ANALISI MATEMATICA 2

MODULO 1

Appunti di lezione

G. Cupini

agg. 5 febbraio 2022

Corretta la Proposizione 1.3.5

Corso di laurea in Matematica
Università di Bologna
A.A. 2021-2022

Indice

Capitolo 1. Lo spazio euclideo 5
1.1. Topologia 5
1.2. Insiemi connessi 8
1.3. Insiemi chiusi e compatti 12

Capitolo 2. Esercizi su dominio e insiemi di livello 15
2.1. Esercizi sul dominio 15
2.2. Esercizi sugli insiemi di livello 23

Capitolo 3. Limiti di funzioni in più variabili 25
3.1. Definizione e caratterizzazioni 25
3.2. Esistenza e non esistenza del limite 26
3.3. Funzioni continue 33
3.3.1. Teorema di Bolzano 34
3.3.2. Teorema di Weierstrass 35
3.4. Legame tra limiti di funzioni vettoriali e limiti delle sue componenti 36
3.5. Limiti di funzioni a valori reali: altre proprietà 39
3.6. Esercizi 40

Capitolo 4. Premesse di algebra lineare 49
4.1. Norme 49
4.2. Matrici 51
4.2.1. Criterio di Sylvester 51
4.2.2. Matrici definite 52
4.2.3. Matrici semidefinite 54
4.2.4. Teoremi sulle matrici indefinite 55
4.2.5. Matrici simmetriche 2×2 56

Capitolo 5. Calcolo differenziale 57
5.1. Derivabilità 57
5.2. Derivate direzionali 59
5.3. Differenziabilità 61

5.3.1. Definizione e caratterizzazioni 61
5.3.2. Differenziale 62
5.3.3. Derivate direzionali di funzioni differenziabili 65
5.3.4. Differenziabilità e continuità 66
5.4. Calcolo differenziale: funzioni a valori vettoriali 69
5.5. Composizione di funzioni differenziabili 75
5.5.1. Derivata sotto il segno di integrale 79
5.6. Derivate di ordine superiore 83
5.7. Formula di Taylor 89
5.8. Esercizi 95

Capitolo 6. Funzioni convesse 113

Capitolo 7. Massimi e minimi liberi 119
7.1. Punti estremanti relativi 119
7.2. Teorema di Fermat 120
7.3. Condizioni necessarie del II ordine per gli estremanti relativi 121
7.4. Condizione sufficiente del II ordine per i punti di sella 122
7.5. Condizioni sufficienti per gli estremanti relativi 122
7.6. Hessiano nullo 124
7.7. Esercizi 126

Capitolo 8. Funzioni aperte 137

Capitolo 9. Teorema di invertibilità locale e teorema delle funzioni implicite 139
9.1. Teorema di punto fisso 139
9.2. Teorema di invertibilità locale 142
9.3. Teorema delle funzioni implicite 149
9.4. Gradiente ortogonale all'insieme di livello 154

Capitolo 10. Massimi e minimi vincolati 157
10.1. Varietà in $\mathbb{R}^n$ 157
10.2. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange 164
10.3. Esercizi 167

Capitolo 11. Integrali curvilinei 189
11.1. Curve 189
11.2. Lunghezza di una curva 196
11.3. Due classi speciali di curve piane 200
11.4. Integrali curvilinei di I specie 201
11.5. Esercizi 204

Capitolo 12. Forme differenziali e campi vettoriali 211
12.1. Definizioni 211
12.2. Campi conservativi/irrotazionali e forme esatte/chiuse 215
12.3. Esercizi 221

CAPITOLO 1

Lo spazio euclideo

In questo capitolo si richiamano nozioni già presentate nel corso di AM1B: lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, d)$, la sua topologia, la convergenza di successioni in $(\mathbb{R}^n, d)$.

1.1. Topologia

Definizione 1.1.1 (Metrica euclidea).
Sia $X = \mathbb{R}^n$. Per ogni $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ in $\mathbb{R}^n$ definiamo

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Esso definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$. La norma indotta da tale prodotto scalare è

$$|x| = \|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

La distanza indotta da tale norma è la *distanza euclidea*:

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

Essa definisce una distanza d su $\mathbb{R}^n$ detta *distanza euclidea*.

Definizione 1.1.2 (Palla).
Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo. Si chiama *palla* di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ l'insieme

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < r\}.$$

Definizione 1.1.3 (Insieme limitato).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che A è *limitato* se esiste $r > 0$ tale che $A \subseteq B(0, r)$, ossia

$$\exists r > 0 : |x| < r \qquad \forall x \in A.$$

Definizione 1.1.4 (Punto interno).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un *punto interno* ad A se

$$\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq A.$$

Osservazione 1.1.5. In particolare, un punto interno ad A è anche un punto di A, ma non è detto che ogni punto di A sia interno ad A.

Definizione 1.1.6 (Interno di un insieme).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama *interno* di A l'insieme

$$\text{int}\, A := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ è un punto interno ad } A\}.$$

Definizione 1.1.7 (Insieme aperto).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che A è *aperto* se $\text{int}\, A = A$, ossia se ogni elemento di A è un punto interno ad A.
Per convenzione si pone $\emptyset$ insieme aperto.

Definizione 1.1.8 (Insieme complementare).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. L'insieme $\mathbb{R}^n \setminus A$ si chiama *insieme complementare* di A rispetto a $\mathbb{R}^n$. Quando non ci sono possibilità di fraintendimento, esso si indica anche A^c.

Definizione 1.1.9 (Insieme chiuso).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che A è *chiuso* se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è aperto.

Proposizione 1.1.10.
Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ *lo spazio metrico euclideo.*
Valgono le seguenti:

(i) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia di* aperti *di* $\mathbb{R}^n$*, allora*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{è un aperto di } \mathbb{R}^n.$$

(ii) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia* **finita** *di* aperti *di* $\mathbb{R}^n$*, allora*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{è un aperto di } \mathbb{R}^n.$$

(iii) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia di* chiusi *di* $\mathbb{R}^n$*, allora*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \quad \text{è un chiuso di } \mathbb{R}^n.$$

(iv) *Se* $\{A_i\}_{i\in I}$ *è una famiglia* **finita** *di* chiusi *di* $\mathbb{R}^n$*, allora*

$$\bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{è un chiuso di } \mathbb{R}^n.$$

Definizione 1.1.11 (Intorno in uno spazio metrico).
Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo.
Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che U è un *intorno* di x se esiste un aperto A di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$x \in A \subseteq U.$$

Osservazione 1.1.12. In $(\mathbb{R}^n, d)$ la definizione di intorno di x è equivalente alla seguente: U è un *intorno* di x se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$.

Definizione 1.1.13 (Punto di accumulazione).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un punto di accumulazione di A se

$$B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset \qquad \forall r > 0.$$

Definizione 1.1.14 (Derivato).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama *derivato* di A l'insieme

$$D(A) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ è un punto di accumulazione di } A\}.$$

Definizione 1.1.15 (Punto di frontiera).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è un *punto di frontiera* di A se

$$B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset \ \text{ e } \ B(x_0, r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset \qquad \forall r > 0.$$

Definizione 1.1.16 (Frontiera).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama *frontiera* di A l'insieme

$$\partial A = \mathrm{Fr} A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ è un punto di frontiera di } A\}.$$

Definizione 1.1.17 (Chiusura di un insieme).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo *chiusura* di A l'insieme

$$\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{Fr} A.$$

Teorema 1.1.18.
Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ *lo spazio metrico euclideo.*
La famiglia

$$\mathscr{T} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n \,:\, A \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^n \text{ rispetto alla metrica } d\},$$

è una topologia di Hausdorff su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.19 (Topologia indotta).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Gli insiemi aperti nella topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ su A sono gli insiemi $A \cap O$, dove O è un aperto di $\mathbb{R}^n$.
In breve: anziché "Gli insiemi aperti nella topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ su A" si usa scrivere "gli insiemi aperti di A".
Analogamente:
Gli insiemi chiusi nella topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ su A sono gli insiemi $A \cap C$, dove C è un chiuso di $\mathbb{R}^n$.
In breve: anziché "Gli insiemi chiusi nella topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ su A" si usa scrivere "gli insiemi chiusi di A".

1.2. Insiemi connessi

Definizione 1.2.1 (Insieme connesso).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Diciamo che A è *connesso* se

$$\nexists O_1, O_2 \text{ aperti di } \mathbb{R}^n \text{ tali che valgano le seguenti:}$$

(a) $A \subseteq O_1 \cup O_2$
(b) $A \cap O_1 \neq \emptyset$, $A \cap O_2 \neq \emptyset$
(c) $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Proposizione 1.2.2.
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ *lo spazio metrico euclideo e* $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Se A è un aperto, allora A è connesso *se e solo se*

$$\nexists O_1, O_2 \text{ aperti di } X \text{ tali che valgano le seguenti:}$$

(i) $A = O_1 \cup O_2$
(ii) $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$
(iii) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
Sia A connesso. Dimostriamo che non possono esistere O_1, O_2 aperti di X che soddisfano (i), (ii), (iii). Per assurdo, se esistessero O_1 e O_2 aperti di X tali che

(i) $A = O_1 \cup O_2$
(ii) $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$
(iii) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

si avrebbe, da (i) che vale (a) nella Definizione 1.2.1 e $O_1, O_2 \subseteq A$ e quindi:

$$A \cap O_1 = O_1 \overset{(ii)}{\neq} \emptyset \qquad A \cap O_2 = O_2 \overset{(ii)}{\neq} \emptyset$$

che è la (b) nella Definizione 1.2.1. Inoltre (iii) e $O_1, O_2 \subseteq A$ implicano

$$A \cap O_1 \cap O_2 = O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

Abbiamo quindi trovato due aperti che soddisfano (a), (b) e (c) nella Definizione 1.2.1, contro l'ipotesi di connessione di A.
$\Leftarrow$:
Supponiamo per assurdo, che A non sia connesso. Allora esistono O_1 e O_2 soddisfacenti (a), (b) e (c) nella Definizione 1.2.1. Definiamo $\tilde{O}_1 = O_1 \cap A$ e $\tilde{O}_2 = O_2 \cap A$. Essi sono insiemi aperti, per la Proposizione 1.1.10. Dimostriamo che essi soddisfano (i), (ii) e (iii).
Per (a), $A \subseteq O_1 \cup O_2$ e quindi

$$\tilde{O}_1 \cup \tilde{O}_2 = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2) = A \cap (O_1 \cup O_2) = A$$

e quindi vale (i).
Da (b) segue direttamente (ii).
Da (c)

$$\tilde{O}_1 \cap \tilde{O}_2 = (A \cap O_1) \cap (A \cap O_2) = A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

ossia vale (iii).
Abbiamo quindi trovato due aperti, $\tilde{O}_1$ e $\tilde{O}_2$, soddisfacenti (i), (ii) e (iii), contro l'ipotesi. □

Definizione 1.2.3 (Segmento).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Chiamiamo *segmento* di primo estremo x e secondo estremo y l'insieme

$$[x, y] := \{x + t(y - x) \,:\, t \in [0, 1]\}.$$

Osservazione 1.2.4.
Si noti che l'insieme $\{x + t(y - x) : t \in [0,1]\}$ è l'insieme dei punti del segmento di $\mathbb{R}^n$ congiungente x e y.

Definizione 1.2.5 (Poligonale).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$.
Diciamo che $P(x, y)$ è una poligonale di estremi x e y se esistono $x_0, \cdots, x_m \in \mathbb{R}^n$, con $m \in \mathbb{N}^*$, $x_0 = x$, $x_m = y$, tali che

$$P(x,y) = \bigcup_{i=1}^{m} [x_{i-1}, x_i].$$

Definizione 1.2.6 (Insieme connesso per poligonali).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto.
Diciamo che A è connesso per poligonali se per ogni $x_1, x_2 \in A$ esiste una poligonale $P(x_1, x_2)$ tale che $P(x_1, x_2) \subseteq A$.

Teorema 1.2.7.
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto.
Se A è connesso per poligonali allora è connesso.

In generale non vale il viceversa del Teorema 1.2.7. Ad esempio,

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$$

è connesso, ma non è connesso per poligonali. Se però un insieme è aperto, allora connesso e connesso per poligonali sono condizioni equivalenti. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1.2.8 (Caratterizzazione degli aperti connessi).
Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e non vuoto.
Sono equivalenti le seguenti.

(i) *A è connesso*
(ii) *A è connesso per poligonali.*

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo (i) $\Rightarrow$ (ii).
Siano $x_1, y_1 \in A$. Dimostriamo che esiste una poligonale $P(x_1, y_1) \subseteq A$. Se $x_1 = y_1$ non c'è niente da dimostrare.

Consideriamo

$$O_1 := \{x \in A : \exists P(x_1, x) \subseteq A\}.$$

Dobbiamo dimostrare che $O_1 = A$.
Dimostriamo che l'insieme O_1 è aperto, ossia per ogni $x \in O_1$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq O_1$.
Essendo $x \in O_1$, esiste $P(x_1, x)$ poligonale tale che $P(x_1, x) \subseteq A$. Essendo A aperto, esiste $r > 0$ tale che

$$B(x, r) \subseteq A.$$

Per ogni $y \in B(x, r)$ consideriamo la poligonale $Q(x_1, y) := P(x_1, x) \cup [x, y]$. Si ha

$$Q(x_1, y) := P(x_1, x) \cup [x, y] \subseteq A \cap B(x, r) \subseteq A.$$

Pertanto $B(x, r) \subseteq O_1$.
Dimostriamo ora che $O_2 := A \setminus O_1$ è un insieme aperto.
Se $A = O_1$ allora $A \setminus O_1 = \emptyset$, che è aperto.
Se $A \setminus O_1 \neq \emptyset$ allora dobbiamo dimostrare che per ogni punto $x \in A \setminus O_1$ esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A \setminus O_1$.
Sia $x \in A \setminus O_1$. Essendo A aperto, esiste $r > 0$, tale che $B(x, r) \subseteq A$.
Per ogni $z \in B(x, r)$ deve essere $z \in O_2$. Infatti se $z \in O_1$ allora esisterebbe una poligonale $P(x_1, z)$ contenuta in A e quindi

$$Q(x_1, x) := P(x_1, z) \cup [z, x] \subseteq A \cup B(x, r) \subseteq A$$

sarebbe una poligonale congiungente x_1 e x, contraddicendo $x \in A \setminus O_1$. Ciò dimostra che $B(x, r) \subseteq A \setminus O_1$, e quindi che x è un punto interno di $A \setminus O_1$.
Concludiamo ora dimostrando che $A = O_1$, che, per l'arbitrarietà di x_1 dà la tesi.
Se fosse

$$O_2 := A \setminus O_1 \neq \emptyset,$$

allora avremmo trovato due aperti, O_1 O_2 tali che

(i) $A = O_1 \cup O_2$
(ii) $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$
(iii) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

contraddicendo l'ipotesi che A è connesso, in virtù della Proposizione 1.2.2.

□

Definizione 1.2.9 (Insieme convesso). Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto.
Diciamo che A è convesso se per ogni $x, y \in A$, il segmento $[x, y]$ è contenuto in A.

Proposizione 1.2.10. *Si considerino $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Se A è convesso allora A è connesso per poligonali e connesso.*

Teorema 1.2.11.
In $\mathbb{R}$ gli insiemi connessi sono tutti e soli gli intervalli.

1.3. Insiemi chiusi e compatti

Definizione 1.3.1 (Successione convergente).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e (x_n) una successione in $\mathbb{R}^n$.
Diciamo che (x_n) è convergente a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x_0) = 0,$$

ossia:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \quad : \quad d(x_n, x_0) < \epsilon \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

Scriviamo in modo equivalente:

$$x_n \xrightarrow{d} x_0, \qquad x_n \to x_0 \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0.$$

queste ultime quando non ci sono dubbi sul fatto che si sta usando la convergenza in termini della distanza d.

Teorema 1.3.2 (Unicità del limite).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e (x_n) una successione in $\mathbb{R}^n$ convergente a x_0 e a y_0 in $\mathbb{R}^n$. Allora $x_0 = y_0$.

Proposizione 1.3.3 (Caratterizzazione dei chiusi).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sono equivalenti le seguenti:

(Ci) *A è chiuso,*

(Cii) *$\forall (x_n)$ successione in A e $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si ha:*

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in A.$$

(Ciii) *$D(A) \subseteq A$,*

Proposizione 1.3.4 (Caratterizzazione dei punti di accumulazione).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
Sono equivalenti le seguenti:

(Ai) $x_0 \in D(A)$
(Aii) *per ogni* $r > 0$ *esistono infiniti punti in* $B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\}$.
(Aiii) *esiste una successione* (x_h) *in* A, $x_h \neq x_0$ *per ogni* h *e tale che* $x_h \xrightarrow{d} x_0$.
(Aiv) *esiste una successione* (x_n) *in* A *con termini tutti distinti tra loro, tale che*

$$0 < d(x_0, x_h) < d(x_0, x_{h-1}) \qquad \forall h \geq 2$$

e tale che $x_h \xrightarrow{d} x_0$.

Proposizione 1.3.5.
Lo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, d)$ *è completo, ossia per ogni successione in* $\mathbb{R}^n$

$$(x_h) \text{ è di Cauchy} \quad \Rightarrow \quad (x_h) \text{ è convergente a } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Definizione 1.3.6 (Compatto).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che K è un compatto se da ogni ricoprimento di aperti $\{A_i\}_{i\in I}$ di K è possibile estrarre un sottoricoprimento finito, ossia esistono $A_{i_1}, \cdots, A_{i_m} \in \{A_i\}_{i\in I}$, con $m \in \mathbb{N}^*$, tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} A_{i_j}.$$

Definizione 1.3.7 (Compatto per successioni).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che K è sequenzialmente compatto (o *compatto per successioni*) se da ogni successione (x_n) di elementi di K è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K.

Diamo ora la seguente caratterizzazione di insieme compatto, che include il Teorema di Heine-Borel.

Teorema 1.3.8.
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ *lo spazio metrico euclideo e* $K \subseteq \mathbb{R}^n$. *Allora sono equivalenti:*

(a) K *è compatto*
(b) K *è sequenzialmente compatto*
(c) K *è chiuso e limitato.*

CAPITOLO 2

Esercizi su dominio e insiemi di livello

2.1. Esercizi sul dominio

[Disegno del dominio: colorare l'interno del dominio. Per la frontiera di A: linea continua se appartiene al dominio, linea tratteggiata se non vi appartiene. Se escludere un punto, crocettarlo.]

Esercizio 2.1.1 (T). Determinare il dominio della funzione $\sqrt{\dfrac{xy-1}{x^2-1}}$.

RISPOSTA:

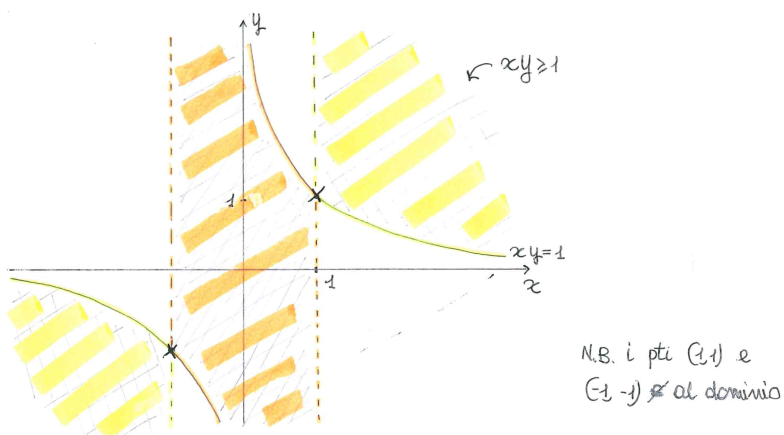


Figura 1. Dominio della funzione $\sqrt{\dfrac{xy-1}{x^2-1}}$ in esercizio 2.1.1

Esercizio 2.1.2 (T). Determinare il dominio della funzione $\sqrt{1-y^2}\log(y-x^2+2x)$.

RISPOSTA:
$Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x < y \leq 1\}$.

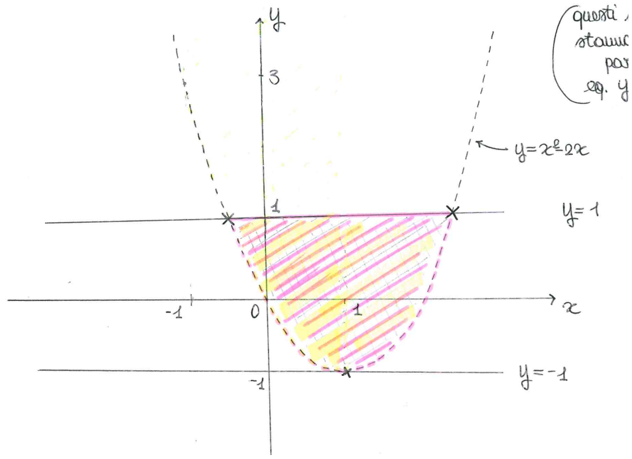


Figura 2. Dominio della funzione $\sqrt{1-y^2}\log(y-x^2+2x)$ in esercizio 2.1.2

Esercizio 2.1.3 (GC). Disegnare il dominio della funzione $\log(xy)$.

RISPOSTA:
Vedi figura 3.

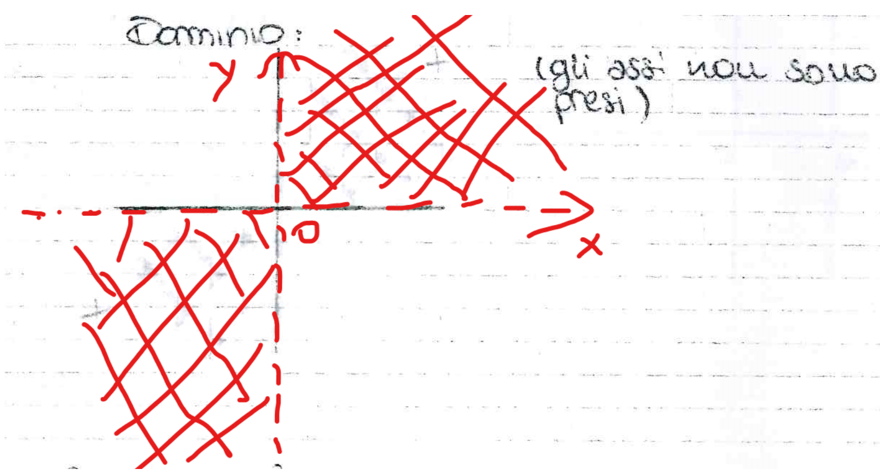


Figura 3. Dominio della funzione $\log(xy)$ in esercizio 2.1.3

Esercizio 2.1.4 (GC). Disegnare il dominio della funzione $\sqrt{\dfrac{|x|-|y|}{|x|-1}}$.

RISPOSTA:
Vedi figura 4.

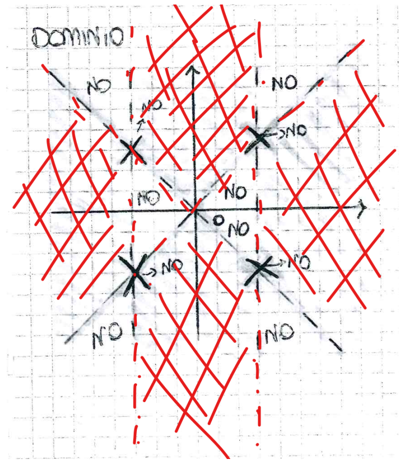


Figura 4. Dominio della funzione $\sqrt{\dfrac{|x|-|y|}{|x|-1}}$ in esercizio 2.1.4

Esercizio 2.1.5 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Descrivere analiticamente il dominio di e disegnarlo:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{1-x^2}{y^2-1}}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 5 e la sua espressione analitica è

$$\{(x,y) : |x| \leq 1, |y| > 1\} \cup \{(x,y) : |x| \geq 1, |y| < 1\}.$$

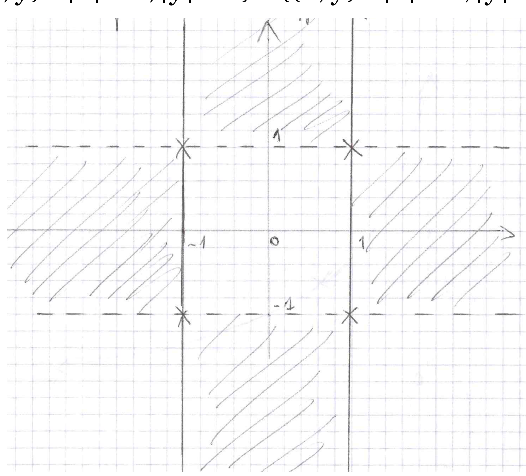


Figura 5. Dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{y^2-1}}$, v. es. 2.1.5

Esercizio 2.1.6 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Descrivere analiticamente il dominio di e disegnarlo:

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{y}}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 6 e la sua espressione analitica è

$$\{(x,y)\,:\,y>0,\,y\le|x|\}\cup\{(x,y)\,:\,y<0,\,y\le-|x|\}.$$

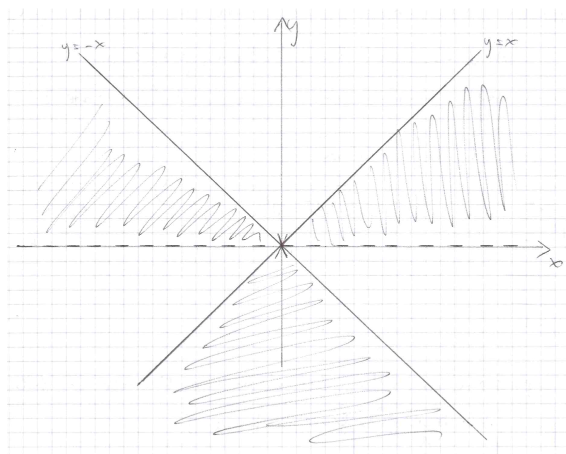


Figura 6. Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2-y^2}{y}}$, v. es. 2.1.6

Esercizio 2.1.7 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Descrivere analiticamente il dominio di e disegnarlo:

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{xy-1}{x^2-1}}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 7 e la sua espressione analitica è

$$\{(x,y)\,:\,x>1,\,y\ge\frac{1}{x}\}\cup\{(x,y)\,:\,x<-1,\,y\le\frac{1}{x}\}\cup\{(x,y)\,:\,0\le x<1,\,y\le\frac{1}{x}\}\cup\{(x,y)\,:\,-1<x<0,\,y\ge\frac{1}{x}\}.$$

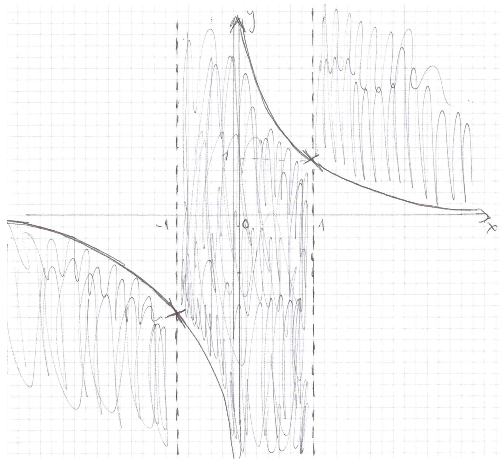


Figura 7. Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{xy-1}{x^2-1}}$, v. es. 2.1.7

Esercizio 2.1.8 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Descrivere analiticamente il dominio di e disegnarlo:

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{4-x^2}{y-1}}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 8 e la sua espressione analitica è

$$\{(x,y):|x|\le 2, y>1\}\cup\{(x,y):|x|\ge 2, y<1\}.$$

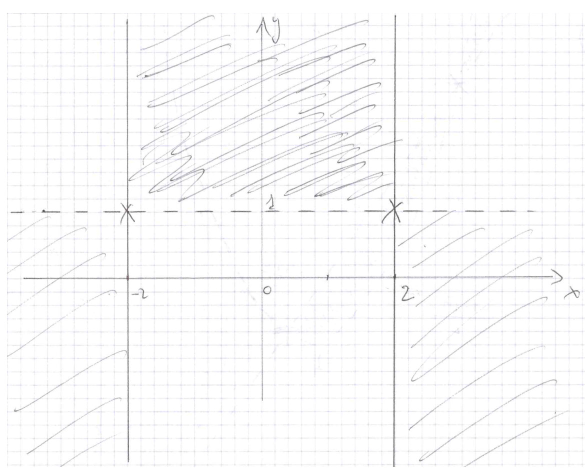


Figura 8. Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{y-1}}$, v. es. 2.1.8

Esercizio 2.1.9 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare il dominio di

$$f(x,y) = \log(x - y^2).$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x,y) : x > y^2\}$ (v. Esercizio 2.2.3 per gli insiemi di livello).

Esercizio 2.1.10 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare il dominio di

$$f(x,y) = \sqrt{1 + xy}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x,y) : xy \geq -1\}$ (v. Esercizio 2.2.4 per gli insiemi di livello).

Esercizio 2.1.11 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare il dominio di

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + xy}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x,y) : xy \neq -1\}$ (v. Esercizio 2.2.5 per gli insiemi di livello).

Esercizio 2.1.12 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare il dominio di

$$f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x,y) : x \neq 0\}$ (v. Esercizio 2.2.6 per gli insiemi di livello).

Esercizio 2.1.13 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e rappresentare graficamente il dominio A della funzione

$$f(x,y) = \log\left(\frac{y - x^2 + 1}{2 - x - y}\right).$$

Dire se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto e individuare la chiusura di A $(= \bar{A})$. Distinguere infine i punti isolati, interni, di frontiera, di accumulazione.

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 9

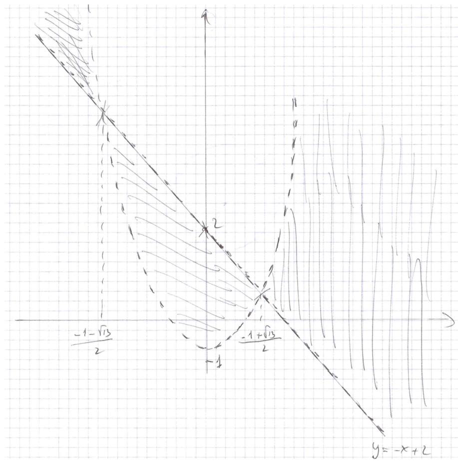


Figura 9. Dominio della funzione $f(x,y) = \log\left(\dfrac{y-x^2+1}{2-x-y}\right)$, v. es. 2.1.13

Esercizio 2.1.14 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e rappresentare graficamente il dominio A della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{1-y^2}\log(y-x^2+2x).$$

Dire se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto e individuare la chiusura di A $(=\bar{A})$. Distinguere infine i punti isolati, interni, di frontiera, di accumulazione.

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 10

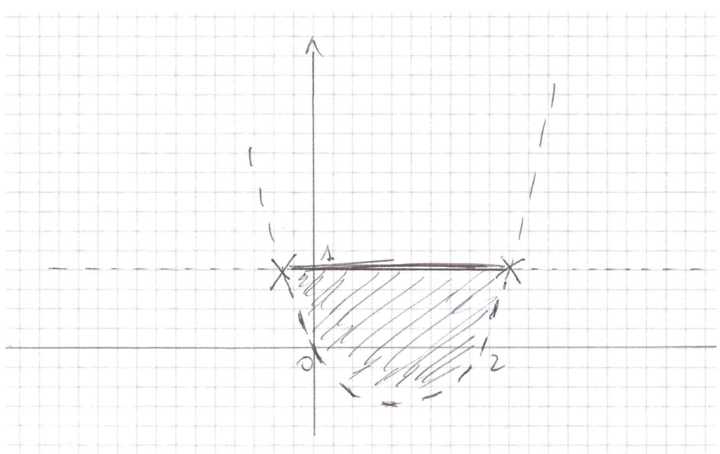


Figura 10. Dominio della funzione $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}\log(y-x^2+2x)$, v. es. 2.1.14

Esercizio 2.1.15 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e rappresentare graficamente il dominio A della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}}.$$

Dire se tale insieme è aperto, chiuso, limitato, connesso, compatto e individuare la chiusura di A $(=\bar{A})$. Distinguere infine i punti isolati, interni, di frontiera, di accumulazione.

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 11

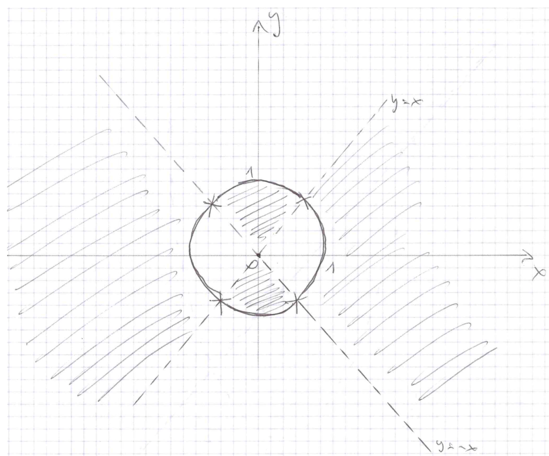


Figura 11. Dominio della funzione $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2-y^2}}$, v. es. 2.1.15

Esercizio 2.1.16 (I 10-01-2012AT).
Determinare il dominio naturale della funzione $\log_2 \dfrac{y}{x(1-y^2)}$.

Suggerimenti e risposte: Il dominio è raffigurato nella figura 12

Figura 12. Dominio della funzione $f(x,y) = \log_2 \dfrac{y}{x(1-y^2)}$, v. es. 2.1.16

2.2. Esercizi sugli insiemi di livello

Definizione 2.2.1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $c \in \mathbb{R}$. Si chiama *insieme di livello c di f* l'insieme

$$L_c(f) := \{x \in A : f(x) = c\}.$$

Esercizio 2.2.2 (GC: da file esercizi2variabili-8-3-2010). Studiare il dominio e le curve di livello di $f(x,y) = \sqrt[3]{(y-x)^2}$.

Risposta:
Linee di livello: $L_c = \emptyset$ se $c < 0$, $L_0 = \{(x,y) : y = x\}$,

$$L_c = \{(x,y) : y = x + c^{3/2}\} \cup \{(x,y) : y = x - c^{3/2}\} \quad \text{se } c > 0.$$

Esercizio 2.2.3 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare le linee di livello di

$$f(x,y) = \log(x - y^2).$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x,y) : x > y^2\}$ (v. Esercizio 2.1.9).
$L_c :\ x = -y^2 + e^c,\ c \in \mathbb{R}$, (sono parabole aventi per asse l'asse x).

Esercizio 2.2.4 (GC: da file esercizi2variabilipartel-20-3-2020). Determinare e disegnare le linee di livello di

$$f(x,y) = \sqrt{1 + xy}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x,y) : xy \geq -1\}$ (v. Esercizio 2.1.10).
$\{(x,y) : xy \geq -1\}$, $L_c = \emptyset$ se $c < 0$, $L_1 =$ asse x e asse y, se invece $c > 0$, con $c \neq 1$, allora L_c individua sul piano Oxy l'iperbole di equazione: $y = (c^2 - 1)\frac{1}{x}$. Essa ha per asintoti gli assi. Attenzione al fatto che se $c > 1$ il coefficiente è positivo e quindi i rami dell'iperbole occupano il I e il III quadrante, mentre se $0 < c < 1$ il coefficiente è negativo e quindi i rami dell'iperbole occupano il II e il IV quadrante.

Esercizio 2.2.5 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare le linee di livello di

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + xy}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x, y) : xy \neq -1\}$ (v. Esercizio 2.1.11).

$$L_0 = \emptyset, \qquad L_1 = \text{gli assi}.$$

$$L_c: \ y = (\frac{1}{c} - 1)\frac{1}{x}, \quad \text{se } c \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\},$$

Se $c \notin \{0, 1\}$, L_c è un'iperbole avente per asintoti gli assi. Attenzione al segno del coefficiente $\frac{1}{c} - 1$, che è positivo se $0 < c < 1$ e negativo per $c > 1$ oppure $c < 0$.

Esercizio 2.2.6 (GC: da file esercizi2variabili23-03-2009). Determinare e disegnare le linee di livello di

$$f(x, y) = \arctan\frac{y}{x}.$$

Suggerimenti e risposte: Il dominio è $\{(x, y) : x \neq 0\}$ (v. Esercizio 2.1.12).

$$L_c: \ y = \tan c \cdot x, \qquad \text{se } c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$$

(L_c sono rette passanti per l'origine, che hanno coefficiente angolare positivo se $c \in (0, \frac{\pi}{2})$, 0 se $c = 0$ e negativo se $c \in (-\frac{\pi}{2}.0)$.

Esercizio 2.2.7. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2(y-2)$, determinare le curve di livello di f e disegnarle su un piano cartesiano.

[Sol. es: 2.2.7: Fissato $c \in \mathbb{R}$, le curve di livello

$$\mathscr{L}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2 + \frac{c}{x^2}\}.$$

CAPITOLO 3

Limiti di funzioni in più variabili

3.1. Definizione e caratterizzazioni

Definizione 3.1.1.
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ e $(\mathbb{R}^m, d')$ spazi euclidei e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ funzione. Siano $x_0 \in D(A)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$.
Diciamo che "f tende (o converge) a $y_0 \in \mathbb{R}^m$ quando x tende a x_0" se

$$\forall V \text{ intorno di } y_0 \text{ in } (\mathbb{R}^m, d')\ \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ in } (\mathbb{R}^n, d) \ : \ f(x) \in V \ \ \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}. \tag{3.1.1}$$

In tal caso scriviamo

$$\lim_{d(x,x_0)\to 0} d'(f(x), y_0) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

Teorema 3.1.2 (Caratterizzazione di limite).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ e $(\mathbb{R}^m, d')$ spazi euclidei.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ funzione, $x_0 \in D(A)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$
(ii) $\forall V$ *aperto di* $(\mathbb{R}^m, d')$ *contenente* y_0 $\exists U$ *aperto di* $(\mathbb{R}^n, d)$ *contenente* x_0 : $f(x) \in V \ \ \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$
(iii) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ : \ d'(f(x), y_0) < \epsilon \quad \forall x \in A, 0 < d(x, x_0) < \delta$
(iv) *per ogni* (x_h) *successione in* $\mathbb{R}^n$, $x_h \neq x$ *per ogni* $h \in \mathbb{N}$, *si ha*

$$\lim_{h\to+\infty} d(x_h, x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{h\to+\infty} d'(f(x_h), y_0).$$

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo che (ii)$\Leftrightarrow$ (iii).

(ii)$\Rightarrow$ (iii) è ovvia, infatti

$$B(y_0, \epsilon_0) := \{y \in \mathbb{R}^m : d'(y, y_0) < \epsilon_0\}$$

è un insieme aperto e dato un aperto U $(\mathbb{R}^n, d)$ contenente x_0 esiste $\delta > 0$ tale che $B(x_0, \delta) \subseteq U$
Diamo ora la dimostrazione di (iii)$\Rightarrow$ (ii).

Sia V aperto di $(\mathbb{R}^m, d')$ contenente y_0. Allora esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che

$$B(y_0, \epsilon_0) := \{y \in \mathbb{R}^m \,:\, d'(y, y_0) < \epsilon_0\} \subseteq V. \tag{3.1.2}$$

Per (iii) $\exists U$ aperto di $(\mathbb{R}^n, d)$ contenente x_0 : $f(x) \in B(y_0, \epsilon_0)$ $\forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$. Quindi, per (3.1.2), $\exists U$ aperto di $(\mathbb{R}^n, d)$ contenente x_0 : $f(x) \in V$ $\forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$.

$\square$

Osservazione 3.1.3. In (iv) si usa scrivere

$$\lim_{h\to+\infty} x_h = x_0 \Rightarrow \lim_{h\to+\infty} f(x_h) = y_0$$

dando per sottinteso che la convergenza è nella metrica dello spazio ambiente.

3.2. Esistenza e non esistenza del limite

Come nelle funzioni di una variabile reale, esiste un legame tra il limite di una funzione e il limite di sue restrizioni.

Proposizione 3.2.1.
Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ funzione.
Siano $x_0 \in D(B)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$.
Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f|_B(x) = y_0,$$

dove ricordiamo che $f|_B$ denota la funzione f ristretta al dominio B.

Osservazione 3.2.2. La Proposizione 3.2.1 è utile per stabilire risultati di non esistenza di limite.
Infatti, siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ funzione. Siano $B, C \subseteq A$. Dalla Proposizione 3.2.1 deduciamo:

(1) $(x_0 \in D(B),\ \nexists \lim_{x\to x_0} f|_B(x)) \ \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$
(2) $(x_0 \in D(B) \cap D(C),\ \lim_{x\to x_0} f|_B(x) \neq \lim_{x\to x_0} f|_C(x)) \ \Rightarrow\ \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Esempio 3.2.3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Sia $B = \{(x,0) \,:\, x \neq 0\}$ e $C = \{(0,y) \,:\, y \neq 0\}$. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_B(x,y) = \lim_{x\to 0} f|_B(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_C(x,y) = \lim_{y\to 0} f|_C(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1,$$

dunque

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Teorema 3.2.4.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Sia* $A = B \cup C$ *e* $x_0 \in D(B) \cap D(C)$. *Se esiste* $\ell \in \mathbb{R}^m$ *tale che*

(a) $\exists \lim_{x\to x_0} f|_B(x) = \ell$

(b) $\exists \lim_{x\to x_0} f|_C(x) = \ell$

allora $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE. Per (a):

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_1(\epsilon) > 0\ :\ |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in B \cap B(x_0, \delta_1(\epsilon)) \setminus \{x_0\}.$$

Per (b):

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_2(\epsilon) > 0\ :\ |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in C \cap B(x_0, \delta_2(\epsilon)) \setminus \{x_0\}.$$

Posto $\delta(\epsilon) := \min\{\delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$ si hanno

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in B \cap B(x_0, \delta(\epsilon)) \setminus \{x_0\}$$

e

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in C \cap B(x_0, \delta(\epsilon)) \setminus \{x_0\}.$$

Pertanto

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in (B \cup C) \cap B(x_0, \delta(\epsilon)) \setminus \{x_0\}$$

e quindi

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A \cap B(x_0, \delta(\epsilon)) \setminus \{x_0\}.$$

Riassumendo: per ogni $\epsilon > 0$ abbiamo trovato $\delta(\epsilon) > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in A \cap B(x_0, \delta(\epsilon)) \setminus \{x_0\}$$

che è la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. □

Osservazione 3.2.5.
Tale teorema può essere facilmente generalizzato al caso di $A = \cup_{i=1}^h A_i$, con $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 3$. E' cruciale il fatto che la decomposizione $A = \cup_{i=1}^h A_i$ sia finita. Il risultato è infatti falso se A è unione numerabile, o più che numerabile, di sottoinsiemi A_i. Si veda l'Esempio 3.2.6.

Esercizio 3.2.6.
Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

[Sol: $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$. Restringendoci all'asse y si ha:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0.$$

Allora, per la Proposizione 3.2.1, se esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ esso è zero.
Proviamo a restringerci ad altre rette passanti per l'origine, non verticali. Sia $m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0 & \text{se } m = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{m^2} = 0 & \text{se } m \neq 0. \end{cases}$$

Dunque, se ci restringiamo alle rette passanti per l'origine, limite esiste ed è zero. Ciò non è sufficiente per concludere che esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ e che esso è zero.
Infatti, sia

$$P := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : y = x^2\}.$$

Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_P(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pertanto, per l'Osservazione 3.2.2 non esiste il limite.]

Notazione.
$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Lemma 3.2.7. *Siano* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *e* $r > 0$. *Allora*

$$B(x_0,r) \setminus \{x_0\} = \{x_0 + \rho\xi : \rho \in]0,r[,\ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in B(x_0,r) \setminus \{x_0\}$. Sia $\xi := \frac{x-x_0}{|x-x_0|}$. Allora $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ e

$$x = x_0 + \rho\xi \quad \text{con } \rho := |x-x_0|.$$

Si noti che $0 < \rho < r$.
Dunque

$$B(x_0,r) \setminus \{x_0\} \subseteq \{x_0 + \rho\xi : \rho \in]0,r[,\ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Ovviamente

$$B(x_0,r) \setminus \{x_0\} \supseteq \{x_0 + \rho\xi : \rho \in]0,r[,\ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

da cui

$$B(x_0,r) \setminus \{x_0\} = \{x_0 + \rho\xi : \rho \in]0,r[,\ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

$\square$

Teorema 3.2.8.
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$\exists r_0 > 0 : B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\} \subseteq A.$$

Sia $\ell \in \mathbb{R}^m$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

(ii) $\lim_{\rho \to 0^+} \sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x_0 + \rho\xi) - \ell| = 0$

(iii) $\exists r \in]0, r_0]$, $\exists \varphi :]0, r[\to [0, \infty[$, *tale che*

  (1) $|f(x_0 + \rho\xi) - \ell| \leq \varphi(\rho) \quad \forall \rho \in]0, r[, \ \forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$

  (2) $\lim_{\rho \to 0^+} \varphi(\rho) = 0$

(iv) $\exists r \in]0, r_0]$, $\exists \varphi :]0, r[\to [0, \infty[$, *tale che*

  (1') $|f(x) - \ell| \leq \varphi(|x - x_0|) \quad \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$

  (2') $\lim_{\rho \to 0^+} \varphi(\rho) = 0.$

DIMOSTRAZIONE.
x_0 è un punto interno di A. Esiste quindi $r_0 > 0$ tale che $B(x_0, r_0) \subseteq A$. Usando anche questa informazione dimostriamo le implicazioni.

(i) $\Rightarrow$ (ii)
Per (i)

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta \in]0, r_0] : |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}.$$

Per il Lemma 3.2.7

$$B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} = \{x_0 + \rho\xi : \rho \in]0, \delta[, \ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

quindi si ha

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta \in]0, r_0] : |f(x_0 + \rho\xi) - \ell| < \epsilon \quad \forall \rho \in]0, \delta[, \ \forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Passando al sup su ξ si ha:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta \in]0, r_0] : \sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x_0 + \rho\xi) - \ell| \leq \epsilon \quad \forall \rho \in]0, \delta[.$$

La (ii) è dimostrata.

(ii) ⇒ (iii)
Per (ii)

$$\forall \epsilon > 0\ \exists r(\epsilon) \in]0, r_0]\ :\ \sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x_0 + \rho\xi) - \ell| < \epsilon \quad \forall \rho \in]0, r(\epsilon)[.$$

Definiamo $\varphi :]0, r[\to [0, \infty[$,

$$\varphi(\rho) := \sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x_0 + \rho\xi) - \ell|.$$

L'affermazione sopra è esattamente il significato di (2).
Scegliamo $\epsilon = 1$ e denotiamo r il valore $r(1)$. Si ha

$$\exists r \in]0, r_0[:\ \sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x_0 + \rho\xi) - \ell| < 1 \quad \forall \rho \in]0, r[.$$

(iii) ⇒ (iv)
Sia $x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$. Sia $\xi := \frac{x - x_0}{|x - x_0|}$. Allora $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ e

$$x = x_0 + \rho\xi \quad \text{con } \rho := |x - x_0|.$$

Si noti che $0 < \rho < r$. Dunque per (1)

$$|f(x) - \ell| = |f(x_0 + |x - x_0|\xi) - \ell| \le \varphi(|x - x_0|).$$

Ciò prova (1'). La (2') coincide con (2) essendo φ la stessa funzione.

(iv) ⇒ (i)
Ricordando che φ è non negativa, dalla definizione di limite, la (2') significa:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta \in]0, r[\ :\ \varphi(\rho) < \epsilon \quad \forall \rho \in]0, \delta[.$$

Da (1') deduciamo

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta \in]0, r[\ :\ |f(x) - \ell| < \epsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\},$$

che è esattamente quanto affermato in (i). □

Attenzione: per $n = 2$, anziché usare la notazione vettoriale, è spesso utile indicare i punti di $\mathbb{R}^2$ con (x, y), dove quindi x è un numero reale e non più un elemento di $\mathbb{R}^2$.
Come conseguenza del Teorema 3.2.8, per il caso $n = 2$ e usando le coordinate polari si ha il seguente risultato.

Corollario 3.2.9 (caso $n = 2$).
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *tale che*

$$\exists r_0 > 0 : B((x_0, y_0), r_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \subseteq A.$$

Sia $\ell \in \mathbb{R}^m$.

Sono equivalenti le seguenti:

(a) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

(b) $\exists r > 0, \exists \varphi :]0, r[\to [0, \infty[$, *tale che*

(1) $|f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - \ell| \le \varphi(\rho) \quad \forall \rho \in]0, r[, \forall \theta \in [0, 2\pi]$

(2) $\lim_{\rho\to 0^+} \varphi(\rho) = 0$

Esercizio 3.2.10. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}.$$

Sol.: Si ponga $f(x,y) = \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se esiste il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$, esso è 0 (ad es. restingersi all'asse x). D'altra parte, per ogni $\rho > 0$

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - 0| = \left| \frac{\rho^4 \cos(\theta)\sin(\theta)^3}{\rho^2} \right| \le \rho^2 \qquad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Per il Corollario 3.2.9, risulta

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Vista l'importanza che ha nel calcolo dei limiti l'espressione $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ che, quando si usano le coordinate polari centrate in (x_0, y_0), denota la distanza ρ del punto (x,y) da (x_0, y_0) è spesso utile il seguente lemma.

Lemma 3.2.11.
Per ogni $\alpha > 0$ *esistono* $c_1(\alpha), c_2(\alpha) > 0$ *tali che*

$$c_1(\alpha)(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} \le |x|^\alpha + |y|^\alpha \le c_2(\alpha)(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Se $x = 0$ e $y = 0$ non c'è niente da dimostrare.
Se $x = 0$ e $y \ne 0$ allora

$$\frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{|y|^\alpha}{|y|^\alpha} = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo ora $x \ne 0$ e dimostriamo che esistono $c_1 \in]0,1]$ e $c_2 \in [1, +\infty[$ tali che

$$c_1 \le \frac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \le c_2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Se riusciamo a fare questo, abbiamo concluso.

Si ha
$$\frac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1+(\frac{|y|}{|x|})^\alpha}{(1+(\frac{y}{x})^2)^{\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1+(\frac{|y|}{|x|})^\alpha}{(1+(\frac{|y|}{|x|})^2)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$
Col cambio di variabile $t:=\frac{|y|}{|x|}$, posto $g:[0,\infty[\to]0,\infty[$, $g(t)=\dfrac{1+t^\alpha}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$, si ha
$$\frac{(|x|+|y|)^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}=g\left(\frac{|y|}{|x|}\right).$$
Dobbiamo quindi dimostrare che esistono $c_1\in]0,1]$ e $c_2\in[1,+\infty[$ tali che
$$c_1\le g(t)\le c_2 \qquad \forall t\in[0,\infty[.$$
Ora diamo due modi di procedere.
I modo:
Dato che g è continua in $[0,\infty[$,
$$g(0)=\lim_{t\to 0}g(t)=1,\qquad \lim_{t\to+\infty}g(t)=1$$
devono esistere δ, K positivi, $\delta<K$, tali che
$$g(t)\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\quad \forall t\in]0,\delta],\qquad g(t)\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\quad \forall t\in[K,\infty[.$$
Inoltre, la funzione continua $g|_{[\delta,K]}:[\delta,K]\to]0,\infty[$ è continua e per il Teorema di Weierstrass, esistono $m:=\min g|_{[\delta,K]}$ e $M:=\max g|_{[\delta,K]}$. Ovviamente m e M sono positivi, in quanto g non si annulla. Deduciamo che
$$c_1:=\min\{\frac{1}{2},m\}\le g(t)\le\max\{\frac{3}{2},M\}=:c_2\qquad\forall t\in[0,\infty[.$$
Abbiamo allora dimostrato che
$$c_1:=\min\{\frac{1}{2},m\}\le\frac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\le\max\{\frac{3}{2},M\}=:c_2\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq 0.$$
Abbiamo così dimostrato che
$$c_1\le\frac{|x|^\alpha+|y|^\alpha}{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\le c_2\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

II modo:
Si consideri $g:]0,\infty[\to]0,\infty[$, $g(t)=\frac{1+t^\alpha}{(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$. Se ne studi la monotonia, mediante lo studio $g'(t)\ge 0$. Dedurne che esistono $c_1,c_2>0$ tali che
$$c_1:=\inf_{]0,\infty[}g\le g(t)\le\sup_{]0,\infty[}g=:c_2\qquad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Si ha

$$g'(t) = \frac{\alpha t(1+t^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{(1+t^2)^\alpha}(t^{\alpha-2}-1) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t \geq 1 & \text{se } \alpha \geq 2 \\ t \leq 1 & \text{se } \alpha < 2. \end{array} \right.$$

Allora

$$c_1 := \min g = g(1) = \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-1}}, \qquad c_2 := \max g = g(0) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 1 \qquad \text{se } \alpha \geq 2$$

e

$$c_1 := \min g = g(0) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 1, \qquad c_2 := \max g = g(1) = 2^{1-\frac{\alpha}{2}}, \qquad \text{se } \alpha < 2.$$

$\square$

3.3. Funzioni continue

Definizione 3.3.1.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$.
Si dice che f è *continua in* x_0 se

$$\forall V \text{ intorno di } f(x_0) \text{ in } \mathbb{R}^m \; \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ in } \mathbb{R}^n \; : \; f(x) \in V \;\; \forall x \in U \cap A. \tag{3.3.1}$$

Si dice che f è continua se f è continua in ogni punto di A.

Teorema 3.3.2 (Caratterizzazione della continuità in un punto).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) *f è continua in x_0*
(ii) *$\forall V$ aperto di $\mathbb{R}^m$ contenente $f(x_0)$ $\exists U$ aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente x_0 : $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap A$*
(iii) $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; \|f(x) - f(x_0)\|_{\mathbb{R}^m} < \epsilon \quad \forall x \in A, \; \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta.$

Teorema 3.3.3 (Caratterizzazione topologica della continuità).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) *f è continua*
(ii) *$\forall V$ aperto di $\mathbb{R}^m$ $f^{-1}(V)$ è un aperto in A.*

Come immediata conseguenza della Definizione 3.3.1 si ha un'altra caratterizzazione che mette in evidenza il legame tra la nozione topologica di continuità con quella di limite.

Teorema 3.3.4.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $x_0 \in A$. $f : A \to \mathbb{R}^m$ *è continua in* x_0 *se e solo se vale una delle due:*

- $x_0 \notin D(A)$
- $x_0 \in D(A)$ *e* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definizione 3.3.5.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$.
Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ si dice *sequenzialmente continua in* x_0 se per ogni successione $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ in X

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} d'(f(x_k), f(x_0)) = 0.$$

Teorema 3.3.6.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $x_0 \in A$. *Sia* $f : A \to \mathbb{R}^m$.
Sono equivalenti le seguenti:

(i) f *è continua in* x_0
(ii) f *è sequenzialmente continua in* x_0.

Corollario 3.3.7.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.
Siano f, g *continue in* $x_0 \in A$. *Allora la funzione* $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ *è continua in* x_0.

3.3.1. Teorema di Bolzano.

Teorema 3.3.8 (Teorema di Bolzano).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ *continua.*
Allora

$$A \text{ connesso in } \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad f(A) \text{ connesso in } \mathbb{R}^m.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $f(A)$ non sia connesso. Allora esistono due aperti non vuoti O_1 e O_2 in $\mathbb{R}^m$ tali che

(a) $f(A) \subseteq O_1 \cup O_2$
(b) $f(A) \cap O_1 \neq \emptyset$, $f(A) \cap O_2 \neq \emptyset$
(c) $f(A) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

f è continua, quindi per il Teorema 3.3.3 esistono U_1 e U_2 aperti in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$A \cap U_i = f^{-1}(O_i) = f^{-1}(f(A) \cap O_i) \overset{(b)}{\neq} \emptyset \qquad i = 1,2. \tag{3.3.2}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} A \cap U_1 \cap U_2 = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) &\overset{(3.3.2)}{=} f^{-1}(f(A) \cap O_1) \cap f^{-1}(f(A) \cap O_2) \\ &= f^{-1}(f(A) \cap O_1 \cap O_2) \overset{(c)}{=} \emptyset \end{aligned}$$

e da (3.3.2)

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(f(A)) \overset{(a)}{=} f^{-1}(f(A) \cap (O_1 \cup O_2)) = f^{-1}((f(A) \cap O_1) \cup (f(A) \cap O_2)) \\ &= f^{-1}(f(A) \cap O_1) \cup f^{-1}(f(A) \cap O_2) \overset{(3.3.2)}{=} (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \\ &= A \cap (U_1 \cup U_2), \end{aligned}$$

che implica $A \subseteq U_1 \cup U_2$.
Avremmo così trovato due aperti U_1 e U_2 che svolgono il ruolo di O_1 e O_2 nella Definizione 1.2.1, contro l'ipotesi di connessione di A. □

Corollario 3.3.9 (Teorema di Bolzano per funzioni a valori reali).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ *spazio metrico euclideo,* $A \subseteq \mathbb{R}^n$. *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *continua.*
Allora

$$A \text{ connesso in } \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad f(A) \text{ intervallo.}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dal Teorema 3.3.8 e dal Teorema 1.2.11. □

3.3.2. Teorema di Weierstrass.

Definizione 3.3.10.
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ e $(\mathbb{R}^m, d')$ spazi euclidei e $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ si dice *limitata* se $f(A)$ è un insieme limitato, ossia (v. Definizione 1.1.3)

$$\exists M > 0 \ : \ |f(x)| < M \qquad \forall x \in A.$$

Definizione 3.3.11.
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ spazio euclideo, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Si dice che f ha *massimo* se esiste il massimo dell'immagine di f, ossia se esiste

$$\max_A f = \max f(A) := \max\{f(x) : x \in A\}.$$

In tal caso il valore $\max_A f$ si chiama massimo (o valore di massimo) di f. Un punto $x_0 \in A$ tale che $f(x_0) = \max_A f$ si chiama *punto di massimo assoluto.*
Analogamente si possono dare le definizioni di minimo e di punto di minimo.

Teorema 3.3.12 (Teorema di Weierstrass).
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ *e* $(\mathbb{R}^m, d')$ *spazi metrici euclidei,* $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : K \to \mathbb{R}^m$ *continua.*
Allora

$$K \text{ compatto in } \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad f(K) \text{ compatto in } \mathbb{R}^m.$$

Corollario 3.3.13.
Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ *spazio metrico euclideo,* $K \subseteq X$ *e* $f : X \to \mathbb{R}$.
Se $K \subseteq X$ *è compatto e* f *è continua, allora* f *è limitata e* f *ha massimo e minimo.*

DIMOSTRAZIONE.
Dimostriamo solo che f è superiormente limitata e che f ha massimo. Che sia f inferiormente limitata e che f abbia minimo segue ragionano in modo analogo.
Per il Teorema 3.3.12 $f(K)$ è un compatto di $\mathbb{R}$. Per il Teorema di Heine-Borel (v. AM1B o Teorema 1.3.8) i compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati. In particolare, essendo $f(K)$ limitato, si ha $\sup_K f \in \mathbb{R}$.
Sia (y_k) una successione in $f(K)$ convergente a $\sup_K f$. Si noti che una tale successione esiste sempre, dato che una caratterizzazione di $\sup_K f \in \mathbb{R}$ è:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists y_k \in f(K) \ : \ \sup_K f - \frac{1}{n} < y_k \leq \sup_K f.$$

Essendo $f(K)$ chiuso, per la Proposizione 1.3.3 (Cii) deve essere $\sup_K f \in f(K)$. Ciò significa che esiste $\max_K f$. □

3.4. Legame tra limiti di funzioni vettoriali e limiti delle sue componenti

Lemma 3.4.1.
Sia $u = (u_1, \cdots, u_m)$ *vettore di* $\mathbb{R}^m$. *Allora*

$$\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |u_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2} = \|u\| \leq \sum_{j=1}^{m} |u_j|. \tag{3.4.1}$$

DIMOSTRAZIONE. L'ultima disuguaglianza è ovvia.
Per dimostrare la prima si osservi che per ogni $i \in \{1, \cdots, m\}$

$$|u_i| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} u_j^2}.$$

Sommando su i, con $i \in \{1, \cdots, m\}$, si ha la disuguaglianza cercata.

□

Proposizione 3.4.2.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ e sia $\bar{x} \in D(A)$.
Sia $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$. Allora sono equivalenti le seguenti:

(a) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$
(b) *per ogni $j \in \{1, \cdots, m\}$ si ha $\lim_{x \to \bar{x}} f_j(x) = \ell_j$.*

DIMOSTRAZIONE.
Iniziamo con l'osservare che dal Lemma 3.4.1 segue che, per ogni $r > 0$,

$$\begin{aligned} \{(y_1, \cdots, y_m) \subseteq \mathbb{R}^m : |y_j - \ell_j| < r \ \forall j \in \{1, \cdots, m\}\} \subseteq B(\ell, mr) \\ \subseteq \{(y_1, \cdots, y_m) \subseteq \mathbb{R}^m : |y_j - \ell_j| < m^2 r \ \forall j \in \{1, \cdots, m\}\}. \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

La prima inclusione segue dalla seconda disuguaglianza in (3.4.1) e la seconda inclusione viene dalla prima disuguaglianza in (3.4.1).
(a) ⇒ (b):
Per ipotesi, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$|f(x) - \ell| < \epsilon \qquad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\},$$

ossia

$$f(x) \in B(\ell, \epsilon) \qquad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}$$

Dalla seconda inclusione in (3.4.2) si ha $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che per ogni $j \in \{1, \cdots, m\}$

$$|f_j(x) - \ell_j| < m\epsilon \qquad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}.$$

Abbiamo quindi dimostrato (b).
(b) ⇒ (a):
Per ogni $j \in \{1, \cdots, m\}$, $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_j > 0$ tale che

$$|f_j(x) - \ell_j| < \epsilon \qquad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta_j) \setminus \{\bar{x}\}.$$

Fissiamo $\epsilon > 0$ e poniamo $\delta := \min\{\delta_j : j \in \{1, \cdots, m\}\}$. Allora per ogni $j \in \{1, \cdots, m\}$

$$|f_j(x) - \ell_j| < \epsilon \qquad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}.$$

Dalla prima inclusione in (3.4.2) si ha

$$\|f(x) - \ell\| < m\epsilon \qquad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}.$$

Abbiamo così dimostrato (a). $\square$

Con dimostrazioni analoghe a quelle per funzioni di una variabile reale a valori reali è facile dimostrare i seguenti risultati.

Teorema 3.4.3 (Teorema di limite di funzione composta).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $g : B \to \mathbb{R}^p$ *con* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(A) \subseteq B$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$. *Sia* $x_0 \in D(A)$.
Supponiamo

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}^m$
(2) $\exists U$ *intorno di* x_0 *in* $\mathbb{R}^n$ $:$ $f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$

(3) $\lim_{y \to y_0} g(y) = z_0 \in \mathbb{R}^p$.

Allora

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = z_0.$$

Teorema 3.4.4 (Limite di una somma).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Siano $x_0 \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^m$, *tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \mu.$$

Allora la funzione $f + g : A \to \mathbb{R}^m$ *è tale che*

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lambda + \mu.$$

Corollario 3.4.5.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $m \geq 1$.
Siano f, g *continue in* $x_0 \in A$. *Allora la funzione* $f + g : A \to \mathbb{R}^m$ *è continua in* x_0.

3.5. Limiti di funzioni a valori reali: altre proprietà

Definizione 3.5.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in D(A)$. La scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

significa:

$$\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in A,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta(M).$$

Analogamente:

Definizione 3.5.2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in D(A)$. La scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

significa:

$$\forall M < 0 \exists \delta(M) > 0 : f(x) < M \quad \forall x \in A,\ 0 < \|x - x_0\| < \delta(M).$$

Teorema 3.5.3 (Limite di un prodotto).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.
Siano $x_0 \in D(A)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \mu.$$

Allora la funzione $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ è tale che

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lambda\mu.$$

Teorema 3.5.4 (Teorema del confronto: il caso della divergenza).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in D(A)$ ed esiste U intorno di x_0 tale che

$$f(x) \le g(x) \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$$

allora valgono le seguenti implicazioni:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Teorema 3.5.5 (Teorema dei carabinieri).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. *Se* $x_0 \in D(A)$ *ed esiste* U *intorno di* x_0 *tale che*

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \qquad \forall x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$$

e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda.$$

Teorema 3.5.6.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. *Se* $x_0 \in D(A)$ *e* $f(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in A$, *allora valgono le seguenti implicazioni*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Teorema 3.5.7.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. *Se* $x_0 \in D(A)$ *e se esiste un intorno* U *di* x_0 *tale che* $f(x) > 0$ *(alt.:* $f(x) < 0$*) per ogni* $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$ *allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ (alt.: } -\infty\text{)}.$$

3.6. Esercizi

Esercizio 3.6.1 (GC: da file esercivi2variablipartel-8-3-2010). Calcolare, se esiste, il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ delle seguenti funzioni:

1) $x \sin \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$; 2) $\log\left(x^2|y|\right)$; 3) $\log\left(\dfrac{x^2|y|}{|y|+1}\right)$; 4) $\log\left(\dfrac{x^2}{|y|+x^2}\right)$;

5) $e^{\frac{x^2}{y^2}}$; 6) $\sin\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; 7) $\dfrac{\log\left(1+x^2+y^4\right)}{x^2+y^4}$; 8) $\dfrac{x^2 y}{|y|+|x|}$;

9) $\dfrac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 10) $\dfrac{x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2}$; 11) $e^{xy \log y}$; 12) $\arctan \dfrac{1}{xy}$;

13) $\arctan \dfrac{1}{|xy|}$; 14) $\dfrac{x}{y^2+|x|}$; 15) $\dfrac{x^2}{y^2+\frac{1}{2}|x|}$; 16) $e^{\frac{1}{xy+(xy)^2}}$;

17) $\dfrac{\sin(x^2 y^2)}{x^2+y^4}$.

SUGGERIMENTI per l'esercizio 3.6.1.

[Sugg.: 1) funzione limitata per infinitesima; 2) porre $t = x^2|y|$, 3) $0 \leq \frac{x^2|y|}{|y|+1} \leq x^2$; 4) restringersi alle parabole $y = mx^2$; 5) restringersi alle rette $y = mx$; 6) $0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|$; 7) porre $t = x^2 + y^4$; 8) $0 \leq \frac{|x^2 y|}{|y|+|x|} \leq x^2$, 9) restringersi alle rette $y = mx$; 10) passare in coordinate polari; 11) $y \log y \to 0$ per limite notevole; 12) restringersi alle rette $y = x$ e $y = -x$; 13) $\frac{1}{|xy|} \to +\infty$; 14) restringersi all'asse x e fare limiti per $x \to 0^+$ e per $x \to 0^-$; 15) $0 \leq \frac{x^2}{y^2+|x|/2} \leq 2|x|$; 16) restringersi alle rette $y = x$ e $y = -x$; 17) Usando il limite notevole $\sin t/t \to 1$ per $t \to 0$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}.$$

Osservare poi che

$$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2}{x^2+y^4}y^2 \leq y^2.]$$

RISPOSTE per l'esercizio 3.6.1:

1) [0]; 2) [$-\infty$]; 3) [$-\infty$]; 4) [$\nexists$]; 5) [$\nexists$]; 6) [0]; 7) [1]; 8) [0]; 9) [$\nexists$]; 10) [0]; 11) [1]; 12) [$\nexists$]; 13) [$\frac{\pi}{2}$]; 14) [$\nexists$]; 15) [0]; 16) [$\nexists$]; 17) [0].]

Esercizio 3.6.2.

Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.

[Sol: $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Si ha:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

dunque se esiste il limite esso deve essere 0. Si ha

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |x| \leq 1 \cdot |x| = |x|.$$

Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Allora per il Teorema dei carabinieri, sarà

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = 0.$$

Conclusione:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.]$$

Esercizio 3.6.3.
Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^4+y^4}$.

[Sol: $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{x^5}{x^4+y^4}$. Si ha:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

dunque se esiste il limite esso deve essere 0. Si ha, per il Lemma 3.2.11, che esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1 = c_1(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 \le \cos^4\theta + \sin^4\theta \le c_2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 = c_2.$$

Quindi

$$0 \le \left| f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - 0 \right| = \left| \frac{\rho^5\cos^5\theta}{\rho^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \right| = \rho \frac{|\cos^5\theta|}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \le \rho \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \le \frac{1}{c_1}\rho.$$

È dunque soddisfatta la (b) del Corollario 3.2.9.]

Esercizio 3.6.4.
Dire se la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^4)^2 \log(x^2+y^4) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

è continua.

[Sol.: La funzione h è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Infatti: $h|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}} = g \circ f$, con

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x^2 + y^4,$$

e

$$g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(t) = t^2 \log t.$$

Essendo f e g funzioni continue, allora $h|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ è continua in quanto composizione di funzioni continue.

Studiamo ora la continuità di h in $(0,0)$.
Definiamo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x^2 + y^4,$$

e

$$g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} t^2 \log t & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Abbiamo che $h = g \circ f$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^4 = 0, \qquad \lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} t^2 \log t = 0.$$

Per il Teorema 3.4.3 si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (g\circ f)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(f(x,y)) = \lim_{t\to 0} g(t) = 0.$$

Essendo $h(0,0) = 0$, la funzione h risulta continua in $(0,0)$.]

Esercizio 3.6.5.
Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{|x|+y^2}$.

[Sol: $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \frac{\log(1+xy)}{|x|+y^2}$.
Restringiamoci all'asse x:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\log 1}{|x|} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Dunque se esiste il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$, esso deve essere 0.
Restringiamoci all'asse y:

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\log 1}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Osserviamo che

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = B \cup C \cup D,$$

dove $B = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$, $C = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$.
Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_D(x,y)$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{|x|+y^2} &= \lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{xy}\frac{xy}{|x|+y^2} \\ &= \lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{xy} \lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+y^2}.\end{aligned}$$

Per il Teorema 3.4.3 risulta facilmente

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1.$$

Per il Teorema dei carabinieri:

$$0 \le \left| \frac{xy}{|x|+y^2} - 0 \right| = \frac{|x|}{|x|+y^2} \cdot |y| \le 1 \cdot |y| = |y|.$$

Dato che

$$\lim_{D\ni(x,y)\to(0,0)} |y| = \lim_{y\to 0} |y| = 0$$

segue dal Teorema dei carabinieri che

$$\lim_{D \ni (x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x| + y^2} = 0.$$

Concludiamo così che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_D(x,y) = 0$.
Possiamo concludere, per il Teorema 3.2.5, si veda anche l'Osservazione 3.2.5, che

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+xy)}{|x| + y^2} = 0.$$

Esercizio 3.6.6 (FLOP, 3.2.3).
Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha + |y|^\beta}{|x|^\gamma + |y|^\delta}$ al variare di $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$.

[Sol:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > \gamma \text{ e } \beta > \delta\ , \\ 1 & \text{se } \alpha = \gamma \text{ e } \beta = \delta \\ +\infty & \text{se } \alpha < \gamma \text{ e } \beta < \delta \end{cases}$$

In tutti gli altri casi non esiste il limite.]

Esercizio 3.6.7 (I 10-01-2012AT).
Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log_2 \frac{y}{x(1-y^2)}$.

[Sol: Per il dominio, vedi l'Esercizio 2.1.16. Non esiste il limite. Per dimostrarlo: restringersi alle rette $y = mx$.]

Esercizio 3.6.8 (MS, 3.34).
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ stabilire io dominio naturale della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e determinare per quali α la f è continua in $(0,0)$.

[Sol: Per ogni $\alpha > 1$.]

Esercizio 3.6.9. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + |y|}.$$

Sol.: Si ponga $f(x,y) = \dfrac{x3+y^2}{x^2+|y|}$. Il suo dominio è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Se esiste il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$, esso è 0 (ad es. restingersi all'asse x).
Si ha

$$\left|\frac{x^3}{x^2+|y|}\right| \leq |x|\frac{x^2}{x^2+|y|} \leq |x|,$$

allora, per il Teorema dei carabinieri,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+|y|} = 0.$$

Analogamente:

$$\left|\frac{y^2}{x^2+|y|}\right| \leq |y|\frac{|y|}{x^2+|y|} \leq |y|,$$

allora, per il Teorema dei carabinieri,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+|y|} = 0.$$

Risulta quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+|y|} + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+|y|} = 0.$$

Esercizio 3.6.10 (FLOP, 3.2.a1). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}.$$

Risposta: il limite non esiste.

Esercizio 3.6.11 (FLOP, 3.2.a2). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Risposta: il limite è 0.

Esercizio 3.6.12 (FLOP, 3.2.a3). Dimostrare che

$$x^2 - xy + y^2 > 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

e calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-xy+y^2}.$$

Suggerimento: $(x \pm y)^2 \geq 0$.
Risposta: il limite non esiste.

Esercizio 3.6.13 (FLOP, 3.2.a4). Dimostrare che

$$x^2 + xy + y^2 > 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

e calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

Suggerimento: $(x \pm y)^2 \geq 0$.
Risposta: il limite non esiste.

Esercizio 3.6.14 (FLOP, 3.2.a5). Dimostrare che

$$2x^2 - 2xy + y^2 > 0 \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

e calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2 - 3x^3}{2x^2 - 2xy + y^2}.$$

Suggerimento per il dominio: $2x^2 = x^2 + x^2$.
Suggerimento per il limite: usare le coordinate polari.
Risposta: il limite è 0.

Esercizio 3.6.15 (FLOP, 3.2.a6). Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}.$$

Risposta: il limite non esiste.

Esercizio 3.6.16 (FLOP, 3.2.b). Sia $f : B_\alpha \to \mathbb{R}$, dove

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|^\alpha\}$$

e

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}.$$

Dimostrare che se $\alpha > 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

Sugg.: Dimostrare dapprima che

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{x^2 + y^2}{2} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

da cui

$$\left| \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq 2 \frac{|x||y|}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 3.6.17 (FLOP, 3.2.b). Sia $f : B_\alpha \to \mathbb{R}$, dove

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|^\alpha\}$$

e

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}.$$

Dimostrare che se $0 < \alpha \leq 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

Sugg.: Disegnare B_α e accertarsi che è possibile restringersi a rette per $(0,0)$, quindi concludere.

Esercizio 3.6.18 (FLOP, 3.2.b). Sia $f : B_\alpha \to \mathbb{R}$, dove

$$B_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|^\alpha\}$$

e

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2}.$$

Dimostrare che se $0 < \alpha \leq 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

Sugg.: Disegnare B_α e accertarsi che è possibile restringersi a rette.

CAPITOLO 4

Premesse di algebra lineare

4.1. Norme

Lemma 4.1.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz).
Vale la seguente disuguaglianza, nota come disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definizione 4.1.2 (Norma di Frobenius di una matrice).
Sia $A \in M^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$. Si chiama *norma di Frobenius* di A la seguente:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Lemma 4.1.3.
Siano $A \in M^{m\times n}$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$|Av| \leq \|A\|_F |v|.$$

DIMOSTRAZIONE.
Se denotiamo A^j la j-esima riga di A, si ha, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|Av| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \langle A^j, v\rangle^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |A^j|^2 |v|^2} = |v|\sqrt{\sum_{j=1}^{m} |A^j|^2} = |v|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ji}|^2},$$

da cui la tesi. □

Definizione 4.1.4 (Norma di un operatore lineare).
Sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Si definisce norma di T la seguente:

$$\|T\| := \max\{|T(v)| : v \in \mathbb{R}^n, |v| = 1\}.$$

Se $A \in M^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, è la matrice associata a T, ossia tale che

$$T(v) = Av \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

si definisce $\|A\| := \|T\|$.

Esercizio 4.1.5. Sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Dimostrare che

$$\|T\| = \max\{|T(v)| : v \in \mathbb{R}^n, \ |v| \le 1\}.$$

Qui sotto alcune utili proprietà delle norme: si ricordi la definizione di norma di Frobenius di una matrice (v. Definizione 4.1.2),

Lemma 4.1.6.
Siano $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ e siano, rispettivamente $A \in M^{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, e $B \in M^{p\times m}$, $B = (a_{hk})$, le matrice a loro associate, ossia

$$T(v) = Av, \qquad S(u) = Bu \qquad \forall\, v \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m.$$

Si hanno le seguenti:

(i) $|T(v)| \le \|T\||v|$ *o, equivalentemente,* $|Av| \le \|A\||v|$,

(ii) $\|T\| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ *o, equivalentemente,* $\|A\| \le \|A\|_F$

(iii) $\|S \circ T\| \le \|S\|\ \|T\|$ *o, equivalentemente,* $\|BA\| \le \|B\|\|A\|$.

Lemma 4.1.7.
Siano $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tali che $S \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Allora T è iniettiva e $n \le m$.

DIMOSTRAZIONE.
T è iniettiva. Infatti, siano $x, x' \in \mathbb{R}^n$ tali che $T(x) = T(x')$. Allora

$$x = S(T(x)) = S(T(x')) = x'.$$

Dalla iniettività di T si ha $\ker T = \{0\}$, da cui, per il Teorema del rango, $\dim \mathrm{Im}\, T = n$. Poiché $\mathrm{Im}\, T \subseteq \mathbb{R}^m$ deve quindi essere $n \le m$. □

Lemma 4.1.8.
Sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, invertibile. Allora

(i) $n = m$,

(ii) $\|T\| \neq 0$, $\|T^{-1}\| \neq 0$,

(iii) *per ogni* $v \in \mathbb{R}^n$

$$|T(v)| \ge \frac{1}{\|T^{-1}\|}|v|.$$

DIMOSTRAZIONE.
(i):
Segue immediatamente dal Lemma 4.1.7.
(ii):
Segue da (iii) del Lemma 4.1.6, dato che

$$0 \neq \| \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \| = \| T^{-1} \circ T \| \leq \| T^{-1} \| \, \| T \|$$

(iii):
Usando il Lemma 4.1.6 (i), per ogni $v \in \mathbb{R}^n$

$$|v| = |T^{-1} \circ T(v)| \leq \| T^{-1} \| |T(v)|.$$

Dividendo per $\| T^{-1} \|$, che è non nullo per (ii), si conclude.

$\square$

4.2. Matrici

4.2.1. Criterio di Sylvester.

Definizione 4.2.1. Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n \times n}$ una matrice reale. Si chiamano minori di testa i seguenti minori:

$$a_{11}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \det A.$$

Definizione 4.2.2 (Minore principale). Sia $A \in M^{n \times n}$ una matrice quadrata. I minori principali sono i determinanti delle sottomatrici quadrate di A estratte da A selezionando righe e colonne aventi gli stessi indici.

Teorema 4.2.3 (Criterio di Sylvester). *Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n \times n}$ una matrice reale simmetrica. Valgono le seguenti:*

$$A \text{ è definita positiva} \Leftrightarrow \text{ i minori di testa sono positivi} \tag{4.2.1}$$

$$A \text{ è definita negativa} \Leftrightarrow \text{ i minori di testa di ordine pari sono positivi e quelli dispari negativi} \tag{4.2.2}$$

$$A \text{ è semidefinita positiva} \Leftrightarrow \text{ i minori principali sono maggiori o uguali a } 0 \tag{4.2.3}$$

$$A \text{ è semidefinita negativa} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{i minori principali di } \underline{\text{ordine pari}} \text{ sono maggiori o uguali a } 0 \\ \text{i minori principali di } \underline{\text{ordine dispari}} \text{ sono minori o uguali a } 0 \end{array} \right. \tag{4.2.4}$$

4.2.2. Matrici definite.

Definizione 4.2.4 (Matrice definita positiva).
Diciamo che $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ è definita positiva se

$$\langle Av, v\rangle > 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Teorema 4.2.5 (Caratterizzazione delle matrici definite positive).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata. Sono equivalenti le seguenti:

(a) *A è definita positiva*
(b) *esiste $\lambda > 0$ tale che*

$$\langle Av, v\rangle \geq \lambda |v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

DIMOSTRAZIONE.
$(a) \Rightarrow (b)$:
Consideriamo la funzione $F : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$,

$$F(v) := \langle Av, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_i v_j.$$

Tale funzione è continua ed è definita sull'insieme compatto $\mathbb{S}^{n-1}$. Esiste quindi

$$\lambda := \min\{F(v)\,:\, v \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Essendo, per l'ipotesi (a), $F > 0$, sarà $\lambda > 0$. Abbiamo così dimostrato che

$$\langle Av, v\rangle \geq \lambda \qquad \forall v \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Sia ora $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Essendo $\frac{v}{|v|} \in \mathbb{S}^{n-1}$ si ha

$$\langle Av, v\rangle = \langle A\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\rangle |v|^2 \geq \lambda |v|^2.$$

La (b) è così dimostrata.
$(b) \Rightarrow (a)$:
Ovvia. □

Teorema 4.2.6 (Caratterizzazione delle matrici simmetriche definite positive).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata simmetrica. Sono equivalenti le seguenti:

(a) *A è definita positiva*
(b) *A ha n autovalori reali (contati con la loro moltiplicità), tutti positivi*
(c) *esiste $\lambda > 0$ tale che*

$$\langle Av, v\rangle \geq \lambda |v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

(d) *si ha*

$$\langle Av, v\rangle \geq \lambda|v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dove λ è il minimo degli autovalori A (che risulta essere positivo).

(e) *si ha*

$$\lambda|v|^2 \leq \langle Av, v\rangle \leq \Lambda|v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dove λ e Λ sono il minimo e il massimo degli autovalori A, (entrambi positivi)

(f) *i minori di testa sono positivi:*

$$a_{11} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > 0, \quad \cdots, \quad \det A > 0$$

Teorema 4.2.7 (Caratterizzazione delle matrici simmetriche definite negative).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata simmetrica. Sono equivalenti le seguenti:

(a) *A è definita negativa*

(b) *A ha n autovalori reali (contati con la loro moltiplicità), tutti negativi*

(c) *esiste $\Lambda < 0$ tale che*

$$\langle Av, v\rangle \leq \Lambda|v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

(d) *si ha*

$$\langle Av, v\rangle \leq \Lambda|v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dove Λ è il massimo degli autovalori A, che è negativo.

(e) *si ha*

$$\lambda|v|^2 \leq \langle Av, v\rangle \leq \Lambda|v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

dove λ e Λ sono il minimo e il massimo degli autovalori A, entrambi negativi

(f) *i minori di testa hanno segno alterno, partendo dal segno negativo:*

$$a_{11} < 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0,$$

$$\cdots, \quad \det A \begin{cases} < 0 & \textit{se } n \textit{ è dispari} \\ > 0 & \textit{se } n \textit{ è pari} \end{cases}$$

Corollario 4.2.8 (Caratterizzazione di $A > 0$, con $A \in M^{2\times 2}$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{2\times 2}$ una matrice quadrata simmetrica. Allora

$$A \textit{ è definita positiva} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} > 0 \\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza del Teorema 4.2.6. □

Corollario 4.2.9 (Caratterizzazione di $A < 0$, con $A \in M^{2\times 2}$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{2\times 2}$ una matrice quadrata simmetrica. Allora

$$A \text{ è definita negativa } \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} < 0 \\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza del Teorema 4.2.7. □

4.2.3. Matrici semidefinite.

Teorema 4.2.10 (Caratterizzazione di Sylvester per $A \geq 0$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata simmetrica. Sono equivalenti le seguenti:

(a) *A è semidefinita positiva*
(b) *tutti i minori principali di A sono non negativi.*

DIMOSTRAZIONE. E' il Criterio di Sylvester, vedi Teorema 4.2.3. □

Corollario 4.2.11 (Caratterizzazione di $A \geq 0$, con $A \in M^{2\times 2}$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{2\times 2}$ una matrice quadrata simmetrica. Allora

$$A \text{ è semidefinita positiva} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \geq 0 \\ a_{22} \geq 0 \\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE.
Per il Teorema 4.2.10 A è semidefinita positiva se e solo se tutti i suoi minori principali sono maggiori o uguali a zero. I minori principali sono

$$a_{11}, \quad a_{22}, \quad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La tesi segue. □

Teorema 4.2.12 (Caratterizzazione di Sylvester per $A \leq 0$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata simmetrica. Sono equivalenti le seguenti:

(a) *A è semidefinita negativa*
(b) *tutti i minori principali di A di ordine dispari sono ≤ 0 e quelli di ordine pari sono ≥ 0.*

Corollario 4.2.13 (Caratterizzazione di $A \leq 0$, con $A \in M^{2\times 2}$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{2\times 2}$ una matrice quadrata simmetrica. Allora

$$A \text{ è semidefinita negativa} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \leq 0 \\ a_{22} \leq 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 4.2.12 A è semidefinita negativa se e solo se tutti i minori principali di A di ordine dispari sono ≤ 0 e quelli di ordine pari sono ≥ 0. I minori principali di ordine dispari sono

$$a_{11}, \quad a_{22}.$$

Di minori principali di ordine pari vi è solo

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La tesi segue. □

4.2.4. Teoremi sulle matrici indefinite.

Corollario 4.2.14 (Caratterizzazione di $A \leq 0$, con $A \in M^{2\times 2}$).
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{2\times 2}$ una matrice quadrata simmetrica. Allora

$$A \text{ è indefinita} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} < 0$$

DIMOSTRAZIONE. Per i Teoremi 4.2.10 e 4.2.12, se A fosse semidefinita dovrebbe avere determinante ≥ 0. La tesi segue. □

Teorema 4.2.15 (I Condizione sufficiente per le matrici simmetriche indefinite).
Sia $A \in M^{n\times n}$ una matrice quadrata reale simmetrica. Se esiste un minore principale di ordine pari che è negativo (< 0), allora A è indefinita.

DIMOSTRAZIONE. Per il Criterio di Sylvester, Teorema 4.2.3, una matrice semidefinita ha i minori principali di ordine pari che sono ≥ 0. Quindi, l'ipotesi esclude che la matrice sia semidefinita. Dunque la matrice è indefinita. □

Teorema 4.2.16 (II Condizione sufficiente per le matrici simmetriche indefinite).

Sia $A = (a_{ij}) \in M^{n\times n}$ *una matrice quadrata simmetrica, con* $\det A \neq 0$. *Se esiste* $k \in \{1, \cdots, n\}$ *tale che*

$$k \text{ è pari e } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \leq 0 \tag{4.2.5}$$

allora A *è indefinita.*

DIMOSTRAZIONE. $\det A$ è il prodotto dei suoi autovalori reali. Essendo $\det A \neq 0$, non può esserci un autovalore nullo, allora la matrice simmetrica reale A o è definita (positiva o negativa) o è indefinita.
Se A non fosse indefinita, dovrebbe essere definita, allora per i Teoremi 4.2.6 e 4.2.7 (precisamente dalle equivalenze (a)⇔(f)) si contraddirebbe l'ipotesi. □

4.2.5. Matrici simmetriche 2×2**.** Raduniamo qui le caratterizzazioni ottenute per le matrici simmetriche di ordine 2
Sia $A = (a_{ij}) \in M^{2\times 2}$ una matrice quadrata simmetrica. Allora

$$A \text{ è definita positiva } \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} > 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0. \end{cases}$$

$$A \text{ è definita negativa } \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} < 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0. \end{cases}$$

$$A \text{ è semidefinita positiva} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \geq 0 \\ a_{22} \geq 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

$$A \text{ è semidefinita negativa} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \leq 0 \\ a_{22} \leq 0 \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 0. \end{cases}$$

$$A \text{ è indefinita} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} < 0$$

CAPITOLO 5

Calcolo differenziale

5.1. Derivabilità

Definizione 5.1.1. Si chiama *base canonica* di $\mathbb{R}^n$ l'insieme

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

dove

$$e_i := (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \cdots, 0)$$

è detto *i-esimo vettore della base canonica.*

Definizione 5.1.2 (Derivabilità per funzioni a valori reali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Diciamo che *f è derivabile in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_i*, se esiste ed è finito il seguente limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + te_i) - f(\bar{x})}{t}. \tag{5.1.1}$$

In tal caso il valore di tale limite si dice *derivata parziale di f in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_i* e si denota

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \qquad f_{x_i}(\bar{x}), \qquad D_{x_i} f(\bar{x}).$$

Diciamo che *f è derivabile in $\bar{x}$* se esistono le derivate parziali di f in $\bar{x}$ rispetto a tutte le variabili (ossia rispetto a x_1, x_2,..., x_n).

Si noti che il limite in (5.1.1) è, più esplicitamente, il seguente:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + t, \bar{x}_{i+1}, \cdots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \cdots, \bar{x}_n)}{t}.$$

Osservazione 5.1.3.
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. La derivata parziale di f in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_i coincide con la derivata in 0 della funzione

$$t \mapsto f(\bar{x} + te_i).$$

Infatti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+te_i)-f(\bar{x})}{t}.$$

Analogamente: la derivata parziale di f in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_i coincide con la derivata in $\bar{x}_i$ della funzione

$$s\mapsto f(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_{i-1},s,\bar{x}_{i+1},\cdots,\bar{x}_n).$$

Definizione 5.1.4.
Siano $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ insieme aperto.
Diciamo che f *è derivabile* se f è derivabile in ogni punto di A.

Definizione 5.1.5 (Gradiente).
Siano $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$.
Se f è derivabile in $\bar{x}\in A$ allora si chiama *gradiente* di f in x il vettore

$$\big(f_{x_1}(x),\cdots,f_{x_n}(x)\big).$$

Tale vettore si denota

$$\operatorname{grad} f(\bar{x}),\quad \nabla f(\bar{x}),\quad Df(\bar{x}).$$

Se f è derivabile, allora è ben definito il campo vettoriale

$$\operatorname{grad} f: A\to\mathbb{R}^n,\ x\mapsto \operatorname{grad} f(x).$$

Esempio 5.1.6 (Esempio di funzione che è derivabile ma non è continua).
Si consideri

$$f(x,y):=\begin{cases}0 & \text{se } xy=0\,,\\ 1 & \text{se } xy\neq 0.\end{cases}$$

La funzione è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0)=(0,0)$, infatti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

f non è continua in $(0,0)$. Infatti se ci si restringe alla bisettrice di equazione $y=x$

$$\lim_{x\to 0}f(x,x)=\lim_{x\to 0}1\neq f(0,0).$$

Un altro esempio di funzione che è derivabile, ma non continua, è il seguente.

Esempio 5.1.7.
Si consideri $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Deduciamo dall'esercizio 3.2.6 che la funzione non è continua in $(0,0)$, dato che non esiste il limite di f per (x,y) tendente a $(0,0)$.
D'altra parte la funzione è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$, infatti:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

5.2. Derivate direzionali

Definizione 5.2.1 (Derivate direzionali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Sia $v \in \mathbb{R}^n$ un versore. Diciamo che f ha la *derivata direzionale in $\bar{x}$ rispetto al versore v*, se esiste ed è finito il seguente limite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t}. \tag{5.2.1}$$

In tal caso il valore di tale limite si chiama *derivata direzionale in $\bar{x}$ rispetto al versore v* e si denota

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}), \qquad D_v f(\bar{x}).$$

Proposizione 5.2.2.
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. Le derivate parziali, se esistono, sono delle derivate direzionali rispetto ai versori della base canonica. Precisamente si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x}) \qquad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Esempio 5.2.3 (Esempio di funzione che è derivabile ma non ha tutte le derivate direzionali).

Si consideri

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{se } xy = 0\ , \\ 1 & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

La funzione è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$, infatti:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Ricordando che le derivate parziali sono le derivate direzionali nelle direzioni della base canonica, abbiamo che esistono le derivate direzionali nelle direzioni $e_1 := (1,0)$ e $e_2 := (0,1)$. Analogamente si ha che esistono le derivate direzionali nelle direzioni $(-1,0)$ e $(0,-1)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(-t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(0,-t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

Consideriamo ora i rimanenti versori: $v=(\alpha,\beta)$ versore, con $\alpha\cdot\beta\neq 0$.
Abbiamo:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t},$$

e il limite non esiste. Si noti che esiste, ma non è finito, il seguente limite:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}=+\infty.$$

Esempio 5.2.4 (Esempio di funzione che ha tutte le derivate direzionali, ma non è continua).

Si consideri $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\,,\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

La funzione è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0)=(0,0)$, infatti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

Ricordando che le derivate parziali sono le derivate direzionali nelle direzioni della base canonica, abbiamo che esistono le derivate direzionali nelle direzioni $e_1 := (1,0)$ e $e_2 := (0,1)$. Analogamente si ha che esistono le derivate direzionali nelle direzioni $(-1,0)$ e $(0,-1)$:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(-t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0,\qquad \lim_{t\to 0}\frac{f(0,-t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.$$

Consideriamo ora i rimanenti versori: $v=(\alpha,\beta)$ versore, con $\alpha\cdot\beta\neq 0$.
Abbiamo:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3\alpha^2\beta}{t^4\alpha^4+t^2\beta^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3\alpha^2\beta}{t^2\beta^2}}{t}=\frac{\alpha^2}{\beta}\in\mathbb{R}.$$

5.3. Differenziabilità

5.3.1. Definizione e caratterizzazioni.

Definizione 5.3.1 (Differenziabilità per funzioni a valori reali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. Diciamo che f è differenziabile in $\bar{x}$, se esiste un'applicazione lineare $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tale che

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + T(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0. \tag{5.3.1}$$

In tal caso l'applicazione T si denota $df(\bar{x})$.

Teorema 5.3.2 (Caratterizzazione dell'applicazione T ed esistenza delle derivate direzionali).

Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. Sia f differenziabile in $\bar{x}$, cioè tale che esista un'applicazione lineare $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, dipendente da $\bar{x}$, soddisfacente

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + T(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0. \tag{5.3.2}$$

Allora valgono le seguenti:

(i) *l'applicazione T è unica e*

$$T(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t} \qquad v \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3.3}$$

(ii) *f è derivabile in $\bar{x}$ e*

$$T(e_i) = f_{x_i}(\bar{x})$$

per ogni e_i versore della base canonica di $\mathbb{R}^n$

(iii) *per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ è*

$$T(v) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE.
(i)
Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Per la Proposizione 3.2.1, restringendosi all'insieme

$$B := \{x \in A : x = \bar{x} + tv, \text{ con } t \in \mathbb{R}\},$$

l'eguaglianza (5.3.2) implica

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - \big(f(\bar{x}) + T(tv)\big)}{|tv|} = 0. \tag{5.3.4}$$

Per la linearità di T, per le proprietà dei limiti e delle norme

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv)-\big(f(\bar{x})+T(tv)\big)}{|tv|}=\frac{1}{|v|}\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv)-\big(f(\bar{x})+tT(v)\big)}{|t|}.$$

Pertanto da (5.3.4) e dal fatto che $|v|\neq 0$ si ha

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv)-\big(f(\bar{x})+tT(v)\big)}{|t|}=0$$

che è equivalente a

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\bar{x}+tv)-\big(f(\bar{x})+tT(v)\big)}{t}\right|=0$$

cioè

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t}-T(v)\right|=0.$$

Abbiamo così dimostrato (5.3.3) per $v\neq 0$. Se $v=0$ l'uguaglianza (5.3.3) è ovvia, essendo $T(0)=0$ per la linearità di T.
Dalla (5.3.3) deduciamo che c'è una sola applicazione lineare T per la quale vale (5.3.2). Infatti, se ce ne fosse un'altra, T_1, diversa da T, che soddisfacesse (5.3.2) esisterebbe un vettore $v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ tale che $T_1(v)\neq T(v)$ e quindi, per (5.3.3),

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t}=T(v),\quad \lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t}=T_1(v),$$

contraddicendo così l'unicità del limite.
(ii):
La derivata parziale rispetto alla variabile x_i è la derivata direzionale nella direzione e_i (i-esimo vettore della base canonica). Dunque

$$T(e_i)\stackrel{(i)}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{x}+te_i)-f(\bar{x})}{t}=f_{x_i}(\bar{x}).$$

(iii):
Sia $v=(v_1,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$. Dalla linearità di T, da (ii) abbiamo:

$$T(v)=T(\sum_{i=1}^n v_ie_i)=\sum_{i=1}^n v_iT(e_i)\stackrel{(ii)}{=}\sum_{i=1}^n v_if_{x_i}(\bar{x})=\langle\nabla f(\bar{x}),v\rangle.$$

□

5.3.2. Differenziale. Alla luce del Teorema 5.3.2, se una funzione $f:A\to\mathbb{R}$, è differenziabile in $\bar{x}\in A\subseteq\mathbb{R}^n$, allora l'applicazione lineare per la quale è soddisfatta (5.3.1) è unica e la sua espressione è, per il Teorema 5.3.2,

$$df(\bar{x})(v)=\langle\nabla f(\bar{x}),v\rangle\qquad\forall v\in\mathbb{R}^n.$$

A tale applicazione lineare viene dato il nome di *differenziale di f in $\bar{x}$*. Più precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 5.3.3 (Differenziale di una funzione a valori reali).
Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Se f è differenziabile in $\bar{x}$, chiamiamo *differenziale di f in $\bar{x}$* l'applicazione lineare $df(\bar{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$df(\bar{x})(v) := \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle \qquad v \in \mathbb{R}^n. \tag{5.3.5}$$

Se poi A è un insieme aperto e f è differenziabile, allora si definisce *differenziale di f* la funzione $df: A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tale che

$$df(x)(v) = \langle \nabla f(x), v \rangle \qquad x \in A,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 5.3.4. Se per ogni $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ definiamo $dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$dx_i(v_1, v_2, \cdots, v_n) = v_i \quad v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

è facile dimostrare che

$$\left\{ dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : i \in \{1, 2, \cdots, n\} \right\},$$

costituisce una base di $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
Tenuto conto di ciò, e di (5.3.5), l'applicazione $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ della definizione 5.3.3 risulta combinazione lineare dei $\{dx_i\}$ e si ha

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)\, dx_i.$$

Corollario 5.3.5 (Caratterizzazione della differenziabilità).
Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Sono equivalenti le seguenti:

(a) *f è differenziabile in $\bar{x}$,*

(b) *f è derivabile in $\bar{x}$ e*

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle\big)}{|x - \bar{x}|} = 0, \tag{5.3.6}$$

(c) *f è derivabile in $\bar{x}$ e*

$$\lim_{\mathbb{R}^n \ni h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - \big(f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle\big)}{|h|} = 0$$

(d) *f è derivabile in $\bar{x}$ e*

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|), \qquad \textit{per } x \to \bar{x}. \tag{5.3.7}$$

DIMOSTRAZIONE.
(a) $\Rightarrow$ (b):
segue dal Teorema 5.3.2 e dal fatto che la derivata parziale di f in $\bar{x}$ rispetto alla variabile x_i è la derivata direzionale di f in $\bar{x}$ nella direzione e_i (i-esimo vettore della base canonica).
(b) $\Leftrightarrow$ (c):
segue dal cambio di variabile $x - \bar{x} = h$ (v. Teorema 3.4.3).
(b) $\Leftrightarrow$ (d):
segue dalla definizione di o piccolo
(b) $\Rightarrow$ (a):
Definiamo l'applicazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(v) := \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle$. Essa è un'applicazione lineare e quindi dalla (5.3.6) otteniamo che la richiesta (5.3.1) è soddisfatta. $\square$

Corollario 5.3.6.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Allora

$$f \text{ è derivabile in } \bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è differenziabile in } \bar{x}.$$

DIMOSTRAZIONE.
$\Leftarrow$: ovvia.
$\Rightarrow$:
Se f è derivabile in $\bar{x}$ allora

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} - f'(\bar{x}) \right) = 0$$

che è equivalente a

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})\big)}{x - \bar{x}} = 0,$$

che è vera se e solo se

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left| \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})\big)}{x - \bar{x}} \right| = 0,$$

a sua volta equivalente a

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left| \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} \right| = 0,$$

che prova la differenziabilità di f in $\bar{x}$, con $df(\bar{x})(h) = f'(\bar{x})h$, per ogni $h \in \mathbb{R}$. $\square$

5.3.3. Derivate direzionali di funzioni differenziabili. Immediata conseguenza del Teorema 5.3.2 è che le derivate direzionali di una funzione differenziabile esistono e si possono calcolare facilmente.

Teorema 5.3.7 (Derivate direzionali di funzioni differenziabili).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. Allora

$$f \text{ è differenziabile in } \bar{x} \Rightarrow f \text{ ha tutte le derivate direzionali in } \bar{x} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE.
Immediata conseguenza del Teorema 5.3.2. □

Osservazione 5.3.8. Dal Teorema 5.3.7 si deduce che se f è differenziabile in x allora l'applicazione $v \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(x)$ è lineare. In particolare

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda + v)}(x) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(x).$$

L'Osservazione 5.3.8 dà un utile strumento per stabilire che una funzione non è differenziabile.

Esercizio 5.3.9. Stabilire se la la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile in $(0,0)$.

[Sol: Nell'Esempio 5.2.4 si è stabilito che

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha,\beta)}(0,0) = \frac{\alpha^2}{\beta} \qquad \forall \beta \neq 0.$$

Allora f non può essere differenziabile in $(0,0)$, perché se lo fosse avrebbe dovuto essere

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha,\beta)}(0,0) = c_1 \alpha + c_2 \beta$$

per qualche $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.]

Conseguenza del Teorema 5.3.7 è che il gradiente *dà la direzione e il verso di massima pendenza.*

Proposizione 5.3.10 (Gradiente e direzione di massima pendenza).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. Sia f differenziabile in $\bar{x}$, con $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Allora, posto $\mu := \frac{\nabla f(\bar{x})}{|\nabla f(\bar{x})|}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(\bar{x}) = \max\left\{ \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) : v \text{ versore di } \mathbb{R}^n \right\}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dal Teorema 5.3.7 si ha che per ogni versore v è

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle.$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e ricordando che v è un versore,

$$-\left|\nabla f(\bar{x})\right| \le \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle \le \left|\nabla f(\bar{x})\right|.$$

Se $v = \frac{\nabla f(\bar{x})}{|\nabla f(\bar{x})|}$ si ha

$$\langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle = \left|\nabla f(\bar{x})\right|.$$

Abbiamo così dimostrato la tesi. □

Osservazione 5.3.11.
In virtù della Proposizione 5.3.10 si usa dire che $\nabla f(\bar{x})$ indica la direzione e il verso di *massima pendenza* della f in $\bar{x}$. Si noti che $\frac{\nabla f(\bar{x})}{|\nabla f(\bar{x})|}$ è l'unico versore che realizza il massimo di $\{\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}) : v \text{ versore di } \mathbb{R}^n\}$. Infatti, se $u, v \in \mathbb{R}^n$ sono vettori non nulli, allora

$$\langle u, v \rangle \le |u||v|$$

e vale l'uguale se e solo se u e v sono linearmente dipendenti ed equiorientati (ossia: esiste $t > 0$ tale che $v = tu$). Infatti

$$\langle u, v \rangle = |u||v| \cos\theta$$

dove θ indica l'angolo, in radianti, formato dai due vettori e $\cos\theta = 1$ se e solo se esiste $t > 0$ tale che $v = tu$.

5.3.4. Differenziabilità e continuità.

Proposizione 5.3.12 (Differenziabilità implica continuità).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Allora

$$f \textit{ differenziabile in } \bar{x} \qquad \Rightarrow \qquad f \textit{ continua in } \bar{x}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dal Corollario 5.3.5 (d) f è derivabile in $\bar{x}$ e

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|) \qquad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Quindi, ricordando che $|o(|x - \bar{x}|)| = o(|x - \bar{x}|)$ per le regole degli o piccoli,

$$0 \le |f(x) - f(\bar{x})| \le |\langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle| + o(|x - \bar{x}|) \qquad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, Lemma 4.1.1:

$$0 \le |f(x) - f(\bar{x})| \le |\nabla f(\bar{x})| \cdot |x - \bar{x}| + o(|x - \bar{x}|) \qquad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Dato che

$$\lim_{x\to\bar{x}} |\nabla f(\bar{x})| \cdot |x-\bar{x}| = 0, \qquad \lim_{x\to\bar{x}} o(|x-\bar{x}|) = 0,$$

concludiamo per il Teorema dei carabinieri che

$$\lim_{x\to\bar{x}} |f(x)-f(\bar{x})| = 0$$

e da qui la tesi. □

Teorema 5.3.13.
Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $f : B(\bar{x}, r) \to \mathbb{R}$ derivabile, con le derivate parziali $f_{x_i} : B(\bar{x}, r) \to \mathbb{R}$ continue in $\bar{x}$.
Allora f è differenziabile in $\bar{x}$.

DIMOSTRAZIONE.
Siano $x = (x_1, \cdots, x_n) \in B(\bar{x}, r) \setminus \{\bar{x}\}$ e $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$.
Definiamo $x^0 = x$, $x^n = \bar{x}$ e

$$x^k := (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \qquad k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}.$$

osserviamo che

$$x^{k-1} - x^k = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) - (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) = (x_k - \bar{x}_k)e_k$$

dove e_k è il k-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.
Consideriamo i segmenti

$$[x^k, x^{k-1}] := \{x^k + t(x^{k-1} - x^k) : t \in [0,1]\} = \{x^k + t(x_k - \bar{x}_k)e_k : t \in [0,1]\} \subseteq B(\bar{x}, r),$$

Si ha

$$f(x) - f(\bar{x}) = f(x^0) - f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (f(x^{k-1}) - f(x^k)). \tag{5.3.8}$$

Possiamo supporre che sia $x^{k-1} \neq x^k$ per ogni k. Se ci fosse infatti un $k \in \{1, \cdots, n\}$ per cui $x^{k-1} = x^k$, allora nella sommatoria verrebbe a mancare un addendo, e ci si limiterebbe a considerare gli addendi restanti.

Per ogni $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ definiamo $g_k : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_k(s) = f(x^k + s(x^{k-1} - x^k)) = f(x^k + s(x_k - \bar{x}_k)e_k).$$

Tale funzione è derivabile in $[0,1]$, e si ha

$$g_k'(s) = (x_k - \bar{x}_k) f_{x_k}(x^k + s(x_k - \bar{x}_k)e_k). \tag{5.3.9}$$

Infatti, per ogni $s \in [0,1]$,

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{g_k(s+\tau) - g_k(s)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \frac{f(x^k + (s+\tau)(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f(x^k + s(x_k - \bar{x}_k)e_k)}{\tau}. \tag{5.3.10}$$

Esso è zero, se $x_k = \bar{x}_k$. Se invece $x_k \neq \bar{x}_k$, denotando

$$x^k + s(x_k - \bar{x}_k)e_k =: y^k,$$

possiamo riscrivere (5.3.10) nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tau\to 0} \frac{f(x^k + s(x_k - \bar{x}_k)e_k + \tau(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f(x^k + s(x_k - \bar{x}_k)e_k)}{\tau} \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{f(y^k + \tau(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f(y^k)}{\tau} \\
&= (x_k - \bar{x}_k) \lim_{\tau\to 0} \frac{f(y^k + \tau(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f(y^k)}{\tau(x_k - \bar{x}_k)} \\
&= (x_k - \bar{x}_k) f_{x_k}(y^k). \qquad (5.3.11)
\end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato (5.3.9).

Per ogni k possiamo quindi applicare il Teorema di Lagrange all'applicazione g_k, deducendo che esiste $s_k \in [0,1]$ tale che

$$f(x^{k-1}) - f(x^k) = g_k(1) - g_k(0) = g'(s_k) = (x_k - \bar{x}_k) f_{x_k}(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k).$$

Inserendo tali uguaglianze in (5.3.8) otteniamo

$$f(x) - f(\bar{x}) = f(x^0) - f(x^n) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k) f_{x_k}(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k).$$

Studiamo ora la frazione che appare nella definizione della differenziabilità di f in $\bar{x}_k$:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), (x - \bar{x})\rangle\big)}{|x - \bar{x}|} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k) f_{x_k}(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k) - \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}_k) f_{x_k}(\bar{x})}{|x - \bar{x}|} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - \bar{x}_k}{|x - \bar{x}|} \Big(f_{x_k}(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f_{x_k}(\bar{x}) \Big). \qquad (5.3.12)
\end{aligned}$$

Ovviamente

$$\left| \frac{x_k - \bar{x}_k}{|x - \bar{x}|} \right| = \frac{|x_k - \bar{x}_k|}{|x - \bar{x}|} \le 1.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
&|x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k - \bar{x}| \\
&\le |(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) - (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \cdots, \bar{x}_n) + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k| \\
&\le |(0, \cdots, 0, s_k(x_k - \bar{x}_k), x_{k+1} - \bar{x}_{k+1}, \cdots, x_n - \bar{x}_n)| \\
&= \sqrt{s_k^2(x_k - \bar{x}_k)^2 + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \bar{x}_i)^2} \le |x - \bar{x}|,
\end{aligned}$$

deduciamo dal Teorema dei Carabinieri che

$$\lim_{x\to\bar{x}} |(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k - \bar{x}| = 0.$$

e quindi, per la continuità di f_{x_k} in $\bar{x}$:

$$\lim_{x\to\bar{x}} \Big(f_{x_k}(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f_{x_k}(\bar{x}) \Big) = 0.$$

Otteniamo che (prodotto di una funzione limitata per una infinitesima)

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{x_k - \bar{x}_k}{|x - \bar{x}|} \Big(f_{x_k}(x^k + s_k(x_k - \bar{x}_k)e_k) - f_{x_k}(\bar{x}) \Big) = 0$$

e dalla (5.3.12) segue

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), (x - \bar{x}) \rangle\big)}{|x - \bar{x}|} = 0.$$

La differenziabilità di f in $\bar{x}$ è così dimostrata.

□

Immediata conseguenza del Teorema 5.3.13 è il seguente risultato.

Corollario 5.3.14 (Legame tra C^1, differenziabilità e continuità). *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.*
Allora

$$f \text{ di classe } C^1 \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ differenziabile} \qquad \Rightarrow \qquad f \text{ continua.}$$

5.4. Calcolo differenziale: funzioni a valori vettoriali

Definizione 5.4.1 (Componenti di una funzione a valori vettoriali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Per ogni $i \in \{1, \cdots, m\}$, denotiamo f_i l'i-esima *componente* di f, cioè la funzione $f_i : A \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x)) \qquad x \in A.$$

Definizione 5.4.2 (Derivabilità per funzioni a valori vettoriali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Diciamo che f è *derivabile in* $\bar{x}$ *rispetto alla variabile* x_i, se esiste ed è un vettore di $\mathbb{R}^m$ il seguente limite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + te_i) - f(\bar{x})}{t}. \tag{5.4.1}$$

In tal caso il valore di tale limite si chiama *derivata parziale di* f *in* $\bar{x}$ *rispetto alla variabile* x_i e si denota

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \qquad f_{x_i}(\bar{x}), \qquad D_{x_i} f(\bar{x}).$$

Diciamo che f *è derivabile in* $\bar{x}$ se esistono le derivate parziale di f in $\bar{x}$ rispetto alle variabili x_1, x_2,..., x_n.

Definizione 5.4.3.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto.
Diciamo che f *è derivabile* se f è derivabile in ogni punto di A.

Definizione 5.4.4 (Differenziabilità per funzioni a valori vettoriali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. Diciamo che f *è differenziabile in* $\bar{x}$ se esiste un'applicazione lineare $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + T(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0. \tag{5.4.2}$$

Teorema 5.4.5.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ *e sia* $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. *Sono equivalenti le seguenti.*

(a) f *è continua in* $\bar{x}$
(b) *ogni componente di* f *è continua in* $\bar{x}$.

DIMOSTRAZIONE.
Viene immediatamente dalla Proposizione 3.4.2. □

Teorema 5.4.6.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ *e sia* $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. *Sono equivalenti le seguenti.*

(i) f *ha la derivata parziale in* $\bar{x}$ *rispetto alla variabile* x_i
(ii) *ogni componente di* f *ha la derivata parziale in* $\bar{x}$ *rispetto alla variabile* x_i

In tale caso il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+te_i)-f(\bar{x})}{t}$$

si denota

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}), \qquad f_{x_i}(\bar{x}), \ \textit{oppure}\ D_{x_i} f(\bar{x}).$$

e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(\bar{x}) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}(\bar{x}) \\[2ex] \vdots \\[2ex] \dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Definizione 5.4.7 (Matrice jacobiana).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$, $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Diciamo che f è derivabile in $\bar{x}$ se f ha le derivate parziali in $\bar{x}$ rispetto a ogni variabile.
In tal caso si chiama *matrice jacobiana* di f in $\bar{x}$ la matrice $Df(\bar{x}) \in M^{m\times n}$ così definita:

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\[2ex] \nabla f_2(\bar{x}) \\[2ex] \vdots \\[2ex] \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\[2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\[2ex] \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Definizione 5.4.8.
Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia f derivabile in $\bar{x}$, punto interno di A.
Il determinante della matrice Jacobiana di f in $\bar{x}$, che in questo caso è una matrice quadrata di ordine n, si chiama *Jacobiano* di f.

Teorema 5.4.9.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_m)$ *e sia* $\bar{x} \in \operatorname{int} A$. *Sono equivalenti le seguenti.*

(a) f *è differenziabile in* $\bar{x}$
(b) *per ogni* $i \in \{1, \cdots, n\}$ f_i *è differenziabile in* $\bar{x}$.

Inoltre, l'applicazione lineare $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, *soddisfacente*

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + T(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0,$$

è tale che

$$T(x) = T(x_1, \cdots, x_n) = Df(\bar{x}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \nabla f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE.
L'equivalenza di (a) e (b) risulta dalla Proposizione 3.4.2.
Da quanto dimostrato sopra, se ogni componente f_j è differenziabile in $\bar{x}$ allora f_j è derivabile in $\bar{x}$ e l'applicazione $T_j \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ che soddisfa

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f_j(x) - \big(f_j(\bar{x}) + T_j(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0$$

è tale che

$$T_j(v) = \langle \nabla f_j(\bar{x}), v \rangle = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad v \in \mathbb{R}^n.$$

Ne deduciamo che

$$T(v) = \begin{pmatrix} T_1(v) \\ T_2(v) \\ \vdots \\ T_m(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(\bar{x}), v \rangle \\ \langle \nabla f_2(\bar{x}), v \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\bar{x}), v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

□

Corollario 5.4.10.
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
f è derivabile in $\bar{x}$ se e solo se f è differenziabile in $\bar{x}$.

DIMOSTRAZIONE.
Segue dal Teorema 5.4.9 e dal Corollario 5.3.6. □

Definizione 5.4.11 (Differenziale di f a valori vettoriali).
Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Se f è differenziabile in x, chiamiamo *differenziale di f in x* l'applicazione lineare

$$df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \qquad df(x)(v) := Df(x)v \qquad v \in \mathbb{R}^n. \tag{5.4.3}$$

Se poi A è un insieme aperto e f è differenziabile, allora si definisce *differenziale di f* la funzione

$$df : A \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad df(x)(v) = Df(x)v \qquad x \in A,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 5.4.12.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, tale che

$$f(x) = Ax \qquad \forall x \in \Omega,$$

con $A \in M^{m \times n}$. Dimostrare che f è differenziabile (anzi, di classe C^k per ogni $k \geq 1$) e che, per ogni $x \in \Omega$, $df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è l'applicazione lineare associata alla matrice A, ossia

$$df(x)(v) = Av \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Proposizione 5.4.13 (Derivabilità e differenziabilità di una somma).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}^m$, $f = (f^1, \cdots, f^m)$, $g = (g^1, \cdots, g^m)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \operatorname{int} A$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se f *e* g *sono derivabili/differenziabili in* $\bar{x}$ *allora*

(i) λf *è derivabile/differenziabile in* $\bar{x}$ *e, per ogni* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *e* $j \in \{1, \cdots, m\}$,

$$(\lambda f^j)_{x_i}(\bar{x}) = \lambda f^j_{x_i}(\bar{x}), \qquad d(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda d f(\bar{x}),$$

(ii) $f + g$ *è derivabile/differenziabile in* $\bar{x}$ *e*

$$(f+g)_{x_i}(\bar{x}) = f_{x_i}(\bar{x}) + g_{x_i}(\bar{x}), \qquad d(f+g)(\bar{x}) = df(\bar{x}) + dg(\bar{x}).$$

DIMOSTRAZIONE.
(i): segue dall'Osservazione 5.1.3. I dettagli sono lasciati al lettore.
(ii)$_1$:
Siano $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $j \in \{1, \cdots, m\}$. Se esistono le derivate parziali per ogni $f^j_{x_i}$ e $g^j_{x_i}$ in $\bar{x}$, ricordando che esse sono delle derivate di funzioni di una variabile (v. Osservazione 5.1.3), allora esiste $(f+g)^j_{x_i}$ in $\bar{x}$ e

$$(f+g)^j_{x_i}(\bar{x}) = f^j_{x_i}(\bar{x}) + g^j_{x_i}(\bar{x}). \tag{5.4.4}$$

(ii)$_2$:
Per ipotesi esistono i differenziali di f e g in $\bar{x}$ e

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - \big(f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0$$

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{g(x) - \big(g(\bar{x}) + Dg(\bar{x})(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0,$$

dove $Df(\bar{x})$ e $Dg(\bar{x})$ sono le matrici Jacobiane di f e g in $\bar{x}$.
Sommando si ha, per le proprietà dei limiti e delle matrici rispetto alla somma:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{(f+g)(x) - \big((f+g)(\bar{x}) + (Df(\bar{x}) + Dg(\bar{x}))(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0.$$

Essendo

$$(Df(\bar{x}) + Dg(\bar{x}))(v) \stackrel{(5.4.4)}{=} D(f+g)(\bar{x})(v), \tag{5.4.5}$$

deduciamo che

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{(f+g)(x) - \big((f+g)(\bar{x}) + D(f+g)(\bar{x})(x - \bar{x})\big)}{|x - \bar{x}|} = 0.$$

L'applicazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$T(v) = D(f+g)(\bar{x})(v) \qquad v \in \mathbb{R}^n$$

è lineare. Dunque $f + g$ è differenziabile in $\bar{x}$ e

$$d(f+g)(\bar{x}) \stackrel{(5.4.5)}{=} df(\bar{x}) + dg(\bar{x}).$$

$\square$

5.5. Composizione di funzioni differenziabili

In generale, la composizione di due funzioni derivabili può non essere derivabile.

Esempio 5.5.1 (La composizione di due funzioni derivabili può non essere derivabile).
Si consideri la funzione dell'Esempio 5.1.7:
Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $f(t)=(t,t^2)$. Si noti che $f(0)=(0,0)$. f è un funzione di una variabile reale ed è derivabile (N.B. anche differenziabile, essendo funzione di una variabile).
Sia $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

La funzione g non è continua in $(0,0)$ (v. Esempio 5.1.7), quindi non è differenziabile per il Teorema 5.3.13. È però derivabile in $(0,0)$ e $\nabla g(0,0)=(0,0)$.
Si ha $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g\circ f(t)=\begin{cases} \frac{t^4}{t^4+t^4}=\frac{1}{2} & \text{se } t\neq 0\,, \\ 0 & \text{se } t=0 \end{cases}$$

Dunque, la funzione $g\circ f$ non è continua, né derivabile in 0.

E' però vero che la composizione di due funzioni differenziabili è differenziabile. Prima di enunciare questo risultato, diamo una caratterizzazione delle funzioni differenziabili. Si sottintenderà che la norma dello spazio vettoriale delle matrici $M(m,n)$ di numeri reali è quella di Frobenius, vedi Definizione 4.1.2, da cui la seguente definizione di continuità.

Definizione 5.5.2. Sia $\Phi: A\to M(m,p)$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\bar{x}\in\operatorname{int}A$.
Diciamo che Φ è continua in $\bar{x}$ se

$$\lim_{x\to\bar{x}}\|\Phi(x)-\Phi(\bar{x})\|_F=0.$$

Proposizione 5.5.3 (13-10-2021). *Siano* $f:A\to\mathbb{R}^m$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\bar{x}\in\operatorname{int}A$.
Sono equivalenti le seguenti:

(a) f *è differenziabile in* $\bar{x}$
(b) *esiste* $\Phi: A\to M(m,n)$, Φ *continua in* $\bar{x}$*, tale che*

$$f(x)=f(\bar{x})+\Phi(x)(x-\bar{x}) \qquad \forall x\in A.$$

In tal caso,

$$\Phi(\bar{x})=Df(\bar{x}).$$

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione nel caso $m=1$.
(b) $\Rightarrow$ (a):
Supponiamo (b).

Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $\bar{x} + h \in A$ si ha

$$\begin{aligned} f(\bar{x}+h) &= f(\bar{x}) + \Phi(x)h \\ &= f(\bar{x}) + \Phi(\bar{x})h + (\Phi(\bar{x}+h) - \Phi(\bar{x}))h \end{aligned}$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e per la continuità di Φ in $\bar{x}$

$$\frac{|(\Phi(\bar{x}+h) - \Phi(\bar{x}))h|}{\|h\|} \leq \frac{\|\Phi(\bar{x}+h) - \Phi(\bar{x})\| \, \|h\|}{\|h\|} = \|\Phi(\bar{x}+h) - \Phi(\bar{x})\| \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

Pertanto

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \Phi(\bar{x})h + o(\|h\|) \qquad \text{per } h \to 0.$$

Ciò dimostra che f è differenziabile in $\bar{x}$ e che

$$\nabla f(\bar{x}) = \Phi(\bar{x})^t.$$

(a) $\Rightarrow$ (b):
Facciamo la dimostrazione nel caso $m = 1$.
Definiamo la funzione

$$w : A \to \mathbb{R}, \qquad w(x) = f(x) - f(\bar{x}) - \langle \nabla f(x), x - \bar{x} \rangle.$$

Definiamo ora

$$\psi : A \to \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) = \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + w(x)\frac{x-\bar{x}}{\|x-\bar{x}\|^2} & \text{se } x \in A \setminus \{\bar{x}\} \\ \nabla f(\bar{x}) & \text{se } x = \{\bar{x}\} \end{cases}$$

Ovviamente

$$x = \bar{x} \quad \Rightarrow f(x) = f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \langle \psi(x), x - \bar{x} \rangle.$$

Se $x \neq \bar{x}$

$$\begin{aligned} \langle \psi(x), x - \bar{x} \rangle &= \langle \nabla f(\bar{x}) + w(x)\frac{x-\bar{x}}{\|x-\bar{x}\|^2}, x - \bar{x} \rangle \\ &= \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + w(x) = f(x) - f(\bar{x}) \end{aligned}$$

da cui

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \psi(x), x - \bar{x} \rangle \qquad \text{se } x \neq \bar{x}$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \psi(x), x - \bar{x} \rangle \qquad \forall x \in A. \tag{5.5.1}$$

Dimostriamo che ψ è continua in $\bar{x}$. Per $x \neq \bar{x}$ risulta

$$\begin{aligned}\|\psi(x) - \psi(\bar{x})\| &= \|\psi(x) - \nabla f(\bar{x})\rangle\| \\ &= \left\| \nabla f(\bar{x}) + w(x) \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|^2} - \nabla f(\bar{x})\rangle \right\| \\ &= \left\| w(x) \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|^2} \right\| = \frac{|w(x)|}{\|x - \bar{x}\|}.\end{aligned}$$

Dalla differenziabilità di f si ha che $w(x) = o(\|x - \bar{x}\|)$ per $x \to \bar{x}$, quindi si ha

$$\lim_{x\to\bar{x}} \|\psi(x) - \psi(\bar{x})\| = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{|w(x)|}{\|x - \bar{x}\|} = 0.$$

□

Teorema 5.5.4.
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Sia $g : B \to \mathbb{R}^p$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(A) \subseteq B$, $f(\bar{x}) \in \operatorname{int} B$.
Se f *è differenziabile in* $\bar{x}$ *e* g *è differenziabile in* $f(\bar{x})$, *allora*

(a) $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ *è differenziabile in* $\bar{x}$

(b) *le matrici Jacobiane soddisfano l'identità*

$$D(g \circ f)(\bar{x}) = Dg(f(\bar{x}))Df(\bar{x}) \tag{5.5.2}$$

(c) *l'applicazione lineare* $d(g \circ f)(\bar{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *soddisfa*

$$d(g \circ f)(\bar{x}) = dg(f(\bar{x})) \circ df(\bar{x}).$$

VERS. 13-10-2021.
(a):
Per la Proposizione 5.5.3 esistono

$$\Phi : A \to M(m, n), \quad \Phi \text{ continua in } \bar{x},\ \Phi(\bar{x}) = Df(\bar{x})$$

e

$$\Psi : B \to M(p, m), \quad \Psi \text{ continua in } f(\bar{x}),\ \Psi(f(\bar{x})) = Dg(f(\bar{x}))$$

tali che

$$f(x) = f(\bar{x}) + \Phi(x)(x - \bar{x}) \qquad \forall x \in A. \tag{5.5.3}$$

e

$$g(y) = g(f(\bar{x})) + \Psi(y)(y - f(\bar{x})) \qquad \forall y \in B. \tag{5.5.4}$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} g\circ f(x) = g(f(x)) &\overset{(5.5.4)}{=} g(f(\bar{x})) + \Psi(f(x))(f(x)-f(\bar{x})) \\ &\overset{(5.5.3)}{=} g(f(\bar{x})) + \Psi(f(x))(\Phi(x)(x-\bar{x})) \\ &= g\circ f(\bar{x})) + (\Psi(f(x))\Phi(x))(x-\bar{x}) \qquad \forall x\in A. \end{aligned}$$

Si noti che

$$x \overset{\beta}{\mapsto} \Psi(f(x))\Phi(x)$$

è una funzione da A a $M(p,n)$.
Per concludere, resta da dimostrare che β è continua in $\bar{x}$. Ciò segue dal fatto che, essendo f differenziabile in $\bar{x}$ e g differenziabile in $f(\bar{x})$,

(i) Φ continua in $\bar{x}$
(ii) f continua in $\bar{x}$ (da Proposizione 5.3.12)
(iii) Ψ continua in $f(\bar{x})$

e tenendo conto che (ii) e (iii) implicano

$$x\mapsto \Psi(f(x)) \text{ è continua in } \bar{x},$$

in quanto composizione di funzioni continue.
Per la Proposizione 5.5.3 la funzione $g\circ f : A\to\mathbb{R}^p$ risulta così differenziabile in $\bar{x}$ e

$$D(g\circ f)(\bar{x}) = \Psi(f(\bar{x}))\Phi(\bar{x}) = Dg(f(\bar{x}))Df(\bar{x}).$$

□

Conseguenza del Corollario 5.4.10 e Teorema 5.5.4 è il seguente risultato.

Corollario 5.5.5.
Sia $\gamma : I\to\mathbb{R}^m$, I *intervallo di* $\mathbb{R}$, $\bar{t}\in\operatorname{int} I$.
Sia $f : B\to\mathbb{R}^p$, $B\subseteq\mathbb{R}^m$, $\gamma(I)\subseteq B$, $\gamma(\bar{t})\in\operatorname{int} B$.
Se γ *è derivabile in* $\bar{t}$ *e* f *è differenziabile in* $\gamma(\bar{t})$, *allora* $f\circ\gamma : I\to\mathbb{R}^p$ *è differenziabile in* $\bar{t}$ *e*

$$D(f\circ\gamma)(\bar{t}) = Df(\gamma(\bar{t}))\gamma'(\bar{t}).$$

DIMOSTRAZIONE.
Segue dal Corollario 5.4.10 e dal Teorema 5.5.4 e dal fatto che

$$D(f\circ\gamma)(\bar{t}) = Df(\gamma(\bar{t}))D\gamma(\bar{t}) = Df(\gamma(\bar{t}))\gamma'(\bar{t}).$$

□

Immediata conseguenza del Teorema 5.5.4 è il seguente risultato.

Corollario 5.5.6.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$$f : A \to \mathbb{R}^m, \qquad f(x) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), f_2(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)),$$

$$g : B \to \mathbb{R}, \qquad g(y) = g(y_1, y_2, \cdots, y_m).$$

Se f e g sono differenziabili e $f(A) \subseteq B$, allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile e

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(\bar{x})) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x}).$$

Corollario 5.5.7 (Composizione di funzioni C^1).
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, A insieme aperto di $\mathbb{R}^n$,
Sia $g : B \to \mathbb{R}^p$, B insieme aperto di $\mathbb{R}^m$, $f(A) \subseteq B$.
Se f e g sono di classe C^1, allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ è di classe C^1 (quindi anche differenziabili),

$$d(g \circ f)(x) = dg(f(x)) \circ df(x), \qquad D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x) \quad \forall x \in A.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $f \in C^1(A)$ e $g \in C^1(B)$, allora esse sono in particolare differenziabili e quindi, $g \circ f$ è differenziabile per il Teorema 5.5.4. Vale dunque la formula (b) in Teorema 5.5.4. Da essa si deduce che $g \circ f$ è C^1, essendo le derivate parziali di $g \circ f$ somme di prodotti di funzioni continue. □

Osservazione 5.5.8.
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, A insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, f derivabile.
Sia $g : B \to \mathbb{R}^p$, B insieme aperto di $\mathbb{R}^m$, $f(A) \subseteq B$, g derivabile.
In generale, non è vero che la composizione $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ sia derivabile, come mostra il seguente esempio.

5.5.1. Derivata sotto il segno di integrale. Una applicazione importante della proprietà della composizione di funzioni regolari è quella che passa col nome di *derivazione sotto il segno di integrale.*

Teorema 5.5.9.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e $f : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.
Sia $\Phi : A \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt \qquad x \in A.$$

Valgono le seguenti:

(a) *Φ è continua*

(b) *se* $\alpha, \beta \in C^1$ *e per ogni* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *esiste* $f_{x_i} \in C^1(A \times \mathbb{R})$, *allora* $\Phi \in C^1(A)$ *e, per ogni* $x \in A$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x) = f(x, \beta(x))\frac{\partial \beta}{\partial x_i}(x) - f(x, \alpha(x))\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,t)\,dt.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $F : A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y, z) := \int_y^z f(x,t)\,dt \qquad x \in A \subseteq \mathbb{R}^n,\ y, z \in \mathbb{R}.$$

(a):
Dimostriamo che F è continua. Sia $(x_0, y_0, z_0) \in A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sia $K \subseteq A$ un compatto tale $x_0 \in \operatorname{int} K$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $y, z \in]a, b[$. Allora

$$K \times [a,b] \times [a,b] \text{ è compatto in } A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{int}(K \times [a,b] \times [a,b]).$$

Per il Teorema di Weierstrass

$$\exists M > 0 : |f(x,t)| \le M \quad \forall (x,t) \in K \times [a,b]. \tag{5.5.5}$$

Per ogni $(x, y, z) \in K \times [a,b] \times [a,b]$ si ha, per la proprietà di additività e di monotonia dell'integrale di Riemann (v. A.M.1B)

$$\begin{aligned}
|F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)| &= \left| \int_y^z f(x,t)\,dt - \int_{y_0}^{z_0} f(x,t)\,dt \right| \\
&\le \left| \int_y^{y_0} f(x,t)\,dt + \int_{y_0}^{z_0} f(x,t)\,dt + \int_{z_0}^{z} f(x,t)\,dt - \int_{y_0}^{z_0} f(x_0,t)\,dt \right| \\
&\le \left| \int_y^{y_0} f(x,t)\,dt \right| + \left| \int_{y_0}^{z_0} \big(f(x,t) - f(x_0,t)\big)\,dt \right| + \left| \int_{z_0}^{z} f(x,t)\,dt \right| \\
&\le \left| \int_y^{y_0} |f(x,t)|\,dt \right| + \left| \int_{y_0}^{z_0} \big|f(x,t) - f(x_0,t)\big|\,dt \right| + \left| \int_{z_0}^{z} |f(x,t)|\,dt \right|.
\end{aligned}$$

Usando (5.5.5) si ottiene

$$|F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)| \le M|y - y_0| + \left| \int_{y_0}^{z_0} \big|f(x,t) - f(x_0,t)\big|\,dt \right| + M|z - z_0|. \tag{5.5.6}$$

Consideriamo la funzione $f|_{K\times[a,b]} : K \times [a,b] \to \mathbb{R}$. Essa è continua con dominio il compatto $K \times [a,b]$. Allora, è una funzione uniformemente continua, per il Teorema di Heine-Cantor. Dunque, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)| < \epsilon \qquad \forall (x_1,t_1), (x_2,t_2) \in K \times [a,b], \text{ con } \|(x_1,t_1) - (x_2,t_2)\| < \delta.$$

Scegliendo $(x_1, t_1) = (x, t)$ e $(x_2, t_2) = (x_0, t)$ si ha

$$|f(x,t) - f(x_0,t)| < \epsilon \quad \forall x, x_0 \in K,\ |x - x_0| < \delta, \forall t \in [a,b].$$

Tutto ciò considerato, si ha da (5.5.6) che, fissato $\epsilon_0 > 0$, tale che

$$]y_0 - \epsilon_0, y_0 + \epsilon_0[\subseteq]a,b[, \quad]z_0 - \epsilon_0, y_0 + \epsilon_0[\subseteq]a,b[,$$

per ogni $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|F(x,y,z) - F(x_0,y_0,z_0)| \le 2M\epsilon + \left|\int_{y_0}^{z_0} \epsilon\, dt\right| = 2M\epsilon + \epsilon|y_0 - z_0| \le (2M + b - a)\epsilon$$

per ogni $y \in]y_0 - \epsilon, y_0 - \epsilon[\subset [a,b]$ e per ogni $z \in]z_0 - \epsilon, z_0 - \epsilon[\subset [a,b]$ e per ogni $x \in K$, $|x - x_0| < \delta$. Ciò significa che

$$F(x,y,z) \to F(x_0,y_0,z_0) \qquad \text{per } (x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0).$$

(b):
Dimostriamo che $F \in C^1(A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ e che per ogni $x \in A$ e per ogni $y, z \in \mathbb{R}$,

$$\nabla_x F(x,y,z) = \int_y^z \nabla_x f(x,t)\, dt, \quad F_y(x,y,z) = -f(x,z), \quad F_z(x,y,z) = f(x,z). \tag{5.5.7}$$

Dervabilità rispetto a z: per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, per ogni $x \in A$,

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad z \mapsto \int_y^z f(x,t)\, dt \text{ è derivabile rispetto a } z$$

e

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = f(x,z).$$

Tale derivata è una funzione continua perché f è continua per ipotesi.
Dervabilità rispetto a y: essendo

$$\int_y^z f(x,t)\, dt = -\int_z^y f(x,t)\, dt,$$

ragionando come sopra si ha che, per ogni $x \in A$,

$$\forall z \in \mathbb{R} \qquad y \mapsto \int_y^z f(x,t)\, dt \text{ è derivabile rispetto a } y$$

e

$$\forall z \in \mathbb{R} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -f(x,y).$$

Tale derivata è una funzione continua perché f è continua per ipotesi.

Dimostriamo ora la derivabilità di F rispetto a x_i, con $i \in \{1, \cdots, n\}$. Siano $y, z \in \mathbb{R}$, $x \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \subseteq A$. Per ogni $h \in]-\delta, \delta[$

$$\frac{F(x+he_i, y, z) - F(x, y, z)}{h} = \int_y^z \frac{f(x+he_i, t) - f(x, t)}{h}\, dt.$$

Per il Teorema di Lagrange (di A.M.1A), per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $\theta(t, h) \in]0, 1[$ tale che

$$\frac{f(x+he_i, t) - f(x, t)}{h} = f_{x_i}(x+\theta(t, h)he_i, t),$$

da cui

$$\forall t \in [\min\{y, z\}, \max\{y, z\}],\ \forall h \in]-\delta, \delta[\quad \exists \theta(t, h) \in]0, 1[\quad :$$
$$\frac{F(x+he_i, y, z) - F(x, y, z)}{h} = \int_y^z f_{x_i}(x+\theta(t, h)he_i, t)\, dt. \tag{5.5.8}$$

Essendo per ipotesi $(x, t) \mapsto f_{x_i}(x, t)$ continua in $A \times \mathbb{R}$, in particolare è continua la sua restrizione

$$f_{x_i} : K \to \mathbb{R}, \qquad K := [x - \delta e_i, x + \delta e_i] \times [\min\{y, z\}, \max\{y, z\}].$$

Si noti che K è un compatto, allora per il Teorema di Heine-Cantor, $f_{x_i}|_K$ è uniformemente continua. Pertanto, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_1 \in]0, \delta]$ tale che

$$|f_{x_i}(x+\theta(t, h)he_i, t) - f_{x_i}(x, t)| < \epsilon \qquad \forall h \in]-\delta_1, \delta_1[, \qquad \forall t \in [\min\{y, z\}, \max\{y, z\}]. \tag{5.5.9}$$

Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_1 \in]0, \delta]$ tale che

$$\left| \frac{F(x+he_i, y, z) - F(x, y, z)}{h} - \int_y^z f_{x_i}(x, t)\, dt \right|$$
$$\overset{(5.5.8)}{=} \left| \int_y^z \big(f_{x_i}(x+\theta(t, h)he_i, t) - f_{x_i}(x, t)\big)\, dt \right| \leq \left| \int_y^z \left|f_{x_i}(x+\theta(t, h)he_i, t) - f_{x_i}(x, t)\right|\, dt \right|$$
$$\overset{(5.5.9)}{\leq} \epsilon |z - y| \qquad \forall h \in]-\delta_1, \delta_1[.$$

Dunque,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+he_i, y, z) - F(x, y, z)}{h} = \int_y^z f_{x_i}(x, t)\, dt$$

e si è dimostrata così la derivabilità di F rispetto a x_i, con $i \in \{1, \cdots, n\}$, che

$$F_{x_i}(x, y, z) = \int_y^z f_{x_i}(x, t)\, dt$$

e che tale derivata è continua per quanto dimostrato in (a).
Derivabilità di Φ:

Essendo

$$\Phi(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt = F(x,\alpha(x),\beta(x)) \qquad x \in A,$$

ed essendo $\alpha, \beta \in C^1(A)$, per il Corollario 5.5.7,

$$\Phi_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} F_{x_j}(x,\alpha(x),\beta(x)) + F_y(x,\alpha(x),\beta(x))\alpha_{x_i}(x) + F_z(x,\alpha(x),\beta(x))\beta_{x_i}(x)$$

per ogni $x \in A$, da cui, per (5.5.7),

$$\Phi_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_{x_j}(x,t)\,dt - f(x,\alpha(x))\alpha_{x_i}(x) + F_z(x,\beta(x))\beta_{x_i}(x).$$

$\square$

5.6. Derivate di ordine superiore

Definizione 5.6.1.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia f derivabile rispetto alla variabile x_i.
Se $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\bar{x} \in A$ allora sono definite

$$\frac{\partial}{x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\bar{x}),\ \frac{\partial}{x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\bar{x}),\quad \cdots \quad \frac{\partial}{x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\bar{x}),\quad \cdots \quad \frac{\partial}{x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(\bar{x})$$

che si usano scrivere

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\bar{x}), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i}(\bar{x}),\quad \cdots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\bar{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_i}(\bar{x})$$

o più semplicemente,

$$f_{x_i x_1}(\bar{x}),\ f_{x_i x_2}(\bar{x}),\qquad \cdots \qquad f_{x_i x_i}(\bar{x}),\qquad \cdots f_{x_i x_n}(\bar{x}).$$

Tali derivate si dicono derivate (parziali) di f del *secondo ordine*.

Ovviamente, ragionando come sopra si possono definire, quando esistono, le derivate di ordine superiore a due.

Definizione 5.6.2.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto di $\mathbb{R}^n$. Diciamo che f è di classe C^k, $k \geq 1$, e scriviamo $f \in C^k(A)$, se esistono tutte le derivate di f fino all'ordine k e queste sono continue.
Si usa dire che f è di classe C^0, se f è continua.

Definizione 5.6.3.
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \operatorname{int} A$,

Se esistono tutte le derivate parziali del secondo ordine di f in $\bar{x}$ (esse sono $n \times n$), si definisce *matrice hessiana* di f in $\bar{x}$ la seguente matrice quadrata di ordine n:

$$D^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\bar{x}) & f_{x_1 x_2}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\bar{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\bar{x}) & f_{x_2 x_2}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_2 x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\bar{x}) & f_{x_n x_2}(\bar{x}) & \cdots & f_{x_n x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante si chiama *Hessiano* di f in $\bar{x}$, a volte indicato $Hf(\bar{x})$.

Teorema 5.6.4 (Teorema di Schwarz: I versione).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$. Se esistono $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tali che

(i) *esistono f_{x_i} e f_{x_j}*
(ii) *f_{x_i} e f_{x_j} sono differenziabili in $\bar{x} \in A$,*

allora

$$f_{x_i x_j}(\bar{x}) = f_{x_j x_i}(\bar{x}).$$

DIMOSTRAZIONE.
Iniziamo la dimostrazione considerando il caso $n = 2$. Dimostriamo cioè il seguente risultato:
Se $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^2$.

(i) *esistono f_x e f_y*
(ii) *f_x e f_y sono differenziabili in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$,*

allora

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Essendo A aperto esiste $r \neq 0$ tale che $[\bar{x} - |r|, \bar{x} + |r|] \times [\bar{y} - |r|, \bar{y} + |r|] \subseteq A$.
Definiamo $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := f(\bar{x} + tr, \bar{y} + r) - f(\bar{x} + tr, \bar{y}), \qquad G(t) := f(\bar{x} + r, \bar{y} + tr) - f(\bar{x}, \bar{y} + tr).$$

Osserviamo che $F(1) - F(0) = G(1) - G(0)$, infatti:

$$F(1) - F(0) = f(\bar{x} + r, \bar{y} + r) - f(\bar{x} + r, \bar{y}) - \big(f(\bar{x}, \bar{y} + r) - f(\bar{x}, \bar{y})\big)$$

e

$$G(1) - G(0) = f(\bar{x} + r, \bar{y} + r) - f(\bar{x}, \bar{y} + r) - \big(f(\bar{x} + r, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})\big).$$

Occupiamoci della funzione F. La funzione F è derivabile. Infatti, se definiamo $\tilde{f} : [\bar{x}-|r|, \bar{x}+|r|] \to \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) = f(x, \bar{y}+r) - f(x, \bar{y}),$$

e $\gamma : [0,1] \to [\bar{x}-|r|, \bar{x}+|r|]$,

$$\gamma(t) = \bar{x} + tr,$$

risulta $F = \bar{f} \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$. $\bar{f}$ è una funzione di una variabile reale e derivabile e

$$\bar{f}'(x) = f_x(x, \bar{y}+r) - f_x(x, \bar{y}).$$

γ è ovviamente derivabile e $\gamma'(t) = r$. Pertanto F è composizione di funzioni derivabili e per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$F'(t) = \bar{f}'(\gamma(t))\gamma'(t) = \big(f_x(\bar{x}+tr, \bar{y}+r) - f_x(\bar{x}+tr, \bar{y})\big)\, r.$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in]0,1[$ tale che

$$F(1) - F(0) = F'(\xi). \tag{5.6.1}$$

Si ha

$$F'(\xi) = (\tilde{f} \circ \gamma)'(\xi) = \big(f_x(\bar{x}+\xi r, \bar{y}+r) - f_x(\bar{x}+\xi r, \bar{y})\big)\, r. \tag{5.6.2}$$

Per ipotesi f_x è differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$f_x(\bar{x}+\xi r, \bar{y}+r) = f_x(\bar{x}, \bar{y}) + f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\xi r + f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})r + o(|(\xi r, r)|) \quad \text{per } r \to 0$$

e

$$f_x(\bar{x}+\xi r, \bar{y}) = f_x(\bar{x}, \bar{y}) + f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\xi r + o(|(\xi r, 0)|) \quad \text{per } r \to 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f_x(\bar{x}+\xi r, \bar{y}+r) - f_x(\bar{x}+\xi r, \bar{y}) &= f_x(\bar{x}, \bar{y}) + f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\xi r + f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})r + o(|(\xi r, r)|) \\ &- \big(f_x(\bar{x}, \bar{y}) + f_{xx}(\bar{x}, \bar{y})\xi r + o(|(\xi r, 0)|)\big) \\ &= f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})r + o(|(\xi r, r)|) + o(|(\xi r, 0)|) \quad \text{per } r \to 0 \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

Raccogliendo (5.6.1), (5.6.2) e (5.6.3) e osservando che

$$o(|(\xi r, r)|) = o(|(\xi r, 0)|) = o(r) \quad \text{per } r \to 0$$

si ottiene

$$F(1) - F(0) = f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})r^2 + r\,o(r) \quad \text{per } r \to 0. \tag{5.6.4}$$

Occupiamoci ora della funzione G, che ricordiamo è così definita:

$$G(t) := f(\bar{x}+r, \bar{y}+tr) - f(\bar{x}, \bar{y}+tr).$$

Ragionando in modo analogo a sopra, è facile dimostrare che G è derivabile e

$$G'(t) = \big(f_y(\bar{x}+r, \bar{y}+tr) - f_y(\bar{x}, \bar{y}+tr)\big)\, r.$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\eta \in]0,1[$ tale che

$$G(1) - G(0) = G'(\eta). \tag{5.6.5}$$

Come appena detto,

$$G'(\eta) = \big(f_y(\bar{x}+r, \bar{y}+\eta r) - f_y(\bar{x}, \bar{y}+\eta r)\big)\, r. \tag{5.6.6}$$

Per ipotesi f_y è differenziabile in $(\bar{x}+r, \bar{y})$:

$$f_y(\bar{x}+r, \bar{y}+\eta r) = f_y(\bar{x}, \bar{y}) + f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})r + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\eta r + o(|(r, \eta r)|) \quad \text{per } r \to 0$$

e

$$f_y(\bar{x}, \bar{y}+\eta r) = f_y(\bar{x}, \bar{y}) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\eta r + o(|(0, \eta r)|) \quad \text{per } r \to 0.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} f_y(\bar{x}+r, \bar{y}+\eta r) - f_y(\bar{x}, \bar{y}+\eta r) &= f_y(\bar{x}, \bar{y}) + f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})r + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\eta r + o(|(r, \eta r)|) \\ &\quad - \big(f_y(\bar{x}, \bar{y}) + f_{yy}(\bar{x}, \bar{y})\eta r + o(|(0, \eta r)|)\big) \\ &= f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})r + o(|(r, \eta r)|) + o(|(0, \eta r)|) \quad \text{per } r \to 0 \end{aligned} \tag{5.6.7}$$

Raccogliendo (5.6.5), (5.6.6) e (5.6.7) e osservando che

$$o(|(r, \eta r)|) = o(|(0, \eta r)|) = o(r),$$

si ottiene

$$G(1) - G(0) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})r^2 + r\,o(r) \quad \text{per } r \to 0. \tag{5.6.8}$$

Ricordando che $F(1) - F(0) = G(1) - G(0)$, deduciamo da (5.6.4) e (5.6.8) che

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y})r^2 + o(r^2) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y})r^2 + o(r^2) \quad \text{per } r \to 0,$$

da cui, semplificando per r^2,

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) + o(1) \quad \text{per } r \to 0.$$

Mandando r a 0, otteniamo

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Per la dimostrazione per $n > 2$, fissati $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i < j$, basta considerare la funzione di due variabili

$$(x_i, x_j) \mapsto f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \cdots, \bar{x}_{j-1}, x_j, \bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_n)$$

e applicare ad essa il risultato appena dimostrato. □

Teorema 5.6.5 (Teorema di Schwarz: II versione).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$. Se esistono $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ ed esse sono continue in $\bar{x} \in A$, allora

$$f_{x_i x_j}(\bar{x}) = f_{x_j x_i}(\bar{x}).$$

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione per $n = 2$. Dimostriamo cioè il seguente risultato:
Se $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^2$, con f derivabile fino al secondo ordine e se f_{xy} e f_{yx} sono continue in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$, allora

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Essendo A aperto esiste $r > 0$ tale che $[\bar{x}, \bar{x} + r] \times [\bar{y}, \bar{y} + r] \subseteq A$.
Definiamo $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $G : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := f(\bar{x} + tr, \bar{y} + r) - f(\bar{x} + tr, \bar{y}), \qquad G(t) := f(\bar{x} + r, \bar{y} + tr) - f(\bar{x}, \bar{y} + tr).$$

Le funzioni F e G sono derivabili. Infatti, se definiamo $f_1 : [\bar{x}, \bar{x} + r] \to \mathbb{R}$

$$f_1(x) = f(x, \bar{y} + r) - f(x, \bar{y}),$$

e $\gamma : [0,1] \to [\bar{x}, \bar{x} + r]$,

$$\gamma(t) = \bar{x} + tr,$$

esse sono funzioni di una variabile reale e, in particolare,

$$f_1'(x) = f_x(x, \bar{y} + r) - f_x(x, \bar{y}).$$

Risulta $F = f_1 \circ \gamma$, quindi F è derivabile e per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$F'(t) = f_1'(\gamma(t))\gamma'(t) = \big(f_x(\gamma(t), \bar{y} + r) - f_x(\gamma(t), \bar{y})\big)\gamma'(t) = \big(f_x(\bar{x} + tr, \bar{y} + r) - f_x(\bar{x} + tr, \bar{y})\big)\, r.$$

Per il Teorema di Lagrange esiste $\xi \in]0,1[$ tale che

$$F(1) - F(0) = F'(\xi).$$

Si ha

$$F'(\xi) = (f_1 \circ \gamma)'(\xi) = \big(f_x(\bar{x} + \xi r, \bar{y} + r) - f_x(\bar{x} + \xi r, \bar{y})\big)\, r.$$

Consideriamo ora $H : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$H(t) := f_x(\bar{x} + \xi r, \bar{y} + tr).$$

Ragionando come sopra, H risulta derivabile, in quanto composizione di funzioni derivabili di una variabile. Per il Teorema di Lagrange, esiste $\zeta \in]0,1[$ tale che

$$f_x(\bar{x} + \xi r, \bar{y} + r) - f_x(\bar{x} + \xi r, \bar{y}) = H(1) - H(0) = H'(\zeta) = f_{xy}(\bar{x} + \xi r, \bar{y} + \zeta r)\, r.$$

Raccogliendo le informazioni si ha

$$F(1) - F(0) = (H(1) - H(0))\, r = H'(\zeta)\, r = f_{xy}(\bar{x} + \xi r, \bar{y} + \zeta r)\, r^2$$

Analogamente, definiamo $G : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$G(t) := f(\bar{x} + r, \bar{y} + tr) - f(\bar{x}, \bar{y} + tr).$$

La funzione G è derivabile e per il Teorema di Lagrange esiste $\eta \in]0,1[$ tale che

$$G(1) - G(0) = G'(\eta).$$

Risulta

$$G'(\eta) = \big(f_y(\bar{x}+r, \bar{y}+\eta r) - f_y(\bar{x}, \bar{y}+\eta r)\big)\, r.$$

Consideriamo $K : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$K(t) := f_y(\bar{x} + tr, \bar{y}+\eta r).$$

K è derivabile e, per il Teorema di Lagrange, si ha che esiste $\tau \in]0,1[$ tale che

$$f_y(\bar{x}+r, \bar{y}+\eta r) - f_y(\bar{x}, \bar{y}+\eta r) = K(1) - K(0) = K'(\tau) = f_{yx}(\bar{x}+\tau r, \bar{y}+\eta r) r.$$

Raccogliendo le informazioni si ha e

$$G(1) - G(0) = (K(1) - K(0)) r = K'(\tau) r = f_{yx}(\bar{x}+\tau r, \bar{y}+\eta r) r^2.$$

Osserviamo che $F(1) - F(0) = G(1) - G(0)$, infatti:

$$F(1) - F(0) = f(\bar{x}+r, \bar{y}+r) - f(\bar{x}+r, \bar{y}) - \big(f(\bar{x}, \bar{y}+r) - f(\bar{x}, \bar{y})\big)$$

e

$$G(1) - G(0) = f(\bar{x}+r, \bar{y}+r) - f(\bar{x}, \bar{y}+r) - \big(f(\bar{x}+r, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})\big).$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f_{xy}(\bar{x}+\xi r, \bar{y}+\zeta r) r^2 = f_{yx}(\bar{x}+\tau r, \bar{y}+\eta r) r^2$$

da cui, semplificando per r^2,

$$f_{xy}(\bar{x}+\xi r, \bar{y}+\zeta r) = f_{yx}(\bar{x}+\tau r, \bar{y}+\eta r).$$

Mandando r a 0 e sfruttando la continuità di f_{xy} e f_{xy} in $(\bar{x}, \bar{y})$, otteniamo

$$f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) = f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Per la dimostrazione per $n > 2$, fissati $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i < j$, basta considerare la funzione di due variabili

$$(x_i, x_j) \mapsto f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \cdots, \bar{x}_{j-1}, x_j, \bar{x}_{j+1}, \cdots, \bar{x}_n)$$

e applicare ad essa il risultato appena dimostrato. $\square$

Corollario 5.6.6.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$, con f derivabile fino al secondo ordine.
Se $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ sono continue in $\bar{x} \in A$, allora

$$f_{x_i x_j}(\bar{x}) = f_{x_j x_i}(\bar{x}).$$

Corollario 5.6.7.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $f \in C^2(A)$ allora la matrice hessiana di f è simmetrica.

Esercizio 5.6.8.
Dimostrare che se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

allora si ha

$$f_{xy}(0,0) = 1, \quad f_{yx}(0,0) = 0$$

5.7. Formula di Taylor

Definizione 5.7.1.
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Se f è differenziabile in $\bar{x}$, si chiama *Polinomio di Taylor di I grado della funzione f centrato in $\bar{x}$* il polinomio di I grado nelle variabili $x_1, \cdots, x_n$

$$T_1(f,\bar{x})(x) := f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 5.7.2.
I polinomi P di I grado nelle variabili $x_1, \cdots, x_n$ tali che $P(\bar{x}) = f(\bar{x})$ sono tutti e soli i polinomi

$$P(x) = P(x_1, \cdots, x_n) = f(\bar{x}) + \langle u, x - \bar{x} \rangle = f(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - \bar{x}_i) \quad \text{con } u \in \mathbb{R}^n.$$

Dal Corollario 5.3.5 (d) si ha che la differenziabilità è equivalente alla derivabilità di f in $\bar{x}$ con

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|) \quad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Il polinomio di Taylor di I grado della funzione f centrato in $\bar{x}$,

$$T_1(f,\bar{x})(x) := f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

per il Teorema 5.3.2 (i) è l'unico polinomio di I grado nella variabile x per il quale valgono:

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + o(|x - \bar{x}|) & \text{per } x \to \bar{x} \\ f(\bar{x}) = P(\bar{x}). \end{cases}$$

Per questo motivo, si usa dire che, tra gli iperpiani di $\mathbb{R}^{n+1}$ passanti per $(\bar{x}, f(\bar{x}))$, quello "che meglio approssima il grafico di f vicino a $(\bar{x}, f(\bar{x}))$" è quello di equazione

$$x_{n+1} = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle.$$

Esso prende il nome di *iperpiano tangente al grafico di f in* $(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Definizione 5.7.3 (Iperpiano tangente).
Siano $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $\bar{x} \in \operatorname{int} A$.
Se f è differenziabile in $\bar{x}$, si chiama *iperpiano tangente al grafico di f in* $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ l'iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$ avente equazione

$$x_{n+1} = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 5.7.4. Segue da quanto appena detto che se $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\bar{x} \in \operatorname{int} A$ e f è differenziabile in $\bar{x}$, allora un vettore normale all'iperpiano tangente al grafico di f in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ è

$$(-\nabla f(\bar{x}), 1).$$

Lemma 5.7.5. *Siano $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, e $f : B(\bar{x}, r) \to \mathbb{R}$. Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e sia $F :]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[\to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\bar{x} + tv)$.*
Se f è differenziabile in $B(\bar{x}, r)$ allora F è derivabile in $]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[$ e

$$F'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + tv), v \rangle.$$

Se $f \in C^1(B(\bar{x}, r))$ allora $F \in C^1(]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[)$ e

$$F'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + tv), v \rangle.$$

Se $f \in C^2(B(\bar{x}, r))$ allora $F \in C^2(]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[)$ e

$$F'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + tv), v \rangle, \qquad F''(t) = \langle D^2 f(\bar{x} + tv) v, v \rangle.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per le prime due uguaglianze si vedano i Corollari 5.5.5 e 5.5.7.
Sia $f \in C^2$. Allora F è in C^2, essendo composizione di funzioni C^2.
Risulta

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\bar{x} + tv) v_i,$$

dunque

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_j}(\bar{x}+tv)v_i v_j = \langle D^2 f(\bar{x}+t(x-\bar{x}))v, v\rangle.$$

□

Teorema 5.7.6 (Formula di Taylor con resto di Lagrange: caso $f \in C^1$).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *A aperto. Sia* $f \in C^1(A)$, *e siano* $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$, *tali che* $[\bar{x}, x] \subseteq A$.
Allora esiste $\xi \in]\bar{x}, x[$ *tale che*

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\xi), x-\bar{x}\rangle.$$

DIMOSTRAZIONE.
Siano $x, \bar{x} \in A$ tali che $[\bar{x}, x] \subseteq A$. Definiamo $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\bar{x}+t(x-\bar{x}))$. Si ha che $F \in C^1$, essendo composizione di funzioni C^1.
Applicando a F la formula di Taylor del secondo ordine con resto di Lagrange per funzioni di 1 variabile, otteniamo che esiste $\tau \in]0,1[$ tale che

$$F(1) = F(0) + F'(\tau)(1-0).$$

Essendo, per il Lemma 5.7.5,

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\bar{x}+t(x-\bar{x}))(x_i-\bar{x}_i),$$

otteniamo facilmente la tesi, con $\xi := \bar{x}+\tau(x-\bar{x})$ punto di $]\bar{x}, x[$. □

Teorema 5.7.7 (Formula di Taylor con resto di Lagrange: caso $f \in C^2$).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *A aperto. Sia* $f \in C^2(A)$, *e siano* $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$, *tali che* $[\bar{x}, x] \subseteq A$.
Allora esiste $\xi \in]\bar{x}, x[$ *tale che*

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\xi)(x-\bar{x}), x-\bar{x}\rangle.$$

DIMOSTRAZIONE.
Siano $x, \bar{x} \in A$ tali che $[\bar{x}, x] \subseteq A$. Definiamo $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = f(\bar{x}+t(x-\bar{x}))$. Si ha che $F \in C^2$, essendo composizione di funzioni C^2.
Applicando a F la formula di Taylor del secondo ordine con resto di Lagrange per funzioni di 1 variabile, otteniamo che esiste $\tau \in]0,1[$ tale che

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1-0) + \frac{1}{2}F''(\tau)(1-0)^2,$$

ossia, dal Lemma 5.7.5,

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x_i - \bar{x}_i),$$

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i x_j}(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) = \langle D^2 f(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle.$$

Da qui otteniamo

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\bar{x} + \tau(x - \bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle.$$

Essendo $\tau \in]0,1[$, deduciamo che $\xi := \bar{x} + \tau(x - \bar{x})$ è il punto di $]\bar{x}, x[$ cercato.

□

I precedenti teoremi si generalizzano al caso di funzioni di classe C^k, $k \geq 2$. A tal fine, introduciamo la nozione di multi-indice.

Multi-indice:
$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
$|\alpha|$ = altezza di $\alpha := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$
$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$
$\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_n!$
$D^\alpha f(\bar{x}) = D^{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)} f(\bar{x}) = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}(\bar{x})$,
con la convenzione:
$D^{(0,\cdots,0)} f(\bar{x}) = f(\bar{x})$

Teorema 5.7.8 (Formula di Taylor con resto di Lagrange).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto. Sia $f \in C^k(A)$, e siano $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$, tali che $[\bar{x}, x] \subseteq A$. Allora esiste $\xi \in]\bar{x}, x[$, tale che

$$\begin{aligned} f(x) = f(\bar{x}) &+ \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{h!} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_h=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_h}}(\bar{x})(x - \bar{x})_{i_1}(x - \bar{x})_{i_2} \cdots (x - \bar{x})_{i_h} \\ &+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k=1}^{n} f_{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}}(\xi)(x - \bar{x})_{i_1}(x - \bar{x})_{i_2} \cdots (x - \bar{x})_{i_k}, \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

formula che, usando i multi-indici e il Teorema di Schwarz, si dimostra essere equivalente a

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k-1} \frac{D^\alpha f(\bar{x})}{\alpha!}(x - \bar{x})^\alpha + \sum_{|\alpha| = k} \frac{D^\alpha f(\xi)}{\alpha!}(x - \bar{x})^\alpha. \tag{5.7.2}$$

Esercizio 5.7.9.
Verificare che se $k = 1$ e $k = 2$ le formule (5.7.1) e (5.7.2) sono uguali e coincidono con le formule dei Teoremi 5.7.6 e 5.7.7.

Teorema 5.7.10 (Formula di Taylor con resto di Peano: caso $f \in C^2$).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto. Sia $f \in C^2(A)$, e siano $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$, tali che $[\bar{x}, x] \subseteq A$. Allora

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2) \qquad \textit{per } x \to \bar{x}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Per il Teorema 5.7.7, esiste $\xi \in]\bar{x}, x[$, tale che

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\xi)(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle.$$

Per ottenere la tesi basta dimostrare che

$$\langle D^2 f(\xi)(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle = \langle D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2) \qquad \text{per } x \to \bar{x},$$

ossia

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\langle (D^2 f(\xi) - D^2 f(\bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle}{|x - \bar{x}|^2} = 0.$$

Dal Teorema di Cauchy-Schwarz:

$$|\langle (D^2 f(\xi) - D^2 f(\bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle| \leq |(D^2 f(\xi) - D^2 f(\bar{x}))(x - \bar{x})||x - \bar{x}|.$$

Per il Lemma 4.1.3 si ha

$$|(D^2 f(\xi) - D^2 f(\bar{x}))(x - \bar{x})| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(\xi) - f_{x_i x_j}(\bar{x}))^2}\, |x - \bar{x}|.$$

Deduciamo quindi

$$0 \leq \frac{\left| \langle (D^2 f(\xi) - D^2 f(\bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle \right|}{|x - \bar{x}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(\xi) - f_{x_i x_j}(\bar{x}))^2}.$$

Notando che, essendo $\xi \in]\bar{x}, x[$, si ha

$$0 \leq |\xi - \bar{x}| \leq |x - \bar{x}| \to_{x \to \bar{x}} 0,$$

usando che $f \in C^2$, otteniamo

$$\lim_{x \to \bar{x}} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (f_{x_i x_j}(\xi) - f_{x_i x_j}(\bar{x}))^2} = 0.$$

Abbiamo così dimostrato quanto desiderato. $\square$

Per funzioni a valori vettoriali non è valido il Teorema 5.7.6, come mostra il seguente esempio.

Esempio 5.7.11.
Sia $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Allora

$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\nexists\, \tau \in [0,2\pi] \ : \ f(2\pi) - f(0) = 2\pi f'(\tau).$$

Per funzioni a valori vettoriali vale, però, una variante del Teorema 5.7.6.

Proposizione 5.7.12.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ differenziabile.
Siano $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$, tali che $[\bar{x}, x] \subseteq A$. Se $v \in \mathbb{R}^m$, allora esiste $z \in]\bar{x}, x[$ tale che

$$\langle f(x) - f(\bar{x}), v\rangle = \langle Df(z)(x - \bar{x}), v\rangle.$$

DIMOSTRAZIONE.
Fissato $v \in \mathbb{R}$, definiamo $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t) = \langle f(\bar{x} + t(x - \bar{x})), v\rangle$, ossia

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\bar{x} + t(x - \bar{x}))\, v_i.$$

dove f_i denota la i-esima componente di f e v_i la i-esima componente di v. Per il Corollario 5.5.6 e i Corollari 5.3.6 e 5.4.10, F è derivabile. Per il Teorema di Lagrange di AM1A, esiste $\tau \in]0,1[$ tale che $F(1) - F(0) = F'(\tau)(1-0)$. Si ha

$$F(1) - F(0) = \langle f(x) - f(\bar{x}), v\rangle.$$

Calcoliamo ora la derivata di F in un punto $t \in [0,1]$. Si ha

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dt}\big(f_i(\bar{x} + t(x - \bar{x})\big)\, v_i = \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla f_i(\bar{x} + t(x - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle\, v_i.$$

Osserviamo che

$$\langle \nabla f_i(\bar{x} + t(x - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle = i\text{-esima riga di } Df(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x - \bar{x}),$$

da cui

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{m} \big(Df(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x - \bar{x})\big)_i\, v_i = \langle Df(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x - \bar{x}), v\rangle.$$

Si ottiene così la tesi, con $z = \bar{x} + \tau(x - \bar{x})$.

$\square$

5.8. Esercizi

Esercizio 5.8.1. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2(y-2)$,

(a) studiare la continuità, la differenziabilità di f,
(b) determinare le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x_0,y_0)$, per $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e per qualunque direzione λ,
(c) determinare il piano tangente al grafico nel punto $(1,-2,f(1,-2))$.

[Sol. es: 5.8.1:

(a) f è un polinomio e quindi è differenziabile, per cui f è continua, derivabile ed esistono tutte le derivate direzionali.
(b) Dalla differenziabilità di f segue che, posto $\lambda=(\alpha,\beta)$.
$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x_0,y_0)=\langle\nabla f(x_0,y_0),\lambda\rangle=\langle(2x_0(y_0-2),x_0^2),(\alpha,\beta)\rangle=2\alpha x_0(y_0-2)+\beta x_0^2.$$
(c) $z=f(1,-2)+f_x(1,-2)(x-1)+f_y(1,-2)(y+2)=-4-8(x-1)+(y+2)=\dots$]

Esercizio 5.8.2. Siano $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabili. Derivare le seguenti funzioni composte rispetto alla variabile t:

1) $f(t,t^3)$, 2) $f(\log t,\sin t)$, 3) $f(g(t),1-t^2)$, 4) $f(-\sqrt{t},g^2(t))$,

5) $f(\cos(g(t)),\arctan t)$, 6) $f(g(2t),g^2(t))$, 7) $f(1+g(1+3t),\dfrac{1}{g(\sqrt{t})})$, 8) $f(t+g(t),\log_2 t)$.

[Sol. es: 5.8.2: 1) $f_x(t,t^3)+f_y(t,t^3)3t^2$,
2) $f_x(\log t,\sin t)\frac{1}{t}+f_y(\log t,\sin t)\cos t$,
3) $f_x(g(t),1-t^2)g'(t)+f_y(g(t),1-t^2)(-2t)$,
4) $f_x(-\sqrt{t},g^2(t))\left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)+f_y(-\sqrt{t},g^2(t))2g(t)g'(t)$,
5) $f_x(\cos(g(t)),\arctan t)\big(-\sin(g(t))g'(t)\big)+f_y(\cos(g(t)),\arctan t)\frac{1}{1+t^2}$,
6) $f_x(g(2t),g^2(t))g'(2t)2+f_y(g(2t),g^2(t))2g(t)g'(t)$,
7) $f_x(1+g(1+3t),\frac{1}{g(\sqrt{t})})g'(1+3t)3+f_y(1+g(1+3t),\frac{1}{g(\sqrt{t})})\frac{-1}{g^2(\sqrt{t})}g'(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}}$,
8) $f_x(t+g(t),\log_2 t)(1+g'(t))+f_y(t+g(t),\log_2 t)\frac{1}{t\log_e 2}$.]

Esercizio 5.8.3 (I). Si consideri
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0.0).\end{cases}$$

(i) Determinare $\nabla f(x,y)$ per $(x,y)\neq(0,0)$
(ii) Determinare, se esistono, $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ per $(x,y)=(0,0)$.

(iii) Studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$.
(iv) Calcolare la derivata direzionale di f in $(2,0)$ rispetto alla direzione $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
(v) f è continua in $(0,0)$?

Esercizio 5.8.4 (I). Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^3 + x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0.0). \end{cases}$$

Studiare la differenziabilità di f.

Esercizio 5.8.5 (I). Sia $f(x,y) = |x|y^3$ in $(0,0)$.

(1) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1,2,f(-1,2))$.
(2) Studiare la differenziabilità di f nell'origine.

Esercizio 5.8.6 (I). Studiare la differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x+1)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio 5.8.7 (I). Siano $f(x,y) = e^{\frac{1}{x^3y^2}}$ e $\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Calcolare, se esistono,

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
(b) $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1,2)$.

Esercizio 5.8.8 (GC: da esercizi2variabili-8-3-2010). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sqrt[3]{(y-x)^2}.$$

Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabiltà di f in $(0,0)$ e in $(1,2)$. Determinare, se esistono, le derivate direzionali nella direzione $\lambda = (\alpha, \beta)$ in $(0,0)$ e in $(1,2)$. Se in $(0,0)$ o in $(1,2)$ la funzione risulta differenziabile, determinare il piano tangente al grafico in tale punto.

SOLUZIONE:
f è chiaramente continua in $(0,0)$ ma non è derivabile in $(0,0)$, infatti non esiste la derivata parziale rispetto a x, non esistendo il seguente limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-1/3}.$$

Non essendo derivabile in $(0,0)$, la f non è neppure differenziabile.
Le derivate direzionali in $(0,0)$ esistono se solo se $\alpha=\beta$ (e quindi se e solo se $\alpha=\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, dovendo essere λ un versore). Infatti:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^2(\beta-\alpha)^2}}{t} \tag{5.8.1}$$

che esiste se e solo se $\beta=\alpha$ e vale che

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(0,0)=0 \qquad \text{con } \lambda=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Se $\alpha\neq\pm\beta$ il limite (5.8.1) non esiste.

In un intorno di $(1,2)$ la f è di classe C^1. Ciò implica che f è differenziabile, derivabile, continua. Si ha che $\nabla f(1,2)=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.
Essendo f differenziabile in $(1,2)$, le derivate direzionali in $(1,2)$ esistono rispetto a una qualunque direzione $\lambda=(\alpha,\beta)$. Inoltre, esse si possono calcolare con la formula

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(1,2)=\langle\nabla f(1,2),\lambda\rangle=\langle(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}),(\alpha,\beta)\rangle=-\frac{2\alpha}{3}+\frac{2\beta}{3}.$$

Il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,2,f(1,2))$ è $z=1-\frac{2}{3}(x-1)+\frac{2}{3}(y-2)$.

Esercizio 5.8.9 (GC: da esercizi2variabili-8-3-2010). Studiare la continuità, la derivabilità e la differenziabiltà in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|y^4-x^6}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

SOLUZIONE: f è continua in $(0,0)$, infatti per il teorema dei carabinieri:

$$0\le\left|\frac{|x|y^4-x^6}{(x^2+y^2)^2}\right|\le\frac{|x|y^4}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^6}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^4}{(x^2+y^2)^2}|x|+\frac{x^4}{(x^2+y^2)^2}x^2\le|x|+x^2$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $x\to 0$.
Derivabilità:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h^6}{h^4}}{h}=\lim_{h\to 0}-h=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

e

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}0=0=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Differenziabilità: f non è differenziabile in $(0,0)$, infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-[f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{|h|k^4-h^6}{(h^2+k^2)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|h|k^4-h^6}{(h^2+k^2)^{5/2}}.$$

Scegliendo $k=h$ ottengo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|^5-h^6}{2^{5/2}h^5}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|^5(1-|h|)}{2^{5/2}|h|^5}=\frac{1}{2^{5/2}}\lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|}{|h|}\right)^5=\frac{1}{2^{5/2}},$$

dunque tale limite non è 0.

Esercizio 5.8.10 (GC: da esercizi2variabili-8-3-2010). Studiare il dominio, il segno di f e, in $(0,0)$, la continuità, la derivabilità e la differenziabiltà di f:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y-x)^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

SOLUZIONE:

f è continua in $(0,0)$. Infatti, in coordinate polari:

$$|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=\frac{r^3|\sin\theta-\cos\theta|^3}{r^2+r^4(\cos^2\theta\sin^2\theta)}\le\frac{r^3}{r^2+r^4(\cos^2\theta\sin^2\theta)}\le\frac{r^3}{r^2}=r.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|\le\varphi(r)$$

dove $\varphi(r)=r$ è indipendente da θ e $\varphi(r)\to 0$ per $r\to 0^+$. Dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$.

Derivabilità: f è derivabile in $(0,0)$, infatti

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(-h)^3}{h^2}}{h}=-1=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

e

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{k^2}}{k}=1=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Differenziabilità: f non è differenziabile in $(0,0)$, infatti

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-[f(0,0)+f_x(0,0)h+f_y(0,0)k]}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{(k-h)^3}{h^2+k^2+h^2k^2}+h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Tale limite non è 0, anzi non esiste, come si può verificare restringendosi alla retta $k=2h$.

Esercizio 5.8.11 (GC: da esercizi2variabili-8-3-2010). Determinare il dominio e i punti di derivabilità di

$$f(x,y)=|y|e^{-(x^2+y^2)}.$$

SOLUZIONE:
Il dominio è $\mathbb{R}^2$. I punti di sicura derivabilità di f sono gli (x,y) con $y\neq 0$. Esaminiamo la derivabilità in $(x,0)$. Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0=\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)$$

e

$$\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|e^{-(x^2+k^2)}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{|k|e^{-(x^2+k^2)}}{k}=\lim_{k\to 0}e^{-(x^2+k^2}\lim_{k\to 0}\frac{|k|}{k}=e^{-x^2}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{|k|}{k}$$

e quest'ultimo limite non esiste (fare $k\to 0^+$ e $k\to 0^-$). Dunque f non è derivabile in $(x,0)$ perché manca la derivata parziale rispetto a y.

Esercizio 5.8.12 (GC: da esercizi2variabili-8-3-2010). Determinare il dominio e i punti di derivabilità di

$$f(x,y)=|x|+|y|x^2.$$

SOLUZIONE:
I punti di sicura derivabilità di f sono gli (x,y) con x e y entrambi diversi da 0, cioé non appartenenti agli assi.
Esaminiamo la derivabilità in $(0,y)$.
Si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|+|y|h^2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{|y|h^2}{h};$$

l'ultimo limite esiste ed è 0, mentre il penultimo non esiste (fare $h \to 0^+$ e $h \to 0^-$). Dunque f non è derivabile in $(0, y)$ perché manca la derivata parziale rispetto a x.
Studiamo ora la derivabilità in $(x, 0)$ supponendo $x \neq 0$ altrimenti si ha $(0, 0)$ che è incluso nel caso precedente.
Si ha

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|x| + |k|x^2 - |x|}{k} = x^2 \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k}.$$

Ora, questo limite non esiste se $x \neq 0$. Dunque f non è derivabile rispetto a y in $(x, 0)$ per $x \neq 0$.
Concludendo, f non è derivabile sugli assi.

Esercizio 5.8.13 (I). Si consideri $f(x, y) = \dfrac{x - y^3}{|y|}$.

(a) Calcolarne il limite per $(x, y) \to (0, 0)$.

(b) Disegnare (colorando in blu/nero) il dominio A di $F(x, y) = \log f(x, y)$.
[Per la frontiera di A: linea continua se appartiene al dominio, linea tratteggiata se non vi appartiene. Se un singolo punto di una curva non viene preso, crocettarlo]

Esercizio 5.8.14. Si consideri $f(x, y) = \begin{cases} y\sqrt[5]{x^2 y^3} & \text{se } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0.0). \end{cases}$
Studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

Esercizio 5.8.15. Sia $f(x, y) = |x|y^3$ in $(0, 0)$.

(1) Studiare la differenziabilità di f nell'origine.
(2) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(-1, 2, f(-1, 2))$.

Esercizio 5.8.16 (GC: da esercizi2variabili-8-3-2010). Calcolare il gradiente e la matrice hessiana delle seguenti funzioni:

$$1)\ \sqrt{x^2 y}, \quad 2)\ e^{xy^2 - y}, \quad 3)\ x^2 \arctan \frac{y}{x}.$$

SOLUZIONE (parziale) (solo per i gradienti e senza le semplificazioni finali)
1) $\left(\frac{2xy}{2\sqrt{x^2y}}, \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y}}\right)$;
2) $e^{xy^2-y}\left(y^2, 2xy-1\right)$;
3) $\left(2x\arctan\frac{y}{x} + x^2\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2}), x^2\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}\right)$.

Esercizio 5.8.17 (T). Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ una funzione radiale, ossia

$$\exists\, v : [0,\infty[\to \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad u(x) = v(|x|).$$

Calcolare $\Delta u(x)$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dove Δ è l'*operatore di Laplace*, ossia

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}.$$

RISPOSTA:
$\Delta u = v''(|x|) + \frac{n-1}{|x|}v'(|x|)$.

Esercizio 5.8.18 (T). Studiare dominio, la continuità, la derivabiltà e la differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(y-x)^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

RISPOSTA:
Dominio: $\mathbb{R}^2$.
Continuità: sì
Derivabilità: sì
Differenziabilità: non lo è in $(0,0)$.

Esercizio 5.8.19 (T). Studiare dominio naturale e segno della funzione

$$f(x,y) = \sqrt[3]{(y-x)^2}.$$

Studiarne poi la continuità, derivabiltà, l'esistenza delle derivate direzionali e differenziabilità di f in $(0,0)$ e $(1,2)$. Qualora f risulti differenziabile in tali punti, determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nei punti del grafico corrispondenti.

RISPOSTA:
Dominio: $\mathbb{R}^2$.
Segno: $f \geq 0$ sempre, $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = x$
Continuità: sì

Derivabilità: f è derivabile in $(1,2)$ e non in $(0,0)$.
Differenziabilità: lo è in $(1,2)$ e non in $(0,0)$.
Derivate direzionali in $(0,0)$: esistono se e solo se il versore è $\lambda = (\alpha,\beta)$ con $\alpha = \beta$.
Derivate direzionali in $(1,2)$: esistono rispetto a qualunque direzione e se il versore è $\lambda = (\alpha,\beta)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(1,2) = -\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta.$$

Piano tangente al grafico di f in $(1,2,f(1,2))$: ha equazione

$$z = 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-2).$$

Esercizio 5.8.20 (T). Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determinare per quali α f è continua in $\mathbb{R}^2$ e per quali α f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

RISPOSTA:
Continuità: f è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e f è continua in $\{(0,0)\}$ se e solo se $\alpha > 0$.
Differenziabilità: f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ se e solo se $\alpha > 1$. f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5.8.21 (da prova scritta AM2: 13-1-2020). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = |x|(xy^2 + |x|).$$

(a) Studiare la differenziabilità di f
(b) Calcolare la derivata direzionale di f in $(0,1)$ rispetto alla direzione $\lambda = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

SOLUZIONE dell'Esercizio 5.8.21:
(a):
Si ha $f(x,y) = x^2y^2\,\mathrm{sgn}(x) + x^2$. Affermiamo che f è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ essendo somma di funzioni di classe C^1 e quindi differenziabile. Infatti $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2\,\mathrm{sgn}(x)$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$. L'unico dubbio è in 0, che ora discutiamo. Esiste $g'(0)$ e vale 0, in quanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,\mathrm{sgn}(x)}{x} = 0.$$

Allora $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -2x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} g'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} g'(x) = \lim_{x\to 0^-} -2x = 0 = g'(0),$$

da cui

$$\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0).$$

Ciò prova che g' è continua anche in 0.
(b):
Essendo f differenziabile, allora

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,1) = \langle \nabla f(0,1), \lambda \rangle.$$

Ricordando la definizione di g data sopra, si ha

$$f_x(x,y) = y^2 g'(x) + 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(0,1) = g'(0) = 0.$$

Analogamente

$$f_y(x,y) = 2yg(x) + 0 \quad \Rightarrow \quad f_y(0,1) = 2g(0) = 0.$$

Pertanto

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,1) = \langle (0,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = 0.$$

Esercizio 5.8.22 (da prova scritta 10-2-2020). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} + \sqrt{x^2+y^2} & \text{se } x \neq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ \\ 0 & \text{se } x = 0,\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$.
(b) Determinare per quali $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e per quali versori $\lambda = (\alpha, \beta)$ esiste la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}(x,y)$ e, ove esista, calcolarla.

Esercizio 5.8.23 (da prova scritta 29-6-2020). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{x^3 + 8y^3} & \text{se } (x,y) \in A \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin A \end{cases}$$

dove $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è il dominio naturale della funzione

$$(x,y) \mapsto \frac{x^4 - x^2y^2}{x^3 + 8y^3}.$$

Studiare la **differenziabilità** e l'**esistenza delle derivate direzionali** di f in $(0,0)$ (qualora esistano, calcolarle).

SOLUZIONE:

$$A = \{(x,y) : x^3 + 8y^3 \neq 0\} = \{(x,y) : y \neq -\frac{1}{2}x\}.$$

In Oxy si tratta del piano senza la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$.
Pertanto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{x^3 + 8y^3} & \text{se } y \neq -\frac{1}{2}x \\ \\ 0 & \text{se } y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

I modo:
Sia $\lambda = (\alpha, \beta)$ versore, con $\beta = -\frac{1}{2}\alpha$. Allora

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha, -\frac{1}{2}t\alpha) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Sia $\lambda = (\alpha, \beta)$ versore, $\beta \neq -\frac{1}{2}\alpha$. Allora

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4(\alpha^4 - \alpha^2\beta^2)}{t^4(\alpha^3 + 8\beta^3)} = \frac{\alpha^4 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^3 + 8\beta^3}.$$

Dunque esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ qualunque sia il versore λ e

$$\lambda \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = \begin{cases} \frac{\alpha^4 - \alpha^2\beta^2}{\alpha^3 + 8\beta^3} & \text{se } \beta \neq -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \text{se } \beta = -\frac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

f non può essere differenziabile in $(0,0)$, perché se lo fosse dovrebbe essere, per ogni versore $\lambda = (\alpha, \beta)$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = \langle \nabla f(0,0), (\alpha, \beta) \rangle = f_x(0,0)\alpha + f_y(0,0)\beta,$$

ossia

$$\lambda \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \quad \text{lineare}$$

cosa che non è.

II modo:

f è derivabile in $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Infatti:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4}{t^3}}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Differenziabilità: essendo f derivabile in $(0,0)$ studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-(f(0,0)+\langle \nabla f(0,0),(x,y)\rangle)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Se mi restringo alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x$ si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,-\frac{1}{2}x)-x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{0-x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2}}.$$

Tale limite non è zero (anzi non esiste neppure:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}})$$

quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

Derivate direzionali: Sia $\lambda = (\alpha,\beta)$ versore, con $\beta = -\frac{1}{2}\alpha$. Allora

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha,-\frac{1}{2}t\alpha)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Sia $\lambda = (\alpha,\beta)$ versore, $\beta \neq -\frac{1}{2}\alpha$. Allora

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4(\alpha^4-\alpha^2\beta^2)}{t^4(\alpha^3+8\beta^3)} = \frac{\alpha^4-\alpha^2\beta^2}{\alpha^3+8\beta^3}.$$

Dunque esiste la derivata direzionale in $(0,0)$ qualunque sia il versore λ e

$$\lambda \mapsto \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = \begin{cases} \frac{\alpha^4-\alpha^2\beta^2}{\alpha^3+8\beta^3} & \text{se } \beta \neq -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \text{se } \beta = -\frac{1}{2}\alpha. \end{cases}$$

Esercizio 5.8.24 (da prova scritta AM2: 8-6-2020). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ il dominio naturale della funzione $f(x,y) = \ln(4|x|^2 - 2|xy|)$

(a) Disegnare (tratteggiandolo in blu/nero) il dominio A.

[Per la frontiera di A: linea continua se appartiene al dominio, linea tratteggiata se non vi appartiene. Se un singolo punto di una curva non viene preso, crocettarlo]

(b) Per quali versori λ di $\mathbb{R}^2$ esiste $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\frac{1}{2},0)$ e, in tal caso, quanto vale?

SOLUZIONE:

(a)

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x|(4|x| - 2|y|) > 0)\}$$

(b)

Sia $\lambda = (\alpha, \beta)$ tale che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(4|\frac{1}{2} + t\alpha|^2 - 2\,|\frac{1}{2} + t\alpha||t\beta|) - \ln(1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left(4\left(\frac{1}{4} + \frac{2\alpha}{2}t + t^2\alpha^2\right) - 2\,|t||\beta||\frac{1}{2} + t\alpha|\right)}{t}$$

$$\overset{\frac{1}{2}>0}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\ln\left((1 + 4\alpha t + t^2 4\alpha^2 \ - \ 2\,|t||\beta|\left(\frac{1}{2} + t\alpha\right)\right)\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{4\alpha t + 4t^2\alpha^2 - 2\,|t||\beta|\left(\frac{1}{2} + t\alpha\right)}{t}$$

$$= 4\alpha - 2|\beta||\frac{1}{2}| \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}.$$

L'ultimo limite esiste se e solo se $\beta = 0$. Dunque gli unici versori per i quali esiste la derivata direzionale sono $\lambda = (\pm 1, 0)$. In tal caso

$$\frac{\partial f}{\partial (1,0)}(\frac{1}{2},0) = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial (-1,0)}(\frac{1}{2},0) = -4.$$

Esercizio 5.8.25 (da prova scritta 20-7-2020). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2|\log(y^2)| & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 0. \end{cases}$$

Studiare:

(a) la continuità di f nei punti di $\mathbb{R}^2$

(b) la differenziabilità di f in $(0,1)$.

SOLUZIONE:

(a)

Ovviamente f è continua nell'insieme aperto

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ y \neq 0\}$$

in quanto $(x,y) \mapsto x^2|\log(y^2)|$ è, in tale insieme, composizione/prodotto di funzioni continue.

Studiamo la continuità di f in $(x_0, 0)$.
Se $x_0 \neq 0$ la funzione è discontinua in $(x_0, 0)$. Infatti se mi restringo alla retta verticale $x = x_0$ si ha:

$$\lim_{y\to 0} f(x_0, y) = \lim_{y\to 0} x_0^2|\log(y^2)| = x_0^2 \lim_{y\to 0} |\log(y^2)| = +\infty.$$

Se $x_0 = 0$ si tratta di studiare la continuità di f in $(0,0)$.
La funzione è discontinua in $(0,0)$. Infatti se mi restringo all'insieme

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0\right\}$$

(si noti che $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$) si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x, e^{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to 0} x^2 \left|\log((e^{-\frac{1}{x^2}})^2)\right| = \lim_{x\to 0} x^2 \left|\log e^{-\frac{2}{x^2}}\right| = \lim_{x\to 0} x^2 \left|-\frac{2}{x^2}\right| = 2 \neq f(0,0).$$

(b)
Studiamo la differenziabilità di f in $(0,1)$.
$f_x(0,1) = 0$: infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,1) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2|\log 1| - 0|\log 1|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

$f_y(0,1) = 0$: infatti

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,1+t) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0|\log((1+t)^2)| - 0|\log 1|}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Darto che $f(0,1) = 0$ e $\nabla f(0,1) = (0,0)$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x, y) - (f(0,1) + \langle\nabla f(0,1), (x, y-1)\rangle)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2|\log(y^2)|}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

Dato che

$$0 \leq \frac{x^2|\log(y^2)|}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}|x||\log(y^2)| \leq 1 \cdot |x||\log(y^2)| \to_{(x,y)\to(0,1)} 0$$

concludiamo per il teorema dei carabinieri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2|\log(y^2)|}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0.$$

Dunque f è differenziabile in $(0,1)$.

Esercizio 5.8.26 (da prova scritta AM2: 7-9-2020). Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} & \text{se } x > |y| \\ 0 & \text{se } |x| \le |y| \\ -\sqrt{x^2 - y^2} & \text{se } x < -|y| \end{cases}$$

Determinare in quali punti del dominio la funzione f è derivabile.

SOLUZIONE:

Siano:

$$A^+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > |y|\}$$
$$A^- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < -|y|\}$$
$$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < |y|\}$$
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| = |y|\}$$

Si ha

$$\mathbb{R}^2 = A^+ \cup A^- \cup B \cup C.$$

Gli insiemi A^+, A^-, B sono aperti e f ristretta a ciascuno di tali insiemi è di classe C^1. Dunque in essi la funzione è derivabile. Resta da studiare la derivabilità nei punti di C.

Dato che $f(-x,y) = -f(x,y)$ basterà studiare il punto $(0,0)$ e i punti $(x_0, \pm x_0)$ con $x_0 > 0$.

In (x_0, x_0), con $x_0 > 0$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, x_0) - f(x_0, x_0)}{t} \overset{x_0+t > x_0 = |x_0|}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{(x_0+t)^2 - x_0^2} - 0}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{2tx_0 + t^2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{2tx_0}}{t} = +\infty$$

In $(x_0, -x_0)$, con $x_0 > 0$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+t, -x_0) - f(x_0, -x_0)}{t} \overset{x_0+t > x_0 = |-x_0|}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{(x_0+t)^2 - x_0^2} - 0}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{2tx_0 + t^2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{2tx_0}}{t} = +\infty$$

Dunque f non è derivabile in $(x_0, x_0) \in C$, con $x_0 > 0$.

Resta da studiare il punto $(0,0)$.

Calcoliamo il limite da destra del rapporto incrementale.

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \overset{t > 0 = |0|}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1$$

Calcoliamo il limite da sinistra del rapporto incrementale.

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} \overset{t<0=-|0|}{=} \lim_{t\to 0^-} \frac{-\sqrt{t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-|t|}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{t}{t} = 1.$$

La funzione f è quindi derivabile rispetto alla variabile x in $(0,0)$ e $f_x(0,0) = 1$.
Studiamo la derivata parziale rispetto a y in $(0,0)$. Essendo

$$f(0,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

la funzione f ristretta all'asse y è costante, quindi esiste $f_y(0,0)$ ed essa vale 0.

Esercizio 5.8.27 (da prova scritta AM2: 25-1-2021). Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = xyz|y|.$$

Stabilire se f è di classe C^1

SOLUZIONE:
Si ha

$$f(x,y,z) = h(x,y,z)g(x,y,z)$$

dove

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y,z) = xz$$

e

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y,z) = y|y| = \begin{cases} y^2 & \text{se } y \geq 0 \\ -y^2 & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

h è chiaramente di classe C^1 e

$$\nabla h(x,y,z) = (z,0,x).$$

Dimostriamo che anche g è di classe C^1: l'unico problema è valutare g_y, dato che

$$g_x \equiv 0, \quad g_z \equiv 0.$$

Si ha che per ogni $(x,0,z) \in \mathbb{R}^3$ è:

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{t\to 0^+} \frac{g(x,t,z)-g(x,0,z)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2}{t} = 0 \\ \lim_{t\to 0^-} \frac{g(x,t,z)-g(x,0,z)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t^2}{t} = 0. \end{array} \right.$$

Allora esiste $g_y(x,0,z) = 0$. D'altra parte,

$$\forall y < 0 \quad g(x,y,z) = y^2 \Rightarrow g_y(x,y,z) = 2y$$

e se $y < 0$

$$\forall y < 0 \quad g(x,y,z) = -y^2 \Rightarrow g_y(x,y,z) = -2y.$$

Riassumendo:

$$g_y(x,y,z) = 2|y| \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

che è continua.
Pertanto:

$$\nabla g(x,y,z) = (0, 2|y|, 0)$$

La funzione f è quindi di classe C^1 in quanto prodotto di funzioni di classe C^1.

Esercizio 5.8.28 (da prova scritta AM2: 15-2-2021). Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Studiare la differenziabilità di f.

Sol. Esercizio 5.8.28
f è differenziabile nell'insieme aperto $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ in quanto composizione e prodotto di funzioni C^1 in tale insieme.
Studiamo la differenziabilità di f in $(0,0,0)$. Vediamo se f è derivabile in tale punto.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\sqrt{t^2}}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t,0) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,0,t) - f(0,0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Quindi f è derivabile in $(0,0,0)$ e $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$.
Ora,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - (f(0,0,0) + \langle \nabla f(0,0,0), (x,y,z)\rangle)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x = 0.$$

Quindi f è differenziabile in $(0,0,0)$.

Esercizio 5.8.29 (BDO 11.5.5.). Date le funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x+y, xy, xy^2), \qquad g(u,v,w) = uv^2w$$

scrivere le matrici jacobiane $Df(x,y)$, $Dg(u,v,w)$ e infine, usando la formula (5.5.2), $D(g \circ f)(x,y)$.

Sol. esercizio 5.8.29: Si hanno

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ y & x \\ \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

$$Dg(u,v,w) = \begin{pmatrix} v^2 w & 2uvw & uv^2 \end{pmatrix}$$

$$D(g \circ f)(x,y) = Dg(f(x,y))Df(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 y^4 (4x+3y) & x^3 y^3 (4x+5y) \end{pmatrix}.$$

CAPITOLO 6

Funzioni convesse

Lemma 6.0.1. *Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 < x_2$, allora il segmento congiungente x_1 e x_2 è l'insieme*

$$\{(1-t)x_1 + tx_2 \,:\, t \in [0,1]\}.$$

Definizione 6.0.2 (Insieme convesso). Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha

$$\{(1-t)x_1 + tx_2 \,:\, t \in [0,1]\} \subseteq A.$$

Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con A aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano $x_1, x_2 \in A$ tali che il segmento che li congiunge sia incluso in A, ossia

$$(1-t)x_1 + tx_2 \in A \qquad \text{per ogni } t \in [0,1].$$

Definizione 6.0.3 (Funzione convessa). Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso.
Diciamo che f è *convessa* se

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in A,\ \ \forall t \in [0,1]. \tag{6.0.1}$$

Diciamo che f è *concava* se

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in A,\ \ \forall t \in [0,1]. \tag{6.0.2}$$

Osservazione 6.0.4. Le disuguaglianze (6.0.1) e (6.0.2) sono banalmente soddisfatte se $t = 0$ e $t = 1$.

Osservazione 6.0.5. Una funzione può essere convessa sulle singole variabili, senza essere convessa. Si consideri ad esempio la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.
Fissato $y \in \mathbb{R}$, la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ sia convessa che concava. Analogamente, fissato $x \in \mathbb{R}$, la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ sia convessa che concava. Eppure come funzione di due variabili f non è né convessa né concava.

Lemma 6.0.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in A$. Se f è convessa, allora*

$$f(x) \ge f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \qquad \forall x \in A.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $x \in A$, con $x \ne x_0$. Per definizione di funzione convessa,

$$sf(x) + (1-s)f(x_0) \ge f(sx + (1-s)x_0) \qquad \forall s \in]0,1[.$$

Sottraendo $f(x_0)$ a primo e secondo membro si ha

$$sf(x) + (1 - s - 1)f(x_0) \geq f(sx + (1-s)x_0) - f(x_0)$$

da cui, essendo $sx + (1-s)x_0 = x_0 + s(x - x_0)$,

$$s(f(x) - f(x_0)) \geq f(x_0 + s(x - x_0)) - f(x_0).$$

Dividendo per s si ha

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{f(x_0 + s(x - x_0)) - f(x_0)}{s}. \tag{6.0.3}$$

Per la differenziabilità di f e il Teorema 5.3.2,

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(x_0 + s(x - x_0)) - f(x_0)}{s} = \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Quindi, per il Teorema del confronto e (6.0.3) otteniamo

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle.$$

Si noti che se $x = x_0$ allora la disuguaglianza è banalmente verificata. □

Teorema 6.0.7 (Caratterizzazioni del I ordine della convessità). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile. Allora sono equivalenti le seguenti:*

(a) *f è convessa*
(b) $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \ \ \forall x, x_0 \in A$
(c) *[Monotonia di f]* $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0 \ \ \forall x, y \in A$.

DIMOSTRAZIONE.
(a) $\Rightarrow$ (b)
Segue dal Lemma 6.0.6 e dall'arbitrarietà d x_0.
(b) $\Rightarrow$ (c)
Da (b) si ha che per ogni $x, y \in A$

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

Sommando membro a membro si ha

$$0 \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \langle \nabla f(y), x - y \rangle.$$

Essendo

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle + \langle \nabla f(y), x - y \rangle = -\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle$$

deduciamo

$$\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

(c) $\Rightarrow$ (a)

Siano $x, y \in A$ Definiamo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(y + t(x - y)).$$

Per il Lemma 5.7.5, g è derivabile e

$$g'(t) = \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle.$$

Se $t_1, t_2 \in [0,1]$ allora

$$g'(t_1) - g'(t_2) = \langle \nabla f(y + t_1(x - y)) - \nabla f(y + t_2(x - y)), x - y \rangle.$$

da cui

$$(t_1 - t_2)(g'(t_1) - g'(t_2)) = \langle \nabla f(y + t_1(x - y)) - \nabla f(y + t_2(x - y)), (t_1 - t_2)(x - y) \rangle$$

Essendo

$$y + t_1(x - y) - (y + t_2(x - y)) = (t_1 - t_2)(x - y)$$

deduciamo da (c) che

$$(t_1 - t_2)(g'(t_1) - g'(t_2)) \geq 0.$$

Pertanto

$$0 \leq t_1 < t_2 \leq 1 \Rightarrow g'(t_1) - g'(t_2) \leq 0 \Rightarrow g'(t_1) \leq g'(t_2).$$

Abbiamo così dimostrato che $g' : [0,1] \to \mathbb{R}$ è crescente. Allora, per la seconda caratterizzazione del I ordine della convessità (vedi AM1B) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è convessa. In particolare

$$g((1 - t) \cdot 1 + t \cdot 0) \leq (1 - t)g(1) + tg(0)$$

ossia

$$f(y + (1 - t)(x - y)) \leq (1 - t)f(y + 1 \cdot (x - y)) + tf(y + 0 \cdot (x - y))$$

da cui

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

□

Teorema 6.0.8 (Caratterizzazione del II ordine della convessità). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Allora sono equivalenti le seguenti:*

(a) *f è convessa*

(b) *la matrice hessiana $D^2 f(x)$ è semidefinita positiva per ogni $x \in A$.*

DIMOSTRAZIONE.

(a) $\Rightarrow$ (b):

Sia f convessa. Dato che A è aperto,

$$\forall \bar{x} \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \exists \delta > 0 : \quad \bar{x} + t\lambda \in A \qquad \forall t \in]-\delta, \delta[.$$

E' dunque ben definita: $\varphi :]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) := f(\bar{x} + t\lambda).$$

Essendo

$$\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x} + t\lambda) + \frac{1}{2}(\bar{x} - t\lambda),$$

dalla convessità di f si ha

$$f(\bar{x}) = f(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{x}) \leq \frac{1}{2}f(\bar{x} + t\lambda) + \frac{1}{2}f(\bar{x} - t\lambda)$$

e quindi

$$f(\bar{x} + t\lambda) + f(\bar{x} - t\lambda) - 2f(\bar{x}) \geq 0 \qquad \forall\, t \in]-\delta,\delta[$$

da cui

$$\frac{f(\bar{x} + t\lambda) + f(\bar{x} - t\lambda) - 2f(\bar{x})}{t^2} \geq 0 \qquad \forall\, t \in]-\delta,\delta[\setminus \{0\}.$$

Il limite del primo membro per $t \to 0$ si presenta come forme indeterminata $\frac{0}{0}$. Applicando il Teorema dell'Hopital due volte, il teorema di derivazione di funzione composta (Lemma 5.7.5) e il Teorema del confronto, si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x} + t\lambda) + f(\bar{x} - t\lambda) - 2f(\bar{x})}{t^2} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\langle \nabla f(\bar{x} + t\lambda), \lambda\rangle + \langle \nabla f(\bar{x} - t\lambda), -\lambda\rangle}{2t} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\langle D^2 f(\bar{x} + t\lambda)\lambda, \lambda\rangle + \langle D^2 f(\bar{x} - t\lambda)\lambda, \lambda\rangle}{2} \geq 0
\end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\langle D^2 f(\bar{x})\lambda, \lambda\rangle + \langle D^2 f(\bar{x})\lambda, \lambda\rangle}{2} \geq 0$$

e quindi

$$\langle D^2 f(\bar{x})\lambda, \lambda\rangle \geq 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\bar{x} \in A$ e di $\lambda \in \mathbb{R}^n$ si è dimostrata la tesi.
(b) $\Rightarrow$ (a):
Siano $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$. Per la formula di Taylor con resto di Lagrange, vedi Teorema 5.7.7, esiste $\theta \in]0,1[$ tale che

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2 f(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle.$$

Si noti che, essendo A convesso,

$$\bar{x} + \theta(x - \bar{x}) \in A$$

e che, per la semidefinita positività della matrice hessiana

$$\langle D^2 f(\bar{x} + \theta(x - \bar{x}))(x - \bar{x}), x - \bar{x}\rangle \geq 0.$$

Quindi

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle.$$

Tale disuguaglianza è ovviamente verificata anche se $x = \bar{x}$. Per l'arbitrarietà di x e $\bar{x}$ si ha

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \qquad \forall x, \bar{x} \in A.$$

La convessità di f segue dal Teorema 6.0.7.

□

Corollario 6.0.9 (Caratterizzazione del II ordine della convessità: caso $n = 2$). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto e convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Allora sono equivalenti le seguenti:*

(a) *f è convessa*
(b) *la matrice hessiana $D^2 f(x, y)$ è semidefinita positiva per ogni $(x, y) \in A$*
(c) *per ogni $(x, y) \in A$ si ha*

$$\begin{cases} f_{xx}(x, y) \geq 0 \\ f_{yy}(x, y) \geq 0 \\ \det D^2 f(x, y) \geq 0 \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Conseguenza dei Teoremi 4.2.11 e 6.0.8. □

CAPITOLO 7

Massimi e minimi liberi

7.1. Punti estremanti relativi

Definizione 7.1.1 (Punti estremanti locali).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in A$.
Diciamo che $\bar{x}$ è un punto di massimo locale (o relativo) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta).$$

Diciamo che $\bar{x}$ è un punto di minimo locale (o relativo) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta).$$

Diciamo che $\bar{x}$ è un punto estremante locale di f se $\bar{x}$ è un punto di massimo o di minimo locale.

Definizione 7.1.2 (Punti estremanti locali forti).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $\bar{x} \in A$.
Diciamo che $\bar{x}$ è un punto di massimo locale forte (o stretto) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(\bar{x}) > f(x) \quad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}.$$

Diciamo che $\bar{x}$ è un punto di minimo locale forte (o stretto) di f se

$$\exists \delta > 0 : f(\bar{x}) < f(x) \quad \forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}.$$

Diciamo che $\bar{x}$ è un punto estremante locale forte di f se $\bar{x}$ è un punto di massimo o di minimo locale forte.

Definizione 7.1.3 (Punti critici).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$. Sia in $\bar{x} \in \operatorname{int} A$ e f è derivabile in $\bar{x}$.
Diciamo che $\bar{x}$ è un punto critico di f se

$$Df(\bar{x}) = 0.$$

Definizione 7.1.4 (Punto di sella).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$. Sia in $\bar{x} \in \operatorname{int} A$ e f derivabile in $\bar{x}$.
Diciamo che $\bar{x}$ è un *punto di sella* se $\bar{x}$ è un punto critico di f e $\bar{x}$ non è né un punto di massimo né di minimo relativo.

7.2. Teorema di Fermat

Osservazione 7.2.1.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}^n$. Sia f differenziabile in $\bar{x} \in \operatorname{int} A$, con $\bar{x}$ punto critico di f. Allora l'iperpiano tangente al grafico di f in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ ha equazione

$$x_{n+1} = f(\bar{x}).$$

Teorema 7.2.2 (Teorema di Fermat o condizione necessaria del I ordine per gli estremanti relativi).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Se

(a) $\bar{x} \in \operatorname{int} A$
(b) *f è derivabile in $\bar{x}$,*
(c) *$\bar{x}$ è un punto estremante locale per f,*

allora

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \quad \textit{(ossia } \bar{x} \textit{ è un punto critico di } f\textit{).}$$

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione nel caso di $\bar{x}$ punto di massimo relativo.
Da (a) e (c) si ha che esiste $r > 0$ tale che

$$\exists r > 0 : \begin{cases} B(\bar{x}, r) \subseteq A \\ f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in B(\bar{x}, r). \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Fissato $i \in \{1, \cdots, n\}$ definiamo $g :]-r, r[\to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(\bar{x} + te_i).$$

Si ha $g(0) = f(\bar{x})$. Inoltre, da (7.2.1)

$$g(0) \geq g(t) \quad \forall t \in]-r, r[.$$

Dunque 0 è un punto di massimo assoluto, e quindi relativo, per g, con $0 \in \operatorname{int}]-r, r[$.
Da (b) e dall'Osservazione 5.1.3 g è derivabile in 0 e

$$g'(0) = f_{x_i}(\bar{x}).$$

Per il Teorema di Fermat di AM1 applicato a g, deve essere

$$g'(0) = 0,$$

ossia $f_{x_i}(\bar{x}) = 0$. □

7.3. Condizioni necessarie del II ordine per gli estremanti relativi

Teorema 7.3.1 (Condizione necessaria del II ordine per gli estremanti relativi).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$.
Se $\bar{x}$ è un punto di minimo (massimo) locale per f, allora

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ D^2 f(\bar{x}) \geq 0 \ \ (\leq 0). \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione nel caso di $\bar{x}$ punto di minimo relativo. La dimostrazione nel caso di $\bar{x}$ punto di massimo relativo procede in modo analogo.
Essendo A aperto e $\bar{x}$ punto di minimo relativo per f, per il Teorema di Fermat (v. Teorema 7.2.2), si ha $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Inoltre,

$$\exists r > 0 : \begin{cases} B(\bar{x}, r) \subseteq A \\ f(\bar{x}) \leq f(x) \ \forall x \in B(\bar{x}, r). \end{cases} \tag{7.3.1}$$

Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definiamo $g :]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[\to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(\bar{x} + tv).$$

Essendo

$$\left\{ \bar{x} + tv : t \in]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[\right\} \subseteq B(\bar{x}, r),$$

deduciamo da (7.3.1) che 0 è un punto di minimo assoluto (quindi relativo) di g interno al dominio. Essendo $g \in C^2(]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[)$, per la condizione necessaria del II ordine per gli estremanti relativi di funzioni di una variabile reale, (si veda AM1B) si ha $g''(0) \geq 0$. Essendo,

$$g'(t) = \langle \nabla f(\bar{x} + tv), v \rangle, \qquad g''(t) = \langle D^2 f(\bar{x} + tv) v, v \rangle \qquad \forall t \in]-\frac{r}{|v|}, \frac{r}{|v|}[,$$

deduciamo che

$$\langle D^2 f(\bar{x}) v, v \rangle = g''(0) \geq 0.$$

Dall'arbitrarietà di v, deduciamo che $D^2 f(\bar{x}) \geq 0$. □

Corollario 7.3.2 (Condizione necessaria del II ordine per gli estremanti relativi: caso $n = 2$).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$.

Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di minimo locale per f, allora

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \\ f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \\ \det D^2 f(\bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Che il punto sia critico segue dal Teorema di Fermat 7.2.2. Le condizioni sulle derivate seconde seguono dai Teoremi 4.2.11 e 7.3.1. □

Corollario 7.3.3 (Condizione necessaria del II ordine per gli estremanti relativi: caso $n = 2$).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$.
Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di massimo locale per f, allora

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0 \\ f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0 \\ \det D^2 f(\bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Che il punto sia critico segue dal Teorema di Fermat 7.2.2. Le condizioni sulle derivate seconde seguono dai Teoremi 4.2.13 e 7.3.1. □

7.4. Condizione sufficiente del II ordine per i punti di sella

Teorema 7.4.1 (Condizione sufficiente del II ordine per i punti di sella).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$.
Sia $\bar{x} \in A$ un punto critico per f.
Se $D^2 f(\bar{x})$ è indefinita, allora $\bar{x}$ è un punto di sella.

DIMOSTRAZIONE.
Se $\bar{x}$ fosse un punto estremante relativo, allora per il Teorema 7.3.1 $D^2 f(\bar{x})$ sarebbe semidefinita, contraddicendo l'ipotesi. □

7.5. Condizioni sufficienti per gli estremanti relativi

Teorema 7.5.1 (Condizione sufficiente del I ordine per i punti estremanti assoluti e relativi).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e convesso. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile in $x_0 \in A$.
Se x_0 è un punto critico di f, allora x_0 è un punto di minimo assoluto (quindi anche relativo) di f.

DIMOSTRAZIONE. f è differenziabile in x_0 ed f è convessa, allora per il Lemma 6.0.6

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \qquad \forall x \in A.$$

Per il Teorema 7.2.2 è $\nabla f(x_0) = 0$. Quindi,

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in A.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 7.5.2 (Condizione sufficiente del II ordine per i punti estremanti relativi).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Sia $\bar{x} \in A$
Valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ D^2 f(\bar{x}) > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} \text{ è un punto di minimo relativo forte,}$$

e

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ D^2 f(\bar{x}) < 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} \text{ è un punto di massimo relativo forte.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione nel caso dei minimi.
Sia $r > 0$ tale che $B(\bar{x}, r) \subseteq A$.
Per il Teorema 5.7.10 si ha

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2) \qquad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Per ipotesi, $\nabla f(\bar{x}) = 0$, quindi

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2) \qquad \text{per } x \to \bar{x}.$$

Essendo $D^2 f(\bar{x}) > 0$, per il Teorema 4.2.5

$$\exists \lambda > 0 \ : \ \langle D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq \lambda |x - \bar{x}|^2 \qquad \forall x \in B(\bar{x}, \delta).$$

Per definizione:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{o(|x - \bar{x}|^2)}{|x - \bar{x}|^2} = 0,$$

quindi

$$\exists \delta \in]0, r[\ : \ \frac{o(|x - \bar{x}|^2)}{|x - \bar{x}|^2} > -\frac{\lambda}{2} \qquad \forall x \in B(\bar{x}, \delta).$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\bar{x}) + \frac{1}{2} \langle D^2 f(\bar{x})(x - \bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(|x - \bar{x}|^2) \\ &\geq f(\bar{x}) + \frac{\lambda}{2} |x - \bar{x}|^2 + o(|x - \bar{x}|^2) \\ &> f(\bar{x}) + \frac{\lambda}{2} |x - \bar{x}|^2 - \frac{\lambda}{2} |x - \bar{x}|^2 = f(\bar{x}). \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato la tesi. □

Corollario 7.5.3 (Condizione sufficiente del II ordine per i punti estremanti relativi: $n = 2$).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$
Valgono le seguenti implicazioni:

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \\ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \\ \\ \det D^2 f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} \text{ è un punto di minimo relativo forte,}$$

e

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ \\ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) < 0 \\ \\ \det D^2 f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} \text{ è un punto di massimo relativo forte.}$$

DIMOSTRAZIONE.
Segue immediatamente dal Teorema 7.5.2 e dai Corollari 4.2.8 e 4.2.9.

□

7.6. Hessiano nullo

Quando si trova una linea di punti critici, il determinante della matrice hessiana calcolata in tali punti critici risulta nullo. Vale infatti il seguente risultato.

Proposizione 7.6.1.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$. Supponiamo che esista $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, con I intervallo reale, $\operatorname{int} I \neq \emptyset$*, tale che*

(a) $\gamma \in C^1(I)$,
(b) $\gamma'(t) \neq 0$ *per ogni* $t \in I$
(c) *vale l'inclusione*

$$\{\gamma(t) : t \in I\} \subseteq \{x \in A : \nabla f(x) = 0\}. \tag{7.6.1}$$

Allora

$$\det D^2 f(\gamma(t)) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$ come nell'enunciato.
Fissato $i \in \{1, \cdots, n\}$ consideriamo la funzione

$$h_i : I \to \mathbb{R}, \qquad h(t) = f_{x_i}(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t)).$$

Tale funzione è identicamente nulla, per (7.6.1). h_i è quindi derivabile con derivata identicamente nulla e, per le regole di derivazione di funzioni composte (v. Teorema 5.5.4 o Corollario 5.5.5)

$$0 = h_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))\gamma_j'(t).$$

Pertanto, per ogni $t \in I$, $(\gamma_1'(t), \cdots, \gamma_n'(t))$ è soluzione non nulla del sistema algebrico lineare di n equazioni e n incognite che, scritto in forma matriciale, appare nella forma

$$D^2 f(\gamma(t)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per il Teorema di Cramer, ciò è possibile se e solo se $\det D^2 f(\gamma(t)) = 0$.

□

Quando succede che in corrispondenza di un punto critico l'hessiano di una funzione sia nullo, è opportuno ricorrere alla definizione di punto estremante relativo.

Esempio 7.6.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4$. $(0,0)$ è l'unico punto critico e $\det D^2 f(0,0) = 0$. Tuttavia, essendo

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

deduciamo che $(0,0)$ è un punto di minimo assoluto, quindi anche relativo.

Esempio 7.6.3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 - y^4$. $(0,0)$ è l'unico punto critico e $\det D^2 f(0,0) = 0$. Tuttavia, essendo

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,0) = x^4 > 0 \ \forall x \neq 0, \qquad f(0, y) = -y^4 > 0 \ \forall y \neq 0$$

deduciamo che $(0,0)$ è un punto critico che non è né massimo né minimo relativo e quindi è un punto di sella.

Come nell'Esempio 3.2.6, in cui non esiste il limite di una funzione di due variabili per $(x, y) \to (0,0)$, ma se ci si restringe a rette per l'origine, allora il limite è 0, anche per gli estremanti relativi può accadere qualcosa di analogo. Ciò è ben illustrato dal seguente esempio.

Esempio 7.6.4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y(y - x^2)$. $(0,0)$ non è un punto estremante relativo: infatti $f(0,0) = 0$ eppure

$$\forall r > 0 \ \exists (x, y), (x', y') \in B_r(0,0) \quad : \quad f(x, y) < f(0,0) < f(x', y')$$

come facilmente si ottiene dallo studio del segno della funzione f. Tuttavia, $(0,0)$ è un punto di minimo relativo per f ristretta a qualunque retta per l'origine.
Restringendoci all'asse y si ha:

$$f(0, y) = y^2 \geq 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Proviamo a restringerci ad altre rette passanti per l'origine, non verticali.
Sia $m \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$f(x, mx) = mx(mx - x^2) = x^2(m^2 - mx) \geq 0 \qquad \forall x \leq m$$

Sia $m \in \mathbb{R}^-$ si ha

$$f(x, mx) = mx(mx - x^2) = x^2(m^2 - mx) \geq 0 \qquad \forall x \geq m.$$

Da qui la tesi.

In tre o più variabili, si ha qualche speranza di classificare un punto critico come punto di sella anche quando l'hessiano in tale punto è nullo, usando il Teorema 4.2.15: se infatti la matrice hessiana calcolata nel punto critico ha un minore principale di ordine pari che è negativo (< 0), allora A è indefinita.

7.7. Esercizi

Esercizio 7.7.1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2(y-2)$, deteminare i punti critici di f, e, tra questi, i punti di massimo e di minimo relativi.

[Sol. es: 7.7.1: Il gradiente di f è

$$\nabla f(x, y) = (2x(y-2), x^2)$$

che si annulla per $x = 0$. I punti critici sono tutti e soli i punti dell'asse y.
Poiché $f(0, y) = 0$, studiamo il segno di f.
$f(x, y) = 0$ se e solo se (x, y) è punto dell'asse y o della retta $y = 2$.
$f(x, y) > 0$ se e solo se (x, y) è punto del semipiano $y > 2$ ma non sta sull'asse y.
$f(x, y) < 0$ se e solo se (x, y) è punto del semipiano $y < 2$ ma non sta sull'asse y.
Si deduce dallo studio del segno che sono punti di minimo relativi i punti sull'asse y tali che $y > 2$ (che sono "circondati" da punti in cui $f(x, y) \geq 0$); sono punti di massimo relativi i punti sull'assse y tali che $y < 2$ (che sono "circondati" da punti in cui $f(x, y) \leq 0$). Il punto $(0, 2)$ è di sella.]

Esercizio 7.7.2 (I esercizi2variabiliparteII-12-4-2011).
Determinare i punti di massimo e di minimo relativi di

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2.$$

Scrivere il polinomio di Taylor del second'ordine di f nel punto $(1, -2)$.

[Sol.: f è derivabile e $\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 4y)$ e quindi l'unico punto critico è $(0, 0)$. La matrice hessiana è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

quindi (per la condizione sufficiente del secondo ordine) $(0,0)$ è punto di minimo relativo. Il polinomio di Taylor in $(1,-2)$ è: $7-7(y+2)+\frac{1}{2}\left\{2(x-1)^2+2(x-1)(y+2)+4(y+2)^2\right\}$.]

Esercizio 7.7.3 (I esercizi2variabiliparteII-12-4-2011).
Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2$, determinare i punti critici di f, e, tra questi, i punti di massimo e di minimo relativi. Scrivere lo sviluppo di Taylor del second'ordine di f con resto di Peano nel punto $(1,0)$.

[Sol.:f è derivabile e $\nabla f(x,y)=(4x^3-2(x-y),4y^3+2(x-y))$. I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4x^3-2(x-y)=0 \\ 4y^3+2(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^3+y^3)=0 \\ 4y^3+2(x-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 4y(y^2-1)=0 \end{cases}$$

e si deduce che i punti critici sono $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,1)$. Usando la matrice hessiana (condizione sufficiente del secondo ordine)

$$D^2f(x,y)=\begin{pmatrix} 12x^2-2 & 2 \\ 2 & 12y^2-2 \end{pmatrix}$$

si ottengono: $(1,-1)$ e $(-1,1)$ minimi. Per $(0,0)$ non si può concludere. Tuttavia, $f(0,0)=0$ e dallo studio del segno si ha, restringendosi all'asse x, che $f(x,0)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)<0$ per $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$, mentre restringendosi alla bisettrice $y=x$: $f(x,x)=2x^4>0$ per $x\in(-1,1)\setminus\{0\}$. Dunque: sull'asse x il punto $(0,0)$ è un punto di massimo relativo, mentre sulla bisettrice $y=x$ $(0,0)$ è un punto di minimo relativo. Si conclude quindi che $(0,0)$ è un punto di sella.]

Esercizio 7.7.4 (I esercizi2variabiliparteII-12-4-2011). Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\frac{1}{3}x^3y-yx+\frac{1}{3}y^2.$$

Determinare le derivate direzionali e i punti di massimo e di minimo relativi.

[Sol. es: 7.7.4: $\nabla f(x,y)=(y(x^2-1),\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}y)$ per cui i punti critici sono $(1,1)$, $(-1,-1)$, $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{3},0)$. Dallo studio della matrice hessiana (condizione sufficiente del secondo ordine) risulta che $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{3},0)$ sono punti di sella e che $(1,1)$, $(-1,-1)$ sono punti di minimo relativo.
Per le derivate direzionali: f è un polinomio, dunque è differenziabile. Ne segue che, posto $\lambda=(\alpha,\beta)$,

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,y)=\langle\nabla f(x,y),\lambda\rangle=\langle(y(x^2-1),\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}y),(\alpha,\beta)\rangle=\ldots]$$

Esercizio 7.7.5 (I esercizi2variabiliparteII-12-4-2011). Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \arctan\frac{y^2}{x}.$$

Determinare il dominio e i punti di massimo e di minimo relativi.

[Sol. es: 7.7.5: Dominio: $A = \mathbb{R}^2 \setminus$ asse y.
$\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y^2}{x}\right)^2}(-\frac{y^2}{x^2}, \frac{2y}{x})$. Dunque i punti dell'asse x, eccetto l'origine che non appartiene ad A, sono i punti critici, cioè i punti critici sono i punti $(x,0)$ con $x \neq 0$. Lo studio della matrice hessiana non è utile. Nei punti critici la funzione f vale 0. Studiando il segno di f osserviamo che nel primo e quarto quadrante la funzione f è positiva, nel secondo e terzo è negativa. Dunque, i punti $(x,0)$ con $x > 0$ sono punti di minimo relativi e i punti $(x,0)$ con $x < 0$ sono punti di massimo relativi.]

Esercizio 7.7.6 (da prova scritta AM2: 13-1-2020). Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy^2 + y^4 - 2x^2 - z^2$. Determinare i punti critici di f e classificarli (punto di massimo locale/minimo locale/sella).

SOLUZIONE dell'Esercizio 7.7.6:
$f \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Cerchiamo i punti critici di f.

$$\nabla f(x,y,z) = (y^2 - 4x, 2xy + 4y^3, -2z).$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4x = 0 \\ 2xy + 4y^3 = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 4x = 0 \\ y(2x + 4y^2) = 0 \\ z = 0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono soluzioni di uno dei seguenti sistemi:

$$(S1)\begin{cases} y = 0 \\ y^2 - 4x = 0 \\ y(2x + 4y^2) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (S2)\begin{cases} y \neq 0 \\ y^2 - 4x = 0 \\ y(2x + 4y^2) = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Si ha che $(0,0,0)$ è l'unica soluzione del sistema (S1).
Il sistema (S2) non ha soluzione in quanto

$$(S2) \Leftrightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ y^2 - 4x = 0 \\ 2x + 4y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \neq 0 \\ x = \frac{1}{4}y^2 > 0 \\ x = -2y^2 < 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Studiamo la matrice hessiana.

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4 & 2y & 0 \\ 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

da cui

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Essendo il suo determinante uguale a 0 non possiamo concludere.
Ragioniamo per restrizioni. Si noti che $f(0,0,0) = 0$.
Restrizione all'asse y $(x = z = 0)$:

$$f(0,y,0) = y^4$$

quindi $(0,0,0)$ non può essere un punto di massimo relativo per f.
Restrizione all'asse x $(y = z = 0)$:

$$f(x,0,0) = -2x^2$$

quindi $(0,0,0)$ non può essere un punto di minimo relativo per f.
Ne deduciamo che $(0,0,0)$ è un punto di sella.

Esercizio 7.7.7 (da prova scritta AM2: 25-1-2021). Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = xyz|y|.$$

Determinare i punti critici di f e classificarli

SOLUZIONE:
Dall'Esercizio 5.8.27 f è di classe C^1 e si ha

$$f(x,y,z) = h(x,y,z)g(x,y,z)$$

dove

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad h(x,y,z) = xz$$

e

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y,z) = y|y| = \begin{cases} y^2 & \text{se } y \geq 0 \\ -y^2 & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

con

$$\nabla h(x,y,z) = (z,0,x),$$

$$g_x \equiv 0, \quad g_z \equiv 0.$$

$$g_y(x,y,z) = 2|y| \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Allora risulta

$$\nabla f(x,y,z) = g(x,y,z)\nabla h(x,y,z) + h(x,y,z)\nabla g(x,y,z)$$

$$= y|y|(z,0,x) + xz(0,2|y|,0) = (y|y|z, 2xz|y|, xy|y|).$$

I punti critici sono le soluzioni di

$$\begin{cases} y|y|z = 0 \\ 2xz|y| = 0 \\ xy|y| = 0 \end{cases}$$

Tutti i punti del piano $y = 0$ sono critici. Al di fuori di tale piano sono punti critici i punti (x, y, z) con $y \neq 0$ e

$$\begin{cases} z = 0 \\ 2xz = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

cioè tutti i punti dell'asse y sono critici.
Si consideri il punto critico $P = (0, y_0, 0)$ dell'asse y, con $y_0 \neq 0$: la f si annulla in P e

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t^2, y_0, t) = t^3 y_0 |y_0|$$

cambia di segno quando t transita da valori negativi a valori positivi. Dunque P è un punto di sella.
Si consideri il punto critico $P = (x, 0, z)$ con $xz \neq 0$: la f si annulla in P e

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(x, t, z) = xzt|t|$$

cambia di segno quando t transita da valori negativi a valori positivi. Dunque P è un punto di sella.
Si consideri il punto critico $P = (0, 0, z) \neq (0, 0, 0)$: la f si annulla in P e

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto f(t^2, t, z) = t^2 zt|t|$$

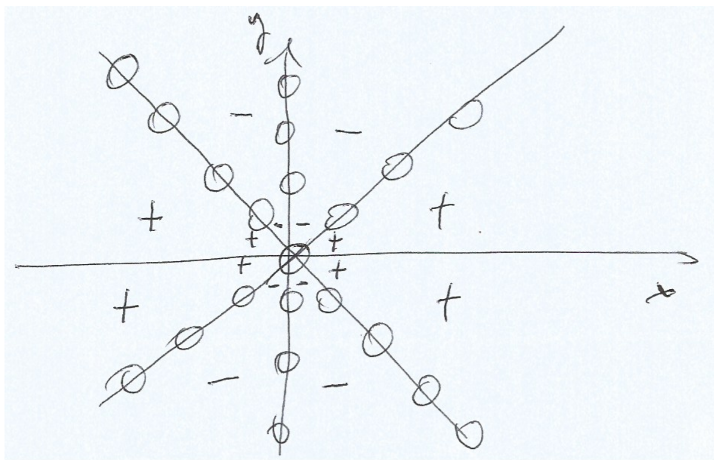
cambia di segno quando t transita da valori negativi a valori positivi. Dunque P è un punto di sella. Analogamente si ragiona per il punto critico $P = (x, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
Si consideri il punto critico $O = (0, 0, 0)$: la f si annulla in P e f è positiva nell'ottante $x, y, z > 0$ ed è negativa nell'ottante $x, y, z < 0$. Dunque O è un punto di sella.

Esercizio 7.7.8 (da prova scritta AM2: 29-6-2020). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 - x^2 y^2$.
Determinare i punti critici di f e classificarli.

SOLUZIONE:
$f(x, y) = x^4 - x^2 y^2$, quindi $\nabla f(x, y) = (4x^3 - 2xy^2, -2x^2 y)$.

$$\begin{cases} 4x^3 - 2xy^2 = 0 \\ -2x^2 y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0, y) \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dunque i punti critici di f sono tutti e soli i punti dell'asse y. In essi la funzione vale $f(0, y) = 0$.
Studiamo il segno di f:
f è nulla sulle bisettrici e sull'asse y. f è positiva a destra e a sinistra e negativa sopra e sotto.



Si ottiene che:
per ogni $y \neq 0$ i punti $(0, y)$ sono punti di massimo relativo,
il punto $(0,0)$ è di sella.

Esercizio 7.7.9 (da prova scritta 20-7-2020). Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 z + y + z^2$. determinarne i punti critici e classificarli.

SOLUZIONE:

$$\nabla f(x, y, z) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ -2yz + 1 = 0 \\ -y^2 + 2z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2yz = 1 \\ 2z = y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^3 = 1 \\ 2z = y^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'unico punto critico è $(0, 1, \frac{1}{2})$.
La matrice Hessiana è

$$D^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2z & -2y \\ 0 & -2y & 2 \end{pmatrix}$$

dunque

$$D^2 f(0,1,\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si noti che -2 è un autovalore di $D^2 f(0,1,\frac{1}{2})$.
I MODO:

$$\det D^2 f(0,1,\frac{1}{2}) = -2 \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2(-2-4) = 12 > 0.$$

Dato che la matrice hessiana è simmetrica reale,

$$\det D^2 f(0,1,\frac{1}{2}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono gli autovalori, contati con la loro moltiplicità.
Possiamo supporre $\lambda_1 = -2$. Dunque $\lambda_2 \lambda_3 = -6$ quindi uno dei due autovalori tra λ_2 e λ_3 è positivo. La matrice hessiana è quindi indefinita. Il punto critico è un punto di sella.
II MODO:
Gli altri autovalori sono le soluzioni di

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

Dunque vi è anche un autovalore positivo. Inoltre, -2 è un autovalore di $D^2 f(0,1,\frac{1}{2})$.
$D^2 f(0,1,\frac{1}{2})$ è quindi indefinita. Il punto $(0,1,\frac{1}{2})$ è di sella.

Esercizio 7.7.10 (da prova scritta AM2: 7-9-2020). Si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, y \neq 0\}$$

e

$$f(x,y,z) = (x^2-1)\frac{z}{y^2}.$$

Determinare i punti critici di f e classificarli.

SOLUZIONE:
$f(x,y,z) = (x^2-1)\frac{z}{y^2}$, quindi $\nabla f(x,y,z) = (\frac{2xz}{y^2}, -2(x^2-1)\frac{z}{y^3}, \frac{x^2-1}{y^2})$.
Punti critici:

$$\begin{cases} \dfrac{2xz}{y^2} \\ -2(x^2-1)\frac{z}{y^3} = 0 \\ \frac{x^2-1}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz = 0 \\ (x^2-1)z = 0 \\ x = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} xz = 0 \\ (x^2-1)z = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (1,y,0) \text{e } (-1,y,0) \, \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In tali punti critici la funzione vale 0.

Fissato $y \neq 0$ studiamo il segno di f ristretta all'insieme

$$\{(x,y,z) : x = 1+z^2,\ y \neq 0\} \ni (1,y,0)$$

ossia consideriamo la funzione

$$g(t) := f(1+t^2, y, t) = ((1+t^2)^2-1)\frac{t}{y^2} = (2t^2+t^4)\frac{t}{y^2} \left[\begin{array}{ll} >0 & \text{se } t>0 \\ <0 & \text{se } t<0. \end{array} \right.$$

Dunque i punti $(1,y,0)$ sono di sella.
Dato che $f(-x,y,z) = f(x,y,z)$ allora anche i punti $(-1,y,0)$ sono di sella.

Esercizio 7.7.11 (da prova scritta AM2: 15-2-2021). Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Determinarne gli eventuali punti critici e classificarli.

[Sol. Esercizio 7.7.11
Per lo studio della differenziabilità si veda l'Esercizio 5.8.28.
Punti critici.
In $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Esso si annulla se e solo se

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2+z^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0 \\ xy = 0 \\ xz = 0 \end{cases}$$

Il primo membro della prima equazione è somma di quantità non negative, quindi affinché la somma faccia 0, entrambi gli addendi devono essere nulli, da cui

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 0$$

e quindi, ragionando in modo analogo a quanto appena fatto, deve essere

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$$

Il punto $(0,0,0)$ non è accettabile, in quanto non appartiene a $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. Quindi f non ha punti critici in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Dimostriamo ora che $(0,0,0)$ è un punto critico per f. Per quanto dimostrato in (a)

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0).$$

D'altra parte $(0,0,0)$ è un punto di sella, in quanto $f(0,0,0) = 0$ e la funzione e $t \mapsto f(t,0,0)$ è positiva se $t > 0$ e negativa se $t < 0$.]

Esercizio 7.7.12 (I 2009-09-15CIVAMB). Si consideri $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$. Determinare i punti critici di f e classificarli.

Esercizio 7.7.13 (I 2010-02-08CIV-AMB). Si consideri $f(x,y) = x^2 + y^3 + y^2 + 2xy$. Determinare i punti critici di f e classificarli.

Esercizio 7.7.14 (I 2010-01-18CIV-AMB). Si consideri $f(x,y) = y^2 - x + 2xy$. Determinare i punti critici di f e classificarli.

Esercizio 7.7.15 (I 2009-06-13CIV-AMB). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y + 4y^2$. Classificare i punti critici di f (max. rel. / min. rel. / sella).

Esercizio 7.7.16 (I 2009-06-26CIV-AMB). Si consideri $f(x,y) = x^2 \log y$ di dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Determinare i punti critici di f e classificarli (max/min/selle).

Esercizio 7.7.17 (MS, p.17). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$. Determinare i punti critici di f e classificarli (max/min/selle).

RISPOSTA: $(0,1)$ punto di sella, $(1,e)$ e $(-1,e^{-1})$ punti di minimo relativi.

Esercizio 7.7.18. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = -z^2 - 10y^2 - 4xy - x^2$. Determinare i punti critici di f e classificarli (max/min/selle).

RISPOSTA: $(0,0,0)$ punto di massimo relativo.

Esercizio 7.7.19. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z^2 - 4xy + x^2$. Determinare i punti critici di f e classificarli (max/min/selle).

RISPOSTA: $(0,0,0)$ punto di sella.

Esercizio 7.7.20. Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z^3 - 4xy + x^2$. Determinare i punti critici di f e classificarli (max/min/selle).

RISPOSTA: $(0,0,0)$ punto di sella.

Esercizio 7.7.21 (MS-es, 1.23). Si consideri $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Determinare i punti critici di f e classificarli (max/min/selle).

RISPOSTA all'Esercizio 7.7.21: I punti critici sono i punti sulle bisettrici. I punti (x,x) (con $x\neq 0$) sono di massimo assoluto e quindi anche relativi, i punti $(x,-x)$ (con $x\neq 0$) sono di minimo assoluto e quindi anche relativi.

Esercizio 7.7.22 (MS-es, 1.21 (a)). Si consideri $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x(x^2-x-2)^4+(x^2-y)^4$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi.

RISPOSTA all'esercizio 7.7.22: $(-1,1)$ sella, $\left(\frac{5-\sqrt{97}}{18},\left(\frac{5-\sqrt{97}}{18}\right)^2\right)$ minimo relativo, $\left(\frac{5+\sqrt{97}}{18},\left(\frac{5+\sqrt{97}}{18}\right)^2\right)$ sella, $(2,4)$ minimo relativo.

Esercizio 7.7.23 (MS-es, 1.20 (b)). Si consideri $f(x,y)=(x^2+xy+y^2)\log(x^2+xy+y^2)$. Determinarne i punti di massimo e di minimo relativi.

RISPOSTA all'esercizio 7.7.23: Il dominio è $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. L'ellisse $x^2+xy+y^2=e^{-1}$ è luogo di punti di minimo relativo. Non vi sono altri punti estremanti locali.

Esercizio 7.7.24 (MS-es, 1.21 (b)). Si consideri $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(x-\cos y)^6+y^2-\pi y$. Determinarne i punti di massimo e di minimo relativi.

RISPOSTA all'Esercizio 7.7.24: Il punto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ è di minimo relativo. Non vi sono altri punti estremanti locali.

Esercizio 7.7.25 (MS-es, 1.22 (a)). Si consideri $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=1+y^3(x-\arctan y)^2$. Determinarne i punti di massimo e di minimo relativi.

RISPOSTA all'esercizio 7.7.25: I punti $(\arctan y,y)$, con $y>0$, sono punti di minimo, i punti $(\arctan y,y)$, con $y<0$, sono punti di massimo, i punti $(x,0)$ sono punti di sella per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Esercizio 7.7.26 (MS-es, 1.25). Si consideri $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^6-y(3x^5+9y^5+1)$. Determinarne i punti di massimo e di minimo relativi.

RISPOSTA esercizio 7.7.26: Il punto critico $\left(0,-\frac{1}{\sqrt[5]{54}}\right)$ è di sella.
Il punto critico $\left(-(3+2^6\cdot 3^3\cdot 5^{-5}),-\frac{2}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{3+2^6\cdot 3^3\cdot 5^{-5}}}\right)$ è un punto di massimo.

CAPITOLO 8

Funzioni aperte

Definizione 8.0.1 (Funzione aperta).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f : A \to B$.
Si dice che f è aperta, se, per ogni aperto $O \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un aperto U di $\mathbb{R}^m$, tale che $f(A \cap O) = B \cap U$.

Osservazione 8.0.2.
In virtù della Definizione 1.1.19, la Definizione 8.0.1 dice che una funzione $f : A \to B$ è aperta, se manda aperti nella topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ su A in aperti nella topologia indotta da $\mathbb{R}^m$ su B.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, gli aperti di (A, d_e) sono gli aperti di $\mathbb{R}^n$ contenuti in A. Infatti, l'intersezione di due aperti è un insieme aperto. è facile dimostrare la seguente caratterizzazione di funzioni aperte quando il dominio e il codominio sono aperti.

Proposizione 8.0.3.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f : A \to B$.
Se A e B sono insiemi aperti, sono equivalenti le seguenti:

(i) *$f : A \to B$ è aperta,*
(ii) *per ogni aperto $O \subseteq A$, l'insieme $f(O)$ è un insieme aperto di $\mathbb{R}^m$.*

Lemma 8.0.4.
Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Supponiamo

(a) *$\phi : X \to Y$ biunivoca*
(b) *$\psi := \phi^{-1} : Y \to X$ continua.*

Allora ϕ è una applicazione aperta.

DIMOSTRAZIONE.
Sia A un aperto rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}^n$ su X (ossia: $A = X \cap \Omega$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Dobbiamo dimostrare che $\phi(A)$ è un insieme aperto rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}^m$ su Y, vale a dire: esiste O aperto di $\mathbb{R}^m$ tale che $\phi(A) = Y \cap O$.
Infatti:

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \{\phi(x) : x \in A\} = \{y \in Y : \phi^{-1}(y) \in X \cap \Omega\} \\ &= \psi^{-1}(X \cap \Omega) = \text{retroimmagine di } X \cap \Omega \text{ mediante } \psi.\end{aligned}$$

Essendo ψ continua si ha, per il Teorema 3.3.3, che $\psi^{-1}(X \cap \Omega)$ è aperto rispetto alla topologia indotta da $\mathbb{R}^m$ su Y.

$\square$

CAPITOLO 9

Teorema di invertibilità locale e teorema delle funzioni implicite

9.1. Teorema di punto fisso

Definizione 9.1.1.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici. Una funzione $f:(X,d)\to(Y,d')$ si dice *contrazione* se

$$\exists L\in[0,1[\ :\ d'(f(x),f(x'))\le Ld(x,x')\qquad \forall x,x'\in X.$$

È facile vedere che una contrazione è una funzione continua.

Proposizione 9.1.2.
Siano (X,d) e (Y,d') spazi metrici, $f:(X,d)\to(Y,d')$ contrazione. Allora f è continua.

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi,

$$\exists L\in[0,1[\ :\ d'(f(x),f(x'))\le Ld(x,x')\qquad \forall x,x'\in X.$$

Sia $x_0\in X$ e dimostriamo che $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.
Sia $\epsilon>0$. Se scegliamo $\delta:=\frac{\epsilon}{L}$ esso è tale che

$$d'(f(x),f(x_0))\le Ld(x,x_0)<L\delta=\epsilon\qquad \forall x\in X\cap B_d(x_0,\delta).$$

ossia $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. □

Definizione 9.1.3.
Siano X,Y insiemi non vuoti e $f:X\to Y$. Si dice che $x\in X$ che è un punto fisso di f se $f(x)=x$.

Teorema 9.1.4 (Teorema di Banach-Caccioppoli).
Siano (X,d) uno spazio metrico completo e $f:(X,d)\to(X,d)$ una contrazione.
Allora esiste un unico punto fisso di f.

DIMOSTRAZIONE. Essendo f una contrazione, esiste $L \in]0,1[$ tale che

$$d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x') \qquad \forall x, x' \in X.$$

Esistenza del punto fisso:
Definiamo la successione (x_n) in X per ricorrenza:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \in X \end{cases}$$

Essendo f una contrazione, esiste $L \in]0,1[$ tale che

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq Ld(x_n, x_{n-1}).$$

Dimostriamo per induzione che fissato $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0).$$

Se $n = 0$ è ovvio.
Supponiamo che sia

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0) \tag{9.1.1}$$

e dimostriamo che vale

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq L^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Si ha

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n+1}, x_n) \overset{(9.1.1)}{\leq} L \cdot L^n d(x_1, x_0) = L^{n+1} d(x_1, x_0).$$

Siano ora $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n \geq 1$. Allora, usando il Teorema relativo al carattere della serie geometrica,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{h=0}^{m-n-1} L^{n+h} = d(x_1, x_0) L^n \sum_{h=0}^{m-n-1} L^h \\ &\leq d(x_1, x_0) L^n \sum_{h=0}^{\infty} L^h \overset{\text{Serie geometrica}}{=} d(x_1, x_0) \frac{L^n}{1-L}. \end{aligned}$$

Dato che $L < 1$ il limite per n che tende a ∞ dell'ultimo termine è 0. Quindi,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}^* \ : \ d(x_m, x_n) \leq \epsilon \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*, m > n \geq \bar{n}.$$

Dunque (x_n) è una successione di Cauchy. Essendo (X, d) completo, la successione converge a un $\bar{x} \in X$.

Dalla relazione $x_{n+1} = f(x_n)$, dalla continuità di f (v. Proposizione 9.1.2), e dal Teorema 3.3.6 si ha

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

Quindi $\bar{x}$ è un punto fisso.
Unicità del punto fisso:
Se esistessero x, x' punti fissi distinti di f si avrebbe $d(x,x') > 0$ e, ricordando che $L < 1$,

$$d(x,x') = d(f(x), f(x')) \leq Ld(x,x') < d(x,x')$$

il che è un assurdo. □

Corollario 9.1.5.
Siano (X,d) uno spazio metrico completo e $f : (X,d) \to (X,d)$. Sia $m \in \mathbb{N}^*$ tale che f^m è una contrazione.
Allora esiste un unico punto fisso di f.

DIMOSTRAZIONE. Se $m = 1$ è il Teorema di Banach-Caccioppoli.
Sia $m \geq 2$.
Esistenza:
Ovviamente $f^m : (X,d) \to (X,d)$. Dal Teorema di Banach-Caccioppoli, f^m ha un punto fisso (ed esattamente uno). Sia esso $\bar{x}$.
Si ha

$$f(\bar{x}) = f(f^m(\bar{x})) = f^m(f(\bar{x})),$$

dunque $f(\bar{x})$ è un punto fisso di f^m. Per l'unicità dei punti fissi di f^m, risulta $\bar{x} = f(\bar{x})$, cioè $\bar{x}$ è punto fisso anche di f.
Unicità:
Sia y un punto fisso di f. Per induzione dimostriamo che y è un punto fisso di f^n per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sia $P(n)$ la proposizione "y è un punto fisso di $f^n(y)$". $P(1)$ è vera per ipotesi. Sia vera $P(n)$ e dimostriamo $P(n+1)$:

$$f^{n+1}(y) = f^n(f(y)) = f^n(y) \overset{P(n)\text{vera}}{=} y$$

ossia y è un punto fisso di f^{n+1}. Abbiamo quindi dimostrato che $P(n)$ vera implica $P(n+1)$ vera. Dunque è dimostrato che y è un punto fisso di $f^n(y)$ per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. In particolare y è un punto fisso per f^m. Se ci fossero due punti fissi distinti di f, essi sarebbero punti fissi distinti di f^m, e ciò è assurdo perché per il Teorema 108 (T. di Banach-Caccioppoli) la contrazione f^m ha un unico punto fisso. □

9.2. Teorema di invertibilità locale

Definizione 9.2.1 (Diffeomorfismo).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$.
Diciamo che f è un diffeomorfismo di classe C^k, $k \geq 1$, se

(i) $f \in C^k(A)$
(ii) f è aperta
(iii) f è iniettiva
(iv) $f^{-1} : f(A) \to A$ è di classe C^k.

Definizione 9.2.2 (Funzione localmente iniettiva).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$.
Si dice che f è *localmente iniettiva* se per ogni $x \in A$ esiste un aperto $O \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in O$, tale che la restrizione $f|_{A\cap O} : A \cap O \to \mathbb{R}^m$ è una funzione iniettiva.

Proposizione 9.2.3.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$.
Se A è aperto, sono equivalenti le seguenti:

(i) *f è localmente iniettiva*
(ii) *$\forall x \in A$ $\exists$ un aperto $V \subseteq A$, $x \in V$, tale che $f|_V : V \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva.*

Una funzione si dice che è un diffemorfismo locale se *in un intorno di ogni punto del dominio la funzione è un diffeomorfismo.* Formalizziamo ciò con la seguente definizione.

Definizione 9.2.4 (Diffeomorfismo locale).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$.
Diciamo che f è un diffeomorfismo locale di classe C^k, $k \geq 1$, se

(i) $f \in C^k(A)$
(ii) f è aperta
(iii) per ogni $x \in A$ esiste un aperto $V \subseteq A$, tale che la restrizione $f|_V : V \to \mathbb{R}^m$ è una funzione iniettiva e $(f|_V)^{-1} : f(V) \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^k.

Teorema 9.2.5 (Teorema di invertibilità locale).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$ di classe C^k, $k \geq 1$.
Sono equivalenti le seguenti:

(a) *f è un diffeomorfismo locale di classe C^k*
(b) *valgono:*
  (i) $n = m$,
  (ii) $\det Df(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in A$.

Esempio 9.2.6.
Sia $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x\cos y, x\sin y)$. Si ha che f è un diffeomorfismo locale di Classe C^∞ (cioè di classe C^k per qualunque $k \geq 1$), in quanto

$$\det Df(x,y) = \det\begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos x \end{pmatrix} = x \neq 0 \qquad \forall (x,y) \in \mathrm{Dom}(f).$$

D'altra parte f non è un diffeomorfismo, non essendo iniettiva: $f(x,y) = f(x, y+2\pi)$ per ogni $(x,y) \in \mathrm{Dom}(f)$.

Per dimostrare il Teorema 9.2.5 abbiamo bisogno di alcuni preliminari.

Lemma 9.2.7.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_n) \in C^1(A)$. Allora la funzione

$$x \mapsto \|df(x)\|$$

è continua.

DIMOSTRAZIONE.
Per $x, \bar{x} \in A$ si ha

$$|\|df(x)\| - \|df(\bar{x})\|| \leq \|df(x) - df(\bar{x})\| \overset{Lemma 4.1.6}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right)^2}.$$

Dato che $f \in C^1$ allora

$$\lim_{x\to\bar{x}}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{x})\right) = 0.$$

La tesi segue dal Teorema dei carabinieri. □

Teorema 9.2.8.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ differenziabile.
Siano $x, \bar{x} \in A$, $x \neq \bar{x}$, tali che $[\bar{x}, x] \subseteq A$. Allora esiste $z \in]\bar{x}, x[$ tale che

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq \|Df(z)\| |x - \bar{x}|.$$

DIMOSTRAZIONE.
Se $f(x) = f(\bar{x})$, la disuguaglianza è ovvia. Supponiamo quindi $f(x) \neq f(\bar{x})$ o, equivalentemente, $|f(x) - f(\bar{x})| > 0$.
Dalla Proposizione 5.7.12, applicata con $v = f(x) - f(\bar{x})$, otteniamo che esiste $z \in]\bar{x}, x[$ tale che

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(\bar{x})|^2 &= \langle Df(z)(x-\bar{x}), f(x) - f(\bar{x})\rangle \\
&\overset{C.S.}{\leq} |Df(z)(x-\bar{x})||f(x) - f(\bar{x})| \overset{Lemma 4.1.6(i)}{\leq} |Df(z)||x-\bar{x}||f(x) - f(\bar{x})|.
\end{aligned}
$$

Dividendo per $|f(x) - f(\bar{x})|$ otteniamo la tesi. □

Possiamo ora dimostrare il Teorema di invertibilità locale.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9.2.5 DI INVERTIBILITÀ LOCALE.
$\Rightarrow$:
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$. Se f è un diffeomorfismo locale di classe C^k, $k \geq 1$, allora per ogni $x \in A$ esiste un aperto $V \subseteq A$, tale che la restrizione $g := f|_V : V \to f(V)$ è una funzione iniettiva e $h := (f|_V)^{-1} : f(V) \to V$ è di classe C^k. Inoltre, per l'Esercizio 5.4.12 e il Teorema 5.5.4 si ha, per ogni $\bar{x} \in V$,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = d\,\mathrm{id}_V(\bar{x}) = d(h \circ g)(\bar{x}) = dh(g(\bar{x})) \circ dg(\bar{x}).$$

Dato che $dg(\bar{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $dh(g(\bar{x})) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, dal Lemma 4.1.7 otteniamo che $n \leq m$.
Analogamente: per ogni $\bar{y} \in f(V)$ si ha

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m} = d\,\mathrm{id}_{f(V)}(\bar{y}) = d(g \circ h)(\bar{y}) = dg(h(\bar{y})) \circ dh(\bar{y}).$$

Allora, per il Lemma 4.1.7, $m \leq n$.
Abbiamo quindi dimostrato che $n = m$. Dunque, dall'ipotesi segue che $f : A \to \mathbb{R}^n$, f è di classe C^k, $k \geq 1$, e la matrice Jacobiana $Df(\bar{x})$ è una matrice quadrata $n \times n$ per ogni $\bar{x} \in A$.
Per (iii) della definizione di diffeomorfismo locale (Def. 9.2.4) per ogni $x \in A$ esiste un aperto $V \subseteq A$, tale che la restrizione $g := f|_V : V \to f(V)$ è una funzione iniettiva e $h := (f|_V)^{-1} : f(V) \to V$ è di classe C^k.
Per l'Esercizio 5.4.12 e il Teorema 5.5.4 si ha, per ogni $\bar{x} \in V$,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = d\,\mathrm{id}_V(\bar{x}) = d(h \circ g)(\bar{x}) = dh(g(\bar{x})) \circ dg(\bar{x}).$$

Ragionando con le matrici associate agli operatori lineari, otteniamo

$$I_n = Dh(g(\bar{x}))Dg(\bar{x}) = Dh(g(\bar{x}))Dg(\bar{x}).$$

Dato che le derivate di $f : A \to \mathbb{R}^n$ in $\bar{x}$ coincidono con le derivate della restrizione $f|_V$ in $\bar{x}$, allora $Dg(\bar{x}) = Df(\bar{x})$ e quindi

$$I_n = Dh(g(\bar{x}))Df(\bar{x}).$$

Dato che $\det I_n = 1$, deve essere, per il Teorema di Binet, $\det Df(\bar{x}) \neq 0$.

$\Leftarrow$:

Dimostriamo che f è aperta.

Per la Proposizione 8.0.3, essendo A un insieme aperto, dobbiamo dimostrare che se $V \subseteq A$ è aperto, allora $f(V)$ è un insieme aperto, ossia che per ogni $\bar{y} \in f(V)$ esiste $\sigma > 0$ tale che $B(\bar{y}, \sigma) \subseteq f(V)$.

Sia $\bar{y} \in f(V)$. Allora, esiste $\bar{x} \in V$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Essendo $f \in C^k$, $k \geq 1$, esiste $T := df(\bar{x}) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Per ipotesi (ii) $\det Df(\bar{x}) \neq 0$, quindi l'applicazione lineare T è invertibile. Definiamo

$$g : V \to \mathbb{R}^n, \qquad g(x) = x - T^{-1}(f(x)).$$

Tenendo conto che la composizione di funzioni di classe C^k è una funzione di classe C^k, deduciamo che $g \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$. Inoltre, per l'Esercizio 5.4.12 e il Teorema 5.5.4,

$$dg(\bar{x}) = d\,\mathrm{id}_V(\bar{x}) - dT^{-1}(f(\bar{x})) \circ df(\bar{x}) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Quindi $\|dg(\bar{x})\| = 0$. Per il Lemma 9.2.7 ed essendo V un insieme aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $\overline{B(\bar{x}, \delta)} \subseteq V$ e

$$\|dg(x)\| \leq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \overline{B(\bar{x}, \delta)}. \tag{9.2.1}$$

Dato che l'applicazione lineare T è invertibile, $\|T\| \neq 0$ e $\|T^{-1}\| \neq 0$. Denotiamo $\sigma := \frac{\delta}{2\|T^{-1}\|}$. Dimostriamo che $B(\bar{y}, \sigma) \subseteq f(V)$. Più precisamente, ricordando che $f(\bar{x}) = \bar{y}$, dimostriamo che

$$|y - f(\bar{x})| < \sigma \Rightarrow y \in f(\overline{B(\bar{x}, \delta)}).$$

Sia $y \in B(f(\bar{x}), \sigma)$, definiamo

$$K : \overline{B(\bar{x}, \delta)} \to \mathbb{R}^n, \qquad K(x) := x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) = g(x) + T^{-1}(y).$$

Dimostriamo che $K(\overline{B(\bar{x}, \delta)}) \subseteq \overline{B(\bar{x}, \delta)}$:
se $x \in \overline{B(\bar{x}, \delta)}$ si ha

$$\begin{aligned}
|K(x) - \bar{x}| &= |g(x) + T^{-1}(y) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x}) + g(\bar{x}) + T^{-1}(y) - \bar{x}| \\
&= |g(x) - g(\bar{x}) + \bar{x} - T^{-1}(f(\bar{x})) + T^{-1}(y) - \bar{x}| = |g(x) - g(\bar{x}) + T^{-1}(y - f(\bar{x}))| \\
&\leq |g(x) - g(\bar{x})| + |T^{-1}(y - f(\bar{x}))|.
\end{aligned}$$

Per il Teorema 9.2.8 esiste $z \in]\bar{x}, x[\subseteq B(\bar{x}, \delta)$ tale che

$$|g(x) - g(\bar{x})| \leq \|Dg(z)\| |x - \bar{x}|.$$

Dato che $z \in \overline{B(\bar{x},\delta)}$, per (9.2.1) e la Definizione 4.1.4 si ha

$$\|Dg(z)\| \leq \frac{1}{2},$$

da cui

$$\|Dg(z)\||x-\bar{x}| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Inoltre, per il Lemma 4.1.6 (i)

$$|T^{-1}(y-f(\bar{x}))| \leq \|T^{-1}\||y-f(\bar{x})| < \|T^{-1}\|\sigma = \|T^{-1}\|\frac{\delta}{2\|T^{-1}\|} = \frac{\delta}{2}.$$

Abbiamo quindi dimostrato che per ogni $x \in \overline{B(\bar{x},\delta)}$

$$|K(x)-\bar{x}| \leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta.$$

Ciò dimostra che l'immagine di K è contenuta in $\overline{B(\bar{x},\delta)}$, ossia:

$$K : \overline{B(\bar{x},\delta)} \to \overline{B(\bar{x},\delta)}, \qquad K(x) := x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) = g(x) + T^{-1}(y).$$

Dimostriamo ora che K è una contrazione.
Siano $x, x' \in \overline{B(\bar{x},\delta)}$, $x \neq x'$. Per il Teorema 9.2.8 esiste $z \in]x.x'[$ tale che

$$|K(x)-K(x')| = |g(x)+T^{-1}(y)-(g(x')+T^{-1}(y))| = |g(x)-g(x')| \leq \|dg(z)\||x-x'| \overset{(9.2.1)}{\leq} \frac{1}{2}|x-x'|.$$

Essendo $\frac{1}{2} < 1$ K è una contrazione. Essendo l'insieme $\overline{B(\bar{x},\delta)}$, dotato della metrica euclidea, uno spazio metrico completo, in quanto sottoinsieme chiuso dello spazio metrico completo $(\mathbb{R}^n, d_e)$, possiamo applicare il Teorema 9.1.4 (Teorema del punto fisso di Banach-Caccioppoli), deducendo che esiste (un unico), $x \in \overline{B(\bar{x},\delta)}$ tale che $K(x) = x$, ossia tale che

$$x - T^{-1}(f(x)) + T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow T^{-1}(f(x)) = T^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Dunque $y \in f(\overline{B(\bar{x},\delta)})$ che è quanto desideravamo dimostrare.

Dimostriamo che f è localmente iniettiva con inversa locale C^k.

Sia $\bar{x} \in A$. Denotiamo $T := df(\bar{x})$. Essendo $n = m$ e $\det Df(\bar{x}) \neq 0$ per ipotesi, l'applicazione T è in $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ed è invertibile.
Definiamo $g : A \to \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = f(x) - T(x) \qquad x \in A.$$

$g \in C^k$, e

$$dg(\bar{x}) \overset{Es.5.4.12}{=} df(\bar{x}) - T = T - T$$

da cui

$$\|dg(\bar{x})\| = 0.$$

Per il Lemma 9.2.7 esiste $\delta > 0$ tale che $B(\bar{x},\delta) \subseteq A$ e tale che

$$\|dg(x)\| \leq \frac{1}{2\|T^{-1}\|} \qquad \forall x \in B(\bar{x},\delta). \tag{9.2.2}$$

Da qui dimostriamo che per ogni $x, x' \in B(\bar{x},\delta)$, $x \neq x'$

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x')| &= |f(x) - T(x) + T(x) - T(x') + T(x') - f(x')| \\ &= |g(x) + T(x) - T(x') - g(x')| \geq |T(x-x')| - |g(x) - g(x')|.\end{aligned}$$

Per il Lemma 4.1.8 si ha

$$|T(x-x')| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}|x-x'|.$$

Inoltre, per il Teorema 9.2.8 e (9.2.2), esiste $z \in]x, x'[$ tale che

$$|g(x) - g(x')| \leq \|dg(z)\||x-x'| \leq \frac{1}{2\|T^{-1}\|}|x-x'|.$$

Ne deduciamo che

$$|f(x) - f(x')| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}|x-x'| - \frac{1}{2\|T^{-1}\|}|x-x'| = \frac{1}{2\|T^{-1}\|}|x-x'|, \tag{9.2.3}$$

che risulta positivo, in quanto $x \neq x'$. Quindi $|f(x) - f(x')| > 0$ da cui $f(x) \neq f(x')$. Ciò dimostra che la funzione

$$f|_{B(\bar{x},\delta)} : B(\bar{x},\delta) \to \mathbb{R}^n \ \text{ è iniettiva,}$$

per cui

$$f|_{B(\bar{x},\delta)} : B(\bar{x},\delta) \to f(B(\bar{x},\delta)) \ \text{ è invertibile.}$$

Consideriamo la sua funzione inversa:

$$g := (f|_{B(\bar{x},\delta)})^{-1} : f(B(\bar{x},\delta)) \to B(\bar{x},\delta)$$

e dimostriamo che g è di classe C^k.

Iniziamo col dimostrare che g è continua. Siano $y, y' \in f(B(\bar{x},\delta))$ con $y \neq y'$. Deve quindi essere $y = f(x)$, $y' = f(x')$, con $x, x' \in B(\bar{x},\delta)$, $x \neq x'$. Si ha

$$|g(y) - g(y')| = |x-x'| \overset{(9.2.3)}{\leq} 2\|T^{-1}\||f(x) - f(x')| = 2\|T^{-1}\||y-y'|. \tag{9.2.4}$$

Ciò prova la continuità di g (anzi, di più: essa è una funzione Lipschitziana).

Dimostriamo ora la differenziabilità di g.

Sia $y_0 \in f(B(\bar{x},\delta))$. Deve quindi essere $y_0 = f(x_0)$, con $x_0 \in B(\bar{x},\delta)$. Per la differenziabilità di f in x_0

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + o(|x-x_0|) \qquad \text{per } x \to x_0,$$

ossia esiste una funzione $\omega : B(\bar{x},\delta) \to \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x-x_0) + \omega(x)|x-x_0| \tag{9.2.5}$$

con $\omega(x) \to 0 \in \mathbb{R}^n$ se $x \to x_0$. Preso $y \in f(B(\bar{x},\delta))$, con $y \neq y_0$, allora $y = f(x)$, con $x \in B(\bar{x},\delta)$, $x \neq x_0$, e si ha, da (9.2.5),

$$y = y_0 + df(x_0)(g(y) - g(y_0)) + \omega(g(y))|g(y) - g(y_0)|.$$

Per la linearità di $(df(x_0))^{-1}$,

$$g(y) - g(y_0) = (df(x_0))^{-1}(y - y_0) - (df(x_0))^{-1}(\omega(g(y))|g(y) - g(y_0)|)$$

ossia, ancora per la linearità di $(df(x_0))^{-1}$,

$$g(y) - g(y_0) = (df(x_0))^{-1}(y - y_0) - (df(x_0))^{-1}(\omega(g(y))|g(y) - g(y_0)|)$$

e, moltiplicando e dividendo per $|y - y_0|$,

$$g(y) = g(y_0) + (df(x_0))^{-1}(y - y_0) + \omega_1(y)|y - y_0|.$$

dove si è posto

$$\omega_1(y) := -(df(x_0))^{-1}(\omega(g(y)))\frac{|g(y) - g(y_0)|}{|y - y_0|}.$$

Dimostriamo che

$$\lim_{y \to y_0} \omega_1(y) = 0. \tag{9.2.6}$$

La funzione

$$y \mapsto \frac{|g(y) - g(y_0)|}{|y - y_0|}$$

è limitata in un intorno di y_0 per (9.2.4). Dato che g e $df(x_0)^{-1}$ sono funzioni continue, allora

$$\lim_{y \to y_0} (df(x_0))^{-1}(\omega(g(y))) = \lim_{x \to x_0} (df(x_0))^{-1}(\omega(x)) = (df(x_0))^{-1}(0) = 0.$$

Abbiamo così ottenuto (9.2.6). Dunque g è differenziabile in y_0 e $dg(y_0) = df(x_0)^{-1}$, il che implica

$$Dg(y_0) = (Df(g(y_0)))^{-1}. \tag{9.2.7}$$

Dall'arbitrarietà di y_0 si ha g differenziabile. Che g sia di classe C^1 segue da (9.2.7): le derivate prime di g sono somme/prodotti/composizione di funzioni continue, e quindi sono continue. Se poi $f \in C^2$ allora le derivate prime di f sono di classe C^1 e, quindi, ancora da (9.2.7), le derivate prime di g sono di classe C^1, da cui g è di classe C^2. Iterando l'argomento deduciamo che se f è di classe C^k, allora g è di classe C^k.

□

9.3. Teorema delle funzioni implicite

NOTAZIONE 9.3.1. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $1 \leq p, q < n-1$ (ovviamente: $q = n-p$)
$(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$
$f : A \to \mathbb{R}^q$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \cdots, f_q)$,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

dove

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p}(x,y) \end{pmatrix} \in M^{q\times p}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_q}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f_q}{\partial y_q}(x,y) \end{pmatrix} \in M^{q\times q}.$$

Teorema 9.3.2 (Teorema di Dini o delle funzioni implicite).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, A aperto, e $f : A \to \mathbb{R}^q$, $f \in C^k(A, \mathbb{R}^q)$.
Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ tale che

$$f(\bar{x},\bar{y}) = 0, \qquad \det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0.$$

Allora esistono:

(i) *$V_{\bar{x}}$ aperto di $\mathbb{R}^p$ e $W_{\bar{y}}$ aperto di $\mathbb{R}^q$, con $\bar{x} \in V_{\bar{x}'}$, $\bar{y} \in W_{\bar{y}}$ e tali che $V_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} \subseteq A$,*
(ii) *una funzione $\varphi : V_{\bar{x}} \to W_{\bar{y}}$, di classe $C^k(V_{\bar{x}}, \mathbb{R}^q)$,*

tali che

$$\varphi(\bar{x}) = \bar{y}, \tag{9.3.1}$$

$$\{(x,y) \in V_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} : f(x,y) = 0\} = \{(x, \varphi(x)) : x \in V_{\bar{x}}\} \tag{9.3.2}$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) \qquad \forall x \in V_{\bar{x}}. \tag{9.3.3}$$

DIMOSTRAZIONE.
Definiamo $F : A \to \mathbb{R}^n$, $F(x, y) = (x, f(x, y))$.
Essendo $f \in C^k$, si ha $F \in C^k(A, \mathbb{R}^n)$ e

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times q} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}, \qquad \det DF(x,y) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

In particolare

$$\det DF(\bar{x},\bar{y}) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0.$$

Dato che

$$(x,y) \mapsto \det \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \quad \text{è continua},$$

esiste $V'_{\bar{x}}$ aperto di $\mathbb{R}^p$ contenente $\bar{x}$ e $W'_{\bar{y}}$ aperto di $\mathbb{R}^q$ contenente $\bar{y}$ tale che

$$\det DF(x,y) \neq 0 \qquad \forall (x,y) \in V'_{\bar{x}} \times W'_{\bar{y}}.$$

Per il Teorema di invertibilità locale applicato alla funzione

$$F|_{V'_{\bar{x}}\times W'_{\bar{y}}} : V'_{\bar{x}} \times W'_{\bar{y}} \to \mathbb{R}^n,$$

essa è aperta e localmente iniettiva con inversa C^k. Più precisamente:

a) esiste $V''_{\bar{x}} \subseteq V'_{\bar{x}}$, aperto di $\mathbb{R}^p$ contenente $\bar{x}$, e $W_{\bar{y}} \subseteq W'_{\bar{y}}$, aperto di $\mathbb{R}^q$ contenente $\bar{y}$, tale che

$$F|_{V''_{\bar{x}}\times W_{\bar{y}}} : V''_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} \to \mathbb{R}^n \text{ è iniettiva},$$

b) $F|_{V''_{\bar{x}}\times W_{\bar{y}}}(\bar{x},\bar{y}) = (\bar{x},0)$ [è conseguenza di $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$]

c) essendo F aperta, l'insieme

$$O := F(V''_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}}) \text{ è un insieme aperto di } \mathbb{R}^n,$$

e, da (b),

$$(\bar{x},0) \in O.$$

d) la funzione inversa

$$G := (F|_{V''_{\bar{x}}\times W_{\bar{y}}})^{-1} : O \to V''_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} \text{ è di classe } C^k. \tag{9.3.4}$$

Notiamo che se $G = (G_1, G_2)$,

$$F|_{V''_{\bar{x}}\times W_{\bar{y}}}(x,y) = (x, f(x,y)) \quad \forall (x,y) \in V''_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}}$$

ossia

$$(x,y) = G(x, f(x,y)) \quad \forall (x,y) \in V''_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}}. \tag{9.3.5}$$

Inoltre, da (b),
$$G(\bar{x},0) = (\bar{x},\bar{y}).$$
Da ciò segue che
$$G_2(\bar{x},0) = \bar{y}. \tag{9.3.6}$$
Essendo O un insieme aperto esiste $V_{\bar{x}} \subseteq V''_{\bar{x}}$, aperto di $\mathbb{R}^p$ contenente $\bar{x}$, tale che
$$V_{\bar{x}} \times \{0\} \subseteq O,$$
dove 0 denota il vettore nullo di $\mathbb{R}^q$. Allora, per (9.3.5),
$$G_1(x,0) = x \quad \forall x \in V_{\bar{x}}. \tag{9.3.7}$$
Ne deduciamo che
$$G_2(V_{\bar{x}} \times \{0\}) \subseteq W_{\bar{y}} \subseteq \mathbb{R}^q.$$
Definiamo
$$\varphi : V_{\bar{x}} \to W_{\bar{y}}, \qquad \varphi(x) := G_2(x,0).$$
Dalla (9.3.4) si ha che $\varphi \in C^k(V_{\bar{x}}, \mathbb{R}^q)$.
Dalla definizione di F e (9.3.7) si ha
$$\begin{aligned}\forall x \in V_{\bar{x}} \qquad (x, f(x,\varphi(x))) &= F(x,\varphi(x)) = F(x, G_2(x,0)) \\ &\overset{(9.3.7)}{=} F(G_1(x,0), G_2(x,0)) = F \circ G(x,0) = (x,0).\end{aligned}$$
Dunque,
$$f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in V_{\bar{x}}.$$
Ciò dimostra che
$$\{(x,y) \in V_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} : f(x,y) = 0\} \supseteq \{(x,\varphi(x)) : x \in V_{\bar{x}}\}.$$
D'altra parte, sia
$$(x_0, y_0) \in \{(x,y) \in V_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} : f(x,y) = 0\}.$$
Allora
$$f(x_0,y_0) = 0 \;\Rightarrow\; F(x_0,y_0) = (x_0, f(x_0,y_0)) = (x_0,0) \;\Rightarrow\; G_2(x_0,0) = y_0 \;\Rightarrow\; \varphi(x_0) = y_0.$$
Abbiamo così dimostrato che
$$\{(x,y) \in V_{\bar{x}} \times W_{\bar{y}} : f(x,y) = 0\} \subseteq \{(x,\varphi(x)) : x \in V_{\bar{x}}\}.$$
La (9.3.2) è dunque dimostrata.
Concludiamo dimostrando (9.3.3).
La funzione $h : V_{\bar{x}} \to \mathbb{R}^q$, $h(x) := f(x,\varphi(x))$, è identicalmente nulla, dato che
$$h(x) := f(x,\varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in V_{\bar{x}}.$$
Pertanto $Dh(x) = 0$.

D'altra parte, essendo $f \in C^k$ e $\varphi \in C^k(V_{\bar{x}}, \mathbb{R}^q)$, per il Teorema di derivazione di funzioni composte (Corollario 5.5.7) si ha

$$\begin{aligned} Dh(x) &= Df(x,\varphi(x)) \begin{pmatrix} I_p \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \end{pmatrix}. \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x). \end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) \qquad \forall x \in V_{\bar{x}}.$$

□

Osservazione 9.3.3. Si noti che l'ipotesi

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

è puramente di comodo ed eliminabile. Ci si può infatti ricoondurre sempre a questo caso. L'insieme di livello di f cui appartiene $(\bar{x}, \bar{y})$ è l'insieme

$$L_c(f) \qquad \text{con } c = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Definendo $g : A \to \mathbb{R}$ $g(x) = f(x) - c$ si ha

$$g \in C^1(A), \qquad L_0 g = L_c f, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}).$$

Esempio 9.3.4.
Non si può rimuovere l'ipotesi

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0.$$

Si consideri infatti $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$ e si consideri $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$. Si ha $f(0,0) = 0$, dunque $(0,0)$ appartiene all'insieme di livello 0 di f, ossia

$$(0,0) \in L_0(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, f(x, y) = 0\}.$$

L'insieme $L_0(f)$ è dato dai punti delle bisettrici del piano Oxy, essendo

$$L_0(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}.$$

Si noti che per ogni $r > 0$,

$$B((0,0), r) \cap L_0(f)$$

non può essere grafico di funzione di una variabile (x o y). D'altra parte,

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

quindi né $\det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ né

$$\det \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

sono soddisfatte.

Esempio 9.3.5.
Non si può rimuovere l'ipotesi $f \in C^1$.
Si consideri infatti $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |y| \leq x^2 \\ y - x^2 & \text{se } y > x^2 \\ y + x^2 & \text{se } y < -x^2. \end{cases}$$

e si consideri $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$. Si ha $f(0,0) = 0$, dunque $(0,0)$ appartiene all'insieme di livello 0 di f, ossia

$$(0,0) \in L_0(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}.$$

Si ha infatti

$$L_0(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2\},$$

che non risulta grafico di una funzione di una variabile reale.
Si osservi che f è derivabile in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \neq x^2\} \cup \{(0,0)\}$$

e $\nabla f(0,0) = (0,1)$ che è quindi un vettore non nullo. In particolare, l'ipotesi del Teorema di Dini

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

è soddisfatta. Tuttavia $f \notin C^1$ in un intorno di $(0,0)$, essendo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

9.4. Gradiente ortogonale all'insieme di livello

Definizione 9.4.1. Sia $g : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$, $g \in C^1(A)$. Diciamo che $\nabla g(x)$ è ortogonale *all'insieme di livello di f passante per x*, per affermare che $\nabla g(x)$ è ortogonale all'iperpiano tangente all'insieme di livello di f passante per x.

Teorema 9.4.2. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^n$. Sia $f \in C^1(A)$ e sia $\bar{x}$ un punto di A, tale che*

$$\nabla f(\bar{x}) \neq 0.$$

Allora $\nabla f(\bar{x})$ è ortogonale all'insieme di livello *di f passante per $\bar{x}$.*

DIMOSTRAZIONE. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $\bar{x} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) \neq 0.$$

L'insieme di livello di f a cui appartiene $\bar{x} = (\hat{x}, \hat{y})$ è l'insieme di livello $c = f(\bar{x})$. Per f valgono le ipotesi del Teorema 9.3.2 (vedi Osservazione 9.3.3), quindi:

- esistono
$$V_{\hat{x}} \text{ aperto di } \mathbb{R}^{n-1}, \ W_{\hat{y}} \text{ aperto di } \mathbb{R},$$
tali che
$$\hat{x} \in V_{\hat{x}}, \quad \hat{y} \in W_{\hat{x}}$$
e
$$V_{\hat{x}} \times W_{\hat{y}} \subseteq A$$
- esiste $\varphi : V_{\hat{x}} \to W_{\hat{y}}$ di classe C^1 tale che
$$\varphi(\hat{x}) = \hat{y} \tag{9.4.1}$$
e
$$L_c f \cap (V_{\hat{x}} \times W_{\hat{y}}) = \mathrm{Gr}\,\varphi.$$

Per i vettori di $\mathbb{R}^n$ usiamo la notazione

$$x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Per l'Osservazione 5.7.4, un vettore ortogonale all'iperpiano tangente al grafico di φ in $\bar{x} = (\hat{x}, \hat{y})$ è

$$(-\nabla\varphi(\hat{x}), 1) \quad \text{cioè} \quad \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\hat{x}), \cdots, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\hat{x}), 1\right),$$

quindi lo è anche il suo multiplo

$$\mu := \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y})\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\hat{x}), \cdots, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}(\hat{x}), 1\right).$$

Per la formula (9.3.3) e per (9.4.1)

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x},\hat{y}) \qquad i \in \{1,\cdots,n-1\},$$

allora

$$\mu = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x},\hat{y}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(\hat{x},\hat{y}),\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})\right),$$

cioè

$$\mu = \nabla f(\overline{x}).$$

$\square$

CAPITOLO 10

Massimi e minimi vincolati

10.1. Varietà in $\mathbb{R}^n$

Definizione 10.1.1 (Varietà).
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che M è una *varietà* in $\mathbb{R}^n$ di classe C^k e di dimensione p, con $k \geq 1$ e $1 \leq p < n$, se per ogni $\bar{x} \in M$ esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$, e una funzione $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$ tale che:

(i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$
(ii) $\operatorname{rg} Df(x) = n - p$ per ogni $x \in M \cap U$.

In tal caso, si dice che $f = 0$ è una *equazione locale di M in $\bar{x}$*.

Osservazione 10.1.2.
Una funzione $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$, $k \geq 1$, ha matrice Jacobiana di ordine $(n-p) \times n$. Dunque la richiesta (ii) della Definizione 10.1.1 ($\operatorname{rg} Df(x) = n - p$) equivale a richiedere che essa abbia rango massimo in ogni punto di $U \cap M$.

Definizione 10.1.3 (Parametrizzazione).
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama p-parametrizzazione di classe C^k di X, (in breve: parametrizzazione) una funzione $\phi \in C^k(V, \mathbb{R}^n)$, con V aperto di $\mathbb{R}^p$, $1 \leq p < n$, $k \geq 1$, con le seguenti proprietà:

(a) $\phi : V \to X$ è biunivoca
(b) $\phi^{-1} : X \to V$ è continua
(c) $\operatorname{rg} D\phi(t) = p$ per ogni $t \in V$.

I grafici di funzioni C^k, $k \geq 1$, sono delle varietà. Più precisamente vale il seguente.

Proposizione 10.1.4.
Siano $1 \leq p < n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^p$ un insieme aperto.
Se $\varphi : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ è una funzione di classe C^k, $k \geq 1$, allora

$$\operatorname{Gr} \varphi := \{(x, \varphi(x)) : x \in V\}$$

è una varietà in $\mathbb{R}^n$ di classe C^k, di dimensione p e di equazione (globale) $f = 0$, con $f(x, y) = \varphi(x) - y$.
Inoltre, $\phi : V \to \operatorname{Gr} \varphi$, $\Phi(x) = (x, \varphi(x))$ è una p-parametrizzazione di classe C^k di $\operatorname{Gr} \varphi$.

DIMOSTRAZIONE.
Sia $\bar{x} \in M$. Denotiamo $U := V \times \mathbb{R}^{n-p}$, che è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e definiamo $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, $f(x,y) = \varphi(x) - y$. La funzione φ è una funzione di classe C^k, pertanto $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$.
Si ha

$$M^{(n-p)\times n} \ni Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x) & -I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Quindi, $\mathrm{rg}\, Df(x,y) = n-p$. Questo dimostra che $\mathrm{Gr}\,\varphi$ è una varietà in $\mathbb{R}^n$ di classe C^k, di dimensione p e di equazione (globale) $f = 0$, con $f(x,y) = \varphi(x) - y$.
Dimostriamo ora che $\phi : V \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) = (x, \varphi(x))$ è una p-parametrizzazione di classe C^k di $\mathrm{Gr}\,\varphi$.
Ovviamente, $\phi(V) = \mathrm{Gr}\,\varphi$, dunque $\phi : V \to \mathrm{Gr}\,\varphi$ è suriettiva. Essa è anche iniettiva, in quanto

$$\forall x, x' \in V \quad (x \neq x' \;\Rightarrow (x, \varphi(x)) \neq (x', \varphi(x'))).$$

Abbiamo quindi che $\phi : V \to \mathrm{Gr}\,\varphi$ è biunivoca. La sua inversa $\phi^{-1} : \mathrm{Gr}\,\varphi \to V$ ha legge

$$\phi^{-1}(x, \varphi(x)) = x \qquad \forall (x, \varphi(x)) \in \mathrm{Gr}\,\varphi,$$

ossia

$$\phi^{-1}(x,z) = x \qquad \forall (x,z) \in \mathrm{Gr}\,\varphi.$$

Quindi ϕ^{-1} è una funzione continua. Inoltre

$$M^{n\times p} \ni D\phi(x) = \begin{pmatrix} I_p \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \end{pmatrix}, \qquad x \in V.$$

Il suo rango è quindi p, per ogni $x \in V$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 10.1.5.
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $k \geq 1$ e $1 \leq p < n$. Sono equivalenti le seguenti:

(a) *M è una* varietà *in $\mathbb{R}^n$ di classe C^k e di dimensione p,*
(b) *M è localmente p-parametrizzabile con funzioni C^k, ossia: per ogni $\bar{x} \in M$ esiste un aperto U di $\mathbb{R}^n$ contenente $\bar{x}$, tale che $M \cap U$ ha una parametrizzazione $\phi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^p$.*

DIMOSTRAZIONE.
(a) $\Rightarrow$ (b)
Sia $\bar{x} \in M$ e sia $f = 0$ una equazione locale di M in $\bar{x}$, ossia:
esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in M \cap U$, e una funzione $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$ tale che:

(i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$
(ii) $\mathrm{rg}\, Df(x) = n - p$ per ogni $x \in M \cap U$.

Denotiamo $x = (t, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, e supponiamo per semplicità che la sottomatrice quadrata $(n-p) \times (n-p)$ con determinante non nullo di

$$Df(\bar{x}) = Df(\bar{t}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial t}(\bar{t}, \bar{y}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

sia $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y})$, ossia

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y}) \neq 0.$$

Si ha $f(\bar{t}, \bar{y}) = 0$, perché $f = 0$ è una equazione locale di M in $\bar{x}$. Dunque, essendo soddisfatte le ipotesi del Teorema di Dini,

esistono $V_{\bar{t}}$ aperto di $\mathbb{R}^p$ contenente $\bar{t}$ e $W_{\bar{y}}$ aperto di $\mathbb{R}^{n-p}$ contenente $\bar{y}$, tali che $V_{\bar{t}} \times W_{\bar{y}} \subseteq U$

e

$$\text{esiste una funzione } \varphi : V_{\bar{t}} \to W_{\bar{y}} \text{ di classe } C^k,$$

tale che

$$\varphi(\bar{t}) = \bar{y},$$

$$M \cap (V_{\bar{t}} \times W_{\bar{y}}) = \{(t, y) \in V_{\bar{t}} \times W_{\bar{y}} \,:\, f(t, y) = 0\} = \{(t, \varphi(t)) \,:\, t \in V_{\bar{t}}\} = \operatorname{Gr}\varphi.$$

Allora, per la Proposizione 10.1.4, la funzione

$$\phi : V_{\bar{t}} \to \mathbb{R}^n, \ \phi(t) = (t, \varphi(t)),$$

è una parametrizzazione di $M \cap (V_{\bar{t}} \times W_{\bar{y}})$.

(b) $\Rightarrow$ (a)
Sia $\bar{x} \in M$ e siano $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto contenente $\bar{x}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^p$ un aperto e sia

$$\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n, \ \ \phi(t) = (\phi_1, \cdots, \phi_n), \ \ \phi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n), k \geq 1, \ p < n, \ \ \phi \text{ parametrizzazione di } M \cap U_1,$$

quindi, in particolare, ϕ ha le seguenti proprietà:

(a) $\phi : \Omega \to M \cap U_1$ è biunivoca
(b) $\phi^{-1} : M \cap U_1 \to \Omega$ è continua
(ossia la retroimmagine mediante ϕ^{-1} di un insieme aperto di Ω è un aperto relativamente alla topologia indotta su $M \cap U_1$)
(c) $\operatorname{rg} D\phi(t) = p$ per ogni $t \in \Omega$.

Per il Lemma 8.0.4 ϕ è una applicazione aperta, ossia, ricordando che Ω è aperto, se $A \subseteq \Omega$ è aperto, allora $\phi(A)$ è un insieme aperto rispetto alla topologia indotta su $M \cap U_1$.
Sia $\bar{t} \in \Omega$ tale che $\phi(\bar{t}) = \bar{x}$. Deve essere, per (c),

$$\operatorname{rg} D\phi(\bar{t}) = p.$$

Per semplicità, possiamo supporre che sia

$$\det \frac{\partial(\phi_1, \cdots, \phi_p)}{\partial t}(\bar{t}) \neq 0.$$

Denotiamo

$$\hat{\phi} = (\phi_1, \cdots, \phi_p) : \Omega \to \mathbb{R}^p,$$

e

$$\phi^* = (\phi_{p+1} \cdots, \phi_n) : \Omega \to \mathbb{R}^{n-p}.$$

Allora si ha

$$\phi(t) = (\hat{\phi}(t), \phi^*(t))$$

e

$$\det \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t}(\bar{t}) \neq 0.$$

Essendo

$$t \mapsto \det \frac{\partial(\phi_1, \cdots, \phi_p)}{\partial t}(t) \text{ continua,}$$

esiste un aperto O' di $\mathbb{R}^p$, $\bar{t} \in O' \subseteq \Omega$, tale che

$$\det \frac{\partial(\phi_1, \cdots, \phi_p)}{\partial t}(t) \neq 0 \quad \text{per ogni } t \in O'.$$

Per il Teorema di invertibilità locale applicato alla funzione

$$\hat{\phi}|_{O'} = (\phi_1, \cdots, \phi_p)|_{O'} : O' \to \mathbb{R}^p,$$

esiste un aperto O di $\mathbb{R}^p$, tale che $\bar{t} \in O \subseteq O'$,

$$\hat{\phi}|_O = (\phi_1, \cdots, \phi_p)|_O : O \to \hat{\phi}(O) =: V \quad \text{è una funzione invertibile,}$$

V è un insieme aperto di $\mathbb{R}^p$, e

$$G := (\hat{\phi})^{-1} : V \to O \text{ è di classe } C^k.$$

Denotiamo

$$\hat{x} := \hat{\phi}(\bar{t}) \in V$$

e definiamo

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^{n-p}, \qquad \varphi(v) := \phi^* \circ G(v).$$

Si noti che $\varphi \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-p})$, essendo composizione di funzioni di classe C^k.
Risulta,

$$\forall v \in V := \hat{\phi}(O) \qquad \phi(G(v)) = (\hat{\phi}(G(v)), \phi^*(G(v))) = (\hat{\phi}(\hat{\phi}^{-1}(v)), \phi^*(G(v))) = (v, \varphi(v)).$$

Dunque

$$\phi(G(V)) = \mathrm{Gr}\,\varphi.$$

Si noti che
$$\bar{x} \in \phi(O) = \phi(G(V)) = \operatorname{Gr}\varphi.$$
Essendo ϕ una applicazione aperta, $\phi(O)$ è un insieme aperto rispetto alla topologia indotta su $M \cap U_1$, vale a dire:
$$\text{esiste } U_2 \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \text{ tale che} \quad \phi(G(V)) = \phi(O) = (M \cap U_1) \cap U_2 = M \cap (U_1 \cap U_2).$$
L'insieme $U_1 \cap U_2$ è intersezione di due aperti di $\mathbb{R}^n$ che contengono $\bar{x}$, quindi è un insieme aperto che contiene $\bar{x}$. Abbiamo così dimostrato che
$$M \cap (U_1 \cap U_2) = \phi(G(V)) = \operatorname{Gr}\varphi,$$
con $\varphi \in C^k(V, \mathbb{R}^{n-p})$. Dunque $M \cap (U_1 \cap U_2)$ è una varietà in $\mathbb{R}^n$ di classe C^k, di dimensione p.

□

Definizione 10.1.6 (Vettore tangente).
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *varietà* di classe C^k di dimensione p ($k \geq 1$, $1 \leq p < n$).
Un vettore $h \in \mathbb{R}^n$ si dice *vettore tangente* a M in $\bar{x} \in M$, se esistono $\delta > 0$ e $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$, tali che

(a) $\gamma(0) = \bar{x}$
(b) γ è derivabile in 0
(c) $\gamma'(0) = h$.

Definizione 10.1.7 (Piano tangente).
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di classe C^k di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$).
Si chiama *piano tangente* a M in $\bar{x} \in M$ l'insieme
$$T_{\bar{x}}M := \{h \in \mathbb{R}^n : h \text{ è un vettore tangente a } M \text{ in } \bar{x}\}.$$

Teorema 10.1.8.
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di classe C^k di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$) e sia $f = 0$ una equazione locale di M in $\bar{x} \in M$.
Allora $T_{\bar{x}}M$ è uno spazio vettoriale di dimensione p e
$$T_{\bar{x}}M = \ker df(\bar{x}).$$

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi $f = 0$ è una equazione locale di M in $\bar{x} \in M$. Allora esistono un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in U$ e una funzione $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-p})$ tale che:

(i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$

(ii) $\operatorname{rg} Df(x) = n - p$ per ogni $x \in M \cap U$.

$\subseteq$

Sia $h \in T_{\bar{x}}M$. Allora esiste $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$, con $\delta > 0$ tali che

(a) $\gamma(0) = \bar{x}$

(b) γ è derivabile in 0

(c) $\gamma'(0) = h$.

La funzione γ è derivabile in 0, quindi è anche continua in 0. Dunque, esiste $\delta' \in]0, \delta]$ tale che $\gamma(]-\delta', \delta'[) \subseteq M \cap U$. In particolare, si ha

$$f(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \in]-\delta', \delta'[.$$

Pertanto, dal Teorema di derivazione di funzione composta (v. Corollario 5.5.5) si ha

$$0 = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = Df(\gamma(0))\gamma'(0) \overset{(a),(c)}{=} Df(\bar{x})h.$$

Pertanto, $h \in \ker df(\bar{x})$.

$\supseteq$

Per semplicità, introduciamo le seguenti notazioni: un generico vettore di $x \in \mathbb{R}^n$ lo scriviamo nella forma $x = (\xi, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. In particolare, $\bar{x} = (\bar{\xi}, \bar{y})$.

Per ipotesi $\operatorname{rg} Df(\bar{x}) = n - p$. Supponiamo, per semplicità di scrittura, che sia

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) = \det \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{\xi}, \bar{y}) \neq 0. \tag{10.1.1}$$

Sia $h = (h', h'') \in \ker df(\bar{x})$. Allora

$$0 = Df(\bar{x})h = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\bar{x}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h' \\ \\ h'' \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\bar{x})h' + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})h''.$$

che implica

$$h'' = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\bar{x})h'. \tag{10.1.2}$$

Da (10.1.1) e dal Teorema 9.3.2 delle funzioni implicite:
esistono $V_{\bar{\xi}}$ aperto di $\mathbb{R}^p$ e $W_{\bar{y}}$ aperto di $\mathbb{R}^{n-p}$, con $\bar{\xi} \in V_{\bar{t}}$ e $\bar{y} \in W_{\bar{y}}$, tali che $V_{\bar{\xi}} \times W_{\bar{y}} \subseteq U$
ed esiste una funzione $\varphi : V_{\bar{\xi}} \to W_{\bar{y}}$, tale che $\varphi \in C^k$,

$$\bar{y} = \varphi(\bar{\xi}), \tag{10.1.3}$$

$$\{(\xi, \varphi(\xi)) : \xi \in V_{\bar{t}}\} = \{(\xi, y) \in V_{\bar{\xi}} \times W_{\bar{y}} : f(\xi, y) = 0\} \subseteq M \cap U \tag{10.1.4}$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \varphi(\xi))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \varphi(\xi)) \qquad \forall \xi \in V_{\bar{\xi}}. \tag{10.1.5}$$

Per (10.1.3) e la continuità di φ esiste $\delta > 0$ tale che

$$(\bar{\xi} + th', \varphi(\bar{\xi} + th')) \in V_{\bar{\xi}} \times W_{\bar{y}} \overset{(10.1.4)}{\subseteq} M \cap U \qquad \forall\, t \in]-\delta, \delta[.$$

Denotiamo $\gamma :]-\delta, \delta[\to M \cap U$, la funzione

$$\gamma(t) = (\bar{\xi} + th', \varphi(\bar{\xi} + th')).$$

Essendo $\varphi \in C^1(V_{\bar{\xi}}, \mathbb{R}^{n-p})$, risulta $\gamma \in C^1(]-\delta, \delta[, M \cap U)$ per il Corollario 5.5.7 e

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} h' \\ \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\bar{\xi}) h' \end{pmatrix} \overset{(10.1.5)}{=} \begin{pmatrix} h' \\ \\ -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi}))\right)^{-1} \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\bar{\xi}, \varphi(\bar{\xi})) h' \end{pmatrix}.$$

Ricordando che $\bar{x} = (\bar{\xi}, \bar{y})$ e usando (10.1.3) e (10.1.2), otteniamo

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} h' \\ \\ -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})\right)^{-1} \dfrac{\partial f}{\partial \xi}(\bar{x}) h' \end{pmatrix} \overset{(10.1.2)}{=} \begin{pmatrix} h' \\ \\ h'' \end{pmatrix} = h.$$

Abbiamo così dimostrato $\ker df(\bar{x}) \subseteq T_{\bar{x}} M$.
Resta da dimostrare che $T_{\bar{x}} M$ è uno spazio vettoriale di dimensione p.
Essendo $T_{\bar{x}} M = \ker df(\bar{x})$ è ovvio che $T_{\bar{x}} M$ sia uno spazio vettoriale. Per calcolarne la dimensione, osserviamo che, per il Teorema del rango,

$$\dim \ker df(\bar{x}) + \dim \operatorname{Im} df(\bar{x}) = n.$$

Da (ii) della Definizione 10.1.1

$$\dim \operatorname{Im} df(\bar{x}) = \operatorname{rg} Df(\bar{x}) = n - p.$$

Deduciamo quindi che $\dim \ker df(\bar{x}) = p$.

$\square$

Teorema 10.1.9 (Caratterizzazione di $T_{\bar{x}} M^{\perp}$).
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di classe C^k di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$) e sia $f = 0$ una equazione locale di M in $\bar{x} \in M$, $f = (f_1, \cdots, f_{n-p})$.
Allora $T_{\bar{x}} M^{\perp}$ è uno spazio vettoriale di dimensione $n - p$ e

$$T_{\bar{x}} M^{\perp} = \operatorname{span}\{\nabla f_1(\bar{x}), \cdots, \nabla f_{n-p}(\bar{x})\}.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dal Teorema 10.1.8, $T_{\bar{x}}M = \ker df(\bar{x})$, quindi

$$h \in T_{\bar{x}}M \quad \Leftrightarrow \quad Df(\bar{x})h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \nabla f_j(\bar{x}), h\rangle = 0 \ \forall j \in \{1, \cdots, n-p\}.$$

Ciò dimostra che

$$T_{\bar{x}}M = (\text{span}\{\nabla f_1(\bar{x}), \cdots, \nabla f_{n-p}(\bar{x})\})^{\perp}$$

da cui

$$T_{\bar{x}}M^{\perp} = \text{span}\{\nabla f_1(\bar{x}), \cdots, \nabla f_{n-p}(\bar{x})\}.$$

Che $T_{\bar{x}}M^{\perp}$ sia uno spazio vettoriale di dimensione $n-p$ segue dalla (ii) della Definizione 10.1.1 e ricordando che la i-esima riga di $Df(\bar{x})$ è $\nabla f_i(\bar{x})$. □

10.2. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange

Definizione 10.2.1 (Punti estremanti locali condizionati).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Sia $M \subset A$.
Diciamo che $\bar{x} \in M$ è un punto estremante relativo vincolato (o condizionato) di f su M se $\bar{x}$ è un punto estremante relativo per la funzione $f|_M : M \to \mathbb{R}$.

Definizione 10.2.2 (Punti critici condizionati).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $M \subseteq A$ una *varietà* classe C^k e di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$).
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.
Diciamo che $\bar{x} \in M$ è un punto critico vincolato (o condizionato) di f su M se

$$df(\bar{x})|_{T_{\bar{x}}M} = 0.$$

Proposizione 10.2.3.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, $M \subseteq A$ una varietà *classe C^k e di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Sia $\bar{x} \in M$.*
Sono equivalenti le seguenti:

(i) *$\bar{x} \in M$ è un punto critico vincolato (o condizionato) di f su M*
(ii) $\nabla f(\bar{x}) \in T_{\bar{x}}M^{\perp}$

DIMOSTRAZIONE.
Per definizione, $\bar{x} \in M$ è un punto critico vincolato (o condizionato) di f su M significa

$$df(\bar{x})|_{T_{\bar{x}}M} = 0,$$

ossia

$$Df(\bar{x})h = 0 \quad \forall h \in T_{\bar{x}}M.$$

Tenuto conto che f ha valori in $\mathbb{R}$, tale condizione è equivalente a

$$\langle \nabla f(\bar{x}), h\rangle = 0 \quad \forall h \in T_{\bar{x}}M,$$

che, a sua volta, equivale a

$$\nabla f(\bar{x}) \in T_{\bar{x}}M^{\perp}.$$

□

Il legame tra punti estremanti relativi vincolati e i punti critici vincolati è simile a quello descritto nel Teorema 7.2.2 (Teorema di Fermat).

Teorema 10.2.4 (Teorema di Fermat per gli estremanti vincolati o condizione necessaria del I ordine per gli estremanti relativi vincolati).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $M \subseteq A$ una varietà *classe C^k e di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$).*
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1.
Se $\bar{x} \in M$ è un punto estremante relativo vincolato di f su M, allora $\bar{x}$ è un punto critico vincolato di f su M.

DIMOSTRAZIONE.
Diamo la dimostrazione nel caso in cui $\bar{x} \in M$ sia un punto di minimo relativo vincolato di f su M. Per definizione, esiste un aperto U di $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\exists\ U \text{ aperto di } \mathbb{R}^n,\ \ \bar{x} \in U\ :\ f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in M \cap U. \tag{10.2.1}$$

Per la Proposizione 10.2.3 dobbiamo dimostrare che

$$\langle \nabla f(\bar{x}), h\rangle = 0 \qquad \forall h \in T_{\bar{x}}M.$$

Sia $h \in T_{\bar{x}}M$. Allora, esistono $\delta > 0$ e $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$, tali che

(a) $\gamma(0) = \bar{x}$
(b) γ è derivabile in 0
(c) $\gamma'(0) = h$.

Dato che la (b) implica che γ è continua in 0 e dato che $\gamma(0) = \bar{x}$, esiste $\delta' \in]0, \delta]$ tale che $\gamma(]-\delta', \delta'[) \subseteq M \cap U$. Definiamo $g := f \circ \gamma :]-\delta', \delta'[\to U \cap M$. Allora, da (10.2.1),

$$g(t) = f(\gamma(t)) \overset{(10.2.1)}{\geq} f(\gamma(0)) = g(0) \qquad \forall t \in]-\delta', \delta'[$$

deduciamo che 0 è un punto di minimo assoluto (quindi anche relativo) di g. Essendo 0 un punto interno di $]-\delta', \delta'[$ e g derivabile in 0 (per il Corollario 5.5.5, essendo $f \in C^1$, quindi differenziabile, e γ derivabile in 0) è possibile applicare il Teorema di Fermat 7.2.2, ottenendo

$$0 = g'(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0)\rangle = \langle \nabla f(\bar{x}), h\rangle.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 10.2.5 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *un aperto e sia* $M \subseteq A$ *una* varietà *classe* C^k *e di dimensione* p *(*$k \geq 1$ *e* $1 \leq p < n$*).*
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^1*.*
Sia $\bar{x} \in M$ *e* $g = (g_1, \cdots, g_{n-p}) = 0$ *una equazione locale di* M *in* $\bar{x}$*.*
Se $\bar{x}$ *è un punto estremante relativo vincolato di* f *su* M *allora*

$$\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-p} \in \mathbb{R} : \nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n-p} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}).$$

DIMOSTRAZIONE.
Segue dalla Proposizione 10.2.3, dal Teorema 10.1.9 e dal Teorema 10.2.4. Infatti, se $\bar{x}$ è un punto estremante relativo vincolato di f su M, allora, per il Teorema di Fermat per estremanti vincolati, deve essere un punto critico vincolato. Ciò comporta, per la Proposizione 10.2.3, che sia $\nabla f(\bar{x}) \in T_{\bar{x}} M^{\perp}$.
Per la (ii) di Definizione 10.1.1 e per il Teorema 10.1.9, l'insieme $T_{\bar{x}} M^{\perp}$ è lo spazio vettoriale di dimensione $n - p$

$$T_{\bar{x}} M^{\perp} = \operatorname{span}\{\nabla g_1(\bar{x}), \cdots, \nabla g_{n-p}(\bar{x})\}.$$

Quindi

$$\nabla f(\bar{x}) \text{ è combinazione lineare di } \nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x}), \cdots, \nabla g_{n-p}(\bar{x}).$$

Da qui, la tesi. □

Corollario 10.2.6. *Siano* $f, F : A \to \mathbb{R}$*,* A *aperto di* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 2$*,* $f, F \in C^1(A)$*. Sia*

$$M := \{x \in A : F(x) = 0\}.$$

Sia

$$\nabla F(x) \neq 0 \qquad \forall x \in M$$

Se $x \in A$ *è un punto estremante relativo di* $f|_M : M \to \mathbb{R}$ *allora esiste* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla F(x) \\ F(x) = 0. \end{cases} \tag{10.2.2}$$

Osservazione 10.2.7. Le soluzioni del sistema (10.2.2) sono di due tipi, a seconda che sia $\lambda = 0$ o $\lambda \neq 0$.
Gli x che risolvono (10.2.2) con $\lambda = 0$ sono

i punti critici di f che appartengono a M.

Gli x che risolvono (10.2.2) con $\lambda \neq 0$ sono

i punti di M in cui M risulta tangente a un insieme di livello di f.

Ciò segue osservando che le condizioni

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla F(x), \quad \lambda \neq 0, \quad \nabla F(x) \neq 0$$

implicano

$$\nabla f(x) \parallel \nabla F(x).$$

La conclusione segue applicando il Teorema 9.4.2 a f e a F e osservando che M è l'insieme di livello di F passante per x.

Corollario 10.2.8. *Siano $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto di $\mathbb{R}^3$, $f \in C^1(A)$. Sia $F : A \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2) \in C^1(A)$. Sia*

$$M := \{(x, y, z) \in A : F_1(x, y, z) = 0,\ F_2(x, y, z) = 0\}.$$

Sia

$$\operatorname{rg} DF(x, y, z) = 2 \qquad \forall (x, y, z) \in M.$$

Se $(x, y, z) \in A$ è un punto estremante relativo di $f|_M : M \to \mathbb{R}$ allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla F_1(x, y, z) + \mu \nabla F_2(x, y, z) \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

10.3. Esercizi

Esercizio 10.3.1. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f : A \to \mathbf{R}$,

$$f(x, y) := x^2 - y^2.$$

Determinare $f(A)$.

[Sol. es: 10.3.1: A è chiuso, limitato e connesso. $(0, 0)$ è l'unico punto critico interno ad A e i punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A sono $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Si verifica che i punti di massimo assoluto sono $(\pm 1, 0)$ e che il valore di massimo assoluto è $f(\pm 1, 0) = 1$; analogamente, i punti di minimo assoluto sono $(0, \pm 1)$ e il valore minimo assoluto è $f(0, \pm 1) = -1$. Per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A) = [-1, 1]$.]

Esercizio 10.3.2. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x - 1 \leq y \leq (x - 1)^2\}$, $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := xy - x^2.$$

Determinare i punti i massimo e di minimo assoluti e l'immagine $f(A)$.

[Sol. es: 10.3.2: A è chiuso, limitato e connesso. $(0,0)$ è l'unico punto critico di f come funzione da $\mathbb{R}^2$ ad $\mathbb{R}$, ma siccome non è interno ad A non va considerato. I punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A sono $(1-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3})$, $(1,0)$. Siccome $f(1-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1 > -1 = f(1,0)$ si ha che il punto di massimo assoluto è $(1-\sqrt{\frac{2}{3}},\frac{2}{3})$ e il punto di minimo assoluto è $(1,0)$. $f(A) = [-1, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1]$.]

Esercizio 10.3.3. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Determinare i punti i massimo e di minimo assoluti e l'immagine $f(A)$.

[Sol. es: 10.3.3: A è chiuso, limitato e connesso. f non ha punti critci. Per quel che riguarda i punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A essi sono $(\pm 1,0)$ e $(\pm 2,0)$. Confrontando il valore assunto in quei punti dalla f si ottiene che $(1,0)$ è punto di massimo assoluto e che il valore di massimo assoluto è 1, mentre $(-1,0)$ è punto di minimo assoluto e il valore di minimo assoluto è -1. Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A) = [-1,1]$.]

Esercizio 10.3.4. Siano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \le 0, 3 - x + y \ge 0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^2 + x(y-1) + y + y^2.$$

Determinare i punti i massimo e di minimo assoluti e l'immagine $f(A)$.

[Sol. es: 10.3.4: A è chiuso, limitato e connesso. f ha come unico punto critico $(1,-1)$ che è interno ad A. I punti estremanti relativi di f ristretta a ∂A sono $(\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$, $(0,-\frac{1}{2})$ (che sono candidati ad essere punti di minimo assoluto) e i punti $(0,-3)$ $(0,0)$, $(3,0)$ (che sono candidati ad essere punti di massimo assoluto). Confrontando il valore assunto in questi punti e nel punto critico da f si ottiene che $(0,-3)$ e $(3,0)$ sono i punti di massimo assoluti (6 è il valore di massimo assoluto) e $(1,-1)$ è il punto di minimo assoluto (-1 è il valore di minimo assoluto). Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A) = [-1,6]$.]

Esercizio 10.3.5. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^2 + 2y^2.$$

Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di massimo e di minimo assoluti e $f(A)$.

[Sol. es: 10.3.5: A è chiuso, limitato e connesso ed f è continua. Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A) =$ [valore min, valore max].
Si ha

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

dove $F(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Osserviamo che $\nabla F(x, y) = (2(x-1), 2y)$, che risulta $= (0,0)$ se e solo se $x = 1$ e $y = 0$, punto che non è appartenente ad A. Possiamo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Se determiniamo gli (x, y) soluzioni di

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2(x-1) \\ 4y = \lambda 2y \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{R}$$

otteniamo i candidati ad essere punti di massimo e di minimo relativi. Risolvendo il sistema si ottengono il punto $(x, y) = (0,0)$ per $\lambda = 0$ e il punto $(2,0)$ per $\lambda = 2$. Non ci sono altri candidati. Siccome per il Teorema di Weierstrass esistono un punto di massimo e di minimo assoluto che debbono necessariamente essere tra i punti appena trovati. Si verifica che $f(0,0) = 0 < 4 = f(2,0)$. Dunque $(0,0)$ è punto di minimo assoluto, $(2,0)$ è punto di massimo assoluto e $f(A) = [0,4]$.]

Esercizio 10.3.6. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, $f : A \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^2 y.$$

Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti e $f(A)$.

[Sol. es: 10.3.6: A è chiuso, limitato e connesso ed f è continua. Dunque, per il Teorema di Weierstrass e per il Teorema dell'esistenza dei valori intermedi si ha che $f(A) =$ [valore min, valore max]. I punti critici interni ad A sono i punti $(0, y)$ con $-1 < y < 1$. Per determinare i candidati ad essere punti di max e min assoluti che giacciono su ∂A usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (l'alternativa è studiare $f(\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi)$).
Si ha

$$\partial A = \{(x, y) : F(x, y) = 0\},$$

dove $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Siccome $\nabla F(x, y) = (0,0)$ solo per $x = 0$, $y = 0$ che non e' in ∂A possiamo applicare il metodo. Risolvendo

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 2x \\ x^2 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

si ottengono: $(0, \pm 1)$ per $\lambda = 0$, $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$ per $\lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$ per $\lambda = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Un confronto tra i valori assunti da f in tutti questi punti e nei punti critici interni ad A permette di affermare che i punti di massimo assoluto sono $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{1}{3}})$ e che i punti $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}},-\sqrt{\frac{1}{3}})$ sono di minimo assoluto. L'immagine è $[-\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{2}{3\sqrt{3}}]$.]

Esercizio 10.3.7 (VB). Sia $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 3x + y + z$, con

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 10x^2 + y^2 + 10z^2 \le 8\}.$$

Determinare $f(K)$.

SOLUZIONE:
K è compatto.
Candidati punti di massimo/minimo assoluti: $\left(-\frac{3}{5},-2,-\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{3}{5},2,\frac{1}{5}\right)$
$f(K) = [-4,4]$.

Esercizio 10.3.8 (VB). Sia $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + yz$, con

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1,\ -1 \le z \le 3\}.$$

Determinare, se esistono, $\min_K f$ e $\max_K f$.

SOLUZIONE:
K è compatto.
Candidati punti di massimo/minimo assoluti:
$(0,0,0)$,
$(1,0,0)$,
$(-1,0,0)$,
$(0,1,3)$,
$(0,-1,3)$,
$(0,1,-1)$,
$(0,-1,-1)$,
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$,
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},-1\right)$

Da cui: $\min_K f = -3$, $\max_K f = 3$.

Esercizio 10.3.9 (da prova scritta AM2: 25-1-2021). Si consideri $f:\Omega\to\mathbb{R}$

$$f(x,y,z)=xzy|y|$$

con

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ y\geq 0\}.$$

Determinare $f(\Omega)$.

SOLUZIONE:
Notiamo che f è nulla in $\Omega\cap(\{y=0\}\cup\{x=0\}\cup\{z=0\})$.
Determiniamo ora i candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluti di $f|_\Omega$ che si trovano in $\Omega\cap\{y>0\}\cap\{x,z\neq 0\}$.
Usiamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Sia $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. F è di classe C^1 e $\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,2z)$ è non nullo in Ω.
I candidati a essere punti di massimo/minimo assoluti per $f|_\Omega$ sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} (y|y|z,2xz|y|,xy|y|)=\lambda(2x,2y,2z)\\ x^2+y^2+z^2=1\\ y>0\\ x,z\neq 0\end{cases}$$

Tale sistema è equivalente a

$$\begin{cases} y^2z=\lambda 2x\\ 2xzy=2\lambda y\\ xy^2=\lambda 2z\\ x^2+y^2+z^2=1\\ y>0\\ x,z\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y^2z=\lambda 2x\\ xz=\lambda\\ xy^2=\lambda 2z\\ x^2+y^2+z^2=1\\ y>0\\ x,z\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y^2z=2x^2z\\ xz=\lambda\\ xy^2=2xz^2\\ x^2+y^2+z^2=1\\ y>0\\ x,z\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x^2 \\ xz = \lambda \\ y^2 = 2z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y > 0 \\ x, z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2x^2 \\ xz = \lambda \\ y^2 = 2z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y > 0 \\ x, z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z^2 = 2x^2 \\ xz = \lambda \\ y^2 = 2z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y > 0 \\ x, z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = x^2 \\ xz = \lambda \\ y^2 = 2z^2 \\ 4z^2 = 1 \\ y > 0 \\ x \neq 0 \\ z \neq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}), (\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}).$$

Ora:

$$f(x,0,z) = 0,\ f(x,y,0) = 0\ f(0,y,z) = 0$$

$$f(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}) = \pm\frac{1}{8}$$

$$f(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) = \mp\frac{1}{8}.$$

Quindi:

$$f(\Omega) = [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}].$$

Esercizio 10.3.10 (variante prova scritta AM2: 13-1-2020). Sia $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$. Utilizzando, almeno in parte, il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, calcolare l'immagine della funzione $f : K \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 2z - xy$.

Soluzione 10.3.10:
K è compatto e connesso, f è continua, quindi $f(K) = [\min_K f, \max_K f]$. Si ha $K = \operatorname{int} K \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$, con

$$\operatorname{int} K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 < z < 4\}$$
$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = z,\ z < 4\}$$
$$K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4,\ 2x^2 + y^2 < 4\}$$
$$K_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 = 4,\ z = 4\}.$$

Candidati punti di massimo/minimo in $\operatorname{int} K$, non ve ne sono. Infatti $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e senza punti critici, in quanto $\nabla f(x,y,z) = (-y,-x,2)$ non si annulla mai.
Cerchiamo i candidati punti di massimo/minimo in K_1.
Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z$. Tale funzione è di classe C^1 e

$$\nabla g(x,y,z) = (4x.2y,-1) \neq (0,0,0).$$

Quindi $L_0(g)$ è una varietà di dimensione 2 e

$$K_1 = L_0(g) \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 4\}.$$

Usiamo il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ (x,y,z) \in K_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 4\lambda x \\ -x = 2\lambda y \\ 2 = -\lambda \\ 2x^2 + y^2 = z \\ z < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = 8x \\ x = 4y \\ 2x^2 + y^2 = z \\ z < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = 8x \\ x = 32x \\ 2x^2 + 64x^2 = z \\ z < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \\ z < 4 \end{cases} .$$

Pertanto $(0,0,0)$ è l'unico candidato punto estremante di f in K_1.

Cerchiamo i candidati punti di massimo/minimo in K_2. Si ha

$$f|_{K_2} : K_2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = f(x,y,4) = 8 - xy.$$

Inoltre $(x,y,z) \in K_2 \Leftrightarrow (x,y) \in H \wedge z = 4$ con

$$H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 4\}$$

che è un aperto di $\mathbb{R}^2$. Basta quindi determinare i punti critici $g : H \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = 8 - xy$.

Si ha

$$\nabla g(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases}.$$

Essendo $(0,0) \in H$ punto critico di g, deduciamo che $(0,0,4)$ è l'unico candidato punto estremante di f in K_2.

Cerchiamo i candidati punti di massimo/minimo in K_3. Possiamo parametrizzare K_3. Esso è infatti il sostegno della curva semplice

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\sin t, 4).$$

Definiamo

$$g : [0,2\pi] \to \mathbb{R}, \quad g(t) = f \circ \gamma(t) = 8 - 2\sqrt{2}\sin(t)\cos(t) = 8 - \sqrt{2}\sin(2t).$$

Si ha

$$\begin{cases} g'(t) = 0 \\ t \in [0,2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}\cos(2t) = 0 \\ t \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

I candidati punti estremanti di f in K_3 sono i punti

$$\gamma(t) \text{ con } t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Non li calcoliamo, dato che ci servono solo i valori dell'immagine di tali punti mediante f, che coincidono con

$$g(t) \text{ con } t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Riassumendo:

$$\begin{gathered} f(0,0,0) = 0 \\ f(0,0,4) = 8 \\ g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{5\pi}{4}) = 8 - \sqrt{2} \\ g(\frac{3\pi}{4}) = g(\frac{7\pi}{4}) = 8 + \sqrt{2}. \end{gathered}$$

Conclusione: $f(K) = [0, 8+\sqrt{2}]$.

Esercizio 10.3.11 (da prova scritta AM2: 8-6-2020). Usando il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, determinare l'immagine di $f : K \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = -2y - 4z,$$

dove

$$K = \{(x,y,z) : x + y = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

SOLUZIONE:
Sia $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z)) := (x+y, x^2+y^2+z^2-4)$. Allora

$$\nabla F_1(x,y,z) = (1,1,0)$$

$$\nabla F_2(x,y,z) = (2x,2y,2z)$$

Risulta

$$\operatorname{rank} DF(x,y,z) = 1 \Leftrightarrow (x = y \text{ e } z = 0) \Leftrightarrow (\text{in } K)\ 2x = 0,\ x = y,\ z = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \text{ MAI in } K$$

Dunque

$$\operatorname{rank} DF(x,y,z) = 2\ \forall (x,y,z) \in K.$$

Dato che

$$\nabla f(x,y,z) = (0,-2,-4)$$

Il sistema di Lagrange è:

$$\begin{cases} 0 = \lambda + 2\mu x \\ -2 = \lambda + 2\mu y \\ -4 = 2\mu z \\ x+y=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu x = -\lambda \\ -2\mu y = \lambda + 2 \\ 2\mu z = -4 \\ y = -x \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu x = -\lambda \\ 2\mu x = \lambda + 2 \\ 2\mu z = -4 \\ y = -x \\ 2x^2+z^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\mu x = 2 \text{ sommo le prime due} \\ 0 = 2\lambda + 2 \text{ sottraggo la prima alla seconda} \\ 2\mu z = -4\ (\Rightarrow \mu \neq 0) \\ y = -x \\ 2x^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{4\mu} \\ 2\lambda = -2 \\ z = -\frac{2}{\mu} \\ y = -x \\ 2x^2+z^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\mu} \\ \lambda = -1 \\ z = -\frac{2}{\mu} \\ y = -x \\ \frac{2}{4\mu^2} + \frac{4}{\mu^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\mu} \\ \lambda = -1 \\ z = -\frac{2}{\mu} \\ y = -x \\ \frac{18}{4\mu^2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\mu} \\ \lambda = -1 \\ z = -\frac{2}{\mu} \\ y = -x \\ \mu^2 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \end{cases}$$

Se $\mu = \frac{3}{2\sqrt{2}}$:

$$x_1 = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3},\quad y_1 = -\frac{\sqrt{2}}{3},\quad z_1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Se $\mu = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$:

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3},\quad y_2 = \frac{\sqrt{2}}{3},\quad z_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Da cui

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=2\frac{\sqrt{2}}{3}+4\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{(2+16)\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=-2\frac{\sqrt{2}}{3}-4\frac{4\sqrt{2}}{3}=-6\sqrt{2}$$

IMMAGINE

$$\left[-6\sqrt{2},6\sqrt{2}\right]$$

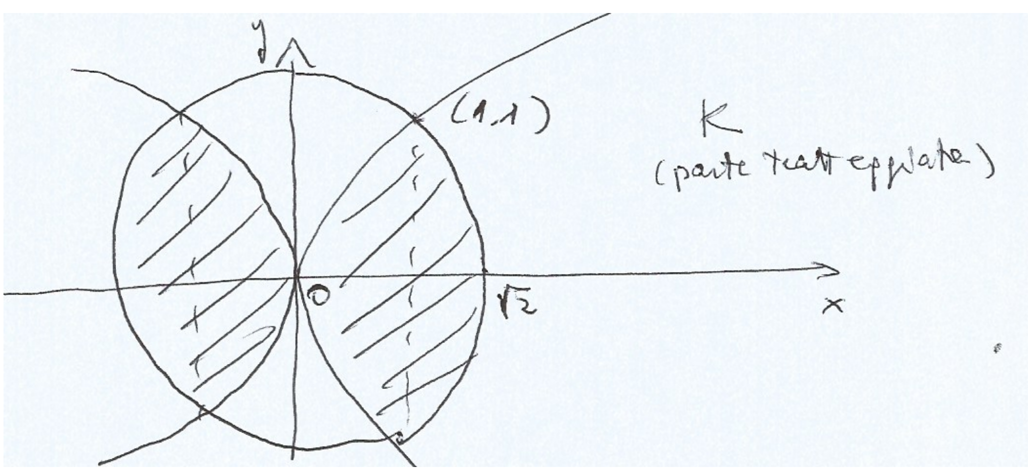
Esercizio 10.3.12 (da prova scritta AM2: 29-6-2020). Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^4-x^2y^2$. Usando il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange almeno una volta, determinare l'immagine di $f|_K : K\to\mathbb{R}$, dove

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2\le|x|,\ x^2+y^2\le 2\}.$$

SOLUZIONE:
Per i punti critici: si veda l'Esercizio 7.7.8. I punti critici di f sono tutti e soli i punti dell'asse y. L'unico tra questi punti che appartiene a K è $(0,0)$, in cui la funzione vale $f(0,y)=0$.
Si noti che

$$\begin{cases} x^2+y^2=2\\ y^2=x\\ y\ge 0\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+x-2=0\\ y^2=x\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{1\pm 3}{2}\\ y^2=x\\ y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1\\ y=1.\end{cases}$$

K è un insieme compatto e f è continua. Dunque $f(K)=[\min_K f,\max_K f]$.



In int K non ci sono candidati ad essere punti di massimo o minimo assoluti, in quanto sappiamo da (a) che in esso non vi sono punti critici.
Studiamo ∂K.

∂K è simmetrico rispetto all'asse y e all'asse x e si ha

$$f(x,y) = f(-x,y) \qquad (\text{così come } f(x,y) = f(x,-y)).$$

Per la simmetria del dominio e della funzione, basta studiare f ristretta a $\gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ con

$$\gamma_1^* := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ y^2 = x\}$$

$$\gamma_2^* := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2,\ 0 \le y \le 1\}$$

L'immagine di $f|_{\gamma_1^*}$ coincide con l'immagine della funzione continua

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^4 - x^3.$$

$$g'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x-3)$$

Quindi i candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluti per $f|_{\gamma_1^*}$ sono:

$$(0,0), \quad (\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (1,1).$$

Consideriamo $f|_{\gamma_2^*}$.
Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 2$. Si ha $\nabla F(x,y) = (2x, 2y)$ sempre non nullo in γ_2^*.
Ricordando che $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 2xy^2, -2x^2y)$, applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 2xy^2 = 2\lambda x \\ -2x^2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 0 \le y \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S_1) : \begin{cases} y = 0 \\ 4x^3 = 2\lambda x \\ x^2 = 2 \\ x \ge 0 \end{cases} \vee (S_2) : \begin{cases} y \ne 0 \\ x(2x^2 - y^2) = \lambda x \\ -x^2 = \lambda \\ y^2 = 2 - x^2 \\ 0 \le y \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Studiamo separatamente i due sistemi:

$$(S_1) : \begin{cases} y = 0 \\ 4x^3 = 2\lambda x \\ x^2 = 2 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\lambda \\ x = \sqrt{2} \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 = \lambda \\ x = \sqrt{2} \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

Studiamo ora

$$(S_2):\begin{cases} y\neq 0\\ x(2x^2-y^2)=\lambda x\\ -x^2=\lambda\\ y^2=2-x^2\\ 0\le y\le 1\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y\neq 0\\ x(3x^2-2)=\lambda x\\ -x^2=\lambda\\ y^2=2-x^2\\ 0\le y\le 1\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y\neq 0\\ x(-3\lambda-2)=\lambda x\\ -x^2=\lambda\\ y^2=2-x^2\\ 0\le y\le 1\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y\neq 0\\ x(-4\lambda-2)=0\\ -x^2=\lambda\\ y^2=2-x^2\\ 0\le y\le 1\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} y\neq 0\\ x=0\vee\lambda=-\frac{1}{2}\\ -x^2=\lambda\\ y^2=2-x^2\\ 0\le y\le 1\\ x\ge 0\end{cases}$$

Se $x=0$ non ci sono soluzioni (sarebbe $y^2=2$ in contraddizione con la richiesta $0\le y\le 1$). Deve quindi essere

$$\begin{cases} y\neq 0\\ \lambda=-\frac{1}{2}\\ x^2=\frac{1}{2}\\ y^2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\\ 0\le y\le 1\\ x\ge 0\end{cases}$$

che non ha soluzioni.

Riassumendo, i candidati ad essere punti di massimo o minimo assoluti per f provenienti da γ_2^* sono $(\sqrt{2},0)$, $(1,1)$.

Dato che

$$f(\sqrt{2},0)=4,\quad f(1,1)=0,\quad f(0,0)=0,\quad f(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})=\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}-1\right)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{64}=-\frac{27}{256},$$

deduciamo

$$\operatorname{Im} f=[-\frac{27}{256},4].$$

Esercizio 10.3.13 (da prova scritta 20-7-2020). In un sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri l'insieme

$$\Gamma:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{(x-1)^2}{4}+y^2=1,\ x\ge 0\}.$$

Usando il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, determinare l'immagine di $f:\Gamma\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x+y$.

SOLUZIONE:
Sia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=\frac{(x-1)^2}{4}+y^2-1$.
Allora

$$\Gamma = L_0(F)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\geq 0\}.$$

Candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluti per f provenienti da

$$\Gamma = L_0(F)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x= 0\}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x=0 \end{cases}$$

per cui

$$(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad (0,\frac{\sqrt{3}}{2})$$

sono candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluti per f.
Candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluti per f provenienti da

$$\Gamma = L_0(F)\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x> 0\}.$$

Si ha $\nabla F(x,y)=\left(\frac{1}{2}(x-1),2y\right)$ che si annulla solo in $(1,0)$, punto che non appartiene a Γ.
$f(x,y)=x+y$, quindi $\nabla f(x,y)=(1,1)$.
Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è:

$$\begin{cases} 1=\dfrac{\lambda}{2}(x-1) \\ 1=2\lambda y \\ \dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\neq 0 \\ x\neq 1 \\ y\neq 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{x-1}{2} \\ \dfrac{1}{\lambda}=2y \\ \dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda\neq 0 \\ x\neq 1 \\ y\neq 0 \\ 2y=\dfrac{x-1}{2} \\ \lambda=\dfrac{1}{2y} \\ \dfrac{(x-1)^2}{4}+y^2=1 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 0 \\ x-1=4y \\ \lambda = \dfrac{1}{2y} \\ \dfrac{4^2y^2}{4}+y^2=1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ x \neq 1 \\ y \neq 0 \\ x=1+4y \\ \lambda = \dfrac{1}{2y} \\ y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow (x=1+\frac{4}{\sqrt{5}}, y=\frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Dunque i candidati ad essere punti di massimo/minimo assoluti sono:

$$(1+\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}) \qquad (0,-\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad (0,\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Essendo

$$f\left(1+\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=1+\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=1+\sqrt{5},$$

$$f\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0,\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

si ottiene

$$f(\Gamma)=[-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\sqrt{5}]$$

Esercizio 10.3.14 (da prova scritta 7-9-2020). Si consideri la funzione $f: A \to \mathbb{R}$, con

$$A := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, y\neq 0\}$$

e

$$f(x,y,z)=(x^2-1)\frac{z}{y^2}.$$

Determinare l'immagine di $f|_K : K\to\mathbb{R}$, dove

$$K=\{(x,y,z)\in A : y=-x^2-z^2,\ y=-4\}.$$

SOLUZIONE:

I modo:

Per i punti critici: vedi Esercizio 7.7.10.

In K si hanno

$$y=-4, \qquad x^2=4-z^2,$$

quindi $f : K \to \mathbb{R}$,

$$f|_K(x,-4,z) = \frac{(x^2-1)z}{16} = \frac{(4-z^2-1)z}{16} = \frac{1}{16}(3z-z^3).$$

Dato che

$$K = \{(x,-4,z) : -2 \le z \le 2, -\sqrt{4-z^2} \le x \le \sqrt{4-z^2}\}$$

basta studiare l'immagine di $g : [-2,2] \to \mathbb{R}$,

$$g(z) := \frac{1}{16}(3z-z^3) \qquad z \in [-2,2]$$

in quanto $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f|_K$.
Si ha $g'(z) = 0$ se e solo se $3-3z^2 = 0$ se e solo se $z = \pm 1$
Quindi i candidati ad essere punti di massimo o minimo assoluti per g sono: $-2, 2, -1, 1$. Essendo

$$g(-2) = \frac{1}{16}(-6+8) = \frac{1}{8}, \quad g(2) = -\frac{1}{8}, \quad g(-1) = -\frac{1}{8}, \quad g(1) = \frac{1}{8}$$

si ha $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f|_K = [-2,2]$.
II modo:
Per i punti critici: vedi Esercizio 7.7.10.
K è un compatto e f è continua.
In K si ha

$$f(x,y,z) = f(x,-4,z) = \frac{(x^2-1)z}{16}.$$

Se definiamo $g : D \to \mathbb{R}$,

$$g(x,z) = (x^2-1)z, \qquad D := \{(x,z) \in \mathbb{R} : x^2+z^2 = 4\}$$

si hanno

$$(x,-4,z) \in K \quad \Leftrightarrow \quad (x,z) \in D \tag{10.3.1}$$

e

$$f(x,-4,z) = \frac{1}{16} g(x,z) \forall (x,z) \in D. \tag{10.3.2}$$

Studiamo l'immagine di g usando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Sia $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $G(x,z) = x^2+z^2-4$. Risulta $\nabla G(x,z) = (2x, 2z)$ che è non nullo in D.
Essnedo $\nabla g(x,z) = (2xz, x^2-1)$ i candidati a essere punti di massimo/minimo assoluti per g sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} 2xz = \lambda 2x \\ x^2-1 = \lambda 2z \\ x^2+z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -1 = \lambda 2z \\ z^2 = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x \ne 0 \\ z = \lambda \\ x^2-1 = \lambda 2z \\ x^2+z^2 = 4 \end{cases}$$

Risulta

$$\begin{cases} x = 0 \\ -1 = \lambda 2z \\ z^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow (0,2), (0,-2)$$

e

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ z = \lambda \\ x^2 - 1 = \lambda 2z \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ z = \lambda \\ x^2 - 1 = 2z^2 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ z = \lambda \\ x^2 = 2z^2 + 1 \\ 2z^2 + 1 + z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ z = \lambda \\ x^2 = 3 \\ z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3}, 1), \quad (\sqrt{3}, -1), \quad (-\sqrt{3}, 1), \quad (-\sqrt{3}, -1).$$

Ora:

$$g(0,2) = -2$$
$$g(0,-2) = 2$$
$$g(\sqrt{3}, 1) = 3 - 1 = 2$$
$$g(\sqrt{3}, -1) = -(3-1) = -2$$
$$g(-\sqrt{3}, 1) = 3 - 1 = 2$$
$$g(-\sqrt{3}, -1) = -(3-1) = -2$$

Dunque

$$\operatorname{Im} g(D) = [-2, 2]$$

da cui, per (10.3.1) e (10.3.2),

$$\operatorname{Im} f(D) = \left[-\frac{2}{16}, \frac{2}{16}\right] = \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right]$$

III modo:
Per i punti critici: vedi Esercizio 7.7.10.
Parametrizziamo

$$K = \{(x, y, z) \in A : \, y = -x^2 - z^2, \; y = -4\}.$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad \gamma(t) = (2\cos t, -4, 2\sin t).$$

Allora $g = f \circ \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$g(t) = \frac{1}{16}(4\cos^2 t - 1) 2\sin t = \frac{1}{2}\cos^2 t \sin t - \frac{1}{8}\sin t.$$

Ora

$$g'(t) = -\cos t \sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^3 t - \frac{1}{8}\cos t = \cos t \left(-\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t - \frac{1}{8}\right)$$

$$= \cos t\left(-\sin^2 t - \cos^2 t + \frac{3}{2}\cos^2 t - \frac{1}{8}\right) = \cos t\left(-1 + \frac{3}{2}\cos^2 t - \frac{1}{8}\right).$$

Dato che

$$-1 + \frac{3}{2}\cos^2 t - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{2}{3}\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

risulta

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t = 0 \overset{t\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} t = \frac{\pi}{2} \vee t = 3\frac{\pi}{2} \\ \cos t = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6} \vee t = \frac{5\pi}{6} \vee t = \frac{7\pi}{6} \vee t = \frac{11\pi}{6} \end{array}\right.$$

Si hanno

$$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{16}(-1)2 = -\frac{1}{8}, \qquad g(3\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{16}(-1)(-2) = \frac{1}{8}$$

$$g(\frac{\pi}{6}) = f(2\sqrt{3}2, -4, 2\frac{1}{2}) = f(\sqrt{3}, -4, 1) = (3-1)\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$g(\frac{5\pi}{6}) = f(-2\sqrt{3}2, -4, 2\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

$$g(7\frac{\pi}{6}) = f(-2\sqrt{3}2, -4, -2\frac{1}{2}) = f(-\sqrt{3}, -4, -1) = (3-1)\frac{-1}{16} = -\frac{1}{8}$$

$$g(11\frac{\pi}{6}) = f(2\sqrt{3}2, -4, -2\frac{1}{2}) = f(\sqrt{3}, -4, -1) = (3-1)\frac{-1}{16} = -\frac{1}{8}$$

allora $Im(f) = [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$.

Esercizio 10.3.15 (Prova scritta AM2 15-2-2021). Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = x^2 y + z$. Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Determinare $f(\Omega)$.

SOLUZIONE:
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = x^2 y + z$ è di classe C^1.
$\nabla f(x, y, z) = (2xy, x^2, 1)$.
Sia $F = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$L_0 F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

$\nabla F(x, y, z) = (8x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ in Ω.
Per il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange per determinare i punti e

$$\begin{cases} 2xy = 8\lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ 4x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Distinguiamo due casi: $x = 0$ e $x \neq 0$.

$$\begin{cases} x=0 \\ 2xy=8\lambda x \\ x^2=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \\ 4x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 0=0 \\ 0=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \\ y^2+z^2=1 \end{cases}$$

Dato che

$$1=2\lambda z \Rightarrow \lambda \neq 0$$

allora

$$\begin{cases} 0=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=2\lambda y \lambda \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=y \\ \lambda \neq 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{cases} x=0 \\ 0=0 \\ 0=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 1=2\lambda z \\ \lambda \neq 0 \\ z \neq 0 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} = \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 1=2\lambda z \\ \lambda \neq 0 \\ z \neq 0 \\ z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\pm 1 \end{cases}$$

Caso $x \neq 0$:

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ 2xy=8\lambda x \\ x^2=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \\ 4x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y=4\lambda \\ x^2=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \\ 4x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y=4\lambda \\ x^2=8\lambda^2 \\ 1=2\lambda z \\ 4x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y=4\lambda \\ x^2=8\lambda^2 \\ 1=2\lambda z \\ 32\lambda^2+16\lambda^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y=4\lambda \\ x^2=8\lambda^2 \\ \lambda \neq 0 \\ z=\frac{1}{2\lambda} \\ 48\lambda^2+\frac{1}{4\lambda^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y=4\lambda \\ x^2=8\lambda^2 \\ \lambda \neq 0 \\ z=\frac{1}{2\lambda} \\ 48\cdot 4\lambda^4+1=4\lambda^2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ y=4\lambda \\ x^2=8\lambda^2 \\ \lambda \neq 0 \\ z=\frac{1}{2\lambda} \\ 48\cdot 4\lambda^4-4\lambda^2+1=0. \end{cases}$$

L'ultima equazione non ha soluzione: posto $t = \lambda^2$ si ha
$$48 \cdot 4t^2 - 4t + 1 = 0$$
che ha $\frac{\Delta}{4} = 4 - 48 < 0$.
Pertanto $(0,0,\pm 1)$ sono candidati ad essere punti di massimo e di minimo assoluti.
Risulta
$$f(0,0,1) = 1, \qquad f(0,0,-1) = -1$$
allora $f(\Omega) = [-1,1]$.

Esercizio 10.3.16 (FLOP, 2.1.a). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Determinare l'immagine di f.

Risposta: $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Esercizio 10.3.17 (FLOP, 2.1.b). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$. Determinare l'immagine di f.

Sugg. per l'es. 10.3.17: Restringersi all'asse x e alla bisettrice $y = x$.
Risposta dell'es. 10.3.17: $\mathbb{R}$.

Esercizio 10.3.18 (FLOP, 2.1.m). Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xyz}{1+z^2}$. Sia
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}.$$
Determinare $f(\Omega)$.

Soluzione dell'Esercizio 10.3.18: f è continua e il dominio è un connesso, allora l'immagine è un intervallo. Vale
$$\forall (x,y,z) \in \Omega \qquad |f(x,y,z)| \le |xy| \frac{|z|}{1+z^2} \le \frac{1}{2} \frac{|z|}{1+z^2} \to_{|z| \to +\infty} 0.$$
Dato che esistono punti di Ω in cui f è negativa e punti in cui f è negativa, ed essendo $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,
$$\exists \min_{\Omega} f < 0, \qquad \exists \max_{\Omega} f > 0, \qquad f(\Omega) = \left[\min_{\Omega} f, \max_{\Omega} f\right].$$
I candidati punti di minimo e di massimo si possono determinare col Teorema dei moltiplicatori di Lagrange:
$$\begin{cases} \frac{yz}{1+z^2} = 2\lambda x \\ \frac{xz}{1+z^2} = 2\lambda y \\ xy \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2} = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui si deduce
$$f(\Omega) = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right].$$

Esercizio 10.3.19 (FLOP, 2.1.g). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xe^{x-y}$. Sia
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}.$$
Determinare $f(\Omega)$.

Soluzione dell'Esercizio 10.3.19: f è continua e il dominio è un connesso, allora l'immagine è un intervallo. Vale
$$\forall (x, y) \in \Omega \qquad |f(x, y)| \leq \sqrt{y}e^{\sqrt{y}-y} \to_{y\to+\infty} 0,$$
quindi
$$\lim_{\Omega\ni(x,y),\ |(x,y)|\to+\infty} f(x, y) = 0.$$
Dato che esistono punti di Ω in cui f è negativa e punti in cui f è negativa, ed essendo $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, deduciamo che
$$\exists \min_\Omega f < 0, \qquad \exists \max_\Omega f > 0, \qquad f(\Omega) = \left[\min_\Omega f, \max_\Omega f\right].$$
Non ci sono punti critici nell'interno di Ω. Resta quindi da studiare la frontiera di Ω. Restringiamo f alla frontiera, definendo così $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$g(x) := f(x, x^2) = xe^{x-x^2}.$$
Studiando g si deduce che
$$\min_\mathbb{R} g(x) = g(\frac{-1}{2}) = -\frac{e^{-3/4}}{2}, \qquad \max_\mathbb{R} g(x) = 1.$$
Conclusione: $f(\Omega) = \left[-\frac{e^{-3/4}}{2}, 1\right]$.

Esercizio 10.3.20 (FLOP, 2.1.p). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{xy^2}{1+x^2}$. Sia
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\}.$$
Determinare $f(\Omega)$.

Soluzione dell'Esercizio 10.3.20:
f è continua, il dominio non è connesso, ma
$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$$
dove
$$\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega : x > 0\}, \qquad \Omega^- = \{(x, y) \in \Omega : x < 0\}.$$

Tali insiemi sono connessi, quindi $f(\Omega^+)$ e $f(\Omega^-)$ sono in intervalli. Inoltre si ha

$$f(\Omega^-) = -f(\Omega^+).$$

Di certo

$$0 \in f(\Omega^+) \subseteq [0, +\infty[.$$

Inoltre,

$$f(x, \frac{x}{2}) = \frac{1}{4}\frac{xx^2}{1+x^2} \to_{x\to+\infty} +\infty.$$

Pertanto

$$f(\Omega^+) = [0, +\infty[\qquad \text{e} \qquad f(\Omega^-) =]-\infty, 0].$$

Concludendo:

$$f(\Omega) = \mathbb{R}.$$

Esercizio 10.3.21 (FLOP, 2.1.γ). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Sia

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \frac{1}{1+x^2}\}.$$

Determinare $f(\Omega)$.

Soluzione dell'Esercizio 10.3.21:
f è continua, il dominio è connesso. Allora l'immagine è un intervallo. Nell'interno di Ω c'è un solo punto critico, che è un punto di sella.
Studiando $f|_{\partial\Omega}$ si deduce che

$$f(\Omega) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

Esercizio 10.3.22. Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}$. Determinare l'immagine di f.

Sugg. per l'es. 10.3.22: f è una funzione radiale. Basta studiare $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g(t) = \sqrt{2}\frac{\sqrt{t}}{1+t^2}$.
Si ha

$$\operatorname{Im} f = g([0, +\infty[) = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Esercizio 10.3.23 (FLOP, 2.1.c). Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$. Determinare l'immagine di f.

Soluzione dell'Esercizio 10.3.23:
f è continua, il dominio è connesso. Allora l'immagine è un intervallo.
Essendo $|x+y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$, deduciamo

$$|f(x,y)| \leq \sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}.$$

Dall'esercizio 10.3.22 segue che

$$\operatorname{Im} f \subseteq \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Essendo

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad f(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}) = \frac{-1}{\sqrt{2}},$$

deduciamo

$$\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Esercizio 10.3.24 (FLOP, 2.1.v). Si consideri $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy$, dove

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

Determinare l'immagine di f.

Risposta all'Esercizio 10.3.24:

$$\operatorname{Im} f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

CAPITOLO 11

Integrali curvilinei

11.1. Curve

Definizione 11.1.1 (Curva).
Sia I intervallo reale. Si chiama curva una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ continua.

Definizione 11.1.2 (Curva piana).
Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice *piana* se $n = 2$.

Definizione 11.1.3 (Sostegno di una curva).
Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. L'immagine $\gamma(I)$ si chiama *sostegno* della curva e si denota γ^*.

Definizione 11.1.4 (Equazioni parametriche della curva).
Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$, le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \cdots & \qquad t \in I \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}$$

si dicono *equazioni parametriche* della curva e $t \in I$ è detto *parametro*.

Definizione 11.1.5 (Curva di classe C^1).
Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice *di classe* C^1 se γ è di classe C^1.

Definizione 11.1.6 (Curva regolare).
Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, si dice *regolare* se:

(i) γ è di classe C^1
(ii) $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \operatorname{int} I$.

Definizione 11.1.7 (Curva semplice).
Una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, si dice *semplice* se

$$\forall\, t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2, \quad (\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \Rightarrow \quad t_1, t_2 \in I \setminus \operatorname{int} I).$$

Definizione 11.1.8 (Estremi di una curva).
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Allora $\gamma(a)$ si dice primo estremo della curva e $\gamma(b)$ secondo estremo.

Definizione 11.1.9 (Curva chiusa).
Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Esempio 11.1.10 (Segmento: I parte).
Dati due punti distinti $P = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$ e $Q = (\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$ di $\mathbb{R}^n$ vogliamo determinare una parametrizzazione del segmento che li congiunge, di primo estremo P e secondo estremo Q.
Si consideri $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$, con, per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\gamma_i(t) = \bar{x}_i + t(\bar{y}_i - \bar{x}_i) \qquad t \in [0,1].$$

Le equazioni parametriche di tale curva sono:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + t(\bar{y}_1 - \bar{x}_1) \\ \cdots\cdots \\ x_n = \bar{x}_n + t(\bar{y}_n - \bar{x}_n) \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

Al variare del parametro nell'intervallo $[0,1]$, dal valore 0 al valore 1, $\gamma(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^n$ che si muove sul segmento congiungente P e Q. Il primo estremo è P e il secondo estremo è Q.
γ è una curva semplice, regolare.

Esempio 11.1.11 (Segmento: II parte).
Dati due punti distinti $P = (\bar{x}_P, \bar{y}_P)$ e $Q = (\bar{x}_Q, \bar{y}_Q)$ di $\mathbb{R}^2$ vogliamo determinare una parametrizzazione del segmento che li congiunge, diversa da quella descritta nell'Esempio 11.1.10.
Distinguiamo due casi.
Supponiamo che $P = (\bar{x}_P, \bar{y}_P)$ e $Q = (\bar{x}_Q, \bar{y}_Q)$ di $\mathbb{R}^2$ siano sulla retta verticale, di equazione $x = \bar{x}_P$.

Si consideri $\gamma : [\min\{\bar{y}_P, \bar{y}_Q\}, \max\{\bar{y}_P, \bar{y}_Q\}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\bar{x}_P, t)$. Le equazioni parametriche di tale curva sono:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [\min\{\bar{y}_P, \bar{y}_Q\}, \max\{\bar{y}_P, \bar{y}_Q\}].$$

Al variare del parametro $\gamma(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ che si muove sul segmento congiungente P e Q, dal basso verso l'alto.
γ è una curva semplice e regolare, il suo sostegno è il segmento $\overline{PQ}$.
Supponiamo che $P = (\bar{x}_P, \bar{y}_P)$ e $Q = (\bar{x}_Q, \bar{y}_Q)$ di $\mathbb{R}^2$ siano sulla retta di equazione $y = mx + q$.
Si consideri $\gamma : [\min\{\bar{x}_P, \bar{x}_Q\}, \max\{\bar{x}_P, \bar{x}_Q\}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, mt + q)$.
Le equazioni parametriche di tale curva sono:

$$\begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases} \qquad t \in [\min\{\bar{x}_P, \bar{x}_Q\}, \max\{\bar{x}_P, \bar{x}_Q\}].$$

Al variare del parametro $\gamma(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ che si muove sul segmento congiungente P e Q, da sinistra verso destra.
γ è una curva semplice e regolare, il suo sostegno è il segmento $\overline{PQ}$.

Esempio 11.1.12 (Circonferenza).
Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$.
La circonferenza di centro (x_0, y_0) e raggio r è l'insieme

$$C = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\} = \{(x, y) : \frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1\}.$$

C è il sostegno della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))$.
Le equazioni parametriche di γ sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(t) \\ y = y_0 + r\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Al variare del parametro nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dal valore 0 al valore 2π, $\gamma(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ che si muove sulla circonferenza C in senso antiorario, percorrendola una volta.
γ è una curva piana, semplice, chiusa, regolare.

C è anche il sostegno della curva $\varphi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t))$.
Le equazioni parametriche di φ sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos(t) \\ y = y_0 + r\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 4\pi].$$

Al variare del parametro nell'intervallo $[0, 4\pi]$, dal valore 0 al valore 4π, $\varphi(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ che si muove sulla circonferenza C in senso antiorario, percorrendola due volte.
Tale curva è piana, chiusa, regolare, ma ovviamente non è semplice.

Esempio 11.1.13 (Ellisse).
Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $a, b > 0$.
La ellisse di centro (x_0, y_0) e semiassi a e b è l'insieme

$$E = \{(x, y) : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\}.$$

E è il sostegno della curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t))$.
Le equazioni parametriche di γ sono:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos(t) \\ y = y_0 + b\sin(t) \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Al variare del parametro nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dal valore 0 al valore 2π, $\gamma(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ che si muove sulla circonferenza E in senso antiorario, percorrendola una volta.
γ è una curva piana, semplice, chiusa, regolare.

Osservazione 11.1.14. Si noti che nella parametrizzazione della ellisse di centro (x_0, y_0) illustrata nell'Esempio 11.1.13, il parametro non è la misura dell'angolo formato dalla retta orizzontale $y = y_0$ e la semiretta di origine (x_0, y_0) passante per $\gamma(t)$, eccetto il caso $t = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Ad esempio, si consideri l'ellisse centrata nell'origine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b > 0, \ a \neq b.$$

Essa è parametrizzata da

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

Chiamiamo P il punto di interesezione di tale con l'ellisse con la semiretta $y = x$, con $x > 0$ (semiretta che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$ radianti con l'asse x verso positivo). P non è il punto $\gamma(\frac{\pi}{4})$. Infatti quest'ultimo ha ascissa diversa dall'ordinata:

$$a\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad b\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{b}{\sqrt{2}} \neq \frac{a}{\sqrt{2}}$$

e dunque non si trova sulla retta $y = x$.
Per determinare il valore di t tale che $\gamma(t)$ sia P, si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ y = x \\ t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

da cui
$$t = \arctan \frac{a}{b}.$$

Esempio 11.1.15 (Strofoide).
Lo strofoide è il sostegno di $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$. L'immagine $\gamma(I)$ si chiama *sostegno* della curva e si denota γ^*.
γ è una curva piana, regolare. Non è semplice (si lascia al lettore la verifica).

Esempio 11.1.16 (Elica cilindrica).
L'elica cilindrica è il sostegno della curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), bt)$, con $r, b > 0$.

$$E_{cil} := \gamma^* = \{(r\cos(t), r\sin(t), bt) \,:\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Si noti che
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = 1\}$$
è un cilindro circolare retto, avente per asse l'asse z,
La proiezione di γ^* sul piano Oxy è una circonferenza centrata in O e di raggio r.
Al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, $\gamma(t)$ è un punto di $\mathbb{R}^3$: la sua proiezione sul piano Oxy percorre la circonferenza centrata in O e di raggio r in senso antiorario. La proiezione di $\gamma(t)$ sull'asse z percorre l'asse dal basso verso l'alto. Il passo dell'elica è $2\pi b$.

Definizione 11.1.17 (Vettore tangente a una curva).
Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, si chiama *vettore tangente* alla curva in $\gamma(t)$ il vettore $\gamma'(t)$. Se $\gamma'(t) \neq 0$, si chiama *versore tangente* alla curva in $\gamma(t)$ il versore
$$T(\gamma(t)) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

Osservazione 11.1.18.
La condizione di regolarità di una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, garantisce l'esistenza di un versore tangente in $\gamma(t)$, per ogni $t \in \operatorname{int} I$.

Definizione 11.1.19 (Retta tangente a una curva).
Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, si chiama *retta tangente* alla curva in $\gamma(t_0)$ (con $t_0 \in I$) la retta di $\mathbb{R}^n$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t_0) + (t - t_0)\gamma_1'(t) \\ \vdots \\ x_n = \gamma_n(t_0) + (t - t_0)\gamma_n'(t) \end{cases} \qquad t \in I.$$

Definizione 11.1.20 (Cambiamento ammissibile di parametro).
Siano I e J intervalli in $\mathbb{R}$ con interni non nulli. Si chiama cambiamento ammissibile di parametro una funzione $g : I \to J$ biunivoca, di classe C^1 tale che $g'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Osservazione 11.1.21.
La richiesta $g : I \to J$ biunivoca e classe C^1 tale che $g'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ è equivalente a richiedere

$$g'(t) > 0 \quad \forall t \in I, \qquad \text{oppure} \qquad g'(t) < 0 \qquad \forall t \in I.$$

Definizione 11.1.22 (Curve equivalenti).
Date due curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, diciamo che esse sono equivalenti se

$$\exists\, g : I \to J \text{ cambiamento ammissibile di parametro } : \ \gamma(t) = (\varphi \circ g)(t) \quad \forall t \in I.$$

In tal caso scriviamo $\gamma \sim \varphi$.

Proposizione 11.1.23.
La relazione $\sim$ descritta nella Definizione 11.1.22 è una relazione di equivalenza.

Si lascia la dimostrazione per esercizio.

Definizione 11.1.24 (Classe di curve equivalenti).
Data una curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, denotiamo $[\gamma]$ la classe di equivalenza della curva γ rispetto alla relazione $\sim$.

Proposizione 11.1.25. *Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ due curve.*
Se esse sono equivalenti, allora γ è semplice se e solo se φ è semplice.

Si lascia la dimostrazione per esercizio.

Proposizione 11.1.26. *Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ due curve equivalenti.*
Allora valgono le seguenti:

(i) $\gamma^* = \varphi^*$.
(ii) γ *è* C^1*/regolare se e solo se* φ *è* C^1*/regolare.*

Si lascia la dimostrazione per esercizio.

Osservazione 11.1.27. Non vale il viceversa della Proposizione 11.1.26 (i). Due curve possono avere lo stesso sostegno, senza essere equivalenti. Ad esempio, γ e φ nell'Esempio 11.1.12 hanno lo stesso sostegno, ma non sono equivalenti.

Definizione 11.1.28 (Curve equivalenti equiorientate).
Date due curve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$, diciamo che esse sono equivalenti ed equiorientate se

$$\exists\, g : I \to J \text{ cambiamento ammissibile di parametro } : \begin{cases} g'(t) > 0 \;\; \forall t \in I \\ \gamma(t) = (\varphi \circ g)(t) \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

In tal caso scriviamo $\gamma \overset{\circ}{\sim} \varphi$.

Definizione 11.1.29.
Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva. Sia

$$-I = \{-t \,:\, t \in I\}$$

Denotiamo $\gamma^- : -I \to \mathbb{R}^n$ la curva di legge

$$\gamma^-(t) := \gamma(-t).$$

Osservazione 11.1.30.
A volte si scrive $-\gamma$ anziché γ^-.

Proposizione 11.1.31.
Siano γ e γ^- le curve della Definizione 11.1.29. Si ha che $\gamma \sim \gamma^-$, ma $\gamma \overset{\circ}{\not\sim} \gamma^-$.

Proposizione 11.1.32.
Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva semplice, con $\operatorname{int} I \neq \emptyset$. *Allora*

$$[\gamma] = \{\varphi \text{ curva} : \varphi \overset{\circ}{\sim} \gamma\} \cup \{\varphi \text{ curva} : \varphi \overset{\circ}{\sim} \gamma^-\}$$

e gli insiemi a secondo membro sono disgiunti.
Inoltre,

(i) $\gamma \in \{\varphi \textit{ curva} : \varphi \overset{\circ}{\sim} \gamma\}$
(ii) $\gamma^{-} \in \{\varphi \textit{ curva} : \varphi \overset{\circ}{\sim} \gamma^{-}\}$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi \overset{\circ}{\sim} \gamma$ e $\varphi \overset{\circ}{\sim} \gamma^{-}$. Allora esistono due cambiamenti ammissibili di parametro $g, \tilde{g} : J \to I$ tali che

$$\gamma(g(s)) = \phi(s) = \gamma(\tilde{g}(s)) \qquad \forall s \in J$$

e

$$g'(s) > 0, \qquad \tilde{g}'(s) < 0 \qquad \forall s \in J. \tag{11.1.1}$$

Essendo $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ una curva semplice, deduciamo che $g(s) = \tilde{g}(s)$ per ogni $s \in \operatorname{int} J$. Da qui deduciamo che $g'(s) = \tilde{g}'(s)$ per ogni $s \in \operatorname{int} J$, in contraddizione con quanto affermato in (11.1.1). □

11.2. Lunghezza di una curva

Definizione 11.2.1 (Poligonale associata a una curva).
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Sia $\sigma \in \Omega_{a,b}$ una scomposizione di $[a, b]$ (v. AM1B), ossia

$$\sigma = \{t_0, t_1, \cdots, t_h\} \qquad \text{con } a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b.$$

La poligonale associata alla curva γ e alla scomposizione σ è

$$P(\gamma, \sigma) := \bigcup_{i=1}^{h} [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)].$$

e la lunghezza della poligonale è:

$$\ell(\mathscr{P}(\gamma, \sigma)) := \sum_{i=1}^{h} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Definizione 11.2.2 (Lunghezza di una curva).
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva.
Si definisce *lunghezza della curva* γ la quantità:

$$L(\gamma) := \sup\{\ell(\mathscr{P}(\gamma, \sigma)) : \sigma \in \Omega_{a,b}\}.$$

Se $L(\gamma)$ è finita, allora la curva si dice *rettificabile.*

Esempio 11.2.3 (Esempio di curva non rettificabile).
Può essere $\ell(\gamma) = +\infty$. Si consideri infatti $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ con $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione continua

$$f(t) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{2x} & \text{se } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Consideriamo la scomposizione

$$\sigma_n = \{0,1\} \cup \{\frac{1}{2i+1} : i \in \{0,1,\cdots,n-1\}\}.$$

Essendo $\frac{1}{2(i-1)+1} = \frac{1}{2i-1}$, si ha

$$\begin{aligned}
\ell(\mathscr{P}(\gamma,\sigma)) &\geq \sum_{i=1}^{n-1} \left|\gamma(\frac{1}{2i+1}) - \gamma(\frac{1}{2i-1})\right| = \sum_{i=1}^{n-1} \left|\left(\frac{1}{2i+1}, f\left(\frac{1}{2i+1}\right)\right) - \left(\frac{1}{2i-1}, f\left(\frac{1}{2i-1}\right)\right)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} |\left(\frac{1}{2i+1}, f\left(\frac{1}{2i+1}\right)\right) - \left(\frac{1}{2i-1}, f\left(\frac{1}{2i-1}\right)\right)| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-2}{4i^2-1}, \frac{1}{2i+1}\sin\frac{(2i+1)\pi}{2} - \frac{1}{2i-1}\sin\frac{(2i-1)\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-2}{4i^2-1}, \frac{1}{2i+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\pi\right) - \frac{1}{2i-1}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+i\pi\right)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-2}{4i^2-1}, \frac{1}{2i+1}\cos(i\pi) - \frac{1}{2i-1}(-\cos(i\pi)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-2}{4i^2-1}, \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2i-1}\right)\cos(i\pi)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-2}{4i^2-1}, \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2i-1}\right)(-1)^i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{-2}{4i^2-1}, \frac{4i(-1)^i}{4i^2-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4i^2-1}\sqrt{4+16i^2} > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4i^2}\sqrt{16i^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.
\end{aligned}$$

Mandando $i \to +\infty$, si ottiene la tesi, per via del teorema del confronto e del fatto che la serie armonica è divergente.

Teorema 11.2.4 (Teorema di rettificabilità).
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ e sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva.
Se $\gamma \in C^1$ allora γ è rettificabile.
In tal caso,

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

DIMOSTRAZIONE.

$\leq$:

Sia $\sigma \in \Omega_{a,b}$ una scomposizione di $[a,b]$ (v. AM1B), ossia

$$\sigma = \{t_0, t_1, \cdots, t_h\} \qquad \text{con } a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b.$$

La poligonale associata alla curva γ e alla scomposizione σ è

$$P(\gamma,\sigma) := \bigcup_{i=1}^{h} [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$$

e la lunghezza della poligonale è:

$$\ell(\mathscr{P}(\gamma,\sigma)) := \sum_{i=1}^{h} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Per il Teorema di Torricelli (o formula fondamentale del calcolo integrale)

$$\begin{aligned}\ell(\mathscr{P}(\gamma,\sigma)) := \sum_{i=1}^{h} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{h} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt \right| \le \sum_{i=1}^{h} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.\end{aligned}$$

Quindi

$$\ell(\mathscr{P}(\gamma,\sigma)) \le \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt < +\infty. \tag{11.2.1}$$

Ne segue che

$$L(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt < +\infty.$$

Ciò prova anche la rettificabilità di γ.
Per concludere, occorre dimostrare che vale anche

$$L(\gamma) \ge \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Essendo $\gamma \in C^1$ la funzione $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua e quindi, per il Teorema di Heine-Cantor, anche uniformemente continua. Pertanto, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall\, t, s \in [a,b] \quad (|t-s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\gamma'(t) - \gamma'(s)| < \epsilon). \tag{11.2.2}$$

Consideriamo una scomposizione di $[a,b]$

$$\sigma = \{t_0, t_1, \cdots, t_h\} \qquad \text{con } a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b.$$

tale che

$$\max\{|t_i - t_{i-1}| : i \in \{1, \cdots, h\}\} < \delta.$$

Sia P la poligonale ad essa associata. Per ogni $s \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t)\, dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s))\, dt + \gamma'(s)(t_i - t_{i-1}).$$

Allora

$$
\begin{aligned}
|\gamma'(s)|(t_i - t_{i-1}) &\leq \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\gamma'(t) - \gamma'(s))\, dt \right| + |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\
&\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\gamma'(t) - \gamma'(s)\right|\, dt + |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\
&\stackrel{(11.2.2)}{\leq} \epsilon(t_i - t_{i-1}) + |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|
\end{aligned}
$$

e, dividendo per la quantità positiva $t_i - t_{i-1}$, otteniamo

$$|\gamma'(s)| \leq \epsilon + \frac{|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}}.$$

Integrando rispetto a s in $[t_{i-1}, t_i]$ si ha

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)|\, ds \leq \epsilon(t_i - t_{i-1}) + |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|.$$

Sommando su i otteniamo:

$$\int_a^b |\gamma'(s)|\, ds \leq \epsilon(b-a) + \sum_{i=1}^h |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \epsilon(b-a) + \ell(P(\gamma,\sigma)) \stackrel{(11.2.1)}{\leq} \epsilon(b-a) + L(\gamma).$$

Mandando ϵ a 0 otteniamo:

$$\int_a^b |\gamma'(s)|\, ds \leq L(\gamma).$$

□

Definizione 11.2.5 (Lunghezza di γ^*). Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva rettificabile e semplice. Allora $L(\gamma)$ la chiamiamo anche *lunghezza di* γ^*.

Definizione 11.2.6 (Somma di curve).
Siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ curve, con $\gamma(b) = \varphi(\alpha)$.
Si chiama somma di γ e φ la curva $\gamma + \varphi : [a, b+\beta-\alpha] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma + \varphi(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \varphi(\alpha + t - b) & \text{se } t \in [b, b+\beta-\alpha]. \end{cases}$$

Definizione 11.2.7 (Curve C^1 o regolari a tratti).
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Diciamo che γ è C^1 (regolare) a tratti se

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h,$$

con, per ogni $i \in \{1, \cdots, h\}$, $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$ curva C^1 (regolare).

Definizione 11.2.8 (Lunghezza di una curva C^1 a tratti).
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 (regolare) a tratti,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h.$$

Si definisce *lunghezza della curva* γ la quantità:

$$L(\gamma) := \sum_{i=1}^{h} L(\gamma_i).$$

Proposizione 11.2.9.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 (regolare) a tratti,
Allora γ è rettificabile.

11.3. Due classi speciali di curve piane

È facile trovare una parametrizzazione del grafico di una funzione continua di una variabile reale.

Proposizione 11.3.1 (Curve semplici aventi per sostegno grafici di funzioni di una variabile reale).
Siano I intervallo reale, $\operatorname{int}(I) \neq 0$, *e $f : I \to \mathbb{R}^m$ una funzione continua.*
Si consideri la funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$, $\gamma(t) = (t, f(t))$.
Valgono le seguenti proprietà:

(i) $\gamma^* = \operatorname{Gr} f$
(ii) $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ *è una curva semplice*
(iii) $\gamma : I \to \mathbb{R}^m$ *è una curva regolare se e solo se* $f \in C^1(I)$
(iv) *se* $I = [a, b]$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

DIMOSTRAZIONE.
Un facile esercizio. □

Definizione 11.3.2 (Equazione polare).
Siano I intervallo reale, $\operatorname{int}(I) \neq \emptyset$, e $r : I \to [0, \infty[$ una funzione continua.
Si consideri la funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$.
Tale funzione è una curva che è univocamente definita dalla equazione

$$r = r(t) \quad t \in I.$$

Essa si dice *equazione polare* della curva.

Osservazione 11.3.3.
I significati di $t \in I$ e di $r(t)$ presenti nella Definizione 11.3.2 sono i seguenti.
Dato che

$$r(t) = |(r(t)\cos(t), r(t)\cos(t))| = |\gamma(t)|,$$

allora $r(t)$ è la distanza del punto $\gamma(t)$ dall'origine degli assi.
Inoltre, dalla definizione di $\gamma(t)$ deduciamo che, se $r(t) > 0$, ossia $|\gamma(t)| > 0$,

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = (\cos(t), \sin(t)),$$

ossia t è la misura (in radianti) dell'angolo formato dal semiasse delle x positive e il vettore $\gamma(t)$.

Proposizione 11.3.4 (Curve espresse in forma polare).
Siano I intervallo reale, $\mathrm{int}(I) \neq 0$*, e* $r : I \to [0,\infty[$ *una funzione continua.*
Sia γ la curva di equazione polare

$$r = r(t) \quad t \in I.$$

Valgono le seguenti proprietà:

(i) *sul piano Oxy, $\gamma(t)$ è un punto del piano che dista $r(t)$ dall'origine degli assi e che, al crescere di t in I, percorre γ^* in senso antiorario*
(ii) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *è una curva*
(iii) $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ *è una curva regolare se e solo se (*$r \in C^1(I)$ *e* $(r(t), r'(t)) \neq (0,0)$ *per ogni* $t \in \mathrm{int}(I) \neq 0$*)*
(iv) $|\gamma(t)| = r(t)$ *per ogni $t \in I$*
(v) *se* $I = [a,b]$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)}\,dt.$$

DIMOSTRAZIONE.
Un facile esercizio. □

11.4. Integrali curvilinei di I specie

Definizione 11.4.1 (Integrale curvilineo).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, una curva di classe C^1, tale che $\gamma^* \subseteq A$.
Definiamo integrale curvilineo di f su γ il numero

$$\int_\gamma f(x)\,ds := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\,dt.$$

Osservazione 11.4.2.
$L(\gamma) = \int_\gamma 1\, ds$.

Definizione 11.4.3 (Integrale curvilineo su una curva C^1 a tratti).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1 a tratti,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h,$$

con $\gamma^* \subseteq A$.
Definiamo integrale curvilineo di f su γ il numero

$$\int_\gamma f(x)\, ds := \sum_{i=1}^{h} \int_{\gamma_i} f(x)\, ds.$$

Teorema 11.4.4.
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua.
Siano $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [a', b'] \to \mathbb{R}^n$ due curve, tali che $\gamma \sim \varphi$, con $\gamma^* \subseteq A$.
Allora

$$\int_\gamma f(x)\, ds = \int_\varphi f(x)\, ds.$$

DIMOSTRAZIONE.
Dato che $\gamma \sim \varphi$, allora esiste un cambiamento ammissibile di parametro se

$$\exists\, g : [a, b] \to [a', b'] \text{ cambiamento ammissibile di parametro } : \ \gamma(t) = (\varphi \circ g)(t) \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Per il Teorema per sostituzione

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x)\, ds &= \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b (f \circ \varphi)(g(t))|(\varphi \circ g)'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b (f \circ \varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))||g'(t)|\, dt. \end{aligned} \tag{11.4.1}$$

In virtù dell'Osservazione 11.1.21 distinguiamo due casi:
I caso: $g'(t) > 0$ per ogni $t \in [a, b]$
Si ha

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))||g'(t)|\, dt = \int_a^b (f \circ \varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))|g'(t)\, dt.$$

Utilizzando il Teorema di integrazione per sostituzione degli integrali definiti (I versione) studiato in AM1B deduciamo

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))|g'(t)\,dt = \int_{a'}^{b'} (f\circ\varphi)(\tau)|\varphi'(\tau)|\,d\tau = \int_\varphi f(x)\,ds.$$

Da questa uguaglianza e da (11.4.1), otteniamo la tesi.
II caso: $g'(t) < 0$ per ogni $t \in [a,b]$.
Si ha

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))||g'(t)|\,dt = -\int_a^b (f\circ\varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))|g'(t)\,dt.$$

Essendo $g : [a,b] \to [a',b']$ un cambiamento ammissibile di parametro ed essendo g strettamente decrescente, si ha $g(a) = b'$ e $g(b) = a'$. Dunque, Utilizzando il Teorema di integrazione per sostituzione degli integrali definiti (I versione) studiato in AM1B deduciamo

$$-\int_a^b (f\circ\varphi)(g(t))|\varphi'(g(t))|g'(t)\,dt = -\int_{b'}^{a'} (f\circ\varphi)(\tau)|\varphi'(\tau)|\,d\tau = \int_{a'}^{b'} (f\circ\varphi)(\tau)|\varphi'(\tau)|\,d\tau$$
$$= \int_\varphi f(x)\,ds.$$

Da questa uguaglianza e da (11.4.1), otteniamo la tesi. □

Proposizione 11.4.5 (Proprietà dell'integrale curvilineo).
Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ continue e $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 a tratti, con $\gamma^* \subseteq A$. Allora valgono le seguenti:

(a) $\int_\gamma (f+g)\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$

(b) $\int_\gamma cf\,ds = c\int_\gamma f\,ds$ *con* $c \in \mathbb{R}$

(c) *se* $f \le g$, *allora* $\int_\gamma f\,ds \le \int_\gamma g\,ds$

(d) $\left|\int_\gamma f\,ds\right| \le \int_\gamma |f|\,ds$

Definizione 11.4.6. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1 a tratti.
Si chiama *baricentro* di γ il punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ così definito:

$$\bar{x}_i := \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x_i\,ds \qquad i \in \{1,\cdots,n\}.$$

Teorema 11.4.7 (Teorema di Guldino per le aree di superfici di rivoluzione).
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *una curva di classe* C^1 *a tratti e semplice, tale che*

$$\gamma^* \subseteq \{(x,y) : x \geq 0\}.$$

Si faccia ruotare di un angolo α *radianti tale sostegno attorno all'asse* y.
L'area della superficie di rivoluzione così ottenuta è pari al prodotto della lunghezza di γ *con la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro durante la rotazione. In formule:*

$$\textit{Area della superficie} = \alpha \int_\gamma x\, ds.$$

Osservazione 11.4.8.
Giustifichiamo la formula del Teorema 11.4.7. L'arco di circonferenza descritto dal baricentro durante la rotazione ha per raggio l'ascissa del baricentro di γ. Dunque il prodotto della lunghezza di γ con la lunghezza dell'arco di circonferenza descritto dal baricentro durante la rotazione vale

$$L(\gamma)\alpha \frac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x\, ds = \alpha \int_\gamma x\, ds.$$

11.5. Esercizi

Esercizio 11.5.1 (T). Sia γ^* la circonferenza di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio $R > 0$, orientata in senso antiorario. Determinarne una parametrizzazione regolare e semplice e calcolare

$$\int_\gamma (2x + y)\, ds.$$

RISPOSTA:
$\int_\gamma (2x + y)\, ds = 0.$

Esercizio 11.5.2 (T). Sia γ^* il triangolo del piano di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ percorso in senso antiorario. Sia γ una sua parametrizzazione semplice e regolare a tratti. Calcolare

$$\int_\gamma (x^2 + y^2)\, ds.$$

RISPOSTA:
$$\int_\gamma (x^2 + y^2)\, ds = \frac{2}{3}(\sqrt{2} + 1).$$

Esercizio 11.5.3 (T). Sia γ^* l'arco di elica cilindrica in figura 1. Sia γ una sua parametrizzazione semplice e regolare. Calcolare

$$\int_\gamma (x^2 + y^2 - z)\, ds.$$

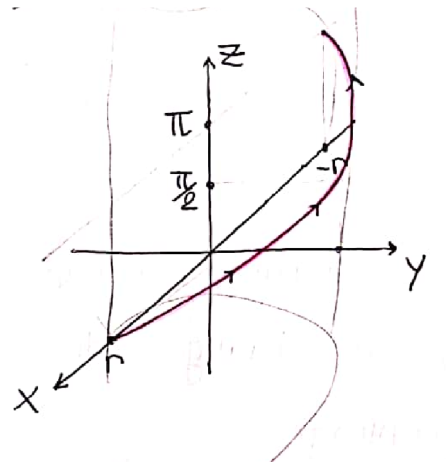


Figura 1. Elica cilindrica es. 11.5.3

RISPOSTA:
$\int_\gamma (x^2+y^2-z)\,ds = \sqrt{r^2+1}\left(\pi r^2 - \frac{\pi^2}{2}\right).$

Esercizio 11.5.4 (T). Sia $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, \log t)$. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,ds.$$

RISPOSTA:
$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,ds = \frac{\log^2(2)}{2}.$

Esercizio 11.5.5 (T). Sia γ^* l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ per $x \in [-1,1]$. Determinarne una parametrizzazione γ regolare e semplice e calcolare

$$\int_\gamma xy\,ds.$$

RISPOSTA:
$\int_\gamma xy\,ds = 0.$

Esercizio 11.5.6 (T). Sia γ^* come in figura 2. Sia γ una sua parametrizzazione semplice e regolare a tratti. Calcolare

$$\int_\gamma x^2\,ds.$$

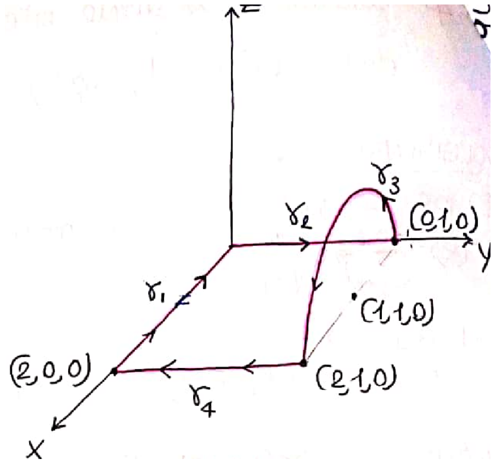


Figura 2. Curva es. 11.5.6

RISPOSTA:

$$\int_\gamma x^2\,ds = \frac{20}{3} + \frac{3}{2}\pi.$$

Esercizio 11.5.7 (T). Sia γ^* come in figura 3. Sia γ una sua parametrizzazione semplice e regolare a tratti. Calcolare

$$\int_\gamma (x-y)\,ds.$$

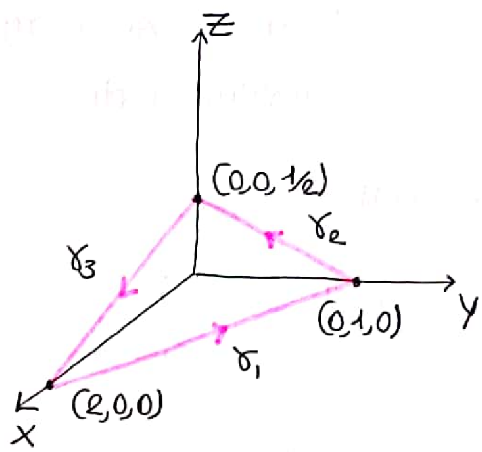


Figura 3. Curva es. 11.5.7

RISPOSTA:

$$\int_\gamma (x-y)\,ds = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Esercizio 11.5.8 (T). Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \qquad t \in [1,2].$$

Stabilire se è una curva regolare e calcolare la sua lunghezza.

RISPOSTA:
γ è regolare e la sua lunghezza è $\dfrac{40^{3/2} - 13^{3/2}}{27}$.

Esercizio 11.5.9 (da file integrazione-I). Si consideri la curva γ parametrizzata da

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t^3$$

con $1 \le t \le 2$.

(a) Stabilire se γ è regolare.
(b) Calcolare la lunghezza di γ.
(c) Calcolare l'ascissa del baricentro di γ.

[Sol.: (b) $\int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt = \frac{1}{27}\left[(4+9t^2)^{3/2}\right]_1^2 = \ldots$]

Esercizio 11.5.10 (da file integrazione-I). Calcolare la lunghezza della curva di equazione polare

$$\rho(\theta) = \theta^2, \qquad \theta \in [0, \pi/2].$$

[Sol.: Usare la formula

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta,$$

$\frac{1}{3}\left((\frac{\pi^2}{4} + 4)^{3/2} - 8\right)$.]

Esercizio 11.5.11 (da file integrazione-I). Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \arctan t, \\ y(t) = \cos t, \\ z(t) = \sin t. \end{cases}$$

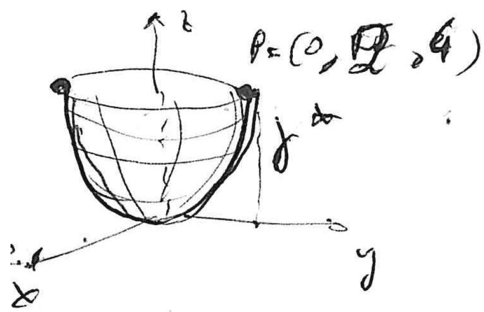
Dire se la curva è regolare, calcolare $\|\gamma'(t)\|$ e $\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))$ dove $f(x,y,z) = x^2 + yz$.

Esercizio 11.5.12 (da prova scritta AM2: 13-1-2020). Sia $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 \le z \le 4\}$. Determinare una curva γ regolare e semplice tale che

$$\gamma^* = \partial K \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y^2 = z\}$$

e calcolare $\displaystyle\int_\gamma y\, ds$.

Soluzione dell'Esercizio 11.5.12:



$\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (0, t, t^2)$. Dalla seconda componente si deduce che γ è iniettiva e quindi semplice.
Si ha $\gamma \in C^1([-2, 2])$ e $\gamma'(t) = (0, 1, 2t)$ è sempre non nullo. Quindi γ è regolare. Risulta

$$\int_\gamma y\, ds = \int_{-2}^{2} t|\gamma'(t)|\, dt = \int_{-2}^{2} t\sqrt{1+4t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 8t(1+4t^2)^{1/2}\, dt = \frac{1}{8}\frac{2}{3}\left[(1+4t^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2} = 0.$$

Esercizio 11.5.13 (da prova scritta AM2: 15-2-2021). Sia γ^* il luogo dei punti del piano $y = z$ in $\mathbb{R}^3$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ è l'ellisse di Oxy di equazione $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. Determinare una curva γ regolare e semplice avente γ^* come sostegno e calcolare

$$\int_\gamma |x|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, ds.$$

Sol. Esercizio 11.5.13
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sin t, \sin t).$$

Essa è di classe C^1 e semplice (la funzione $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ è iniettiva in $[0, 2\pi[$ e in $]0, 2\pi]$) e

$$\gamma'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \cos t, \cos t) \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{2} > 0$$

dunque γ è regolare.

Si ha

$$\int_\gamma |x|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}|\cos t|\sqrt{2\cos^2 t+\sin^2 t+\sin^2 t}\sqrt{2}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}|\cos t|\,dt$$
$$= 4\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\,dt = 4\sqrt{2}\,[\sin t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8\sqrt{2}.$$

Esercizio 11.5.14 (I 2010-01-18CIV-AMB). Calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\partial A} y\,ds$, dove

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 \le x \le -y^2\}.$$

CAPITOLO 12

Forme differenziali e campi vettoriali

DI QUESTO CAPITOLO A LEZIONE SI E' DATA SOLO: LA DEFINIZIONE DI CAMPO VETTORIALE, DI LAVORO DEL CAMPO VETTORIALE LUNGO UNA CURVA, E SPIEGATO CHE ESSO DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE DELLA CURVA

12.1. Definizioni

Ricordiamo che la base canonica di $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ è data dalle n applicazioni lineari

$$dx_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ dx_i(v) = v_i \quad \forall v = (v_1, \cdots, v_n) \in \mathbb{R}^n,$$

con $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Definizione 12.1.1 (Forma differenziale lineare).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si chiama *forma differenziale lineare* o 1*-forma* su A, una funzione $\omega : A \to (\mathbb{R}^n)^*$, ossia esistono $a_i : A \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, tali che

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A.$$

Le funzioni $a_i : A \to \mathbb{R}$ si dicono *coefficienti* di ω.
La forma differenziale si dice continua/di classe C^1 se i coefficienti sono continui/di classe C^1.

Definizione 12.1.2 (Campo vettoriale).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Si chiama *campo vettoriale* su A, una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = (a_1(x), \cdots, a_n(x))$.
Il campo vettoriale si dice continuo/di classe C^1 se le componenti di F sono continue/di classe C^1.

È evidente che c'è la possibilità di identificare le forme differenziali lineari e i campi vettoriali: I coefficienti della forma differenziale sono le componenti del campo vettoriale ad essa associato, e viceversa.

Definizione 12.1.3.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti, $\gamma^* \subseteq A$. Sia $\omega : A \to (\mathbb{R}^n)^*$, una forma differenziale lineare continua su A.
Si chiama integrale di ω su γ

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma \omega(x)(T(x))\, ds,$$

dove $T(x)$ denota il versore tangente a γ in x.
Più esplicitamente, se

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A,$$

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt.$$

Osservazione 12.1.4.
Giustifichiamo la formula finale della Definizione 12.1.3. Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &:= \int_\gamma \omega(x)(T(x))\, ds = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t))dx_i\Big(\frac{\gamma_i'(t)}{|\gamma'(t)|}\Big)|\gamma'(t)|\, dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t))\frac{\gamma_i'(t)}{|\gamma'(t)|}|\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt.\end{aligned}$$

Definizione 12.1.5.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti, $\gamma^* \subseteq A$. Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$, un campo vettoriale continuo su A.
Si chiama *lavoro* del campo F su γ il seguente integrale:

$$L(F,\gamma) := \int_\gamma \langle F(x), T(x)\rangle\, ds,$$

dove $T(x)$ denota il versore tangente a γ in x.
Più esplicitamente, se

$$F(x) = (a_1(x), \cdots, a_n(x)) \qquad \forall x \in A,$$

allora

$$L(F,\gamma) := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt.$$

È evidente che se i coefficienti della forma differenziale continua ω sono le componenti del campo F, allora

$$\int_\gamma \omega = L(F,\gamma).$$

Definizione 12.1.6.
Date due forme differenziali $\omega, \tilde{\omega} : A \to (\mathbb{R}^n)^*$, con A aperto di $\mathbb{R}^n$,

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i, \qquad \tilde{\omega}(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A$$

si definisce $\omega + \tilde{\omega} : A \to (\mathbb{R}^n)^*$, nel seguente modo:

$$(\omega + \tilde{\omega})(x) = \sum_{i=1}^n (a_i(x) + \tilde{a}_i(x))\, dx_i \qquad \forall x \in A.$$

Se $c \in \mathbb{R}$, si definisce $c\omega$ la forma differenziale

$$(c\omega)(x) = \sum_{i=1}^n c\, a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A.$$

Proposizione 12.1.7 (Proprietà dell'integrale di forme differenziali su curve).
Siano A un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\omega, \omega' : A \to (\mathbb{R}^n)^*$ forme differenziali continue e siano $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ curve regolari a tratti, con $\gamma^*, \varphi^* \subseteq A$. Allora valgono le seguenti:

(a) *se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva regolare a tratti,*

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_h,$$

con $\gamma^* \subseteq A$, allora

$$\int_\gamma \omega := \sum_{i=1}^h \int_{\gamma_i} \omega$$

(b) $\displaystyle\int_\gamma (\omega + \omega') = \int_\gamma \omega + \int_\gamma \omega'$

(c) *se $c \in \mathbb{R}$ allora* $\displaystyle\int_\gamma c\omega = c \int_\gamma \omega$

(d) *se $\gamma \overset{\circ}{\sim} \varphi$, allora* $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_\varphi \omega$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma^-} \omega.$

DIMOSTRAZIONE.
(a) segue dalla Definizione 11.4.3.
(b) e (c) seguono dalla Proposizione 11.4.5. La proprietà (d) segue dal Teorema 11.4.4 e dal fatto che, se g è il cambiamento di parametro tale che $\gamma = \varphi \circ g$, allora, per la equiorientazione di γ e φ, $g'(t) > 0$.
Per quel che riguarda (e), essa segue dal fatto che

$$\gamma^-_{[} -b, -a] \to \mathbb{R}^n, \qquad \gamma^-(t) = \gamma(-t)$$

da cui

$$(\gamma^-)'(t) = -\gamma'(-t).$$

Quindi

$$\int_{\gamma^-} \omega = -\int_{-b}^{-a} \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(-t))\gamma_i'(-t)\, dt \overset{(\tau=-t)}{=} \int_b^a \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(\tau))\gamma_i'(\tau) d\tau = -\int_\gamma \omega.$$

□

Esempio 12.1.8.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Se $f : A \subseteq \mathbb{R}$ è differenziabile, allora il differenziale di f è una forma differenziale lineare e il gradiente di f è il campo vettoriale ad esso associato.

Ci si può domandare se vale il viceversa: ogni forma differenziale è il differenziale di una funzione? In generale no, si consideri ad esempio $\omega(x, y) = 1\, dx + x\, dy$. Se esistesse $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x, y) = (1, x)$ dovrebbe essere $f(x, y) = x + c(y)$ e anche $f(x, y) = xy + k(x)$, e queste sono in contraddizione.

Ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 12.1.9.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia ω una *forma differenziale* su A. Diciamo che ω è esatta se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $df = \omega$.
Più esplicitamente, se

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A,$$

ω è esatta se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = (a_1(x), \cdots, a_n(x))$.
Tale funzione f si dice *primitiva* di ω.

La definizione sopra ha come controparte, nell'ambiente dei campi vettoriali, la seguente definizione.

12.2. Campi conservativi/irrotazionali e forme esatte/chiuse

QUESTA SEZIONE NON E' STATA SVOLTA A LEZIONE

Definizione 12.2.1.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$, un campo vettoriale continuo su A. Diciamo che F è conservativo se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f = F$.
Tale funzione f si dice *potenziale* di F.

Teorema 12.2.2 (Teorema di integrazione delle forme esatte).
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia ω una forma differenziale continua su A. Sia ω esatta e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una primitiva di ω.
Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare, $\gamma^* \subseteq A$.
Allora

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

DIMOSTRAZIONE.
Sia

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\,dx_i \qquad \forall x \in A.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega &:= \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt \\ &\overset{df=\omega}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t)\,dt = f\circ\gamma(b) - f\circ\gamma(a).\end{aligned}$$

Da qui la tesi.

□

Teorema 12.2.3 (Caratterizzazione delle forme differenziali esatte).
Sia A una aperto connesso di $\mathbb{R}^n$. Sia ω una forma differenziale continua su A.
Sono equivalenti le seguenti:

(a) *ω è esatta*
(b) *per ogni curva regolare a tratti e chiusa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma^* \subseteq A$, si ha*

$$\int_\gamma \omega = 0.$$

(c) *per ogni coppia di curve regolari a tratti* $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *e* $\gamma_2 : [a',b'] \to \mathbb{R}^n$ *tali che* $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq A$, *con*
$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a'), \qquad \gamma_1(b) = \gamma_2(b'),$$
si ha
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

DIMOSTRAZIONE.
(a) ⇒ (b):
Segue immediatamente dal Teorema 12.2.2.
(b) ⇒ (c):
Si considerino le curve regolari a tratti $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\gamma_2 : [a',b'] \to \mathbb{R}^n$ tali che $\gamma_1^*, \gamma_2^* \subseteq A$, con
$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a'), \qquad \gamma_1(b) = \gamma_2(b').$$
Consideriamo la curva $\gamma_2^- : [-b', -a'] \to \mathbb{R}^n$ (si veda la Definizione 11.1.29) e si consideri la curva regolare a tratti $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2^- : [a, b + (-a' + b')] \to \mathbb{R}^n$ (si veda la Definizione 11.2.6). Tale curva è chiusa, in quanto
$$\gamma(a) = \gamma_1(a), \qquad \gamma(b + (-a' + b')) = \gamma_2^-(-a') = \gamma_2(a') = \gamma_1(a) = \gamma(a).$$
Allora, per l'ipotesi (b),
$$0 = \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1 + \gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega,$$
da cui
$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$
(c) ⇒ (a):
Sia
$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A.$$
Fissiamo $x_0 \in A$. Essendo A un insieme aperto e connesso, allora è connesso per poligonali. Per ogni $x \in A$ esiste quindi $\gamma_x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ curva regolare a tratti, tale che $\gamma^* \subseteq A$ è una poligonale di primo estremo x_0 e secondo estremo x.
Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $B(x,\delta) \subseteq A$. Per ogni $h \in]-\delta, \delta[$ e per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$ il punto $x + he_i \in B(x,\delta) \subseteq A$. Consideriamo $\gamma_{x+he_i} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e la curva che parametrizza il segmento $[x, x + he_i]$, ossia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) = x + the_i$. Si ha $\varphi'(t) = he_i$. Osserviamo che $\gamma_x + \varphi$ è una curva regolare a tratti, di primo estremo x_0 e secondo estremo $x + he_i$.
Per l'ipotesi (c)
$$f(x + he_i) \overset{\text{def.}}{=} \int_{\gamma_{x+he_i}} \omega \overset{(c)}{=} \int_{\gamma_x + \varphi} \omega = \int_{\gamma_x} \omega + \int_\varphi \omega = f(x) + \int_\varphi \omega.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}\int_\varphi \omega = \frac{1}{h}\int_0^1 \langle (a_1(\varphi(t)),\cdots,a_n(\varphi(t)), he_i\rangle\, dt\\ &= \frac{1}{h}\int_0^1 a_i(x+the_i)h\, dt = \int_0^1 a_i(x+the_i)\, dt\\ &\overset{(\tau=th)}{=} \frac{1}{h}\int_0^h a_i(x+\tau e_i)\, d\tau = \frac{F(h)-F(0)}{h},\end{aligned}$$

con $F(h) = \int_0^h a_i(x+\tau e_i)\, d\tau$. Allora, per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo $\tau \mapsto a_i(x+\tau e_i)$ una funzione continua,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = a_i(x)$$

per cui esiste $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ed esso vale $a_i(x)$. Dall'arbitrarietà di i abbiamo la tesi. $\square$

Definizione 12.2.4.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia ω una forma differenziale su A,

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x\in A.$$

Diciamo che ω è *chiusa* se è di classe C^1 e, per ogni $x \in A$,

$$\forall i,j \in \{1,\cdots,n\} \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x).$$

La definizione sopra ha come controparte, nell'ambiente dei campi vettoriali, la seguente definizione.

Definizione 12.2.5.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$, $F = (a_1,\cdots,a_n)$, un campo vettoriale C^1. Diciamo che F è *irrotazionale* se per ogni $x \in A$,

$$\forall i,j \in \{1,\cdots,n\} \qquad \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x).$$

Definizione 12.2.6 (Rotore).
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto. e sia $F : A \to \mathbb{R}^3$, $F = (a_1,a_2,a_3)$, un campo vettoriale C^1.
Si chiama *rotore* di F il campo vettoriale $\operatorname{rot} F : A \to \mathbb{R}^3$, anche indicato $\nabla \times F$, così definito:

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}, \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}, \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right).$$

Osservazione 12.2.7.
L'espressione del rotore di F è ottenibile come il determinante della matrice simbolica

$$\operatorname{rot} F(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

sviluppato mediante il teorema di Laplace secondo la I riga. Nella prima riga della matrice appaiono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Teorema 12.2.8.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Sia ω una forma differenziale su A.
Se ω è di classe C^1 ed è esatta, allora ω è chiusa.

DIMOSTRAZIONE.
Per ipotesi esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $df = \omega$, ossia, più esplicitamente, se

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i \qquad \forall x \in A,$$

esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(x) = (a_1(x), \cdots, a_n(x))$. Essendo per ipotesi ω di classe C^1, allora $f \in C^2(A)$. Quindi, per il Teorema di Schwarz (Teorema 5.6.4),

$$\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \qquad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\},$$

che è equivalente a

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) \qquad \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

□

In generale, il viceversa non è vero.

Esempio 12.2.9.
La forma differenziale $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^2)^*$,

$$\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

è di classe C^1, è chiusa, ma non è esatta.

Che sia di classe C^1, è ovvio, che sia chiusa è di facile verifica. Per dimostrare che ω è esatta, usiamo il Teorema 12.2.3. Si consideri la curva chiusa $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ con $r > 0$. Si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \langle \big(-\frac{r\sin t}{r^2}, \frac{r\cos t}{r^2}\big), (-r\sin t, r\cos t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi \neq 0.$$

Dunque, l'integrale di ω sulla curva chiusa γ non è nullo e quindi, ω non può essere esatta.

Ci si può domandare quale sia un'ipotesi sufficiente affinché una forma differenziale chiusa sia esatta. Per trattare questa questione sono necessari dei preliminari. Il primo è un importante lemma di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivazione sotto il segno d'integrale.

Ora diamo la definizione di insieme *semplicemente connesso*, che facciamo anticipare dalla definizione di curve omotope.

Definizione 12.2.10.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Due curve $\gamma, \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, con $\gamma^*, \varphi^* \subseteq A$, si dicono *omotope* se esiste una funzione $\Phi : [0, 1] \times [a, b] \to A$ continua con le seguenti proprietà:

(i) $\Phi(0, t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a, b]$,
(ii) $\Phi(1, t) = \varphi(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.

L'applicazione Φ è detta *omotopia*.

Osservazione 12.2.11.
Si noti che per ogni $s \in [0, 1]$ la funzione $[a, b] \ni t \mapsto \Phi(s, t)$ è una curva.

Definizione 12.2.12.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. A si dice semplicemente connesso se per ogni curva chiusa $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, con $\gamma^* \subseteq A$, esiste $x_0 \in A$ ed esiste $\Phi : [0, 1] \times [a, b] \to A$ continua, con le seguenti proprietà:

(i) $\Phi(0, t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a, b]$,
(ii) $\Phi(1, t) = x_0$ per ogni $t \in [a, b]$,

Osservazione 12.2.13.
In modo intuitivo, un insieme aperto e connesso A è semplicemente connesso se ogni curva chiusa può essere deformata con continuità fino a ridurla a un punto, senza mai uscire dall'insieme. L'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ non è semplicemente connesso, invece $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ sì.

Definizione 12.2.14.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. A si dice *stellato* se esiste $x_0 \in A$ tale che

$$[x_0, x] \subseteq A \qquad \forall x \in A,$$

dove $[x_0, x]$ denota il segmento di estremi x_0 e x.

Proposizione 12.2.15.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto. Valgono le seguenti implicazioni:

$$A \text{ convesso} \Rightarrow A \text{ stellato} \Rightarrow A \text{ semplicemente connesso.}$$

Teorema 12.2.16.
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso. Sia ω una forma differenziale su A di classe C^1 su A.
Allora

$$\omega \text{ è esatta} \Leftrightarrow \omega \text{ è chiusa.}$$

DIMOSTRAZIONE.
$\Rightarrow$:
È conseguenza del Teorema 12.2.8.
$\Leftarrow$:
La dimostrazione la diamo per gli insiemi A stellati, con $0 \in A$ tale che

$$[0, x] \subseteq A \qquad \forall x \in A.$$

Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x)\, dx_i$.
Il segmento $[0, x]$ è parametrizzato da

$$\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \quad \gamma_x(t) = tx.$$

Si definisca $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\gamma_x} \omega$, ossia

$$f(x) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(tx) x_i \, dt.$$

Dimostriamo che f è una primitiva di ω. Per il Teorema 5.5.9 f è di classe C^1 e per ogni $j \in \{1, \cdots, n\}$ si ha

$$f_{x_j}(x) = \int_0^1 \left(a_j(tx) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx) x_i t \right) dt.$$

Essendo ω una forma differenziale chiusa,

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx) x_i t \, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx) x_i t \, dt$$

da cui deduciamo

$$f_{x_j}(x) = \int_0^1 \left(a_j(tx) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx) x_i t \right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(t a_j(tx)\big)\, dt = a_j(x).$$

Ciò conclude la dimostrazione.

□

12.3. Esercizi

Esercizio 12.3.1 (VB). Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy.$$

Determinare, se esistono, le primitive di ω.

SOLUZIONE:
Le primitive di ω sono le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$.

Esercizio 12.3.2 (VB). Sia $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calcolare

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy + y^2)\, dy.$$

SOLUZIONE:

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)\, dx + (2xy + y^2)\, dy = \int_1^2 ((t^2 - 2t^3) + 2t(2t^3 + t^4))\, dt = \frac{1219}{30}.$$

Esercizio 12.3.3 (VB). Data una qualunque funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si definisca la forma differenziale

$$\omega_f(x, y) = (f(x) + x^2 y - y^3)\, dx + (f(x) - 3xy^2)\, dy.$$

(a) Dimostrare che esiste una e una sola funzione f di classe C^1 per cui $f(0) = 0$ e ω_f è esatta. Determinare l'espressione esplicita di f.

(b) Sia f la funzione ottenuta nel punto precedente e siano $P = (0,1)$ e $Q = (-1,3)$ punti del piano $0xy$. Calcolare

$$\int_\gamma \omega_f$$

dove γ è una curva il cui sostegno è il segmento avente primo estremo in Q e secondo estremo in P.

(c) Sia $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$. Calcolare

$$\int_\gamma \omega_{f_1}$$

dove γ è come nel punto (b).

SOLUZIONE:
[Sol.: (a) $f(x) = \frac{x^3}{3}$; (b) $-\frac{313}{12}$.]

Esercizio 12.3.4 (da file integrazione-I). Calcolare

$$\int_\gamma (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy,$$

dove γ è l'arco di parabola $y = x^2$ compreso tra $A = (1,1)$ e $B = (2,4)$.

[Sol.: $\frac{1219}{30}$.]

Esercizio 12.3.5 (da file integrazione-I). Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove

$$\omega(x, y) = 2xy\left(\cos(x^2 y) + 1\right)\,dx + x^2\cos(x^2 y)\,dy$$

e γ è la frontiera, percorsa in senso orario, della regione del primo quadrante racchiusa dalla bisettrice $1^o - 3^o$ quadrante, l'asse y e la circonferenza di centro l'origine e raggio 2.

[Sugg.: $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dove $\omega_1 = 2xy\cos(x^2 y)\,dx + x^2\cos(x^2 y)\,dy$ e $\omega_2 = 2xy\,dx + 0\,dy$. Notare che ω_1 è esatta]

Esercizio 12.3.6 (da file integrazione-I). Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(ye^y + \alpha e^y - 2x\cos x^2\right)\,dx + \left(xe^y + xye^y - \beta e^x\right)\,dy.$$

Determinare, se esistono, i valori di α e β reali tali che ω è esatta. Per tali valori, calcolare il potenziale f tale che $f(0,1) = 3$.

[Sol: $a = b = 0$]

Esercizio 12.3.7 (da file integrazione-I). Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = (z, x^2, y)$ su γ, dove γ è l'arco di elica $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ con $t \in [0, 3\pi/2]$.

[Sol.: $\frac{4}{3}$.]

Esercizio 12.3.8 (da file integrazione-I). Calcolare

$$\int_\gamma \langle F(x,y), N(x,y)\rangle \, ds$$

dove γ è il triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(2,1)$ percorso in senso orario, $F(x,y) = (e^{x+y} + x, e^{x-y} - y)$ e N è il versore normale esterno al triangolo.

[Sol.: Parametrizziamo il segmento γ_1 di primo estremo $(1,0)$ e secondo estremo $(0,0)$:

$$\gamma_1(t) = (1-t,0) \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_1'(t) = (-1,0)$$

da cui il vettore normale orientato verso l'esterno (il ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso anti-orario $\gamma_1'(t)$) è $(0,-1)$.
Parametrizziamo il segmento γ_2 di primo estremo $(2,1)$ e secondo estremo $(1,0)$. Abbiamo

$$\gamma_2(t) = (2 + t(1-2), 1 + t(0-1)) = (2-t, 1-t) \quad t \in [0,1], \qquad \gamma_2'(t) = (-1,-1)$$

da cui il vettore normale orientato verso l'esterno (il ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso anti-orario di $\gamma_2'(t)$) è $(1,-1)$.
Analogamente si procede per γ_3, segmento di primo estremo $(0,0)$ e secondo estremo $(2,1)$.
Alla fine,

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\gamma_i} \langle F(x,y), N(x,y)\rangle \, ds = \int_0^1 \langle (e^{1-t}+1-t, e^{1-t}), (0,-1)\rangle \, dt + \int_0^1 \langle (e^{3-2t}+2-t, e^1-1+t), (1,-1)\rangle \, dt + \ldots.]$$

Esercizio 12.3.9 (da file integrazione-I). Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(-\frac{2xy}{9x^4+y^2} + 1\right) dx + \frac{x^2}{9x^4+y^2} \, dy.$$

Determinare se ω è esatta in

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x < 0\}.$$

Se sì, determinarne una primitiva in Ω.

Esercizio 12.3.10 (da file integrazione-I). Dire se il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x^2 y, x\cos z, y + x)$, è irrotazionale.

Esercizio 12.3.11 (da file integrazione-I). Calcolare il lavoro del campo $F(x,y) = (xy^2, x)$ su γ, dove γ è una curva il cui sostegno è quello indicato in figura 1.

[Sol.: $-4+\pi$. Soluzione dettagliata in fondo alle dispense.]

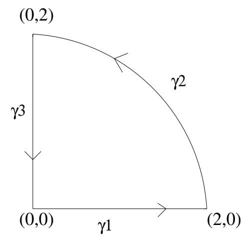


Figura 1. Figura per esercizio 12.3.11

Esercizio 12.3.12 (da file integrazione-I). Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{1}{x+e^y}\,dx + \frac{e^y}{x+e^y}\,dy.$$

i) Determinare il dominio di ω e disegnarlo.
ii) ω è chiusa? ω è esatta? Giustificare.
iii) Determinare, se esiste, una primitiva di ω.

Esercizio 12.3.13 (da prova scritta AM2 29-6-2020). Si considerino le forme differenziali $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^*$,

$$\omega_1(x,y,z) = \frac{-y}{4x^2+y^2+z^2}dx + \frac{x}{4x^2+y^2+z^2}dy + \frac{z}{4x^2+y^2+z^2}dz$$

$$\omega_2(x,y,z) = (e^x y + x)dx + (e^x + 2y)dy.$$

Determinare, se esistono, $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ tali che

$$df_1 = \omega_1 \qquad df_2 = \omega_2$$

e calcolare $\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2)$, con $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(\theta) = \Big(\frac{1}{2}\cos\theta, \sin\theta, \theta\Big).$$

SOLUZIONE:
(a)
$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è semplicemente connesso le forme differenziali sono di classe C^1, quindi essere sono esatte se e solo se chiuse.
La forma differenziale ω_1 non è chiusa, in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{4x^2+y^2+z^2} \neq \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{4x^2+y^2+z^2}$$

quindi ω_1 non è esatta.

La forma differenziale ω_2 è chiusa, in quanto

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x y + x) = e^x = \frac{\partial}{\partial x}(e^x + 2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^x y + x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(e^x + 2y) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}0,$$

quindi ω_2 è esatta. Si ha che

$$\int (e^x y + x)\,dx = ye^x + \frac{1}{2}x^2 + c(y,z)$$

$$\int (e^x + 2y)\,dy = ye^x + y^2 + c(x,z)$$

$$\int 0\,dz = c(x,y).$$

Quindi le primitive di ω_2 sono le funzioni

$$f(x,y,z) = ye^x + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(b)
Dato che

$$4(\frac{1}{2}\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 + \theta^2 = 1 + \theta^2$$

e

$$\gamma'(\theta) = (-\frac{1}{2}\sin\theta, \cos\theta, 1)$$

allora

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\theta^2}\langle(-\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta, \theta), (-\frac{1}{2}\sin\theta, \cos\theta, 1)\rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\theta^2}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta + \theta\right)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\theta^2}\left(\frac{1}{2} + \theta\right)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(2\pi) + \frac{1}{2}[\log(1+\theta^2)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\arctan(2\pi) + \frac{1}{2}\log(1+4\pi^2).]$$

Dato che ω_2 è esatta con primitive

$$f(x,y,z) = ye^x + \frac{1}{2}x^2 + y^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

indipendenti dalla variabile z, allora

$$\int_\gamma \omega_2 = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(\frac{1}{2}, 0, 2\pi) - f(\frac{1}{2}, 0, 0) = 0.$$

Conclusione:

$$\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2}\arctan(2\pi) + \frac{1}{2}\log(1 + 4\pi^2).$$

Esercizio 12.3.14 (da prova scritta AM2: 8-6-2020). Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (-2z, x, -4z)$.

(a) Parametrizzare

$$\gamma^* = \{(x, y, z) : y = -x, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

in modo che sia sostegno di una curva γ regolare e semplice. L'orientazione sia a piacere

(b) Calcolare $L(F,\gamma)$, lavoro di F su γ (orientazione scelta a piacere).

(c) Determinare, se esiste, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla f = F$?

SOLUZIONE:

(a)

$$\gamma^* = \{(x, y, z) : y = -x, 2x^2 + z^2 = 4\} = \{(x, y, z) : y = -x, \frac{x^2}{(\frac{2}{\sqrt{2}})^2} + \frac{z^2}{4} = 1\}$$

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \gamma(t) = (\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t, -\frac{2}{\sqrt{2}}\cos t, 2\sin t)$$

(b)

$$\gamma'(t) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, 2\cos t\right)$$

$$\begin{aligned} L(F,\gamma) &= \int_0^{2\pi} \langle\left(-4\sin t, \frac{2}{\sqrt{2}}\cos t, -8\sin t\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{2}{\sqrt{2}}\sin t, r\cos t\right)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2\frac{4}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \frac{4}{2}\cos t \sin t - 16 \sin t \cos t\right) dt = 2\frac{4}{\sqrt{2}}\pi. \end{aligned}$$

(c) No, perché se ci fosse sarebbe stato $L(F,\gamma) = 0$.

Esercizio 12.3.15 (da prova scritta 20-7-2020). In un sistema di riferimento cartesiano Oxy si consideri l'insieme

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1,\ x \geq 0\}.$$

Calcolare il lavoro del campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (y, x-1)$ lungo una curva regolare γ avente sostegno Γ (orientazione a piacere).

SOLUZIONE:
Il campo $F(x,y)=(y,x-1)$ è conservativo, in quanto irrotazionale in $\mathbb{R}^2$, insieme semplicemente connesso.
$f(x,y)=yx+c(y)$ è un candidato potenziale di F.
Si ha
$$(f_y(x,y)=x-1 \Leftrightarrow x+c'(y)=x-1) \Rightarrow (c'(y)=-1 \Leftrightarrow c(y)=-y+k, k\in\mathbb{R}).$$
Dunque un potenziale di F è la funzione $f(x,y)=y(x-1)$ Allora
$$L(F,\gamma)=f(0,\frac{\sqrt{3}}{2})-f(0,-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)=-2\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}.$$

Esercizio 12.3.16 (da prova scritta AM2: 7-9-2020). Si consideri la forma differenziale $\omega:\mathbb{R}^3\to(\mathbb{R}^3)^*$,
$$\omega(x,y,z)=x\,dx+(x+y)\,dy+(x+z)\,dz.$$
Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, con γ parametrizzazione regolare e semplice di
$$\gamma^*:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1,\ z=y\}$$
tale che i punti $\gamma(t)$ si muovano, se visti dall'alto, in senso antiorario.

SOLUZIONE:
$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$,
$$\gamma(t)=(\cos t,\sin t,\sin t).$$
La proiezione $\pi(\gamma(t))$ del punto $\gamma(t)$ sul piano Oxy al variare di $t\in[0,2\pi]$ descrive una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, percorsa in senso antiorario:
$$\pi(\gamma(t))=(\cos t,\sin t).$$
γ è semplice, infatti
$$t\mapsto(\cos t,\sin t) \text{ è iniettiva in } [0,2\pi[\text{ e in }]0,2\pi].$$
Inoltre, γ è regolare, essendo $\gamma\in C^1$ e
$$\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t,\cos t)\Rightarrow|\gamma'(t)|=\sqrt{1+\cos^2 t}\neq 0.$$
Si ha
$$\int_\gamma \omega(x,y,z)=\int_0^{2\pi}(\cos t(-\sin t)+(\cos t+\sin t)\cos t+(\cos t+\sin t)\cos t)\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-\sin t\cos t+\cos^2 t+\sin t\cos t+\cos^2 t+\sin t\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2 t+\sin t\cos t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\,dt = 2\pi.$$

Esercizio 12.3.17 (da prova scritta AM2: 25-1-2021). Si consideri il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = (y + 1, z + 2x + 2y, 0).$$

Calcolare il lavoro $L(F, \gamma)$, dove γ è una parametrizzazione regolare e semplice di

$$\gamma^* := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ z = -2x - 2y + 7\}$$

tale che i punti $\gamma(t)$ in $Oxyz$ si muovano, se visti dall'alto, in senso antiorario.

SOLUZIONE:
Si ha

$$\begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ z = x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ x^2 + y^2 = -2x - 2y + 7 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ x^2 + y^2 = -2x - 2y + 7 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ x^2 + 2x + y^2 + 2y = 7 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 7 \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x - 2y + 7 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (-1 + 3\cos t, -1 + 3\sin t, -2(-1 + 3\cos t) - 2(-1 + 3\sin t) + 7)$$

ossia

$$\gamma(t) = (-1 + 3\cos t, -1 + 3\sin t, -6(\cos t + \sin t) + 11).$$

Notiamo che la terza componente di γ, che denotiamo $z(t)$ è positiva. Infatti:

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} (\cos t + \sin t) = \cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2},$$

da cui

$$z(t) = -6(\cos t + \sin t) + 11 \geq -6\sqrt{2} + 11 > 0.$$

Abbiamo così dimostrato che γ è una parametrizzazione semplice di

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ z = -2x - 2y + 7\}.$$

Essa ha l'orientazione richiesta, in quanto la proiezione $\pi(\gamma(t))$ del punto $\gamma(t)$ sul piano Oxy al variare di $t \in [0,2\pi]$ descrive una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, percorsa in senso antiorario:

$$\pi(\gamma(t)) = (-1+3\cos t, -1+3\sin t).$$

Essa è anche una parametrizzazione regolare, infatti

$$\gamma'(t) = (-3\sin t, 3\cos t, 6\sin t - 6\cos t) \neq (0,0,0) \qquad \forall t \in [0,2\pi].$$

Essendo

$$\begin{aligned} F(\gamma(t)) &= (-1+3\sin t+1, -6(\cos t+\sin t)+11+2(-1+3\cos t)+2(-1+3\sin t), 0) \\ &= (3\sin t, 11-4, 0) = (3\sin t, 7, 0), \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} L(F,\gamma) &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle (3\sin t, 7, 0), (-3\sin t, 3\cos t, 6\sin t - 6\cos t)\rangle\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-9\sin^2(t) + 21\cos t)\rangle\, dt = -9\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt + 21\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = -9\pi + 0 = -9\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 12.3.18 (I 2010-02-08CIV-AMB). Si consideri il campo $F(x,y,z) = (\frac{yz}{1+x^2}, z\arctan x, y\arctan x)$.

(a) Verificare che il campo è irrotazionale. Il campo è anche conservativo; perché?

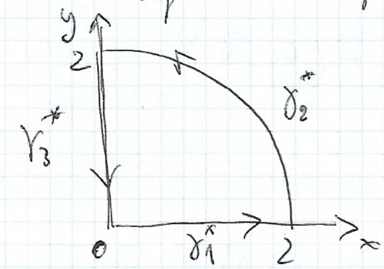
(b) Determinare le primitive della forma differenziale associata al campo F.

(c) Disegnare la curva $\gamma(t) = (1, \cos t, \sin t)$ con $t \in [0,2\pi]$ e calcolare il lavoro del campo F su tale curva.

soluzione es. 13 (Integrazione I) prof. Coclite

Es. 13: $F(x,y) = (xy^2, x)$

Calcolare $L(F,\gamma)$ dove γ è una curva che parametrizza in modo regolare e semplice il disegno in figura



$\gamma_1 : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, 0) \quad ; \gamma_1'(t) = (1,0)$

$$L(F,\gamma_1) = \int_0^2 \langle (t \cdot 0^2, t), (1,0) \rangle \, dt = \int_0^2 \langle (0,t), (1,0) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^2 0 \, dt = 0$$

$L(F, \gamma_2) = ?$

$\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_2(t) = (2\cos t, 2 \operatorname{sen} t)$

$\gamma_2'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t)$

$$L(F,\gamma_2) = \int_0^{\pi/2} \langle (2\cos t \cdot 4 \operatorname{sen}^2 t, 2\cos t), (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \langle (8 \cos t \operatorname{sen}^2 t, 2 \cos t), (-2 \operatorname{sen} t, 2\cos t) \rangle \, dt =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \langle (4 \cos t \operatorname{sen}^2 t, \cos t), (-\operatorname{sen} t, \cos t) \rangle \, dt =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \left(-4 \cos t (\operatorname{sen} t)^3 + (\cos t)^2 \right) dt = \left[\begin{array}{l} \cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 \\ \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2} \end{array} \right]$$

$$= 4 \left[-\frac{4}{4} (\operatorname{sen} t)^4 \right]_0^{\pi/2} + 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt =$$

$$4\left[-1+0\right]+4\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t)\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=-4+4\left[\frac{\pi}{4}+0\right]=-4+\pi$$

$\gamma_3^- : [0,2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3^-(t)=(0,t)$

$(\gamma_3^-)'(t)=(0,1)$

$$L(F,\gamma_3^-)=\int_0^2 \langle (0,t^2,0),(0,1)\rangle\,dt=0$$

$$L(F,\gamma_3)=-L(F,\gamma_3^-)$$

Pertanto:

$$L(F,\gamma)=L(F,\gamma_1)+L(F,\gamma_2)+L(F,\gamma_3)=$$

$$=0+(-4+\pi)+0=-4+\pi.$$