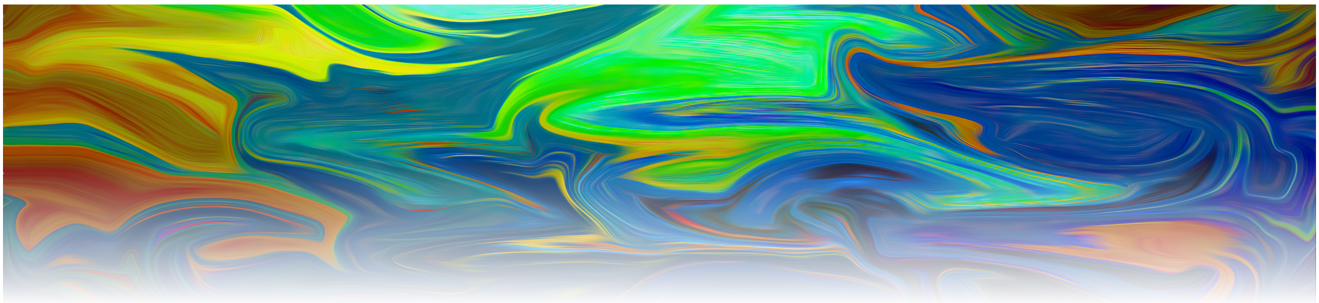

Per lo Scritto - Per lo scritto di Analisi 2

Appunti di Cupini - Dispense Prima Parte

Lista Teoremi non nelle dispense

- Corollario di Bolzano e Weierstrass

Lista di Teoremi

> 1 - Lo Spazio Euclideo
>
> - **D** Prodotto Scalare
> - **D** Metrica Euclidea
> - **D** Palla
> - **D** Insieme Limitato
> - **D** Punto Interno e Interno di un Insieme
> - **D** Insieme Aperto
> - **D** Insieme Chiuso
> - **E** Sia (X, d) uno spazio metrico, valgono le seguenti:
>   1. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di aperti di X, allora $\bigcup_{i\in I} A_i$ è un aperto di X
>   2. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia finita di aperti di X, allora $\bigcap_{i\in I} A_i$ è un aperto di X
>   3. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi di X, allora $\bigcap_{i\in I} A_i$ è un chiuso di X
>   4. Se $\{A_i\}_{i\in I}$ è una famiglia finita di chiusi di X, allora $\bigcup_{i\in I} A_i$ è un chiuso di X
> - **D** Punto di Accumulazione
> - **D** Derivato di un insieme
> - **D** Punto di Frontiera e Frontiera di un insieme
> - **D** Chiusura di un Insieme
> - **D** Topologia Indotta
> - **D** Segmento
> - **D** Insieme Convesso
> - **D** Poligonale
> - **D** Insieme Connesso per Poligonali
> - **D** Arco
> - **E** Ogni poligonale è un arco
> - **D** Insieme Connesso per Archi
> - **D** Insieme Connesso
> - **P** Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, allora A è connesso se e solo se viene non viene negata la definizione di insieme connesso
> - **E** Sia $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo, allora valgono
>   1. Se A è connesso per poligonali, allora è connesso per archi
>   2. Se A è connesso per archi, allora è connesso
> - **E** Caratterizzazione degli aperti connessi

- **E** Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ lo spazio metrico euclideo e sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, allora valgono:
    1. $\{A \text{ aperto e convesso}\} \subseteq \{A \text{ aperto e connesso per poligonali}\}$
    2. $\{A \text{ aperto e connesso per poligonali}\} \subseteq \{A \text{ aperto e connesso per archi}\}$
    3. $\{A \text{ aperto e connesso per archi}\} \subseteq \{A \text{ aperto e connesso}\}$
- **E** Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:
    1. I intervallo
    2. I convesso
    3. I connesso per poligonali
    4. I connesso per archi
    5. I connesso
- **D** Successione Convergente
- **E** Unicità del Limite
- **E** Caratterizzazione dei Chiusi
- **E** Caratterizzazione dei Punti di Accumulazione (o del Derivato di un Insieme)
- **D** Insieme di Livello

---

2 - Limiti di Funzioni a Più Variabili

- **D** Funzione a più Variabili
- **E** Caratterizzazione del Limite
- **T** Siano $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$. Siano $x_0 \in D(B)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ allora $\lim_{x \to x_0} f|_B(x_0) = y_0$
- **E** Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $B \subsetneq A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $x_0 \in D(B)$ e $y_0 \in \mathbb{R}^m$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f|_B(x_0) = y_0$ e $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ allora tale limite vale $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
- **E** Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $B, C \subsetneq A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in D(B) \cap D(C)$. Se $\exists \lim_{x \to x_0} f|_B(x)$ e $\exists \lim_{x \to x_0} f|_C(x)$ ma hanno valori diversi, allora $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$
- **T** Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A_1, A_2 \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $A = A_1 \cup A_2$. Se $x_0 \in D(A_1) \cap D(A_2)$ e $\exists \lim_{x \to x_0} f|_{A_1}(x)$ e $\exists \lim_{x \to x_0} f|_{A_1}(x)$ e sono uguali a $\ell \in \mathbb{R}^m$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
- **L** Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, allora $B(x_0, r) \setminus \{x_0\} = \{x_0 + \rho\xi : \rho \in]0, r[, \xi \in \mathbb{S}^{n-1}\}$
- **T** Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\exists r_0 >: B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\} \subseteq A$ e sia $\ell \in \mathbb{R}^m$. Allora sono equivalenti: $(*)$
    1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$
    2. $\lim_{x \to x_0} \sup_{\xi \in \mathbb{S}^{n-1}} \|f(x_0 + \rho\xi) - \ell\| = 0$
    3. $\exists r \in]0, x_0], \exists \varphi :]0, r[\to [0, +\infty[$ tale che:
        a. $\|f(x_0 + \rho\xi) - \ell\| \leq \varphi(\rho),\ \forall \rho \in]0, r[, \forall \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$
        b. $\lim_{\rho \to 0^+} \varphi(\rho) = 0$
    4. $\exists r \in]0, x_0], \exists \varphi :]0, r[\to [0, +\infty[$ tale che:
        a. $\|f(x) - \ell\| \leq \varphi(\|x - x_0\|),\ \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$
        b. $\lim_{\rho \to 0^+} \varphi(\rho) = 0$
- **E** Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, con $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\exists r_0 > 0 : B((x_0, y_0), r_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \subseteq A$. Sia $\ell \in \mathbb{R}^m$. Allora sono equivalenti:
    1. $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)) = \ell$
    2. $\exists r \in]0, x_0], \exists \varphi :]0, r[\to [0, +\infty[$ tale che:
        a. $\|f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) - \ell\| \leq \varphi(\rho),\ \forall \rho \in]0, r[, \forall \theta \in [0, 2\pi]$
        b. $\lim_{\rho \to 0^+} \varphi(\rho) = 0$
- **E** Per ogni $\alpha > 0$ esistono $c_1(\alpha), c_2(\alpha) > 0$ tali che $c_1(\alpha)(x^2 + y^2)^{\alpha/2} \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha \leq c_2(\alpha)(x^2 + y^2)^{\alpha/2}$
- **D** Funzione Continua
- **D** Funzione Sequenzialmente Continua
- **E** Caratterizzazione della Continuità in un punto
- **E** Caratterizzazione Topologica della Continuità in un punto

- **E** Sia $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, allora vale la seguente uguaglianza: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |u_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2$
- **E** Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f = (f_1, \dots, f_m)$. Sia $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{R}^m$ allora sono equivalenti:
  1. $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \ell$
  2. $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \lim_{x \to \overline{x}} f_i(x) = \ell_i$
- **E** Teorema di limite di una funzione composta
- **E** Teorema di limite di una somma
- **E** Teorema di limite di un prodotto
- **E** Teorema del confronto
- **E** Teorema dei Carabinieri
- **E** Teorema del limite del reciproco
- **E** Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. f è continua se e solo se per ogni U aperto di $\mathbb{R}^m$ esiste un O aperto di $\mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(U) = O \cap A$
- **T** Teorema di Bolzano $(*)$
- **T** Teorema di Bolzano (per archi)
- **C** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con f continua, allora vale: A connesso $\Rightarrow f(A)$ intervallo
- **D** Funzione limitata
- **D** Massimo e minimo di una funzione
- **T** Teorema di Weierstrass
- **C** Siano $(\mathbb{R}^n, d)$ spazio metrico euclideo e $A \subseteq X$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $A \subseteq X$ è compatto e f è continua, allora f è limitata e ha massimo e minimo
- **C** di Bolzano e Weierstrass caso $m = 1$

---

3 - Cenni di Algebra Lineare

- **L** Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz
- **D** Norma di Frobenius
- **D** Norma di un Operatore Lineare
- **E - LEMMA 2** Siano $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ e siano $A \in M_{m \times n}$ e $B \in M_{p \times m}$ le matrici associate, allora valgono:
  1. $\|T(v)\| \leq \|T\| \cdot \|v\|$ o equivalentemente $\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$
  2. $\|T\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}$ o equivalentemente $\|A\| \leq \|A\|_F$
  3. $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ o equivalentemente $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$
- **L - LEMMA 3** Siano $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $S \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}?n)$ tali che $S \circ T = id_{\mathbb{R}^n}$ allora T è iniettiva e $n \leq m$
- **L - LEMMA 4** Sia $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ invertibile, allora:
  1. $n = m$
  2. $\|T\|, \|T^{-1}\| \neq 0$
  3. Per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha che $\|T(v)\| \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|}\|v\|$
- **D** Minori di Testa
- **D** Minori Principali
- **D** Matrice definita positiva
- **T** Caratterizzazione delle matrici definite positive
- **E** Caratterizzazione delle matrici simmetriche definite positive
- **E** Caratterizzazione delle matrici simmetriche definite negative
- **E** Caratterizzazione di Sylvester per $A \geq 0$
- **E** Caratterizzazione di Sylvester per $A \geq 0$, caso 2×2
- **E** Caratterizzazione di Sylvester per $A \leq 0$
- **E** Caratterizzazione di Sylvester per $A \leq 0$, caso 2×2
- **T** I Condizione sufficiente per le matrici simmetriche indefinite

4 - Calcolo Differenziale

- **D** Base canonica
- **D** Derivabilità per funzioni a valori reali
- **D** Funzione derivabile
- **D** Gradiente
- **D** Derivate direzionali
- **E** Le derivate parziali, se esistono, sono delle derivate direzionali rispetto ai versori della base canonica
- **D** Differenziabilità per funzioni a valori reali
- **T** Caratterizzazione della applicazione T ed esistenza delle derivate direzionali $(*)$
- **T** Caratterizzazione della Differenziabilità
- **E** f differenziabile in $\overline{x}$ implica f derivabile in $\overline{x}$
- **E** f differenziabile in $\overline{x}$ implica f ha tutte le derivate direzionali in $\overline{x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = T(\overline{x})(\lambda) = \langle \nabla f(\overline{x}), \lambda \rangle$
- **E** Gradiente e direzione di massima pendenza
- **T** Differenziabilità implica continuità
- **T** Siano $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $f : B(\overline{x}, r) \to \mathbb{R}$. Se esistono tutte le derivate parziali in $\overline{x}$ ed esse sono continue, allora f è differenziabile in $\overline{x}$ (caso $m = 2$ e $m \neq 2$) $(*)$
- **E** Corollario: Legame tra C^1, differenziabilità e continuità
- **D** Componenti di una funzione a valori vettoriali
- **D** Derivabilità per funzioni a valori vettoriali
- **D** Differenziabilità per funzioni a valori vettoriali
- **D** Matrice Jacobiana
- **E** Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tale che $f = (f_1, \ldots, f_m)$ e sia $\overline{x} \in int(A)$, allora sono equivalenti:
  1. f differenziabile in $\overline{x}$
  2. $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, f_i differenziabile in $\overline{x}$

     Inoltre l'applicazione lineare T soddisfacente tale definizione è tale che: $T(x) = Df(\overline{x})(x) \in \mathbb{R}^n$
- **E** Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subseteq \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:
  1. f è differenziabile
  2. f è derivabile
- **D** Differenziale di f a valori vettoriali
- **E** Derivabilità, differenziabilità e C^1 di una somma
- **E** Derivabilita, differenziabilità e C^1 di un prodotto a valori reali
- **D** Continuità di una funzione a valori matriciali
- **E** Siano $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in int(A)$. Sono equivalenti:
  1. f è differenziabile in $\overline{x}$
  2. Esiste $\Phi : A \to M_{m \times n}$ continua tale che: $f(x) = f(\overline{x}) + \Phi(x)(x - \overline{x})$ per ogni $x \in A$ e in tal caso $\Phi(\overline{x}) = Df(\overline{x})$
- **T** Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{x} \in int(A)$. Sia $g : B \to \mathbb{R}^p$ con $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $f(A) \subseteq B$ e $f(\overline{x}) \in int(B)$. Allora se f è differenziabile in $\overline{x}$ e g è differenziabile in $f(\overline{x})$, valgono: $(*)$
  1. $g \circ f$ è differenziabile in $\overline{x}$
  2. Vale l'uguaglianza $d(g \circ f)(\overline{x}) = dg(f(\overline{x})) \circ df(\overline{x})$
  3. Vale l'uguaglianza $D(g \circ f)(\overline{x}) = Dg(f(\overline{x})) \cdot Df(\overline{x})$
- **E** Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ con I intervallo di $\mathbb{R}$ e $\overline{t} \in int(I)$. Sia $f : B \to \mathbb{R}^m$ con $f(I) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f(\overline{t}) \in int(B)$. Se f è derivabile in $\overline{t}$ e B è differenziabile in $f(\overline{t})$, allora $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $\overline{t}$ e vale $D(f \circ \gamma)(\overline{t}) = Df(\gamma(\overline{t})) \cdot \gamma'(\overline{t})$
- **E** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e siano $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $g : B \to \mathbb{R}$. Se f e g sono differenziabili e $f(A) \subseteq B$, allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ è differenziabile e vale $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(\overline{x}) = \sum_{i=j}^{m} \dfrac{\partial g}{\partial y_j}(f(\overline{x})) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})$
- **C** Composizione di funzioni C^1
- **D** Derivate parziali di secondo ordine
- **D** Matrice Hessiana e Hessiano
- **T** Teorema di Schwartz (I versione) $(*)$

- **E** Teorema di Schwartz (II versione)
- **E** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$ con f derivabile fino al secondo ordine. Se $f_{x_i x_j}$ e $f_{x_j x_i}$ sono continue in $\overline{x} \in int(A)$, allora sono uguali
- **E** Sia $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile fino al secondo ordine, allora la matrice Hessiana è simmetrica
- **D** Polinomio di Taylor di primo grado
- **D** Iperpiano Tangente
- **E** Siano $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $f : B(\overline{x}, r) \to \mathbb{R}$. Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e sia $F : D =]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}[\to \mathbb{R}$ definita come $F(t) = f(\overline{x} + tv)$.
  1. Se f è differenziabile in $B(\overline{x}, r)$ allora F è derivabile in D e vale $F'(t) = \langle \nabla f(\overline{x} + tv), v \rangle$
  2. Se f è $C^1(B(\overline{x}, r))$ allora F è $C^1(D)$ e vale $F'(t) = \langle \nabla f(\overline{x} + tv), v \rangle$
  3. Se f è $C^2(B(\overline{x}, r))$ allora F è $C^2(D)$ e vale $F'(t) = \langle \nabla f(\overline{x} + tv), v \rangle$ e $F''(t) = \langle D^2 f(\overline{x} + tv)v, v \rangle$
- **T** Formula di Taylor con resto di Lagrange ($f \in C^1$)
- **T** Formula di Taylor con resto di Lagrange ($f \in C^2$)
- **T** Formula di Taylor con resto di Peano ($f \in C^2$) $(*)$
- **T** Siano A aperto di $\mathbb{R}^n$ e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ differenziabile. Siano $x, \overline{x}$ diversi in $int(A)$ tali che il segmento congiungente sia contenuto in A, allora esiste $\xi \in]x, \overline{x}[$ tale che $\langle f(x) - f(\overline{x}), v \rangle = \langle Df(\xi)(x - \overline{x}), v \rangle$

---

5 - Funzioni Convesse

- **D** Funzione Convessa
- **E** Sia $g : I \to \mathbb{R}$, allora è crescente se e solo se $(g(t) - g(s))(t - s) \geq 0$ per ogni $t, s \in I$
- **E** Caratterizzazione del I ordine per le funzioni convesse
- **E** Caratterizzazione del II ordine per le funzioni convesse

---

6 - Massimi e Minimi Relativi

- **D** Punti Estremanti Locali
- **D** Punti Estremanti Locali Forti
- **D** Punto Critico
- **D** Punto di Sella
- **T** Teorema di Fermat
- **T** Condizione necessaria del II ordine per gli estremanti locali
- **T** Condizione sufficiente del II ordine per i punti di sella
- **T** Condizione sufficiente del II ordine per gli estremanti locali
- **E** Condizione sufficiente del II ordine per gli estremanti locali ($n = 2$)
- **P** Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$ con $f \in C^2(A)$. Supponiamo esista $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ con I intervallo reale non degenere, tale che è di classe C^1 con derivata sempre diversa da zero e valga l'inclusione $\{\gamma(t) : t \in I\} \subseteq \{x \in A : \nabla f(x) = 0\}$, allora $\det D^2 f(\gamma(t)) = 0$

---

7 - Teorema di Invertibilità Locale

- **D** Funzione Aperta
- **E** **LEMMA 5**: Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Se esistono $\phi : X \to Y$ biunivoca e $\psi = \phi^{-1} : Y \to X$ continua, allora ϕ è una funzione aperta
- **D** Funzione Lipschitziana
- **D** Contrazione
- **L** **LEMMA 6**: Sia $f : (X, d) \to (Y, d')$ una funzione lipschitizana, allora è continua
- **D** Punto Fisso
- **T** Teorema di Banach - Caccioppoli

- **C** Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $f : (X, d) \to (X, d)$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che f^m sia una contrazione, allora esiste un unico punto fisso.
- **L** Sia $T : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A aperto, definita come $v \mapsto Mv$ con $M \in M(m \times n)$, allora:
  1. $T \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$
  2. $DT(x) = M \in M(m \times n)$
- **D** Omeomorfismo e Differomorfismo
- **D** Funzione Localmente Iniettiva
- **E** Siano A aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}^m$, allora sono equivalenti:
  1. f è localmente iniettiva
  2. Per ogni $x \in A$ esiste un intorno $V \subseteq A$ di x tale che $f|_{V \cap A}$ è iniettiva
- **D** Diffeomorfismo Locale
- **L** **LEMMA 7** Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ e $f \in C^1$ su A, allora la funzione $x \mapsto \|df(x)\|$ è continua
- **L** **LEMMA 8** Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$ e f differenziabile. Siano $x, \overline{x} \in A$ tali che $[x, \overline{x}] \subseteq A$. Allora esiste $z \in]x, \overline{x}[$ tale che $\|f(x) - f(\overline{x})\| \leq \|Df(z)\| \cdot \|x - \overline{x}\|$
- **T** Invertibilità Locale $(*)$
- **T** Teorema di Dini o delle funzioni implicite $(*)$
- **D** Gradiente ortogonale all'insieme di livello

---

8 - Massimi e Minimi Vincolati

- **D** Varietà Differenziale
- **P** Siano $1 \leq p < n$ e sia $V \subseteq \mathbb{R}^+$ un insieme aperto. Se $\varphi : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ è una funzione di classe C^k, $k \geq 1$, allora $Gr(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in V\}$ è una varietà di dimensione p in $\mathbb{R}^n$ di classe C^k con equazione (globale) $F = 0$ pari a $F(x, y) = \varphi(x) - y$
- **D** Vettore tangente ad una varietà
- **D** Piano tangente ad una varietà
- **T** Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà differenziabile di classe C^k con $k \geq 1$ e di dimensione p $(1 \leq p < n)$ e sia $F = 0$ una equazione locale di M e sia $\overline{x} \in M$. Allora $T_{\overline{x}}M$ è uno spazio vettoriale di dimensione p e $T_{\overline{x}}M = Ker(DF(\overline{x}))$ $(*)$
- **T** Caratterizzazione di $T_{\overline{x}}M^{\perp}$
- **D** Punti Estremanti Locali Vincolati
- **E** Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $M \subseteq A$ una varietà differenziale di classe C^k e di dimensione p ($k \geq 1$ e $1 \leq p < n$). Sia $\overline{x} \in M$ e $f : A \to \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:
  1. $\overline{x} \in M$ è un punto critico vincolato di f su M
  2. $\nabla f(\overline{x}) \in T_{\overline{x}}M^{\perp}$
- **T** Teorema di Fermat per gli estremanti locali vincolati o condizione necessaria del I ordine per gli estremanti locali vincolati
- **T** Teorema dei moltiplicatori di Lagrange
- **E** Siano $f, F : A \to \mathbb{R}$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e $f, F \in C^k(A)$ e sia $M := \{x \in A : F(x) = 0\}$. Sia $\overline{x} \in M$ tale che $\nabla F(\overline{x}) = 0$. Se $\overline{x} \in A$ è punto estremante relativo di $f|_M : M \to \mathbb{R}$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che:
  1. $\nabla f(\overline{x}) = \lambda \nabla F(\overline{x})$
  2. $F(\overline{x}) = 0$

---

9 - Integrali Curvilinei

- **D** Curva
- **D** Sostegno di una curva
- **D** Curva di classe C^1
- **D** Curva regolare
- **D** Curva Semplice
- **D** Estremi di una curva
- **D** Curva Chiusa

- **D** Vettore tangente ad una curva
- **D** Cambiamento ammissibile di un parametro
- **D** Curve equivalenti
- **E** La relazione $\sim$ delle curve equivalenti è una relazione di equivalenza
- **P** Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ due curve. Se esse sono equivalenti, allora γ è semplice se e solo se φ lo è
- **P** Siano $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ due curve equivalenti. Allora valgono
  1. $\gamma^* = \varphi^*$
  2. γ è C^1/regolare se e solo se lo è φ
- **D** Curve equivalenti equiorientate
- **D** Poligonale associata ad una curva
- **D** Lunghezza di una curva
- **E** Teorema di Rettificabilità
- **P** Se γ e φ sono curve di classe C^1 equivalenti, allora $L(\gamma) = L(\varphi)$
- **D** Lunghezza di γ^*
- **D** Curve semplici aventi per sostegno grafici di funzioni di una variabile reale
- **D** Equazione polare
- **D** Integrale curvilineo di prima specie
- **E** Proprietà dell'Integrale Curvilineo
- **D** Baricentro della curva
- **E** Teorema di Guldino

---

10 - Forme Differenziali e Campi Vettoriali

- **D** Forma Differenziale / Campo Vettoriale
- **D** Lavoro su Forma Differenziale / Campo Vettoriale
- **D** Forma Differenziale Esatta / Campo Vettoriale Conservativo
- **D** Forma Differenziale Chiusa / Campo Vettoriale Irrotazionale
- **T** Condizione Necessaria affinché F campo vettoriale di classe C^1 sia conservativa
- **D** Insieme Semplicemente Connesso
- **D** Insieme Stellato
- **E** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, allora valgono:
  1. A convesso $\Rightarrow$ A stellato
  2. A stellato $\Rightarrow$ A connesso per poligonali
  3. A stellato $\Rightarrow$ A semplicemente connesso
- **T** Calcolo del lavoro di F conservativo
- **E** Lemma di Poincaré