset$.

(3) Si provi che
$$\tau_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K}),\mathrm{Zar}} := \{\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \smallsetminus \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I) \mid I \subseteq \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n] \text{ ideale omogeneo}\}$$
è una topologia su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$. Si chiama *topologia di Zariski* su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
(4) Si faccia vedere che i punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sono chiusi algebrici.
(5) Si provi che $(\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \tau_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K}),\mathrm{Zar}})$ è uno spazio topologico T1.
(6) Si provi che se $\mathbb{K}$ è finito allora la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ coincide con la topologia discreta.
(7) Si provi che se $\mathbb{K}$ è infinito allora la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ coincide con la topologia cofinita.
(8) Si provi che se $\mathbb{K}$ è infinito e $n \geq 2$ allora la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ è strettamente piú fine della topologia cofinita.

Il simbolo $\tau_{\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0\},\mathrm{Zar}}$ denoti la topologia di $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ come sottospazio di $(\mathbb{K}^{n+1}, \tau_{\mathbb{K}^{n+1},\mathrm{Zar}})$; chiamamo anche lei topologia di Zariski. Ora vogliamo confrontare la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$.

(9) Per ogni ideale omogeneo $I \subseteq \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ si provi $\pi^{-1}(\mathrm{V}_{\mathbb{P}}(I)) = \mathrm{V}(I) \smallsetminus \{0\}$.
(10) Si provi che la proiezione al quoziente $\pi\colon (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}, \tau_{\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0\},\mathrm{Zar}}) \to (\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \tau_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K}),\mathrm{Zar}})$ è continua.
(11) Sia $C \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ un sottoinsieme. Si consideri
$$J_C = \{f \in \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n] \mid \forall a \in \pi^{-1}(C),\ f(a) = 0\}.$$
(a) Si provi che J_C è un ideale di $\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$.
(b) Se $\mathbb{K}$ è infinito, allora si provi che J_C è un ideale omogeneo di $\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$.
(c) Si provi $\pi^{-1}(C) \subseteq \mathrm{V}(J_C) \smallsetminus \{0\}$.
(d) Se $\pi^{-1}(C)$ è chiuso in $(\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}, \tau_{\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0\},\mathrm{Zar}})$, allora si provi che $\pi^{-1}(C) = \mathrm{V}(J_C) \smallsetminus \{0\}$. (Suggerimento: esiste un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ non necessariamente omogeneo tale che $\pi^{-1}(C) = \mathrm{V}(I) \smallsetminus \{0\}$. Segue $I \subseteq J_C$.)
(e) Se $\mathbb{K}$ è infinito e $\pi^{-1}(C)$ è chiuso in $(\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}, \tau_{\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0\},\mathrm{Zar}})$, allora si provi che $C = \mathrm{V}_{\mathbb{P}}(J_C)$.
(12) Si provi che $\pi\colon (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}, \tau_{\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0\},\mathrm{Zar}}) \to (\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \tau_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K}),\mathrm{Zar}})$ è un'identificazione. (Suggerimento: se $\mathbb{K}$ è finito è facile; se $\mathbb{K}$ è infinito, si usi il punto precedente.)
(13) Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, si provi che la moltiplicazione per λ su $\mathbb{K}^{n+1}$, cioè $\mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^{n+1}$ data da $a \mapsto \lambda a$, è un omeomorfismo rispetto alla topologia di Zariski di $\mathbb{K}^{n+1}$.
(14) Si provi che $\pi\colon (\mathbb{K}^{n+1} \smallsetminus \{0\}, \tau_{\mathbb{K}^{n+1}\smallsetminus\{0\},\mathrm{Zar}}) \to (\mathbb{P}^n(\mathbb{K}), \tau_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K}),\mathrm{Zar}})$ è aperta.
(15) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora si provi che la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
(16) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora si provi che la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è strettamente meno fine della topologia euclidea su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Luoghi euclidei

13.9.* Sia X uno spazio topologico. Si provi che i seguenti sottoinsiemi di X coincidono:
(1) $\{x \in X \mid \{x\} \text{ è un intorno di } x \text{ in } X\}$,
(2) $\{x \in X \mid \{x\} \text{ è un intorno aperto di } x \text{ in } X\}$,
(3) $\{x \in X \mid \{x\} \text{ è aperto in } X\}$.

Denotiamo questo sottoinsieme di X con $\mathrm{EU}_0(X)$.

13.10.* Sia X uno spazio topologico. Si provi che X è discreto se e solo se $\mathrm{EU}_0(X) = X$.

13.11.*** Sia X uno spazio topologico, sia n un intero positivo. Si provi che i seguenti sottoinsiemi di X coincidono:
(1) $\{x \in X \mid \exists U \text{ intorno aperto di } x \text{ in } X \text{ omeomorfo a } \mathbb{R}^n\}$,
(2) $\{x \in X \mid \exists U \text{ intorno aperto di } x \text{ in } X \text{ omeomorfo a un aperto di } \mathbb{R}^n\}$,
(3) $\{x \in X \mid \exists U \text{ intorno di } x \text{ in } X \text{ omeomorfo a } \mathbb{R}^n\}$,
(4) $\{x \in X \mid \exists U \text{ intorno di } x \text{ in } X \text{ omeomorfo a un aperto di } \mathbb{R}^n\}$.

Denotiamo questo sottoinsieme di X con $\mathrm{EU}_n(X)$. Chiaramente, uno spazio topologico di Hausdorff X è una varietà topologica di dimensione n se e solo se ogni componente connessa di X è a base numerabile e $\mathrm{EU}_n(X) = X$.

13.12.*** Si provino le seguenti affermazioni.
(1) Se U è un aperto connesso e non vuoto di $\mathbb{R}$, allora per ogni $x \in U$ $U \smallsetminus \{x\}$ ha due componenti connesse per archi.
(2) Se $n \geq 2$ è un intero e U è un aperto connesso e non vuoto di $\mathbb{R}^n$, allora per ogni $x \in U$ $U \smallsetminus \{x\}$ è connesso per archi.
(3) Un aperto connesso e non vuoto di $\mathbb{R}$ non può essere omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.
(4) Un aperto non vuoto di $\mathbb{R}$ non può essere omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.

[Nel corso di Topologia Algebrica vedrete come dimostrare rigorosamente che un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^m$ non è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$ se $n \neq m$.]

13.13.*** Sia X uno spazio topologico. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se n e m sono due interi non-negativi e $\mathrm{EU}_n(X) \cap \mathrm{EU}_m(X) \neq \emptyset$, allora esiste un aperto connesso non vuoto U di $\mathbb{R}^n$ che è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^m$.
(2) Se $n \geq 1$ è un intero, allora $\mathrm{EU}_0(X) \cap \mathrm{EU}_n(X) = \emptyset$.
(3) Se $n \geq 2$ è un intero, allora $\mathrm{EU}_1(X) \cap \mathrm{EU}_n(X) = \emptyset$.

[Usando la generalizzazione dell'esercizio precedente per ogni n e m si fa vedere che $\mathrm{EU}_n(X)$ e $\mathrm{EU}_m(X)$ sono disgiunti se $n \neq m$.]

13.14.*** Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea. Si provi che $\mathrm{EU}_1(X)$ coincide con la parte interna di X in $\mathbb{R}$. [Nel corso di Topologia Algebrica vedrete come generalizzare questo risultato in $\mathbb{R}^n$, esso si chiama il teorema di invarianza del dominio.]

14. Categorie

14.1.* Mostrare che la categoria degli insiemi puntati soddisfa le proprietà della definizione di categoria.

14.2.* Mostrare che la composizione nella categoria associata ad un poset è ben definita.

14.3.* Se $\mathcal{C}$ è una categoria e $A \xrightarrow{f} B$ è un monomorfismo in $\mathcal{C}$, si mostri allora che f è un epimorfismo da B ad A nella categoria opposta $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

14.4.** Sia (CommRing) la categoria degli anelli commutativi. Sia A un dominio e sia K il campo delle frazioni di A. Si provi che l'inclusione canonica $A \hookrightarrow K$ è un epimorfismo in (CommRing).

14.5.** Mostrare che il coprodotto, se esiste, è unico a meno di isomorfismo canonico. Piú precisamente, sia $\mathcal{C}$ una categoria e siano A e B due oggetti di $\mathcal{C}$ e sia (C, i, j) un coprodotto di A e B (qui C è un oggetto di $\mathcal{C}$ e $A \xrightarrow{i} C$ e $B \xrightarrow{j} C$ sono le due frecce che soddisfano la proprietà universale nella definizione di coprodotto); sia (C', i', j') un altro coprodotto di A e di B; si provi che esiste un unico isomorfismo $C \xrightarrow{\varphi} C'$ tale che $\varphi \circ i = i'$ e $\varphi \circ j = j'$.

14.6.** Siano G e H due gruppi finiti. È vero che il prodotto libero $G * H$ è finito?

14.7.*** Sia (TopT2) la categoria i cui oggetti sono gli spazi topologici T2 e le cui frecce sono le funzioni continue. Si provi che se $f \colon X \to Y$ è una freccia in (TopT2) tale che $f(X)$ è denso in Y, allora f è un epimorfismo in (TopT2).

14.8.** Il funtore dimenticante (Top) $\to$ (Set) è pieno? Fedele?

15. Omotopia

15.1.* Siano X e Y due spazi topologici e sia $\emptyset \subseteq A \subseteq X$ un sottoinsieme. Due funzioni continue $f \colon X \to Y$ e $g \colon X \to Y$ si dicono *omotope relativamente ad* A, e si scrive $f \sim_A g$, se esiste una funzione continua $F \colon X \times [0,1] \to Y$ che soddisfa le seguenti condizioni:

(i) $f = F(\cdot, 0)$, cioè per ogni $x \in X$ vale $f(x) = F(x, 0)$,
(ii) $g = F(\cdot, 1)$, cioè per ogni $x \in X$ vale $g(x) = F(x, 1)$,
(iii) per ogni $a \in A$ e per ogni $s \in [0,1]$ vale $F(a, s) = f(a)$.

(1) Si osservi che se $A = \emptyset$ allora $\sim_A$ è l'usuale relazione di omotopia tra due funzioni continue.
(2) Si provi che la condizione (iii) equivale a richiedere che $F(a, \cdot) \colon [0,1] \to Y$ sia costante per ogni $a \in A$.
(3) Si provi che se $f \sim_A g$ allora $f|_A = g|_A$.
(4) Si provi che $\sim_A$ è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X a Y.

15.2.* (Composizione di omotopie) Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Siano $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ dei sottoinsiemi. Consideriamo delle funzioni continue $f_0 \colon X \to Y$, $f_1 \colon X \to Y$, $g_0 \colon Y \to Z$, $g_1 \colon Y \to Z$. Se $f_0 \sim_A f_1$, $g_0 \sim_B g_1$ e $f_0(A) \subseteq B$, allora si provi che $g_0 \circ f_0 \sim_A g_1 \circ f_1$.

15.3.*** Sia X uno spazio topologico e sia E l'insieme delle equivalenze omotopiche di X in sé.

(1) Si provi che la composizione $\circ$ definisce un'operazione binaria su E. Si dica se $(E, \circ)$ è un gruppo.
(2) Sia $\sim$ la relazione di omotopia tra due funzioni continue; si costruisca sull'insieme quoziente $E/\sim$ una struttura di gruppo.
(3) Si determini esplicitamente il gruppo $E/\sim$ del punto precedente nei seguenti casi:
    (a) X è uno spazio topologico discreto con n punti,
    (b) X è uno spazio topologico non discreto con 2 punti,
    (c) X è uno spazio topologico contraibile.

15.4.** Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Se X è omotopicamente equivalente a Y e Y è omotopicamente equivalente a Z, allora si provi che X è omotopicamente equivalente a Z.

15.5.** Siano X, X', Y, Y' quattro spazi topologici. Siano $A \subseteq X$ e $A' \subseteq X'$ due sottoinsiemi. Consideriamo funzioni continue $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$, $f'\colon X' \to Y'$, $g'\colon X' \to Y'$. Se $f \sim_A g$ e $f' \sim_{A'} g'$, allora si provi che $f \times g \sim_{A \times A'} f' \times g'$.

15.6.** Siano X, X', Y, Y' quattro spazi topologici. Se X è omotopicamente equivalente a Y e X' è omotopicamente equivalente a Y', allora si provi che $X \times X'$ è omotopicamente equivalente a $Y \times Y'$.

15.7.* Se X e Y sono spazi topologici contraibili, si provi che $X \times Y$ è contraibile.

15.8. Siano X e Y due spazi topologici. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ due applicazioni continue. Se Y è grossolano (cioè indiscreto), allora si provi che f e g sono omotope.

15.9.* Si provi che uno spazio topologico grossolano (detto anche indiscreto) è contraibile.

15.10.** Siano X e Y due spazi topologici. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ due applicazioni continue. Se f e g sono omotope, allora si provi che $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ come funzioni dall'insieme $\pi_0(X)$ all'insieme $\pi_0(Y)$.

15.11.** Se X e Y sono due spazi topologici omotopicamente equivalenti, allora si provi che gli insiemi $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$ sono equipotenti.

15.12.** Sia X uno spazio topologico. Si provi che se X è contraibile, allora X è connesso per archi.

15.13.* Si provi che $\{0\}$ è un retratto per deformazione di $[0,1]$.

15.14.* Si provi che $\{0\}$ è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}$.

15.15.* Si provi che $[0,1]$ è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}$.

15.16.* Si provi che $[0,1]$ è un retratto per deformazione di $[0,2]$.

15.17.** Sia X uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottospazio. Sia $i\colon A \hookrightarrow X$ l'inclusione. Si considerino le seguenti affermazioni:

(1) A è un *retratto per deformazione* di X, cioè esiste un'applicazione continua $R\colon X \times [0,1] \to X$ tale che
   (a) $R(\cdot,1) = \mathrm{id}_X$, cioè per ogni $x \in X$ vale $R(x,1) = x$,
   (b) per ogni $x \in X$, $R(x,0) \in A$,
   (c) per ogni $a \in A$ e per ogni $t \in [0,1]$, $R(a,t) = a$;
(2) esiste un'applicazione continua $r\colon X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{id}_A$ e $i \circ r \sim_A \mathrm{id}_X$;
(3) esiste un'applicazione continua $R\colon X \times [0,1] \to X$ tale che
   (a) $R(\cdot,1) = \mathrm{id}_X$, cioè per ogni $x \in X$ vale $R(x,1) = x$,
   (b) per ogni $x \in X$, $R(x,0) \in A$,
   (c) per ogni $a \in A$, $R(a,0) = a$;
(4) esiste un'applicazione continua $r\colon X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{id}_A$ e $i \circ r \sim \mathrm{id}_X$;
(5) esiste un'applicazione continua $r\colon X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{id}_A$;
(6) esiste un'applicazione continua $r\colon X \to A$ tale che per ogni $a \in A$ valga $r(a) = a$;
(7) i è un'equivalenza omotopica.

Si provino le implicazioni (1)⇔(2)⇒(3)⇔(4)⇒(5)⇔(6) e (4)⇒(7). Si costruisca un esempio in cui (5) vale e (1) non vale.

15.18.*** Sia X uno spazio topologico T2 e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme che gode della proprietà (5) di 15.17. Si provi che A è chiuso in X.

15.19.** Sia X uno spazio topologico T2 e sia $A \subseteq X$ un retratto per deformazione di X. Si provi che A è chiuso in X.

15.20.** Sia X uno spazio topologico grossolano (cioè indiscreto). Sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto. Si provi che A è un retratto per deformazione di X.

15.21.** $\{0,1\}$ è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}$?

15.22.** Siano $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $A = \{1\}$. A è un retratto per deformazione di X? Vale l'affermazione (5) di 15.17?

15.23.*** Si costruisca un esempio della seguente situazione: X è uno spazio topologico, $A \subseteq X$ è un sottospazio, l'inclusione $i\colon A \hookrightarrow X$ è un'equivalenza omotopica, A non è un retratto per deformazione di X.

15.24.** Si provi che S^{n-1} è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

15.25.** Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione k. Si provi che $\mathbb{R}^n \setminus W$ è omotopicamente equivalente a S^{n-k-1}.

15.26.** Sia X il cilindro compatto considerato in 11.5. Si provi che X è omotopicamente equivalente a S^1.

15.27.** Sia X il cilindro infinito considerato in 11.18. Si provi che X è omotopicamente equivalente a S^1.

15.28.** Sia X il nastro di Möbius compatto considerato in 11.6. Si provi che X è omotopicamente equivalente a S^1.

15.29.**** Sia $p \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ un punto. Si provi che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \{p\}$ è omeomorfo al nastro di Möbius aperto, che è il quoziente di $[0,1] \times (0,1)$ rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita come in 11.6.

15.30.*** Sia W un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di dimensione k. Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus W$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-k-1}(\mathbb{R})$.

15.31.*** Sia W un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di dimensione k. Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus W$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-k-1}(\mathbb{C})$.

15.32.*** Sia $n \geq 1$ un intero. Siano $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme di cardinalità n. Si provi che $\mathbb{R}^2 \setminus E$ è omotopicamente equivalente a un bouquet di n circonferenze.

15.33.*** Sia $C \subset \mathbb{R}^2$ una conica reale non vuota.

(1) Se C è un'ellisse reale, allora is provi che C è omotopicamente equivalente al complementare di un punto in $\mathbb{R}^2$.
(2) Se C è una parabola o una coppia di rette reali incidenti o una coppia di rette immaginarie incidenti o una retta doppia, allora si provi che C è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2$.
(3) Se C è un'iperbole o una coppia di rette reali parallele, allora si provi che esiste una retta $r \subset \mathbb{R}^2$ tale che C è un retratto per deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus r$.

15.34.*** Sia X uno spazio topologico e siano A e B due sottoinsiemi di X tali che $B \subseteq A \subseteq X$. Se A è un retratto per deformazione di X e B è un retratto per deformazione di A, allora si provi che B è un retratto per deformazione di X.

15.35.*** Sia X uno spazio topologico. Si considerino le seguenti affermazioni:

(i) X è contraibile, cioè X è omotopicamente equivalente al punto,
(ii) l'applicazione identità $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ è omotopa a ogni applicazione costante $X \to X$,
(iii) l'applicazione identità $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ è omotopa a un'applicazione costante $X \to X$,
(iv) esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $\{x_0\}$ è un retratto per deformazione di X.

Si provino le implicazioni (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftarrow$(iv). (Purtroppo esistono degli spazi topologici 'strani' che sono contraibili ma che non si retraggono per deformazione su alcun loro punto — si vedano gli esercizi 6 e 7 del Capitolo 0 del libro "Algebraic topology" di Hatcher.)

Ora in aggiunta si supponga $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (dotato come sempre della topologia di sottospazio) e si considerino le seguenti affermazioni:

(v) X è *stellato*, cioè esiste un punto $x_0 \in X$ tale che per ogni $x \in X$ il segmento di estremi x e x_0 è interamente contenuto in X,
(vi) X è *convesso*, cioè per ogni $x, y \in X$ il segmento di estremi x e y è interamente contenuto in X.

Si provino le implicazioni (iv)$\Leftarrow$(v)$\Leftarrow$(vi). Si faccia vedere, attraverso degli esempi in $\mathbb{R}^2$, che queste due implicazioni sono strette, cioè non sono equivalenze.

15.36.** Sia X uno spazio topologico e sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Se $f \colon X \to Y$ e $g \colon X \to Y$ sono applicazioni continue, allora si provi che f e g sono omotope.

15.37.** Siano X e Y due spazi topologici.

(1) Se $f \colon X \to Y$ è un'applicazione continua e Y è contraibile, allora si provi che f è omotopa a un'applicazione costante.
(2) Se $f \colon X \to Y$ e $g \colon X \to Y$ sono applicazioni continue e Y è contraibile, allora si provi che f e g sono omotope.

15.38.** Sia X uno spazio topologico e siano $f \colon X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $g \colon X \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ due funzioni continue tali che per ogni $x \in X$ si abbia $\|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\|$. Si provi che f e g sono omotope.

15.39.** Sia X uno spazio topologico e siano $f_1 \colon X \to \mathbb{C}$ e $f_2 \colon X \to \mathbb{C}$ due funzioni continue. Si supponga che per ogni $x \in X$ valga $|f_1(x)| > |f_2(x)|$. Allora si provi che le funzioni f_1 e $f_1 + f_2$ sono omotope come funzioni $X \to \mathbb{C}^*$. (Questo è l'inizio della dimostrazione del teorema di Rouché che si studia in Analisi Complessa.)

15.40.* Sia $p \in S^n$. Si dica se $S^n \setminus \{p\}$ è contraibile.

15.41.** Siano $z_0, w_0 \in S^1$. Si consideri $A = (\{z_0\} \times S^1) \cup (S^1 \times \{w_0\}) \subset S^1 \times S^1$. Si dica se $(S^1 \times S^1) \setminus A$ è contraibile.

15.42.* Si costruiscano due spazi topologici compatti e T2 che sono omotopicamente equivalenti ma non omeomorfi.

15.43.** Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio affine di dimensione k. Si provi che $\mathbb{R}^n \setminus W$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1-k}.

15.44.** Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$A = (\{0\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \qquad D = \{(0,0)\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\} \qquad E = \{(1,0)\}$$

$$C = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \qquad F = A \cup \{(t, 1-t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1]\}.$$

(1) A è un retratto per deformazione di B?

(2) C è un retratto per deformazione di B?
(3) D è un retratto per deformazione di A?
(4) D è un retratto per deformazione di B?
(5) D è un retratto per deformazione di C?
(6) E è un retratto per deformazione di A?
(7) E è un retratto per deformazione di B?
(8) D è un retratto per deformazione di F?
(9) A è un retratto per deformazione di F?
(10) F è un retratto per deformazione di B?

15.45.*** Si provi che il complementare di un punto in $S^1 \times S^1$ è omotopicamente equivalente al bouquet di 2 circonferenze $S^1 \vee S^1$.

15.46.** Esistono due varietà topologiche compatte, connesse, di dimensione 2 che non sono omotopicamente equivalenti?

15.47.* S^1 è contraibile?

15.48.* Si consideri la funzione $f\colon [0,1] \to S^1$ data da $f(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$ per ogni $t \in [0,1]$.
(1) La funzione f è omotopa (come funzione da $[0,1]$ a S^1) a una funzione costante?
(2) La funzione f è omotopa relativamente a $\{0\}$ (nel senso di 15.1) a una funzione costante?
(3) La funzione f è omotopa relativamente a $\{0,1\}$ (nel senso di 15.1) a una funzione costante?

16. Gruppo fondamentale

Un *cammino* o *arco* in uno spazio topologico X è una funzione continua $[0,1] \to X$. Due cammini in X si dicono *omotopi come cammini* se sono applicazioni $[0,1] \to X$ omotope relativamente a $\{0,1\}$ (nel senso di 15.1). Quando consideriamo cammini useremo sempre questo significato dell'essere omotopi, salvo avviso contrario. In altre parole, quando diremo 'cammini omotopi' intenderemo 'cammini omotopi come cammini' e non 'cammini omotopi come funzioni'. Per semplicità, indichiamo con $\sim$ l'omotopia di cammini, nonostante per essere coerenti con 15.1 dovremmo scrivere $\sim_{\{0,1\}}$.

16.1.* Si provi che due cammini omotopi hanno lo stesso punto iniziale e lo stesso punto finale.

16.2.* Si provi che la giunzione di due cammini è un cammino.

16.3.* Si faccia un esempio della seguente situazione: X è uno spazio topologico connesso per archi, $x_0 \in X$ è un punto, α, β, γ sono tre cammini in X con inizio e fine in x_0, $(\alpha * \beta) * \gamma$ è diverso da $\alpha * (\beta * \gamma)$.

16.4.* Si faccia un esempio della seguente situazione: X è uno spazio topologico connesso per archi, $x_0 \in X$ è un punto, α, β, γ sono tre cammini in X con inizio e fine in x_0, $(\alpha * \beta) * \gamma$ è uguale a $\alpha * (\beta * \gamma)$.

16.5.** Nello spazio topologico $\mathbb{C}^*$ si considerino i cammini $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \kappa\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ definiti da: per ogni $t \in [0,1]$, $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i}t}$, $\delta(t) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}t}$, $\varepsilon(t) = 2\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$, $\zeta(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t^2}$, $\eta(t) = (1+t)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}t}$, $\theta(t) = 2 - t$, $\kappa(t) = \mathrm{e}^{6\pi \mathrm{i}t}$. Provare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni:
(1) $\alpha * \alpha = \alpha$;
(2) $\alpha * \beta = \beta$;
(3) $\alpha * \beta \sim \beta$;
(4) $\beta * i(\beta) = \alpha$;
(5) $\beta * i(\beta) \sim \alpha$;
(6) $\beta * \beta = \gamma$;
(7) $\beta * \beta \sim \gamma$;
(8) $i(\beta) = \delta$;
(9) $i(\beta) \sim \delta$;
(10) $\beta \sim \varepsilon$;
(11) β e ε sono omotopi come funzioni $[0,1] \to \mathbb{C}^*$;
(12) β e ε sono omotopi come funzioni $[0,1] \to \mathbb{C}^*$ relativamente a $\{0\}$ (secondo la definizione in 15.1);
(13) $\beta \sim \zeta$;
(14) $\beta \sim \eta$;
(15) β e η sono omotopi come funzioni $[0,1] \to \mathbb{C}^*$;
(16) β e η sono omotopi come funzioni $[0,1] \to \mathbb{C}^*$ relativamente a $\{0\}$ (secondo la definizione in 15.1);
(17) $\beta \sim \eta * \theta$;
(18) $\beta \sim i(\theta) * \varepsilon * \theta$;
(19) $\theta * \beta \sim \varepsilon * \theta$;
(20) $\theta * \beta * i(\theta) \sim \varepsilon$;
(21) $\kappa = (\beta * \beta) * \beta$;
(22) $\kappa \sim (\beta * \beta) * \beta$;
(23) $\kappa = \beta * \gamma$;
(24) $\kappa \sim \beta * \gamma$.

16.6.** Siano X e Y due spazi topologici. Siano α e β due cammini omotopi in X. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua. È vero che $f \circ \alpha$ e $f \circ \beta$ sono cammini omotopi in Y?

16.7.** Siano X e Y due spazi topologici. Siano α e β due cammini omotopi in X. Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ due funzioni continue omotope. È vero che $f \circ \alpha$ e $g \circ \beta$ sono cammini omotopi in Y?

16.8.* Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso. Sia $x_0 \in X$. Sia α un cammino chiuso in X con punto base x_0, cioè un cammino in X con punto iniziale x_0 e con punto finale x_0. Si provi che il cammino α è omotopo al cammino costante in x_0.

16.9.** Si ripeta l'esercizio precedente per un sottoinsieme stellato di $\mathbb{R}^n$.

16.10.** Si faccia un esempio della seguente situazione: X è uno spazio topologico, Y è un sottospazio di X, α è un cammino in Y con punto base $x_0 \in Y$, α è omotopo al cammino costante in x_0 se considerato come cammino in X, α non è omotopo al cammino costante in x_0 se considerato come cammino in Y.

16.11.** Sia X uno spazio topologico. Provare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.

(1) Se esiste $x_0 \in X$ tale che $\pi_1(X, x_0)$ è banale, allora X è semplicemente connesso.
(2) Se per ogni $x_0 \in X$ si ha che $\pi_1(X, x_0)$ è banale, allora X è semplicemente connesso.

16.12.** Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra due spazi topologici. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se $x, x' \in X$ sono connettibili per archi in X (cioè stanno nella stessa componente connessa per archi di X), allora $f(x)$ e $f(x')$ sono connettibili per archi in Y.
(2) È ben definita la funzione $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ cosí data: se C è una componente connessa per archi di X, allora $(\pi_0(f))(C)$ è la componente connessa per archi di Y che contiene $f(x)$ dove x è un qualsiasi punto di C.
(3) Se $f_1\colon X \to Y$ è una funzione continua omotopa a f, allora $\pi_0(f) = \pi_0(f_1)$.
(4) Se $g\colon Y \to Z$ è una funzione continua, allora $\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f)$.
(5) Se f è un'equivalenza omotopica, allora $\pi_0(f)$ è una bigezione.
(6) Se $x_0 \in X$, allora $\pi_1(f, x_0)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ data da $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ è un ben definito omomorfismo di gruppi.
(7) Se $x_0, x_1 \in X$ sono connettibili per archi in X, allora i gruppi $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ sono isomorfi.
(8) Se $x_0 \in X$ e $f_1\colon X \to Y$ è una funzione continua omotopa a f, allora esiste un isomorfimo di gruppi $\eta\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f_1(x_0))$ tale che $\pi_1(f_1, x_0) = \eta \circ \pi_1(f, x_0)$.
(9) Se $x_0 \in X$ e $g\colon Y \to Z$ è una funzione continua, allora $\pi_1(g, f(x_0)) \circ \pi_1(f, x_0) = \pi_1(g \circ f \circ x_0)$.
(10) Se $x_0 \in X$ e f è un'equivalenza omotopica, allora $\pi_1(f, x_0)$ è un isomorfismo di gruppi.

16.13.* Sia $f\colon X \to Y$ una funzione costante tra due spazi topologici. Se $x_0 \in X$, allora si provi che $\pi_1(f, x_0)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ è l'omomorfismo nullo, cioè quello che manda ogni elemento di $\pi_1(X, x_0)$ nell'elemento neutro di $\pi_1(Y, f(x_0))$.

16.14.* Se X è uno spazio topologico contraibile, allora si provi che X è semplicemente connesso.

16.15.** Siano X e Y due spazi topologici omotopicamente equivalenti. Provare o confutare ciascuna delle seguenti affermazioni.

(1) $\pi_0(X)$ e $\pi_0(Y)$ sono insiemi equipotenti.
(2) Se X è connesso per archi, allora Y è connesso per archi.
(3) Se X è compatto, allora Y è compatto.
(4) Se X è semplicemente connesso, allora Y è semplicemente connesso.
(5) Se ogni componente connessa per archi di X è semplicemente connessa, allora ogni componente connessa per archi di Y è semplicemente connessa.
(6) Per ogni $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$, i gruppi $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(Y, y_0)$ sono isomorfi.
(7) Se G è un gruppo ed esiste un punto $x_0 \in X$ tale che $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo a G, allora esiste $y_0 \in Y$ tale che $\pi_1(Y, y_0)$ è isomorfo a G.

16.16.** Sia X uno spazio topologico. Sia $A \subseteq X$ un sottospazio non vuoto. Sia $a_0 \in A$. Sia $i\colon A \hookrightarrow X$ l'inclusione.

(1) Si faccia un esempio in cui $\pi_1(i, a_0)\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ è suriettivo e non iniettivo.
(2) Si faccia un esempio in cui $\pi_1(i, a_0)\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ è iniettivo e non suriettivo.
(3) Si faccia un esempio in cui $\pi_1(i, a_0)\colon \pi_1(A, a_0) \to \pi_1(X, a_0)$ è un isomorfismo e $A \subsetneq X$.
(4) Se A è un retratto di deformazione di X, allora si provi che $\pi_1(i, a_0)$ è un isomorfismo.
(5) Se esiste una funzione continua $r\colon X \to A$ tale che $r \circ i = \mathrm{id}_A$, allora si provi che $\pi_1(i, a_0)$ è iniettivo.

16.17.*** Sia X uno spazio topologico, sia $x_0 \in X$ un punto, sia $\alpha\colon [0,1] \to X$ un cammino chiuso con punto base x_0. Si consideri l'applicazione $f\colon S^1 \to X$ data da $f(\cos\theta, \sin\theta) = \alpha(\frac{\theta}{2\pi})$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$.

(1) Si provi che f è ben definita, continua e tale che $f((1,0)) = x_0$.
(2) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
   (i) il cammino α è omotopo al cammino costante in x_0, cioè la funzione $\alpha\colon [0,1] \to X$ è omotopa alla funzione costante $[0,1] \to X$ data da $t \mapsto x_0$ relativamente a $\{0,1\}$ (nel senso di 15.1);
   (ii) esiste una funzione continua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ tale che $H(\cdot, 1) = \alpha$, $H(\cdot, 0)$ è costante e per ogni $s \in [0,1]$ vale $H(0, s) = H(1, s)$;

(iii) la funzione f è omotopa alla funzione costante $S^1 \to X$ data da $z \mapsto x_0$ relativamente a $\{(1,0)\}$ (nel senso di 15.1);
(iv) esiste una funzione continua $F\colon S^1 \times [0,1] \to X$ tale che $F(\cdot,1) = f$, $F(\cdot,0)$ è la funzione costante data da $z \mapsto x_0$ e la funzione $F((1,0),\cdot)$ è costante;
(v) la funzione f è omotopa alla funzione costante $S^1 \to X$ data da $z \mapsto x_0$;
(vi) esiste una funzione continua $F\colon S^1 \times [0,1] \to X$ tale che $F(\cdot,1) = f$ e $F(\cdot,0)$ è la funzione costante data da $z \mapsto x_0$;
(vii) la funzione f è omotopa a una funzione costante;
(viii) esiste una funzione continua $F\colon S^1 \times [0,1] \to X$ tale che $F(\cdot,1) = f$ e $F(\cdot,0)$ è costante;
(ix) esiste una funzione continua $g\colon D^2 \to X$ tale che $g|_{S^1} = f$.

[Suggerimento: si provino le implicazioni (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(iv)$\Rightarrow$(v)$\Leftrightarrow$(vi)$\Rightarrow$(vii)$\Leftrightarrow$(viii)$\Rightarrow$(ix). Per (ix)$\Rightarrow$(ii) si usi $H(t,s) = g(1-s+s\cos 2\pi t, s\sin 2\pi t)$.]

16.18.*** Sia X uno spazio topologico. Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) ogni componente connessa per archi di X è semplicemente connessa;
(2) per ogni $x_0 \in X$, il gruppo fondamentale $\pi_1(X,x_0)$ è banale;
(3) ogni applicazione continua $S^1 \to X$ è omotopa a un'applicazione costante;
(4) per ogni applicazione continua $f\colon S^1 \to X$, esiste un'applicazione continua $g\colon D^2 \to X$ tale che $g|_{S^1} = f$.

Gruppo fondamentale della circonferenza

16.19.* Sia G un gruppo.

(1) Per ogni elemento $g \in G$, si provi che esiste un unico omomorfismo di gruppi $\psi\colon \mathbb{Z} \to G$ tale che $\psi(1) = g$.
(2) Sia $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Gruppi})}(\mathbb{Z},G)$ l'insieme degli omomorfismi di gruppi da $\mathbb{Z}$ a G. Si costruisca una bigezione naturale tra l'insieme $\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Gruppi})}(\mathbb{Z},G)$ e l'insieme G.
(3) Se $g \in G$ e $\psi\colon \mathbb{Z} \to G$ è l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\psi(1) = g$, allora si provino le seguenti affermazioni:
   (a) ψ è "nullo" se e solo se g è l'elemento neutro di G,
   (b) ψ è suriettivo se e solo se g è un generatore del gruppo G,
   (c) ψ è iniettivo se e solo se g ha ordine infinito,
   (d) per ogni intero $m \geq 1$ fissato, il nucleo di ψ è $m\mathbb{Z}$ se e solo se g ha ordine m,
   (e) se g ha ordine $1 \leq m < \infty$, allora ψ induce un omomorfismo iniettivo $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \hookrightarrow G$.

16.20.* Sia $n \geq 1$ un intero. Sia G un gruppo Sia F_n il gruppo libero su n generatori; chiamiamo $x_1,\dots,x_n$ i generatori "standard" di F_n. (In altre parole, F_n è l'insieme delle parole ridotte sull'alfabeto x_i, x_i^{-1}, $i = 1,\dots,n$.)

(1) Se $g_1,\dots,g_n \in G$ sono n elementi di G, allora si provi che esiste un unico omomorfismo di gruppi $\psi\colon F_n \to G$ tale che per ogni $i = 1,\dots,n$ $\psi(x_i) = g_i$.
(2) Se $g_1,\dots,g_n \in G$ sono n elementi di G e $\psi\colon F_n \to G$ è come in (1), allora si provi che ψ è suriettivo se e solo se $\{g_1,\dots,g_n\}$ è un insieme di generatori di G.

16.21.*** (La retta reale riveste la circonferenza) Si consideri la funzione $\mathsf{e}\colon \mathbb{R} \to S^1$ data da

$$\mathsf{e}(t) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

(1) Si determinino le fibre dei seguenti punti di S^1 rispetto a e: $(1,0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$.
(2) Si provi che ogni fibra di e ha cardinalità numerabile.
(3) Si consideri $V = \{(x,y) \in S^1 \mid x > 0\}$ e $U_k = (k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4})$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Si faccia vedere che la preimmagine di V tramite e è l'unione disgiunta degli U_k al variare di $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Si provi che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la restrizione $\mathsf{e}|_{U_k}\colon U_k \to V$ è un omeomorfismo e se ne determini esplicitamente l'inverso.
(4) Si consideri $V' = \{(x,y) \in S^1 \mid y > 0\}$ e $U'_k = (k, k + \frac{1}{2})$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.
   (a) Si faccia vedere che la preimmagine di V' tramite e è l'unione disgiunta degli U'_k al variare di $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Si provi che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ la restrizione $\mathsf{e}|_{U'_k}\colon U'_k \to V'$ è un omeomorfismo e se ne determini esplicitamente l'inverso.
(5) Si consideri $V'' = \{(x,y) \in S^1 \mid x < 0\}$. Si faccia vedere che $\mathsf{e}^{-1}(V'')$ è unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti. Si faccia vedere che se U'' è uno di questi intervalli allora la restrizione $\mathsf{e}|_{U''}\colon U'' \to V''$ è un omeomorfismo.
(6) Si consideri $V''' = \{(x,y) \in S^1 \mid y < 0\}$. Si faccia vedere che $\mathsf{e}^{-1}(V''')$ è unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti. Si faccia vedere che se U''' è uno di questi intervalli allora la restrizione $\mathsf{e}|_{U'''}\colon U''' \to V'''$ è un omeomorfismo.
(7) Si consideri $P = S^1 \smallsetminus \{(1,0)\}$. Si faccia vedere che $\mathsf{e}^{-1}(P)$ è unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti. Si faccia vedere che se U è uno di questi intervalli allora la restrizione $\mathsf{e}|_U\colon U \to P$ è un omeomorfismo. [Suggerimento $P = V' \cup V'' \cup V'''$.]
(8) Si consideri $L = S^1 \smallsetminus \{(-1,0)\}$. Si faccia vedere che $\mathsf{e}^{-1}(L)$ è unione di una famiglia numerabile di intervalli aperti di $\mathbb{R}$ a due a due disgiunti. Si faccia vedere che se U è uno di questi intervalli allora la restrizione $\mathsf{e}|_U\colon U \to L$ è un omeomorfismo. [Suggerimento $L = V \cup V' \cup V''$.]

16.22.*** (Gruppo fondamentale della circonferenza) Sia $z_0 = (1,0) \in S^1$. Si consideri $\gamma_1\colon [0,1] \to S^1$ dato da

$$\gamma_1(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \qquad \text{per ogni } t \in [0,1].$$

(1) Si provi che γ_1 è un cammino chiuso in S^1 con punto base z_0.

Si consideri la classe di omotopia $[\gamma_1] \in \pi_1(S^1, z_0)$ del cammino γ_1. Sia

$$\psi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(S^1, z_0)$$

l'unico omomorfismo di gruppi tale che $\psi(1) = [\gamma_1]$ (si veda 16.19).

(2) Si consideri il cammino $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ dato da $t \mapsto \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} t}$; si determini un intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\psi(k) = [\alpha]$.
(3) Si consideri il cammino $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ dato da $t \mapsto \mathrm{e}^{6\pi \mathrm{i} t}$; si determini un intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\psi(k) = [\alpha]$.
(4) Si consideri il cammino $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ dato da $t \mapsto \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t}$; si determini un intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\psi(k) = [\alpha]$.
(5) Si consideri il cammino $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ dato da

$$t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t} & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$$

si determini un intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\psi(k) = [\alpha]$.
(6) Si consideri il cammino $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ dato da

$$t \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(8t+6)} & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(20+8t-8t^2)} & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$$

si determini un intero $k \in \mathbb{Z}$ tale che $\psi(k) = [\alpha]$.
(7) Per ciascun $n \in \mathbb{Z}$, si consideri il cammino $\gamma_n\colon [0,1] \to S^1$ definito da $\gamma_n(t) = \mathrm{e}^{2\pi i n t}$ per ogni $t \in [0,1]$.
   (a) Si osservi che γ_0 è il cammino costante in z_0.
   (b) È vera l'uguaglianza $\psi(0) = [\gamma_0]$?
   (c) È vera l'uguaglianza $\gamma_1 * \gamma_1 = \gamma_2$?
   (d) È vera l'uguaglianza $[\gamma_1]^2 = [\gamma_2]$ in $\pi_1(S^1, z_0)$?
   (e) È vera l'uguaglianza $\psi(2) = [\gamma_2]$?
   (f) È vera l'uguaglianza $(\gamma_1 * \gamma_1) * \gamma_1 = \gamma_3$?
   (g) È vera l'uguaglianza $\gamma_1 * (\gamma_1 * \gamma_1) = \gamma_3$?
   (h) È vera l'uguaglianza $[\gamma_1]^3 = [\gamma_3]$ in $\pi_1(S^1, z_0)$?
   (i) È vera l'uguaglianza $\psi(3) = [\gamma_3]$?
   (j) Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si provi l'uguaglianza $\psi(n) = [\gamma_n]$.

Sia $\mathsf{e}\colon \mathbb{R} \to S^1$ l'applicazione continua definita da $\mathsf{e}(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, già considerata in 16.21.

(8) Si provi che ogni cammino in S^1 può essere spezzettato in un numero finito di cammini tali che ciascun pezzo prende valori in uno dei 2 aperti P e L di S^1 considerati in 16.21. In altre parole si provi il seguente fatto: se $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ è un cammino, allora si provi che esiste un numero intero $m \ge 1$ tale che per ogni $i = 0, \dots, m-1$ l'insieme $\alpha\left(\left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]\right)$ è contenuto in almeno un elemento del ricoprimento aperto $\{P, L\}$ di S^1.
(9) Se $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ è un cammino tale che $\alpha(0) = z_0$, allora si provi che esiste un unico cammino $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $\tilde{\alpha}(0) = 0$ e $\alpha = \mathsf{e} \circ \tilde{\alpha}$. Il cammino $\tilde{\alpha}$ si chiama il *sollevamento* di α rispetto a e e con punto base $0 \in \mathbb{R}$.
(10) Se $\alpha\colon [0,1] \to S^1$ è un cammino tale che $\alpha(0) = z_0$, allora si mostri che l'insieme dei cammini $\beta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tali che $\alpha = \mathsf{e} \circ \beta$ è infinito.
(11) Se α è il cammino in (2), chi è il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$?
(12) Se α è il cammino in (3), chi è il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$?
(13) Se α è il cammino in (4), chi è il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$?
(14) Se α è il cammino in (5), chi è il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$?
(15) Se α è il cammino in (6), chi è il sollevamento $\tilde{\alpha}$ di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$?
(16) Sia α un cammino in S^1 con $\alpha(0) = \alpha(1) = z_0$, sia $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ il sollevamento di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$. Allora si provi che $\tilde{\alpha}(1)$ è un numero intero.
(17) Siano α e β cammini in S^1 con $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = z_0$. Siano $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ e $\tilde{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i sollevamenti di α e di β, rispettivamente, rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$.
   (a) I cammini $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ sono congiungibili?
   (b) Si consideri $\hat{\beta}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dato da $t \mapsto \tilde{\beta}(t) + \tilde{\alpha}(1)$. Si provi che $\hat{\beta}$ è un cammino continuo tale che $\mathsf{e} \circ \hat{\beta} = \beta$. Si provi che $\tilde{\alpha} * \hat{\beta}$ è il sollevamento di $\alpha * \beta$ rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$.
   (c) Se α e β sono cammini omotopi, allora si provi che $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ sono cammini omotopi.
   (d) Se α e β sono cammini omotopi, allora si provi $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) \in \mathbb{Z}$.

Si consideri

$$\varphi\colon \pi_1(S^1, z_0) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dato da

$$\varphi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1)$$

per ogni cammino α in S^1 con $\alpha(0) = \alpha(1) = z_0$, dove $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ è il sollevamento di α rispetto a e con punto base $0 \in \mathbb{R}$.

(17) Si provi che φ è un ben definito omomorfismo di gruppi.
(18) Si provi $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.
(19) Si provi $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\pi_1(S^1,z_0)}$.

Quindi si è dimostrato che ψ e φ sono uno l'inverso dell'altro. Perciò $\pi_1(S^1, z_0)$ è un gruppo ciclico infinito e dunque la circonferenza S^1 è connessa per archi e non semplicemente connessa.

16.23.** Sia $m \in \mathbb{Z}$ un numero intero. Sia $g\colon S^1 \to S^1$ data da $g(\cos\theta, \sin\theta) = (\cos m\theta, \sin m\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. Sia $z_0 = (1, 0)$.

(1) Si provi che g è una funzione continua tale che $g(z_0) = z_0$.
(2) Si determini esplicitamente l'omomorfismo $\psi^{-1} \circ \pi_1(g, z_0) \circ \psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. dove ψ è l'isomorfismo introdotto in 16.22.

16.24.** Si provi che la funzione identità $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$ non è omotopa a una funzione costante.

16.25.* Si provi che S^1 non è contraibile.

16.26.* Si provi che S^1 e $[0, 1]$ non sono omotopicamente equivalenti.

16.27.* Si dica se esiste un'applicazione continua $r\colon \mathbb{R}^2 \to S^1$ tale che per ogni $(x, y) \in S^1$ valga $r(x, y) = (x, y)$.

16.28.** Si determini il gruppo fondamentale di $\mathbb{C}^*$. [Suggerimento: si usi che l'inclusione $i\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ è un'equivalenza omotopica.]

16.29.** Sia $m \in \mathbb{Z}$ un numero intero. Sia $g\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ data da $z \mapsto z^m$. Sia $z_0 = 1$. Si determini l'omomorfismo $\pi_1(g, z_0)$.

16.30.* Si determini il gruppo fondamentale del complementare di 2 punti in S^2.

16.31.* Si determini il gruppo fondamentale del toro 2-dimensionale considerato in 11.12.

16.32.** Si determini il gruppo fondamentale degli spazi topologici in 11.5, 11.6, 11.18.

16.33.** Si determini il gruppo fondamentale del complementare di una retta in $\mathbb{R}^3$. [Suggerimento: a meno di affinità di $\mathbb{R}^3$ si può supporre che r sia l'asse z. A questo punto si scriva una retrazione per deformazione su una circonferenza.]

16.34.*** Siano r, s, t tre rette distinte in $\mathbb{R}^2$. Si consideri l'unione $X = r \cup s \cup t$. Si provi che ci sono esattamente 4 possibilità per la classe di omeomorfismo di X. Per ciascuna di esse si determini se X è connesso (per archi) e si calcoli il gruppo fondamentale di X in ciascun punto di X.

16.35.*** Sia $n \geq 1$ un intero. Si ricordi che S^{n-1} è un sottoinsieme di D^n: è la frontiera di D^n in $\mathbb{R}^n$. Si considerino le seguenti affermazioni:

(1) D^n si retrae per deformazione su S^{n-1};
(2) l'inclusione $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ è una equivalenza omotopica;
(3) D^n e S^{n-1} sono omotopicamente equivalenti;
(4) esiste una funzione continua $r\colon D^n \to S^{n-1}$ tale che per ogni $x \in S^{n-1}$ vale $r(x) = x$;
(5) esiste almeno una funzione continua $f\colon D^n \to D^n$ tale che per ogni $x \in D^n$ vale $f(x) \neq x$.

- Si provino le implicazioni (1)⇒(2)⇒(3) e (1)⇒(4).
- Si provi l'implicazione (5)⇒(4). [Suggerimento: sia $f\colon D^n \to D^n$ come in (5). Si fissi un punto $x \in D^n$. Si consideri il punto $f(x) \in D^n$, che è distinto da x, e si tracci la retta passante per x e $f(x)$. Tale retta interseca la frontiera S^{n-1} di D^n in due punti distinti: si chiami $r(x) \in S^{n-1}$ quello che sta dalla parte di x. Si provi che questo dà una funzione continua $r\colon D^n \to S^{n-1}$ che soddisfa (4). Per far ciò, si osservi che la retta passante per x e $f(x)$ è $\{x + t(x - f(x)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e si risolva la equazione $\|x + t(x - f(x))\| = 1$ con $t \geq 0$. Questa equazione dà il trinomio di secondo grado
$$\|x - f(x)\|^2 t^2 + 2\langle x, x - f(x)\rangle t + \|x\|^2 - 1 = 0$$
che ha come discriminante ridotto
$$\frac{\Delta}{4} = \langle x, x - f(x)\rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 \left(1 - \|x\|^2\right) > 0$$
dove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ è il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$. Perciò $r\colon D^n \to S^{n-1}$ è data da
$$r(x) = x + \frac{-\langle x, x - f(x)\rangle + \sqrt{\langle x, x - f(x)\rangle^2 + \|x - f(x)\|^2 \left(1 - \|x\|^2\right)}}{\|x - f(x)\|^2}(x - f(x))$$
per ogni $x \in D^n$.]

16.36.** Se $n = 1$ allora si provi che tutte le 5 affermazioni in 16.35 sono false. [Primo suggerimento: si ricordi $S^0 = \{1, -1\} \subset D^1 = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.] [Secondo suggerimento: basta dimostrare che (3) e (4) sono false.] [Terzo suggerimento: si usi la connessione per archi, cioè il funtore π_0.]

16.37.*** Se $n = 2$ allora si provi che tutte le 5 affermazioni in 16.35 sono false. [Suggerimento: si usi il gruppo fondamentale, cioè il funtore π_1.] [Con metodi piú avanzati si può mostrare che tutte le affermazioni 16.35 sono false per ogni intero $n \geq 1$; per far ciò occorrono dei funtori (dalla categoria degli spazi topologici alla categoria dei gruppi) piú sofisticati che tengono conto dei "buchi di dimensione ≥ 2". Si rimanda al corso di Topologia Algebrica.]

16.38.** (Teorema del punto fisso di Brouwer) Se $n = 1$ o $n = 2$, allora si provi che ogni applicazione continua $f\colon D^n \to D^n$ ammette un punto fisso, cioè è tale che esiste $x \in D^n$ tale che $f(x) = x$. [Per $n = 1$ si dia una dimostrazione che usa solo strumenti di Analisi I.]

Teorema di van Kampen

16.39.*** (Le sfere di dimensione ≥ 2 sono semplicemente connesse) Sia $n \geq 1$ un intero. Sia S^n la sfera n-dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$. Si considerino il polo nord $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ e il polo sud $S = (0, \dots, 0, -1) \in S^n$. Si ponga $A = S^n \smallsetminus \{S\}$ e $B = S^n \smallsetminus \{N\}$.

(1) Si provi che A e B sono aperti di S^n la cui unione è tutto S^n.
(2) Si provi che A e B sono semplicemente connessi.
(3) Per quali n l'intersezione $A \cap B$ è non vuota?
(4) Per quali n l'intersezione $A \cap B$ è connessa per archi?
(5) Se $n \geq 2$ allora si provi che S^n è semplicemente connessa.
(6) Per quali n l'intersezione $A \cap B$ è semplicemente connessa?

16.40.** Per ogni intero $n \geq 1$, si determini il gruppo fondamentale di ogni componente connessa per archi del complementare di un punto in $\mathbb{R}^n$.

16.41.*** Siano $0 \leq k < n$ degli interi. Sia W un sottospazio affine k-dimensionale di $\mathbb{R}^n$. Si determini la cardinalità di $\pi_0(\mathbb{R}^n \smallsetminus W)$. Si determini il gruppo fondamentale di ogni componente connessa per archi $\mathbb{R}^n \smallsetminus W$.

16.42.** Si determini il gruppo fondamentale di $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x) = 0\}$.

16.43.** Per ogni intero $n \geq 1$, si determini il gruppo fondamentale del bouquet di n circonferenze.

16.44.** Per ogni intero $n \geq 1$, si determini il gruppo fondamentale del complementare di n punti in $\mathbb{R}^2$.

16.45.** Per ogni intero $n \geq 1$, si determini il gruppo fondamentale del complementare di n punti in S^2.

16.46.** Senza dare una definizione formale, si può dire che un *grafo* è il dato di: un insieme finito di *vertici*, un insieme finito di *lati* e l'assegnazione di uno o due vertici ad ogni lato. Questo un unico vertice o questi due vertici si dicono *estremo/i* del lato. Si richiede che la seguente proprietà sia soddisfatta: ogni vertice è estremo di almeno un lato.

Ad ogni grafo Γ è associato uno spazio topologico X_Γ cosí ottenuto. Per ogni lato del grafo si prende una copia dell'intervallo compatto $[0, 1]$ e se ne fa l'unione disgiunta. Poi si quozienta per la relazione di equivalenza che identifica lo stesso vertice in lati diversi oppure che identifica i due estremi di una copia di $[0, 1]$ quando questa corrisponde a un lato con un unico estremo.

(1) Se Γ è un grafo con insieme dei vertici V_Γ e insieme dei lati E_Γ, allora facendo dei disegni ci si convinca delle seguenti affermazioni:
  (a) se $V_\Gamma = \{v\}$, $E_\Gamma = \{e\}$ ed e ha v come unico estremo, allora X_Γ è omeomorfo a S^1;
  (b) se $V_\Gamma = \{v, w\}$, $E_\Gamma = \{e\}$ ed e ha v e w come estremi, allora X_Γ è omeomorfo a $[0, 1]$;
  (c) se $V_\Gamma = \{v, w\}$, $E_\Gamma = \{e_0, e_1\}$, e_0 ha v e w come estremi e e_1 ha v e w come estremi, allora X_Γ è omeomorfo a S^1;
  (d) se $V_\Gamma = \{u, v, w\}$, $E_\Gamma = \{e_0, e_1\}$, gli estremi di e_0 sono u e v e gli estremi di e_1 sono v e w, allora X_Γ è omeomorfo a $[0, 1]$;
  (e) se $V_\Gamma = \{v, w\}$, $E_\Gamma = \{e_0, e_1\}$, e_0 ha v come unico estremo e e_1 ha v e w come estremi, allora X_Γ è omotopicamente equivalente a S^1 e non è omeomorfo a S^1;
  (f) se $\#V_\Gamma = 1$ allora X_Γ è omeomorfo a un bouquet di circonferenze.

  [Si osservi come grafi non isomorfi possono dare spazi topologici omeomorfi.]
(2) Sia Γ un grafo e sia e un lato di Γ. Consideriamo Γ' il grafo ottenuto da Γ contraendo e a un punto. Ci si convinca che si ottiene un'applicazione continua $c\colon X_\Gamma \to X_{\Gamma'}$ collassando a un punto tutti i punti sul lato e.
(3) Il seguente fatto può essere usato liberamente e non se ne chiede la dimostrazione:
  Teorema. *Sia Γ un grafo, sia e un lato di Γ, sia Γ' il grafo ottenuto da Γ contraendo il lato e a un punto e sia $c\colon X_\Gamma \to X_{\Gamma'}$ la corrispondente applicazione continua. Se il lato e ha due vertici distinti, allora c è un'equivalenza omotopica.*
(4) Si faccia un esempio in cui e ha un unico vertice e l'applicazione continua c che contrae e non è un'equivalenza omotopica.
(5) Applicando ripetutamente il precedente teorema, ci si convinca che se Γ è un grafo connesso, allora X_Γ è omotopicamente equivalente a un bouquet di circonferenze.
(6) Si provi che se Γ è un grafo connesso allora il gruppo fondamentale di X_Γ è un gruppo libero con un numero finito di generatori.
(7) Per ciascun Γ tra i grafi in Figura 1, si scelga un'orientazione (cioè un verso) dei lati, si dia un nome a ciascun lato, si fissi un vertice x_0 e si scriva esplicitamente un insieme minimale di generatori del gruppo libero $\pi_1(X_\Gamma, x_0)$.

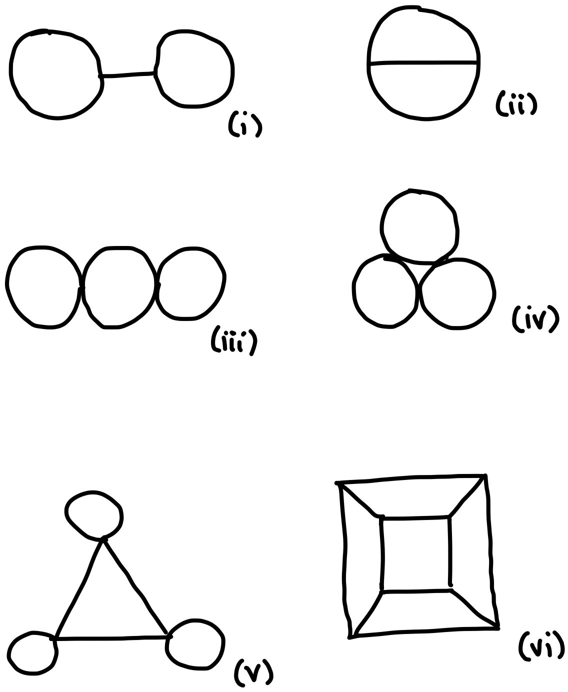

Figura 1. Alcuni grafi (16.46)

16.47.*** Siano $X_1, \ldots, X_6$ gli spazi topologici in Figura 1. In 16.46 si è calcolato il gruppo fondamentale di questi spazi.

(1) Si dica per quali $1 \leq i < j \leq 6$ gli spazi X_i e X_j sono omotopicamente equivalenti.
(2) Si dica per quali $1 \leq i < j \leq 6$ gli spazi X_i e X_j sono omeomorfi.
(3) Si dica per quali $1 \leq i \leq 6$ lo spazio X_i è omeomorfo a un bouquet di circonferenze.

16.48.*** Si determini il gruppo fondamentale di $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy(x^2+y^2-2x)(x^2+y^2+2x) = 0\}$. [Suggerimento: si scriva una retrazione per deformazione di X su di un grafo. A questo punto si usi 16.46.]

16.49.*** Sia X l'unione degli spigoli 1-dimensionali di un tetraedro in $\mathbb{R}^3$. Si determini il gruppo fondamentale di X.

16.50.*** In questo esercizio si dà una definizione formale di grafo. Un *grafo* è una tripla $\Gamma = (V, E, \mathrm{ext})$ tale che:

(i) V ed E sono insiemi finiti,
(ii) $\mathrm{ext}\colon E \to \mathcal{P}(V)$ è una funzione, dove $\mathcal{P}(V)$ denota l'insieme dei sottoinsiemi di V,
(iii) per ogni $e \in E$, $\mathrm{ext}(e)$ ha cardinalità 1 o 2,
(iv) per ogni $v \in V$, esiste $e \in E$ tale che $v \in \mathrm{ext}(e)$.

Gli elementi di V si chiamano *vertici.* Gli elementi di E si chiamano lati. Per ogni $e \in E$, gli elementi di $\mathrm{ext}(e)$ si chiamano gli *estremi* del lato e e possono essere 1 o 2. La condizione (iv) dice che ogni vertice è vertice di almeno un lato.

Se $\Gamma = (V, E, \mathrm{ext})$ è un grafo, allora costruiamo uno spazio topologico X_Γ nel seguente modo. Per ogni $e \in E$ tale che $\#\mathrm{ext}(e) = 2$, si scelga una bigezione $f_e\colon \mathrm{ext}(e) \to \{0, 1\}$. (In altre parole, per ogni lato e con due estremi, si identifichi un estremo con 0 e un estremo con 1.) Si consideri il prodotto $[0, 1] \times E$, dove si considera la topologia prodotto della topologia euclidea di $[0, 1]$ e della topologia discreta di E. Su $[0, 1] \times E$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ generata dalle seguenti relazioni:

- se $e \in E$ è tale che $\#\mathrm{ext}(e) = 1$, allora $(0, e) \sim (1, e)$,
- se $e, e' \in E$ sono tali che $\#\mathrm{ext}(e) = \#\mathrm{ext}(e') = 2$ e $v \in \mathrm{ext}(e) \cap \mathrm{ext}(e')$, allora $(f_e(v), e) \sim (f_{e'}(v), e')$,
- se $e, e' \in E$ sono tali che $\#\mathrm{ext}(e) = 1$, $\#\mathrm{ext}(e') = 2$ e $\mathrm{ext}(e) = \{v\} \subseteq \mathrm{ext}(e')$, allora $(0, e) \sim (1, e) \sim (f_{e'}(v), e')$.

Si pone $X_\Gamma := ([0, 1] \times E)/\sim$. La relazione di equivalenza $\sim$ dipende dalla scelta delle bigezioni f_e, ma si potrebbe dimostrare che la classe di omeomorfismo di X_Γ non dipende dalla scelta delle bigezioni f_e.

Si provi che X_Γ è uno spazio topologico compatto e T2.

Il grafo Γ si dice *connesso* se e solo se X_Γ è connesso (per archi). Il numero delle componenti connesse di X_Γ è denotato $b_0(\Gamma)$. Se Γ è un grafo connesso, allora il gruppo fondamentale è un gruppo libero su un numero finito di generatori; la cardinalità di un insieme minimale di generatori del gruppo fondamentale di X_Γ si denota con $b_1(\Gamma)$. Un grafo Γ si dice *albero* se è X_Γ è semplicemente connesso.

Se Γ è un grafo connesso, allora si provi l'uguaglianza $b_1(\Gamma) = 1 - \#V_\Gamma + \#E_\Gamma$.

[Gli spazi topologici X_Γ costruiti a partire dai grafi sono gli esempi piú semplici di una classe importantissima di spazi topologici che possono essere costruiti in maniera combinatorica “incollando” celle (cioè dischi) tra loro. Essi sono i CW-complessi e vengono studiati nel corso di Topologia Algebrica.]

16.51.*** (Gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) Sia D^2 il disco chiuso di dimensione 2 e sia $\approx$ la relazione di equivalenza su D^2 introdotta in 12.2, cioè l'antipodalità sul bordo. Sia $q\colon D^2 \to D^2/\approx =: X$ il quoziente. Si considerino

$$A' = \{x \in D^2 \mid \|x\| < 1\} \qquad \text{e} \qquad B' = D^2 \smallsetminus \{0\}$$

e si ponga $A = q(A')$ e $B = q(B')$. Si considerino i seguenti due punti di X: $x_0 = q(\frac{1}{2}, 0)$ e $x_1 = q(1, 0)$.

(1) Si provi che A, B e $A \cap B$ sono aperti di X connessi per archi.
(2) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(A, x_0)$.
(3) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(B, x_1)$ e se ne determini un insieme minimale di generatori.
(4) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(B, x_0)$ e se ne determini un insieme minimale di generatori.
(5) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(A \cap B, x_0)$ e se ne determini un insieme minimale di generatori.
(6) Si determini l'omomorfismo di gruppi $\pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$ indotto dall'inclusione $A \cap B \hookrightarrow B$.
(7) Si applichi il teorema di van Kampen e si deduca che $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo ciclico di ordine 2.

16.52.*** (Quozienti di poligoni) Sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ una delle 8 figure poligonali compatte come in Figura 2; piú precisamente Y è l'inviluppo convesso di un numero finito di punti (detti vertici). Per esempio, in (i), (ii) e (viii) $Y = [0,1] \times [0,1]$. Si consideri su Y la relazione di equivalenza $\sim$ che è banale all'interno di Y e sul bordo è specificata dalla Figura 2. Per esempio, in (i), la relazione $\sim$ è generata da $(1,t) \sim (1-t, 1) \sim (0, 1-t)$ al variare di $t \in [0,1]$. Si considerino lo spazio topologico quoziente $X := Y/\sim$ e la proiezione al quoziente $\pi\colon Y \to X$.

Sia A' la parte interna di Y in $\mathbb{R}^2$. Si scelgano $y_0 \in A'$ e $y_2 \in A'$ distinti. Sia $y_1 \in Y \smallsetminus A'$ un vertice del poligono Y. Si ponga $B' = Y \smallsetminus \{y_2\}$.

Si ponga $A = \pi(A')$, $B = \pi(B')$ e $x_i = \pi(y_i) \in X$ per $i = 0, 1, 2$.

(1) Si osservi che A, B e $A \cap B$ sono aperti di X connessi per archi.
(2) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(A, x_0)$.
(3) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(B, x_1)$ e se ne determini un insieme minimale di generatori. [Suggerimento: si consideri la frontiera $C' = Y \smallsetminus A'$ di Y in $\mathbb{R}^2$. Si osservi che $C := \pi(C')$ è un grafo. Si determini il gruppo fondamentale $\pi_1(C, x_1)$ usando 16.46. Si faccia vedere che B si retrae per deformazione su C.]
(4) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(B, x_0)$ e se ne determini un insieme minimale di generatori.
(5) Si calcoli il gruppo fondamentale $\pi_1(A \cap B, x_0)$ e se ne determini un insieme minimale di generatori.
(6) Si determini l'omomorfismo di gruppi $\pi_1(A \cap B, x_0) \to \pi_1(B, x_0)$ indotto dall'inclusione $A \cap B \hookrightarrow B$.
(7) Si applichi il teorema di van Kampen e si calcoli $\pi_1(X, x_0)$.

16.53.*** Si svolga l'Esercizio 3 dell'Appello 2 dell'A.A. 2022/23.

16.54.*** Sia $n \geq 1$ un intero. Sia $\zeta = e^{2\pi i/n}$. Su $D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ data da: per ogni $z, z' \in D^2$, $z \sim z'$ se e solo se $z = z'$ oppure ($|z| = |z'| = 1$ ed esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z' = \zeta^k z$). Imitando lo svolgimento di 16.51, si provi che il gruppo fondamentale dello spazio topologico quoziente $D^2/\sim$ è ciclico di ordine n.

16.55.*** Sia G un gruppo abeliano finitamente generato. Si costruisca uno spazio topologico X compatto, connesso per archi, T2 e tale che il gruppo fondamentale di X sia isomorfo a G.

16.56.*** (Gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$) Sia $n \geq 1$ un intero. Si consideri lo spazio proiettivo reale n-dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Si consideri il punto $p = [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e la n-esima carta affine standard $U_n = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_n \neq 0\}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

(1) Si provi che U_n e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \smallsetminus \{p\}$ sono due aperti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la cui unione è tutto $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
(2) Per quali n l'aperto $U_n \smallsetminus \{p\}$ è connesso per archi?
(3) Si provi che U_n è semplicemente connesso.
(4) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \smallsetminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$.
(5) Si provi che $U_n \smallsetminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente a S^{n-1}.
(6) Si provi che il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è ciclico infinito, cioè isomorfo a $\mathbb{Z}$. [Si usi 12.6.]
(7) Fissato $p_0 \in U_n \smallsetminus \{p\}$, si studi l'omomorfismo di gruppi $\pi_1(U_n \smallsetminus \{p\}, p_0) \to \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \smallsetminus \{p\}, p_0)$ indotto dall'inclusione $U_n \smallsetminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \smallsetminus \{p\}$.
(8) Per ogni $n \geq 2$, si provi che il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è ciclico di ordine 2, cioè isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

16.57.** ($\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso) Qui si danno due dimostrazioni della semplice connessione dello spazio proiettivo complesso. La prima ricalca l'esercizio precedente, mentre la seconda è stata data a lezione. Sia $n \geq 1$ un intero. Si considerino lo spazio proiettivo complesso n-dimensionale $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, il punto $p = [0 : \cdots : 0 : 1] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e, per ciascun $i = 0, \ldots, n$, la i-esima carta affine standard $U_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid x_i \neq 0\}$ di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

(1) Si provi che U_n e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \smallsetminus \{p\}$ sono due aperti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la cui unione è tutto $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.
(2) Per quali n l'aperto $U_n \smallsetminus \{p\}$ è connesso per archi?
(3) Si provi che U_n è semplicemente connesso.
(4) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \smallsetminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

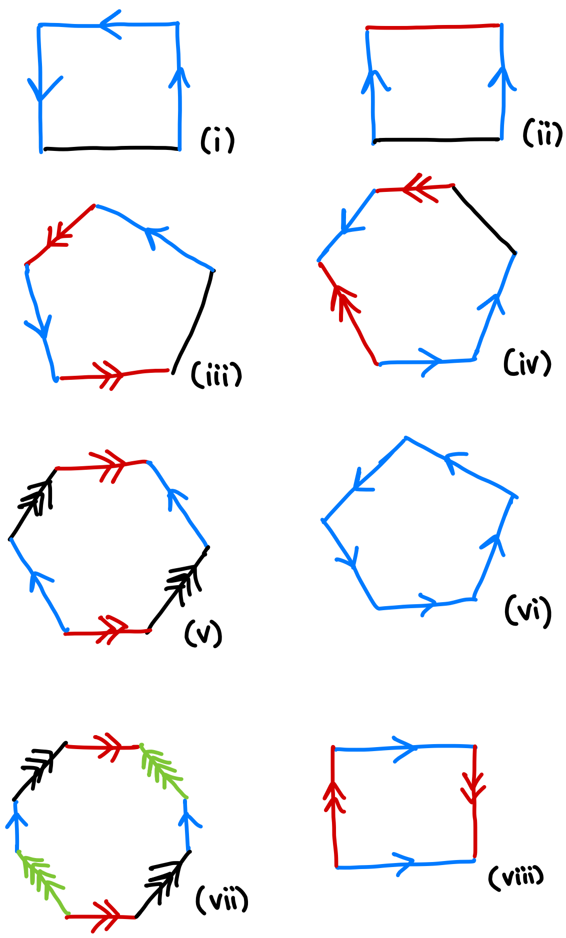

FIGURA 2. Alcuni quozienti di poligoni (16.52)

(5) Si provi che $U_n \setminus \{p\}$ è omotopicamente equivalente a S^{2n-1}.
(6) Si provi che $U_n \setminus \{p\}$ è semplicemente connesso.
(7) Si provi che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso. [Si proceda per induzione su n. Per il caso base $n = 1$ si usi 12.10 e 16.39.]

Ora veniamo alla seconda dimostrazione. Per ogni $k = 0, \ldots, n$ si ponga $V_k = \bigcup_{0 \leq i \leq k} U_i$.

(8) Per ogni $k = 0, \ldots, n-1$ si provino i seguenti fatti:
   (a) V_k è un aperto semplicemente connesso di V_{k+1};
   (b) U_{k+1} è un aperto semplicemente connesso di V_{k+1};
   (c) $V_k \cap U_{k+1}$ è connesso per archi;
   (d) V_{k+1} è semplicemente connesso.
(9) Si deduca che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso.

16.58.*** (Gruppo fondamentale della bottiglia di Klein) Si usano le notazioni di 11.14: K è la bottiglia di Klein (cioè il quoziente del quadrato $[0,1]^2$ come in Figura 2(viii)), $p\colon [0,1]^2 \to K$ è la proiezione al quoziente, t e s sono due affinità di $\mathbb{R}^2$ che generano G.

- Si determini il gruppo fondamentale di K.
- Si costruisca un omomorfismo suriettivo di gruppi $\pi_1(K) \to G$. [In verità si potrebbe far vedere che $\pi_1(K)$ e G sono gruppi isomorfi, ma questo richiede la teoria dei rivestimenti e delle azioni propriamente discontinue.]

16.59.**** Sia C una circonferenza che giace su un piano di $\mathbb{R}^3$. Sia $X = \mathbb{R}^3 \setminus C$.

(1) Ricordando che S^3 è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^3$, si provi che X è omeomorfo al complementare in $\mathbb{R}^3$ di una retta e di un punto fuori da essa.
(2) Usando il teorema di van Kampen e 16.33, si determini il gruppo fondamentale di X.

16.60.**** Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ una retta e sia $C \subset \mathbb{R}^3$ una circonferenza. Si ponga $X = \mathbb{R}^3 \setminus (r \cup C)$.

(1) Nel caso particolare in cui $r = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ e $C = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, si provi che X si retrae per deformazione sul toro 2-dimensionale T ottenuto ruotando la circonferenza $\{(x,0,z) \mid (x-1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$ intorno all'asse z. Si determini il gruppo fondamentale di X.

(2) Si determini il gruppo fondamentale di X a seconda che r e C siano 'allacciate' o no. [Nel caso in cui siano allacciate si usi il punto precedente. Nel caso in cui non siano allacciate si usi il teorema di van Kampen, 16.33 e 16.59.] [Questo esercizio è l'inizio della Teoria dei Nodi...]

16.61.*** Siano X e Y due spazi topologici connessi per archi. Siano $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ dei punti. Si consideri l'unione disgiunta $X \coprod Y$ dotata della topologia dell'unione disgiunta (è il coprodotto di X e Y nella categoria degli spazi topologici). Su $X \coprod Y$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ generata da $x_0 \sim y_0$. Si consideri lo spazio topologico quoziente $Z := (X \coprod Y)/\sim$. Sia $z_0 \in Z$ l'immagine di x_0 (e di y_0). (In questo modo, (Z, z_0) è il coprodotto di (X, x_0) e (Y, y_0) nella categoria degli spazi topologici puntati.)

(1) Si provi che Z è connesso per archi.
(2) Si faccia vedere come le applicazioni continue $X \to Z$ e $Y \to Z$ permettano di costruire un omomorfismo naturale di gruppi $\phi\colon \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.
(3) Se si suppongono le seguenti due condizioni:
   - esiste un intorno aperto U di x_0 in X tale che U si retrae per deformazione su $\{x_0\}$,
   - esiste un intorno aperto V di y_0 in Y tale che V si retrae per deformazione su $\{y_0\}$,

   allora si provi che l'omomorfismo ϕ sopra costruito è un isomorfismo.

16.62.*** Siano X e Y due circonferenze in $\mathbb{R}^2$. Si studi la classe di omeomorfismo di $X \cup Y$ e il gruppo fondamentale di ciascuna componente connessa per archi di $X \cup Y$, al variare della posizione reciproca tra X e Y.

16.63.*** Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ una circonferenza e sia $Y \subset \mathbb{R}^2$ una retta. Si studi la classe di omeomorfismo di $X \cup Y$ e il gruppo fondamentale di ciascuna componente connessa per archi di $X \cup Y$, al variare della posizione reciproca tra X e Y.

16.64.*** Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ una sfera e sia $Y \subset \mathbb{R}^3$ un piano. Si studi la classe di omeomorfismo di $X \cup Y$ e il gruppo fondamentale di ciascuna componente connessa per archi di $X \cup Y$, al variare della posizione reciproca tra X e Y.

16.65.*** Sia $X \subset \mathbb{R}^3$ una sfera e sia $Y \subset \mathbb{R}^3$ una retta. Si studi la classe di omeomorfismo di $X \cup Y$ e il gruppo fondamentale di ciascuna componente connessa per archi di $X \cup Y$, al variare della posizione reciproca tra X e Y.

16.66.*** Siano X e Y due sfere in $\mathbb{R}^3$. Si studi la classe di omeomorfismo di $X \cup Y$ e il gruppo fondamentale di ciascuna componente connessa per archi di $X \cup Y$, al variare della posizione reciproca tra X e Y.

16.67.*** Su S^2 si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ data da: per ogni $(x, y, z) \in S^2$ e $(x', y', z') \in S^2$ si ha

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \qquad \text{se e solo se} \qquad (x, y, z) = (x', y', z') \text{ oppure } (x' = -x,\ y' = -y,\ z = z' = 0)\,.$$

Si consideri lo spazio topologico quoziente $X := S^2/\sim$. Si provi che X è compatto, T2, connesso per archi. Si calcoli il gruppo fondamentale di X.

16.68.**** Si provi che il gruppo fondamentale del complementare di due punti in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è il gruppo libero con 2 generatori.

16.69.*** Si determini il gruppo fondamentale della compattificazione di Alexandroff del cilindro aperto infinito $S^1 \times \mathbb{R}$.

16.70.*** Si determini il gruppo fondamentale della compattificazione di Alexandroff del nastro di Möbius aperto considerato in 15.29.

16.71.*** Esistono due varietà topologiche connesse, della stessa dimensione, che abbiano lo stesso gruppo fondamentale ma che non siano omeomorfe? [Se si richiede che siano entrambe compatte, probabilmente servono strumenti piú avanzati di topologia algebrica.]

16.72.** Sia G un gruppo e sia $S \subseteq G$ un sottoinsieme. Sia $\langle S \rangle$ il *sottogruppo di G generato da S*, cioè l'intersezione di tutti i sottogruppi di G contenenti S. Sia $\langle\langle S \rangle\rangle$ il *sottogruppo normale di G generato da S*, cioè l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di G contenenti S. Si ponga $T = S \cup \{s^{-1} \mid s \in S\}$.

(1) Si provi che $\langle S \rangle$ è un sottogruppo di G.
(2) Si provi che $\langle\langle S \rangle\rangle$ è un sottogruppo normale di G.
(3) Si provi $\langle S \rangle \subseteq \langle\langle S \rangle\rangle$.
(4) Si esibisca un esempio in cui $\langle S \rangle \subsetneqq \langle\langle S \rangle\rangle$.
(5) Si provi $\langle S \rangle = \{t_1 \cdots t_n \mid n \in \mathbb{N},\ t_1, \ldots, t_n \in T\}$, dove si conviene che il prodotto vuoto (cioè per $n = 0$) sia l'elemento neutro del gruppo.
(6) Si provi $\langle\langle S \rangle\rangle = \{g_1 t_1 g_1^{-1} \cdots g_n t_n g_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N},\ t_1, \ldots, t_n \in T,\ g_1, \ldots, g_n \in G\}$.
(7) Si provi che $\langle\langle S \rangle\rangle$ è il sottogruppo generato da $\bigcup_{g \in G} gSg^{-1} = \{gsg^{-1} \mid g \in G, s \in S\}$.

16.73.** Sia

(1)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & D \end{tikzcd}$$

un diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi, cioè A, B, C, D sono gruppi, $\alpha\colon C \to A$, $\beta\colon C \to B$, $\phi\colon A \to D$ e $\psi\colon B \to D$ sono omomorfismi di gruppi tali che $\psi \circ \beta = \phi \circ \alpha$.

Sia $(A * B, \lambda, \mu)$ il prodotto libero tra A e B, con $\lambda\colon A \to A * B$ e $\mu\colon B \to A * B$ omomorfismi iniettivi. Per la proprietà universale che definisce il prodotto libero esiste ed è unico un omomorfismo $\chi\colon A * B \to D$ tale che $\chi \circ \lambda = \phi$ e $\chi \circ \mu = \psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\phi"] & \\
C \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A * B \arrow[r, "\chi"] & D \\
 & B \arrow[u, "\mu"'] \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Sia K l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di $A * B$ contenenti l'insieme $\{\lambda(\alpha(c))\mu(\beta(c^{-1})) \mid c \in C\}$, cioè K è il sottogruppo normale generato da $\{\lambda(\alpha(c))\mu(\beta(c^{-1})) \mid c \in C\}$.

(1) Si provi che K è un sottogruppo normale di $A * B$.
(2) Se $\{c_1, \ldots, c_n\}$ è un insieme di generatori di C, allora K coincide con l'intersezione di tutti i sottogruppi normali di $A * B$ contenenti l'insieme $\{\lambda(\alpha(c_1))\mu(\beta(c_1^{-1})), \ldots, \lambda(\alpha(c_n))\mu(\beta(c_n^{-1}))\}$, cioè con il sottogruppo normale generato da $\{\lambda(\alpha(c_1))\mu(\beta(c_1^{-1})), \ldots, \lambda(\alpha(c_n))\mu(\beta(c_n^{-1}))\}$.
(3) Si provi che per ogni $c \in C$ l'elemento $\lambda(\alpha(c))\mu(\beta(c^{-1}))$ sta nel nucleo di χ.
(4) Si provi il contenimento $K \subseteq \ker \chi$.
(5) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (a) χ è suriettivo,
  (b) per ogni $d \in D$ esistono $a_1, \ldots, a_n \in A$ e $b_1, \ldots, b_n \in B$ tali che $d = \phi(a_1)\psi(b_1) \cdots \phi(a_n)\psi(b_n)$.
(6) Si provi che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
  (i) χ induce un isomorfismo $(A * B)/K \to D$,
  (ii) χ è suriettivo e $K = \ker \chi$,
  (iii) per ogni gruppo G e per ogni coppia di omomorfismi $\eta\colon A \to G$ e $\theta\colon B \to G$ tali che $\eta \circ \alpha = \theta \circ \beta$, esiste ed è unico un omomorfismo $\kappa\colon D \to G$ tale che $\eta = \kappa \circ \phi$ e $\theta = \kappa \circ \psi$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "\eta"] & & \\
C \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & A * B \arrow[r, "\chi"] & D \arrow[r, "\kappa"] & G \\
 & B \arrow[u, "\mu"'] \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[urr, bend right, "\theta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Se una (e quindi ogni) affermazione in (6) vale, allora diremo che il diagramma commutativo (1) è un *diagramma di pushout* oppure che D è il prodotto amalgamato di A e di B sopra C.

Adesso, nel seguito, si supponga che (1) sia un diagramma di pushout e si provino le seguenti affermazioni.

(7) Se C è banale, allora χ è un isomorfismo.
(8) Se α e β sono omomorfismi nulli, allora χ è un isomorfismo.
(9) Se A e B sono banali, allora D è banale.
(10) Se A è banale, allora ψ è suriettivo e $\ker \psi$ è l'intersezione dei sottogruppi normali di B contenenti $\operatorname{im} \beta$. [Suggerimento: μ è un isomorfismo.]
(11) Se B è banale, allora ϕ è suriettivo e $\ker \phi$ è l'intersezione dei sottogruppi normali di A contenenti $\operatorname{im} \alpha$.
(12) Se A è banale e β è suriettivo, allora D è banale.
(13) Se B è banale e α è suriettivo, allora D è banale.
(14) Se α è suriettivo, allora ψ è suriettivo.
(15) Se β è suriettivo, allora ϕ è suriettivo.
(16) Se α è un isomorfismo, allora ψ è un isomorfismo.
(17) Se β è un isomorfismo, allora ϕ è un isomorfismo.

Osservazione. Il teorema di van Kampen può essere enunciato cosí: sia X uno spazio topologico, siano A e B due sottoinsiemi aperti di X tali che A, B e $A \cap B$ sono connessi per archi e $X = A \cup B$; allora per ogni punto $x_0 \in A \cap B$ le immersioni aperte

$$\begin{tikzcd}
A \cap B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

inducono un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "\beta_*"'] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "f_*"] \\ \pi_1(B, x_0) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

che è un diagramma di pushout nella categoria dei gruppi.

16.74.** Supponiamo di essere nelle ipotesi del teorema di van Kampen e siano $\alpha_*, \beta_*, f_*, g_*$ come nell'osservazione. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se $A \cap B$ è semplicemente connesso, allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al prodotto libero $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$.
(2) Se A e B sono semplicemente connessi, allora X è semplicemente connesso.
(3) Se A è semplicemente connesso, allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al quoziente $\pi_1(B, x_0)/N$, dove N è il sottogruppo normale generato da $\operatorname{im} \beta_*$.
(4) Se B è semplicemente connesso, allora $\pi_1(X, x_0)$ è isomorfo al quoziente $\pi_1(A, x_0)/N$, dove N è il sottogruppo normale generato da $\operatorname{im} \alpha_*$.
(5) Se A è semplicemente connesso e β_* è suriettivo, allora X è semplicemente connesso.
(6) Se B è semplicemente connesso e α_* è suriettivo, allora X è semplicemente connesso.
(7) Se α_* è suriettivo, allora g_* è suriettivo.
(8) Se β_* è suriettivo, allora f_* è suriettivo.
(9) Se α_* è un isomorfismo, allora g_* è un isomorfismo.
(10) Se β_* è un isomorfismo, allora f_* è un isomorfismo.

16.75.*** Sia $n \geq 1$ un intero, sia X una varietà topologica connessa di dimensione n e siano $x_0, x_1 \in X$ due punti distinti. Si consideri l'immersione aperta $j\colon X \smallsetminus \{x_0\} \hookrightarrow X$ e l'omomorfismo indotto da j sui gruppi fondamentali:

$$j_*\colon \pi_1(X \smallsetminus \{x_0\}, x_1) \to \pi_1(X, x_1).$$

(1) Si faccia un esempio in cui j_* è iniettivo e non suriettivo.
(2) Si faccia un esempio in cui j_* è suriettivo e non iniettivo.
(3) Si provi che se $n \geq 2$ allora j_* è suriettivo.
(4) Si provi che se $n = 2$ allora esiste un elemento $g \in \pi_1(X \smallsetminus \{x_0\}, x_1)$ tale che $\ker j_*$ è il piú piccolo sottogruppo normale di $\pi_1(X \smallsetminus \{x_0\}, x_1)$ contenente g.
(5) Si provi che se $n \geq 3$ allora j_* è un isomorfismo.