

Appunti del corso di Fisica Matematica 1

Prof. Pierluigi Contucci

a cura del Dott. Francesco Camilli

27 maggio 2022

Indice

1	Spazio, tempo e velocità	7
1.1	Misure e sistema internazionale	7
1.2	Velocità media e istantanea	9
1.3	Moto rettilineo uniforme	12
1.4	Moti relativi: trasformazioni di Galileo	17
2	Accelerazione	21
2.1	Accelerazione media e istantanea	21
2.2	Moto uniformemente accelerato, legge di conservazione	22
2.3	Galileo e la caduta dei gravi	25
3	Moti piani	35
3.1	Richiami sui vettori del piano	35
3.2	Angoli piani	38
3.3	Prodotto scalare	39
3.4	Moto del proiettile	40
3.5	Zona sicura	43
3.6	Moto circolare uniforme	49
4	Dinamica e leggi di Newton	53
4.1	Primo principio della dinamica (Principio di inerzia)	53
4.2	Le forze e il secondo principio della dinamica	53
4.3	Il terzo principio della dinamica (di azione e reazione)	55
4.4	Sistemi di riferimento inerziali	55
4.5	Forza peso e massa gravitazionale	55
4.6	Quantità di moto e terzo principio	60
5	Lavoro ed Energia	65
5.1	Definizione elementare di lavoro: forze costanti in una dimensione . . .	65

5.2	Teorema dell'energia cinetica per forze posizionali	66
5.3	Estensione a 2 e 3 dimensioni	71
5.4	Forze conservative	75
6	Gravitazione Universale	81
6.1	Forza gravitazionale newtoniana	81
6.2	Leggi di Keplero	83
6.3	Lavoro della forza gravitazionale Newtoniana	84
6.4	Campo gravitazionale	88
6.5	Potenziale gravitazionale	90
7	Flusso del campo gravitazionale	93
7.1	Caso bidimensionale	93
7.2	Caso tridimensionale	99
7.3	Teorema di Newton	102
8	Argomenti monografici	107
8.1	Moti lungo curve in campo gravitazionale costante	107
8.2	Sistemi di punti materiali: il baricentro	110
8.3	Urti unidimensionali	113
8.4	Moti e problemi variazionali	116
8.5	Appendice: cenni sulla stabilità	120
9	Moti rotatori	123
9.1	Moto circolare	123
9.2	Momento torcente	125
9.3	Il prodotto vettoriale	127
9.4	Momento angolare e momento torcente	128
9.5	Il corpo rigido, versione elementare	129
9.6	Energia cinetica di rotazione	131
9.7	Il pendolo nelle piccole oscillazioni	132
9.8	Lavoro ed energia potenziale del momento torcente	135
10	Relatività ristretta	141
10.1	Propagazione sferica e postulati della relatività	141
10.2	Le Trasformazioni di Lorentz	144
10.3	Spazio-Tempo di Minkowski	147
10.4	Effetti relativistici	149
10.5	Appendice: deduzione diretta degli effetti relativistici	156

11 La passeggiata aleatoria	159
11.1 Probabilità discreta	160
11.2 Variabili aleatorie, media e varianza	163
11.3 Probabilità congiunta e indipendenza	165
11.4 La passeggiata aleatoria	168
12 Esercizi di ricapitolazione	171

Capitolo 1

Spazio, tempo e velocità

Questo capitolo introduce i concetti di spazio e tempo attraverso le loro operazioni di misura. A partire da questi si introducono le nozioni classiche di velocità media e istantanea. Si considera il moto rettilineo uniforme e vengono risolti alcuni semplici problemi. Il capitolo si conclude con le trasformazioni di Galileo tra sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. Si dimostra che esse formano un gruppo e che conservano la metrica euclidea.

1.1 Misure e sistema internazionale

Iniziamo con la definizione della misura di una lunghezza. In modo analogo si definisce la misura di tempo e di massa che insieme allo spazio sono le grandezze fisiche fondamentali della meccanica.

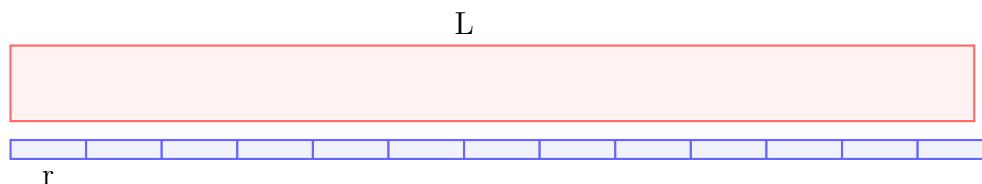


Figura 1.1: Confronto fra regoli e tavolo.

La misura è una operazione di confronto tra grandezze omogenee. Per misurare la lunghezza L di un tavolo in relazione a quella r di un regolo poniamo tante copie identiche del regolo una accanto all'altra come in Figura 1.1. Troveremo, per esempio, che la lunghezza del tavolo è compresa tra $12r$ e $13r$. Se la precisione ottenuta è

sufficiente ai nostri scopi ci fermiamo concludendo che

$$12r < L < 13r ,$$

altrimenti procediamo a una seconda operazione. Dividiamo quindi il nostro regolo in dieci (o due se usiamo il sistema binario invece che decimale) parti uguali e riportiamo i decimi di regolo nella parte restante alla misurazione precedente. Troveremo, per

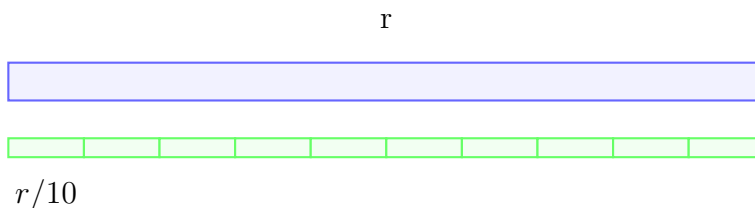


Figura 1.2: Decimi di regolo.

esempio, che essa contiene 3 decimi di regolo mentre un quarto decimo eccede la lunghezza. La misura ha fornito quindi il risultato:

$$12.3r < L < 12.4r$$

e così via. Fermandoci, per esempio, ai millesimi si ottiene la misura della lunghezza del tavolo:

$$12.310r < L < 12.311r$$

che possiamo anche riscrivere introducendo il quoziente tra le due grandezze $x = L/r$ come

$$12.310 < x < 12.311.$$

Una misura quindi è l'identificazione di un intervallo di numeri razionali: il sinistro che è l'approssimante per difetto e il destro che è quello per eccesso. Il semi-intervallo dà una stima dell'errore di misura relativo allo strumento utilizzato. Nello studio della meccanica classica si assume che questo processo di misura possa essere reso infinitamente preciso e che conduca a un numero *reale* come elemento di separazione di una successione telescopica di intervalli razionali. Diremo che questo numero reale è la lunghezza del tavolo senza dimenticare che il numero reale è un *modello* idealizzato della realtà fisica.

Il Sistema Internazionale definisce le unità di misura da utilizzare per misurare le varie grandezze. Ad esempio definisce cos'è il regolo dell'esempio precedente. Per quanto riguarda la Meccanica, le unità di misura fondamentali sono:

- Per le *Lunghezze*: m , metro;
- Per i *Tempi*: s , secondo;
- Per le *Masse*: kg , chilogrammo.

Storicamente i campioni di lunghezze, tempo e massa venivano ufficialmente conservati nei musei. Più di recente invece la loro identificazione utilizza le relazioni con le costanti fondamentali della natura, come la velocità della luce o la frequenza delle oscillazioni della radiazione in una certa transizione atomica etc.

1.2 Velocità media e istantanea

Un moto che si svolge su una dimensione spaziale è identificato da misure di spazio in \mathbb{R} e di tempo in \mathbb{R} entrambe dotate di una origine O . I due assi con la loro origine vengono chiamati *Sistema di riferimento* (SdR).

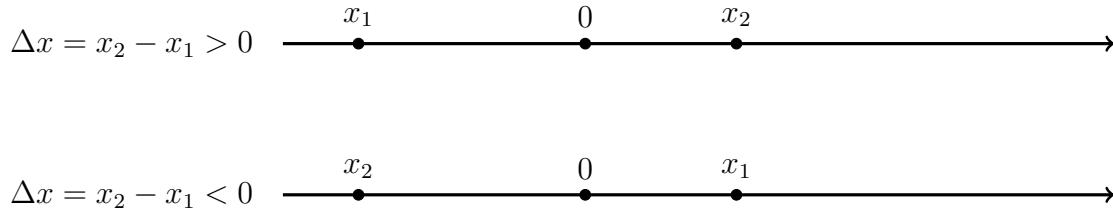


Figura 1.3: Asse del moto unidimensionale. Spostamento (con segno).

Come in Figura 1.3, possiamo definire sull'asse del moto l'*intervallo spaziale*, lo spostamento:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (1.1)$$

che dunque è un numero reale, e il suo segno è rilevante.

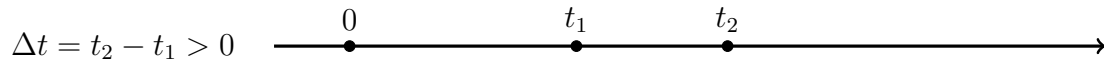


Figura 1.4: Asse dei tempi.

Allo stesso modo possiamo immaginare di disporre i tempi su un asse reale e di definire un *intervallo temporale*, anch'esso numero reale:

$$\Delta t = t_2 - t_1 . \quad (1.2)$$

Il moto di un punto è descritto da coppie di misure di spazi e tempi nelle diverse posizioni. È utile porre le coppie in un piano cartesiano, come fatto in Figura 1.5.

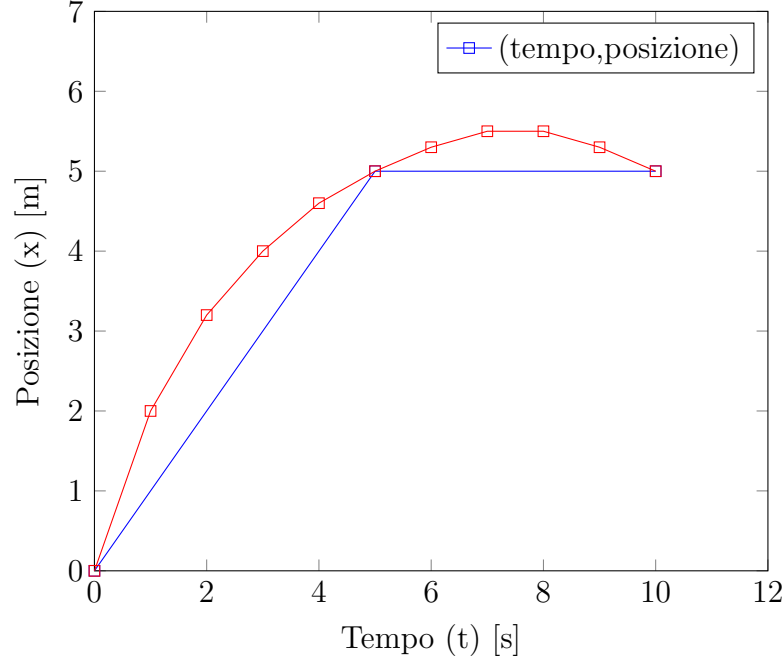


Figura 1.5: Esempio di misure di posizione e tempo.

Da due misurazioni (talvolta chiamate eventi) (t_1, x_1) , (t_2, x_2) possiamo definire la *velocità media*:

$$\bar{v}_{12} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.3)$$

Nell'esempio in Figura 1.5, nel primo tratto blu ascendente la velocità media vale:

$$\bar{v}_{12} = \frac{(5 - 0)m}{(5 - 0)s} = 1m/s$$

Lungo il tratto blu orizzontale:

$$\bar{v}_{23} = \frac{(5 - 5)m}{(10 - 5)s} = 0m/s$$

Mentre la velocità media nell'intero intervallo di tempo di 10s vale:

$$\bar{v}_{13} = \frac{(5 - 0)m}{(10 - 0)s} = 0.5m/s$$

Notare che la velocità media dipende solo dagli estremi degli intervalli spazio temporali. Si osserva inoltre che la velocità media su un intervallo di tempo è la pendenza del segmento di spezzata che vedete nel grafico in Figura 1.5.

Se si possiede, Figura 1.5, un campionamento più fine (spezzata rossa) si può ottenere la velocità media anche in intervalli più piccoli.

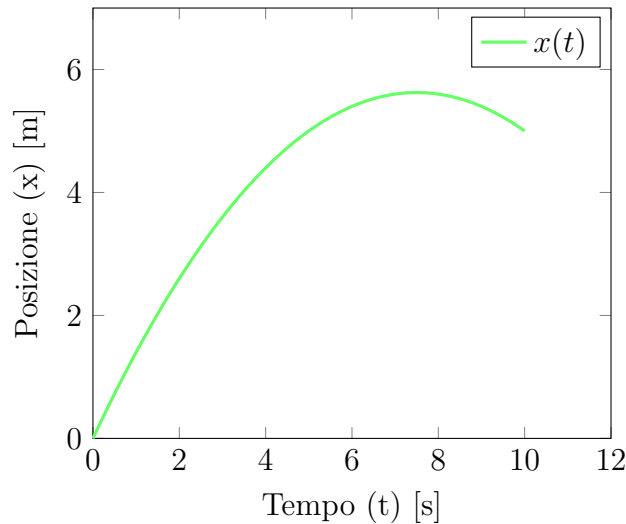


Figura 1.6: Un esempio di grafico di posizione vs tempo.

Il modello della meccanica classica imposta lo studio del moto nell'ipotesi di avere un campionamento della posizione infinitamente preciso, continuo, di spazio e tempo. In tal caso si può parlare di *velocità istantanea*, non più riferita a un intervallo di tempo, ma a un istante ben preciso. Ciò si ottiene utilizzando il concetto di *derivata*, facendo tendere a zero l'ampiezza dell'intervallo temporale.

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \quad (1.4)$$

Si assume, salvo indicazione contraria, che la posizione sia funzione continua e derivabile del tempo. Il significato geometrico della derivata è ben noto dai corsi di analisi ed è rappresentato dal coefficiente angolare della tangente alla curva $x(t)$ nel punto.

1.3 Moto rettilineo uniforme

La legge oraria, cioè $x(t)$, per il moto rettilineo uniforme è:

$$x(t) = vt + x_0 \quad (1.5)$$

dove x_0 è la posizione a $t = 0$, e v è una costante. Da questa espressione si verifica immediatamente che la velocità istantanea di tale moto è costante ed è proprio v .

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v$$

La linearità nel tempo è una caratteristica di moti con velocità costanti.

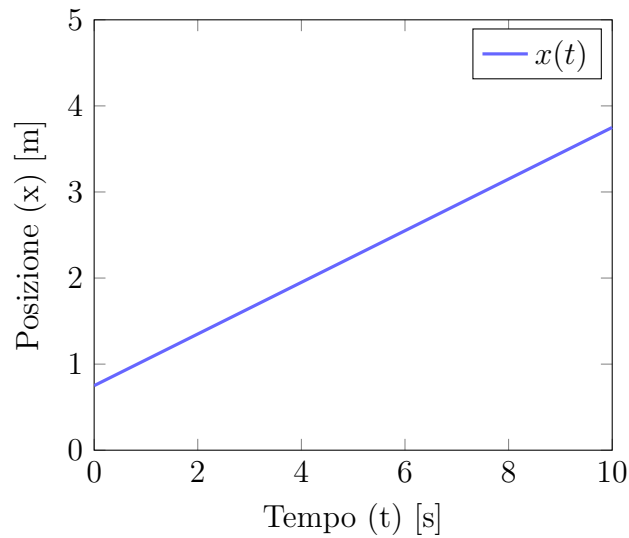


Figura 1.7: Grafico posizione vs tempo per il moto rettilineo uniforme.

Esercizio 0. Due corpi puntiformi situati in x_1 e $x_2 > x_1$ viaggiano uno contro l'altro con velocità $v_1 > 0$ e $-v_2 < 0$. Stabilire in quale istante e dove si incontrano i due corpi. Proponiamo due soluzioni.

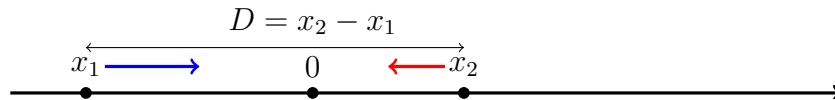


Figura 1.8: Figura Esercizio 0.

Soluzione 1, metodo geometrico. Quando i due punti si incontrano avranno percorso rispettivamente una distanza d_1 e d_2 e:

$$D = d_1 + d_2$$

Inoltre, il tempo \bar{t} a cui si incontrano vale:

$$\bar{t} = \frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2}.$$

Abbiamo dunque un sistema lineare:

$$\begin{cases} D = d_1 + d_2 \\ \frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} \end{cases} \Rightarrow d_1 = v_1 \frac{d_2}{v_2}$$

Quindi:

$$D = \left(1 + \frac{v_1}{v_2}\right) d_2 \Rightarrow d_2 = D \frac{v_2}{v_1 + v_2}, \quad d_1 = D \frac{v_1}{v_1 + v_2}$$

$$\bar{t} = \frac{D}{v_1 + v_2}$$

Dalla soluzione si evince che ognuno dei due corpi vede arrivare l'altro con velocità pari alla somma delle velocità di ciascuno.

Soluzione 2, metodo analitico. Usando le stesse notazioni scriviamo le leggi del moto dei due punti:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1 t + x_1 \\ x_2(t) &= -v_2 t + x_2 \end{aligned}$$

da cui imponendo che $x_1(\bar{t}) = x_2(\bar{t}) = \bar{x}$ si ottiene

$$\bar{t}(v_1 + v_2) - (x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \bar{t} = \frac{x_2 - x_1}{v_1 + v_2} = \frac{D}{v_1 + v_2}$$

e

$$\bar{x} = D \frac{v_1}{v_1 + v_2} + x_1 = -D \frac{v_2}{v_1 + v_2} + x_2$$

Si verifica facilmente che $\bar{x} - x_1 = d_1$ e $x_2 - \bar{x} = d_2$. La soluzione rappresenta chiaramente l'intersezione delle due equazioni del moto (rette) come illustrato in Figura 1.9.

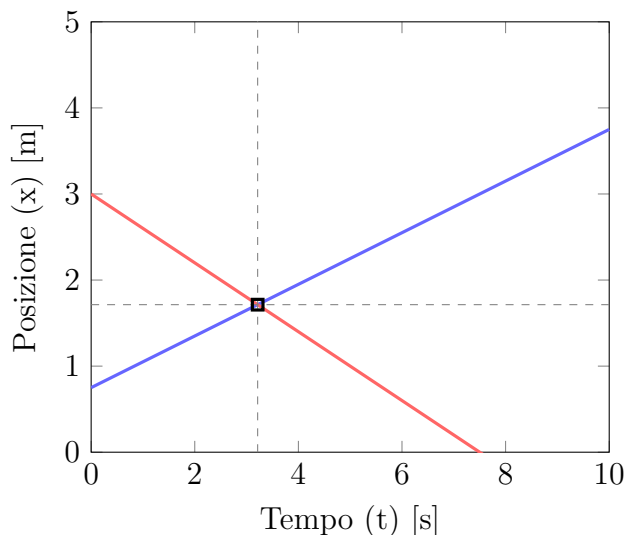


Figura 1.9: Posizioni vs tempo nell'Esercizio 0. Colori in corrispondenza con Figura 1.8.

Esercizio 1 (Il falco e il treno). Un falco parte dalla punta di un treno, in moto con velocità $v_T > 0$, spiccando il volo con una velocità $v_F > v_T$ quando entrambi distano D dalla stazione verso la quale sono diretti. Ogni volta che il falco raggiunge la stazione inverte la sua rotta e torna indietro verso il treno, e così via come in Figura 1.10.

Assumendo che il falco inverte istantaneamente ogni volta la velocità, si calcoli lo spazio percorso dal falco quando il treno è arrivato alla stazione.

Soluzione: Risolveremo il problema per iterazione dapprima calcolando la distanza $D^{(1)}$ a cui si trovano entrambi al termine del primo viaggio del falco. Per farlo utilizzeremo l'esercizio precedente. La prima fase, in cui il falco va verso la stazione insieme al treno, è di semplice moto rettilineo uniforme per entrambi.

$$\tilde{t} = \frac{D}{v_F}$$

$$\tilde{D} = D - v_T \tilde{t} = D \left(1 - \frac{v_T}{v_F} \right)$$

La seconda fase, in cui falco e treno si vengono incontro, è identica all'Esercizio 0, con un $\Delta x = \tilde{D}$. Dunque la distanza dalla stazione si accorcia ulteriormente

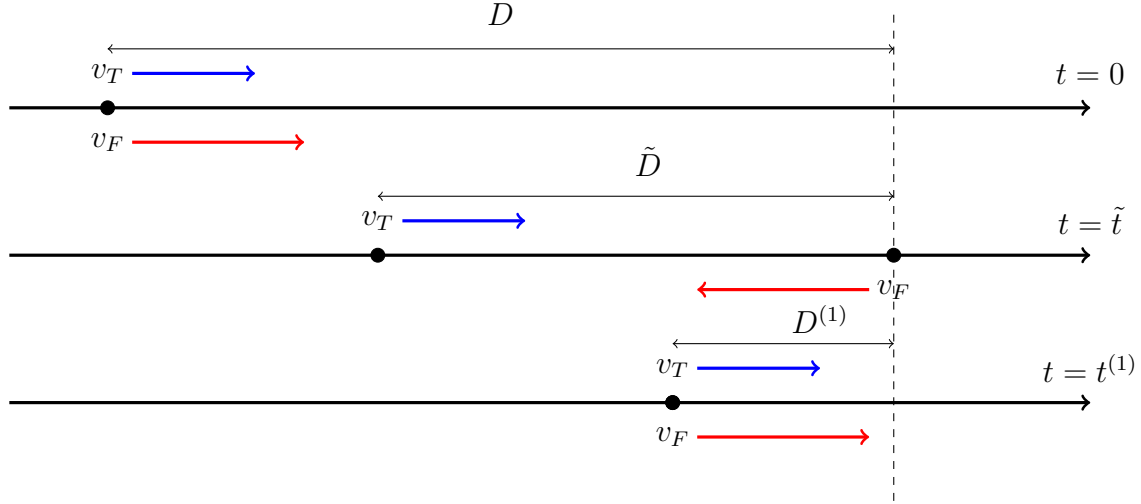


Figura 1.10: Problema del falco e del treno (Esercizio 1).

arrivando a:

$$D^{(1)} = \tilde{D} - \tilde{D} \frac{v_T}{v_T + v_F} = \tilde{D} \left(1 - \frac{v_T}{v_T + v_F} \right) = D \underbrace{\frac{v_F - v_T}{v_F + v_T}}_{=\alpha < 1}.$$

Si veda il processo nella Figura 1.10. Il secondo viaggio sarà identico al primo con la sola differenza che la distanza iniziale è $D^{(1)}$ pertanto alla fine di esso la nuova distanza di falco e treno dalla stazione sarà $D^{(2)} = D^{(1)}\alpha = D\alpha^2$. Analogamente $D^{(n)} = D\alpha^n$.

Possiamo dunque scrivere una formula che racchiuda lo spazio totale percorso dal falco tenendo presente che ogni tratto $D^{(n)}$ viene percorso due volte dal falco, una verso il treno e l'altra verso la stazione:

$$S = D + D^{(1)} + D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(2)} + \dots = -D + 2 \sum_{n=0}^{\infty} D^{(n)} = -D + 2D \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$$

La somma infinita della precedente espressione si riduce alla *serie geometrica* che si calcola esplicitamente (vedere Esercizio 3):

$$S = D \left(-1 + \frac{2}{1 - \alpha} \right) = D \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = \frac{D}{v_T} v_F$$

Possiamo isolare esplicitamente il tempo di volo del falco:

$$T_F = \frac{D}{v_T}.$$

Un modo alternativo, semplice ed intuitivo, per risolvere l'esercizio, che tuttavia nasconde il pregio della serie geometrica, è osservare che il tempo di volo del falco coincide con quello in cui il treno arriva in stazione cioè $T_F = \frac{D}{v_T}$. Considerando inoltre che il falco si muove con velocità di modulo costante lo spazio totale da esso percorso risulta

$$S = T_F v_F = \frac{D}{v_T} v_F.$$

Esercizio 2. Studiare la legge del moto del falco cioè la sua posizione in funzione del tempo. Che proprietà di regolarità possiede? È continua? È derivabile?

Esercizio 3 (La serie geometrica). La serie geometrica utilizzata nel precedente esercizio:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$$

converge solo se $|\alpha| < 1$, ipotesi senz'altro verificata nell'Esercizio 1. Il risultato della serie viene dal limite delle somme parziali che ora calcoleremo.

$$S_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n$$

Essa verifica le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + \alpha^{n+1} \\ \alpha S_n = S_{n+1} - 1 \end{cases} \quad \text{risolviamo per } S_n \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad (1.6)$$

Dunque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (1.7)$$

perché $\alpha^n \rightarrow 0$ se $|\alpha| < 1$.

La dimostrazione del risultato delle somme parziali può anche essere fatta per induzione. Vogliamo provare che:

$$S_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

L'uguaglianza vale sicuramente per $n = 0$:

$$S_0 = 1 = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha}$$

Assumiamo ora che valga per n generico e dimostriamo che implica lo stesso asserto con $n + 1$.

$$S_{n+1} = S_n + \alpha^{n+1} = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} + \alpha^{n+1} = \frac{1 - \alpha^{n+2}}{1 - \alpha}$$

Questo conclude la prova. Notare che la prima dimostrazione è *costruttiva*, nel senso che la formula viene ricavata dalla semplice soluzione di un sistema lineare. La seconda dimostrazione al contrario verifica solo che una formula proposta è effettivamente corretta.

1.4 Moti relativi: trasformazioni di Galileo

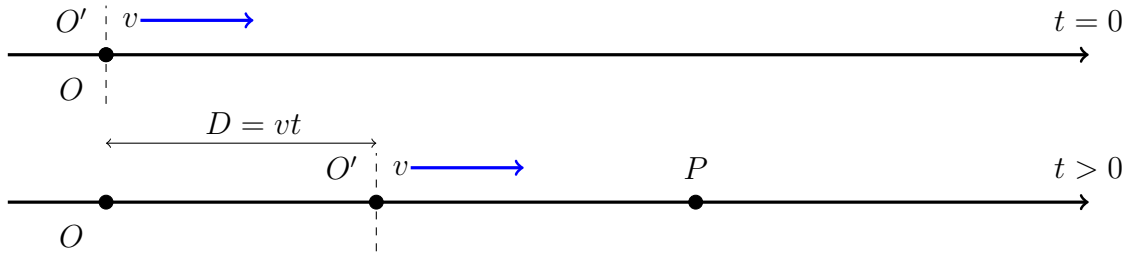


Figura 1.11: Due sistemi di riferimento in moto relativo.

Si considerino due sistemi di riferimento O ed O' con il secondo in moto a velocità costante v rispetto al primo, vedi Figura 1.11. I concetti classici di spazio e tempo assoluti ci permettono di scrivere come si trasformano le coordinate spazio-temporali di uno stesso punto P se osservate rispetto a O (x, t) o rispetto a O' (x', t'):

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' + vt' \\ t = t' \end{cases} \quad (1.8)$$

le precedenti sono chiamate *trasformazioni di Galileo*

Esercizio 4 (Legge di composizione delle velocità). Un treno si muove a velocità v rispetto a una stazione. Dal treno viene sparato un proiettile che viaggia a velocità

v' rispetto ad esso verso la stazione. Calcolare la velocità con cui il proiettile arriva alla stazione.

Soluzione: Chiamiamo $x'(t)$ la legge del moto del proiettile rispetto al treno, $x(t)$ la legge del moto rispetto alla stazione. Per la trasformazione di Galileo:

$$x(t) = x'(t) + vt$$

Derivando ambo i membri otteniamo la legge di trasformazione o composizione delle velocità:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = v' + v \quad (1.9)$$

Osservazione 1.1. Lo stesso risultato si poteva ottenere componendo due trasformazioni galileiane: quella sopra indicata tra treno e stazione e quella tra O'' ed O' , rispettivamente proiettile e treno. Siccome la trasformazione di Galileo è lineare anche nelle velocità la composizione di due trasformazioni lineari è ancora lineare e il parametro composto è la somma dei due parametri.

Esercizio 5. Dimostrare che le trasformazioni di Galileo formano un *gruppo*.

Soluzione: Anzitutto troviamo la rappresentazione matriciale di trasformazione del vettore (x, t) in quello (x', t') . Si verifica immediatamente che:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - vt \\ t \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Definiamo

$$G_v = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Verifichiamo che $G_v^{-1} = G_{-v}$, cioè che $G_v \cdot G_{-v} = \mathbb{1}$:

$$G_v \cdot G_{-v} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = G_0$$

Completare l'esercizio mostrando che le trasformazioni di Galileo sono un gruppo a un parametro v che obbedisce alla legge:

$$G_{v_1} \cdot G_{v_2} = G_{v_1+v_2}. \quad (1.12)$$

Esercizio 6. Verificare che le trasformazioni di Galileo lasciano inalterate le distanze euclidee misurate a tempi sincroni.

Soluzione: L'osservatore O prende due misure di posizione e tempo (x_1, t_1) e (x_2, t_2) . O' invece misura (x'_1, t_1) e (x'_2, t_2) rispettivamente.

$$D' = |x'_2 - x'_1| = |x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)|$$

Da cui si vede che nell'ipotesi di sincronia $t_1 = t_2$:

$$D' = |x'_2 - x'_1| = |x_2 - x_1| = D.$$

Lo stesso risultato può essere dimostrato in dimensioni più alte, dove i moduli sono sostituiti da norme euclidee.

Capitolo 2

Accelerazione

In questo capitolo vengono introdotte le nozioni di accelerazione media e istantanea. Viene analizzato in particolare il moto ad accelerazione costante e dimostrata una sua importante legge di conservazione. Viene illustrato il moto dei gravi come esempio e vengono risolti esercizi su composizioni di moti uniformi e uniformemente accelerati.

2.1 Accelerazione media e istantanea

Nel capitolo precedente abbiamo visto che a partire dalla legge di moto $x(t)$ possiamo calcolare la velocità $v(t)$. In questo capitolo ci occuperemo della derivata della velocità, cioè dell'accelerazione.

Si definisce *accelerazione media* tra due istanti di tempo t_1 e t_2 e velocità v_1 e v_2 la quantità:

$$\bar{a}_{12} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (2.1)$$

e analogamente quella *istantanea*:

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) . \quad (2.2)$$

L'accelerazione si misura in metri al secondo quadrato, m/s^2 .

Osservazione 2.1. Il moto rettilineo uniforme soddisfa le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x(t) &= vt + x_0 \quad \text{con } v \text{ costante} \\ \dot{x}(t) &= v(t) = v \\ \ddot{x}(t) &= a(t) = 0 . \end{aligned}$$

Si veda la Figura 2.1.

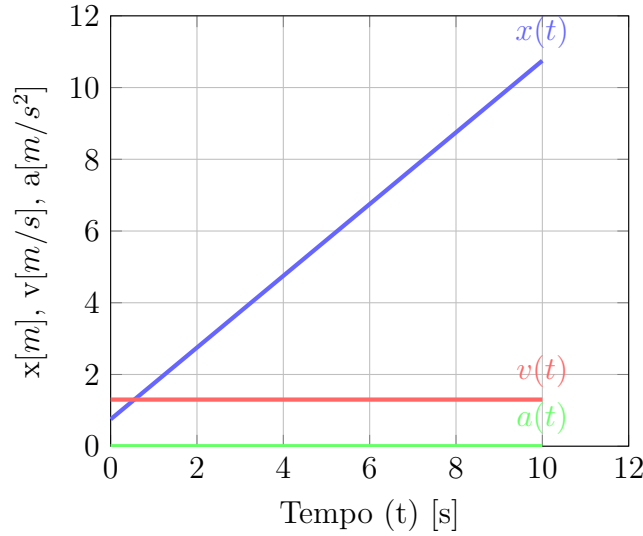


Figura 2.1: Moto rettilineo uniforme.

Esercizio 7. Calcolare lo spazio percorso a $v = cost$ in un intervallo Δt dandone una rappresentazione geometrica nel piano velocità-tempo.

Soluzione: il calcolo, già utilizzato nel capitolo precedente, porge subito

$$\Delta x = v \Delta t$$

cioè l'area (con segno!) del rettangolo sotteso dal grafico della velocità. Si veda Figura 2.2.

Definiamo moto ad accelerazione costante, o uniformemente accelerato, quello la cui velocità obbedisce alla legge

$$v(t) = at + v_0 \quad \text{con } a \text{ costante reale} \quad (2.3)$$

Osservazione 2.2. In generale lo spazio percorso in un moto vario è l'area sottesa dalla curva $v(t)$, ossia l'integrale (di Riemann) di $v(t)$ tra due istanti di tempo:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.4)$$

2.2 Moto uniformemente accelerato, legge di conservazione

Esercizio 8. Calcolare lo spazio percorso in un moto uniformemente accelerato.

2.2. MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO, LEGGE DI CONSERVAZIONE²³

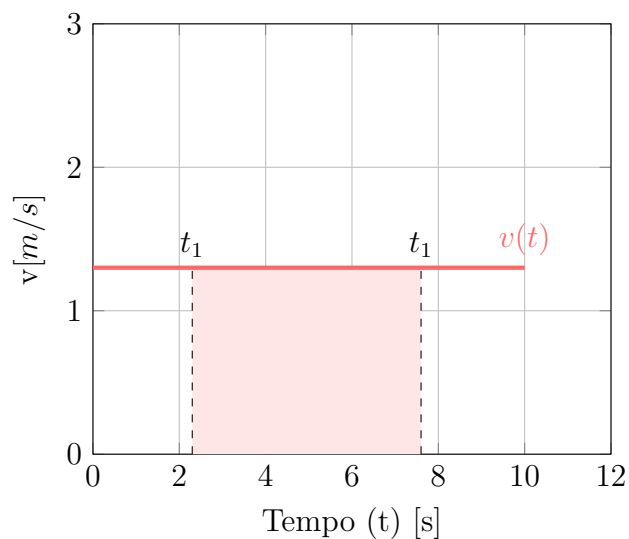


Figura 2.2: Area e spazio percorso.

Soluzione: Si può procedere per via geometrica calcolando l'area del trapezio in Figura 2.3.

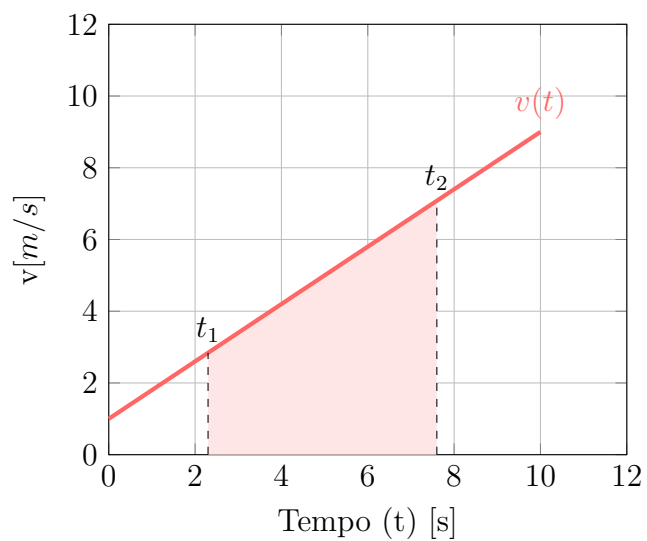


Figura 2.3: Spazio percorso, moto uniformemente accelerato.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}a(t_2 + t_1)(t_2 - t_1) + v_0(t_2 - t_1) = \\ &= \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1) \quad (2.5)\end{aligned}$$

Analiticamente invece si può procedere per integrazione della (2.3).

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} dt v(t) = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0t \right]_{t=t_1}^{t=t_2}.$$

Osservazione 2.3. Il moto uniformemente accelerato obbedisce quindi alle seguenti leggi:

$$\ddot{x}(t) = a = \text{cost} \quad (2.6)$$

$$\dot{x}(t) = at + v_0 \quad (2.7)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \quad (2.8)$$

dove x_0 e v_0 sono posizione e velocità iniziali.

Esercizio 9. Calcolare la velocità media in un moto ad accelerazione $a = \text{cost}$ tra due istanti t_1 e $t_2 > t_1$.

Soluzione: Utilizzando (1.3) e (2.5) si ha:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}a \frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} + v_0 = \frac{1}{2}a(t_2 + t_1) + v_0 = \\ &= \frac{1}{2}(at_2 + v_0) + \frac{1}{2}(at_1 + v_0) = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2}\end{aligned}$$

cioè la velocità media in un moto ad accelerazione costante risulta essere la media aritmetica delle due velocità agli estremi. Quindi:

$$\bar{v} = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (2.9)$$

Dall'esercizio precedente ricaviamo un'importantissima **legge di conservazione**. Risolvendo la (2.3) nei tempi

$$t_2 - t_1 = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{a}$$

e sostituendola nella (2.9) otteniamo

$$\frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{a} = x(t_2) - x(t_1) \quad \Rightarrow \quad v^2(t_2) - 2ax(t_2) = v^2(t_1) - 2ax(t_1)$$

Valendo la precedente per tempi generici possiamo scrivere

$$v^2(t) - 2ax(t) = \text{cost} \quad (2.10)$$

2.3 Galileo e la caduta dei gravi

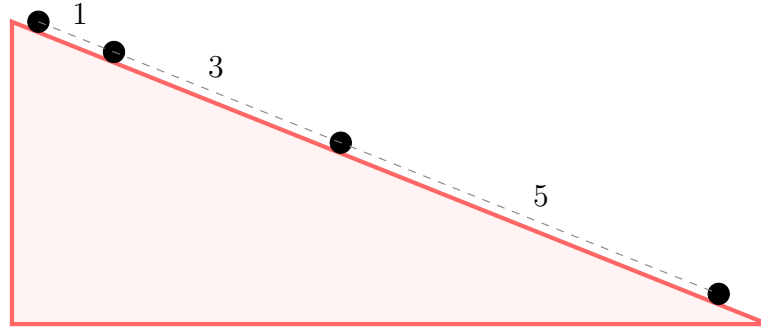


Figura 2.4: Esperimento di Galileo.

La descrizione fornita da Galileo del moto uniformemente accelerato è quella che mostra la crescita degli incrementi spaziali corrispondenti a successivi incrementi temporali costanti. Misurando le posizioni successive, nel caso del piano inclinato (Figura 2.4), si trova che gli incrementi crescono come i numeri dispari.

$$\begin{aligned} \Delta x(n=1) &= d \quad \text{ove } d \text{ è una costante opportuna} \\ \Delta x(n=2) &= 3d \\ \Delta x(n=3) &= 5d \\ &\vdots \end{aligned}$$

Da questa successione si può dunque estrarre la legge:

$$\Delta x(n) = x_{n+1} - x_n = d(2n - 1) \quad (2.11)$$

Ciò è equivalente a dire che la posizione cresce quadraticamente nel tempo. Infatti considerando istanti discreti n :

$$\begin{aligned} x(n) &\equiv x_n = d(n-1)^2 \\ x_{n+1} - x_n &= d[n^2 - (n-1)^2] = d(2n-1) \end{aligned}$$

Estrapolando dall'esperimento col piano inclinato Galileo propone una legge di caduta per i gravi con la stessa accelerazione. La misura di tale accelerazione eseguita con strumenti moderni risulta essere

$$g \simeq 9.81 \text{ m/s}^2. \quad (2.12)$$

Ciò significa che la coordinata verticale di un grave è descritta dall'equazione

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0. \quad (2.13)$$

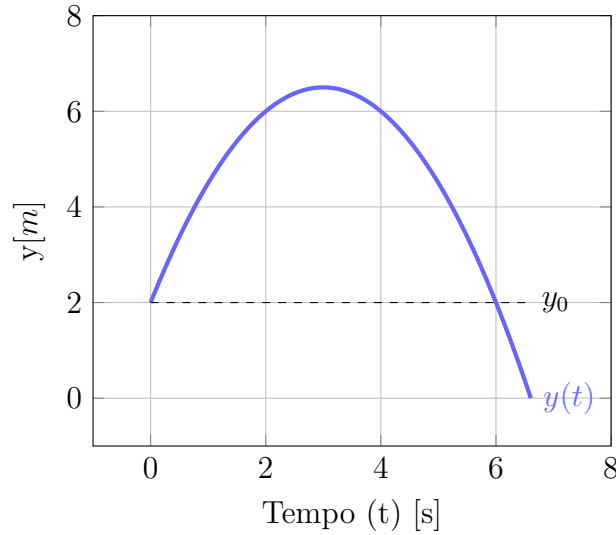


Figura 2.5: Caduta del grave.

Esercizio 10. Una palla viene lanciata verso l'alto con velocità v_0 . Calcolare il tempo di volo \bar{t} cioè il tempo che intercorre tra il lancio e il ritorno alla posizione iniziale.

Soluzione: Scriviamo la legge del moto scegliendo $y_0 = 0$:

$$y(\bar{t}) = 0 = -\frac{1}{2}g\bar{t}^2 + v_0\bar{t} + 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = 0 \vee \bar{t} = \frac{2v_0}{g}$$

Osserviamo che l'analisi dimensionale della soluzione dà esito positivo:

$$[t] = [T] = \frac{[v]}{[g]} = \frac{[L][T]}{[T][L]} \quad \checkmark$$

Esercizio 11. Quanto tempo impiega la palla dell'Esercizio 10 a raggiungere la massima altezza?

Soluzione 1: Osservando che la legge oraria del grave è una parabola nel piano (t, y) Figura 2.5, il tratto ascendente deve essere simmetrico a quello discendente. Per simmetria il tempo cercato è *esattamente la metà* del tempo di volo dell'Esercizio 10.

$$t_{max} = \frac{\bar{t}}{2} = \frac{v_0}{g}$$

Soluzione 2: Il punto più alto è il punto di max della parabola del moto. Per trovarlo basta vedere dove si azzerava la derivata prima di $y(t)$ ovvero la velocità in verticale.

$$v_y(t_{max}) = \dot{y}(t_{max}) = 0 = -gt_{max} + v_0 \quad \Rightarrow \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

Esercizio 12. Quanto vale la massima altezza raggiunta h ? (Si faccia riferimento agli Esercizi 10-11. Si vedano tutte e due le proposte di soluzione.)

Soluzione 1: Basta calcolare $y(t)$ in t_{max} già trovato in precedenza.

$$h = y(t_{max}) = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Soluzione 2: Si può usare la legge di conservazione in cui sostituiamo $a = -g$ con le condizioni $v(0) = v_0$, $v(t_{max}) = 0$ e $y(t_{max}) = h$:

$$v^2(t) + 2gy(t) = cost \quad \Rightarrow \quad v^2(0) + 2gy(0) = v_0^2 = v^2(t_{max}) + 2gy(t_{max}) = 2gh$$

da cui

$$v_0^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.14)$$

Esercizio 13. Una palla viene lanciata verso l'alto da un'altezza y_0 con velocità v_0 . Calcolare il tempo di volo (tempo impiegato per toccare terra, ad altezza $y = 0$) e la velocità d'impatto col suolo. La situazione è rappresentata in Figura 2.5.

Esercizio 14. Una palla viene lasciata cadere ($v_y(0) = 0$) a $t = 0$. Dopo un tempo $\bar{t} > 0$ una seconda palla viene lasciata cadere sulla stessa verticale. Scrivere le equazioni del moto per entrambe le palle e calcolare la distanza che le separa in funzione del tempo per $t > \bar{t}$.

Soluzione: Si osservi che l'equazione del moto per la seconda palla differisce da quella della prima solo per una traslazione temporale in avanti di \bar{t} .

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}g(t - \bar{t})^2 = -\frac{1}{2}gt^2 + gt\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 \quad \text{per } t \geq \bar{t}$$

La distanza che le separa è

$$y_2(t) - y_1(t) = gt\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2$$

e cresce linearmente con t .

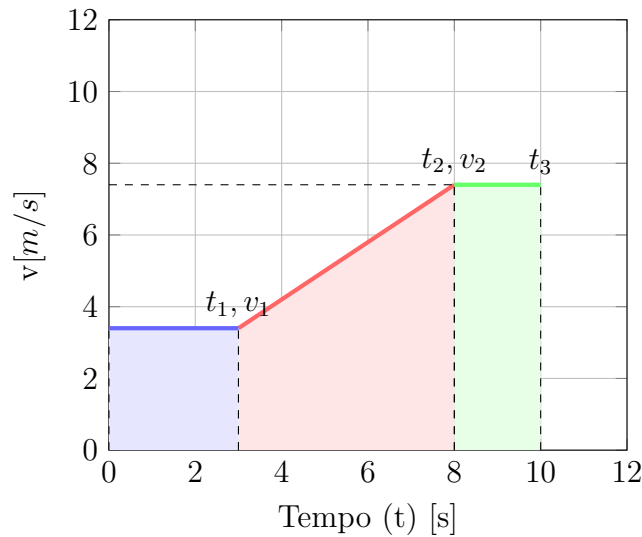


Figura 2.6: Esercizio 15.

Esercizio 15. Facendo riferimento alla Figura 2.6, scrivere la legge oraria del moto.

Soluzione: Basta calcolare, a seconda del tempo trascorso, l'area sottesa dal grafico.

$$x(t) = v_1 t \quad \text{per } t \in [0, t_1]$$

Per il secondo tratto va calcolata la pendenza a della retta.

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Dunque:

$$x(t) = v_1 t_1 + \frac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} (t - t_1)^2 + v_1 (t - t_1) \quad \text{per } t \in (t_1, t_2]$$

Infine, nell'ultimo tratto semplicemente:

$$x(t) = v_1 t_1 + \frac{v_1 + v_2}{2} (t_2 - t_1) + v_2 (t - t_2) \quad \text{per } t \in (t_2, t_3]$$

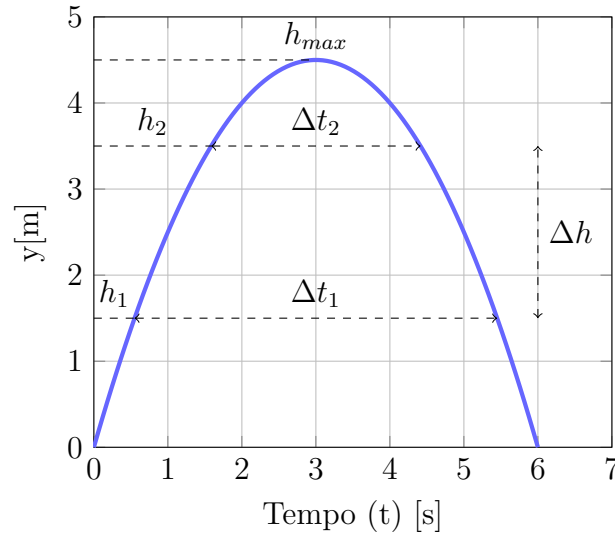


Figura 2.7: Esercizio 16.

Esercizio 16. Si faccia riferimento alla Figura 2.7. I dati forniti dal problema sono: i tempi di volo Δt_1 , Δt_2 e la distanza Δh . Calcolare l'accelerazione gravitazionale.

Soluzione: Sappiamo dagli esercizi precedenti che i tempi di volo soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \frac{2v_1}{g} \\ \Delta t_2 &= \frac{2v_2}{g}.\end{aligned}$$

Utilizzando la legge di conservazione tra le quote h_1 e h_2 otteniamo

$$v_1^2 + 2gh_1 = v_2^2 + 2gh_2$$

da cui la relazione per le velocità

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g\Delta h.$$

Sottraendo i quadrati dei tempi

$$\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2 = \frac{4}{g^2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{8\Delta h}{g}$$

si ha infine

$$g = \frac{8\Delta h}{\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2}$$

Esercizio 17. Dimostrare la formula risolutiva per equazioni di secondo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Soluzione: Procediamo per gradi. Prendiamo per cominciare un caso in cui $b = 0$:

$$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

Sappiamo già risolvere anche il caso $c = 0$, ad esempio:

$$x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Con questi due esempi, con la tecnica del completamento del quadrato sappiamo risolvere anche un caso più complesso:

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x^2 + x + \frac{1}{4}}_{(x+1/2)^2} - \frac{5}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Da questo ultimo esempio deduciamo la tecnica per il caso generale. Dividiamo l'equazione per il coefficiente a e completiamo i quadrati:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esercizio 18. Facendo riferimento alla Figura 2.8, con t_1 , t_2 , v_{max} noti, scrivere le equazioni del moto.

Soluzione: Nel primo tratto ascendente l'accelerazione vale:

$$a_1 = \frac{v_{max}}{t_1}$$

Nel tratto discendente invece l'accelerazione sarà negativa, dunque una decelerazione:

$$a_2 = -\frac{v_{max}}{t_2 - t_1}$$

Le equazioni del moto saranno:

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{v_{max}}{t_1} t^2 + x_0 \quad \text{per } t \in [0, t_1)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{v_{max}}{t_2 - t_1} (t - t_1)^2 + v_{max}(t - t_1) + \frac{1}{2} v_{max} t_1 + x_0 \quad \text{per } t \in [t_1, t_2]$$

A supporto della correttezza di quanto sopra, lo spazio percorso nell'intervallo $[0, t_2]$ è

$$x(t_2) - x_0 = \frac{v_{max} t_2}{2}$$

cioè l'area del triangolo in Figura 2.8.

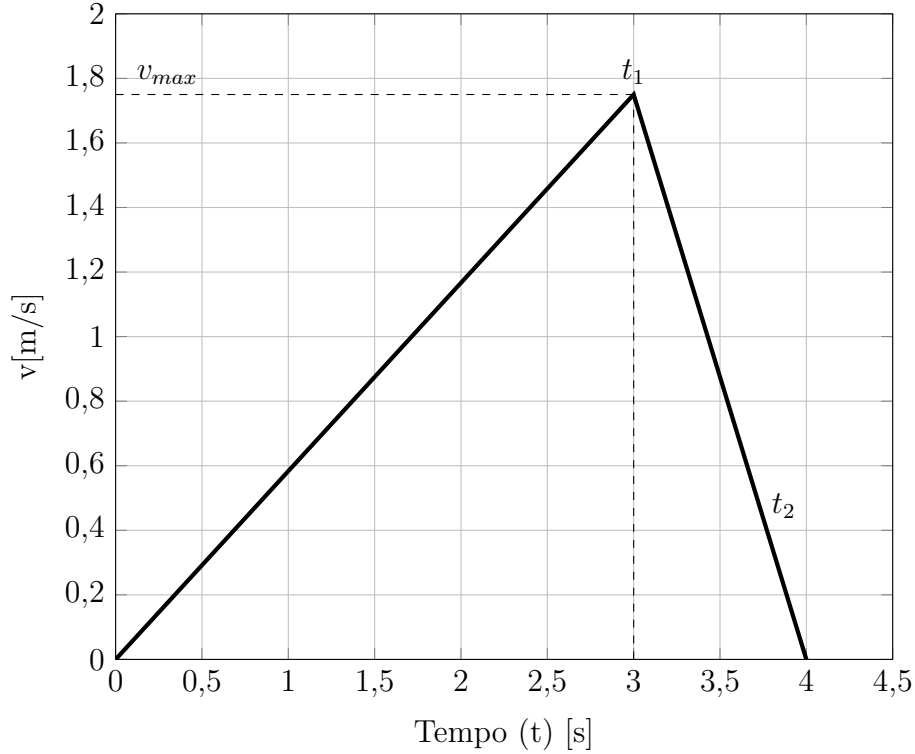


Figura 2.8: Esercizio 18.

Esercizio 19. Una palla cade partendo da ferma da un'altezza h . Ogni volta che urta il pavimento la sua velocità si riduce di un fattore $\alpha < 1$. Calcolare lo spazio totale percorso e il tempo impiegato a percorrerlo.

Soluzione: Nel primo volo di caduta la palla percorre la distanza $h^{(0)} = h$, impiega il tempo $t^{(0)} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ricavabile da (2.13) con $y_0 = h$, $y(t^{(0)}) = 0$, $v_0 = 0$, e raggiunge il suolo con la velocità $v_0^2 = 2gh$, come in (2.14). La relazione tra le velocità di rimbalzo e le altezze raggiunta sarà $v_k^2 = 2gh^{(k)}$. Dopo il primo rimbalzo la palla percorre due volte, una salendo e l'altra ricadendo, lo spazio $h^{(1)} = \frac{v_1^2}{2g} = \alpha^2 h$ impiegando un tempo

$$t^{(1)} = \sqrt{\frac{2h^{(1)}}{g}} = \alpha \sqrt{\frac{2h}{g}} = \alpha t^{(0)}.$$

Nei rimbalzi successivi avremo che le altezze soddisfano la $h^{(k)} = \alpha^2 h^{(k-1)} = \alpha^{2k} h$

mentre i tempi $t^{(k)} = \alpha t^{(k-1)} = \alpha^k \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Lo spazio totale percorso risulta

$$S = h^{(0)} + 2h^{(1)} + 2h^{(2)} + \dots = h(-1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k}) = h \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2}.$$

Il tempo totale impiegato risulta essere

$$T = t^{(0)} + 2t^{(1)} + 2t^{(2)} + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}}(-1 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}.$$

Esercizio 20. Si risolva l'esercizio precedente senza utilizzare la serie geometrica.

Suggerimento: Si rappresenti la legge del moto nel piano (v, t) .

Capitolo 3

Moti piani

In questo capitolo si affronta lo studio di due particolari moti piani, il moto del proiettile e il moto circolare uniforme. A tal fine si richiamano brevemente le nozioni fondamentali sui *vettori* e le loro proprietà. Lo studio della zona sicura nel lancio del proiettile è il principale problema risolto.

3.1 Richiami sui vettori del piano

Consideriamo \mathbb{R}^2 nella sua struttura di spazio vettoriale. Un elemento di \mathbb{R}^2 è un vettore identificato dalla coppia di numeri reali ordinati:

$$\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.1)$$

Una combinazione lineare di vettori è definita da:

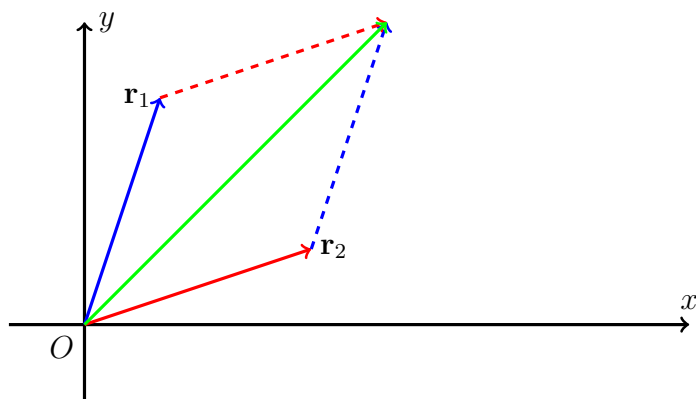


Figura 3.1: Esempio di vettori e loro somma (in verde) sul piano.

$$\alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Come casi particolari consideriamo la somma di vettori (Figura 3.1)

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (3.3)$$

e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare Figura 3.2

$$\alpha \mathbf{r} = (\alpha x, \alpha y). \quad (3.4)$$

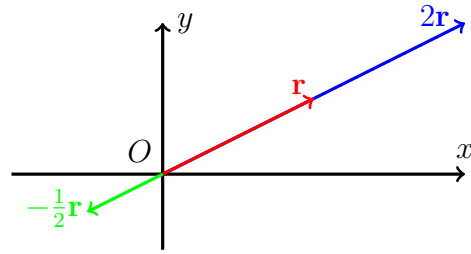


Figura 3.2: Vettori e loro multipli.

La differenza di un vettore con se stesso è il vettore nullo

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1) - (x_1, y_1) = (0, 0) = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

La rappresentazione della somma definita in modo algebrico è illustrata geometricamente in Figura 3.1 e nota come *regola del parallelogramma*.

A un vettore è associato il suo modulo chiamato anche norma o lunghezza:

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.6)$$

e l'angolo che esso forma con l'asse orizzontale:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad (3.7)$$

Esercizio 21. Calcolare le componenti del vettore:

$$\alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2$$

con $\alpha = 2$, $\beta = -1$ e $\mathbf{r}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{r}_2 = (2, 1)$.

Soluzione: $\alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2 = (0, 3)$.

Le grandezze $r = \|\mathbf{r}\|$ e θ si dicono anche *coordinate polari*. Il passaggio dalle coordinate polari alle cartesiane è dato dalle:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{con } r \in [0, \infty), \theta \in [0, 2\pi) \quad (3.8)$$

Il passaggio dalle coordinate cartesiane alle polari è dato dalle:

$$\begin{cases} r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (3.9)$$

La corrispondenza tra le due coordinate è uno a uno tranne che nell'origine in cui l'angolo non è determinato.

Esercizio 22. Scrivere il vettore $\mathbf{r} = (1, 1)$ in coordinate polari. Scrivere il vettore corrispondente alle coordinate polari $r = 1, \theta = \pi/3$.

La soluzione si lascia al lettore.

È talvolta utile rappresentare un vettore attraverso i versori del piano:

$$\hat{\mathbf{i}} = (1, 0) \quad \hat{\mathbf{j}} = (0, 1) \quad (3.10)$$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \quad (3.11)$$

Esercizio 23. Dimostrare, con le precedenti definizioni, le seguenti proprietà:

- commutatività della somma: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$;
- associatività della somma: $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) + \mathbf{u} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + \mathbf{u})$;
- esiste un vettore nullo $\mathbf{0}$, elemento neutro per la somma: $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} \forall \mathbf{v}$;
- per ogni \mathbf{v} esiste il suo opposto $-\mathbf{v}$ tale che: $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;
- distributività del prodotto tra uno scalare e somma di vettori: $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$;
- distributività del prodotto tra somma di scalari e un vettore: $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$;
- associatività del prodotto: $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v}) = \alpha\beta\mathbf{v}$.

Soluzione lasciata al lettore (si utilizzi la rappresentazione cartesiana e le proprietà di \mathbb{R}).

Osservazione 3.1. Le prime quattro proprietà nel precedente elenco definiscono un gruppo abeliano additivo.

3.2 Angoli piani

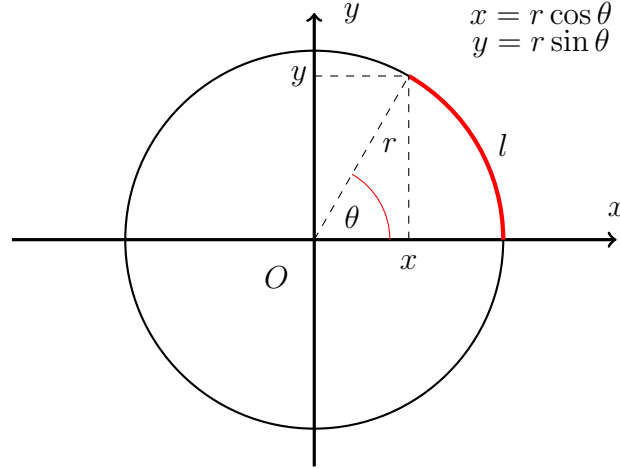


Figura 3.3: Definizione di angolo in radianti.

Date due rette incidenti nel piano si pone il problema di caratterizzare la loro posizione relativa. Questo è risolto attraverso il concetto di angolo piano e la sua misura. Scelta una circonferenza con centro nell'intersezione delle due rette l'angolo piano è un numero reale definito come rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza che lo sottende e la lunghezza del raggio della circonferenza cui l'arco appartiene:

$$\theta := \frac{l}{r}. \quad (3.12)$$

Essendo l'angolo un quoziente tra due grandezze omogenee è un numero puro. La definizione (3.12) non dipende da r per similitudine tra le circonferenze, vedi Figura 3.4. L'angolo giro vale:

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \quad (3.13)$$

La nozione talvolta viene estesa ad angolo orientato dove si attribuisce un segno alla misura dell'arco a seconda del verso di percorrenza, positivo se antiorario, negativo se orario.

Esercizio 24. Utilizzando la formula di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.14)$$

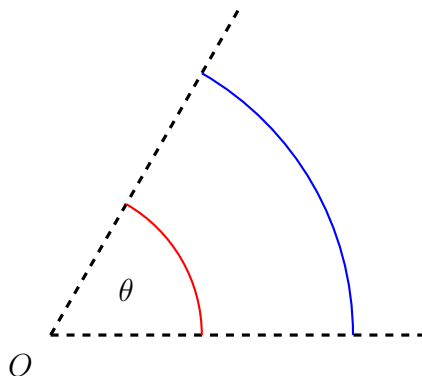


Figura 3.4: La lunghezza dell'arco è proporzionale al raggio.

dove i è l'unità immaginaria definita da $i^2 = -1$, dimostrare le formule di addizione e sottrazione di angoli:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Verificare inoltre, a partire da esse, le formule di duplicazione degli angoli, prendendo $\alpha = \beta$.

3.3 Prodotto scalare

Siano $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ due vettori. Definiamo il loro *prodotto scalare* come segue:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Il prodotto scalare è un numero reale, *non un vettore* e per questa ragione talvolta è chiamato esterno.

Osservazione 3.2.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x^2 + y^2 = \|\mathbf{v}\|^2. \quad (3.16)$$

Esercizio 25. Dimostrare le seguenti proprietà del prodotto scalare:

- $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1$, commutatività;
- $(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \beta \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}$, bilinearità (essendoci commutatività, basta richiedere linearità in un'entrata).

Può essere utile conoscere il seguente teorema:

Teorema 3.3.1 (Prodotto scalare). *Il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei moduli dei due vettori per l'angolo tra essi compreso:*

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos \theta_{12} \quad (3.17)$$

Dimostrazione. Usiamo la rappresentazione polare:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (\|\mathbf{v}_1\| \cos \theta_1, \|\mathbf{v}_1\| \sin \theta_1) \\ \mathbf{v}_2 &= (\|\mathbf{v}_2\| \cos \theta_2, \|\mathbf{v}_2\| \sin \theta_2) \end{aligned}$$

Usando la definizione in componenti del prodotto scalare (3.15):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos(\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \|\mathbf{v}_1\| \|\mathbf{v}_2\| \cos(\theta_{12}) \end{aligned}$$

Grazie alla parità del coseno, la (3.17) è compatibile con la commutatività del prodotto scalare. \square

Osservazione 3.3. Si noti che le quantità $\|\mathbf{v}_1\| \cos \theta_{12}$ e $\|\mathbf{v}_2\| \cos \theta_{12}$ sono rispettivamente le proiezioni con segno del vettore \mathbf{v}_1 su \mathbf{v}_2 e viceversa.

3.4 Moto del proiettile

Il moto del proiettile è la composizione di un moto rettilineo uniforme con un moto uniformemente accelerato.

La legge oraria del moto è:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Per identificare la traiettoria di questo moto ricaviamo la t dall'equazione lineare

$$t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$$

e la sostituiamo nella quadratica

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}g \frac{(x - x_0)^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + y_0 &= -\frac{gx^2}{2v_{0x}^2} + \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{gx_0}{v_{0x}^2} \right) x + \\ &+ y_0 - x_0 \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - g \frac{x_0^2}{2v_{0x}^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

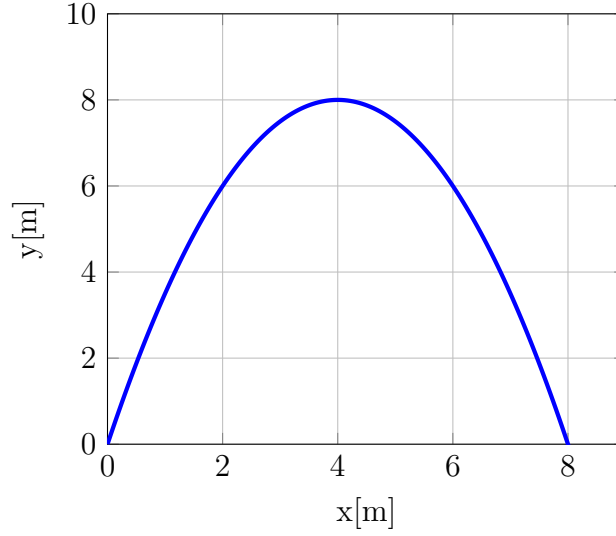


Figura 3.5: Moto del proiettile o moto parabolico.

Il moto risultante è parabolico. In figura Figura 3.5 è rappresentato il caso con $x_0 = y_0 = 0$:

$$y = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_{0x}^2} + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x. \quad (3.20)$$

Utilizzando le coordinate polari per il vettore velocità

$$v_{0x} = v \cos \theta \quad (3.21)$$

$$v_{0y} = v \sin \theta \quad (3.22)$$

ed inserendole nella (3.19) otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} y &= -\frac{g(x-x_0)^2}{2v^2 \cos^2 \theta} + \tan \theta (x-x_0) + y_0 \\ &= -\frac{g(x-x_0)^2}{2v^2} (1 + \tan^2 \theta) + \tan \theta (x-x_0) + y_0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

dove abbiamo utilizzato l'identità

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = (1 + \tan^2 \theta). \quad (3.24)$$

Nel caso di lancio dall'origine la (3.23) si riduce a

$$y = -\frac{gx^2}{2v^2} (1 + \tan^2 \theta) + \tan \theta x. \quad (3.25)$$

Esercizio 26. Calcolare la gittata x_G , definita come l'ascissa alla quale il proiettile riatterra. (La seconda intersezione con l'asse x in Figura 3.5.)

Soluzione: Prendiamo l'equazione della traiettoria e poniamo $y = 0$.

$$x \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2} \frac{gx}{v_{0x}^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_G = \frac{2v_{0y}}{g} v_{0x}. \quad (3.26)$$

Si noti che $2v_{0y}/g$ è il tempo di volo del proiettile.

Esercizio 27. Fissato il modulo della velocità, trovare la gittata *massima*.

Soluzione: è conveniente usare l'espressione della traiettoria in coordinate polari che fornisce per la gittata la formula

$$x_G = \frac{2v^2}{g} \cos \theta \sin \theta = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta. \quad (3.27)$$

Il massimo lo si raggiunge quando $\theta = \pi/4$ e vale:

$$x_{G,max} = \frac{v^2}{g}$$

Confrontando con l'esercizio del lancio del grave (12) si vede che la gittata massima è il doppio dell'altezza massima raggiungibile.

Esercizio 28. Dimostrare che gli angoli di equigittata sono complementari.

Soluzione: Consideriamo $\bar{x} \leq x_{G,max}$.

$$\frac{g\bar{x}}{v^2} = \sin 2\theta \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1 = \arcsin \frac{g\bar{x}}{v^2} \vee 2\theta_2 = \pi - \arcsin \frac{g\bar{x}}{v^2}$$

Sommando e dividendo per due le soluzioni:

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{1}{2} \left(\arcsin \frac{g\bar{x}}{v^2} + \pi - \arcsin \frac{g\bar{x}}{v^2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Nel particolare caso di gittata massima $\theta_1 = \theta_2 = \pi/4$.

Si può procedere anche per via più diretta, osservando che le soluzioni di:

$$\frac{g\bar{x}}{v^2} = \sin 2\theta$$

sono simmetriche rispetto a $\pi/4$, come mostrato in Figura 3.6. In particolare la loro semisomma è proprio $\pi/4$, dunque:

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

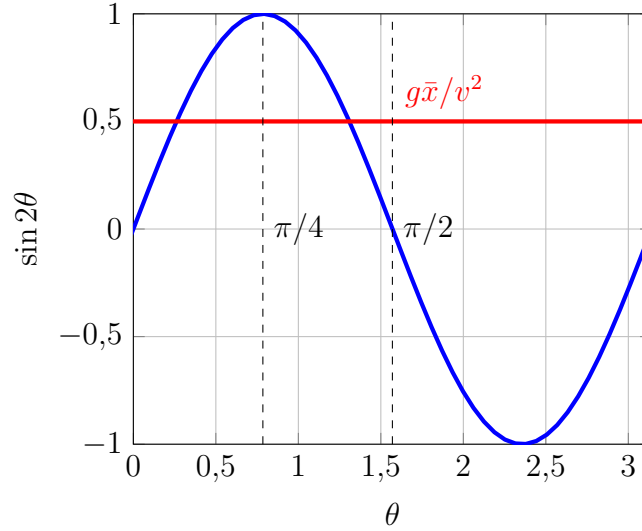


Figura 3.6: Esercizio 28.

Esercizio 29. Si faccia riferimento alla Figura 3.7. Dati y_0 , α , v calcolare la gittata x_G dalla torre, cioè l'ascissa del punto in cui il proiettile atterra.

Soluzione: Utilizzando l'espressione della traiettoria (3.23):

$$y_{finale} = 0 = y_0 + x_G \tan \alpha - \frac{gx_G^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}$$

$$x_G = \frac{v^2 \sin 2\alpha \pm \sqrt{v^4 \sin^2 2\alpha + 8gy_0 v^2 \cos^2 \alpha}}{2g}$$

3.5 Zona sicura

La *zona sicura* è la parte di piano che, *fissato il modulo della velocità iniziale*, non può essere raggiunta dal proiettile a prescindere dall'angolo di alzo con cui esso viene sparato. La *curva di sicurezza* è quella che separa la zona sicura da quella pericolosa che può essere raggiunta dal proiettile. Il punto di gittata massima e il punto di massima altezza nel lancio verticale appartengono alla curva di sicurezza. Talvolta si ritiene *erroneamente* che la curva di sicurezza sia il luogo dei vertici delle parabole di lancio. L'esercizio seguente mostra che questa ipotesi non è corretta¹.

¹Si veda la discussione nel testo *La storia della matematica nella Università di Bologna* di Ettore Bortolotti, Zanichelli (1947), Capitolo III, paragrafo 3.

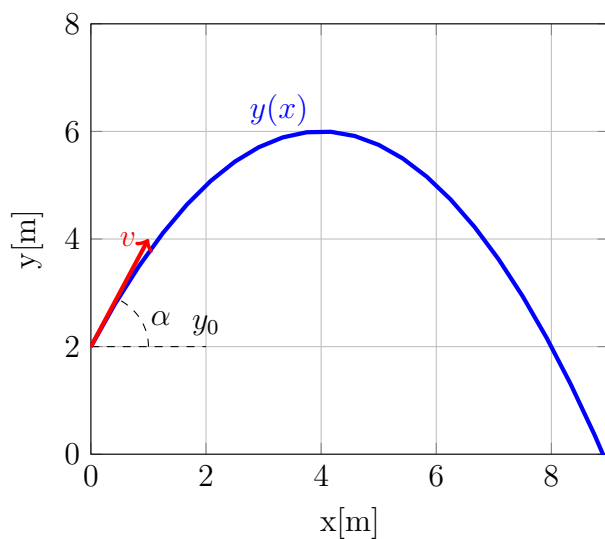


Figura 3.7: Esercizio 29.

Esercizio 30. Trovare il luogo dei vertici delle parabole con modulo della velocità iniziale v fissato, al variare dell'angolo di alzo θ .

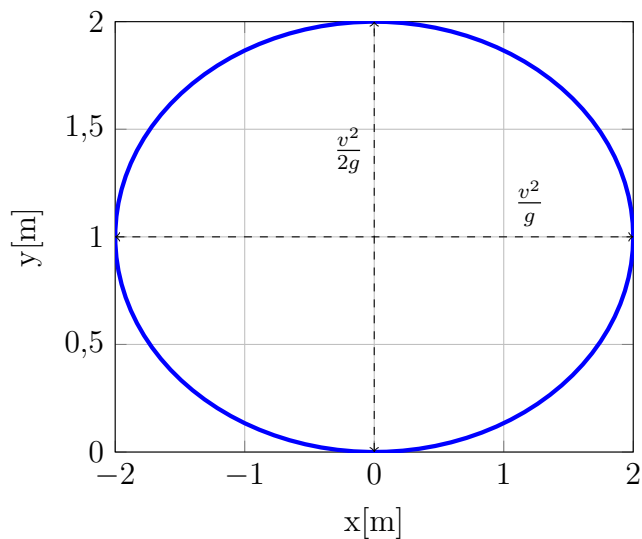


Figura 3.8: Esercizio 30. In blu il luogo dei vertici.

Soluzione: Come già annotato nell'esercizio della gittata, il vertice lo si raggiunge

a un'ascissa che è metà della gittata.

$$x_v = \frac{v^2}{2g} \sin 2\theta = \frac{v^2}{g} \sin \theta \cos \theta .$$

Attraverso l'equazione della traiettoria abbiamo:

$$y_v = x_v \tan \theta - \frac{gx_v^2}{2v^2 \cos^2 \theta} = \frac{v^2}{g} \sin^2 \theta - \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta = \frac{v^2}{4g} (1 - \cos 2\theta) .$$

Utilizzando l'identità trigonometrica $\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta = 1$ otteniamo

$$\frac{4g^2 x_v^2}{v^4} + \frac{16g^2}{v^4} \left(y_v - \frac{v^2}{4g} \right)^2 = 1 . \quad (3.28)$$

Osservazione 3.4. Si noti che questa curva, una ellissi, non può essere la curva di sicurezza perché non contiene il segmento dell'asse orizzontale delimitato dalla gettata massima che ovviamente sta nella zona pericolosa.

Calcoliamo la curva di sicurezza. Basta studiare le soluzioni della quadratica (3.25) in $\tan \theta$:

$$gx^2 \tan^2 \theta - 2v^2 x \tan \theta + (2v^2 y + gx^2) = 0 .$$

Sappiamo che questa può avere due soluzioni distinte, una soluzione (due coincidenti), o nessuna a seconda del valore del discriminante:

$$\Delta = v^4 x^2 - gx^2(2v^2 y + gx^2) . \quad (3.29)$$

Il punto generico di coordinate (x, y) starà nella curva di sicurezza quando:

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{gx^2}{2v^2} + \frac{v^2}{2g} \quad (3.30)$$

chiamata parabola di sicurezza.

Esercizio 31. Dato un punto all'interno della parabola di sicurezza, dimostrare che può sempre essere colpito con due angoli, detti *angoli di equi-bersaglio*.

Soluzione: Riprendiamo l'equazione per $\tan \theta$. Essa è quadratica quindi fornirà sempre e solo due soluzioni (all'interno della parabola di sicurezza):

$$\tan \theta_{\pm} = \frac{xv^2 \pm \sqrt{x^2 v^4 - gx^2(2v^2 y + gx^2)}}{gx^2}$$

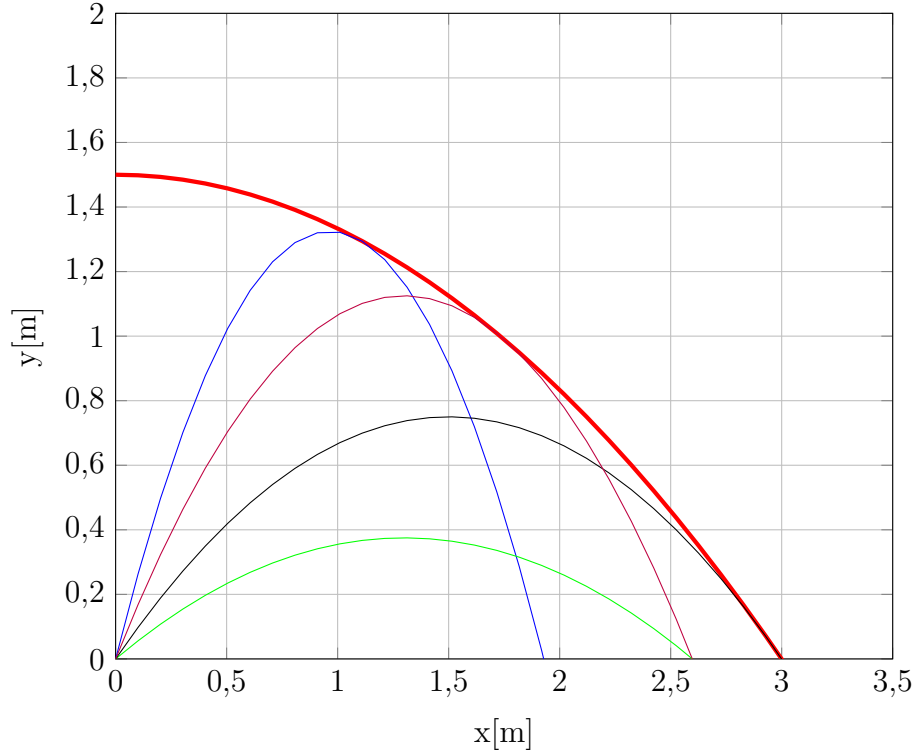


Figura 3.9: Parabola di sicurezza.

Esercizio 32 (Il cacciatore e la scimmia). Un cacciatore punta una freccia in direzione di una scimmietta che si trova a una altezza h su di un albero distante D da lui. Nell'istante in cui scaglia la freccia la scimmietta si lascia cadere. Dimostrare che essa viene colpita dal proiettile e calcolare le coordinate del punto d'incontro.

Soluzione: La geometria del problema mostrata in Figura 3.10 implica che

$$\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{h}{D} \quad (3.31)$$

come si deduce dalla similitudine dei triangoli formati dalle componenti delle velocità iniziali con il triangolo formato dalle componenti della posizione iniziale della scimmia.

Affinché proiettile e scimmia si incontrino deve esistere un tempo $T \geq 0$ tale che:

$$\begin{cases} x_p(T) = x_s(T) \\ y_p(T) = y_s(T) \end{cases}$$

con (x_p, y_p) posizione del proiettile, (x_s, y_s) posizione della scimmietta. Scriviamo le leggi del moto per entrambi:

$$\begin{cases} x_p = v_{0x}t \\ y_p = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases} \quad \begin{cases} x_s = D \\ y_s = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}.$$

Uguagliando componente per componente al tempo T giungiamo a

$$v_{0x}T = D, \quad v_{0y}T = h$$

che risulta verificata per la (3.31). Le coordinate del punto d'incontro sono:

$$P = \left(D, h - \frac{1}{2}g \left(\frac{D}{v_{0x}} \right)^2 \right)$$

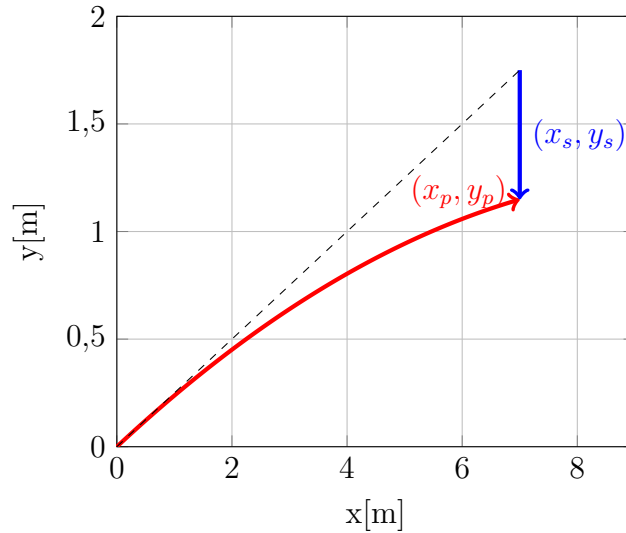


Figura 3.10: Esercizio 32: il cacciatore e la scimmietta.

Esercizio 33 (I due cacciatori). Due cacciatori, uno nell'origine e l'altro nel punto (D, h) , puntano il fucile uno contro l'altro e all'istante $t = 0$ sparano. Dimostrare che i due proiettili collidono e calcolare le coordinate del punto d'incontro.

Soluzione: Come nell'esercizio precedente la geometria del sistema in Figura 3.11 impone

$$\frac{v_{0y,1}}{v_{0x,1}} = \frac{v_{0y,2}}{v_{0x,2}} = \frac{h}{D} \quad (3.32)$$

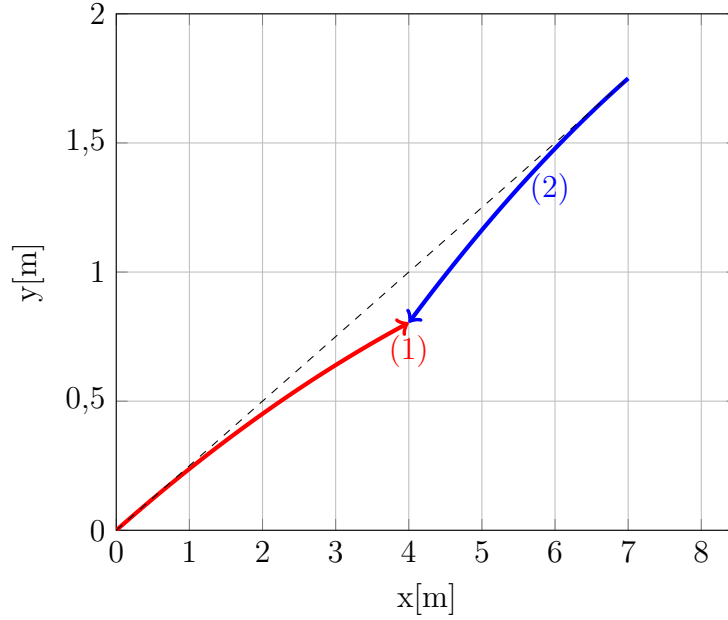


Figura 3.11: Esercizio 33: i due cacciatori.

Scriviamo le equazioni per i due proiettili:

$$\begin{cases} x_1 = v_{0x,1}t \\ y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y,1}t \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -v_{0x,2}t + D \\ y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 - v_{0y,2}t + h \end{cases}$$

Uguagliamo componente per componente al tempo T :

$$T(v_{0x,1} + v_{0x,2}) = D, \quad T(v_{0y,1} + v_{0y,2}) = h$$

che risultano vere per la (3.32). Il punto d'incontro ha coordinate:

$$P = \left(\frac{v_{0x,1}}{v_{0x,1} + v_{0x,2}} D, -\frac{1}{2}g \left(\frac{D}{v_{0x,1} + v_{0x,2}} \right)^2 + \frac{D}{v_{0x,1} + v_{0x,2}} v_{0y,1} \right) \quad (3.33)$$

Osservazione 3.5. Osserviamo che l'Esercizio 32 è un caso particolare dell'Esercizio 33 con $\mathbf{v}_2(0) = 0$.

Esercizio 34. Si consideri un vettore $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^2$ dipendente dal tempo. Definendo la sua derivata come il limite del rapporto incrementale e utilizzando la linearità della derivata si dimostri che

$$\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \frac{dw_x(t)}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dw_y(t)}{dt} \hat{\mathbf{j}}. \quad (3.34)$$

Esercizio 35. Si verifichi che vale la regola di Leibniz per il prodotto scalare:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{w}_1(t) \cdot \mathbf{w}_2(t)) = \frac{d\mathbf{w}_1(t)}{dt} \cdot \mathbf{w}_2(t) + \mathbf{w}_1(t) \cdot \frac{d\mathbf{w}_2(t)}{dt}. \quad (3.35)$$

3.6 Moto circolare uniforme

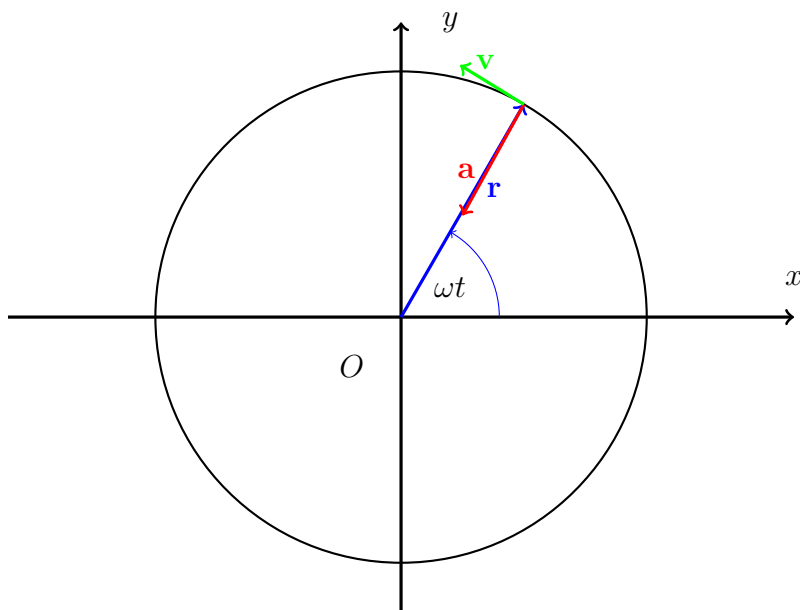


Figura 3.12: Moto circolare uniforme.

Questo moto è definito dalle sue leggi orarie che si possono dare sia in coordinate polari che cartesiane. Per quanto riguarda le polari il moto è descritto da

$$\begin{cases} r(t) = r = cost \\ \theta(t) = \omega t, \quad \omega = cost \end{cases} \quad (3.36)$$

quindi vale

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = 0 \\ \dot{\theta}(t) = \omega = \text{velocità angolare.} \end{cases} \quad (3.37)$$

Notiamo che la legge dell'angolo è lineare nel tempo come quella dello spazio nel moto rettilineo uniforme (1.5). Per quanto riguarda le coordinate cartesiane possiamo

ottenere le equazioni del moto utilizzando le (3.8)

$$\begin{cases} x(t) = r \cos(\omega t) \\ y(t) = r \sin(\omega t) \end{cases} \quad (3.38)$$

che ci permettono di rappresentarlo in forma vettoriale:

$$\mathbf{r}(t) = r \cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + r \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}}, \quad (3.39)$$

dove $\|\mathbf{r}(t)\| = r$.

Utilizzando la (3.34) calcoliamo il vettore velocità:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -\omega r \sin(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + \omega r \cos(\omega t) \hat{\mathbf{j}}, \quad (3.40)$$

dove $v = \|\mathbf{v}(t)\| = \omega r$. Si noti che:

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = \omega r^2 [-\cos(\omega t) \sin(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(\omega t)] = 0 = \|\mathbf{v}(t)\| \|\mathbf{r}(t)\| \cos \alpha,$$

il che vuol dire che i due vettori *sono ortogonali tra loro*. Calcoliamo infine l'accelerazione:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = -\omega^2 r \cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} - \omega^2 r \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}} = -\omega^2 \mathbf{r}(t), \quad (3.41)$$

dove $\|\mathbf{a}(t)\| = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$. Notiamo che l'accelerazione è parallela al raggio e punta verso il centro. Per tale motivo si dice *accelerazione centripeta*.

Osserviamo anche che il moto obbedisce alla seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \quad (3.42)$$

intesa componente per componente

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega^2 y(t) \end{cases} \quad (3.43)$$

Esercizio 36. Verificare che le leggi di moto

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_1) \\ y(t) = A_1 \cos(\omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (3.44)$$

soddisfano la (3.43) per ogni valore delle costanti $A_1, A_2, \theta_1, \theta_2$.

Esercizio 37. Mostrare che un vettore $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^2$ di modulo costante è ortogonale alla sua derivata.

Soluzione: Per ipotesi

$$\|\mathbf{w}(t)\|^2 = \mathbf{w}(t) \cdot \mathbf{w}(t) = \text{cost}$$

Prendendo la derivata e utilizzando la (3.35) si ottiene

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}(t)\|^2 = 2\mathbf{w}(t) \cdot \dot{\mathbf{w}}(t) = 0$$

cioè $\mathbf{w}(t) \perp \dot{\mathbf{w}}(t)$ come risulta dal Teorema 3.3.1.

Capitolo 4

Dinamica e leggi di Newton

I temi trattati nei precedenti capitoli, che riguardano la descrizione dei moti, costituiscono la *cinematica* elementare del punto. In questo capitolo ci occuperemo della *dinamica* che concerne le cause del moto, la teoria introdotta da Newton che lega il (nuovo) concetto di *forza* a quello di accelerazione attraverso una costante di proporzionalità chiamata massa inerziale.¹

4.1 Primo principio della dinamica (Principio di inerzia)

Se un corpo non è soggetto a forze, o se la loro risultante è nulla, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

In formule:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \text{ o anche } \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

dove \mathbf{v}, \mathbf{r}_0 sono vettori costanti nel tempo in ogni loro componente.

4.2 Le forze e il secondo principio della dinamica

Lo strumento per misurare forze si chiama dinamometro. Nella sua realizzazione classica è costituito da una molla collegata a un cursore. Misurando l'effetto della forza sul moto di un corpo Figura4.1 si vede sperimentalmente che l'accelerazione impressa è proporzionale alla forza stessa $F \propto a$. Per esempio:

¹E.Mach, La meccanica nel suo sviluppo storico critico, Boringhieri

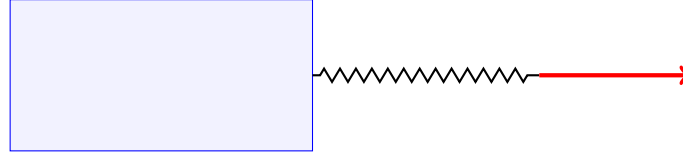


Figura 4.1: Forza e moto.

F	3	6	9	12
a	1	2	3	4

In notazione vettoriale

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a} . \quad (4.2)$$

La costante di proporzionalità per un dato corpo definisce la sua *massa inerziale*, si misura in chilogrammi, e rappresenta la tendenza di quel corpo a opporsi all'accelerazione.

Il *secondo principio di Newton* si scrive come segue:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (4.3)$$

dove l'unità di misura delle forze si chiama il Newton $[F] = kg \cdot m/s^2$

Osservazione 4.1. Le masse inerziali *sono additive*. Se applico la stessa forza a un corpo di massa m o a uno formato dall'insieme solidale di due corpi uguali al precedente di cui voglio stimare la massa globale M si trova sperimentalmente che l'accelerazione impressa al corpo doppio è la metà della precedente:

$$\begin{cases} \mathbf{F} = m\mathbf{a} \\ \mathbf{F} = M\mathbf{a}/2 \end{cases} \Rightarrow M = 2m.$$

Esercizio 38. Un'automobile di massa m viaggia a velocità v . Qual è la forza costante necessaria per fermarla in uno spazio h ?

Soluzione: Se la forza è costante la seconda legge di Newton ci dice che anche l'accelerazione lo è. Usando la legge di conservazione per moti 1D ad accelerazione costante otteniamo:

$$v^2 = -2ah \Rightarrow a = -\frac{v^2}{2h}$$

Dove il segno meno segnala che spostamento e accelerazione hanno segni opposti. Usando il secondo principio:

$$F = -\frac{mv^2}{2h} .$$

4.3 Il terzo principio della dinamica (di azione e reazione)

Se un corpo A esercita una forza su un corpo B , il corpo B esercita una forza uguale in modulo ma opposta sul corpo A .

In formule se $\mathbf{F}_{A \rightarrow B}$ è la forza esercitata da A su B e $\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$ la forza esercitata da B su A :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A} . \quad (4.4)$$

4.4 Sistemi di riferimento inerziali

Le leggi di Newton sono valide su *Sistemi di riferimento inerziali*. Su SdR non inerziali vanno modificate con l'aggiunta delle cosiddette *forze fittizie*.

Esempi di sistemi inerziali sono quelli solidali a:

- un laboratorio terrestre (in ottima approssimazione);
- un treno in moto rettilineo uniforme;
- una stazione spaziale in orbita intorno alla Terra.

Esempi di sistemi **non** inerziali sono:

- treno/auto in frenata o in accelerazione;
- una giostra;
- un'auto in curva.

4.5 Forza peso e massa gravitazionale

La forza peso è quella che attrae i corpi verso la terra. Essa è proporzionale alla *massa gravitazionale* che si misura sempre in chilogrammi ma non ha nulla, a priori, a che fare con quella inerziale.

$$F_p \propto m_G \quad \text{oppure} \quad F_p = km_G.$$

Con la bilancia si vede che la massa gravitazionale è, quanto quella inerziale, additiva. In caduta libera un corpo accelera con g verso il basso. Per la seconda legge:

$$F_p = m_I g \quad \text{dove } m_I \text{ è la massa inerziale.}$$

Da esperimenti, risulta che massa inerziale e gravitazionale sono uguali. Più precisamente:

$$\frac{|m_G - m_I|}{m_I} \simeq 10^{-13} \quad \Rightarrow \quad m_G = m_I \text{ a meno di } 10^{-13} \quad (4.5)$$

Nella teoria della Relatività Generale la loro equivalenza è un assioma e viene chiamata *principio di equivalenza*.

Esercizio 39 (Problema elementare della statica). Analizzare, con le leggi di Newton, le forze che agiscono su un corpo in quiete poggiato su un supporto.

Soluzione: Sappiamo che è in quiete dunque $\mathbf{a} = 0$, pertanto la risultante delle forze deve essere nulla. Essendo soggetto alla forza peso deve esistere una forza \mathbf{F}_v chiamata reazione vincolare, tale che:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_v = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F}_v = -\mathbf{F}_p$$

Si noti che forza peso e reazione vincolare non sono azione e reazione. A differenza delle due forze del terzo principio entrambe le forze agiscono *sullo stesso corpo*.

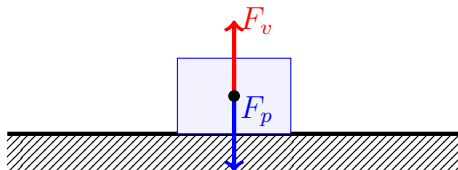


Figura 4.2: Esercizio 39.

Esercizio 40. Un corpo scivola senza attrito lungo un piano inclinato che forma un angolo α con l'orizzontale. Calcolare l'accelerazione con cui scivola il corpo.

Soluzione: Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato. Le equazioni di Newton porgono

$$\begin{cases} -mg \cos \alpha + F_v = 0 \\ mg \sin \alpha = ma \end{cases} \quad (4.6)$$

da cui

$$a = g \sin \alpha. \quad (4.7)$$

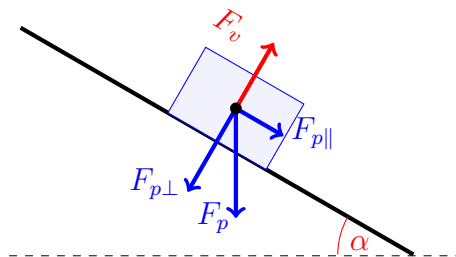


Figura 4.3: Esercizio 40. I pedici \perp , \parallel indicano che la componente della forza peso è ortogonale o parallela al piano rispettivamente.

Osservazione 4.2. La (4.7) era stata intuitivamente identificata da Galileo che, scegliendo un angolo α abbastanza piccolo, è riuscito a misurare g attraverso la misura sperimentale di a anche utilizzando strumenti con bassa precisione quali l'orologio ad acqua.

Esercizio 41. Un corpo di massa m viene trascinato da una fune, inclinata di un angolo $\alpha > 0$ rispetto all'orizzontale, che esercita una forza di modulo F . Si assuma che il vincolo sia bilaterale (il corpo non può staccarsi da terra) e liscio (la reazione vincolare ha solo la componente verticale). Calcolare l'accelerazione e la reazione vincolare.

Soluzione:

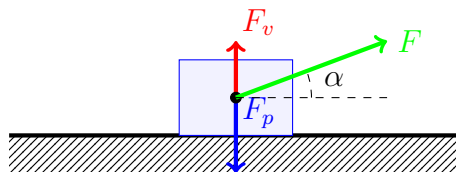


Figura 4.4: Esercizio 41.

Le componenti della seconda legge Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, porgono:

$$\begin{cases} F \cos \alpha = ma \\ F \sin \alpha + F_v - F_p = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{F \cos \alpha}{m} \\ F_v = mg - F \sin \alpha \end{cases}$$

Esercizio 42. (Problema dell'ascensore in caduta libera). Figura 4.5. A una corda inestensibile che passa per due carrucole sono appese due masse. Il sistema è privo di attrito, corda e carrucole hanno masse trascurabili. Si calcoli l'accelerazione con cui si muove il sistema e la tensione della fune.

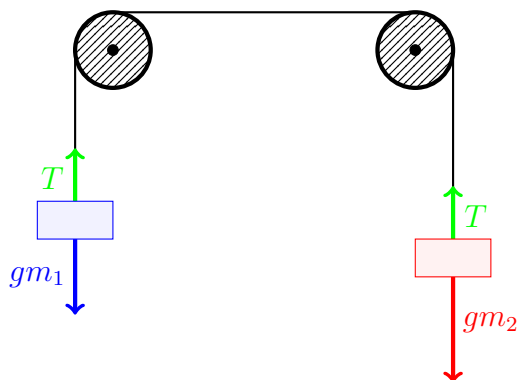


Figura 4.5: Esercizio 42.

Soluzione: Si impostino le leggi di Newton per ambedue i corpi (si consideri la tensione lungo la corda costante). Assunta l'inestensibilità della corda risulta $\Delta y_1 = -\Delta y_2$ da cui $a_1 = -a_2$ (accelerazioni dei due corpi).

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 (-a) \end{cases}$$

Risolvendo per a e T si ottiene:

$$\begin{cases} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g \\ T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \end{cases}.$$

Osservazione 4.3. Il sistema di carrucole mostrato nell'esercizio precedente può anche essere utilizzato per misurare l'accelerazione di gravità attraverso la misura sperimentale di a . Il vantaggio rispetto a una misura diretta di g è che il moto può essere arbitrariamente rallentato e quindi la sua misura, come nel caso del piano inclinato, eseguita con strumenti semplici come quelli a disposizione all'epoca di Galileo.

Esercizio 43. Due vagoni, di mase m_1, m_2 , scorrono senza attrito su delle rotaie. Essi sono collegati da una fune inestensibile. m_1 viene tirato con una forza F parallela al suolo. Trovare l'accelerazione comune dei due vagoni e la tensione della corda che li collega.

Soluzione: Scriviamo le leggi di Newton per entrambi i corpi:

$$\begin{cases} F - T = m_1 a \\ T = m_2 a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{F}{m_1 + m_2} \\ T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F \end{cases}$$

Esercizio 44 (Treno in accelerazione). Un treno si muove con accelerazione $a > 0$. Al soffitto è attaccato un lampadario di massa m . Si vede che la corda forma un angolo α con la verticale. Trovare la tensione della corda e l'angolo α .

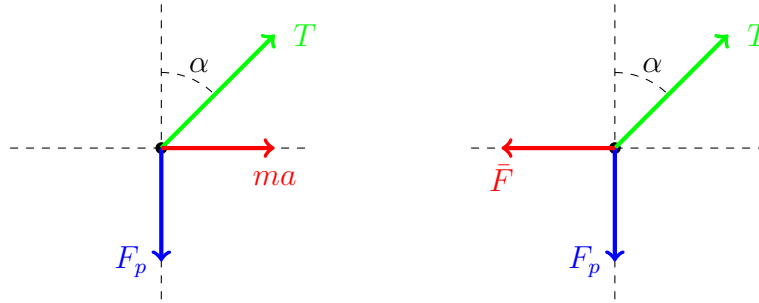


Figura 4.6: Esercizio 44. Sulla sinistra le forze nel sistema di riferimento solidale con la terra. Sulla destra nel sistema non inerziale del treno.

Soluzione nel sistema di riferimento della terra: si faccia riferimento alla parte sinistra di Figura 4.6. In questo sistema di riferimento valgono le leggi di Newton:

$$\begin{cases} T \sin \alpha = ma \\ T \cos \alpha - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = m^2(a^2 + g^2) \\ \tan \alpha = \frac{a}{g} \end{cases} \Rightarrow T = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

Soluzione nel sistema di riferimento del treno: In questo sistema le leggi di Newton non valgono ma possono essere *restaurate* con l'introduzione di una forza fittizia \bar{F} . Facendo riferimento alla parte destra di Figura 4.6 si possono scrivere le leggi di Newton:

$$\begin{cases} \bar{F} + T \sin \alpha = 0 \\ T \cos \alpha - mg = 0 \end{cases}$$

in cui compaiono tre incognite e due equazioni. Per identificare \bar{F} dobbiamo comunque fare riferimento al sistema inerziale e il confronto con l'esercizio precedente porge

$$\bar{F} = -ma .$$

4.6 Quantità di moto e terzo principio

Definiamo *quantità di moto o impulso* di un corpo di massa m e di velocità \mathbf{v} il vettore:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (4.8)$$

Si noti che se la massa del corpo è costante:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}. \quad (4.9)$$

Consideriamo un sistema di due corpi A e B in cui le uniche forze che agiscono sono quelle interne, cioè in A agisce solo la forza esercitata da B e viceversa:

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = \dot{\mathbf{p}}_B, \quad \mathbf{F}_{B \rightarrow A} = \dot{\mathbf{p}}_A.$$

Il terzo principio implica che:

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} + \mathbf{F}_{B \rightarrow A} = \dot{\mathbf{p}}_B + \dot{\mathbf{p}}_A = 0$$

da cui segue:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B) = 0 \quad (4.10)$$

quindi la quantità di moto totale *si conserva*. I sistemi su cui non agiscono forze esterne si dicono *sistemi isolati*.

Osservazione 4.4. Mostriamo come si generalizza la conservazione della quantità di moto per sistemi isolati al caso di tre corpi A , B e C . Il principio di azione e reazione implica che

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} + \mathbf{F}_{B \rightarrow A} + \mathbf{F}_{B \rightarrow C} + \mathbf{F}_{C \rightarrow B} + \mathbf{F}_{A \rightarrow C} + \mathbf{F}_{C \rightarrow A} = 0 \quad (4.11)$$

dato che si annullano a coppie, specificamente la prima con la seconda etc. D'altro canto per un sistema isolato vale

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{B \rightarrow A} + \mathbf{F}_{C \rightarrow A} = \dot{\mathbf{p}}_A \\ \mathbf{F}_{A \rightarrow B} + \mathbf{F}_{C \rightarrow B} = \dot{\mathbf{p}}_B \\ \mathbf{F}_{A \rightarrow C} + \mathbf{F}_{B \rightarrow C} = \dot{\mathbf{p}}_C \end{cases} \quad (4.12)$$

che insieme alla (4.11) porge

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B + \mathbf{p}_C) = 0, \quad (4.13)$$

cioé la quantità di moto totale del sistema è conservata (costante) nel tempo.

Esercizio 45. Dimostrare che in un sistema isolato di N corpi la quantità di moto totale $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ è conservata. Utilizzare il simbolo $\mathbf{F}_{i \rightarrow j}$ per la forza che il corpo i esercita su quello j .

Esercizio 46 (Automobile in frenata). Si consideri un'automobile che si muove con velocità $v > 0$. Al suo interno una corda con appeso un peso penzola dal tetto. All'istante $t = 0$ l'auto comincia a frenare con decelerazione costante a , e si arresta in uno spazio h . Calcolare l'angolo che la cordicella forma con la verticale durante la frenata.

Soluzione: La soluzione non è diversa da quella dell'Esercizio 44.

$$\tan \alpha = -\frac{a}{g}$$

L'accelerazione e lo spostamento sono legati dalla:

$$v^2 = -2ah \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{v^2}{2h}$$

Infine:

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{2gh}$$

Esercizio 47. Un corpo di massa m è attaccato a una fune di lunghezza r . L'altro estremo della fune è vincolato in un punto. Il corpo compie un moto circolare uniforme con velocità angolare ω costante attorno al punto vincolato, ed è tenuto in traiettoria dalla fune. Calcolare la tensione T della fune.

Soluzione: Scriviamo le equazioni di Newton utilizzando la (3.41)

$$T = ma_c = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

Osserviamo che nel sistema di riferimento rotante il punto è in quiete. Vale pertanto

$$T + \bar{F} = 0. \quad (4.14)$$

Dal confronto col calcolo della tensione otteniamo:

$$\bar{F} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \quad (4.15)$$

che rappresenta la forza centrifuga.

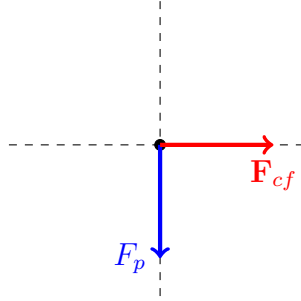


Figura 4.7: Schema delle forze per l' Esercizio 48. La forza centrifuga \mathbf{F}_{cf} è radialmente uscente rispetto al centro di rotazione.

Esercizio 48 (Peso apparente su una giostra). Calcolare il peso apparente di un corpo di massa m su una giostra che ruota con velocità angolare ω sapendo che esso si trova a una distanza r dall'asse di rotazione.

Soluzione: Oltre al peso, si aggiungerà una componente ortogonale di forza centrifuga:

$$\bar{P} = m\sqrt{g^2 + \omega^4 r^2}.$$

Esercizio 49. Un corpo puntiforme di massa m può muoversi senza attrito su un tavolo. Al centro del tavolo viene praticato un foro attraverso il quale viene fatto passare un filo inestensibile e di massa trascurabile che lega suddetto corpo a un altro corpo di massa M che quindi penzola sotto il tavolo. Il corpo sul tavolo viene messo in moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio r a una velocità v tale da sostenere la massa appesa sotto il tavolo in posizione fissa. Calcolare v .

Soluzione:

$$\begin{cases} Mg - T = 0 \\ T = \frac{mv^2}{r} \end{cases} \Rightarrow v^2 = \frac{Mgr}{m}$$

Esercizio 50 (Peso apparente sulla Terra). Dato un corpo di massa m sulla superficie terrestre, calcolare il suo *peso apparente* a una latitudine ϕ .

Soluzione: Il corpo è soggetto, oltre che al peso, anche a una forza centrifuga F_{cf} dovuta alla rotazione terrestre. A una latitudine ϕ la distanza dall'asse di rotazione è:

$$d = R_T \cos \phi \Rightarrow F_{cf} = m\omega^2 R_T \cos \phi$$

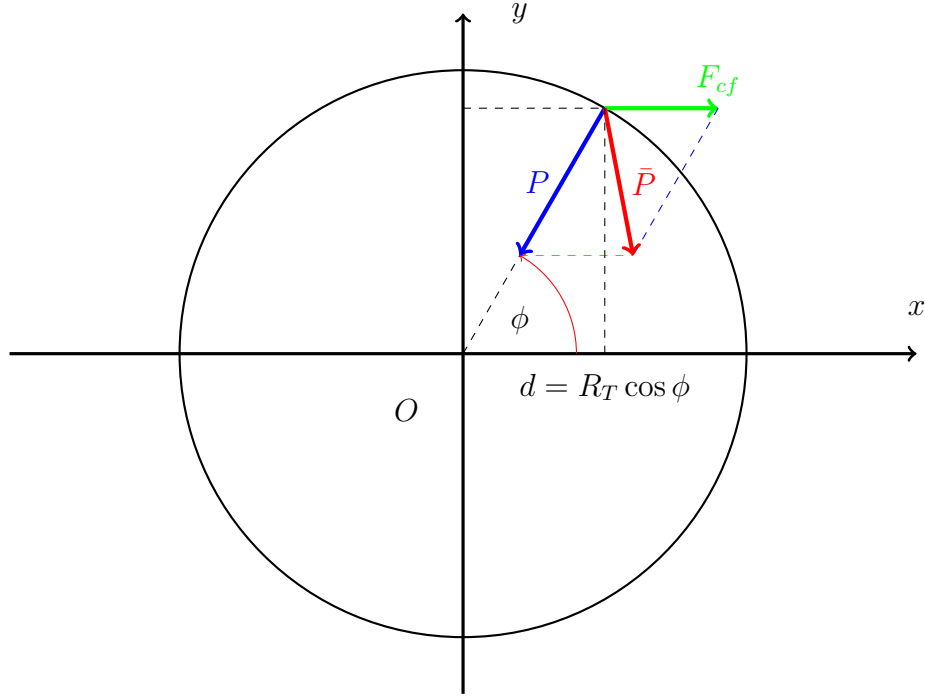


Figura 4.8: Esercizio 50.

Per trovare il modulo della forza, che rappresenta il terzo lato del triangolo formato dai vettori \mathbf{P} e \mathbf{F}_{cf} , usiamo il teorema di Carnot (lo studente lo dimostri utilizzando il Teorema 3.3.1):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi$$

$$\bar{P} = \sqrt{m^2 g^2 + m^2 \omega^4 R_T^2 \cos^2 \phi - 2m^2 \omega^2 g R_T \cos^2 \phi}$$

In particolare:

$$P_{polo} = \bar{P}_{\phi=\pi/2} = mg$$

$$P_{equatore} = \bar{P}_{\phi=0} = m(g - \omega^2 R_T)$$

Esercizio 51. Un punto materiale si trova alla sommità di una circonferenza di diametro h posta in un piano verticale. Esso parte da fermo e si muove senza attrito sotto l'azione della gravità lungo una corda della circonferenza. Calcolare il tempo necessario per percorrere la corda e mostrare che esso non dipende da quale corda è stata scelta.

Soluzione: Il moto del punto è uniformemente accelerato lungo il piano inclinato della corda. Chiamando β l'angolo che la corda forma con la verticale si ha che la lunghezza della corda è $l = h \cos \beta$ e l'accelerazione $a = g \cos \beta$. Pertanto

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4.16)$$

cioè il tempo rimane invariato sia che la caduta sia libera o formi un qualsiasi angolo con la verticale.

Esercizio 52. In un piano verticale sono dati una retta e un punto P esterno ad essa. Determinare il punto Q sulla retta in modo tale che il tempo di caduta di un punto materiale che scorre senza attrito lungo il segmento PQ partendo da fermo risulti minimo. Discutere esistenza e unicità della soluzione. Le curve di tempo minimo sono chiamate brachistocrone.

Suggerimento: utilizzare il risultato del problema precedente.

Generalizzazioni: si risolva lo stesso problema in cui al posto della retta si considera una curva generica non passante per P . Discutere esistenza e unicità della soluzione.

Capitolo 5

Lavoro ed Energia

In questo capitolo vengono introdotti i concetti di lavoro ed energia e, attraverso le leggi di Newton, illustrate alcune proprietà elementari che li legano quali il teorema dell'energia cinetica e la conservazione dell'energia meccanica per una vasta classe di forze. Il capitolo si conclude con la nozione di forze conservative in più dimensioni.

5.1 Definizione elementare di lavoro: forze costanti in una dimensione

Consideriamo un corpo di massa m che si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza *costante* F che lo sposta dalla posizione x_i a quella x_f . Si definisce *lavoro* compiuto sul corpo dalla forza costante F la quantità:

$$L = F \cdot \Delta x = ma(x_f - x_i). \quad (5.1)$$

Ricordando che per la seconda legge di Newton $F = cost \Rightarrow a = cost$ vale la legge di conservazione (2.10)

$$v_f^2 - 2ax_f = cost = v_i^2 - 2ax_i \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} \quad (5.2)$$

possiamo inserire la (5.2) nella (5.1) e ottenere

$$L = m \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} (x_f - x_i) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2. \quad (5.3)$$

La quantità

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (5.4)$$

è chiamata energia cinetica e permette di scrivere la (5.3) come

$$L = \Delta T \quad (5.5)$$

nota come *Teorema dell'energia cinetica* o *Teorema delle forze vive*. Il lavoro e l'energia si misurano in $kg\,m^2/s^2$ unità chiamata Joule ed indicata con J .

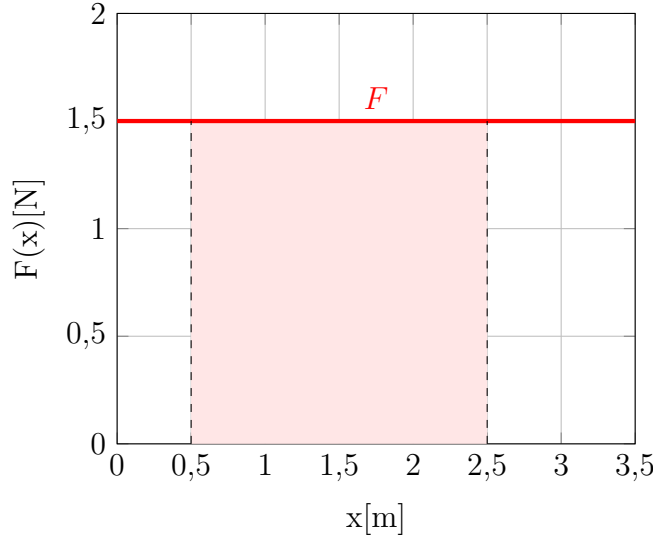


Figura 5.1: Lavoro come area sottesa dal grafico della funzione $F(x) = cost$.

5.2 Teorema dell'energia cinetica per forze posizionali

Nel caso in cui la forza F che agisce sul corpo di massa m , posizione x e velocità istantanea v non sia costante la definizione di lavoro viene estesa utilizzando il concetto di integrale:

$$L := \int_{t_i}^{t_f} F(t)v(t) dt. \quad (5.6)$$

Se la forza è puramente *posizionale* essa dipende dal tempo solo attraverso la posizione: $F(t) = F(x(t))$. In questo caso, utilizzando il teorema di cambio di variabile di integrazione

$$\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)) \dot{x}(t) dt, \quad (5.7)$$

la (5.6) diventa

$$L := \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx. \quad (5.8)$$

Utilizzando la seconda legge di Newton

$$L = \int_{t_i}^{t_f} Fv dt = m \int_{t_i}^{t_f} \frac{dv}{dt} v dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) dt = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2} \quad (5.9)$$

dove abbiamo utilizzato nuovamente la (5.7) e il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx}(x) dx = f(x_2) - f(x_1). \quad (5.10)$$

Per concludere, grazie alla (5.4)

$$L = \int_{T_i}^{T_f} dT = \Delta T \quad (5.11)$$

dove abbiamo introdotto il differenziale di una funzione $f(x)$

$$df(x) = \frac{df}{dx}(x)dx, \quad (5.12)$$

che rappresenta un'approssimazione della variazione della funzione quando Δx è molto piccolo:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \simeq \frac{df}{dx}(x)\Delta x. \quad (5.13)$$

Esercizio 53 (Lavoro della forza gravitazionale costante nel lancio verticale). Calcolare il lavoro compiuto dalla forza peso su un corpo che si sposta in verticale da un'altezza h_i a un'altezza h_f . Identificare la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Soluzione: Orientando l'asse verso l'alto abbiamo $F = -mg$.

$$L = -mg(h_f - h_i) \quad (5.14)$$

Notare che si può sempre scrivere:

$$L = -\Delta U, \quad U = mgh + \text{cost} \quad (5.15)$$

dove U rappresenta l'energia potenziale gravitazionale. Inoltre:

$$L = \Delta T = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta U = \Delta(T + U) = 0 \quad (5.16)$$

cioè la quantità tra parentesi si conserva. Essa è chiamata *energia meccanica* e nel caso presente vale

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{cost} \quad (5.17)$$

in cui riconosciamo la legge di conservazione (2.10):

$$v^2 - 2ax = \text{cost} \quad \text{con } a = -g \text{ e } x = h$$

Osservazione 5.1. L'esercizio precedente ci ha mostrato come la legge di conservazione dell'energia sia equivalente, nel caso di forze costanti, alla legge di conservazione che avevamo identificato nella trattazione cinematica del moto ad accelerazione costante: una opportuna combinazione che risulta quadratica nella velocità e lineare nella posizione non cambia nel tempo. Gli esercizi successivi mostrano che l'approccio Newtoniano attraverso il lavoro conduce talvolta a una generalizzazione di quella legge in cui la dipendenza della velocità sarà comunque quadratica ma quella dalla posizione avrà espressioni diverse a seconda delle forze.

Esercizio 54 (Lavoro della forza elastica). Calcolare il lavoro della forza elastica $F = -kx$ ($k > 0$) in una dimensione. Identificare la formula dell'energia potenziale elastica e la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Soluzione:

$$L_e = -k \int_{x_i}^{x_f} x \, dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = -\Delta U_e, \quad U_e = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cost} \quad (5.18)$$

$$E = T + U_e = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cost} \quad (5.19)$$

Esercizio 55 (Moto armonico). La legge di Newton in una dimensione per un corpo di massa m soggetto a una forza elastica $F = -kx$ è:

$$ma = m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (5.20)$$

e definendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) . \quad (5.21)$$

Verificare che:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad A, \phi \in \mathbb{R} \quad (5.22)$$

è soluzione dell'equazione di Newton per tutti i valori di ϕ e A . Verificare anche la conservazione dell'energia meccanica dimostrata per la forza elastica.

Soluzione: Assumendo $x(t)$ come sopra:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \phi) \\ \ddot{x}(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{mA^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \phi) = \\ &= \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kA^2 \quad \text{indipendente da } t. \end{aligned}$$

Si noti che la quantità $\frac{1}{2}kA^2$ corrisponde all'energia potenziale nel punto di massima elongazione, in cui tutta l'energia è di natura potenziale. Analogamente si osservi che l'energia potenziale nel punto ad elongazione nulla vale zero e tutta l'energia si è trasformata in cinetica. Infatti, in quella posizione il coseno è zero e il seno vale 1:

$$T = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (5.23)$$

Osservazione 5.2. Per le forze posizionali una inversione dello spostamento dx cambia il segno al lavoro:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = - \int_{x_f}^{x_i} F(x)dx. \quad (5.24)$$

Questa proprietà è una conseguenza della legge del cambio di variabile di integrazione (5.7).

Esempi di forze posizionali sono le forze costanti tra cui la forza peso in prossimità della superficie terrestre, la forza elastica. Vedremo nel prossimo capitolo la forza gravitazionale di Newton.

Osservazione 5.3. Se si riesce a scrivere il lavoro di una forza come:

$$L = -\Delta U \quad (5.25)$$

allora:

$$x_i = x_f \Rightarrow L = -\Delta U = 0. \quad (5.26)$$

la condizione precedente ammette come caso particolare quella del corpo in quiete.

Esercizio 56 (Forza non posizionale). Si consideri una forza di attrito in $d = 1$ che dipende dalla velocità secondo la formula:

$$F = -b\dot{x}, \quad b > 0. \quad (5.27)$$

Notiamo che non vale l'Osservazione 5.2. Calcolare il lavoro sulla legge di moto:

$$\begin{cases} x(t) = t, & t \in [0, 1] \\ x(t) = 2 - t & t \in [1, 2] \end{cases}. \quad (5.28)$$

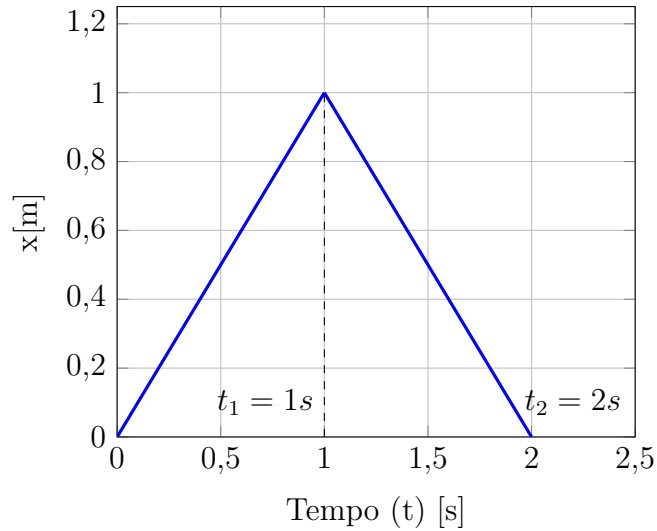


Figura 5.2: Esercizio 56: x vs t .

Soluzione: Calcoliamo anzitutto \dot{x} nei due tratti di percorso:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 1 & t \in [0, 1] \\ \dot{x}(t) = -1 & t \in [1, 2] \end{cases}.$$

Utilizzando la definizione (5.6) si ha:

$$L = \int_0^1 Fv dt + \int_1^2 Fv dt = -b + (-b) = -2b \neq 0.$$

Pertanto L non si può scrivere come $-\Delta U$.

Osservazione 5.4. L'esempio precedente mostra che per la forza di attrito considerata non esiste la funzione energia potenziale e che pertanto l'energia meccanica non si conserva. La conservazione dell'energia totale viene recuperata nel caso di forze di attrito all'interno di una teoria quale la termodinamica con l'introduzione di nuove forme di energia oltre quella meccanica.

Osservazione 5.5. Si osservi che in una dimensione, per forze posizionali, abbiamo visto che

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x) dx = -\Delta U \quad (5.29)$$

in altri termini $U(x)$ è l'integrale cambiato di segno della forza

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx' + \text{cost}, \quad (5.30)$$

da cui, per il teorema fondamentale del calcolo

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x). \quad (5.31)$$

Infatti, nel caso di forza gravitazionale costante dove $U(x) = mgx$ si ha che

$$-mg = -\frac{d}{dx}mgx. \quad (5.32)$$

Analogamente, nel caso della forza elastica $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

$$-kx = -\frac{d}{dx}\frac{1}{2}kx^2. \quad (5.33)$$

5.3 Estensione a 2 e 3 dimensioni

Il lavoro di una forza \mathbf{F} costante su un corpo di massa m che si sposta di $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$ vale:

$$L = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z = \|\mathbf{F}\|\|\Delta\mathbf{r}\|\cos\theta \quad (5.34)$$

dove θ è l'angolo compreso fra \mathbf{F} e $\Delta\mathbf{r}$.

Se la forza non è costante ma dipende solo dalla posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{cases} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{cases}, \quad (5.35)$$

la definizione di lavoro è estesa dalla nozione di integrale curvilineo lungo una curva in tre dimensioni \mathcal{C}_{if} (che supporremo dotata, almeno a tratti, del vettore tangente) che va da una posizione iniziale $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ a una posizione finale $\mathbf{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$ e, posto $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ il vettore infinitesimo lungo la curva, vale

$$L_{\mathcal{C}_{if}} = \int_{\mathcal{C}_{if}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x, y, z) dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y(x, y, z) dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z(x, y, z) dz. \quad (5.36)$$

Per ciascuno dei tre termini nell'integrale della (5.36) nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato che vale il teorema dell'energia cinetica, quindi

$$L_{\mathcal{C}_{if}} = \Delta T_x + \Delta T_y + \Delta T_z = \Delta(T_x + T_y + T_z) = \Delta T \quad (5.37)$$

con

$$T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\|\mathbf{v}\|^2. \quad (5.38)$$

Verrà provato nei corsi di Fisica Matematica superiori che la nozione di lavoro così come il teorema dell'energia cinetica si estendono anche a forze non posizionali.

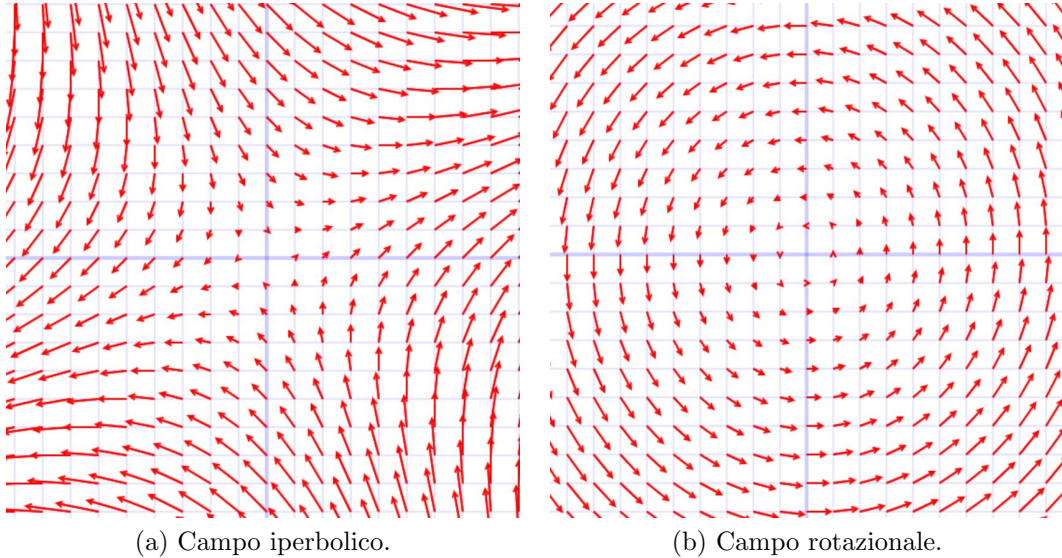


Figura 5.3: Alcuni esempi di campi vettoriali in \mathbb{R}^2 .

Osservazione 5.6. L'espressione (5.35) rappresenta un *campo vettoriale*, cioè una funzione che ad ogni punto di un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 associa un vettore in \mathbb{R}^3 . Per prendere confidenza con questo nuovo concetto si consideri l'esempio di campo iperbolico (Figura 5.3a) da \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{cases} F_x(x, y) = x + y \\ F_y(x, y) = x - y \end{cases} \quad (5.39)$$

e si calcoli il suo valore, disegnando il vettore nel piano, nei punti $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$. Un altro esempio è il campo rotazionale in Figura 5.3b

$$\mathbf{B}(x, y) = \begin{cases} B_x(x, y) = -y \\ B_y(x, y) = x \end{cases} . \quad (5.40)$$

Valutarlo, disegnando il vettore nel piano, nei punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$. Trovare le curve in cui il modulo del vettore $\mathbf{B}(x, y)$ è costante. Dimostrare anche che $\mathbf{B}(x, y)$ è ortogonale ad $\mathbf{r} = (x, y)$. Queste utili informazioni caratterizzano il campo e permettono di calcolarlo in ogni punto di \mathbb{R}^2

Osservazione 5.7 (Campo centripeto). Un altro esempio è quello del campo di forza centripeta ottenuto dalla formula (3.42)

$$\mathbf{F}_{cp} = -m\omega^2 \mathbf{r} \quad (5.41)$$

illustrato in Figura 5.4.

Esercizio 57 (Lavoro della forza gravitazionale costante in \mathbb{R}^2). Mostrare che il lavoro della forza gravitazionale costante $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{j}}$ è uguale lungo il percorso blu e quello rosso in Figura 5.5. Mostrare che il risultato è sempre lo stesso su ogni curva \mathcal{C} che vada da A a B .

Soluzione: Applico la definizione per forze costanti:

$$L_{A,B} = (-mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot \underbrace{(d\hat{\mathbf{i}} + h\hat{\mathbf{j}})}_{\mathbf{r}_{AB}} = -mgh \quad (5.42)$$

$$L_{A,P} + L_{P,B} = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot d\hat{\mathbf{i}} - mg\hat{\mathbf{j}} \cdot h\hat{\mathbf{j}} = -mgh . \quad (5.43)$$

Applico la definizione generale per la curva generica:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot (dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}}) = -mg dy \quad (5.44)$$

$$L_{\mathcal{C}_{AB}} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} -mg dy = -mg \int_{y_A}^{y_B} dy = -mgh . \quad (5.45)$$

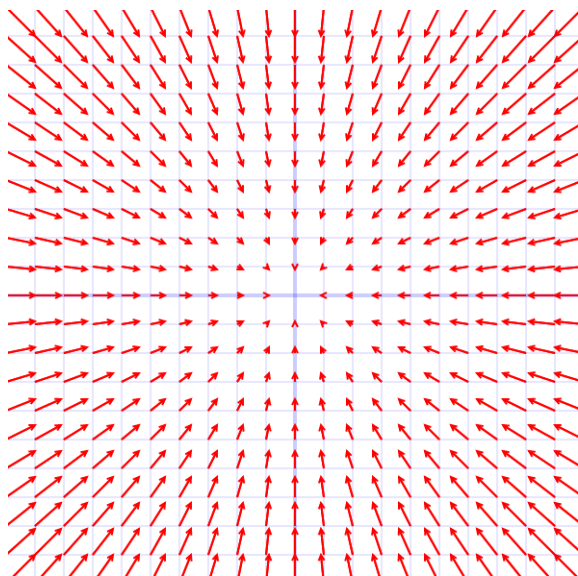


Figura 5.4: Campo centripeto.

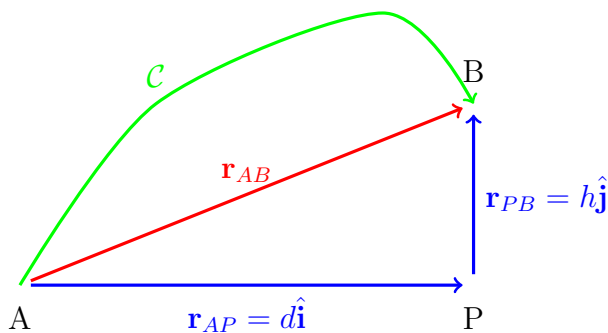


Figura 5.5: Esercizio 57.

Osservazione 5.8. Osserviamo che $L_{C_{AB}} = -\Delta U$ per un'opportuna funzione $U(x, y)$ che vale

$$U(x, y) = mgy + \text{cost} \quad (5.46)$$

e pertanto $L_{C_{AB}}$ dipende soltanto dalle coordinate dei punti A e B .

Esercizio 58 (Lavoro della forza gravitazionale costante in \mathbb{R}^3). Sia $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{k}}$. Trovare l'energia potenziale $U(x, y, z)$.

5.4 Forze conservative

Una forza posizionale si dice *conservativa* se il suo lavoro dipende solo dai punti iniziale e finale e non dal percorso seguito.

Si dimostra l'equivalenza delle seguenti proprietà delle forze conservative \mathbf{F} :

1. il lavoro di \mathbf{F} dipende soltanto dai punti iniziale e finale della traiettoria;
2. il lavoro di \mathbf{F} su una qualsiasi curva chiusa è nullo;
3. $\exists U(\mathbf{r}) : L_{\mathcal{C}_{if}} = -\Delta U = -(U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i)) \forall \mathcal{C}_{if}$.

Dimostrazione di (1) \Leftrightarrow (2). Si faccia riferimento a Figura 5.6. L'inversione del per-

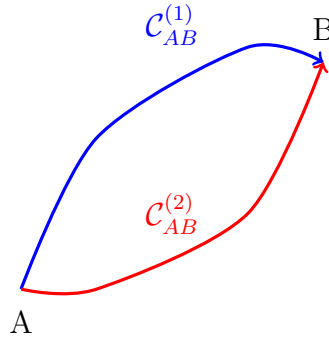


Figura 5.6: Dimostrazione di (1) \Leftrightarrow (2).

corso cambia il segno al lavoro:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{AB}^{(1)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\mathcal{C}_{AB}^{(2)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathcal{C}_{BA}^{(2)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ \int_{\mathcal{C}_{AB}^{(1)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_{BA}^{(2)}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= 0 = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Dove:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{AB}^{(1)} \cup \mathcal{C}_{BA}^{(2)}$$

è una curva chiusa da percorrere da A a B lungo $\mathcal{C}_{AB}^{(1)}$, e poi da B ad A lungo $\mathcal{C}_{BA}^{(2)}$. \square

Dimostrazione di (1, 2) \Leftrightarrow (3). La (3) implica automaticamente (1) e di conseguenza (2). Dimostriamo ora che (1) implica (3). Definiamo la seguente funzione

$$U(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.47)$$

dove \mathbf{r}_0 è un punto fissato arbitrariamente. Si noti che questa è una definizione ben posta grazie all'ipotesi (1). Consideriamo ora i due punti $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f$, e osserviamo che

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i} \cup \mathcal{C}_{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f} \cup \mathcal{C}_{\mathbf{r}_f, \mathbf{r}_0}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (5.48)$$

per l'ipotesi (2). Ora, spezzando l'integrale sulle varie curve otteniamo

$$L_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f}} = \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_f}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_f}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -U(\mathbf{r}_f) + U(\mathbf{r}_i) \quad (5.49)$$

□

Osservazione 5.9. Le condizioni (1), (2) e (3) risultano piuttosto astratte nel senso che è poco pratico verificarle. Sono invece utilissime delle condizioni sulla forza \mathbf{F} per capire se questa è conservativa che verranno studiate nei corsi superiori di Analisi e Fisica Matematica.

Osservazione 5.10. Si osservi che la somma di due (o più) forze conservative è essa stessa conservativa. Questo può essere visto utilizzando una qualsiasi delle tre definizioni e ricorrendo alla linearità dell'integrale. In particolare la definizione che utilizza il concetto di potenziale implica che la somma di due forze conservative ha come potenziale la somma dei relativi potenziali.

Esercizio 59 (Lavoro di una forza costante in tre dimensioni). Dimostrare che una forza costante \mathbf{F} in \mathbb{R}^3 ammette un potenziale e calcolarlo.

Soluzione:

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}_{AB}} &= \int_{\mathcal{C}_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x \int dx + F_y \int dy + F_z \int dz = \\ &= F_x(x_B - x_A) + F_y(y_B - y_A) + F_z(z_B - z_A) = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

da cui si deduce

$$L = -\Delta U, \quad \text{con } U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} + \text{cost} \quad (5.50)$$

dunque le forze costanti sono conservative.

Esercizio 60. Dimostrare che la forza elastica disomogenea $\mathbf{F} = (-k_1x, -k_2y, -k_3z)$, con $k_1, k_2, k_3 \geq 0$, in \mathbb{R}^3 è conservativa e calcolare il suo potenziale.

Soluzione:

$$\begin{aligned} L &= -k_1 \int_{x_1}^{x_2} x \, dx - k_2 \int_{y_1}^{y_2} y \, dy - k_3 \int_{z_1}^{z_2} z \, dz = \\ &= -\frac{1}{2}[k_1(x_2^2 - x_1^2) + k_2(y_2^2 - y_1^2) + k_3(z_2^2 - z_1^2)] \quad (5.51) \end{aligned}$$

Dunque definendo:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}[k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2] + \text{cost} \quad (5.52)$$

si ha $L = -\Delta U$ cioè la forza elastica è conservativa.

Osservazione 5.11. Osserviamo che in dimensione generica, quando una forza è conservativa, le sue componenti sono legate all'energia potenziale da una semplice relazione. Per trovarla scegliamo un cammino rettilineo parallelo all'asse x da x_i ad x_f , tenendo quindi y e z fissate.

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x, y, z) dx = -\Delta U \quad (5.53)$$

quindi

$$U(x, y, z) = - \int^x F_x(x', y, z) dx', \quad (5.54)$$

da cui, analogamente a quanto visto in (5.31), per il teorema fondamentale del calcolo

$$F_x(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z) \quad (5.55)$$

dove con il simbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ (*derivata parziale*) abbiamo indicato la derivata lungo x di una funzione in tre variabili tenendo y e z costanti. Ripetendo le stesse considerazioni per le altre due componenti della forza otteniamo

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right). \quad (5.56)$$

Verificare la formula (5.56) per la forza costante (Esercizio 59) e la forza elastica (Esercizio 60) in tre dimensioni.

Osservazione 5.12. Per una funzione $f(x, y, z)$ si definisce il campo vettoriale *gradiente*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \quad (5.57)$$

e quindi

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (5.58)$$

Il vettore gradiente permette di estendere la definizione di differenziale (5.12) di una funzione $f(x, y, z)$

$$df(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz. \quad (5.59)$$

Come osservato per il caso in una dimensione il differenziale approssima la variazione della funzione quando $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ è molto piccolo:

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y, z) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \\ &= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) + f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) \\ &+ f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\Delta z. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Osservazione 5.13. E' interessante osservare che la forza \mathbf{F} è perpendicolare alle superfici equipotenziali. Lo mostriamo in due dimensioni ma la dimostrazione si estende facilmente a dimensione generica. Data $U(x, y)$ si consideri una parametrizzazione, $x(t)$ e $y(t)$, delle curve in cui $U(x, y) = c$ (come esempio si pensi all'energia potenziale $U(x, y) = x^2 + y^2$ in cui le curve equipotenziali $U = r^2$ sono le circonferenze di raggio r parametrizzate in coseno e seno):

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = 0 = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (5.61)$$

Esercizio 61. Dimostrare che la forza posizionale $\mathbf{F}(x, y) = -y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}$ non è conservativa.

Soluzione: Per vederlo si calcoli il lavoro lungo la circonferenza unitaria \mathcal{C}

$$\mathbf{r} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (5.62)$$

Utilizzando il teorema di cambio di variabile di integrazione (5.7) si ha

$$\begin{aligned} L = \oint_C (-y dx + x dy) &= \int_0^{2\pi} \left[-\sin \theta \frac{d \cos \theta}{d\theta} + \cos \theta \frac{d \sin \theta}{d\theta} \right] d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] d\theta = 2\pi \neq 0. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Quindi la definizione 2 di forza conservativa è violata.

Capitolo 6

Gravitazione Universale

In questo capitolo viene introdotta la teoria di Gravitazione Universale di Newton come forza esercitata tra ogni coppia di masse. Si mostra come questa permetta di spiegare le leggi di Keplero. Viene dimostrato che la forza gravitazionale Newtoniana è conservativa e a partire dall'energia potenziale gravitazionale newtoniana si introduce la nozione di velocità di fuga. Si introduce il concetto di campo gravitazionale come campo vettoriale in ogni punto dello spazio.

6.1 Forza gravitazionale newtoniana

Nella teoria di Newton la gravitazione universale è una forza attrattiva tra ogni coppia di masse, tra una mela e la Terra, tra la Terra e Luna, tra Terra e Sole, tra due mele.

La forza di gravitazione tra due *masse puntiformi* ha direzione della loro congiungente, verso attrattivo e modulo definito da

$$\|\mathbf{F}\| \equiv G \frac{mM}{r^2}, \quad G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \quad (6.1)$$

dove M , m sono le *masse gravitazionali* dei due corpi, r è la distanza che li separa e G è la *costante di gravitazione universale*.

Esercizio 62. Con le precedenti definizioni calcolare in funzione di $\mathbf{r} = (x, y, z)$ la forza percepita da una massa m posizionata in \mathbf{r} ed esercitata da una massa M posta nell'origine degli assi O .

Soluzione: Considerato che il versore

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \|\hat{\mathbf{r}}\| = 1, \quad \|\mathbf{r}\| = r \quad (6.2)$$

identifica la direzione della forza questa avrà come espressione analitica un vettore che punta verso l'origine parallelo ad $\hat{\mathbf{r}}$ dato da

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{x^2 + y^2 + z^2} \hat{\mathbf{r}} = -GmM \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}. \quad (6.3)$$

Esercizio 63. Considerando la massa della Terra M_T tutta concentrata nel suo centro, calcolare l'accelerazione percepita da un corpo puntiforme sulla superficie terrestre (di raggio R_T).

Soluzione:

$$F = m_i g = \frac{GM_T m_g}{R_T^2}$$

Semplificando la massa m_i con la m_g :

$$g(M_T, R_T) = \frac{GM_T}{R_T^2}. \quad (6.4)$$

Esercizio 64. Con le stesse assunzioni del precedente esercizio, si valuti quanto vale l'accelerazione $g(M_T, R)$ con $R > R_T$.

Soluzione:

$$g(M_T, R) = \frac{GM_T}{R^2} = \frac{GM_T}{R_T^2} \frac{R_T^2}{R^2} = g(M_T, R_T) \frac{R_T^2}{R^2}.$$

Ad esempio sull'Everest $g \simeq 9.77 \text{ m/s}^2$.

Esercizio 65 (Satellite). Calcolare la velocità angolare ω e lineare v con cui deve viaggiare una massa m per orbitare attorno a una di massa M (fissa) compiendo un moto circolare uniforme di raggio r .

Soluzione: Mettiamo M nell'origine.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a}_c &= -\omega^2 r \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{r} \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{F} &= m \mathbf{a}_c. \end{aligned}$$

Mettendo insieme le equazioni precedenti:

$$v^2 = \frac{GM}{r} \quad (6.5)$$

$$\omega^2 = \frac{GM}{r^3} \quad (6.6)$$

Esercizio 66 (Satellite geostazionario). Calcolare velocità v e raggio r di un satellite geostazionario, cioè un satellite che occupa la stessa posizione rispetto a un osservatore fisso con la terra.

Soluzione: Il satellite ha una velocità angolare che può essere calcolata ricordando che il periodo di rotazione della Terra è $T = 1 \text{ giorno} = 24 \cdot 60 \cdot 60s$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 7.27 \cdot 10^{-5} s^{-1}.$$

Dall'esercizio precedente:

$$r^3 = \frac{GM_T}{\omega^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{\omega^2}} \simeq 42\,168 \text{ km}$$

a circa 36 000 km dalla superficie terrestre e

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r \simeq 3\,000 \text{ m/s}$$

6.2 Leggi di Keplero

Una delle motivazioni che indusse Newton a proporre la legge di gravitazione universale fu quella di ottenere da essa le tre leggi di *Keplero*:

1. le orbite dei pianeti sono ellittiche e il Sole occupa uno dei due fuochi;
2. la velocità areolare, cioè l'area spazzata dal raggio vettore che congiunge il Sole con un pianeta per unità di tempo, è costante;
3. il rapporto tra il quadrato del periodo T^2 di rivoluzione e il cubo del semiasse maggiore R^3 dell'orbita è costante per tutti i pianeti:

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cost}$$

Tra tutte le orbite ellittiche c'è quella particolare di orbita circolare in cui due semiassi dell'ellisse sono uguali e i fuochi coincidono col centro. La seconda e la terza legge si riducono in questo caso a

2 il moto ha una velocità angolare costante $\omega = \text{cost}$;

3 il rapporto tra il quadrato del periodo e il cubo del raggio è costante.

La terza legge di Keplero per orbite circolari può essere dimostrata e quantificata a partire da quella di gravitazione universale. Dall' Esercizio 65 infatti si ha che

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{R^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Esercizio 67. Dati due corpi puntiformi di masse m_1 ed m_2 nelle posizioni: $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, calcolare le forze gravitazionali che ciascuno esercita sull'altro verificando che obbediscono al terzo principio. Scrivere le forze in notazione vettoriale cartesiana.

Soluzione: Si procede come per l'Esercizio 62. In questo caso la direzione sarà identificata dal vettore $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Quindi la forza che m_1 esercita su m_2 vale

$$\mathbf{F}_{1,2} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} = -Gm_1m_2 \frac{(x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}}}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{3/2}} \quad (6.7)$$

L'espressione $\mathbf{F}_{2,1}$ è ottenuta scambiando 1 con 2 da cui si vede che

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$$

in accordo con il terzo principio di Newton.

6.3 Lavoro della forza gravitazionale Newtoniana

Consideriamo una massa M posta nell'origine degli assi e calcoliamo il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale su m lungo una curva \mathcal{C}_{AB} che connette due punti A e B . Dalla definizione si ha:

$$L_{\mathcal{C}_{AB}} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.8)$$

Scriviamo lo spostamento $d\mathbf{r}$ come somma di due vettori ortogonali, uno parallelo a $\hat{\mathbf{r}}$ e l'altro a esso ortogonale che giace nel piano tangente alla sfera di raggio $r = \|\mathbf{r}\|$, denotandoli rispettivamente con $d\mathbf{r}_{\parallel}$ e $d\mathbf{r}_{\perp}$:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp}. \quad (6.9)$$

Per il Teorema del coseno (3.3.1) si ha che

$$d\mathbf{r}_{\parallel} = (d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \quad (6.10)$$

Per costruzione geometrica risulta che la proiezione del vettore variazione infinitesima di \mathbf{r} lungo la radiale $\hat{\mathbf{r}}$ è la variazione infinitesima della distanza dal centro:

$$d\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}} = dr \quad (6.11)$$

quindi

$$d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}} + d\mathbf{r}_{\perp}.$$

Dunque:

$$L_{C_{AB}} = \int_{C_{AB}} -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot (dr\hat{\mathbf{r}} + d\mathbf{r}_{\perp}) = \int_{r_A}^{r_B} -G \frac{Mm}{r^2} dr = GMm \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = -\Delta U,$$

dove la funzione U vale

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} + \text{cost}. \quad (6.12)$$

La precedente dimostra che la forza gravitazionale newtoniana è conservativa e l'energia meccanica risulta essere

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}. \quad (6.13)$$

Esercizio 68. La formula (6.11) è equivalente alla

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr. \quad (6.14)$$

Si dimostri la formula precedente utilizzando la definizione (5.59) applicata alla funzione $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Soluzione: La derivata parziale rispetto ad x è:

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad (6.15)$$

e le altre si ottengono analogamente per simmetria. La definizione di differenziale (5.59) conduce infine alla (6.14).

Esercizio 69. Dimostrare che una qualsiasi forza *centrale* definita dalla

$$\mathbf{C}(\mathbf{r}) = c(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (6.16)$$

è conservativa ed il suo potenziale è

$$U(\mathbf{r}) \equiv U(r) = - \int_{r_0}^r c(r') dr'. \quad (6.17)$$

Eseguire il calcolo esplicito nei casi:

$$\mathbf{F}_{cf}(\mathbf{r}) = m\omega^2\mathbf{r}, \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \text{ (forza centrifuga)} \quad (6.18)$$

$$\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{r}) = -Ar^\alpha\hat{\mathbf{r}}, \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (6.19)$$

con $A = 1N/m^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Osservazione 6.1. Dall'espressione per l'energia meccanica nel caso di forza gravitazionale costante (5.17)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh,$$

che come vedremo è solo un'approssimazione locale di quella appena ottenuta (6.13), risulta che a prescindere dalla velocità con cui si lancia un proiettile verso l'alto questo ricadrà sempre. Nella teoria della gravitazione universale di Newton questo non è più vero come mostrato nell'esercizio seguente.

Esercizio 70 (Velocità di fuga). Si calcoli la *minima* velocità V_e con cui occorre lanciare un corpo dalla Terra per far sì che non ricada mai su di essa e si allontani indefinitamente.

Soluzione: Appliciamo la conservazione dell'energia meccanica (6.13) in cui la condizione iniziale è $(r_i, v_i) = (R_T, V_e)$ e quella finale è $(r_f, v_f) = (+\infty, 0)$. La velocità nulla che scegliamo nella condizione finale è dovuta alla ricerca della più piccola velocità iniziale che permetta di allontanarsi indefinitamente.

$$E = \frac{1}{2}mV_e^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2}m0^2 - \lim_{r \rightarrow \infty} G\frac{M_T m}{r} = 0$$

da cui:

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \simeq 11\,200 \text{ m/s}. \quad (6.20)$$

Per velocità iniziali superiori a quelle di fuga il corpo si allontana indefinitamente dalla terra e la sua energia cinetica non si annulla nel limite $r \rightarrow \infty$.

Esercizio 71. Un corpo sulla superficie terrestre viene lanciato con velocità $v_i^2 = V_e^2 + v^2$. Calcolare la sua energia cinetica residua a distanza infinita dalla Terra.

Esercizio 72. Dimostrare che per la forza $F_\alpha(\mathbf{r})$ in (6.19) non ammette velocità di fuga per tutti gli $\alpha \geq -1$. Calcolare la velocità di fuga per gli $\alpha < -1$ partendo da $r = 1$.

Esercizio 73. Dimostrare che vicino alla superficie terrestre, cioè a quote $h : h/R_T \ll 1$ il potenziale newtoniano

$$U = -G \frac{M_T m}{r} + \text{cost}$$

verifica

$$\Delta U \simeq mgh.$$

Soluzione: Assumiamo di partire da una distanza $r = R_T$ e raggiungere $r = R_T + h$.

$$\begin{aligned} U(R_T + h) - U(R_T) &= -GmM_T \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T} \right) = \frac{GmM_T}{(R_T + h)R_T} h = \\ &= mh \underbrace{\frac{GM_T}{(1 + h/R_T)R_T^2}}_g = mh \frac{GM_T}{R_T^2} \left(1 - \frac{h}{R_T} + \frac{(h/R_T)^2}{1 + h/R_T} \right) \end{aligned}$$

che tende a mgh quando $h/R_T \rightarrow 0$. La formula precedente identifica uno sviluppo di Taylor al primo ordine utilizzando la

$$\frac{1}{1 + \epsilon} = 1 - \epsilon + o(\epsilon).$$

Osservazione 6.2. Nel caso di due corpi posizionati in $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ l'energia potenziale vale

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}. \quad (6.21)$$

Essa non è una energia dell'uno o dell'altro corpo ma appartiene al sistema dei due corpi. In tal caso l'energia meccanica del sistema risulta

$$E = \frac{1}{2}m_1v_i^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}. \quad (6.22)$$

In caso di tre corpi, m_1 in \mathbf{r}_1 , m_2 in \mathbf{r}_2 , m_3 in \mathbf{r}_3 l'energia potenziale dell'intero sistema è:

$$U = -G \frac{m_1m_2}{r_{12}} - G \frac{m_1m_3}{r_{13}} - G \frac{m_2m_3}{r_{23}}. \quad (6.23)$$

Esercizio 74. Calcolare l'energia potenziale gravitazionale per la configurazione di tre masse unitarie nelle posizioni $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$.

6.4 Campo gravitazionale

Risulta talvolta utile definire il concetto di campo gravitazionale come la quantità

$$\mathbf{g} := \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (6.24)$$

dove la forza \mathbf{F} è la forza gravitazionale totale generata da altre masse e percepita da m . Il campo gravitazionale è un esempio di campo vettoriale in \mathbb{R}^3 .

Esempio 6.1. Nel caso di una massa M posta nell'origine il campo da essa generato in posizione \mathbf{r} vale

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}. \quad (6.25)$$

Esercizio 75. Calcolare il campo gravitazionale nell'origine generato da una distribuzione discreta di masse puntiformi: $(m_i, \mathbf{r}_i)_{i=1, \dots, K}$.

Soluzione: La i -esima massa m_i esercita su una massa m posizionata nell'origine la forza (6.7)

$$\mathbf{F}_{i,0} = -Gmm_i \frac{\mathbf{0} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{0} - \mathbf{r}_i\|^3} = Gmm_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \quad (6.26)$$

pertanto la forza totale su m risulta

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_{i,0} \quad (6.27)$$

da cui, secondo la (6.24)

$$\mathbf{g} = G \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i. \quad (6.28)$$

Esercizio 76. Calcolare il campo gravitazionale in \mathbf{r} generato da una distribuzione discreta di masse puntiformi: $(m_i, \mathbf{r}_i)_{i=1, \dots, K}$.

Soluzione: Si procede come nell'esercizio precedente notando che in questo caso le singole forze sono dirette lungo $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Quindi

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = G \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}). \quad (6.29)$$

Si noti che la precedente è una traslazione di \mathbf{r} della (6.28).

Esercizio 77. Calcolare il campo gravitazionale nell'origine prodotto da tre masse unitarie poste in:

$$\mathbf{r}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{r}_2 = (1, 0, 0), \mathbf{r}_3 = (1, 1, 0).$$

Soluzione:

$$\mathbf{g} = G \left(\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{i}} + \frac{\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{i}}}{2^{3/2}} \right) = G \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} \right) (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}).$$

Esercizio 78. Calcolare il campo gravitazionale prodotto nell'origine da masse unitarie che occupano le posizioni $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$.

Esercizio 79. Calcolare il campo gravitazionale generato dalla distribuzione di masse dell'Esercizio 77 e dell'Esercizio 78 in un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Esercizio 80. Si consideri la distribuzione di masse identiche e unitarie $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$. Calcolare il campo gravitazionale nell'origine.

Soluzione: Se introduciamo una massa in $(1, 0, 0)$ il campo nell'origine è nullo. Dato che il campo è un vettore possiamo dire che:

$$\mathbf{g}(0) + \mathbf{g}_{(1,0,0)}(0) = 0$$

per simmetria, dove $\mathbf{g}(0)$ è l'incognita del problema e $\mathbf{g}_{(1,0,0)}(0)$ è il campo generato nell'origine da una massa puntiforme in $(1, 0, 0)$.

$$\mathbf{g}(0) = -\mathbf{g}_{(1,0,0)}(0) = -G\hat{\mathbf{i}}.$$

Esercizio 81. Risolvere l'esercizio precedente con $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(1, -1, 0)$.

6.5 Potenziale gravitazionale

Il concetto di conservatività che abbiamo introdotto per la forza gravitazionale si estende al suo campo. Per vederlo si consideri l'integrale del campo lungo un cammino. Per una massa M posizionata nell'origine

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_{AB}} -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{m} \Delta U = -\Delta V \quad (6.30)$$

dove la funzione

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} + \text{cost} \quad (6.31)$$

è il potenziale gravitazionale generato dalla M . Analogamente il campo gravitazionale generato da una distribuzione discreta di masse puntiformi $(m_i, \mathbf{r}_i)_{i=1, \dots, K}$ vale

$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^K -G \frac{m_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} \quad (6.32)$$

Esercizio 82. Dimostrare la formula del potenziale (6.32) a partire da quella del campo (6.29).

Soluzione: Analogamente a come già mostrato nell'Osservazione 5.10 per le forze è immediato constatare che la somma di campi gravitazionali è conservativa. Infatti presa una curva \mathcal{C}_{AB} da A a B in \mathbb{R}^3 e riutilizzando la notazione nella (6.29)

$$\int_{\mathcal{C}_{AB}} \left[G \sum_{i=1}^K \frac{m_i}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}\|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \right] \cdot d\mathbf{r} = -G \sum_{i=1}^K m_i \int_{\mathcal{C}_{AB}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^3} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.33)$$

Osserviamo ora che per ogni i fissato $d\mathbf{r} = d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Introducendo dunque $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ si ha che $d\mathbf{r} = d\mathbf{R}_i$ e dalla (6.14) segue che $\mathbf{R}_i \cdot d\mathbf{R}_i = R_i dR_i$. Inserendo quanto scoperto nell'integrale giungiamo a

$$-G \sum_{i=1}^K m_i \int_{\mathcal{C}_{AB}} \frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} \cdot d\mathbf{R}_i = -G \sum_{i=1}^K m_i \int_{\mathcal{C}_{AB}} \frac{dR_i}{R_i^2} = G \sum_{i=1}^K m_i \left[\frac{1}{R_i} \right]_A^B. \quad (6.34)$$

Reinserendo al posto di \mathbf{R}_i la sua definizione otteniamo:

$$\Delta V = -G \sum_{i=1}^K m_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_i\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_i\|} \right], \quad (6.35)$$

che conduce direttamente alla (6.32).

Esercizio 83. Verificare che la formula del potenziale (6.31) e quella del campo (6.25) sono legate dalla

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla V. \quad (6.36)$$

Soluzione: Dato che la funzione $r = r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è simmetrica rispetto allo scambio di x , y e z è sufficiente calcolare la derivata rispetto a x e le altre si dedurranno di conseguenza.

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad (6.37)$$

da cui tramite la regola della derivata della funzione composta segue anche che

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} r = -\frac{x}{r^3}. \quad (6.38)$$

La derivata rispetto ad x del potenziale (6.31) risulta quindi

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) = \frac{GM}{r^3} x. \quad (6.39)$$

Per la simmetria sopra citata, nelle derivate rispetto ad y e z è sufficiente rimpiazzare la x nella precedente con y e z rispettivamente ottenendo infine

$$\nabla V = \left(\frac{GM}{r^3} x, \frac{GM}{r^3} y, \frac{GM}{r^3} z \right) = \frac{GM}{r^3} \mathbf{r} = -\mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (6.40)$$

Esercizio 84. Si considerino due masse unitarie nelle posizioni $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$. Calcolare il campo e il potenziale da esse generato in un punto generico \mathbf{r} e verificare che essi soddisfano la (6.36).

Soluzione: La soluzione si ricava immediatamente dalle (6.29) e (6.32):

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{(x-1)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - G \frac{x\hat{\mathbf{i}} + (y-1)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (6.41)$$

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{G}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{G}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{1/2}}. \quad (6.42)$$

Si noti che il potenziale non è più simmetrico per scambio delle coordinate x , y , e z . Tuttavia il primo termine che lo compone è simmetrico per scambio di $x-1$, y e z ,

mentre il secondo termine è simmetrico per scambio di x , $y - 1$, z . Ragionando in maniera simile all'esercizio precedente calcoliamo ad esempio

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{G}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right) = \frac{Gz}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \quad (6.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{G}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{1/2}} \right) = \frac{Gz}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (6.44)$$

Inoltre, sfruttando la regola di derivata della funzione composta abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{G}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial(x-1)} \left(-\frac{G}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right) = \\ &= \frac{G(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \end{aligned} \quad (6.45)$$

e similmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{G}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{1/2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial(y-1)} \left(-\frac{G}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{1/2}} \right) = \\ &= \frac{G(y-1)}{[x^2 + (y-1)^2 + z^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Sfruttando infine le simmetrie e la linearità della derivata è chiaro che il primo termine in (6.42) genera il primo termine del campo (6.41), mentre il secondo termine in (6.42) genera il secondo termine del campo (6.41).

Capitolo 7

Flusso del campo gravitazionale

Per risolvere alcuni degli esercizi nel capitolo precedente abbiamo fatto ricorso a una ipotesi, quella di considerare la massa di un corpo, la terra, il sole etc., tutta concentrata nel suo centro. In questo capitolo capiremo perché quella ipotesi di calcolo è corretta, dimostreremo cioè che il campo gravitazionale prodotto all'esterno di una sfera massiva omogenea è identico a quello che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel suo centro. Questo risultato, dimostrato da Newton nel caso della forza Gravitazionale, è stato generalizzato da Gauss ed è noto in analisi con il nome di *teorema della divergenza*. In questo capitolo studieremo il teorema di Newton in due e in tre dimensioni.

7.1 Caso bidimensionale

Dato un segmento di lunghezza l in \mathbb{R}^2 si dice *segmento orientato* il vettore:

$$\mathbf{l} = l\hat{\mathbf{n}} \quad (7.1)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è un *versore normale* (uno dei due) al segmento stesso.

Considerato un vettore \mathbf{v} (che può essere pensato anche come campo vettoriale *costante*), il suo *flusso attraverso il segmento orientato* \mathbf{l} (vedi Figura 7.1) è:

$$\phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{l} = vl \cos \alpha . \quad (7.2)$$

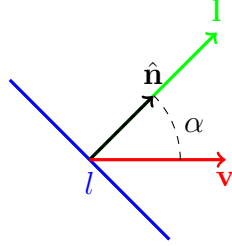


Figura 7.1: Flusso di un campo vettoriale costante su un segmento orientato.

Osservazione 7.1. Valori particolari del flusso si hanno nei seguenti casi:

$$\begin{aligned} \phi &= -vl & \text{quando } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{l} \text{ sono antiparalleli} & \quad \alpha = \pm\pi \\ \phi &= vl & \text{quando } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{l} \text{ sono paralleli} & \quad \alpha = 0 \\ \phi &= 0 & \text{quando } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{l} \text{ sono ortogonali} & \quad \alpha = \pm\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La nozione di segmento orientato si estende a quella di curva liscia e orientata $\hat{\mathcal{C}}$: a ogni segmento infinitesimo della curva è associata una normale $\hat{\mathbf{n}}(x, y)$ che cambia con continuità lungo la curva stessa, vedi Figura 7.2. Se la curva non fosse liscia ci sarebbero punti in cui non è possibile identificare univocamente il versore normale.

Assegnato un campo vettoriale $\mathbf{v}(x, y)$ (non costante), il flusso di \mathbf{v} attraverso il segmento orientato infinitesimo $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{n}}dl$ della curva vale

$$d\phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{v}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y) dl. \quad (7.3)$$

Si noti che per definizione dl è una quantità positiva quindi il segno di $d\phi$ è determinato dal prodotto scalare. Il flusso di \mathbf{v} attraverso una curva liscia e orientata $\hat{\mathcal{C}}_{AB}$, di estremi A e B , è definito come:

$$\Phi_{\hat{\mathcal{C}}_{AB}} := \int_{\hat{\mathcal{C}}_{AB}} d\phi = \int_{\hat{\mathcal{C}}_{AB}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\hat{\mathcal{C}}_{AB}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl. \quad (7.4)$$

Osservazione 7.2. Per quanto sopra osservato sul segno di $d\phi$ risulta che $\Phi_{\hat{\mathcal{C}}_{AB}} = \Phi_{\hat{\mathcal{C}}_{BA}}$. Se inoltre $\hat{\mathcal{C}}_{AB}$ e $\check{\mathcal{C}}_{AB}$ sono le due curve orientate di \mathcal{C}_{AB} risulta che $\Phi_{\hat{\mathcal{C}}_{AB}} = -\Phi_{\check{\mathcal{C}}_{AB}}$ perché le normali sono opposte. Dalle (7.2) e (7.4) è immediato vedere che il flusso è un funzionale lineare nell'algebra dei campi vettoriali:

$$\Phi(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \alpha\Phi(\mathbf{v}_1) + \beta\Phi(\mathbf{v}_2). \quad (7.5)$$

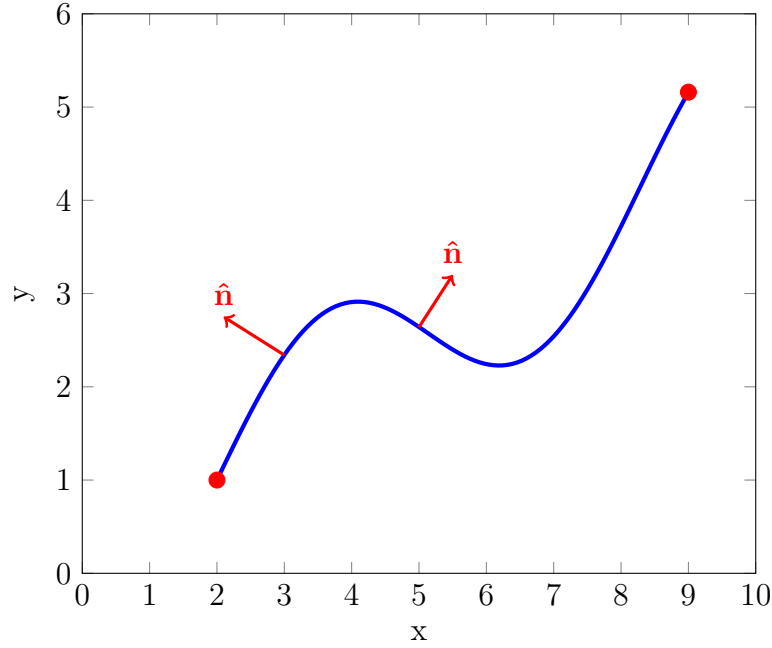


Figura 7.2: Curva orientata.

Definiamo ora il *campo di Newton* in due dimensioni:

$$\mathbf{v}(x, y) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r}\|} \equiv \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2}, \quad \text{con } \hat{\mathbf{r}} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ versore radiale.} \quad (7.6)$$

Notiamo che il campo di Newton ha come dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Per questo particolare campo vale il seguente teorema:

Lemma 7.1.1 (Flusso infinitesimo in 2d). *Il flusso del campo di Newton attraverso il segmento infinitesimo $d\mathbf{l}$, non passante per l'origine, è pari all'angolo infinitesimo $d\hat{\theta}$ (con segno) con cui il segmento è visto dall'origine*

$$d\phi = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot d\mathbf{l} = d\hat{\theta}. \quad (7.7)$$

La condizione che il segmento non passi per l'origine è motivata dal fatto che in quel punto il campo di Newton è singolare.

Dimostrazione. In riferimento alla Figura 7.3 si ha

$$d\phi = \frac{dl}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{dl \cos \alpha}{r} = \frac{dl_{\perp}}{r}, \quad \alpha: \text{angolo compreso tra } \hat{\mathbf{r}} \text{ e } \hat{\mathbf{n}}$$

$$dl_{\perp} = dl \cos \alpha = \text{proiezione con segno di } dl \text{ ortogonalmente a } \mathbf{r}.$$

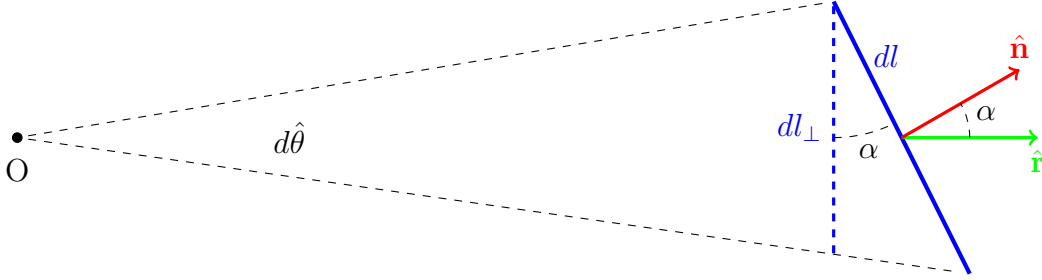


Figura 7.3: Tratto infinitesimo della curva orientata.

La quantità dl_{\perp} rappresenta la corda con segno sottesa da un archetto di circonferenza centrata in O e di raggio r . Per piccoli angoli la lunghezza dell'arco è ben approssimata da quella della corda come conseguenza del limite notevole $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$. Quindi

$$d\phi = \frac{dl_{\perp}}{r} = \frac{rd\hat{\theta}}{r} = d\hat{\theta}, \quad (7.8)$$

dove $d\hat{\theta}$ è l'angolo con segno ereditato dal prodotto scalare. \square

Corollario 7.1.2 (Flusso in 2d). *Il flusso del campo di Newton attraverso una curva liscia orientata \hat{C}_{AB} , non passante per l'origine, vale*

$$\Phi_{\hat{C}_{AB}} = \int_{\hat{C}_{AB}} d\phi = \int_{\hat{C}_{AB}} d\hat{\theta} =: \hat{\theta}_{\hat{C}_{AB}}, \quad (7.9)$$

dove $\hat{\theta}_{\hat{C}_{AB}}$ è l'angolo $A\hat{O}B$ il cui segno dipende dall'orientazione della curva cioè da quale delle due normali è stata scelta.

Osservazione 7.3. Facciamo notare la presenza di una legge di *cancellazione*. Come si vede dalla Figura 7.4 i due segmenti rossi della curva sottendono angoli $\hat{\theta}$ di segno opposto a seconda del coseno dell'angolo compreso tra \hat{n} e \hat{r} .

Osservazione 7.4 (Proprietà di invarianza del flusso). Due curve orientate \hat{C}_{AB} e \hat{C}'_{AB} che possono essere spostate con continuità l'una nell'altra nel dominio del campo di Newton (senza attraversare l'origine) hanno lo stesso flusso per il Corollario 7.1.2: $\Phi_{\hat{C}_{AB}} = \Phi_{\hat{C}'_{AB}}$. Nelle stesse ipotesi, se \hat{C}_{AB} può essere trasformata con continuità in $\hat{C}_{AB'}$ con B e B' sono co-radiali vale $\Phi_{\hat{C}_{AB}} = \Phi_{\hat{C}_{AB'}}$. Pertanto il flusso su una qualsiasi curva può essere calcolato sull'arco di una circonferenza unitaria i cui estremi sono co-radiali agli estremi della curva, vedi Figura 7.5. Una interessante conseguenza

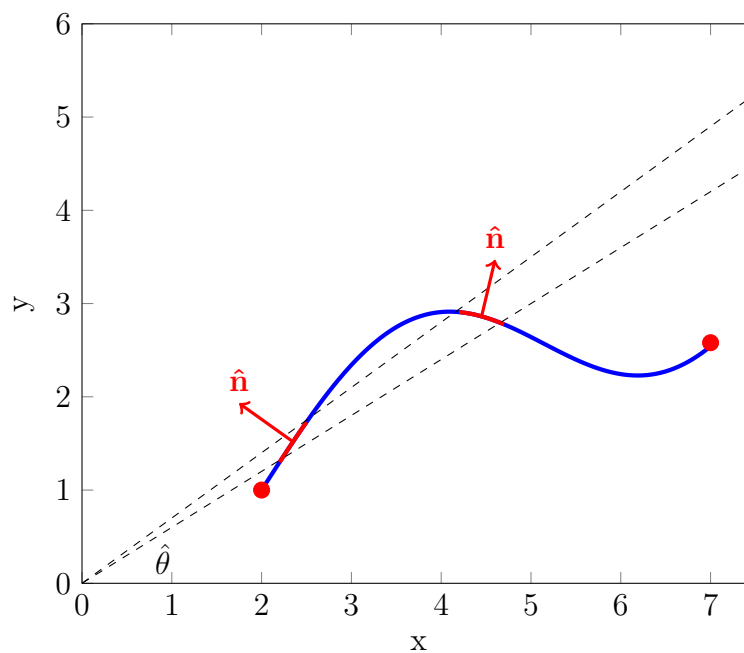


Figura 7.4: Legge di cancellazione

di questo fatto è che il flusso attraverso la curva orientata $\hat{\mathcal{C}}_{AB}$ coincide con quello attraverso $\hat{\mathcal{C}}_{A'ABB'}$ o, equivalentemente, che il flusso attraverso i segmenti $A'A$ e BB' è nullo.

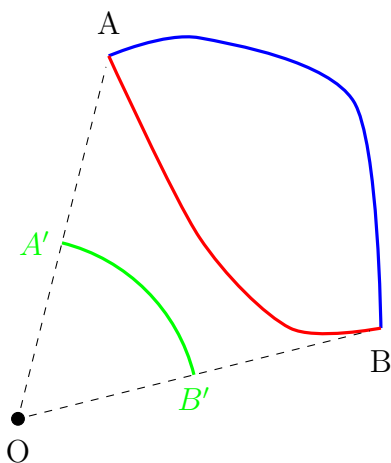


Figura 7.5: Curve di equiflusso.

Esercizio 85. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una circonferenza \hat{S}_r di raggio r centrata nell'origine, con normale orientata verso l'esterno.

Soluzione: Notiamo anzitutto che $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ per ogni punto sulla circonferenza, quindi $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 1$.

$$\Phi_{\hat{S}_r} = \int_{\hat{S}_r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \int_{S_r} \frac{dl}{r} = \int_0^{2\pi} \frac{r d\gamma}{r} = \int_0^{2\pi} d\gamma = 2\pi. \quad (7.10)$$

Esercizio 86. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una qualsiasi curva liscia chiusa che abbraccia l'origine orientata secondo la normale uscente.

Soluzione: Per l'Osservazione 7.4 il problema si può ridurre a quello dell'Esercizio 85. Di conseguenza il flusso sarà 2π .

Esercizio 87. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una qualsiasi curva liscia chiusa che non abbraccia l'origine. Dimostrare che il risultato non dipende dall'orientazione.

Soluzione Prendendo due punti A, B sulla curva chiusa possiamo vederla come composta da due curve: $\hat{C}_{AB} \cup \hat{C}'_{BA} = \hat{C}_{AB} \cup \hat{C}'_{AB}$ (si veda Osservazione 7.2). La curva \hat{C}'_{AB} può essere trasformata con continuità nella curva \check{C}_{AB} .

$$\Phi = \Phi_{\hat{C}_{AB}} + \Phi_{\hat{C}'_{AB}} = \Phi_{\hat{C}_{AB}} + \Phi_{\check{C}_{AB}} = 0.$$

Se cambiamo l'orientazione della curva cambiano entrambi i segni dei flussi lasciando il risultato inalterato.

Osservazione 7.5. Gli Esercizi 86-87 mostrano che, fissata una curva chiusa, il flusso del campo di Newton è invariante per traslazioni dell'origine del campo quando questa non attraversa la curva data.

Esercizio 88. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una curva chiusa che si avvolge k volte attorno all'origine con normale uscente. Calcolarlo anche quando l'orientazione della normale è entrante.

Esercizio 89 (*). Lo studente rifletta su possibili estensioni del Corollario 7.1.2 ai casi in cui la curva passa per l'origine, la curva contiene punti angolosi, la curva contiene discontinuità, la curva è un segmento radiale che include l'origine. *Suggerimento:* per il caso di curva che passa per l'origine si consideri dapprima una circonferenza.

7.2 Caso tridimensionale

Si consideri una porzione Σ di una superficie sferica di raggio r , per fissare le idee possiamo pensare a una calotta sferica, la cui area misura S . Si definisce *angolo solido* sotteso da Σ rispetto al centro della sfera la quantità

$$\Omega_\Sigma := \frac{S}{r^2}. \quad (7.11)$$

Come accade nel caso dell'angolo piano la misura dell'angolo solido non dipende dal raggio della sfera. L'*angolo solido totale* in \mathbb{R}^3 vale:

$$\Omega_{tot} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi. \quad (7.12)$$

Dato un piano in \mathbb{R}^3 e una sua porzione finita di area S , per fissare le idee si pensi a un rettangolo, si definisce *superficie piana orientata* il vettore:

$$\mathbf{S} = S\hat{\mathbf{n}} \quad (7.13)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è una delle due normali alla superficie.

Il flusso di un vettore (campo vettoriale costante) \mathbf{v} attraverso una superficie piana orientata \mathbf{S} è:

$$\phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}S = vS \cos \alpha \quad (7.14)$$

dove α è l'angolo compreso fra \mathbf{v} e \mathbf{S} . La nozione di superficie piana orientata si estende a quella di superficie liscia orientata $\hat{\Sigma}$: a una porzione infinitesima della superficie è associata una normale $\hat{\mathbf{n}}(x, y, z)$ che cambia con continuità lungo la superficie stessa.

Assegnato un campo vettoriale \mathbf{v} non costante si definisce il flusso attraverso una porzione infinitesima $d\mathbf{S}$ di una superficie orientata come

$$d\phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{v}(x, y, z) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y, z) dS. \quad (7.15)$$

Si ottiene quindi il flusso di un campo vettoriale \mathbf{v} attraverso $\hat{\Sigma}$ come

$$\Phi_{\hat{\Sigma}} = \iint_{\hat{\Sigma}} d\phi = \iint_{\hat{\Sigma}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (7.16)$$

Osservazione 7.6. Dalla (7.16) è immediato verificare che se $\hat{\Sigma}$ e $\check{\Sigma}$ sono le due superfici orientate di Σ allora $\Phi_{\hat{\Sigma}} = -\Phi_{\check{\Sigma}}$ e che il flusso è un funzionale lineare nell'algebra dei campi vettoriali:

$$\Phi(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) = \alpha \Phi(\mathbf{v}_1) + \beta \Phi(\mathbf{v}_2). \quad (7.17)$$

Il campo di Newton in \mathbb{R}^3 vale

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (7.18)$$

Notiamo che il campo di Newton ha come dominio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Lemma 7.2.1 (Flusso infinitesimo in 3d). *Il flusso infinitesimo del campo di Newton attraverso la superficie infinitesima $d\mathbf{S}$, non passante per l'origine, è pari all'angolo solido infinitesimo $d\hat{\Omega}$ (con segno) con cui la superficie è vista dall'origine.*

$$d\phi = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{S} = d\hat{\Omega}. \quad (7.19)$$

Dimostrazione. Si osservi che come nel caso in \mathbb{R}^2 vale

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = dS \cos \alpha = dS_{\perp}, \quad (7.20)$$

dove dS_{\perp} è la superficie (con segno) della base della calotta sottesa da una porzione infinitesima di una sfera di raggio r e ortogonale a $\hat{\mathbf{r}}$. Analogamente al caso bidimensionale la superficie della base della calotta, sempre per il limite notevole del seno, approssima la superficie della calotta stessa $dS_{\perp} = r^2 d\hat{\Omega}$. In definitiva:

$$d\phi = \frac{dS_{\perp}}{r^2} = \frac{r^2 d\hat{\Omega}}{r^2} = d\hat{\Omega}, \quad (7.21)$$

dove $d\hat{\Omega}$ è l'angolo solido con segno ereditato dal prodotto scalare. \square

Corollario 7.2.2 (Flusso in 3d). *Il flusso del campo di Newton (7.18) attraverso una superficie liscia orientata $\hat{\Sigma}$ vale*

$$\Phi_{\hat{\Sigma}} = \iint_{\hat{\Sigma}} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{\hat{\Sigma}} d\hat{\Omega} =: \hat{\Omega}_{\hat{\Sigma}}. \quad (7.22)$$

Definendo il cono (generalizzato) del bordo di $\hat{\Sigma}$ come il luogo dei punti delle rette che congiungono l'origine ai punti del bordo, $\hat{\Omega}_{\hat{\Sigma}}$ è l'angolo solido del cono di $\hat{\Sigma}$ il cui segno dipende dall'orientazione della superficie cioè da quale delle due normali è stata scelta.

Osservazione 7.7. In analogia col caso bidimensionale, si può osservare la presenza di una legge di cancellazione anche per il caso tridimensionale. Può infatti accadere che due elementi infinitesimi di una stessa superficie che sottendono lo stesso angolo solido abbiano una normale la cui proiezione sul versore radiale uscente $\hat{\mathbf{r}}$ ha segno opposto. In tal caso il loro contributo all'integrale (7.22) si cancella.

Osservazione 7.8 (Proprietà di invarianza del flusso in tre dimensioni). Due superfici orientate $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\Sigma}'$ con stesso bordo che possono essere spostate con continuità l'una nell'altra (incluso l'orientazione) nel dominio del campo di Newton (senza attraversare l'origine) hanno lo stesso flusso per il Corollario 7.2.2: $\Phi_{\hat{\Sigma}} = \Phi_{\hat{\Sigma}'}$. Osserviamo che lo spostamento del bordo della superficie lungo il suo cono lascia il flusso invariato. Pertanto il flusso su una qualsiasi superficie liscia orientata può essere calcolato sulla proiezione del suo bordo su una sfera unitaria. Si noti che il flusso attraverso una superficie conica generalizzata centrata nell'origine è nullo.

Esercizio 90. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una sfera \hat{S}_r di raggio r orientata esternamente e centrata nell'origine.

Soluzione: Osserviamo anzitutto che sulla sfera vale $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$. Quindi

$$\Phi_{\hat{S}_r} = \iint_{\hat{S}_r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S_r} \frac{dS}{r^2} = \iint_{S_r} \frac{r^2 d\Omega}{r^2} = 4\pi. \quad (7.23)$$

Esercizio 91. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una superficie chiusa liscia e orientata esternamente che contiene l'origine.

Soluzione: Per l'Osservazione 7.8 il flusso può essere calcolato su una superficie sferica centrata nell'origine. Dunque per l'Esercizio 90 il flusso vale 4π .

Esercizio 92. Calcolare il flusso del campo di Newton attraverso una superficie chiusa liscia e orientata esternamente che non contiene l'origine. Mostrare che in questo caso il risultato non dipende dall'orientazione.

Soluzione: Tagliamo la superficie lungo una curva chiusa che la separa in due parti disgiunte $\hat{\Sigma}_1, \hat{\Sigma}_2$ che ammettono la curva come bordo. La superficie $\hat{\Sigma}_2$ può essere trasformata con continuità, tenendo il bordo fisso, nella superficie $\check{\Sigma}_1$. Quindi:

$$\Phi = \Phi_{\hat{\Sigma}_1} + \Phi_{\hat{\Sigma}_2} = \Phi_{\hat{\Sigma}_1} + \Phi_{\check{\Sigma}_1} = 0.$$

Se invertiamo l'orientazione della superficie chiusa originaria, i flussi nella precedente cambiano segno entrambi lasciando il risultato inalterato.

Osservazione 7.9. Gli Esercizi 91-92 mostrano che, fissata una superficie chiusa, il flusso del campo di Newton è invariante per traslazioni dell'origine del campo quando questa non attraversa la superficie data.

Esercizio 93 (*). Lo studente rifletta su possibili estensioni del Corollario 7.2.2 ai casi in cui la superficie passa per l'origine, la superficie contiene punti o curve angolose, la superficie contiene discontinuità, la superficie è un cono generalizzato con vertice nell'origine. *Suggerimento*: per il caso di superficie che passa per l'origine si consideri dapprima la sfera.

7.3 Teorema di Newton

Il campo gravitazionale generato da una massa M puntiforme posta nell'origine è multiplo del campo di Newton:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}_G}{m} = -GM \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (7.24)$$

Dunque il flusso del campo (7.24) attraverso una superficie chiusa liscia e orientata secondo la normale uscente $\hat{\Sigma}$ vale (Vedi Esercizi 91-92):

$$\Phi_{\hat{\Sigma}} = \begin{cases} -4\pi GM & \text{se } \hat{\Sigma} \text{ contiene l'origine al suo interno} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (7.25)$$

In generale, grazie all'Osservazione 7.9 e alla linearità del flusso vale il seguente

Teorema 7.3.1 (Teorema di Newton). *Data una superficie liscia, chiusa ed orientata secondo la normale uscente $\hat{\Sigma}$, il flusso del campo gravitazionale è*

$$\Phi_{\hat{\Sigma}} = -4\pi GM_{int}, \quad (7.26)$$

dove M_{int} è la massa contenuta all'interno della superficie.

Corollario 7.3.2. *Il campo gravitazionale all'esterno di una sfera massiva omogenea è identico a quello generato da una massa pari a quella della sfera concentrata nel suo centro.*

Dimostrazione. La dimostrazione è contenuta nella soluzione dell'Esercizio 94. \square

Esercizio 94. Si consideri una sfera massiva e omogenea di raggio R_T e massa M_T centrata nell'origine di un sistema di assi in \mathbb{R}^3 . Trovare il campo gravitazionale da essa generato in ogni punto dello spazio.

Soluzione: La simmetria sferica garantisce che il campo gravitazionale è della forma

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(r) = -g(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (7.27)$$

dove vogliamo calcolare $g(r)$. A tale scopo useremo sia la definizione di flusso (7.16) che il Teorema di Newton (7.26) scegliendo una superficie sferica \hat{S}_r perché rispetta le simmetrie del problema. Dalla (7.16) e la (7.27) abbiamo

$$\Phi_{\hat{S}_r} = - \iint_{\hat{S}_r} g(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dS = -g(r) \iint_{\hat{S}_r} dS = -g(r) 4\pi r^2. \quad (7.28)$$

Caso 1: $r \geq R_T$. Per la (7.26) e (7.28) abbiamo

$$-4\pi G M_T = -g(r) 4\pi r^2 \quad (7.29)$$

da cui per la (7.27)

$$g(r) = \frac{G M_T}{r^2} \Rightarrow \mathbf{g} = -\frac{G M_T}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad r \geq R_T, \quad (7.30)$$

cioè il campo è uguale a quello che si avrebbe se la massa fosse concentrata tutta nel centro.

Caso 2: $r < R_T$. La densità della sfera è:

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3}, \quad (7.31)$$

la massa contenuta dentro una sfera di raggio r vale

$$M(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{3M_T}{4\pi R_T^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = M_T \frac{r^3}{R_T^3}. \quad (7.32)$$

Osservando che nella (7.26) $M_{int} = M(r)$ otteniamo insieme alla (7.28):

$$\Phi_{\hat{S}_r} = -4\pi G M(r) = -4\pi G M_T \frac{r^3}{R_T^3} = -g(r) 4\pi r^2,$$

da cui, per la (7.27)

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{G M_T}{R_T^3} r \hat{\mathbf{r}}, \quad (7.33)$$

cioè all'interno della sfera il modulo del campo aumenta linearmente col raggio.

Verifichiamo infine che il campo è continuo in $r = R_T$. Infatti:

$$\lim_{r \rightarrow R_T^-} \mathbf{g}(r) = -\frac{G M_T}{R_T^2} \hat{\mathbf{r}} = \lim_{r \rightarrow R_T^+} \mathbf{g}(r). \quad (7.34)$$

Esercizio 95 (Campo gravitazionale del filo). Calcolare il campo gravitazionale generato da un filo massivo infinito omogeneo giacente sull'asse z di densità lineare λ .

Soluzione: Il sistema in questo caso gode di simmetria cilindrica, cioè una simmetria di rotazione attorno all'asse z . Il campo sarà dunque nella forma

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(d) = -g(d)\hat{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{d} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}, \quad \hat{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{d}}{d}. \quad (7.35)$$

Il vettore \mathbf{d} è ortogonale all'asse z , uscente da esso e il suo modulo è la distanza dall'asse z . Per risolvere l'esercizio prendiamo come superfici orientate dei cilindri $\hat{C}_{d,h}$ di raggio d e altezza h coassiali con l'asse z . In tal caso si ha $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{d}}$ lungo la superficie laterale $\hat{L}_{d,h}$ mentre sulle basi $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{d}}$. Ne deduciamo che solo la superficie laterale contribuisce al flusso. La definizione (7.16) conduce quindi a

$$\Phi_{\hat{C}_{d,h}} = \iint_{\hat{L}_{d,h}} -g(d)\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -g(d) \iint_{\hat{L}_{d,h}} \hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -g(d)2\pi dh. \quad (7.36)$$

Siccome $M_{int} = \lambda h$ la (7.26) fornisce

$$\Phi_{\hat{C}_{d,h}} = -4\pi G\lambda h. \quad (7.37)$$

Da un confronto tra le due precedenti, assieme all'ansatz (7.35) concludiamo che

$$\mathbf{g}(d) = -\frac{2G\lambda}{d}\hat{\mathbf{d}}. \quad (7.38)$$

Il dominio di $\mathbf{g}(d)$ è $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=0, y=0\}$.

Esercizio 96 (Campo gravitazionale del piano). Calcolare il campo gravitazionale generato da un piano massivo infinito omogeneo giacente sul piano xOy di densità superficiale σ .

Suggerimento: Come per gli esercizi precedenti, la simmetria di traslazione parallela al piano della distribuzione di massa impone che il campo sia nella forma:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(z) = -g(|z|)\text{sign}(z)\hat{\mathbf{k}} \quad (7.39)$$

dove la funzione $\text{sign}(x)$ è stata inserita per invertire il verso del campo quando si attraversa il piano, in maniera tale che $g(|z|)$ possa essere sempre considerata positiva. Infatti per la distribuzione di massa data quando ci troviamo ad esempio a $z < 0$, sotto il piano massivo, il campo risulta così diretto verso l'alto. Come

superfici orientate consideriamo dei cilindri $\hat{\mathcal{C}}_A$ con basi di misura A parallele al piano e a quote $z > 0$ e $-z$. Sulla base superiore avremo $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$, mentre su quella inferiore $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{k}}$. La superficie laterale invece non contribuisce al flusso in quanto $\hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{k}}$. Si noti anche che $g(|z|)$ è costante sulle basi del cilindro. Denotando con \hat{B}_\uparrow e \hat{B}_\downarrow le basi rispettivamente superiore e inferiore, grazie alla (7.16) abbiamo

$$\begin{aligned}\Phi_{\hat{\mathcal{C}}_A} &= -g(|z|) \iint_{\hat{B}_\uparrow} \text{sign}(z) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - g(|z|) \iint_{\hat{B}_\downarrow} \text{sign}(z) \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \\ &= -g(|z|)A - g(|z|)A = -2g(|z|)A.\end{aligned}\quad (7.40)$$

Siccome $M_{int} = \sigma A$ dalla (7.26) si ha che

$$\Phi_{\hat{\mathcal{C}}_A} = -4\pi G\sigma A. \quad (7.41)$$

Confrontando le due precedenti e ricomponendo l'ansatz come prescritto nella (7.39) si ottiene

$$\mathbf{g}(z) = -2\pi G\sigma \text{sign}(z) \hat{\mathbf{k}}. \quad (7.42)$$

Osservazione 7.10. I tre esempi precedenti (Esercizi 94, 95 e 96) mostrano che, in taluni casi, è possibile calcolare il campo gravitazionale prodotto da certe distribuzioni di massa utilizzando il teorema di Newton. Questa possibilità funziona quando le simmetrie della distribuzione di massa permettono di scrivere il campo in funzione di una sola quantità scalare e l'identificazione di una superficie chiusa in cui il calcolo del flusso possa essere fatto direttamente senza l'utilizzo del teorema di Newton. Ovviamente questo non è vero quando il campo è descritto da tre scalari. Le tre distribuzioni di massa considerate tuttavia sono descritte, per le loro simmetrie, da un solo scalare.

Esercizio 97 (*). In relazione all'osservazione precedente e alla linearità del flusso lo studente si inventi una distribuzione di massa che permette il calcolo del campo utilizzando il teorema di Newton. Infine si tenti una classificazione delle distribuzioni di massa il cui campo gravitazionale è calcolabile col teorema di Newton.

Esercizio 98 (*). Lo studente rifletta sulla possibilità di estendere il Teorema di Newton al caso di un campo gravitazionale generato da una distribuzione di massa uniforme nel semispazio $z \leq 0$ oppure quello generato da una distribuzione di massa uniforme che riempie tutto lo spazio a meno di una cavità sferica.

Capitolo 8

Argomenti monografici

Questa sezione raccoglie una collezione di problemi ed esercizi a completamento delle sezioni precedenti. Vengono trattati i moti lungo curve sottoposti alla forza di gravità costante, i sistemi di punti materiali e la relativa nozione di baricentro dimostrando una sua proprietà iterativa. Vengono risolti gli urti in una dimensione. Infine si coglie l'occasione per introdurre il problema di Fermat, talvolta chiamato principio di Fermat, sulle curve di tempo minimo chiamate *brachistocrone*. Questo rappresenta il capostipite dei cosiddetti metodi variazionali che permeano l'intero costrutto della fisica matematica e costituiscono un capitolo fondamentale della matematica.

8.1 Moti lungo curve in campo gravitazionale costante

Vogliamo studiare il moto di un punto materiale che scorre senza attrito su una curva rigida come in Figura 8.1.

Sul punto agiscono la forza peso \mathbf{P} e la reazione vincolare \mathbf{F}_v che, in assenza di attrito, è sempre ortogonale alla curva e dunque allo spostamento: $\mathbf{F}_v \perp d\mathbf{r}$. Quest'ultima proprietà implica che la sola forza a compiere lavoro è la forza peso e si ha:

$$L = L_P = -\Delta U = \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \Delta(U + T) = 0, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh. \quad (8.1)$$

Esercizio 99. Un punto materiale che scorre lungo una curva come in Figura 8.1 parte da fermo a una quota $y = h$. Calcolare la sua velocità quando esso si trova a una quota $y = 0$.

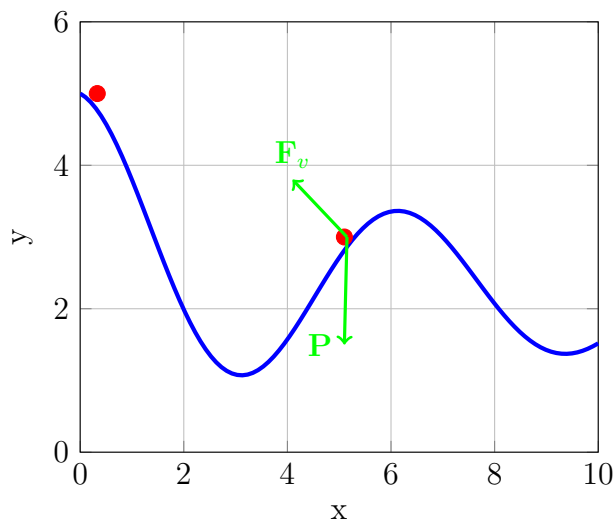


Figura 8.1: Moto su una curva nel campo gravitazionale costante.

Soluzione: Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra punto di partenza e di arrivo (a terra):

$$E_i = mgh = \frac{1}{2}mv^2 = E_f \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} \quad (8.2)$$

Esercizio 100 (Giro della morte). Un punto materiale parte da fermo dal punto più alto di una rotaia, come mostrato in Figura 8.2, e dopo un tratto discendente compie un giro della morte di raggio R . Si calcoli il minimo valore di h , la differenza di quota tra il punto di partenza e il punto più alto del giro, affinché la reazione vincolare in quel punto sia centripeta. Si dimostri che questa condizione garantisce, nel sistema di riferimento rotante, che il peso apparente \mathbf{P}_a punti verso l'alto e impedisca agli oggetti di cadere.

Soluzione: Orientando l'asse verticale verso il basso la seconda legge di Newton porge

$$F_v + P = \frac{mv^2}{R} ,$$

per la condizione $F_v \geq 0$ si ha

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \quad \Rightarrow \quad v^2 \geq gR ,$$

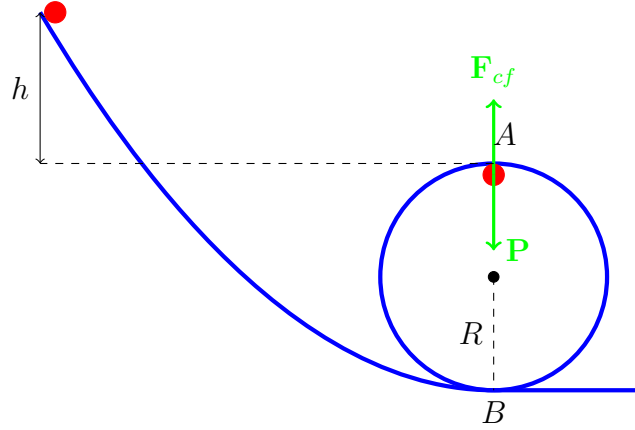


Figura 8.2: Giro della morte. Esercizio 100.

per l'esercizio precedente $v^2 = 2gh$, quindi

$$h \geq \frac{R}{2} \quad (8.3)$$

Nel sistema di riferimento non inerziale, solidale al punto rotante, il peso apparente è la differenza tra la forza centrifuga e il peso:

$$P_a = \frac{mv^2}{R} - mg = \frac{mg2h}{R} - mg = mg\left(\frac{2h}{R} - 1\right)$$

che sotto la condizione (8.3) è positivo o nullo.

Esercizio 101. Nella condizione $h \geq R/2$ dell'Esercizio 100, valutare la differenza di peso apparente tra il punto più basso e quello più alto del giro della morte.

Soluzione: Indicando i due pesi apparenti con $P_a^{(A)}$ e $P_a^{(B)}$ con riferimento alla Figura 8.2 si ha

$$\begin{aligned} P_a^{(A)} &= F_{cf}^{(A)} - P \\ P_a^{(B)} &= F_{cf}^{(B)} + P \\ \Delta P_{\text{apparente}} &= 2P + F_{cf}^{(B)} - F_{cf}^{(A)} \end{aligned}$$

Attraverso la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{(B)}^2 &= \frac{1}{2}mv_{(A)}^2 + 2mgR \quad \Rightarrow \quad v_{(B)}^2 - v_{(A)}^2 = 4gR \\ F_{cf}^{(B)} - F_{cf}^{(A)} &= \frac{m}{R}(v_{(B)}^2 - v_{(A)}^2) = 4gm. \end{aligned}$$

Infine:

$$\Delta P_{\text{apparente}} = 6mg.$$

8.2 Sistemi di punti materiali: il baricentro

Consideriamo un sistema di N punti materiali di masse e posizioni $\{(m_i, \mathbf{r}_i)\}_{1 \leq i \leq N}$. Richiamando le formule (4.8) e (4.10) la *quantità di moto totale* del sistema è:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (8.4)$$

\mathbf{v}_i è la velocità dell' i -esimo corpo.

Se il sistema è *isolato*, ovvero non ci sono forze esercitate dall'esterno sul sistema ma solo forse mutue all'interno di esso, per il terzo principio vale

$$\mathbf{F}_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = 0, \quad (8.5)$$

vedi Osservazione 4.4. Grazie al secondo principio

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0, \quad (8.6)$$

quindi

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \text{cost}, \quad (8.7)$$

la quantità di moto totale in un sistema isolato si conserva. Si definisce *baricentro* di un sistema di punti materiali il vettore

$$\mathbf{r}_B = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}. \quad (8.8)$$

In un sistema isolato la velocità del baricentro è costante:

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \text{cost}. \quad (8.9)$$

Esercizio 102. Dimostrare che per un sistema isolato le variazioni di energia cinetica sono invarianti per trasformazioni di Galileo.

Soluzione: Per semplicità lo dimostriamo per un sistema unidimensionale di due punti materiali. Denotiamo con V la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento ed utilizziamo la composizione galileiana di velocità (4):

$$\begin{aligned}\Delta T' &= T'_f - T'_i = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}'^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1i}'^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{2i}'^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1 (v_{1f} - V)^2 + \frac{1}{2}m_2 (v_{2f} - V)^2 - \frac{1}{2}m_1 (v_{1i} - V)^2 - \frac{1}{2}m_2 (v_{2i} - V)^2 = \\ &= T_f - T_i - V(m_i v_{1f} + m_2 v_{2f} - m_i v_{1i} - m_2 v_{2i}) = \Delta T - V\Delta p, \quad (8.10)\end{aligned}$$

da cui segue la tesi dato che nei sistemi isolati $\Delta p = 0$.

Esercizio 103. Alcuni sistemi che sono dotati di particolari simmetrie hanno un baricentro facilmente individuabile. Si veda la Figura 8.3.

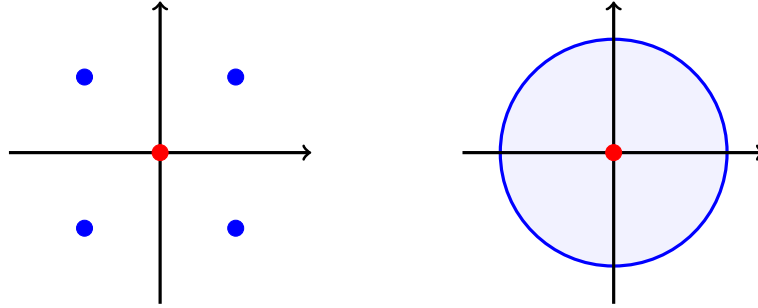


Figura 8.3: In blu la massa, in rosso i baricentri.

Osservazione 8.1. Si può osservare che, (la dimostrazione è lasciata al lettore) nel caso unidimensionale per $x_1 \leq x_2$, la coordinata del baricentro:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

soddisfa le disuguaglianze

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad (8.11)$$

dove le uguaglianze valgono nei limiti $\gamma = m_1/(m_1 + m_2) \rightarrow 0, 1$.

Esercizio 104. Mostrare che il baricentro di un sistema di due punti (m_1, \mathbf{r}_1) , (m_2, \mathbf{r}_2) giace sulla congiungente dei due corpi. (Suggerimento: procedere per componenti.)

Esercizio 105 (Teorema iterativo del baricentro). Sia $I_N = \{1, 2, \dots, N\}$ e siano I_1 e $I_2 = I_N \setminus I_1$ due suoi sottinsiemi complementari qualsiasi. Dati due insiemi I_1 e I_2 che soddisfano le $I_1 \cup I_2 = I_N$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ la coppia (I_1, I_2) è detta bipartizione di I_N . Mostrare che il baricentro gode della proprietà di iteratività su ogni bipartizione:

$$\mathbf{r}_B = \frac{\sum_{i \in I_N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i \in I_N} m_i} = \frac{M_1 \mathbf{r}_{B1}}{M_1 + M_2} + \frac{M_2 \mathbf{r}_{B2}}{M_1 + M_2} \quad (8.12)$$

dove

$$M_1 = \sum_{i \in I_1} m_i, \quad \mathbf{r}_{B1} = \frac{\sum_{i \in I_1} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i \in I_1} m_i} = \frac{\sum_{i \in I_1} m_i \mathbf{r}_i}{M_1} \quad (8.13)$$

$$M_2 = \sum_{i \in I_2} m_i, \quad \mathbf{r}_{B2} = \frac{\sum_{i \in I_2} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i \in I_2} m_i} = \frac{\sum_{i \in I_2} m_i \mathbf{r}_i}{M_2}. \quad (8.14)$$

Soluzione: Partendo dall'identità

$$\sum_{i \in I_N} m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i \in I_1} m_i \mathbf{r}_i + \sum_{i \in I_2} m_i \mathbf{r}_i$$

valida per ogni bipartizione di I_N e richiamando le definizioni

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B1} &= \frac{\sum_{i \in I_1} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i \in I_1} m_i}, & \mathbf{r}_{B2} &= \frac{\sum_{i \in I_2} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i \in I_2} m_i} \\ \mathbf{r}_B &= \frac{\sum_{i \in I_N} m_i \mathbf{r}_i}{M_1 + M_2} \end{aligned}$$

vale

$$(M_1 + M_2) \mathbf{r}_B = M_1 \mathbf{r}_{B1} + M_2 \mathbf{r}_{B2}.$$

Dividendo per $M_1 + M_2$ si ottiene il risultato.

Esercizio 106 (Ancora sul baricentro e simmetrie). Utilizzando la (8.12) calcolare il baricentro di una distribuzione di massa omogenea e densità unitaria come in Figura 8.4, sapendo che la circonferenza più grande ha raggio R .

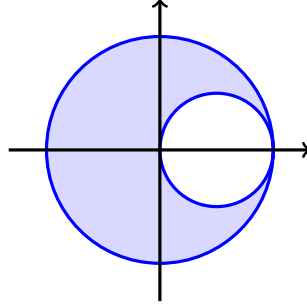


Figura 8.4: Disco bucato

8.3 Urti unidimensionali

Esercizio 107 (Urti elastici unidimensionali). Si dicono elastici quegli urti in cui si conserva non solo la quantità di moto, come visto prima, ma anche l'energia cinetica totale del sistema. Date le velocità iniziali v_{1i} , v_{2i} di due punti materiali di masse rispettivamente m_1 , m_2 che si urtano in una dimensione calcolare quelle finali v_{1f} , v_{2f} .

Soluzione: Imponiamo le conservazioni:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2}(m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(v_{1f} - v_{1i}) = m_2(v_{2i} - v_{2f}) \\ m_1(v_{1f}^2 - v_{1i}^2) = m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \end{cases}$$

Dividiamo la seconda per la prima:

$$\begin{cases} m_1(v_{1f} - v_{1i}) = m_2(v_{2i} - v_{2f}) \\ (v_{1f} + v_{1i}) = (v_{2i} + v_{2f}) \end{cases} .$$

Notiamo che la seconda equazione è equivalente a

$$v_{1f} - v_{2f} = v_{2i} - v_{1i} , \quad (8.15)$$

cioè la velocità relativa cambia segno dopo l'urto. Risolvendo l'ultimo sistema per le due velocità finali:

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \end{cases} . \quad (8.16)$$

È interessante discutere due casi particolari. Il primo è quello in cui $m_1 = m_2$. Dalle (8.16) si vede che $v_{2f} = v_{1i}$, $v_{1f} = v_{2i}$ cioè i due corpi si scambiano le velocità. In particolare se $v_{1i} = v$ e $v_{2i} = 0$ si ha che $v_{1f} = 0$ e $v_{2f} = v$. Quest'ultimo è il caso di urto frontale nel biliardo di due bocce identiche di cui una ferma.

Il secondo caso è quello in cui $m_2 \gg m_1$, cioè $m_1/m_2 = \alpha \rightarrow 0$ e $v_{1i} = v$, $v_{2i} = 0$. Usando la (8.16) otteniamo

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} v \rightarrow -v \\ v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v = \frac{2\alpha}{\alpha + 1} v \rightarrow 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

Osservazione 8.2 (Forze d'urto, forze impulsive). Ricordiamo che in una dimensione la seconda legge di Newton ammette anche la scrittura

$$dp = F dt. \quad (8.18)$$

Se consideriamo una pallina che urta contro un muro con velocità v , la forza che cambia il suo impulso agisce in un intervallo di tempo arbitrariamente piccolo $(-\epsilon, \epsilon)$:

$$-2mv = \Delta p = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dp = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} F(t) dt \Rightarrow \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{F(t)}{-2mv} dt = 1. \quad (8.19)$$

Questo ci porta a concludere che $F(t)/(-2mv)$ deve essere estremamente piccata

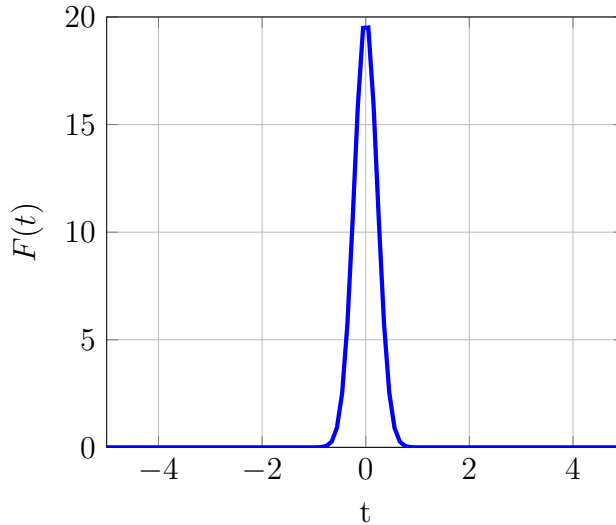


Figura 8.5: Tipica forza impulsiva.

dentro l'intervallo $(-\epsilon, \epsilon)$ come in Figura 8.5 e il suo integrale deve comunque valere

1. Chiaramente non c'è nessuna funzione che soddisfa questo requisito nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, l'oggetto limite è una *distribuzione*, la delta di Dirac.

Esercizio 108 (Urto completamente anelastico unidimensionale). Due corpi puntiformi di masse m_1 ed m_2 si muovono rispettivamente con velocità v_1 e v_2 su una retta fino a quando non si urtano. Sapendo che dopo l'urto essi rimangono attaccati calcolare la loro velocità V .

Soluzione: Si conserva *solo* la quantità di moto, non l'energia:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (8.20)$$

che in effetti coincide con la velocità del baricentro.

Esercizio 109. Dimostrare che in un urto completamente anelastico la variazione di energia cinetica è negativa e vale

$$\Delta T = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2. \quad (8.21)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left[\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right]^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \\ &= -\frac{m_1 (m_1 + m_2) v_1^2 + m_2 (m_1 + m_2) v_2^2 - m_1^2 v_1^2 - 2m_1 m_2 v_1 v_2 - m_2^2 v_2^2}{2(m_1 + m_2)} = \\ &= -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \end{aligned}$$

Osservazione 8.3. Il risultato precedente può essere ottenuto anche utilizzando l'Esercizio 102 e calcolando la variazione di energia cinetica nel sistema di riferimento del baricentro dove essa risulta negativa poiché su tale sistema $v_f = V = 0$. Essa infatti vale

$$\Delta T' = T'_f - T'_i = 0 - \frac{1}{2} m_1 (v_{1i} - V)^2 - \frac{1}{2} m_2 (v_{2i} - V)^2 = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 \quad (8.22)$$

Il risultato precedente dimostra che nel sistema di riferimento del baricentro nell'urto completamente anelastico si perde tutta l'energia cinetica. Questo implica anche che tra tutti i tipi di urti, l'urto completamente anelastico è quello che comporta la massima perdita di energia cinetica. La legge di conservazione dell'energia viene recuperata in questo caso solo con l'introduzione del primo principio della termodinamica.

Esercizio 110 (Urti obliqui con pareti). Un punto urta elasticamente in modo obliquo contro una parete rigida, liscia e immobile, vedi Figura 8.6. Trovare il vettore velocità dopo l'urto.

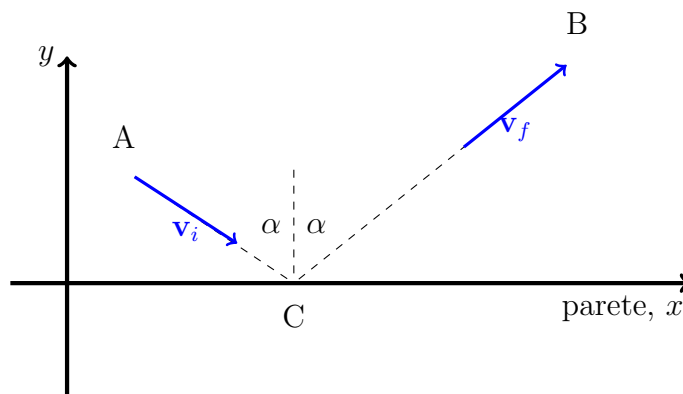


Figura 8.6: Urto obliquo contro una parete.

Soluzione: Grazie alle ipotesi, la parete esercita una forza ortogonale a essa. Non essendoci forze orizzontali avremo che $v_{fx} = v_{ix}$ e per la (8.17) $v_{fy} = -v_{iy}$. Quindi

$$\mathbf{v}_i = v_{ix}\hat{\mathbf{i}} + v_{iy}\hat{\mathbf{j}} \quad (8.23)$$

$$\mathbf{v}_f = v_{ix}\hat{\mathbf{i}} - v_{iy}\hat{\mathbf{j}} \quad (8.24)$$

e per similitudine tra i triangoli delle componenti delle velocità si ha che l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione (α nella Figura 8.6).

8.4 Moti e problemi variazionali

Per problema variazionale si intende la minimizzazione (o massimizzazione) di una quantità che dipende da un numero reale, da un vettore, o da un qualcosa di più complesso come una funzione. La fisica esprime spesso le sue leggi come principi variazionali: la meccanica classica per esempio attraverso i metodi di Eulero e Lagrange, la termodinamica coi metodi di massima entropia e minima energia libera, etc.

Il capostipite di questo approccio è il principio del tempo minimo identificato da Fermat e spiegato nei due esercizi successivi.

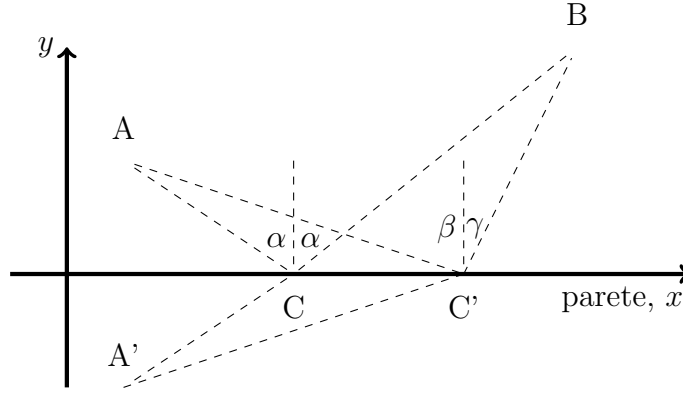


Figura 8.7: Un cammino di tempo minimo.

Esercizio 111. In riferimento alla Figura 8.7 trovare il cammino che, a velocità di modulo costante, parte da A , tocca la parete e raggiunge B impiegando il tempo minimo.

Soluzione: Anzitutto osserviamo che essendo la velocità costante il problema si riformula come cammino di lunghezza minima. Inoltre visto che il cammino di minima lunghezza che congiunge due punti è il segmento possiamo cercare la soluzione tra le spezzate AC' , $C'B$. Dimostriamo ora che la soluzione è data da quel particolare C' , che chiameremo C , in cui l'angolo di incidenza sulla parete è uguale all'angolo di riflessione. Infatti abbiamo la disuguaglianza

$$\begin{aligned} AC + CB &= A'C + CB = A'B \leq \\ &\leq (\text{disuguaglianza triangolare}) \leq A'C' + C'B = AC' + C'B \end{aligned} \quad (8.25)$$

che si satura esattamente quando $C = C'$.

Lo studente, prima di passare all'esercizio successivo, risolva questo problema variazionale con il metodo analitico riconducendolo al calcolo del minimo di una funzione di variabile reale.

Esercizio 112 (Il problema del bagnino). Un bagnino sa correre con velocità v_1 nella spiaggia e nuotare con velocità v_2 nell'acqua, con $v_1 > v_2$. Trovare il cammino di minimo tempo che connette un punto A sulla spiaggia a un punto B nell'acqua, vedi Figura 8.8.

Soluzione: Scriviamo il tempo come funzione di x .

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}{v_2}$$

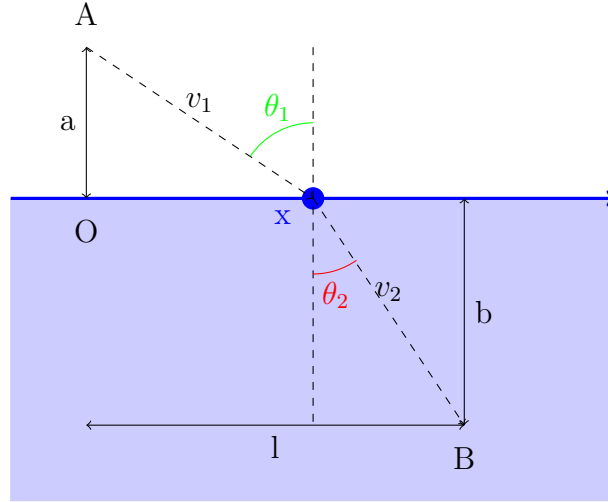


Figura 8.8: Il problema del bagnino. Esercizio 112.

Calcoliamo la derivata prima:

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0 \quad . \quad (8.26)$$

Osserviamo che

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \theta_1, \quad \frac{l-x}{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = \sin \theta_2, \quad (8.27)$$

da cui

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \text{cost} . \quad (8.28)$$

Lo studente può verificare che il punto identificato è effettivamente un minimo attraverso il calcolo della derivata seconda. La (8.28) è anche nota in ottica come legge di rifrazione. Nel caso in cui $v_1 \gg v_2$ cioè $v_2/v_1 \rightarrow 0$, si ha:

$$\sin \theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \theta_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 0$$

La condizione $v_1 \gg v_2$ è ben verificata nel caso del bagnino che trova conveniente infatti percorrere il tratto in acqua in verticale.

Esercizio 113. Gli esempi precedenti son tutti tipi di *brachistocrona* (si veda anche Esercizio 52), cioè una curva di tempo di percorrenza minimo. La brachistocrona più celebre è quella relativa al campo gravitazionale costante. Essa è definita come la curva di minor tempo di percorrenza per un moto che si svolge secondo la legge $v = \sqrt{2gh}$, vedi Esercizio 99 che connette due punti a quota diversa. Galileo aveva congetturato che la brachistocrona fosse un arco di circonferenza. Utilizzando l'esercizio precedente possiamo identificare la curva ricercata come il risultato di tantissime rifrazioni consecutive in cui si mantiene costante la quantità:

$$\frac{\sin \theta}{v} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2gh}} = \text{cost} \quad (8.29)$$

dove θ è l'angolo che la tangente alla curva forma con la verticale. Questo problema è stato risolto da Bernoulli che ha dimostrato che la curva ricercata è un arco di cicloide di coordinate parametriche in funzione di t

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin t) \\ y(t) = r(\cos t - 1) \end{cases} \quad (8.30)$$

con r un parametro reale positivo, vedi Figura 8.9.

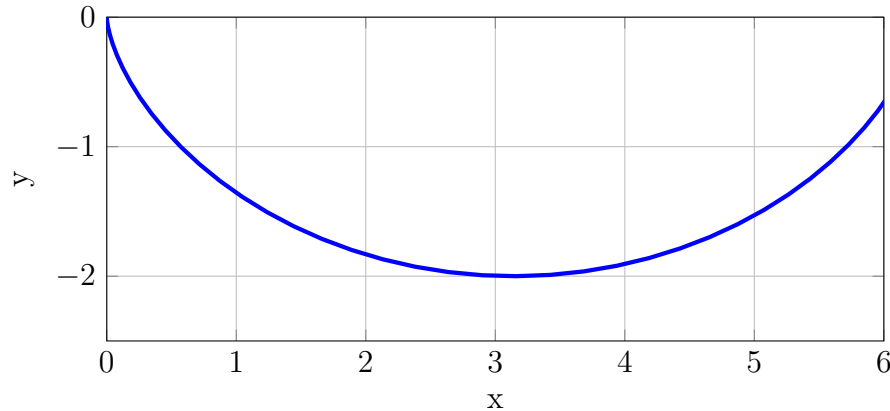


Figura 8.9: Cicloide, la brachistocrona del campo gravitazionale costante.

Esercizio 114 (*). Dimostrare che la cicloide (8.30) soddisfa la (8.29).

8.5 Appendice: cenni sulla stabilità

Ricordiamo che in una dimensione la relazione tra forza posizionale ed energia potenziale è data da

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(y) dy, \quad F(x) = -U'(x). \quad (8.31)$$

La (8.31) ci dice che la forza è nulla nei punti di massimo e minimo di $U(x)$.

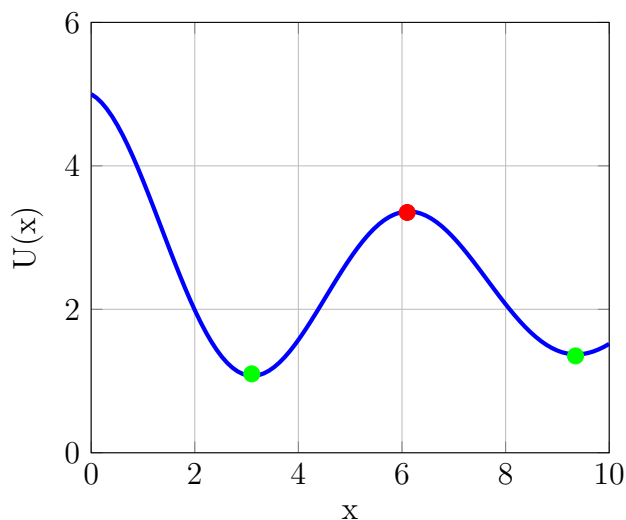


Figura 8.10: Esempio di funzione energia potenziale in una dimensione. In verde i minimi, in rosso i massimi.

Un punto di equilibrio è un punto estremale per il potenziale, poiché lì si annulla la forza. Analizziamo i casi:

- x^* , punto di massimo: se consideriamo due punti $x_{\pm} = x^* \pm \epsilon$ con $\epsilon > 0$ piccolo allora:

$$\begin{aligned} U'(x_+) < 0 &\Rightarrow F(x_+) > 0 \\ U'(x_-) > 0 &\Rightarrow F(x_-) < 0 \end{aligned}$$

Cioè un punto è portato ad allontanarsi da x^* . Questo ne fa un *punto di equilibrio instabile*;

- x^* , punto di minimo: se consideriamo due punti $x_{\pm} = x^* \pm \epsilon$ come prima allora:

$$\begin{aligned} U'(x_+) > 0 &\Rightarrow F(x_+) < 0 \\ U'(x_-) < 0 &\Rightarrow F(x_-) > 0 \end{aligned}$$

Cioè un punto materiale è portato a tornare verso la posizione di minimo x^* . Questo ne fa un *punto di equilibrio stabile*;

- infine se x^* è un punto di flesso risulta ancora di equilibrio instabile. Infatti se ci si sposta di poco in una delle direzioni ci si allontana poi indefinitamente.

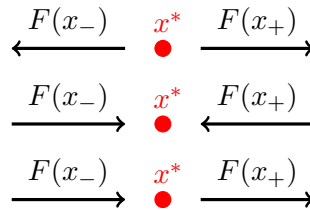


Figura 8.11: Forze in un intorno dei punti di equilibrio.

Nel caso in cui la derivata seconda nel punto di equilibrio $U''(x^*) \neq 0$ un criterio sufficiente per avere equilibrio stabile è che $U''(x^*) > 0$.

Esercizio 115. Verificare che per il moto di energia potenziale $U(x) = x^2$ l'origine è un punto di equilibrio stabile. Di che moto si tratta?

Esercizio 116 (Moto sulla separatrice). Il punto materiale di massa m soggetto alla forza peso (costante) si muove lungo la traiettoria rigida di equazione:

$$y = 2x - x^2, \quad \Rightarrow \quad 1 - y = (1 - x)^2$$

partendo dall'origine con velocità iniziale $v_i = \sqrt{2g}$. Si veda Figura 8.12. Riuscirà il punto materiale a raggiungere la sommità B della parabola (di coordinate $(1, 1)$)? Se sì, in quanto tempo?

Soluzione: Per raggiungere il punto B , al punto materiale serve un'energia mg che è esattamente quella che possiede all'istante iniziale:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mg \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{2g}$$

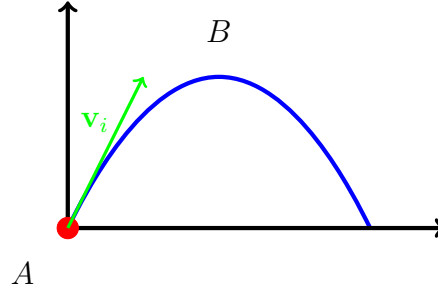


Figura 8.12: Esercizio 81.

Imponendo la conservazione tra l'origine ed un punto qualsiasi del moto (nel ramo ascendente):

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_i^2 = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = mg(1 - y) = mg(1 - x)^2 \quad (8.32)$$

$$v = \sqrt{2g}(1 - x) = \frac{ds}{dt} \quad (8.33)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \geq dx. \quad (8.34)$$

Osserviamo anche che, per la regola della derivata della funzione inversa vale

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{ds}{\sqrt{2g}(1 - x(s))}. \quad (8.35)$$

Grazie alla precedente:

$$\begin{aligned} T = \int_A^B dt &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_A^B \frac{1}{1 - x(s)} ds \geq \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^1 \frac{dx}{1 - x} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [-\log(1 - x)]_0^{1-\epsilon} = \\ &= \frac{-\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \log \epsilon + 0}{\sqrt{2g}} = +\infty. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Capitolo 9

Moti rotatori

In questo capitolo si introducono gli strumenti fisico-matematici utili a descrivere i moti rotatori. Dall'esempio del moto circolare si introduce il momento torcente di una forza, il momento di inerzia e il momento angolare. Questi nuovi concetti vengono poi estesi a moti generici con l'ausilio del prodotto vettoriale e si mostra come questo conduca a una formulazione della seconda legge di Newton dal punto di vista delle rotazioni. Si tratta la versione elementare del corpo rigido e della sua energia cinetica. Alcuni esempi illustrano i casi in cui si conserva l'energia o il momento angolare. Si analizza infine il moto del pendolo per le piccole oscillazioni.

9.1 Moto circolare

Questo è un moto vincolato a rimanere nella circonferenza di raggio r . Richiamiamo alcuni concetti attraverso la Figura 9.1.

Dalla definizione di angolo ricaviamo le seguenti relazioni:

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{\dot{l}(t)}{r} = \frac{v(t)}{r} \quad (9.1)$$

$$\alpha(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{\ddot{l}(t)}{r} = \frac{a_{tan}(t)}{r} \quad (9.2)$$

dove a_{tan} è l'*accelerazione tangenziale*, vedi Figura 9.1, a_{cp} è l'*accelerazione centripeta* e, siccome il moto è vincolato alla circonferenza, abbiamo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tan}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_{tan} + \mathbf{a}_{cp}, \quad \|\mathbf{a}_{cp}\| = \omega^2(t)r, \quad \|\mathbf{a}_{tan}\| = |\alpha(t)|r. \quad (9.3)$$

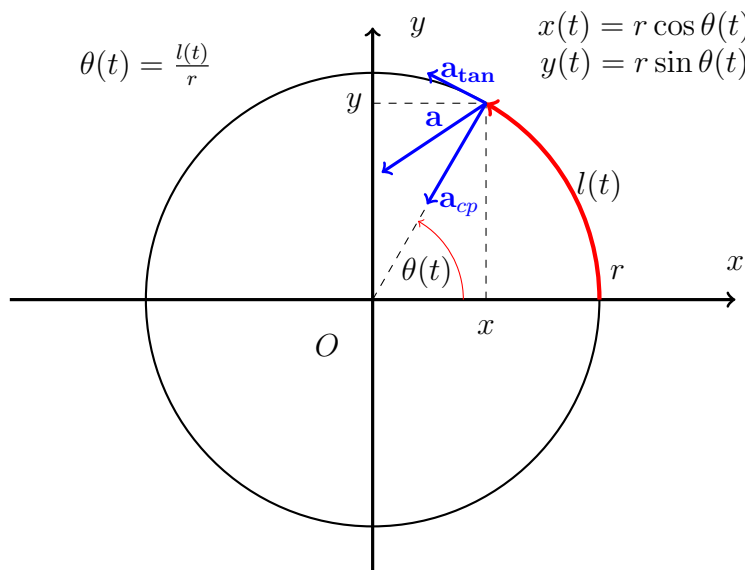


Figura 9.1: Moti rotatori. Relazione tra variabili angolari e lineari.

Osservazione 9.1. Il moto circolare uniforme è un particolare caso del precedente con:

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) = \omega = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}(t) = \alpha(t) = 0, \quad a_{tan} = 0$$

come può essere verificato inserendo nelle precedenti la legge:

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 .$$

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \longleftrightarrow & \theta(t) \\ v(t) & \longleftrightarrow & \omega(t) \\ a(t) & \longleftrightarrow & \alpha(t) \end{array}$$

Figura 9.2: Dizionario fra grandezze per il moto nella retta e quello nella circonferenza.

A partire dall'analogia tra il moto circolare uniforme e il moto rettilineo uniforme si costruisce un *dizionario* tra i moti in \mathbb{R} e quelli nella circonferenza che è alla base degli studi sulle rotazioni, vedi Figura 9.2.

Osservazione 9.2. Il dizionario in Figura 9.2 ci permette di studiare il moto circolare ad accelerazione angolare costante in completa analogia col moto rettilineo uniformemente accelerato (2.8):

$$\begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega(t) = \dot{\theta}(t) = \alpha t + \omega_0 \\ \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) = \alpha \end{cases} . \quad (9.4)$$

Esercizio 117. Provare l'analogo della legge di conservazione (2.10):

$$\frac{\omega^2(t)}{2} - \alpha\theta(t) = \frac{\omega_0^2}{2} - \alpha\theta_0 = \text{cost} \quad (9.5)$$

e l'analogo della legge sulla velocità media (2.9) su $[t_1, t_2]$

$$\bar{\omega} := \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\omega(t_2) + \omega(t_1)}{2} . \quad (9.6)$$

La Figura 9.3 riassume queste analogie.

$$\begin{array}{ccc} x(t) = vt + x_0 & \xleftrightarrow{\text{Moti uniformi}} & \theta(t) = \omega t + \theta_0 \\ \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 & \xleftrightarrow{\text{Moti uniformemente accelerati}} & \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \\ \frac{v^2(t)}{2} - ax(t) = \text{cost} & \xleftrightarrow{\text{Legge di conservazione}} & \frac{\omega^2(t)}{2} - \alpha\theta(t) = \text{cost} \\ \\ \bar{v} = \frac{v(t_2) + v(t_1)}{2} & \xleftrightarrow{\text{Velocità medie}} & \bar{\omega} = \frac{\omega(t_2) + \omega(t_1)}{2} \end{array}$$

Figura 9.3: Moti lineari uniformi e uniformemente accelerati e loro corrispondenti nella circonferenza.

9.2 Momento torcente

Per i moti circolari la legge di Newton ci dice che, in direzione tangenziale, vale

$$F_{tan} = ma_{tan} = mr\alpha \quad (9.7)$$

e moltiplicando per r :

$$rF_{tan} = mr^2\alpha. \quad (9.8)$$

Si definiscono il momento di inerzia

$$I = mr^2, \quad (9.9)$$

il momento angolare

$$l = I\omega \quad (9.10)$$

e il momento torcente

$$\tau = rF_{tan} \quad (9.11)$$

che permettono di scrivere la (9.8) come

$$\tau = I\alpha = \dot{l} \quad (9.12)$$

che è l'equivalente, per i moti vincolati in una circonferenza, della legge di Newton in una dimensione. Questo ci permette di completare il dizionario tra moti nella retta e moti nella circonferenza.

$$\begin{array}{ccc} m & \longleftrightarrow & I \\ p & \longleftrightarrow & l \\ F & \longleftrightarrow & \tau \\ F = ma & \longleftrightarrow & \tau = I\alpha \end{array}$$

Figura 9.4: Forze e momenti torcenti. Masse e momenti d'inerzia.

Vogliamo ora introdurre un formalismo vettoriale che ci permetta di riformulare in modo completo le leggi di Newton nel linguaggio delle rotazioni. Talvolta, come nel caso dei moti vincolati e del corpo rigido, questa formulazione risulta particolarmente efficace.

9.3 Il prodotto vettoriale

Dati due vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= (x_1, y_1, z_1) = x_1 \hat{\mathbf{i}} + y_1 \hat{\mathbf{j}} + z_1 \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{r}_2 &= (x_2, y_2, z_2) = x_2 \hat{\mathbf{i}} + y_2 \hat{\mathbf{j}} + z_2 \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

il loro *prodotto vettoriale* è definito come:

$$\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 := \det \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1). \quad (9.13)$$

Il prodotto vettoriale a differenza di quello scalare è un vettore e per questa ragione è talvolta detto *interno*. Esso gode delle seguenti proprietà:

1. antisimmetria: $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_1$; in particolare $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = 0$;
2. bilinearità: $(\alpha \mathbf{r}_1 + \beta \mathbf{r}_2) \wedge \mathbf{r} = \alpha \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r} + \beta \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}$;
3. $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$ è un vettore ortogonale al piano individuato da \mathbf{r}_1 ed \mathbf{r}_2 (verificarlo per esercizio): $\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2) = 0$;
4. $\|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_1\| \|\mathbf{r}_2\| \sin \theta$, con θ angolo compreso fra i due vettori.

Queste proprietà si verificano immediatamente come conseguenza delle proprietà dei determinanti. La 1 corrisponde allo scambio della seconda e della terza riga della matrice. La 2 si verifica per componenti. La 3 si verifica osservando che i prodotti misti sono determinanti con due righe uguali. Per verificare la 4 esprimiamo i vettori in rappresentazione polare, assumendo senza perdita di generalità, che i due vettori $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ giacciono sul piano xOy :

$$\mathbf{r}_1 = (r_1 \cos \alpha_1, r_1 \sin \alpha_1, 0), \quad \mathbf{r}_2 = (r_2 \cos \alpha_2, r_2 \sin \alpha_2, 0) \quad (9.14)$$

$$\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 = r_1 r_2 (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2) \hat{\mathbf{k}} = r_1 r_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \hat{\mathbf{k}} \quad (9.15)$$

Prendendo il modulo della (9.15) otteniamo la proprietà 4.

Esercizio 118. Mostrare che $\|\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2\|$ è l'area del parallelogramma individuato dai vettori \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

Esercizio 119 (Terna destrorsa). Dimostrare che:

$$\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \quad (9.16)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad (9.17)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}. \quad (9.18)$$

Osservazione 9.3 (Regola della mano). Alla struttura del prodotto vettoriale si associano spesso regole mnemoniche chiamate talvolta regola della mano sinistra, destra, della vite destrorsa etc. Enunciamo la prima, *regola della mano sinistra*: se il vettore \mathbf{r}_1 ha la direzione del dito medio e il vettore \mathbf{r}_2 quella dell'indice, il prodotto $\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2$ ha la direzione del pollice.

Esercizio 120 (Prodotto misto). Dimostrare che $|\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3)|$ è il volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. (Suggerimento: si utilizzi il risultato dell'Esercizio 118.)

Esercizio 121. Si dimostri che per il prodotto misto vale

$$\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}. \quad (9.19)$$

Esercizio 122. Utilizzando l'esercizio precedente si dimostri la seguente proprietà di ciclicità

$$\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_3 \cdot (\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{r}_1). \quad (9.20)$$

Esercizio 123 (Regola di Leibniz per il prodotto vettoriale). Dimostrare che

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \wedge \frac{d}{dt}\mathbf{r}_2. \quad (9.21)$$

L'esercizio si risolve calcolando la derivata delle componenti e utilizzando la regola di Leibniz per il prodotto di funzioni.

9.4 Momento angolare e momento torcente

Identifichiamo ora una versione della legge di Newton che risulta utile nello studio dei moti rotatori. Definiamo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \quad \text{momento della forza} \quad (9.22)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad \text{momento angolare.} \quad (9.23)$$

Queste definizioni dipendono dal sistema del riferimento in cui misuriamo la posizione \mathbf{r} .

Dimostriamo ora che

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}, \quad (9.24)$$

versione rotatoria di $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$. Utilizzando la (9.21) abbiamo

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \frac{d}{dt}\mathbf{p} = \mathbf{v} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}. \quad (9.25)$$

Dalla (9.24) segue che quando il momento della forza è nullo \mathbf{l} è conservato:

$$\boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{l} = \text{cost}.$$

La condizione $\boldsymbol{\tau} = 0$ è banalmente vera quando la forza è nulla, ma è verificata anche quando $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$ cioè per forze centrali.

9.5 Il corpo rigido, versione elementare

In un corpo rigido le distanze relative tra ogni coppia di punti che lo compongono sono fissate. Nella trattazione elementare si assume che il corpo abbia un asse di rotazione fisso che per semplicità scegliamo coincidere con l'asse z . Trattiamo dapprima un sistema discreto di punti materiali (m_i, \mathbf{r}_i) nel piano. La condizione di rigidità implica che ogni punto ha la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare, quindi:

$$\tau_i = r_i^2 m_i \alpha \quad \Rightarrow \quad \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha$$

Definendo il momento d'inerzia totale $I = \sum_i m_i r_i^2$ si ha:

$$\tau_{tot} = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha = I \alpha \quad (9.26)$$

I prossimi due esercizi mostrano come calcolare il momento di inerzia di distribuzioni di massa continue.

Esercizio 124. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z di una massa totale M distribuita in una circonferenza di raggio R centrata nell'origine giacente sul piano xOy .

Soluzione: Iniziamo il calcolo nel caso di una distribuzione discreta di masse m_i . In tal caso si ha

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = R^2 \sum_i m_i = MR^2 . \quad (9.27)$$

In presenza di una distribuzione continua $dm = \rho(\theta)d\theta$ si ha

$$I = \int_0^{2\pi} R^2 dm = R^2 \int_0^{2\pi} \rho(\theta) d\theta = MR^2 . \quad (9.28)$$

La soluzione mostra che il momento non dipende da come la massa è distribuita.

Esercizio 125. Calcolare il momento di inerzia di un disco pieno omogeneo di massa M e raggio R rispetto all'asse ad esso ortogonale che passa per il suo centro.

Soluzione: L'ipotesi di omogeneità si traduce in una densità di massa superficiale pari a

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} . \quad (9.29)$$

Il momento di inerzia sarà dunque

$$I = \int_{r \leq R} r^2 dm = \int_{r \leq R} r^2 \sigma dS \quad (9.30)$$

La superficie infinitesima sarà quella di una corona circolare di spessore infinitesimo che può essere calcolata utilizzando la definizione di differenziale (5.12) della funzione $S = \pi r^2$:

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr . \quad (9.31)$$

Pertanto utilizzando le (9.29), (9.30) e (9.31) otteniamo

$$I = \int_0^R r^2 \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2}{2} . \quad (9.32)$$

Esercizio 126. Calcolare il momento d'inerzia di una sbarra omogenea di lunghezza L e massa M , di spessore trascurabile, che ruota attorno all'asse a essa ortogonale passante per il suo centro. Ripetere lo stesso esercizio con l'asse di rotazione passante per un suo estremo.

9.6 Energia cinetica di rotazione

Calcoliamo ora, sempre nell'ipotesi di un sistema di punti materiali $(m_i, \mathbf{r}_i)_{i=1, \dots, N}$ nel piano, l'energia cinetica di rotazione. Considerando che $v_i = \omega r_i$ si ha

$$T_{tot} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (9.33)$$

Esercizio 127. Su una carrucola con simmetria cilindrica di raggio R e momento d'inerzia I scorre un filo inestensibile senza strisciare al quale è appesa una massa M . Il sistema è privo di attrito ed inizialmente immobile. Calcolare la velocità della massa M dopo che è scesa di una quota h .

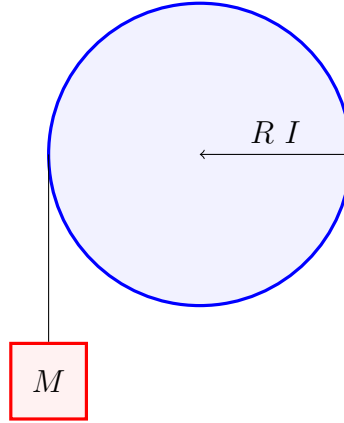


Figura 9.5: Esercizio 127.

Soluzione: Osserviamo che l'ipotesi di non strisciamento implica che la velocità v della massa M è legata alla velocità angolare ω della carrucola dalla relazione $v = \omega R$. La conservazione dell'energia per il sistema carrucola-massa implica

$$\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \\ 2Mgh &= \left(M + \frac{I}{R^2} \right) v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/R^2}}. \end{aligned}$$

9.7 Il pendolo nelle piccole oscillazioni

Il pendolo, nella sua versione più semplice, è un sistema costituito da un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza L fissato per un suo estremo a una parete verticale. All'altro estremo è appesa una massa m , come in Figura 9.6.

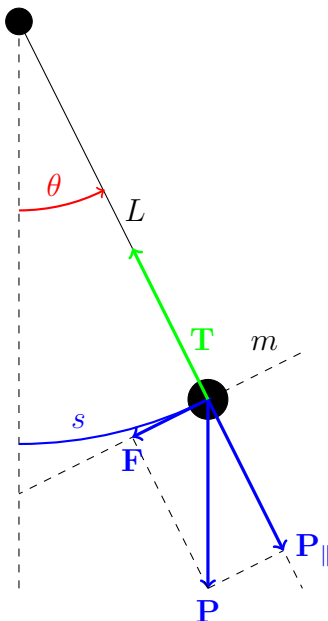


Figura 9.6: Pendolo semplice.

Per risolvere il suo moto scomponiamo la forza peso nella sua componente radiale \mathbf{P}_{\parallel} e tangenziale \mathbf{F} . Orientando l'angolo θ in senso antiorario e indicando con $s = L\theta$ il corrispondente arco, avremo

$$F = -mg \sin \theta, \quad (9.34)$$

e orientando l'asse radiale del pendolo verso il suo centro risulta che per la tensione \mathbf{T}

$$T = -P_{\parallel} = mg \cos \theta.$$

Per piccoli angoli ($\sin \theta \simeq \theta$) la forza tangenziale si riduce a

$$F = -mg \sin \theta \simeq -mg\theta = -\frac{mg}{L}s. \quad (9.35)$$

La legge di Newton porge

$$F = -\frac{mg}{L}s = m\ddot{s} \quad (9.36)$$

che può essere interpretato come un caso particolare di forza elastica (5.20) dove

$$\text{costante elastica:} \quad k = \frac{mg}{L} \quad (9.37)$$

$$\text{pulsazione:} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (9.38)$$

$$\text{periodo:} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (9.39)$$

Notiamo che possiamo semplificare la massa nell'equazione differenziale (9.36) e riscriverla come

$$\ddot{s} = -\frac{g}{L}s, \quad (9.40)$$

pertanto l'equazione e la sua soluzione saranno indipendenti da m . In particolare l'indipendenza del periodo di oscillazione del pendolo dalla massa è chiamata *isocronismo*. Come visto nell'Esercizio 55 la soluzione è quella del moto armonico e vale

$$s(t) = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi_0\right). \quad (9.41)$$

Osserviamo che la (9.40) si riscrive anche come

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta, \quad (9.42)$$

che ha soluzione

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi_0\right). \quad (9.43)$$

Esercizio 128. Un pendolo di lunghezza unitaria si trova in un piano verticale ed è soggetto ad una accelerazione gravitazionale unitaria. Ogni volta che raggiunge il punto più basso della sua traiettoria esso urta una parete verticale perdendo metà della sua energia. Sapendo che il pendolo parte da fermo con un piccolo angolo θ_0 calcolare il tempo necessario \bar{t} perché esso si fermi e lo spazio totale percorso.

Soluzione: Data l'isocronia del pendolo nelle piccole oscillazioni, il suo periodo non cambia mai dopo i vari urti con la parete. Dunque tra un urto ed il successivo c'è sempre mezzo periodo. Ciò implica che

$$\bar{t} = -\frac{T}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T}{2} = +\infty. \quad (9.44)$$

Al contrario, l'ampiezza, e di conseguenza l'arco di circonferenza percorso, diminuiscono ad ogni urto. Grazie all'approssimazione per piccoli angoli ($1 - \cos x \simeq x^2/2$) vale in particolare per l'energia potenziale del pendolo

$$\frac{1}{2}m(1 - \cos \theta_0) = m(1 - \cos \theta_1) \quad \Rightarrow \quad \theta_1 \simeq \frac{\theta_0}{\sqrt{2}} \quad (9.45)$$

con θ_1 ampiezza dopo il primo urto. Più in generale, iterando il ragionamento si ha che

$$\theta_n = \frac{\theta_{n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{\theta_{n-2}}{2} = \dots = \frac{\theta_0}{2^{n/2}}. \quad (9.46)$$

Infine, lo spazio totale percorso sarà

$$S = -\theta_0 + 2\theta_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n = \theta_0 (3 + 2\sqrt{2}). \quad (9.47)$$

Esercizio 129. Risolvere il problema delle piccole oscillazioni del pendolo utilizzando la versione rotatoria (9.24) della seconda legge di Newton.

Esercizio 130 (Il lampadario che oscilla). Un lampadario cilindrico di momento d'inerzia I si trova appeso al soffitto tramite una corda. Quando il lampadario ruota di un angolo θ rispetto al suo asse (sul quale giace anche la corda che lo sostiene) per effetto della torsione la corda esercita un momento torcente pari a $\tau = -h\theta$ con h una costante.

Trovare la legge del moto $\theta(t)$ del lampadario conoscendo le condizioni iniziali per la posizione e per la velocità:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= A \\ \dot{\theta}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Soluzione: Applicando l'equazione (9.24)

$$\tau = -h\theta = I\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{h}{I}\theta, \quad (9.48)$$

che è ancora l'equazione di un moto armonico, la cui soluzione generale è

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{h}{I}}t + \phi_0 \right). \quad (9.49)$$

Dobbiamo ora calcolare θ_0 e ϕ_0 utilizzando le condizioni iniziali. Imponendo queste ultime otteniamo:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \cos(\phi_0) = A \\ \dot{\theta}(0) = -\theta_0 \sqrt{\frac{h}{I}} \sin \phi_0 = 0 \end{cases}. \quad (9.50)$$

La seconda implica $\phi_0 = 0$. Dalla prima equazione quindi si ottiene che $\theta_0 = A$. Otteniamo dunque

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{h}{I}}t \right). \quad (9.51)$$

9.8 Lavoro ed energia potenziale del momento torcente

Considerando un corpo rigido che ruota di un angolo $d\theta$ attorno a un suo asse fisso (possiamo sempre immaginarlo coincidente con l'asse z) si ha che ciascuno dei suoi punti si sposta a causa della rotazione della seguente quantità

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{r} \quad (9.52)$$

dove $d\boldsymbol{\theta} = d\theta \hat{\mathbf{k}}$. Pertanto il lavoro compiuto da una forza vale

$$L = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{r} \quad (9.53)$$

da cui, grazie alla (9.20)

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}. \quad (9.54)$$

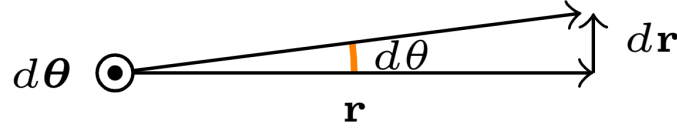


Figura 9.7: Rappresentazione dei tre vettori in (9.52). Il vettore $d\theta$ è uscente dal foglio.

Se τ e $d\theta$ sono paralleli allora $\tau \cdot d\theta = \tau d\theta$ dalla quale, seguendo lo stesso procedimento del Teorema dell'energia cinetica (vedi Sezione 5.2), si ottiene

$$L = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2. \quad (9.55)$$

La precedente, utilizzando la (9.33), si riscrive come

$$L = \Delta T. \quad (9.56)$$

Così come visto per alcune forze posizionali unidimensionali, dimostriamo la conservazione dell'energia meccanica in alcuni casi semplici.

Esercizio 131. Calcolare il lavoro compiuto da θ_1 a θ_2 di un momento torcente costante $\tau = \tau_0$.

Soluzione:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_0 d\theta = \tau_0(\theta_2 - \theta_1). \quad (9.57)$$

La quantità $U(\theta) = -\tau_0\theta + \text{cost}$ è l'energia potenziale del momento costante. L'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \tau_0\theta \quad (9.58)$$

si conserva.

Esercizio 132. Calcolare il lavoro compiuto da θ_1 a θ_2 di un momento torcente elastico $\tau = -h\theta$.

Soluzione:

$$L = -h \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta d\theta = -\frac{1}{2}h(\theta_2^2 - \theta_1^2). \quad (9.59)$$

La quantità $U(\theta) = \frac{1}{2}h\theta^2 + \text{cost}$ è l'energia potenziale del momento elastico. L'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}h\theta^2 \quad (9.60)$$

si conserva.

Esercizio 133. Un punto materiale di massa m si muove di moto circolare uniforme su un tavolo con velocità angolare ω_i e raggio r_i . Esso è tenuto in traiettoria da un filo che passa sotto il tavolo attraverso un foro praticato nel centro della traiettoria circolare. Il filo viene tirato da sotto il tavolo accorciando così il raggio del moto da r_i ad $r_f < r_i$ e fermato in un nuovo moto circolare uniforme. Rispondere alle seguenti domande:

1. L'energia del punto materiale è conservata?
2. Il momento angolare rispetto al foro è conservato?
3. Calcolare la velocità finale v_f sulla circonferenza di raggio r_f .

Soluzione: Il momento angolare è conservato perché la forza che viene esercitata attraverso il filo (la tensione) ha momento nullo:

$$\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad l = I\omega = \text{cost}$$

Possiamo dunque usare:

$$\begin{aligned} I_i\omega_i &= mr_i^2\omega_i = mr_iv_i = mr_f v_f = mr_f^2\omega_f = I_f\omega_f \\ v_f &= \frac{r_i}{r_f}v_i > v_i \end{aligned}$$

L'energia pertanto non si è conservata ed è aumentata:

$$\Delta T = T_f - T_i = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}m \left(\frac{r_i^2}{r_f^2} - 1 \right) v_i^2 \quad (9.61)$$

perché nel tirare a sé il punto il filo inestensibile ha compiuto lavoro.

Si noti che la conservazione del momento angolare implica che $\omega_f = \frac{r_i^2}{r_f^2}\omega_i$. Questo spiega l'aumento di velocità angolare del pattinatore stringe a sé le braccia.

Esercizio 134. Un punto materiale di massa m giace su un tavolo ed è attaccato tramite una fune inestensibile ad punto sulla superficie di un cilindro fissato al tavolo. Il punto materiale parte con una velocità iniziale di modulo v_i diretta ortogonalmente alla fune che si avvolge sul cilindro come in Figura 9.8 e con una lunghezza di corda libera iniziale d_i . Dopo un certo tempo la lunghezza di corda libera è $d_f < d_i$. Rispondere alle seguenti domande:

1. l'energia è conservata?
2. il momento angolare rispetto al punto di contatto della fune è conservato?
3. calcolare la velocità angolare nell'istante finale.

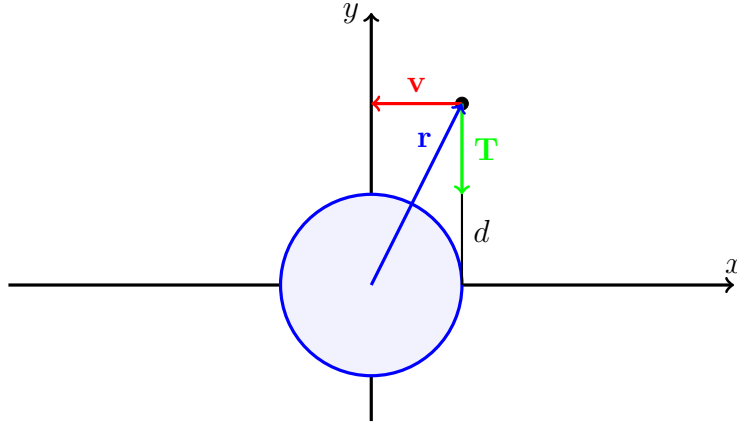


Figura 9.8: Esercizio 134.

Soluzione: L'ipotesi di inestensibilità della fune implica che la velocità non può avere una componente lungo la direzione della fune. Dunque la tensione della fune è sempre ortogonale alla velocità, pertanto essa non compie lavoro e l'energia cinetica (e dunque meccanica) è conservata:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad \Rightarrow \quad v_f = v_i \quad (9.62)$$

mentre il momento angolare rispetto al centro istantaneo di rotazione non si conserva,

$$\Delta l = l_f - l_i = d_f p_f - d_i p_i = mv_i(d_f - d_i) < 0. \quad (9.63)$$

Infine la velocità angolare finale sarà

$$\omega_f = \frac{v_f}{d_f} = \frac{v_i}{d_f} > \frac{v_i}{d_i} = \omega_i. \quad (9.64)$$

Osserviamo che rispetto al punto di contatto tra fune e cilindro la forza di tensione è centrale, tuttavia questo non ci permette di concludere che si conserva il momento angolare in questo sistema di riferimento perché esso non è inerziale.

Capitolo 10

Relatività ristretta

In questo capitolo si introduce la Teoria della Relatività Ristretta proposta da Einstein all'inizio del secolo scorso (1905). Si mostra come dedurre le trasformazioni di Lorentz da due semplici principi, scelti da Einstein come assiomi della Relatività, e come queste conservino la metrica di Minkowski. La contrazione delle lunghezze e la dilatazione dei tempi vengono ottenute come conseguenze di tali trasformazioni.

10.1 Propagazione sferica e postulati della relatività

Studiamo ora la propagazione di due fronti d'onda sferici, quello sonoro e quello luminoso, generati da una sorgente puntiforme, per esempio dallo scoppio di un petardo che produce sia il botto che il lampo. In particolare ci interessa analizzare come i fronti d'onda vengono osservati in due sistemi di riferimento inerziali $(O; x, y, z)$ e $(O'; x', y', z')$ che a un certo istante, per esempio il tempo zero in cui scoppia il petardo, sono coincidenti e in cui il secondo si muove di velocità costante v nella comune direzione x e x' come in Figura 10.1. In particolare l'origine O' di coordinate $(x_{O'}, 0, 0)$ rispetto a $(O; x, y, z)$ ha legge oraria

$$x_{O'}(t) = vt \tag{10.1}$$

dove t è il tempo misurato in $(O; x, y, z)$.

Iniziamo con lo studio del fronte d'onda del botto e scegliamo, per convenzione, il petardo e l'aria in quiete in O . Siccome il suono si propaga nell'aria in modo omogeneo e isotropo con una velocità di circa $v_s = 340 \text{ m/s}$ il fronte d'onda del

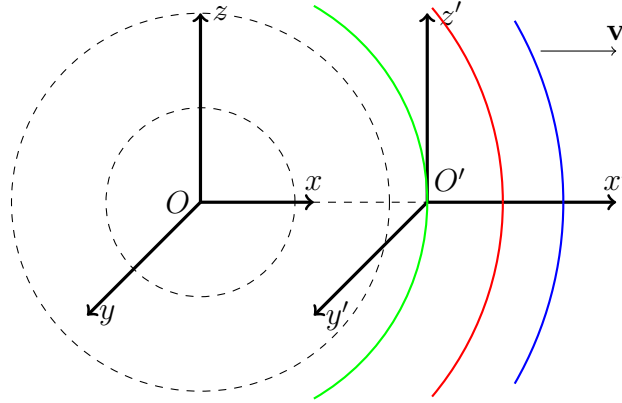


Figura 10.1: Propagazione sferica per il suono.

botto osservato in O sarà una sfera di raggio $r(t) = v_s t$ e quindi di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_s^2 t^2. \quad (10.2)$$

Nel sistema O' il fronte d'onda sarà ottenuto attraverso le trasformazioni di Galileo (1.10) tra i due sistemi di riferimento $(O; x, y, z)$, $(O'; x', y', z')$, dove il secondo è in moto con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto al primo:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}. \quad (10.3)$$

Sostituendo le (10.3) nella (10.2) otteniamo

$$(x' + vt')^2 + y'^2 + z'^2 = v_s^2 t'^2. \quad (10.4)$$

I due osservatori possono testare sperimentalmente la correttezza di questa descrizione teorica per esempio disponendo tanti microfoni nei rispettivi sistemi di riferimento con accanto a ciascun microfono un orologio che misura il momento in cui il fronte arriva. Il primo osserva una sfera che si dilata a velocità v_s centrata in O mentre il secondo una sfera che si dilata con velocità v_s ma con centro mobile a velocità $(-v, 0, 0)$. La diversa descrizione che i due osservatori danno del fenomeno è perfettamente coerente nella meccanica classica perché il primo è in quiete rispetto all'aria mentre il secondo è in moto rispetto a essa.

Occupiamoci ora del fronte d'onda del lampo. Nelle studio delle oscillazioni elettromagnetiche, il dibattito sulla natura del mezzo in cui esse si propagano (chiamato *etere luminifero*) ebbe una svolta con l'esperimento di Michelson e Morley nel 1887 fino a essere definitivamente dismesso intorno al 1905 dopo diversi esperimenti successivi. Le osservazioni sperimentali conclusero che la velocità con cui la luce raggiunge un osservatore è indipendente dal moto relativo tra questi e la sorgente, cioè la luce si propaga nel vuoto ed il concetto di etere è inutile e ingannevole. La propagazione della luce non segue dunque la normale legge di composizione galileiana delle velocità e si propaga alla stessa velocità indipendentemente dalla velocità relativa tra sorgente e osservatore.

Osservazione 10.1. Per illustrare questo fatto si pensi a un proiettile sparato a velocità v_2 da una macchina che si muove a velocità v_1 rispetto alla terra. Secondo la meccanica classica il proiettile ha una velocità rispetto a terra pari a (si veda (1.9)):

$$v_{tot} = v_1 + v_2.$$

Al contrario, un impulso luminoso che parte dalla medesima auto viaggia a velocità c sia per chi sta sull'auto che per chi si trova a terra:

$$v_{tot} \neq c + v_1, \quad v_{tot} = c.$$

Questo fatto risulta inconciliabile con la struttura di spazio e tempo assoluti. Nel tentativo di rendere coerenti queste osservazioni Einstein assunse la validità di due principi, chiamati anche assiomi o postulati della Teoria della Relatività Ristretta:

Postulato 1: La luce si propaga nel vuoto in modo omogeneo e isotropo con la stessa velocità rispetto a ogni sistema di riferimento inerziale. La sua misura sperimentale fornisce:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \tag{10.5}$$

con una precisione di quattro parti su un miliardo. Dopo la ridefinizione del *metro* come la distanza percorsa dalla luce in una frazione pari a $1/299\,792\,458s$ il valore di c è privo di errore.

Postulato 2: Le leggi *della Fisica* sono le stesse in ogni sistema di riferimento inerziale.

Il secondo assioma è semplice e molto profondo: dati due sistemi di riferimento inerziali non c'è nessun esperimento fisico che permetta di stabilire quale dei due sia in moto, si può solo dire che i due sono in moto relativo. I due sistemi sono di

fatto fisicamente indistinguibili. Esso è un' estensione ai fenomeni elettromagnetici del Principio di Relatività galileiano che si applicava ai soli fenomeni meccanici. Questi due postulati insieme hanno una conseguenza sorprendente e apparentemente paradossale: l'analisi del fronte d'onda del lampo fatta nei sistemi di riferimento $(O; x, y, z, t)$ e $(O'; x', y', z', t')$ in moto relativo a velocità v *deve* essere identica cioè

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 &= c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= c^2 t'^2 \end{cases} \quad (10.6)$$

Disponendo quindi rilevatori di luce e cronometri nei due sistemi di riferimento l'osservatore in O sperimenta una sfera con centro nell'origine di O che si dilata a velocità c e l'osservatore in O' osserva una sfera con centro nell'origine di O' che si dilata alla stessa velocità c . *Le due origini di O e O' , dove possiamo immaginare posizionati i relativi osservatori, sono entrambe al centro della sfera del lampo pur allontanandosi a velocità relativa v .* Il nostro intuito fisico, basato sulla percezione comune dello spazio euclideo in \mathbb{R}^3 e del tempo assoluto in \mathbb{R} da cui abbiamo dedotto le trasformazioni di Galileo, è completamente smarrito!

Visto che i due sistemi si spostano solo nella comune direzione di x e x' ($y = y'$ e $z = z'$) osserviamo che la parte rilevante delle (10.6) può essere riscritta come

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2 \quad (10.7)$$

e utilizzando il tempo ridotto $\tau = ct$, $\tau' = ct'$ nella forma

$$x^2 - \tau^2 = x'^2 - \tau'^2. \quad (10.8)$$

Chiaramente le trasformazioni di coordinate che soddisfano la precedente non sono quelle di Galileo, cioè lo spazio-tempo non va pensato come $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ con la metrica euclidea. Serve invece cercare nuove trasformazioni di coordinate e una nuova geometria.

10.2 Le Trasformazioni di Lorentz

Per rispondere alla domanda precedente cerchiamo, tra le *trasformazioni lineari* L

$$\begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \text{con } L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 \tau \\ \tau' = a_2 x + b_2 \tau \end{cases}, \quad (10.10)$$

quelle che soddisfano le condizioni (10.8). Inserendo quindi le (10.10) nella (10.8) abbiamo

$$\begin{aligned} x'^2 - \tau'^2 &= (a_1x + b_1\tau)^2 - (a_2x + b_2\tau)^2 = \\ &= x^2(a_1^2 - a_2^2) - \tau^2(b_2^2 - b_1^2) + 2x\tau(a_1b_1 - a_2b_2) = x^2 - \tau^2. \end{aligned}$$

Per il principio d'identità tra polinomi devono valere le

$$a_1^2 - a_2^2 = 1 \quad (10.11)$$

$$b_2^2 - b_1^2 = 1 \quad (10.12)$$

$$a_1b_1 - a_2b_2 = 0. \quad (10.13)$$

La struttura delle (10.11), (10.12) e (10.13) suggerisce una parametrizzazione della L con seni e coseni iperbolici.

Esercizio 135 (Funzioni iperboliche). Richiamando la tre definizione delle funzioni iperboliche

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}. \quad (10.14)$$

si dimostri che

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (10.15)$$

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}, \quad \sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}. \quad (10.16)$$

e se ne faccia lo studio del grafico (massimi, minimi, flessi, monotonia, convessità e asintoti).

Parametrizziamo quindi la L come segue

$$\begin{aligned} a_1 &= \cosh \theta_1, & b_1 &= \sinh \theta_2 \\ a_2 &= \sinh \theta_1, & b_2 &= \cosh \theta_2 \end{aligned}$$

che soddisfa la (10.11) e la (10.12):

$$a_1^2 - a_2^2 = \cosh^2 \theta_1 - \sinh^2 \theta_1 = 1 \quad b_2^2 - b_1^2 = \cosh^2 \theta_2 - \sinh^2 \theta_2 = 1. \quad (10.17)$$

La (10.13) porge

$$\tanh \theta_2 - \tanh \theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \theta_2 \equiv \theta. \quad (10.18)$$

La L si riscrive dunque come

$$\begin{cases} x' = \cosh \theta x + \sinh \theta \tau \\ \tau' = \sinh \theta x + \cosh \theta \tau \end{cases} \quad (10.19)$$

Rimane ora da calcolare θ imponendo che l'origine di O' , cioè il punto identificato da $x'_{O'} = 0$, obbedisca alla legge oraria (10.1). Dalla prima delle (10.19) risulta:

$$x'_{O'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_{O'}}{\tau} = \frac{x_{O'}}{ct} = -\tanh \theta \quad (10.20)$$

da cui per la (10.1)

$$\frac{x_{O'}}{t} = v \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = -\tanh \theta. \quad (10.21)$$

Il parametro iperbolico θ è quindi stato identificato dalla (10.21).

Osservazione 10.2 (Limitatezza delle velocità). Dalla (10.21) notiamo che la parametrizzazione della trasformazione lineare che utilizza le funzioni iperboliche è corretta se

$$v < c. \quad (10.22)$$

Il caso $v > c$ non ha trovato riscontro nella realtà fisica.

Sostituendo la (10.21) nelle (10.19) e usando le identità (10.16) otteniamo le *Trasformazioni di Lorentz*:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.23)$$

Esercizio 136 (Trasformazioni di Lorentz inverse). Mostrare che le (10.23) sono invertibili con inverse:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.24)$$

Osservazione 10.3. Le trasformazioni di Lorentz e le loro inverse sono singolari quando $v \rightarrow c$.

Osserviamo che le trasformazioni di Lorentz mescolano spazio e tempo. È utile pertanto considerare lo spazio-tempo come il vero spazio fisico della meccanica e studiarne le proprietà in relazione a quelle trasformazioni. A questo scopo si introduce lo spazio degli eventi e lo si dota di una *metrica* opportuna che gioca lo stesso ruolo di quella di Euclide nello spazio ordinario.

10.3 Spazio-Tempo di Minkowski

Si definisce *evento* il vettore a quattro componenti (t, x, y, z) che rappresentano le misure spazio temporali in un sistema di riferimento inerziale. Dati due eventi

$$E_1 = (t_1, x_1, y_1, z_1), \quad E_2 = (t_2, x_2, y_2, z_2)$$

si definisce la loro *pseudo-distanza* come

$$d_{\mathcal{M}}^{(2)}(E_1, E_2) = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (10.25)$$

L'insieme degli eventi dotati della pseudo-metrica (10.25) si chiama spazio-tempo di Minkowski e si indica solitamente con $\mathbb{R}^{3,1}$. Il suffisso pseudo è dovuto al fatto che la quantità in (10.25) può essere anche negativa mentre le distanze ordinarie sono sempre positive.

Osservazione 10.4. A seconda del segno della quantità (10.25) si introduce una classificazione causale tra coppie di eventi:

- distanza di tipo *luce*: $d_{\mathcal{M}}^{(2)}(E_1, E_2) = 0$, solo un segnale luminoso può connettere E_1 a E_2 ;
- distanza di tipo *tempo*: $d_{\mathcal{M}}^{(2)}(E_1, E_2) > 0$, un corpo che viaggia a una velocità opportuna $v < c$ può connettere E_1 a E_2 ;
- distanza di tipo *spazio*: $d_{\mathcal{M}}^{(2)}(E_1, E_2) < 0$, nessun segnale può connettere E_1 a E_2 .

In base a quanto descritto osserviamo che la luce determina la struttura causale dello spazio-tempo. In particolare due eventi separati da una distanza di tipo spazio non possono essere causa o effetto l'uno dell'altro. Non può sussistere una relazione causale tra i due.

Esercizio 137. Dati due eventi E_1 e E_2 giacenti sull'asse x di O con $t_2 > t_1$ separati da una distanza di tipo tempo, mostrare che non esiste alcun sistema di riferimento O' in cui l'evento E_2 accade prima di E_1 : $t'_2 < t'_1$.

Soluzione: Sapendo che $\Delta t > 0$, imponiamo $\Delta t' < 0$

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \frac{v}{c^2} \Delta x \quad (10.26)$$

da cui segue

$$v > \frac{\Delta t}{\Delta x} c^2 \quad (10.27)$$

e siccome per ipotesi di distanza di tipo tempo si ha $\Delta x/\Delta t < c$ abbiamo

$$v > \frac{\Delta x}{c\Delta x} c^2 = c \quad (10.28)$$

il che viola l'ipotesi di limitatezza (10.22).

Esercizio 138. Dati due eventi E_1 e E_2 in O con $x_2 > x_1$ separati da una distanza di tipo tempo, mostrare che esistono sistemi di riferimento O' in cui $x'_2 < x'_1$.

Soluzione: Sapendo che $\Delta x > 0$, imponiamo $\Delta x' < 0$

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\Delta x - v\Delta t) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x < v\Delta t \quad (10.29)$$

da cui segue

$$v > \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (10.30)$$

e siccome per ipotesi di distanza di tipo tempo si ha $\Delta x/\Delta t < c$ è sufficiente prendere delle velocità nel range

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} < v < c. \quad (10.31)$$

Esercizio 139. Dati due eventi E_1 e E_2 in O con $t_2 > t_1$ separati da una distanza di tipo spazio, mostrare che esistono sistemi di riferimento O' in cui l'evento E_2 accade prima di E_1 : $t'_2 < t'_1$. Questo fatto chiarisce che non può esserci connessione causale tra i due eventi.

Esercizio 140. Dati due eventi E_1 e E_2 in O con $x_2 > x_1$ separati da una distanza di tipo spazio, mostrare che non esistono sistemi di riferimento O' in cui $x'_2 < x'_1$.

Esercizio 141 (Trasformazioni e metriche invarianti). Abbiamo già mostrato che le trasformazioni di Galileo a tempi sincroni conservano le distanze euclidee (Esercizio 6):

$$d_E^2(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = d_E^2(GP_1, GP_2),$$

$$GP_1 = \begin{cases} x'_1 = x_1 - vt \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases}, \quad GP_2 = \begin{cases} x'_2 = x_2 - vt \\ y'_2 = y_2 \\ z'_2 = z_2 \end{cases}.$$

Mostrare che le trasformazioni di Lorentz conservano la pseudodistanza di Minkowski:

$$d_{\mathcal{M}}^{(2)}(E_1, E_2) = d_{\mathcal{M}}^{(2)}(LE_1, LE_2) \quad (10.32)$$

con:

$$LE_1 = \begin{cases} t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y'_1 = y_1 \\ z'_1 = z_1 \end{cases}, \quad LE_2 = \begin{cases} t'_2 = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y'_2 = y_2 \\ z'_2 = z_2 \end{cases}. \quad (10.33)$$

Si noti che i tempi dei due eventi possono essere distinti.

Osservazione 10.5. Se si conserva la distanza (10.25), cosa succede alle distanze ordinarie, euclidee (intervalli spaziali)? Cosa succede alle distanze tra coordinate temporali (intervalli temporali)? Queste cambiano a seconda dell'osservatore per i cosiddetti effetti relativistici.

10.4 Effetti relativistici

Esercizio 142 (Contrazione delle lunghezze). Una sbarra si trova in quiete rispetto al sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ in Figura 10.2. La sua *lunghezza propria*, cioè quella misurata nel sistema in quiete con essa, vale $L_0 = x_2 - x_1 = \Delta x$.

Dato che la sbarra si muove rispetto ad $(O'; x', y', z')$, un osservatore su di esso deve effettuare una misura della posizione degli estremi della sbarra *in modo sincrono* $t'_1 = t'_2 = t'$. Quale è la lunghezza della sbarra misurata da O' ?

Soluzione: Chiamiamo $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ la lunghezza della sbarra vista da O' . Usando le trasformazioni inverse (10.24) vediamo che:

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.34)$$

$$L_0 = \Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (10.35)$$

Infine definendo $\Delta x' = L$ abbiamo

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (10.36)$$

dove chiaramente $L < L_0$. Questa disuguaglianza è nota come *effetto di contrazione delle lunghezze*.

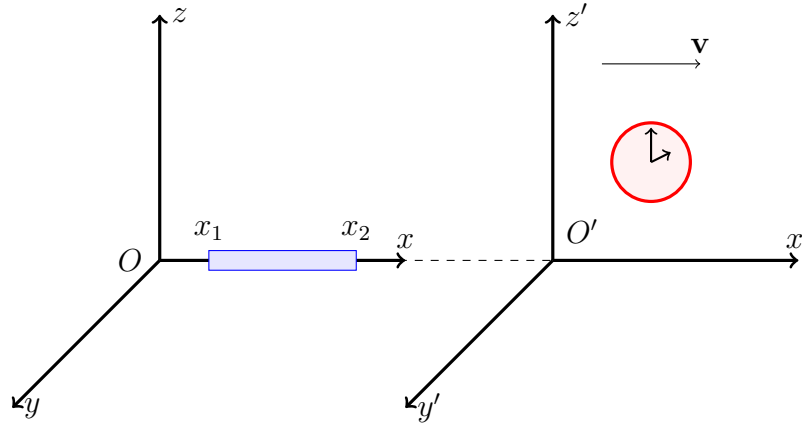


Figura 10.2: Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi. Esercizi 142-143.

Esercizio 143 (Dilatazione dei tempi). Siano due SdR come in Figura 10.2. Questa volta però abbiamo un orologio *fisso* ($x'_2 = x'_1 = x'$) nel SdR ($O'; x', y', z'$), che misura un intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = T_0$ detto *tempo proprio*, poiché misurato nel sistema in quiete con l'orologio. Che intervallo di tempo misura invece un osservatore nel SdR di O ?

Soluzione: Prendiamo sempre le (10.24):

$$t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.37)$$

$$T := t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.38)$$

quindi

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (10.39)$$

da cui $T > T_0$. Questa disuguaglianza è nota come *effetto di dilatazione dei tempi*.

Osservazione 10.6. Risulta quindi che:

- La lunghezza propria, misurata in quiete con l'oggetto da misurare, è la più grande possibile;
- Il tempo proprio, misurato in quiete con il fenomeno studiato, è il più breve possibile.

Esercizio 144. Con riferimento alla Figura 10.2 mostrare la contrazione delle lunghezze fissando il regolo in O' e la dilatazione dei tempi fissando l'orologio in O .

Esercizio 145 (Viaggio della navicella). Una navicella spaziale viaggia dalla Terra a un altro pianeta di un altro sistema solare con velocità $v = c/2$. La distanza da percorrere è pari ad $1a$ luce ($1a \text{ luce} = c \cdot 1a$, è una distanza).

- Quanto tempo impiega la navicella a raggiungere il pianeta per un osservatore sulla Terra?
- E per i viaggiatori sulla navicella?

Soluzione: Al primo quesito si risponde subito con:

$$\Delta T_{Terra} = \frac{1a \text{ luce}}{c/2} = \frac{1a \cdot c}{c/2} = 2a.$$

Ma questo tempo è dilatato perché gli osservatori sulla Terra non sono solidali con l'orologio sulla navicella, che invece misurerà un *tempo proprio*

$$\Delta T_{navicella} = \Delta T_{Terra} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{3} a \simeq 1.73 a. \quad (10.40)$$

Osservazione 10.7. La dilatazione dei tempi è coerente con la contrazione delle lunghezze. Infatti, gli osservatori sulla navicella vedono il segmento Terra-pianeta muoversi con velocità di modulo $c/2$ la cui lunghezza contratta risulta:

$$L = 1a \cdot c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Dunque il tempo che secondo loro è necessario per compiere il viaggio sarà:

$$\Delta T_{navicella} = \frac{L}{c/2} = \frac{1a \cdot c}{c/2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 2a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{3} a. \quad (10.41)$$

Osservazione 10.8 (Relatività della simultaneità). Un osservatore O si trova al centro di un vagone fermo su un binario. Su un binario parallelo viaggia un secondo vagone, identico al primo, con velocità v e con un osservatore O' al suo centro.

Nei punti 1 e 2 della Figura 10.3 si accendono due lampadine. L'osservatore in O riceve i segnali allo stesso tempo e deduce che per gli istanti delle due accensioni vale $t_1 = t_2 = 0$ dato che la sua distanza dalle lampadine è la stessa, cioè che l'accensione delle due lampadine è simultanea. L'osservatore in O vede che il secondo osservatore, che era di fronte al lui a $t = 0$, riceve invece prima il segnale dalla lampadina 2 e poi dalla lampadina 1 perché nel frattempo O' si è spostato. Siccome la fisica è la stessa nei due sistemi di riferimento anche O' misurerà che il segnale 2 lo ha raggiunto prima del segnale 1 e concluderà che le due lampadine si sono accese a tempi diversi dato che si trova al centro del suo vagone ed anche lui misura una velocità della luce c . Dedurrà pertanto che i due eventi temporali accaduti in luoghi equidistanti non sono simultanei. Il concetto di simultaneità è relativo.

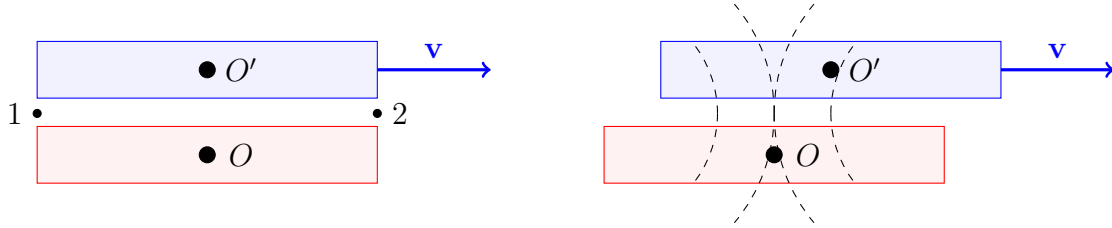


Figura 10.3: Relatività della simultaneità.

Esercizio 146. Valutare tramite le trasformazioni di Lorentz l'intervallo temporale tra l'accensione delle due lampadine misurato da O' nel precedente esempio, conoscendo la lunghezza propria del vagone L_0 .

Soluzione: Dalle trasformazioni di Lorentz abbiamo:

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.42)$$

da cui, sostituendo $t_2 - t_1 = 0$ e $x_2 - x_1 = L_0$ si ha

$$t'_2 - t'_1 = \frac{-\frac{v}{c^2}L_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Quindi l'accensione della lampadina 2 è avvenuta prima di quella della lampadina 1.

Esercizio 147 (Contrazione del quadro). Un quadro rettangolare di dimensioni proprie H_0 ed L_0 si trova in quiete in un SdR $(O; x, y, z)$. Il lato lungo L_0 giace sull'asse x . Quale area ha il quadro se misurata da un SdR $(O'; x', y', z')$ in moto di velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto al precedente?

Soluzione: La lunghezza L_0 è l'unica affetta da effetti relativistici perché parallela al moto.

$$H = H_0, \quad L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad S = HL = H_0 L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esercizio 148 (Contrazione del quadro inclinato). Si risolva l'esercizio precedente senza l'ipotesi che uno dei due lati del rettangolo giaccia sulla direzione del moto.

Soluzione: La soluzione non cambia:

$$S = S_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Possiamo infatti immaginare di scomporre il rettangolo in tanti piccoli rettangoli con un lato parallelo alla direzione del moto, e poi di risommare (con un integrale) le loro aree, contratte tutte quante del fattore $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Esercizio 149. In base all'osservazione precedente lo studente deduca che qualsiasi figura piana di superficie propria S_0 e forma arbitraria obbedisce alla stessa legge di contrazione.

Esercizio 150. Un pianeta di un altro sistema solare dista dalla Terra $d_0 = 100$ a luce. È possibile raggiungerlo per un essere umano?

Soluzione: Dobbiamo calcolare qual è il tempo proprio $\Delta T_{navicella}$ del viaggio per l'astronauta. Per esempio con una velocità $v = 0.99c$ si ottiene dalla (10.40)

$$\Delta T_{navicella} = \Delta T_{Terra} \sqrt{1 - (0.99)^2} = \frac{d_0}{v} \sqrt{1 - (0.99)^2} = \frac{100a \cdot c}{0.99c} \sqrt{1 - (0.99)^2} \simeq 14.25 a$$

Perciò, se si raggiungono velocità molto elevate, è possibile.

Osservazione 10.9. Allo stesso quesito si può rispondere misurando la distanza tra il pianeta e la Terra rispetto al viaggiatore sulla navicella. Egli vede infatti la distanza di $d = 100ac\sqrt{1 - (0.99)^2}$. Dunque per lui il tempo impiegato sarà:

$$\Delta T_{navicella} = \frac{d}{v} = \frac{100a \cdot c \sqrt{1 - (0.99)^2}}{0.99c} \simeq 14.25 a$$

Esercizio 151 (Composizione delle velocità). Trovare la legge relativistica di composizione delle velocità a partire dalle trasformazioni di Lorentz.

Soluzione: Calcoliamo la legge di trasformazione delle velocità ottenendole come limiti di rapporti incrementali. In particolare la velocità u di un punto materiale nel SdR O sarà $u = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ e quella vista nel SdR O' è $u' = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$. Scriviamo ora le trasformazioni di Lorentz degli incrementi tra due eventi

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}. \quad (10.43)$$

Dividiamo numeratore e denominatore del membro di destra dell'ultima equazione per Δt e otteniamo:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}} \quad (10.44)$$

dalla quale calcolando il limite $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta t' \rightarrow 0$ si ottiene

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (10.45)$$

e risolvendola rispetto a u si ottiene l'inversa

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}. \quad (10.46)$$

Osservazione 10.10. Dalla (10.46) si vede facilmente che se $u' \rightarrow c$ allora si ottiene $u = c$.

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c. \quad (10.47)$$

Esercizio 152 (Limite non relativistico). Si ponga $\epsilon = v^2/c^2$. Dimostrare che a meno di ordini $\mathcal{O}(\epsilon)$ le trasformazioni di Lorentz (10.23) si riducono alle trasformazioni di Galileo (1.8). Mostrare poi che la legge di composizione delle velocità (10.45) si riduce a quella galileiana:

$$u' = u - v \quad (10.48)$$

Soluzione: Si utilizzino gli sviluppi di Taylor

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon}} &= 1 + \frac{\epsilon}{2} + o(\epsilon) \\ \frac{1}{1 \mp \epsilon} &= 1 \pm \epsilon + o(\epsilon). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = (x - vt) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + o(\epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} x - vt \\
t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \left(t - \frac{\epsilon}{v}x\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + o(\epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} t \\
u' &= \frac{u - v}{1 - \frac{\epsilon u}{v}} = (u - v) \left(1 + \frac{\epsilon u}{v} + o(\epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} u - v.
\end{aligned}$$

Esercizio 153. Due stazioni spaziali S_1 e S_2 sono ferme nel sistema di riferimento inerziale $(O; x, y, z, t)$ nelle posizioni $(0, 0, 0)$ e $(1a, 0, 0)$. All'istante $t = 0$ l'astronauta A_1 parte da S_1 e si muove a velocità costante $(c/2, 0, 0)$ mentre l'astronauta A_2 parte da S_2 e si muove a velocità costante $(-c/3, 0, 0)$. Calcolare l'evento di incontro dei due astronauti nel sistema O . Calcolare lo spazio percorso e il tempo di volo osservati da ciascun astronauta.

Soluzione: Il primo quesito del problema è puramente classico perché riguarda un solo sistema di riferimento inerziale (si veda l'Esercizio 0). Il tempo d'incontro misurato in $(O; x, y, z)$ sarà

$$\bar{t} = \frac{1a \cdot c}{\frac{c}{2} + \frac{c}{3}} = \frac{6}{5}a, \quad (10.49)$$

e l'incontro avverrà nel punto $y = 0, z = 0$ e

$$\bar{x} = \frac{c}{2}\bar{t} = -\frac{c}{3}\bar{t} + 1a \cdot c = \frac{3}{5}a \cdot c. \quad (10.50)$$

Ciò vuol dire che in $(O; x, y, z)$ i due astronauti A_1 e A_2 percorrono distanze rispettivamente $d_1 = 3/5a \cdot c$ e $d_2 = 2/5a \cdot c$. Queste saranno tuttavia misurate con regoli in quiete in O , e non nei SdR dei due astronauti. In ciascuno di essi le distanze saranno contratte secondo i relativi fattori di Lorentz:

$$d'_1 = \frac{3}{5}a \cdot c \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{10}a \cdot c, \quad d''_2 = \frac{2}{5}a \cdot c \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{15}a \cdot c. \quad (10.51)$$

Analogamente il tempo misurato da O risulterà dilatato rispetto ai tempi di volo propri misurati da entrambi gli astronauti. Dunque

$$\bar{t}'_1 = \frac{6}{5} \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{5}a, \quad \bar{t}''_2 = \frac{6}{5} \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{4\sqrt{2}}{5}a. \quad (10.52)$$

10.5 Appendice: deduzione diretta degli effetti relativistici

Gli effetti relativistici si possono dedurre col solo utilizzo dei postulati senza l'impiego delle trasformazioni di Lorentz.

Dilatazione dei tempi Consideriamo un osservatore O' in moto rispetto a un altro osservatore O con velocità uniforme \mathbf{v} . O' è dotato di un *orologio luce*. Un orologio luce è costituito da due specchi paralleli uno sopra l'altro, a distanza fissata h . Esso conta quante volte un raggio luminoso che parte dallo specchio inferiore compie un viaggio di andata e ritorno al medesimo specchio.

Facendo riferimento a Figura 10.4 capiamo che il tempo impiegato dal raggio a compiere un'andata e un ritorno nel SdR di O' vale:

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

O però vede che il medesimo raggio luminoso deve percorrere una traiettoria obliqua per inseguire lo specchio bersaglio. Vale la seguente relazione geometrica:

$$c^2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 = h^2 + v^2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2$$

ottenuta applicando il teorema di Pitagora. Dalla precedente segue:

$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (10.53)$$

Contrazione delle lunghezze Siano O ed O' come nel caso precedente. O' porta con sé una coppia di specchi a distanza propria L_0 adagiati in direzione del moto. A un certo istante fa partire un raggio luminoso da uno specchio e aspetta che questo torni indietro, misurando:

$$\Delta t' = \frac{2L_0}{c} \quad \Leftrightarrow \quad L_0 = \frac{c\Delta t'}{2}$$

O però vede che il raggio dapprima deve inseguire il secondo specchio (Figura 10.5), in seguito va incontro al primo specchio. Dunque, in base alle notazioni

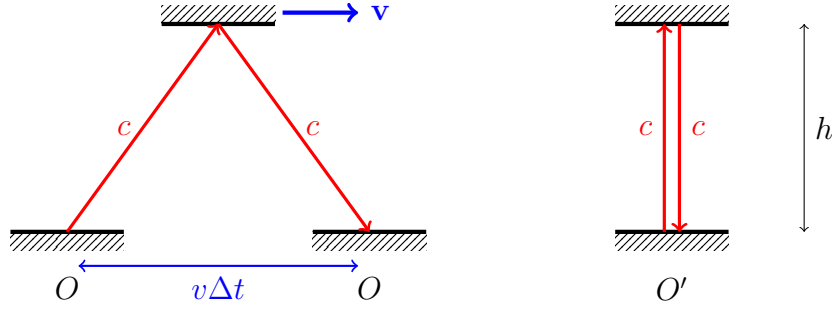


Figura 10.4: Orologio luce visto nei due SdR. A sinistra il punto di vista di O , a destra quello di O' .

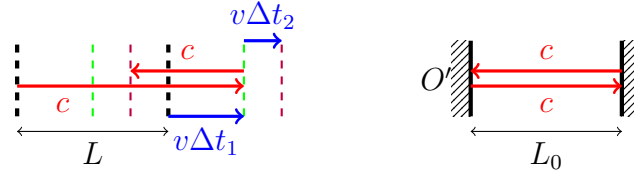


Figura 10.5: Apparato dei due specchi visto nei due SdR. A sinistra il punto di vista di O , a destra quello di O' .

della figura impiegherà un tempo:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

Sempre per questioni di natura geometrica, dalla figura si osserva che:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= \frac{L}{c} + \frac{v}{c} \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L/c}{1 - \frac{v}{c}} \\ \Delta t_2 &= \frac{L}{c} - \frac{v}{c} \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L/c}{1 + \frac{v}{c}} \end{aligned}$$

Dunque:

$$\Delta t = 2 \frac{L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10.54)$$

Risolvendo la precedente in L e utilizzando la dilatazione dei tempi già dimostrata si ha:

$$L = \frac{c \Delta t}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{c \Delta t'}{2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (10.55)$$

Capitolo 11

La passeggiata aleatoria

Questo capitolo contiene una introduzione elementare alla teoria del moto diffusivo il cui capostipite, il moto browniano, è definito dalla legge

$$d^2(t) = 2Dt . \quad (11.1)$$

Nella formula precedente la quantità $d^2(t)$ è la distanza *quadratica media* percorsa nel tempo t . Questa importante teoria fisico-matematica prende il nome da una osservazione del biologo Robert Brown che notò (1827) come certi granelli di polline in sospensione nell'acqua seguono delle traiettorie irregolari. Nel 1905 Albert Einstein trattò il problema dal punto di vista teorico introducendo una prospettiva meccanico-statistica per derivare la (11.1). La teoria di Einstein è basata sull'ipotesi che il moto del polline sia causato dagli urti casuali delle molecole di acqua e ottiene il valore di D in funzione di parametri microscopici e macroscopici. Nel 1908 il fisico Perrin verificò sperimentalmente alcune conseguenze della teoria di Einstein (lavoro che gli valse il Nobel nel 1926) confermando così la teoria cinetico molecolare della materia. Il modello che consideriamo in questa sede è molto semplificato rispetto a quello di Einstein che è sul continuo, ma conserva sorprendentemente la capacità di riprodurre la legge (11.1). Lo studente potrà fare il confronto tra il caso discreto e quello continuo nei corsi superiori dove sarà anche affrontato il problema del limite del primo al secondo che rappresenta un prototipo di molte altre teorie fisico-matematiche con basi probabilistiche.

Per rendere queste note autoconsistenti faremo una brevissima introduzione agli spazi di probabilità discreta, dagli assiomi di Kolmogorov alle proprietà delle variabili aleatorie con particolare attenzione al concetto di *indipendenza*.

11.1 Probabilità discreta

Uno *spazio di probabilità* discreto e finito è definito come segue. Siano:

- $I = \{1, 2, \dots, N\}$ un insieme di elementi, chiamati *eventi elementari*, detto *spazio campione*. L'insieme delle parti di I , \mathcal{P}_I con $|\mathcal{P}_I| = 2^N$, si dice anche spazio degli *eventi generici* che indicheremo con le lettere A, B etc. La proprietà di \mathcal{P}_I di essere chiuso rispetto alle operazioni di unione e passaggio al complementare in I condurrà, nel caso degli spazi di probabilità infiniti (discreti o continui) alla nozione di σ -algebra;
- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un insieme di numeri reali ciascuno dei quali rappresenta la probabilità dell'evento elementare corrispondente e tali che:

i)

$$p_i \in [0, 1] \quad (11.2)$$

ii)

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \quad (11.3)$$

- iii) La probabilità degli eventi elementari viene utilizzata per definire quella di eventi generici attraverso la

$$P(C) = \sum_{i \in C} p_i, \quad C \subseteq I. \quad (11.4)$$

Da questa segue che dati $A, B \subseteq I$ con $A \cap B = \emptyset$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (11.5)$$

Osservazione 11.1. Dalla costruzione precedente si può mostrare che la collezione di numeri $P(C)$ con $C \subseteq I$ definita nella (11.4) verifica

$$\text{K1)} \quad P(C) \geq 0;$$

$$\text{K2)} \quad P(I) = 1;$$

$$\text{K3)} \quad \text{dati } A, B \subseteq I \text{ con } A \cap B = \emptyset:$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (11.6)$$

Le K1 e K2, insieme alla K3 estesa a unioni numerabili di eventi generici che formano una σ -algebra sono le proprietà scelte da Kolmogorov come assiomi per gli spazi di probabilità.

Esercizio 154. Mostrare che K1, K2 e K3 implicano le proprietà i), ii) e iii).

Osservazione 11.2. La probabilità del \emptyset è nulla. Infatti per l'assioma K3, essendo il vuoto disgiunto da ogni altro insieme, in particolare anche da I si ha

$$1 = P(I) = P(I \cup \emptyset) = P(I) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset) = 0 \quad (11.7)$$

Osservazione 11.3. Consideriamo due insiemi $A, B \subseteq I$ con $B \subseteq A$. Allora:

$$P(A) = P(\underbrace{(A \setminus B) \cup B}_{\text{disgiunti}}) = P(A \setminus B) + P(B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(B). \quad (11.8)$$

Se gli insiemi A e B in I invece non sono disgiunti allora:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(\underbrace{(A \setminus (A \cap B)) \cup B}_{\text{disgiunti}}) = P(A \setminus (A \cap B)) + P(B) = \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Il più semplice spazio di probabilità è quello del lancio della moneta in cui preso $p \in [0, 1]$

$$I = \{T, C\}, \quad P = \{p, 1 - p\}. \quad (11.10)$$

Nel caso in cui $p = 1/2$ è la moneta si dice regolare o non truccata.

Esercizio 155 (Dado a 6 facce). Costruire lo spazio di probabilità di un dado regolare a 6 facce.

Soluzione: Gli eventi elementari sono le possibili uscite del dado:

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Le probabilità da assegnare p_i sono tutte uguali tra loro (ipotesi di regolarità). Per K2:

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 6p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

Dunque:

$$P = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right\}$$

Esercizio 156 (Dado truccato a 6 facce). Ripetere lo stesso esercizio con un dado a 6 facce truccato come segue:

$$P(\{1\} \cup \{6\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}) = \frac{1}{2}$$

con ipotesi di regolarità a gruppi, cioè $p_1 = p_6 = p$ e $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = q$.

Soluzione: $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Per gli assiomi K2 e K3:

$$P(\{1\} \cup \{6\}) = 2p = \frac{1}{2}, \quad P(\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\}) = 4q = \frac{1}{2}$$

Dunque:

$$P = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right\}$$

Introduciamo ora due concetti fondamentali in teoria della probabilità: la probabilità condizionata e l'indipendenza di eventi.

Definizione 11.1 (Probabilità condizionata). Dati due eventi A, B , con $P(B) \neq 0$, si definisce probabilità condizionata di A dato B come:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \quad (11.11)$$

Definizione 11.2 (Eventi indipendenti). Due eventi A, B di probabilità non nulla si dicono indipendenti quando le tre quantità $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ verificano la relazione

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (11.12)$$

Osservazione 11.4. L'ipotesi d'indipendenza implica che due eventi non possono essere disgiunti. Infatti, in tal caso si avrebbe

$$0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B). \quad (11.13)$$

Esercizio 157. Si consideri lo spazio campione del lancio di due monete:

$$I = \{TT, TC, CT, CC\}$$

dotato della misura di probabilità uniforme. Si dimostri che l'evento $A = \text{testa al primo lancio} = TT \cup TC$, e l'evento $B = \text{croce al secondo lancio} = TC \cup CC$ sono indipendenti.

11.2 Variabili aleatorie, media e varianza

Uno degli approcci più utili nella fisica matematica per lo studio degli spazi di probabilità è quello che coinvolge le variabili aleatorie. Questo perché esse rappresentano quantità osservabili, mentre gli spazi di probabilità rappresentano gli stati di un sistema.

Una *variabile aleatoria*, o *osservabile*, è una funzione che associa un numero reale a ciascun evento elementare. Essendo lo spazio discreto sarà definita dalla collezione dei suoi valori:

$$f = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}. \quad (11.14)$$

Le variabili aleatorie possono essere combinate in modo lineare e moltiplicate punto per punto:

$$\alpha f + \beta g = \{\alpha f_1 + \beta g_1, \alpha f_2 + \beta g_2, \dots, \alpha f_N + \beta g_N\} \quad (11.15)$$

$$fg = \{f_1 g_1, f_2 g_2, \dots, f_N g_N\}. \quad (11.16)$$

L'insieme delle variabili aleatorie viene talvolta chiamato algebra delle osservabili e indicato con \mathcal{A} .

Nello spazio del lancio della moneta (11.10) si introduce la variabile aleatoria di *spin*:

$$\sigma = \{\sigma_T, \sigma_C\} = \{+1, -1\}. \quad (11.17)$$

Poiché $\sigma^2 = 1$, σ appartiene a \mathbb{Z}_2 .

Introduciamo il *funzionale valor medio* o *aspettazione* l'applicazione $\mathbb{E} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\mathbb{E}[f] := \sum_{i=1}^N p_i f_i. \quad (11.18)$$

Il funzionale \mathbb{E} gode delle seguenti proprietà:

1. linearità: date due variabili aleatorie f e g :

$$\mathbb{E}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathbb{E}[f] + \beta \mathbb{E}[g]; \quad (11.19)$$

2. positività: se la variabile aleatoria f è positiva $f_i \geq 0, \forall i \in I$ allora $\mathbb{E}[f] \geq 0$;

3. normalizzazione: definendo $\mathbb{1} := \{1, 1, \dots, 1\}$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}] = 1. \quad (11.20)$$

Esercizio 158. Dimostrare le tre proprietà del valor medio.

Esercizio 159. Dimostrare che:

$$\mathbb{E}[c] = c$$

con c variabile aleatoria costante $c = \{c, c, \dots, c\}$. Si noti che c'è un piccolo abuso di notazione: la variabile aleatoria costante dovrebbe essere indicata con $c\mathbb{1}$.

Esercizio 160. La funzione caratteristica χ_C dell'evento $C \neq \emptyset$ è la variabile aleatoria definita da

$$\chi_{C,i} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} . \quad (11.21)$$

Mostrare che per due eventi $A, B \neq \emptyset$ la condizione

$$\mathbb{E}[\chi_A \chi_B] = \mathbb{E}[\chi_A] \mathbb{E}[\chi_B] \quad (11.22)$$

equivale all'indipendenza di A e B . Suggerimenti: $\chi_C^{-1}(1) = C$, $\mathbb{E}[\chi_C] = P(C)$.

Introduciamo la *varianza* di una variabile aleatoria come

$$\mathbb{V}[f] = \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}[f])^2] . \quad (11.23)$$

La quantità $\sqrt{\mathbb{V}[f]}$ è chiamata *deviazione standard* e viene usata per stimare le fluttuazioni della variabile aleatoria f .

Esercizio 161. Dimostrare che:

$$\mathbb{E}[f^2] \geq (\mathbb{E}[f])^2 \quad (11.24)$$

per ogni f variabile aleatoria.

Esercizio 162. Dimostrare che

$$\mathbb{V}[f] = \mathbb{E}[f^2] - \mathbb{E}^2[f] . \quad (11.25)$$

Chiaramente, dalla precedente segue la (11.24).

Esercizio 163. Dimostrare che, dati due numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ e una variabile aleatoria f si ha:

$$\mathbb{V}[af + b] = a^2 \mathbb{V}[f] . \quad (11.26)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[af + b] &= \mathbb{E}[(af + b - \mathbb{E}[af + b])^2] = \mathbb{E}[(af + b - a\mathbb{E}[f] - b)^2] = \\ &= \mathbb{E}[a^2(f - \mathbb{E}[f])^2] = a^2 \mathbb{V}[f] . \end{aligned}$$

11.3 Probabilità congiunta e indipendenza

Introduciamo lo spettro di una variabile aleatoria:

$$\mathcal{S}_f := \{r \in \mathbb{R} \mid r = f_i, i \in I\} = \text{Im}(f) \quad (11.27)$$

cioè l'insieme dei valori che f può assumere sullo spazio degli eventi elementari I . La probabilità che la variabile aleatoria f assuma un valore r tra i vari possibili è:

$$p_f(r) := P(f = r) = P(f^{-1}(r)) = \sum_{i \in I: f_i=r} p_i. \quad (11.28)$$

La sommatoria è dovuta al fatto che la variabile aleatoria può assumere lo stesso valore su più eventi elementari, cioè può non essere iniettiva come funzione sullo spazio I . Nel caso particolare di v.a. *invertibili* invece, la sommatoria contiene un unico termine:

$$P(f = f_i) = p_i. \quad (11.29)$$

La collezione di numeri $\{p_f(r)\}_{r \in \mathcal{S}_f}$ è chiamata *distribuzione di probabilità della variabile aleatoria f* , infatti vale:

Esercizio 164. Mostrare che la coppia \mathcal{S}_f e $\{p_f(r)\}_{r \in \mathcal{S}_f}$ è uno spazio di probabilità discreto.

Osservazione 11.5. Il valor medio della v.a. f si può riscrivere come segue:

$$\mathbb{E}[f] = \sum_{r \in \mathcal{S}_f} r p_f(r). \quad (11.30)$$

Infatti

$$\mathbb{E}[f] = \sum_{i \in I} p_i f_i = \sum_{r \in \mathcal{S}_f} \sum_{i \in I: f_i=r} f_i p_i = \sum_{r \in \mathcal{S}_f} r \sum_{i \in I: f_i=r} p_i = \sum_{r \in \mathcal{S}_f} r p_f(r). \quad (11.31)$$

Per illustrare le definizioni precedenti si prenda la variabile aleatoria $f = \{e, e, e, \pi, \pi\}$ definita su uno spazio di cinque eventi elementari e $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Si vede immediatamente che $p_f(e) = p_1 + p_2 + p_3$, mentre $p_f(\pi) = p_4 + p_5$ e che $\mathbb{E}[f] = e p_f(e) + \pi p_f(\pi)$.

Consideriamo due variabili aleatorie f e g su I . Dati $r \in \mathcal{S}_f$ e $s \in \mathcal{S}_g$ la *distribuzione di probabilità congiunta* di f e g è la collezione di valori:

$$p_{f,g}(r, s) := P(f = r, g = s) = P(f^{-1}(r) \cap g^{-1}(s)) = \sum_{i \in I: f_i=r, g_i=s} p_i. \quad (11.32)$$

Analogamente alla (11.30) si ha che

$$\mathbb{E}[fg] = \sum_{i \in I} f_i g_i p_i = \sum_{r \in \mathcal{S}_f, s \in \mathcal{S}_g} p_{f,g}(r, s) r s. \quad (11.33)$$

Esercizio 165. Mostra che la coppia $\mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g$ e $\{p_{f,g}(r, s)\}_{(r,s) \in \mathcal{S}_f \times \mathcal{S}_g}$ è uno spazio di probabilità discreto.

Chiaramente la distribuzione di probabilità congiunta è legata alle distribuzioni di probabilità delle singole variabili aleatorie attraverso le

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_g} p_{f,g}(r, s) = p_f(r) \quad (11.34)$$

$$\sum_{r \in \mathcal{S}_f} p_{f,g}(r, s) = p_g(s). \quad (11.35)$$

Si dice anche che p_f e p_g sono le marginali della distribuzione $p_{f,g}$.

Definizione 11.3 (Variabili aleatorie indipendenti). Due variabili aleatorie f e g sono indipendenti se vale la fattorizzazione della distribuzione congiunta nelle distribuzioni marginali:

$$p_{f,g}(r, s) = p_f(r)p_g(s), \quad \forall r \in \mathcal{S}_f, s \in \mathcal{S}_g. \quad (11.36)$$

Osservazione 11.6. Dalla definizione precedente segue immediatamente che l'indipendenza di due variabili aleatorie f e g equivale all'indipendenza di tutte le coppie di eventi $f^{-1}(r)$, $g^{-1}(s)$ per ogni $r \in \mathcal{S}_f$, $s \in \mathcal{S}_g$.

Esercizio 166. Siano $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ due variabili aleatorie descritte dalla distribuzione congiunta:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
p_{σ_1, σ_2}	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$

Dire se le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Soluzione: Le due variabili aleatorie *non sono indipendenti*. Infatti basta calcolare le seguenti marginali:

$$\begin{aligned} p_{\sigma_1}(+) &= p_{\sigma_1, \sigma_2}(+, +) + p_{\sigma_1, \sigma_2}(+, -) = \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = \frac{9+1}{30} = \frac{1}{3} \\ p_{\sigma_2}(+) &= p_{\sigma_1, \sigma_2}(+, +) + p_{\sigma_1, \sigma_2}(-, +) = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{9+4}{30} = \frac{13}{30}. \end{aligned}$$

Quindi

$$p_{\sigma_1, \sigma_2}(+, +) = \frac{3}{10} \neq \frac{13}{90} = p_{\sigma_1}(+)p_{\sigma_2}(+).$$

Esercizio 167 (Lancio di due monete). Siano σ_1, σ_2 due variabili aleatorie descritte dalla distribuzione congiunta

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
p_{σ_1, σ_2}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Dire se le due variabili sono indipendenti.

Esercizio 168 (Dado e moneta). Si consideri uno spazio di probabilità che descrive il lancio di un dado e una moneta:

$$I = \{T, C\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{(T, 1), (T, 2), \dots, (C, 6)\}, \quad |I| = 12$$

$$P = \{p_{T1}, p_{T2}, \dots, p_{C6}\}.$$

Mostrare che se P è uniforme, cioè ogni evento ha probabilità $1/12$, le variabili D e σ definite dalle seguenti

$$\begin{aligned} \sigma : \{T, C\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} &\longrightarrow \{-1, +1\}, \\ \sigma(T, i) &= 1, \quad \sigma(C, i) = -1 \quad \forall i = 1, \dots, 6 \\ D : \{T, C\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} &\longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ D(T, i) &= i, \quad D(C, i) = i, \quad \forall i = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

sono indipendenti.

Esercizio 169. Provare che se due variabili aleatorie f e g sono indipendenti il valor medio del loro prodotto fattorizza:

$$\mathbb{E}[fg] = \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g]. \quad (11.37)$$

Soluzione:

$$\mathbb{E}[fg] = \sum_{r \in S_f} \sum_{s \in S_g} p_{f,g}(r, s)rs = \sum_{r \in S_f} rp_f(r) \sum_{s \in S_g} p_g(s)s = \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g].$$

Esercizio 170. Dimostrare che per due variabili aleatorie f e g vale:

$$\mathbb{V}[f + g] = \mathbb{V}[f] + \mathbb{V}[g] + 2\mathbb{E}[fg - \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g]].$$

Suggerimento: si utilizzi la (11.25).

Esercizio 171. Dimostrare che se f e g sono due v.a. indipendenti allora

$$\mathbb{V}[\alpha f + \beta g] = \alpha^2 \mathbb{V}[f] + \beta^2 \mathbb{V}[g] \quad (11.38)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

11.4 La passeggiata aleatoria

Lo spazio di probabilità della passeggiata aleatoria lunga n passi in una dimensione è costruito a partire dallo spazio del singolo passo che è l'usuale lancio della moneta dotato dell'osservabile spin $\sigma = \{+1, -1\}$ che in questo caso assume il significato di passo *in avanti* corrispondente al valore $+1$ e passo *indietro* a -1 . Possiamo parametrizzare la misura di probabilità di ciascun passo in funzione del valore assunto da σ come segue:

$$p(\sigma) = \frac{e^{h\sigma}}{2 \cosh h}, \quad h \in \mathbb{R} \quad (11.39)$$

$$p(+1) = \frac{e^h}{2 \cosh h} \quad (11.40)$$

$$p(-1) = \frac{e^{-h}}{2 \cosh h}. \quad (11.41)$$

Il parametro h misura la propensione di σ ad assumere il valore ± 1 . Infatti:

$$\lim_{h \rightarrow \pm\infty} p(+1) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad \lim_{h \rightarrow \pm\infty} p(-1) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Il calcolo del valor medio e della varianza di σ porgono:

$$\mathbb{E}[\sigma] = \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \frac{e^{h\sigma}}{2 \cosh h} = \tanh h \quad (11.42)$$

$$\mathbb{V}[\sigma] = \mathbb{E}[\sigma^2] - \mathbb{E}^2[\sigma] = 1 - \tanh^2 h. \quad (11.43)$$

Lo spazio campione della passeggiata aleatoria lunga n è l'insieme dei cammini di n passi cioè $\{+1, -1\}^n$. Per esempio il cammino $(+1, +1, -1, +1, -1)$ corrisponde a quello con il primo passo in avanti, il secondo in avanti, il terzo indietro, il quarto in avanti e l'ultimo indietro. La probabilità del generico cammino $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ è assegnata attraverso l'ipotesi d'indipendenza tra i passi:

$$p(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = p(\sigma_1)p(\sigma_2) \dots p(\sigma_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{h\sigma_i}}{2 \cosh h} \quad (11.44)$$

dove abbiamo usato la forma (11.39) per le marginali.

Con il linguaggio fin'ora introdotto è evidente che la posizione del passeggiatore all' n -esimo passo sarà:

$$X_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i. \quad (11.45)$$

Possiamo ora calcolare media e varianza di X_n . La media risulta

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\sigma_i] = n \tanh h \quad , \quad (11.46)$$

dove si è usata la proprietà di linearità del funzionale. Nell'ipotesi $h = 0$ risulterà $\mathbb{E}[X_n] = 0$. Se il numero dei passi n rappresenta il tempo trascorso si vede che la legge dello spazio medio percorso $\mathbb{E}[X_n]$ in funzione del tempo è quella del moto a velocità costante, il *drift*, pari a $\tanh h$.

La peculiarità del modello aleatorio prevede inoltre una stima delle fluttuazioni attraverso la deviazione standard $\sqrt{\mathbb{V}[X_n]}$. Il calcolo della varianza porge

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X_n] &= \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}^2[X_n] = \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n \sigma_i \sigma_j \right] - n^2 \tanh^2 h = (\text{linearità}) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}[\sigma_i \sigma_j] - n^2 \tanh^2 h = \sum_{i=j=1}^n \mathbb{E}[\sigma_i^2] + \sum_{i \neq j, 1}^n \mathbb{E}[\sigma_i \sigma_j] - n^2 \tanh^2 h = (\text{indipendenza}) \\ &= n + \sum_{i \neq j, 1}^n \mathbb{E}[\sigma_i] \mathbb{E}[\sigma_j] - n^2 \tanh^2 h = n + n(n-1) \tanh^2 h - n^2 \tanh^2 h = \\ &= n(1 - \tanh^2 h) \quad (11.47) \end{aligned}$$

Osservazione 11.7. La dipendenza lineare in n della varianza è frutto della cancellazione dei termini in n^2 ed è una conseguenza dalla proprietà d'indipendenza dei σ_i .

Esercizio 172. Dimostrare la (11.47) utilizzando il risultato dell'Esercizio 170.

Nel caso in cui il drift sia nullo per $h = 0$ la distanza quadratica media del passeggiatore dal suo punto di partenza è

$$d^2(n) = \mathbb{V}[X_n] = n \quad (11.48)$$

una caratteristica dei *moti diffusivi* che coincide con la (11.1) con costante di diffusione $D = 1/2$ per tempi e spazi discreti.

Esercizio 173 (Distribuzione binomiale). Definiamo le n variabili aleatorie

$$\alpha_i = \frac{1 + \sigma_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n \quad (11.49)$$

e

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (11.50)$$

Dimostrare che assegnato $k \in 0, 1, \dots, n$ si ha

$$p_n(k) = P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad (11.51)$$

$p_n(k)$ è chiamata distribuzione binomiale.

Esercizio 174. Dimostrare che la $p_n(k)$ soddisfa la (11.2) e la (11.3). Dimostrare inoltre che

$$\mathbb{E}[k] = np, \quad \mathbb{V}[k] = np(1-p). \quad (11.52)$$

Capitolo 12

Esercizi di ricapitolazione

1. Si considerino due pendoli appesi per lo stesso punto, di lunghezza $l = 1$ e di masse $m_1 = 2$ ed $m_2 = 1$. I pendoli oscillano in un piano verticale xOy soggetti all'accelerazione $\mathbf{g} = (0, -1)$. I due pendoli vengono sollevati rispettivamente di piccoli angoli $-\theta_0 < 0$ e $\theta_0 > 0$ rispetto alla verticale. Il primo viene rilasciato da fermo al tempo $t = 0$ e quando raggiunge la verticale anche il secondo pendolo viene rilasciato. Trovare l'istante \bar{t} e l'angolo $\bar{\theta}$ rispetto alla verticale in cui avviene l'urto. Considerando l'urto completamente anelastico, trovare la nuova ampiezza di oscillazione del sistema ed il suo periodo.

Suggerimento: Usare l'approssimazione per piccoli angoli $1 - \cos \theta \simeq \theta^2/2$.

Soluzione: Scriviamo le leggi orarie di entrambi i pendoli:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= -\theta_0 \cos(t), \quad t \in [0, \bar{t}] \\ \theta_2(t) &= \theta_0 \cos(t - T/4) = \theta_0 \cos(t - \pi/2), \quad t \in [T/4, \bar{t}].\end{aligned}$$

Al tempo \bar{t} i due angoli sono uguali:

$$\theta_1(\bar{t}) = \theta_0 \cos(\pi - \bar{t}) = \theta_2(\bar{t}) = \theta_0 \cos(\bar{t} - \pi/2)$$

la quale restituisce due soluzioni:

$$\pi - \bar{t} = \bar{t} - \pi/2 \quad \text{o} \quad \pi - \bar{t} = -\bar{t} + \pi/2.$$

La seconda è impossibile. La prima porge:

$$\bar{t} = \frac{3}{4}\pi \quad \Rightarrow \quad \bar{\theta} = \theta_1(\bar{t}) = \theta_2(\bar{t}) = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}.$$

Le velocità all'urto saranno:

$$|v_1| = |\dot{\theta}_1(\bar{t})| = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}$$

$$|v_2| = |\dot{\theta}_2(\bar{t})| = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}} = |v_1|$$

La conservazione della quantità di moto impone che la velocità V (in direzione tangenziale) soddisfi:

$$(m_1 + m_2)V = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}(m_1 - m_2) \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\theta_0}{3\sqrt{2}}$$

Il periodo del nuovo pendolo è lo stesso dei due precedenti. Conservazione energia:

$$E \simeq \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + (m_1 + m_2)gl\frac{\bar{\theta}^2}{2} = (m_1 + m_2)gl\frac{\theta_A^2}{2}$$

da cui

$$\frac{3}{2}\frac{\theta_0^2}{9 \cdot 2} + \frac{3}{4}\theta_0^2 = \frac{3}{2}\theta_A^2 \quad \Rightarrow \quad \theta_A = \theta_0\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 vi è una sfera piena centrata nell'origine di raggio 4. La sfera non è omogenea, infatti ha densità 2 ovunque tranne che per una regione sferica centrata in $\mathbf{c} = (1, 1, 0)$ di raggio unitario dove la densità è unitaria. Calcolare il campo gravitazionale all'interno di tale regione. Scrivere il risultato in notazione voriale cartesiana.

Soluzione: Indichiamo con $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ il campo incognito, $\mathbf{g}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}; \rho)$ il campo generato da una sfera omogenea di densità ρ centrata in \mathbf{r}_0 . Per sovrapposizione allora vale:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{g}_{\mathbf{c}}(\mathbf{r}; 1) = \mathbf{g}_0(\mathbf{r}; 2).$$

Il campo all'interno di una sfera omogenea è

$$-4\pi G\frac{4}{3}\pi r^3\rho = -4\pi r^2 g_0(\mathbf{r}; \rho) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}_0(\mathbf{r}; \rho) = -\frac{4}{3}\pi G\rho\mathbf{r}.$$

Per centrare il campo in un \mathbf{r}_0 qualsiasi è sufficiente traslare:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{4}{3}\pi G\rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Infine:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{r}; 2) - \mathbf{g}_c(\mathbf{r}; 1) = -\frac{4}{3}\pi G(\mathbf{r} + \mathbf{c}) = -\frac{4}{3}\pi G((x+1)\hat{\mathbf{i}} + (y+1)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}). \quad (12.1)$$

3. Sia $(O; x, y, z)$ un sistema di riferimento inerziale. Un osservatore in esso vede tre eventi di coordinate spazio-temporali (x, y, z, t) : $A = (0, 1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 0, 1/c)$, $C = (1, 0, 0, 2/c)$. Si può trovare un sistema di riferimento in cui il primo evento registrato sia B ? Se sì, scrivere i tre eventi in ordine cronologico in tale sistema.

Soluzione: Il sistema di riferimento richiesto esiste. Consideriamo un sistema O' che si muove con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto ad O . Le trasformazioni di Lorentz porgono:

$$\begin{aligned} t'_A &= \gamma \left(t_A - \frac{v}{c^2} x_A \right) = 0 \\ t'_B &= \gamma \left(\frac{1}{c} - \frac{2v}{c^2} \right) = \frac{\gamma}{c} \left(1 - \frac{2v}{c} \right) \\ t'_C &= \gamma \left(\frac{2}{c} - \frac{v}{c^2} \right) = \frac{\gamma}{c} \left(2 - \frac{v}{c} \right) > \frac{\gamma}{c} \left(2 - \frac{c}{c} \right) = \frac{\gamma}{c} > 0, \end{aligned}$$

da cui si vede immediatamente che A e C non possono cambiare ordine temporale (la loro distanza di Minkowski è infatti di tipo tempo). Tuttavia:

$$t'_B < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} < v < c$$

è possibile. In un tale sistema l'ordine cronologico degli eventi sarebbe: B , A , C .

4. Si considerino due variabili aleatorie dicotomiche $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ la cui distribuzione congiunta è data dalla seguente tabella:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
$p(\sigma_1, \sigma_2)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{25}$

Dire se le variabili sono indipendenti. Calcolare $\mathbb{V}[\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2]$.

Soluzione: Le due variabili sono indipendenti. Calcolando le marginali:

$$\begin{aligned} p_1(+) &= p(++) + p(+-) = \frac{4}{5}, \quad p_1(-) = \frac{1}{5} \\ p_2(+) &= p(++) + p(-+) = \frac{1}{5}, \quad p_2(-) = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

si ha infatti:

$$\begin{aligned} p_1(+)p_2(+) &= \frac{4}{25} = p(++) = p_1(-)p_2(-) = p(--), \\ p_1(+)p_2(-) &= \frac{16}{25} = p(+-), \quad p_1(-)p_2(+) = \frac{1}{25} = p(-+). \end{aligned}$$

La varianza si spezza dunque come segue:

$$\mathbb{V}[\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2] = \mathbb{V}[\sigma_1] + 2\mathbb{V}[\sigma_2].$$

Per calcolarla dobbiamo avere:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_1] &= 1 \cdot \frac{4}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{E}[\sigma_2] = 1 \cdot \frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5} \\ \mathbb{V}[\sigma_1] &= \mathbb{E}[\sigma_1^2] - \mathbb{E}^2[\sigma_1] = \frac{16}{25}, \quad \mathbb{V}[\sigma_2] = \mathbb{E}[\sigma_2^2] - \mathbb{E}^2[\sigma_2] = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

Infine:

$$\mathbb{V}[\sigma_1 - \sqrt{2}\sigma_2] = \frac{16}{25} + 2\frac{16}{25} = \frac{48}{25}.$$

5. Si considerino due pendoli appesi per lo stesso punto, entrambi di lunghezza $l = 1$ di masse m_1 ed m_2 . I pendoli oscillano in un piano verticale xOy soggetti all'accelerazione $\mathbf{g} = (0, -1)$. I due pendoli vengono sollevati rispettivamente di piccoli angoli $-\theta_1 < 0$ e $\theta_2 > 0$ rispetto alla verticale e rilasciati da fermi al tempo $t = 0$. Specificare motivando la risposta a quale istante ed in che posizione avviene l'urto tra le due masse dei pendoli. Calcolare il rapporto m_1/m_2 affinché le due masse si fermino dopo un urto completamente anelastico e l'energia persa in funzione di m_2 in tale eventualità.

Suggerimento: Usare l'approssimazione per piccoli angoli $1 - \cos \theta \simeq \theta^2/2$.

Soluzione: L'impatto avviene quando i pendoli sono entrambi in posizione verticale

$$\bar{t} = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Velocità con cui le masse arrivano all'urto con conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1v_1^2 &= m_1(1 - \cos\theta_1) \simeq \frac{m_1\theta_1^2}{2} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \theta_1\hat{\mathbf{i}}, \\ \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= m_2(1 - \cos\theta_2) \simeq \frac{m_2\theta_2^2}{2} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = -\theta_2\hat{\mathbf{i}}.\end{aligned}$$

Conservazione della quantità di moto:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

L'energia dissipata è l'energia potenziale totale iniziale:

$$\Delta E \simeq \frac{m_2\theta_2}{2}(\theta_1 + \theta_2).$$

6. Un disco di raggio 4 omogeneo di densità superficiale unitaria si trova centrato nell'origine di \mathbb{R}^2 . In esso viene scavato un foro circolare centrato in $\mathbf{c} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ di raggio unitario. Calcolare il campo gravitazionale all'interno del foro.

Soluzione: Prendiamo come curve gaussiane circonferenze di raggio r con ansatz $\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) = -g_0(r)\hat{\mathbf{r}}$. Il Teorema di Gauss porge:

$$-2\pi G\pi r^2 = -2\pi r g_0(r) \Rightarrow \mathbf{g}_0(\mathbf{r}) = -\pi G\mathbf{r}.$$

Traslazione del campo in \mathbf{r}_0 generico:

$$\mathbf{g}_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = -\pi G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Per sovrapposizione, all'interno dell'area del foro si ha

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{g}_{\mathbf{c}}(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_0(\mathbf{r}) - \mathbf{g}_{\mathbf{c}}(\mathbf{r}) = -\pi G\sqrt{2}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}).$$

7. Siano $(O; x, y, z)$ e $(O'; x', y, z)$ due sistemi di riferimento. Il secondo viaggia rispetto al primo con una velocità $\mathbf{v} = (c/2, 0, 0)$. Ad un certo punto una sorgente luminosa solidale con l'origine di O' invia un impulso luminoso che percorre una distanza propria $L' = 1m$ in direzione propria $\theta' = \pi/3$ sul piano $x'O'y$. Quanto tempo impiega l'impulso luminoso a percorrere la distanza L' nel sistema $(O'; x', y, z)$ e quanto nel sistema $(O; x, y, z)$? In quali coordinate di $(O'; x', y, z)$ e $(O; x, y, z)$ termina la sua corsa? Con che angolo un osservatore

solidale con O vede muoversi l'impulso luminoso?

Soluzione: In O' l'impulso arriva a fine corsa in un tempo:

$$t' = \frac{1}{c}.$$

Per calcolare il corrispondente tempo t necessitiamo anche della posizione di arrivo x' :

$$x' = L' \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} L'.$$

Quindi:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{4c} \right) = \frac{5}{2\sqrt{3}c}.$$

Le coordinate in cui l'impulso arriva nel sistema O' si trovano decomponendo la lunghezza L' :

$$(x', y') = L' \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{2} L', \frac{\sqrt{3}}{2} L' \right).$$

Utilizzando le trasformazioni di Lorentz:

$$(x, y) = (\gamma(x' + vt'), y') = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2} \frac{1}{c} \right), \frac{\sqrt{3}}{2} L' \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) L'.$$

Calcoliamo ora la tangente dell'angolo visto da O :

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4}.$$

8. Un passeggiatore aleatorio compie, ad ogni istante di tempo, un passo α che prende i valori $-1, 0, +1$ con probabilità rispettivamente di $1/6, 1/2, 1/3$. I passi a tempi diversi sono indipendenti. Considerando come posizione di partenza $X_0 = 0$ calcolare valore atteso e varianza della sua posizione e la costante di diffusione.

Soluzione: Chiamiamo $\alpha_i = -1, 0, 1$ la v.a. relativa al passo i -esimo e definiamo

$$X_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Si calcolino ora:

$$\mathbb{E}[\alpha_i] = -1\frac{1}{6} + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{E}[\alpha_i^2] = (-1)^2\frac{1}{6} + 0^2\frac{1}{2} + 1^2\frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

La posizione media segue per linearità dalla prima:

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\alpha_i] = \frac{n}{6}.$$

Sfruttando invece l'indipendenza dei passi abbiamo che la varianza della somma degli α_i è la somma delle loro singole varianze:

$$\mathbb{V}[X_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[\alpha_i] = \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[\alpha_i^2] - \mathbb{E}^2[\alpha_i]) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{36} \right) = \frac{17}{36}n,$$

da cui

$$d = \frac{17}{72}.$$

9. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^2 si trova un pendolo di lunghezza l e massa m soggetto ad una accelerazione gravitazionale $\mathbf{g} = (0, -g)$. La corda del pendolo è fissata ad un punto nell'asse y che rappresenta una parete rigida. Il pendolo viene sollevato di un piccolo angolo θ_0 rispetto alla verticale e poi lasciato oscillare all'istante $t = 0$. Ogni volta che la massa raggiunge il punto più basso essa urta la parete perdendo i $3/4$ della sua energia. Trovare l'istante \bar{t} in cui avviene il secondo urto con la parete e scrivere la legge del moto per $t \in [0, \bar{t}]$.

Soluzione: Per le proprietà di isocronismo del pendolo si ha

$$\bar{t} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} + \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{3}{2}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

La legge del pendolo prima dell'urto è:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\right].$$

L'urto restituisce solo $1/4$ dell'energia iniziale al pendolo:

$$\frac{1}{2}mv_{\text{dopo urto}}^2 = mgl(1 - \cos\theta') = \frac{1}{4}mgl(1 - \cos\theta_0) \simeq \frac{1}{4}mgl\frac{\theta_0^2}{2}$$

La nuova (piccola) ampiezza θ' è

$$\frac{mgl}{2}\theta'^2 = \frac{1}{4}\frac{mgl}{2}\theta_0^2 \Rightarrow \theta' = \frac{\theta_0}{2}.$$

Infine

$$\theta(t) = \frac{\theta_0}{2} \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\theta_0}{2} \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}, \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\right]$$

10. Due piani massivi omogenei di densità 1 e 2 sono posizionati rispettivamente ad $x = -2$ ed $x = +2$ nello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 . Inoltre nell'origine vi è una massa unitaria puntiforme. Calcolare il campo gravitazionale ed esprimerlo in notazione versoriale cartesiana.

Soluzione:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{j}}}{r^3} - 6\pi G\hat{\mathbf{i}}, \quad x > 2$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{j}}}{r^3} + 2\pi G\hat{\mathbf{i}}, \quad -2 < x < 2$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{j}}}{r^3} + 6\pi G\hat{\mathbf{i}}, \quad x < -2$$

11. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ vi è un orologio che segna un intervallo di tempo Δt tra una coppia di eventi. In un secondo sistema $(O'; x', y', z')$, che si muove con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto al primo, si trova invece un regolo di lunghezza propria L_0 giacente sull'asse x' di tale sistema. Quale intervallo di tempo misurerebbe un osservatore in $(O'; x', y', z')$ tra la medesima coppia di eventi? Quanto è lungo il regolo secondo un osservatore in $(O; x, y, z)$?

Soluzione: Il tempo misurato in quiete con l'orologio è quello proprio ed è il più corto. Dunque:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

La lunghezza propria è sempre la più grande misurabile. Quindi

$$\Delta x = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

12. Si consideri il seguente spazio probabilità per la coppia di variabili dicotomiche (σ_1, σ_2) :

+	+	+	-	-	+
1/6	2/6	1/6	2/6		

Calcolare la distribuzione di probabilità di σ_1 e quella di σ_2 . Dire se le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Soluzione: Indichiamo con p_1, p_2, p rispettivamente le distribuzioni di probabilità di σ_1, σ_2 e (σ_1, σ_2) . Vale

$$p_1(+) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad p_1(-) = \frac{1}{2}$$

$$p_2(+) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad , \quad p_2(-) = \frac{2}{3}$$

Da qui è facile verificare che per ogni scelta dei segni $\sigma', \sigma'' \in \{+, -\}$ vale

$$p(\sigma', \sigma'') = p_1(\sigma') p_2(\sigma'')$$

cioè le due variabili aleatorie sono indipendenti.

13. Un pendolo di massa M e lunghezza l è fermo in un campo gravitazionale di accelerazione g . Esso viene colpito, in modo completamente anelastico, da un proiettile di massa m sparato orizzontalmente. Assumendo che l'oscillazione causata sia di un piccolo angolo θ calcolare la velocità v del proiettile.

Soluzione: Conservazione della quantità di moto:

$$mv = (M + m)V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M + m}v$$

ove V è la velocità con del sistema blocco-proiettile. Conservazione energia:

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh = (M + m)gl(1 - \cos \theta) \simeq \frac{M + m}{2}\theta^2 gl$$

che porta a:

$$\frac{m}{m + M}v = \theta\sqrt{gl} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{M + m}{m}\theta\sqrt{gl}$$

14. Nello spazio euclideo tridimensionale vi è un cilindro massivo omogeneo con densità unitaria e raggio 3 e con asse giacente sull'asse z . All'interno del cilindro viene praticata una cavità cilindrica con asse parallelo all'asse z : $x = 1, y = 0$ e con raggio unitario. Calcolare il campo gravitazionale all'interno della cavità. Esprimere il risultato in notazione versoriale cartesiana.

Soluzione: Campo all'interno di un cilindro omogeneo con asse lungo $\hat{\mathbf{k}}$: $\mathbf{g}_{cil} = \mathbf{g}_{cil}(\mathbf{d})$, $\mathbf{d} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$. Gauss con cilindri di altezza h restituisce:

$$-4\pi G\pi d^2 h = -2\pi d h g_{cil}(\mathbf{d}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}_{cil}(\mathbf{d}) = -2\pi G \mathbf{d}$$

Asse del cilindro traslato:

$$\mathbf{g}_{tras}(\mathbf{d}) = -2\pi G(\mathbf{d} - (1, 0, 0))$$

Si ha

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{cil}(\mathbf{d}) - \mathbf{g}_{tras}(\mathbf{d}) = -2\pi G(1, 0, 0) = -2\pi G\hat{\mathbf{i}}$$

cioè un campo costante.

15. Considerando la vita media di un essere umano di 80 anni, qual è la velocità minima da tenere per poter raggiungere un pianeta lontano $200al$ (anni luce)?

Soluzioni: Modo 1: contrazione delle lunghezze. Se si viaggia ad una data velocità v , la distanza tra i pianeti si accorcia del fattore di Lorentz:

$$d' = 200a \cdot c \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Impostando ora $80a$ come tempo di percorrenza otteniamo:

$$80a = \frac{200a \cdot c \sqrt{1 - (v/c)^2}}{v} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{25}{29}} c = \frac{5c}{\sqrt{29}}$$

Modo 2: Dilatazione dei tempi. L'osservatore sulla Terra misura il tempo dilatato $200a \cdot c/v$, pertanto

$$T_0 = 80a = \frac{200a \cdot c}{v} \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

16. Un passeggiatore aleatorio compie, ad ogni istante di tempo, un passo asimmetrico α che prende valore $+2$ con probabilità $1/2$ e -1 con probabilità $1/2$. I passi a tempi diversi sono indipendenti. Considerando come posizione di partenza $X_0 = 0$ calcolare valore atteso e varianza della sua posizione e la costante di diffusione.

Soluzione: $\alpha_i = 2, -1$ v.a. relativa al passo i -esimo.

$$X_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Si calcolino

$$\mathbb{E}[\alpha_i] = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{E}[\alpha_i^2] = \frac{1}{2}4 + \frac{1}{2}(+1) = \frac{5}{2}$$

Si ha quindi

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{n}{2}.$$

Sfruttiamo ora il fatto che la varianza della somma di variabili indipendenti è la somma delle varianze delle singole variabili.

$$d^2 = \mathbb{V}[X_n] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[\alpha_i] = \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[\alpha_i^2] - \mathbb{E}[\alpha_i]^2) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4}n$$

Il coefficiente di diffusione vale $D = 9/8$, con un drift anch'esso proporzionale al tempo.

17. Un corpo di massa m è appeso a una molla, di costante elastica k e massa trascurabile, che ha un estremo fisso nel punto $(0, 0, 0)$. Il corpo, sottoposto a una forza gravitazionale di accelerazione $\mathbf{g} = (0, 0, -1)$, si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare ω nel piano $z = c$. Sapendo che la molla forma un angolo $\pi/3$ con l'asse $-z$ calcolare ω e c . Scrivere l'espressione dell'energia meccanica del sistema e dire se è conservata motivando la risposta. Esprimere tutti i risultati in funzione di m e k .

Soluzione: Utilizzando le equazioni di Newton, e scomponendo la forza elastica in direzione z e radiale avremo che la quota $z = c$ vale:

$$c = -l \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{l}{2} = -\frac{m}{k}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'energia meccanica è costituita da tre termini

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega l\right)^2 + \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{2}mgl = \frac{3}{8}kl^2 + \frac{1}{2}kl^2 - \frac{1}{4}kl^2 = \frac{5}{8}kl^2 = \frac{5m^2}{2k}$$

Quest'ultima si conserva poiché le uniche forze in gioco sono conservative.

18. Nello spazio tridimensionale ci sono due gusci sferici concentrici centrati nell'origine, di spessore trascurabile, di raggi 1 e 2. I gusci hanno entrambi densità di massa superficiale unitaria. Trovare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio e dire se è continuo.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= 0, & r < 1 \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{4\pi G}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, & 1 < r < 2 \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{20\pi G}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, & r > 2 \end{aligned}$$

Il campo è evidentemente discontinuo.

19. Due eventi A e B avvengono in un dato sistema di riferimento inerziale alle seguenti coordinate spazio-temporali (t, x, y, z) :

$$A = (0, 2c, 0, 0), \quad B = (1, 0, 0, 0).$$

Trovare, specificando se è possibile, un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono simultaneamente ed un sistema in cui i due eventi avvengono nello stesso punto.

Soluzione:

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c^2\Delta t}{\Delta x} = \frac{c^2}{-2c} = -\frac{c}{2} \in (-c, c)$$

La velocità individuata è ammessa dunque tale sistema esiste.

Per trovare il secondo sistema imponiamo:

$$0 = \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -2c \notin (-c, c)$$

dunque tale sistema non esiste.

20. Si considerino due variabili aleatorie dicotomiche $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$. La loro distribuzione congiunta è data dalla seguente tabella:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
$p(\sigma_1, \sigma_2)$	$\frac{8}{Z}$	$\frac{1}{2Z}$	$\frac{1}{2Z}$	$\frac{1}{2Z}$

dove Z è una costante. Si determini la costante di normalizzazione Z e si dica se le due variabili sono indipendenti.

Soluzione: La costante di normalizzazione si ricava imponendo:

$$\begin{aligned} p(+, +) + p(+, -) + p(-, +) + p(-, -) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{16 + 1 + 1 + 1}{2Z} &= 1 \Rightarrow Z = \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Marginali:

$$\begin{aligned} p_1(+) &= p(+, +) + p(+, -) = \frac{17}{19}, & p_1(-) &= \frac{2}{19} \\ p_2(+) &= p(+, +) + p(-, +) = \frac{17}{19}, & p_2(-) &= \frac{2}{19}. \end{aligned}$$

In tal modo otteniamo per esempio:

$$p(+, +) = \frac{16}{19} \neq p_1(+)p_2(+) = \left(\frac{17}{19}\right)^2$$

Dunque le due variabili non sono indipendenti.

21. Un proiettile parte dall'origine di origine di un sistema $(O; x, y)$ con velocità di modulo v ed è soggetto ad una accelerazione $\mathbf{g} = (0, -1)$. Qual è il minimo valore di v che permette al proiettile di raggiungere il punto $P = (3, 4)$? Determinare qual è l'angolo θ di alzo necessario (è sufficiente calcolare $\tan \theta$).

Soluzione: Equazione per angolo di alzo:

$$\tan^2 \theta - \frac{2v^2}{gx} \tan \theta + \left(1 + \frac{2v^2 y}{gx^2}\right) = 0$$

con soluzioni

$$\tan \theta_{\pm} = \frac{v^2}{gx} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{v^4}{(gx)^2} - 1 - \frac{2v^2y}{gx^2}}_{\Delta}}.$$

La condizione $\Delta = 0$ determina l'equazione per la minima v^2 :

$$v^4 - 2v^2gy - (gx)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = g \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) = 9m^2/s^2$$

Angolo di alzo corrispondente:

$$\tan \theta = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = 3 \quad \Rightarrow \quad \theta \simeq 71.6^\circ.$$

22. Si consideri una sfera massiva di raggio 1 in \mathbb{R}^3 . La sua densità vale:

$$\rho(r) = \begin{cases} 2 & r \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio in funzione del vettore posizione \mathbf{r} .

Soluzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{8}{3}\pi G\mathbf{r} && \text{per } r \leq 1/2 \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -G \left[\frac{\pi}{6} \frac{1}{r^3} + \frac{4}{3}\pi \right] \mathbf{r} && \text{per } 1/2 \leq r \leq 1 \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{3}{2}\pi \frac{G}{r^3} \mathbf{r} && \text{per } r \geq 1 \end{aligned}$$

23. Siano O e O' due sistemi di riferimento inerziali. Il secondo si sposta con una velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto al primo. In un dato istante l'osservatore in O vede due fulmini cadere contemporaneamente agli estremi di una sbarra di lunghezza propria L_0 che viaggia solidalmente con O' e giace lungo la direzione del moto. I due fulmini arrivano contemporaneamente anche per l'osservatore in O' ? Se no, valutare la separazione temporale tra un fulmine e l'altro.

Soluzione: No, non arrivano contemporaneamente in O' . Battezziamo Δt e $\Delta t'$ gli intervalli di tempo tra un fulmine e l'altro nei due SdR O ed O' rispettivamente.

$$0 = \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} L_0 \right) \Rightarrow \Delta t' = -\frac{v}{c^2} L_0$$

24. Dati due eventi indipendenti A e B con $P(A) = 1/2$ e $P(B) = 1/3$, qual è la probabilità della loro unione? Due eventi indipendenti possono essere disgiunti? Motivare la risposta.

Soluzione: L'indipendenza ci dà la probabilità dell'intersezione:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}$$

Dato che hanno un'intersezione non banale:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Due eventi indipendenti possono essere disgiunti solo se almeno uno dei due ha probabilità nulla. Infatti:

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

25. Un proiettile viene lanciato in un piano verticale dove è soggetto ad una accelerazione $\mathbf{g} = (0, -2)$. Esso parte dalla posizione iniziale $(2, 0)$ con velocità iniziale $\mathbf{v}_0 = (-2, 4)$. L'asse $x = 0$ è una parete rigida e liscia con cui il proiettile urta elasticamente.

Dopo aver calcolato l'istante dell'urto, scrivere le equazioni del moto e quella della traiettoria sia prima che dopo l'urto. Fare il grafico della traiettoria nel quadrante del piano cartesiano $x, y \geq 0$.

Soluzione: Istante urto: $\bar{t} = 1$.

Equazione della traiettoria in Figura12.1:

$$\begin{aligned} t = 1 - \frac{x}{2} \quad 0 \leq t \leq 1 &\Rightarrow y = -\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(1 - \frac{x}{2}\right) \quad 0 \leq x \leq 2 \\ t = \frac{x}{2} + 1 \quad t \geq 1 &\Rightarrow y = -\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 + 4\left(1 + \frac{x}{2}\right) \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

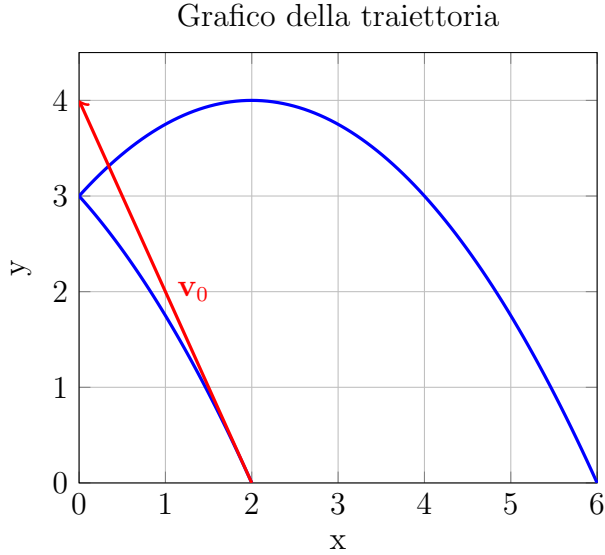


Figura 12.1: Traiettoria, esercizio 25.

26. In $(O; x, y, z)$ si considerino tre fili massivi omogenei, con densità di massa unitaria, che giacciono sugli assi x , y e $x = y = 1$. Scrivere il campo gravitazionale in tutto lo spazio in termini delle coordinate (x, y, z)

Soluzione: Sommando vettorialmente i campi generati dai tre fili otteniamo:

$$\mathbf{g}_{tot} = -2G \left[\left(\frac{(x-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{x}{x^2 + z^2} \right) \hat{i} + \left(\frac{(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \frac{y}{y^2 + z^2} \right) \hat{j} + \left(\frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} \right) z \hat{k} \right]$$

27. Un osservatore, chiamiamolo O , si trova su un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$. Un secondo osservatore O' , che viaggia con velocità $\mathbf{v} = (3/10c, 2/5c, 0)$ rispetto al primo porta con sé un orologio. Se O' misura un'intervallo di tempo $\Delta t'$, quale intervallo di tempo corrispondente misura O dal suo sistema di riferimento?

O' inoltre poggia su una piattaforma di area A' che giace sul piano xOy e che si muove insieme a lui. Qual è la sua area secondo O ?

Soluzione: Basta ruotare il sistema di riferimento di O in maniera tale che la velocità di O' giaccia interamente sull'asse x di O .

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta t'$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} A'$$

28. Un camminatore aleatorio ad ogni tempo naturale n si trova in un punto X_n della retta dei numeri interi, poi compie un passo $+1$ verso destra con probabilità $p/3$, o compie un passo -1 verso sinistra con probabilità $p/3$, o rimane fermo con probabilità $1 - 2/3p \in (0, 1)$. La scelta al tempo n è indipendente da tutte le altre. Dimostrare che il moto è diffusivo e trovare la costante di diffusione.

Soluzione: Definisco le v.a. indipendenti:

$$\begin{aligned} \xi_i &= 0, \pm 1, \quad i = 1, \dots, n \\ p(\xi_i = \pm 1) &= p/3, \quad p(\xi_i = 0) = 1 - \frac{2}{3}p \end{aligned}$$

Grazie all'indipendenza:

$$d^2 = \mathbb{V}[X_n] = \mathbb{V}\left[X_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}[\xi_i] = \frac{2}{3}np \quad (= 2Dn)$$

$$D = \frac{p}{3}$$

29. Un punto di massa m scivola senza attrito lungo una traiettoria partendo da un'altezza h su una pista. Una volta arrivato in fondo, dopo un breve rettilineo urta un secondo punto di massa $3m$. Dopo l'urto i due punti si muovono insieme verso una molla di costante elastica k disposta lungo la direzione del moto e la comprimono (vedi figura alla lavagna). Calcolare la massima compressione della molla. Calcolare l'energia dispersa dal sistema e spiegare dove si è persa.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \text{in cima alla pista} \quad mgh &= \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{infondo alla pista} \\ v &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Velocità dopo l'urto:

$$(m + 3m)V = mv \quad \Rightarrow \quad V = \frac{v}{4} = \frac{\sqrt{2gh}}{4}$$

Massima compressione:

$$\frac{1}{2}4mV^2 = \frac{1}{2}4m\frac{2gh}{16} = \frac{1}{4}mgh = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{mgh}{2k}}$$

Energia perduta nell'urto:

$$\Delta E = mgh - \frac{1}{2}kx^2 = mgh - \frac{1}{4}mgh = \frac{3}{4}mgh$$

30. Nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 , si considerino due cilindri di altezza infinita e raggio R . I loro assi sono paralleli con equazioni $x = y = 0$ e $x = R, y = 0$. L'intersezione dei volumi dei due cilindri viene riempita con una distribuzione di massa di densità $\rho_{int} = 2$ e le restanti due porzioni di volume sono riempite con una distribuzione di densità unitaria. Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio e dire se è continuo.

Soluzione: L'ansatz da fare per utilizzare Gauss è:

$$\mathbf{d}_{ab}(x, y) = (x - a)\hat{i} + (y - b)\hat{j}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -2\pi GR^2 \left[\frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} + \frac{(x - R)\hat{i} + y\hat{j}}{(x - R)^2 + y^2} \right] \quad d_{00}, d_{R0} > R$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -2\pi G \left[x\hat{i} + y\hat{j} + R^2 \frac{(x - R)\hat{i} + y\hat{j}}{(x - R)^2 + y^2} \right] \quad d_{00} \leq R, d_{R0} > R$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -2\pi G \left[R^2 \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{x^2 + y^2} + (x - R)\hat{i} + y\hat{j} \right] \quad d_{00} > R, d_{R0} \leq R$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -2\pi G \left[(2x - R)\hat{i} + 2y\hat{j} \right] \quad d_{00}, R, d_{R0} \leq R$$

31. Un orologio si trova nell'origine di un sistema di riferimento $S : (O; x, y, z)$, mentre una sbarra di lunghezza propria L_0 giace sull'asse x' di un sistema di riferimento $S' : (O'; x', y', z')$, in moto rispetto al primo con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Se secondo l'orologio in S è trascorso un tempo Δt , quanto tempo è trascorso per un osservatore su S' ? Quanto è lunga la sbarra per un osservatore in S' ?

Soluzione: Se l'osservatore in S non è in quiete con la sbarra la misurerà contratta del caratteristico fattore:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

L'orologio è in quiete nel sistema S dunque dalla trasformazione dei tempi:

$$\Delta t' = \frac{(\Delta t - v/c^2 \cdot 0)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t$$

cioè in S' si misura un tempo dilatato, come dovrebbe essere, dato che S' è in moto rispetto ad S .

32. Si considerino due variabili aleatorie dicotomiche $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ con la seguente distribuzione congiunta:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
$p(\sigma_1, \sigma_2)$	$\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{18}{25}$	$\frac{2}{25}$

Si dica se le due variabili sono indipendenti. Si calcoli $\mathbb{V}[2\sigma_1 - \sigma_2]$.

Soluzione: Cominciamo a calcolare le marginali:

$$\begin{aligned} p_1(+) &= \frac{9}{50} + \frac{1}{50} = \frac{1}{5} \\ p_1(-) &= 1 - p_1(+) = \frac{4}{5} \\ p_2(+) &= \frac{9}{50} + \frac{36}{50} = \frac{9}{10} \\ p_2(-) &= 1 - p_2(+) = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Le due variabili sono manifestamente indipendenti infatti:

$$\begin{aligned} p_1(+)p_2(+) &= \frac{9}{50} \\ p_1(+)p_2(-) &= \frac{1}{50} \\ p_1(-)p_2(+) &= \frac{36}{50} = \frac{18}{25} \\ p_1(-)p_2(-) &= \frac{4}{50} = \frac{2}{25} \end{aligned}$$

Questo facilita il calcolo della varianza richiesta.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_1] &= -\frac{3}{5} \quad \mathbb{E}[\sigma_2] = \frac{4}{5} \\ \mathbb{V}[2\sigma_1 - \sigma_2] &= 4\mathbb{V}[\sigma_1] + \mathbb{V}[\sigma_2] = 4\left(1 - \frac{9}{25}\right) + 1 - \frac{16}{25} = \frac{73}{25} \end{aligned}$$

33. In \mathbb{R}^2 agisce una accelerazione $\mathbf{g} = (0, -1)$. La retta $x = d$ va considerata come una parete rigida liscia ed elastica. Si consideri un pendolo di lunghezza l e massa m , appeso per il punto $(0, l + h)$, dove $h > 0$. Il pendolo viene rilasciato a $t = 0$ da fermo con un piccolo angolo $-\theta_0 < 0$. Quando la massa appesa raggiunge il punto più basso essa si stacca dal filo ed inizia un'altra fase di moto. Nell'ipotesi in cui la massa urti la parete prima di arrivare a terra ($y = 0$), scrivere le equazioni del moto dall'istante $t = 0$ fino alla caduta ad $y = 0$. Trovare inoltre le condizioni su θ_0 per suddetta ipotesi sia verificata.

Soluzione: Pendolo:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= -\theta_0 \cos(t/\sqrt{l}), \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\theta_0}{\sqrt{l}} \sin(t/\sqrt{l}) \quad \Rightarrow \quad \bar{t} = \frac{\pi\sqrt{l}}{2} \\ v_x(\bar{t}) &= l\dot{\theta}(\bar{t}) = \sqrt{l}\theta_0 \end{aligned}$$

$v_x(\bar{t})$: velocità orizzontale della massa all'istante di distacco.

In verticale il moto non cambia neanche dopo l'urto.

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}(t - \bar{t})^2 + h \quad \text{per } t \in [\bar{t}, t_c] \\ y(t_c) &= 0 \quad \Rightarrow \quad t_c = \bar{t} + \sqrt{2h} \end{aligned}$$

In orizzontale, prima dell'urto:

$$x(t) = v_x(\bar{t})(t - \bar{t}) = \sqrt{l}\theta_0(t - \bar{t}) \quad \text{per } t \in [\bar{t}, t_d]$$

$$t_d = \frac{d}{\theta_0\sqrt{l}} + \bar{t}$$

Dopo l'urto:

$$x(t) = -\theta_0\sqrt{l}(t - t_d) + d \quad \text{per } t \in [t_d, t_c]$$

Condizione su θ_0 :

$$t_d < t_c \quad \Rightarrow \quad \theta_0 > \frac{d}{\sqrt{2hl}}$$

34. In $(O; x, y, z)$ si consideri una massa di densità unitaria nel piano (x, z) e una massa di densità unitaria nell'asse y , entrambe omogenee. Scrivere il campo gravitazionale in tutto lo spazio in termini delle coordinate (x, y, z) .

Soluzione: Se chiamiamo \mathbf{g}_p e \mathbf{g}_f i campi generati da piano e filo rispettivamente allora il campo risultante incognito sarà:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_p(\mathbf{r}) + \mathbf{g}_f(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{2G}{x^2 + z^2}(x\hat{i} + z\hat{k}) - 2\pi G \operatorname{sign}(y)\hat{j}$$

Si usi Gauss per calcolare i campi di piano e filo.

35. Un triangolo rettangolo ha i due cateti lunghi a e b giacenti rispettivamente sugli assi x ed y di un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$. Quanto misurano i tre lati per un osservatore posto su un sistema di riferimento $(O'; x', y', z')$ in moto rettilineo uniforme con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto al primo?

Soluzione:

$$a' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}a$$

$$b' = b$$

$$c' = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + b^2}$$

36. Siano $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ due variabili aleatorie di distribuzione congiunta:

$$p(\sigma_1, \sigma_2) = C e^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2}.$$

Calcolare il valore della costante C affinché $p(\sigma_1, \sigma_2)$ sia una distribuzione di probabilità. Trovare le probabilità marginali delle due variabili, $p_1(\sigma_1)$ e $p_2(\sigma_2)$ e specificare se si tratta di variabili identicamente distribuite. Dire, motivando la risposta, se le due variabili aleatorie sono tra loro indipendenti.

Soluzione:

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1} C e^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3e^{-1} + e^3}$$

Le marginali sono:

$$p_1(\sigma_1) = \sum_{\sigma_2 = \pm 1} C e^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2} = C (e^{-1} + e^{2\sigma_1+1})$$

$$p_2(\sigma_2) = \sum_{\sigma_1 = \pm 1} C e^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2} = C (e^{-1} + e^{2\sigma_2+1})$$

Le due variabili sono identicamente distribuite, ma non indipendenti. Infatti:

$$p_1(+) p_2(+) = C^2 (e^{-1} + e^3)^2 \neq C e^3$$

37. Si consideri una accelerazione di gravità $\mathbf{g} = (0, 0, -1)$. Una massa m è appesa ad un filo inestensibile, di massa trascurabile e di lunghezza l , fissato per un suo estremo. La massa appesa viene messa in moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega = 1$ rispetto all'asse parallelo a \mathbf{g} e passante per il punto fisso del filo. All'istante $t = 0$ la massa si trova nell'origine del sistema di assi, con velocità in direzione \hat{i} e si stacca dal filo. Calcolare

- l'angolo θ che il filo forma con la verticale (l'asse di cui prima) durante la fase di moto circolare uniforme;
- l'equazione della traiettoria in tre dimensioni della fase di moto successiva a quello circolare.

Nello svolgere i calcoli si consideri un filo di lunghezza $l \gg 1$.

Soluzione: Se d è la distanza della massa dall'asse e T la tensione del filo allora:

$$\begin{cases} T \sin \theta = m\omega^2 d = m\omega^2 l \sin \theta \\ T \cos \theta = m \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{l}$$

La traiettoria dopo il moto circolare è parabolica. $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{i}$ con cui parte dall'origine.

$$v_0 = \omega l \sin \theta = l \sqrt{1 - \frac{1}{l^2}} \simeq l - \frac{1}{2l} = \frac{2l^2 - 1}{2l}$$

Ora possiamo scrivere le leggi orarie, ed eliminando il parametro anche la traiettoria si ottiene il risultato:

$$\begin{aligned} z &= -\frac{2l^2}{(2l^2 - 1)^2} x^2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

38. In $(O; x, y, z)$ si considerino due fili massivi omogenei, con densità di massa unitaria, che giacciono esattamente sugli assi x ed y . Scrivere il campo gravitazionale in tutto lo spazio in termini delle coordinate (x, y, z)

Soluzione: I versori ortogonali agli assi x ed y che ci serviranno sono:

$$\begin{aligned} \hat{d}_x &= \frac{y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{y^2 + z^2}} \\ \hat{d}_y &= \frac{x\hat{i} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + z^2}} \end{aligned}$$

Sommando vettorialmente i campi generati dai due fili otteniamo:

$$\mathbf{g}_{tot} = -2G \left[\frac{x}{x^2 + z^2} \hat{i} + \frac{y}{y^2 + z^2} \hat{j} + \left(\frac{1}{y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} \right) z \hat{k} \right]$$

39. Un osservatore in un sistema $(O; x, y, z)$ vede due eventi $A = (t_a, x_a, y_a, z_a) = (0, 0, 0, c/2)$, $B = (t_b, x_b, y_b, z_b) = (1, 0, 0, 0)$. Trovare, se esiste, un sistema di riferimento su cui i due eventi coincidono spazialmente. In tale sistema, solo nell'eventualità che esista, quale dei due eventi accade prima?

Soluzione: Se tale sistema esiste si dovrà muovere in direzione z rispetto al primo.

$$z'_a = z'_b \Rightarrow \gamma(z_a - vt_a) = \gamma(z_b - vt_b) \Rightarrow v = \frac{z_b - z_a}{t_b - t_a} = \frac{-c/2}{1 - 0} = -\frac{c}{2}$$

dunque tale sistema esiste. Se possiamo vedere i due eventi nello stesso punto, non potendo violare la causalità, l'evento A precederà comunque l'evento B . Infatti:

$$t'_a = \gamma(t_a - \frac{1}{2c}z_a) = \frac{\gamma}{4}$$

$$t'_b = \gamma(t_b - \frac{1}{2c}z_b) = \gamma > t'_a$$

40. Siano $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ due variabili aleatorie di distribuzione congiunta:

$$p(\sigma_1, \sigma_2) = Ce^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2}.$$

Calcolare il valore della costante C affinché $p(\sigma_1, \sigma_2)$ sia una distribuzione di probabilità. Trovare le probabilità marginali delle due variabili, $p_1(\sigma_1)$ e $p_2(\sigma_2)$ e dire, motivando la risposta, se le due variabili aleatorie sono tra loro indipendenti.

Soluzione: La costante C serve soltanto a normalizzare la distribuzione:

$$C \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} e^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2} = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{e^6 + e^{-4} + e^{-2} + 1}$$

Le due variabili non sono indipendenti, lo si vede esplicitamente calcolando le marginali:

$$p_1(\sigma_1) = C \sum_{\sigma_2=\pm 1} e^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2} = C(e^{\sigma_1 + 2 + 3\sigma_1} + e^{\sigma_1 - 2 - 3\sigma_1}) = 2Ce^{\sigma_1} \cosh(2 + 3\sigma_1)$$

$$p_2(\sigma_2) = C \sum_{\sigma_1=\pm 1} e^{\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2} = C(e^{2\sigma_2 + 1 + 3\sigma_2} + e^{-1 + 2\sigma_2 - 3\sigma_2}) = 2Ce^{2\sigma_2} \cosh(1 + 3\sigma_2)$$

e risulta evidente che:

$$p(\sigma_1, \sigma_2) \neq p_1(\sigma_1)p_2(\sigma_2)$$

Si può anche testare una coppia di valori ad esempio $(+, +)$ e vedere che $p(+, +) \neq p_1(+)p_2(+)$.

41. Un lampadario cilindrico è appeso a un filo e quando ruota intorno al suo asse di un angolo θ il momento torcente che agisce su di esso vale $\tau = -\theta$. Il suo momento di inerzia è unitario e la sua velocità angolare nella posizione di equilibrio è unitaria. Calcolare il massimo angolo di torsione θ_0 , la legge del moto $\theta(t)$, l'energia cinetica $T(t)$, quella potenziale $U(t)$ e la loro somma.

Soluzione: Dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\theta_0^2,$$

si deduce che $\theta_0 = 1$. L'equazione del moto è quindi

$$\begin{aligned}\theta(t) &= \sin(t), \\ \omega(t) &= \cos(t),\end{aligned}$$

Energia totale

$$\frac{1}{2}\omega(t)^2 + \frac{1}{2}\theta(t)^2 = \frac{1}{2}.$$

42. Un cilindro con asse z e raggio unitario è uniformemente occupato da una massa omogenea di densità volumetrica unitaria. Sulla superficie cilindrica di raggio unitario viene inoltre distribuita una massa omogenea di densità superficiale unitaria. Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio in notazione vettoriale e dire se è continuo.

Soluzione: Versore ortogonale all'asse del cilindro: $\hat{\mathbf{r}}$. Otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -2\pi G\mathbf{r} = -2\pi G(x\hat{i} + y\hat{j}) & r < 1 \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{6\pi G}{r^2}\mathbf{r} = -\frac{6\pi G}{r^2}(x\hat{i} + y\hat{j}) & r > 1\end{aligned}$$

Il campo è discontinuo sulla superficie del cilindro.

$$\Delta g(r) = \lim_{r \rightarrow 1+} g(r) - \lim_{r \rightarrow 1-} g(r) = 6\pi G - 2\pi G = 4\pi G$$

43. In un dato sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ si trova un ellissoide di equazione:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{3z^2}{16} = 1$$

Un osservatore su un sistema $(O'; x', y', z')$ osserva una sfera di raggio $R = 2$. A quale velocità $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sta viaggiando l'osservatore in O' ? Specificare le componenti della velocità motivando la risposta.

Soluzione: L'osservatore non può che viaggiare in direzione z

La formula di contrazione è:

$$\Delta z' = 2 = \sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}} \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad v_z = \pm \frac{c}{2}$$

La velocità vale: $\mathbf{v} = (0, 0, \pm c/2)$.

44. Un passeggiatore aleatorio compie, ad ogni istante di tempo, un passo α che prende valori $+\sqrt{3}$, 0 e $-\sqrt{3}$ con probabilità $1/3$. I passi a tempi diversi sono indipendenti. Dimostrare che il suo moto è diffusivo e calcolare la costante di diffusione.

Soluzione:

$$E[\alpha_i] = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}0 - \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0$$

$$E[\alpha_i^2] = \frac{1}{3}3 + \frac{1}{3}0 + \frac{1}{3}3 = 2$$

Definiamo:

$$X_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i + X_0$$

con X_0 posizione iniziale. X_0 essendo costante non influisce sul calcolo.

$$d^2 = V[X_n] = \sum_{i=1}^n V[\alpha_i] = \sum_{i=1}^n \left(E[\alpha_i^2] - \underbrace{E^2[\alpha_i]}_{=0} \right) = \sum_{i=1}^n 2 = 2n = 2Dn$$

Il moto è diffusivo in quanto la varianza è proporzionale al tempo discreto, inoltre $D = 1$.

45. Nel piano verticale agisce una accelerazione gravitazionale $\mathbf{g} = (0, -g)$. Si consideri un pendolo di lunghezza l e massa m . Il pendolo viene rilasciato da fermo con un piccolo angolo $-\theta_0 < 0$. Quando la massa appesa raggiunge il punto più basso essa urta una seconda massa $2m$ e vi rimane attaccata per il resto del moto. Calcolare:

- il periodo T del pendolo, prima dell'urto e quello T' dopo l'urto;
- l'ampiezza angolare $\tilde{\theta}$ di oscillazione del pendolo dopo l'urto.

Approssimazioni dei piccoli angoli: $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$.

Soluzione:

$$T = T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Conservazione dell'energia:

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 \simeq gl\theta_0^2$$

Conservazione della quantità di moto per determinare la velocità V di partenza dell'insieme delle due masse:

$$mv = 3mV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{3}v = \sqrt{gl}\frac{\theta_0}{3}$$

Angolo di oscillazione massimo raggiunto: la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}3mV^2 &= 3mgl(1 - \cos \tilde{\theta}) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\theta}^2 \simeq \frac{V^2}{gl} = \frac{\theta_0^2}{9} \\ \tilde{\theta} &= \frac{\theta_0}{3} \end{aligned}$$

46. Si considerino due sfere, entrambe centrate nell'origine di \mathbb{R}^3 , di raggi $R_1 = 1$ e $R_2 = \sqrt[3]{2}$. Tra esse viene distribuita una massa omogenea di densità unitaria. Nel punto identificato dal vettore \mathbf{c} si trova una massa unitaria. Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio \mathbf{r} . Esprimere il risultato solo attraverso i vettori \mathbf{r} e \mathbf{c} .

Soluzione: In ogni punto dello spazio il campo totale sarà la somma vettoriale dei campi:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}_s(\mathbf{r}) - G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{c}}{|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^3}$$

Si usa il teorema di Gauss solo per la distribuzione a simmetria sferica, non per il punto materiale.

Sommando i campi otteniamo il campo risultante:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{c}}{|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^3} && \text{per } r \leq 1 \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{4}{3}\pi G \frac{r^3 - 1}{r^3} \mathbf{r} - G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{c}}{|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^3} && \text{per } 1 < r \leq \sqrt[3]{2} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -\frac{4}{3}\pi G \frac{\mathbf{r}}{r^3} - G \frac{\mathbf{r} - \mathbf{c}}{|\mathbf{r} - \mathbf{c}|^3} && \text{per } r > \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

47. Un osservatore su un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ vede accadere due eventi A, B in coordinate spazio-temporali: $(t_a, x_a, y_a, z_a) = (0, 0, c/3, 0)$, $(t_b, x_b, y_b, z_b) = (1/2, c/3, 0, 0)$. Un'altro osservazione, che viaggia con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto al primo, vede che i due eventi coincidono sul suo asse x' . Calcolare

- la velocità v del secondo osservatore;
- la separazione temporale dei due eventi misurata dal secondo osservatore.

Soluzione: Trasformazioni di Lorentz:

$$\Delta x' = 0 = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2}{3}c$$

Possiamo ora rispondere al secondo quesito:

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \frac{3}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9} \right) = \frac{\sqrt{5}}{6}$$

48. Siano $\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1$ due variabili aleatorie di distribuzione congiunta:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
$p(\sigma_1, \sigma_2)$	$\frac{3}{2K}$	$\frac{1}{6K}$	$\frac{2}{3K}$	$\frac{8}{3K}$

Calcolare il valore della costante K affinché $p(\sigma_1, \sigma_2)$ sia una distribuzione di probabilità. Dire, motivando la risposta, se le due variabili aleatorie sono tra loro indipendenti.

Soluzione: K deve normalizzare ad uno la probabilità.

$$\sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_2=\pm 1} p(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{9 + 1 + 4 + 16}{6K} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 5$$

Le due variabili aleatorie non sono indipendenti. Infatti basta calcolare le seguenti marginali:

$$\begin{aligned} p_1(+) &= p(+, +) + p(+, -) = \frac{9 + 1}{6K} = \frac{1}{3} \\ p_2(+) &= p(+, +) + p(-, +) = \frac{9 + 4}{6K} = \frac{13}{30} \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$p(+, +) = \frac{3}{10} \neq \frac{13}{90} = p_1(+)p_2(+)$$

49. Si consideri un sistema costituito da due pendoli attigui (figura alla lavagna) di lunghezza l e masse, m_1 e m_2 . Uno dei due viene sollevato rispetto alla sua posizione di equilibrio di un piccolo angolo ϵ e rilasciato da fermo. Assumendo che l'urto tra le due masse sia elastico dimostrare che entrambi i pendoli compiono piccole oscillazioni. Determinare le equazioni del moto del sistema in funzione dei dati forniti verificando che il moto è periodico e calcolandone il periodo.

Soluzione: Per $t \in \left[0, \frac{\pi}{2\sqrt{g/l}}\right]$ il moto è:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= -\epsilon \cos(\sqrt{g/l}t) \\ \theta_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

Le ampiezze delle oscillazioni dei due pendoli dopo l'urto sono:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_1 &= \frac{\tilde{v}_1}{\sqrt{lg}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \epsilon \\ \tilde{\epsilon}_2 &= \frac{\tilde{v}_2}{\sqrt{lg}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \epsilon \end{aligned}$$

Per i tempi $t \in \left[\frac{\pi}{2\sqrt{g/l}}, \frac{3\pi}{2\sqrt{g/l}} \right]$ valgono le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \epsilon \sin \left[\sqrt{g/l} \left(t - \frac{\pi}{2\sqrt{g/l}} \right) \right] \\ \theta_2(t) &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \epsilon \sin \left[\sqrt{g/l} \left(t - \frac{\pi}{2\sqrt{g/l}} \right) \right]\end{aligned}$$

Per il restante quarto di periodo $t \in \left[\frac{3\pi}{2\sqrt{g/l}}, \frac{2\pi}{\sqrt{g/l}} \right]$ avremo:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= -\epsilon \sin \left[\sqrt{g/l} \left(t - \frac{3\pi}{2\sqrt{g/l}} \right) \right] \\ \theta_2(t) &= 0\end{aligned}$$

Il moto è evidentemente periodico.

50. Un punto ruota di moto circolare uniforme con centro nell'origine, raggio unitario e velocità angolare unitaria nel sistema $(O; x, y, t)$. Scrivere l'equazione della traiettoria del punto rispetto a un osservatore nel sistema $(O'; x', y', t')$.

Soluzione:

$$\begin{aligned}\gamma(x' + vt') &= \cos \left[\gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \right] \\ y' &= \sin \left[\gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \right] \\ \frac{(x' + vt')^2}{\frac{1}{\gamma^2}} + y'^2 &= 1\end{aligned}$$

51. Una ruota della fortuna ha quattro spicchi uguali. Nel primo compare il rosso, nel secondo il verde nel terzo il blu. Nel quarto compaiono tutti e tre i colori. Dimostrare che gli eventi: A_r , A_v , A_b , rispettivamente uscita del rosso, uscita del verde e uscita del blu sono indipendenti a coppie. Mostrare tuttavia che la terna di eventi non è *globalmente indipendente*, cioè

$$P(A_r, A_v, A_b) \neq P(A_r)P(A_v)P(A_b)$$

Soluzione:

$$P(A_r) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_b) = P(A_r) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_v) = P(A_r) = \frac{1}{2}$$

$$P(A_r, A_v) = \frac{1}{4} = P(A_r)P(A_v)$$

$$P(A_r, A_b) = \frac{1}{4} = P(A_r)P(A_b)$$

$$P(A_v, A_b) = \frac{1}{4} = P(A_v)P(A_b)$$

$$P(A_r, A_v, A_b) = \frac{1}{4} \neq P(A_r)P(A_v)P(A_b) = \frac{1}{8}$$

52. Si consideri un pendolo costituito da un filo di lunghezza l ed una massa appesa m . Il pendolo è appeso a un piolo posto nell'origine del piano cartesiano. Nel punto di coordinate $(0, -l/2)$ viene posizionato un secondo piolo, in maniera tale che il filo faccia perno su di esso quando il pendolo oscilla, senza poterlo scavalcare. Sapendo che il pendolo parte con un piccolo angolo $\theta_0 > 0$ rispetto alla verticale, scrivere le equazioni del moto utilizzando i momenti torcenti e risolverle per piccole oscillazioni. Calcolare il periodo del moto.

Soluzione: $\omega_1 = \sqrt{g/l}$, $\omega_2 = \sqrt{2g/l}$,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_1 t) \quad t \in [0, \pi/(2\omega_1)]$$

$$\theta(t) = -\sqrt{2}\theta_0 \sin\left(\omega_2 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_1}\right)\right) \quad t \in [\pi/(2\omega_1), \pi/(2\omega_1) + \pi/\omega_2]$$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin\left(\omega_1 \left(t - \frac{\pi}{\omega_2} - \frac{\pi}{2\omega_1}\right)\right) \quad t \in [\pi/(2\omega_1) + \pi/\omega_2, \pi/\omega_1 + \pi/\omega_2]$$

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2}$$

53. Nello spazio euclideo tridimensionale si trova un cilindro di lunghezza infinita, di densità unitaria e raggio R , il cui asse coincide con l'asse z . Viene successivamente scavata una cavità sferica centrata nell'origine di raggio R anch'essa. Calcolare il campo gravitazionale in tutto lo spazio esprimendolo in notazione versoriale cartesiana. Una volta considerata la sezione della cavità su un

piano contenente l'asse z , si rappresenti graficamente all'interno della medesima il campo attraverso i suoi vettori. Infine si verifichi che il campo è continuo.

Soluzione:

$$\begin{aligned} r < R & \quad \vec{g}(x, y, z) = -\frac{2}{3}\pi G(x\hat{i} + y\hat{j} - 2z\hat{k}) \\ r > R, \rho < R & \quad \vec{g}(x, y, z) = -2\pi G \left[x\hat{i} \left(1 - \frac{2R^3}{3r^3}\right) + y\hat{j} \left(1 - \frac{2R^3}{3r^3}\right) - \frac{2R^3}{3r^3} z\hat{k} \right] \\ \rho > R & \quad \vec{g}(x, y, z) = -2\pi G R^2 \left[x\hat{i} \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2R}{3r^3}\right) + y\hat{j} \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2R}{3r^3}\right) - \frac{2R}{3r^3} z\hat{k} \right] \end{aligned}$$

La continuità si verifica immediatamente.

54. Siano $(O; x, y, z)$ e $(O'; x', y, z)$ due sistemi di riferimento. Il secondo viaggia rispetto al primo con una velocità $\vec{v} = (c/2, 0, 0)$. Inoltre solidali col sistema in movimento ci sono una sorgente luminosa (nell'origine di tale sistema) ed un bersaglio. I due sono collegati da un'asta rigida di lunghezza propria $L' = 1m$ che forma un angolo proprio di $\theta' = \pi/6$ con la direzione del moto. Ad un certo punto la sorgente invia un impulso luminoso al bersaglio. Quanto tempo impiega l'impulso a raggiungere il bersaglio nel sistema $(O'; x', y, z)$ e quanto nel sistema $(O; x, y, z)$?

Opzionale: ricavare il secondo risultato utilizzando solamente i postulati della relatività ristretta.

Soluzione:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v}{c^2} L' \cos \theta' \right) = \frac{\frac{1}{c} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{c} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right)$$

55. Siano σ_1 e σ_2 due variabili aleatorie dicotomiche ($\sigma_i = \pm 1$). Si consideri la seguente funzione:

$$P(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{K} e^{-3\sigma_1 + 2\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2}$$

Si determini la costante K affinché la funzione data rappresenti una distribuzione di probabilità secondo gli assiomi di Kolmogorov e li si verifichi uno ad

uno. Successivamente si dica, attraverso un calcolo, se le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Soluzione:

$$\frac{2e^{-2} + e^8 + e^{-4}}{K} = 1 \quad \Rightarrow \quad K = 2e^{-2} + e^8 + e^{-4}$$

Essendo K gli esponenziali sempre positivi abbiamo che le varie probabilità sono somme e rapporti di quantità sempre positive.

$$P(+, +) = \frac{e^{-4}}{2e^{-2} + e^8 + e^{-4}} \neq \frac{(e^{-4} + e^{-2})(e^{-4} + e^8)}{(2e^{-2} + e^8 + e^{-4})^2} = p_1(+)p_2(+)$$

Dunque le due variabili non sono indipendenti.

56. Un lampadario cilindrico è appeso a un filo in equilibrio e in quiete. Esso viene ruotato intorno al suo asse di un angolo α_0 rispetto alla posizione di equilibrio. Considerato che il momento torcente esercitato dal filo è $\tau = -\alpha$, che il suo momento di inerzia è unitario, calcolare la legge del moto $\alpha(t)$, l'energia cinetica in funzione del tempo e quella potenziale verificando l'energia totale è costante.

Soluzione:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos t$$

$$\omega(t) = -\alpha_0 \sin t,$$

$$T = \frac{1}{2}\omega^2(t) = \frac{1}{2}\alpha_0^2 \sin^2 t.$$

$$U = \frac{1}{2}\alpha^2(t) = \frac{1}{2}\alpha_0^2 \cos^2 t.$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}I\alpha_0^2 = \frac{1}{2}\alpha_0^2.$$

57. In un dato sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ hanno luogo tre eventi A, B e C in sequenza, in tre punti diversi:

$$A : (t_a, x_a) = (0, 0)$$

$$B : (t_b, x_b) = (1, \frac{3}{2}c)$$

$$C : (t_c, x_c) = (2, \frac{7}{4}c)$$

Ordinare cronologicamente i tre eventi in un altro sistema di riferimento, che si muove con velocità $\mathbf{v} = (\frac{5}{6}c, 0, 0)$. È possibile trovare un sistema di riferimento in cui i due eventi B e C sono contemporanei?

Soluzione: L'ordine diviene B, A, C.

È impossibile trovare tale sistema di riferimento.

58. Un passeggiatore aleatorio compie, ad ogni istante di tempo, un passo α che prende valori $+2$, 0 e -1 con probabilità $1/3$. I passi a tempi diversi sono indipendenti. Dimostrare che il suo moto è diffusivo e calcolare la costante di diffusione.

Soluzione:

$$d^2 = V[X_n] = \sum_{i=1}^n V[\alpha_i] = \sum_{i=1}^n (E[\alpha_i^2] - E^2[\alpha_i]) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{9} \right) = \frac{14}{9}n = 2Dn$$

Il moto è diffusivo in quanto la varianza è proporzionale al tempo discreto, inoltre $D = 7/9$.

59. Un punto materiale di massa unitaria si muove secondo la legge di moto $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t)$. Calcolare l'equazione della traiettoria nell'intervallo $0 \leq t \leq \pi$, disegnarla specificando il tipo di curva che essa rappresenta. Calcolare la forza che agisce sul punto specificando la natura delle sue componenti e dire per quali tempi dell'intervallo dato essa non compie lavoro.

Soluzione:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

solo arco superiore del precedente ellisse.

$$\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = m(4 \cos t \sin t - \cos t \sin t) = 3m \cos t \sin t = \frac{3}{2} \sin 2t = 0$$

$t = 0, \pi/2, \pi$, sono gli istanti di tempo cercati che corrispondono alle intersezioni della traiettoria con l'asse x (due) ed y (una).

60. In una distribuzione di massa sferica e omogenea di densità unitaria e raggio R , centrata nel punto $(0, 0, 0)$, viene fatta una cavità sferica di raggio $R/2$ centrata in $\mathbf{c} = (R/2, 0, 0)$. Calcolare il campo gravitazionale all'interno della cavità.

Soluzione:

$$\mathbf{g}(r) = \mathbf{g}_1(r) - \mathbf{g}_2(r) = -\frac{4\pi}{3}G\mathbf{c}.$$

61. In un sistema di riferimento inerziale $(O; x, y, z)$ due eventi sono separati da un intervallo di tempo $\Delta t > 0$ e da una distanza spaziale $\Delta x > 0$ tali che $c\Delta t > \Delta x$. Trovare un sistema di riferimento in cui i due eventi coincidono spazialmente. A che serve la condizione $c\Delta t > \Delta x$?

Soluzione: La condizione data dal testo del problema garantisce che tale sistema di riferimento esista, cioè che:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} < \frac{c\Delta t}{\Delta t} = c$$

62. Un passeggiatore aleatorio compie, ad ogni istante di tempo, un passo asimmetrico α che prende valore $+2$ con probabilità $1/2$ e -1 con probabilità $1/2$. I passi a tempi diversi sono indipendenti. Dimostrare che il suo moto è diffusivo e calcolare la costante di diffusione.

Soluzione:

$$d^2 = V[X_n] = \sum_{i=1}^n V[\alpha_i] = \sum_{i=1}^n (E[\alpha_i^2] - E[\alpha_i]^2) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{4}n$$

Come preannunciato il moto è diffusivo poiché $d^2 \propto n$ e se il coefficiente di diffusione D è tale per cui: $d^2 = 2Dn$ allora esso vale $D = 9/8$.

63. Un proiettile viene lanciato in un piano verticale dove è soggetto ad una accelerazione $\mathbf{g} = (0, -1)$. Esso parte dalla posizione iniziale $(1, 0)$ con velocità iniziale $(-1, 2)$. L'asse $x = 0$ è una parete rigida e liscia con cui il proiettile urta elasticamente.

Dopo aver calcolato l'istante dell'urto, scrivere le equazioni del moto e quella della traiettoria sia prima che dopo l'urto. Fare il grafico della traiettoria per

$$0 \leq x \leq 3.$$

Soluzione:

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ t - 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t \quad \forall t \geq 0$$

$$t = 1 - x \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(1 - x)^2 + 2(1 - x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$t = x + 1 \quad t \geq 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2(x + 1) \quad x \geq 0$$

64. Nello spazio euclideo tridimensionale si trovano una sfera piena omogenea di raggio R_1 e massa M_1 e una cava, di raggio $R_2 > R_1$ e massa M_2 , entrambe centrate nell'origine del sistema. Calcolare il campo gravitazionale \mathbf{g} in ogni punto dello spazio.

Soluzione: Per $0 \leq r \leq R_1$.

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM_1}{R_1^3} \mathbf{r}$$

Per $R_1 \leq r < R_2$:

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{GM_1}{r^2} \hat{r}$$

Per $r > R_2$:

$$\mathbf{g}(r) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r^2} \hat{r}$$

65. Un sistema di riferimento inerziale $(O'; x', y, z)$ si muove rispetto ad un altro sistema inerziale $(O; x, y, z)$ con velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Un'asta di lunghezza propria L_0 è solidale col sistema $(O'; x', y, z)$, giace nel piano (x', y) e forma un angolo θ' rispetto alla direzione x' . Calcolare la lunghezza dell'asta misurata da un osservatore solidale con $(O; x, y, z)$ e l'angolo che essa forma con la direzione x .

Soluzione:

$$L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{L_0^2 \cos^2 \theta' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + L_0^2 \sin^2 \theta'} = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \theta'}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L_0 \sin \theta'}{L_0 \cos \theta'} \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1} = \operatorname{tg} \theta' \gamma$$

66. Siano σ_1 e σ_2 due variabili aleatorie dicotomiche. La loro distribuzione di probabilità congiunta è data dalla seguente tabella:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
$p(\sigma_1, \sigma_2)$	$\frac{e^3}{e^3+3e^{-1}}$	$\frac{e^{-1}}{e^3+3e^{-1}}$	$\frac{e^{-1}}{e^3+3e^{-1}}$	$\frac{e^{-1}}{e^3+3e^{-1}}$

Mostrare che la distribuzione congiunta verifica gli assiomi di positività e normalizzazione. Dire se le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Soluzione: La positività è immediata.

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} p(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{e^3}{e^3 + 3e^{-1}} + 3 \frac{e^{-1}}{e^3 + 3e^{-1}} = 1$$

$$p_1(+)p_2(+) = \left(\frac{e^3 + e^{-1}}{e^3 + 3e^{-1}} \right)^2 = \frac{e^6 + e^{-2} + 2e^2}{(e^3 + 3e^{-1})^2} \neq p(+, +)$$

67. Un punto di massa unitaria si muove, senza attrito, nel piano (x, y) lungo la curva liscia di equazione $y = f(x)$. La curva passa per l'origine con derivata positiva e raggiunge un massimo locale in $x = 1$. Su di esso agisce un campo gravitazionale costante $\vec{g} = (0, -1)$. All'istante $t_0 = 0$ il punto si trova in $(0, 0)$ con velocità iniziale di modulo v_0 . Discutere il moto al variare di v_0 .

Soluzione: Se $v_0 < 0$ il corpo va ad x più negative, quindi manterrà il segno negativo.

Se $v_0^2 > 2f(1)$ la velocità non si annulla anche una volta sul massimo locale, perciò il corpo non arresta il suo moto proseguendo anche oltre.

Al contrario se $v_0^2 < 2f(1)$ la velocità si azzerà prima, e lì il segno della velocità si inverte da $+$ a $-$ ed il corpo va verso x sempre più piccole.

Infine se $v_0^2 = 2f(1)$ il corpo ha l'energia appena sufficiente per fermarsi sulla cresta, tuttavia ci impiega un tempo infinito (divergenze almeno logaritmica).

68. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$, i piani $x = 0$ e $y = 0$ hanno densità di massa superficiale uniforme e unitaria. Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio.

Soluzione:

$$\mathbf{g}(x, y) = -2\pi G(\text{sign}(x)\hat{\mathbf{i}} + \text{sign}(y)\hat{\mathbf{j}})$$

69. Un cubo di lato unitario si trova solidale al sistema di riferimento O . Il sistema di riferimento O' si muove rispetto ad O con velocità $c/2$ in direzione $(1, 1, 1)$. Calcolare il volume del parallelepipedo per l'osservatore O' .

Soluzione:

$$V' = V\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

70. Un camminatore aleatorio si muove in 3 dimensioni (indipendenti) nei punti del reticolo di coordinate intere. Dimostrare la legge del moto diffusivo.

Soluzione: $(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3}) = \mathbf{x}_i$

$$E[x_{i1}] = \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma_1 p(\sigma_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Var}[x_{i1}] = E[x_{i1}^2 - \underbrace{E^2[x_{i1}]}_{=0}] = E[x_{i1}^2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Var}[R_1] = d_x^2 = \sum_{i=1}^n \text{Var}[x_{i1}] = n$$

$$d^2 = d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = n + n + n = 3n$$

71. Un punto di massa unitaria si muove, senza attrito, nel piano (x, z) lungo la curva di equazione $z = x(1 - x)$. Su di esso agisce un campo di forza gravitazionale costante $\vec{g} = (0, -1)$. All'istante $t_0 = 0$ il punto si trova in $(0, 0)$ con velocità iniziale di modulo v_0 . Discutere il moto al variare di v_0 .

Soluzione: Prendere la soluzione del problema 67. Sostituire al posto di $f(x)$ la parabola $z = f(x) = x(1 - x)$. La discussione del moto è poi del tutto identica.

72. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$, i piani $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ hanno densità di massa uguale ad 1. Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio.

Soluzione: Considerare la soluzione del problema 68.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_z(z) &= -2\pi G \text{sign}(z) \hat{\mathbf{k}} \\ \mathbf{g}(x, y, z) &= -2\pi G (\text{sign}(x) \hat{\mathbf{i}} + \text{sign}(y) \hat{\mathbf{j}} + \text{sign}(z) \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

73. Un cubo di lato unitario si trova solidale al sistema di riferimento O . Il sistema di riferimento O' si muove rispetto ad O con velocità $c/2$ in direzione $(1, 1, 1)$. Calcolare il volume del parallelepipedo per l'osservatore O' .

Soluzione: Vedere soluzione al problema 69.

74. Un camminatore aleatorio si muove in due dimensioni (indipendenti) nei punti del reticolo di coordinate intere. Dimostrare la legge del moto diffusivo.

Soluzione: Vedere problema 70. A tale soluzione si tolga la variabile σ_3 . Fatto ciò la soluzione è identica.

75. Nel sistema di riferimento $(O; x, y)$ si trova un piano inclinato con estremi in O e $(1, 1)$. Agisce un campo di forza gravitazionale costante $\vec{g} = (0, -1)$. All'istante $t_0 = 0$ un punto di massa m si trova in O e viene lanciato lungo il piano inclinato con velocità iniziale di modulo v_0 .

Determinare il valore minimo \bar{v}_0 di v_0 necessario affinché la massa arrivi in cima al trampolino e l'eventuale velocità v_1 in cima al trampolino.

Assumendo $v_0 > \bar{v}_0$, calcolare la distanza del punto di caduta sull'asse x dall'origine O .

Soluzione

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2} \quad \text{se } v_0 > \sqrt{2}$$

Mentre se $v_0 < \sqrt{2}$ la massa non raggiunge la cima del trampolino.

$$\begin{aligned}
 y(t) = 0 &\Leftrightarrow t = v_1 \sin \theta + \sqrt{(v_1 \sin \theta)^2 + 2} \\
 \Rightarrow x(t) &= 1 + v_1 \cos \theta (v_1 \sin \theta + \sqrt{(v_1 \sin \theta)^2 + 2}) = \\
 &= 1 + (v_0^2/2 - 1) + \sqrt{v_0^2/2 - 1} \sqrt{(v_0^2/2 - 1) + 2} = \\
 &= v_0^2/2 + \sqrt{v_0^4/4 - 1} .
 \end{aligned}$$

76. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$, i due piani $z = 1$ e $z = -1$ hanno densità di massa uguale ad 1 e la sfera cava $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ha massa m . Calcolare il campo gravitazionale nei punti dello spazio per cui $-1 < z < 1$.

Soluzione:

$$\vec{g}_{\text{sfera}} = -\frac{Gm}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{I}(x^2 + y^2 + z^2 > 1)$$

Per $-1 < z < 1$ i contributi dei due piani si annullano e resta

$$\vec{g} = \vec{g}_{\text{sfera}} .$$

77. Un parallelepipedo si trova solidale al sistema di riferimento O , con i lati paralleli agli assi e lunghi rispettivamente a, b, c . Il sistema di riferimento O' si muove rispetto ad O con velocità $c/2$ in direzione parallela all'asse x . Calcolare il volume del parallelepipedo per l'osservatore O' .

Soluzione:

$$\text{Vol}' = a'b'c' = \sqrt{3/4} abc$$

78. Un camminatore aleatorio ad ogni istante naturale n si trova in un punto X_n della retta dei numeri interi e poi compie un passo $\sigma_{n+1} = +1$ verso destra con probabilità $p_+(X_n)$ oppure compie un passo $\sigma_{n+1} = -1$ verso sinistra con probabilità $1 - p_+(X_n)$. La probabilità dipende dalla posizione nel modo seguente:

$$p_+(x) = \begin{cases} 1 - \tanh(x) & \text{se } x > 0 \\ 1/2 & \text{se } x = 0 \\ \tanh |x| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Sapendo che all'istante iniziale $X_0 = 0$, calcolare le seguenti grandezze medie: $E[\sigma_1]$, $E[\sigma_1 \sigma_2]$. I passi σ_1 e σ_2 sono indipendenti?

Soluzione: Il primo quesito è immediato:

$$E[\sigma_1] = 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

La probabilità congiunta con cui calcolare la media può essere riassunta nella seguente tabella:

(σ_1, σ_2)	++	+-	-+	--
$p(\sigma_1, \sigma_2)$	$\frac{1}{2}(1 - \tanh(1))$	$\frac{1}{2} \tanh(1)$	$\frac{1}{2} \tanh(1)$	$\frac{1}{2}(1 - \tanh(1))$

Dunque:

$$\begin{aligned} E[\sigma_1 \sigma_2] &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \tanh 1) + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \tanh 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \tanh 1) + \\ &\quad + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \tanh 1 = 1 - 2 \tanh 1 \end{aligned}$$

I passi σ_1 e σ_2 non sono indipendenti, perchè $E[\sigma_1 \sigma_2] \neq E[\sigma_1] E[\sigma_2]$, dato che $\mathbb{E}[\sigma_1] = 0$.

79. Un punto di massa unitaria si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $|\vec{v}| = 1$ per tutti i tempi $t < 0$. Al tempo $t = 0$ entra in un'orbita circolare di raggio unitario tangente alla retta e resta in tale orbita per tutti i tempi $t > 0$, mantenendo una velocità $|\vec{v}| = 1$. Studiare la funzione $\vec{F}(t)$ della forza risultante su di esso, spiegando le leggi fisiche utilizzate per dedurla. La funzione velocità $\vec{v}(t)$ è continua? E la funzione accelerazione $\vec{a}(t)$?

Soluzione: Per esempio l'orbita circolare ha centro in $(0, 0)$ e il corpo vi entra nel punto $(1, 0)$

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} (0, 0) & \text{per } t < 0 \\ -(\cos t, \sin t) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

La forza e l'accelerazione sono dunque discontinue in $t = 0$. La velocità invece è continua:

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} (0, 1) & \text{per } t < 0 \\ (-\sin t, \cos t) & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

80. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$, i due piani $z = 1$ e $z = -1$ hanno densità di massa uguale ad 1 e la sfera cava $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ha massa m . Calcolare il campo gravitazionale in ogni punto dello spazio per cui $-1 < z < 1$.

Soluzione: Guardare esercizio 76.

81. Un regolo di un metro (lunghezza propria) si muove, solidale con il sistema O' , nella direzione della sua lunghezza con velocità $v = c/3$ rispetto ad un osservatore in O . Calcolare qual è la sua lunghezza per l'osservatore in O . Lo stesso regolo viene ora messo in quiete in O , calcolare la sua lunghezza per l'osservatore in O' .

Soluzione: Nel primo caso:

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{8/9}$$

Nel secondo caso:

$$L' = \frac{1}{\gamma} L_0 = \sqrt{8/9}$$

82. Un camminatore aleatorio ad ogni tempo naturale n si trova in un punto X_n della retta dei numeri interi, poi compie un passo $+1$ verso destra con probabilità $p/2$, o compie un passo -1 verso sinistra con probabilità $p/2$, o rimane fermo con probabilità $1 - p \in (0, 1)$. La scelta al tempo n è indipendente da tutte le altre. Sapendo che all'istante iniziale $X_0 = 0$, calcolare media e varianza di X_n .

Soluzione:

$$E[X_n] = \sum_{i=1}^n E[\xi_i] = 0$$

$$\text{Var}[X_n] = E[X_n^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[\xi_i \xi_j] = \sum_{i=1}^n E[\xi_i^2] = np$$

83. Due proiettili di massa unitaria vengono lanciati al tempo $t = 0$ nel piano (x, y) con velocità unitaria. Essi partono dai punti di coordinate $(-1, 0)$ e $(+1, 0)$. Considerando una accelerazione di gravità $\vec{g} = (0, -1)$ determinare:
 - le leggi orarie di ciascun proiettile in funzione dei rispettivi angoli di lancio θ e θ' ,

- le traiettorie di ciascun proiettile,
- la zona sicura nel piano (x, y) . Dire se il punto $(0, \frac{1}{2})$ sta nella zona sicura o no.

Soluzione: Primo proiettile:

$$\begin{cases} x_1(t) = t \cos \theta - 1 \\ y_1(t) = -\frac{1}{2} t^2 + t \sin \theta \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} (1 + \tan^2 \theta) (x + 1)^2 + \tan \theta (x + 1)$$

Secondo proiettile:

$$\begin{cases} x_2(t) = t \cos \theta' + 1 \\ y_2(t) = -\frac{1}{2} t^2 + t \sin \theta' \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} (1 + \tan^2 \theta') (x - 1)^2 + \tan \theta' (x - 1) .$$

Il punto $(0, \frac{1}{2})$ sta nella zona sicura.

84. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ ci sono 3 masse unitarie puntiformi posizionate in $(1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$ e $(0, 0, 3)$. Calcolare il flusso del campo gravitazionale attraverso una sfera di raggio 2 centrata nell'origine degli assi. Calcolare il campo gravitazionale \vec{g} in funzione della posizione (x, y, z) .

Soluzione:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3$$

dove:

$$\vec{g}_1 = -\frac{G}{((x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2)^{3/2}} (x-1, y-1, z)$$

$$\vec{g}_2 = -\frac{G}{((x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2)^{3/2}} (x+1, y+1, z)$$

$$\vec{g}_3 = -\frac{G}{(x^2 + y^2 + (z-3)^2)^{3/2}} (x, y, z-3)$$

85. Nel sistema di riferimento O due eventi accadono nel punto P ai tempi rispettivamente $t = 0$ e $t = 1$. Il sistema di riferimento O' si muove con velocità di modulo v in direzione $(1, 2, 3)$. Calcolare qual è l'intervallo di tempo tra i due eventi nel sistema O' .

Soluzione:

$$t'_1 - t'_0 = \gamma (t_1 - t_0) = \gamma$$

con $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

86. Si consideri lo spazio di probabilità dato da due lanci indipendenti di un dado a 6 facce equiprobabili. Detto X_1 il risultato del primo lancio e X_2 il risultato del secondo lancio, dire se gli eventi A e B sono indipendenti nei seguenti casi:

- $A = (X_1 + X_2 = 3)$, $B = (X_1 \text{ è dispari})$
- $A = (X_1 \text{ è dispari}, X_2 \text{ è dispari})$, $B = (X_1 + X_2 \text{ è pari})$

Soluzione: Caso 1.

$$P(A) = \frac{2}{36}, \quad P(B) = \frac{3}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Ne segue che A e B sono indipendenti.

Caso 2.

$$P(A \cap B) = P(A) > P(A)P(B)$$

e i due eventi non sono indipendenti.

87. Un punto di massa m si muove in un sistema di riferimento inerziale $(O; x, y)$ sotto l'effetto di un campo gravitazionale costante $\vec{g} = (0, -1)$. Il punto parte con velocità nulla da $Q = (0, 1)$ e scivola lungo un trampolino di lancio ad arco di cerchio con centro in $C = (1, 1)$, fino a $P = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$, che raggiunge all'istante $t = 0$. Da qui prosegue il suo moto rimbalzando elasticamente contro il pavimento (asse x) agli istanti t_1, t_2, \dots

Trascurando le forze di attrito calcolare t_1 e t_2 , scrivere la legge del moto e l'equazione della traiettoria percorsa per i tempi $t \in [0, t_1]$, $t \in [t_1, t_2]$ individuando le quantità conservate in ciascuno dei due intervalli. Dire per quali valori di t il moto è periodico e calcolare il periodo T .

Soluzione: Per $t \in (0, t_1)$ la legge oraria è:

$$\begin{cases} x(t) = x_P + v_x t = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} t \\ y(t) = y_P + v_y t - \frac{g}{2} t^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} t - \frac{1}{2} t^2 \end{cases}$$

Sono conservate l'energia meccanica e la componente orizzontale della velocità. La traiettoria è:

$$y - y_P = x - x_P - \frac{1}{2\sqrt{2}}(x - x_P)^2$$

Trovo t_1 imponendo:

$$y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{\pm} = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gy_P}}{g} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

siccome $t_1 > 0$, sarà $t_1 = t_+$.

Per $t > 0$ il moto è periodico: il punto percorre infiniti archi di parabola traslati uno rispetto all'altro. Periodo:

$$T = t_+ - t_- = 2\sqrt{2 - \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

88. In un sistema di riferimento $(O; x, y, z)$ una massa M è distribuita uniformemente tra due sfere centrate in O di raggi $R_0 < R_1$. Calcolare il campo gravitazionale \vec{g} come funzione della posizione $\vec{r} = (x, y, z)$.

Soluzione:

- $0 \leq r < R_0$. In questo caso $M_{S_r} = 0$, perciò $g(r) = 0$.
- $R_0 \leq r \leq R_1$. Detta ρ la densità (uniforme) della corona, si ha $M_{S_r} = \rho \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_0^3 \right)$. Quindi

$$g(r) = \frac{4}{3}\pi G\rho \frac{r^3 - R_0^3}{r^2}$$

- $R_0 \leq r \leq R_1$. Si ha $M_{S_r} = M = \rho \left(\frac{4}{3}\pi R_1^3 - \frac{4}{3}\pi R_0^3 \right)$. Quindi

$$g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

Il campo è continuo, come si vede confrontando i valori in R_0 ed R_1 .

89. Un rombo R di diagonali d, D (con $d < D$) è fermo rispetto al sistema di riferimento $(O; x, y, z, t)$. R è posizionato sul piano xz con la diagonale maggiore parallela all'asse x e la diagonale minore parallela all'asse z . Un osservatore $(O'; x', y', z', t')$ si muove rispetto ad O con velocità costante v lungo la direzione dell'asse x ; per lui la figura R' è un quadrato. Calcolare il valore di v .

Soluzione:

$$D = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} D' \quad , \quad d = d'$$

$$v_{\text{quadrato}} = c \sqrt{1 - \frac{d^2}{D^2}}$$

90. Si consideri il seguente spazio probabilit  per la coppia di variabili dicotomiche (σ_1, σ_2) :

$+$ $+$	$+$ $-$	$-$ $+$	$-$ $-$
$1/6$	$2/6$	$1/6$	$2/6$

Calcolare la distribuzione di probabilit  di σ_1 e quella di σ_2 . Dire se le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Soluzione. Le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Elenco degli esercizi

0	Esercizio	12
1	Esercizio (Il falco e il treno)	14
2	Esercizio	16
3	Esercizio (La serie geometrica)	16
4	Esercizio (Legge di composizione delle velocità)	17
5	Esercizio	18
6	Esercizio	19
7	Esercizio	22
8	Esercizio	22
9	Esercizio	24
10	Esercizio	26
11	Esercizio	27
12	Esercizio	27
13	Esercizio	27
14	Esercizio	28
15	Esercizio	28
16	Esercizio	29
17	Esercizio	30
18	Esercizio	31
19	Esercizio	32
20	Esercizio	33
21	Esercizio	36
22	Esercizio	37
23	Esercizio	37
24	Esercizio	38
25	Esercizio	39
26	Esercizio	42

27	Esercizio	42
28	Esercizio	42
29	Esercizio	43
30	Esercizio	44
31	Esercizio	45
32	Esercizio (Il cacciatore e la scimmia)	46
33	Esercizio (I due cacciatori)	47
34	Esercizio	48
35	Esercizio	49
36	Esercizio	50
37	Esercizio	51
38	Esercizio	54
39	Esercizio (Problema elementare della statica)	56
40	Esercizio	56
41	Esercizio	57
42	Esercizio	57
43	Esercizio	58
44	Esercizio (Treno in accelerazione)	59
45	Esercizio	61
46	Esercizio (Automobile in frenata)	61
47	Esercizio	61
48	Esercizio (Peso apparente su una giostra)	62
49	Esercizio	62
50	Esercizio (Peso apparente sulla Terra)	62
51	Esercizio	63
52	Esercizio	64
53	Esercizio (Lavoro della forza gravitazionale costante nel lancio verticale)	67
54	Esercizio (Lavoro della forza elastica)	68
55	Esercizio (Moto armonico)	68
56	Esercizio (Forza non posizionale)	70
57	Esercizio (Lavoro della forza gravitazionale costante in \mathbb{R}^2)	73
58	Esercizio (Lavoro della forza gravitazionale costante in \mathbb{R}^3)	74
59	Esercizio (Lavoro di una forza costante in tre dimensioni)	76
60	Esercizio	76
61	Esercizio	78
62	Esercizio	81

63	Esercizio	82
64	Esercizio	82
65	Esercizio (Satellite)	82
66	Esercizio (Satellite geostazionario)	83
67	Esercizio	84
68	Esercizio	85
69	Esercizio	86
70	Esercizio (Velocità di fuga)	86
71	Esercizio	87
72	Esercizio	87
73	Esercizio	87
74	Esercizio	88
75	Esercizio	88
76	Esercizio	88
77	Esercizio	89
78	Esercizio	89
79	Esercizio	89
80	Esercizio	89
81	Esercizio	89
82	Esercizio	90
83	Esercizio	91
84	Esercizio	91
85	Esercizio	98
86	Esercizio	98
87	Esercizio	98
88	Esercizio	98
89	Esercizio (*)	98
90	Esercizio	101
91	Esercizio	101
92	Esercizio	101
93	Esercizio (*)	102
94	Esercizio	102
95	Esercizio (Campo gravitazionale del filo)	104
96	Esercizio (Campo gravitazionale del piano)	104
97	Esercizio (*)	105
98	Esercizio (*)	105
99	Esercizio	107

100	Esercizio (Giro della morte)	108
101	Esercizio	109
102	Esercizio	111
103	Esercizio	111
104	Esercizio	111
105	Esercizio (Teorema iterativo del baricentro)	112
106	Esercizio (Ancora sul baricentro e simmetrie)	112
107	Esercizio (Urti elastici unidimensionali)	113
108	Esercizio (Urto completamente anelastico unidimensionale)	115
109	Esercizio	115
110	Esercizio (Urti obliqui con pareti)	116
111	Esercizio	116
112	Esercizio (Il problema del bagnino)	117
113	Esercizio	119
114	Esercizio (*)	119
115	Esercizio	121
116	Esercizio (Moto sulla separatrice)	121
117	Esercizio	125
118	Esercizio	127
119	Esercizio (Terna destrorsa)	128
120	Esercizio (Prodotto misto)	128
121	Esercizio	128
122	Esercizio	128
123	Esercizio (Regola di Leibniz per il prodotto vettoriale)	128
124	Esercizio	129
125	Esercizio	130
126	Esercizio	130
127	Esercizio	131
128	Esercizio	133
129	Esercizio	134
130	Esercizio (Il lampadario che oscilla)	134
131	Esercizio	136
132	Esercizio	136
133	Esercizio	137
134	Esercizio	138
135	Esercizio (Funzioni iperboliche)	145
136	Esercizio (Trasformazioni di Lorentz inverse)	146

137	Esercizio	147
138	Esercizio	148
139	Esercizio	148
140	Esercizio	148
141	Esercizio (Trasformazioni e metriche invarianti)	148
142	Esercizio (ContraZIONE delle lunghezze)	149
143	Esercizio (DilataZIONE dei tempi)	150
144	Esercizio	151
145	Esercizio (Viaggio della navicella)	151
146	Esercizio	152
147	Esercizio (ContraZIONE del quadro)	153
148	Esercizio (ContraZIONE del quadro inclinato)	153
149	Esercizio	153
150	Esercizio	153
151	Esercizio (Composizione delle velocità)	154
152	Esercizio (Limite non relativistico)	154
153	Esercizio	155
154	Esercizio	161
155	Esercizio (Dado a 6 facce)	161
156	Esercizio (Dado truccato a 6 facce)	162
157	Esercizio	162
158	Esercizio	164
159	Esercizio	164
160	Esercizio	164
161	Esercizio	164
162	Esercizio	164
163	Esercizio	164
164	Esercizio	165
165	Esercizio	166
166	Esercizio	166
167	Esercizio (Lancio di due monete)	167
168	Esercizio (Dado e moneta)	167
169	Esercizio	167
170	Esercizio	167
171	Esercizio	167
172	Esercizio	169
173	Esercizio (Distribuzione binomiale)	169
174	Esercizio	170