



FISICA GENERALE - I MODULO

Cenni di Analisi

Calcolo Vettoriale

Definizione di Fisica e Osservabili

Si definisce "Fisica" una descrizione quantitativa dell'evoluzione (temporale e spaziale) degli osservabili. Si definisce un'osservabile una grandezza fisica che può essere misurata.

Le osservabili possono essere scalari o vettoriali a seconda di comportano.

Sono **Scalari** tutte le osservabili costituite da un numero e da un'unità di misura

Sono esempi di scalari la massa, la carica elettrica, la distanza, la temperatura e l'energia

Sono **Vettori** tutte le osservabili costituiti da una serie di numeri (generalmente 2 o 3) seguiti da un'unità di misura

Sono esempi di vettori la posizione, l'accelerazione, la velocità, il campo elettrico e il campo magnetico

Consideriamo lo spazio vettoriale V su \mathbb{R} con $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

Possiamo definire le seguenti operazioni tra vettori e scalari:

- Moltiplicazione Scalare: $\lambda \vec{v}_1 \in V$
- Somma tra Vettori: $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$
- Prodotto Scalare: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \in \mathbb{R}$.

In particolare si definisce Norma di un vettore $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle} > 0 \in \mathbb{R}$

- Prodotto Vettoriale: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito come

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_i & \vec{e}_j & \vec{e}_k \\ v_{1,i} & v_{1,j} & v_{1,k} \\ v_{2,i} & v_{2,j} & v_{1,k} \end{pmatrix}$$

Proprietà del Prodotto Scalare $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

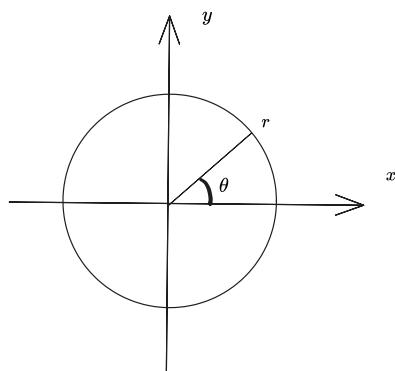
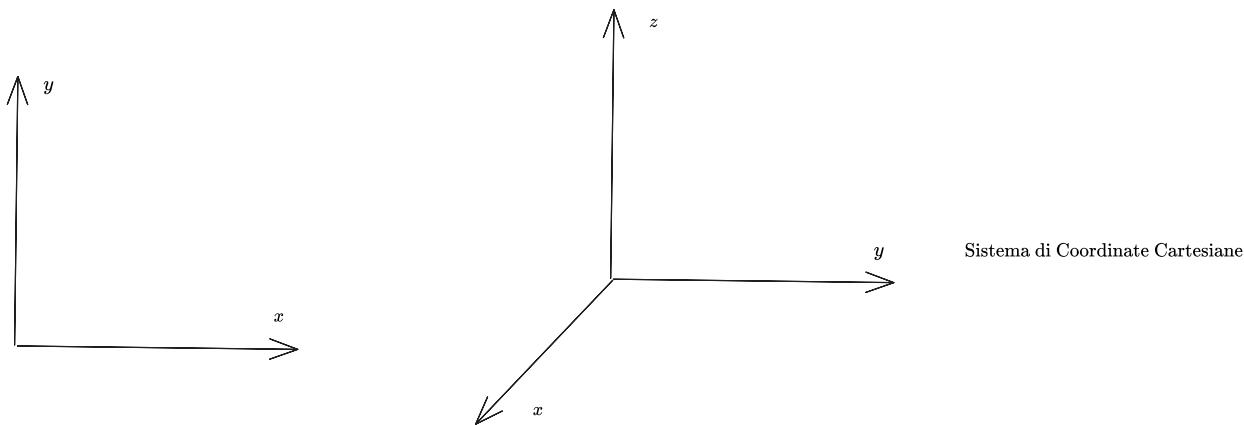
- Simmetrico: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle$
- Bilineare: $\langle \vec{v}_1, \lambda \vec{v}_2 \rangle = \lambda \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \langle \lambda \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$
- Positivo: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle > 0, \forall \vec{v}_1 \neq 0$

Proprietà del Prodotto Vettoriale

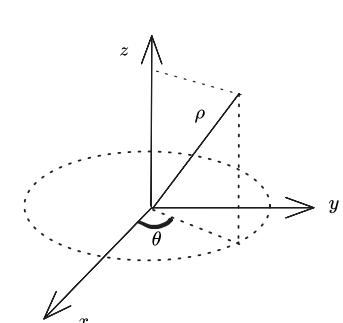
- Antisimmetrico: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1$
- Bilineare: $(\lambda \vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times (\lambda \vec{v}_2)$
- Distributivo rispetto alla Somma: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \times \vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 + \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$
- Identità di Jacobi: $\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) + \vec{v}_3 \times (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) + \vec{v}_2 \times (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) = 0$

Sistema di Coordinate

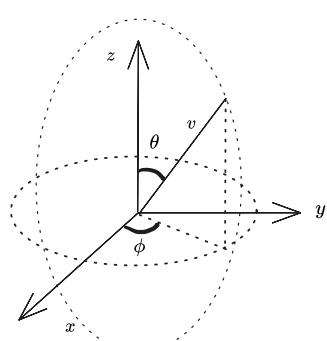
Vi sono il sistema di Coordinate Cartesiane che sono quelle Standard sia in \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , quelle Polari in \mathbb{R}^2 , quelle Cilindriche e quelle Sferiche in \mathbb{R}^3



Sistema di Coordinate Polari



Sistema di Coordinate Cilindriche



Sistema di Coordinate Sferiche

Sistemi di Conversione per i sistemi di Coordinate da quelle Cartesiane

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema di Coordinate Cartesiane} \\ \begin{cases} v_x \\ v_y \end{cases} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema di Coordinate Polari} \\ \begin{cases} v_x = r \cos(\theta) \\ v_y = r \sin(\theta) \end{cases} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema di Coordinate Cartesiane} \\ \begin{cases} v_x \\ v_y \\ v_z \end{cases} \end{array} \right. &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema di Coordinate Cilindriche} \\ \begin{cases} v_x = r \cos(\theta) \\ v_y = r \sin(\theta) \\ v_z = z \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema di Coordinate Sferiche} \\ \begin{cases} v_x = v \sin(\theta) \cos(\phi) \\ v_y = v \sin(\theta) \sin(\phi) \\ v_z = v \cos(\theta) \end{cases} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Derivate parziali

Definizione di Derivata di una Funzione

Sia $f(x)$ una funzione (scalare) $x \in \mathbb{R} \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$

Il cambiamento di $f(x)$ con x è dato dalla derivata della funzione definito tramite il limite

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}$$

che è uguale al tasso di cambiamento di f su x

Questo discorso può essere ampliato anche nel caso si tratta di $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

In questo caso possiamo prendere $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$ una funzione scalare. Possiamo scrivere allora $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Definizione di Derivata Parziale di una Funzione Scalare (Campo Scalare)

Sia $f(\vec{x})$ una funzione scalare $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Si definisce derivata parziale di $f(\vec{x})$ lungo la direzione i il valore del limite

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta}$$

Esempio di Derivate Parziali

Sia $f(x_1, x_2) = x_1^3 x_2 + x_2^4$. Calcoliamo le derivate parziali sia secondo x_1 sia secondo x_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x_1 + \Delta)^3 x_2 + x_2^4 - (x_1^3 x_2 + x_2^4)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x_1^3 + 3x_1^2 \Delta + \dots) x_2 + x_2^4 - x_1^3 x_2 - x_2^4}{\Delta} = 3x_1^2 x_2 \end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga si ha che $\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{x_1^3 (x_2 + \Delta) + (x_2 + \Delta)^4 - (x_1^3 x_2 + x_2^4)}{\Delta} = x_1^3 + 4x_2^3$

Definizione di Derivata Parziale di un Campo Vettoriale

Se \vec{f} è un campo vettoriale, ossia $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3$, ossia ad ogni punto dello spazio è associato un vettore (f_x, f_y, f_z) dove $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$ sono dei campi scalari, possiamo scrivere quindi:

$$\vec{f}(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

Quindi le derivate parziali di \vec{f} sono:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x}, \frac{\partial f_z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial y}, \frac{\partial f_y}{\partial y}, \frac{\partial f_z}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \left(\frac{\partial f_x}{\partial z}, \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_z}{\partial z} \right)$$

Esempio di derivate parziali di un Campo Vettoriale

Sia $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2^2, x_3 x_2^4)$

Allora possiamo calcolare le derivate parziali come:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 + x_3), \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2^2), \frac{\partial}{\partial x_1}(x_3 x_2^4) \right) = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1 + x_3), \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2^2), \frac{\partial}{\partial x_2}(x_3 x_2^4) \right) = (0, 2x_2, 4x_3 x_2^3)$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1 + x_3), \frac{\partial}{\partial x_3}(x_2^2), \frac{\partial}{\partial x_3}(x_3 x_2^4) \right) = (1, 0, x_2^4)$$

Le derivate parziali di un vettore sono tre vettori

Calcolo Vettoriale

L'obiettivo del calcolo vettoriale è quello di descrivere matematicamente il cambiamento nello spazio di quantità/osservabili, sia scalari, $f(x, y, z)$ ad esempio, sia vettoriali $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$

Tutto ciò supponendo che $f, F_\alpha \in C^\infty$ con $\alpha \in \{x, y, z\}$

Definizione di Gradiente

Si definisce Gradiente di un Campo Scalare come:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \text{dove } \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Il Gradiente prende uno scalare in \mathbb{R} e lo rende un vettore $\vec{\nabla} f \in \mathbb{R}^3$

Quindi il Gradiente di un campo scalare è un campo vettoriale

Definizione di Laplaciano

Si definisce Laplaciano di un Campo Scalare come:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f \in \mathbb{R} \rightarrow \nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \in \mathbb{R} \\ \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quindi $\nabla^2 f$ è un Campo Scalare

Definizione di Divergenza

Si definisce Divergenza di un Campo Vettoriale \vec{F} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$$

La Divergenza misura la tendenza delle linee di campo a convergere o divergere in un punto detto sorgente

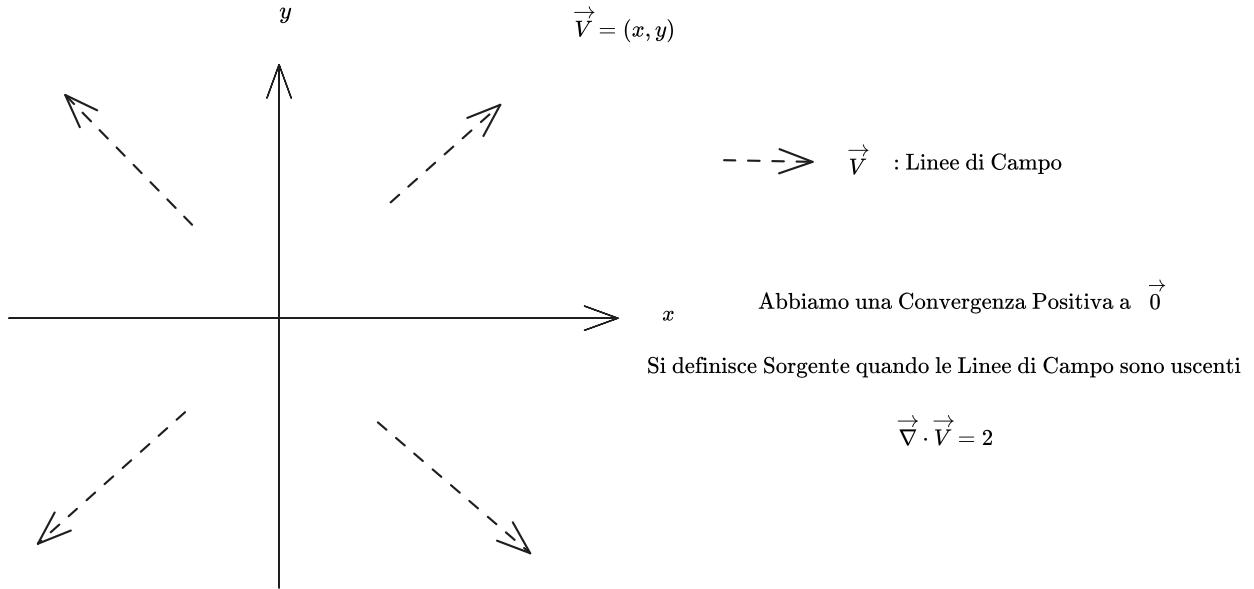
Esempio di Convergenza e Divergenza

Consideriamo $\vec{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La divergenza è data da

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot (V_x, V_y) = \left(\frac{\partial V_x}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)$$

Assumendo che

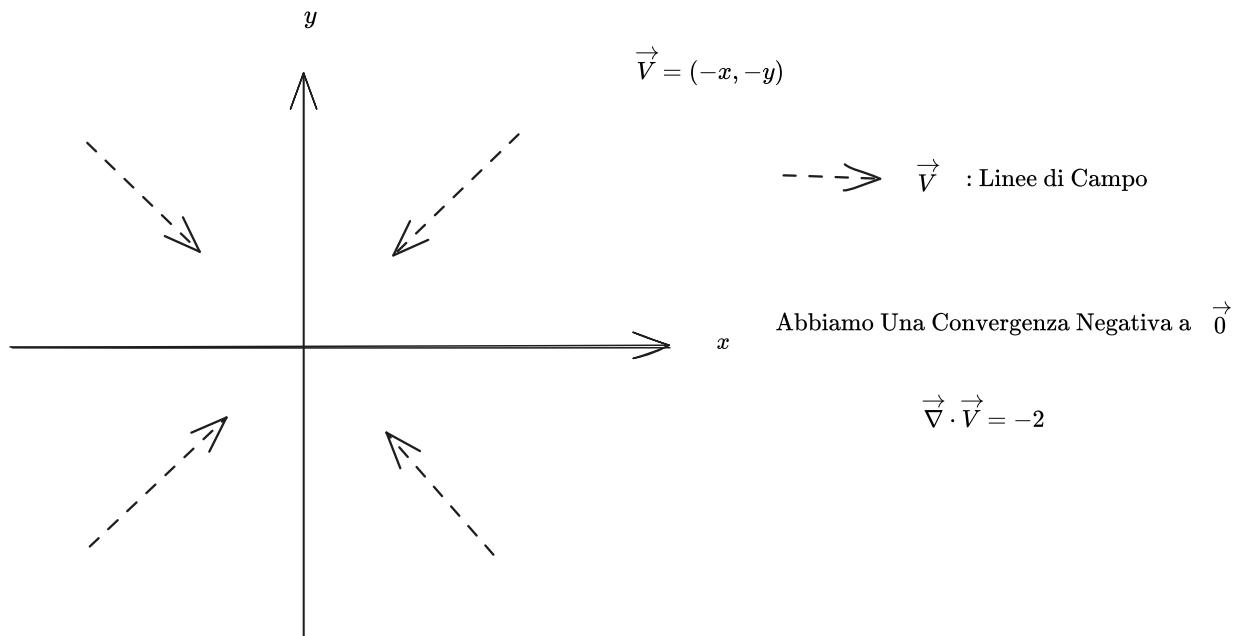
$$\frac{\partial V_x}{\partial x} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} > 0$$



Se assumiamo invece che

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_y}{\partial y} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V} < 0$$

Allora si ha una divergenza negativa, quindi i vettori sono entranti e le linee di campo sono convergenti



Definizione di Rotore

Si definisce Rotore di un campo vettoriale \vec{F} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

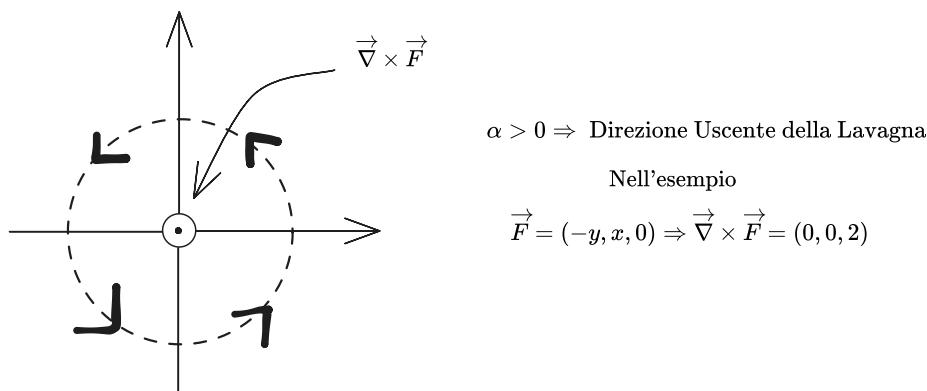
Il Rotore misura la rotazione infinitesima del Campo Vettoriale \vec{F}

Esempio Del Rotore

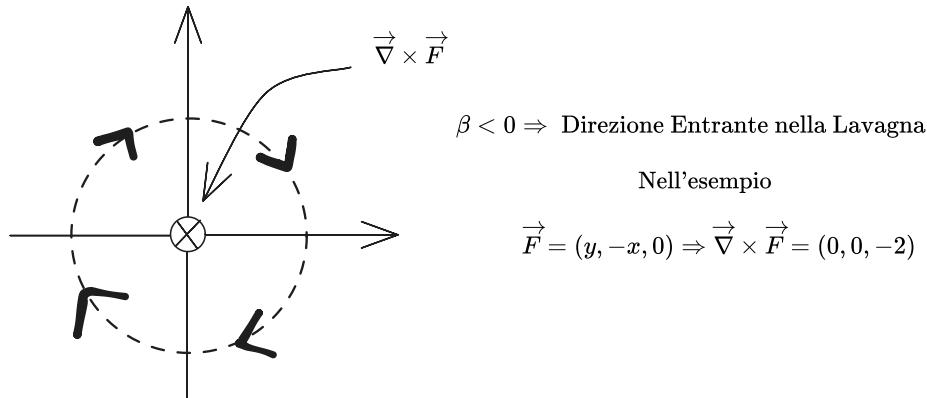
Per il prossimo esempio assumiamo per semplicità che $F_z = \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$, per pura questione di disegni
Con questa considerazione otteniamo che

$$\vec{F} = (F_x, F_y, 0) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} > 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, \alpha), \alpha > 0$$



$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} < 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, \beta), \beta < 0$$



In generale la direzione del Rotore segue è data dalla regola della Mano Destra

Proprietà di Linearità degli Operatori precedenti

$\forall f, g$ campi scalari, $\forall \vec{F}, \vec{G}$ campi vettoriali e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $\vec{\nabla}(\lambda f + g) = \lambda \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
- $\nabla^2(\lambda f + g) = \lambda \nabla^2 f + \nabla^2 g$
- $\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{F} + \vec{G}) = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
- $\vec{\nabla} \times (\lambda \vec{F} + \vec{G}) = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$

Dimostrazione:

Seguono direttamente dalle proprietà delle Derivate

□

Altre Proprietà

$\forall f, g$ campi scalari, $\forall \vec{F}, \vec{G}$ campi vettoriali:

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f$
- $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$
- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = -\nabla^2 \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$

Integrali di Linea e Circuitazione

Definizione di Curva

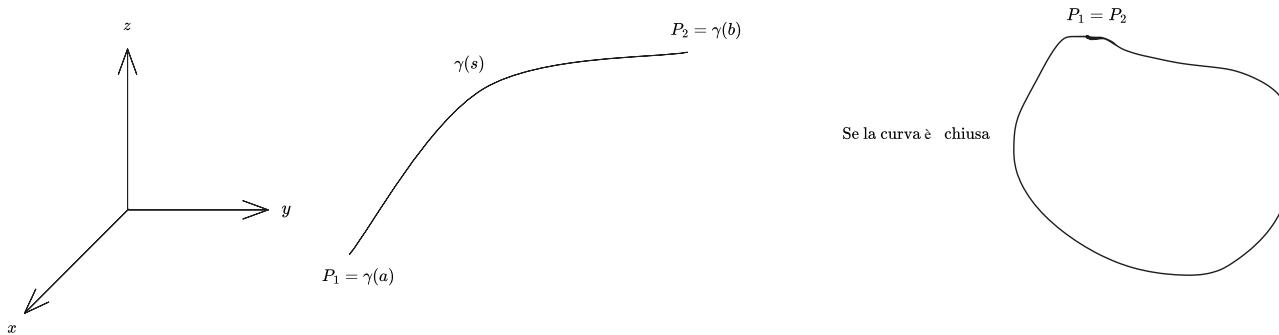
Una curva γ in \mathbb{R}^3 dal punto P_1 al punto P_2 è una funzione

$$\gamma(s) : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dove $\gamma(a) = P_1$, $\gamma(b) = P_2$ e le cui coordinate $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ sono funzioni C^n , $n \geq 1$ se $s \in]a, b[$ e con derivata destra ben definita se $s = a$ e derivata sinistra ben definita se $s = b$

Definizione di Curva Chiusa

Si definisce γ una curva chiusa se $P_1 = P_2$



Definizione di Curva Orientata

La curva γ è orientata/percorsa da P_1 a P_2

La curva $-\gamma(s) \equiv \gamma(b - (s + a)) : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ha la stessa immagine di $\gamma(s)$ ma $P_1 = \gamma(b)$ e $P_2 = \gamma(a)$ e $-\gamma$ è percorsa in senso opposto

Definizione di Vettore Tangente

$\forall s \in [a, b]$ possiamo definire il vettore tangente a γ in s come

$$\vec{t}_\gamma(s) = \left(\frac{d}{dx}x(s), \frac{d}{dy}y(s), \frac{d}{dz}z(s) \right)$$

Definizione di Lunghezza della γ

La lunghezza della curva γ è dato dall'integrale

$$\ell_\gamma = \int_a^b \underbrace{\|\vec{t}(s)\|}_{d\ell} ds$$

Dove $d\ell$ è la lunghezza di tratto infinitesima di γ compresa tra $\gamma(s)$ e $\gamma(s + ds)$

Esempi di Calcolo della Lunghezza della Curva

Sia $\gamma(s)$ la curva $\gamma(s) = (s, 0, 0)$ con $s \in [0, L]$, calcolare ℓ_γ

Il vettore tangente è calcolato come:

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d}{ds}(s, 0, 0) = (1, 0, 0) = \vec{t}(s)$$

Poiché è già normalizzato, abbiamo che l'elemento di linea di $d\ell = (ds, 0, 0)$, quindi

$$\ell_\gamma = \int_0^L ds = L$$

In una circonferenza: sia $\gamma(\phi)$ la curva data da $\gamma(\phi) = R(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ con $\phi \in [0, 2\pi[$

Il vettore tangente è:

$$\frac{d\gamma}{d\phi} = R \frac{d}{d\phi}(\cos \phi, \sin \phi, 0) = R(-\sin \phi, \cos \phi, 0) = \vec{t}_\gamma(\phi)$$

Quindi la lunghezza è

$$\ell_\gamma = \int_0^{2\pi} d\phi R = R2\pi$$

Se avessimo avuto una curva qualsiasi, avremmo avuto $R = R(\phi)$

Definizione di Integrale di Linea in un Campo Vettoriale

Su un \vec{F} campo vettoriale in \mathbb{R}^3 . L'integrale di linea di \vec{F} su una curva γ è definito come:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \times d\ell = \int_a^b \vec{F}(s) \cdot \vec{t}(s) ds = \int_a^b \|\vec{F}(s)\| \cdot \|\vec{t}(s)\| \cos \theta ds$$

Proposizione

$$\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Visto che $-\gamma$ è percorso nel senso opposto: $d\vec{\ell}(\gamma) = -d\vec{\ell}(-\gamma)$

Definizione di Circuitazione

Se γ è chiusa, l'integrale di linea si chiama Circuitazione e si indica:

$$C_{\gamma}(\vec{F}) = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Teorema

La circuitazione di un campo vettoriale è nulla su qualunque curva chiusa se e solo se l'integrale di linea su una qualunque curva aperto dipende solo dai punti estremi e non dal percorso della curva stessa

Definizione di Campo Conservativo

Un campo vettoriale è conservativo se

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0, \forall \gamma \text{ chiusa}$$

Teorema di Helmholtz

Un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 è completamente determinato dalla sua divergenza e dal suo rotore, ossia, per ogni campo vettoriale \vec{F} campo vettoriale in \mathbb{R}^3 si ha che

$$\vec{F} = \nabla \cdot V + \nabla \times \vec{U}$$

Dove V è un campo scalare e \vec{U} è un campo vettoriale

Teorema

Un campo vettoriale è conservativo se e solo se è di tipo gradiente, ossia $\vec{F} = \nabla \cdot V$

Esempio di Campo Conservativo

Sia \vec{F} un campo vettoriale su \mathbb{R}^2 dato da

$$\vec{F} = \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$$

dove \vec{u}_r non è altro che il versore direzione radiale e siano P_1 e P_2 due punti definiti come
 $P_1(r_1, \theta_1) = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$

Vogliamo capire se è conservativo oppure no, sia quindi γ una qualsiasi curva

$$\int_{\gamma(P_1)}^{\gamma(P_2)} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \xrightarrow{\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y} \int_{\gamma(P_1)}^{\gamma(P_2)} \underbrace{\frac{1}{r^2} (\cos \theta, \sin \theta)}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{\left(\frac{dx_\gamma}{ds}, \frac{dy_\gamma}{ds} \right)}_{d\vec{\ell}} ds = \int_{\gamma(P_1)}^{\gamma(P_2)} \left(\frac{1}{r^2} \cos \theta \frac{dx_\gamma}{ds} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{dy_\gamma}{ds} \right) ds$$

Tuttavia, poiché si ha che $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos \theta = \frac{x_\gamma}{s}$ e $\sin \theta = \frac{y_\gamma}{s}$, si ha che l'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{(x_\gamma^2 + y_\gamma^2)^{3/2}} \left(x_\gamma \frac{dx_\gamma}{ds} + y_\gamma \frac{dy_\gamma}{ds} \right) ds = \int \frac{1}{(x_\gamma^2 + y_\gamma^2)^{3/2}} (x_\gamma dx_\gamma + y_\gamma dy_\gamma) ds$$

Passando poi in coordinate polari (dalla definizione di r^2) si ottiene che

$$\int_{r(P_1)}^{r(P_2)} \frac{1}{r^2} dr = \left[-\frac{1}{r} \right]_{r(P_1)}^{r(P_2)} = -\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Poiché abbiamo che è completamente indipendente da γ (è indipendente dalla curva), dipende esclusivamente da P_1 e P_2 quindi \vec{F} è conservativo e il suo potenziale è $V = -\frac{1}{r}$

Esempio di Campo Non Conservativo

Sia $\vec{F} = (y, x^2)$ un campo vettoriale su \mathbb{R}^2 . \vec{F} è conservativo?

Se \vec{F} fosse conservativo, allora esisterebbe un potenziale tale che $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot V$ cioè, scritto in componenti:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} V \quad \wedge \quad F_y = \frac{\partial}{\partial y} V \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\partial}{\partial x} V \quad \wedge \quad x^2 = \frac{\partial}{\partial y} V$$

Se integriamo queste componenti otteniamo che:

$$\begin{cases} V(x, y) = yx + f(y) \\ V(x, y) = x^2 y + g(y) \end{cases}$$

Tuttavia, poiché sono incompatibili, non esiste un campo scalare tale, quindi non è conservativo

Integrali di Superficie e Flusso

Definizione di Superficie

Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è una funzione

$$\sigma : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

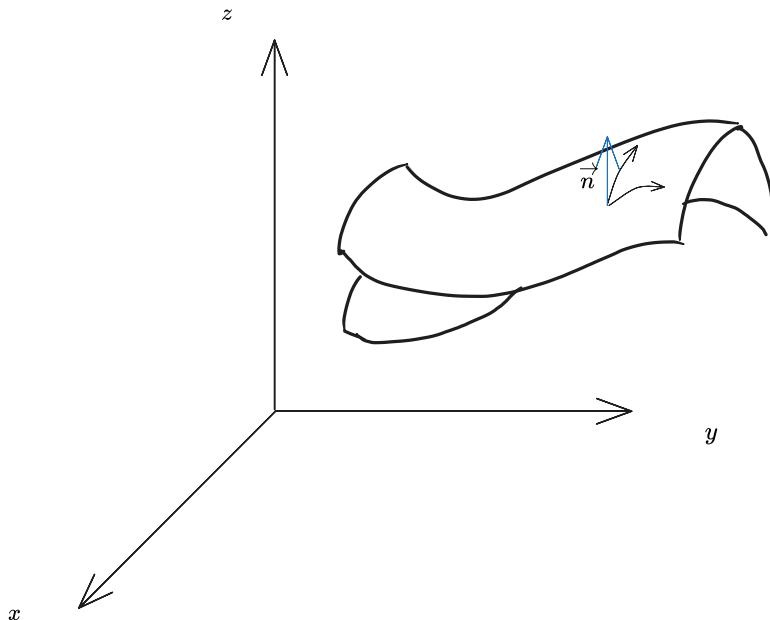
dove il dominio è $D = \{(u, v)\}$ le cui coordinate in \mathbb{R}^3 sono date da

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

con x, y, z funzioni a immagine in \mathbb{R}^3 di tipo C^1 se $(u, v) \in D$

In ogni punto appartenente al dominio è possibile definire due vettori tangentini alla superficie, uno alla direzione \vec{u} e l'altro a \vec{v}

$$\begin{aligned} \vec{t}_u(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \vec{t}_v(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \end{aligned}$$



Definizione di Vettore Normale

Possiamo definire il vettore normale alla superficie σ come

$$\vec{n}(u, v) = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$$

Se $\vec{n} \neq 0$ per ogni punto in σ allora possiamo dire che la superficie è orientabile

Possiamo calcolare l'area della superficie risolvendo l'integrale:

$$A_S = \iint_D \underbrace{\|\vec{n}(u, v)\| du dv}_{dA}$$

Dove dA rappresenta l'area infinitesima mentre possiamo definire come l'elemento di superficie il vettore $d\vec{S} = \vec{n}(u, v) du dv$

Esempi di Calcolo di Superficie

Area di un Rettangolo

Sia $\sigma(u, v) = (u, v, 0)$ con $u \in [0, L_1]$ e $v \in [0, L_2]$

La prima cosa da fare è trovare i vettori tangenti: $\vec{t}_u = (1, 0, 0)$ e $\vec{t}_v = (0, 1, 0)$

Poi il vettore normale: $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

Poi la norma del vettore normale: $\|\vec{n}\| = \|(0, 0, 1)\| = 1$

E infine il calcolo dell'integrale:

$$A_S = \iint \|\vec{n}\| du dv = \int_0^{L_1} du \int_0^{L_2} dv = L_1 L_2$$

Area di un Cerchio

Sia $\sigma(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0)$ con $r \in [0, R]$ e $\phi \in [0, 2\pi[$

Calcoliamo i vettori tangenti: $\vec{t}_r = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$ e $\vec{t}_\phi = r(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$

Troviamo il vettore normale: $\vec{n} = \vec{t}_r \times \vec{t}_\phi = (\cos \phi, \sin \phi, 0) \times r(-\sin \phi, \cos \phi, 0) = r(0, 0, 1)$ da cui segue che la norma è r

Abbiamo che l'elemento di superficie è $d\vec{s} = (0, 0, 1)r dr d\phi$

Calcoliamo l'area:

$$A_S = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi = \frac{R^2}{2} 2\pi = R^2 \pi$$

Elemento di Superficie e Area di un Cilindro

Sia $\sigma(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)$ con $\phi \in [0, 2\pi[$ e $z \in [0, L]$

Calcoliamo i vettori tangenti: $\vec{t}_\phi = R(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$ e $\vec{t}_z = (0, 0, 1)$

Il vettore normale quindi sarà: $\vec{n} = \vec{t}_\phi \times \vec{t}_z = R\vec{\ell}_r$ che coincide con la direzione verticale uscente

Seguono subito che la norma è pari a $\|\vec{n}\| = R$ e l'elemento di superficie è $d\vec{s} = R(\cos \phi, \sin \phi, 0) d\phi dz$

Quindi l'area del cilindro risulta essere:

$$A_S = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} R d\phi dz = R2\phi L$$

Elemento di Superficie e Area di una Sfera

Sia $\sigma(\theta, \phi) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta)$ con $\theta \in [0, \pi[$ e $\phi \in [0, 2\pi[$

Otteniamo che i vettori tangenti sono $\vec{t}_\theta = R(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$ e $\vec{t}_\phi = R(-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$

Da ciò segue che il vettore normale è

$$\vec{n} = \vec{t}_\theta \times \vec{t}_\phi = R^2 \cdot \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & 0 \end{bmatrix} = R^2(\sin^2 \theta \cos \phi, -\sin^2 \theta \sin \phi, \cos \theta \sin \phi)$$

Da cui $\|\vec{n}\| = R^2 \sin \theta$ e da cui:

$$A_S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R^2$$

Definizione di Flusso

Sia \vec{F} un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 . Si definisce integrale di superficie o Flusso di \vec{F} su una superficie S come l'integrale:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_D \vec{F}(u, v) \cdot \vec{n}(u, v) du dv$$

Che può essere calcolato come:

$$\iint_D \|\vec{F}(u, v)\| \|\vec{n}(u, v)\| \cos(u, v) du dv$$

In particolare, se $\vec{F} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = 0$, quindi il flusso è nullo

Poiché è importante l'orientamento della superficie si ha che vale la relazione:

$$\iint_{-S} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Inoltre se S è una superficie chiusa si ha che:

$$\Phi_S(\vec{F}) = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Definizione di Solenoide

\vec{F} è un solenoide $\Leftrightarrow \Phi_S(\vec{F}) = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}, \forall S$ chiusa

Teorema

Un campo vettoriale \vec{F} è un solenoide se e solo se è di tipo rotore, cioè $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$)

Elementi di Volume

Possiamo distinguere tre casi a seconda del sistema di riferimento, il Volume può essere calcolato in 3 modi differenti:

- **Coordinate Cartesiane** (x, y, z): In questo caso l'elemento infinitesimo di volume è $dV = dx \ dy \ dz$, quindi il volume diventa:

$$V = \iiint dV = \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^{L_z} dz = L_x L_y L_z$$

- **Coordinate Cilindriche** (r, ϕ, z): Si ottiene che $dV = r \ dr \ d\phi \ dz$ da cui:

$$V = \iiint dV = \int_0^R r \ dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz = \pi R^2 L$$

- **Coordinate Sferiche** (r, θ, ϕ): Si ha che $dV = r^2 \sin \theta \ dr \ \theta \ d\phi$, quindi il volume sarà:

$$V = \iiint dV = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta \ d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Teoremi di Stokes

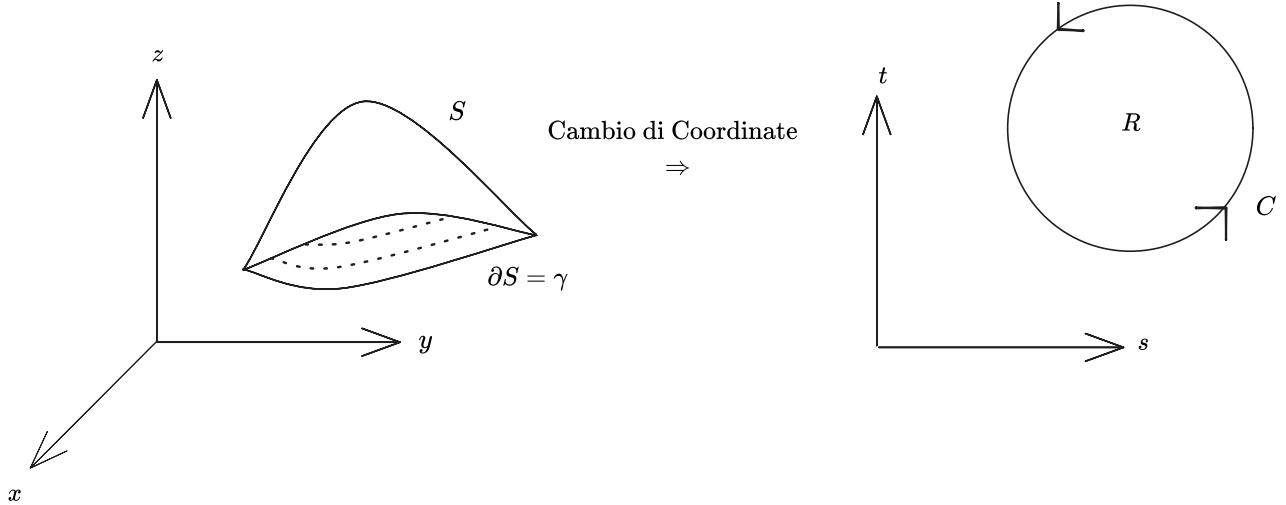
Teorema di Stokes

Se S è una superficie qualunque che ha la curva chiusa γ come bordo ($\Leftrightarrow \gamma = \partial S$), allora

$$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{F} \cdot d\ell = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

"Dimostrazione":

Mostriamo questo cambiamento di coordinate:



Partendo dal primo integrale abbiamo che

$$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{F} \cdot d\ell$$

Sapendo che $d\ell$ è un vettore, possiamo sostituirlo con le sue coordinate in s e t , quindi:

$$d\ell = \frac{\partial \ell}{\partial s} ds + \frac{\partial \ell}{\partial t} dt \Rightarrow \oint_{\gamma=\partial S} \vec{F} \cdot d\ell = \oint_C \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial s} ds + \vec{F} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial t} dt \right)$$

Definiamo ora G_1 e G_2 nel seguente modo:

$$G_1 := \vec{F} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial s} \quad G_2 := \vec{F} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial t}$$

Otteniamo quindi che l'integrale iniziale diventa:

$$\oint_{\gamma=\partial S} \vec{F} \cdot d\ell = \oint_C \left(\vec{F} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial s} ds + \vec{F} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial t} dt \right) = \oint_C (G_1 ds + G_2 dt) \xrightarrow{\vec{G}=(G_1, G_2), \vec{s}=(s, t)} \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{s}$$

Partendo dall'altro integrale otteniamo (sostituendo con il vettore normale $d\vec{S}$ con il suo vettore normale):

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} ds dt$$

Dalla definizione del vettore normale per una superficie, abbiamo che:

$$\vec{n} = \frac{\partial \ell}{\partial s} \times \frac{\partial \ell}{\partial t} \xrightarrow{\text{Quindi}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \left(\frac{\partial \ell}{\partial s} \times \frac{\partial \ell}{\partial t} \right) = \frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t}$$

Quest'ultimo passaggio è frutto di calcoli che non sono stati fatti per pura mancanza di tempo, ma in teoria basterebbe

sviluppare i prodotti vettoriali, poi quello scalare e poi sostituire le definizioni di G_1 e G_2 poste prima.
Otteniamo quindi che:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds dt \xrightarrow{\text{Teorema di Green}} \int_{\partial R=G} (G_1 ds + G_2 dt)$$

Poiché abbiamo raggiunto un'uguaglianza, abbiamo verificato l'uguaglianza

□

Teorema di Green (Enunciato Generale)

Sia S una superficie e sia ∂S , sua frontiera, una curva chiusa semplice positivamente orientata (in ogni punto della frontiera, l'angolo formato tra il vettore tangente e il vettore normale alla curva in senso orario è $\pi/2$). Siano f, g due funzioni reali con variabile reale che hanno le derivate parziali continue su una regione aperta che contiene S , allora:

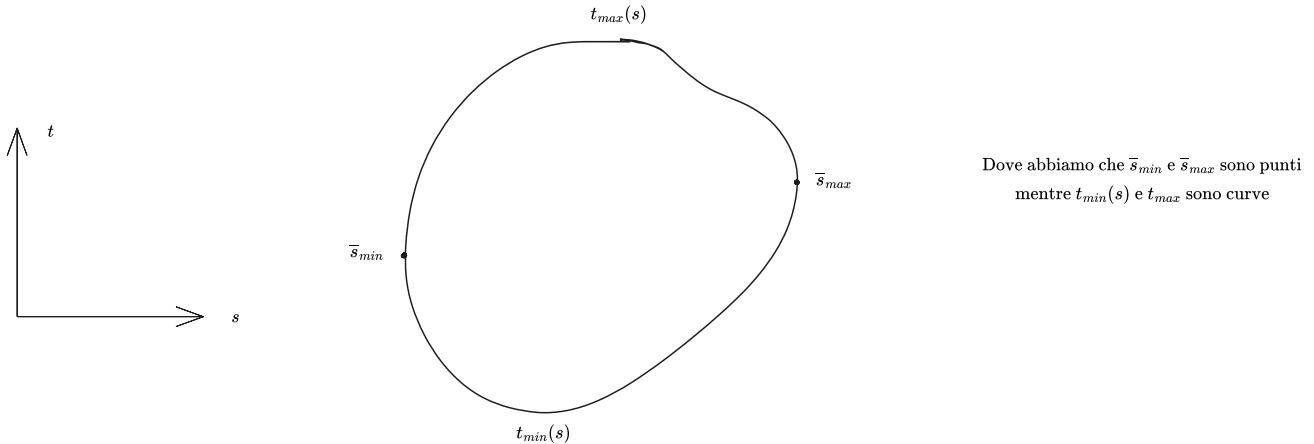
$$\oint_{\partial S} (f dx + g dy) = \iint_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

Dimostrazione:

Adattiamo l'enunciato in modo da essere applicabile direttamente alla dimostrazione del teorema precedente

Poniamo quindi $f = G_1$, $g = G_2$, $x = s$, $y = t$, $\partial S = C$

Consideriamo quindi la curva C , suddivisa nel seguente modo:



Vogliamo semplificare:

$$\iint_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_R \left(\frac{\partial G_2}{\partial s} - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) ds dt$$

Poiché sono due funzioni distinte G_1 e G_2 possiamo partire prima da G_1 (per poi continuare dopo in maniera analoga):

$$\begin{aligned} \int_R -\frac{\partial G_1}{\partial t} ds dt &= - \int_{\bar{s}_{min}}^{\bar{s}_{max}} ds \int_{t_{min}(s)}^{t_{max}(s)} \frac{\partial G_1}{\partial t} dt = - \int [G_1(t_{max}(s)) - G_1(t_{min}(s))] ds \\ &= - \int_{\bar{s}_{min}}^{\bar{s}_{max}} [G_1 t_{max}(s)] ds + \int_{\bar{s}_{min}}^{\bar{s}_{max}} [G_1 t_{min}(s)] ds = \int_C G_1 ds \end{aligned}$$

Posso fare poi la stessa identica cosa per G_2 , considerando i punti \bar{t}_{min} e \bar{t}_{max} e le curve $s_{min}(t)$ e $s_{max}(t)$
In maniera del tutto analoga si ottiene che:

$$\int_R \frac{\partial G_2}{\partial s} ds dt = \int_C G_2 dt$$

La tesi segue unendo sostituendo quello ottenuto.

□

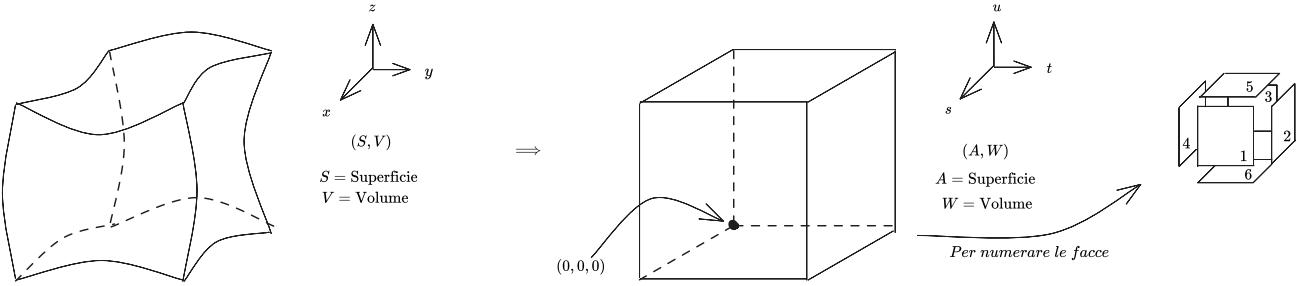
Teorema della Divergenza

Se V è un qualunque volume che ha la superficie chiusa S come bordo ($\partial V = S$), allora vale:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

"Dimostrazione":

Consideriamo un solido qualsiasi e con un cambio di variabili rendiamolo un solido rettangolare:



I vettori normali associati alle varie facce saranno:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (1, 0, 0) & \vec{n}_3 &= (-1, 0, 0) & \vec{n}_5 &= -\vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 &= (0, 1, 0) & \vec{n}_4 &= (0, -1, 0) & \vec{n}_6 &= -\vec{n}_2 \\ \vec{n}_5 &= (0, 0, 1) & \vec{n}_6 &= (0, 0, -1) & \vec{n}_6 &= -\vec{n}_5\end{aligned}$$

Verifichiamo effettivamente l'uguaglianza.

Poiché abbiamo che l'integrale di sinistra rappresenta la superficie del solido, possiamo scrivere:

$$\oint_{A=\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}_2 + \int_{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{A}_3 + \int_{A_4} \vec{F} \cdot d\vec{A}_4 + \int_{A_5} \vec{F} \cdot d\vec{A}_5 + \int_{A_6} \vec{F} \cdot d\vec{A}_6$$

Se consideriamo \vec{F} come vettore delle sue componenti otteniamo che $\vec{F} = (F_s, F_t, F_u)$, ognuno calcolato in (s, t, u) . Facciamo esplicito il caso della faccia frontale A_1 , gli altri seguono in modo analogo:

$$A_1 = \int_0^L \int_0^L (F_s, F_t, F_u) \Big|_{s=L} \cdot (1, 0, 0) dt du = \int_0^L \int_0^L F_s(L, t, u) dt du$$

In sintesi, visto che la faccia A_1 ha coordinate del tipo (L, s, t) , possiamo sostituire F_s direttamente con L , facendo poi il prodotto scalare con il vettore normale di A_1 si ottiene il risultato ottenuto.

Facendo questa cosa per tutte le facce e poi sostituendo nel calcolo dell'integrale si ottiene che:

$$\begin{aligned}\oint_{A=\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{A}_1 + \int_{A_2} \vec{F} \cdot d\vec{A}_2 + \int_{A_3} \vec{F} \cdot d\vec{A}_3 + \int_{A_4} \vec{F} \cdot d\vec{A}_4 + \int_{A_5} \vec{F} \cdot d\vec{A}_5 + \int_{A_6} \vec{F} \cdot d\vec{A}_6 \\ &= \int_0^L \int_0^L F_s(L, t, u) dt du + \int_0^L \int_0^L F_t(s, L, u) ds du + \int_0^L \int_0^L -F_s(0, t, u) dt du + \\ &\quad \int_0^L \int_0^L -F_t(s, 0, u) ds du + \int_0^L \int_0^L F_u(s, t, L) ds dt + \int_0^L \int_0^L -F_u(s, t, 0) ds dt\end{aligned}$$

Raccogliendo tutti i termini con lo stesso differenziale si ottiene:

$$\begin{aligned}\oint_{A=\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{A} &= \int_0^L \int_0^L F_s(L, t, u) dt du + \int_0^L \int_0^L F_t(s, L, u) ds du + \int_0^L \int_0^L -F_s(0, t, u) dt du + \\ &\quad \int_0^L \int_0^L -F_t(s, 0, u) ds du + \int_0^L \int_0^L F_u(s, t, L) ds dt + \int_0^L \int_0^L -F_u(s, t, 0) ds dt = \\ &= \int_0^L \int_0^L [F_s(L, t, u) - F_s(0, t, u)] dt du + \int_0^L \int_0^L [F_t(s, L, u) - F_t(s, 0, u)] ds du + \int_0^L \int_0^L [F_u(s, t, L) - F_u(s, t, 0)] ds dt = \\ &= \int_0^L \int_0^L \int_0^L \left(\frac{\partial F_s}{\partial s}, \frac{\partial F_t}{\partial t}, \frac{\partial F_u}{\partial u} \right) ds dt du = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} \right) \cdot (F_s, F_t, F_u) ds dt du = \int_W \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dW\end{aligned}$$

□

Cenni di Meccanica

Definizione di Meccanica

La Meccanica del Punto Materiale è caratterizzata dalle sue coordinate dello spazio tridimensionale, misurate in un sistema di riferimento inerziale

Definizione di Vettore Posizione, Velocità e Accelerazione

Si definisce vettore posizione il vettore

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

e viene misurato in metri: $[r] = m$

Si definisce Velocità il tasso di cambiamento di \vec{r} :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e si misura in metri al secondo: $[v] = m/s$

Si definisce Accelerazione il tasso di cambiamento di \vec{v} :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

e si misura in metri al secondo quadrato: $[a] = m/s^2$

Leggi di Newton

- Se $\vec{F} = \vec{0}$, allora il corpo o è fermo o si muove in moto rettilineo uniforme, dove con \vec{F} si intende la forza risultante
- $\vec{F} = m\vec{a}$ dove m è la massa inerziale del corpo, che descrive la resistenza al cambiamento dello stato del corpo
- *Azione e Reazione:* per ogni azione, c'è una reazione di modulo uguale e verso opposto $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$

Poiché un corpo di massa m è soggetto ad una forza \vec{F} , per il secondo principio della dinamica si ha che

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Se la forza è costante, allora si può invertire e si avrebbe che:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Tuttavia, sapendo che la accelerazione, oltre ad essere la derivata seconda della posizione, si ha che è la derivata prima della velocità. Unendo tutto insieme si ha che:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \int_0^{t_f} \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \underbrace{\frac{\vec{F}}{m}}_{\vec{a}} \Rightarrow \vec{v}(t_f) - \vec{v}(0) = \vec{a} \cdot t_f \Rightarrow \vec{v}(t_f) = \vec{v}(0) + \vec{a} \cdot t_f$$

Una cosa simile può essere fatta anche per la posizione, per cui sapendo che la velocità è la derivata prima della posizione:

$$\int_0^{t_f} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^{t_f} \vec{v} dt \Rightarrow \vec{r}(t_f) - \vec{r}(0) = \int_0^{t_f} (\vec{v}(0) + \vec{a}t_f) dt = \vec{v}(0) + \frac{1}{2}\vec{a}t_f^2 \Rightarrow \vec{r}(t_f) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t_f + \frac{1}{2}\vec{a}t_f^2$$

La scelta di avere $t \in [0, t_f]$ è puramente arbitraria

Definizione di Quantità di Moto

Si definisce Quantità di Moto (di traslazione) o Momento di moto il vettore

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

e si misura in kilogrammi per metro al secondo: $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

Notiamo che, se assumiamo che il corpo non perda massa ($\Leftrightarrow \frac{d}{dt}m = 0$), abbiamo che:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \cdot \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{m}\vec{a} = \vec{F}$$

Se la risultante delle forze è nulla, segue allora che la quantità di moto è costante, quindi c'è una legge di conservazione del momento lineare.

Tutte queste formule possono essere adattate anche in coordinate polari.

Infatti data una qualsiasi curva $\gamma(t)$ in \mathbb{R}^2 , può essere descritta sia in funzione di un sistema cartesiano $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, sia in un sistema di coordinate polari $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ attraverso queste formule di cambio variabile:

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t) \sin(\theta(t)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \\ r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \end{cases}$$

Tutto dipende sempre e comunque dal tempo

Possiamo calcolare derivate prima e seconda della posizione in funzione di θ :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \gamma$$

La prima prende il nome di velocità angolare e si misura in s^{-1} mentre la seconda prende il nome di accelerazione angolare e si misura in s^{-2}

Possiamo prendere anche le derivate del vettore distanza, in questo caso otteniamo:

$$\frac{d}{dt}r = \dot{r} \quad \frac{d^2}{dt^2}r = \frac{d}{dt}\dot{r} = \ddot{r}$$

La prima prende il nome di velocità radiale e si misura in metri al secondo m/s e la seconda prende il nome di accelerazione radiale e si misura in metri al secondo quadrato m/s^2

Come nel caso delle coordinate cartesiane, se γ è costante, la possiamo integrare per ottenere:

$$\omega(t_f) = \omega(0) + \gamma t_f \quad \text{e} \quad \theta(t_f) = \theta(0) + \omega(0)t_f + \frac{1}{2}\gamma t_f^2$$

Ritornando al cambiamento di variabili precedente e derivando otteniamo che:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}(r \cos \theta) = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta = v_x \\ \frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}(r \sin \theta) = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta = v_y \end{cases}$$

Tutto in funzione del tempo

In particolare notiamo che:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \vec{u}_x + (\dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) \vec{u}_y = \\ &= \underbrace{\dot{r}(\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)}_{\text{Versore Radiale}} + r\dot{\theta} \underbrace{(-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y)}_{\text{Versore Tangenziale}} = \vec{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Segue subito che $\|\vec{v}_r\| = \dot{r}$ e $[\vec{v}_r] = m/s$ e che $\|\vec{v}_\theta\| = r\dot{\theta}$ e $[\vec{v}_\theta] = m/s$

In maniera del tutto analoga possiamo calcolare anche le derivate di $\vec{v} = \vec{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ e si ottiene che:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{r} \vec{u}_r + \dot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Notiamo quindi che:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \\ \vec{u}_\theta = (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) \end{cases} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \begin{cases} \frac{d}{dt} \vec{u}_r = (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) \dot{\theta} = \vec{u}_\theta \\ \frac{d}{dt} \vec{u}_\theta = (-\cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y) \dot{\theta} = -\dot{\theta} \vec{u}_r \end{cases}$$

Quindi possiamo scrivere l'accelerazione come:

$$\vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \vec{u}_\theta + \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = (\underbrace{\ddot{r} - r \dot{\theta}^2}_{\text{Acc. Radiale}}) \vec{u}_r + (\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}}_{\text{Acc. Tangenziale}}) \vec{u}_\theta$$

Da cui segue che il modulo della accelerazione radiale è $|\ddot{r} - r \dot{\theta}^2|$ e si misura in m/s^2 e che il modulo della accelerazione tangenziale è $|2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}|$ e che si misura in m/s^2

Per il secondo principio della dinamica si può scomporre la forza nella somma di forza tangenziale e radiale:

$$\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta$$

Esiste un caso particolare, che è il **moto circolare** in cui si ha che r è costante nel tempo, quindi $\dot{r} = \ddot{r} = 0$

In questo caso segue subito che $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ mentre $\vec{a} = -r\dot{\theta} \vec{u}_r + r\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

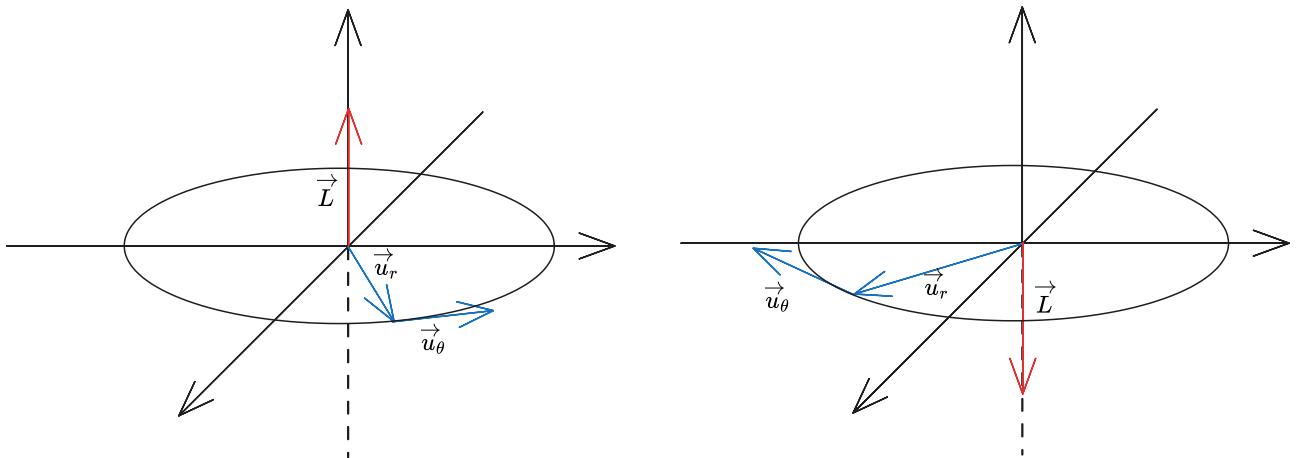
In questo caso si può parlare di quantità di moto di rotazione:

Definizione di Quantità di Moto di Rotazione

S definisce Quantità di Moto di Rotazione o Momento Angolare la quantità:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Segue subito che si misura in kilogrammi per metro quadrato su secondo: $[L] = kg \cdot m^2/s$



Notiamo che, per il fatto che venga usato il prodotto vettoriale, \vec{L} è ortogonale a \vec{r} e a \vec{p}

Definizione di Momento della Forza

Data una forza \vec{F} , si definisce momento della forza la quantità:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Sulle dispense del professore potrebbe essere indicata con \vec{M}

Poiché \vec{L} è in funzione del tempo segue che:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Da cui segue direttamente che se $\vec{\tau} = 0$, allora \vec{L} è costante, quindi si preserva

In particolare, nel moto circolare si ha che $\vec{p} = mr\theta\vec{u}_\theta$, quindi calcolando il prodotto vettoriale si ottiene che

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r\vec{u}_r \times (mr\theta)\vec{u}_\theta = mr^2\theta \vec{u}_r \times \vec{u}_\theta$$

Definizione di Momento di Inerzia

Si definisce Momento di Inerzia la quantità

$$I = mr^2$$

che si misura in kilogrammi per metro quadrato $[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$

Tutte le informazioni appena scritte possono essere riassunte in questa tabella:

Nome	Moto di Traslazione	Moto di Rotazione
Quantità di Moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Evoluzione temporale	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = m\vec{a}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Conservazione	$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ costante	$\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ costante

Un importante risultato di tutto ciò è il **Teorema dell'Energia Cinetica**.

Definizione di Lavoro

Sia \vec{F} una forza e sia $\gamma(t)$ una traiettoria. Si definisce lavoro della forza lungo la traiettoria γ la quantità:

$$W = \int_{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Teorema dell'Energia Cinetica

Sia \vec{F} una forza costante su un corpo di massa m , posizione $\vec{x}(t)$, velocità $\vec{v}(t)$ e accelerazione $\vec{a}(t)$.

Dalla prima legge di Newton segue che Forza e Accelerazione sono collegate tra di loro e attraverso la seconda sappiamo che:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Indichiamo con $\gamma(t)$ la traiettoria. Allora calcolando il lavoro si ottiene che nell'intervallo di tempo $[t_A, t_B]$:

$$W = \int_{\gamma(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma(t)} m\vec{a} \cdot d\vec{x} = \int_{t_A}^{t_B} m\vec{a} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Tuttavia, poiché si ha che

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2$$

Si ha che

$$W(A, B) = \left[\frac{1}{2} m(\vec{v})^2 \right]_{t_A}^{t_B}$$

Questa quantità prende il nome di Energia Cinetica.

Notiamo che se la forza è di tipo conservativo ($\vec{F} = -\vec{\nabla}U$) segue che:

$$W(A, B) = \int_{\gamma(t_A)}^{\gamma(t_B)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int \left(\frac{\partial U_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_{x_3}}{\partial x_3} dx_3 \right)$$

Questo perché

$$U = (U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}) \Rightarrow dU = \frac{\partial U_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_{x_2}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_{x_3}}{\partial x_3} dx_3$$

Quindi otteniamo che:

$$W(A, B) = - \int_{U_A}^{U_B} dU = -U(B) + U(A)$$

In conclusione, se \vec{F} è gradiente, per le considerazioni precedenti, si ha che

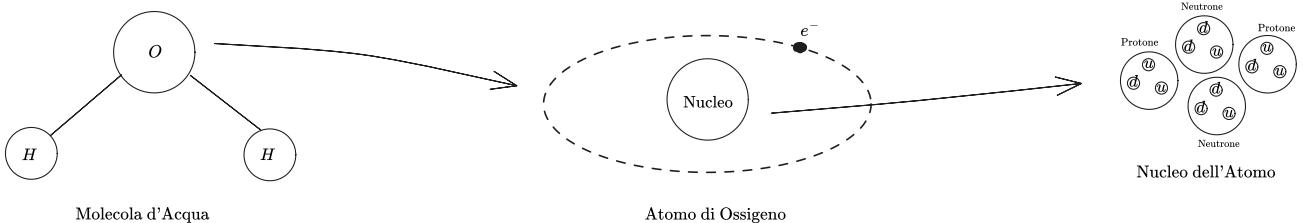
$$\frac{m}{2} v_B^2 - \frac{m}{2} v_A^2 = -U(B) + U(A) \Leftrightarrow \frac{m}{2} v_B^2 + U(B) = \frac{m}{2} V_A^2 + U(A)$$

Questa è la conservazione dell'energia cinetica del campo vettoriale \vec{F}

Elettrostatica

Facciamo un minimo di chimica, per poter comprendere meglio il tutto.

Prendiamo per esempio una molecola d'acqua.



Gli atomi della molecola sono legati fra loro da forze elettromagnetiche.

A loro volta gli atomi sono formati da nuclei costituito da protoni p^+ (carica positiva pari a 1) e neutroni n (nessuna carica) e da elettroni e^- che ruotano attorno al nucleo (carica negativa pari a -1) e sono legati tra loro da altre forze elettromagnetiche.

Il numero dei nucleoni è data dal numero atomico fisso a seconda dell'elemento e dal numero di massa, variabile a secondo dell'isotopo dell'atomo. In particolare con l'ossigeno $O - 16$ si ha che $^{16}_8O$ ha numero atomico 8 e numero di massa 16.

I nucleoni sono legati insieme da un'altra categoria di forze, definita Forza Nucleare Forte

Mentre l'elettrone è una particella fondamentale (quindi senza struttura interna) possiamo andare a studiare la struttura interna di protoni e neutroni. Infatti, questi sono formati da altre particelle fondamentali chiamate up e down con cariche rispettivamente $\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{2}$ e sono tenuti insieme dalla forza nucleare forte

Possiamo notare come tutta la fisica che conosciamo è tenuta in piedi da 4 forze:

1. Forza di Gravità
2. Forza Elettromagnetica
3. Forza Nucleare Forte
4. Forza Nucleare Debole

Mentre le ultime tre possono essere quantizzate (possono essere descritte da delle particelle a cui si possono associare valori), la forza di gravità (per ora) non ha particelle che ne descrivono il funzionamento

In particolare, sfruttando la teoria dei gruppi, si ha che la fisica così come la conosciamo noi può essere descritta da:

$$\mathcal{L}(G) = SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$$

Noi ci occuperemo di $SU_L(2) \times U_Y(1)$ che si occupa dell'elettromagnetismo e che può essere riscritto come $U_{EM}(1)$

Il moto e le iterazioni di una particella puntiforme è caratterizzata dalla massa m misurata in kilogrammi e dalla carica elettrica q misurata in Coulomb C .

La carica elettrica è conservata e quantizzata (cioè è sempre multiplo intero della carica elettrica fondamentale dell'elettrone q_e che è pari a $|q_e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$, in valore assoluto in quanto la carica è negativa)

Dato un corpo, possiamo definire come q_+ la quantità totale di carica positiva mentre q_- la carica totale negativa, allora:

- se $q_+ = q_-$ il corpo è elettricamente neutro (o non è carico);
- se $q_+ > q_-$ allora il corpo è carico elettricamente positivo;
- se $q_+ < q_-$ allora il corpo è carico elettricamente negativo

A seconda di come si comportano con le cariche elettriche, i corpi possono essere definiti come:

- Conduttori se c'è un'alta percentuale di elettroni non strettamente legati ai nuclei e che siano liberi di muoversi (derivati dei metalli)
- Isolanti se la quantità di elettroni legati al nucleo è bassa o minima (i derivati dei non-metalli)

Consideriamo due particelle puntiformi caricate. Quando si avvicinano, ciascuna esercita una forza elettromagnetica nei confronti dell'altra e fondamentalmente si osserva che:



- Quando le cariche sono dello stesso segno allora la forza è repulsiva
- Quando le cariche sono di segni opposti, allora la forza è attrattiva

Osserviamo inoltre che la forza è più debole se la distanza tra i due corpi è maggiore

Legge di Coulomb

Esiste una legge che definisce la forza elettrostatica tra cariche puntiforme:

$$\vec{F} = k \frac{q_2 \cdot q_1}{r^2} \vec{u}_r$$

k è una costante chiamata costante di coulomb e vale quest'uguaglianza:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto

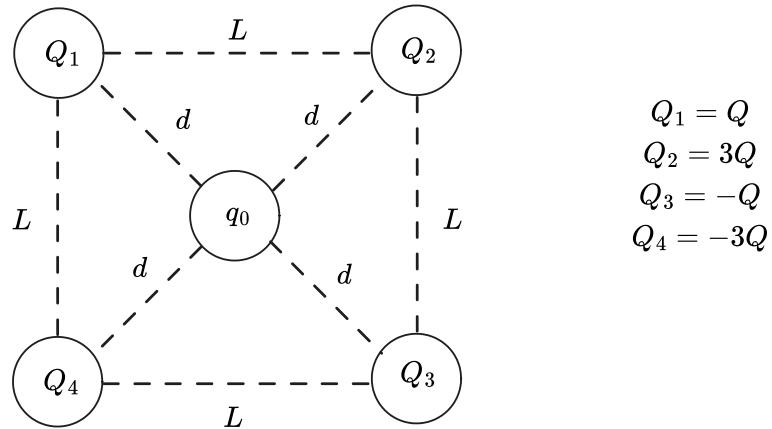
Se si ha un sistema con più di due particelle allora si ha che:

$$\vec{F}_{1,tot} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1,i}$$

cioè è la somma vettoriale delle forze delle altre cariche sulla prima.

Esempio di Calcolo delle Cariche

Siano 4 cariche Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 poste ai vertici di un quadrato di lato L , poste nel seguente modo:



$$\begin{aligned} \vec{F}_0 &= \vec{F}_{0,1} + \vec{F}_{0,2} + \vec{F}_{0,3} + \vec{F}_{0,4} = k \frac{q_0 Q_1}{d^2} \left(\frac{-\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) + k \frac{q_0 Q_2}{d^2} \left(\frac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) + k \frac{q_0 Q_3}{d^2} \left(\frac{-\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) + k \frac{q_0 Q_4}{d^2} \left(\frac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) \\ &= k \frac{q_0 Q}{d^2} \left(\frac{-\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) + k \frac{3q_0 Q}{d^2} \left(\frac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) + k \frac{q_0 Q}{d^2} \left(\frac{-\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) + k \frac{3q_0 Q}{d^2} \left(\frac{\vec{u}_x + \vec{u}_y}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}Q \cdot q_0}{L^2} (\vec{u}_x + 2\vec{u}_y) \end{aligned}$$

Esercizio di Elettrostatica tipico dell'esame

Due sfere piccole identiche con carica q e massa m , legate da due cordicelle di massa nulla che pendolando dal soffitto. Sapendo che la fune sia lunga L e che l'angolo vale θ , quanto vale q ?

Visto che le palline sono ferme, per il primo principio della dinamica la risultante delle forze è nulla, quindi

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_c = 0$$

Possiamo poi scomporre nelle componenti verticale e orizzontale:

$$\begin{cases} T_y - P = 0 \\ T_x - F_c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T \cos \theta = mg \\ T \sin \theta = k \frac{q^2}{d^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{mg}{\cos \theta} \\ \frac{mg}{\cos \theta} \sin \theta = k \frac{q^2}{d^2} \end{cases} \Rightarrow mg \tan \theta d^2 = q^2 k$$

Tuttavia, sapendo che $\frac{d/2}{L} = \sin \theta \Rightarrow d = 2L \sin \theta$, da cui si ottiene che

$$q = \sqrt{\frac{mg \tan \theta \cdot 4L^2 \sin^2 \theta}{k}}$$

Definizione di Campo Elettrico

Consideriamo la legge di Coulomb

$$\vec{F}_c = k \frac{Qq}{r^2} \vec{u}_r$$

dove Q è la carica sorgente e q è la carica di prova (con carica positiva)

Possiamo definire campo elettrico generato dalla sorgente Q la quantità

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Le linee di campo sono uscenti se la carica è positiva e sono entranti se la carica è negativa. Inoltre la densità delle linee di campo sono proporzionali all'intensità del campo elettrico.

Sapendo che la risultante delle forze è definita come la somma vettoriale di tutte le forze, per la definizione che abbiamo dato di campo elettrico possiamo dire che:

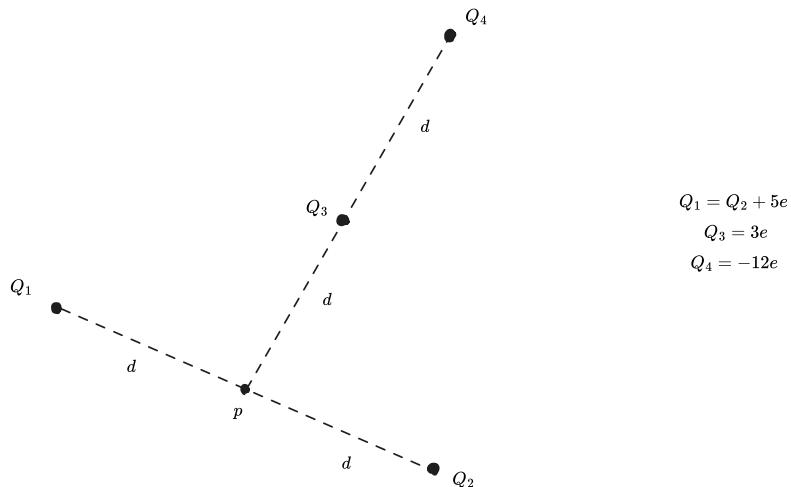
$$\vec{E}_{1,tot} = \frac{\vec{F}_{1,tot}}{q} = \frac{\sum_{i=2}^n \vec{F}_{1,i}}{q} = \sum_{i=2}^n \vec{E}_{1,i}$$

Quindi il Campo Elettrico calcolato in un punto è la somma dei Campi Elettrici generati dalle varie cariche:

Principio di Sovrapposizione

$$\vec{E}_{1,tot} = \sum_{i=2}^n \vec{E}_{1,i}$$

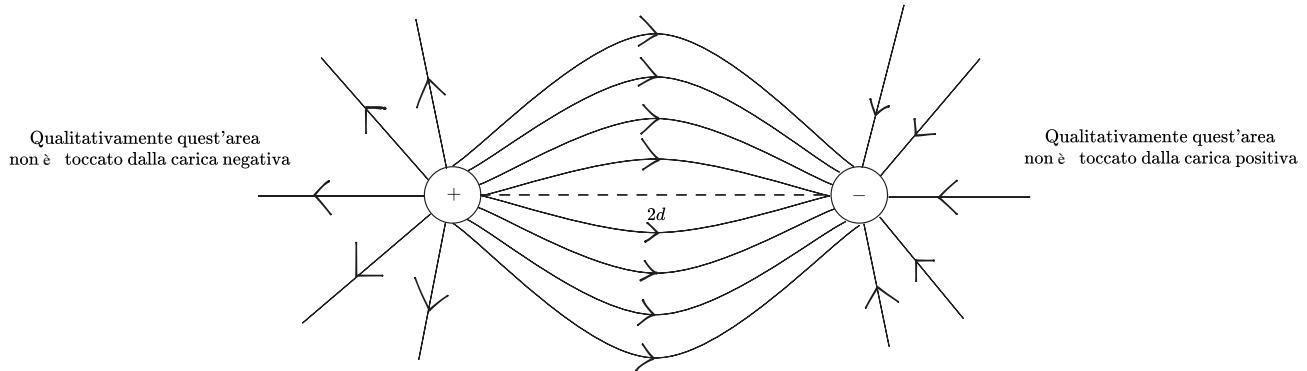
Esercizio: Calcolare \vec{E}_p generato dalle cariche Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 in questa configurazione:



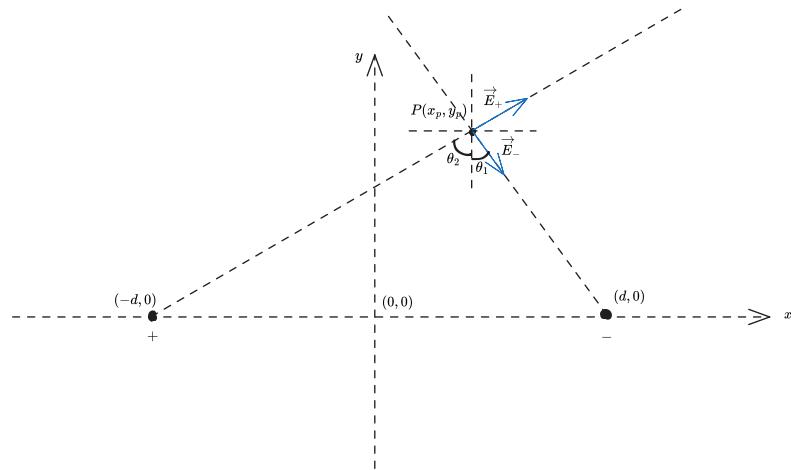
Definizione di Dipolo

Si definisce dipolo la struttura formata da due particelle con cariche puntiformi di uguali identità $|q|$ e segno opposto, separate da una distanza $2d$

Qualitativamente la struttura del dipolo è:



Facendo i calcoli esplicativi otteniamo che, se poniamo un sistema di riferimento:



Otteniamo che $\vec{E}_p(x_p, y_p) = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ dove \vec{E}_{\pm} sono i campi elettrici generati dalle cariche $\pm |q|$

Otteniamo che:

$$\begin{aligned}\vec{E}_+ &= \frac{k|q|}{r_+^2} \vec{u}_{r_+} = \frac{k|q|}{r_+^2} (\cos \theta_2 \vec{u}_y + \sin \theta_2 \vec{u}_x) && \text{dove } r_+^2 = (x_p + d)^2 + y_p^2 \\ \vec{E}_- &= \frac{k|q|}{r_-^2} \vec{u}_{r_-} = \frac{k|q|}{r_-^2} (\sin \theta_1 \vec{u}_x + \cos \theta_1 \vec{u}_y) && \text{dove } r_-^2 = (x_p - d)^2 + y_p^2\end{aligned}$$

Otteniamo quindi che:

$$\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{k|q|}{r_+^2} (\cos \theta_2 \vec{u}_y + \sin \theta_2 \vec{u}_x) + \frac{k|q|}{r_-^2} (\sin \theta_1 \vec{u}_x + \cos \theta_1 \vec{u}_y)$$

Sapendo poi che $\cos \theta_2 = \frac{y_p}{r_+}$, $\sin \theta_2 = \frac{x_p+d}{r_+}$, $\cos \theta_1 = \frac{y_p}{r_-}$ e $\sin \theta_1 = \frac{d-x_p}{r_-}$, otteniamo che:

$$\vec{E}_p = \frac{k|q|}{r_+^3} (y_p \vec{u}_y + (x_p + d) \vec{u}_x) + \frac{k|q|}{r_-^3} ((d - x_p) \vec{u}_x - y_p \vec{u}_y) = k|q| \left(\vec{u}_x \left(\frac{x_p + d}{r_+^3} + \frac{x_p - d}{r_-^3} \right) + \vec{u}_y \left(\frac{y_p}{r_+^3} - \frac{y_p}{r_-^3} \right) \right)$$

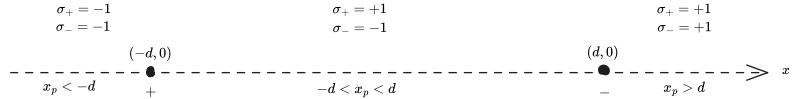
Questo che abbiamo appena ottenuto è il caso generale.

Facciamo ora delle osservazioni a seconda di dove si trovi il punto $p = (x_p, y_p)$

Caso del punto lungo la congiungente, $y_p = 0$

Notiamo che qua non c'è la parte in y_p , in quanto è sempre nulla

Andiamo a definire $\sigma_+ = \operatorname{sgn}(x_p + d)$ e $\sigma_- = \operatorname{sgn}(x_p - d)$, allora segue che:



Allora la formula diventa (sapendo che $r_+^2 = (x_p + d)^2$ e che $r_-^2 = (x_p - d)^2$)

$$\vec{E}_p(y_p = 0) = k|q| \left(\frac{x_p + d}{r_+^3} + \frac{d - x_p}{r_-^3} \right) \vec{u}_x = k|q| \left(\frac{x_p + d}{((x_p + d)^2)^{3/2}} + \frac{d - x_p}{((x_p - d)^2)^{3/2}} \right) \vec{u}_x = k|q| \left(\frac{\sigma_+}{(x_p + d)^2} - \frac{\sigma_-}{(x_p - d)^2} \right) \vec{u}_x$$

Inoltre, se $|x + d| \gg |d|$, possiamo sviluppare in serie, con $(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + o(\alpha^2)$ per $\alpha \rightarrow 0$:

$$\vec{E}_p(y_p = 0) = k|q| \left(\frac{\sigma_+}{(x_p + d)^2} - \frac{\sigma_-}{(x_p - d)^2} \right) \vec{u}_x \approx \frac{k|q|}{x_p^2} \left(\frac{\sigma_+}{(1 + \frac{d}{x_p})^2} - \frac{\sigma_-}{(1 - \frac{d}{x_p})^2} \right) \vec{u}_x \approx \frac{k|q|}{x_p^2} \left((\sigma_+ - \sigma_-) + 2 \frac{d}{x_p} (-\sigma_+ - \sigma_-) \right) \vec{u}_x$$

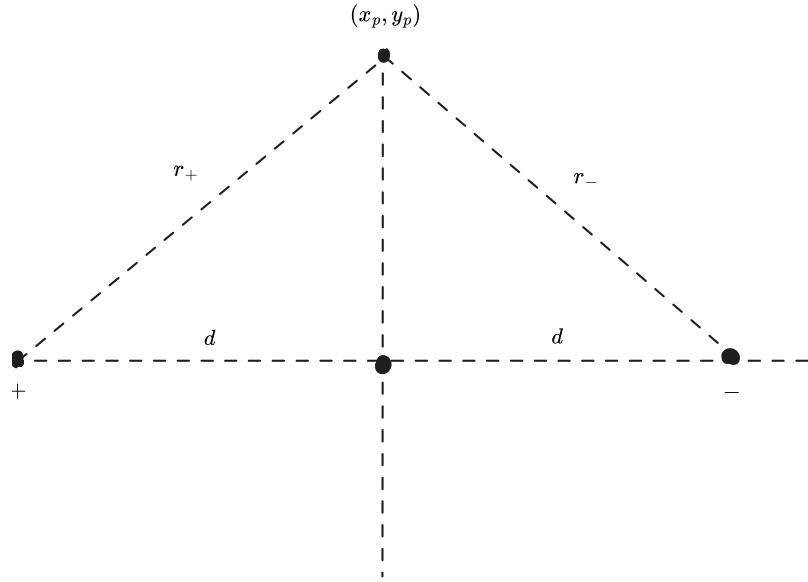
Caso del punto sull'asse $x_p = 0$

Otteniamo allora che

$$\vec{E}_p(x_p = 0) = k|q| \left(\left(\frac{d}{r_+^3} + \frac{d}{r_-^3} \right) \vec{u}_x + y_p \left(\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \vec{u}_y \right)$$

Sapendo che $x_p = 0$ segue che $r_+^2 = r_-^2 = d + y_p^2$, quindi si ha che:

$$\vec{E}_p(x_p = 0) = k|q| \left(\left(\frac{d}{r_+^3} + \frac{d}{r_-^3} \right) \vec{u}_x + y_p \left(\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \vec{u}_y \right) = k|q| \frac{2d}{(d^2 + y_p^2)} \vec{x}$$



Se $y_p \gg d$ si ottiene, attraverso la stessa serie, che:

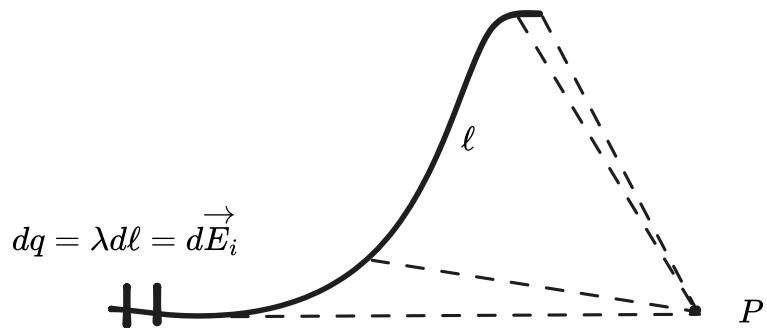
$$\vec{E}_p(x_p = 0) = k|q| \frac{2d}{(d^2 + y_p^2)} \vec{x} = k|q| \frac{2d}{|y_p|^3 ((1 + \frac{d}{y_p})^2)^{3/2}} \vec{u}_x \approx \frac{2k|q|d}{|y_p|^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{d}{y_p} \right)^2 + \dots \right) \approx \frac{2k|q|d}{|y_p|^3}$$

Distribuzioni Continue di Carica

Con la legge di Coulomb (per le cariche puntiformi) e per il principio di sovrapposizione (per più cariche), possiamo calcolare il campo elettrico \vec{E} per una distribuzione continua di carica caratterizzata da una densità di carica:

- lineare $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$ misurata in $[\lambda] = C/m$
- superficiale $\sigma = \frac{dq}{ds}$ misurata in $[\sigma] = C/m^2$
- volumica $\rho = \frac{dq}{dV}$ misurata in $[\rho] = C/m^3$

In generale sono tutte applicazioni in funzione delle coordinate, quindi $\lambda = \lambda(x)$, $\sigma = \sigma(x)$ e $\rho = \rho(x)$, però spesso per comodità possiamo *assumere* che siano costanti. In tal caso diremo che sono distribuzioni uniformi di carica



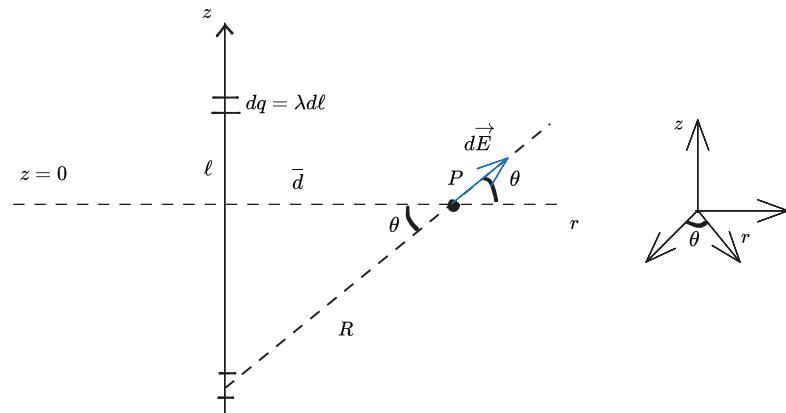
Possiamo considerare il filo come un numero infinito di cariche poste vicine tra loro, quindi al posto di sommarle, possiamo integrarle. In generale si ha che

$$\vec{E} = \int_{\ell} d\vec{E} = \int_{\ell} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(r)}{r^2} \vec{u}_r$$

Calcolo del Campo Elettrico per un Filo Infinito

Sia ℓ un filo infinito con densità di carica λ uniforme lungo tutto il filo. Calcoliamo il Campo elettrico.

Per comodità (e per simmetria) possiamo porre un sistema di riferimento cilindrico con $\ell = z$.



Notiamo che vale l'uguaglianza

$$d\vec{E} = |d\vec{E}|(\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_z)$$

Quindi in particolare si ha che:

$$\vec{E} = \int_{\ell} |d\vec{E}|(\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_z) = \int_{\ell} \frac{\lambda dz}{R^2(\theta)} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_z)$$

Dalla struttura della figura possiamo dedurre che:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\bar{d}}{R(\theta)} \\ \sin \theta = \frac{z}{R(\theta)} \end{cases} \Rightarrow z(\theta) = \bar{d} \tan \theta \xrightarrow{\frac{dz}{d\theta}} dz = \frac{\bar{d}}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Quindi tornando a sostituire si ha che:

$$\vec{E} = \int_{\ell} \frac{\lambda dz}{R^2(\theta)} (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_z) = \frac{\lambda k}{d} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (\cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_z) = \left[\frac{\lambda k}{d} (\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_z) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\lambda k}{d} 2 \vec{u}_r$$

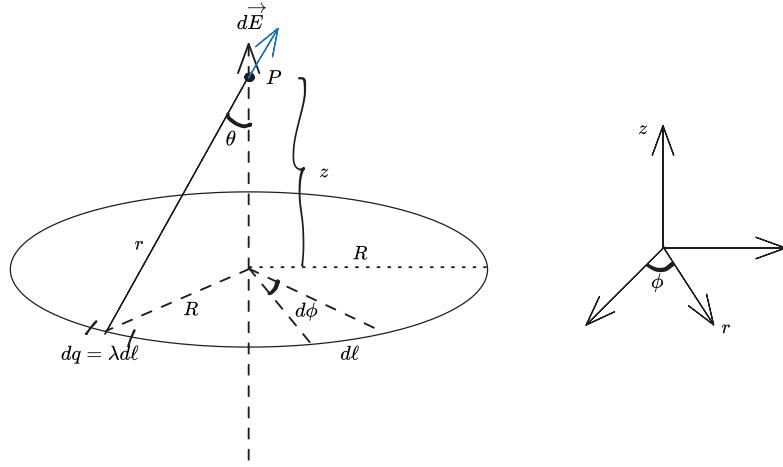
Quindi si ha che:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2\lambda k}{d} \vec{u}_r}$$

Definizione di Spira Circolare

Si definisce spira circolare un anello di raggio R e con carica uniforme lineare λ

Calcolo del Campo Elettrico per una Spira Circolare



Notiamo che c'è una simmetria attorno al centro, per questo motivo ci conviene utilizzare un sistema di riferimento cilindriche.

Notiamo che per la geometria della struttura si ha che

$$\begin{cases} \tan \theta = R/z \\ R^2 + z^2 = r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \theta = R/r \\ \cos \theta = z/r \end{cases}$$

Possiamo considerare la spira come un insieme di lunghezze infinitesime, quindi otteniamo che:

$$\vec{E} = \int_{Spira} d\vec{E} = \int_{Spira} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} (\sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_z)$$

Tuttavia, notiamo che c'è una simmetria tra ϕ e $\phi + \Delta$, quindi la componente radiale viene eliminata, cioè $d\vec{E}_r = 0$. Quindi segue che:

$$\vec{E} = \int_{Spira} d\vec{E} = \int_{Spira} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} (\cos \theta \vec{u}_z)$$

Sapendo che, con $\phi \in [0, 2\pi[$, segue che:

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \Rightarrow dq = \lambda d\ell = R \lambda d\phi$$

Quindi andando a sostituire segue che:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda R \int_0^{2\pi} \frac{dq}{r^3} \vec{u}_z \xrightarrow{z, r \text{ indipendenti da } \phi} \vec{E} = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi \vec{u}_z = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3} \cdot 2\pi \vec{u}_z = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 r^3} \vec{u}_z$$

Da cui segue che:

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Se volessimo fare un caso più generale, sapendo che:

$$Q_{tot} = 2\pi R \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{Q_{tot}}{2\pi R}$$

Si ottiene che

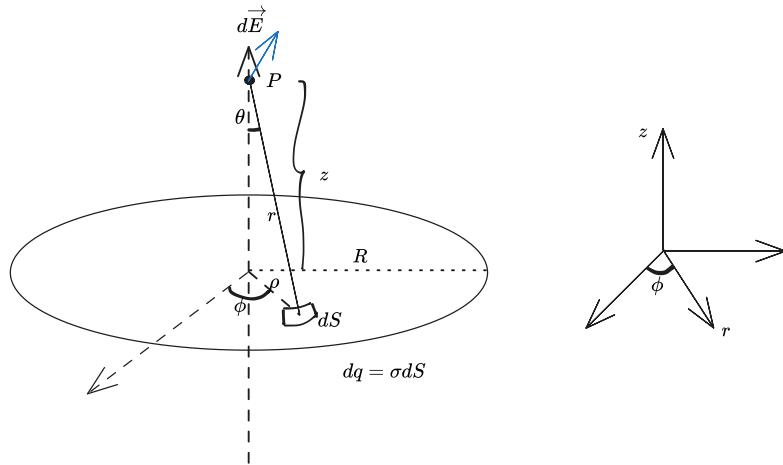
$$\vec{E} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

IMPORTANTE: Per quando si fanno gli esercizi, è importante fare il disegno, in quanto un disegno fatto bene è già metà del lavoro.

Definizione di Disco Pieno

Si definisce Disco Pieno Carico elettricamente, una superficie circolare di raggio R e con carica uniforme σ

Calcolo del Campo Elettrico per un Disco Pieno



Abbiamo che per $\rho \in [0, R]$ e per $\phi \in [0, 2\pi]$ segue che:

$$(r(\rho))^2 = z^2 + \rho^2$$

Anche qui, come sopra, per simmetria la componente radiale si annulla

Segue quindi che:

$$\vec{E} = \iint_{Disco} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{(r(\rho))^2} (\sin\theta \vec{u}_r + \cos\theta \vec{u}_z) = \iint_{Disco} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{(r(\rho))^2} (\cos\theta \vec{u}_z)$$

Sapendo che

$$dS = \rho d\rho d\phi \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}$$

Si ha che:

$$\vec{E} = \iint_{Disco} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \rho d\rho d\phi z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{u}_z = \frac{\sigma z}{4\phi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

Sapendo che

$$\int \frac{d\rho \rho}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[\frac{-1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} \right]_0^R \vec{u}_z$$

Per cui, esplicitando, si ottiene che:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(a - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{u}_z$$

Definizione di Piano Infinito

Un piano infinito può essere interpretato come un disco di raggio infinito.

Data questa definizione, si può definire il campo elettrico per un piano infinito come:

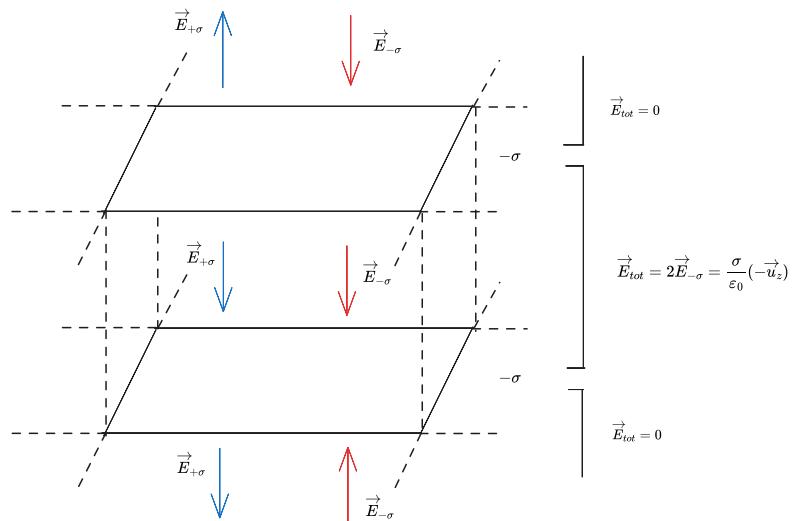
$$\vec{E} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{u}_z$$

Cioè, calcolando il limite:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Definizione di Condensatore Piano

Si definisce un condensatore piano un sistema costituito da due piani infiniti con carica $+\sigma$ e $-\sigma$ separati da distanza d .



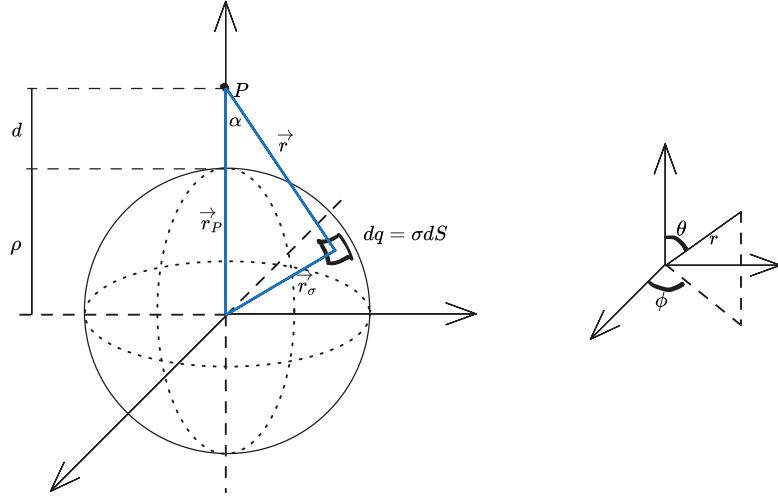
Ogni piano del condensatore prende il nome di armatura del condensatore

Quindi il campo elettrico nel condensatore vale

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0}(-\vec{u}_z) & \text{se il punto è posizionato tra le due armature} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione di Guscio Sferico

È una superficie sferica di raggio ρ e densità superficiale uniforme σ



Se andiamo a fare il calcolo dell'integrale otteniamo che:

$$\vec{E} = \iint_{Guscio} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r(r)$$

Da un lato sappiamo che $dq = \sigma dS$

Dall'altro, partendo dalla posizione dei vettori possiamo ricavare che:

$$\vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_\sigma \quad \text{e che} \quad \begin{cases} \vec{r}_P = (0, 0, z) = (0, 0, \rho + d) \\ \vec{r}_\sigma = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) \end{cases}$$

Da queste cose otteniamo che:

$$\vec{r} = (-\rho \sin \theta \cos \phi, -\rho \sin \theta \sin \phi, \rho + d - \rho \cos \theta)$$

$$\vec{r}^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + (\rho + d - \rho \cos \theta)^2 = 2\rho(1 - \cos \theta)(\rho + d) + d^2$$

Notiamo inoltre che per la simmetria della struttura, tutta la componente orizzontale viene cancellata, quindi

$$d\vec{E} = \|d\vec{E}\| \cos \alpha \vec{u}_z$$

Inoltre α è dato da:

$$\vec{r} \cdot \vec{u}_z = \|\vec{r}\| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}_z}{\|\vec{r}\|} = \frac{d + \rho(1 - \cos \theta)}{\|\vec{r}\|}$$

Quindi, tornando al calcolo dell'integrale, sapendo che $dS = \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi$ con $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \iint_{Guscio} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{\|\vec{r}\|^2} \cos \alpha \vec{u}_z = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^2}{r^3} \sin \theta (d + \rho(1 - \cos \theta)) \vec{u}_z = \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho^2 \sin \theta (d + \rho(1 - \cos \theta))}{(2\rho(1 - \cos \theta)(\rho + d) + d^2)^{3/2}} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \rho^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{d + \rho(1 - \cos \theta)}{(2\rho(1 - \cos \theta)(\rho + d) + d^2)^{3/2}} \vec{u}_z = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \rho^2 \frac{2}{(\rho + d)^2} \vec{u}_z \end{aligned}$$

In particolare, se poniamo

$$\sigma = \frac{Q_{tot}}{4\pi\rho^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\rho + d)^2} \vec{u}_z}$$

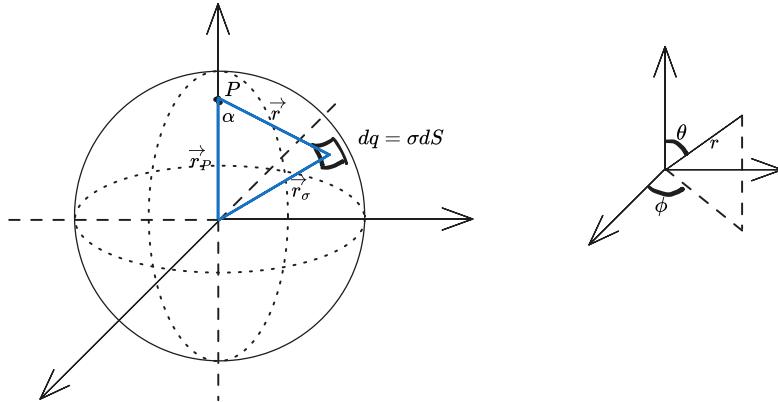
Primo Teorema del Guscio Sferico

Se la carica è distribuita in modo uniforme su un guscio sferico e il punto nello spazio che subisce il campo elettrico generato dal guscio è situato all'esterno del guscio stesso, allora vale la seguente formula:

$$\vec{E} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\rho + d)^2}$$

Ed è come se la carica fosse tutta concentrata in un unico punto posto al centro del guscio.

Calcolo del Campo Elettrico per il Guscio Sferico - Caso Interno



Nel nostro sistema di riferimento abbiamo che

$$\begin{cases} \vec{r}_\sigma = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta) \\ \vec{r}_P = (0, 0, \rho) \end{cases} \quad d < \rho$$

Segue quindi che

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_\sigma - \vec{r}_P = (\rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \theta - d) \\ \|\vec{r}\|^1 &= \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + (\rho \cos \theta - d)^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \theta \end{aligned}$$

Dalla figura possiamo notare che α è l'angolo formato tra \vec{r} e \vec{u}_z . Quindi otteniamo che:

$$\vec{r} \cdot \vec{u}_z = \|\vec{r}\| \|\vec{u}_z\| \cos \alpha \xrightarrow{\text{per sopra}} \rho \cos \theta - d \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\rho \cos \theta - d}{\|\vec{r}\|}$$

Dal principio di sovrapposizione segue che:

$$\vec{E} = \iint_{Guscio} d\vec{E} = \iint_{Guscio} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{r}\|^2} (\sin \alpha \vec{u}_r + \cos \alpha \vec{u}_z)$$

Notiamo che per ogni punto preso c'è una parte di carica dall'altra parte, quindi per simmetria, la componente radiale si annulla (*può essere visto come una serie di spire messe una affianco all'altra, è lo stesso principio*)

Quindi segue che:

$$\vec{E} = \iint_{Guscio} d\vec{E} = \iint_{Guscio} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{r}\|^2} (\cos \alpha \vec{u}_z)$$

Cerchiamo di scrivere dq in un altro modo:

$$dq = \sigma dS = \sigma \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Quando andiamo a sostituire, sapendo che $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ otteniamo che:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \iint_{Guscio} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\|\vec{r}\|^2} (\cos \alpha \vec{u}_z) = \iint_{Guscio} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sigma \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi \frac{\rho \cos \theta - d}{\|\vec{r}\|^3} \vec{u}_z = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{Guscio} \frac{\rho^2 \sin \theta d\theta d\phi (\rho \cos \theta - d)}{(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \theta)^{3/2}} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta (\rho \cos \theta - d)}{(\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \theta)^{3/2}} \vec{u}_z = 0 \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che, dentro al guscio sferico il campo elettrico è:

$$\vec{E} = 0$$

Secondo Teorema del Guscio Sferico

Se la carica è distribuita in modo uniforme su un guscio sferico e il punto nello spazio che subisce il campo elettrico generato dal guscio è situato all'interno del guscio stesso, allora il campo elettrico è nullo

Legge di Gauss

Definizione di Flusso

Si definisce Flusso di un campo vettoriale (*l'elettrico* \vec{E} nel nostro caso) attraverso una superficie S l'integrale:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Dove \vec{n} è il vettore normale di S , orientato verso l'estero.

Inoltre, se S è una superficie chiusa abbiamo che

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

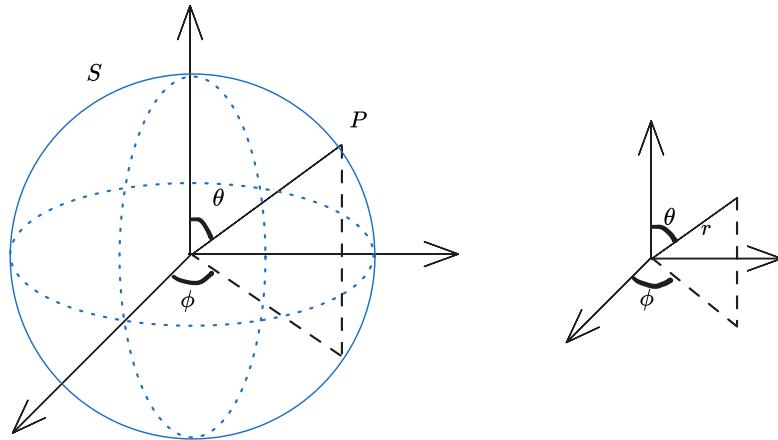
Calcoliamo la legge di Gauss per la carica puntiforme.

Dalla legge di Coulomb, sappiamo che il campo elettrico generato dalla carica puntiforme è uguale a:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|r\|^2} \hat{u}_r$$

Notiamo che se prendiamo un sistema di riferimento sferico (r, θ, ϕ) , il campo elettrico dipende solamente dalla distanza del punto dalla carica, e non da ϕ e θ

Per Calcolare il flusso possiamo considerare una superficie sferica, centrata in q e passante per il punto P



Andando a calcolare l'integrale della definizione, sfruttando il fatto che sia \vec{E} , sia \vec{n} sono radiali, otteniamo che:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S \|\vec{E}\| \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z dS = \int_S \|\vec{E}\| r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Quindi abbiamo che:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Abbiamo che questo risultato vale per ogni superficie al suo interno e con ogni carica, anche non puntiforme.

Perché tutto questo funziona?

In una sfera assumiamola distanza r come costante, in una qualsiasi superficie dipende da ϕ e da θ

Inoltre, sfruttando la distribuzione di carica e il principio di sovrapposizione abbiamo che:

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}}$$

Infatti, se consideriamo Q_{int} come la carica all'interno della superficie e sia $d\vec{E}$ il campo elettrico generato dalla carica puntiforme dq

$$\oint_S d\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{dq}{\epsilon_0}$$

Dobbiamo integrare lungo la distribuzione di carica, quindi si ha che:

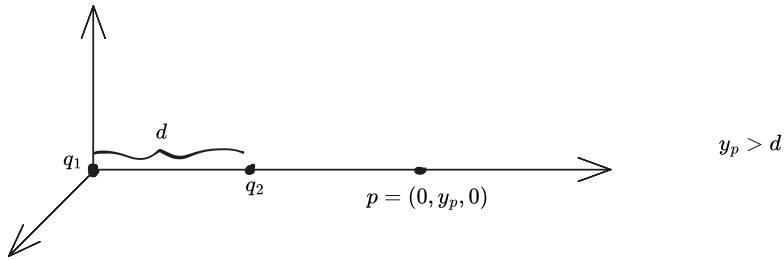
$$\int_{Carica} \left(\oint_S d\vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \int_{Carica} \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Poiché sono indipendenti, posso invertirli:

$$\oint_S \left(\int_{Carica} d\vec{E} \right) \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Esempio del Calcolo del campo elettrico con Gauss

Sia la situazione così rappresentata:



Sia \vec{E}_i il campo elettrico generato dalla carica i -esima, con $i \in \{1, 2\}$

Sia S_i la superficie centrata in q_i e passante nel punto p

Abbiamo quindi che i flussi generati dalla carica i -esima vale

$$\Phi_i = \oint_{S_i} \vec{E}_i \cdot \vec{n} dS_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

In particolare, visto che il flusso del campo elettrico non dipende dalla distanza, abbiamo che:

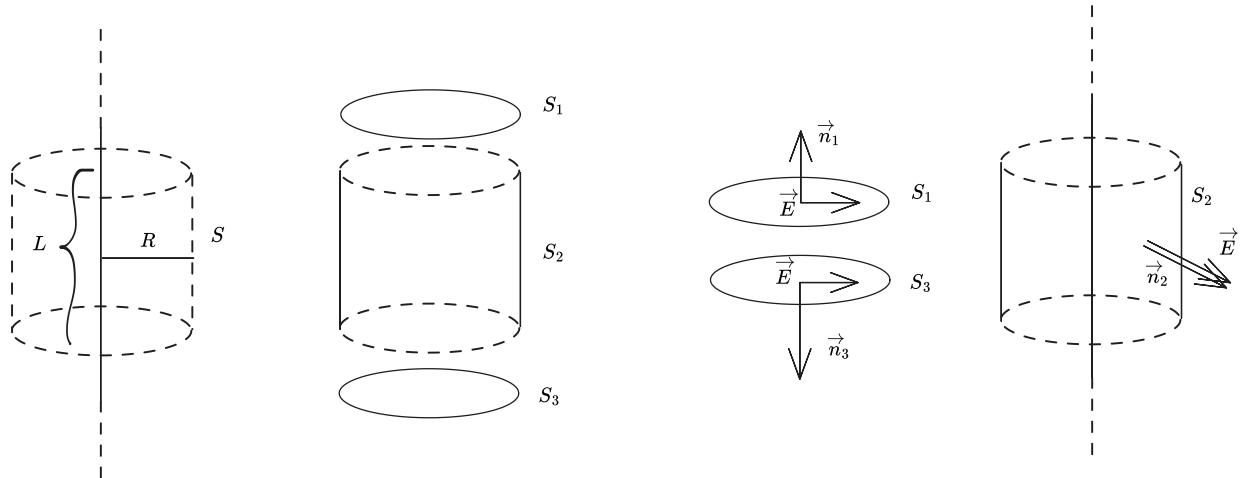
$$\oint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{q_2}{\epsilon_0} = \oint_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_1$$

Sommando i due integrali otteniamo che:

$$\Phi_p = \oint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \oint_{S_1} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{S_1} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{S_1} \vec{E}_{tot} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$$

Vediamo adesso i casi che abbiamo trattato precedentemente sfruttando il teorema di Gauss

Calcolo del Campo Elettrico per un Filo Infinito - con Gauss



Notiamo che c'è una simmetria e che \vec{E} è radiale, quindi si può scrivere il campo elettrico come

$$\vec{E} = \|\vec{E}\| \cdot \vec{u}_r$$

Possiamo considerare S come un cilindro attorno al filo, il cui asse coincide sul filo stesso.

Possiamo scrivere la superficie S come unione di tre superfici differenti:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Dove S_1, S_3 sono le superfici di base mentre S_2 è la superficie laterale

In quest'ottica possiamo scrivere la formula del flusso come:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^3 \oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S}_i$$

Andiamo a vedere come sono fatti i vettori normali $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$

Notiamo che $\vec{n}_1 = \vec{u}_z$ e che $\vec{n}_3 = -\vec{u}_z$, mentre per ogni punto della superficie cilindrica si ha che $\vec{n}_2 = \vec{u}_r$

Inoltre, poiché $\vec{n}_1 \perp \vec{E}$ e poiché $\vec{n}_2 \perp \vec{E}$, segue che $\vec{n}_1 \cdot \vec{E} = \vec{n}_3 \cdot \vec{E} = 0$, quindi l'integrale diventa:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \|\vec{E}\| \int_{S_2} d\vec{S}_2 = \|\vec{E}\| 2\pi R L$$

Per Gauss è anche vero che

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Sapendo tuttavia che la densità di carica elettrica è costante e vale $\lambda = \frac{dq}{dl}$ segue che

$$Q_{int} = \lambda L$$

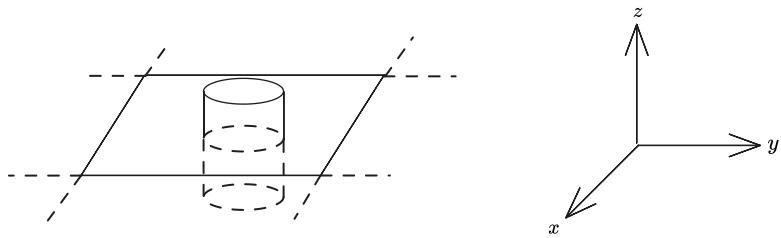
Mettendo tutto insieme segue che

$$\|\vec{E}\| 2\pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow \|\vec{E}\| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Quindi:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{u}_r}$$

È esattamente lo stesso risultato che abbiamo ottenuto con la legge di Coulomb



Al posto del cilindro potevamo prendere un cubo, non sarebbe cambiato nulla

Per simmetria rispetto al piano Oxy , possiamo scrivere il campo elettrico come

$$\vec{E} = \operatorname{sgn}(z) \|\vec{E}\| \vec{u}_z$$

Notiamo inoltre che, usando la stessa notazione dell'esercizio precedente otteniamo che

$$\vec{E} \perp \vec{n}_2 \Rightarrow \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0$$

Inoltre, poiché $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ e $\Phi_2 = 0$, si ottiene che:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = 2 \int_{S_1} \|\vec{E}\| \cdot \vec{n} dS = 2 \|\vec{E}\| \int_{S_1} dS = 2 \|\vec{E}\| \pi R^2$$

Per Gauss abbiamo che: $Q_{int} = \sigma \pi R^2$ e per l'uguaglianza segue che:

$$2 \|\vec{E}\| \pi R^2 = \frac{\sigma \pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow \|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Quindi segue che il campo elettrico vale:

$$\boxed{\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z < 0 \end{cases}}$$

Simmetria Sferica

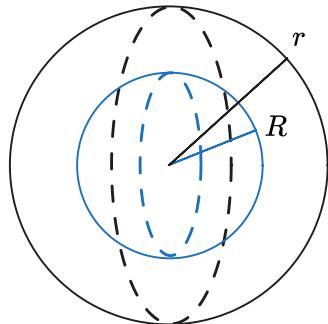
Andiamo ora ad osservare dei casi particolari in cui si può sfruttare la simmetria sferica

Caso Guscio Sferico Uniformemente Carico

Da Gauss abbiamo che

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Allora possiamo prendere una superficie gaussiana come una sfera di raggio r concentrica al guscio iniziale



$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ Q_{tot} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Noi sappiamo che è uniformemente carica con densità di carica σ , quindi la carica totale è $Q_{tot} = 4\pi R^2 \sigma$

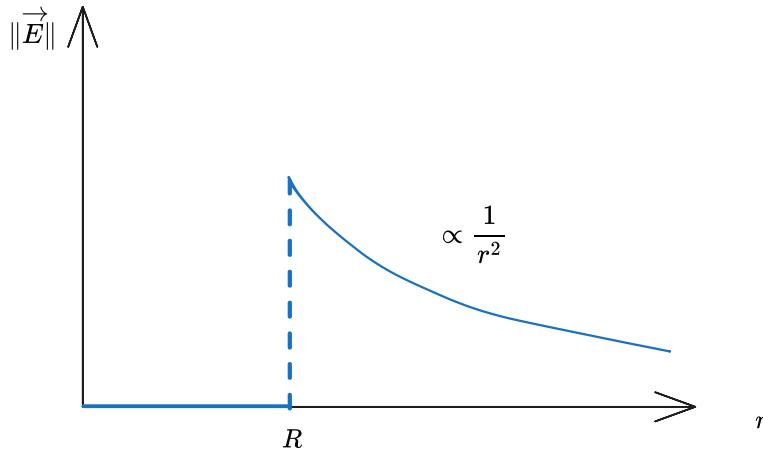
Per simmetria abbiamo che:

$$\vec{E} = \|\vec{E}\| \cdot \vec{u}_r \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \|\vec{E}\| \cdot 4\pi r^2$$

Da questo otteniamo che

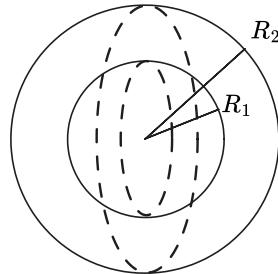
$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & r < R \\ \frac{Q_{tot}}{4\pi r^2} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Graficamente, l'andamento del campo elettrico è:



Questa discontinuità è situata esattamente dove sta la distribuzione di carica

Caso Due Gusci Sferici con due raggi diversi con cariche diverse concentriche



$$Q_{int} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ Q_1 & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ Q_1 + Q_2 & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

Data questa situazione ci serve una superficie S sferica e concentrica ai due gusci.

Sfruttando Gauss otteniamo che:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \|\vec{E}\| \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi r^2} \vec{u}_r & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q_1+Q_2}{4\pi r^2} \vec{u}_r & r > R_2 \end{cases}$$

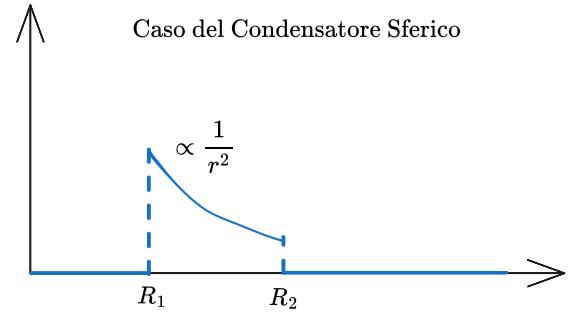
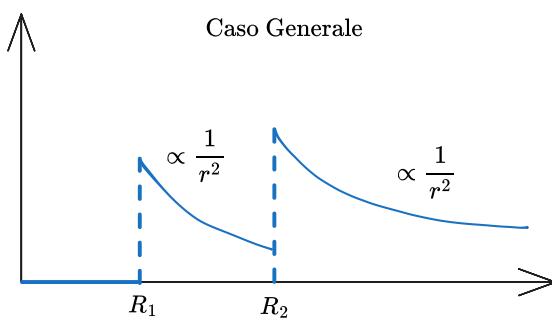
Esiste poi il caso particolare del condensatore sferico, in cui i due gusci hanno stessa carica di segno opposto:

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

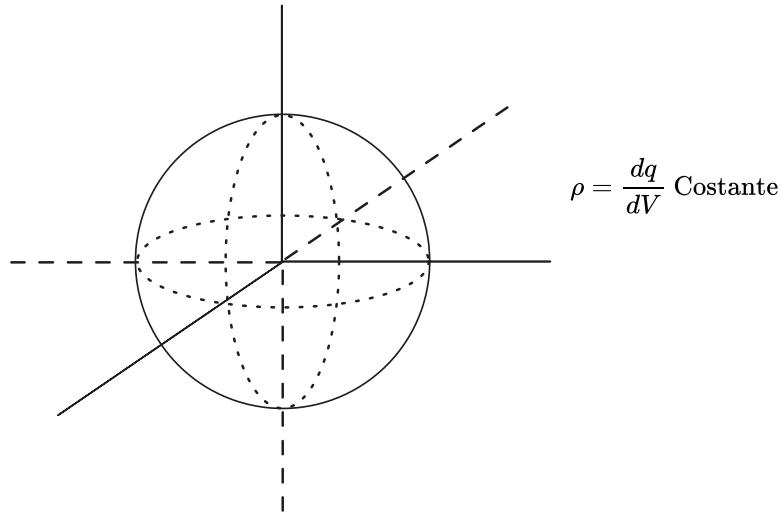
In questo caso il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r & R_1 < r < R_2 \\ \vec{0} & r > R_2 \end{cases}$$

Graficamente il campo elettrico è:



Caso della Sfera Piena con Densità di Carica Costante



Prendiamo S superficie sferica e raggio \tilde{r} .

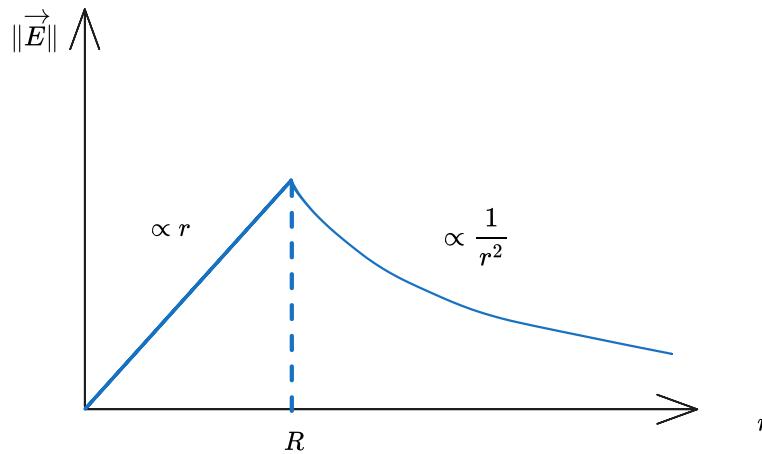
$$Q_{int} = \iiint_V \rho dV = \left\{ \begin{array}{l} \theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\} = \iiint_V \rho \sin \theta r^2 dr d\theta d\phi = \rho \underbrace{\int_0^{\tilde{r}} r^2 dr}_{r^3/3} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta}_{4\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = Q_{int}(\tilde{r}) \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho\tilde{r}^3 & \tilde{r} < R \\ \frac{4}{3}\pi\rho R^3 & \tilde{r} > R \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto quindi che

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(\tilde{r})}{\epsilon_0} \Rightarrow \|\vec{E}\| \cdot 4\pi\tilde{r}^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{\|\vec{E}\| = \begin{cases} \frac{\rho\tilde{r}}{4\epsilon_0} & \tilde{r} < R \\ \frac{R^3}{3\epsilon_0\tilde{r}^4} & \tilde{r} > R \end{cases}}$$

Notiamo che torna il secondo teorema del guscio sferico

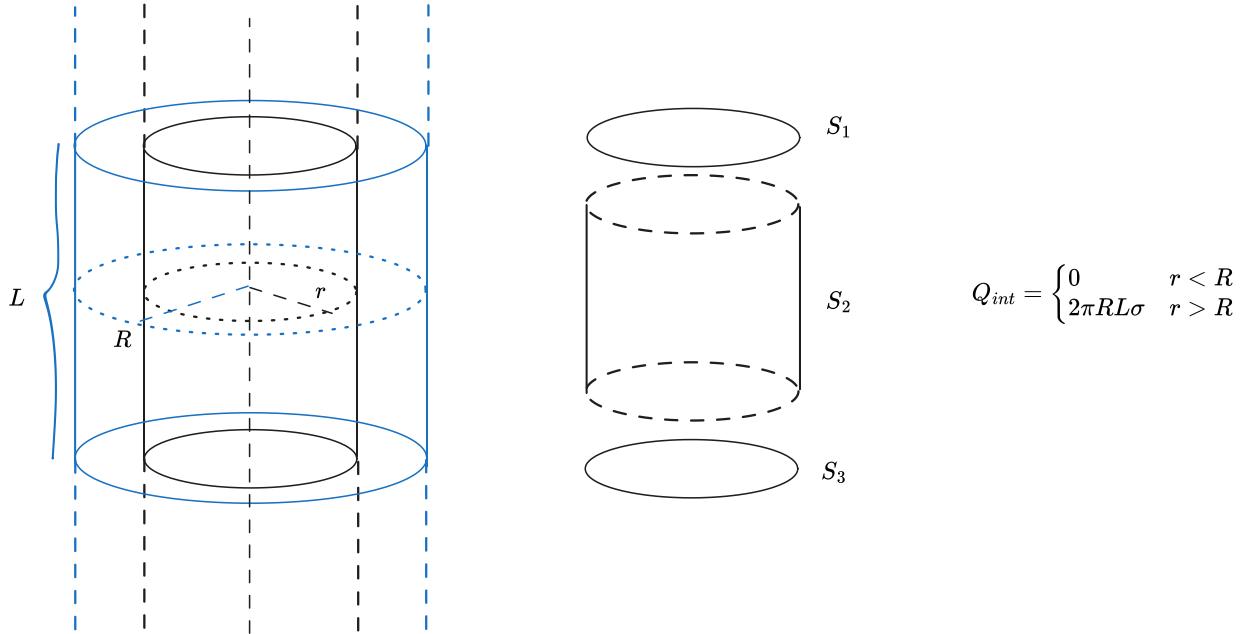
Graficamente si può ottenere che:



Simmetria Cilindrica

Passiamo ora ad osservare nei casi in cui si può utilizzare un sistema cilindrico

Caso del Guscio Cilindrico in finito con densità di carica infinita



Abbiamo che

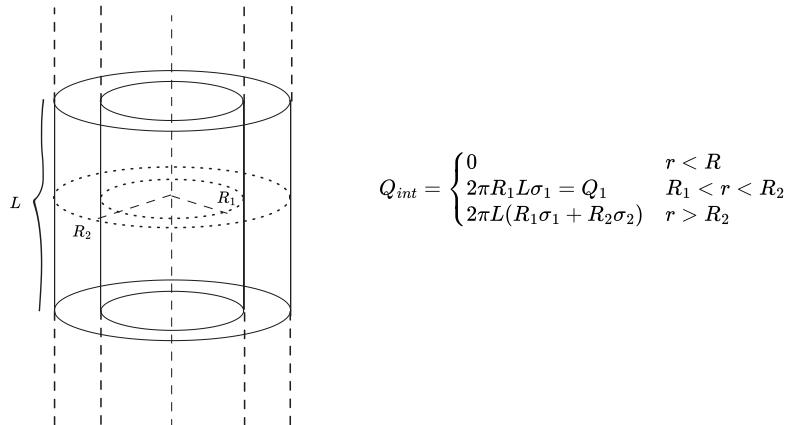
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \underbrace{\vec{E} + \vec{n}_1}_{0} dS_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_2 + \int_{S_3} \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}_3}_{0} dS_3 = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n}_2 dS_2 = \|\vec{E}\| 2\pi r L \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0}$$

Da tutto questo segue che:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & r < R \\ \frac{2\pi RL\sigma}{2\pi r L} \vec{u}_r = \frac{R\sigma}{r} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Il grafico dell'andamento è molto simile a quello del guscio vuoto

Caso di due gusci cilindrici concentrici



Sia S una superficie cilндrica di raggio r e di lunghezza L coassiale ai cilindri

Abbiamo allora che

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \|\vec{E}\| \cdot 2\pi L r \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Da cui segue che:

$$\|\vec{E}\| = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{R_1\sigma_1}{r\varepsilon_0} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{R_1\sigma_1 + R_2\sigma_2}{r\varepsilon_0} & r > R_2 \end{cases}$$

Nel caso particolare in cui $Q_1 = -Q_2$ si ha la situazione che $\sigma_1 R_1 = -\sigma_2 R_2$, quindi il campo elettrico diventa:

$$\|\vec{E}\| = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{R_1\sigma_1}{r\varepsilon_0} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Conduttore Carico Isolato

Cerchiamo di capire come si comporta quando ad un corpo conduttore (i cui elettroni sono liberi di muoversi) e isolato (gli elettroni non hanno modo di spostarsi da un corpo all'altro) viene data una carica

Intanto notiamo che se il conduttore è isolato, allora \vec{E} è nullo all'interno. Se così non fosse si produrrebbero delle correnti elettriche (infatti se il campo elettrico non fosse nullo, ci sarebbe una forza di Coulomb applicata a tutti gli elettroni e per la legge di Newton c'è un'accelerazione).

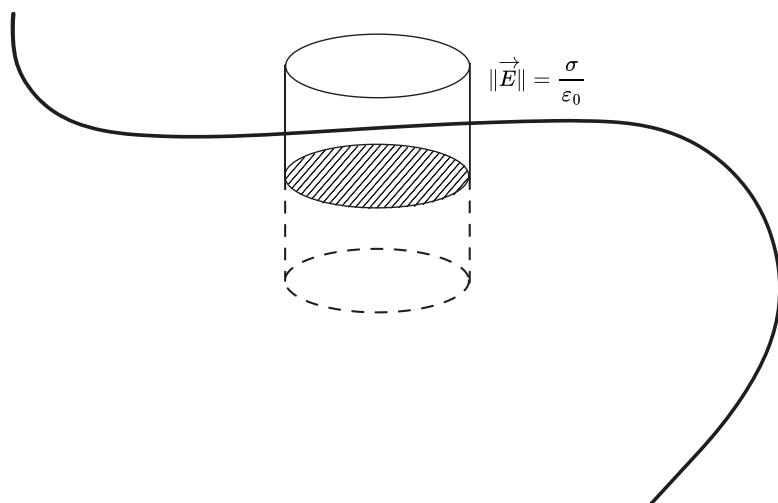
$$\vec{E} \neq 0 \Rightarrow \exists \vec{F}_e = c\vec{E} = m_e \vec{a}$$

In un corpo conduttore con una certa quantità di carica si ha che:

- La carica sarà solo sulla superficie del conduttore
- \vec{E} è nullo al suo interno per Gauss
- La densità di carica è maggiore nelle zone di maggior curvatura
- \vec{E} vicino alla superficie è ortogonale alla superficie

Infatti se l'ultima proprietà non fosse valida avremmo che il campo elettrico sarebbe formato da due componenti, una tangenziale e una ortogonale alla superficie, ma se quella tangenziale non fosse nulla, allora si avrebbero delle correnti elettriche contro il fatto che non ci sono correnti elettriche.

Abbiamo inoltre che dove c'è maggior curvatura, il campo elettrico è più intenso in quanto ci sono più linee di campo che attraverso la superficie gaussiana e quindi σ è maggiore. Infatti dalla legge di Gauss abbiamo visto che:



Se abbiamo, invece, un conduttore con una cavità, il fatto che \vec{E} si annullare al suo interno, quindi la carica non si può distribuire sulla superficie della cavità:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Questo perché appunto il campo elettrico deve essere nullo.

Ma se questo è nullo allora, per Gauss

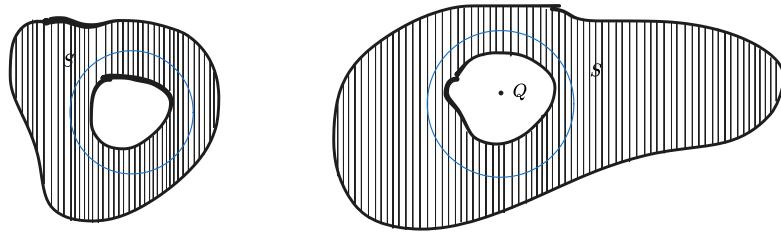
$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0$$

Quindi non c'è carica su quella superficie

Se all'interno della cavità invece ci fosse una carica puntiforme Q , allora, poiché il campo elettrico deve essere nullo all'interno, si ha che sulla superficie attorno alla carica Q è posta una carica $-Q$

Infatti per Gauss si ha che:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{sup} + Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_{sup} = -Q$$



Moto di una Carica in un Campo Elettrostatico

Andiamo adesso a studiare come si comporta una carica puntiforme, con carica q e massa m in una regione dello spazio con un campo elettrico costante.

Sappiamo che vale la legge di Coulomb

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

In assenza di altre forze e sfruttando il secondo principio della dinamica, otteniamo che:

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{ma} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Tuttavia, sapendo che l'accelerazione è la derivata seconda della posizione,abbiamo che

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

Esplicitando le coordinate cartesianeabbiamo che:

$$\vec{x} = (x\vec{u}_x, y\vec{u}_y, z\vec{u}_z) = (x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow \vec{E} = (E_x\vec{u}_x, E_y\vec{u}_y, E_z\vec{u}_z)$$

Quindi per x (la cosa è analoga anche per le altre dimensioni) possiamo integrare su t e otteniamo che:

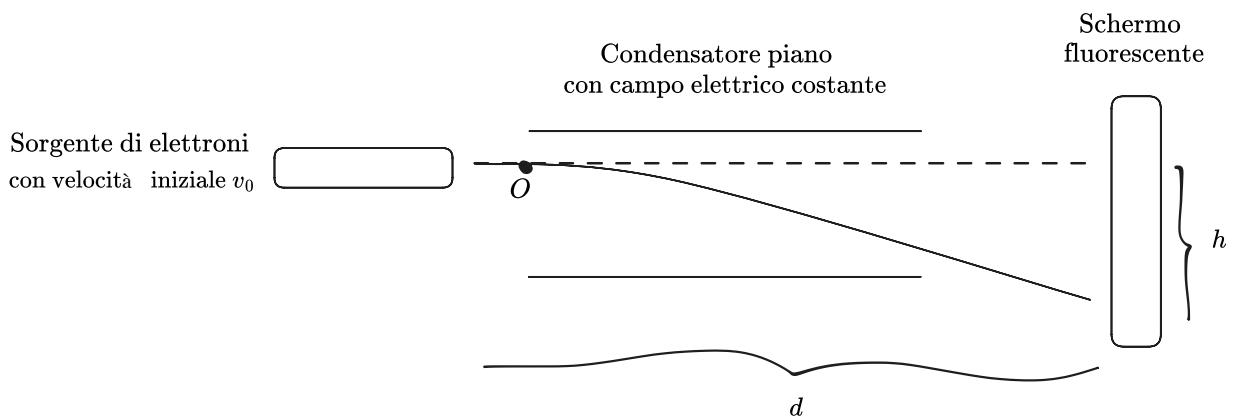
$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m}E_x \Rightarrow v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{q}{m}E_xt + v_{0,x} \Rightarrow x(t) = \frac{q}{m}E_x \frac{t^2}{2} + v_{0,x}t + x_0$$

Dove $v_{0,t}$ è la velocità lungo l'asse x della carica all'istante $t = 0$, mentre x_0 è la posizione della carica sull'asse x all'istante $t = 0$

Rispetto alle altre variabili otteniamo che:

$$y(t) = \frac{q}{m}E_y \frac{t^2}{2} + v_{0,y}t + y_0 \quad \text{e} \quad z(t) = \frac{q}{m}E_z \frac{t^2}{2} + v_{0,z}t + z_0$$

Esempio del Tubo di Raggi Catodici



In questa situazioneabbiamo che:

$$\vec{E} = \|\vec{E}_y\| \vec{u}_y \quad \text{e} \quad \vec{v}_0 = \|\vec{v}_0\| \vec{u}_x$$

Possiamo trascurare la forza di gravità in quanto $\vec{F}_g \ll \vec{F}_e$

Otteniamo quindi che lungo l'asse delle ascisse otteniamo che:

$$x(t) = \underbrace{\frac{q}{m} E_x \frac{t^2}{2}}_0 + v_{0,x} t + x_0 = x_0 + v_{0,x} t \quad \text{Moto Rettilineo Uniforme}$$

Sull'asse delle ordinate abbiamo che:

$$y(t) = \frac{q}{m} E_y \frac{t^2}{2} + \underbrace{v_{0,y} t + y_0}_0 = y_0 + \frac{q}{m} \|\vec{E}\| \frac{t^2}{2} \quad \text{Moto Uniformemente Accelerato}$$

Possiamo prendere un sistema di riferimento in cui $x_0 = y_0$ e a questo punto otteniamo che:

$$t = \frac{x(t)}{\|v_0\|} \Rightarrow y(x) = \frac{q}{m} \frac{\|\vec{E}\|}{2} \frac{x(t)^2}{\|v_0\|^2}$$

A questo punto, calcolando $y(x = d)$ possiamo determinare il campo elettrico $\|\vec{E}\|$:

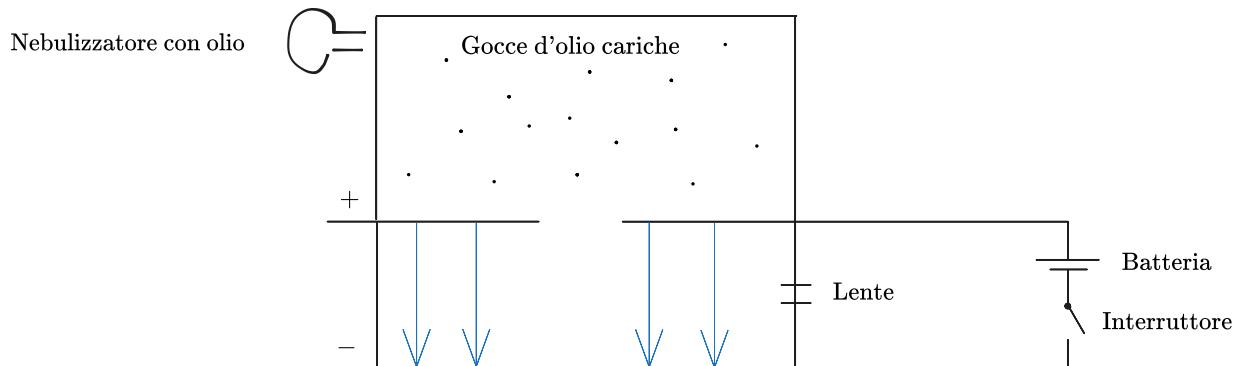
$$y(x = d) = \frac{q}{m} \frac{\|\vec{E}\|}{2} \left(\frac{d}{\|v_0\|} \right)^2 \Leftrightarrow \|\vec{E}\| = \frac{2m}{q} \frac{y(x = d)}{(d/\|v_0\|)^2}$$

Prima di andare avanti con il prossimo esperimento, diamo la definizione di velocità terminale:

Definizione di Velocità Terminale

Si definisce Velocità Terminale il valore della velocità quando l'accelerazione si stabilizza (diventa costante)

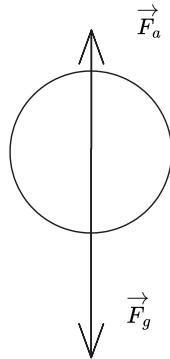
Determinazione Sperimentale della carica elementare



Quando l'interruttore è aperto il campo elettrico è nullo, in quanto non circola corrente elettrica, mentre quando è chiuso il campo elettrico è costante.

Facciamo l'esperimento con l'interruttore aperto, quindi con $\vec{E} = 0$

Andiamo ad analizzare la risultante delle forze delle singole gocce d'olio.



\vec{F}_a = Legge di Stokes, che è una forza che agisce sulla particella in base all'attrito viscoso della particella stessa

$$F_a = 6\pi\eta Rv$$

dove η è la viscosità del fluido

Quindi la forza risultante risulta essere:

$$\vec{F}_{ris} = m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_a$$

Quindi, passando per gli scalari si ottiene che:

$$F_{ris} = ma = mg - 6\pi\eta Rv \Leftrightarrow a = g - 6\pi\eta \frac{R}{m} v$$

Sapendo tuttavia che la massa della goccia d'olio può essere calcolata come

$$m = \rho_{olio} \frac{4}{3}\pi R^3$$

Abbiamo che:

$$a = g - 6\pi\eta \frac{R}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{olio}} v = g - \frac{9}{2} \frac{\eta v}{\rho_{olio} R^2}$$

Tuttavia, sapendo che l'accelerazione è la derivata prima della velocità abbiamo che:

$$a = \frac{dv}{dt} = \underbrace{g}_{c_0} - \underbrace{\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_{olio} R^2} v}_{c_1} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = c_0 - c_1 v$$

Definendo $\tilde{v} = v - \frac{c_0}{c_1}$ otteniamo che:

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -c_1 \tilde{v} \Leftrightarrow \frac{d\tilde{v}}{\tilde{v}} = -c_1 dt \Leftrightarrow \log \tilde{v} = -c_1 t$$

Da cui segue direttamente che:

$$v(t) = v_0 e^{-c_1 t} + \frac{c_0}{c_1} (1 - e^{-c_1 t})$$

Notiamo inoltre che se $t \gg \frac{1}{c_1}$, abbiamo che:

$$v(t) \rightarrow v_{ter} = \frac{c_0}{c_1} = \frac{2g\rho_{olio}R^2}{9\eta}$$

In questo modo, misurando la velocità terminale, possiamo misurare il raggio della goccia d'acqua e quindi anche la massa.

Rifacciamo ora l'esperimento a circuito chiuso.

In questo caso, visto che c'è elettricità che gira, abbiamo che c'è un campo elettrico $\vec{E} \neq 0$ costante

Su ogni goccia adesso agisce una forza aggiuntiva, che è la forza elettrica, che ha la stessa direzione della forza di attrito

Otteniamo quindi che la risultante delle forze è:

$$\vec{F}_{ris} = \vec{F}_g + \vec{F}_a + \vec{F}_e$$

Passando ai valori scalari si ottiene che:

$$F_{ris} = mg - qE - 6\pi\eta Rv = ma$$

Da cui, passando direttamente per la velocità terminale *senza rifare i passaggi fatti in precedenza*, si ottiene che:

$$v_{ter} = \frac{mg - qE}{6\pi\eta R}$$

Sapendo tuttavia che la massa può essere calcolata come:

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{olio}$$

Si ottiene che:

$$v_{ter} = \frac{\frac{g - \frac{q}{m} E}{9}}{\frac{9}{2} \frac{\eta}{\rho_{olio} R^2}}$$

L'unica incognita che manca è la carica, in quanto il raggio R lo avevamo già misurato dalla parte precedente
Misurando q per un grande numero di gocce possiamo calcolare la variazione di carica minima, ossia:

$$\Delta q|_{min} = e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

Potenziale Elettrico

Sappiamo dalla parte iniziale che un campo vettoriale \vec{F} è di tipo conservativo se e solo se è di tipo vettoriale, cioè esiste un campo scalare U tale che:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

cioè se e solo se

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\ell$$

dipende esclusivamente dalla posizione iniziale e dalla posizione finale.

In particolare, essendo il campo conservativo, vale il teorema dell'energia cinetica quindi c'è una conservazione dell'energia totale ed in particolare si ha che:

$$E_{tot} = E_{cin} + U = \frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = Costante$$

Andiamo meglio nel dettaglio.

Sia $c \in \mathbb{R}$ una costante e sia la forza \vec{F} definita come:

$$\vec{F} = \frac{c}{r^2} \vec{u}_r$$

Sia $\gamma_{A,B}$ una curva tra A e B definita nel seguente modo:

$$\gamma(s) = (x_{\gamma}(s), y_{\gamma}(s), z_{\gamma}(s))$$

Allora possiamo calcolare la variazione infinitesima di spostamento come:

$$d\ell = (\dot{x}_{\gamma}, \dot{y}_{\gamma}, \dot{z}_{\gamma}) ds \quad \text{con } \dot{\alpha}_{\gamma} = \frac{d\alpha}{ds} \quad \alpha \in \{x, y, z\}$$

Quindi, andando a calcolare l'integrale e sfruttando le coordinate polari, si ottiene che:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\ell = \int_{\gamma} \frac{c}{r^2} \vec{u}_r \cdot (\dot{x}_{\gamma}, \dot{y}_{\gamma}, \dot{z}_{\gamma}) ds$$

Tuttavia, sapendo che $\vec{u}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ si ottiene che:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\ell = \int_{\gamma} \frac{c}{r^2} \vec{u}_r \cdot (\dot{x}_{\gamma}, \dot{y}_{\gamma}, \dot{z}_{\gamma}) ds = \int_{\gamma} \frac{c}{r^2} (\sin \theta \cos \phi \dot{x}_{\gamma} + \sin \theta \sin \phi \dot{y}_{\gamma} + \cos \theta \dot{z}_{\gamma}) ds$$

Sempre sfruttando le coordinate polari possiamo porre:

$$\begin{cases} x_{\gamma} = r \sin \theta \cos \phi \\ y_{\gamma} = r \sin \theta \sin \phi \\ z_{\gamma} = r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow (\sin \theta \cos \phi \dot{x}_{\gamma} + \sin \theta \sin \phi \dot{y}_{\gamma} + \cos \theta \dot{z}_{\gamma}) \equiv \frac{dr}{ds} = \dot{r}$$

Da cui otteniamo che:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\ell = \int_{\gamma} \frac{c}{r^2} (\sin \theta \cos \phi \dot{x}_{\gamma} + \sin \theta \sin \phi \dot{y}_{\gamma} + \cos \theta \dot{z}_{\gamma}) ds = \int_{\gamma} \frac{c}{r^2} \dot{r} ds = \int_{r(A)}^{r(B)} \frac{c}{r^2} dr = -\frac{c}{r} \Big|_{r(A)}^{r(B)} = \frac{c}{r(A)} - \frac{c}{r(B)}$$

Abbiamo quindi che l'energia potenziale associata al campo \vec{F} è:

$$U = -\frac{c}{r}$$

Per ottenere il potenziale per la forza di Coulomb ci basterà sostituire $c = kq_1q_2$

Definizione di Energia Potenziale Elettrica

Data una forza elettrica \vec{F}_e , si definisce energia potenziale elettrica la quantità:

$$U = -k \frac{q_1 q_2}{r}$$

Si misura in $[U] = J$, ossia in Joule.

Sapendo poi che

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

abbiamo poi che, per ogni ℓ curva chiusa si ha che:

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Quindi \vec{E} è conservativo, quindi esiste un campo scalare V tale che:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Definizione di Potenziale Elettrico

Dato un campo elettrico \vec{E} si definisce potenziale elettrico la quantità:

$$V = \frac{U}{q}$$

Si misura in $[V] = \frac{J}{C} \equiv V$ ossia in Volt

Già da queste osservazioni possiamo ricavare la seconda equazione di Maxwell.

Seconda Legge di Maxwell

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Per la carica puntiforme abbiamo che il potenziale elettrico vale:

$$V = \frac{-kq}{r} + c$$

Simmetria Sferica

Come per il campo elettrico, andiamo a sfruttare la simmetria sferica per ottenere delle leggi per il potenziale elettrico.

Potenziale per il Guscio Sferico

Per Gauss, abbiamo che il campo Elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{r\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Sfruttando la simmetria sferica, abbiamo che: $\vec{E} = \vec{E}(r)$ e quindi:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r} V \quad \Leftrightarrow \quad V = - \int \|\vec{E}\| dr$$

Quindi, integrando, otteniamo che:

$$V = \begin{cases} c_1 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + c_2 & r > R \end{cases}$$

Dobbiamo tuttavia trovare i valori delle costanti c_1 e c_2 tenendo conto che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V = 0 \quad \text{e} \quad V(r = R^+) = V(r = R^-)$$

Dalla prima otteniamo che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + c_2 = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

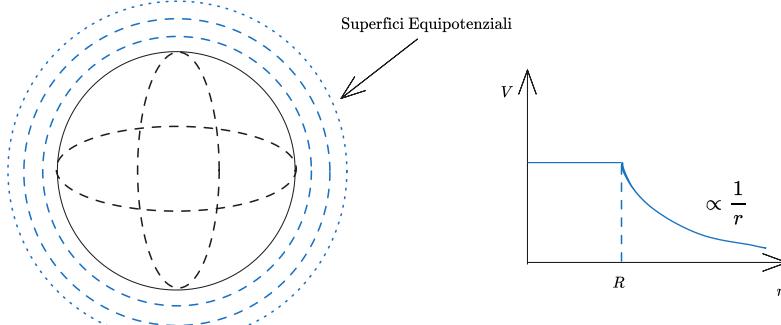
Dalla seconda otteniamo invece che:

$$V(r = R^+) = V(r = R^-) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Segue quindi che il potenziale elettrico è

$$V = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

Segue quindi che le superfici equipotenziali sono circonferenze concentriche al centro del guscio:



Da adesso in poi i passaggi saranno molto più sintetici, in quanto il procedimento è lo stesso di quello precedente

Potenziale per il Condensatore Sferico

Per Gauss il Campo Elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Allora possiamo calcolare direttamente il potenziale elettrico:

$$V = \begin{cases} c_1 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + c_2 & R_1 < r < R_2 \\ c_3 & r > R_2 \end{cases}$$

Andiamo adesso a definire i vincoli per definire le costanti c_1, c_2, c_3 .

Dobbiamo tenere conto che:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V = 0 \quad V(R_1^+) = V(R_1^-) \quad V(R_2^+) = V(R_2^-)$$

Dalla prima otteniamo che $c_3 = 0$, seguendo lo stesso ragionamento di prima

Dalla terza otteniamo che:

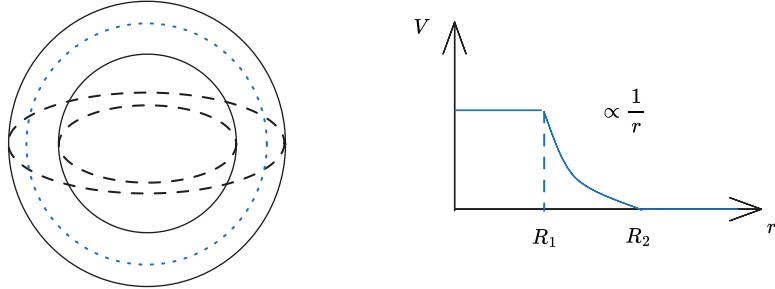
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Dalla terza otteniamo che:

$$c_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Andando a sostituire otteniamo che:

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) & r < R_1 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$



Potenziale per la Sfera Piena

Per Gauss abbiamo che il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \vec{u}_r & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Da cui segue che il potenziale vale:

$$V = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + c_1 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + c_2 & r > R \end{cases}$$

Poniamo come vincoli per le costanti:

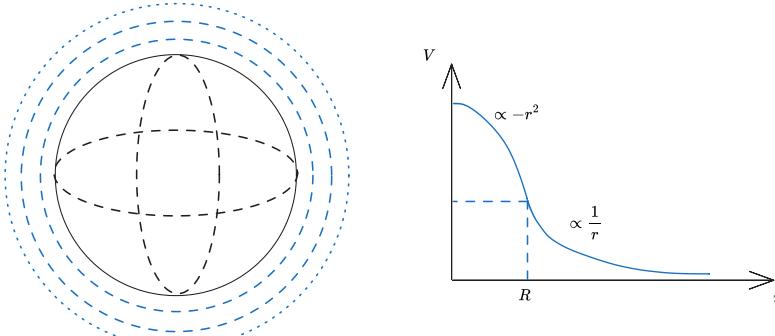
$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V = 0 \quad V(R^+) = V(R^-)$$

Da cui otteniamo che i valori delle costanti sono:

$$c_2 = 0 \quad c_1 = \frac{3}{2R}$$

Da cui otteniamo che il potenziale elettrico vale:

$$V = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{2R^3} + \frac{3}{2R} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & r > R \end{cases}$$



Simmetria Cilindrica

Passiamo ora ai sistemi in cui si può sfruttare la simmetria delle coordinate cilindriche

Potenziale per il Guscio Cilindrico

Per Gauss abbiamo che il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Sempre sfruttando le simmetrie cilindriche possiamo sfruttare il fatto che:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r} V \vec{u}_r$$

Allora integrando otteniamo che:

$$V = \begin{cases} c_1 & r < R \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} R \log(r) + c_2 & r > R \end{cases}$$

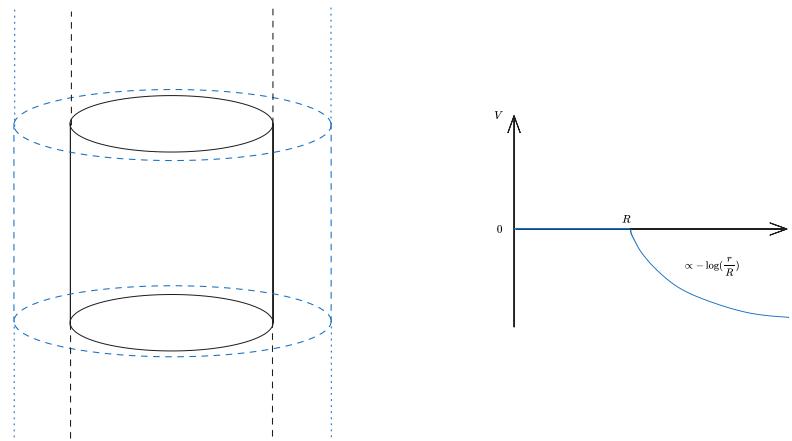
Anche qui dobbiamo cercare dei vincoli che determinare le costanti.

Per la scelta del sistema di riferimento (visto che noi andiamo a calcolare solamente la differenza di potenziale), possiamo porre $V(R) = 0$ e poi possiamo imporre che

$$V(R^+) = V(R^-)$$

Da questi due vincoli otteniamo che $c_1 = 0$ mentre $c_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} R \log(r)$, da cui otteniamo che:

$$V = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \log\left(\frac{r}{R}\right) & r > R \end{cases}$$



Potenziale per il Condensatore Cilindrico

Sempre con Gauss,abbiamo che il Campo Elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ -\frac{\sigma_1 Q}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

Da questo otteniamo che:

$$V = \begin{cases} c_1 & r < R_1 \\ -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \log(r) + c_2 & R_1 < r < R_2 \\ c_3 & r > R_2 \end{cases}$$

Esattamente come sopra andiamo a porre gli stessi vincoli:

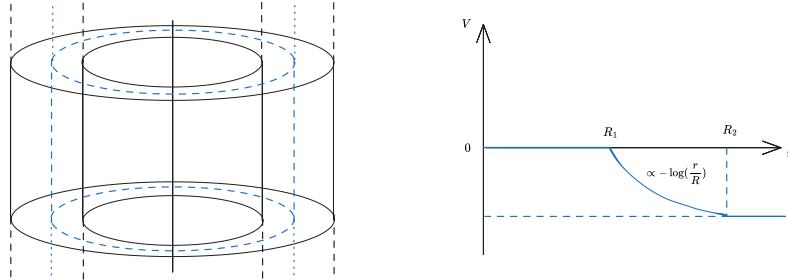
$$V(R_1) = 0 \quad V(R_1^+) = V(R_1^-) \quad V(R_2^+) = V(R_2^-)$$

Facendo i calcoli, *omessi perché sono sempre gli stessi*, otteniamo che:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \log(R_1) \quad c_3 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Da cui si ottiene che:

$$V = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \log(r) + \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \log(R_1) & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) & r > R_2 \end{cases} \Rightarrow V = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \log\left(\frac{R_1}{r}\right) & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) & r > R_2 \end{cases}$$



Potenziale per il Filo Rettilineo Infinito

Per Gauss, abbiamo che il campo elettrico vale

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r$$

da cui otteniamo che il potenziale elettrico vale:

$$V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log(r) + c$$

L'unico vincolo che possiamo porre è che

$$V(1) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Da cui otteniamo che:

$$V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log(r)$$

Potenziale per il Cilindro Pieno

Con Gauss abbiamo che il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r \vec{u}_r & r < R \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Allora otteniamo che il potenziale elettrico vale:

$$V = \begin{cases} \frac{-\rho}{2\varepsilon_0} \frac{r^2}{2} + c_1 & r < R \\ \frac{-\rho}{2\varepsilon_0} R \log(r) + c_2 & r > R \end{cases}$$

I vincoli per la determinazione delle costanti sono:

$$V(R) = 0 \quad V(R^+) = V(R^-)$$

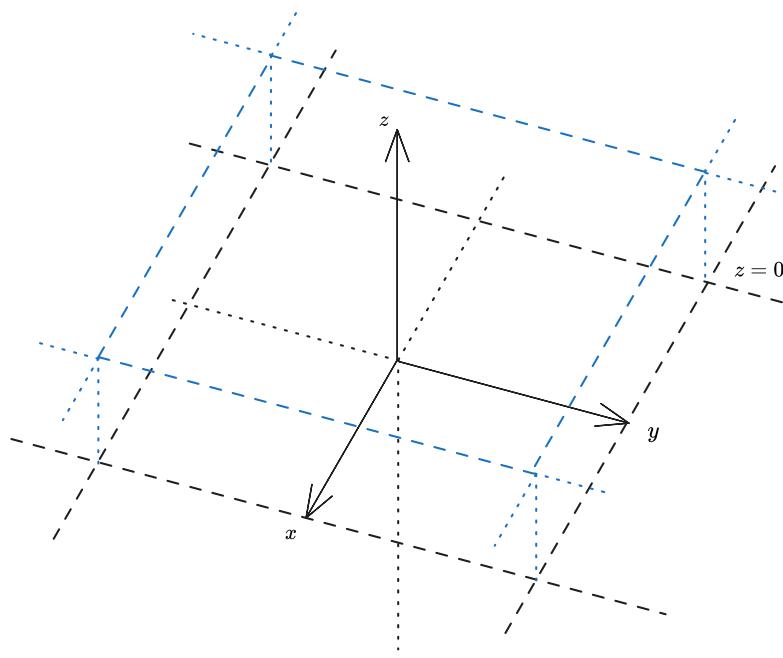
Da cui otteniamo che le costanti valgono:

$$c_1 = -\frac{R^2}{2} \quad c_2 = -R^2 \log(R)$$

Dalle quali otteniamo che il potenziale elettrico vale:

$$V = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{R^2 - r^2}{2} & r < R \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} R^2 \log\left(\frac{R}{r}\right) & r > R \end{cases}$$

Potenziale per il Piano Infinito



Con Gauss abbiamo che il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z < 0 \end{cases}$$

Da cui otteniamo che il Potenziale vale:

$$V = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| + c_1 & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| + c_2 & z < 0 \end{cases}$$

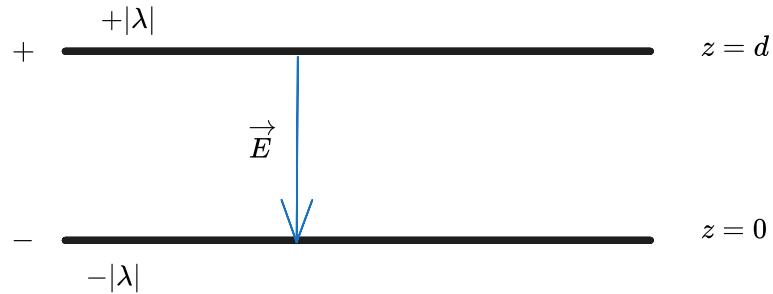
L'unico vincolo che ci basta porre è che

$$V(0^+) = V(0^-) = 0$$

Da cui segue direttamente che $c_1 = c_2 = 0$, quindi il potenziale elettrico vale:

$$V = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} |z| & z < 0 \end{cases}$$

Potenziale per il Condensatore Piano



Da Gaussabbiamo che il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 < z < d \\ 0 & z > d \end{cases}$$

Segue quindi che il potenziale è:

$$V = \begin{cases} c_1 & z < 0 \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}z + c_2 & 0 < z < d \\ c_3 & z > d \end{cases}$$

Allora, ponendo la continuità del potenziale nelle aree in cui $z = 0$ e $z = d$ e ponendo che $V(0) = 0$, otteniamo che:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = c_1 = 0 \quad c_3 = -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

Da cui segue che il potenziale elettrico vale:

$$V = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ -\frac{\sigma z}{\varepsilon_0} & 0 < z < d \\ -\frac{\sigma d}{\varepsilon_0} & z > d \end{cases}$$

Energia Potenziale in Sistemi di Particelle

In un sistema di due particelle è facile calcolare l'energia potenziale, infatti vale:

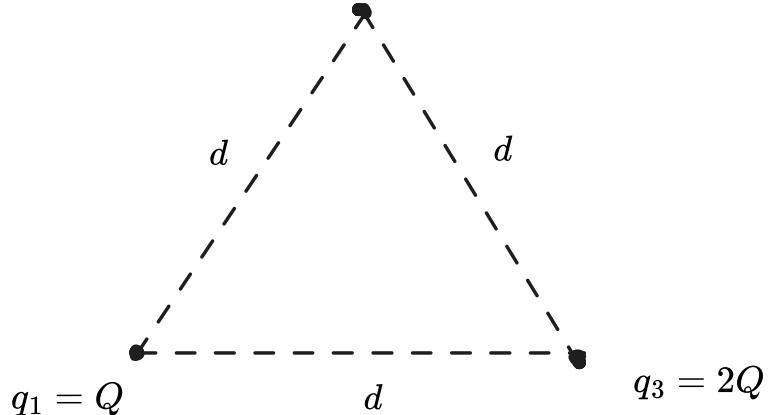
$$U = k \frac{q_1 q_2}{r}$$

In un sistema di n particelle invece vale:

$$U_{tot} = \sum_{i,j=1 : i < j}^n k \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n k \frac{q_i q_j}{r_{i,j}}$$

Esempio con 3 particelle cariche

$$q_2 = -4Q$$



Per calcolare l'energia potenziale del sistema ci basterà sommare le energie potenziali:

$$U_{tot} = U_{1,2} + U_{2,3} + U_{3,1} = \frac{-4kQ^2}{d} + \frac{-8kQ^2}{d} + \frac{2kQ^2}{d} = \frac{-10kQ^2}{d}$$

Esempio del Calcolo della Velocità di Fuga

Abbiamo un nucleo di oro, contenente 79 protoni, attorno al quale sta orbitando un elettrone a distanza r_0 . Con quale velocità deve essere sparato per raggiungere l'infinito? *Quale è la sua velocità di fuga?*

Per risolvere questo problema ci basta sfruttare la conservazione dell'energia:

$$E_i = E_f$$

Sappiamo inoltre che

$$E_i = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + U(r_0) = \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{q_{Au}q_e}{r_0} \quad E_f = 0 + 0$$

Allora ci basterà porre:

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + k\frac{q_{Au}q_e}{r_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2kq_{Au}q_e}{mr_0}}$$

Capacità, Resistenza, Potenza e Circuiti Elettrici

Osservazione: Il potenziale di un conduttore o di un condensatore è sempre proporzionale alla carica:

$$V \propto q$$

E questo vale in generale

Definizione di Capacità

Definiamo la capacità di un conduttore come la costante che lega Carica e Potenziale:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \Leftrightarrow \quad CV = Q$$

Va sottolineato che con V intendiamo la differenza di potenziale tra due punti fissati, non il potenziale in sé per sé

Osservazione: C dipende soltanto dalla geometria del conduttore.

Capacità in un Conduttore Sferico

Consideriamo un Conduttore sferico con carica Q e raggio R

Per quanto abbiamo già detto in precedenza abbiamo che il campo elettrico vale:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r & r > R \end{cases}$$

Da cui otteniamo che il potenziale è:

$$V = \begin{cases} c_1 & r < R \\ c_2 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} & r < R \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

Dalla definizione di Capacità che abbiamo dato, possiamo prendere

$$V = |V(\infty) - V(R)|$$

Da cui segue immediatamente che:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Capacità in un Condensatore Piano

Consideriamo un condensatore piano con carica $Q = \sigma A$ e distanza d

Per quanto abbiamo detto in precedenza sul campo elettrico, abbiamo che:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 < z < d \\ 0 & z > d \end{cases}$$

Da cui abbiamo ottenuto che il potenziale vale:

$$V = \begin{cases} c_1 & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} + c_2 & 0 < z < d \\ c_3 & z > d \end{cases} \xrightarrow{c_1 \equiv V_-} \begin{cases} V_- & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} + V_- & 0 < z < d \\ V_- + \frac{\sigma d}{\epsilon_0} & z > d \end{cases}$$

Dove V_- è il valore del potenziale dove c'è carica negativa

Tuttavia, se prendessimo:

$$V = |V(z) - V_-|$$

Otterremo che il nuovo valore del potenziale sarà:

$$V = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{\sigma z}{\varepsilon_0} & 0 < z < d \\ \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} & z > d \end{cases}$$

Sapendo poi che

$$\sigma = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{A} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{Qd}{A\varepsilon_0}$$

Da cui otteniamo direttamente che:

$$C = \frac{A\varepsilon_0}{d}$$

Capacità in un Condensatore Sferico

Sapendo che il potenziale del condensatore sferico vale:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Possiamo prendere

$$V = |V(R_2) - V(R_1)|$$

Da cui otteniamo che:

$$Q = V \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0}{(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})} \quad \Rightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

Capacità in un Condensatore Cilindrico

Consideriamo un condensatore cilindrico infinito.

Abbiamo che, scelta una lunghezza L abbiamo che la carica totale è pari a

$$Q = |\sigma_1|2\pi R_1 L - |\sigma_2|2\pi R_2 L$$

Possiamo considerare

$$V = |V(R_2) - V(R_1)|$$

Sapendo che il potenziale vale:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \log \left(\frac{R_1}{R_2} \right)$$

Segue direttamente che la capacità del condensatore cilindrico vale:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log(R_2/R_1)}$$

Definizione di Corrente Elettrica

Consideriamo un conduttore di lunghezza L e spessore S sottoposto ad una differenza di potenziale V :

$$V \neq 0 \Rightarrow \vec{E} \neq 0 \Rightarrow \exists \vec{F}_c = q\vec{E} = -|e^-|\vec{E}$$

Esiste quindi un flusso di carica negativa da B a A (quindi c'è un flusso di carica positiva da A a B).

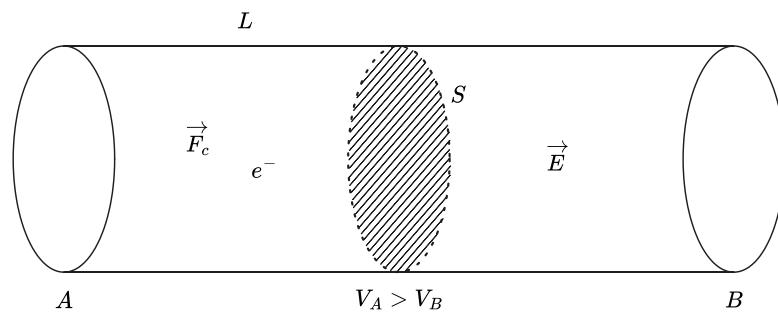
Possiamo chiamare questo flusso come intensità di corrente.

La corrente elettrica è caratterizzata da un'intensità di corrente

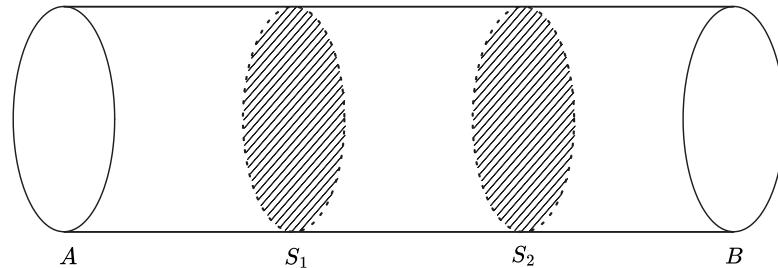
$$i = I = \frac{dq}{dt}$$

Dove I (indifferentemente i) rappresenta la quantità di carica per unità di tempo che attraversa la sezione S del conduttore

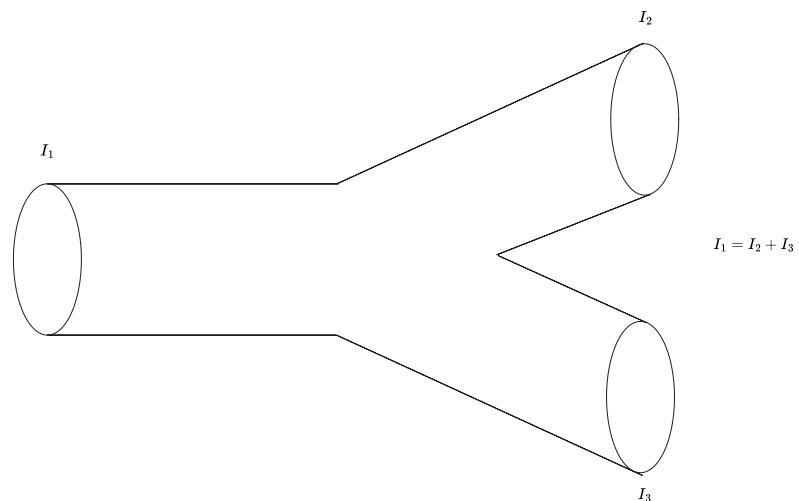
Si misura in $[I] = C/s = A = \text{Ampère}$



Dal principio di conservazione della carica segue che la corrente elettrica è la stessa in una qualunque sezione ortogonale al flusso del filo, in particolare $I_1 = I_2$



La conservazione ci dice anche che la somma algebrica delle intensità di corrente è nulla:



Definizione di Resistenza Elettrica

Il moto dei portatori di corrente all'interno di un conduttore è condizionato dagli ioni del reticolo che creano resistenza a questo moto. Gli elettroni persino quindi energia e tendono a muoversi a velocità costante

Per molti conduttori c'è una proporzionalità tra la differenza di potenziale e l'intensità di corrente e vale:

$$V = R \cdot I$$

Questa è la prima legge di Ohm

Risolvendo per la resistenza otteniamo che:

$$R = \frac{V}{I}$$

La resistenza si misura in $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$ Ohm

Proprio per questo motivo, i conduttori che hanno questa proprietà si dicono Ohmici

Possiamo andare a vedere il cambio dell'energia potenziale quando una carica dq passa da una regione con potenziale V_A ad una regione con potenziale V_B

In particolare, se prendiamo una carica infinitesimale dq e sapendo che $V = \frac{U}{dq}$ otteniamo che:

$$dU = V dq = \frac{dq}{dt} V dt = IV dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = IV$$

Definizione di Potenza

Si definisce potenza la quantità

$$P = \frac{dV}{dt} = IV$$

La potenza si misura in $[P] = J/s = W$ Watt

Nel caso particolare dei conduttori Ohmici abbiamo che:

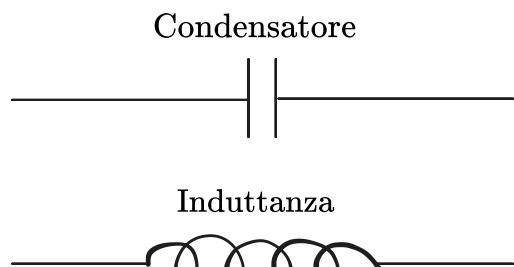
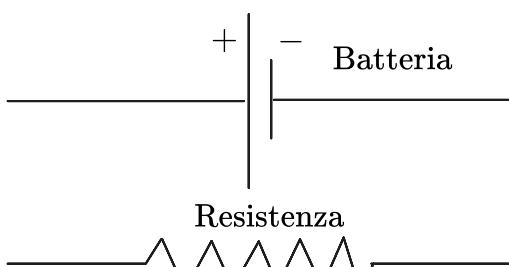
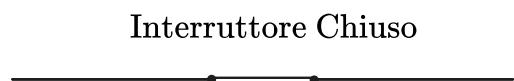
$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

Abbiamo che la potenza è l'energia dissipata come calore

Definizione di Circuito

Il circuito è un insieme di componenti connessi tra di loro da fili elettrici in un percorso chiuso in cui la corrente può fluire con continuità

Andiamo a vedere come spesso sono rappresentati in forma grafica:



Definizione di Elementi in Serie

Si dice che due componenti in un circuito sono collegati in serie se la corrente che le attraversa è la stessa:

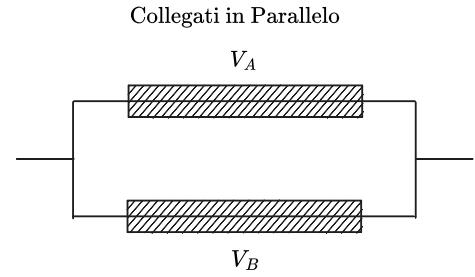
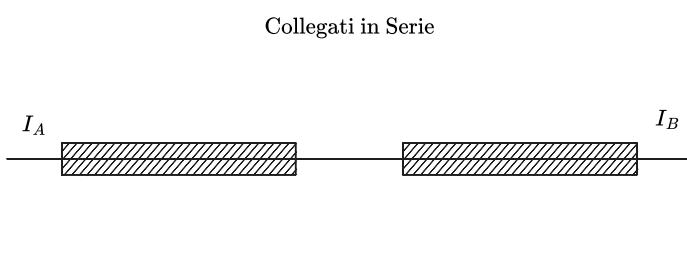
$$I_A = I_B$$

Definizione di Elementi in Parallello

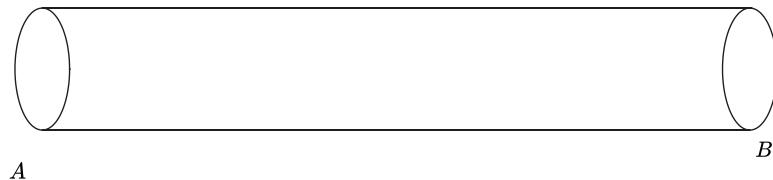
Due componenti sono collegati in parallelo se la differenza di potenziale tra i loro capi è la stessa: $V_A = V_B$

Andiamo a vedere adesso nel dettaglio i vari componenti di un circuito

Conduttore



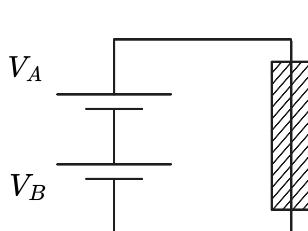
Se noi abbiamo due capi di un circuito con una differenza di potenziale ai capi del circuito abbiamo che:



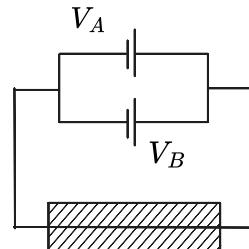
Se $V_A > V_B$, allora la corrente fluisce da A a B

Se $V_B > V_A$, allora la corrente fluisce da B a A

Pile / Batterie / Generatore



$$V = V_A + V_B$$



$$V = V_A = V_B$$

Condensatore

Definizione di Condensatore

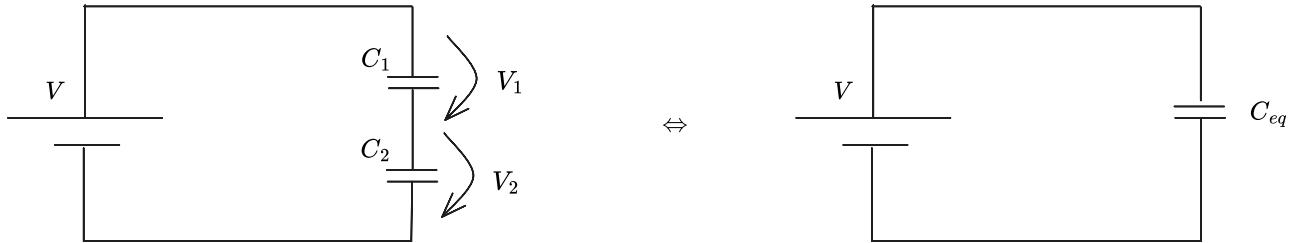
Il condensatore è un dispositivo che permette di creare \vec{E} al suo interno.

Inoltre, se le armature sono collegate ad un generatore, quindi hanno differenza di potenziale, si ha che vale:

$$Q = CV$$

Andiamo a vedere come si comportano quando sono collegate in serie e in parallelo

In Serie



Visto che i condensatori sono in serie, abbiamo che

$$V_1 + V_2 = V \quad \text{e} \quad I = I_1 = I_2$$

Sapendo poi che $I = dQ/dt$ abbiamo che:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} \Rightarrow Q_1 = Q_2$$

Visto che $Q_i = C_i V_i$ con $i \in \{1, 2\}$ abbiamo che:

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 \\ Q_2 = C_2 V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{Q_1}{C_1} \\ V_2 = \frac{Q_2}{C_2} \end{cases}$$

Abbiamo anche che $V = V_1 + V_2$ da cui otteniamo che:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \xrightarrow{Q_1=Q_2=Q} V = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

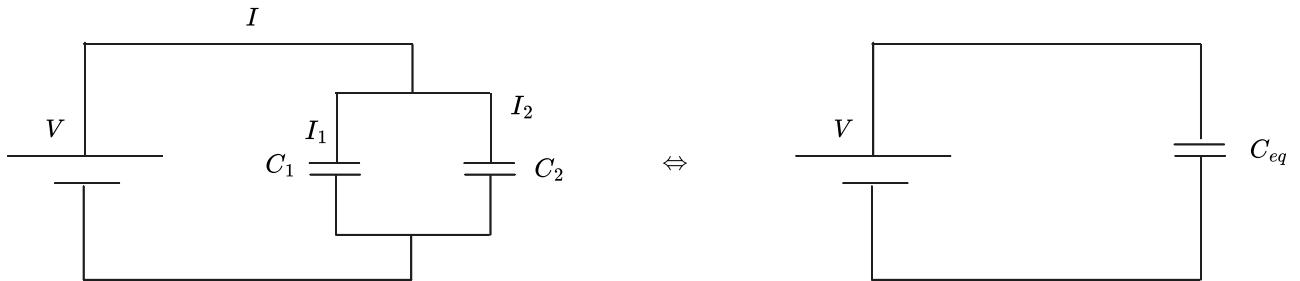
Possiamo definire Capacità equivalente dei condensatori in serie la quantità:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

In generale, per n cariche in serie abbiamo che la capacità equivalente vale:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

In Parallelo



Visto che i condensatori sono in parallelo abbiamo che:

$$V = V_1 = V_2 \quad \text{e} \quad I = I_1 + I_2$$

Dalla definizione che abbiamo dato della capacità segue che:

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 = C_1 V \\ Q_2 = C_2 V_2 = C_2 V \end{cases}$$

Inoltre, sapendo che l'intensità di corrente è la derivata prima della quantità di carica rispetto al tempo, segue che:

$$I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = V(C_1 + C_2)$$

In questo caso possiamo chiamare capacità equivalente la quantità:

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

In generale, per n condensatori in parallelo, abbiamo che:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

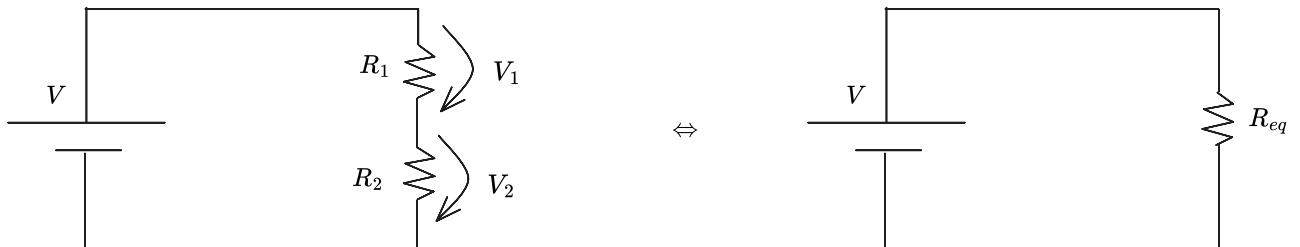
Resistenza

Se ai capi di un conduttore con resistenza non trascurabile passa della corrente, allora lo fa con la seguente formulazione:

$$I = \frac{V}{R}$$

Andiamo a vedere come si comportano le resistenze quando sono collegate in serie o in parallelo

In Serie



Visto che le resistenze sono collegate in serie abbiamo che:

$$V_1 + V_2 = V \quad \text{e} \quad I = I_1 = I_2$$

Dalla prima legge di Ohm abbiamo che:

$$I = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2}$$

Da queste uguaglianze otteniamo che:

$$V = R_1 I_1 + R_2 I_2 \quad \Rightarrow \quad V = I(R_1 + R_2)$$

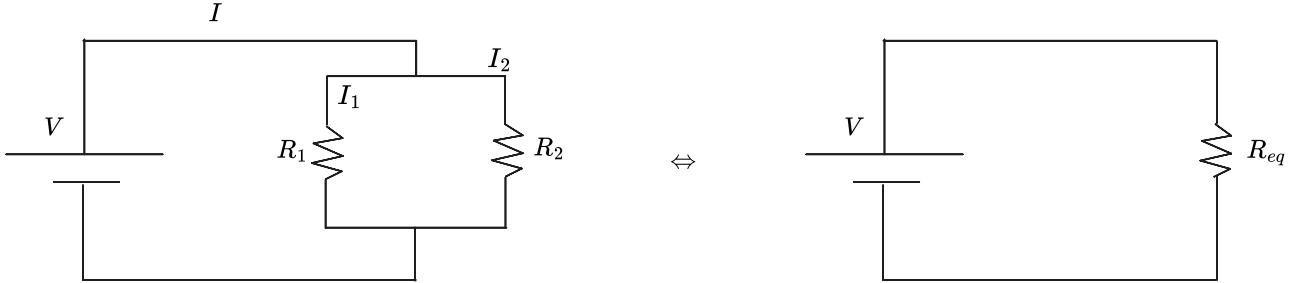
Possiamo definire la Resistenza Equivalente del circuito la quantità:

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

In generale, per n resistenze poste in serie, abbiamo che:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

In Parallelo



Visto che le resistenze sono in parallelo abbiamo che:

$$V = V_1 = V_2 \quad \text{e} \quad I = I_1 + I_2$$

Dalla prima legge di Ohm otteniamo che:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{V_1}{I_1} \\ R_2 = \frac{V_2}{I_2} \end{cases}$$

Quindi, dal fatto che sono collegati in parallelo, abbiamo che:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

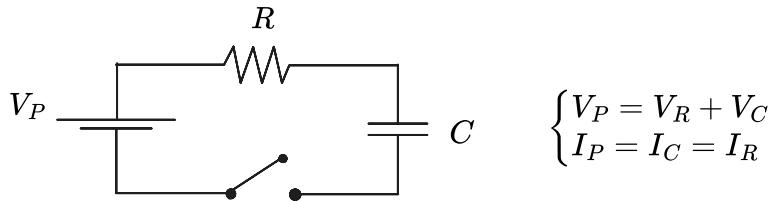
Da ciò possiamo definire la Resistenza Equivalente come:

$$R_{eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Circuito RC

Definizione di Circuito RC

Il Circuito RC è un particolare circuito in cui sono presenti una resistenza, un condensatore e un interruttore collegati in serie.



Il nostro obiettivo è quello di studiare l'evoluzione temporale della carica $Q(t)$ e dell'intensità di corrente $I(t)$
Dalla legge di Ohm e dalla definizione di Capacità abbiamo che:

$$R = \frac{V_R}{I_R} \quad \text{e} \quad Q = CV_C$$

Mettendo tutto insieme otteniamo che vale:

$$V_P = RI_C + \frac{Q}{C}$$

Mettendo insieme inoltre che l'intensità di corrente è la derivata prima della carica rispetto al tempo, otteniamo che:

$$\boxed{\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{V_P}{R}}$$

Risolviamo quest'equazione differenziale per la carica in funzione del tempo $Q(t)$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{V_P}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}(Q - V_P C)$$

Definiamo $\tilde{Q} = Q - V_P C$. Sapendo che $V_P C$ è costante, \tilde{Q} e Q distano solo di una costante, quindi otteniamo che:

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} = \frac{dQ}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tilde{Q}}{dt} = -\frac{1}{RC}\tilde{Q}$$

Adesso possiamo integrare per ottenere un'equazione che non richieda le derivate:

$$\int_{\tilde{Q}(t_0)}^{\tilde{Q}(t)} \frac{d\tilde{Q}}{\tilde{Q}} = -\int_{t_0}^t \frac{dt}{RC}$$

Andando avanti a sviluppare otteniamo che:

$$\int_{\tilde{Q}(t_0)}^{\tilde{Q}(t)} \frac{d\tilde{Q}}{\tilde{Q}} = -\int_{t_0}^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \log\left(\frac{\tilde{Q}(t)}{\tilde{Q}(t_0)}\right) = -\frac{t-t_0}{RC} \Rightarrow \tilde{Q}(t) = \tilde{Q}(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{RC}} \Rightarrow Q(t) - V_P C = (Q(t_0) - V_P C)e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}$$

Ponendo $Q(t_0) = 0$ otteniamo che la soluzione diventa:

$$\boxed{Q(t) = V_P C \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)}\right)}$$

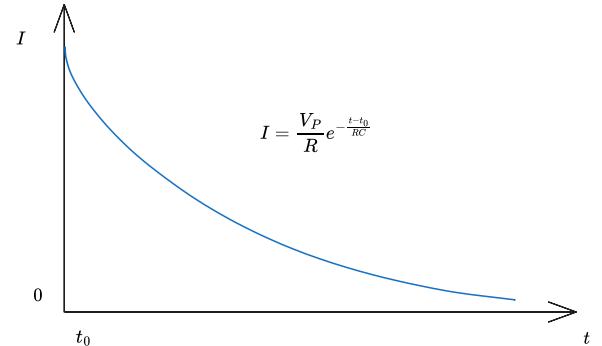
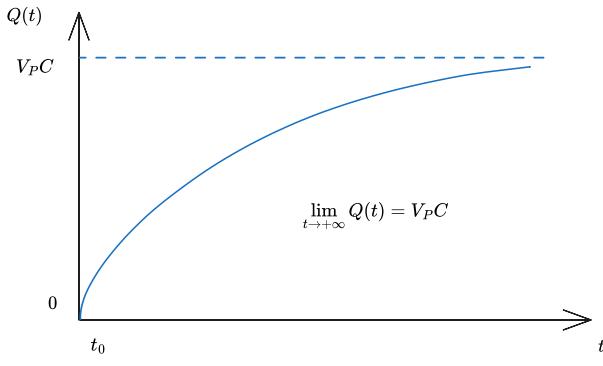
Poniamo $\tau \equiv RC$ e diamo la seguente caratterizzazione dei circuiti RC:

Definizione di Circuito a Regime

Un circuito si dice a Regime quando il tempo è molto maggiore di τ , ossia quando:

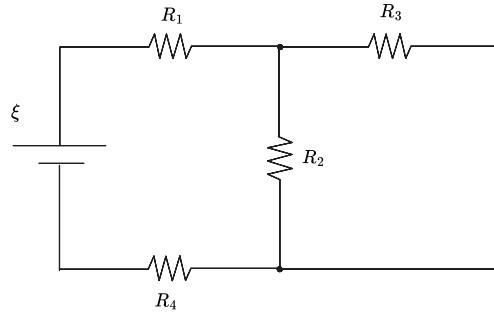
$$t \gg \tau \equiv RC$$

Graficamente abbiamo che:



Esempio della Risoluzione di un Circuito con Resistenze

Sia dato il seguente circuito:



$$\xi = 12V \quad \begin{cases} R_1 = 20\Omega \\ R_2 = 20\Omega \\ R_3 = 30\Omega \\ R_4 = 8\Omega \end{cases}$$

1. Trovare I

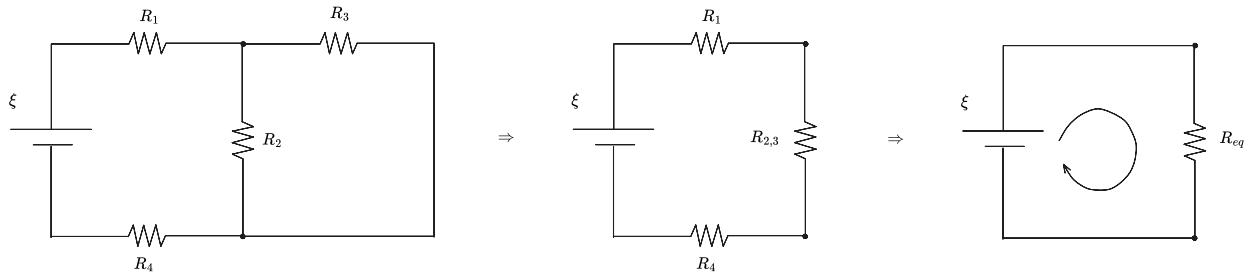
2. Calcolare la corrente che passa per R_2

3. Calcolare la corrente che passa per R_3

Prima di andare nell'effettivo a calcolare tutte le richieste, andiamo a vedere come il circuito può essere semplificato, sfruttando le resistenze equivalenti.

Notiamo che le resistenze 2 e 3 sono in parallelo, quindi possono essere sostituite con una resistenza equivalente $R_{2,3}$.

Oraabbiamo che tutte le resistenze sono in serie, quindi possiamo sostituirlle con una equivalente:



1. Per la legge di Ohm abbiamo che:

$$R = \frac{\xi}{I} \Rightarrow I = \frac{\xi}{R} = \frac{12V}{(20 + 8 + 12)\Omega} = \frac{12V}{40\Omega} = \frac{3}{10}A$$

2. Per la legge dei nodi abbiamo che $I_1 = I_2 + I_3$

Inoltre, poiché R_2 e R_3 sono legate in parallelo, abbiamo che $V_2 = V_3$.

Inoltre per la legge di Ohm abbiamo che:

$$\begin{cases} R_2 = \frac{V_2}{I_2} \\ R_3 = \frac{V_3}{I_3} = \frac{V_2}{I_3} \end{cases}$$

Sapendo inoltre che $\xi = V_1 + V_2 + V_4$ (con V_2 stiamo considerando la differenza di potenziale della resistenza equivalente $R_{2,3}$) abbiamo che $V_2 = \xi - (R_1 + R_4)I$

Risolvendo il sistema otteniamo che:

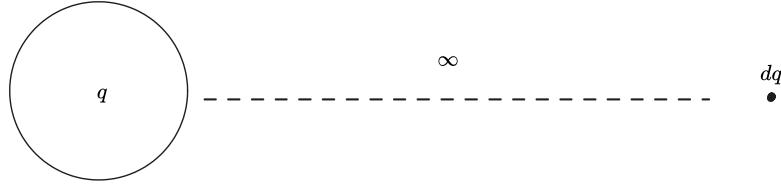
$$V_2 = R_2 I_2 = \xi - (R_1 + R_4)I \Rightarrow I_2 = \frac{\xi - (R_1 + R_4)I}{R_2} = 0,18A$$

3. $I_3 = I - I_2 = (0,3 - 0,18)A = 0,12A$

Energia Immagazzinata in un Campo Elettrico

Per caricare un conduttore o un condensatore, un agente esterno deve compiere lavoro (c'è un costo energetico del processo di carica)

Supponiamo di avere una situazione iniziale in cui abbiamo un corpo con carica q e supponiamo di avere una carica infinitesima dq posta all'infinito rispetto alla carica q :



Possiamo definire allora l'energia iniziale del sistema come:

$$E_i = U_{cond} + U_{dq}$$

Tuttavia, per costruzione, abbiamo che $U_{dq} = 0$

Vogliamo arrivare ad un sistema in cui si ha che la carica grande q e la carica infinitesima dq sono unite insieme, cioè:

$$E_f = U_{cond}(q) + U_{cond}(dq) = U_{cond}(q) + V(q)dq$$

Dove $V(q)$ è il potenziale generato dal conduttore.

Adesso non ci resta da integrare per ottenere il costo dell'energia totale:

$$E = \int_0^{E(q)} dE$$

Sfruttando il fatto che: $dE = E_f - E := V(q)dq$ otteniamo che:

$$E = \int_0^{E(q)} dE = \int_0^q V(q)dq$$

Andando a sfruttare il fatto che $Q = CV$ otteniamo che:

$$\int_0^Q \frac{qdq}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

Quindi l'energia potenziale elettrica immagazzinata dal conduttore è:

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Energia Immagazzinata in un Condensatore Piano

In un condensatore abbiamo che il Potenziale Elettrico vale:

$$V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

Sapendo che

$$Q = CV \Rightarrow C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

Da cui otteniamo che:

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{A\epsilon_0} d \xrightarrow{Q=\sigma A} \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 A^2}{A\epsilon_0} d = \boxed{\frac{1}{2} \frac{\sigma^2 dA}{\epsilon_0}}$$

Sapendo poi che il volume è $Vol = dA$ otteniamo che:

$$E = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} Vol$$

Inoltre, sapendo che

$$\|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 Vol$$

Notiamo che la quantità che precede il volume è una sorta di densità di energia, in particolare possiamo porre:

$$\rho_E = \frac{E}{Vol}$$

In generale, dove c'è un campo elettrico c'è una densità di Energia del campo elettrico:

$$\boxed{\rho_E = \frac{\|\vec{E}\|}{2} \varepsilon_0}$$

Ensergia Immagazzinata in un Condensatore Sferico

Siano R il raggio del condensatore sferico e Q la carica del condensatore.

Allora abbiamo che il potenziale elettrico vale:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Sapendo che $Q = CV$ abbiamo che

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r$$

Allora l'energia è:

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Inoltre sapendo che

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi r^2} \Rightarrow \boxed{E = \sigma^2 \cdot \frac{2\pi R^3}{\varepsilon_0}}$$

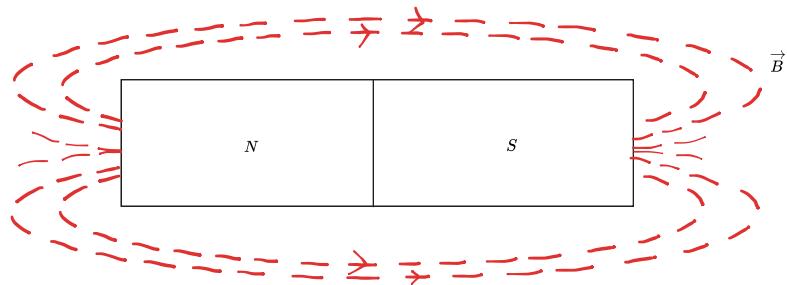
Fondamenti Magnetici e Campo Magnetico

Mentre l'origine della parte elettrostatica deriva da una carica elettrica $q \neq 0$, non possiamo dire la stessa cosa per il magnetismo, perché una vera e propria "carica magnetica" non è mai stata trovata. La prima scoperta di megnetismo deriva dalla scoperta di certe rocce (magnetite) a contatto con il ferro

In generale il campo magnetico è generato da due tipi di sorgenti:

- *Magneti Permanenti* con un campo magnetico intrinseco dovuto allo spin degli atomi che compongono la pietra stessa
- *Correnti elettriche* o particelle in moto, che prendono il nome di *elettro magneti* o magneti temporanei

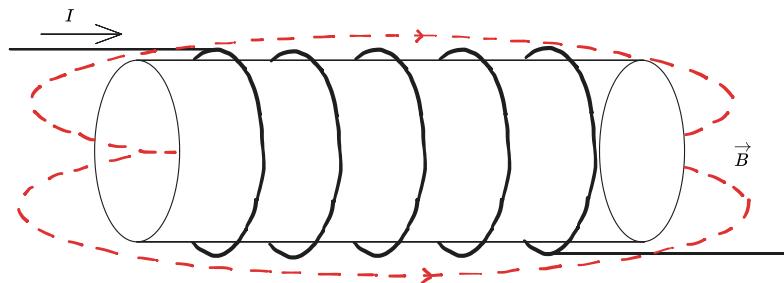
Nel caso del dipolo magnetico abbiamo che:



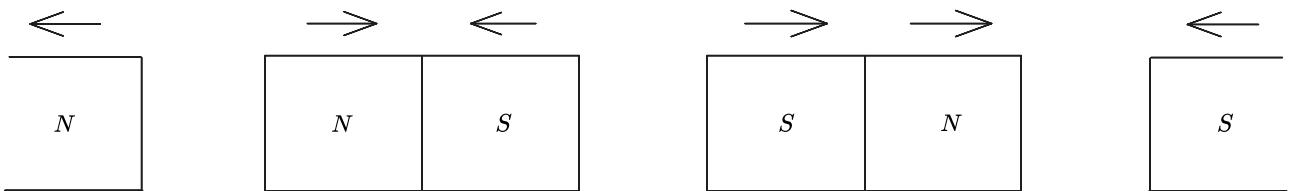
Dal fatto che il campo magnetico è un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 segue che può essere scritto come somma di un campo scalare e di uno vettoriale. Inoltre, sapendo che è a linee di campo chiuse,abbiamo che \vec{B} è di tipo gradiente, ossia:

$$\nabla B = 0$$

Nel caso della bobina e dell'elettro magnete abbiamo che:



Va sottolineato che tra i magneti con stessa direzione (Nord - Nord, Sud - Sud) c'è una forza magnetica repulsiva, mentre tra quelli con direzione opposta (Nord - Sud) c'è una forza magnetica attrattiva.



Forza di Lorentz

La forza di Lorentz è una forza che entra in casua quando abbiamo una carica q in moto all'interno di un campo magnetico $\vec{B} \neq 0$

Empiricamente abbiamo che:

- La forza magnetica applicata sulla carica puntiforme è proporzionale alla carica stessa 1;

- È nulla se $\vec{v} \parallel \vec{B}$
- È massima se $\vec{v} \perp \vec{B}$
- È sempre perpendicolare al piano (\vec{v}, \vec{B})

Da questo otteniamo che:

Definizione di Forza di Lorentz

La forza di Lorentz è la forza magnetica che agisce su una carica q che si sta muovendo di velocità \vec{v} all'interno di un campo magnetico $\vec{B} \neq 0$. In particolare vale:

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Sapendo che $[F] = N$, $[q] = C$, $[v] = m/s$ segue che: $[B] = \frac{Ns}{Cm} = T$

Moto di una Carica in un Campo Magnetico costante e uniforme

Supponiamo di avere una carica q all'interno di un campo magnetico $\vec{B} \neq 0$ e supponiamo non ci siano altre forze. Allora la situazione in questo caso è:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Da questa affermazione abbiamo che:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}(\vec{v} \times \vec{B})}$$

Questa formula è valida per ogni sistema di riferimento

Andiamo a vedere come si comporta con le coordinate cartesiane:

$$\vec{a} = \frac{q}{m}(v_y B_z - v_z B_y, v_z B_x - v_x B_z, v_x B_y - v_y B_x)$$

Assumiamo che $\vec{v} \perp \vec{B}$, allora possiamo prendere il sistema di coordinate:

$$\begin{cases} \vec{B} = (0, B, 0) \\ \vec{v} = (v_x, 0, v_z) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{qB}{m}(-v_z, 0, v_x)}$$

Deduciamo facilmente che:

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{v}$$

Ossia l'accelerazione è un'accelerazione centripeta, quindi il moto descritto è un moto circolare uniforme, ossia il raggio R è costante e $\|\vec{v}\|$ è costante.

Sappiamo anche che:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \\ \vec{v} &= \frac{d \vec{x}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned}$$

Allora dalla formula che avevamo ricavato in precedenza che legava accelerazione e velocità abbiamo che:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dx}{dt} \end{cases} \xrightarrow{\text{Integrando}} \begin{cases} x(t) = -v_{0,z} \frac{m}{qB} + \left(x_0 + \underbrace{\frac{v_{0,z} m}{qB}}_{z_c} \right) \cos \left(\frac{qBt}{m} \right) + v_{0,x} \frac{m}{qB} \sin \left(\frac{qBt}{m} \right) \\ z(t) = -v_{0,x} \frac{m}{qB} + \left(z_0 + \underbrace{\frac{v_{0,x} m}{qB}}_{z_c} \right) \cos \left(\frac{qBt}{m} \right) + v_{0,z} \frac{m}{qB} \sin \left(\frac{qBt}{m} \right) \end{cases}$$

Sapendo poi che

$$(x(t) - x_c)^2 + (z(t) - z_c)^2 = R^2$$

Otteniamo che

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{u}_T \quad \vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_n \vec{u}_n$$

Dove \vec{u}_T è la direzione tangenziale e \vec{u}_n è la direzione normale

Sapendo poi che \vec{u}_T e \vec{u}_n sono vettori ortogonali,abbiamo che il loro prodotto scalare è nullo per ogni istante di tempo
Sapendo poi anche che:

$$v \perp a \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow a_T = 0 \Rightarrow \vec{a} = a_n \vec{u}_n$$

Sapendo inoltre che:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} (\|\vec{v}\| \cdot \vec{u}_T)$$

Sapendo inoltre che $\vec{u}_n \cdot \vec{u}_T = 0$ per ogni istante di tempo segue che:

$$\dot{\vec{u}}_n \cdot \vec{u}_T + \vec{u}_n \cdot \dot{\vec{u}}_T = 0$$

Da tutto ciò si ottiene che il valore dell'accelerazione vale:

$$a_n = \|\vec{v}\| \frac{d}{dt} \vec{u}_T \quad \text{con } \frac{d}{dt} \vec{v}_T \text{ cambiamento di direzione di } \vec{v}$$

Ma allora, mettendo tutto insieme con le formule del moto circolare uniforme,abbiamo che l'accelerazione centripeta vale:
 $a_c = v^2/R$

Andando a calcolare la risultante delle forze abbiamo che:

$$F_B = F_c \Rightarrow qvB = ma_c \Rightarrow a_c = \frac{q}{m}vB \Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \propto \frac{1}{B}$$

Per fare un giro completoabbiamo che il periodo vale:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Conoscendo il periodo possiamo anche calcolare la frequenza come $\nu = 1/T$:

$$\nu = \frac{qB}{2\pi m}$$

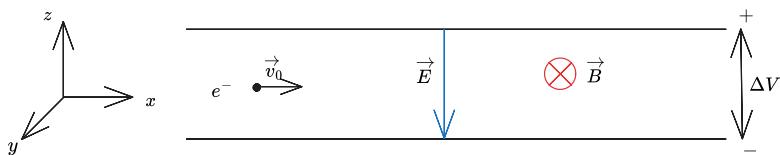
E conoscendo la frequenza possiamo anche calcolare la velocità angolare: $\omega = 2\pi\nu$

$$\omega = \frac{qB}{m}$$

Notiamo che se il corpo si fosse mosso anche in una direzione parallela al campo magnetico, il moto che avrebbe avuto sarebbe stato quello di un'elica, invece che quello di una circonferenza

Esperimento di Thomson

L'esperimento di Thomson utile per la determinazione di $\frac{q}{m}$ per gli elettroni:



Per poter effettivamente determinare il rapporto carica/massa possiamo considerare questo sistema a due regimi:

- **Regime 1:** $\vec{E} \neq 0$ costante e $\vec{B} \neq 0$ costante:

L'obiettivo di questo regime è quello di individuare v_0

Poiché il corpo che stiamo studiando (l'elettrone) ha una carica negativa, e poiché vi sono un campo magnetico e un campo elettrico, si ha che agiscono due forze, una magnetica e una elettrica sulla carica

Data la struttura del problema, abbiamo che la forza elettrica punta verso l'armatura con carica positiva, mentre la forza magnetica, vista la direzione e il verso del campo magnetico, abbiamo che tende a spostare l'elettrone verso l'armatura negativa.

Abbiamo quindi un sistema di forze in cui:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_c + \vec{F}_m \quad \Rightarrow \quad F_{tot} = F_c - F_m = qE - qv_0B$$

Noi vogliamo far sì che la direzione del moto sia orizzontale, quindi vogliamo che la forza risultante sia nulla, e nel fare ciò possiamo regolare la differenza di potenziale, quindi:

$$qE - qv_0B = 0 \quad \Rightarrow \quad qE = qv_0B \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{E}{B}$$

- **Regime 2:** $\vec{E} \neq 0$ costante e $\vec{B} = 0$

Con questo regime possiamo effettivamente il rapporto voluto

Sapendo che

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{E} \xrightarrow{q=-|e|} \vec{E} = -\|\vec{E}\|\vec{u}_y$$

Abbiamo quindi che le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ x = x_0 + v_{0,x}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ x = x_0 + v_{0,x}t \end{cases}$$

Possiamo assumere $x_0 = y_0 = 0$ e risolvendo per y abbiamo che:

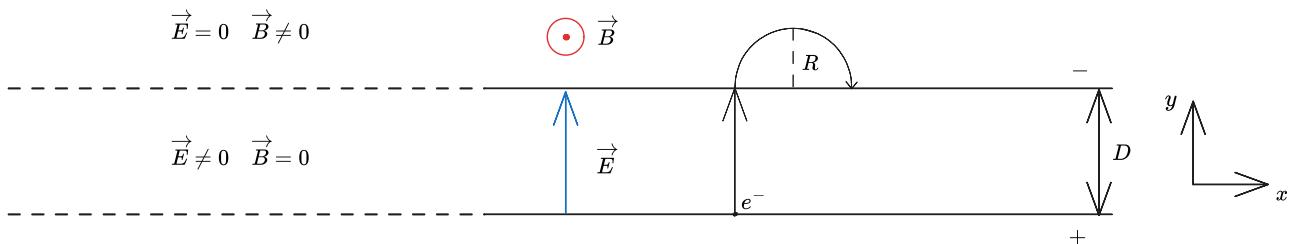
$$\begin{cases} L = \Delta x = v_{0,x}t \Rightarrow t = \frac{L}{v_{0,x}} \\ \Delta y = \frac{1}{2} \frac{|qE|}{m} t^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} \frac{|qE|}{m} \left(\frac{L}{v_{0,x}} \right)^2$$

Adesso basta andare a risolvere per $\frac{|q|}{m}$ e otteniamo che:

$$\frac{|q|}{m} = \frac{2\Delta y E}{L^2 B^2}$$

Spettrometro di Massa

Serve per determinare la massa di particelle di carica



Nella zona in cui c'è solo campo elettrico, abbiamo che la forza risultante è quindi solo la forza di Coulomb:

$$\vec{F}_{ris} = \vec{F}_c \Leftrightarrow qE = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{qE}{m} \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ v_y = v_{0,y} + a_y t \end{cases}$$

Vogliamo trovare v_y quando $y = D$ e dal sistema appena scritto otteniamo:

$$t(y=D) = \sqrt{2D \left| \frac{m}{qE} \right|} \Rightarrow v_y(y=D) = \sqrt{2D \left| \frac{qE}{m} \right|}$$

Nella zona in cui c'è solo il campo magnetico, abbiamo che agisce solo la forza magnetica:

$$F_{ris} = F_m \Rightarrow qvB = ma \Rightarrow ma_c = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv^2}{qvB}$$

Da cui otteniamo che:

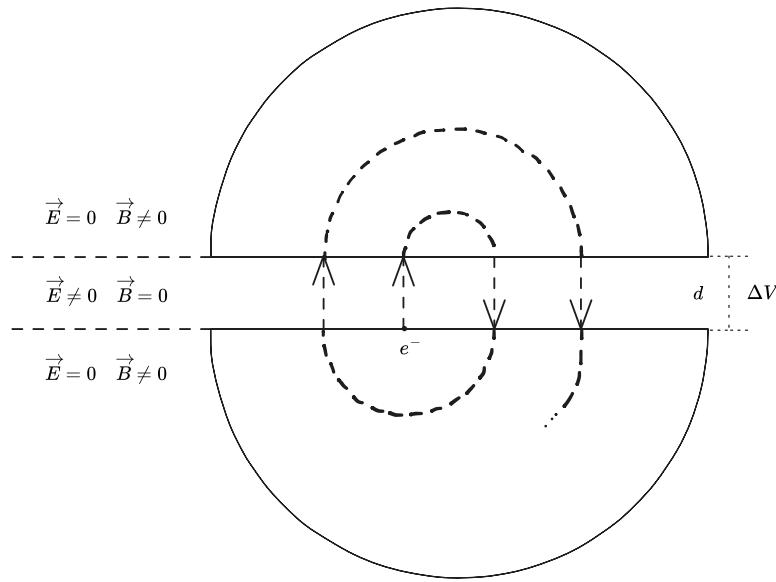
$$R = \frac{mv}{qB} \quad \text{dove } v = v_y(y = D)$$

Andando poi a sostituire si ha che:

$$m = \frac{RqB}{v} \Rightarrow m = \frac{qB^2R^2}{2DE}$$

Ciclotrone

È l'antenato di un acceleratore di particelle



Andiamo a mettere una particella carica all'interno delle due armature.

Nella regione in cui c'è solo il campo elettrico viene accelerata per la presenza del campo elettrico \vec{E} , mentre nella regione in cui c'è solo il campo magnetico \vec{B} per la forza di Lorentz ruota e torna indietro

Per la conservazione dell'energia nella regione con solo campo elettrico, abbiamo che:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + qV_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV_f = E_f \Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + \frac{2q\Delta V}{m}$$

Questa calcolo viene fatto n volte, quindi ad ogni passaggio si ottiene che:

$$v_{i+1}^2 = v_i^2 + \frac{2q\Delta V}{m}$$

Quindi la velocità finale aumenta sempre

Nelle regioni a solo campo magnetico costante abbiamo che l'unica forza che agisce è quella di Lorentz \vec{F}_L che è una forza centripeta, quindi otteniamo che:

$$F_L = F_c \Rightarrow qv_{i+1}B = m\frac{v_{i+1}^2}{R_{i+1}} \Rightarrow R_{i+1} = \frac{mv_{i+1}}{qB}$$

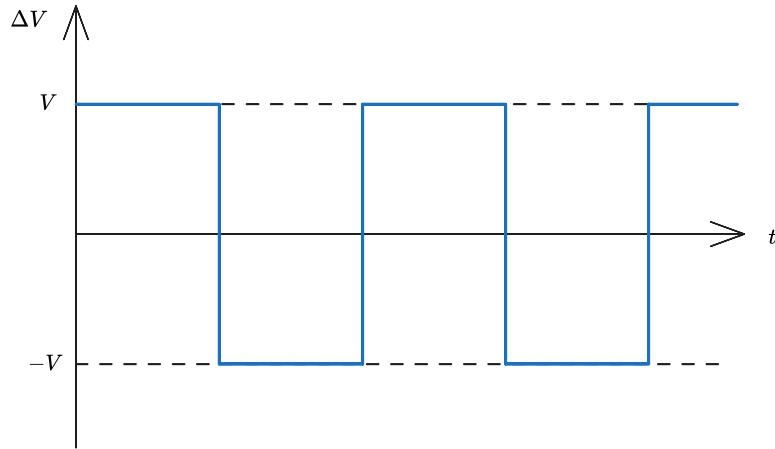
Da questo posso poi calcolare il tempo di percorrenza nella parte in cui c'è solo il campo magnetico, sapendo che:

$$v_{i1} = \frac{\pi R_{i+1}}{\Delta t_{i+1}} \Rightarrow \Delta t_{i+1} = \frac{\pi R_{i+1}}{v_{i+1}} \Rightarrow \Delta t_{i+1} = \frac{\pi m}{qB} = \Delta t$$

È importante notare che il periodo è indipendente dalla velocità in quanto in questo modo possiamo calcolare la pulsazione del ciclotrone come:

$$\omega_{RF} = \frac{qB}{m}$$

In modo poter invertire il campo elettrico in modo da poter accelerare la particella, in particolare, avrà un grafico di questo tipo:



Ciò è possibile se la velocità non è troppo alta, altrimenti entrano in gioco le leggi della relatività ristretta

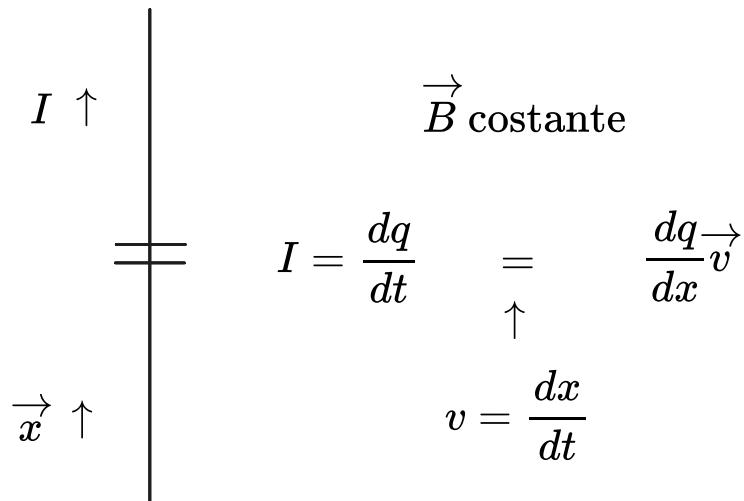
Chiaramente non può superare una certa velocità, in quanto deve comunque essere contenuto dentro le armature in cui c'è il campo magnetico, quindi il raggio non deve superare R_{max} , cioè:

$$v_{max} = \frac{qB}{m} R_{max} \Rightarrow E_{C,max} = \frac{1}{2} m v_{max}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{qBR_{max}}{m} \right)^2$$

Vediamo ora un caso particolare della forza magnetica:

Forza Magnetica su un filo di corrente

Sia ℓ un filo percorso da una corrente I in un campo magnetico costante, vediamo come si comporta la forza magnetica:



Andiamo a considerare la carica infinitesima generata su I :

$$d\vec{F} = dq(\vec{v} \times \vec{B})$$

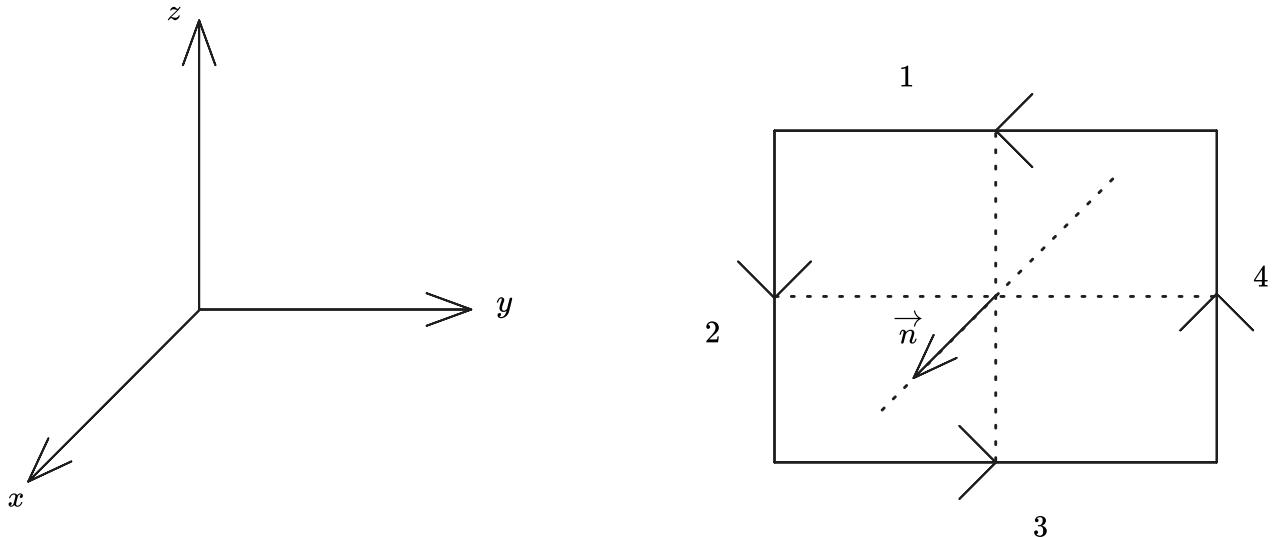
Da cui otteniamo che:

$$d\vec{F} = I(d\vec{x} \times \vec{B})$$

Avendo l'infinitesimo di forza $d\vec{F}$ vogliamo integrare lungo tutto il filo assumendo sia di lunghezza L , quindi:

$$\vec{F} = \int_{\ell} d\vec{F} = \int_{\ell} I(d\vec{x} \times \vec{B}) = \boxed{I(\vec{L} \times \vec{B})}$$

Momento Torcente su una Spira percorsa da Corrente Elettrica



Dal sistema di riferimento che abbiamo preso, segue subito che $\vec{n} = (1, 0, 0)$

Sia $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ il campo magnetico che agisce sulla spira

Andiamo a vedere le forze che agiscono su lati della spira:

- Sul lato che abbiamo indicato come 1 abbiamo che:

$$\vec{F}_1 = I(\vec{L}_1 \times \vec{B})$$

Sapendo che $\vec{L}_1 = L_1(0, -1, 0)$, abbiamo che:

$$\vec{F}_1 = IL_1 \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & -1 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = IL_1(-B_z \vec{u}_x + B_z \vec{u}_z)$$

- Per la seconda forza otteniamo che:

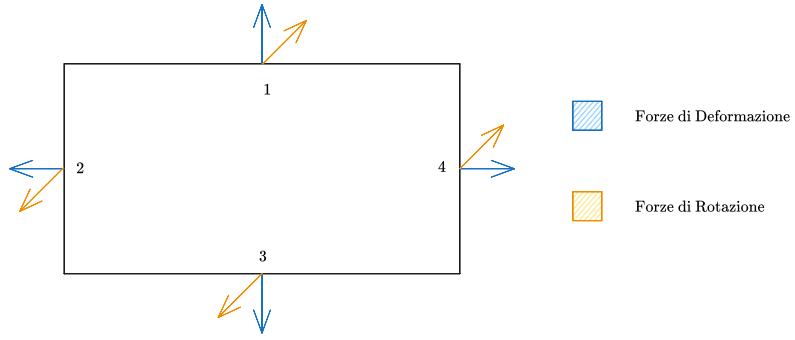
$$\vec{L}_2 = L_2(0, 0, -1) \Rightarrow \vec{F}_2 = IL_2 \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & -1 \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix} = IL_2(-B_x \vec{u}_y + B_y \vec{u}_x)$$

Per le altre cariche *nascondendo tutti i conti* otteniamo che

$$\vec{F}_3 = IL_3(B_z \vec{u}_x - B_x \vec{u}_z) \quad \text{e} \quad \vec{F}_4 = IL_4(B_x \vec{u}_y - B_y \vec{u}_x)$$

Per pura comodità assumiamo che la spira sia rettangolare, quindi abbiamo che $L_1 = L_3$ e $L_2 = L_4$

La situazione diventa quindi:



Andiamo a studiare il centro di massa:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{tot} = 0$$

Otteniamo quindi che il centro di massa è a riposo, cioè non si muove

Possiamo calcolare nell'effettivo la rotazione attraverso il momento torcente

Dalle formule del moto rotatorio uniforme abbiamo che la quantità di moto rotazionale è

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Sappiamo che il momento torcente vale:

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{\gamma} \quad \text{con } \vec{\gamma} \text{ accelerazione angolare}$$

Ma sappiamo anche che

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{con } \vec{r} \text{ il punto di applicazione della forza}$$

Allora per ottenere il momento torcente totale basta:

$$\vec{\tau}_{tot} = \sum_{i=1}^4 \vec{r}_{au_i} = \sum_{i=1}^4 I_i \vec{\gamma}_i$$

Per comodità possiamo assumere che \vec{r} sia al centro della spira

Sempre per comodità assumiamo che la spira sia un quadrato, ossia $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L$

Allora possiamo prendere:

$$\vec{r}_1 = \frac{L}{2} \vec{u}_z \quad \vec{r}_2 = -\frac{L}{2} \vec{u}_y \quad \vec{r}_3 = -\frac{L}{2} \vec{u}_z \quad \vec{r}_4 = \frac{L}{2} \vec{u}_y$$

Adesso possiamo calcolare $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4$:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \frac{L^2}{2} I \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ -B_z & 0 & B_y \end{pmatrix} \\ \vec{\tau}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \frac{L^2}{2} I \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & -1 & 0 \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{\tau}_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \frac{L^2}{2} I \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & -1 \\ B_z & 0 & -B_y \end{pmatrix} \\ \vec{\tau}_4 &= \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = \frac{L^2}{2} I \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_3 \\ \vec{\tau}_2 = \vec{\tau}_4 \end{array}$$

Da cui otteniamo che:

$$\vec{\tau} = 2(\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2) = 2 \frac{IL^2}{2} (-B_z \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) = IL^2 (-B_z \vec{u}_y + B_y \vec{u}_z)$$

Sapendo poi che il vettore normale alla spira è $\vec{n} = (1, 0, 0)$ otteniamo che:

$$\vec{\tau} = IL^2(\vec{n} \times \vec{B})$$

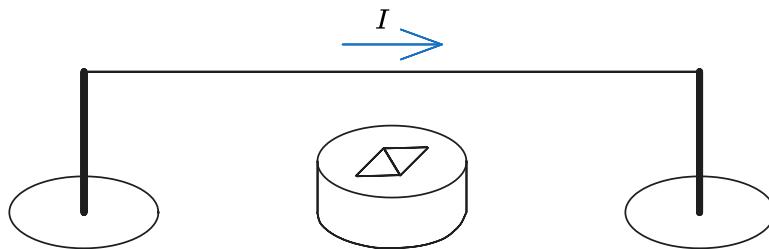
In generale questo è diverso da zero

Se andiamo a definire $IL^2\vec{n}$ come il momento magnetico della spira $\vec{\mu}$, otteniamo allora che:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Campi Magnetici generati da Correnti Elettriche

La prima volta che fu osservato un campo magnetico generato da una corrente elettrica fu nel 1820



Sia $d\vec{B}$ il campo magnetico infinitesimo generato da una sezione infinitesima $d\ell$ di un filo percorso da una corrente I nel punto \vec{r} , empiricamente si osserva che:

- La direzione di $d\vec{B}$ è ortogonale al piano definito dai vettori $d\ell$ e \vec{r}
- Il verso di $d\vec{B}$ è dato dalla regola della mano destra (con ordine: prima $d\ell$ e poi \vec{r})
- Il modulo è dato da:

$$\|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\ell \sin \theta}{r^2} \quad \text{dove } \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Tm}{A} \text{ è la permeabilità magnetica}$$

In forma vettoriale si può scrivere secondo la legge di Biot - Savart.

Legge di Biot - Savart

Il campo magnetico vale:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \times \vec{r}}{r^3}$$

Usando il principio della sovrapposizione, si ha che il campo magnetico totale vale:

$$\vec{B} = \int_{filo} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \times \vec{r}}{r^3}$$

Dalla legge di Biot - Savart possiamo calcolare il campo magnetico \vec{B} calcolato in una particella di carica q che si muove di velocità v .

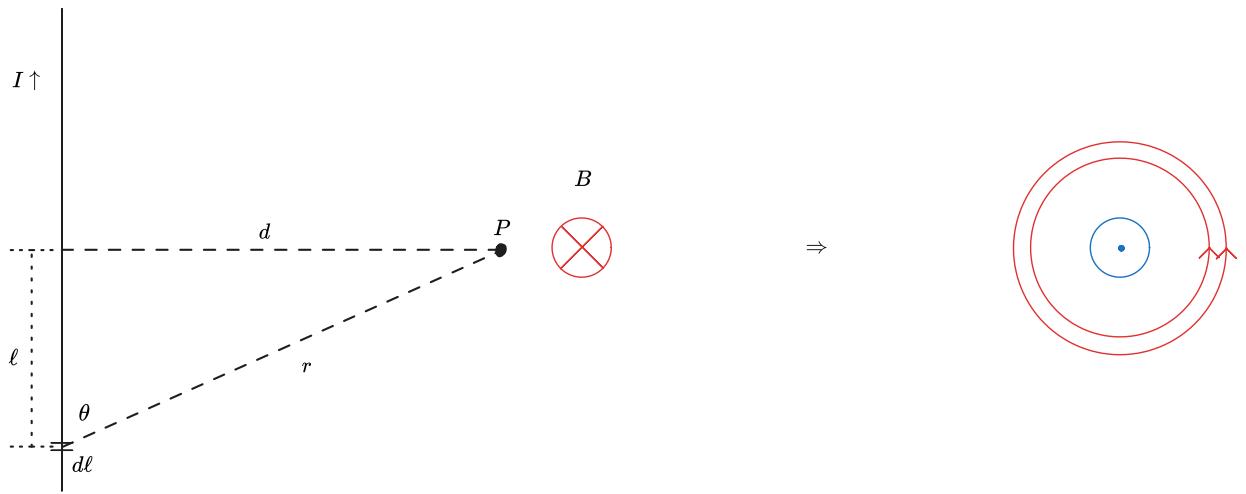
Infatti, sapendo che $I = \frac{dq}{dt}$ abbiamo che:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dq}{dt} \frac{d\ell \times \vec{r}}{r^3} \quad \Rightarrow \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dq \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Andiamo adesso a vedere come si comporta il campo magnetico con alcune simmetrie:

Campo Magnetico generato da un filo infinito in cui passa corrente

La situazione è questa:



Vogliamo trovare $|dB|$

Sappiamo che

$$\|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} O \frac{d\ell \sin \theta}{r^2}$$

Dalla figura possiamo vedere che

$$r^2 = d^2 + \ell^2 \quad \text{e} \quad \sin \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \ell^2}}$$

In questo modo otteniamo che:

$$\|\vec{B}\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} Id\ell \frac{d}{(d^2 + \ell^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Id}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ell}{(\ell^2 + d^2)^{3/2}}$$

Per facilitare la risoluzione dell'integrale possiamo sostituire $x = \ell/d$ così da ottenere $dx = d\ell/d$. In questo modo:

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi d^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d dx}{(1+x^2)^{3/2}} \Rightarrow [\dots] \Rightarrow \boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}}$$

Per calcolare la giusta direzione si usa la regola della mano destra

Campo Magnetico Generato da una Spira Circolare

Supponiamo di avere una spira di raggio R in cui circola una corrente I



Notiamo che per la geometria della situazione, per simmetria le componenti orizzontali si eliminano
Abbiamo che

$$\|\vec{dB}\| = \|d\vec{B}\| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \sin \theta}{r^2} \sin \alpha \quad \text{con } \alpha \text{ l'angolo tra la spira e la direzione dell'angolo della corrente}$$

Dobbiamo poi integrare da 0 a π in quanto abbiamo già considerato le due componenti $d\ell_1$ e $d\ell_2$

Inoltre riprendendo quanto detto prima, le componenti in y si semplificano, quindi:

$$d\vec{B} = (\|d\vec{B}_1\| \cos \theta + \|d\vec{B}_2\| \cos \theta) \vec{u}_z$$

Sapendo inoltre che $\|d\vec{B}_1\| = \|d\vec{B}_2\|$ otteniamo che:

$$d\vec{B} = 2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell}{r^2} \right) \cos \theta \vec{u}_z$$

Quindi per calcolare il campo magnetico, dobbiamo fare l'integrale lungo la spira:

$$\vec{B} = \int_{Spira} d\vec{B} \xrightarrow{d\ell=Rd\phi} \vec{B} = \int_0^\pi \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IR}{r^2} d\phi \cos \theta$$

Possiamo portare fuori la parte che non dipende da ϕ e otteniamo che:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IR}{r^2} \cos \theta \underbrace{\int_0^\pi d\phi}_{\pi} \vec{u}_z$$

Semplificando ulteriormente il tutto sfruttando la geometria della situazione, possiamo sfruttare il fatto che $\cos \theta = \frac{R}{r}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{r^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

L'importante è sempre scrivere la funzione in variabili indipendenti

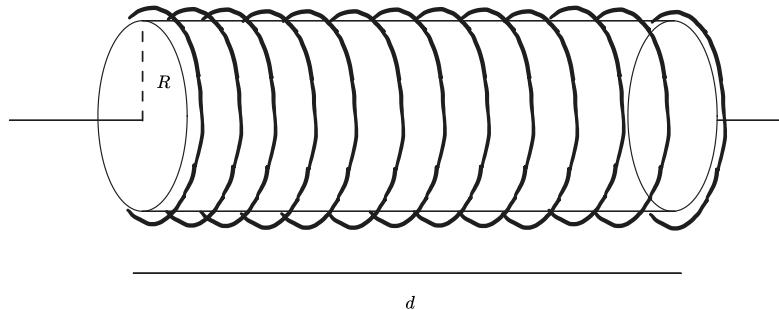
Se il punto non fosse per l'asse passante per il centro della spira, otterremmo delle formule diverse, ma il processo è lo stesso

Prima di vedere il caso con il solenoide, descriviamo effettivamente cosa sia un solenoide:

Definizione di Solenoide

Il Solenoide è un filo conduttore a forma di elica a piccolo passo, caratterizzato da una lunghezza d , da un raggio R , da un numero di spire N e da una densità di spire per unità di misura n

Campo Magnetico Generato da un Solenoide



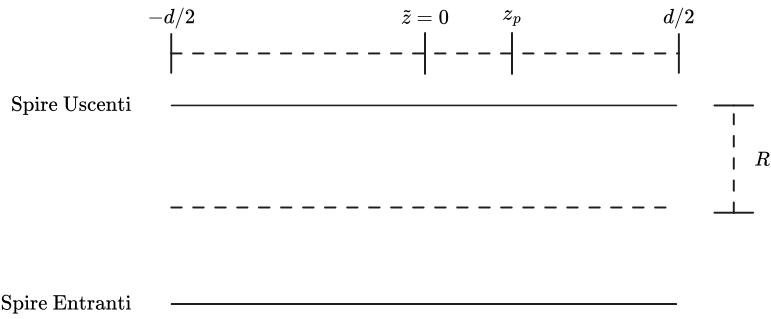
Usando il fatto che un solenoide non è altro una serie di spire molto vicine tra di loro e quindi possiamo sfruttare la densità di spire.

Per un n grande possiamo utilizzare il limite del continuo e vedere che il campo magnetico del solenoide è:

$$\vec{B}_{Sol} = \int_{Solenoid} \vec{B}_{Spira}$$

Possiamo usare come infinitesimo il risultato precedente.

Prima di andare avanti diamo un sistema di riferimento:



Calcoliamo il campo magnetico prima al centro:

$$\vec{B} = \int_{-d/2}^{d/2} \vec{B}_{Spira}(\tilde{z}) d\tilde{z} \cdot n \quad \text{dove } \tilde{z} \text{ rappresenta la coordinata della spira}$$

Quindi otteniamo che:

$$\vec{B} = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \cdot n \cdot d\tilde{z}$$

Andando a sostituire z con $\tilde{z} - z_p$, ossia andando a calcolare effettivamente dove vogliamo ottenere il campo elettrico, e portando fuori tutto quello che è indipendente da z otteniamo che:

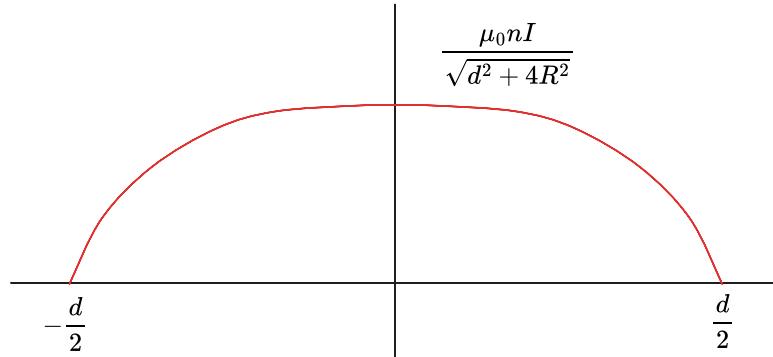
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} R^2 r \int_{-d/2}^{d/2} \frac{d\tilde{z}}{((z_p - \tilde{z})^2 + R^2)^{3/2}}$$

Portando dentro R^2 e andando a sviluppare l'integrale abbiamo che:

$$\int_{-d/2}^{d/2} \frac{d\tilde{z} R^2}{((z_p - \tilde{z})^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{d - 2z_p}{\sqrt{4R^2 + (1 - 2z_p)^2}} + \frac{d + 2z_p}{\sqrt{4R^2 + (1 + 2z_p)^2}}$$

Da cui otteniamo che il campo magnetico vale:

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2} \left(\frac{d - 2z_p}{\sqrt{4R^2 + (1 - 2z_p)^2}} + \frac{d + 2z_p}{\sqrt{4R^2 + (1 + 2z_p)^2}} \right)}$$



Agli estremi, cioè quando $z_p = \pm \frac{d}{2}$ allora abbiamo che:

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$$

Se invece abbiamo che $z_p \rightarrow \pm\infty$, allora:

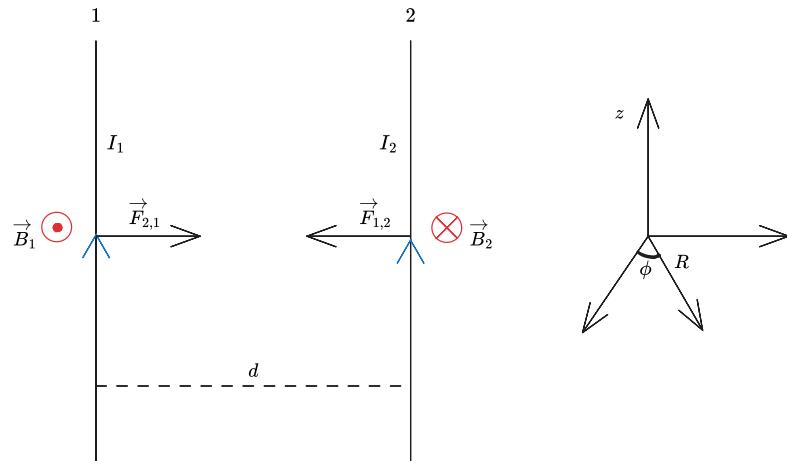
$$\|\vec{B}\| \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{2z_p}{|2z_p|} - \frac{2z_p}{|2z_p|} \right) = 0$$

Se invece avessimo un solenoide infinito ($d \rightarrow \infty$) avremmo che:

$$\|\vec{B}_\infty\| = \mu_0 n I$$

Vediamo ora come si comportano due fili paralleli in cui circola corrente elettrica:

Campo Magnetico Generato da Due Fili Conduttore



In questa situazione abbiamo che I_1 genera un campo magnetico \vec{B}_1 con

$$\|\vec{B}_1\| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R_1}$$

Inoltre I_2 genera un campo magnetico \vec{B}_2 con

$$\|\vec{B}_2\| = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R_2}$$

Andando ancora più nel dettaglio, abbiamo che B_1 genera una forza su I_2 del tipo

$$\vec{F}_{1,2} = I_2(\vec{L} \times \vec{B}_1) \quad \text{Che è una forza di Lorentz}$$

E analogamente B_2 genera una forza su I_1 :

$$\vec{F}_{2,1} = I_1(\vec{L} \times \vec{B}_2)$$

In particolare otteniamo che:

$$\vec{F}_{1,2} = I_1 I_2 \frac{\mu_0 L}{2\pi d} (-\vec{u}_y) \quad \vec{F}_{2,1} = I_1 I_2 \frac{\mu_0 L}{2\pi d} (\vec{u}_y)$$

Da questo segue quindi che se le forze hanno lo stesso verso, allora abbiamo che la forza è attrattiva, altrimenti la risultante è repulsiva

Flusso del Campo Magnetico

L'assenza dei monopoli magnetici si può tradurre nella seconda legge di Maxwell:

Seconda Legge di Maxwell

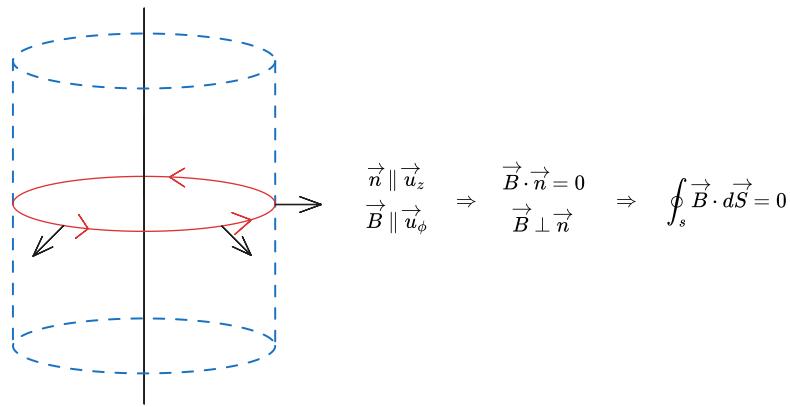
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{Per ogni superficie } S \text{ chiusa}$$

Questo giustifica anche il fatto che le linee di campo sono chiuse

Per fare un confronto con il campo elettrico, abbiamo che dalla legge di Gauss abbiamo che:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

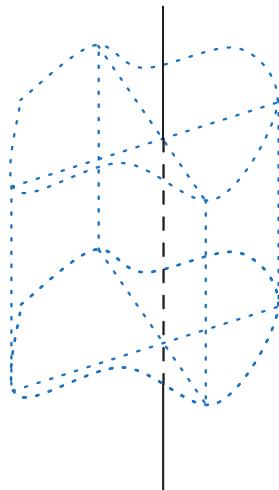
Vediamo come si comporta un filo infinito percorso da una corrente I .



Notiamo che non ci sono vincoli oltre al fatto che deve essere una superficie chiusa

Flusso del Campo Magnetico in una Qualunque Superficie che contiene il Filo

Sia S una qualunque superficie chiusa che racchiuda il filo al suo interno.



Parametrizziamo $S = R(\phi)$ in modo periodico tale che:

$$R(\phi) = R(\phi + 2\pi)$$

In questo modo abbiamo che S è una superficie chiusa, allora una qualsiasi posizione sulla superficie sarà

$$\vec{r} = (x_S, y_S, z_S) = (R(\phi) \cos \phi, R(\phi) \sin \phi, z_S)$$

Facendo la derivata otteniamo invece il vettore normale:

$$\vec{n} = (\dot{x}_S, \dot{y}_S, \dot{z}_S) = (\dot{R}(\phi) \cos \phi - R(\phi) \sin \phi, \dot{R}(\phi) \sin \phi + R(\phi) \cos \phi, \dot{z}_S) = \dot{R}(\cos \phi, \sin \phi, 0) + R(-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

Da cui otteniamo che:

$$\boxed{\vec{n}(\phi) = \dot{R}\vec{u}_r + R\vec{u}_\phi}$$

Da cui otteniamo che:

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R(\phi)} \underbrace{\vec{u}_\phi \cdot \vec{n}(\phi)}_{R(\phi)} \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

Da cui integrando otteniamo che:

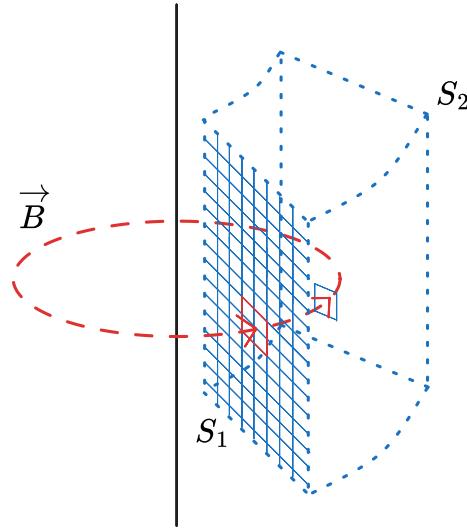
$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} R d\phi dz}_{0} = 0$$

Questo perché avevamo posto la funzione $R(\phi)$ come periodica

Andiamo anche a vedere il caso in cui non fosse chiusa:

Flusso del Campo Magnetico in una Superficie che non contiene il Filo

Se non racchiude il filo, allora la situazione diventa:



Allora abbiamo che:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} B dS_1 + \int_{S_2} B dS_2 = 0$$

È Nullo in quanto abbiamo che

$$n_2 \parallel B \quad \text{e} \quad n_1 \parallel -B$$

Diamo al volo la Terza legge di Maxwell:

Terza Legge di Maxwell

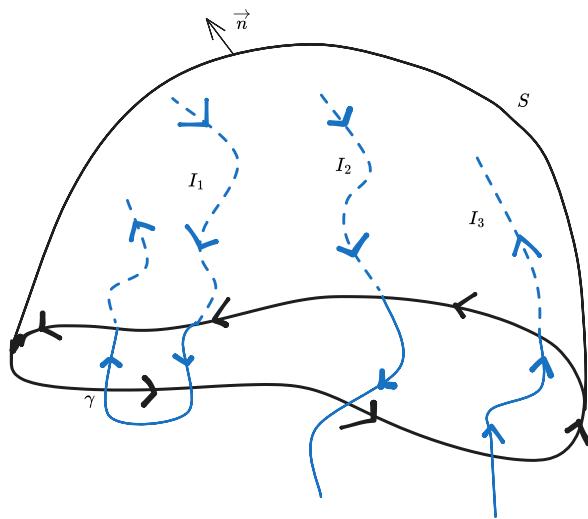
$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Cioè il flusso del campo magnetico è nullo per ogni superficie S chiusa

Legge di Ampère - Quarta Legge di Maxwell

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{Cone}$$

Dove I_{Cone} è la somma algebrica delle correnti (con segno) delle correnti interne alla curva γ



In questo caso abbiamo che

$$I_{Cone} = -I_1 + I_1 - I_2 + I_3$$

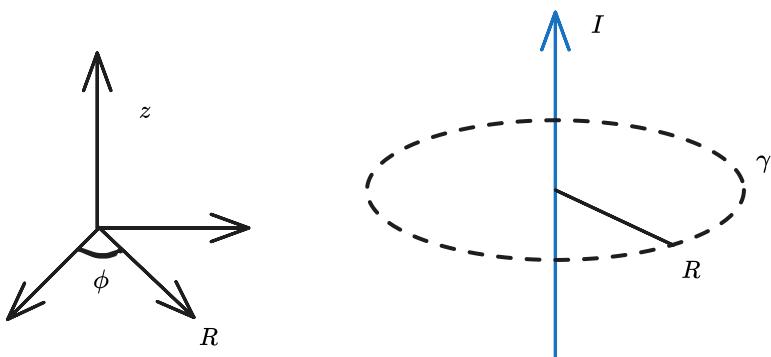
Questo non è altro che l'analogo magnetico della circuitazione per il campo elettrico:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Verifica:

Verifica che questa cosa valga in quattro casi distinti.

Caso Filo Infinito con curva regolare γ attorno al filo



Sia quindi γ una circonferenza che centrata nel filo, allora abbiamo, per simmetria della figura, che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int \|\vec{B}\| R d\phi$$

Qui abbiamo sfruttato che valgono le seguenti cose:

$$\vec{B} = \|\vec{B}\| \vec{u}_{\phi} \quad e \quad \|\vec{d\ell}\| = R d\phi$$

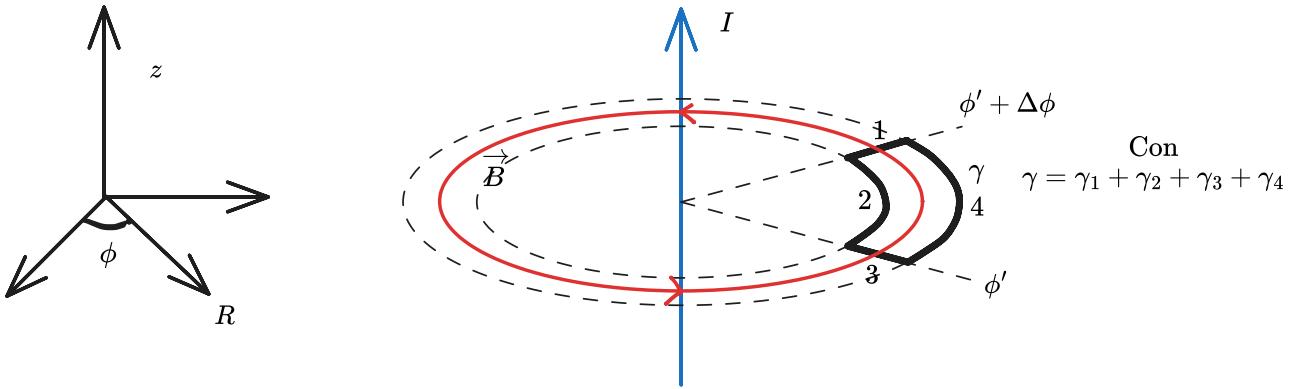
Dalla quarta legge di Maxwell abbiamo che:

$$\int \|\vec{B}\| R d\phi = \mu_0 I$$

In questo modo otteniamo che

$$\|\vec{B}\| \underbrace{\int_0^{2\pi} R d\phi}_{2\pi R} = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

Caso Filo Infinito, con Spicchio di Corona Circolare γ non contenente il filo



Da solo la geometria della situazione, possiamo vedere che

$$\underbrace{\vec{B} \perp d\vec{\ell}_1}_{\text{I prodotti scalari sono nulli}} \quad \underbrace{\vec{B} \perp d\vec{\ell}_3}_{\text{I prodotti scalari sono nulli}} \quad \vec{B} \parallel d\vec{\ell}_4 \quad \vec{B} \parallel -d\vec{\ell}_2$$

In questo modo otteniamo che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_i = \int_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_2 + \int_{\gamma_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_4$$

Sfruttando quanto ottenuto prima, cioè che $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$, otteniamo che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\phi'}^{\phi' + \Delta\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_4} R_4 d\phi + \int_{\phi'}^{\phi' + \Delta\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} R_2 d\phi$$

Tuttavia, sapendo che \vec{B} e $d\vec{\ell}_2$ sono antiparalleli, davanti all'integrale che coinvolge γ_2 c'è un meno davanti, otteniamo quindi che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\phi'}^{\phi' + \Delta\phi} (1 - 1) d\phi = 0$$

Quindi otteniamo che la circuitazione del campo magnetico è nulla se e solo se la corrente concatenata (interna) è nulla, cioè:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Leftrightarrow I_{Conc} = 0$$

E comunque viene rispettata la quarta legge di Maxwell

□

Questi prototipi possono poi essere estesi ad un caso più generale, ossia quando queste figure non sono esattamente delle figure regolari, ossia non abbiamo una circonferenza che circonda il filo nel primo caso e nella seconda non abbiamo uno spicchio di corona circolare, ma abbiamo una qualsiasi figura bidimensionale.

Nel primo caso, al posto di R andiamo a mettere una funzione periodica

$$R(\phi) : R(0) = R(2\pi) \quad \text{con } \phi \in [0, 2\pi]$$

In questo modo, sapendo che

$$\vec{B} = \| \vec{B} \| \vec{u}_\phi \quad \text{e} \quad d\ell = \dot{R} d\phi \vec{u}_r + R d\phi \vec{u}_\phi$$

Otteniamo che:

$$\oint \vec{B} \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} BR d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} = \mu_0 I$$

In conclusione, se I è interna a γ , allora abbiamo che:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 I$$

Nel secondo caso, possiamo prendere due punti ϕ_{min} e ϕ_{max} appartenenti alla curva γ in modo da poter dividere la curva stesse in due parti, una più interna γ_1 (più vicina al filo) e una più esterna γ_2 , allora otteniamo che:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

Quindi preso $\phi \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$,abbiamo che:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\ell = \int_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\ell_1 + \int_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\ell_2$$

Sapendo inoltre che:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \vec{u}_\phi$$

Otteniamo che:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\ell = \underbrace{\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \| \vec{B} \| R(\phi) d\phi}_{\gamma_1} + \underbrace{\int_{\phi_{max}}^{\phi_{min}} \| \vec{B} \| R(\phi) d\phi}_{\gamma_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \underbrace{\left(\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} d\phi + \int_{\phi_{max}}^{\phi_{min}} d\phi \right)}_0 = 0$$

Va sottolineato che se ci sono tante correnti che passano all'interno della curva γ , allora la corrente concatenata è la somma algebrica delle correnti, cioè:

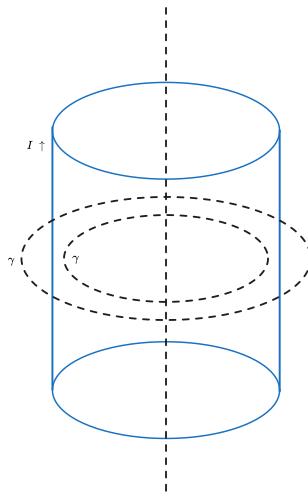
$$I_{Conc} = \sum I_i$$

Simmetrie per la Circuitazione del Campo Magnetico

Circuitazione del Campo Magnetico per una Superficie Cilindrica

Assumiamo di avere una Superficie Cilindrica con raggio R e corrente I

Andiamo a Calcolare $B(r)$ utilizzando la legge di Ampére



Sia quindi γ una circonferenza di raggio r , possiamo vedere già subito che:

$$I_{Conc} = \begin{cases} I & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Inoltre la simmetria della figura ci permette di dire che:

$$\vec{B} = \| \vec{B} \| \vec{u}_\phi$$

In questo modo otteniamo che:

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \| \vec{B} \| r d\phi = \| \vec{B} \| 2\pi r$$

Dalla legge di Ampére abbiamo quindi che:

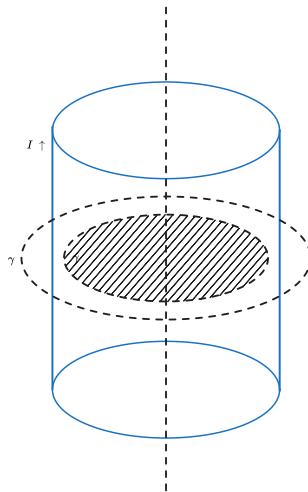
$$\| \vec{B} \| 2\pi r = \mu_0 I_{Conc} \quad \text{con } \begin{cases} 0 & r < R \\ I & r > R \end{cases}$$

Quindi otteniamo che:

$$\boxed{\| \vec{B} \| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \alpha \quad \text{con } \alpha = \begin{cases} 0 & r < R \\ 1 & r > R \end{cases}}$$

Circuitazione del Campo Magnetico per un Cilindro Pieno

Supponiamo ora di avere un cilindro pieno con raggio R e corrente I :



Assumiamo sia uniformemente distribuita, caratterizzata da una densità di corrente:

$$\vec{j} = \frac{d\vec{I}}{dS}$$

Nel caso della distribuzione uniforme abbiamo che:

$$j = \frac{I}{\pi R^2} \quad [j] = A/m^2$$

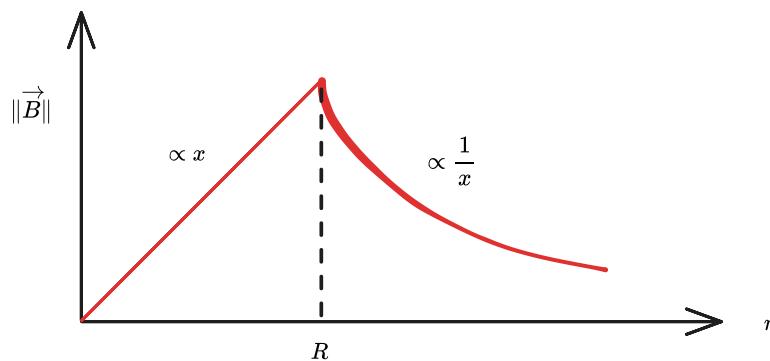
Sia quindi γ una circonferenza di raggio r . Allora abbiamo che:

$$\begin{cases} I_{Conc} = \iint j dS = j\pi r^2 = I\left(\frac{r}{R}\right)^2 & r < R \\ R_{Conc} = I & r > R \end{cases}$$

Dalla legge di Ampére segue che:

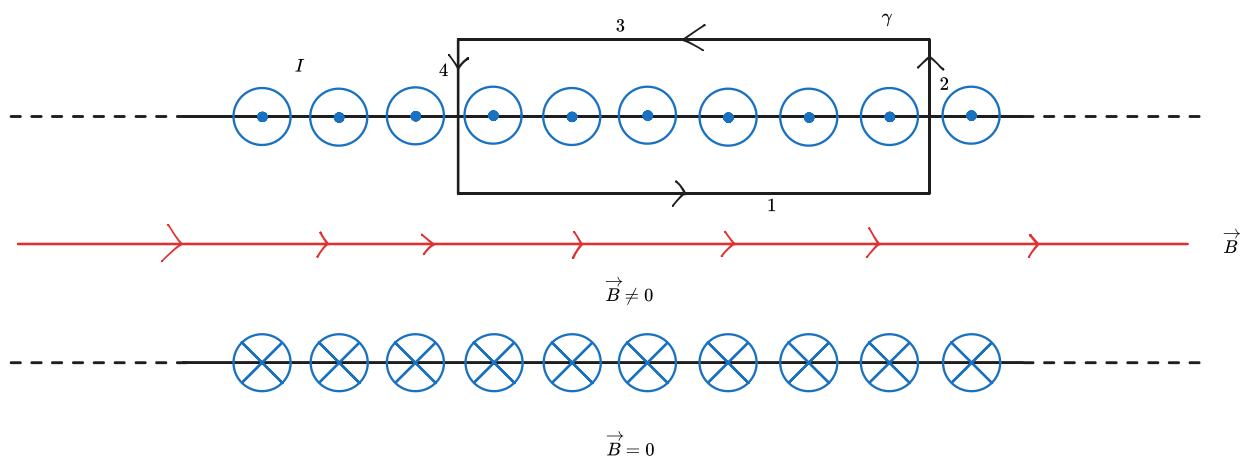
$$2\pi r \|\vec{B}\| = \mu_0 I_{Conc} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \alpha \quad \text{con } \alpha = \begin{cases} \left(\frac{r}{R}\right)^2 & r < R \\ 1 & r > R \end{cases}$$

Il campo magnetico ha quest'andamento:



Circuitazione del Campo Magnetico in un Solenoide Infinito

Supponiamo di avere un Solenoide Infinito



Visto che le linee del campo magnetico \vec{B} devono essere necessariamente chiuse, queste si chiudono all'infinito, quindi all'interno del solenoide c'è un campo magnetico \vec{B} trasversale, mentre fuori è nullo

Andiamo a calcolare la circuitazione lungo γ :

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_i = \int_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_1 + \underbrace{\int_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_2}_{\vec{B} \perp d\vec{\ell}_2 \Rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_3}_{\vec{B}=0 \Rightarrow 0} + \underbrace{\int_{\gamma_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_4}_{\vec{B} \perp d\vec{\ell}_4 \Rightarrow 0} = \int_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_1$$

Se prendiamo $\gamma_1 = L$ e prendiamo $d\vec{\ell}_1$ compreso tra gli estremi di γ_1 otteniamo che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}_1 = \|\vec{B}\|L$$

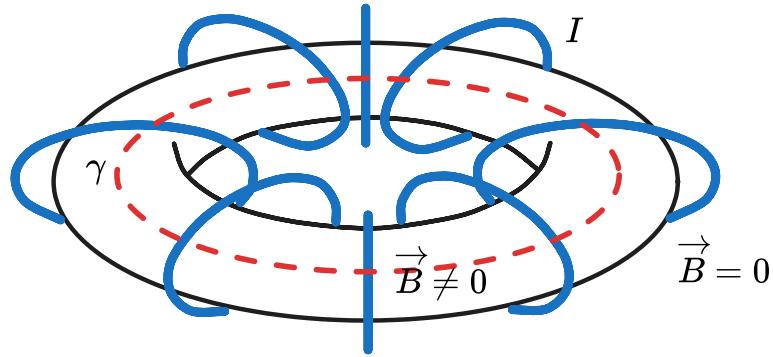
Sempre dalla legge di Ampére abbiamo che:

$$\|\vec{B}\|L = \mu_0 I_{Conc} = \mu_0 I N \quad \text{Con } N = \text{Numero di Spire}$$

Quindi abbiamo che:

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 N I}{L} \equiv \mu_0 n I \quad n = \frac{N}{L}$$

Circuitazione del Campo Magnetico in un Solenoide Toroidale



Sia γ una circonferenza di raggio r concentrica con il toro. Allora abbiamo che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \|B\|2\pi r \xrightarrow{\text{Ampère}} \mu_0 I_{Conc} = \mu_0 N I \quad \Rightarrow \quad \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

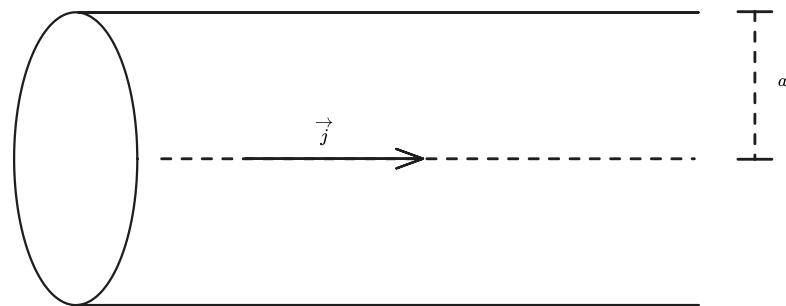
Facciamo un esempio per il calcolo del campo magnetico con la circuitazione:

Esempio di Calcolo del Campo Magnetico con la Circuitazione

Il vettore densità di corrente all'interno di un cilindro di raggio $r = 3.1mm$ varia linearmente secondo la funzione:

$$j = j_0 \frac{r}{a} \quad \text{con } j_0 = 310 A/m^2$$

Calcolare $B(r)$ per $r = 0, \frac{a}{2}, a$



Sfruttiamo la legge di Ampére.

Sia quindi γ una circonferenza di raggio r centrata nell'asse del solenoide, allora abbiamo che:

$$I(r) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi} \int_0^r j(r) r dr = 2\pi \int_0^r j_0 \frac{r}{a} dr = 2\pi \frac{r^3}{a} \frac{j_0}{r} \quad \text{per } r < a$$

Utilizzando la legge di Ampère abbiamo che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{Conec} \Rightarrow \|\vec{B}\| 2\pi r = \mu_0 \frac{2\pi}{r} I \frac{r^3}{3} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \mu_0 \frac{j_0}{3} \frac{r^2}{a}$$

Ora ci basta valutare per $r = 0, \frac{a}{2}, a$:

$$\|\vec{B}\| = \begin{cases} 0 & r = 0 \\ \mu_0 \frac{j_0}{3a} \frac{a^2}{4} & r = \frac{a}{2} \\ \mu_0 \frac{j_0}{3} a & r = a \end{cases}$$

Con questi esempi possiamo finalmente elencare le 4 leggi di Maxwell:

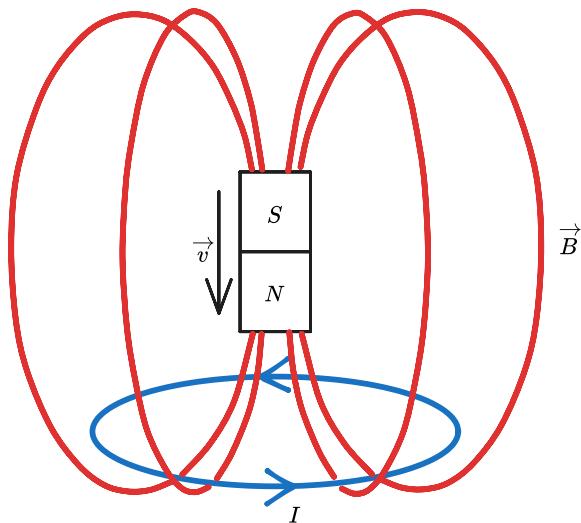
Leggi di Maxwell - In Elettro-Magnetostatica

- Esistenza dei Monopoli Elettrici: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$
- Campo Elettrico Conservativo: $\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
- Non esistenza dei Monopoli Magnetici: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
- Campo Magnetico non Conservativo: $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{Conec}$

Elettrodinamica e Magnetodinamica

Indicherò con ξ la differenza di potenziale o forza elettromotrice, per il semplice il fatto che il prof fa una E corsivo in teoria, che si potrebbe confondere con l'energia del sistema, quindi ξ sia

Vediamo come si comporta una spira chiusa conduttrice con corrente I con un magnete permanente:



Se avviciniamo o allontaniamo un magnete ad una spira conduttrice, comincia a circolare in essa una corrente I

Questa corrente è creata dalla variazione temporale del flusso di \vec{B} attraverso la spira.

Quindi se esiste una corrente $I \neq 0$, allora esiste una differenza di potenziale o una forza elettromotrice:

$$\boxed{\xi = \oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \neq 0} \quad \gamma \text{ chiusa}$$

Questo fenomeno prende il nome di legge di Faraday

Legge di Faraday

$$|\xi| = \left| \frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) \right|$$

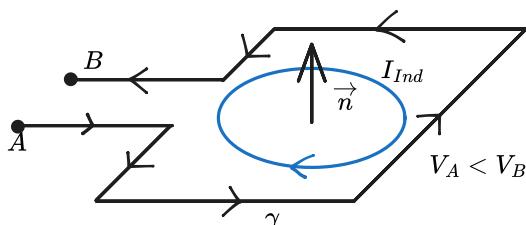
Successivamente Neumann e Lenz hanno dato un segno a questa legge:

$$\boxed{\xi = - \frac{d}{dx} \Phi_S(\vec{B})}$$

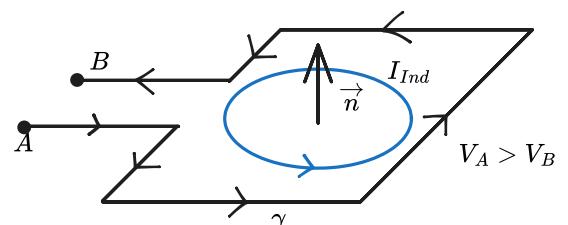
La corrente indotta nella spira circola in modo da produrre un campo magnetico inverso che si oppone alla variazione del flusso

Vediamo come si comporta rispetto al segno del flusso $\Phi_S(\vec{B})$

$\Phi_S(\vec{B})$ Crescente



$\Phi_S(\vec{B})$ Decrescente



- Se $\Phi_S(\vec{B})$ è crescente, allora abbiamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) \text{ crescente} \Rightarrow \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} > 0 \Leftrightarrow \xi < 0 \Rightarrow I_{Ind} < 0$$

- Se $\Phi_S(\vec{B})$ è decrescente, allora abbiamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) \text{ decrescente} \Rightarrow \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} < 0 \Leftrightarrow \xi > 0 \Rightarrow I_{Ind} > 0$$

Se andiamo ad osservare per bene la formula del flusso del campo magnetico, notiamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S dS \|\vec{B}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos \alpha = \int_S dS \|\vec{B}\| \cos \alpha$$

Potrebbe dipendere da 3 principali fattori, indipendenti tra di loro:

- $\|\vec{B}\|$ varia nel tempo ($B(t)$)
- S varia nel tempo ($S(t)$)
- α varia nel tempo ($\alpha(t)$)

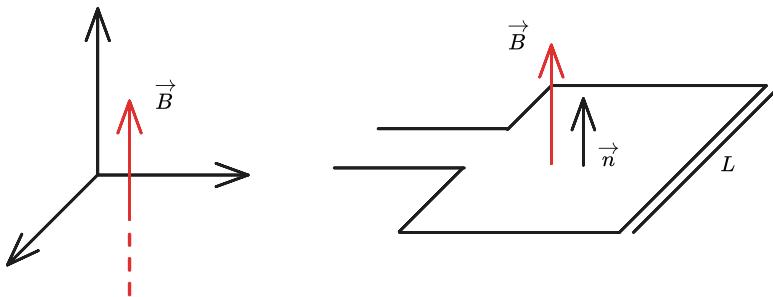
Andiamo a vedere che succede quando variano nel tempo

Evoluzione Temporale del Campo Magnetico $\|\vec{B}\|$

Vediamolo in un caso piuttosto specifico giusto per dar l'idea di cosa succede

Sia quindi una spira quadrata di lato L nel piano (x, y) immerso in un campo magnetico \vec{B} con:

$$\vec{B} = B(t) \vec{u}_z \quad B(t) = B_0 \left(\frac{t^2}{2} - t \right)$$



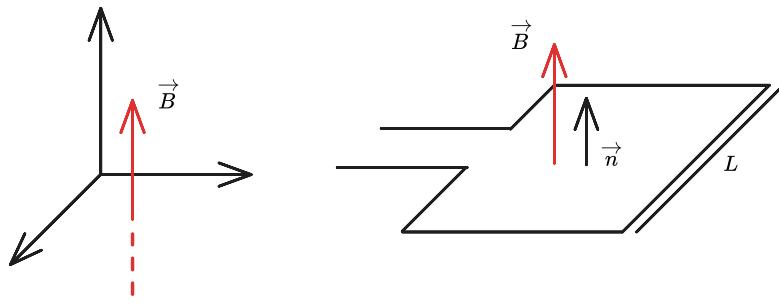
Andando a calcolare il flusso del campo magnetico con questa legge otteniamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \oint_S dS \|\vec{B}(t)\| = \underbrace{\int_0^L dx \int_0^L dy}_{L^2} B_0 \left(\frac{t^2}{2} - t \right)$$

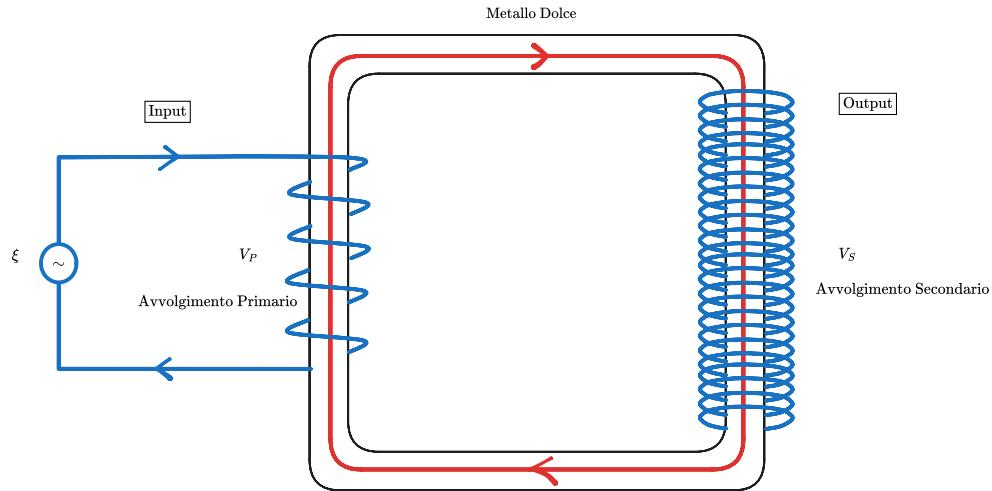
Per cui per Faraday otteniamo che:

$$\xi = -\frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B}) = -L^2 B_0 (t - 1) \Rightarrow \boxed{\xi = L^2 B_0 (1 - t)}$$

Graficamente otteniamo che:



È la stessa cosa che succede per un trasformatore, che trasforma alta tensione e bassa corrente in bassa tensione e alta corrente



Il metallo dolce serve principalmente per non disperdere campo magnetico

Per calcolare la differenza di potenziale primaria con la legge di Faraday abbiamo che:

$$V_P = -\frac{d}{dt} \Phi_P(\vec{B}) = -N_P \frac{d}{dt} \Phi_1(\vec{B})$$

Dove $\Phi_1(\vec{B})$ è il flusso del campo magnetico attraverso una spira nell'avvolgimento primario e N_P è il numero di spire nell'avvolgimento primario

In particolare, visto che il campo magnetico è confinato all'interno del metallo dolce, abbiamo che:

$$\Phi_1(\vec{B}) = \Phi_2(\vec{B})$$

Sempre dalla legge di Faraday, abbiamo che c'è una differenza di potenziale tra i due capi dell'avvolgimento secondario:

$$V_S = -\frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{B}) = -N_S \frac{d}{dt} \Phi_2(\vec{B}) = -N_S \frac{d}{dt} \Phi_1(\vec{B}) = -\frac{N_S}{N_P} \frac{d}{dt} \Phi_P(\vec{B}) = \frac{N_S}{N_P} V_P$$

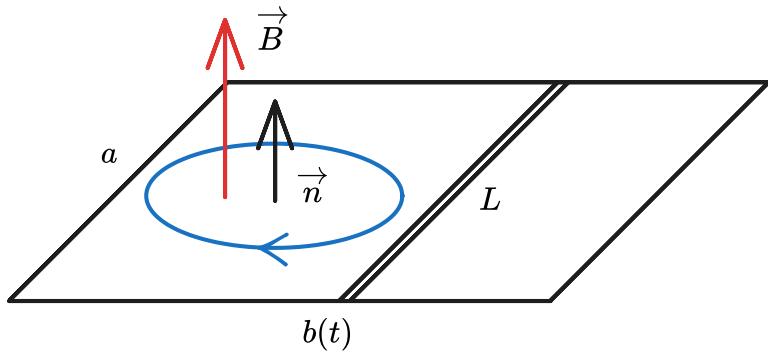
Da cui otteniamo che:

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V_P}{V_S} = \frac{N_P}{N_S}$$

Se quest'ultimo rapporto è maggiore di 1, allora si parla di trasformatore in salita, altrimenti si parla di trasformatore in discesa (*è lo stesso del pc*)

Evoluzione Temporale della Superficie S

Supponiamo di avere una spira rettangolare nel piano (x, y) di larghezza a e di lunghezza variabile, in particolare per la presenza di un lato che può scorrere verso destra seguendo la legge $b = b_0 + vt$, immerso in un campo magnetico costante $\vec{B} = \|\vec{B}\| \vec{u}_z$



Poiché l'area è variabile, abbiamo che:

$$S = S(t) = ab(t) = a(b_0 + vt)$$

Da questo otteniamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S dS \|\vec{B}\| = BS(t) \quad \Rightarrow \quad \Phi_S(\vec{B}) = \|\vec{B}\|a(b_0 + vt)$$

Per la legge di Faraday abbiamo che:

$$\xi = -\frac{d}{dt}(\Phi_S(\vec{B})) = -\|\vec{B}\|a(b_0 + vt)$$

Se poi la spira ha una resistenza, abbiamo allora che:

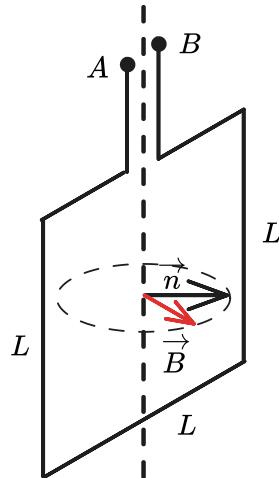
$$I_{Ind} = \frac{\xi}{R} = -\frac{\|\vec{B}\|av}{R}$$

Evoluzione Temporale dell'Angolo α

Supponiamo di avere una spira di lato L che ruota attorno all'asse verticale, immerso in un campo magnetico costante:

$$\vec{B} = \|\vec{B}\| \vec{u}_y$$

Per questioni di comodità poniamo la condizione che il vettore normale e il campo magnetico siano allineati all'istante $t = 0$



Chiamiamo θ l'angolo compreso tra il vettore normale e il campo magnetico e sia l'evoluzione temporale dell'angolo:

$$\theta = \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

Per la condizione iniziale abbiamo che $\theta_0 = \theta(0) = 0$

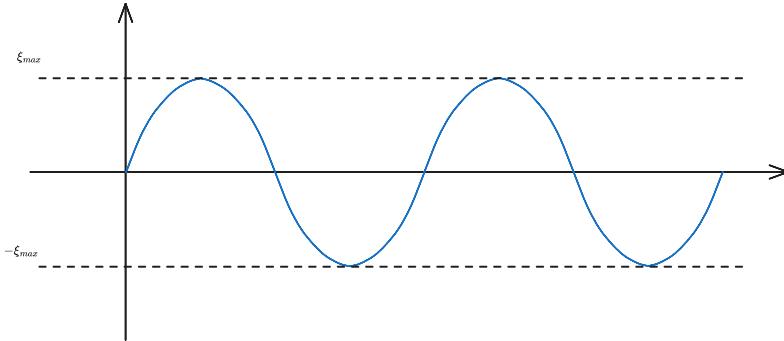
Allora abbiamo che:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S dS \|\vec{B}\| \cos(\theta(t)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_S(\vec{B}) = L^2 \|\vec{B}\| \cos(\omega t)}$$

Con Faraday abbiamo che:

$$\xi = -\frac{d}{dt} \left(\Phi_S(\vec{B}) \right) = -(-L^2 \|\vec{B}\| \sin(\omega t) \omega) = \underbrace{L^2 \|\vec{B}\| \omega}_{\xi_{max}} \cos(\omega t)$$

Graficamente otteniamo che:



Questo è lo stesso principio di funzionamento di un generatore.

Generalizzazione della Terza Legge di Maxwell

Grazie a Faraday sappiamo che:

$$\xi = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Con ξ la forza elettromotrice o differenza di potenziale indotta.

Quindi c'è un campo elettrico \vec{E} all'interno della spira in questo circuito
Tuttavia, è anche vero che:

$$\xi = V_B - V_A = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Da cui otteniamo che, se γ è un circuito chiuso:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Nel caso statico avremmo che

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Induttori e Induttanza

L'induttore è il dispositivo utilizzato per produrre un campo magnetico noto in una determinata regione

Definizione di Induttanza

Si definisce induttanza di un solenoide (di N spire) percorso da una corrente I il valore:

$$L \equiv \frac{N\Phi(\vec{B})}{I}$$

Si misura in $[L] = \frac{Tm^2}{A} \equiv H$ (henny)

Vediamo come si comporta l'induttanza in un solenoide di lunghezza ℓ , con N spire e corrente I

Induttanza in un Solenoide

Nel caos limite in cui avremmo che $\ell \rightarrow +\infty$ avremmo che:

$$\|\vec{B}\| = \mu_0 n I \quad \text{con } n = \frac{N}{I}$$

Se Φ_A è il flusso del campo magnetico in una spira di area A avremmo che:

$$\Phi_A(\vec{B}) = \mu_0 n I A \Rightarrow L = \frac{N \mu_0 n I A}{I} \Rightarrow [L = \mu_0 n^2 A \ell]$$

Dipende tutto dalla geometria della figura.

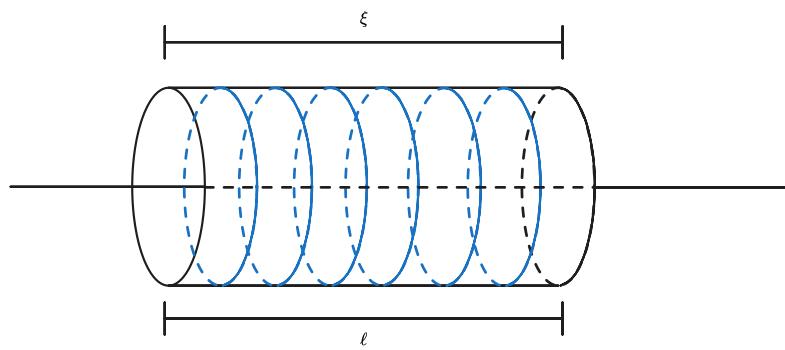
Possiamo definire:

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 A \quad \text{come induttanza per unità di lunghezza}$$

Autoinduzione

Consideriamo un solenoide in cui l'intensità di corrente I varia nel tempo $I = I(t)$

Sappiamo che se I varia nel tempo, allora abbiamo che si genera un campo magnetico $B(t)$ e quindi varia il flusso $\Phi_B(t)$ e quindi per la legge di Faraday abbiamo che esiste una ξ differenza di potenziale.



Per la definizione di L abbiamo che:

$$n\Phi_B = LI$$

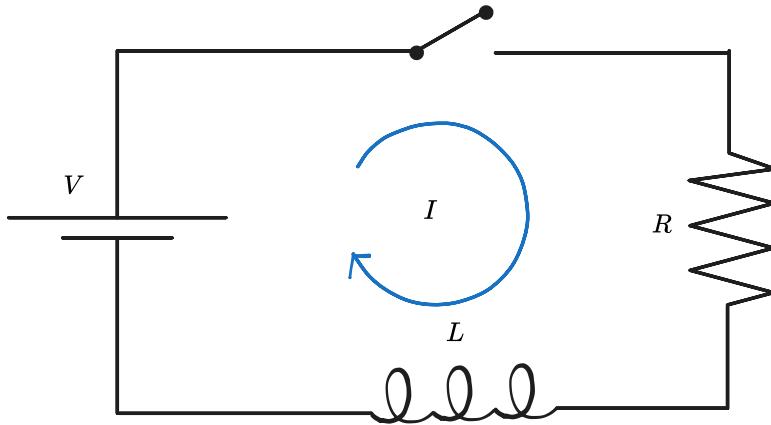
Per Faraday segue allora che:

$$\xi_L = -\frac{d}{dt}(N\Phi_B) \Leftrightarrow \xi_L = -\frac{d}{dt}(L\Phi_B)$$

Da cui arriviamo poi a:

$$\xi_L = -L \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Circuiti RL



Definizione di Circuito RL

Un Circuito RL è un circuito chiuso in cui sono collegati in serie un induttore, una resistenza e un interruttore.

Possiamo fare la distinzione tra quando è in aumento e quando è in diminuzione

In Aumento

Poniamo per comodità, l'istante $t = 0$ come l'istante in cui chiudiamo l'interruttore (quindi per istanti $t < 0$ è tutto fermo) La corrente in questo caso è in aumento e gira in senso orario e dalla legge delle maglie abbiamo che:

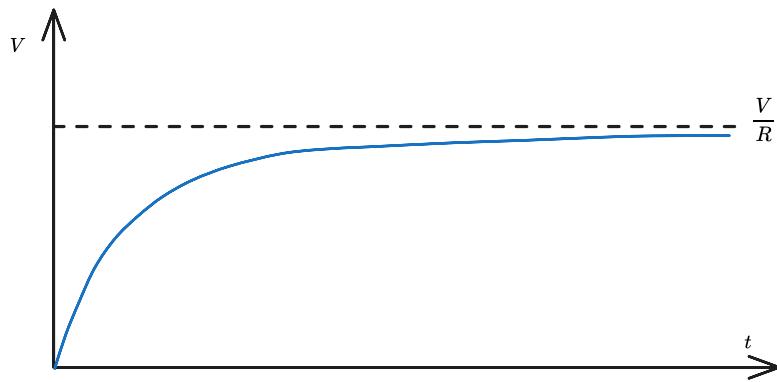
$$V = V_R - \xi_L$$

Andando a sostituire le leggi di Ohm e di Faraday otteniamo che:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{V}{L} \quad \xrightarrow{\text{Risolvendo}} \quad I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

Possiamo definire come la Costante di Tempo Induttiva il valore:

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad \text{Da cui} \quad I(t) = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right)$$



In particolare abbiamo che:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{V}{R} \cdot \frac{1}{\tau_L}$$

Abbiamo anche che per $t \gg \tau_L$ si ha che:

$$I(t \gg \tau_L) \rightarrow \frac{V}{R}$$

Quando si ha questa situazione si dice che il circuito è in equilibrio.

Inizialmente l'induttanza si comporta in modo da contrastare la variazione di corrente. Dopo invece un certo tempo ($t \gg \tau_L$) si ha che si comporta come un semplice filo conduttore

Inoltre all'istante $t = \tau_L$ si ha che:

$$I(t = \tau_L) = \frac{V}{R}(1 - e^{-1}) \approx \frac{V}{R} \cdot 0.63$$

cioè τ_L è il tempo necessario affinché la corrente raggiunga il 63% del suo massimo

In Diminuzione

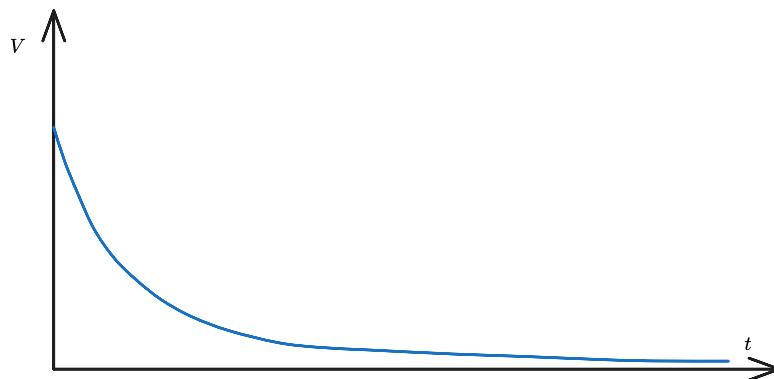
In questo caso abbiamo che;

$$\frac{dI}{dt} < 0 \quad \text{e} \quad V_R + \xi_L = 0$$

Per le leggi precedenti diventa:

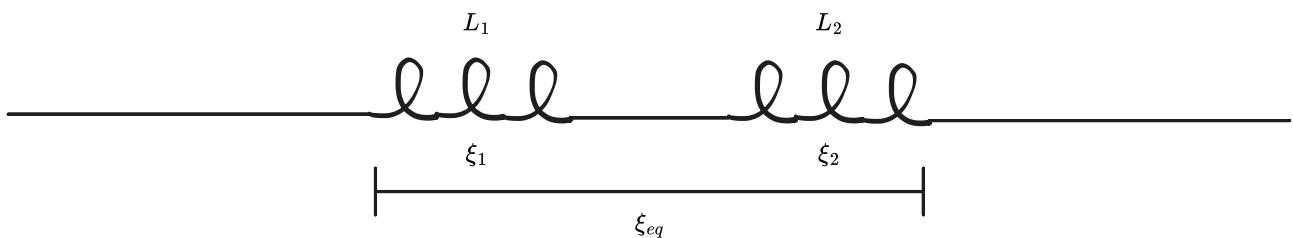
$$\boxed{RI + L \frac{dI}{dt} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I(t) = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RL}}}$$

Abbiamo ottenuto questo risultato dopo aver posto che $I(t = 0) = \frac{V}{R}$



Raggiungiamo quindi una situazione di equilibrio quando $I(t \gg \tau_L) \rightarrow 0$

Induttanze in Serie



Sapendo che sono collegate in serie abbiamo che l'intensità di corrente è costante:

$$I = I_1 = I_2$$

In particolare, per la legge di Faraday abbiamo che:

$$\xi_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad \xi_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \xi_{eq} = \xi_1 + \xi_2 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad \xrightarrow{I_1=I_2} \quad \boxed{\xi_{eq} - (L_1 + L_2) \frac{dI}{dt}}$$

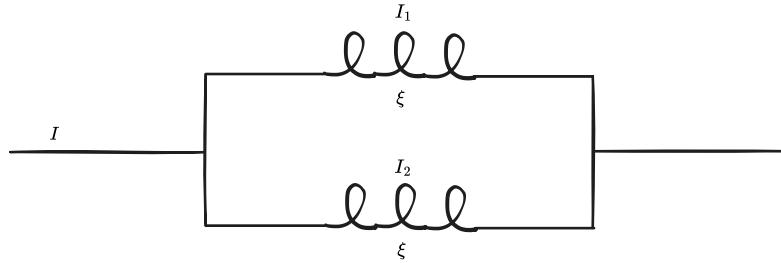
Quindi abbiamo che:



In generale abbiamo che:

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i$$

Induttanze in Parallello



In questo caso abbiamo che la differenza di potenziale è uguale sia prima sia dopo, cioè:

$$\xi = \xi_1 = \xi_2$$

Quello però che cambia è l'intensità di corrente:

$$I = I_1 + I_2$$

Dalla legge di Faraday abbiamo che:

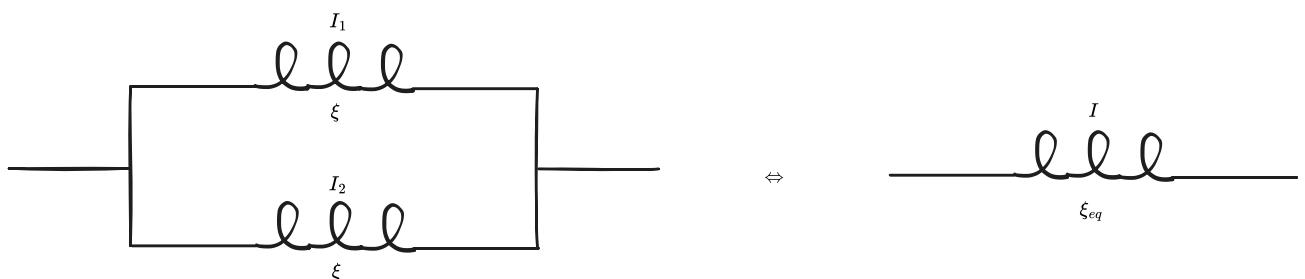
$$\xi_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad \xi_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

Tuttavia, sapendo che $I_2 = I - I_1$ otteniamo che:

$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{dI}{dt} + \frac{dI_1}{dt} \quad \xi_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - \frac{L_2}{L_1} \xi_1$$

Inoltre, sapendo che $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ otteniamo che:

$$\xi = -\frac{L_2 L_1}{L_1 + L_2} \frac{dI}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad L_{eq} = \frac{L_2 L_1}{L_1 + L_2}$$



Energia Immagazzinata in un Campo Magnetico

Supponiamo di avere un circuito RL in aumento, allora vogliamo trasformare la legge:

$$VI = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$$

in un bilancio di energia

Abbiamo che VI è la potenza dissipata dal generatore, RI^2 è la potenza dissipata dalla resistenza e $LI \frac{dI}{dt}$ è la potenza immagazzinata nel campo magnetico generato dall'induttore

Sapendo che $[P] = \frac{J}{s} \simeq W$ otteniamo che:

$$P_L = \frac{dE_L}{dt} \quad \text{Con } E_L \text{ Energia Meccanica}$$

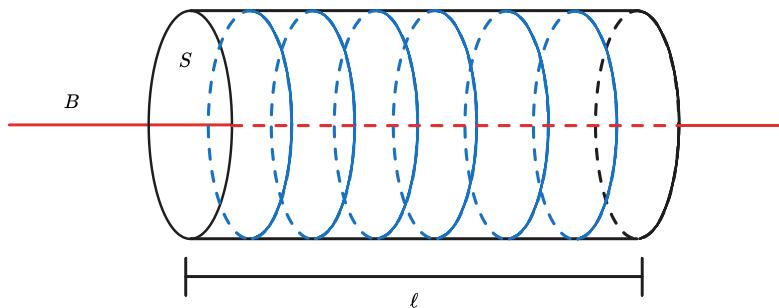
Otteniamo quindi che:

$$P_L = LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow E_L = \int P_L dt = \int LI \frac{dI}{dt} dt = L \int I \frac{dI}{dt} dt = L \int IdI \Rightarrow \boxed{E_L = L \frac{I^2}{2}}$$

Questa è l'energia Meccanica Immagazzinata in un campo magnetico

Densità di Energia in un campo Magnetico

Andiamo a calcolare l'energia meccanica nel caso particolare di un solenoide lungo (cioè con $\ell \gg \sqrt{S}$) avente n spire per lunghezza e L induttanza



Per un solenoide lungo ($\ell \rightarrow \infty$) abbiamo che:

$$\begin{cases} B = \mu_0 n I \\ L = \mu_0 n^2 S \ell \end{cases}$$

Andando a sostituire con quanto trovato nella formula precedente abbiamo che:

$$E_L = \frac{n^2 \mu_0 S \ell}{2} \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{E_L}{S} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \rho_B}$$

Definizione di Densità di Energia Magnetica

Si definisce densità di Energia Magnetica la quantità:

$$\rho_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Vediamo un esempio in cui calcoliamo / utilizziamo ρ_B

Esempio sulla Densità di Energia Magnetica

Supponiamo di avere un solenoide lungo $\ell = 85\text{cm}$ con sezione $S = 17\text{cm}^2$ e $N = 950$ spire percorse da una corrente di $I = 6,60\text{A}$

Calcolare la Densità di Energia Magnetica all'interno del solenoide e determinare l'energia totale immagazzinata all'intero del solenoide

Sfruttando il fatto che $\ell \gg \sqrt{S}$ e sfruttando la legge di Ampère abbiamo che:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{NI}{L} \quad \Rightarrow \quad B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{950}{0,85} \cdot 6,60 = 9,27 \cdot 10^{-3} T$$

Da cui otteniamo che:

$$\rho_B = \frac{1}{2\mu_0 B^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_B = \frac{1}{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} (0,27 \cdot 10^{-3})^2$$

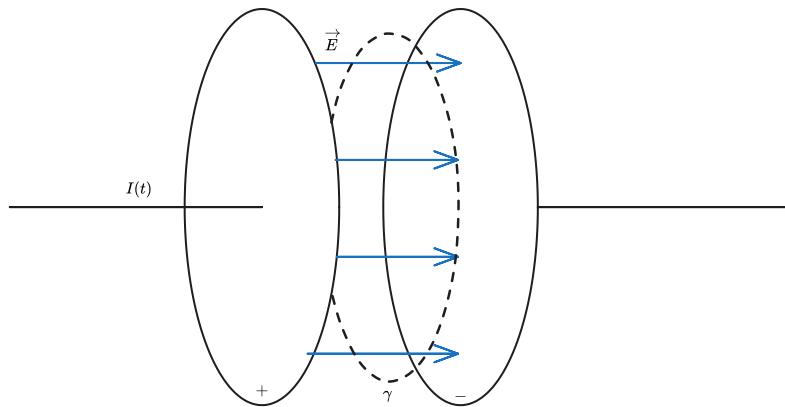
Per il calcolo dell'Energia Magnetica abbiamo che:

$$E_B = \int \rho_B dV = \rho_B V = \rho_B S \ell$$

Campi Magneticci Indotti e la legge di Ampère - Maxwell

Osservazione: All'interno di un condensatore in carica si genera un campo magnetico oltre ad uno elettrico

Supponiamo infatti di avere un condensatore circolare con raggio R a distanza d fra le armature



Se I dipende dal tempo, cioè $I = I(t)$ allora abbiamo che $\vec{B} \neq 0$ e per la legge di Maxwell dovremmo avere:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{Conc}$$

Tuttavia, sapendo che non passano effettive correnti all'interno della curva γ , dovremmo avere che questo integrale è nullo. Ma non è così, quindi ci deve essere necessariamente essere un'altra componente.

In un condensatore in carica abbiamo che:

$$Q = Q(t) = \underbrace{Q_{max}}_{CV} \left(1 - e^{(-\frac{t}{\tau_C})} \right)$$

Se abbiamo il condensatore in carica, per un $t < \tau_C$ abbiamo che:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{\pi R^2 \epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E(t) = \frac{Q_{max}}{\pi R^2 \epsilon_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}} \right)}$$

Inoltre per un $t \gg \tau_C$ si osserva che:

$$E(t) \rightarrow \frac{Q_{max}}{\pi R^2 \epsilon_0} \quad \text{e} \quad B \rightarrow 0$$

Quindi si ha questa serie di correlazioni:

$$B \neq 0 \Leftrightarrow E = E(t) \Leftrightarrow \Phi_E = \Phi_E(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{E}) \neq 0$$

Quindi a questo punto siamo pronti per dare la nuova versione della legge di Maxwell:

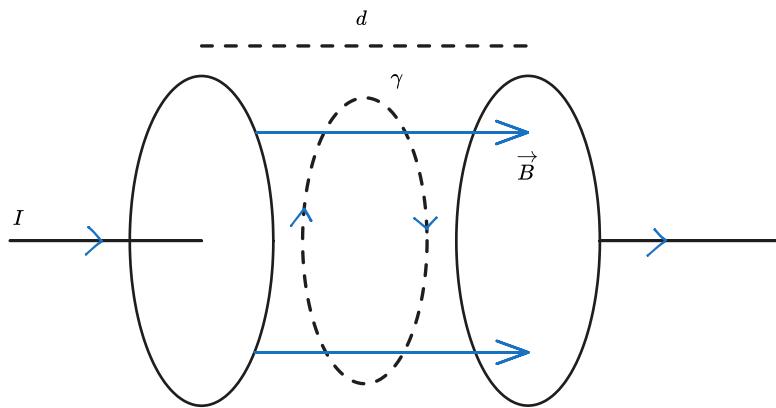
Quarta Legge di Maxwell

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{Conc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt} \quad \text{con } \gamma = \partial S$$

Esempio di Applicazione della Quarta Legge di Maxwell

Calcolare \vec{B} tra le armature di un condensatore piano di raggio R .

Graficamente abbiamo che:



Calcolando il Campo Magnetico utilizzando Ampère - Maxwell otteniamo che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \Phi_S(\vec{E})$$

Sia r il raggio di γ e scriviamo la formula in modo esplicito:

$$\|\vec{B}\| \cdot 2\pi r = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\pi r^2 \|\vec{E}(t)\| \right) \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi r} \pi r^2 \frac{d}{dt} \left(\|\vec{E}(t)\| \right) \Rightarrow \boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 \epsilon_0 r}{2} \frac{d\|\vec{E}(t)\|}{dt}}$$

Questo nel caso in cui $r < R$

Nel caso in cui abbiamo che $r > R$, l'unica cosa che cambia è il termine a destra. Infatti, sapendo che $\vec{E} = 0$ e che $r > R$, dalla legge di Ampère Maxwellabbiamo che:

$$\|\vec{B}\| 2\pi r = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \|\vec{E}(t)\| \Rightarrow \boxed{\|\vec{B}\| = \frac{\epsilon_0 \mu_0 R^2}{2r} \frac{d}{dt} \|\vec{E}(t)\|}$$

Definizione di Corrente di Spostamento

Possiamo definire come Corrente di Spostamento la quantità:

$$I_{SP} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\Phi_S(\vec{E}(t)) \right)$$

Va sottolineato che a questa quantità non è associato nessuno spostamento di carica, nonostante dimensionalmente ritorni esattamente quello di una carica in movimento.

Ritorniamo un secondo al caso precedente, del condensatore piano con armature circolari.

Se uniamo i due capi del circuito con un filo conduttore, allora abbiamo che nei fili c'è una corrente:

$$I = \frac{dq(t)}{dt}$$

La corrente sulle armature del condensatore è pari a $q(t)$, in particolare:

$$\|\vec{E}\| = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 A} \quad \text{Per la legge di Gauss}$$

In particolare, abbiamo che:

$$\|\vec{E}\| = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow q(t) = \|\vec{E}\| \varepsilon_0 A \Rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = \varepsilon_0 A \frac{d\|\vec{E}\|}{dt} \Rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = \varepsilon_0 \underbrace{\frac{dA\|\vec{E}\|}{dt}}_{\Phi_A(\vec{E})} = \varepsilon_0 \Phi_A(\vec{E}) = I_{SP}$$

Quindi la corrente reale di carica e la corrente fittizia di spostamento hanno lo stesso valore assoluto e il modulo del campo magnetico vale:

$$\|\vec{B}\| = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_{SP} r}{2\pi R^2} & r < R \\ \frac{\mu_0 I_{SP}}{2\pi r} & r > R \end{cases}$$

Leggi Di Maxwell Generalizzate

Nei capitoli precedenti abbiamo visto che per S superficie chiuse e $\gamma = \partial S$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left(I_{Conc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$$

Ricordiamo due teoremi che ci permetteranno di scrivere le formule in forma differenziale:

- *Teorema di Stokes*: Sia \vec{F} un campo vettoriale in \mathbb{R}^3 e sia S una superficie con bordo γ ($\gamma = \partial S$), allora:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

- *Teorema della Divergenza*: Sia \vec{F} un campo vettoriale su \mathbb{R}^3 e siano S e γ come nel teorema precedente, allora

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot dV$$

Vediamo anche dei risultati notevoli:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow Q_{int} = \int_V \rho dV \quad \text{e} \quad \vec{j} = \frac{dI}{dS} \Rightarrow I_{Conc} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Andiamo ad analizzare le Leggi di Maxwell una per una:

Prima Legge - Legge di Gauss

Dalla prima legge utilizziamo il teorema della divergenza e otteniamo che:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \xrightarrow{\text{Per prima}} \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

Poiché la cosa deve essere valida per ogni volume, abbiamo che le funzioni integrande devono essere uguali:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Seconda Legge - Legge di Gauss

Basta applicare il teorema della divergenza come nel caso precedente:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{Divergenza}} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \xrightarrow{\forall V} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Terza Legge - Legge di Faraday

Dalla terza legge, applicando il teorema di Stokes otteniamo che:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Inoltre visto che abbiamo una superficie S fissata e indipendente dal tempo, abbiamo che:

$$\int_S (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\int_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) \cdot \vec{S}$$

Sapendo poi che la cosa vale per ogni superficie S , abbiamo che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

Quarta Legge - Legge di Ampère-Maxwell

Utilizzando la definizione di densità di corrente \vec{j} si ha che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left(I_{Conc} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \left(\int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right)$$

Per il teorema di Stokes segue che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) dS = \int_S \left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Inoltre, sapendo che vale per ogni superficie abbiamo che:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Riassumendo

Le nuove leggi di Maxwell scritte in maniera differenziale sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Se consideriamo il sistema delle quattro equazioni, otteniamo un sistema differenziale non omogeneo per \vec{E} e \vec{B}
Trovare una soluzione esatta è difficile, per questo ci bastano delle approssimazioni

Poi possiamo distinguere anche dei casi particolari:

- Elettrostatica e Magnetostatica (*sono i casi che abbiamo già studiato in precedenza*):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

- Nel vuoto (*Senza sorgenti*):

$$\vec{j} = \rho = 0$$

In questo caso otteniamo poi che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Nel caso statico e nel vuoto (*unendo i due prima*):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \text{Cioè } \vec{E} \text{ e } \vec{B} \text{ sono costanti}$$

Conservazione dell'Energia

La conservazione dell'energia è già implicita nelle leggi di Maxwell, in particolare, ponendo la divergenza nella quarta abbiamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Risolvendo per $\vec{\nabla} \times \vec{j}$ otteniamo che:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right)}_0 - \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

In particolare, sviluppando la seconda parte abbiamo che:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Da cui otteniamo che:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

L'equazione che abbiamo appena ottenuto è un'equazione di continuità che spiega a livello di carica la conservazione della carica, cioè la densità di carica deve variare in ogni punto in cui la densità di corrente è non nulla, cioè la carica è conservata localmente (per ogni volume infinitesimo)

Integrando l'equazione di continuità in un volume V con bordo S ($S = \partial V$) otteniamo che:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_V -\vec{\nabla} \times \vec{j} dV$$

Utilizzando poi il teorema della Divergenza abbiamo che

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \underbrace{\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}}_I$$

Inoltre se abbiamo una superficie V fissata, cioè indipendente dal tempo, abbiamo che:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} Q_{int}$$

Da cui otteniamo che:

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q_{int} = -I}$$

Onde Elettromagnetiche

Consideriamo la terza e la quarta legge di Maxwell nel vuoto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dalla terza legge prendiamo le derivate temporali:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = -\frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} \quad \xrightarrow{\text{Prima}} \quad \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Sfruttando poi la quarta legge di Maxwell abbiamo che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0 \epsilon_0} \right) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Inoltre, sapendo che, dato un campo vettoriale \vec{F} :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = -\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

E sapendo anche che:

$$\vec{F} = \vec{B} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Si ottiene che:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

In modo del tutto analogo partendo dalla quarta legge otteniamo che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Derivate temporali}} \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Da quanto abbiamo visto primaabbiamo che:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Conoscendo poi lo sviluppo di $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}$ e sapendo di stare nel vuoto, otteniamo che:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

Definizione di Equazione delle Onde

Sia il campo elettrico \vec{E} sia il campo magnetico \vec{B} risolvono la seguente equazione, che prende il nome di Equazione delle Onde

$$\vec{\nabla}^2 f(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, \vec{x}) = 0$$

Dimensionalmente parlando, c è una velocità, in particolare è la velocità di propagazione dell'onda
Per le onde elettromagnetiche nel vuoto si ha che:

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \quad c \approx 2,99 \cdot 10^8 m/s$$

Questa è la velocità della luce nel vuoto.

Risolviamo l'equazione delle onde prima in casi specifici più semplici per poi andare a studiare con il campo elettrico e con il campo magnetico:

Risoluzione in Una Dimensione

Sia $f(t, x)$ una funzione che soddisfa l'equazione delle onde con velocità di propagazione v :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, x) = 0$$

f può essere di qualsiasi tipo e può dipendere da $\phi_{\pm} = x \pm vt$, cioè se f dipende da t e x tramite una funzione ϕ_{\pm} , ossia:

$$f(t, x) = f(\phi_{\pm} = x \pm vt) \quad \text{Con } \phi_{\pm} \text{ funzione che descrive la fase dell'onda}$$

Verifica:

Mostriamo quindi l'uguaglianza. Nel fare ciò mostriamo che sono uguali le derivate prime e seconde sia rispetto al tempo sia rispetto alla posizione.

Per il tempo:

$$f(t, x) = f(\phi_{\pm}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\phi_{\pm}) = \frac{\partial f}{\partial \phi_{\pm}} \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial \phi_{pm}} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \right) = \frac{\partial}{\partial \phi_{\pm}} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial \phi_{\pm}} \right) \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial t} \end{cases} \quad \left(\frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial t} = \pm v \right)$$

Da cui otteniamo che:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 d}{d\phi_{\pm}^2}}$$

Per la posizione:

$$f(t, x) = f(\phi_{\pm}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} f(\phi_{\pm}) = \frac{\partial f}{\partial \phi_{\pm}} \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi_{\pm}} \\ \text{In maniera uguale a sopra si ottiene che } \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_{\pm}^2} \end{cases} \quad \left(\frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial x} = 1 \right)$$

Da cui otteniamo che:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_{\pm}^2}}$$

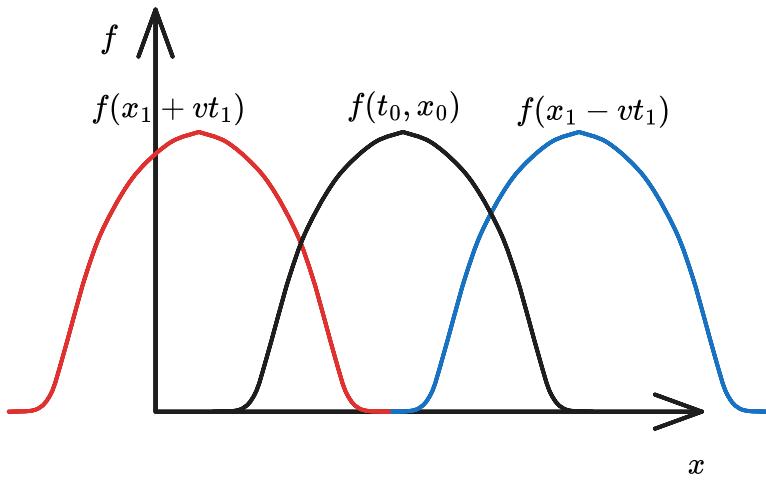
Mettendo tutto insieme otteniamo che:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

E quindi l'equazione è verificata

□

Vediamo il profilo d'onda, cioè quando l'onda si sposta da x_0



Andiamo a vedere che succede quando l'onda si sposta.

Andiamo più che altro (*nel caso del disegno*) a studiare il massimo della funzione

Abbiamo che con $t_1 > t_0$ si ha che:

$$f(t_0, x_0) = f(t_1, x_1)$$

Per quanto appena visto, questo è equivalente a scrivere a:

$$f(x_0 \pm vt_0) = f(x_1 \pm vt_1) \Leftrightarrow x_0 \pm vt_0 = x_1 \pm vt_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_0 \mp v(t_1 - t_0)}$$

Quindi se il segno della funzione ϕ_{\pm} è $-$ (*quindi abbiamo ϕ_-*) allora abbiamo che l'onda si propaga con velocità $-v$ e

$$x_1 = x_0 + v(t_1 - t_0)$$

Se invece il segno della funzione ϕ_{\pm} è $+$ (*quindi ϕ_+*) allora abbiamo che l'onda si propaga con velocità v e:

$$x_1 = x_0 - v(t_1 - t_0)$$

Generalizzazione a Tre Dimensioni

In generale, sulla pista del caso monodimensionale, le soluzioni sono del tipo:

$$f(t, \vec{x}) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t)$$

Dove $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$ è la direzione di propagazione dell'onda e $\omega \in \mathbb{R}$ è la pulsazione dell'onda

Siccome l'equazione è lineare, possiamo dire che c'è un insieme completo di soluzioni indipendenti dato dalle onde piane.

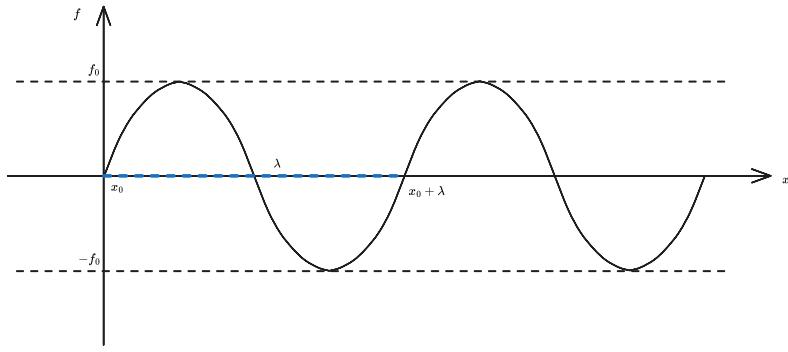
Definizione di Onde Piane

Delle onde elettromagnetiche si definiscono onde piane se sono soluzione di un'equazione lineare, in particolare se risolvono:

$$f(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t) = f_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)$$

Dove f_0 è l'ampiezza dell'onda, \vec{k} è il numero d'onda misurato in $[\vec{k}] = m^{-1}$ e ω è la frequenza misurata in s^{-1}

A tempo fissato abbiamo che:

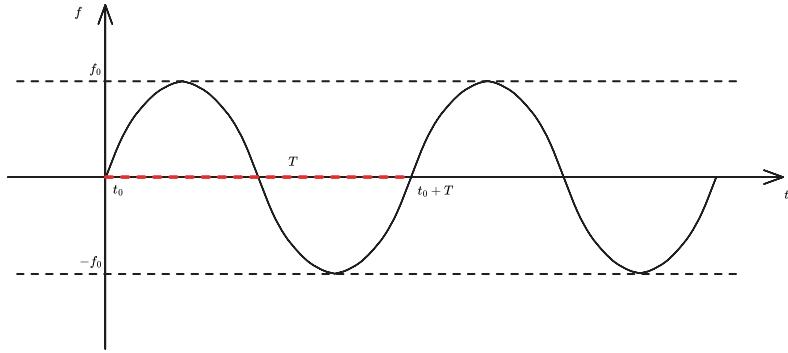


La lunghezza d'onda λ ci dà la periodicità spaziale dell'onda

Per ottenere k infatti possiamo:

$$\sin(kx_0 \pm \omega t) = \sin(k(x_0 + \lambda) \pm \omega t) \Leftrightarrow kx_0 = k(x_0 + \lambda) + 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Quando invece abbiamo la posizione fissata otteniamo che:



Conoscendo la periodicità temporale possiamo calcolare ω :

$$f(kx \pm \omega t_0) = f(kx_0 \pm) \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Nel caso in cui abbiamo \vec{k} vettore, abbiamo che:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\|\vec{k}\|}$$

Inoltre, sapendo che:

$$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \frac{\omega}{\|\vec{k}\|} \Rightarrow \omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$$

Andiamo ora a sostituire \vec{E} e \vec{B} al posto di $f(t, \vec{x})$:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Vogliamo vedere delle soluzioni che siano del tipo:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \quad \text{e} \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t)$$

Per quanto fatto prima per il caso generale di \vec{f} , poiché verifica l'equazione delle onde, verifica anche questo tipo di soluzioni

In particolare vale:

Proposizione

Nel vuoto si ha che

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$$

Dimostrazione:

In coordinate cartesiane abbiamo che:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Da cui otteniamo che:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_y \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_z \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \right) \\ &= -E_{0,x} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} + \pm \omega t) - E_{0,y} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} + \pm \omega t) - E_{0,z} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} + \pm \omega t) = 0 \end{aligned}$$

Da cui si ottiene che:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \perp \vec{E}$$

In maniera del tutto analoga anche per il campo magnetico \vec{B}

□

Mostriamo anche che $\vec{B} \perp \vec{E}$

Dimostrazione:

Andiamo a vedere il rotore di \vec{E} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \times \left(\vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \right) = -(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t)$$

È anche vero però che:

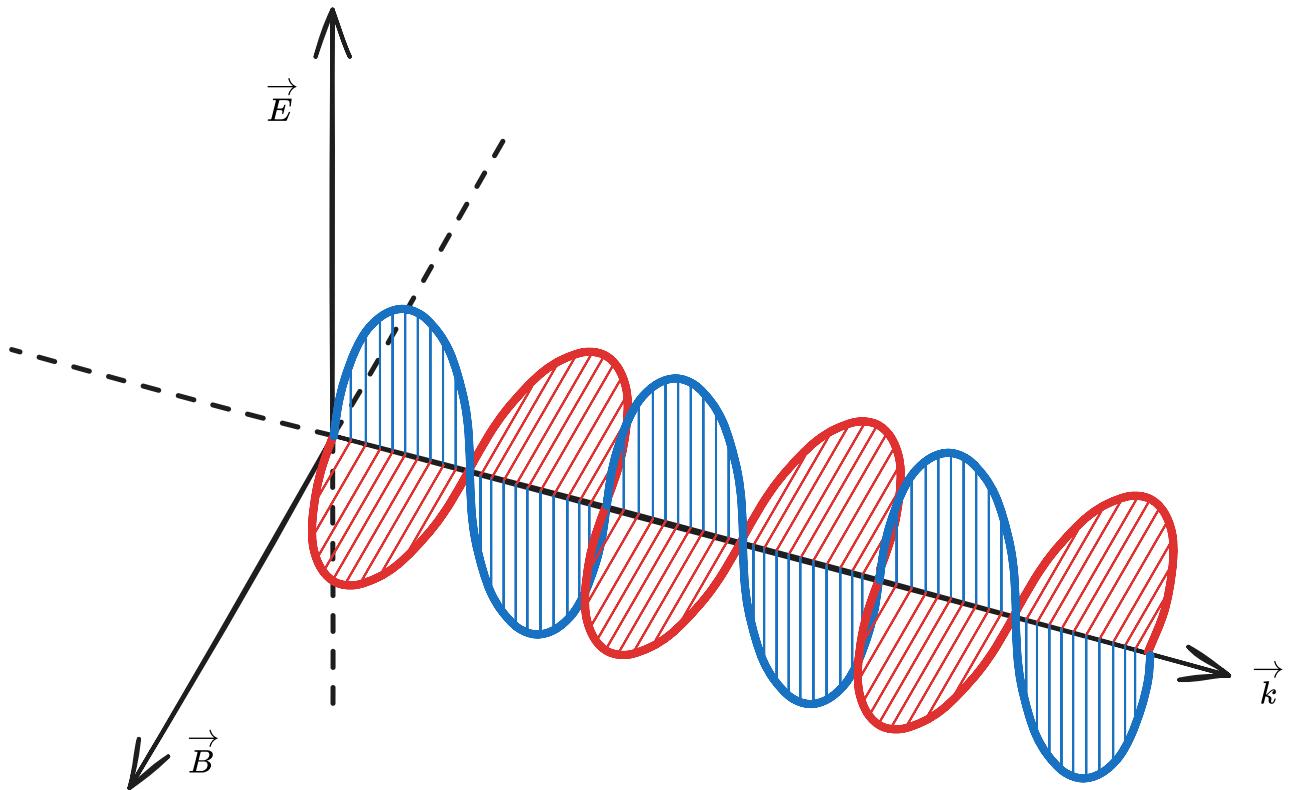
$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = \mp \omega \vec{B}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} \pm \omega t)$$

Otteniamo quindi che:

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \cdot \vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{E}$$

□

Possiamo quindi rappresentare un'onda elettromagnetica nel seguente modo:



Proposizione

Vale la relazione:

$$\|\vec{E}\|^2 = c^2 \|\vec{B}\|$$

Dimostrazione:

Per quanto abbiamo visto prima, abbiamo che:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} \cdot \vec{B} = \|\vec{B}\|^2 = \frac{(\vec{k} \times \vec{E}) \cdot (\vec{k} \times \vec{E})}{\omega^2}$$

Sapendo che: $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, possiamo definire $\hat{k} = (1, 0, 0)$ e $\vec{E} = (0, E_2, E_3)$, da cui:

$$\hat{k} \times \vec{E} = \det \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & E_3 \end{pmatrix} = (0, -E_3, E_2) \quad \Rightarrow \quad (\hat{k} \times \vec{E}) \cdot (\hat{k} \times \vec{E}) = \|\hat{k}\|^2 (E_2^2 + E_3^2) = \|\vec{E}\|^2$$

Inoltre, sapendo poi che:

$$\frac{\omega}{k} = c \quad \Rightarrow \quad \|\vec{B}\|^2 = \frac{1}{\omega^2} \|\vec{k}\|^2 \|\vec{E}\|^2 = \frac{1}{c^2} \|\vec{E}\|^2$$

Da cui segue la tesi □

Energia di un'onda

Per l'energia di un'onda elettromagnetica dobbiamo studiare il vettore di Poynting

Nel vuoto la densità di energia di un campo elettrico \vec{E} è:

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2$$

Mentre quella del campo magnetico $\|\vec{B}\|$ è:

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2$$

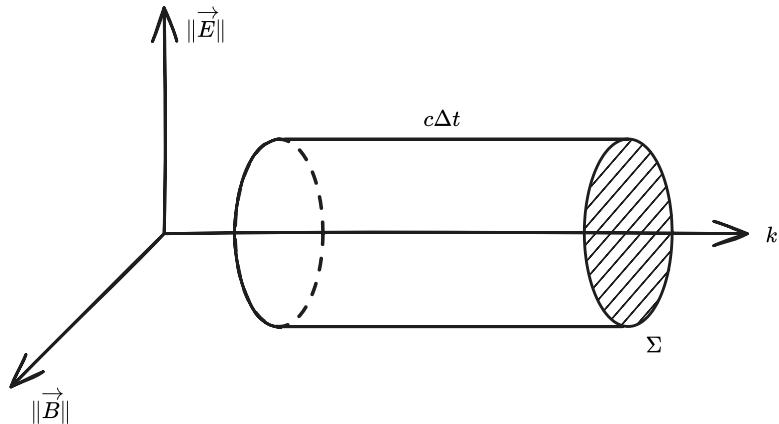
Definizione di Densità di Energia Istantanea

La densità di Energia Istantanea è data da:

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}\|^2 = \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2 = \frac{\|\vec{B}\|^2}{\mu_0}$$

Quindi in generale, l'energia trasportata è portata metà dal campo elettrico e metà da quello magnetico

Andiamo a vedere in che modo si può calcolare:



L'energia contenuta nella figura di volume $V = \Sigma c\Delta t$ è:

$$dU = u(\underbrace{\Sigma c\Delta t}_V)$$

Da cui l'energia contenuta nella superficie Σ è:

$$P = \frac{dU}{dt} = u\Sigma c \quad \Rightarrow \quad P = \varepsilon_0 \|\vec{E}\| \Sigma c$$

P può essere espresso come il flusso attraverso la superficie Σ del vettore:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 \|\vec{E}\| \vec{c} \vec{u}_k \quad \Leftrightarrow \quad P = \Phi_\Sigma(\vec{S})$$

Definizione di Vettore di Poynting

Possiamo definire il vettore di Poynting come:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 \|\vec{E}\| \vec{c} \vec{u}_k$$

Volendo è possibile dimostrare che:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Il vettore di Poynting ha direzione e verso al vettore di propagazione e $\|\vec{S}\|$ rappresenta la potenza che attraversa una superficie perpendicolare alla direzione di propagazione

Caso Particolare del Vettore di Poynting

Vediamo quale è l'energia di un'onda polarizzata linearmente:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad \text{e} \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Allora abbiamo che il vettore di Poynting è:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{S}\| = c\epsilon_0 \|\vec{E}_0\|^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{x})$$

Sappiamo anche che: $\Phi_{\Sigma}(\vec{S})$ è un flusso istantaneo (con Σ superficie)

Allora è anche conveniente definire un flusso medio di potenza:

$$\|\vec{S}\|_M = \epsilon_0 c \|\vec{E}\|_M^2$$

M serve ad indicare che è medio

Per trovare il valore medio possiamo usare il teorema della media integrale, cioè:

$$(X)_M = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$(\|\vec{E}\|^2)_M = \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{E}\|^2(t) dt = \frac{\|\vec{E}\|^2}{T} \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) d\tau \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

Con un cambio di variabile otteniamo poi che:

$$(\|\vec{E}\|^2)_M = \frac{\|\vec{E}\|^2}{T} \frac{1}{\omega} \int_{kx}^{kx+2\pi} -\cos^2(\tau) d\tau = \frac{\|\vec{E}\|^2}{T\omega} \left[\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\tau) \right]_{kx}^{kx+2\pi}$$

Quindi otteniamo che:

$$\|\vec{S}\|_M = \epsilon_0 c (\|\vec{E}\|^2)_M = \epsilon_0 c \frac{\|\vec{E}_0\|^2}{2}$$

Ora possiamo dare un paio di definizioni dai risultati appena ottenuti:

Definizione di Valore Efficace di \vec{E}

Si definisce il valore efficace di \vec{E} il valore:

$$E_{Eff}^2 = (\|\vec{E}\|^2)_M$$

Definizione di Intensità Media

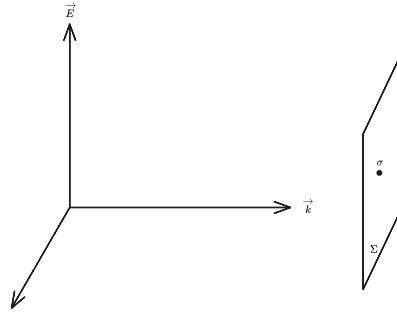
Si definisce Intensità Media per Unità di superficie il valore:

$$I = \|\vec{S}\|_M = \epsilon_0 c (\|\vec{E}\|^2)_M = \epsilon_0 c \frac{\|\vec{E}_0\|^2}{2}$$

Quantità di Moto di un'Onda Elettromagnetica Piana

È un concetto che si rifa molto al concetto di pressione di radiazione

Cerchiamo di capire come funziona



Con Σ superficie e σ densità di carica

Una carica in Σ acquista una velocità $\vec{v}_\sigma \parallel \vec{E}$. Il campo elettrico trasferisce a Σ una potenza per unità di superficie pari a:

$$P_\sigma = \|\vec{F}_\sigma\| \cdot \|\vec{v}_\sigma\| = \sigma \|\vec{E}\| \cdot \|\vec{v}_\sigma\|$$

Andando a considerare la potenza media otteniamo che:

$$(P_\sigma)_m = \sigma(\|\vec{E}\| \cdot \|\vec{v}_\sigma\|)_m \quad \text{Per la conservazione dell'energia vale} \quad I = (P_\sigma)_m$$

Visto che la forza esercitata sulle cariche nella superficie Σ è verticale, abbiamo che $\vec{F}_\sigma \parallel \Sigma$ (*la superficie, non il vettore normale*). Questa forza non causa effetti meccanici apparenti (in modo diretto).

Per capire quantitativamente che cosa faccia questa forza, assumiamo le condizioni $\|\vec{v}_\sigma\| \neq 0$ e $\|\vec{B}\| \neq 0$, allora esiste sicuramente una forza non nulla, che è la forza di Lorentz:

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \Sigma \sigma (\vec{v}_\sigma \times \vec{B})$$

In questo modo abbiamo una situazione in cui la velocità della carica infinitesima su Σ è parallela a \vec{E} ($\vec{v}_\sigma \parallel \vec{E}$) ed è perpendicolare al campo magnetico \vec{B} ($\vec{v}_\sigma \perp \vec{B}$). In particolare abbiamo che:

$$\vec{F}_L = \Sigma \sigma \|\vec{v}_\sigma\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \hat{k} \quad \text{Per la regola della mano destra}$$

Sapendo che per un'onda elettromagnetica vale:

$$\|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\| \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_L = \Sigma \sigma \frac{\|\vec{v}_\sigma\| \cdot \|\vec{E}\|}{c} \hat{k}$$

Tutto questo è in funzione del tempo, quindi capire l'intensità dobbiamo prendere il valore medio:

$$(F_L)_m = \frac{\sigma}{c} \Sigma (\|\vec{v}_\sigma\| \cdot \|\vec{E}\|)_m$$

Riprendendo quanto fatto prima abbiamo che:

$$I = (P_\sigma)_m = \sigma (\|\vec{v}_\sigma\| \cdot \|\vec{E}\|)_m \quad \Rightarrow \quad (\|\vec{v}_\sigma\| \cdot \|\vec{E}\|)_m = \frac{I}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad (F_L)_m = \frac{\sigma}{c} \Sigma \frac{I}{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(F_L)_m = \Sigma \frac{I}{c}}$$

Sapendo tutto ciò possiamo definire la Potenza di Radiazione come:

Definizione di Pressione di Radiazione

Si definisce Pressione di Radiazione il valore:

$$P_{Rad} = \frac{(F_L)_m}{\Sigma} = \frac{I}{c}$$

Le onde elettromagnetiche trasportano quantità di moto su area per tempo e vale l'uguaglianza:

$$P_{Rad} = \frac{I}{c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \|\vec{E}_0\|^2 = \epsilon_0 E_{Eff}^2$$

In base al tipo di superficie Σ possiamo distinguere due casi:

- Se Σ è una superficie completamente assorbente otteniamo che l'onda elettromagnetica cede tutta la sua quantità di moto alla superficie
- Se Σ è una superficie perfettamente riflettente abbiamo l'effetto contrario

Primo Caso	Secondo Caso
$P_{Iniziale} = \frac{I}{c}$	$P_{Iniziale} = \frac{I}{c}$
→	→
$P_{Rad} = P_i + P_f = \frac{I}{c}$	$P_{Rad} = P_i + P_f = \frac{I}{c} - \left(-\frac{I}{c}\right) = \frac{2I}{c}$
$P_{Final} = 0$	←
Σ	Σ

Esempio sulla Potenza di Radiazione

Un puntatore laser con potenza di $P = 2mW$ che crea un punto con diametro d pari a $2mm$ su uno schermo bianco con coefficiente di riflessione $\eta = 0,7$ (cioè 70% è riflesso e 30% è assorbito)

Calcolare la Pressione di Radiazione esercitata sullo schermo.

Possiamo cominciare con il calcolare l'Intensità del laser sullo schermo:

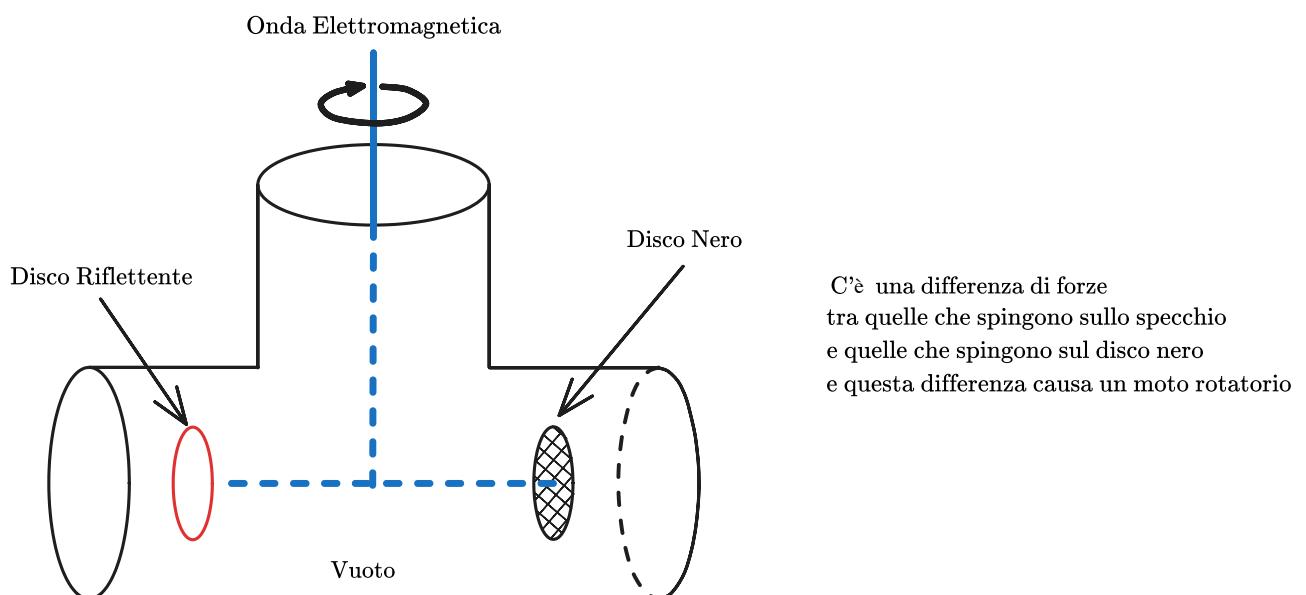
$$I = \frac{P}{\Sigma} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot (10^{-3})^2} = \frac{2}{\pi} \cdot 10^3 \frac{W}{m^2}$$

Sapendo poi che il 70% viene riflessa, abbiamo che:

$$P_{Rad} = P_i - P_f = P_i(1 - (-\eta)) = \frac{I}{c}(1 + \eta) = 1,7 \frac{I}{c}$$

Come si misura la Pressione di Radiazione?

Possiamo utilizzare la Bilancia di Torsione:



Visto che per una superficie riflettente abbiamo $P_{Rad} = 2\frac{I}{c}$ e per una lente nera (completamente assorbente) abbiamo $P_{Rad} \frac{I}{c}$ otteniamo che:

$$P_{Specchio} = 2P_{Nero} \Rightarrow \text{Rotazione}$$

Polarizzazione

Premettiamo con il dire che l'equazione delle onde è lineare, cioè che se \vec{E}_1 e \vec{E}_2 allora anche $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ è ancora soluzione.

Consideriamo un'onda che si propaga nella direzione \vec{x} , allora sappiamo che il suo campo elettrico è:

$$\vec{E} = E_0 \cos(k \cdot x - \omega t) \hat{u}$$

Dall'equazione di Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ otteniamo che

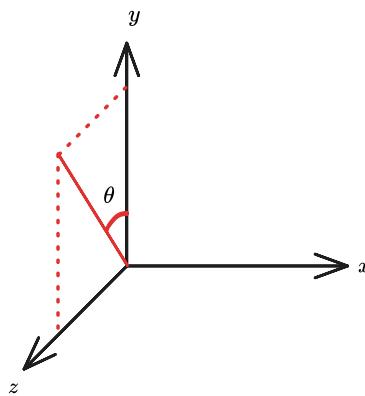
$$\hat{u} = (0, u_y, u_z)$$

In quanto avevamo che $\vec{k} = \|\vec{k}\| \cdot (1, 0, 0)$

Visto che la norma di \hat{u} è 1, allora possiamo scrivere \hat{u} come:

$$\hat{u} = (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

L'angolo θ prende nome di Angolo di Polarizzazione.



In questo modo possiamo calcolare direttamente l'angolo sapendo che:

$$\tan \theta = \frac{E_z}{E_y} \quad \text{con} \quad \begin{cases} E_z = E_0 \sin \theta \\ E_y = E_0 \cos \theta \end{cases}$$

In questo modo otteniamo che $\tan \theta$ non dipende dal tempo.

Definizione di Onda Elettromagnetica Polarizzata Linearmente

Un'onda Elettromagnetica si definisce Polarizzata Linearmente se l'angolo di Polarizzazione non dipende dal tempo.

Prendiamo un'altra soluzione dell'equazione delle onde dalla formula:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \vec{u}_y \pm E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

Questa (sempre per la regola della mano destra) è un'onda che si propaga in direzione $\vec{k} \parallel \vec{u}_x$

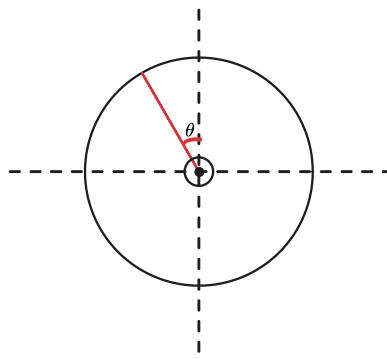
Tuttavia qui abbiamo che l'angolo dipende dal tempo, cioè $\theta = \theta(t)$ e otteniamo che:

$$\tan \theta = \frac{E_z}{E_y} = \pm \frac{E_0 \sin(kx - \omega t)}{E_0 \cos(kx - \omega t)}$$

Diversamente da prima, le componenti che avevano il tempo si cancellavano, ora no.

Infatti quello che resta è:

$$\tan \theta = \pm \tan(kx - \omega t)$$



In particolare abbiamo che per:

$$\tan \theta = \begin{cases} +\tan(kx - \omega t) & \Rightarrow \dot{\omega}(t) = -\omega \Rightarrow \text{Ruota in senso orario} \\ -\tan(kx - \omega t) & \Rightarrow \dot{\omega}(t) = +\omega \Rightarrow \text{Ruota in senso antiorario} \end{cases}$$

Definizione di Onda Elettromagnetica con Polarizzazione Circolare

Un'onda si definisce che ha polarizzazione circolare se l'angolo θ dipende dal tempo e le componenti perpendicolari alla direzione dell'onda hanno stesso modulo

Nel caso in cui abbiamo che

$$\vec{E}(x, t) = E_{0,y} \cos(kx - \omega t) \pm E_{0,z} \sin(kx - \omega t)$$

Con $E_{0,y} \neq E_{0,z}$ allora si parla di rotazione ellittica

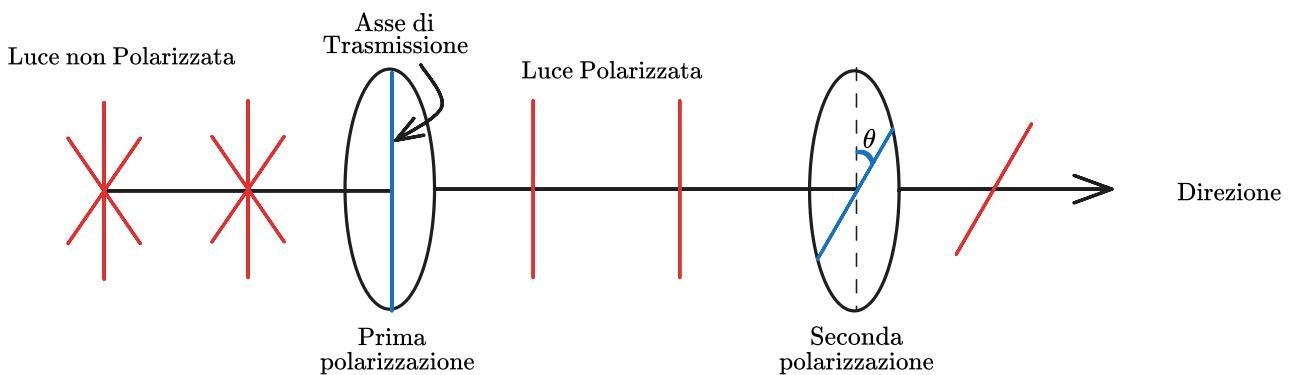
Con la polarizzazione lineare e quella circolare possiamo rappresentare tutti i possibili stati di polarizzazione di un'onda elettromagnetica piana.

Definizione di Onda Elettromagnetica non Polarizzata

Un'onda elettromagnetica si definisce non polarizzata se l'angolo θ di polarizzazione varia nel tempo in maniera casuale

Filtro Polarizzatore

Il filtro polarizzatore è un materiale che lascia passare soltanto una componente del campo elettrico che sia parallela al suo asse di polarizzazione:



Se andiamo ad indicare con E_0 il modulo del campo elettrico dopo la prima polarizzazione, allora avremo che dopo la seconda polarizzazione avrà un modulo pari a $E_0 \cos \theta$, allo stesso modo, per l'intensità abbiamo che:

$$I_i = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \quad \Rightarrow \quad I_f = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_f^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \cos^2 \theta$$

Legge di Malus

Il campo elettrico rispetto a prima e dopo una polarizzazione varia con il coseno dell'angolo di polarizzazione, cioè:

$$E_f = E_i \cos \theta$$

In maniera analoga, l'Intensità varia con il quadrato del coseno dell'angolo:

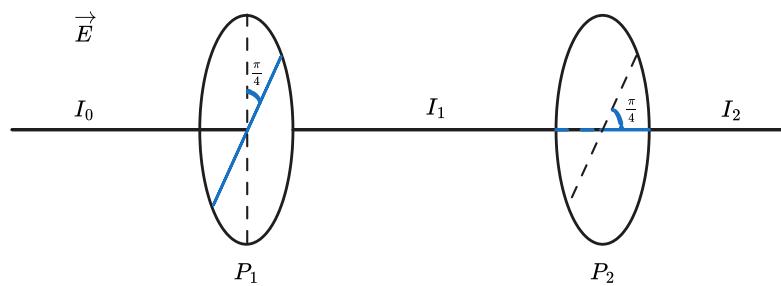
$$I_f = I_i \cos^2 \theta$$

Se la luce è non polarizzata, allora $\cos \theta$ varia casualmente nel tempo, quindi possiamo prendere il valore medio dell'angolo:

$$(\cos^2 \theta)_m = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad I_f = \frac{I_0}{2}$$

Esempio di un Sistema con due Polarizzatori

Supponiamo di avere il seguente sistema:



Sappiamo che la fascia di Intensità I_0 è polarizzata linearmente

Determiniamo la percentuale di energia trasmessa dal sistema P_1 e P_2

Per la legge di Malus sappiamo che:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(I_0 \cos^2 \frac{\pi}{4} \right) \cos^2 \frac{\pi}{4} = I_0 \cos^4 \frac{\pi}{4}$$

Da cui otteniamo che l'energia in percentuale è:

$$\frac{I_2}{I_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{1}{4} = 25\%$$