Statistica

Indice

1 Spazio di Probabilità

Per poter studiare Probabilità e statistica possiamo immaginare di fare un parallelismo con l'analisi:

Probabilità e Statistica	**Analisi Matematica**
Spazio di Probabilità	Numeri reali
Variabile Aleatoria	Variabile reale
Convergenza per successioni di variabili aleatorie	Successioni
($\mathbb{M}$) Processo Stocastico	Funzioni
($\mathbb{M}$) Calcolo Stocastico	Calcolo differenziale e integrale
($\mathbb{M}$) Equazioni Differenziali Stocastiche	Equazioni Differenziali

Il ($\mathbb{M}$) *sta indicare che non sono argomenti trattati in questo corso, ma saranno approfonditi alla magistrale*

1.1 Cenni di Teoria della Misura

Definizione 1.1.1: Spazio Misurabile

Si definisce **Spazio Misurabile** una coppia $(\Omega, \mathcal{F})$, dove Ω è un insieme non vuoto e $\mathcal{F}$ è una $\sigma-$algebra, cioè una famiglia non vuota di sottoinsiemi di Ω che soddisfa due proprietà:

1. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F}$ è chiuso rispetto al complementare
2. Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathcal{F}$, allora
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$
cioè $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto all'unione numerabile

Il prefisso "$\sigma-$" davanti a queste parole sta ad indicare che si tratta di una proprietà <u>numerabile</u>. Quindi le due proprietà sopra elencate possono essere scritte come "$\mathcal{F}$ è $\sigma-\cup-$chiuso"

Osservazione. Sottolineiamo che Ω può essere un insieme qualunque (un esempio, forse il più facile da tenere a mente è quello della Teoria della Misura di Lebesgue, un esempio può essere $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)))$ Quindi possiamo prendere insiemi qualunque, che siano numerici, come $\mathbb{N}, \mathbb{C}$, vettoriali $\mathbb{R}^n$, oppure qualcosa di totalmente diverso, come l'insieme delle funzioni continue $C(\mathbb{R})$, l'insieme dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ addirittura l'insieme delle sedie in una stanza.

Osservazione ($\sigma-$algebre banali)**.** Esistono due tipi di $\sigma-$algebre particolari, dette **Banali** in quanto sono definite come:
$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$
In particolare abbiamo che valgono:
$$\{\emptyset, \Omega\} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \qquad \forall \mathcal{F}\ \sigma-\text{algebra}$$

Proposizione 1.1.2

Se $\mathcal{F}$ è una $\sigma-$algebra, allora è $\cup-$chiusa (cioè l'unione finita è chiusa)

Dimostrazione. Siano $A_1,...,A_n \in \mathscr{F}$ e siano:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \overline{A}_k \qquad \text{dove } \overline{A}_k = \begin{cases} A_k & k \leq n \\ A_n & k > n \end{cases}$$

Tuttavia, sappiamo che $\mathscr{F}$ è una $\sigma-$algebra, quindi il secondo elemento sta in $\mathscr{F}$. Tuttavia, essendo il secondo uguale al primo abbiamo che anche il primo sta in $\mathscr{F}$. Per l'arbitrarietà degli A_k, segue che $\mathscr{F}$ è $\cup-$chiuso ☐

Osservazione. Per, definizione di $\sigma-$algebra, $\mathscr{F}$ è non vuoto. Sia $A \in \mathscr{F}$ vale che:

$$A^c \in \mathscr{F} \quad \Rightarrow \quad A \cup A^c = \Omega \in \mathscr{F} \text{ e } \varnothing = \Omega^c \in \mathscr{F}$$

questo implica che $\varnothing$ e Ω appartengono a ogni $\mathscr{F}$ σ-algebra.

Osservazione. Prendiamo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathscr{F}$ allora dalla definizione vale che:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^c\right)^c \in \mathscr{F}$$

Definizione 1.1.3: Misura su $(\Omega,\mathscr{F})$

Definiamo una **Misura** su uno spazio misurabile come una funzione $\mu : \mathscr{F} \to [0,+\infty]$ tale che:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. μ è σ-additiva ovvero:

   Se (A_n) è una successione in $\mathscr{F}$ i cui elementi sono disgiunti $\implies \mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$

Osservazione (la misura è additiva su somme finite)**.** Usiamo la Notazione $\biguplus$ per parlare di unione disgiunta. Siano $A_1,\ldots,A_n$ disgiunti e siano $A_k = \varnothing$ $\forall k \geq n+1$, dalla definizione di misura segue banalmente che $\mu(A_k) = 0$ $\forall k \geq n+1$ allora dal fatto poichè μ è σ-additiva vale che:

$$\mu\left(\biguplus_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu\left(\biguplus_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

Definizione 1.1.4: Spazio di Probabilità

Definiamo uno **Spazio di Probabilità** come una tripla $(\Omega,\mathscr{F},P)$, ovvero uno spazio misurabile $(\Omega,\mathscr{F})$ con misura P tale che:

$$P(\Omega) = 1$$

Definizione 1.1.5: Spazio Campionario

Manu è bello e qui ci scrive quello che vuole :3

Definizione 1.1.6: Spazio Discreto

Uno spazio si dice **Discreto** se Ω è finito o numerabile in questo caso prendiamo:

$$\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega) \quad \text{e scriviamo} \quad (\Omega,\mathscr{F},P) = (\Omega,P)$$

Esempio 1 (Lancio di un dado)**.** *In questo caso abbiamo:* $\Omega = \{1,\dots,6\}$*,* $\mathscr{F}$ *= famiglia degli eventi dove* $A \in \mathscr{F}$ *è un evento ovvero "un affermazione relativa all'esito dell'esperimento",* P *= Misura di probabilità è la funzione* $P : \mathscr{F} \to [0,1]$ *che manda A nella probabilià che l'esito sia positivo.*

Per esempio sia $A = \{1,3,5\} \subseteq \Omega$ *ovvero le possibili facce che lanciando il Dado diano un esito positivo, allora* $P(A) = \frac{1}{2}$*. Notiamo inoltre che lanciando il dado uscirà sempre almeno una faccia questo equivale a dire che* $P(\emptyset) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$*.*

Osservazione. Possiamo fare un parallelismo tra gli insiemi misurabili e la probabilità aiutandoci con la "terminologia":

Analisi e Insiemistica	**Probabilità e statistica**
$A \cup B$	Evento A "oppure" Evento B
$A \cap B$	Evento A "e" Evento B
A^c	"Non Evento A"
$\mu(\mathbb{Q}) = 0$	$P(A) = 0 \Rightarrow A$ è "non misurabile"
$\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$	$P(A) = 1 \Rightarrow A$ è "quasi certo"