

# FISICA GENERALE

TEORIA 2° MODULO : ELISA ERCOLESSI + ESERCIZI ( DAVIDE VODOLA )

MATERIALE : su iol

TUTOR : ENRICO DERISIO

ESAME : stessa modalità del I modulo

TESTO : Walker-Halliday-Resnick

PROGRAMMA : - introduzione, calcolo vettoriale

- fenomeni elettrici

- fenomeni magnetici

- equazioni di Maxwell e radiazione elettromagnetico

## INTRODUZIONE

### FORZE FONDAMENTALI

Sono le interazioni della natura che permettono di descrivere i fenomeni fisici su tutte le scale di distanza e di energia e che non sono riconducibili ad altre forze.

Esse sono :

#### FORZA GRAVITAZIONALE

Determina le forze di gravità sulla terra e l'attrazione fra pianeti.

RAGGIO DI AZIONE INFINITO

#### FORZA ELETTROMAGNETICA

È il risultato dell'interazione locale tra i corpi carichi e il campo elettromagnetico.

#### FORZA DEBOLE

Responsabile delle forze che intervengono nei decaimenti nucleari.

RAGGIO DI AZIONE MOLTO ACCOLO

#### FORZA FORTE

Tiene uniti protoni e neutroni nel nucleo

### FENOMENI ELETTRICI

Antichità : gli antichi greci sapevano che sfregando un pezzo di ambra esso attirava pezzetti di paglia, dotati di carica elettrica. Corpi carichi esercitano forze l'uno sull'altro. Bacchette d'avorio caricate allo stesso modo si respingono. Vedremo infatti che corde dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.

Eta' moderna: ricordiamo B. Franklin, A. Volta, L. Galvani, C.A. de Coulomb.

### FENOMENI MAGNETICI

Antichita': Gli antichi greci sapevano che alcune pietre avevano il potere di attrarre i ferri.

Eta' moderna: 1820: Oersted trova una connessione tra corrente elettrica e fenomeni magnetici  
Stesso periodo: Ampere, Biot, Savart, Faraday.  
1861: Equazioni di Maxwell

### ENERGIE

#### CARICA ELETTRICA

La carica elettrica è una caratteristica intrinseca delle particelle fondamentali che compongono gli oggetti.  
Può essere positiva o negativa.

La presenza di una o più cariche elettriche genera un campo elettrico.

#### ATOMO

3 tipi di particelle che lo compongono:  
protoni e neutroni nel nucleo e elettroni  
che ruotano attorno al nucleo a varie distanze

	Carica	Massa	
Elettrone	$-1,6 \cdot 10^{-19} C$	ordine $10^{-31} kg$	Molto piccola
Protone	$1,6 \cdot 10^{-19} C$	ordine $10^{-27} kg$	
Neutrone	0 C	ordine $10^{-27} kg$	

non avendo carica, non contribuisce alle proprietà elettriche della materia

Coulomb  
(unità di misura carica elettrica)

Per separare queste particelle dell'atomo occorre una gran quantità di energia → solo nei reattori nucleari!  
→ in generale il nucleo atomico è stabile

→ è più facile invece perdere elettroni

→ eccesso di carica positiva nell'atomo → diventa IONE POSITIVO

acquisire elettroni  
diventa IONE NEGATIVO.

- La carica elettrica è quantizzata:  
la carica più piccola che possiamo trovare è quella dell'elettrone  $1q_e = 1,60 \cdot 10^{-19} C$  detta "unità fondamentale di carica"
- La carica si conserva  
Se prendiamo un corpo neutro esso può diventare carico positivamente se vengono rimossi elettroni, carico negativamente se li acquista

Oss: Perché non ci accorgiamo che la carica è quantizzata?

Quando misuriamo la carica, lo facciamo come se fosse continua, invece noi possiamo avere  $1,2,3,\dots$  elettroni.  
Non ci accorgiamo di questa cosa perché abbiamo a che fare con molti elettroni  $\Rightarrow$  la carica elettrica è molto più piccola  $\rightarrow$  non notiamo la differenza con 1 elettrone

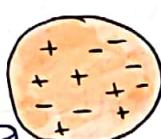
Tipi di corpi, in base al loro comportamento elettrico:

- CONDUTTORI (metalli, ad esempio)

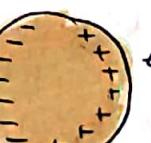
Hanno un buon numero di elettroni ma legati all'atomo in maniera debole  $\Rightarrow$  si muovono con facilità all'interno del corpo

INDUZIONE:

conduttore neutro



gli avvicina  
un corvo  
carico



il conduttore  
ridistribuisce  
la carica

se riallontano  
i corpi le  
cariche si  
ridistribuiscono  
come prima

gli elettroni liberi di  
muoversi sono attratti  
dalle cariche positive

COME FACCIO A CARICARE UN CORPO?



quando  
 $\Rightarrow$  si toccano  
tante di elet-  
troni  
passano da  
A a B



se riallontano i due corpi la carica resta  
distribuita tra i due corpi  
(vedremo come si distribuiscono)

CONDUZIONE: = passaggio di una corrente elettrica, cioè di cariche in movimento

in particolare, essa è dovuta al movimento degli elettroni.  
Per convenzione, la corrente elettrica è diretta nel verso opposto a quello del movimento degli elettroni.

### • ISOLANTI

Gli elettroni sono strettamente legati al nucleo atomico e non si possono muovere.

OSS: Posso comunque caricarli, strappando/aggiungendo elettroni

la carica rimane "localizzata" nel corpo, poiché non si può riistribuire

OSS: I fili elettrici che usiamo quotidianamente sono dotati di un filo conduttore, circondato da una guaina isolante

## VETTORI

Le grandezze fisiche possono essere:

**SCALARI:** se specificate da un solo numero reale con unità di misura.

ES: massa, carica elettrica, densità, energia, calore ...

**VETTORIALI:** se specificate da DIREZIONE, VERSO e modulo, con unità di misura.

ES: velocità, accelerazione, forza, campo gravitazionale, campo elettromagnetico.

Un vettore è un elemento di uno SPAZIO VETTORIALE  $V \subset \mathbb{R}^n$

$\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \quad \lambda \in \mathbb{R}$  ( $\lambda$  detto scalare)  
sono definite:

Moltiplicazione per uno scalare:  $\lambda \vec{v} \in V$

Somma di vettori:  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$

Prodotto scalare:  $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle \equiv \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \in \mathbb{R}$

Norma di un vettore:  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \geq 0$

Se  $V$  ha dimensione finita  $n \Rightarrow V \sim \mathbb{R}^n$

Data  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  la base canonica

$\exists \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n v_j \hat{e}_j$$

## COORDINATE CARTESIANE

NEL PIANO:  $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

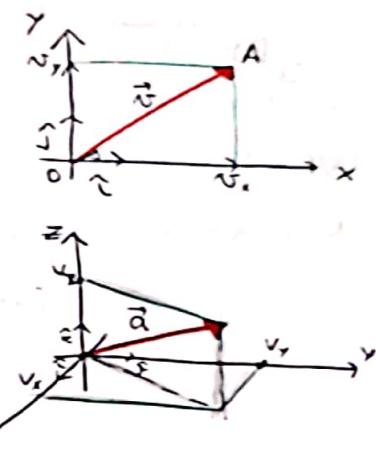
NELLO SPAZIO:  $\vec{a} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$

$$\lambda \vec{v} = \lambda v_x \hat{i} + \lambda v_y \hat{j} + \lambda v_z \hat{k}$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x}) \hat{i} + (v_{1y} + v_{2y}) \hat{j} + (v_{1z} + v_{2z}) \hat{k}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x} v_{2x} + v_{1y} v_{2y} + v_{1z} v_{2z}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



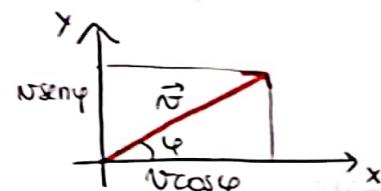
## COORDINATE POLARI NEL PIANO

$$v_x = v \cos \varphi$$

$$v_y = v \sin \varphi$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}$$



## COORDINATE CILINDRICHE NELLO SPAZIO

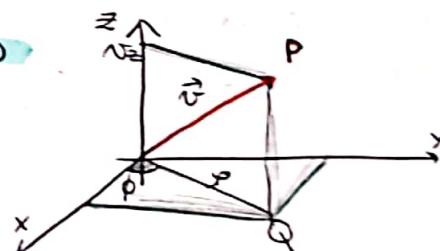
$$v_x = r \cos \phi$$

$$v_y = r \sin \phi$$

$$v_z = v_z$$

$$r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_y}{v_x}$$



## COORDINATE SFERICHE NELLO SPAZIO

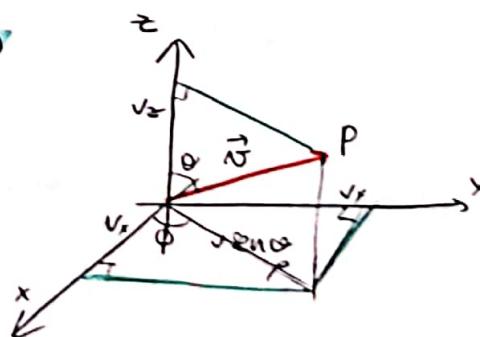
$$v_x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$v_y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$v_z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

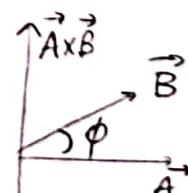
$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_y}{v_x}$$



## PRODOTTO VETTORIALE NELLO SPAZIO.

$\vec{A} \times \vec{B}$  = vettore che ha  
direzione  $\perp$   
al piano individuato  
dalle due voci  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ .

Il vettore si individua con la regola delle  
mano destra.



$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = |A| |B| \sin \phi$$

In componenti cartesiane:  $\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$

## FUNZIONI SCALARI E VETTORIALI

Un punto generico di  $\mathbb{R}^3$  sarà individuato da una tripla di numeri reali  $(x, y, z)$

**CAMPIONE SCALARE:** una funzione  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

**CAMPIONE VETTORIALE** (per descrivere grandezze vettoriali, come una forza, o una velocità): una funzione  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  che associa ad ogni punto dello spazio un vettore  
 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  con  $F_x, F_y, F_z$  funzioni scalari

ESEMPPIO:



$P$



$\mathbb{R}^3$

Supponiamo sempre  $f, F$  sufficientemente regolari in modo da poterle derivare quanto necessario

Definiamo:

• **GRADIENTE DI UN CAMPIONE SCALARE**  $f$  è il campo vettoriale

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

è un vettore

• **DIVERGENZA DI UN CAMPIONE VETTORIALE**  $\vec{F}$  è il campo scalare:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

simbolo del prodotto scalare

• **ROTORE DI UN CAMPIONE VETTORIALE**  $\vec{F}$  è il campo vettoriale:

$$\nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

prodotto vettoriale

• **LAPLACIANO DI UN CAMPIONE SCALARE**  $f$  è il campo scalare:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

per un campo vettoriale  $\vec{F}$  si pone

$$\nabla^2 \vec{F} = (\nabla^2 F_x, \nabla^2 F_y, \nabla^2 F_z)$$

PROPRIETÀ:

1. **LINEARITÀ:**  $\forall$  fig campi scalari,  $\forall \vec{F}, \vec{G}$  campi vettoriali e  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

- (1)  $\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g$
- (2)  $\nabla \cdot (\lambda \vec{F} + \vec{G}) = \lambda \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$
- (3)  $\nabla \times (\lambda \vec{F} + \vec{G}) = \lambda \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G}$
- (4)  $\nabla^2(\lambda \vec{F} + \vec{G}) = \lambda \nabla^2 \vec{F} + \nabla^2 \vec{G}$

queste proprietà dimostrano del fatto che le derivate parziali che usiamo per definire le operazioni sono a loro volta lineari

## 2. ALTRE PROPRIETÀ: campo vettoriale

- (5)  $\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$
- (6)  $\nabla \times (\nabla f) = 0 \rightarrow$  campo vettoriale
- (7)  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0 \rightarrow$  campo scalare
- (8)  $\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = -\nabla^2 \vec{F} + \nabla(\nabla \cdot \vec{F})$   
vettore
vettore
scalare
vettore

DIMOSTRANNO ALCUNE:

$$(5) \quad \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f \end{aligned}$$

$$(7) \quad \nabla \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y}}_{\text{vettore}} - \underbrace{\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z}}_{\text{vettore}} + \underbrace{\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z}}_{\text{vettore}} - \underbrace{\frac{\partial^2 F_z}{\partial x \partial y}}_{\text{scalare}} + \underbrace{\frac{\partial^2 F_y}{\partial x \partial z}}_{\text{scalare}} - \underbrace{\frac{\partial^2 F_x}{\partial y \partial z}}_{\text{scalare}} = 0 \end{aligned}$$

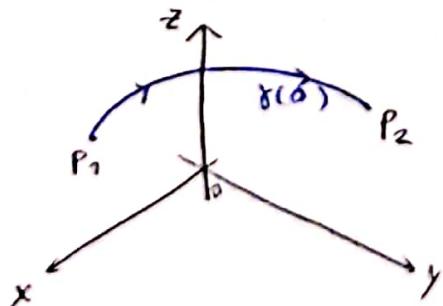
## INTEGRALE DI LINEA per campi vettoriali

Una CURVA  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^3$  da un punto  $P_1$  a un punto  $P_2$  è una funzione  $\gamma(s): [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  t.c.

$P_1 = \gamma(a)$ ,  $P_2 = \gamma(b)$ , le cui coordinate

$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$  sono funzioni di classe  $C^1$  (almeno) se  $s \in ]a, b[$ , con derivata prima destra e sinistra ben definita se  $s=a$  e  $s=b$ .

Se  $P_1 = P_2$  la curva è chiusa.



La curva si dice ORIENTATA  
DA  $P_1$  A  $P_2$

OSS: La curva

$$-\gamma(s) \equiv \gamma(b-(s-a))$$

$[a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ha la stessa immagine di  $\gamma(s)$  ma  $P_1 = \gamma(b)$  e  $P_2 = -\gamma(a)$  ed è ORIENTATA NELL'OPPOSTO DIREZIONE

Per ogni  $s \in [a, b]$  definiamo il **VETTORE TANGENTE** alla curva nel punto  $P = f(s)$

$$\vec{t}_P = \vec{t}(s) \equiv \frac{d\gamma}{ds} = \left( \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right)$$

esistono poiché la curva è di classe almeno C<sup>1</sup>

la **LUNGHEZZA** della curva  $\gamma$  è data dall'integrale

$$l_\gamma = \int_a^b \|\vec{t}(s)\| ds$$

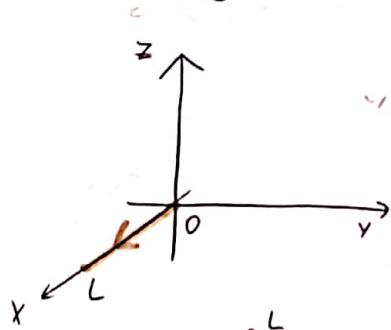
L'è una funzione scala re continua  $\rightarrow$  le posso integrare

$\|\vec{t}(s)\| ds$  è la lunghezza del tratto infinitesimo di curva

definiamo il seguente vettore:

$$\text{ELEMENTO DI LINEA: } d\vec{e} = \vec{t}(s) ds$$

ESEMPIO: elemento di linea e lunghezza di un segmento:



parametrizzazione curva:

$$\gamma(s) = (s, 0, 0) \quad \text{con} \quad s \in [0, L]$$

vettore tangente

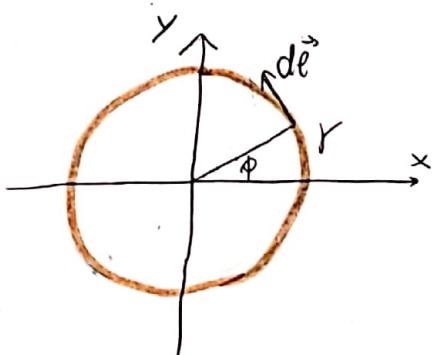
$$\vec{t}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = (1, 0, 0)$$

$$\|\vec{t}(s)\| = 1$$

$$l_\gamma = \int_0^L ds = L$$

$$\text{inoltre } d\vec{e} = (ds, 0, 0)$$

ESEMPIO: elemento di linea e lunghezza di una circonferenza



parametrizzazione curva:

$$\gamma(\phi) = (R \cos \phi, R \sin \phi, 0) \quad \text{con } \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{t}(\phi) = \frac{d\gamma}{d\phi} = (-R \sin \phi, R \cos \phi, 0)$$

$$\|\vec{t}(\phi)\| = \sqrt{R^2 \sin^2 \phi + R^2 \cos^2 \phi} = R$$

$$l_\gamma = \int_0^{2\pi} R d\phi = 2\pi R$$

$$d\vec{e} = (-R \sin \phi, R \cos \phi, 0) d\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) R d\phi$$

OSS: se avessi preso la curva orientata nel verso opposto  $l_\gamma$  non sarebbe cambiato  $d\vec{e}$  cambia verso

Sia  $\vec{F}$  un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$

Si definisce INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO  $\vec{F}$  su una curva  $\gamma$ , l'integrale

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{F}(s) \cdot \vec{t}(s) ds$$

Equivalent.

Se indichiamo  $\theta(s)$  l'angolo compreso tra  $\vec{F}(s)$  e il vettore tangente alla curva  $\vec{t}(s)$  possiamo anche scrivere

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \|\vec{F}(s)\| \|\vec{t}(s)\| \cos(\theta(s)) ds$$

Questo integrale dipende dalle 'orientazione' che abbiamo dato a  $\gamma$ . Infatti:

$$\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Se la curva  $\gamma$  è chiusa l'integrale di linea viene detto CIRCUITAZIONE del campo vettoriale  $\vec{F}$  e indicato:

$$C_{\gamma}(\vec{F}) = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

TEOREMA: la circuitazione di un campo vettoriale è nulla su qualunque curva chiusa se e solo se l'integrale di linea su una qualunque curva aperta dipende solo dai punti estremi  $P_1, P_2$  e non dal percorso della curva

Dimostrazione:

$P_1$  punto iniziale,  $P_2$  punto finale  
 $\gamma_1$  curva da  $P_1$  a  $P_2$   $\gamma_2$  curva da  $P_2$  a  $P_1$  qualsiasi

$\gamma_1 \cup \gamma_2 =$  curva chiusa

Viceversa ogni curva chiusa si può scomporre nell'unione di 2 curve aperte.

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} - \int_{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

dove  $\gamma_1, -\gamma_2$  sono curve da  $P_1$  a  $P_2$  aperte

Da cui si conclude facilmente

DEF: un campo vettoriale  $\vec{F}$  è detto conservativo se per ogni curva chiusa  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$

equivalentemente se per ogni curva aperta l'integrale di linea dipende solo dal punto iniziale e dal punto finale

TEOREMA: Un campo vettoriale  $\vec{F}$  (su  $\mathbb{R}^3$ ) è conservativo se e solo se è di tipo gradiente, cioè se esiste  $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  (scalare) tale che  $\vec{F} = \nabla V$

Dimostrazione:  $\Leftarrow \exists V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$

Sia  $\gamma$  una curva qualunque aperta da  $P_0$  a  $P_2$   $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

Calcoliamo l'integrale di linea:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_a^b \nabla V \cdot \vec{l}(s) ds = \int_a^b \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds = \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds = \int_a^b \frac{\partial V}{\partial s} (x(s), y(s), z(s)) ds = \\ &= V(x(b), y(b), z(b)) - V(x(a), y(a), z(a)) = V(P_2) - V(P_0) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Non dipende da  $\gamma$  ma solo dai punti iniziale ed finale  $\Rightarrow \vec{F}$  è conservativo

$\Rightarrow$  Sia  $\vec{F}$  conservativo  $\Rightarrow$  l'integrale tra due punti  $P_0, P$  lungo una curva  $\gamma$  dipende solo dai questi due punti

$P_0$  fissato  $P = (x, y, z)$  qualsiasi.

$$\text{Definiamo } V(x, y, z) = \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{l} + c$$

Osserviamo che

$$\nabla V = \vec{F} \quad e \quad V(P_0) = c$$

dipende solo da  $P$

la funzione scalare  $V(x, y, z)$  è detta

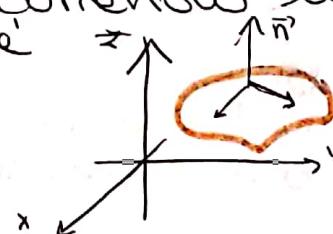
POTENZIALE DEL CAMPO VETTORIALE  $\vec{F}$   
Si noti che il potenziale è definito a meno di una costante  $c$  fissata dal valore della funzione in un punto di riferimento

### INTEGRALE DI SUPERFICIE E FLUSSO

Una SUPERFICIE  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  è una funzione  $\sigma: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

dominio CONNESSIONE  
di  $\mathbb{R}^2$   $D = \{(u, v)\}$

avviare di mentre stiamo percorrendo un intero oggetto bidimensionale



ogni punto di questa superficie sarà descritto da tre coordinate che dipendono a loro volta dai due parametri  $u$  e  $v$   
 $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$  che supponiamo essere funzioni di classe almeno C<sup>1</sup>

Per ogni punto possiamo definire due vettori TANGENTI:

$$\vec{t}_u(u,v) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad v \text{ costante}, \quad u \text{ varia}$$

$$\vec{t}_v(u,v) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \quad u \text{ costante}, \quad v \text{ varia}$$

→ Giacciono entrambi sul piano tangente alla superficie

$$\text{chiamiamo } \vec{n}(u,v) = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$$

esso è ⊥ al piano tangente e verso dato dalla regola della mano destra

Supponiamo  $\vec{t}_u, \vec{t}_v \neq 0$  lungo tutta la superficie anche  $\vec{n} \neq 0$  (cioè  $\vec{t}_u, \vec{t}_v$  non paralleli)

con queste caratteristiche sono  
dette ORIENTABILI

Chiamiamo → la superficie orientata secondo  
il vettore  $\vec{n}$

Oss: In generale, identifichiamo una superficie con le sottansieme di  $\mathbb{R}^3$  che è immagine della funzione.

Tuttavia se -s sono superfici diverse, poiché orientate in senso opposto ma hanno stessa immagine.

L'AREA di una superficie regolare, orientata è definita dall'integrale

$$A_s = \int_D \|\vec{n}(u,v)\| du dv$$

sare un numero reale e positivo

JARAT una funzione scalare ben definita, regolare, continua ⇒ l'integrale

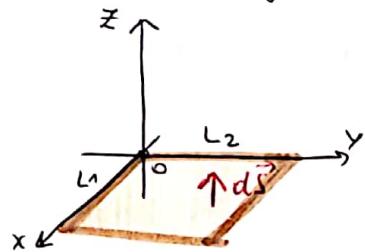
$dA = \|\vec{n}(u,v)\| du dv$  è l'area di una porzione infinitesima di superficie

definiamo il seguente vettore:

ELEMENTO DI SUPERFICIE:  $d\vec{s} = \vec{n}(u,v) du dv$   
che ha modulo  $dA$  e direzione normale

Una superficie si dice **CHIUSA** se non ha bordo  
(esempio la sfera)

ESEMPIO: elemento di superficie e area di un rettangolo



Parametrizziamo questa superficie:

$$\sigma(u, v) = (u, v, 0) \text{ con } u \in [0, L_1], v \in [0, L_2]$$

$$\vec{t}_u = (1, 0, 0)$$

$$\vec{t}_v = (0, 1, 0)$$

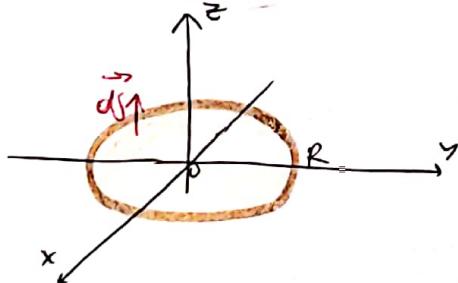
$$\vec{n}(u, v) = \vec{t}_u \times \vec{t}_v = (0, 0, 1)$$

$$\|\vec{n}\| = 1$$

$$A_s = \int_0^{L_1} du \int_0^{L_2} dv = L_1 L_2$$

$$\text{inoltre } d\vec{s} = (0, 0, 1) du dv$$

ESEMPIO: elemento di superficie e area di un cerchio



Parametrizzazione cerchio di raggio  $R$ , centro  $O$  sul piano  $x, y$ :

$$\sigma(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, 0) \text{ con } r \in [0, R], \phi \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{t}_r = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$$

$$\vec{t}_\phi = (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0)$$

$$\vec{n}(r, \phi) = (0, 0, 1)$$

$$\|\vec{n}\| = r$$

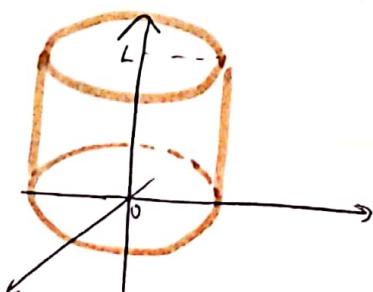
$$A_s = \int_0^{2\pi} r d\phi \int_0^R dr = 2\pi R^2$$

$$\text{inoltre } d\vec{s} = (0, 0, 1) r dr d\phi$$

AREA DI UN PEZZETTO ACCORDO DI SUPERFICIE IN COORDINATE POLARI

ERCOLESSI 9/3/2020

ESEMPIO: elemento di superficie e area di un cilindro



parametrizzazione del cilindro 'aperto' (solo superficie laterale) di raggio  $R$  altezza  $L$ :

$$\sigma(\phi, z) = (R \cos \phi, R \sin \phi, z)$$

$$\text{con } \phi \in [0, 2\pi], z \in (0, L)$$

$$\vec{t}_1 = (-R\sin\phi, R\cos\phi, 0)$$

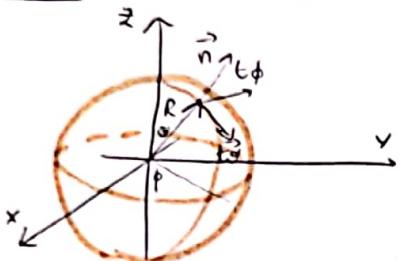
$$\vec{t}_2 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{n}(\phi, \theta) = (R\cos\phi, R\sin\phi, 0) \quad e \quad \|\vec{n}(\phi, \theta)\| = R$$

$$A_s = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R dz R = 2\pi RL$$

$$\text{imoltre } d\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi, 0) R dz d\phi$$

ESEMPIO: elemento di superficie e area di una sfera:



parametrizzazione di una sfera centrale nell'origine e di raggio  $R$

$$\sigma(\theta, \phi) = (R\sin\theta\cos\phi, R\sin\theta\sin\phi, R\cos\theta)$$

COORDINATE SFERICHE

$$\vec{E}_\theta = (R\cos\theta\cos\phi, R\cos\theta\sin\phi, R\sin\theta)$$

$$\vec{E}_\phi = (-R\sin\theta\sin\phi, R\sin\theta\cos\phi, 0)$$

$$\vec{n}(\theta, \phi) = (R^2 \sin\theta \cos\phi, R^2 \sin\theta \sin\phi, R^2 \cos\theta)$$

$$\|\vec{n}\| = R^2 \sin\theta$$

$$A_s = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \sin\theta = 4\pi R^2$$

$$d\vec{s} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

DEF: Sia  $\vec{F}$  un campo vettoriale su  $\mathbb{R}^3$ .

Si definisce INTEGRALE DI SUPERFICIE o FLUSSO

del campo  $\vec{F}$  su una superficie  $S$ , l'integrale:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D \vec{F}(u, v) \cdot \vec{n}(u, v) du dv$$

indicando con  $\alpha(u, v)$  l'angolo compreso tra  $\vec{F}(u, v)$  e  $\vec{n}(u, v)$  possiamo anche scrivere:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_D \|\vec{F}(u, v)\| \|\vec{n}(u, v)\| \cos \alpha(u, v) du dv$$

$$\text{o.s.: } \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_S \vec{F} \cdot d\vec{J}$$

Se  $S$  è superficie chiusa, indichiamo

$$\text{l'integrale } \phi_s(\vec{F}) = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

un campo vettoriale  $\vec{F}$  è detto SOLENOIDALE

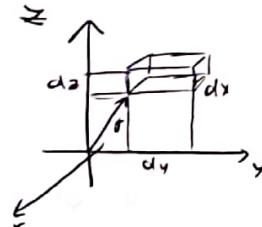
se  $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$  per ogni superficie chiusa

TEOREMA DI GAUSS: un campo vettoriale  $F$  (su  $\mathbb{R}^3$ ) è solenoidale se e solo se è di tipo rotore cioè se esiste un campo vettoriale  $\vec{A}$  tale che  $F = \nabla \times \vec{A}$

### ELEMENTI DI VOLUME

- in coordinate cartesiane  $(x, y, z)$ :

$$dV = dx dy dz$$



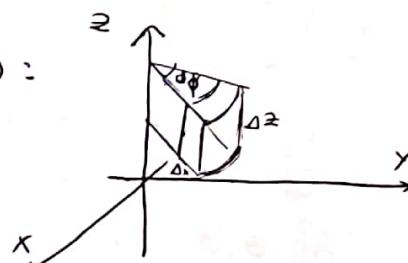
e' il volume di un parallelepipedo infinitesimo di lati  $dx, dy, dz$

Il volume di un parallelepipedo  $P$  di lati  $L_1, L_2, L_3$  e'

$$\int_P dV = L_1 L_2 L_3$$

- in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$ :

$$dV = r dr d\phi dz$$

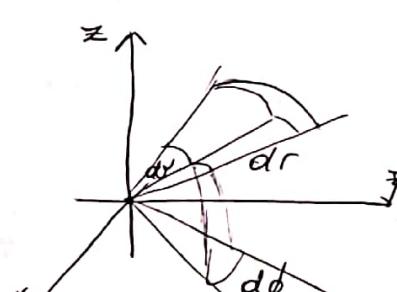


dai cui si ricava che un cilindro di raggio  $R$  e altezza  $L$  e:

$$\int_C dV = \pi R^2 L$$

- in coordinate sferiche  $(r, \theta, \phi)$

$$dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$



dai cui si ricava che il volume di una sfera di raggio  $R$  e

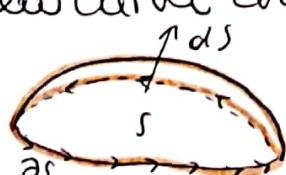
$$\int r dV = \frac{4}{3} \pi R^3$$

### TEOREMI DI STOKES

Riguardano la circolazione e il flusso di un campo

#### TEOREMA DI STOKES CLASSICO su una linea chiusa

Dato uno qualsiasi superficie  $S$  che ha la curva chiusa  $\gamma$  come bordo ( $\partial S = \gamma$ )

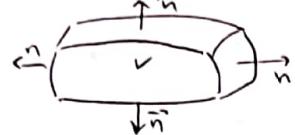


$$\oint_{\gamma = \partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

INTEGRALE DI LINEA → INTEGRALE DI SUPERFICIE

## TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Se  $V$  è un qualunque volume che ha la superficie chiusa  $S$  come bordo ( $\partial V = S$ )



allora:

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

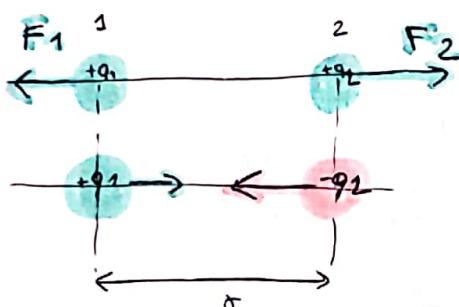
INTEGRALE SU UNA SUPERFICIE → INTEGRALE SU VOLUME

## FENOMENI ELETTRICI

→ 'statici', cioè consideriamo le cariche ferme

### FORZA DI COULOMB

Describe la forza tra due cariche puntiformi



costante di Coulomb

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

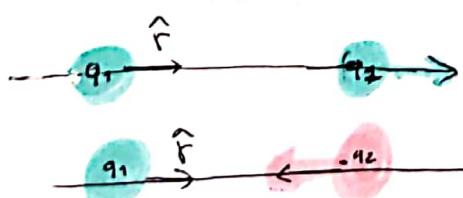
analogia con la  
forza di gravità

$$k = 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

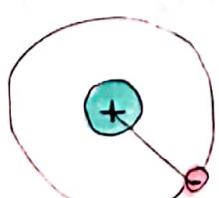
$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

COSTANTE DI PERMEABILITÀ  
NEL VUOTO

$$\vec{F}_2 = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$



ESEMPIO: Forza di Coulomb tra un protone e un elettrone in un atomo di idrogeno e confrontarla con la forza gravitazionale



$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$q_p = -q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m (stima)}$$

$$|\vec{F}_c| = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 8,2 \cdot 10^{-6} \text{ N} \quad |\vec{F}_G| = G \frac{m_p m_e}{r^2} = 3,63 \cdot 10^{-47} \text{ N}$$

sono entrambe forze attrattive.

la Forza gravitazionale è molto più piccola.

$\Rightarrow$  gli effetti elettrici sono molto più intensi di quelli gravitazionali.

OSS:  $1C = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}}$  electroni =  $625 \cdot 10^{16}$  electroni

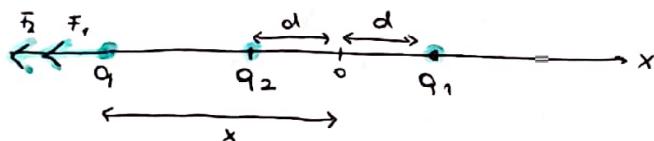
ERCOLESSI

12/3/2020

ESEMPI:

1. Siano due cariche  $q_1 > 0$  e  $q_2 > 0$  poste a distanza  $d$  dall'origine sull'asse  $x$ . Sia  $q$  una terza carica  $> 0$  quale è la forza che agisce su  $q$ ?

CASO 1:

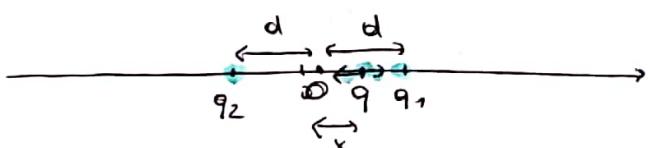


$$\vec{F}_1 = -k \frac{q q_1}{(x+d)} \hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = -k \frac{q q_2}{(x-d)} \hat{i}$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

CASO 2:

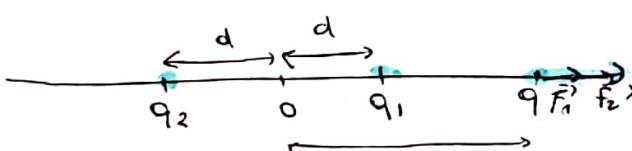


$$\vec{F}_1 = -k \frac{q q_1}{(x-d)} \hat{i}$$

$$\vec{F}_2 = +k \frac{q q_2}{(x+d)} \hat{i}$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

CASO 3:



$$\vec{F}_1 = k \frac{q q_1}{(x-d)^2} \hat{i}$$

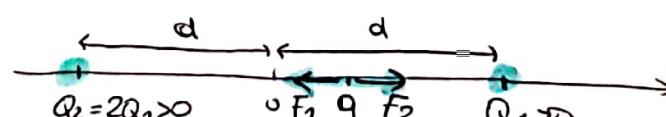
$$\vec{F}_2 = k \frac{q q_2}{(x+d)^2} \hat{i}$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

DOMANDA: Supponiamo  $q_1$  e  $q_2$  fissate e  $q$  libera di muoversi sull'asse  $x$

nel caso 1 la forza è verso sinistra, la carica inizierà a muoversi verso sinistra

Nel caso 2 la carica si muove nel verso in cui la forza è più intensa. Ci aspettiamo in questo caso in particolare se  $F_1 = F_2$  la carica sarà in equilibrio.



$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = kq \left( -\frac{q_1}{(x-d)^2} + \frac{2q_1}{(x+d)^2} \right) \hat{i} = 0$$

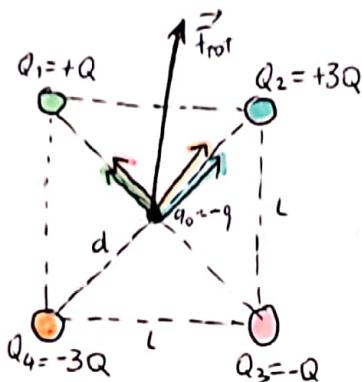
$$-(x+d)^2 + 2(x-d)^2 = 0 \quad x^2 - 6xd + d^2 = 0$$

$$x = d(3 \pm \sqrt{2}) \rightarrow \text{scelgo questa soluzione perché altrimenti sarei } 0 < x < d$$

$$x = d(3 - \sqrt{2})$$

ESSO È UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE, se ci muoviamo di poco dal questo punto la carica tende a tornare con piccole oscillazioni attorno allo stesso punto di equilibrio.

2. Consideriamo 4 cariche  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  nel piano:  
Studiare la  $\vec{F}_{\text{tot}}$  su  $q_0$ .



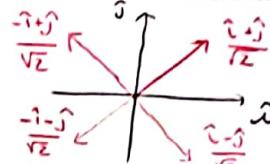
$$\alpha = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = k \frac{q_0 Q}{L^2} \left( -\hat{i} + \hat{j} \right) = k \sqrt{2} \frac{q_0 Q}{L^2} (-\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_4 = k \frac{q_0 \cdot 3Q}{L^2} \left( \hat{i} + \hat{j} \right) = k \sqrt{2} \frac{q_0 Q}{L^2} \cdot 3 (\hat{i} + \hat{j})$$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = k \sqrt{2} \frac{q_0 Q}{L^2} (-2\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{i} + 6\hat{j}) = 2k \sqrt{2} \frac{q_0 Q}{L^2} (2\hat{i} + 4\hat{j})$$

per descrivere un vettore nel piano usiamo i versori  $\hat{i}, \hat{j}$   
tuttavia in questo caso le forze sono tutte a  $45^\circ$  rispetto a questo sistema di riferimento.



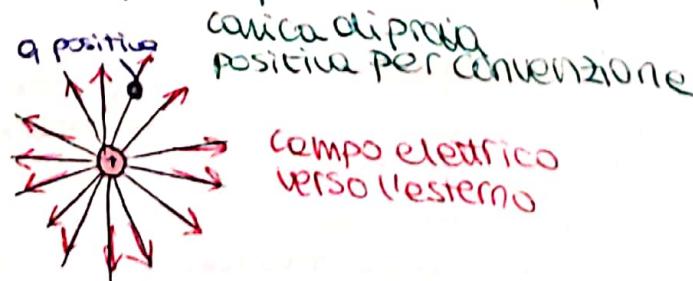
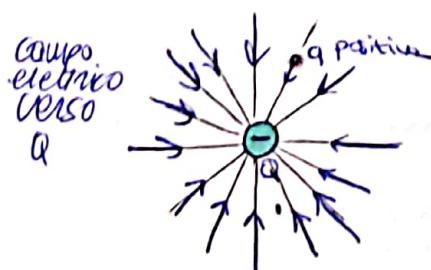
Per cui definiamo come sono fatti i versori a  $45^\circ$ .

### CAMPO ELETTRICO

Nell'esercizio di prima notiamo che le forze su  $q_0$  agiscono in momenti istantanei non appena posizioniamo la carica. Possiamo pensare che quando posizioniamo la carica  $q_0$  c'è già la presenza del campo elettrico, dovuto alle altre cariche. Posizionando la carica  $q_0$  stiamo ricevendo la presenza del campo.

Forza di Coulomb:  $\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = q \cdot \vec{E}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME } Q.$$

L'origine SORGENTE DEL CAMPO ELETTRICO

Se abbiamo più cariche, ognuna genera un campo elettrico.

Il campo elettrico totale deriva dal principio di sovrapposizione

carica di prova  $q > 0$

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\vec{F}_{\text{tot}}}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}{q}$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^n \vec{E}_j$$

campo totale  $\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

→ questo principio può essere generalizzato a distribuzioni di cariche continue

ESEMPIO: Campo elettrico totale nell'origine?

carica di prova positiva

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_3 = \frac{\vec{F}_1}{q} = k\sqrt{2} \frac{Q}{L^2} (\hat{i} - \hat{j})$$

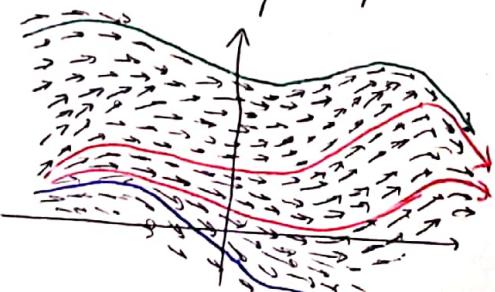
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_4 = \frac{\vec{F}_2}{q} = 3k\sqrt{2} \frac{Q}{L^2} (-\hat{i} - \hat{j})$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = 2k\sqrt{2} \frac{Q}{L^2} (\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{i} - 3\hat{j}) = 2k\sqrt{2} \frac{Q}{L^2} (-2\hat{i} - 4\hat{j})$$

### LINEE DI CAMPO

Per visualizzazione del campo elettrico dovuto a determinate sorgenti

Sono linee, curve orientate che in ogni punto hanno come tangente il vettore del campo elettrico in quel punto



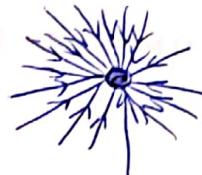
Le linee di campo sono più fitte in base all'intensità del campo in quella regione

## linee del campo elettrico.

sorgente positiva

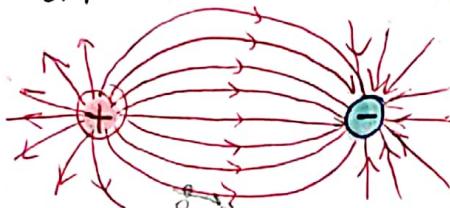


sorgente negativa.



più ci allontaniamo dalla sorgente, meno il campo elettrico è intenso e meno sono vicine le linee di campo

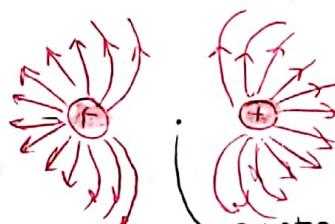
ESEMPI: 1. CARICHE PUNTIFORMI UGUALI MA DISEGNO OPPOSTO



tutte le linee di campo escono dalla carica positiva ed entrano in quella negativa

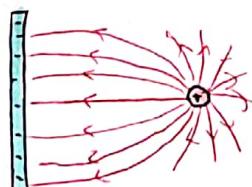
2. CARICHE PUNTIFORMI UGUALI DI STESSA CARICA

le cariche producono forze opposte

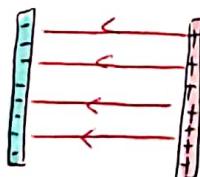


punto di equilibrio  $E = 0$   
le forze sulla carica di prova si annullano

3. LAstra metallica, carica puntiforme disegno opposto

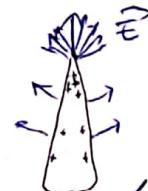


4. CONDENSATORE: LASTRE CARICA OPPOSTA

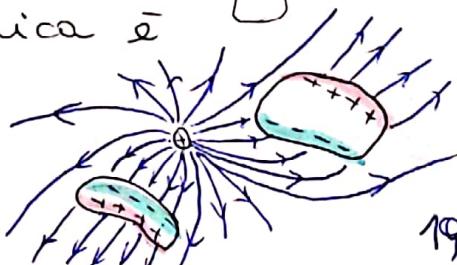
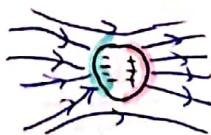


campo elettrico costante

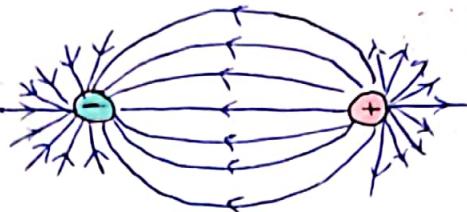
OSS: Quando un conduttore viene caricato, le cariche elettriche si distribuiscono sulla superficie e il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo, mentre è +0 all'esterno e il campo è più intenso nelle 'punte'



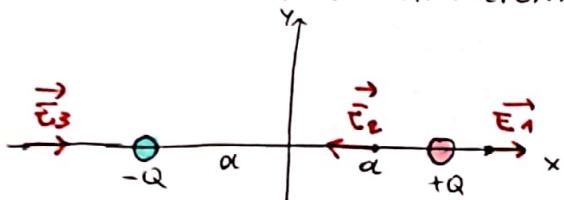
Mentre negli isolanti la carica è fissata



## CAMPO DI UN DIPOLO



a. LUNGO L'ASSE CONGIUNGENTE



$$\vec{E}_2 = -k Q \left( \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x+a)^2} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}_1 = k Q \left( \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) \hat{i}$$

$$\vec{E}_3 = k Q \left( \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) \hat{i}$$

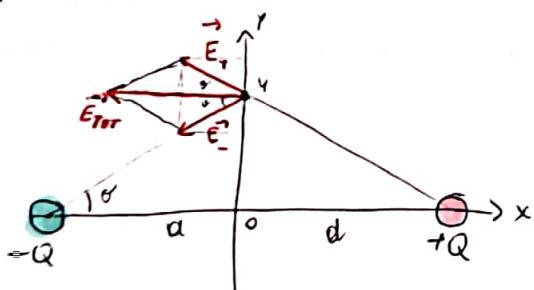
$$|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = \frac{k Q}{x^2} \left( \frac{1}{(1-\frac{a}{x})^2} - \frac{1}{(1+\frac{a}{x})^2} \right) =$$

Sviluppo di TAYLOR:  $(1+\varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon + O(\varepsilon^2)$

$$= \frac{k Q}{x^2} \left( \left(1 + \frac{2a}{x}\right) - \left(1 - \frac{2a}{x}\right) + O\left(\left(\frac{2a}{x}\right)^2\right) \right) \approx k \frac{4a Q}{x^3} \quad \text{se } x \gg a$$

Se  $x \gg a$ , il campo elettrico decade con la distanza al cubo.

b. LUNGO L'ASSE DEL SEGMENTO.



$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + y^2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{d^2 + y^2}}$$

$$|\vec{E}_-| = |\vec{E}_+| = E_0 = k \frac{Q}{y^2 + d^2}$$

$$\vec{E}_- = E_0 (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$$

$$\vec{E}_+ = E_0 (-\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = -2 \cos \theta E_0 \hat{i}$$

$$|\vec{E}_{\text{tot}}| = k \frac{2Q}{y^2 + d^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + y^2}} = \frac{2k Q d}{(y^2 + d^2)^{3/2}} = (2k Q d) (y^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} = (2k Q d) \left(y^2 + \frac{d^2}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = (2k Q d) \left(1 + \frac{d^2}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx k \frac{2Q d}{y^3} \quad \text{se } y \gg d$$

Il campo elettrico decade con altezza al cubo.

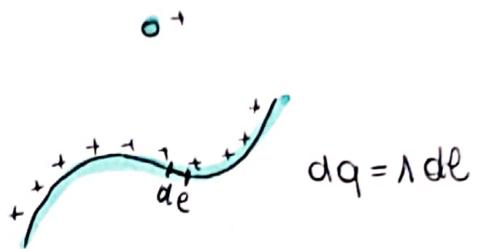
# DISTRIBUZIONE DI CARICA CONTINUA

Carica:

$q(c)$

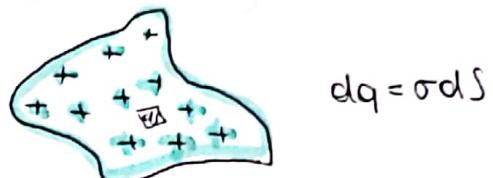
densità di carica  
lineare

$$\lambda \left( \frac{C}{m} \right)$$



densità di carica  
superficiale

$$\sigma \left( \frac{C}{m^2} \right)$$



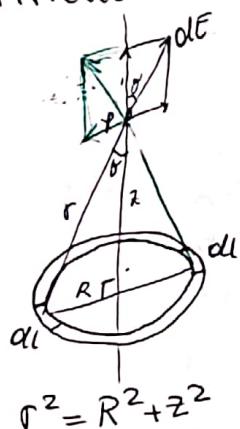
densità di carica  
volumica

$$\rho \left( \frac{C}{m^3} \right)$$



## ESEMPIO:

### 1. Anello



$$dE = k \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_x = dE \sin \theta = dE \frac{R}{r}$$

$$dE_y = dE \cos \theta = dE \frac{z}{r}$$

OSS: componenti orizzontali  
del campo elettrico  
dei due tratti di filo  
di diametralmente  
opposti si annullano,  
rimane solo la componente  
verticale

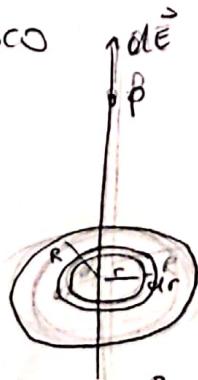
$$dE_y = k \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \frac{k \lambda dl}{r^2} \frac{z}{r} = \\ = \frac{k \lambda z \cdot (R d\phi)}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Principio di sovrapposizione:

$$E = \int dE_y = \int_0^{2\pi} k \frac{1/2 (R d\phi)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = k \frac{\frac{1}{2} R 2\pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k R \pi}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = E \hat{k}$$

### 2. DISCO



per ciascun anello di  
raggio  $r$ :

$$dE = k \frac{2dq}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad 0 \leq r \leq R$$

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr$$

principio di sovrapposizione:

$$E = \int dE = \int_0^R k \frac{2\sigma 2\pi r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi k \sigma \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

$$\vec{E} = E \hat{k}$$

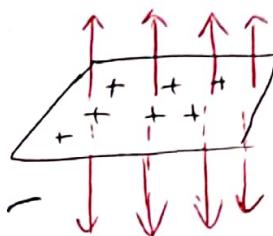
### 3. PIANO INFINTO



consideriamolo come un disco di raggio che tende a  $+\infty$

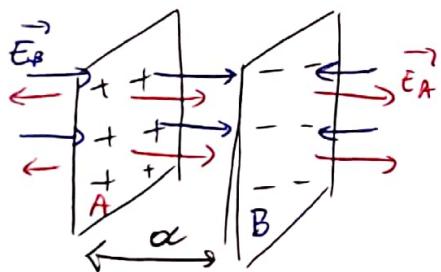
$$E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z^2}{R^2 + z^2} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \vec{E} \hat{k}$$



vicessita  
saranno  
entrenti se  
la carica è negativa

### 4. CONDENSATORE PIANO



tra le due lastre

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{k}$$

All'esterno

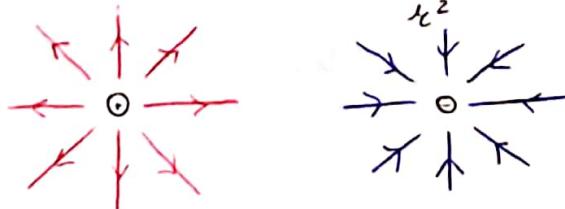
$$|\vec{E}_A| = |\vec{E}_B| \text{ ma hanno verso opposto} \Rightarrow \vec{E}_{EST} = 0$$

ERCOLESSI 16/3/2020

**LEGGE DI GAUSS** → (I equazioni di Maxwell per il campo elettrico)

**TEOREMA:** Sia  $\vec{F}$  un campo vettoriale di simmetria sferica rispetto all'origine (ogni assi di riferimento, in qualsiasi direzione stiamo guardando, vediamo sempre lo stesso tipo di campo vettoriale) diretto in ogni punto lungo il vettore normale alla sfera concentrica nell'origine e con modulo proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal centro

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2} \hat{n}$$



ES campi di questo tipo: campo elettrico generato da carica puntiforme

ma anche il campo gravitazionale

allora, presa una qualsiasi superficie chiusa  $S$   
e calcoliamo il flusso del campo vettoriale  
attraverso questa superficie chiusa, ottenendo:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi C \quad \text{se } S \text{ racchiude l'origine}$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{se } S \text{ non racchiude l'origine}$$

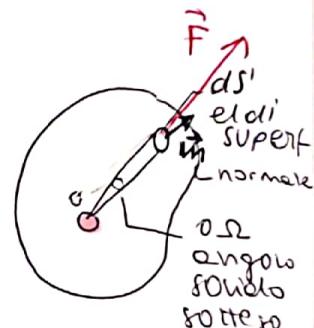
PER IL CAMPO ELETTRICO  $C = kQ = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Dim: 1. cosa succede quando  $S$  contiene  $O^2$

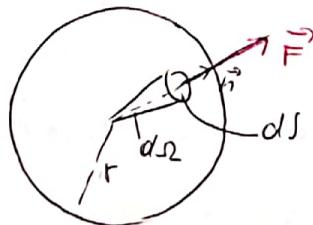
$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (\text{cord.-sferiche})$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s}' = |\vec{F}| \cos\alpha d\vec{s}'$$

punto lungo la  $\vec{F}$  e  $\vec{m}$   
lungo normale  $\vec{n}$



Caso Particolare: Sceglieremo come superficie chiusa  $S$  una sfera centrata nell'origine



$d\vec{s}$  punta nella direzione normale alla sfera  $\vec{n}$   
e la sua area sarà  $\mu^2 d\Omega$   
angolo solido

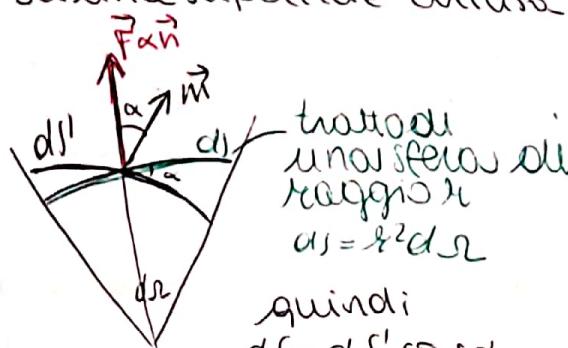
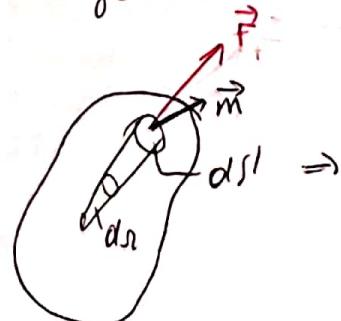
quindi  $\vec{m} = \vec{n}$

$$\text{quindi } \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot \mu^2 d\Omega \cdot \cos 0^\circ = \frac{C}{r^2} \mu^2 d\Omega$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = Cd\Omega$$

$$\text{quindi } \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_{\text{sfera}} Cd\Omega = C \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = 4\pi C$$

Caso Generale: su una superficie chiusa  $S$  generica



tratta di una sfera di raggio  $r$   
 $d\Omega = \mu^2 d\Omega$   
quindi  
 $dS = dS' \cos\alpha$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s}' = |\vec{F}| |d\vec{s}'| \cos \alpha = |\vec{F}| \frac{|ds|}{\cos \alpha} \cos \alpha = |\vec{F}| |ds| = Col_R$$

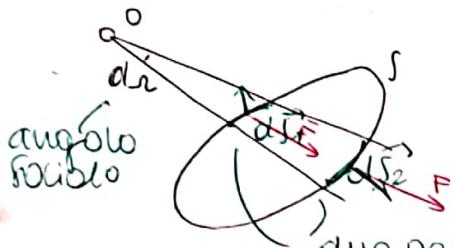
↓  
 superc. della  
 sfera

quindi  $\oint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s}' = 4\pi C$

L' stesso calcolo  
di prima

Abbiamo quindi dimostrato  $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 4\pi C$   
 Qualunque sia la superficie chiusa che non  
 chiude l'origine

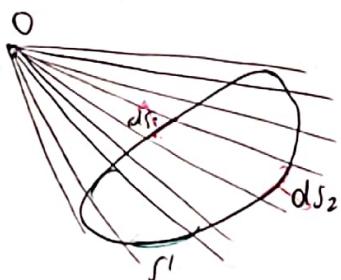
2. Cosa succede quando non contiene l'origine?



due pezzi di superficie  
ottenuti dall'angolo  $\delta_r$

$d\vec{s}_1$  e  $d\vec{s}_2$  hanno in generale aree diverse  
e normali diversi  
se  $\delta_r$  è sul piccolo  $d\vec{s}_1 = d\vec{s}_2$   
sono praticamente opposti

$$\vec{F} \cdot d\vec{s}_2 = Col_R = -\vec{F} \cdot d\vec{s}_1$$



quindi i contributi  
di questi due pezzi  
di superficie sono  
uguali in modulo ma  
hanno segno opposto

Affatto! La superficie  
contiene molti piccoli angoli  
per ogni "fetta" individuale  
due superfici  $d\vec{s}_1$  e  $d\vec{s}_2$   
i cui contributi sono  
uguali di segno opposto

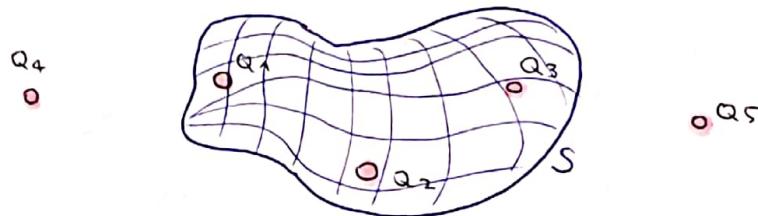
quindi  $\oint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s}' =$

$$-\oint_{S'} \vec{F} \cdot d\vec{s}' = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 + \int \vec{F} \cdot d\vec{s}_1 + \dots = 0$$

contributi che si  
annullano a due a  
due

## I EQUAZIONE DI MAXWELL

Sia una distribuzione di cariche qualsiasi



Sia una qualunque superficie chiusa  $S$

$$\text{Allora, } \phi_s(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

dove  $Q_{\text{int}} = \text{somma delle cariche interne alla superficie } S \text{ chiusa}$

Dim: dal teorema di Gauss:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad \text{è il campo elettrico generato da una singola carica puntiforme}$$

$$\phi_s(\vec{E}) = \begin{cases} 4\pi \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} & \text{se } Q \text{ è interna a } S \\ 0 & \text{se } Q \text{ è esterna} \end{cases} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

per il principio di sovrapposizione, sappiamo che il campo elettrico generato da molte cariche puntiformi è la somma dei campi elettrici generati dalle singole cariche puntiformi. (omologo ragionamento per distribuzioni di cariche continue)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \phi_s(\vec{E}) &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots) \cdot d\vec{l} = \\ &= \oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \oint_S \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots = \frac{Q_{1\text{int}}}{\epsilon_0} + \frac{Q_{2\text{int}}}{\epsilon_0} + \dots = \\ &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Oss: le cariche esterne generano un campo elettrico  $\Rightarrow$  ma non danno contributo nel calcolo del campo.

IDEA: Possiamo usare questo risultato, scegliendo superfici opportune (di cui si sa calcolare l'integrale) per ricavare il campo elettrico

Oss: le cariche sono ferme nel tempo (campo elettrostatico). Vedremo che anche se si considera un campo variazionale si ottiene lo stesso

**SIMMETRIA SFERICA**

la distribuzione di carica è distribuita con una simmetria sferica.

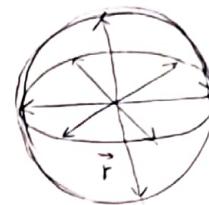
Il campo elettrico non è simmetrico sferico, ovvero può avere solo questa forma:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

direzione radiale

il suo modulo può

dipendere sia dalla distanza  
dall'origine



Scegliamo come superficie  $S$  una superficie sferica di raggio  $r$  centrata nell'origine

$$\text{allora } d\vec{s} = r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}$$

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E(r) r^2 \sin\theta d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta E(r) r^2 = \\ = \frac{4\pi r^2}{\text{superficie della sfera}} E(r)$$

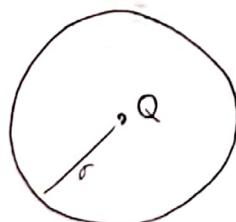
$$\text{Per la prima legge di Maxwell } \Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{da cui: } 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} *$$

può essere uscente/entrante  
al secondo del segno  
di  $Q_{\text{int}}(r)$

**1. CARICA PUNTIFORME**

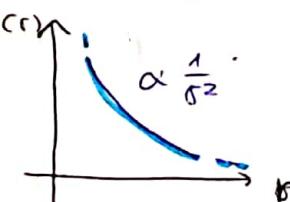
carica puntiforme  $Q$  posta nell'origine di un sistema di riferimento

Scegliamo come superficie gaussiana una sfera di raggio  $r$  centrata in origine

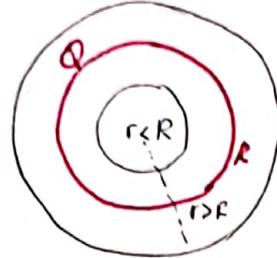
$$Q_{\text{int}}(r) = Q$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{sostituendo nella formula *}$$

$\Rightarrow$  ottengo la legge di Coulomb



## 2. GUSCIO SFERICO di Raggio $R$



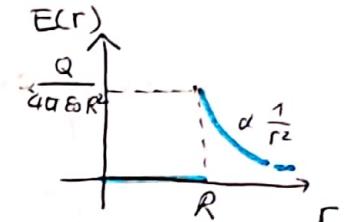
Supponiamo di avere una superficie sferica di raggio  $R$  su cui è distribuita una carica  $Q$  totale

Scegliamo come superficie gaussiana una sfera di raggio  $r$

caso  $r < R$   $Q_{\text{int}}(r) = 0$

caso  $r > R$   $Q_{\text{int}}(r) = Q$

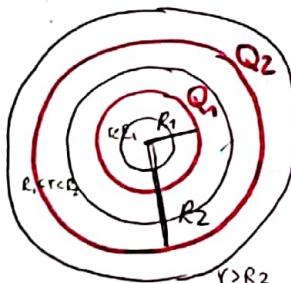
dunque  $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$



Questo è quello che succede con il campo gravitazionale

Oss.: Il campo elettrico non è continuo.

## 3. DUE GUSCI CONCENTRICI



Stessa situazione di prima ma con una carica  $Q_1$  sulla sfera di raggio  $R_1$  e una carica  $Q_2$  sulla sfera di raggio  $R_2$

Scegliamo come superficie gaussiana una sfera di raggio  $r$

caso  $r < R_1$   $Q_{\text{int}}(r) = 0$

caso  $R_1 < r < R_2$   $Q_{\text{int}}(r) = Q_1$

caso  $r > R_2$   $Q_{\text{int}}(r) = Q_1 + Q_2$

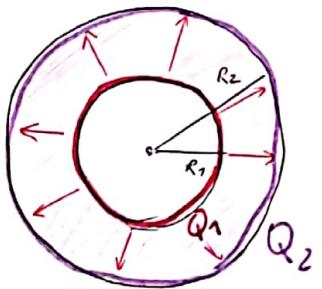
dunque  $\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{se } r > R_2 \end{cases}$

Oss.: Abbiamo postulato di distribuzione superficiale di carica

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2}$$

DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE

CASO PARTICOLARE: CONDENSATORE SFERICO



Abbiamo visto il condensatore piano che ha un campo elettrico tra i due piani  $\neq 0$  ma nullo all'esterno.  
Vogliamo avere lo stesso caso:

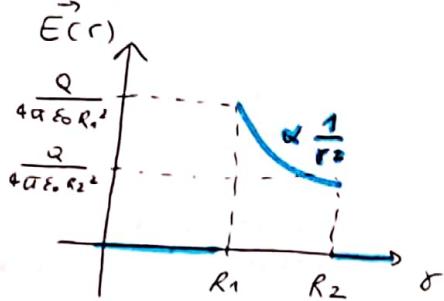
Abbiamo due sfere coniche  
Se  $r < R_1$  il campo elettrico è naturalmente nullo

Vogliamo che lo sia anche per  $r > R_2$

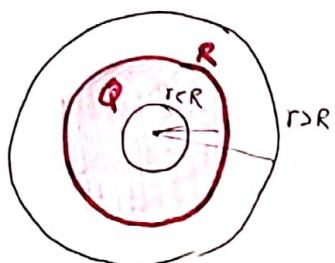
Questo accade se  $Q_1 = Q = -Q_2$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

$$\text{OSS: } |\sigma_1| = \left| \frac{Q}{4\pi R_1^2} \right| > |\sigma_2| = \left| \frac{Q}{4\pi R_2^2} \right|$$



#### 4. SFERA PIENA DI RAGGIO R (ISOLANTE)



Sfera isolante in cui viene distribuita una carica  $Q$  intutto il volume, non solo sulla superficie

$\rho = \rho(r)$  densità di carica volumica

$$Q_{\text{int}}(r) = \int_{S_r} \rho dV$$

$$\text{se } r < R \quad Q_{\text{int}}(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr' = \\ = 4\pi \int_0^r \rho(r') (r')^2 dr'$$

$$\text{se } r > R \quad Q_{\text{int}}(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r') (r')^2 dr' = Q$$

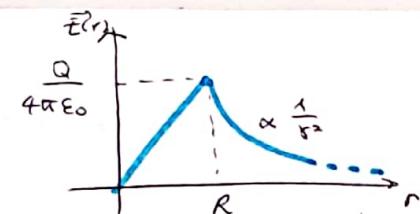
#### CASO PARTICOLARE: LA CARICA È DISTRIBUITA IN MODO UNIFORME

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$Q_{\text{int}}(r < R) = 4\pi \int_0^r \frac{3Q}{4\pi R^3} (r')^2 dr' = 4\pi \cdot \frac{3Q}{4\pi R^3} \int_0^r (r')^2 dr' = \\ = \frac{3Q}{4\pi R^3} \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{Qr^3}{R^3}$$

$$Q_{\text{int}}(r > R) = 4\pi \int_0^R \frac{3Q}{4\pi R^3} (r')^2 dr' = Q$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^3} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} & r > R \end{cases}$$



Dall'esterno è come se tutta la carica fosse concentrata nell'origine

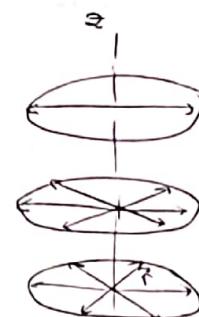
continuo ma non differenziabile

### SIMMETRIA CILINDRICA

c'è invarianza per la rotazione attorno ad un asse z (che sarebbe l'asse del cilindro)

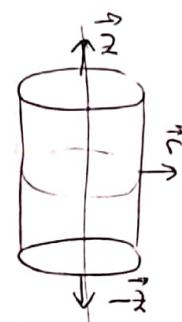
Indichiamo con  $\hat{r}$  la direzione del campo, cioè il versore che punta in tutte le possibili direzioni su un piano

Il campo è radiale nel piano, non dipende da  $\hat{z}$ , non dipende dall'angolo  $\Rightarrow$  può dipendere solo dalla distanza dall'asse



$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

Superficie gaussiana S: cilindro che abbia come asse l'asse z, raggio  $r$  e altezza  $L$  ( $S_{\text{sup laterale}} + 2S_{\text{basi}}$ )



$\hat{r}$  coincide con la normale alla sup. laterale del cilindro

mentre lungo le basi il vettore normale è diretto in direzione  $\hat{z}$

ELEMENTI DI SUPERFICIE:  $d\vec{s}_{\text{sup}} = r dr d\phi \hat{z} \perp \vec{E}$

$d\vec{s}_{\text{inf}} = -r dr d\phi \hat{z} \perp \vec{E}$

$d\vec{s}_{\text{lat}} = r d\phi dz \hat{r} / \vec{E}$

$$\begin{aligned} \Phi_s(\vec{E}) &= \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{s}_{\text{sup}} + \int_{S_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{s}_{\text{inf}} + \int_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{s}_{\text{lat}} = \\ &= \int_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{s}_{\text{lat}} = \int_0^{2\pi} r d\phi \int_0^L E(r) dz = E(r) \underbrace{2\pi r L}_{\text{superficie}} \end{aligned}$$

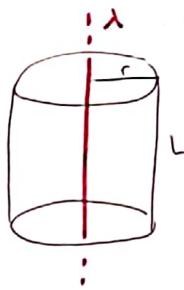
$$\text{Per Gaus: } \Phi_s(\vec{E}) = 2\pi r L E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Da cui } E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi r L \epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{2\pi r L \epsilon_0} \hat{r}$$

## APPLICAZIONI:

### 1. FILO RETTILINEO CON DENSITÀ LINEARE DI CARICA



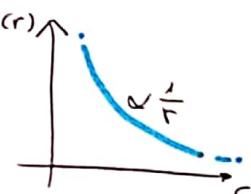
filo infinito rettilineo con carica  $\lambda$   
e densità lineare di carica  $\lambda$   
uniforme

Superficie gaussiana:  
cilindro di raggio  $r$  e altezza  $L$

$$Q_{int}(r) = \lambda L \quad (\text{non dipende da } r)$$

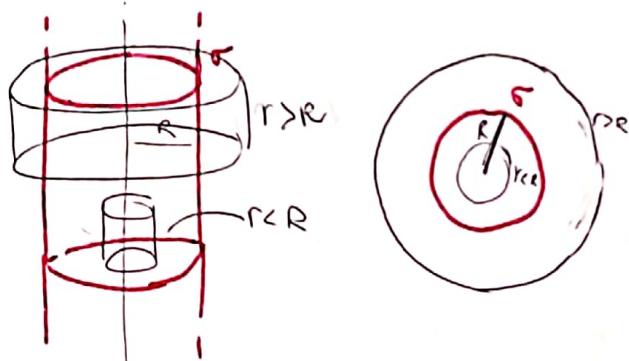
$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r}$$

non dipende  
da  $r$  ma solo  
dalla distanza dal filo stesso



ERCOLESSI 19/3/2020

### 2. GUSCIO CILINDRICO INFINTO DI RAGGIO $R$ condensato superficialmente di carica



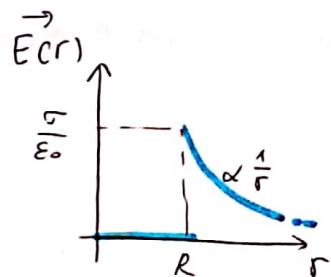
Superficie cilindrica  
infinita di raggio  $R$   
su cui è distribuita  
una carica con densità  
superficiale di carica  $\sigma$

Superficie gaussiana:  
cilindro di raggio  $r$   
e altezza  $l$

$$\text{Se } r < R \quad Q_{int}(r) = 0$$

$$\text{Se } r > R \quad Q_{int}(r) = 2\pi R L \sigma$$

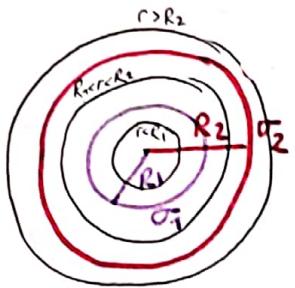
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$



(come se tutta la carica fosse  
concentrata su un filo infinito  
di densità  $\lambda = 2\pi R \sigma$ )

Anche in questo caso,  $\vec{E}(r)$  non è  
continuo

### 3. DUE GUSCI CILINDRICI COASSIALI



Superficie Gaussiana: cilindro di raggio  $r$  e altezza  $L$

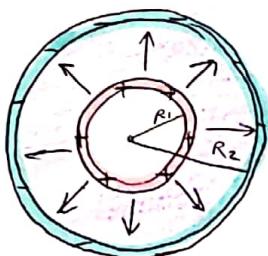
$$\text{se } r < R_1 \quad Q_{\text{int}}(r) = 0$$

$$\text{se } R_1 < r < R_2 \quad Q_{\text{int}}(r) = \sigma_1 2\pi R_1 L$$

$$\text{se } r > R_2 \quad Q_{\text{int}}(r) = \sigma_1 2\pi R_1 L + \sigma_2 2\pi R_2 L$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

#### CASO PARTICOLARE: CONDENSATORE CILINDRICO

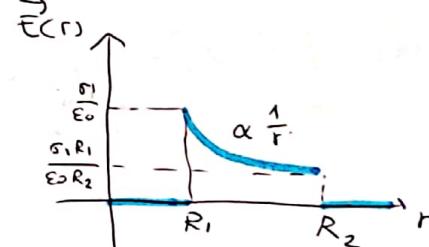


Due superfici cilindriche (raggi  $R_1$  e  $R_2$ ) statiche il campo elettrico è  $\neq 0$  solo nell'intercapedine

$$\vec{E}(r) = 0 \quad \text{se } r > R_2 \iff$$

$$\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2 = 0 \iff$$

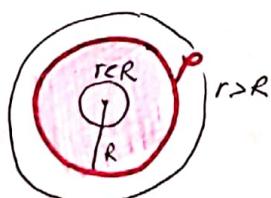
$$\sigma_1 R_1 = -\sigma_2 R_2$$



Se così è:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r} & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

### 4. CILINDRO PIENO CON CARICA DISTRIBUITA NEL VOLUME (isolante)



Cilindro pieno in cui la carica è distribuita nel volume:  $\rho = \rho(r)$

$$Q_{\text{int}}(r) = \int \rho dV$$

$$\text{se } r < R \quad Q_{\text{int}}(r) = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r r' dr' \rho(r') r'^2 dr' = 2\pi L \int_0^r r' dr' \rho(r')$$

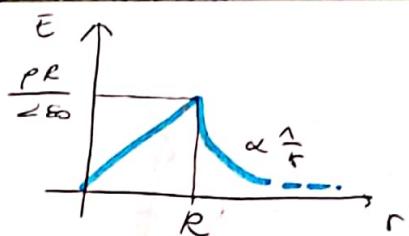
$$\text{se } r > R \quad Q_{\text{int}}(r) = 2\pi L \int_0^R r' dr' \rho(r')$$

CASO PARTICOLARE:  $\rho(r) = \rho$  densità uniforme

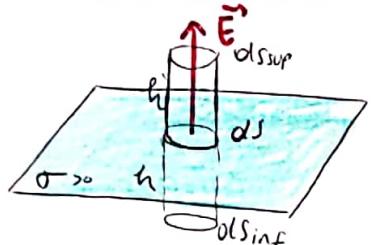
$$\text{se } r < R \quad Q_{\text{int}}(r) = \pi r^2 L \rho$$

$$\text{se } r > R \quad Q_{\text{int}}(r) = \pi R^2 L \rho$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} r \hat{r} & r < R \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \hat{r} & r > R \end{cases}$$



### PIANO INFINTO



Piano infinito conduttore con densità di carica  $\sigma$   
La simmetria e di invarianza per traslazione nel piano

→ il campo elettrico può essere solo normale alle superficie e costante alla stessa altezza  $h$

Superficie Gaussiana: cilindro (non importa la base), basta che il solido scelto abbia 2 basi uguali e superficie laterale ortogonale a  $E$ ) con altezza  $2h$  in modo che intersechi il piano "a metà"

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{\text{sup}} + \int_{S_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{\text{inf}} + \int_{S_{\text{lat}}} \vec{E} \cdot d\vec{l}_{\text{lat}} = 2E(h) dS$$

$\vec{E} \perp d\vec{l}_{\text{lat}}$

per il Teorema di Gauss:

$$\Phi(\vec{E}) = 2E(h) dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

$$2E(h) dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow |E| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{NON DIPENDE DA } h$$

se  $\sigma > 0$   
puntavano molto se siamo nel semipiano superiore  
verso le basi se siamo nel semipiano inferiore

Oss: Risultato che avevamo già visto (pg 22)

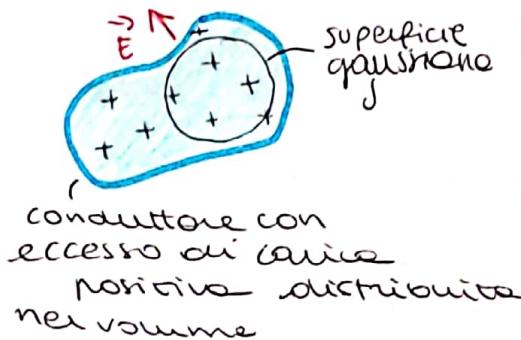
### CAMPO ELETTRICO IN UN CONDUTTORE CARICO

Ricordiamo che stiamo considerando situazioni di equilibrio → cariche ferme → su di esse non agisce alcuna forza

CONDUTTORI: Oggetti dove gli elettroni sono liberi di muoversi all'interno con una certa facilità

Supponiamo di caricare un conduttore con una quantità di carica positiva

Supponiamo (per assurdo) che questa carica si distribuisca su tutto il volume



Scegliendo una generica superficie gaussiana, questa sicuramente contiene cariche elettriche  $\Rightarrow$  all'esterno della superficie si crea un campo elettrico  $\vec{E}$ . Allora le cariche in eccesso sotto posta a sole campo si mettono in moto  $\Rightarrow$  contraddicendo l'equilibrio.

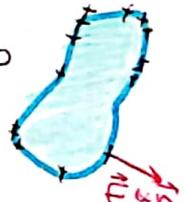
$\Rightarrow$  Quindi le cariche possono essere distribuite solo sul bordo del conduttore



Se scelgo ora la superficie gaussiana interna al conduttore questa non contiene cariche  $\Rightarrow \vec{E}_{in} = 0$

Il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo

Oss: (lo vedremo) le cariche si addensano maggiormente nelle punte

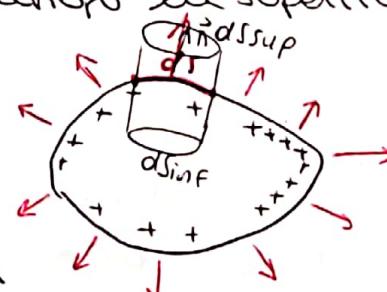


Oss: Il campo elettrico sulla superficie di un conduttore può essere solo  $\perp$  alla superficie. Se ci fosse una componente tangenziale, essa metterebbe in movimento le altre cariche

Dato un conduttore qualsiasi con eccesso di carica positiva distribuita lungo la superficie

Prendiamo un piccolo tratto di superficie d $s$

Scegliamo un cilindro che interseca la superficie con slp laterale + all'elem di superficie



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S^{inf}} \vec{E} \cdot d\vec{s}^{inf} + \int_{S^{sup}} \vec{E} \cdot d\vec{s}^{sup} + \int_{S^{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{s}^{lat} =$$

perché all'interno non c'è campo elettrico

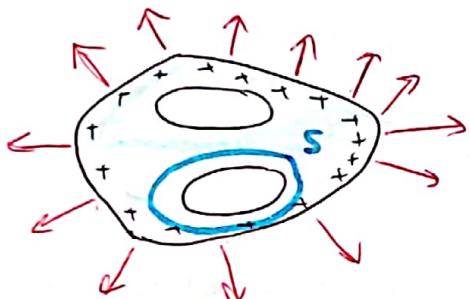
perché  $\vec{E} / d\vec{s}^{lat}$  33.5

$$\text{quindi } \Phi_S(\vec{E}) = \int_{S_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{s}_{\text{sup}} = E \cdot ds$$

per la legge di Gauss:  $E \cdot ds = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{ds \cdot \sigma}{\epsilon_0}$

quindi  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$      $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$     CAMPO ELETTRICO SULLA SUPERFICIE

CASO PARTICOLARE: CONDUTTORI CON CAVITÀ



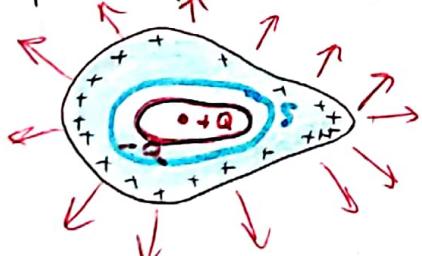
Domanda: puo' esserci carica sulle superfici della cavità?

No! la carica continua a distribuirsi solo sulla superficie esterna

All'interno del conduttore sappiamo che  $\vec{E}_{\text{int}} = 0$

se prendiamo una sup gaussiana come quella in figura abbiamo  $\Phi(\vec{E}) = 0$  ( $\vec{E}_{\text{int}} = 0$ ) per Gauss  $\Phi(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow$  nessuna carica si distribuisce su questa superficie

Se in una cavità metto una carica puntiforme?



all'interno del conduttore  $\vec{E}$  deve essere nullo  
se prendo la superficie S  $Q_{\text{int}} = 0$  deve essere 0  
e questo succede solo se

c'e' una carica -Q che bilanci la carica +Q  
 $\Rightarrow$  puo' trovarsi solo sulla superficie della cavita'

oss: abbiamo visto che  $\vec{E}$  sulla sup è 0 alla superficie  
 $\Rightarrow$  gli elettroni saranno sottoposti a una forza che tende ad farli uscire. Perche non escono?  
Perche comunque questa forza non vince le forze di attrazione tra gli atomi e i nuclei

## POTENZIALE ELETTRICO

Abbiamo visto che  $\vec{F}$  è una forza conservativa  $\Leftrightarrow$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} \text{ dipende solo da A e da B}$$

$$(\text{punto iniziale e punto finale}) \Leftrightarrow \exists U: \vec{F} = -\nabla U$$

(ENERGIA  
POTENZIALE  
 $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ )

Questo implica la conservazione dell'energia totale:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + U = \frac{1}{2} m v^2 + U(x_1, y_1, z) = \text{cost}$$

Vedremo che la forza elettrica è una forza conservativa e quindi anche il campo elettrico lo è

$$\text{Quindi } \exists V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ detto POTENZIALE ELETTRICO}$$

$$\text{t.c. } \vec{E} = -\nabla V \quad (\text{o.s.: } U(x_1, y_1, z) = qV(x_1, y_1, z))$$

$$\text{da cui } V(x_1, y_1, z) = \int_{P(x_1, y_1, z)}^{P_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} + c$$

$$\text{Unità di misura: Volt (V)} \quad 1 \text{ V} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}}$$

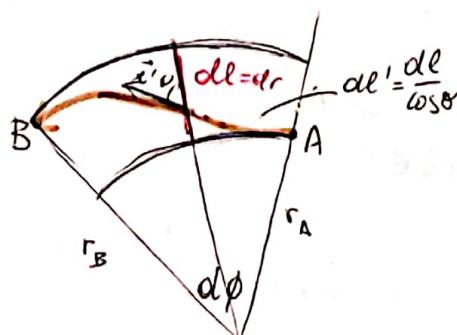
TEOREMA: Nel caso statico, il campo elettrico è conservativo.

Dim: Per il principio di sovrapposizione e l'additività dell'integrale è sufficiente dimostrare le tecniche nel caso di una carica puntiforme

$$\text{e } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Dimostriamo che l'integrale lungo una qualsiasi curva dipende solo dai punti iniziali e finale A e B

Una qualunque curva nello spazio può essere approssimata dalla somma di tratti infinitesimi di curva che insieme al punto dove si trova la carica (l'origine) incidevano un piano



$$\begin{aligned} d\vec{l} &= d\vec{r} \cdot \hat{r} = dr \hat{r} \\ d\vec{l}' &= d\theta \hat{\theta} \sin \phi \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{l}' &= |\vec{E}| \cdot d\vec{l}' \cos \theta = \\ &= |\vec{E}| \frac{dr}{\cos \theta} \cos \theta = |\vec{E}| dr = \\ &= \vec{E} \cdot d\vec{l} = |\vec{E}| dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \end{aligned}$$

$$\text{quindi } \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$\Rightarrow$  dipende solo da  $A$  e  $B$

SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL (CASO STANCO):

$$C_F(\vec{E}) = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{e} = 0,$$

per ogni curva chiusa  $F$

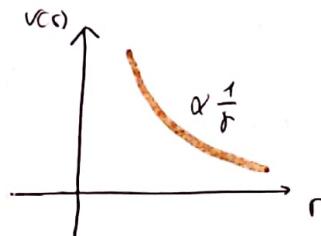
1 Questo dimostra anche che per una conica puntiforme il potenziale è

$$V_{CM} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C$$

soltanamente  $C$  viene fissato in modo che nel

$$V(r \rightarrow +\infty) = 0 \Leftrightarrow C = 0$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$



vengono anche definite le SUPERFICI EQUIPOTENZIALI:

$$V(x, y, z) = \text{cost}$$

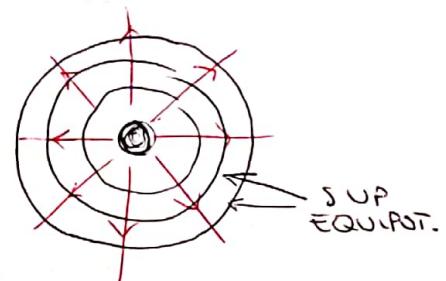
Poiché il campo elettrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$\Rightarrow$  le sup. equipotenziali sono

le superficie su cui il campo elettrico è tangente alle linee di campo

Nel caso di una conica uniforme sono superficie sferiche concentriche sulla conica

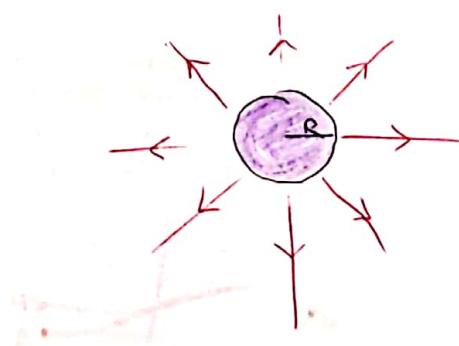


## 2. GUSCIO SFERICO DI RAGGIO $R$

Abbiamo visto che

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

$$\vec{V}(r) = \begin{cases} C_1 & \text{se } r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C_2 & \text{se } r > R \end{cases}$$

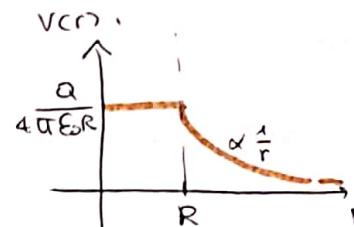


richiedendo  $V(r \rightarrow +\infty) = 0 \Leftrightarrow C_2 = 0$

mentre  $V(r \rightarrow R^-) = V(r \rightarrow R^+) \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$

dunque :

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \end{cases}$$

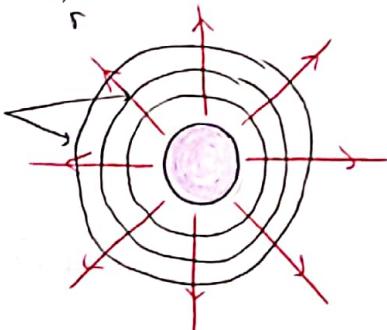


e le superfici equipotenziali saranno:

Oss:



$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$V(A) - V(B^-) + V(B^+) - V(C) = V(A) - V(C)$$

$$\Leftrightarrow V(B^+) = V(B^-)$$

### 3. CONDENSATORE SFERICO

Abbiamo visto che

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} c_1 & \text{se } r < R_1 \\ \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} + c_2 & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ c_3 & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

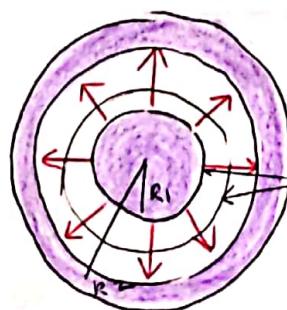
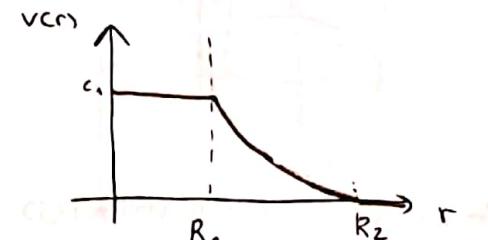
da cui possiamo ricavare  $c_1, c_2, c_3$  imponendo

$$V(r \rightarrow +\infty) = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0$$

$$V(r \rightarrow R_2^-) = V(r \rightarrow R_2^+) \Leftrightarrow \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2} + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$V(r \rightarrow R_1^-) = V(r \rightarrow R_1^+)$$

$$\Leftrightarrow c_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$



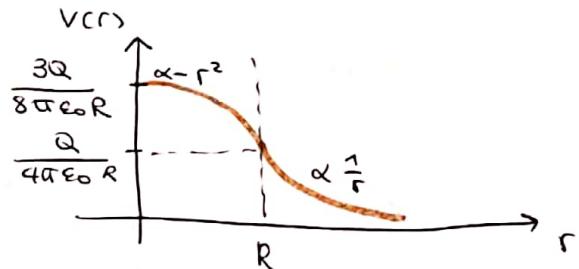
Superficie equipotenziale

#### 4. SFERA PIENA

abbiamo visto che  $\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \hat{r} & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} & r > R \end{cases}$

dunque

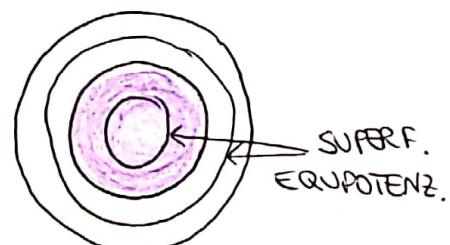
$$V(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + c_1 & \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + c_2 & \end{cases}$$



dove richiediamo  $V(r \rightarrow +\infty) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

$$V(r \rightarrow R^-) = V(r \rightarrow R^+) \Leftrightarrow -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + c_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \Leftrightarrow$$

$$c_1 = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$



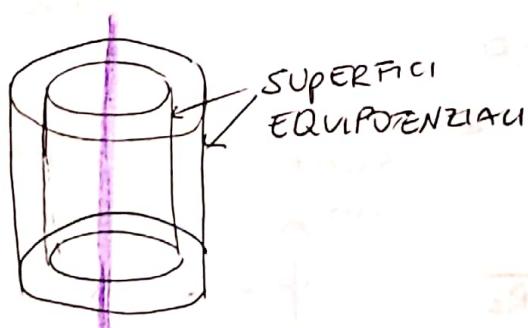
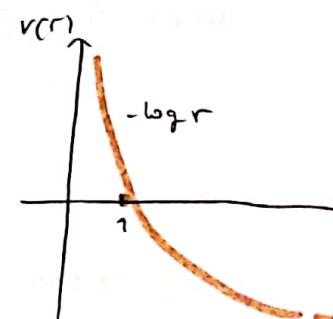
#### 5. FILO RETTILINEO INFINITO

abbiamo visto che  $\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \hat{r}$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log r + C$$

oss.: In questo caso  $V(r \rightarrow +\infty) \neq 0$

$$V(r \rightarrow \infty) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$



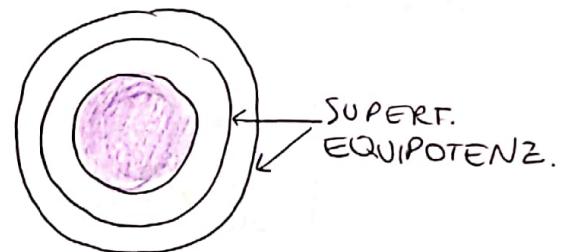
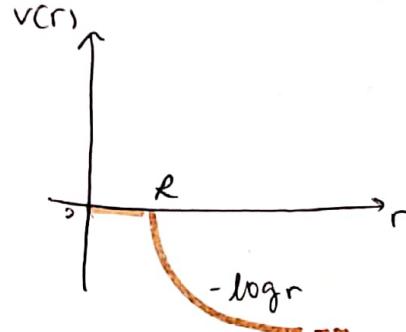
#### 6. GUSCIO CILINDRICO

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r} \hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$\vec{V}(r) = \begin{cases} c_1 \text{ se } r < R \\ -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \log r + c_2 \text{ se } r > R \end{cases}$$

done  $V(r \rightarrow R^+) = V(r \rightarrow R^-) \Rightarrow c_1 = 0$

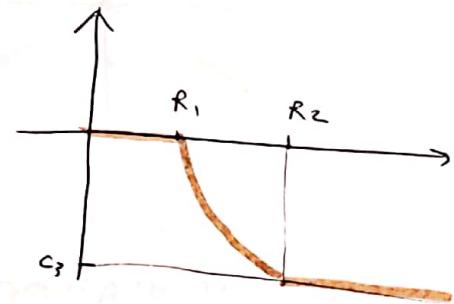
$$V(r=R) = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \log R$$



### 7. CONDENSATORI CILINDRICI

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ +\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} c_1 & r < R_1 \\ -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \log r + c_2 & R_1 < r < R_2 \\ c_3 & r > R_2 \end{cases}$$



$$V(r=R_1^-) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$V(r \rightarrow R_1^+) = V(r \rightarrow R_2^-) \Leftrightarrow c_2 = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \log R_1$$

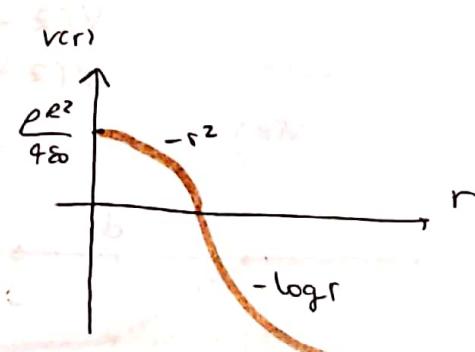
$$V(r \rightarrow R_2^+) = V(r \rightarrow R_2^+) \Leftrightarrow c_3 = -\frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0} \log \frac{R_2}{R_1}$$



### 8. CILINDRO PIENO

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{\epsilon_0} \hat{r} & r < R \\ \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r} \hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + c_1 & r < R \\ -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \log r + c_2 & r > R \end{cases}$$



$$V(r=R^-) = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\rho R^2}{4\epsilon_0}$$

$$V(r \rightarrow R^+) = V(r \rightarrow R^+) \Rightarrow c_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \log R$$



## 9. PIANO INFINITO

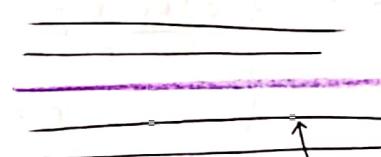
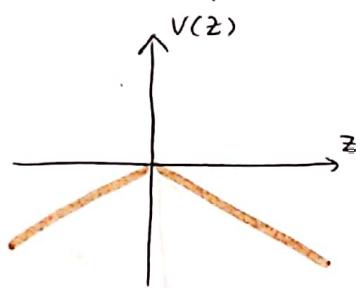
Abbiamo visto che  $\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & z < 0 \end{cases}$

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + C_1 & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + C_2 & z < 0 \end{cases}$$

Anche in questo caso non possiamo ridurlo a

$$V(z \rightarrow +\infty) = 0$$

per cui imponiamo  $V(z \rightarrow 0^-) = V(z \rightarrow 0^+) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$

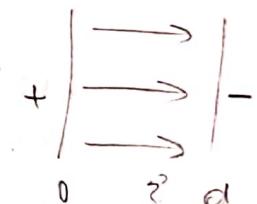


Sup. equipot.  
sono muti  
paralleli

## 10 CONDENSATORE PIANO

Abbiamo visto che  $\vec{E}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} & 0 < z < d \\ 0 & z > d \end{cases}$

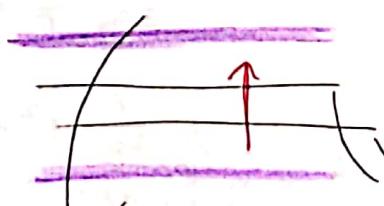
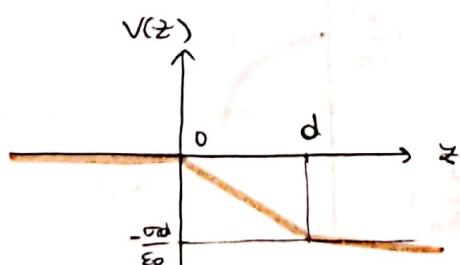
$$V(z) = \begin{cases} C_1 & z < 0 \\ -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z + C_2 & 0 < z < d \\ C_3 & z > d \end{cases}$$



Imponiamo  $V(z \rightarrow 0^-) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$V(z \rightarrow 0^+) = V(z \rightarrow d^-) \Rightarrow C_2 = 0$$

$$V(z \rightarrow d^-) = V(z \rightarrow d^+) \Rightarrow C_3 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$



volumi  
equipotenz.

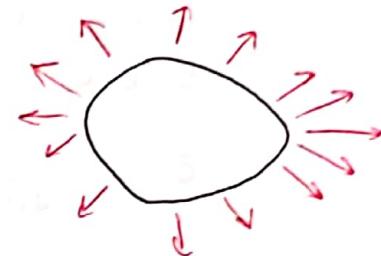
piani  
equipot.

## POTENZIALE ELETTRICO DI UN CONDUTTORE CARICO

Dato un conduttore in una condizione di equilibrio  
Abbiamo visto che il campo elettrico all'interno  
del conduttore è identicamente nullo e la  
carica in eccesso si distribuisce sulla superficie

$$\vec{E} = 0 \Leftrightarrow V = \text{costante } (V_0)$$

$\Rightarrow$  tutto il volume del conduttore  
è allo stesso potenziale



Generalizzazione:

Dato un condensatore, le due armature sono  
conduttori quindi

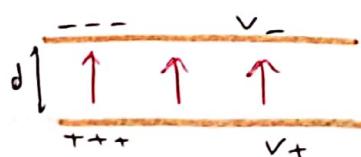
tutta l'armatura positiva sarà a un potenziale  $V_+$   
e tutta l'armatura negativa sarà a un potenziale  $V_-$

$$V_+ > V_- \Rightarrow \text{possiamo definire se}$$

### DIFERENZA DI POTENZIALE (DDP)

$$\Delta V = V_+ - V_- = V$$

'potenziale  
di un condensatore'  
con obietto di linguaggio



$$V = V_+ - V_- = + \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

## ENERGIA POTENZIALE

Abbiamo visto che  $\vec{F}$  è una forza conservativa,  
 $\exists$  U energia potenziale t.c.  $\vec{F} = -\nabla U$

Quando tutte le forze in gioco sono  
conservative allora

$$E_{tot} = E_{kin} + U = \text{costante}$$

$$\text{poiché } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\nabla V \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U = -\nabla V q$$

$U(x,y,z) = V(x,y,z)q$   
en. potenziale  
della carica q  
all'interno del campo  
elettrico è

$$\text{quindi } E_{tot} = \frac{1}{2} m v^2 + U(x,y,z) = \frac{1}{2} m v^2 + q V(x,y,z) = \text{cost.}$$

ESEMPIO: Sia il campo elettrico generato da un nucleo d'oro (78 protoni) fermo. Un elettrone si trova a distanza  $r_0$  dal nucleo con quale velocità  $v_f$  l'elettrone deve essere spinto in direzione radiale per raggiungere l'infinito? ( $v_f$  = velocità di fuga)

Campo elettrico generato da una carica  $Q=78e$  genera un potenziale  $V(r) = \frac{78e}{4\pi\epsilon_0 r}$

$$\text{E } U = -\frac{78e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad \text{energia potenziale dell'elettrone}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + U = \text{cost}$$

$$\frac{1}{2}mv_{iniz}^2 + U_{iniz} = \frac{1}{2}mv_{fin}^2 + U_{fin}$$

$$\text{dove } r_{fin} \rightarrow +\infty \Rightarrow V(r_{fin} \rightarrow +\infty) = 0$$

$$\text{e } U_{fin} = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{78e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = 0 \quad v_f = \sqrt{\frac{39e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 m}}$$

ESEMPIO: Sia il campo elettrico generato da un filo rettilineo con densità lineare di carica uniforme  $\lambda$  e una carica positiva  $q$  a una certa distanza  $r_0$  inizialmente ferme con quale velocità  $v_f$  la carica raggiunge la distanza  $2r_0$ ?

$$V(r) = -\frac{\lambda \log r}{2\pi\epsilon_0}$$

$$E_{in} = \frac{mv_{iniz}^2}{2} - \frac{\lambda q \log r_0}{2\pi\epsilon_0} = -\frac{\lambda q \log r_0}{2\pi\epsilon_0} \quad \text{perché } U_{iniz} = 0$$

Oss: il filo genera un campo elettrico che tenderà a spingere la partecipe lontano  $\Rightarrow$  la sua velocità aumenta

$$E_{fin} = \frac{mv_{fin}^2}{2} - \frac{\lambda q \log(2r_0)}{2\pi\epsilon_0} = \frac{mv_{fin}^2}{2} - \frac{\lambda q \log 2}{2\pi\epsilon_0} - \frac{\lambda q \log r_0}{2\pi\epsilon_0}$$

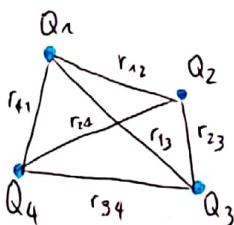
$$E_{in} = E_{fin} \Rightarrow \frac{mv_{iniz}^2}{2} = \frac{\lambda q \log 2}{2\pi\epsilon_0}$$

$$v_{iniz} = \sqrt{\frac{\lambda q \log 2}{2\pi\epsilon_0 m}}$$

Vediamo ora cosa succede quando applichiamo più cariche puntiformi:

Siano  $N$  cariche puntiformi  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  e sia  $r_{ij}$  la distanza tra  $Q_i$  e  $Q_j$

ES:



Quale è l'energia potenziale totale del sistema?

Idea: posiziona la prima carica  $Q_1$  in un punto qualsiasi. Poi posiziona  $Q_2 \rightarrow$  poiché da qui le altre ci sono una forza generata da  $Q_1$  e questo mi costa energia. Immaginiamo di mettere  $Q_2$  all'infinito e di portare poi alla posizione scelta.

$$U_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

energia potenziale servita per creare questa configurazione

Stesso ragionamento con  $Q_3$

$$U_{13} + U_{23} = \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

In totale l'energia potenziale delle tre cariche

$$\therefore U_{13} + U_{12} + U_{23} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

In generale

$$U_{\text{tot}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N U_{ij} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \frac{Q_i Q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

(per non contare 2 volte)

"energia che c'è servita per costruire questo配置azione di cariche"

= energia immagazzinata dal sistema

sommatoria con  $\frac{n(n-1)}{2}$  termini

Se invece la distribuzione di carica è continua:

consideriamo un conduttore su cui è posta una carica  $Q$  (sia sulla superficie)

Quanta energia serve per mettere questa carica sul conduttore?

Stesso ragionamento di prima:

pensiamo di portare una carica infinitesima  $dQ$  dall'infinito alla sua posizione

Se al momento sul conduttore c'è una carica  $Q'$  ( $0 \leq Q' \leq Q$ , carica finale da voler avere) questa operazione costa un'energia:

$$dE = V(Q') dQ'$$

L'el conduttore è equipotenz.

Quindi se processo di carica costa un'energia

$$E = \int_0^Q dE = \int_0^Q V(Q') dQ'$$

energia immagazzinato dal conduttore

### ESEMPIO: CONDUTTORE SFERICO

OSS: Non cambia se metto un qualsiasi sferico o una pollo-piene conduttrice, perché la carica si distribuisce comunque sulla superficie.

Dato  $R$  il raggio del conduttore,  $Q'$  la carica sulla sua superficie, il potenziale a cui il conduttore si trova è:

$$V(Q') = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R}$$

L'energia del conduttore è allora

$$E = \int_0^Q V(Q') dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 R} dQ' = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

è inversamente proporzionale al raggio e dipende dalla carica

### ESEMPIO: CONDENSATORE PIANO (IN REALTÀ NON è rilevante la forma)

Sia  $d$  la distanza tra i due piani,

$\sigma'$  la densità di carica ( $0 < \sigma' < \sigma$ ) ,  $A$  l'area <sup>di un pezzo</sup> dei piani, per cui  $Q' = \sigma' A$

abbiamo visto che  $\Delta V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$  DDP che deve superare se voglio spostare elettroni da lato (inizialmente scarsi) → si crea un eccesso di carica positiva in una lato, negativa nell'altro

per cui  $V(Q') = \frac{Q' d}{A \epsilon_0}$  da cui

$$E = \int_0^Q V(Q') dQ' = \int_0^Q \frac{Q' d}{A \epsilon_0} dQ' = \frac{Q^2 d}{2 A \epsilon_0}$$

Questa è una buona approssimazione per un condensatore dove  $a$  è molto piccola rispetto alle dimensioni dei piani (e posso trascurare gli effetti del bordo)

E' l'energia immagazzinata dal condensatore

### CAPACITÀ

Oss: Possiamo notare che il potenziale è sempre proporzionale alla carica

Per cui possiamo definire la

CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE/CONDUTTORE:  $C = \frac{Q}{V}$  d.d.p  
che è costante

Unità di misura: Farad:  $1 F = \frac{1 C}{1 V}$

La capacità rappresenta quanta carica un conduttore può ospitare a unità di potenziale  $V$

$C$  dipende solo dalle caratteristiche geometriche del conduttore/condensatore

ESEMPI: CONDUTTORE SFERICO

$$V(Q) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Dipende solo dal raggio della sfera e maggiore è il raggio, maggiore è la quantità di carica che il condensatore può ospitare

Oss:  $\sigma = \frac{Q}{A}$  → varia come  $R$  (perché  $Q$  prop a  $C$ )  
a unità di potenz.  
Asfere → varia come  $R^2$

quindi a potenziale costante  $\sigma \propto \frac{1}{R}$

$\sigma$  invers. proporzionale al raggio ⇒ più la sfera è piccola, più è densa

Questa osservazione si può applicare a un conduttore qualsiasi, guardando localmente la curvatura di un pezzo di superficie

⇒ sulle punte il raggio di curvatura è molto piccolo ⇒  $\sigma$  è più grande  
questo è il motivo per cui le cariche si aderiscono sulle punte e il campo elettrico è più intenso

## CONDENSATORE PIANO

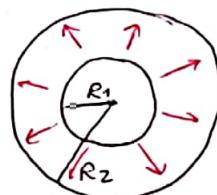
$$\text{abbiamo visto che } V(Q) = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{A\epsilon_0}{d}$$

dipende dall'area delle armature e dalla loro distanza

## CONDENSATORE SPHERICO

la carica suue due sfere è la stessa, ma, poiché  $R_2 > R_1$  si ha che

$$|\sigma_1| = \left| \frac{Q}{4\pi R_1^2} \right| > \left| \frac{Q}{4\pi R_2^2} \right| = |\sigma_2|$$



$$\text{per cui } Q = |\sigma_1| 4\pi R_1^2 = |\sigma_2| 4\pi R_2^2$$

$$V(Q) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

$V_+ - V_-$

## CONDENSATORE CILINDRICO

$$V(Q) = \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 L} \log R_2 - \frac{\sigma_1 R_1}{\epsilon_0 L} \log R_1 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \log \frac{R_2}{R_1}$$

$V_+ - V_-$

$$\text{dove abbiamo sfruttato re fatto che } Q = \sigma_1 R_1 L \quad \text{al di fuori del cilindro}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 R_1 = \frac{Q}{2\pi L}$$

$$\text{Da cui } C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\log(\frac{R_2}{R_1})}$$

Oss: I condensatori (o detti anche capacitors) sono componenti fondamentali per la realizzazione di circuiti elettrici elementari, in quanto hanno la caratteristica di immagazzinare energia.

Permettono di creare un campo elettrico concentrato nell'intercapedine, e nullo all'esterno.

Ogni superficie del condensatore è equipotenziale  $\Rightarrow$  possiamo definire la ddp

La capacità ci dice quante cariche possiamo immagazzinare nel condensatore

## CORRENTE ELETTRICA

Fino ora abbiamo supposto che le cariche fossero ferme ora assumiamo che le cariche siano libere di muoversi all'interno del mezzo stesso

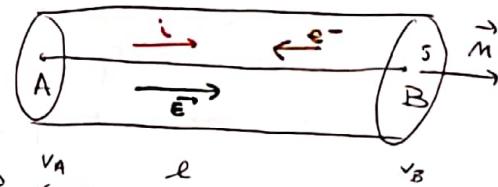
Questo movimento di carica è quello che chiamiamo corrente elettrica

Consideriamo di avere un conduttore filiforme con lunghezza  $l \gg$  sezione  $s$

ai capi di questo conduttore esiste una ddp

$$V = V_A - V_B > 0 \quad (\text{se } V_A > V_B)$$

Se c'è ddp  $\Rightarrow$  c'è campo elettrico  $E$  che sarà diretto dal punto a potenz. maggiore al punto a potenz. minore ( $A \rightarrow B$ ) che agisce con una forza elettrica sulle cariche all'interno del conduttore e farà muovere gli elettroni liberi verso sinistra perché  $F = q \cdot E$  e  $q$  elettrone < 0



La corrente elettrica è definita (per motivi storici) come il movimento della carica positiva che si muoverebbe da sinistra a destra  
 $\rightarrow$  contraria al moto effettivo degli elettroni

L'intensità della corrente è definita come la quantità di carica per unità di tempo che attraversa la sezione  $s$  del conduttore

$$i = \frac{dq}{dt}$$

nella direzione e verso del campo elettrico che coincide con il versore normale alla sezione  $s$

Unità di misura: Ampere:  $1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}}$

**PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA:** la carica non si crea e non si distrugge

- Questo implica che l'intensità della corrente è indipendente dalla sezione che sto considerando

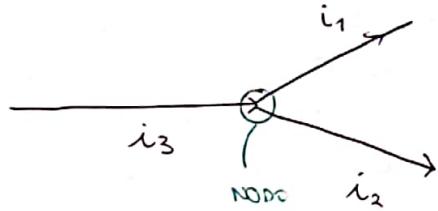
$$\underline{\underline{O_{s_1}}} \quad \underline{\underline{O_{s_2}}} \\ i_1 = i_2$$

carica che attraversa  $s_1$   
 $=$  carica che attraversa  $s_2$   
 per cui

- in un nodo, la somma algebrica delle correnti è zero

nodo = quando più fili si connettono in uno stesso punto

es:



la carica che "entra" nel nodo deve essere uguale a quella che "esce"  
In questo caso  
 $i_3 = i_1 + i_2$

prendiamo per convenzione il segno positivo per le correnti entranti, quello negativo per quelle uscenti  
per cui  $-i_1 - i_2 + i_3 = 0$

## RESISTENZA ELETTRICA

Abbiamo detto che all'interno del conduttore c'è un campo elettrico che esercita una forza elettrica sugli elettroni liberi di muoversi.

La carica risente sempre di questa forza  $\Rightarrow$  mi aspetto che il suo moto sia accelerato.

In realtà questo non avviene perché gli elettroni nella loro moto vanno a sbattere contro le molecole/atomi del solido perdendo energia.

Perciò è come se ci fosse una sorta di attrito dovuto agli ioni presenti  $\Rightarrow$  il moto non è accelerato ma costante, con una velocità costante = alla detta velocità di deriva.

Esiste una proporzionalità tra la doppia  $V$  ai capi e la corrente che lo attraversa in molti conduttori, detti CONDUTTORI OHMICI

$$\text{LEGGI DI OHM} \quad V = R i$$

dove  $R = \frac{V}{i}$  è la RESISTENZA ELETTRICA del conduttore (misura quanto gli elettroni sono rallentati nel conduttore)

e dipende da:

- materiale  $\rightarrow$  dipende dagli elettroni liberi dei cristalli
- geometria del conduttore
- temperatura (temperature più alte fanno vibrare gli ioni del reticolato più velocemente, perciò è più facile che incontrino altri elettroni)

48 unità di misura di  $R$ : Ohm  $\Omega$ :  $1 \Omega = \frac{1V}{1A}$

abbiamo visto che dato una ddp  $V$  e una carica  $q$ , nel loro prodotto  $Vdq = 0$  cioè se 'salvo' di energie potenziale dovuto alla presenza del campo elettrico

Se passa da un punto a potenziale maggiore a uno di potenziale minore  $\rightarrow$  la carica  $q$  perde energia potenziale:

$$\Delta U = Vdq = V \cdot i dt$$

Definiamo **Potenza**  $W$ , l'energia perso per unità di tempo

$$W = \frac{dU}{dt} = V \cdot i$$

$$\text{si misura in } \frac{J}{s} = \text{Watt W} \quad (R_i)i = R_i^2$$

$$\text{se il conduttore è omico: } W = V \cdot \frac{V}{R} = \frac{V^2}{R}$$

Oss. L'energia dissipata dipende in maniera quadratica dal potenziale ed dalla corrente elettrica e proporzionale alla resistenza

Oss. L'energia dissipata si manifesta come calore emesso dal conduttore  $\rightarrow$  le filo si scalda

In alcuni materiali (con  $R$  grande) viene dissipata molta energia  $\Rightarrow$  al punto da emettere radiazione visibile  $\rightarrow$  Principio delle lampadine e incandescenze

### CIRCUITO

Insieme di componenti elettriche connesse tra di loro in un percorso chiuso nel quale la corrente elettrica può fluire con continuità

vediamo le componenti:

#### 1. FILI DI CONNESSIONE

Sono conduttori con una sezione molto piccola rispetto alla lunghezza, lungo i quali può scorrere una corrente elettrica senza alcuna resistenza (o con resistenza trascurabile)

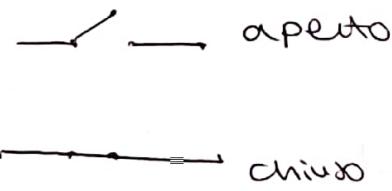
Naturalmente c'è perdaggio di corrente solo se agli estremi c'è una ddp:



$$\text{Se } V_A > V_B$$

$$\text{Se } V_B > V_A$$

La corrente può essere interrotta  
dalla presenza di un interruttore,  
che è un pezzo di filo mobile,  
che può essere aperto → non c'è  
passaggio di corrente e anello  
→ c'è passaggio di corrente

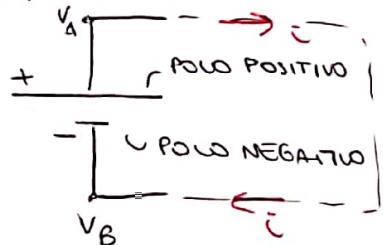


Graficamente, rappresentiamo i due segmenti,  
ma in realtà non conta la forma del filo

## 2. BATTERIA / PILA / GENERATORE

Oggetto con un polo positivo e uno negativo che  
crea tra i suoi capi una ddp e la trasmette  
al resto del circuito

Graficamente:



cioè  $V_A > V_B$

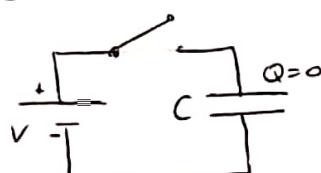
Questa ddp genera  
corrente che fluisce  
verso il secondo dei poli

la prima e più famosa pila è la pila di volvo  
che si basa sulle celle galvaniche, cioè sfruttando  
processi elettrochimici che avvengono all'interno  
della pila per produrre la ddp ai  
capì

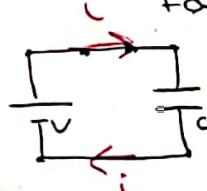
## 3. CONDENSATORE

Dispositivo che ci consente di creare un campo  
elettrico al suo interno

Esempio più semplice di circuito con  
condensatore:



chiudo  
interrut.



Fase di carica

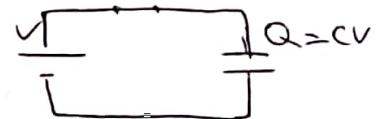
(durante questo  
fase aumenta  
si capì del  
condensatore  
(vedremo  
meglio poi))

tempo  $t=0$   
circuiti aperto ⇒  
non c'è passaggio  
di corrente

c'è passaggio  
di corrente  
all'interno del  
condensatore non  
percorre corrente,  
ma si accumula eccesso di carica  
positiva su un'armatura del condensatore  
e negativa sull'altra

$$Q = C \cdot V$$

Dopo un certo tempo la carica accumulata sul condensatore è tale per cui genera una ddp esattamente uguale a quella della pila. Non c'è più ddp  $\Rightarrow$  non c'è più passaggio di corrente. Equilibrio.



OSS: Man mano che il condensatore si carica e aumenta la ddp ai capi delle armature del condensatore aumenta l'energia immagazzinata nel condensatore:

$$E = \int_0^Q V(Q') dQ' = \int_0^Q \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$

Che è l'energia uscita per caricare il condensatore, persa dalla pila.

Noi studieremo circuiti in condizioni di equilibrio, cioè con i condensatori caricati.

Esempi:

- condensatori in SERIE

allegando l'armatura di uno con quella dell'altro; (uno dopo l'altro)

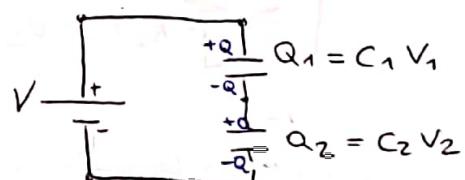
Osserviamo che  $V = V_1 + V_2$  e che

$Q_1 = Q_2 = Q$  perché la carica che si sposta da un condensatore all'altro non può dissiparsi

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\text{con } C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Osserviamo che è equivalente al seguente circuito con un solo condensatore con capacità  $C_{eq}$

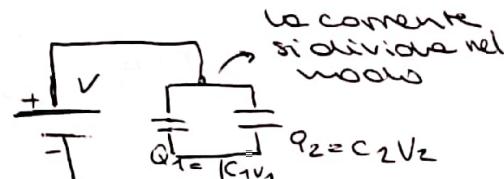
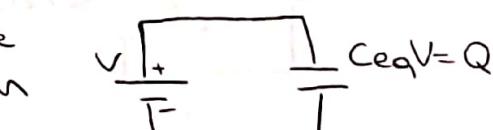


- condensatori in PARALELO uno di fianco all'altro

Osserviamo che

$V = V_1 = V_2 \rightarrow$  in un conduttore il potenziale è costante

$$Q_1 + Q_2 = Q$$



$$\text{dove: } Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 = (C_1 + C_2) V = C_{eq} V$$

$$\text{con } C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$\frac{V}{\square} \quad \frac{1}{\square} \quad C_{eq} V = Q$$

CIRCUITO CON UN SOLO  
CONDENSATORE EQUIVALENTE  $\rightarrow$

#### 4. RESISTENZA

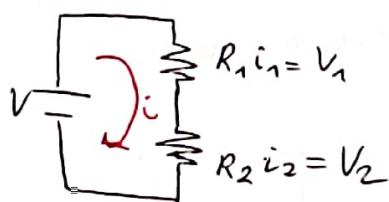
conduttore di tipo ohmico con una resistenza non  
trascurabile. Permette il passaggio di corrente se collegato a una



poiché il conduttore è ohmico

$$i = \frac{V}{R}$$

##### - RESISTENZE IN SERIE



vediamo che

$$V = V_1 + V_2$$

$i_1 = i_2 = i$  per il principio di conservazione delle correnti

$$V = V_1 + V_2 = R_1 i_1 + R_2 i_2 = (R_1 + R_2) i := R_{eq} i$$

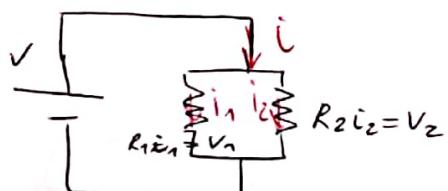
$$\text{con } R_{eq} = R_1 + R_2$$



CIRCUITO EQUIVALENTE

CON UNA SOLO RESISTENZA  $\rightarrow$

##### - RESISTENZE IN PARALELLO



vediamo che

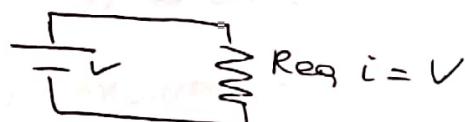
$$V = V_1 = V_2$$

$i = i_1 + i_2$  (legge del nodo)

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R_{eq}}$$

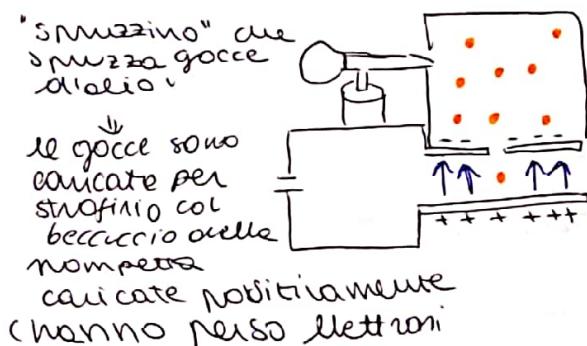
$$\text{con } R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

CIRCUITO EQUIVALENTE  
CON UNA SOLO  
RESISTENZA



## ESPERIMENTO DI MILLIKAN

Prima misura della carica elementare e mostrando che è quantizzata



possano, poiché ogni volta sei all'interno di un condensatore e facciamo parallele collegate a una batteria in modo che le ddp sia regolabili (e quindi del campo elettrico) l'intensità

Idee: sulla goccia agiscono forza gravitazionale e forza elettrica:



Oss: le goccioline sono tutte diverse tra loro.

Bisogna trovare un modo per calcolare la massa di ogni goccia

1. determinare la massa della goccia, quindi, determinare il raggio (la densità è nota  $m = \rho V = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ )

Facciamo in modo di avere potenziale nullo (quindi non c'è campo elettrico)

$\rightarrow$  c'è una forza d'attrito che contrasta la forza di gravità e la goccia scende con velocità costante  $v$  (misurabile sperimentalmente) e non con moto accelerato

Quindi  $F_{\text{gravità}} = F_{\text{attrito}}$

$$F_g = m \cdot g = \frac{4\pi r^3}{3} \rho g$$

$$F_r = 6\eta \rho v r$$

$\Rightarrow$  ragionando così ricavare il raggio della sferetta

2. A questo punto possiamo aumentare il potenziale  $V (+)$

la goccia si muove tutto rimarrà in sospensione

A questo punto  $F_r = 0$  perché  $v = 0$  e dovrà essere  $F_g = F_e$

$$F_g = m \cdot g = \frac{4\pi r^3}{3} \rho g \quad \text{noto!}$$

$$F_e = q \cdot E = q \frac{V}{d}$$

per cui possiamo ricavare  $q$



dai cui si ricava che tutte le misurazioni di q su queste goccioline risultano essere multipli di una stessa quantità elementare

$$q_m = 1,5924 \times 10^{-19} C$$

(valore vero carica elettrone:  $q_e = -1,6022 \cdot 10^{-19} C$ )

### SISTEMA INTERNAZIONALE UNITÀ DI MISURA (non è programma d'esame)

necessità di uniformare le convenzioni sulle unità di misura dell'illuminismo (introdotto sistema metrico decimale)

1875 I convenzione internazionale SISTEMA MKS (metro, kilogrammo, secondo)

1960 Sistema Internazionale vengono aggiunti Ampere, Kelvin, e Candela (intensità luminosa)

1971 Aggiunta la mole  $\rightarrow$  7 unità fondamentali, il resto si può derivare da queste

Esempio di come erano definite alcune unità:

1 metro = (1793) =  $\frac{1}{1000000}$  meridiano attraverso Parigi tra Polo Nord ed equatore

misura non riproducibile, soggetta a errori...

(1983) = distanza percorsa da un raggi luminoso in 1 secondo

1 secondo (nel medioevo) =  $\frac{1}{86400}$  di un giorno (carattere astronomico)

non precisa! la durata di un giorno varia...

(1967) = def di carattere atomico

si ricava dalla frequenza della radiazione  
modotta da un elettrone che si muove tra  
due livelli di energia di un isotopo di cerio  
 $-133$

$\rightarrow$  Stavolta è precisa!

1 kg (1889) massa di un blocco cubico di una lega di platino/iridio conservata all'internazionale Bureau di Parigi

problemi: orario, avere delle corde  $\rightarrow$  ma le  
massa varia, e non in tutti allo stesso modo  
(variazioni dell'acelere di  $10^{-9}$ , molto piccole  
comunque)

1 Ampere (1946) dati 2 fili lunghi 1m, posti a dist. 1 m

percorso da corrente  $\rightarrow$  si attraggono

1 A corrente effettuata da forza attrattiva di  $1 \cdot 10^7 N/m$

2019 : Ridefinizione delle unità di misura  
in termini di costanti fondamentali (che sono  
invarianti nel tempo)

OK il metro: la velocità della luce è costante  
OK il secondo: la frequenza della radiazione  
dell'elettrone... è costante

Ma vogliamo che anche tutte le altre unità  
siano così precise usando alcune costanti  
numero di Avogadro, costante di Boltzmann...

Oss: Anche la carica dell'elettrone è considerata  
una costante, quindi non c'è errore  
Prima, venivano considerate con un errore  
poiché ottenute da misurazione  
stessa cosa per la velocità della luce

ESEMPIO: Il kilogrammo è definito tramite la relazione

$$E = h \Delta\nu$$

(costante di Planck)  
energia associata alla radiazione elettromagnetica  
(si misura in J)

$$\Rightarrow h \text{ è definita in J.s} \quad \text{e} \quad J = N \cdot m = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}$$

$$\Rightarrow m \text{ è misurata in } \frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}} \rightarrow \text{da cui si ricava il kilogramma}$$

L'ampere è l'unità di misura del corrente  
 $I = \frac{Q}{t}$

la carica dell'elettrone è una costante in Coulomb - A.s

## FENOMENI MAGNETICI

20/4/2020

### CAMPO MAGNETICO

Esistono alcune sostanze (detto annuno ferromagnetiche) che sono dei magneti permanenti → es calamita'

una calamita' ha due tipi di estremità:

un polo nord  $\rightarrow$  

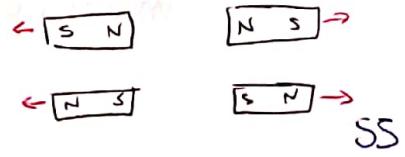
un polo sud  $\rightarrow$  

tra due calamita' esistono delle forze che possono essere

attrattive: se si avvicinano due poli, 

dello stesso tipo

repulsive, se si avvicinano due poli dello stesso tipo



concreto simile alle forze attrattive/repulsive  
tra le cariche

posso separare i carri  
positive Differenza: polo nord e polo sud di una  
negativa calamita non possono mai essere separate

→ se spezzo una calamita, ottengo altre due  
calamite, ciascuna con un polo nord e  
un polo sud

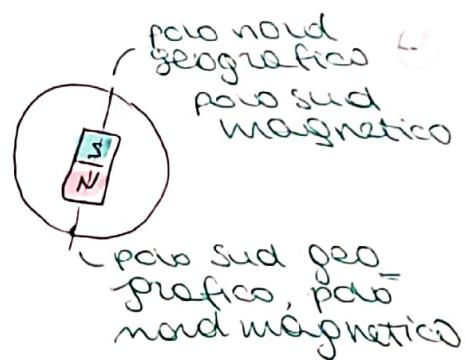


NON esiste un  
monopolio  
magnetico isolato

Esistono anche altre sostanze (es. acciaio) che  
sono **magneti temporanei**, che si magnetizzano  
nel momento in cui si trovano vicino ad un  
magnet permanente

La Terra si comporta come un  
magnet gigante

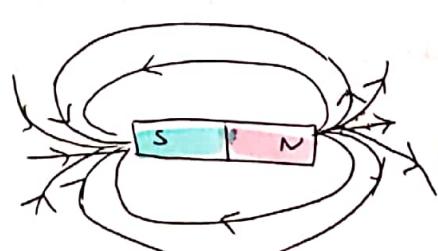
→ da cui il funzionamento  
della bussola: punta il polo  
nord della bussola verso il  
"polo nord" della Terra che  
quindi si comporta come il  
polo sud di una calamita



un magnete produce un campo magnetico,  
(ma anche le correnti elettriche producono  
un campo magnetico)

CAMPO MAGNETICO: è un campo vettoriale { direzione  
può essere visualizzato tramite verso  
le linee di campo (sempre tg al campo vett.) intensità}

simile  
al polo  
estetico



Essi possono essere  
visualizzate tramite  
linee di ferro,  
ogni magnetici piccoli  
che posti vicino a  
un magnete vanno  
a orientarsi.

le linee di campo ESCONO DAL POLO NORD  
ENTRANO NEL POLO SUD

Ogni linea che esce dal polo nord deve  
entrare nel polo sud questo perché non esistono  
monopoli magnetici

Anche coniche in movimento generano un campo magnetico  $\hookrightarrow$  corrente elettrica

che si può visualizzare sempre con la limatura di ferro:

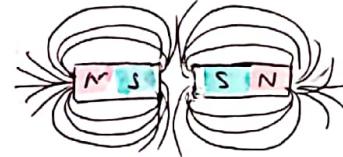
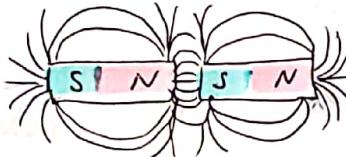
linee di campo  $\rightarrow$  circonferenze concentriche con centro sul filo

caso particolare: Bobine o Solenoide   
filo percorso da corrente che genera un campo magnetico analogo a quello del magnete con polo nord/sud  
che fa linee di campo anche all'interno da sud a NORD  $\rightarrow$  le linee di campo sono sempre linee chiuse.

ESEMPI:



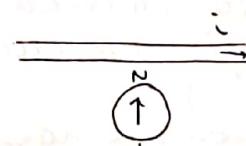
la densità delle linee di campo dà un'idea della sua intensità  
 $\rightarrow$  più intenso nei poli



#### ESPERIMENTO DI OERSTED

$\rightarrow$  si scopre che le correnti generano un campo magnetico

si accorge che l'ago di uno compasso si muove in prossimità di un filo percorso da corrente



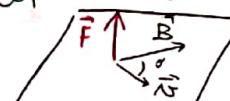
#### FORZA DI LORENTZ

Cos'è fatto la forza magnetica?

(forza che il campo magnetico esercita)

$\rightarrow$  in moto  $\rightarrow$  una carica elettrica è sorgente di un campo magnetico, ma risente anche della presenza di un campo magnetico, in quanto risultato della forza magnetica detta forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$



$\vec{F} \perp$  se non generato dai vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$   
con verso dato dalla regola della  
mano destra (se  $q > 0$ )

se  $q < 0$  → verso opposto

$$|\vec{F}| = |q| v B \sin \alpha$$

Oss. se  $\vec{v} \parallel \vec{B} \rightarrow \sin \alpha = 0 \rightarrow |\vec{F}| = 0$   
se  $\vec{v} \perp \vec{B} \rightarrow \sin \alpha = 1 \Rightarrow |\vec{F}|$  è  
massime

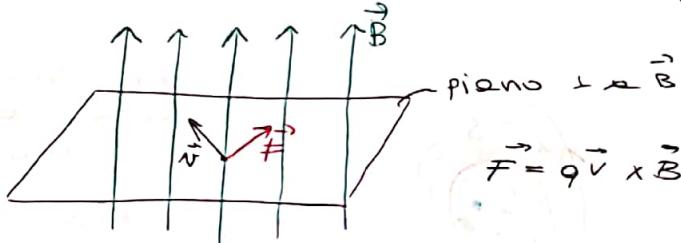
unità di misura del campo magnetico:

$$[B] = \left[ \frac{F}{qv} \right] = \frac{N}{C \cdot m} = T \text{ (Tesla)}$$

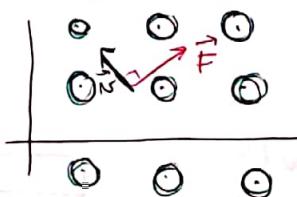
### MOTO DI UNA PARTICELLA IN UN CAMPO MAGNETICO

campo  $\vec{B}$  uniforme (costante ovunque). E' conica di prova  
che si muove con

$$\vec{v} \perp \vec{B}$$



dell'auto



○  $\vec{B}$  uscente  
○  $\vec{B}$  entrante

$F = qvB$  e  $F \perp v$ .  
perché  $\vec{v} \perp \vec{B}$

una forza di questo tipo tende a far muovere  
la particella in direzione  $\perp$   
 $|\vec{v}|$  non cambia

$\vec{F}$  forza centrifuga costante

[la particella inizia a muoversi  
di moto circolare uniforme]

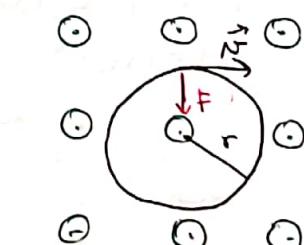
con che raggio  $r$ ?

$$F = q \cdot v \cdot B$$

$$F = a_c \cdot m$$

$$\Rightarrow qvB = a_c \cdot m$$

$$\Rightarrow r = \frac{v^2 \cdot m}{q \cdot B}$$



massa particelle

sappiamo che  
nel moto circ.

$$\text{uniforme } a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m \cdot v^2}{q \cdot B}$$

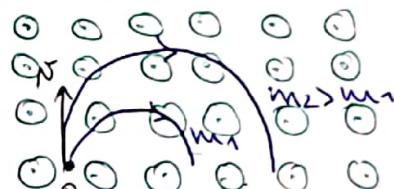
$$\text{Periodo orbita circolare: } T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

da cui segue che la frequenza dell'orbita è  $f = \frac{qB}{2\pi m}$   
e la velocità angolare  $\omega = 2\pi f = \frac{qB}{m}$

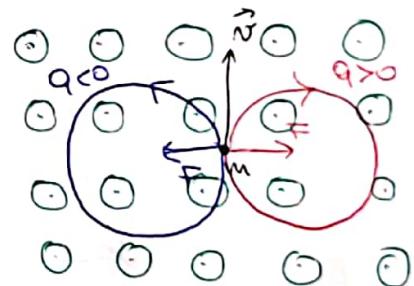
Oss.: a parità di  $m, q$  e  $v$ ,  $r$  è inversamente proporzionale all'intensità di  $B$

Oss.: Tutte queste formule dipendono solo dal rapporto  $\frac{q}{m}$

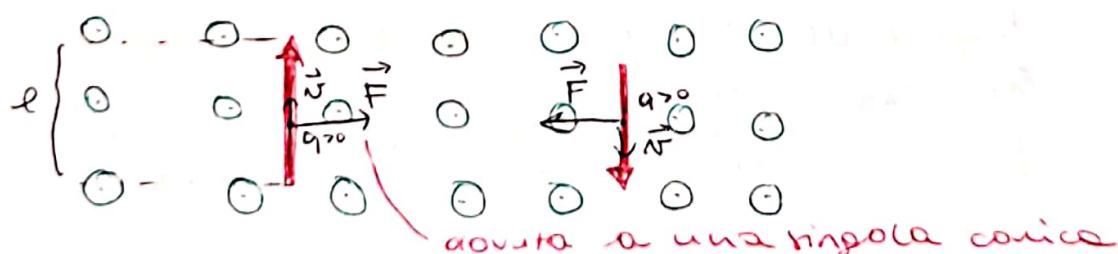
Oss.: A parità di carica e campo una massa maggiore determina un raggio maggiore  
principio di funzionamento dello **SPETTROMETRO DI MASSA**  
versante particelle di stesso carica ma massa diversa, es. gli isotopi,



Rispetto a un campo uscente  $q>0$  muove in senso orario  
 $q<0$  in senso antiorario  
( $\vec{F}$  va verso opposto)



### FIO PERCORSO DA CORRENTE



filo lungo il percorso da corrente i (verso destra freccia)

Abbiamo visto la forza di Lorentz:  $F = qvB$   
poiché la corrente è generata da cariche in movimento, mi aspetto che se filo riceva di una forza (ognicavico)

la forza tenderà a deformare il filo

$$i = \frac{q}{t} = \frac{q}{l/v} \Rightarrow qv = il$$

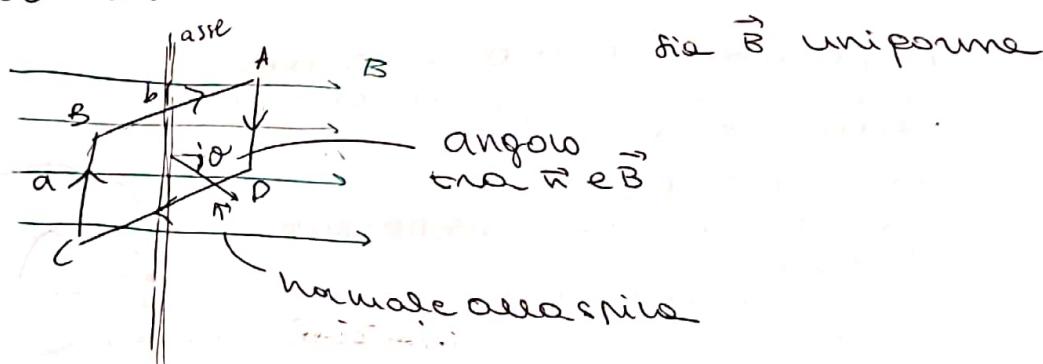
da cui  $F = q v B$  (poiché  $\vec{v} \perp \vec{B}$ )

si puo' scrivere  $F = i l \cdot B$

in generale:  $\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$

lunghezza fino  
verso direzione della corrente  
verso opposto

ESEMPIO: Sia una spira rettangolare ("fis chiuso percorso da corrente") indeformabile e rigida  
4 tratti di fili rettilinei  
la spira puo' ruotare attorno all'asse  
verticale



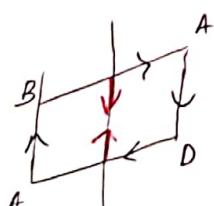
Su ogni tratto di filo sara' esercitata una  
forza

Dall'alto

$$\vec{F} \perp \vec{b}$$
$$\vec{F}_{AB} = i b B \sin(90 - \theta)$$

Ragionando in modo analogo

$\vec{F}_{CD} = \vec{F}_{AB}$  la direzione e la stessa  
ma il verso opposto, poiche  
la corrente scorre nello stesso  
verso



Queste due forze sono contrabbilanciate  
dalla rigidita del filo e vengono annullate  
(sono dirette lungo l'asse di rot)

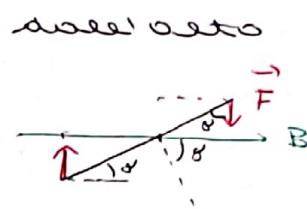
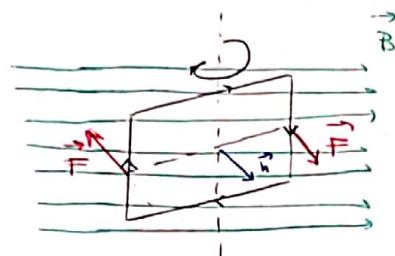
BC dall'alto

$$F_{BC} = i \cdot a B$$

AD analogo

$$F_{AD} = i \cdot a B$$

questa coppia di forze uguali e contrarie tendono a far ruotare la spira



è questo che è alla base di un motore elettrico → trasformare energia elettrica in energia meccanica

OSS: Stesso concetto delle leve  
braccio (per geometria) =  $\frac{b}{2} \sin \theta$   
Si definisce ie

$$\text{MOMENTO TORCENTE } \tau = \underbrace{\frac{b}{2} F \sin \theta + \frac{b}{2} F' \sin \theta}_{\text{somma delle 2 forze nel braccio}} = b F \sin \theta$$

$$\tau = i \cdot \overline{ab} B \sin \theta$$

se definiamo  $\vec{\mu} = i (\overline{ab}) \vec{n}$ , **MOMENTO MAGNETICO**, possiamo scrivere  $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

che è vero in generale, per spire piane di qualunque geometria

mette in rotazione la spira

ERCOLESSI 24/4/2020

### ESPERIMENTO DI THOMSON

→ dimostra che l'elettrone esiste e che è una particella

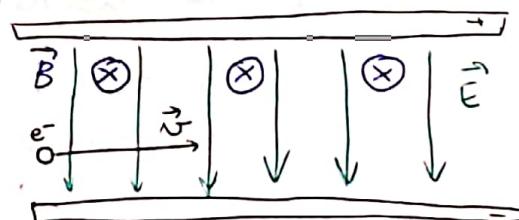
→ permette di calcolare il rapporto  $\frac{m_e}{e}$  → massa elettrone → carica elettrone

Adattando all'esperimento di Millikan (che è successivo) si calcola  $e \Rightarrow e$  è possibile calcolare la massa dell'elettrone

CATODO → piastre metalliche

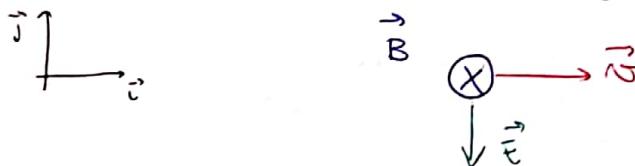
che emette elettroni se riscaldato

tramire altre cariche (es. 1000) gli elettroni convogliati lungo un fascio in modo che quando entrano nella parte centrale del tubo, tenuta sotto vuoto



entrano in questa regione con velocità orizzontale, è possibile muovere regolare in questa zona. Un campo elettrico e un campo magnetico tramite conduttori teli e calamite. A seconda delle loro intensità l'elettrone è deviato. In fondo al tubo c'è uno schermo che si illumina quando l'elettrone tocca lo schermo (è principio di funzionamento dei vecchi televisori).

Nella regione centrale l'elettrone muove con velocità orizzontale  $\vec{v}$



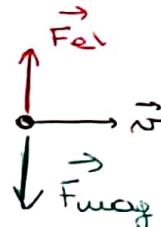
1) forze che agiscono sull'elettrone?

Quando la forza totale sull'elettrone si annulla?

$$\begin{cases} \vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E} = (-e)(-\epsilon \hat{j}) = e\epsilon \hat{j} \\ \vec{F}_{mag} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = (-e)\vec{v} \times \vec{B} = -evB\hat{j} \end{cases}$$

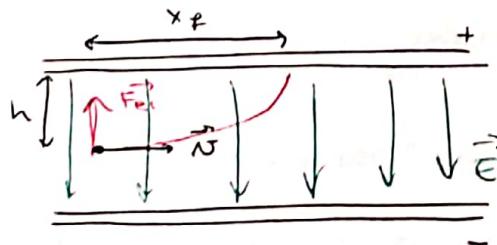
stessa direzione, verso contrario

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}_{mag} \Leftrightarrow e\epsilon = evB \Leftrightarrow v = \frac{\epsilon}{B}$$



In tale caso, l'elettrone continua a muoversi indisturbato

2) Supponiamo ora di spegnere il campo magnetico



l'unica forza che agisce sull'elettrone è la forza elettrica  $\vec{F}_{el} = e\epsilon \hat{j}$  verso l'alto

Il moto lungo x dell'elettrone ha una retta costante  $v_x = a = \frac{\epsilon}{B}$

lungo y è uniformemente accelerato

$\Rightarrow \begin{cases} \text{moto uniforme lungo } x \\ \text{moto unif. accel. lungo } y \end{cases}$

$\Rightarrow$  traiettoria = parabola  $\Rightarrow$  l'elettrone "volata" sulla lastra supera al tempo  $t_f$  in posizione  $x_f$

$$\text{lungo } x: N_x = N = \frac{E}{B} \Leftrightarrow x_f = N_x t_f = v t_f \Rightarrow t_f = \frac{x_f}{v} = \frac{x_f}{\frac{E}{B}}$$

$$\text{lungo } y: a_y = \frac{F_{el}}{m_e} = \frac{e \cdot E}{m_e} \quad h = \frac{1}{2} a_y t_f^2 \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{2} \frac{e E}{m_e} \cdot \left( \frac{x_f}{\frac{E}{B}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{e}{m_e} \frac{B^2 x_f^2}{E}$$

fissata

la mitra  
con lo  
schermo  
fluorescent

$$\Rightarrow \frac{m_e}{e} = \frac{B^2 x_f^2}{2 h E}$$

## OSSERVAZIONI:

Abbiamo visto che magneti generano campi elettrici, abbiamo visto l'esperimento di Oersted  $\rightarrow$  una corrente elettrica genera un campo magnetico.

corrente = una carica che si muove

Oss: un fio percorso da corrente non genera un campo elettrico  $\rightarrow$  non ci è accumulo di carica in eccesso

Poi Co-Place, Biot-Savart, Ampere a determinare formule quantitative che descrivono il campo magnetico in funzione della corrente sorgente

ora ci occupiamo dei campi magnetici generati dai correnti  $\Rightarrow$  anche i cosiddetti magneti permanenti, a livello microscopico non hanno un campo magnetico perché ci sono ricche correnti al loro interno che generano campi magnetici che sommano un campo magnetico totale

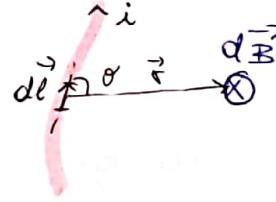
$\Rightarrow$  questo spiega il campo magnetico terrestre: il nucleo contiene molti mattoni carichi, se gira ruota, produce una corrente elettrica  $\Rightarrow$  campo magnetico.

Sorgenti del campo magnetico sono sempre correnti

## FORMULA DI LAPLACE

filo percorso da corrente (costante nel tempo)

dè - tratto infinitesimo di filo  
direzione verso destra  
corrente



vogliamo vedere come è fatto il campo magnetico generato da  $\vec{d}e$  in un punto distante  $\vec{r}$  dal tratto infinitesimo

direzione di  $d\vec{B}$ : nel piano di rotori  $d\vec{e}$ ,  $\vec{r}$  verso di  $d\vec{B}$ : determinato con la regola della mano destra

$$\text{modulo di } d\vec{B}: dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \text{ de seno}}{r^2}$$

(verificato sperimentalmente)

dove  $\sigma$  = angolo tra  $d\vec{e}$  e  $\vec{r}$

$$\mu_0 = \text{COSTANTE DI PERMEABILITÀ MAGNETICA NEL VUOTO}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$$

quindi  $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{e} \times \vec{r}}{r^2}$

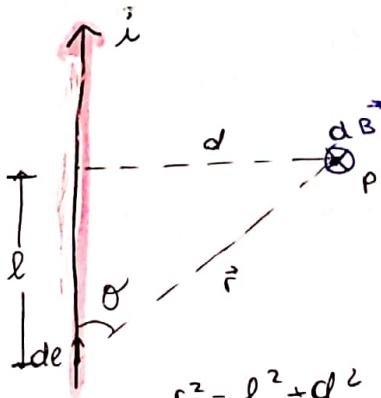
ogni tratto di filo infinitesimo  $d\vec{e} i$  genera un campo magnetico  $d\vec{B}_i$

Per le regole di sovrapposizione:

$B_{totale} = \text{somma di tutti i contributi } d\vec{B}_i$

## FORMULA DI BIOT SAVART

### 1) CASO FILO RETTILINEO INF.NITO



vogliamo calcolare il campo magnetico nel punto P

tratto infinitesimo  $d\vec{e}$ :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i de \text{ seno}}{r^2}$$

verso entrante

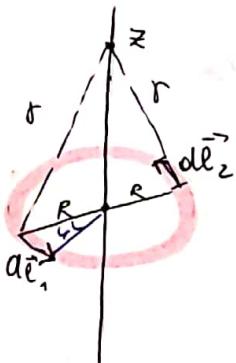
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} i de \cdot \frac{d}{(l^2 + d^2)^{3/2}}$$

Per le principi di sovrapposizione dobbiamo sommare tutti i  $\vec{dB}$ :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} idl \frac{d}{(l^2 + d^2)^{3/2}} = \dots \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

Oss: tutti i  $\vec{dB}$  hanno stesso senso e verso  $\Rightarrow$  stessi di  $B$

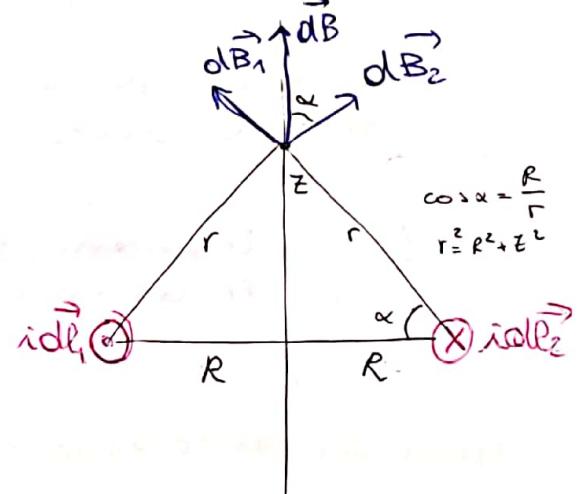
## 2) CASO ANELLO CIRCOLARE



vediamo come è fatto il campo magnetico solo nell'esterno delle spire che passa per verso centro

siano  $dl_1$ ,  $dl_2$  tratti infiniti della circonferenza generici diametralmente opposti

si ha:  $id\vec{l}_1 = -id\vec{l}_2$   
e  $dl_1 = dl_2 = R d\phi$



formula di Laplace:

$d\vec{B}_1$  è  $\perp$  a  $\vec{r}$  e  $d\vec{l}_1$ ,  
e verso della mano destra

ALTRÒ MODO: notate re notate come la direz. della corrente, le componenti magnetiche si "avvici" nel senso delle altre direz.

$d\vec{B}_2$  è  $\perp$  a  $\vec{r}$  e  $d\vec{l}_2$

$$dB_1 = dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl}{r^2}$$

Somma di questi due contributi:

componenti orizzontali:  $dB_1^x = dB_2^x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \sin \alpha}{r^2}$

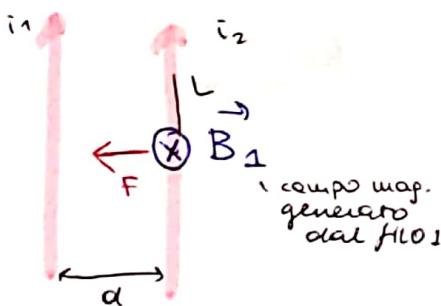
stessa direzione, verso opposto  $\rightarrow$  si annullano

componenti verticali:  $dB_1^y = dB_2^y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{idl \cos \alpha}{r^2}$

stessa direzione, verso verso  $\rightarrow$  si sommano

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{iR^2 d\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i R^2}{2 (R^2 + z^2)^{3/2}}$$

### 3) FORZA TRA FILI PARALLELI PERCORSI DA CORRENTI.



In ogni punto dello spazio nel filo 1, genera un campo magnetico  $B_1$ .

il filo 2 e' percorso da corrente  $i_2$ , si trova in un campo magnetico  $B_1 \Rightarrow$  subisce una forza-

Quanto vale questa forza?

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi a} \quad \text{in ogni punto del filo 2.}$$

$$\vec{F} = i_2 \vec{L} \times \vec{B}_1 \Rightarrow \quad F = i_2 L B_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 L}{2\pi a} \\ (\text{che agisce su 2.})$$

ed è una forza attrattiva

Il discorso è analogo per il filo 1  $\Rightarrow$  subirà una forza attrattiva verso il filo 2

- OSS: se le correnti sono concordi  $\rightarrow$  forze attrattive,
- se le correnti sono in verso opposto  $\rightarrow$  forze repulsive

### FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO (I eq. di Maxwell)

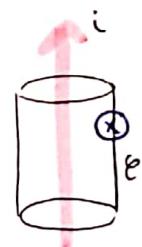
Per qualunque superficie chiusa  $S$ , il flusso del campo magnetico statico (correnti e cariche non dipendono dal tempo)

$$\phi_s(\vec{B}) = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

- si prende adesso fatto che le linee del campo magnetico sono chiuse  $\Rightarrow$  tante linee entriano quante ne escono

Dimostrazione:

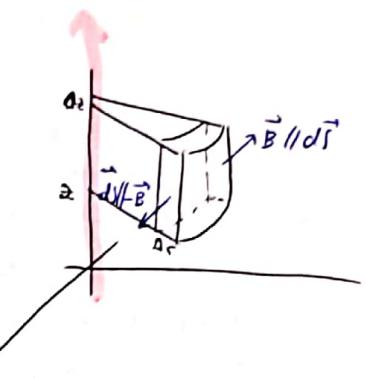
1. mostriamo prima che  $\phi_s(\vec{B}) = 0$  nel caso di un filo infinito percorso da corrente, racchiuso da una sup. cilindrica  $E$



$$\phi_E(\vec{B}) = \oint_E \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

In qualsiasi punto della superficie cilindrica, il campo magnetico è normale alla sup. cilindrica

Per cui  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$



2. Si consideri ora una sorta di "spicchio cilindrico"

e la sup. chiusa costituita da:

due tratti di sup. cilindrica, due pezzetti di base (rettangoli) di raggio r e altezza d<sub>z</sub> e base dr (rettangoli)

L'integrale di questa superficie è dato dai contributi di 6 pezzi:

Ma il campo magnetico generato dal filo è 1 alle sup. cilindriche interne, 0 alle sup. cilindriche esterne, alle 2 basi:

$\Rightarrow$  questi contributi al flusso sono nulli  
 $\Rightarrow$  rimangono solo i contributi dei 2 rettangoli su di essi  $\vec{B} \parallel d\vec{s}$  ma la normale è in verso opposti

$\Rightarrow$  quando sommo questi due contributi si annullano

$$\Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

3. Ogni superficie chiusa può essere approssimata da elementi infinitesimi tali del tipo nel punto 7.

$\Rightarrow$  la loro somma è o indipendentemente dalla forma della superficie (filo sempre rettilineo)

4. La stessa cosa avviene nei fili <sup>di</sup> qualunque forma e posizione  
 $\Rightarrow$  per un qualsiasi campo magnetico B

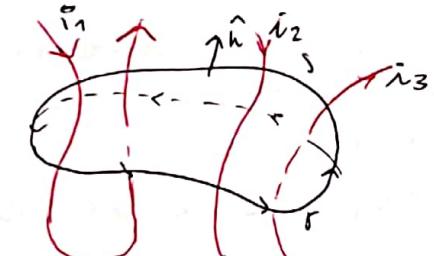
$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

**LEGGI DI AMPERE** (IV eq. di Maxwell)  
solo nel caso statico

$$\oint_{\gamma} (\vec{B}) = \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i_{\text{conc.}}$$

la circuazione del campo magnetico all'interno  
una qualsiasi linea chiusa si prende dove distri-  
buzione di correnti

$\Rightarrow$  useremo queste formule per calcolare il campo  
magnetico in caso di particolari simmetrie.



$$i_{\text{conc}} = -i_1 + i_1 - i_2 + i_3$$

e una curva orientata  
sulla superficie che ha  $\gamma$  come  
bordo. Scogliamo la sua  
normale  $\hat{n}$  con la regola  
stessa mano destra  
(dito come la curva, i  
guanti se pulite).

correnti concatenate: quelle che 'tagliano' la  
superficie

verso di ogni corrente: + se il verso della  
corrente coincide con quello della normale,  
- se non coincide il verso

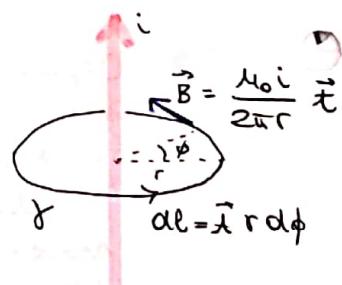
$i_{\text{conc}} = \text{somma} \text{ algebraica} \text{ delle correnti} \text{ che attraversano} \gamma$

Dimostrazione.

1. Mostriamo prima il caso di  
un filo infinito percorso da corrente  $i$ .

racchiuso da una circonferenza con  
centro nel filo

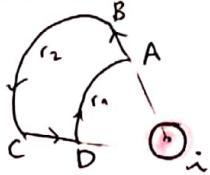
$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} r d\phi = \mu_0 i = \mu_0 i_{\text{conc.}}$$



2. Mostriamo ora il caso, filo infinito percorso da  
corrente e come curva uno 'spicchio' infinitesimo  
come in figura

'pezzo di settore  
circolare'

caso due:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{t} \text{ su } AD \text{ e } BC$$

$$\vec{B} \perp \vec{dr} \text{ su } CD \text{ e } AB$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

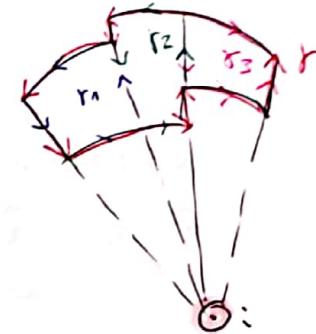
$$= 0 + \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} \cdot \pi r_1^2 d\phi + 0 - \frac{\mu_0 i}{2\pi r_2} \pi r_2^2 d\phi = 0$$

3. osserviamo che una generica curva esterna alla corrente può essere approssimata dai spicchi come quelli appena visti

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \dots$$

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{\gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \dots = 0$$

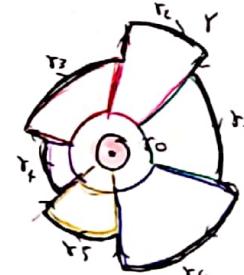
perché su ogni spicchio l'integrale è nullo  
osserviamo che  $i_{\text{cor}} = 0 \Rightarrow \text{OK!}$



4. vediamo ora il caso di una generica curva chiusa che circonda la corrente

Possiamo dividere  $\gamma$  in spicchi allo stesso modo

$\rightarrow$  i contributi "radiali" si elidono a vicenda



$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

tutti nulli (punto 2)

$$= \int_{r_0} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{r_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{r_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \dots = \int_{r_0} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{cor}}$$

caso 1.

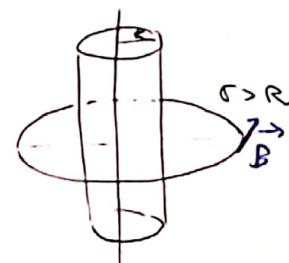
5. Se ci sono più correnti, vale il principio di sovrapposizione e si ottiene il risultato tenendo conto del verso delle varie correnti

### APPLICAZIONI:

1. SUPERFICIE CILINDRICA con corrente  $i$  (la corrente scorre sulla sup.)

$\vec{B}$  sarà sempre tangente alle circonferenze di centro, centro del cilindro, e dipenderà dalla distanza  $r$  dal centro  
scogniamo come curva  $\gamma$ :

$\gamma$  = circonferenza centrata sull'asse del cilindro



$\vec{B} = B(r) \hat{r}$  e quindi

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 i_{\text{conc}}$$

se  $r < R$ ,  $i_{\text{conc}} = 0$

se  $r > R$ ,  $i_{\text{conc}} = i$

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Quello di un filo infinito nell'asse del cilindro

## 2. CILINDRO PIENO CON CORRENTE $i$

$$\vec{B} = B(r) \hat{r}$$

filo circolare di raggio  $r$

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 i_{\text{conc}}$$

$$\text{se } r > R \quad i_{\text{conc}} = i \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$



$$\text{se } r < R \quad i_{\text{conc}} = \frac{ir^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i r^2}{2\pi R^2}$$

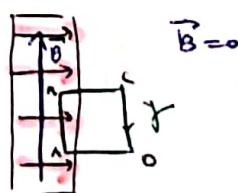
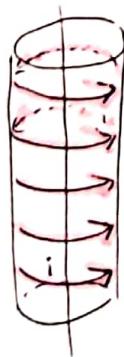
si tratta di fare  
una proporzione

$$\Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2} \hat{r} & \text{se } r < R \\ \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

## 3. SOLENOIDE CILINDRICO CON CORRENTE $i$

la corrente scorre su delle circonference  
per cilindro

In sezione verticale:



essendo la bobina  
infinita  $\Rightarrow$  all'esterno  
all'interno

$\vec{B} = 0$   
 $\vec{B}$  in direzione  
verticale

[se la bobina non fosse  
infinita:  


ovviamente è un  
dispositivo ideale

$\rightarrow r \ll \text{lunghezza bobina}$

curva  $y$ : rettangolo in parte interna / in  
parte esterna alla bobina

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left( \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} \right) \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} =$$

$\vec{B} \cdot d\vec{l}$   
 $B=0$   
 $\vec{B} \perp d\vec{l}$

$$= BL = \mu_0 i_{\text{conc}}$$

lunghezza AB

$$i_{\text{conc}} = Ni$$

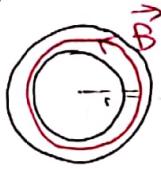
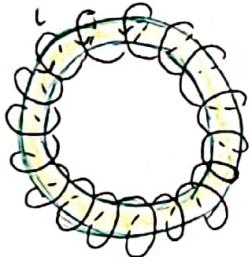
num. spire di att. rettangolo

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} i = \mu_0 n i$$

(densità delle spire)

è uniforme, non dipende da dove metto AB

#### 4. SOLENOIDI TOROIDALI



$\vec{B}$  è solo all'interno del 'tubo'  
all'esterno è nullo

$r_f$ : circ. interna al solenoide di raggio r

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i_{\text{conc}} = \mu_0 N i$$

in totale di spire

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$$

non è uniforme, dipende da r

ERCOLESSI 4/5/2020

Iniziamo a parlare ora di campi magnetici/elettrici variabili nel tempo  $\rightarrow$  le eq. di Maxwell sono modificate

#### LEGGE DI FARADY-HEUmann-Lenz

descrivre il fenomeno dell'induzione

Dato una spira su cui non c'è corrente, e un magnete (che genera un campo magnetico). Quando avvicino/allontano il magnete alla spira  $\rightarrow$  inizia a circolare corrente nella spira  $\rightarrow$  INDUZIONE



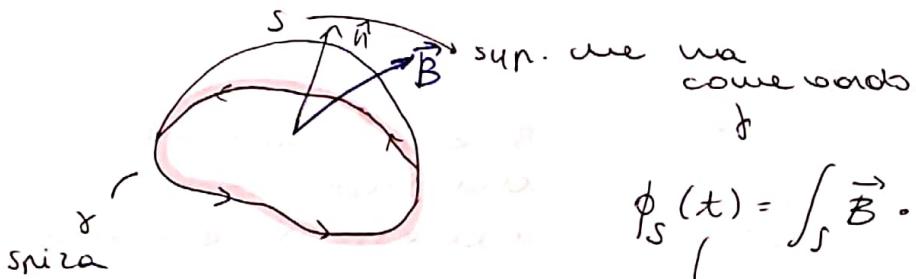
Stessa cosa se si fa a vicinanza/allontanare un solenoide (genera un campo magnetico)  
ma anche se la spira viene deformata  
 $\rightarrow$  Non conta tanto il campo magnetico ma come varia il campo circa concat. alle spire

DEA: Se il campo magnetico con-tenuto alla spira cambia  $\Rightarrow$  sulla spira si produce una corrente  $\Rightarrow$  questo è detto **FENOMENO DELL'INDUZIONE**

di osserva che maggiore è la variazione, meggiore è l'intensità della corrente e che se si invverte il segno della variazione si invverte il senso della corrente indotta.

OSS: ci deve essere una deltà di cari delle spire per far muovere le cariche e quindi indurre una corrente.

Esso è detto **FORZA ELETROMOTRICE (fem)**



$$\phi_s(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

dipende dal tempo perché  $B$  varia nel tempo

**LEGE DI FARADAY**

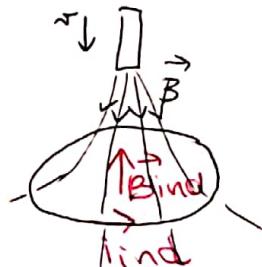
$$|\mathcal{E}| = \left| \frac{d\phi_s}{dt} \right|$$

OSS: se  $\phi$  non dipende dal tempo  $\rightarrow$  caro statico  
 $|\mathcal{E}| = 0 \Rightarrow$  non c'è corrente

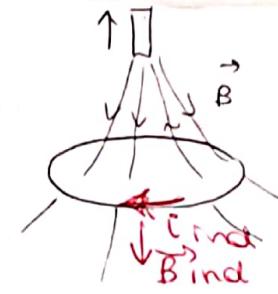
Il segno della fem indotta è si determina secondo la legge di NEUMANN - LENZ

la corrente indotta nella spira circola in modo da produrre un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso.

- Quando il magnete si avvicina, se flusso concat. aumenta, la corrente circola in senso ORARIO (quindialmente verificato) che da sua volta genera un campo magnetico indotto (che si oppone a quello del magnete) generando un flusso contrario che si oppone alla variazione del flusso.



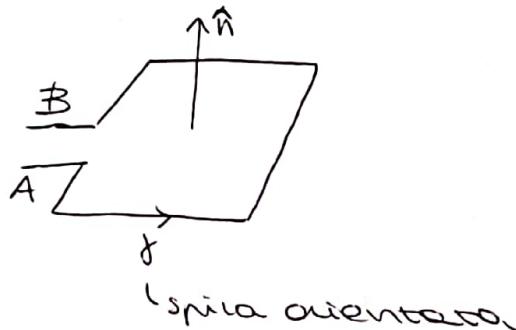
2. Nel caso in cui il magnete si sta allontanando, il flusso concatenato diminuisce, la corrente circola in senso antiorario e genera un campo magnetico isolotto concorde a quello del magnete generandolo un flusso concordante



da cui: LEGGE DI FARADAY - NEUMANN - LENZ

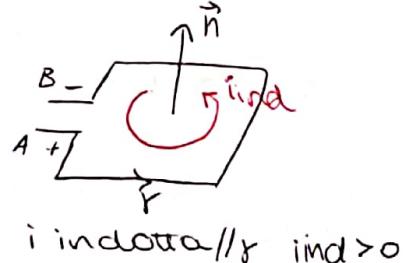
$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi_s}{dt}$$

vediamo nel dettaglio le convenzioni dei segni:

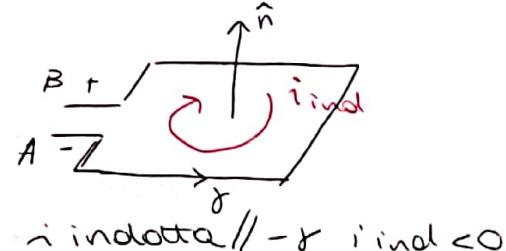


Sia  $\mathcal{E} = V_A - V_B$  ddn si capi delle spire

Se  $V_A > V_B \Rightarrow \mathcal{E} > 0$   
Siamo nel caso:



Se  $V_A < V_B \Rightarrow \mathcal{E} < 0$   
Siamo nel caso



Sia  $\phi_s$  il flusso di un campo magnetico concatenato con la spira

Se  $\phi_s$  decrescente  $\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\phi_s}{dt} > 0 \Leftrightarrow V_A > V_B$  ovvero  $i_{ind} > 0$

Se  $\phi_s$  crescente  $\Rightarrow \mathcal{E} = - \frac{d\phi_s}{dt} < 0 \Leftrightarrow V_A < V_B$  ovvero  $i_{ind} < 0$

Quindi la variazione di flusso genera una f.e.m. isolotta e quindi una corrente indotta. Come può variare il flusso?

$$\phi_s(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S |B| \cos\alpha dS$$

1. Il modulo di  $\vec{B}$  varia nel tempo

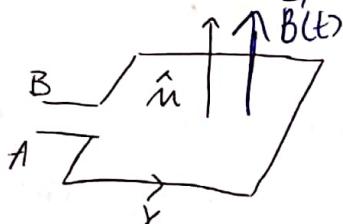
2. Se l'area della spira  $S$  varia nel tempo

3. Se l'angolo  $\alpha$  tra  $B$  e  $\hat{n}$  è variabile nel tempo

## ESEMPI:

### 1) Il modulo $|\vec{B}|$ varia nel tempo

Spira quadrata di lato  $L$  nel piano  $xy$  immersa in un campo magnetico uniforme con direzione costante lungo  $\hat{k}$  e modulo variabile nel tempo secondo la legge  $B(t) = B_0 \left( \frac{t^2}{2} - t \right)$   
(decrescente per  $0 < t < 1$ , crescente per  $t > 1$ )



scelta orientazione della spira (tale che  $\hat{n} = \hat{k}$ )

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S B(t) dS =$$

$$= B(t) L^2 = B_0 \left( \frac{t^2}{2} - t \right) L^2$$

$$\mathcal{E} = V_A - V_B = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - L^2 B_0 (t-1)$$

Se la spira è un conduttore ohmico

$$i_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{L^2 B_0}{R} (t-1) \quad \begin{cases} < 0 \text{ se } t > 1 \\ > 0 \text{ se } t < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \curvearrowleft \text{ verso} \\ \curvearrowright \text{ verso} \end{array}$$

OSS: se  $t < 1 \Rightarrow B(t)$  decrescente  $\Rightarrow \Phi$  decrescente

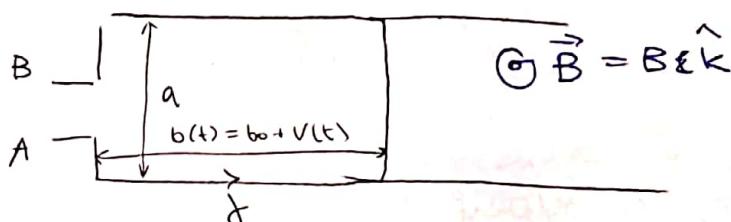
$\Rightarrow$  la corrente indotta si oppone allo variaz. del flusso  $\Rightarrow$  crea un campo magnetico concordale al quello iniziale

Viceversa per  $t > 1 \Rightarrow B(t)$  crescente  $\Rightarrow \Phi$  crescente

$\Rightarrow$  la corrente genera un campo magnetico inibito in verso opposto a quello iniziale

### 2) L'area della spira cambia nel tempo

Spira rettangolare nel piano  $xy$  di altezza  $a$  e un lato verticale che muove scorrere e si muove con velocità costante verso destra secondo la legge  $b(t) = b_0 + vt$ , immersa in un campo mag. uniforme e costante  $\vec{B} = B \hat{k}$



$$\oint \vec{B} = B \hat{k}$$

74 Seleziamo l'orientazione della spira  $\hat{n} = \hat{k}$

$$\phi_s(t) = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot a \cdot b(t) = B \cdot a (nt + b_0)$$

$$\mathcal{E} = V_A - V_B = - \frac{d\phi_s}{dt} = - Ba n \quad \text{sempre negativa}$$

$$i_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{Ba n}{R} < 0 \quad \text{Ci indica}$$

una molla contraria produce un campo magn. intorno alla spira verso il basso, contrario a  $\vec{B}$   
 $\rightarrow$  si oppone al crescere del flusso

oss. che la spira si forte mosse verso sinistra?

la spira diventa più piccola, e flusso diminuisce  
 la corrente scorre nel senso antiorario  
 generando un campo magnetico uguale a  $\vec{B}$

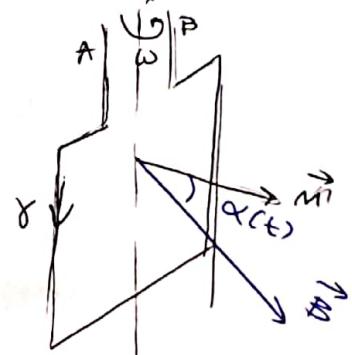
3) Varia l'angolo tra la spira e il campo magn.

spira quadrata di lato  $L$  che muore attorno all'asse x verticale con velocità angolare  $\omega$  costante immersa in un campo magnetico uniforme e costante  $\vec{B} = B \hat{k}$

All'istante  $t=0$  la spira è  $\perp$  al campo

Scelta l'orientazione delle spire  
 sicché  $\hat{n}(t=0) \parallel \vec{B}$  e quindi

$$\vec{B} \cdot \hat{n}(t) = B \alpha(t) \cos \alpha(t) = B$$



$$\phi_s(t) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}(t) ds = L^2 B \cos \alpha(t) = B L^2 \cos \omega t$$

$$\mathcal{E} = V_A - V_B = - \frac{d\phi_s}{dt} = BL^2 \omega \sin \omega t$$

$\rightarrow$  funzione periodica di periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$

$$i_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BL^2 \omega \sin \omega t}{R}$$

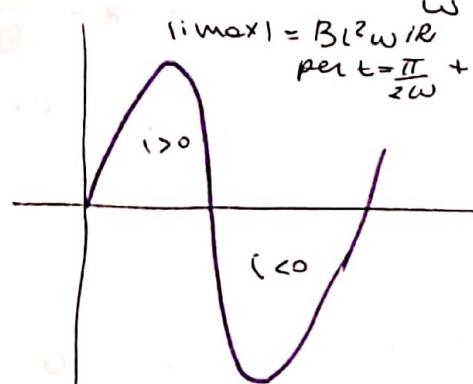
$$i_{\text{max}} = BL^2 \omega / R \quad \text{per } t = \frac{\pi}{2\omega} + n\pi$$

### "CORRENTE ALTERNATA"

ottenuta facendo ruotare una spira in un campo magnetico

$\rightarrow$  genera energia meccanica  
 $\rightarrow$  genera energia elettrica

(principio di funzionamento della dinamo della bicicletta)

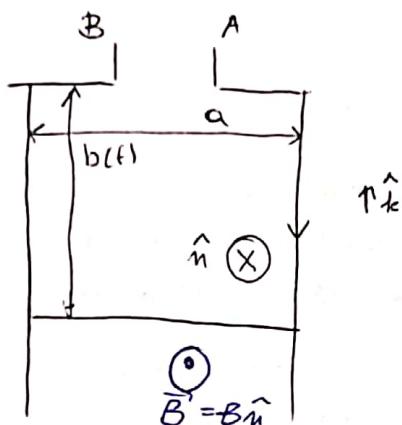


$$i = 0 \quad \text{per } t = \frac{\pi}{\omega} + n\pi$$

Oss. Per evitare questo avvenire si può invertire i capi A, B

8/5/2020

ESEMPIO:



spira con una sbarra orizzontale libera di muoversi che cade per effetto della forza di gravità (es. marratina)

l'area aumenta  $\Rightarrow$   
il flusso aumenta  
 $\Rightarrow$  si induce corrente nella spira

questo condotto si trova in un campo magnetico  $\Rightarrow$  ci sono una forza di peso dovuta alla forza di Lorentz

b varia nel tempo  
a fisso

$\vec{F} = -mg\hat{k}$  forza costante  $\Rightarrow$  la spira si muove di moto uniforme accelerato verso il basso, partendo da  $b_0$  all'istante  $t=0$ , da ferme

$$b(t) = b_0 + \frac{1}{2}gt^2$$

Legge di Faraday:

$$\phi_s(t) = \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{s} = -B_a b(t) = -B_a \left( b_0 + \frac{1}{2}gt^2 \right)$$

perché ha la spira orientata in senso orario

$$\Sigma = V_A - V_B = \frac{d\phi_s}{dt} = +Bagt > 0$$

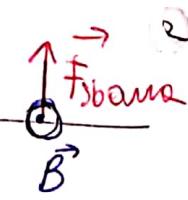
$$i_{\text{ind}} = \frac{Bagt}{R} > 0 \quad (\text{Ohm})$$

concorda con il verso della curva stretta

forza di Lorentz:

$$\partial F_{\text{Lorenz}} = i_{\text{ind}} d\vec{l} \times d\vec{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\text{Lorenz}} = i_{\text{ind}} a B \hat{k} = \frac{B^2 a^2 gt}{R} \hat{k}$$



$\vec{F}$  sbava in direzione contraria al reso  
frena la caduta

### CORRENTE DI FOCAULT

Se un materiale magnetico (dove gli elettroni non sono liberi di generare correnti) inizialmente statico che si muove all'interno di un campo magnetico (o comunque sottoposto a una variazione di campo)

Per il fenomeno dell'induzione  $\Rightarrow$  inizieranno a crearsi nella lassar correnti indotte, dette CORRENTI DI FOCAULT (o CORRENTI PARASSITE)  $\rightarrow$  tipicamente correnti vorticose (microcorrenti)

$\Rightarrow$  essendo immerso in un campo magnetico, agire sulla materia una forza di Lorentz in maniera frenante

$\Rightarrow$  si dissipia energia

Vediamo come il fenomeno dell'induzione ci induce a riscrivere una delle equazioni di Maxwell:

### III EQUAZIONE DI MAXWELL

Abbiamo visto che quando il campo elettrico è statico

$$C_F(\vec{E}) = \oint_F \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \vec{E} \text{ conservativo}$$

curva chiusa

del campo magnetico

Sia un flusso variabile nel tempo, che induce una corrente su una spira  $F$  in quanto ai suoi capi  $A, B$  si viene a creare una ddp (fem)

Sappiamo che una ddp genera un campo magnetico  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$

$$\text{Quindi } \varphi = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\hookrightarrow$  curva che congiung  $A \in B$

Le spine sono solo un sistema che ci consente di misurare la variazione di flusso

## Sorga di "spira di mola"

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

qualunque curva chiusa       $\hookrightarrow$  qualunque superficie con  $\gamma = \partial S$

Il caso statico è solo un caso particolare di questo

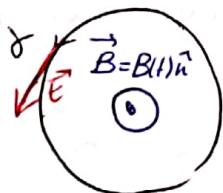
Il campo elettrico non è conservativo se il  $\vec{B}$  varia nel tempo ed è generato dalla variazione del campo magnetico

OSS: Fissata  $\gamma$  curva piena di radunare la superficie nel piano, il campo elettrico che compare nella formula è solo quello nel piano  $\gamma$ , alla curva, mentre l'unico campo magnetico che contribuisce è quello perpendicolare al piano

ESEMPIO : Si cercino  $\gamma$  e circonferenza

$$\vec{B} = B(t) \hat{k} \text{ uniforme e con modulo variabile}$$

$\vec{E}$  deve essere tangente



$$\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(t) \cdot 2\pi r$$

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(t) \cdot \pi r^2$$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E(t) \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t} B(t) \pi r^2 \Rightarrow$$

$$E(t) = \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \frac{r}{2}$$

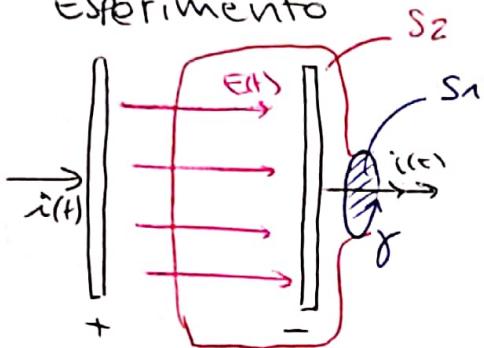
## CORRENTI DI SPOSTAMENTO

Se un campo elettrico è variabile nel tempo?

$\Rightarrow$  vediamo che genera un campo magnetico (che può essere ancora dipendente dal tempo, generare un altro campo elettrico...)

Abbiamo visto la legge di Ampere:  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{con}}$   
 che vale per campi statici nel tempo  
 vediamo come viene modificato da Maxwell  
 nel caso di campo elettrico variabile

Esperimento



condensatore a facce  
 niente parallele caricate

Sia  $\gamma$  come in figura

per simmetria cilindrica  
 $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r$

legge di Ampere: sia  $S_1$  la sup.  $i_{\text{con}} = i(t)$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 i(t)$$

Ma se scelgo la sup.  $S_2$   $i_{\text{con}} = 0$

trovo 2 risultati diversi!  $\Rightarrow$  manca qualcosa

dentro al condensatore non c'è corrente,  
 ma c'è un campo elettrico che varia  
 nel tempo dato da:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A}$$

$A$  = area  
 condens.  
 $d$  = dist tra  
 le 2 teste

$$\text{per cui } \oint \vec{E}(t) \cdot d\vec{l} = E(t) \cdot A = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}$$

$$\frac{d}{dt} \phi(\vec{E})_{S_2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{i(t)}{\epsilon_0}$$

corrente circolante  $/ \epsilon_0$

vale quindi la formula:

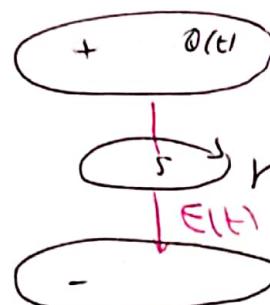
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{con}} + \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\frac{d}{dt} \phi(\vec{E})}_{= \mu_0 \cdot \text{ispostamento}}$$

## LEGE DI AMPERE-MAXWELL (IV EQUAZIONE DI MAXWELL)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{conc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{con } \partial S = \gamma$$

ESEMPIO:

Condensatore piano con armature circolari che genera un campo elettrico  $E(t)$  e all'interno del condensatore - s il disco



$$i_{\text{conc}} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(t) 2\pi r$$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(t) \pi r^2$$

$$i_{sp} = \epsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E(t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow B(t) 2\pi r = \epsilon_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{r}{2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \hat{t}$$

Varia nel tempo  
induce un campo elettrico...

## ONDE ELETROMAGNETICHE

ERCOLESSI - 11/5/2020

Vogliamo arrivare a ricavare le equazioni delle onde che ci permette di capire come anche nel vuoto (senza sorgenti di carica/ corrente) possiamo avere un campo magnetico che si autopropaga sotto forma di onda

Ricordiamoci le equazioni di Maxwell per  $\vec{E}(x, y, z, t)$ ,  $\vec{B}(x, y, z, t)$  in forma integrale

$$\text{I. } \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\text{II. } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\text{III. } \int_Y \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\text{IV. } \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

con  $S$  una qualunque superficie chiusa nelle prime 2, nelle ultime 2 c'è una qualsiasi superficie chiusa che ha la curva  $\gamma$  come bordo  $\partial S = \gamma$

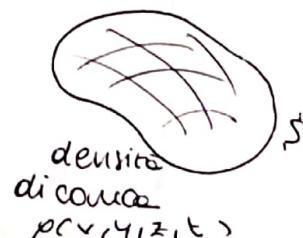
Vogliamo scriverle come equazioni differenziali

$$1. \text{ Scriviamo } Q_{\text{int}} = \int_V \rho dV$$

$$\text{dove } V \text{ è t.c. } \partial V = \gamma$$

Analogamente per la corrente:

$$i_c = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{l}$$



densità  
di corrente



$\vec{j}(x,y,z,t)$  = vettore che ha stessa dir. e verso della corrente e la quantità di carica che attraversa di in un tempo infinitesimo

Ricordiamo i teoremi di Stokes:  
Ci permettono di scrivere:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla \cdot \vec{E}) dV$$

// Divergenza

$\partial V = \gamma$  verso

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

e quindi  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

per cui, se  $S$  chiura

$$\text{cioè } \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial z} = \frac{\rho(x,y,z,t)}{\epsilon_0}$$

I equazioni di Maxwell in forma differenziale

$$2. \text{ Verifichiamo la II: } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0 \quad \text{e } S \text{ chiura}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

## 3. III eq. di Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

↓

teorema di Stokes: portante dentro perché  $S$  non dipende dal tempo

$$\int (\vec{V} \times \vec{E}) d\vec{l} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

↓ diventa divisa parziale

¶ S.t.c.  $\partial S = \gamma$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## 4. IV eq. di Maxwell

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_{\text{conc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

↑ fatto dentro  
come integrare  
solo dentro

$$\int (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{l} = \mu_0 \int J_{\text{conc}} d\vec{l} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} \quad \# J: \partial l = \gamma$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_{\text{conc}} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Quindi: 4 equazioni di Maxwell in forma differenziale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

equazioni lineari alle derivate parziali non omogenee

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

↓ 8 equazioni

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

(le ultime 2 sono vettoriali  $\rightarrow$  3 componenti ciascuna)  
(solo 6 variabili)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Per  $\rho$  e  $\vec{J}$  generiche diventano molto difficili da risolvere.

Vedremo solo il caso nel vuoto, dove

$$\rho = \vec{J} = 0$$

Diventano equazioni omogenee.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Nel caso statico, quando i campi non dipendono dal tempo:

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow$$

L'unica soluzione è che  $\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 \text{ cost.}$   
e  $\vec{B}(x, y, z, t) = B_0 \text{ cost.}$

$$\text{Sceglieremo } E_0 = B_0 = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{B} = 0 \quad \forall x, y, z$$

Maxwell mostra che in questo caso la soluzione costante è l'unica

Nel caso non statico:

### EQUAZIONE DI ONDA

Derivando la III eq:  $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) &= \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times \vec{B} \right) = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \\ &\quad \text{identità vettoriale} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left[ -\nabla^2 \vec{B} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{B}) \right] = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} (-\nabla^2 \vec{B})$$

$$-\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \nabla^2 \vec{B} = -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad \text{COSTANTE UNIVERSALE}$$

velocità della luce

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{B} = 0 \quad (\text{per ogni } x, y, z)$$

### EQUAZIONE DELLE Onde

In modo analogo si ricava per il campo elettrico:  $\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \vec{E} = 0$

2 equazioni in cui  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  sono separati  
 le componenti di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  soddisfano l'equazione  
 delle onde  $\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] f(x, y, z, t) = 0$

Così facendo abbiamo separato  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , ma  
 anche tutte le componenti di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e  
 si può  $\Rightarrow$  più facile da studiare

Oss. non è possibile fare re contrario:  
 partire dall'eq. delle onde e tornare all'eq.  
 di Maxwell.

Soluz. dell'eq delle Onde  $\nabla^2 f = 0$  che soddisfino  
 le eq. di Maxwell

Vogliamo adesso vedere come sono fatte le soluzioni  
 dell'equazione delle onde

TEOREMA: ogni funzione del tipo

$$f_{\pm}(x, y, z, t) = f(\vec{q} \cdot \vec{x} \pm \omega t) \quad \text{con } \vec{q} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R}^+$$

se  $|\vec{q}|c = \omega$ , allora  $f$  soddisfa l'equazione  
 delle onde ( $f$  almeno  $C^2$ )

$$\text{Dim: } w_{\pm} = \vec{q} \cdot \vec{x} \pm \omega t$$

$$\frac{\partial w_{\pm}}{\partial x} = q_x, \quad \frac{\partial w_{\pm}}{\partial y} = q_y, \quad \frac{\partial w_{\pm}}{\partial z} = q_z, \quad \frac{\partial w_{\pm}}{\partial t} = \pm \omega$$

$$\frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_{\pm}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(w_{\pm})] = \frac{\partial f}{\partial w_{\pm}} \cdot \frac{\partial w_{\pm}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w_{\pm}} \cdot q_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [f(w_{\pm})] = \frac{\partial(\partial f / \partial w_{\pm})}{\partial x} q_x = \frac{\partial^2 f}{\partial w_{\pm}^2} \cdot \frac{\partial w_{\pm}}{\partial x} q_x = \frac{\partial^2 f}{\partial w_{\pm}^2} q_x^2$$

analogamente:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(w_{\pm})] = \frac{\partial^2 f}{\partial w_{\pm}^2} q_y^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [f(w_{\pm})] = \frac{\partial^2 f}{\partial w_{\pm}^2} q_z^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [f(w_t)] = \frac{d^2 f}{d w_t^2} w_t^2$$

Sostituendo queste in  $\left[ \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] f = 0$  otteniamo

$$\frac{d^2 f}{d w_{\pm}^2} \left[ q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 - \frac{1}{c^2} w^2 \right] = 0$$

se questo è zero vale l'identità  $\forall f$

$$\Leftrightarrow |\vec{q}|^2 - \frac{w^2}{c^2} \Leftrightarrow c|\vec{q}| = w$$

ESEMPIO:  $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z) \in \mathbb{R}^3$  fissato

Sceglio un sistema di riferimento in  $\mathbb{R}^3$  t.c.  $\vec{q} = \vec{q}^0 = (q_1, 0, 0)$

$$f = (q_x \pm wt) \quad \text{e sia } w = |\vec{q}|/c$$

(consideriamo  $q > 0 \Rightarrow |\vec{q}| = q$ )

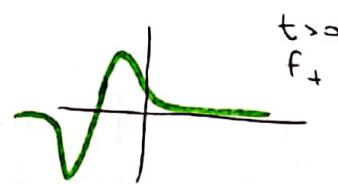
$$\text{Allora } f = (q_x \pm qct) = f(q(x \pm ct))$$

f funzione solo di  $x$

$$\text{per } t=0 \Rightarrow f = f(q_x)$$

$$\text{per } t > 0 \Rightarrow f_{\pm} = e^{i\omega t}$$

la stessa funzione  $f$   
traslata su destra  
o sinistra di  $\pm qct$



che soddisfa l'equaz.

Una funzione delle onde ha sempre lo stesso profilo a tempi diversi, ma traslato in maniera costante nel tempo

⇒ come la propagazione di un impulso nel tempo con velocità costante  $c$  traslaziono

Tutte le sol. dell'eq. delle onde sono fatte con

oss: L'eq delle onde è lineare: se  $f_1, f_2$  sono due soluzioni, allora  $\alpha f_1 + \beta f_2$  è ancora una soluzione  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Cerchiamo di capire se esiste un set di soluzioni che genera tutte le altre  
di più dimostrare che

$$f_1(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) = \cos(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad q \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R}$$

$$f_2(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) = \sin(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

funzioni periodiche lin. indipendenti  $\Rightarrow$   
al variare di  $q$  e  $\omega$  permettono di trovare  
soluzioni dell'eq.

Una qualunque sol. dell'eq. delle onde  
si scrive come combinaz. lineare di  $f_1, f_2$   
al variare di  $\vec{q} \in \mathbb{R}^3, \omega \in \mathbb{R}$  (Trasformate di Fourier)

Studiamo questo tipo di soluzioni (che noi  
congetturo si ottengono tutte)

Notazione compatta (compresa):

$$f(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t) = A e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

( $f_1$  = parte reale,  $f_2$  = parte immaginaria)

Tornando all'esempio di prima,

$$\vec{q} = q \hat{c} \quad q > 0 \quad q c = \omega$$

$$f_2(q \cdot x - qct) = \sin(qx - \omega t)$$

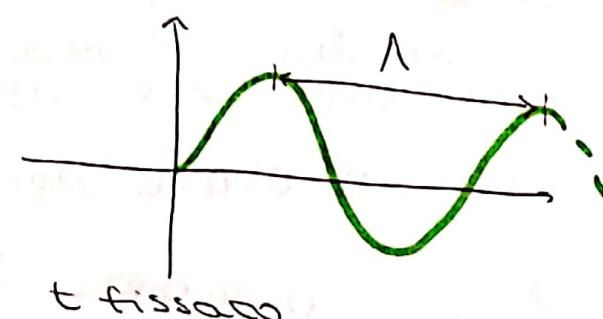
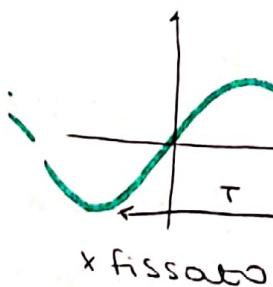
per  $t$  fissato  $\Rightarrow$   $f_2$  periodica in  $x$  con periodo

$$\Lambda = \frac{2\pi}{q}$$

per  $x$  fissato  $\Rightarrow$   $f_2$  periodica in  $t$  con

$$\text{periodo } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{q c} = \frac{1}{c}$$

legame tra i periodi:  $\Lambda = c T$



$\Lambda$  = LUNGHEZZA D'ONDA

$T$  = PERIODO OSCILLAZIONE

$\omega$  = PULSAZIONE DELL'ONDA

$v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} =$  FREQUENZA DELL'ONDA

$$\frac{\partial B_4}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_0^4 e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}) = R^4 e^{i(q_x - \omega t)},$$

Abbiamo detto che  $f_2$  soluzione generale dell'eq. delle onde e che è la  $\vec{q}$  componente del campo elettrico e del campo magnetico

dai cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_y = E_0^x e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)} \\ E_4 = E_0^4 e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)} \\ E_2 = \dots \\ B_x = \dots \\ B_y = \dots \\ B_z = \dots \end{array} \right.$$

$\vec{q}$  = VETTORE DI ONDA

$$\text{con } |\vec{q}|c = \omega \quad (\vec{q}'|c = \omega')$$

$q$  e  $\omega$  potrebbero al massimo essere tutte diverse per  $E$  e  $B$ ; basta che valga la rel.  
 $|\vec{q}|c = \omega$

andiamo ora a

sostituire nelle eq. di Maxwell per vedere che condizioni ci sono tra i coefficienti

OSS: le eq. di Maxwell accoppiano tra di loro le derivate spazio-temporanee delle componenti di  $E$  e di  $B$ :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_0^x e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)} \quad (i q_x)$$

Poiché tutte le funzioni  $E_x, E_4, E_2, B_x, B_4, B_2$  hanno lo stesso esponente reale  
si dovrà avere necessariamente

$$\vec{q} = \vec{q}' = \dots$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' = \dots \quad \text{tutti uguali}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{B}_0 = (B_0^x, B_0^y, B_0^z)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}$$

$$\vec{E}_0 = (E_0^x, E_0^y, E_0^z)$$

$$\text{I eq: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} (E_0 e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_4}{\partial y} + \frac{\partial E_2}{\partial z} = E_0^x \frac{\partial}{\partial x} [e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}] +$$

$$+ E_0^y \frac{\partial}{\partial y} [e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}] + E_0^z \frac{\partial}{\partial z} [e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)}] =$$

$$= [E_0^x i q_x + E_0^y i q_y + E_0^z i q_z] e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)} =$$

$$= [\vec{E}_0 \cdot \vec{q}] i e^{i(\vec{q}\vec{x}-\omega t)} = 0 \Leftrightarrow \vec{E}_0 \cdot \vec{q} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{q}$$

Quindi la sol. generica dell'eq. delle onde è la soluzione della I eq. di Maxwell

$$\Leftrightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{q}$$

allo stesso modo, dalla II eq. di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{B}_0 \cdot \vec{q} \Leftrightarrow \vec{q} \perp \vec{B}_0$$

Dalla terza:  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$E = E_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$B = B_0 e^{i(\vec{q} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

$$\nabla \times \vec{E}_0 \parallel \vec{B}_0 \quad e \nabla \times \vec{E}_0 \parallel \vec{E}_0 \Rightarrow \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$$

quindi  $(\vec{q}, \vec{E}_0, \vec{B}_0)$  deve essere una base ortogonale

ESEMPIO: Sia  $q \in \mathbb{R}^3$  e un vettore di riferimento in modo che  $q = (q_x, 0, 0)$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{i(q_x - \omega t)}$$

$$\vec{B} = B_0 e^{i(q_x - \omega t)}$$

Abbiamo  $\vec{E}_0 + \vec{q}$  e  $\vec{B}_0 \perp \vec{q} \Rightarrow$

$$E_0 = E_0^y \vec{j} + E_0^z \vec{k}$$

$$B_0 = B_0^y \vec{j} + B_0^z \vec{k}$$

Scelgo ora il sistema in modo che  
 $E_0 = E_0^y \vec{j}$  (notazione del piano  $\vec{j}, \vec{k}$ )

III eq di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad E = E_0^y \vec{j} e^{i(q_x - \omega t)}$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_x = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad ] \text{ perche } E_x = E_z = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = E_0^y e^{i(q_x - \omega t)} (iq)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \quad \text{poidue} \quad B_x = 0$$

$$\frac{\partial B_4}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_0^4 e^{i(qx - wt)}) = B_0^4 e^{i(qx - wt)} (-i\omega)$$

$$\frac{\partial B_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_0^2 e^{i(qx - wt)}) = B_0^2 e^{i(qx - wt)} (-i\omega)$$

uguagliando le componenti:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ B_0^4 e^{i(qx - wt)} (-i\omega) = 0 \\ B_0^2 e^{i(qx - wt)} (-i\omega) = -(\imath q e^{i(qx - wt)} E_0^4) \end{cases}$$

$$B_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow B_0^2 \omega = q E_0^4$$

$\Rightarrow (q \alpha \vec{i}, \vec{E} \alpha \vec{j}, \vec{B} \alpha \vec{k})$  terna di versori ortogonali  
di tensione

$$\text{Oss.: } B_0^2 = \frac{q}{\omega} E_0^4 = \frac{E_0^4}{c}$$

Relazione tra il modulo  
del campo elettrico e il  
modulo del campo  
magnetico

campo elettrico e magnetico ortogonali tra loro e  
alla direzione di propagazione

### DA MAXWELL A TEORIA DELL'OTTICA

18/5/2020

Riassumendo:

Equazione delle onde  
per le comp. di  $\vec{E}$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

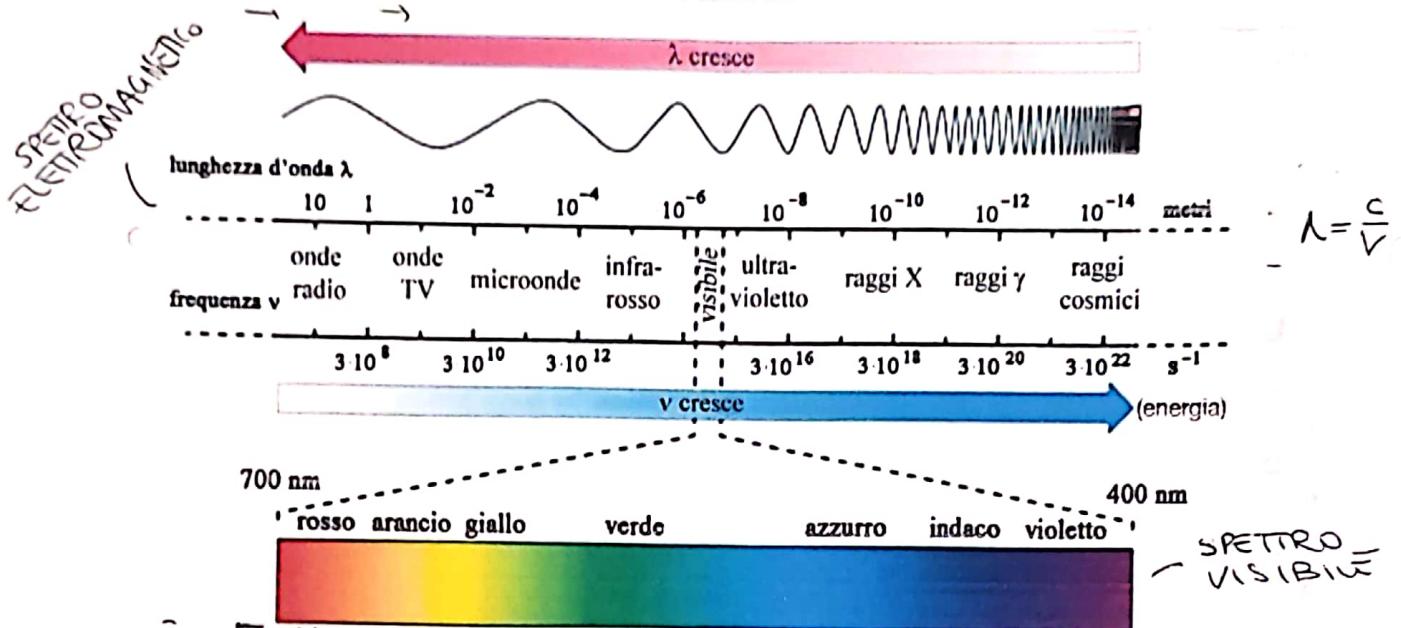
per le comp. di  $\vec{B}$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

(nel caso in cui l'onda si propaga solo  
lungo  $x$ )

Parametri che caratterizzano un'onda:

$E_0, B_0, |q|, \omega$  e direz. di propagazione

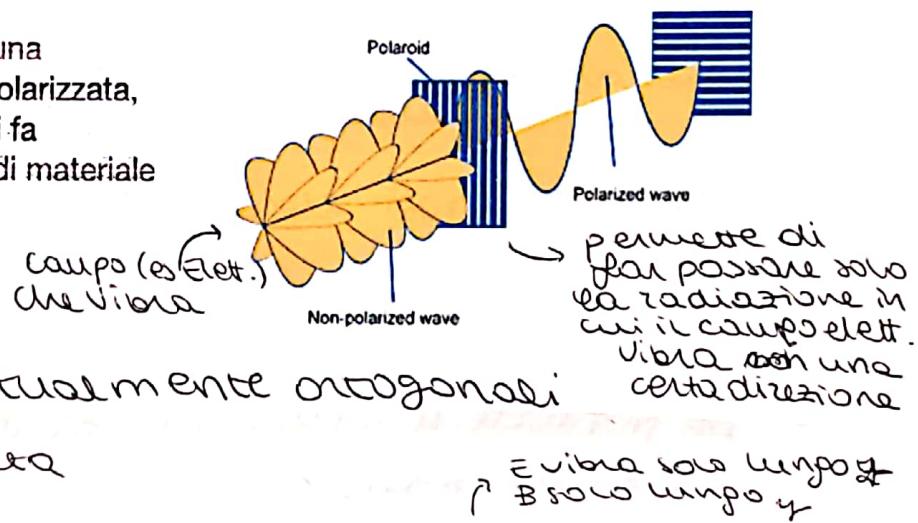


### Onda piana polarizzata

le ho dette eq. di Maxwell  
di ottenendo sovrapponendo onde

Siccome le Eq. di Maxwell sono lineari, possiamo formare delle onde e.m. sovrapponendo onde piane polarizzate, ovvero con  $\vec{E}, \vec{B}$  che vibrano su piani perpendicolari fissati.

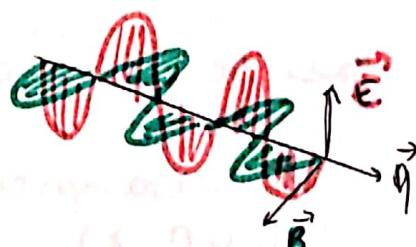
La luce prodotta dal sole o da una lampadina è tipicamente non polarizzata, ma può essere resa tale se la si fa passare attraverso una lamina di materiale polaroid.



$\vec{q}, \vec{E}, \vec{B}$  mutualmente ortogonali

onda monochromatica non polarizzata  
che si muova ad esempio lungo l'asse z:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{q} = q \hat{i} \\ \vec{E}(x, y, z) = E_0 \hat{j} e^{i(qx - \omega t)} \\ \vec{B}(x, y, z) = B_0 \hat{k} e^{i(qx - \omega t)} \end{array} \right.$$



$$I = \frac{1}{c \mu_0} \epsilon_0^2$$

INTENSITÀ DELLA RADIAZIONE

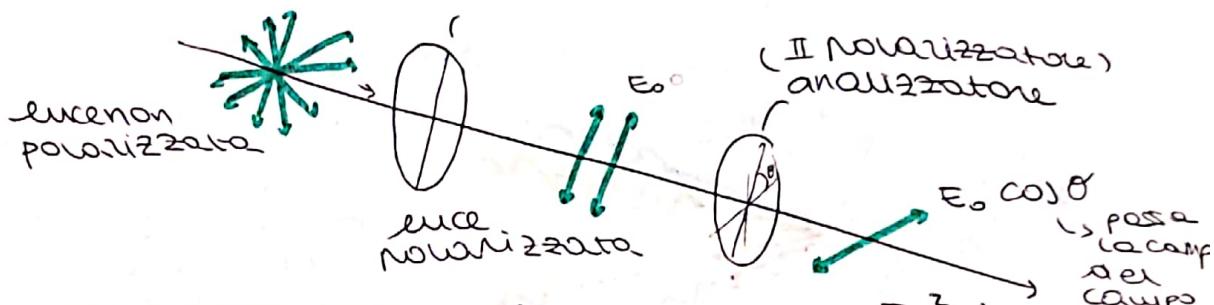
### POLARIZZAZIONE

90 Un filtro polarizzatore ha un esse

fissa le varie onde che arrivano, selezionando solo la componente nella direzione del suo asse

Con un secondo polarizzatore le cui assi formano un angolo  $\theta$  con le prime passa solo la proiettata del campo elettrico parallela lungo le nuove assi

I polarizzatore



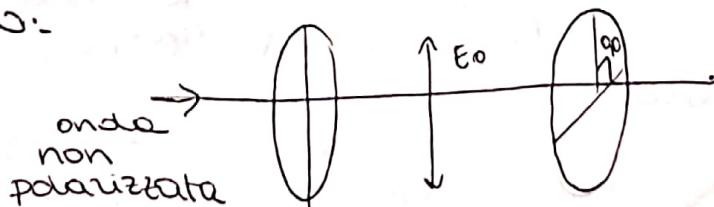
LEGGE DI MALUS (I entrante =  $I = \frac{E_0^2}{c\mu_0}$ )

$$I_{\text{out}} = \frac{E_0^{\text{out}}}{c\mu_0} = I \cos^2 \theta$$

(intensità luce dopo l'analizzatore)

massima se i 2 assi coincidono, minima (nula) se sono perpendicolari

ESERCIZIO:-

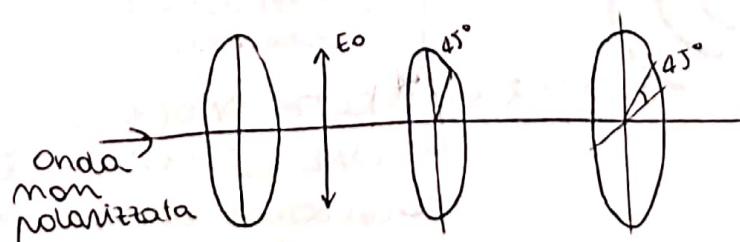


$$I_{\text{out}} = ?$$

↑

sono uguali?  
(NO)

↓

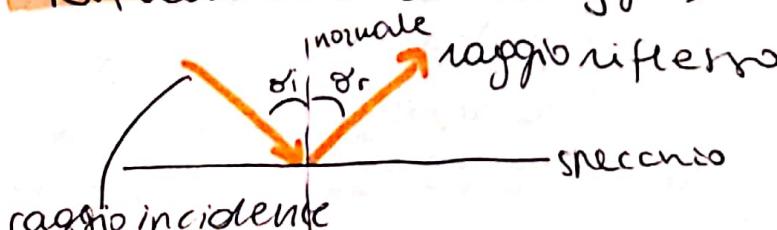


$$I_{\text{out}} = ?$$

FENOMENI OTTICI

Polarizzazione

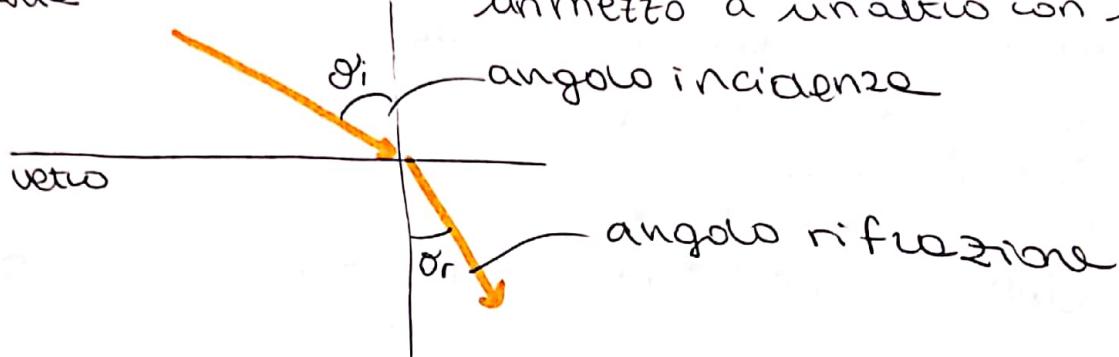
Riflessione dei raggi luminosi



$$\delta_i = \delta_r$$

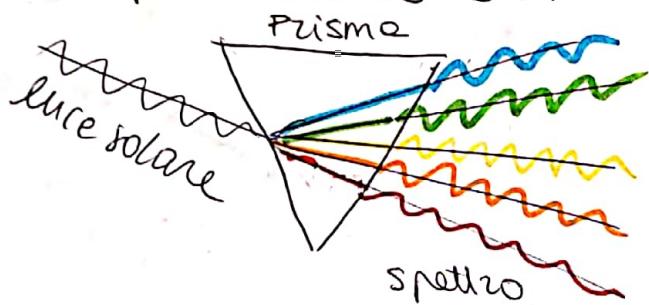
## Rifrazione:

come



→ i raggi di luce vengono deviati quando passano da un mezzo a un altro con densità diverse

## Esempio di Newton



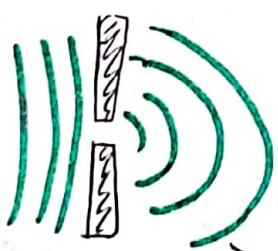
la luce viene deviata con angoli diversi a seconda della lunghezza d'onda della radiazione

Sulla legge della rifrazione si bene anche il funzionamento dell'occhio umano

## Diffrazione

→ dipende dal fatto che la luce è un'onda

onda che incide su un ostacolo



non prosegue 'diritta' come farebbe una pallottola  
(questo spiega perché sentiamo musica anche oltre un muro :))

l'onda si propaga anche ai lati dell'ostacolo  
(non solo nello dir. + all'ostacolo)

## Interferenza

→ più sorgenti che creano onde → quando le onde si sovrappongono vedo una figura di interferenza  
"bande chiare/scure"



punti in cui le onde interveroscano sommandosi a vicenda

→ punti in cui le onde si cancellano e vice versa

Dipendono dalla lunghezza d'onda

### ENERGIA DELLA RADIAZIONE ELETROMAGNETICA

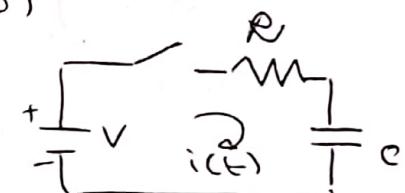
Energia trasportata dalle onde elettromagnetiche che trattiamo come soluzioni delle eq. di Maxwell.

Qual è il mezzo attraverso cui le onde di radiazione? Ribattito sull'etere  $\rightarrow$  non esiste. Non c'è bisogno di un mezzo  $\Rightarrow$  non sono particelle che vibrano  $\rightarrow$  ma l'energia trasportata dalle onde elettromag.

Vediamo 2 casi particolari

### CIRCUITO RC (In campo elettrico)

1 resistenza  $R$  e  
1 cond.  $C$  in serie  
collegati a una batteria  $V$



quando chiude l'interruttore inizia ad circolare una corrente  $i(t) \rightarrow$  dipende dal tempo

Il tutto si ferma quando lo stop si apre del condensatore  $i = 0 \text{ V}$

Energia immagazzinato nel condensatore attraverso il campo elettrico

$$V_R = i(t)R = \frac{dq}{dt}R$$

dop ai capi della resistenza

$$V_C = \frac{q(t)}{C}$$

dop ai capi del condensatore

$$V = V_R + V_C \Leftrightarrow \frac{V}{R} = \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC}$$

eq diff del I ordine a coeff costante, lineare, non omogenea

$$\text{soluz. generale: } Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{soluz. particolare non omogenea: } Q_p(t) = V_C$$

solt. generale non omogenea:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} + V_C$$

Cond. iniziale:  $Q(t=0) = 0$

Si ricava:  $Q(t) = V_C [1 - e^{-\frac{t}{RC}}]$

Considerazioni energetiche:

$$V = V_R + V_C \Leftrightarrow V dQ = V_R dQ + V_C dQ \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{V dQ}_{\substack{\text{Energie} \\ \text{fornite} \\ \text{dalla rete}}} = \underbrace{R i dQ}_{\substack{\text{energie} \\ \text{dissipate} \\ \text{dalle resistenze}}} + \underbrace{\frac{Q}{C} i dQ}_{\substack{\text{energie} \\ \text{immagazzinate} \\ \text{nella cond.}}}$$

sotto  
forma di  
campo elettrico

"legge di conservazione  
dell'energia"

$$U = \int_0^V V(Q') dQ' = \int_0^V \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 =$$

energia totale  
immagazzinata  
nel cond.

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d}\right)^2 (Ad) = \frac{\epsilon_0}{2} \epsilon^2 (\text{volume})$$

$\epsilon = V/d$

$$\Rightarrow \frac{U}{\text{volume}} = U = \frac{\epsilon_0}{2} \epsilon^2$$

densità  
di energia

questa formula vale  
sempre per qualunque  
campo elettrico

$$U_{el}(x, y, z, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}(x, y, z, t)^2$$

## CIRCUITO RL

al posto del condensatore  
c'è un solenoide cilindrico  
genera un campo magnetico al  
suo interno

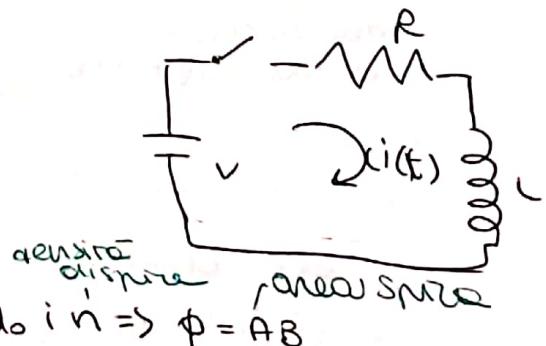
Induttanza. Nel solenoide:  $B = \mu_0 i n \Rightarrow \phi = AB$

Ragioniamo come prima

$i$  varia nel tempo  $\Rightarrow$

$B$  varia nel tempo  $\Rightarrow$

$\phi$  varia nel tempo



flusso nei circuiti  
spire

$$\Rightarrow \phi = \mu_0 i N n A$$

$\mu_0 A N n = \text{cost} =$

induttanza  
del solenoide

Si induce una f.e.m ai capi delle bobine:

$$V_L = \mathcal{E} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L \frac{di}{dt}$$

$$V_R = i(t) R$$

$$V = V_R + V_L \Leftrightarrow \frac{V}{L} = \frac{iR}{L} + \frac{di}{dt}$$

$$\text{Solu\z{z} generale: } i(t) = i_0 e^{-\frac{tR}{L}}$$

$$\text{Solu\z{z} part. non omog: } i_p(t) = \frac{V}{R}$$

$$\text{Solu\z{z} generale non omogenea: } i(t) = i_0 e^{-\frac{tR}{L}} + \frac{V}{R}$$

$$\text{Cond. iniziale: } i(t=0) = -\frac{V}{R}$$

$$\text{Solu\z{z}one: } i(t) = \frac{V}{R} \left[ 1 - e^{-\frac{tR}{L}} \right]$$

Considerazioni energetiche:  $\int L di = \int R di$

$$V = V_R + V_L \Leftrightarrow V dQ = R: di + L \frac{di}{dt} dQ$$

en. fornita dalla pile

en dissipate dalla varianza

en immag. del sole nasc.

energia per caricare le bobine:

$$U = \int L i^2 di = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 A n^2 l) \left( \frac{B}{\mu_0} \right)^2 =$$

$l = \mu_0 A n N = \mu_0 A n^2 l$

$B = \mu_0 i$

$$= \frac{1}{2 \mu_0} B^2 (A l) = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 (\text{volume})$$

$$\frac{U}{\text{volume}} = u = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$$

densità  
di energia

e vale sempre  
per qualsiasi  
campo magnetico

$$u_{\text{mag}}(x, y, z, t) = \frac{1}{2 \mu_0} |\vec{B}(x, y, z, t)|^2$$

DENSITÀ energia trasportata da un'onda elettromagnetica:

$$u(x, y, z, t) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 =$$
$$= \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{c^2} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\mu_0 c}$$

che si può scrivere in notazione vettoriale:

Vettore di Poynting:  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

Ricordiamo che  $\vec{q} = q \hat{i}$ ,  $\vec{q} \perp \vec{E} \perp \vec{B}$  ..

formano una terna ortonormale Oestensione

direzione / verso di  $\vec{S}$  → stesso delle onde

modulo di  $\vec{S}$ :  $S = \frac{\epsilon_0 B_0}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} = \epsilon_0 E_0^2 = u$