Topologia Algebrica

Indice

1 Teoria dell'Omologia

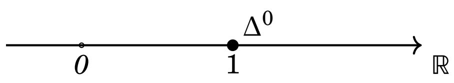
1.1 Omologia Singolare

Definizione 1.1.1: Inviluppo Convesso della Base Canonica

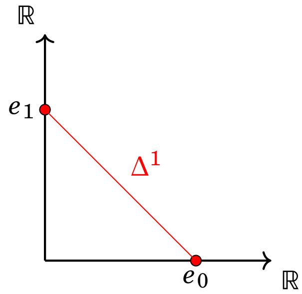
Sia $\mathbb{R}^{n+1}$ spazio vettoriale reale e $\{e_o, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$ allora chiamiamo Inviluppo convesso di $\{e_o, \ldots, e_n\}$ l'insieme:

$$\Delta^n := \{(t_0, \ldots, t_n) \mid t_i \geq 0 \ \forall i, \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\}$$

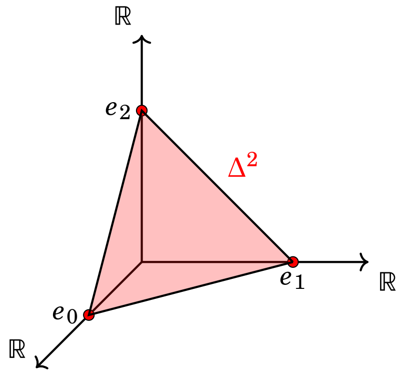
Esempio 1. *Caso $n = 0$:*



Esempio 2. *Caso $n = 1$:*



Esempio 3. *Caso $n = 2$(Considerare solo la faccia della piramide rossa, compresi i bordi):*



Osservazione. data questa definizione possiamo notare che fissato n abbiamo $n + 1$ funzioni affini naturali

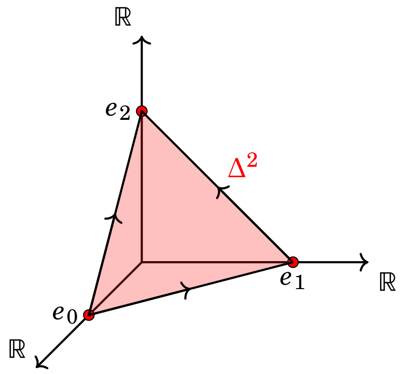
Definizione 1.1.2: ∂_i facce

$\forall i \in \{0, \ldots, n\}$ definisco l'i-esima faccia dell'inviluppo come la funzione:

$$\begin{aligned} \partial_i : \Delta^{n-1} &\to \Delta^n \\ (t_0, \ldots, t_n) &\mapsto (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n) \end{aligned}$$

Osservazione. Ogni sottoinsieme $\mathrm{I} \subseteq \{0,\ldots,k\}$ individua una faccia di $\Delta^{|\mathrm{I}|-1}$

Esempio 4. $n = 2$:



Quindi notiamo in questo caso abbiamo che:

$$\partial_0(t_0,t_1) = (0,t_0,t_1) \qquad \partial_0(1,0) = e_1, \partial_0(0,1) = e_2$$
$$\partial_1(t_0,t_1) = (t_0,0,t_1) \qquad \partial_1(1,0) = e_0, \partial_1(1,0) = e_2$$
$$\partial_2(t_0,t_1) = (t_0,t_1,0) \qquad \partial_2(1,0) = e_0, \partial_2(1,0) = e_1$$

Definizione 1.1.3: n-simplesso singolare

Sia X uno spazio topologico un **n-simplesso singolare** è una funzione continua σ tale che:

$$\sigma : \Delta^n \to X$$

Esempio 5. *Le facce ∂_i sono $n-1$ Simplessi singolari di Δ^n*

Definizione 1.1.4: Gruppo Abeliano libero generato

Sia E un insieme il **Gruppo Abeliano libero generato da E** si definisce come:

$$\mathbb{Z}^E = \{\varphi : E \to \mathbb{Z} \,|\, \varphi(e) = 0 \text{ tranne che per un numero finito di elementi di E}\}$$

Definizione 1.1.5: n-catene singolari

Il Gruppo abeliano libero generato dagli n-simplessi singolari, indicato con $C_n(X)$ si dice il Gruppo delle **n-catene singolari** di X

Osservazione. Sia $\sigma \in C_n(X) \Rightarrow \sigma = a_1\sigma_1 + \cdots + a_k\sigma_k$ con $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_1,\ldots,\sigma_k : \Delta^n \to X$

Osservazione. Sia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici allora se $\sigma : \Delta^n \to X$ è un n-simplesso singolare di X allora vale che $f \circ \sigma : \Delta^n \to Y$ è continua quindi è un n-simplesso singolare di Y.

Quindi è ben posto il morfismo di Gruppi f_*:

$$f_* : C_n(X) \to C_n(Y)$$
$$\sigma \mapsto f \circ \sigma$$

Osservazione. Siano $v_0,\dots,v_k \in \mathbb{R}^n$ con $n > k$ allora esiste un unica funzione affine (ovvero lineare sommata ad una traslazione) che manda elementi di Δ^k nell'inviluppo convesso di $v_0,\dots,v_k$ t.c:

$$\begin{aligned} \Delta^k &\to \text{Inviluppo convesso di } v_0,\dots,v_k \\ (t_0,\dots,t_n) &\mapsto \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \\ e_0 &\mapsto v_0 \\ &\vdots \\ e_k &\mapsto v_k \end{aligned}$$

La mappa è omeomorfismo $\iff v_1 - v_0,\dots,v_k - v_0$ sono linearmenti indipendenti. Chiamiamo tale mappa $< v_0,\dots,v_k >$.

Definizione 1.1.6: ∂

Definiamo $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ come:

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \partial_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n>}$$

La notazione finale si può interpretare come: restringo la funzione σ alle sue facce togliendo un vertice.

Esempio 6. *Sia $\sigma \in C_2(X)$ allora vale:*

$$\begin{aligned} \partial\sigma &= \sigma|_{<e_1,e_2>} - \sigma|_{<e_0,e_2>} + \sigma|_{<e_0,e_1>} \\ \partial\sigma|_{<e_1,e_2>} &= \sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_1>} \\ \partial\sigma|_{<e_0,e_2>} &= \sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_0>} \\ \partial\sigma|_{<e_0,e_1>} &= \sigma|_{<e_1>} - \sigma|_{<e_0>} \\ \partial^2\sigma &= \sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_1>} - (\sigma|_{<e_2>} - \sigma|_{<e_0>}) + \sigma|_{<e_1>} - \sigma|_{<e_0>} \\ \partial^2\sigma &= 0 \end{aligned}$$

Proposizione 1.1.7: $\partial^2 = 0$

$$\partial^2 = 0$$

Dimostrazione. Utilizzando la seconda notazione il teorema è molto immediato poichè se prendiamo $\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n>}$ calcolare nuovamente la funzione ∂ su tale quantità mi darà somme (con segni) di $\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,\hat{e_j},\dots,e_n>}$ ed ognuno di questi simplessi appare 2 volte:

1. In $\partial\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_i},\dots>} \to$ con segno $(-1)^{i+j-1}$
2. In $\partial\sigma|_{<e_0,\dots,\hat{e_j},\dots>} \to$ con segno $(-1)^{i+j}$

Allora avendo segno opposto la somma si annulla a 2 a 2 ogni volta ottenendo la Tesi. □

Osservazione. Questo fatto equivale a dire:

$$\mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{X})) \subseteq \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X}))$$

Definizione 1.1.8: n-esimo Gruppo di Omologia Singolare

Sia X spazio topologico, chiamiamo l'**n-esimo Gruppo di Omologia Singolare** di X:

$$\mathrm{H}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X})) \big/ \mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{X}))$$

Proposizione 1.1.9

ia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici e sia $f_* : C_n(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{Y})$ il morfismo di gruppi indotto da f allora vale $\partial f_* = f_* \partial$. Equivalentemente il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} C_n(\mathrm{X}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & C_{n-1}(\mathrm{X}) \arrow[d, "f_*"] \\ C_n(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\partial"] & C_{n-1}(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Sia $\sigma \in C_n(\mathrm{X})$ allora vale:

$$\begin{aligned} f_*(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_*(\sigma \circ \partial_i) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f \circ (\sigma \circ \partial_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \partial_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_*(\sigma) \circ \partial_i \\ &= \partial(f_*(\sigma)) \end{aligned}$$

□

Definizione 1.1.10: Cicli e Bordi

- $\sigma \in \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X}))$ è detto n-ciclo
- $\sigma \in \mathrm{Im}(\partial : C_{n+1}(\mathrm{X}) \to C_n(\mathrm{X}))$ è detto n-bordo

Teorema 1.1.11: Morfismi tra $\mathrm{H}_n(\mathrm{X})$ e $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y})$

Sia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici, allora f induce un morfismo tra $\mathrm{H}_n(\mathrm{X})$ e $\mathrm{H}_n(\mathrm{Y})$. Equivalentemente è ben definita:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_n(f) : \mathrm{H}_n(\mathrm{X}) &\to \mathrm{H}_n(\mathrm{Y}) : \\ [\mathrm{c}] &\mapsto [f_*(c)] \end{aligned}$$

Dimostrazione. Utilizziamo la Proposizione 1.1.9 sugli n-cicli e sugli n-bordi:

Sia $\sigma \in \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{X}) \to C_{n-1}(\mathrm{X})) \Rightarrow \partial f_*(\sigma) = f_* \partial(\sigma) = 0 \Rightarrow f_*(\sigma) \in \mathrm{Ker}(\partial : C_n(\mathrm{Y}) \to C_{n-1}(\mathrm{Y}))$

Se $\mathrm{c} = \partial\omega \Rightarrow f_* c = f_* \partial\omega = \partial(f_*\omega)$ quindi ottengo un n-bordo

Otteniamo così la Tesi. □

Osservazione. Si può dimostrare che H_n è un funtore e quindi se tra 2 spazi topologici ho un Omeomorfismo esso induce un isomorfismo tra i loro Gruppi di Omologia Singolare.[1]

Esercizio 1. Calcolare il Gruppo di Omologia Singolare di $X = \{p\}$ spazio topologico con un punto.

Soluzione. Notiamo per prima cosa che fissato un $k \in \mathbb{N}$ allora i k-simplessi singolari sono tutti funzioni costanti e quindi vale $C_k(X) \cong \mathbb{Z}$ inoltre vale che:

$$\partial\sigma_k = \left[\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\right]\sigma_{k-1} = \begin{cases} 0 & \text{se k è dispari} \\ 1 & \text{se k è pari} \end{cases}$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Caso $k > 0$:

1. k pari allora non ci sono k-cicli $\Rightarrow H_k(\{p\}) = 0$
2. k dispari allora $\mathrm{Ker}\partial = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{Im}\partial = \mathbb{Z} \Rightarrow H_k(\{p\}) = 0$

Caso $k = 0$:

$$\mathrm{Ker}\partial = \mathbb{Z} \quad \mathrm{Im}\partial = 0 \quad \Rightarrow \quad H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}$$

Il gruppo di omologia singolare di un punto è:

- $H_0(\{p\}) = \mathbb{Z}$
- $H_k(\{p\}) = 0 \quad \forall k > 0$

■

Proposizione 1.1.12

ia X= $\coprod_{\alpha} X_\alpha$ spazio topologico scomposto lungo le sue componenti connesse per archi. Allora:

$$\forall k \quad H_k(X) \cong \bigoplus_{\alpha} H_k(X_\alpha)$$

Dimostrazione. Se $\sigma : \Delta^k \to X$ è un k-simplesso singolare essendo Δ^k connesso per archi, allora dalla continuità di σ segue che $\sigma(\Delta^k)$ è connesso per archi e quindi è totalmente contenuto in una delle componenti connesse per archi di X. Questo mi implica che:

$$C_k(X) \cong \bigoplus_{\alpha} C_k(X_\alpha)$$

Inoltre dalla continuità di ∂:

$$\sigma \in C_k(X_\alpha) \quad \Rightarrow \quad \partial\sigma \in C_{k-1}(X_\alpha)$$

Questo implica che il nucleo e l'immagine di ∂ possono essere decomposti lungo le componenti connesse per archi, così facendo otteniamo la Tesi. □

[1]Trovate la dimostrazione a pagina 67 di "An Introduction to Algebraic Topology" di Joseph J. Rotman

1.2 Omologia Simpliciale

Definizione 1.2.1: Complesso Omologico

Un **Complesso Omologico**, o complesso a catena, è una coppia, $(\mathrm{C}_\bullet, d_\bullet)$, formata da:

1. Una successione di Gruppi Abeliani C_k;
2. Morfismi $\mathrm{d}_k : \mathrm{C}_k \to \mathrm{C}_{k-1}$ tale che $\forall k \in \mathbb{N}, \quad d_{k-1} \circ d_k = 0$

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{C}_k \xrightarrow{d_k} \mathrm{C}_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \mathrm{C}_{k-2} \xrightarrow{d_{k-2}} \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_0 \longrightarrow 0$$

Esempio 7. *Le catene singolari 1.1.5 e la funzione ∂ 1.1.6 costituiscono un complesso omologico.*

Definizione 1.2.2: Cicli di un Complesso Omologico

Sia $(\mathrm{C}_\bullet, d_\bullet)$ un Complesso Omologico allora definiamo i k-cicli di un Complesso Omologico come:

$$\mathrm{Z}_k := \mathrm{Ker}(d_k)$$

Definizione 1.2.3: Bordi di un Complesso Omologico

Sia $(\mathrm{C}_\bullet, d_\bullet)$ un Complesso Omologico allora definiamo i k-bordi di un Complesso Omologico come:

$$\mathrm{B}_k := \mathrm{Im}(d_{k+1})$$

Osservazione. $d_{k-1} \circ d_k = 0 \Rightarrow$ ogni k-bordo è un k-ciclo

Definizione 1.2.4: Gruppo di Omologia singolare di un Complesso Omologico

l Gruppo di Omologia singolare di un Complesso Omologico $(\mathrm{C}_\bullet, d_\bullet)$ è definito come:

$$\mathrm{H}_k(\mathrm{C}_\bullet) := {}^{\mathrm{Z}_k}/_{\mathrm{B}_k}$$

Definizione 1.2.5: Morfismi di Complessi Omologici

Siano $(\mathrm{C}_\bullet, d_\bullet)$ e $(\mathrm{D}_\bullet, d'_\bullet)$ Complessi Omologici allora un **Morfismo di Complessi Omologici** $\varphi_\bullet : \mathrm{C}_\bullet \to \mathrm{D}_\bullet$ è una famiglia $\varphi_k : \mathrm{C}_k \to \mathrm{D}_k$ di morfismi tale che $\forall k \; d'_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ d_k$ equivalentemente il seguente diagramma commuti per ogni k:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "d_k"] & \mathrm{D}_k \arrow[d, "d'_k"] \\
\mathrm{C}_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] & \mathrm{D}_{k-1}
\end{tikzcd}$$

Osservazione. φ_k manda k-cicli in k-cicli e k-bordi in k-bordi quindi tramite il funtore H_k definisce un morfismo tra gruppi:

$$\mathrm{H}_k(\varphi_k) : \mathrm{H}_k(\mathrm{C}_\bullet) \to \mathrm{H}_k(\mathrm{D}_\bullet)$$

Esempio 8. *Sia $f : X \to Y$ funzione continua tra spazi topologici allora essa definisce un morfismo tra complessi omologici:*

$$f_* : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$$

Definizione 1.2.6: Complesso Simpliciale Finito

Un **Complesso Simpliciale Finito** è il dato di:

1. Un insieme finito I non vuoto;
2. Una famiglia Σ di sottoinsiemi di I (eccetto il vuoto) con le proprietà:
   (a) Ogni elementi di I, considerato come sottoinsieme di cardinalità 1, appartiene a Σ;
   (b) se $\sigma \in \Sigma$ e $\tau \subseteq \sigma \quad \Rightarrow \quad \tau \in \Sigma$

Esempio 9. *Sia $I = \{0,1,2,3,4\}$ allora se $\{0,2,3\} \in \Sigma \Rightarrow \{0,2\}, \{0,3\}, \{2,3\} \in \Sigma$ quindi avremmo in questo caso il complesso simpliciale (I,Σ) dato da:*

- $I = \{0,1,2,3,4\}$;
- $\Sigma = \{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{0,2,3\},\{0,2\},\{0,3\},\{2,3\}\}$.

Fissando una biezione di I è possibile associale ad un complesso simpliciale un complesso omologico:

Definizione 1.2.7: l-simplessi

Dato (I,Σ) Complesso Simpliciale Finito definiamo gli l-simplessi:

$$\Sigma_l = \{\sigma \in \Sigma : |\sigma| = l+1\}$$

Definizione 1.2.8: Gruppo Abeliano libero generato da Σ_l

Chiamiamo C_l^Σ il Gruppo abeliano libero generato da Σ_l, ed i suoi elementi della base sono:

$$\sigma = < i_0, \dots, i_l >$$

Esempio 10. *Prendiamo $I = \{a,b,c\}$ e consideriamo $\Sigma = \mathscr{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$ allora troviamo che gli elementi della base sono:*

- *Per C_0^Σ sono $\{<a>,<b>,<c>\}$ quindi $C_0^\Sigma \cong \mathbb{Z}^3$*
- *Per C_1^Σ sono $\{<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$ quindi $C_1^\Sigma \cong \mathbb{Z}^3$*
- *Per C_2^Σ sono $\{<a,b,c>\}$ quindi $C_2^\Sigma \cong \mathbb{Z}$*

Osservazione. Notiamo che $C_l^\Sigma \cong \mathbb{Z}^{|\Sigma_l|}$

Definizione 1.2.9: ∂^Σ

Definiamo la funzione $\partial^\Sigma : C_l^\Sigma \to C_{l-1}^\Sigma$ sugli elementi della base come:

$$\forall \sigma = < i_0, \dots, i_l > \quad \Rightarrow \quad \partial^\Sigma \sigma := \sum_{k=0}^{l} (-1)^k < i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_l >$$

Osservazione. Utilizzando la stessa dimostrazione di prima troviamo $\partial^\Sigma \partial^\Sigma = 0$

Esercizio 2. Calcolare l'omologia di $C_\bullet^\Sigma$ nel caso di:

1. $I = \{a, b, c\} \quad \Sigma = \mathscr{P}(\mathrm{I}) \setminus \{\varnothing\}$;
2. $I = \{a, b, c\} \quad \Sigma = \mathscr{P}(\mathrm{I}) \setminus \{\{\varnothing\}, \{a, b, c\}\}$;

Soluzione. Partiamo scrivendo la catena del primo aiutandoci con le osservazioni precedenti:

$$0 \xrightarrow{\partial_3^\Sigma} \mathrm{C}_2^\Sigma \xrightarrow{\partial_2^\Sigma} \mathrm{C}_1^\Sigma \xrightarrow{\partial_1^\Sigma} \mathrm{C}_0^\Sigma \xrightarrow{\partial_0^\Sigma} 0$$

Che grazie all'esempio 10 diventa:

$$0 \xrightarrow{\partial_3^\Sigma} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2^\Sigma} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1^\Sigma} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_0^\Sigma} 0$$

Notiamo innanzitutto che il $Ker(\partial_0^\Sigma) \cong \mathbb{Z}^3$ quindi ora cerchiamo il $Ker(\partial_1^\Sigma)$ per determinarne anche l'immagine. Scriviamo una combinazione lineare degli elementi della base di C_1^Σcon coefficienti in $\mathbb{Z}$ come generico elemento di tale gruppo e andiamo a vedere quando tale elemento, calcolato con ∂_1^Σ è nullo:

$$\partial_1^\Sigma(a_1(< a, b >) + a_2(< b, c >) + a_3(< a, c >)) = 0 \iff$$

$$a_1(< b > - < a >) + a_2(< c > - < b >) + a_3(< c > - < a >) = 0 \iff \begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Il sistema si risolve facilmente in quanto la matrice associata ha rango 2 questo mi da necessariamente che $Ker(\partial_1^\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ e che $Im(\partial_1^\Sigma) \cong \mathbb{Z}^2$.
Quindi intanto abbiamo trovato $\mathrm{H}_0^\Sigma = \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$. Ora cerchiamo invece il $Ker(\partial_2^\Sigma)$ e quindi la sua immagine. Ragioniamo come prima ovvero:

$$\partial_2^\Sigma(a_1(< a, b, c >)) = 0 \iff a_1(< b, c > - < a, c > + < a, b >) = 0 \iff a_1 = 0$$

Quindi la funzione è iniettiva e di conseguenza questo mi implica che $\mathrm{Im}(\partial_2^\Sigma) \cong \mathbb{Z}$ quindi abbiamo trovato che:

- $\mathrm{H}_0^\Sigma = \mathbb{Z}^3 / \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{H}_1^\Sigma = \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cong \{0\}$
- $\mathrm{H}_2^\Sigma = \{0\} / \{0\} \cong \{0\}$.

Il secondo punto si risolve in modo analogo e da come risultati:

- $\mathrm{H}_0^\Sigma \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{H}_1^\Sigma \cong \mathbb{Z}$;
- $\mathrm{H}_2^\Sigma \cong \{0\}$.

■