Geometria 2

Indice

1 Topologia: Introduzione

1.1 Definizioni Base

Definizione 1.1.1: Spazio Topologico

Uno spazio topologico è una coppia $(X, \mathcal{T})$ dove X è un insieme e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(x)$ tale che:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
2. $\forall \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ famiglia di elementi di $\mathcal{T}$,
$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$
3. $\forall \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ famiglia finita di elementi di $\mathcal{T}$,
$$\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

Se valgono queste 3, $\mathcal{T}$ si dice **Topologia** su X e gli elementi di $\mathcal{T}$ sono detti aperti.

Esempio 1. *La coppia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ è detta **Topologia Euclidea**, gli elementi di $\mathcal{T}_E$ sono unioni arbitrarie di intervalli aperti, infatti:*

1. $\varnothing \in \mathcal{T}_\mathcal{E}$
2. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{R}^+}]-n, n[= \mathbb{R}$

Le altre proprietà sono banalmente verificate.
Ricordiamo che stiamo palando di unioni arbitrarie di intervalli aperti come elementi di $\mathcal{T}_\mathcal{E}$

Definizione 1.1.2: Funzione Continua

Dati due spazi topologici $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ una funzione:
$$f \colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$$
si dice **Continua** se
$$\forall V \in \mathcal{S}, f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$$
Cioè per ogni insieme aperto appartenente a $\mathcal{S}$, la sua controimmagine appartiene a $\mathcal{T}$

Non è detto che valga il concetto di limite, per questo la definizione in questo modo. D'altronde:

Esempio 2. *Ogni funzione analiticamente continua tra numeri reali è topologicamente continua nella topologia euclidea, cioè:*

$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Analiticamente continua} \quad \Rightarrow \quad f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E}) \text{ Topologicamente continua}$$

Osservazione. La continuità dipende **fortemente** dalla Topologia scelta. Ecco perché viene specificata

Come abbiamo già visto con gruppi e anelli, il lavoro su questi oggetti si basa sulle funzioni. In questo caso, tra Spazi Topologici si lavora con funzioni continue.

Definizione 1.1.3: Spazi Topologici Omeomorfi

Due spazi Topologici $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{S})$ si dicono **Omeomorfi** se:

$$\exists f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S}) \text{ continua e con inversa continua}$$

Dunque

$$\exists f^{-1}\colon (Y, \mathcal{S}) \to (X, \mathcal{T}) \text{ continua}$$

In tal caso si indica con:

$$(X, \mathcal{T}) \cong (Y, \mathcal{S})$$

In particolare, come nei gruppi, i due hanno la stessa cardinalità.

Esempio 3.

$$(]-1, 1[, \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$$

Un esempio di omeomorfismo può essere:

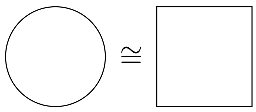
$$t \xrightarrow{f} \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

Infatti essa è definita su tutto il dominio, è uniformemente continua, è biunivoca e la sua inversa

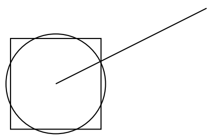
$$\frac{2}{\pi}\arctan(x) \xleftarrow{f^{-1}} x \text{ è continua}$$

Dunque sono omeomorfi

Esempio 4. *Andiamo a vedere direttamente con le figure.*



Troviamo un omomorfismo per verificare che sia vero.
Rudimentalmente, tracciamo una semiretta che parte dall'origine.

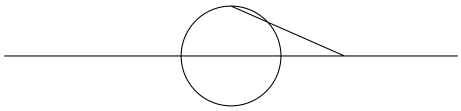


È la forma che lega i punti sulla circonferenza e sul quadrato.
Formalmente è lasciato come esercizio. L'inversa è esattamente l'opposto del procedimento precedente

Esempio 5.

$$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \cong \text{ Circonferenza tranne il punto nord}$$

(Per intenderci, il punto nord è il punto situato nel radiante $\theta = \pi/2$)
Possiamo tracciare il segmento che unisce il punto Nord ai vari punti della circonferenza, per poi prolungarla sulla retta orizzontale passante per il centro della circonferenza. In questo modo abbiamo trovato una funzione (da formalizzare) che lega l'insieme dei numeri reali alla circonferenza escluso tale punto.
Questo tracoletto prende il nome di ***Proiezione Stereografica***



Esempio 6.

$$(]0,1[\cup]2,3[, \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \ncong (\mathbb{R}; \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$$

Il primo non è connesso, il secondo sì. Vedremo più avanti cosa significa, in particolare. Il concetto è lo stesso di analisi matematica 2. In particolare il primo non è connesso per archi:

$$\forall x_1, x_2 \in]0,1[\cup]2,3[, \nexists \text{ arco che collega i punti}$$

C'è evidentemente un "buco" che si deve percorrere obbligatoriamente.

Si osservi che esiste sempre un cammino in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, per esempio infatti:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \xrightarrow{f} tx + (1-t)x$$

In particolare un camino continuo è una funzione da $[0,1]$ a $(X, \mathcal{T})$ continua

Esempio 7. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ *e* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ *non sono omeomorfi.*
Infatti se per assurdo esistesse f omeomorfismo tra i due, cioè:

$$f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$$

allora

$$f\big|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0, f(0)\}$$

è una funzione che è definita tra un insieme non connesso (il primo) e uno connesso (il secondo)

Esempio 8. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ *e* $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ *non sono omeomorfi. La tecnica di prima non funziona, in quanto entrambi rimarrebbero connessi. Se togliamo una circonferenza invece? Non ancora. Se provassimo con una sfera? Non sappiamo quali sono le loro immagini. Ancora non sappiamo lavorarci*

Questa sarà una questione che ci porteremo avanti, quando definiremo per bene il concetto di connessione.

Una volta trovata l'intuizione, ecco alcuni esempi di Topologie applicabili sostanzialmente a ciascun insieme.

1.2 Varie Topologie

Definizione 1.2.1: Topologia Banale

Sia X un insieme. Si definisce **Topologia Grossolana** o **Banale** su X la Topologia definita come:

$$\mathcal{T}_{GR} = \{\varnothing, X\}$$

Definizione 1.2.2: Topologia Discreta

Sia X un insieme. Si definisce **Topologia Discreta** su X l'insieme:

$$\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X) = \{\text{L'insieme delle parti di } X\}$$

Si ovviamente che $\varnothing \in \mathcal{T}_D$

Osservazione. Notiamo che c'è l'uguaglianza:

$$\mathcal{T}_D = \mathcal{T}_{GR}$$

se e solo se X ha un solo elemento, oppure $X = \varnothing$. Di conseguenza su questi due insiemi esista una sola topologia. La dimostrazione di questo fatto è ovvia

Definizione 1.2.3: Topologia Cofinita

Sia X un insieme. Si definisce **Topologia Cofinita** su X e si indica con $\mathcal{T}_{Cof}$ se:

$$A \in \mathcal{T}_{Cof} \quad \Leftrightarrow \quad A = X \vee A = \varnothing \vee X \setminus A \text{ è finito}$$

Analizziamo questa definizione.
Abbiamo ovviamente che $X \in \mathcal{T}_{Cof}$ e $\varnothing \in \mathcal{T}_{Cof}$ Sia dunque $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di elementi di $\mathcal{T}_{Cof}$ e valutiamo se

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_{Cof}$$

Dunque consideriamo:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i)$$

In particolare abbiamo quindi che:

$$X \setminus U_i = X \qquad \vee \qquad X \setminus U_i \text{ è finito}$$

Dalla seconda otteniamo che anche l'intersezione è finita, in quanto l'intersezione di ogni insieme è contenuto in $X \setminus U_i$. Quindi anche la seconda proprietà dello spazio topologico è verificata.
Cosa sappiamo dire della terza? Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia finita di insiemi (cioè I è finito). Valutiamo quindi l'intersezione di tutti quegli insiemi. Abbiamo che:

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus U_i)$$

Se $X \setminus U_i = X$ allora è banalmente verificato. Se invece $X \setminus U_i$ è finito, allora l'insieme finito di insiemi finiti è ancora finito, quindi anche la terza proprietà di uno Spazio Topologico sono verificate.

Definizione 1.2.4: Topologia della Semi Continuità

Sia $X = \mathbb{R}$. Si definisce **Topologia della Semi Continuità Superiore** gli aperti del tipo $]-\infty, a[$ con $a \in \mathbb{R}$, $\varnothing$ o $\mathbb{R}$.
Nel caso della **Topologia della Semi Continuità Inferiore** gli aperti sono del tipo $]b, +\infty[$ con $b \in \mathbb{R}$, $\varnothing$ oppure $\mathbb{R}$.

Valutiamo se effettivamente sono topologie (per il caso superiore).
Per definizione abbiamo che $\varnothing, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$, quindi la prima proprietà è verificata.
Se un elemento è $\mathbb{R}$, allora è banale. Se invece non lo è, possiamo considerare $\{U_i\}_{i\in I}$ famiglia di insiemi aperti definiti come

$$U_i :=]-\infty, a_i[$$

Allora otteniamo che:

$$\bigcup_{i\in I}(U_i) = \bigcup_{i\in I}(]-\infty, a_i[) =]-\infty, \sup_{i\in I} a_i[\in \mathcal{T}$$

Quindi la seconda proprietà è verificata.
Se un elemento è l'insieme vuoto, allora è banale. Se invece non è così, possiamo considerare:

$$U_i =]-\infty, a_i[\qquad \text{Con } I \text{ finito}$$

Allora, se andiamo a prendere l'intersezione abbiamo che:

$$\bigcap_{i\in I} U_i =]-\infty, \min_{i\in I} a_i[\in \mathcal{T}$$

Si prende il minimo e non l'inferiore, in quanto si ha l'intersezione finita di insiemi
E quindi è verificata anche la terza proprietà.
Se invece $\sup a_i = -\infty$, allora tutti gli $a_i = -\infty$

1.3 Basi

Definizione 1.3.1: Base

Una **base** $\mathcal{B}$ di una Topologia $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ tale che ogni elemento si scriva come *unione* di elementi della base $\mathcal{B}$

Esempio 9. *Una base $\mathcal{B}$ della Topologia discreta è:*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}_D} = \{\textit{Singoletti (Elementi singoli)}\} = \{\{x\} : x \in X\}$$

Infatti:

$$A \subseteq X \qquad A = \bigcup_{x\in A}\{x\}$$

Esempio 10. *$\mathcal{T}$ è una base della topologia $\mathcal{T}$*

Notazione: Indichiamo il disco unitario di dimensione n con:

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

Indichiamo invece la sfera unitaria di dimensione n come:

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

La palla aperta centrata in x e di raggio r viene indicata come in analisi

Osservazione. $\varnothing$ è scrivibile come unione di nessun elemento di $\mathcal{B}$, cioè andiamo a considerare la famiglia "vuota" di sottoinsiemi di $\mathcal{B}$.

Teorema 1.3.2: Teorema della Base

Siano X un insieme e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Allora esiste una topologia $\mathcal{T}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e solo se:

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2. Per ogni $A, B \in \mathcal{B}$ e per ogni $p \in A \cap B$, esiste $p \in C_p \in \mathcal{B}$ tale che
$$C_p \subseteq A \cap B$$

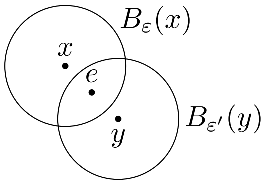
Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $X \in \mathcal{T}$ elemento della topologia $\mathcal{T}$. Allora esiste una famiglia di insiemi $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tale che:
$$X = \bigcup_{i \in I} B_i \qquad \Rightarrow \qquad X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$
Inoltre, se $A, B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Allora anche $A \cap B \in \mathcal{T}$. Esiste quindi una famiglia di insiemi $\{C_i\}_{i \in I}$ tali che $C_i \in \mathcal{B}$ tali che:
$$A \cap B = \bigcup_{i \in I} C_i$$
Ma allora per ogni $p \in A \cap B$ si ha che:
$$\exists C_p \in \mathcal{B} : p \in C_p \subseteq A \cap B$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dato $\mathcal{B}$, sia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ data da tutte le unioni degli elementi di $\mathcal{B}$. Abbiamo che $X \in \mathcal{T}$ (per il primo punto) e che $\varnothing \in \mathcal{T}$ (come unione vuota). Sia poi $\{U_i\}_{i \in I}$ famiglia di insiemi in $\mathcal{T}$. Allora:
$$\forall i, \exists J_i : U_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{j,i}, B_{j,i} \in \mathcal{B}$$
Ma allora abbiamo che:
$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j \in J_i} B_{j,i} \right)$$
Dimostriamo ora che $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ si ha che $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.
Per quanto appena fatto abbiamo che:
$$A_1 = \bigcup_{i \in I} B_{1,i} \qquad A_2 = \bigcup_{j \in J} B_{2,j}$$
Da cui segue subito che:
$$A_1 \cap A_2 = \bigcup_{i \in I, j \in J} B_{1,i} \cap B_{2,j}$$
Per il punto 2, abbiamo che:
$$B_{1,i} \cap B_{2,j} = \bigcup_p C_p \text{ con } p \in B_{1,i} \cap B_{2,j} \text{ e } \bigcup_p C_p \in \mathcal{T}$$
□

Esempio 11. *Sia $X = \mathbb{R}^n$ e sia $d_{\mathcal{E}}$ metrica euclidea. Definiamo $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : d_\varepsilon(x,y) < \varepsilon\}$. Definiamo poi $\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{B_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Chiamiamo poi $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ la* ***topologia euclidea*** *di $\mathbb{R}^n$. Mostriamo che effettivamente è una topologia.*
Notiamo che:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} B_1(x) = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon \in \mathbb{R}^+} B_\varepsilon(x)$$

Quindi è verificato il primo punto del teorema.
Consideriamo poi:



Se l'intersezione fosse banale non dimostreremmo nulla
Prendiamo un elemento e all'interno dell'intersezione, segue dunque che:

$$d(x,e) < \varepsilon \qquad d(y,e) < \varepsilon'$$

Consideriamo allora ε'' come:

$$\varepsilon'' = \min\left\{\varepsilon - d(x,e), \varepsilon' - d(y,e)\right\} = \min\left\{\varepsilon - \delta, \varepsilon' - \delta'\right\} \qquad \text{con } \delta = d(x,e)\ \delta' = d(y,e)$$

Notiamo se $w \in B_{\varepsilon''}(e)$ allora si ha che:

$$d(x,w) \le d(x,e) + d(e,w) = \delta + \varepsilon - \delta \quad \Rightarrow \quad w \in B_\varepsilon(x)$$

Quest'esempio può essere esteso a qualsiasi spazio metrico e ottenere la seguente definizione.

Definizione 1.3.3: Topologia Associata alla metrica d

Sia (X,d) uno spazio metrico. Possiamo allora definire $\mathcal{B}_d = \{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Essa è una base della **Topologia associata alla metrica** d $\mathcal{T}_d$

Esempio 12. ***Topologia di Sorgenfrey***. *Essa ha come base $\mathcal{B} = \{[b,a[: b,a \in \mathbb{R}\}$, cioè è una base costituita da intervalli semiaperti. Inoltre, sapendo che:*

$$]a,b[= \bigcup_{c<a} [c,b[$$

Questa topologia si dice più ***fine*** *della topologia euclidea.*

Definizione 1.3.4: Funzione aperta

Sia $f : (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$. Si dice che f è **aperta** se

$$\forall U \in \mathcal{T}, f(U) \in \mathcal{S}$$

Abbiamo parlato di funzioni continue e aperte. Sia

$$f\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y,\mathcal{S})$$

Osserviamo che se $\mathcal{S}$ è grossolana, f è continua. f^{-1} è composto solo da X e $\varnothing$ che sono aperti, quindi f è continua.

Se $\mathcal{T}$ è discreta allora f è continua. Mentre se $\mathcal{S}$ è discreta, allora f è aperta. Inoltre se $\mathcal{S}$ è grossolana, allora f è continua. Infine, se $\mathcal{T}$ è grossolana e f è suriettiva, allora f è aperta.

Esempio 13. *Consideriamo l'applicazione:*

$$id\colon (X, \mathcal{T}_D) \to (X, \mathcal{T}_{GR})$$

Cosa possiamo dire su id? È continua, ma l'inversa non è continua.

Definizione 1.3.5: Finezza di una Topologia

Siano X insieme e siano $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ due Topologie su X. Diciamo che $\mathcal{T}$ è **più fine** di $\mathcal{S}$ se:

$$\forall A \in \mathcal{S}, A \in \mathcal{T}$$

Viceversa, diremo che $\mathcal{T}$ è **meno fine** di $\mathcal{S}$ se:

$$\forall B \in \mathcal{T}, B \in \mathcal{S}$$

Se le due Topologie non sono confrontabili, allora non vale nessuna delle due condizioni.

Osservazione. $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{S}$ se $id\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è continua.
Se $\mathcal{T}$ è meno fine di $\mathcal{S}$, allora $id\colon (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{S})$ è aperta.

Osservazione. Una base *non* può generare due topologie distinte. È possibile sempre, però, da una Topologia, trovarne una più o meno fine.

Esempio 14. *Le topologie $\mathcal{T}_{GR}$ e $\mathcal{T}_D$ sono rispettivamente le topologie meno fine e più fine di tutte.*

Esempio 15. *Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}, \mathcal{T}_{Cof}, \mathcal{T}_{SCS}$ (della Semi Continuità Cuperiore) e $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ (di Sorgenfrey). Confrontandole si ottiene che $\mathcal{S}$ è più fine di $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{T}_{SCS}$ è meno fine di $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$ e $\mathcal{T}_{Cof}$ è meno fine di $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}$. $\mathcal{T}_{Cof}$ e $\mathcal{T}_{SCS}$ non sono confrontabili.*

Proposizione 1.3.6

Siano $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ e $(Z, \mathcal{U})$ degli spazi topologici. Allora se:

- $f\colon X \to Y$ è aperta (o continua)
- $g\colon Y \to Z$ è aperta (o continua)

Allora $g \circ f$ è aperta (o continua)

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{U}$. Allora abbiamo che:

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathcal{T}$$

Con $^{-1}$ si intende la preimmagine. Allora $g \circ f$ è continua. Per gli aperti è analogo. □

1.4 Topologia con Insiemi Chiusi e Intorni

Definizione 1.4.1: Spazio Topologico Rispetto ai Chiusi

Una coppia $(X, \overline{\mathcal{T}})$ è detta **Spazio Topologico rispetto ai Chiusi** se X è un insieme e valgono:

1. $\varnothing, X \in \overline{\mathcal{T}}$
2. L'intersezione arbitraria di chiusi è ancora chiusa (quindi in $\overline{\mathcal{T}}$)
3. Unioni finite di chiusi è ancora chiusa, quindi ancora in $\overline{\mathcal{T}}$

I suoi elementi vengono detti **Chiusi** e i loro complementari sono detti aperti.

Definizione 1.4.2: Insiemi Claperti

Un insieme **Claperto** è un insieme chiuso e aperto contemporaneamente

Definizione 1.4.3: Funzione Continua

Una funzione $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ è detta **chiusa** se:

$$\forall U \text{ chiuso di } X, f(U) \text{ è chiuso in } Y$$

Definizione 1.4.4: Chiusura, Interno e Frontiera di un insieme

Sia $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$. Definiamo **chiusura** di Y:

$$\overline{Y} := \bigcap_{Y \subseteq F} F \quad F \text{ insiemi chiusi}$$

Definiamo **interno** di un insieme Y:

$$\mathring{Y} := \bigcup_{Ai \subseteq Y} A \quad A \text{ insiemi aperti}$$

Definiamo **chiusura** di un insieme Y:

$$\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$$

Osservazione. Vale l'inclusione: $\bigcup \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup A}$

Esempio 16. *Con i numeri reali abbiamo che:*

$$\bigcup_{n>0} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \subseteq \overline{\bigcup_{n>0} \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]} = [0, 1]$$

Oppure abbiamo che:

$$\bigcup_{n>0} \left\{\frac{1}{n}\right\} \subseteq \overline{\bigcup_{n>0} \left\{\frac{1}{n}\right\}} = \{0\} \cup \bigcup_{n>0} \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

Esempio 17. *In* $(X, \mathcal{T}_{GR})$*, se* $Y \neq \varnothing$*, allora* $Y = X$*. Da cui segue che* $\mathring{Y} \neq \varnothing$ *se* $Y \neq X$ *oppure* $\mathring{Y} = X$ *se* $Y = X$*. Inoltre* $\partial Y = X$ *se* $Y = \varnothing$

Esempio 18. *In* $(X, \mathcal{T}_D)$ *si ha che* $\overline{Y} = Y$*,* $\mathring{Y} = Y$ *e* $\partial Y = \varnothing$

Esempio 19. $(X, \mathcal{T}_{Cof})$*, se* $|Y| = +\infty$*, allora* $\overline{Y} = X$

Definizione 1.4.5: Insieme Denso

Sia $Y \subseteq (X, \mathcal{T})$. Si dice che Y è **denso** se $\overline{Y} = X$

Esempio 20. $\mathbb{Z} \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{Cof})$ *e* $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ *sono densi*

Definizione 1.4.6: Intorno

Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico e sia $p \in X$. Si dice che W è un **intorno** di p se:

$$\exists U \in \mathcal{T} : p \in U \subseteq W$$

Lemma 1.4.7

Sia W intorno di p e sia $V \subseteq X$. Allora $W \cup V$ è un intorno di p. Inoltre se W_i sono un insieme di intorni di p (con $i \in \{1, \ldots, n\}$), allora:

$$\bigcap_{1,\ldots,n} W_i \text{ è un intorno}$$

Dimostrazione. Per definizione di intorno, esiste $U \in \mathcal{T}$ tale che $p \in U \subseteq W$. Ma allora è vero che:

$$p \in U \subseteq W \cup V \text{ è ancora un intorno di p}$$

Siano poi $U_i \in \mathcal{T}$ tali che $p \in U_i \subseteq W_i$. Allora:

$$p \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} W_i$$

Sappiamo anche che $\cap U_i$ è ancora un aperto in quanto è intersezione finita di aperti, quindi $\cap W_i$ è effettivamente un intorno. □

Osservazione. Se $p \in V$ è tale che $p \in \mathring{V}$, allora V è un intorno di p. Inoltre, se $U \subseteq \mathcal{T}$, allora U è intorno di tutti i suoi punti.

Definizione 1.4.8: Sistema Fondamentale di Intorni

Sia $x \in (X, \mathcal{T})$. Definisco $I(x)$ come l'insieme degli intorni di x, cioè:

$$I(x) = \{U \subseteq X : U \text{ è un intorno di } x\}$$

Sia $\mathcal{I} \subseteq I(x)$. $\mathcal{I}$ si definisce **Sistema Fondamentale di Intorni** se:

$$\forall J \in I(x), \exists K \in \mathcal{I} : K \subseteq J$$

Esempio 21. *In* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ *si ha che:*

$$\{]-\varepsilon, \varepsilon[: \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} \qquad e \qquad \left\{\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N}\right\}$$

Sono due sistemi fondamentali di intorni per $p = 0$

Esempio 22. *Dati* $x \in (X, \mathcal{T})$*, possiamo definire:*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = \{U \subseteq X : U \text{ è aperto}, U \in I(x)\} = I(x) \cap \mathcal{T}$$

Questo è un sistema fondamentale di intorni.

Esempio 23. *Sia* $x \in (X, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico e sia* $\mathcal{B}$ *una sua base, allora possiamo definire:*

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X : U \in \mathcal{B}, U \text{ è un intorno di } x\} = \mathcal{B} \cap I(x)$$

È un sistema fondamentale di intorni, infatti se $p \in U$*, per la definizione di base* $\mathcal{B}$*,* U *è scrivibile come unione di elementi di* $\mathcal{B}$*, che quindi contiene* p

1.5 Funzioni e Topologie Indotte

Definizione 1.5.1: Funzione Continua in un Punto

Sia $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ una funzione. Si dice che f è continua in $x \in X$ se:

$$\forall V \text{ intorno di } f(x), \exists U \text{ intorno di } x : f(U) \subseteq V$$

Osservazione. È sufficiente verificare la condizione su dei sistemi fondamentali di intorni.

Osservazione. Se si ha che $(X, \mathcal{T}) = (Y, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ e gli intorni sono della forma $]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$ e $]x-\delta, x+\delta[$, allora f è continua in x se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f\big(]x-\delta, x+\delta[\big) \subseteq]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[$$

Cioè:

$$\forall y : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

In particolare vale la seguente proposizione

Proposizione 1.5.2

Vale la doppia implicazione:

$$f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S}) \text{ è continua } \Leftrightarrow \forall x \in X, f \text{ è continua in } x$$

Dimostrazione. Facciamo la dimostrazione sfruttando gli insiemi aperti.
$\boxed{\Rightarrow}$ Sia A un insieme aperto con $f(x) \in A \subseteq Y$. Allora si ha che $x \in f^{-1}(A)$. f è continua, quindi $f^{-1}(A)$ è un aperto che contiene x, dunque è un intorno di x.
Quindi si ha che $f(f^{-1}(A)) \subseteq A$ ($^{-1}$ *è usato come controimmagine*).
Quindi f è continua in x, e per l'arbitrarietà di $x \in X$, segue che f è continua in $x, \forall x \in X$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia A un aperto di Y. Dimostriamo che $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}$. Sia $x \in f^{-1}(A)$. Sappiamo che f è continua in x, allora esiste un aperto U_x che contiene x e $f(U_x) \subseteq A$. Allora posso scrivere:

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} U_x$$

in quanto se $f(U_x) \subseteq A \Rightarrow U_x \subseteq f^{-1}(A)$.
U_x è un aperto, dunque la loro unione è ancora aperta, quindi f è continua. □

Definizione 1.5.3: Topologia Indotta

Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico e sia $Y \subseteq X$. Si definisce **topologia indotta** $\mathcal{T}_Y$ da $\mathcal{T}$ su Y l'unica topologia tale che:

$$\forall f : (Z, \mathcal{S}) \to (Y, \mathcal{T}_Y), f \text{ è continua} \Leftrightarrow i \circ f \text{ è continua}$$

con $i : Y \to X$ inclusione, cioè vale:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i"] & X \\ Z \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "i \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Definizione 1.5.4: $\mathcal{T}_Y$

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap A : A \in \mathcal{T}\}$$

Proposizione 1.5.5

Le due definizioni sono equivalenti.

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{T}$, allora per la funzione di inclusione si ha che $i^{-1}(A) = A \cap Y$, quindi necessariamente $i^{-1}(A)$ deve essere un aperto di $\mathcal{T}_Y$, cioè $A \cap Y$ è un aperto di $\mathcal{T}_Y$. In particolare $\mathcal{T}_Y$ è più fine di $\mathcal{T}'_Y$, dove:

$$\mathcal{T}'_Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}$$

Per la prima definizione si ha che:

$$\begin{tikzcd} (Y, \mathcal{T}_Y) \arrow[r, "i"] & (X, \mathcal{T}) \\ (Y, \mathcal{T}'_Y) \arrow[u, "id"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Dunque coincidono □

Esempio 24. *Sia* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ *e sia* $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, *la Topologia indotta è discreta*

Esempio 25. *Sia* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$ *e sia* $[0, +\infty[\subseteq \mathbb{R}$. *Allora ha una base:*

$$\{]x, y[: x < y, y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\} \cup \{[0, y[: y \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$$

Osservazione. Osserviamo che in generale una se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ è una base, allora $\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$. In $[0, +\infty[$ con la Topologia indotta, un intorno di 0 è un intorno destro nel senso di Analisi 1

Lemma 1.5.6

Sia $Z \subseteq Y \subseteq (X, \mathcal{T})$ con $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico. Sia $(Y, \mathcal{T}_Y)$ la topologia indotta da X su Y. Allora:

1. Se Y è aperto in X, allora Z è aperto in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ se e solo se Z è aperto in $(X, \mathcal{T}_X)$
2. Se Y è chiuso in X, allora Z è chiuso in $(Y, \mathcal{T}_Y)$ se e solo se Z è chiuso in $(X, \mathcal{T}_X)$

Esempio 26. *sia $Z \subseteq [0, 1] \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$. Z è chiuso in $[0, 1]$ con topologia indotta se e solo se Z è chiuso in $(\mathcal{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$*

Dimostrazione. Facciamo il caso con Y aperto:
$\boxed{\Rightarrow}$ Abbiamo che Z è aperto se e solo se $\exists A$ aperto di $X : Z = A \cap Y$. Ma questa è un'intersezione di aperti, quindi è ancora aperto.
$\boxed{\Leftarrow}$ Se Z è un aperto di X, allora $Z = Y \cap Z$, ma dalla definizione di Topologia indotta, si ha che $Z \in \mathcal{T}_Y$.
Per i chiusi è la stessa identica cosa, basta sostituire "aperto" con "chiuso" □

Proposizione 1.5.7

Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ e sia $f(X)$ munito della Topologia indotta da $\mathcal{T}_{f(X)}$ da $\mathcal{T}_Y$. Se f è iniettiva e aperta/chiusa allora f induce un omeomorfismo tra X e $f(X)$

Dimostrazione. Diamo la dimostrazione per il caso f aperta.
Sia $\bar{f} = f|_{Im(f)}$ ($Im(f)$ è il codominio). Per ipotesi ($\star$) abbiamo che $\bar{f}$ è continua, iniettiva e suriettiva. Vogliamo dimostrare che $f(A)$ è un aperto della topologia indotta.
Per ipotesi abbiamo che $f(A) \in \mathcal{T}_Y$ e $f(A) = f(A) \cap Im(f)$, quindi (come nella dimostrazione precedente) abbiamo che è un aperto della Topologia indotta ($f(A) \in \mathcal{T}_{f(X)}$). Con i chiusi è la stessa identica cosa.

$\star$: *Per dimostrare che $\bar{f}$ è continua, abbiamo che $A \in \mathcal{T}_Y$, quindi*

$$f^{-1}(A) = f^{-1}(A \cap Im(f)) = \bar{f}^{-1}(A \cap Im(f))$$

Quindi $\bar{f}$ è continua. □

Proposizione 1.5.8

Siano $A \subseteq Y \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$ con $\mathcal{T}_Y$ topologia indotta su Y da $\mathcal{T}_X$, allora la chiusura di A in Y è uguale alla chiusura di A in X intersecata con Y, cioè:

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$$

Esempio 27. *Consideriamo $(0, 1) \subseteq (0, 2) \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ e $(0, 2)$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea. Chi è $\overline{(0, 1)}^{(0,2)}$?*

$$\overline{(0, 1)}^{(0,2)} = (0, 1] = [0, 1] \cap (0, 2)$$

Come si può dimostrare senza la proposizione? Sfruttando il lemma 1.5.
Dalla definizione si aperto, abbiamo che $(0,1)$ *è non chiuso in* $(0,2)$ *se e solo se* $(0,2) \setminus (0,1)$ *è non aperto. Ma è vero che* $(0,2) \setminus (0,1) = [1,2)$ *e vogliamo dimostrare che non è aperto in* $(0,2)$.
Sfruttando il lemma, siccome $(0,2)$ *è un aperto di* $\mathbb{R}$*, si ha che* $[1,2)$ *è aperto in* $(0,2)$ *se e solo se lo è in* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$.
Se $[1,2)$ *fosse aperto, sarebbe intersezione di elementi della base* $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x)\}_{x\in\mathbb{R},\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$*, cioè è intersezione di aperti del tipo* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ *ma il solo punto* 1 *non è in nessun intervallo aperto di questa forma. Quindi* $[1,2)$ *non è aperto, quindi* $(0,1)$ *è non chiuso.*

Adesso la dimostrazione della proposizione 1.5.8

Dimostrazione. Vediamo come questi insiemi possono essere scritti:

$$\overline{A}^X = \bigcap_{F\in\mathcal{C}} F \quad \text{con } \mathcal{C} = \{F \text{ chiuso} : A \subseteq F \text{ in } X\}$$

Invece l'altro insieme:

$$\overline{A}^Y = \bigcap_{G\in\mathcal{C}'} G$$

Con $\mathcal{C}'$ definito come:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}' &= \{G \text{ chiuso} : A \subseteq F \text{ in } X\} = \{F\cap Y : F \text{ chiuso di } X, A \subseteq F\cap Y\} = \\ &= \{F\cap Y : F \text{ chiuso di } X, A \subseteq F\}\end{aligned}$$

Sapendo questa cosa, si ottiene che:

$$\overline{A}^Y = \bigcap_{G\in\mathcal{C}'} = \bigcap_{F\in\mathcal{C}} (F\cap Y) = \left(\bigcap_{F\in\mathcal{C}}\right) \cap Y = \overline{A}^X \cap Y$$

□

1.6 Topologia del Prodotto

Prima di dare l'effettiva definizione, cerchiamo di capire che cosa si intenda effettivamente con Topologia prodotto. Siano quindi $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici.
Allora si ha che:

$$\begin{tikzcd} & (X\times Y, \mathcal{T}_?) \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\ (X, \mathcal{T}_X) & & (Y, \mathcal{T}_Y) \end{tikzcd}$$

Dove p_X e p_Y sono rispettivamente le proiezioni su X e su Y

Se fisso $y \in Y$ e prendo $p_X\big|_{X\cap\{y\}} : X \cap \{y\} \to X$ ho che tale funzione è continua, biettiva e con inversa continua. In $\mathcal{T}_?$ dobbiamo mettere tutti gli aperti in modo tali che tali proiezioni siano di questo tipo.
Bisogna metter il "numero minimo" di aperti.

Definizione 1.6.1: Topologia Prodotto (1)

La **Topologia Prodotto** $\mathcal{T}_{X\times Y}$ su $X \times Y$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono p_X e p_Y continue

Definizione 1.6.2: Topologia Prodotto (2)

La **Topologia Prodotto** su $X \times Y$ è la topologia con Base (Chiamata Base Canonica) definita come:

$$\mathcal{B}_C = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

Esempio 28. *In $\mathbb{R}^2$ il complementare di una parabola è l'esempio di facile di Topologia Prodotto*

In un certo senso vanno dimostrate le definizioni date. Iniziamo a dimostrare che è effettivamente una base:

Dimostrazione. Per fare questa dimostrazione, mostriamo che vale il teorema della base:
$\boxed{1}$ Notiamo che $X \times Y$ è uguale a $X \times Y$ con $X \in \mathcal{T}_X$ e $Y \in \mathcal{T}_Y$, quindi $X \times Y \in \mathcal{B}_C$, da cui

$$\bigcup_{A \in \mathcal{B}_C} A = X \times Y$$

$\boxed{2}$ Siano $U \times V, U' \times V' \in \mathcal{B}_C$, come è fatto $(U \times V) \cap (U' \times V')$?
Sappiamo che la prima coordinata è in $U \cap U'$, mentre la seconda coordinata in $V \cap V'$, da cui segue che:

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V') \in \mathcal{B}_C$$

Quindi $\forall p \in (U \times V) \cap (U' \times V')$ ho che:

$$p \in (U \cap U') \times (V \times V') = (U \times V) \cap (U' \times V')$$

Quindi $\mathcal{B}_C$ è chiusa per intersezioni $\square$

Proposizione 1.6.3

Le due definizioni coincidono

Osservazione. In questo modo dimostro anche la proprietà descritta nella prima definizione.

Dimostrazione. Mostriamo che la Topologia della seconda definizione è la meno fine che renda p_X e p_Y continue.
Sia $U \in \mathcal{T}_X$ e $V \in \mathcal{T}_Y$. Come sono fatte $p_X^{-1}(U)$ e $p_Y^{-1}(V)$?

$$p_X^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B}_C \qquad p_Y^{-1}(V) = X \times v \in \mathcal{B}_C$$

Quindi p_X e p_Y sono continue rispetto alla seconda definizione.
Sia $\mathcal{S}$ Topologia di $X \times Y$ che renda p_X e p_Y continue. Allora

$$\forall U \in \mathcal{T}_X, \forall V \in \mathcal{T}_Y, p_X^{-1}(U) \in \mathcal{S} \text{ e } p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{S} \Rightarrow p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{S}$$

Non solo, ma vale anche che $p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) = U \times V$.
Quindi abbiamo mostrato che $\mathcal{B}_C \subseteq \mathcal{S}$
Abbiamo inoltre che:

$$\forall A \in \mathcal{T}_{X\times Y}, A = \bigcup_{i\in I, U_i\times V_i \in \mathcal{S}} U_i \times V_i \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{S}$$

Quindi $\mathcal{S}$ è più fine di $\mathcal{T}_{X\times Y}$ □

Corollario 1.6.4: Proprietà Universale della Topologia Prodotto

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ e $(Z, \mathcal{T}_Z)$ spazi topologici e sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ Topologia Prodotto su $X \times Y$.
Sia poi $f \colon Z \to X \times Y$.
Allora f è continua se e solo se $p_X \circ f$ e $p_Y \circ f$ sono continue.
In tal caso vale:

$$\begin{tikzcd}
& (Z,\mathcal{T}_Z) \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "p_X \circ f"'] \arrow[ddr, bend left, "p_Y \circ f"] & \\
& (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) \arrow[dl, "p_X"'] \arrow[dr, "p_Y"] & \\
(X, \mathcal{T}_X) & & (Y, \mathcal{T}_Y)
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ È banale, in quanto è combinazione di funzioni continue.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sfruttando l'esercizio 2.15 del foglio di esercizi, mi basta dimostrare che:

$$\forall U \times V \in \mathcal{B}_C, f^{-1}(U \times V) \in \mathcal{T}_Z$$

Andando nel dettaglio abbiamo che:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z : f(z) \in U \times V\} = \{z \in Z : (p_X \circ f)(z) \in U, (p_Y \circ f)(z) \in V\} \\ &= \{z \in Z : (p_X \circ f)(z) \in U\} \cap \{z \in Z : (p_Y \circ f)(z) \in V\} \\ &= (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{T}_Z \end{aligned}$$

In particolare l'appartenenza a $\mathcal{T}_Z$ segue dal fatto che entrambi i membri appartengono già a $\mathcal{T}_Z$ in quanto p_X e p_Y sono continue per ipotesi. Quindi f è continua. □

Corollario 1.6.5

Dati X, Y, Z come nel corollario precedente, se le funzioni $g \colon Z \to (X, \mathcal{T}_X)$ e $h \colon Z \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ sono continue, allora:

$$gh \colon Z \to (X \times Y, \mathcal{T}_{X\times Y}) \text{ è continua}$$

Dimostrazione. Basta considerare g come $p_X \circ gh$ e h come $p_Y \circ gh$ e poi applicare il teorema precedente. □

Esempio 29. *Siano $(X, \mathcal{T}_D)$ e $(Y, \mathcal{T}_D)$ spazi topologici. Allora:*

$$\mathcal{T}_{X\times Y} \textit{ ha base } \mathcal{B}_C = \{U \times V : U \subseteq X, V \subseteq Y\}$$

Ma, data la Topologia discreta, si ha che: $\forall(x, y) \in X \times Y$ *ho che:*

$$\{(x, y)\} = \{x\} \times \{y\} \in \mathcal{B}_C$$

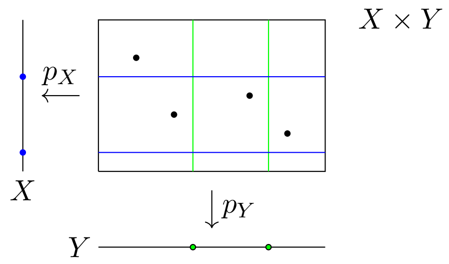
Quindi $\mathcal{B}_C$ *è la topologia discreta*

Esempio 30. *Siano* $(X, \mathcal{T}_{GR})$ *e* $(Y, \mathcal{T}_{GR})$*, allora:*

$$\mathcal{B}_C = \{\varnothing, X \times Y\}$$

Quindi la Base Canonica della Topologia Prodotto è la Topologia Grossolana

Esempio 31. *Siano* $(X, \mathcal{T}_{Cof})$ *e* $(Y, \mathcal{T}_{Cof})$ *con* $|X| = |Y| = +\infty$ *(così da non ricadere nel caso precedente). Come è fatta la Topologia Prodotto?*
Sappiamo che la Base Canonica è definita come $\mathcal{B}_C = \{U \times V : U \text{ aperto in } X, V \text{ aperto in } Y\}$*.*
I chiusi li otteniamo come intersezioni di $F \times G$ *con* F *chiusi di* X *e* G *chiusi di* Y*. Possiamo immaginare di rappresentarlo come:*



La Topologia Prodotto è più fine della Topologia Cofinita e i chiusi sono:

- *Punti (chiuso, chiuso)*
- *Preimmagini di* p_X^{-1}*(punto) o "rette" orizzontali (chiuso,* Y*)*
- *Preimmagini di* p_Y^{-1}*(punto) o "rette" verticali (*X*, chiuso)*
- $\varnothing$ *e* $X \times Y$

Esempio 32. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{E}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{Prod})$ *rispetto a* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *e* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$*.*
Mostriamo che gli elementi di una base del primo sono aperti per la seconda topologia e viceversa.
Sappiamo che $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *ha come base* $\{B_\varepsilon(x, y)\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \varepsilon\in\mathbb{R}^+}$*, mentre* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{Prod})$ *ha come base:*

$$\{B_\varepsilon(X) \times B_{\varepsilon'}(Y)\}_{x,y\in\mathbb{R}, \varepsilon'\in\mathbb{R}} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon', y + \varepsilon')$$

Proposizione 1.6.6

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e sia $(X \times Y, \mathcal{T})$ lo spazio topologico prodotto. Siano poi $p_X : X \times Y \to X$ e $p_Y : X \times Y \to Y$, allora:

1. p_X e p_Y sono aperte
2. $\forall x \in X, \forall y \in Y, p_X : X \times \{y\} \to X$ e $p_Y : \{x\} \times Y \to Y$ sono omeomorfismi, dove $X \times \{y\}$ e $\{x\} \times Y$ hanno la topologia indotta.

Dimostrazione. $\boxed{1}$ Uso l'esercizio 2.15 e lo utilizzo sulla base canonica $\mathcal{B}_C = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$. Si ha quindi che:

$$p_X(U \times V) = U \in \mathcal{T}_X \quad \text{e} \quad p_Y(U \times V) = V \in \mathcal{T}_Y$$

Da cui segue che p_X e p_Y sono aperte.

$\boxed{2}$ *Lo facciamo per la funzione p_X, in quanto per la funzione p_Y è la stessa cosa.*
Consideriamo:

$$p_X\big|_{X \times \{y\}} : X \times \{y\} \to X$$

Abbiamo che p_X è banalmente suriettiva, in quanto per ogni elemento $x \in X$ esiste $(x, y) \in X \times \{y\}$ tale che $p_X(x, y) = x$, da cui segue direttamente anche l'iniettività. Per studiare la continuità e l'apertura della funzione, andiamo a studiare questo diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "p_X"] & X \\
X \times \{y\} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "p_X \circ i = p_X|_{X \times \{y\}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Allora segue che:

$$(p_X \circ i)^{-1}(U) = p_X^{-1}(U) \cap (X \times \{y\})$$

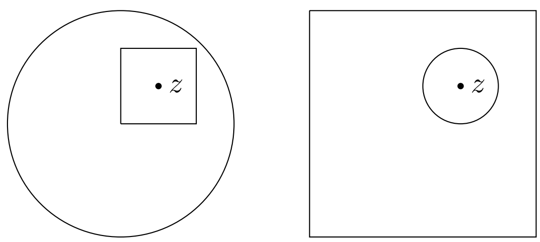
Essendo $p_X^{-1}(U)$ un aperto in $X \cap Y$, quest'insieme è aperto nella topologia indotta, quindi per l'arbitrarietà dell'aperto, la funzione è continua.
Mostriamo che è aperta su una base $\mathcal{B} = \{(U \times V) \cap (X \times \{y\}) : U \times V \in \mathcal{B}_C\}$. Quest'insieme è esattamente uguale a $\{U \times \{y\} : U \in \mathcal{T}_X\}$. Allora segue che:

$$p_X\big|_{X \times \{y\}}(U \times \{y\}) = U \in \mathcal{T}_X$$

Quindi è aperta. Da tutto questo segue che è un omeomorfismo. □

Dimostriamo ora l'esempio 32, però generalizziamolo al caso $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$

Dimostrazione. Dimostriamo che un elemento di una base dell'una è aperto nell'altra e viceversa. *Per pura semplicità di notazione poniamo con ξ_x le prime p componenti del vettore x in $\mathbb{R}^n$, cioè $\xi_x \in \mathbb{R}^p$, e sia y_x le sue ultime $n-p$ componenti. Cioè siano $\xi_x \in \mathbb{R}^p$ e $y_x \in \mathbb{R}^{n-p}$ come le abbiamo viste in analisi.*
Siano $\mathcal{B}_1 = \{B_{\varepsilon_1}(x) : \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n\}$ base per $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ e sia $\mathcal{B}_2 = \{B_{\varepsilon_2}(\xi) \times B_{\varepsilon_3}(y) : \xi \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^{n-p}, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \mathbb{R}^p\}$. Quello che vogliamo mostrare è che:



Sia $z \in B_\varepsilon(x)$, allora si ha che:

$$d(z,x) = \delta - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad B_{\frac{\varepsilon-\delta}{2}}(\xi_z) \times B_{\frac{\varepsilon-\delta}{2}}(y_z) \subseteq B_\varepsilon(x)$$

Visto che ogni punto $wB_{\frac{\varepsilon-\delta}{2}}(\xi_z) \times B_{\frac{\varepsilon-\delta}{2}}(y_z)$ ha distanza da z pari a $d(z,w) < \varepsilon - \delta$, segue che:

$$d(w,x) < d(w,z) + d(z,x) < \varepsilon$$

Sia poi $z \in B_{\varepsilon_1}(\xi_x) \times B_{\varepsilon_2}(y_x)$, allora si ha che:

$$d(\xi_z, \xi_x) = \delta_1 < \varepsilon_1 \qquad \text{e} \qquad d(y_x, y_z) = \delta_2 < \varepsilon_2$$

Poniamo allora $\eta = \sqrt{(\varepsilon_1 - \delta_1)^2 + (\varepsilon_2 - \delta)^2}$. Allora segue che:

$$B_{\frac{\eta}{2}}(z) \subseteq B_{\varepsilon_1}(\xi_x) \times B_{\varepsilon_2}(y_x)$$

□

La cosa appena dimostrata però non è valido con i chiusi.

Esempio 33. *Sia* $p_1 \colon (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *definita come* $p_1(xy) = x$ *non è chiusa. Infatti, posto* $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ *si ha che:*

$$p_1(F) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \textit{ che non è chiuso}$$

2 Teoria delle Categorie

2.1 Prime definizioni

Definizione 2.1.1: Categoria e Morfismo

Una **Categoria** $\mathcal{C}$ è il dato di:

1. Una collezione di oggetti $\boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$
2. $\forall A, B \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$, è dato un insieme $\boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ chiamato insieme dei **Morfismi** in $\mathcal{C}$ tra A e B
3. $\forall A, B, C \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ è data una composizione, cioè:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) &\to \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Tali che:

(a) se $A \neq C$ oppure $B \neq D$, allora $\boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D) = \varnothing$

(b) $\forall A \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}), \exists 1_A \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) : \forall B \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}), \forall f \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $\forall g \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A), f \circ 1_A = f e 1_A \circ g = g$

(c) La composizione è associativa.

Definizione 2.1.2: *Set*

$\boldsymbol{Set}$ è la categoria degli insiemi con $\boldsymbol{Ob}(\boldsymbol{Set})$ sono gli insiemi e $\forall A, B \in \boldsymbol{Ob}(\boldsymbol{Set})$ si ha che $\boldsymbol{Mor}_{\boldsymbol{Set}}(A, B) = \{f \colon A \to B \text{ funzioni}\}$

Si è detto che una categoria è una "collezione" di oggetti e non un "insieme" di oggetti, proprio per evitare di parlare di insiemi di insiemi. Così facendo si evita di cadere nel paradosso di Russel.

Definizione 2.1.3: *Grp*, *Ring*, *Vec*

$\boldsymbol{Grp}$ è la categoria dei Gruppi, $\boldsymbol{Ring}$ è la categoria degli anelli e $\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}}$ è la categoria dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Vediamo qualche esempio sulle categorie.

Esempio 34. *La categoria vuota è una categoria*

Esempio 35. *Esistono categorie con un solo oggetto, cioè* $\boldsymbol{Ob}(A)$ *con* $\boldsymbol{Mor}(A, A)$ *dove al suo interno ho un'operazione, la composizione che è associativa e ha un elemento neutro.*
In particolare, per ogni gruppo G *si costruisce una categoria con un solo oggetto* A *e* $\boldsymbol{Mor}(A, A) = G$*, dove* $\forall g, h \in G$ *definiamo* $g \circ h = h \cdot g$

Esempio 36. *Sia* B *un insieme parzialmente ordinato. Voglio definire una categoria su tale insieme. Definisco* $\mathcal{B}$ *una categoria associata a* B *tale che* $\boldsymbol{Ob}(\mathcal{B}) = B$ *e* $\forall a, b \in B$ *si abbia:*

$$\boldsymbol{Mor}_{\mathcal{B}}(a, b) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } a \not\leq b \\ i_{a \to b} & \text{se } a \leq b \end{cases}$$

Andiamo a definire la composizione:
Siano $a, b \in B$, se si ha $a \leq b$ e $b \leq c$ allora "definisco" (virgolettato perché non ho altre possibilità):

$$\boldsymbol{Mor}(a,b) \times \boldsymbol{Mor}(b,c) \to \boldsymbol{Mor}(a,c)$$
$$(i_{a\to b}, i_{b\to c}) \mapsto (i_{a\to c})$$

Si vede poi facilmente che $1_a = i_{a\to a}$ e si vede anche che la composizione è associativa.

Volendo possiamo rappresentare una categoria con un grafo:

Esempio 37. *Sia $B = \{a, b, c\}$ tali che $a \leq b$ e $c \leq b$. Allora otteniamo che:*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[loop left, "i_{b\to b}"] & \\
A \arrow[ur, "i_{a\to b}"] \arrow[loop left, "i_{a\to a}"] & & C \arrow[ul, "i_{c\to b}"'] \arrow[loop right, "i_{c\to c}"]
\end{tikzcd}$$

Volendo possiamo anche fare il contrario, cioè partire da un grado e associare una categoria:

Esempio 38. *Sia per esempio il grafo definito come:*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Allora la categoria ad essa associata è:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] \arrow[loop below, "1_A"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[loop below, "1_B"] & C \arrow[loop below, "1C"]
\end{tikzcd}$$

Esempio 39. *Dato A insieme, considero il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(A)$ con l'operazione di inclusione $\subseteq$. Chiamiamo $\boldsymbol{Set}_A$ la categoria associata a $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. In essa ho morfismi tra B e C se e solo se $B \subseteq C$. Questo prende il nome di **Morfismo di Inclusione** $i_{B\to C} : B \to C$*

Definizione 2.1.4: *Top*

Top è la categoria i cui oggetti sono gli spazi topologici e i morfismi sono le funzioni continue.

Definizione 2.1.5: Categoria associata ad una topologia

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, definisco $\boldsymbol{Top}_X$ la **Categoria associata a** $(X, \mathcal{T})$

Esempio 40. *La categoria associata a $(X, \mathcal{T})$ è:*

$$\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[r, "i_{\varnothing\to X}"] \arrow[loop left, "i_{\varnothing\to\varnothing}"] & X \arrow[loop right, "i_{X\to X}"]
\end{tikzcd}$$

Definizione 2.1.6: *Set*$_{pt}$

Si definisce $\boldsymbol{Set}_{pt}$ la **Categoria degli insiemi puntati**. Ha come oggetti le coppie X, x_0 con $x_0 \in X$ e i suoi morfismi sono del tipo:

$$\boldsymbol{Mor}((X,x_0),(Y,y_0)) = \begin{Bmatrix} f : X \to Y \\ f(x_0) = y_0 \end{Bmatrix}$$

Osservazione. Notiamo che in questa categoria non c'è $\varnothing$, perché un oggetto deve avere almeno un punto

Definizione 2.1.7: Categoria Concreta

Una categoria è detta **Concreta** se i suoi oggetti sono insiemi (con proprietà aggiuntive) e i suoi morfismi sono funzioni (particolari)

Definizione 2.1.8: Isomorfismo

Data $\mathcal{C}$ categoria e $A, B \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$, $f \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ è detto **Isomorfismo** se $\exists g \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tale che:

$$f \circ g \text{ e } g \circ f \text{ siano le identità nel posto giusto}$$

Definizione 2.1.9: Diagramma

Un **Diagramma** all'interno di una categoria $\mathcal{C}$ è il dato di un grafo orientato dove ogni punto è etichettato usando gli oggetti di $\mathcal{C}$ e ogni freccia è etichettata con un morfismo tra i due oggetti. Un diagramma si dice **Commutativo** se il risultato di una composizione di morfismi sul diagramma dipende solo dai vertici di partenza e di arrivo.

Vediamo degli esempi in cui dei grafi sono commutativi.

Esempio 41. *Studiamo questo grafo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop right, "g"] \end{tikzcd}$$

Questo diagramma è commutativo se e solo se $\forall k \in \mathbb{N}, g^k \circ f = f$
Vediamo quest'altro grafo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

In questo caso il grafo è commutativo se e solo se $f = g$

Vediamo un caso un pelo più complesso.

Esempio 42. *Vediamo questo grafo:*

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, bend right, "f_A"'] \arrow[d, "f_P"] \arrow[dr, bend left, "f_B"] & \\ & P \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Affinché questo grafo sia commutativo, devono essere verificate contemporaneamente:

$$f_B = p_B \circ f_P \qquad e \qquad f_A = p_A \circ f_P$$

2.2 Monomorfismo e Epimorfismo

Abbiamo visto con l'analisi e con l'algebra lineare che le funzioni possono essere iniettive e suriettive, vediamo come possiamo rappresentare questi concetti con la teoria delle categorie.

Vediamo prima con le funzioni iniettiva. Supponiamo di avere f iniettiva e di avere il seguente grafo.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

Essendo f iniettiva possiamo dire che se $f \circ g_1 = f \circ g_2$, allora $g_1 = g_2$.

Se invece abbiamo h suriettiva e abbiamo il seguente grafo abbiamo che:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] & Z \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Allora possiamo dire che se $g_1 \circ h = g_2 \circ h$, allora si ha che $g_1 = g_2$.

Diamo adesso le definizioni corrispondenti al concetto di iniettività e di suriettività.

Definizione 2.2.1: Monomorfismo

Siano $X, Y \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ e sia $f \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. f è detto **Monomorfismo** se:

$$\forall Z \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}), \forall g_1, g_2 \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z), f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

Cioè vale la cancellazione a sinistra

Definizione 2.2.2: Epimorfismo

Siano $Y, Z \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ e sia $h \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$. h è detto **Epimorfismo** se:

$$\forall X \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}), \forall g_1, g_2 \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, X), g_1 \circ h = g_2 \circ h \Rightarrow g_2 = g_2$$

Cioè vale la cancellazione a destra

Esempio 43. *Un monomorfismo in **Set** è una funzione iniettiva e un epimorfismo in **Set** è una funzione suriettiva.*

Attenzione: Questa è una generalizzazione che non sempre è vera per le Categorie Concrete.

Esempio 44. *Sia **Ring** la categoria degli anelli e sia $i \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ la funzione di inclusione. Questo è un epimorfismo.*
Infatti sia R un anello e siano $g_1, g_2 \colon \mathbb{Q} \to R$ omomorfismo di anelli, allora:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & \mathbb{Q} \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] & R \end{tikzcd}$$

Abbiamo che $g_1 \circ i = g_2 \circ i$.
Infatti, $\forall n \in \mathbb{Z}, g_1(n) = g_2(n)$ Inoltre se $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, allora si ha che:

$$g_1\left(\frac{m}{n}\right) = g_1(m) \cdot g_1(n)^{-1} = g_2(m) \cdot g_2(n)^{-1} = g_2\left(\frac{m}{n}\right)$$

Da cui segue che $g_1 = g_2$.
Qui abbiamo utilizzato solo il fatto che $\mathbb{Q} = Q(\mathbb{Z})$ e che g è un omomorfismo di anelli.

Definizione 2.2.3: Categoria Opposta

Data $\mathcal{C}$ categoria, si definisce $\mathcal{C}$ **Categoria Opposta** $\mathcal{C}^{op}$ come la categoria tale che:

1. $\boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}) = \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}^{op})$
2. $\forall A, B \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ si ha che $\boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \boldsymbol{Ob}_{\mathcal{C}}(A, B)$
3. $\forall A, B, C \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ definisco la composizione come:

$$\boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) \times \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(B, C) \to \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(A, C)$$

Come

$$g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$$

Utilizzando i grafi abbiamo che, se vale il seguente grafo in $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

Il grafo nella categoria opposta $\mathcal{C}^{op}$ corrispondente sarà:

$$\begin{tikzcd} C & B \arrow[l, "g^{op}"'] & A \arrow[l, "f^{op}"'] \arrow[ll, bend left, "(f \circ g)^{op} = g^{op} \circ f^{op}"] \end{tikzcd}$$

Il dualismo negli spazi vettoriali è un esempio di categoria opposta e la funzione $\imath : V \to V^*$ prende il nome di funtore che lega le due categorie.

Osservazione. Se $f \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ è un monomorfismo, allora $f^{op} \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}^{op}}(B, A)$ è un epimorfismo

2.3 Prodotto e Coprodotto

Definizione 2.3.1: Prodotto di Categorie

Un **Prodotto** (P, p_A, p_B) tra due oggetti A, B di una categoria $\mathcal{C}$ è il dato di $P \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ con $p_A = \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(P, A)$ e $p_B = \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(P, B)$ tale che:

$$\forall Z \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}), \forall f_A \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(P, A), \forall f_B \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(P, B), \exists! f_P \colon Z \to P, f_P \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, P) :$$

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "f_P"] \arrow[ddl, bend right, "f_A"'] \arrow[ddr, bend left, "f_B"] & \\ & P \arrow[dl, "p_A"] \arrow[dr, "p_B"'] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

Sia commutativo, cioè $f_A = p_A \circ f_P$ e $f_B = p_B \circ f_P$

Esempio 45. *In* $\boldsymbol{Set}$ *abbiamo che:*

$$\begin{tikzcd}
& A \times B \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] & & B \times A \arrow[dl, "p'_B"'] \arrow[dr, "p'_A"] & \\
A & & B & & A
\end{tikzcd}$$

Definite in modo che $p_A(a,b) = a$, $p_B(a,b) = b$ *e* $p'_B(b,a) = b$, $p'_A(b,a) = a$
Inoltre $\forall Z \in \textbf{\textit{Set}}$, $\forall f_A : Z \to A$ *e* $f_B : Z \to B$ *definiamo:*

$$f_P : Z \to A \times B,\ z \mapsto (f_A(z), f_B(z)) \qquad e \qquad f_P : Z \to B \times A,\ z \mapsto (f_B(z), f_A(z))$$

Definizione 2.3.2: Coprodotto

Allo stesso modo definisco il **Coprodotto** (Q, i_A, i_B) di due oggetti $A, B \in \textbf{\textit{Ob}}(\mathcal{C})$ tale che:

$$\forall Z \in \textbf{\textit{Ob}}(\mathcal{C}), \forall f_A : A \to Z, \forall f_B : B \to Z, \exists! i_Q :$$

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
& Q \arrow[u, "i_Q"] & \\
A \arrow[ur, "i_A"'] \arrow[uur, bend left, "f_A"] & & B \arrow[ul, "i_B"] \arrow[uul, bend right, "f_B"']
\end{tikzcd}$$

Esempio 46. *Nella categoria* $\textbf{\textit{Set}}$, *il coprodotto è l'unione disgiunta* $A \amalg B$, *con:*

$$A \amalg B = \{(c, C) : C \in \{A, B\}, c \in C\}$$

In particolare, se esiste $a \in A \cap B$, *si ha che ci sono* (a, A) *e* (b, A)
Allora abbiamo:

$$i_A : A \to A \amalg B,\ i_A(a) = (a, A) \qquad e \qquad i_B : B \to A \amalg B,\ i_B(b) = (b, B)$$

Allora possiamo definire $i_Q(a, A) = f_A(a)$ *e* $i_Q(b, B) = f_B(b)$ *e siamo apposto.*

Nel caso $A = B$, sostanzialmente si indicizzano gli insiemi.

Non sempre si riesce a trovare un prodotto / coprodotto (per esempio a diversa caratteristica), oppure:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[loop above] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \arrow[loop left] & & B \arrow[loop right] \\
& D \arrow[loop below] \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

In questo caso non ho prodotti tra A e B e la sua opposta non avrà coprodotti.

Proposizione 2.3.3

Un prodotto (analogamente un coprodotto) tra due oggetti A e B, se esiste, è unico a meno di isomorfismo.

Dimostrazione. Siano (P, p_A, p_B) e (P', p'_A, p'_B) due prodotti e sia il grafo seguente la rappresentazione di parte della categoria:

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "p_A"'] \arrow[dr, "p_B"] \arrow[d, "f_{P'}"] & \\
A & P' \arrow[l, "p'_A"] \arrow[r, "p'_B"'] \arrow[d, "f_P"] & B \\
& P \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Abbiamo che P' è un prodotto, quindi esiste un'unica funzione $f_{P'} : P \to P'$ tale che:

$$p_A = p'_A \circ f_{P'} \qquad \text{e} \qquad p_B = p'_B \circ f_{P'}$$

Ma è anche vero che P è un prodotto, quindi esiste un'unica funzione $f_P : P' \to P$ tale che:

$$p'_A = p_A \circ f_P \qquad \text{e} \qquad p'_B = p_B \circ f_P$$

Questi due sono i candidati per l'isomorfismo.
Siccome P è un prodotto, esiste una funzione $h : P \to P'$ tale che:

$$p_A = p'_A \circ h \qquad \text{e} \qquad p_B = p'_B \circ h$$

Ma per l'unicità si ha che $h = id$:

$$p_A = p'_A \circ f_{P'} = p_A \circ f_P \circ f_{P'} \qquad \text{e} \qquad p_B = p_B \circ f_P \circ f_{P'}$$

Per unicità della funzione si ha che $f_P \circ f_{P'} = id_P$
Scambiando P e P' si ottiene l'altra composizione $f_{P'} \circ f_P = id_{P'}$
Con il coprodotto è la stessa cosa, invertendo le frecce. □

Esercizio (Coprodotto e Prodotto in ***Top***)**.** Dati due spazi topologici $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$, definiamo:

$$(X \times Y, \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_Y)$$

Vediamo che per il prodotto categorico possiamo prendere quello già definito.
Infatti, sia $(Z, \mathcal{T}_Z)$ e siano $f_X : Z \to X$ e $f_Y : Z \to Y$ continue e sia:

$$f : Z \to X \times Y \qquad z \mapsto (f_X(z), f_Y(z))$$

Per la proprietà universale del prodotto topologico si ha che:

$$f \text{ è continua} \Leftrightarrow \text{lo sono } p_X \circ f = f_X \text{ e } p_Y \circ f = f_Y$$

Quindi la definizione di prodotto categorico è ancora soddisfatta.
Per il coprodotto consideriamo:

$$(X \amalg Y, \mathcal{T}_{X \amalg Y})$$

Dove si ha che $A \in \mathcal{T}_{X \amalg Y}$ se e solo se $A|_X \in \mathcal{T}_X$ e $A|_Y \in \mathcal{T}_Y$. Notiamo che qui, rispetto a prima, ci sono più insiemi.
Qui, sia X, sia Y sono sia aperti sia chiusi in $X \amalg Y$

Esercizio (Coprodotto tra Gruppi)**.** Dati G, H gruppi, cerchiamo $G \star H$ gruppo e due omomorfismi $i_G : G \to G \star H$ e $i_H : H \to G \star H$ tali che per ogni gruppo Z con $f_G : G \to Z$ e $f_H : H \to Z$ ho un'unica $i_{G\star H} : G\star H \to Z$ tale che valga il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
 & G \star H \arrow[u, "i_{G\star H}"] & \\
G \arrow[uur, bend left, "f_G"] \arrow[ur, "i_G"'] & & H \arrow[uul, bend right, "f_H"'] \arrow[ul, "i_H"]
\end{tikzcd}$$

Cioè valgono:

$$f_G = i_{G\star H} \circ i_G \qquad \text{e} \qquad f_H = i_{G\star H} \circ i_H$$

Il gruppo che stiamo cercando è proprio il **Prodotto Libero** dei gruppi G e H. Supponiamo che G e H siano gruppi distinti.

Definizione 2.3.4: Prodotto Libero tra gruppi

Si definisce **Prodotto Libero** $G \star H$ di G e H l'insieme delle parole/stringhe di $G \cup H$ di elementi tali che:

1. C'è la parola vuota ε
2. È costituito da parole **Ridotte**, cioè se valgono:
   (a) Ogni lettera è diversa da e_G e da e_H
   (b) Due lettere adiacenti appartengono a gruppi diversi

Ogni parola può essere semplificata ad una parola del gruppo secondo le seguenti regole:

1. Se c'è una lettere uguale a e_G oppure ad e_H la togliamo
2. Se ci sono due lettere adiacenti in G (o in H) le sostituiamo con il loro prodotto.

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad \cdots h g_1 g_2 h \cdots \quad \Rightarrow \quad \cdots h(g_1 \cdot g_2)h \cdots$$

   Dove $(g_1 \cdot g_2)$ è il prodotto degli elementi g_1 e g_2

Teorema 2.3.5

Il risultato della semplificazione non dipende dall'ordine delle regole che usiamo

Osservazione. Per convenzione abbiamo che ε è una parola ridotta

Per essere un gruppo, dobbiamo definire anche un'operazione binaria su $G \star H$. Definiamo tale operazione come: se $\alpha, \beta \in G \star H$, definiamo $\alpha\beta$ come la semplificazione fino alla parola ridotta della concatenazione di α e β.

Proposizione 2.3.6: Proprietà dell'operazione su $G \star H$

Quest'operazione gode delle seguenti proprietà:

1. È associativa
2. C'è l'elemento neutro ε
3. L'inverso di $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ è $\alpha^{-1} = \alpha_n^{-1} \cdots \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}$

Dimostrazione. Dimostriamo giusto la terza proprietà:

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}^{-1} \cdots \alpha_1^{-1} = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\varepsilon\alpha_{n-1}^{-1} \cdots \alpha_1^{-1} = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_{n-1}^{-1} \cdots \alpha_1^{-1}$$

Andando avanti con le semplificazioni si ottiene ε □

Esempio 47. *Vediamo il prodotto libero di 2 gruppi ciclici di ordine 2. Siano $G = \{e_G, a\}$ e $H = \{e_H, b\}$tali gruppi. Come sono fatte le parole ridotte?*

$$G \star H = \{\varepsilon, a, b, ab, ba, aba, bab, ...\}$$

Notiamo che questo è un gruppo infinito numerabile (cioè con un numero finito e numerabile di elementi).
Vediamo un esempio di concatenazione in quest'insieme:

$$(abab) \cdot (bab) = aba\underbrace{bb}_{\varepsilon}ab = ab\underbrace{aa}_{\varepsilon}b = a\underbrace{bb}_{\varepsilon} = a$$

Esercizio. Provare a costruire un omomorfismo $G \star H \to \mathbb{Z}$

Esempio 48. *Vediamo come è definito il prodotto libero di due gruppi ciclici infiniti $G \cong H \cong \mathbb{Z}$ con $G = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$ e $H = \{b^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Gli elementi di $G \star H$ sono:*

$$G \star H = \{\varepsilon, a^k, b^k, a^k b^\ell, b^k a\ell : b, \ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

Un esempio di operazione in questo gruppo è:

$$(a^2b^{-2}a^3) \cdot (a^-3)b^4a = a^2b^{-2}a^3a^{-3}b^4a = a^2b^{-2}b^4a = a^2b^2a \in G \star H$$

Osservazione. Se $G = \{e_G\}$ allora si ha che $G \star H \cong H$, infatti esiste un isomorfismo che manda e_H nell'elemento ε, mentre manda gli elementi non nulli $h \in H$ nelle rispettive parole $h \in G \star H$

Volendo si può costruire il prodotto libero di una famiglia arbitraria di gruppi.

Definizione 2.3.7: Gruppo Libero di n generatori

Sia $n \in \mathbb{N}^+$. Il **Gruppo Libero di n generatori** è:

$$\mathbb{F}_n = \underbrace{\mathbb{Z} \star \cdots \star \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

Scelte delle lettere $a_1, ..., a_n$, gli elementi di $\mathbb{F}_n$ sono le parole ridotte nell'alfabeto:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{a_i^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

Gli elementi a_i prendono il nome di **generatori liberi** di $\mathbb{F}_n$

Teorema 2.3.8

Siano G e H gruppi e sia $G \star H$ il loro prodotto libero. Siano le funzioni $\phi_G : G \to G \times H$ e $\phi_H : H \to G \star H$ tali che mandano i rispettivi elementi neutri e gli elementi non nulli nelle parole di $G \star H$ costituite solo da quell'elemento, cioè:

$$\begin{array}{cc} \phi_G(e_G) = \varepsilon & \phi_H(e_H) = \varepsilon \\ \phi_G(g) = g \in G \star H & \phi_H(h) = h \in G \star H \end{array}$$

Queste due funzioni sono omomorfismi iniettivi.

Questo teorema può essere facilmente dimostrato sfruttando le definizioni di omomorfismi di gruppi e considerando il prodotto di due elementi.

Lemma 2.3.9

Se G e H sono dei gruppi, allora la terna $(G \star H, \phi_G, \phi_H)$ è il coprodotto di $G \star H$ nella categoria dei gruppi

Dimostrazione. Dalla definizione di coprodotto, si ha che per ogni gruppo K e per ogni coppia di morfismi $\psi_G : G \to K$, $\psi_H : H \to K$ esiste un unico morfismo $f : G \star H \to K$ tale che:

$$\psi_G = f \circ \phi_G \qquad \text{e} \qquad \psi_H = f \circ \phi_G$$

Con un grafo si avrebbe che:

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
& G \star H \arrow[u, "f"] & \\
G \arrow[ur, "\phi_G"'] \arrow[uur, bend left, "\psi_G"] & & H \arrow[ul, "\phi_H"] \arrow[uul, bend right, "\psi_H"']
\end{tikzcd}$$

Siano K, ψ_G, ψ_H dati. Mostriamo prima l'unicità e poi l'esistenza.

Unicità: Supponiamo esista tale f. Allora si ha che:

$$\forall g \in G \setminus \{e_G\}, (f \circ \phi_G)(g) = f(\phi_G(g)) = f(\text{parola con una lettera } g) = \psi_G(g)$$

Allo stesso modo, $\forall h \in H$ si ha che $f(\text{parola con unica lettera } h) = \psi_H(h)$.
Allora f è univocamente determinata sulle parole ridotte di lunghezza 1 di H.
Poiché poi f è un omomorfismo di gruppi e queste parole di lunghezza 1 generano $G \star H$, allora f è univocamente determinata. *Un esempio può essere:*

$$f(g_1h_1g_2h_2g_3) = \psi_G(g_1)\psi_H(h_1)\psi_G(g_2)\psi_H(h_2)\psi_G(g_3)$$

Esistenza: l'analogo dell'esempio soprastante per ogni parola in $G \star H$ è un omomorfismo di gruppi che va da $G \star H$ a K e che verifica:

$$f \circ \phi_G = \psi_G \qquad \text{e} \qquad f \circ \phi_H = \psi_H$$

□

Proposizione 2.3.10

Sia $n \in \mathbb{N}^+$ e sia $\mathbb{F}_n$ gruppo libero di generatori $x_1, ..., x_n$ e sia G un gruppo, allora:

$$Hom_{\boldsymbol{Grp}}(\mathbb{F}_n, G) \cong G \times \cdots \times G = G^n \qquad f \mapsto (f(x_1), ..., f(x_n))$$

Proposizione 2.3.11

Siano V, W due $\mathbb{K}$ spazi vettoriali e sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base di V, Allora:

$$\begin{gathered} Hom_{\mathbb{K}}(V, W) \to V \times \cdots \times V \\ f \mapsto (f(v_1), ..., f(v_n)) \end{gathered} \qquad \text{è biettiva}$$

3 Identificazioni e Topologia Quoziente

3.1 Identificazioni e Immersioni

Definizione 3.1.1: Identificazione

Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una funzione continua e suriettiva. f è detta **identificazione** se:

$$A \subseteq Y \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(A) \text{ è aperto in } X$$

Osservazione. Dagli esercizi (2.34) segue che $\mathcal{T}_Y$ è la topologia più fine che rende f continua. Se f è anche aperta o chiusa, allora è detta **identificazione aperta** o **identificazione chiusa**.

Definizione 3.1.2: Immersione

Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua e iniettiva. f è detta **Immersione** se:

$$B \subseteq Y \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(B) \text{ aperto in } X$$

Osservazione. Possiamo dare la stessa definizione anche con i chiusi in quanto si ha che:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(A)$$

Definizione 3.1.3: Insieme f-saturo

Sia $B \subseteq X$. B è detto f-saturo se vale:

$$\forall (x, b) \in X \times B \text{ tali che } f(x) = f(b), \text{ si ha che } x \in B$$

Cioè $B = f^{-1}(f(B))$

Lemma 3.1.4

Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una funzione continua e suriettiva. f è un'identificazione se e solo se B è aperto in Y e $\exists A \subseteq X$ f-saturo con $f(A) = B$

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ f è suriettiva, quindi $\forall A \subseteq Y$, $f^{-1}(f(A)) = A$. Inoltre se A è aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto per continuità di f e $f^{-1}(A)$ è f-saturo per definizione.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $B \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(B)$ è aperto. Allora $f^{-1}(B)$ è aperto e f-saturo e, per ipotesi, ho che $f(f^{-1}(B)) = B$ è aperto. □

Lemma 3.1.5

Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una funzione continua, suriettiva e aperta/chiusa, allora f è un'identificazione aperta/chiusa.

Dimostrazione. Sia $A \subseteq Y$ tale che $f^{-1}(A)$ è aperto/chiuso (*Volendo si può anche aggiungere che sia f-saturo, ma non è rilevante*). f è aperta/chiusa, allora $f(f^{-1}(A))$ è aperto/chiuso, quindi f è un'identificazione. □

Esempio 49. *Siano* $(X, \mathcal{T}_X)$ *e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *spazi topologici e sia* $X \times Y$ *con topologia prodotto. Allora* $p_X : X \times Y \to X$ *e* $p_Y : X \times Y \to Y$ *sono delle identificazioni, in quanto sono continue, sueriettive e aperte.*

Lemma 3.1.6: Proprietà Universale delle Identificazioni

Sia $f : X \to Y$ una identificazione e $g : X \to Z$ continua, allora esiste $h : Y \to Z$ continua tale che $g = h \circ f$ se e solo se $\forall y \in Y$, g è costante su $f^{-1}(y)$ (cioè è costante sulle fibre di f). O equivalentemente $g = h \circ f$ se e solo se g è costante nelle classi di equivalenza sulla relazione $\sim_f$ (con $x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$)
Chiaramente sono tutti spazi topologici con le rispettive topologie

Il grafo corrispondente a questo lemma è:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Per ogni $x \in X$ abbiamo che $g(x) = h(f(x))$, allora $\forall x' \in f^{-1}(f(x))$ (fibra di f) abbiamo che:

$$g(x') = h(f(x')) = h(f(x)) = g(x)$$

Da cui segue che g è costante sulle fibre di f

$\boxed{\Leftarrow}$ Definiamo, sfruttando la suriettività di f, h nel seguente modo:

$$h(y) = g(x) \qquad \text{con } x \in f^{-1}(y)$$

Mostriamo che questa è la funzione cercata. Cominciamo con il mostrare che h è continua.
Sia $U \subseteq Z$ aperto. Vogliamo mostrare che $h^{-1}(U)$ è aperto. Sappiamo che G è continua, allora $h^{-1}(U)$ è aperto in X. Ma abbiamo che $g^{-1}(U) = f^{-1}(h^{-1}(U))$. Ma abbiamo anche che f è un'identificazione, quindi $h^{-1}(U)$ è aperto se e solo se $f^{-1}(h^{-1}(U))$ è aperto. Essendo il secondo un aperto di X, allora si ha che $h^{-1}(U)$ è un aperto di Y, quindi h è continua $\square$

Esempio 50. *Riprendendo l'esempio delle proiezioni 49, aggiungendo* $g : X \times Y \to Z$ *si ha che* $\exists h : X \to Z$ *se e solo se* g *non dipende dalla seconda coordinata.*

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ X \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

3.2 Quoziente

Definizione 3.2.1: Spazio Topologico Quoziente

Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X e sia $\pi : X \to X/_\sim$ proiezione sul quoziente. La **Topologia Quoziente** su $X/_\sim$ è la topologia più fine che renda π continua, cioè:

$$B \subseteq X/_\sim \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad \pi^{-1}(B) \subseteq X \text{ aperto}$$

Osservazione. Da quanto detto, è automatico che π è un'identificazione

Definizione 3.2.2: Insieme di Rappresentanti

Sia X un insieme e $\sim$ una relazione di equivalenza. $A \subseteq X$ è detto **Insieme di Rappresentanti** se, equivalentemente:

1. $\pi|_A : A \to X/_\sim$ è invertibile
2. $\forall x \in X, \exists! a \in A : x \sim a$
3. $\exists g : X/_\sim \to A : \pi|_A \circ g = id|_{X/_\sim}$

Proposizione 3.2.3

Sia $\pi : X \to X/_\sim$ proiezione sul quoziente e sia $\bar{f} : X/_\sim \to Y$ con $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazio topologico e $X/_\sim$ con topologia quoziente. Allora:

$$\bar{f} \text{ è continua } \Leftrightarrow f = \bar{f} \circ \pi \text{ è continua}$$

Con un diagramma commutativo abbiamo che:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

La differenza da prima è che prima dovevamo costruirci la funzione, ora invece la abbiamo, dobbiamo mostrare che valgono le implicazioni

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sappiamo che $f = \bar{f} \circ \pi$ è composizione di funzioni continue, quindi è ancora continua.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sappiamo che f è continua e costante sulle fibre di π, quindi la per la proprietà universale delle identificazioni, segue che esiste $f' : X/_\sim \to Y$ continua tale che $f' \circ \pi$. Con un diagramma commutativo abbiamo che:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_\sim \arrow[ur, "\bar{f}"'] \arrow[ur, bend right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Ma sappiamo anche che:

$$f' \circ \pi = f = \bar{f} \circ \pi$$

Ma abbiamo che π, essendo un'identificazione, è un epimorfismo, cioè è suriettiva, quindi posso cancellare a destra, quindi ottengo che: $f' = \bar{f}$ $\square$

Proposizione 3.2.4

Sia $f : X \to Y$ continua e $\pi : X \to X/_\sim$ con topologia quoziente. Allora esiste $\bar{f} : X/_\sim \to Y$ continua tale che $f = \bar{f} \circ \pi$ se e solo se f è costante sulle classi di $\sim$-equivalenza

Esempio 51. *Sia* $(X, \mathcal{T}_{GR})$*,* $\sim$ *relazione di equivalenza,* $\pi : X \to X/_\sim$ *proiezione al quoziente e* $X/_\sim$ *con topologia grossolana. Allora* $B \in X/_\sim$ *è aperto se e solo se* $\pi^{-1}(B)$ *è aperto in* X*, cioè se e solo se* $B = \varnothing$ *oppure* $B = X/_\sim$

Esempio 52. *Con* $(X, \mathcal{T}_D)$ *è la stessa cosa.* B *è aperto in* $X/_\sim$ *se e solo se* $\pi^{-1}(B)$ *è aperto in* X*. La topologia quoziente è proprio quella discreta.*

Definizione 3.2.5: Insieme $\sim$-saturo

Dato $(X, \mathcal{T}_X)$ spazio topologico e $\sim$ relazione di equivalenza con quoziente $X/_\sim$, un insieme $A \subseteq X$ è detto **$\sim$-saturo** se è π-saturo (cioè se $a \in A$ e $b \sim a$, allora $b \in A$)

Proposizione 3.2.6

Dato $(X, \mathcal{T}_X)$ spazio topologico e $\pi : X \to X/_\sim$ con $X/_\sim$ con spazio topologico quoziente, ho che gli aperti/chiusi di $X/_\sim$ sono:

$$\{\pi(B) : B \subseteq X \text{ è aperto/chiuso}\}$$

Dimostrazione. Immediato, segue dal lemma 3.1.5, in quanto si ha che π è un'identificazione. $\square$

3.3 Contrazioni

Definizione 3.3.1: Contrazione

Sia $A \subseteq X$ con $(X, \mathcal{T}_X)$ spazio topologico. Si definisce **Contrazione** di A dentro X il quoziente rispetto alla relazione $\sim_A$ definita come:

$$x \sim_A y \quad \Leftrightarrow \quad (x = y \vee x, y \in A)$$

In tal caso si denota $\pi_A : X \to X/_A$

Esempio 53. *Sia* $\varnothing \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$ *e siano* $\pi_\varnothing : X \to X/_\varnothing$ *e* $\pi_X : X \to X/_X$

- $X/_X$ *è un singoletto e ha un'unica topologia possibile.*
- *Con la seconda funzione ho che* $\pi_\varnothing(x) = [x]$*, quindi è iniettiva e suriettiva. Inoltre:*

$$A \subseteq X/_\varnothing \text{ aperto con } A = \{[x] : x \in A'\} \Leftrightarrow A' \text{ aperto}$$

Esempio 54 (Importante)**.** *Sia* $([0,1], \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *spazio topologico e voglio collassare* $\{0,1\}$*. Intuitivamente si ha che questo rappresenta una circonferenza, però voglio mostrare formalmente che:*

$$[0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Cerchiamo una funzione $f : [0,1] \to S^1$ *che sia continua, iniettiva, suriettiva e costante su* 0 *e* 1*:*

$$t \mapsto e^{i2\pi t} \qquad \vee \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

Esiste quindi $\bar{f} : [0,1] \to S^1$ *con* $f = \bar{f} \circ \pi$ *tale che* $\bar{f}$ *sia continua, suriettiva e iniettiva. Vedremo che* $\bar{f}$ *è anche chiusa, quindi avremo che* $[0,1]/_{\{0,1\}} \cong S^1$

Definizione 3.3.2: Saturazione

Dato $(X, \mathcal{T}_X)$ spazio topologico, $\sim$ relazione di equivalenza e $\pi : (X, \mathcal{T}_X) \to (X/_\sim, \mathcal{T}_\pi)$ proiezione sul quoziente e $A \subseteq X$, la **Saturazione** di A (rispetto a $\sim$ o a π) è il più piccolo insieme saturo (π-saturo o $\sim$-saturo) contenente A, cioè:

$$\pi^{-1}(\pi(A))$$

Proposizione 3.3.3

Siano $X, \sim, X/_\sim$ come prima, allora:

1. π è aperta/chiusa se e solo se la saturazione di aperti/chiusi è a sua volta aperta/chiusa
2. Gli aperti/chiusi di $X/_\sim$ sono della forma:

$$\{\pi(A) : A \subseteq X \text{ è aperto/chiuso saturo}\}$$

Dimostrazione. Il secondo punto lo abbiamo già dimostrato per le identificazioni. Mostriamo il primo punto.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo π aperta e sia $A \subseteq X$ aperto. Allora abbiamo che $\pi(A)$ è un aperto di $X/_\sim$, ma per la definizione di topologia quoziente abbiamo che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è ancora aperto (dalla continuità di π). Quindi la saturazione di aperti è aperta.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $A \subseteq X$ aperto e so per ipotesi che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto. Allora so che $\pi(A)$ è ancora aperto sempre per la definizione di topologia quoziente.

Per i chiusi è la stessa identica cosa □

Corollario 3.3.4

Sia $A \subseteq (X, \mathcal{T}_X)$ e sia $\pi_A : X \to X/_A$ contrazione di A. Se A è aperto/chiuso, allora π è aperta/chiusa. Inoltre gli aperti/chiusi di $X/_A$ sono immagini di:

$$\{\text{aperti/chiusi contenuti in } X \setminus A\} \cup \{\text{aperti/chiusi contenenti } A\}$$

Dimostrazione. Sia A aperto/chiuso e sia $B \subseteq X$ aperto/chiuso a sua volta. Voglio mostrare che:

$$\pi_A^{-1}(\pi_A(B)) \text{ è anch'esso aperto/chiuso}$$

Però come è fatto?
Abbiamo che può essere di due forme:

$$\pi_A^{-1}(\pi_A(B)) = \begin{cases} B & \text{se } A \cap B = \varnothing \\ A \cup B & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notiamo che in entrambi i casi otteniamo degli insiemi aperti/chiusi, quindi π_A è aperta/chiusa. Questo ci mostra come sono fatti gli aperti/chiusi saturi □

Esempio 55. *Consideriamo* $[0, 1]/_{\{0,1\}}$. *In questo caso abbiamo che* $\pi_{\{0,1\}}$ *è chiusa. Ma è anche aperta?*
No, infatti mi basta prendere l'insieme $[0, \frac{1}{2})$. *Questo ha saturazione* $[0, \frac{1}{2}) \cup \{1\}$ *che non è aperto, quindi* $\pi_{\{0,1\}}$ *non è aperta*

Esempio 56. *Sia* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *e contraggo* $[0,1)$*. Allora abbiamo che* $\pi_{[0,1)}$ *non è né aperta né chiusa. Infatti mi basta prendere al suo interno* $[0, \frac{1}{2}]$ *e* $(0, \frac{1}{2})$*. Il primo ha saturazione* $[0,1)$ *che non è chiuso, mentre il secondo ha saturazione* $[0,1)$ *che non è aperto.*

Esempio 57. *Consideriamo adesso* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *e contraggo* $\mathbb{Q}$*, cioè considero:*

$$\pi_\mathbb{Q} : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E}) \to \mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$$

Nel quoziente, tutti gli aperti non vuoti contengono $[\mathbb{Q}]$ *(la classe dei numeri razionali).*
L'unico chiuso contenente $[\mathbb{Q}]$ *è* $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$*. Altri chiusi che possiamo prendere in* $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$ *sono per esempio:*

$$\left\{a + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{a\} \quad \textit{con } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

Oppure possiamo prendere:

$$\{a + n : n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

Questo è un caso più unico che raro in cui un punto $[\mathbb{Q}]$ *è denso in* $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$

Prima di dare il prossimo esempio, diamo delle definizioni che risulteranno più che utili.

Definizione 3.3.5: Sfera n-dimensionale e Disco n-dimensionale

Si definiscono rispettivamente **Sfera n-dimensionale** e **Disco n-dimensionale** gli insiemi:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} \qquad D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|n\| \leq 1\}$$

Sono entrambi elementi indotti dalla topologia euclidea. Inoltre vale:

$$S^{n-1} \subseteq D^n$$

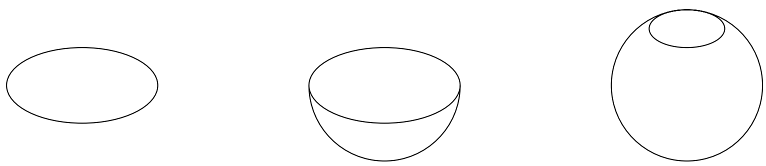
Esempio 58. *Sia* $D^n \supset S^{n-1}$ *e definiamo il quoziente come* $\pi : D^n \to D^n/_{S^{n-1}}$*. Come è fatto il quoziente?.*

$$D^n/_{S^{n-1}} \cong S^n$$

Notiamo che con $n = 1$ *abbiamo che:*

$$D^1 = [-1, 1] \quad S^0 = -1, 1 \qquad D^1/_{S^0} \cong S^1$$

L'idea che abbiamo è quella di "gonfiare" il disco, in modo che la circonferenza che delimita il disco diventi la "bocca di un palloncino" che poi andiamo a chiudere:



Per questione di estrema comodità, ridefiniamo S^n *come:*

$$S^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|^2 + y^2 = 1\}$$

Definisco f *come:*

$$f : D^n \to S^n \qquad f(x) = \left(2x\sqrt{1 - \|x\|^2}, 2\|x\|^2 - 1\right)$$

Notiamo allora che $f(S^{n-1}) = \{(0, \cdots, 0, 1)\}$

Abbiamo banalmente che f *è continua e ben definita.*

Mostriamo che f *è suriettiva.*
Fissiamo $(z, y) \in S^n$. *Allora dalla seconda coordinata ho che:*

$$2\|x\|^2 - 1 = y \qquad \Rightarrow \qquad \|x\|^2 = \frac{y+1}{2}$$

Dalla prima coordinata ho invece che:

$$2x\sqrt{1 - \|x\|^2} = z \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{z}{2\sqrt{1 - \left(\frac{y+1}{2}\right)}}$$

Da cui segue immediatamente che $f(x) = (z, y)$, *quindi* f *è suriettiva.*

Mostriamo che f *è iniettiva su* $D^n \setminus S^{n-1}$.
Dalla prima coordinata ho che:

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Rightarrow \qquad \|x^1\| = \|x^2\|$$

Dalla seconda ottengo invece che:

$$x_1 = x_2$$

Quindi è iniettiva su tale restrizione.

Abbiamo quindi che:

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & S^n \\ D^n/_{S^{n-1}} \arrow[ur, dashed, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Cioè f *è costante sulle classi di equivalenza. Esiste quindi un'unica* $\bar{f}$ *continua tale che* $f = \bar{f} \circ \pi$ *che sia suriettiva e iniettiva. Vedremo poi anche che* $\bar{f}$ *è chiusa. Ma per il momento va bene così*

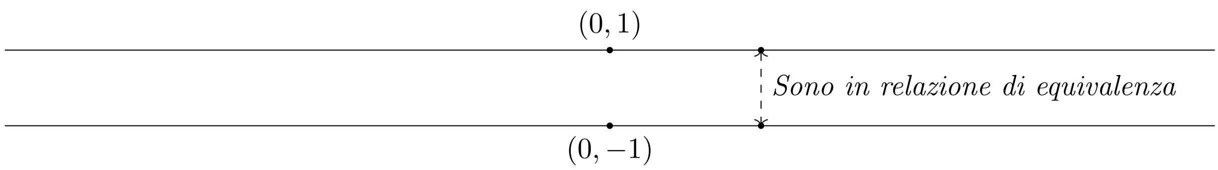
Esempio 59 (La retta con origine doppia). *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}^2$ *definito come:*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = \pm 1\}$$

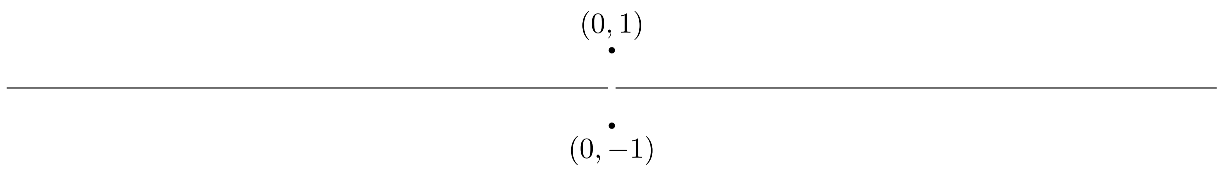
Definisco su X *la relazione di equivalenza* $\sim$ *definita come:*

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (x', y') \vee x \neq 0, x' = x$$

Quello che abbiamo sostanzialmente è che:



Quello che stiamo facendo è incollare le due rette in tutti i punti, tranne che nell'origine. In maniera intuitiva, il nostro quoziente è:



Vediamo che i punti sono chiusi, cioè:

$$\forall (x,y) \in X, \pi^{-1}(\pi(x,y)) \text{ è chiuso}$$

Inoltre, utilizzando il corollario precedente abbiamo che:

$$\pi^{-1}(\pi(x,y)) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x = 0 \\ \{(x,y),(x,-y)\} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Quindi abbiamo la proprietà che i singoletti sono chiusi.
Vogliamo poi vedere che dati punti distinti, essi possono (o meno) essere contenuti in aperti disgiunti.
In particolare, voglio mostrare che questo non vale per O_1 e O_2.
Siano $A_1 \ni O_1$ e $A_2 \ni O_2$ aperti, allora abbiamo che esistono B_1 e B_2 aperti saturi tali che:

$$\pi(B_i) = A_i \qquad (0,1) \in B_1 \quad (0,-1) \in B_2$$

Allora esistono ε_1 e ε_2 positivi tali che:

$$(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{1\} \subseteq B_1 \qquad (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \{-1\} \subseteq B_2$$

Sappiamo tuttavia che B_1 e B_2 sono saturi, per cui:

$$(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times \{-1\} \subseteq B_1 \qquad (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \{1\} \subseteq B_2$$

Quindi abbiamo che $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, da cui segue che $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$

3.4 Quozienti con Azioni di Gruppo

Definizione 3.4.1: Quoziente Gruppi

Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio topologico e sia G un gruppo tale che $G \subseteq \boldsymbol{Omeo}(X)$. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza definita da:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \exists g \in G : g(x) = y$$

Definizione 3.4.2: Quoziente con Azioni di Gruppo

Sia $p : G \times X \to X$ un'azione di gruppo, *cioè $\forall g \in G$, la funzione $x \mapsto p(x,g)$ che chiamiamo $g(x)$ è un omeomorfismo e $g(h(x)) = (g \circ h)(x)$).* Posso definire $\sim$ su X con:

$$x \sim y \qquad \Rightarrow \qquad \exists g \in G : y = p(g,x) = g(x)$$

Anche qui il quoziente viene indicato con $X/_G$

L'azione di un gruppo su uno spazio topologico può essere indicato anche come:

$$G \curvearrowright (X, \mathcal{T})$$

Proposizione 3.4.3

Sia $\pi : X \to X/_G$ un quoziente rispetto all'azione di gruppo, allora π è aperta. Inoltre, se $|G| < +\infty$, π è anche chiusa.

Dimostrazione. Sia $A \subseteq X$, allora si ha che:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{g \in G} g(A)$$

Infatti:

$$\bigcup_{g \in G} g(A) = \{y \in X : \exists x \in A, g \in G : y = g(x)\} = \{y \in X : \exists x \in A, y \sim x\} = \pi^{-1}(\pi(A))$$

Inoltre, se A è aperto, allora $g(A)$ è aperto, quindi $\pi^{-1}(\pi(A))$ è unione di aperti, quindi π è aperta. In maniera analoga si dimostra che per $|G| < +\infty$ e A chiuso □

Esempio 60. *Sia* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *e definisco l'azione* $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ *tramite:*

$$p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad (n, x) \mapsto x + n$$

Consideriamo ora $\mathbb{R}/_\mathbb{Z}$ *(Questo è un chiarissimo esempio in cui la notazione fa altamente schifo ∼ Mongardi). Vediamo ora come agisce il gruppo.*
Notiamo che $[0] = \mathbb{Z}$ *e, più in generale, si ha che* $[x] = x + \mathbb{Z}$
Consideriamo un chiuso in cui sono sono presenti almeno una volta tutte le classi, cioè $[0, 1]$*. Nel suo interno compaiono tutte le classi (ad eccezione degli estremi). Sembra quasi che questo quoziente sia isomorfo a* S^1*. Mostriamo che è proprio così.*
Consideriamo $f : \mathbb{R}/ \to S^1$*, definita come* $t \mapsto e^{2\pi i t}$ *(se la vediamo come circonferenza nel piano complesso). Notiamo allora che:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(t) = f(t + n)$$

Notiamo che f è continua e suriettiva, inoltre:

$$\exists \bar{f} : \mathbb{R}/_\mathbb{Z} \to S^1 \text{ tale che :}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\
\mathbb{R}/_\mathbb{Z} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

In questo modo abbiamo anche che $\bar{f}$ è iniettiva.
Cerchiamo un compatto che suerietti su $\mathbb{R}/_\mathbb{Z}$ *per poter applicare il teorema 4.2.9.*
Utilizziamo la seguente proposizione che dimostreremo più avanti: "f continua e X compatto, allora $f(X)$ compatto". Scegliamo $[0, 1]$ *e come funzione continua prendiamo* $\pi|_{[0,1]}$.

$$\pi|_{[0,1]} : [0, 1] \to \mathbb{R}/_\mathbb{Z} \text{ è suriettiva}$$

Sapendo che $\mathbb{R}/_\mathbb{Z}$ *è compatto, allora per il teorema 4.2.9 è chiusa, quindi è un omomorfismo.*

4 Proprietà degli Spazi Topologici

4.1 Assiomi Di Numerabilità e di Separabilità

Definizione 4.1.1: Assiomi di Numerabilità

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$ soddisfa gli **Assiomi di Separabilità** $N1$ e $N2$ se:

$N1$: Ogni punto di X ha un sistema fondamentale di intorni di cardinalità al più numerabile (*Questa è una condizione locale*)

$N2$: Esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathcal{T}$ di cardinalità al più numerabile (*Questa è una condizione globale*)

Definizione 4.1.2: Separabile

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è **Separabile** se esiste un denso al più numerabile

Esempio 61. *Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_{GR})$ è $N1, N2$ ed è separabile. La verifica è pressoché immediata*

Esempio 62. *Lo spazio metrico (X, d) con $\mathcal{T}_d$ distanza indotta dalla metrica d soddisfa $N1$ con*

$$\mathcal{I} = \{B_{\frac{1}{n}}(x)\}_{n>0}$$

Sistema fondamentale di intorni formato da palle centrate in x e di raggio $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}^*$

Esempio 63. *Lo spazio topologico euclideo $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ soddisfa $N1, N2$ ed è separabile. Soddisfa $N1$ in quanto basta prendere $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Soddisfa $N2$ in quanto posso prendere la base:*

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{n}}(x) : x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

In maniera del tutto analoga, anche $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ soddisfa $N1, N2$ ed è separabile

Alcuni degli assiomi che stanno per essere definiti sono già stati visti nel corso di Analisi 2

Definizione 4.1.3: Assiomi di Separabilità

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ soddisfa gli **Assiomi di Separabilità** $T1, T2, T3, T4$ se:

$T1$: $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U \in I(x), \exists V \in I(y)$ intorni di x e di y rispettivamente tali che $y \notin U$ e $x \notin V$

$T2$: $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U \in I(x), \exists V \in I(y) : U \cap V = \varnothing$

$T3$: $\forall F$ chiuso, $\forall x \notin F, \exists U, V$ aperti tali che $x \in V, F \subseteq U, U \cap V = \varnothing$

$T4$: $\forall F, G$ chiusi <u>disgiunti</u>, $\exists U, V$ aperti tali che $F \subseteq U, G \subseteq V$ e $U \cap V = \varnothing$

Esempio 64. *Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_{GR})$ soddisfa $T3$ e $T4$. Infatti X e $\varnothing$ sono chiusi disgiunti ma $X \subseteq X$ e $\varnothing \subseteq \varnothing$ e $X \cap \varnothing = \varnothing$, quindi $T4$ è soddisfatta. Per $T3$, se $F = X$, allora non esiste un x che non appartenga a F, se invece $F = \varnothing$, allora è banalmente verificata. $T2$ invece non è soddisfatta, in quanto non esistono due introni che non siano disgiunti e che non siano banali*

Esempio 65. *Lo spazio topologico* $(X, \mathcal{T}_D)$ *soddisfa tutti gli assiomi di separabilità. Infatti:*

- *Per* $T1$ *e* $T2$ *basta prendere* $x \neq y$ *e considerare* $x \in \{x\}$ *e* $y \in \{y\}$
- *Per* $T3$ *basta considerare* F *chiuso con* $x \notin F$*, allora* $F \subseteq F$ *e* $x \subseteq \{x\}$ *sono degli aperti disgiunti*
- *Per* $T4$ *basta prendere* F, G *chiusi disgiunti, allora* $F \subseteq F$ *e* $G \subseteq G$ *sono aperti disgiunti*

Osservazione. Bisogna fare attenzione al fatto che $T3 \not\Rightarrow T2$, infatti un singoletto può non essere chiuso

Esempio 66. *Lo spazio topologico* $(X, \mathcal{T}_{Cof})$ *è* $T1$*. Infatti, prendiamo* $x \neq y$*, allora posso prendere:*

$$U = X \setminus \{y\} \qquad e \qquad V = X \setminus \{x\}$$

Notiamo che nel primo fa parte x *mentre nel secondo fa parte* y*. Questi sono degli aperti tali che:*

$$x \in U, y \notin U \qquad y \in V, x \notin V$$

Osservazione. Se consideriamo lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_{Cof})$ con $|X| = +\infty$, questo <u>non è mai</u> $T2$. Infatti, se prendiamo U, V aperti non vuoti in $\mathcal{T}_{Cof}$, allora

$$U \cap V \neq \varnothing$$

Se per assurdo infatti avremmo che $V \cap U = \varnothing$, ne seguirebbe che $U \subseteq X \setminus V$. Ma V è un aperto non vuoto, quindi nella topologia cofinita $X \setminus V$ è finito. Ma anche U è un aperto non vuoto, quindi anche $X \setminus U$ è finito, quindi, visto che $|X| = +\infty$, segue che U ha cardinalità infinita, ma questo è un assurdo perché avremmo che un insieme infinito sta dentro un insieme finito

Esempio 67. *Sia* (X, d) *spazio metrico con topologia* $\mathcal{T}_d$ *indotta dalla metrica. Allora* (X, d) *è* $T2$*. Infatti dati* $x, y \in X$ *tali che* $d(x, y) = \delta$*, posti* $U = B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ *e* $V = B_{\frac{\delta}{2}}(y)$*, si ha che* $V \cap U = \varnothing$

Osservazione. Gli spazi metrici sono $T1, T2, T3, T4$

4.2 Connessione e Compattezza

Definizione 4.2.1: Connessione per Archi

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, diciamo che X è **Connesso per Archi** (e lo indichiamo con CPA) se:

- $X \neq \varnothing$
- $\forall x, y \in X, \exists \gamma : ([0,1], d) \to (X, \mathcal{T})$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$ che sia continua

Esempio 68. *Sia* X *non vuoto. Allora possiamo dire che* $(X, \mathcal{T}_{GR})$ *è connesso per archi. Infatti tutte le funzioni* $\gamma : ([0,1], d) \to (X, \mathcal{T}_{GR})$ *sono continue, quindi posso definire* $\gamma(0) = x$ *e* $\gamma(y) = 1$

Esempio 69. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ *è connesso per archi. Allo stesso modo è connesso anche* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$*. In realtà,* $\mathbb{R}^n$ *continua con ogni topologia meno fine di quella euclidea. Infatti la funzione* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ *continua ad essere continua se metto una topologia meno di quella euclidea sul codominio*

Esempio 70. *Sia $X \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ con X convesso, cioè $\forall x, y \in X, [a, b] \subseteq X$. Questo è connesso per archi rispetto alla topologia indotta da quella euclidea. Basta infatti prendere $\gamma(t) = x + t(y - x)$*

Definizione 4.2.2: Connessione

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è detto **Connesso** se $\forall U, V$ aperti non vuoti tali che $V \cup U = X$ si ha che l'intersezione non nulla

Per convenzione, lo spazio vuoto è non connesso

Esempio 71. *$(X, \mathcal{T}_{GR})$ con X non vuoto è uno spazio topologico connesso.*

Esempio 72. *Lo spazio Topologico $(X, \mathcal{T}_D)$ con $|X| > 1$, questo non è più connesso. Infatti possiamo prendere $x \in X$, allora $\{x\}$ e $X \setminus \{x\}$ sono aperti non vuoti la cui unione da X ma la loro intersezione è vuota*

Teorema 4.2.3

Lo spazio topologico $([0, 1], \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ è connesso.

Esempio 73. *Sia $(\mathbb{Q}, \mathcal{T})$ con $\mathcal{T}$ topologia indotta da quella euclidea, non è connesso. Intuitivamente, se abbiamo z irrazionale, allora esistono $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tali che:*

$$q_1 < z < q_2$$

In particolare, i due aperti da prendere sono $]-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$ e $[0, \infty[\cap \mathbb{Q}$

Definizione 4.2.4: Ricoprimento e Ricoprimento Aperto

Dato $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, una famiglia di insiemi $\{U_i\}_{i \in I}$ è detta **Ricoprimento** di X se:

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Se gli U_i sono aperti, allora si dice che è un ricoprimento **aperto**

Definizione 4.2.5: Compattezza

Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, si dice che è **Compatto** se per ogni ricoprimento aperto di X, esiste un sottoricoprimento finito che ricopre X

Esempio 74. *Lo spazio topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ non è compatto, infatti $\{[-n, n]\}_{n \in \mathbb{B}}$ è un ricoprimento aperto, ma non esiste un sottoricoprimento finito che contenga $\mathbb{R}$*

Teorema 4.2.6

Lo spazio topologico $([0, 1], \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ è compatto

Teorema 4.2.7

Un qualunque spazio topologico $(X, \mathcal{T}_{GR})$ con topologia grossolana è compatto

Esempio 75. *Lo spazio topologico* $(X, \mathcal{T}_D)$ *con* $|X| = +\infty$ *non è compatto, in quanto l'unione dei singoletti non connette un sottoricoprimento finito che ricopra* X

Esempio 76. *Lo spazio topologico* $(X, \mathcal{T}_{Cof})$ *è compatto.*

Teorema 4.2.8: di Heine Borel

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ con topologia indotta da topologia euclidea. Allora $(X, \mathcal{T}_X)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$

Teorema 4.2.9: del compatto Hausdorff

Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua con X compatto e Y $T2$, allora f è chiusa.

Osservazione. Un quoziente di uno spazio compatto è ancora compatto

4.3 Proprietà Locali

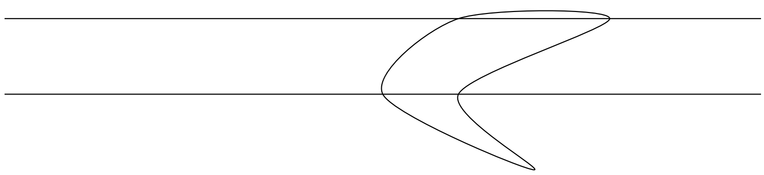
Definizione 4.3.1: Spazio Topologico Localmente Connesso

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$ è **localmente connesso** se per ogni punto di X, esiste un sistema fondamentale di intorni connessi.

Definizione 4.3.2: Spazio Topologico Localmente Connesso per Archi

$(X, \mathcal{T})$ si dice **Localmente Connesso per Archi** se per ogni suo punti esiste un sistema fondamentale di intorni connessi per archi

Esempio 77. *Consideriamo il seguente spazio topologico:*



Questi non sono connessi, ma sono localmente connessi.

Definizione 4.3.3: Spazio Topologico Localmente Compatto

Uno Spazio Topologico si dice **Localmente Compatto** se per ogni suo punto, esiste un unico intorno di compatti di X

Esempio 78. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *è localmente connesso, localmente connesso per archi e localmente compatto*

Definizione 4.3.4: Spazio Topologico Localmente Euclideo

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è **Localmente Euclideo** se:

$$\forall x \in X, \exists U_x \in \mathcal{T}_X \text{ aperto}, \exists f : U \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\mathcal{E}) \text{ continua, aperta e iniettiva}$$

Esempio 79. *Lo spazio topologico* $(X, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *è localmente euclideo*

Esempio 80. *$(S^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ è localmente euclideo. Infatti, se prendo U_0 come $S^n \setminus \{(0, ..., 0, 1)\}$, ho che $U_0 \cong \mathbb{R}^n$ tramite proiezione stereografica per esempio*

Se ci guardiamo un attimo, noi siamo su S^2 (molto a grandi linee). Eppure tutto ci sembra piano. Concettualmente è questo il significato di localmente euclideo.

Osservazione. Questa è la stessa dinamica dell'atlante geografico.

4.4 Risultati sugli assiomi di Numerabilità

Lemma 4.4.1

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ che soddisfi $N2$ è anche separabile

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerabile di $\mathcal{T}$. Per ogni n, scegliamo un punto $x_n \in U_n$ (ciò è possibile assumendo l'assioma della scelta). Sia poi $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dimostriamo che $\overline{E} = X$

Infatti, se fosse stato diverso, sarebbe esistito un $U = X \setminus \overline{E}$ aperto non vuoto completamente disgiunto da E, cioè $U \cap E = \varnothing$, ma U è aperto, quindi è unione di elementi della base $\mathcal{B}$, quindi esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$U_{n_0} \subseteq U \qquad \Rightarrow \qquad x_{n_0} \in U$$

Ma questo è assurdo, quindi $\overline{E} = X$ □

Lemma 4.4.2

Ogni spazio metrico separabile soddisfa $N2$

Dimostrazione. Sia (X, d) uno spazio metrico con $\mathcal{T}_d$ topologia indotta dalla metrica. Sia poi $E \subseteq X$ denso numerabile. Mostriamo che:

$$\mathcal{B} = \{B_{\frac{1}{2^n}}(e) : e \in E, n \in \mathbb{N}\} \text{ è una base di } \mathcal{T}_d$$

Sia $U \in \mathcal{T}_d$, vogliamo scriverlo come unione di elementi di $\mathcal{T}_d$.
Sia $x \in U$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$B_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x) \subseteq U$$

Per la densità di E, ho che:

$$\exists e \in E \cap B_{\frac{1}{2^n}}(x)$$

Infatti ho che $d(x, e) < \frac{1}{2^n}$, quindi $x \in B_{\frac{1}{2^n}}(e)$. Segue quindi che:

$$\forall y \in B_{\frac{1}{2^n}}(e), d(x, y) \leq d(x, e) + d(e, y) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

In questo modo ho mostrato che $\forall x \in U, \exists V_x \in \mathcal{B} : x \in V_x \subseteq U$. Cioè che:

$$U = \bigcup_{x\in U} V_x$$

Quindi $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}_d$ ed è numerabile, quindi (X, d) è $N2$ □

Proposizione 4.4.3

In uno spazio topologico $N2$, ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento al più numerabile

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile e sia $A = \{U_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto. Per ogni punto scegliamo $U_x \in A$ che contenga x e $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subseteq U_x$
È possibile sceglierli in quanto A è un ricoprimento e $\mathcal{B}$ è una base
Segue quindi che:

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x = \bigcup_{x \in X} B_x$$

Definiamo allora $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ dato da:

$$\mathcal{B}' = \{B_x : x \in X\}$$

Da cui segue che $\mathcal{B}'$ è al più numerabile. Inoltre, per ogni $B' \in \mathcal{B}$, scelto U' in A tale che $B' \subseteq U'$ e ottengo un sottoricoprimento numerabile □

4.5 Risultati degli assiomi di Separazione

Proposizione 4.5.1

X è $T1$ se e solo se $\forall x \in X$, $\{x\}$ è chiuso, cioè se e solo se la sua topologia è più fine della cofinita

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $x \in X$ e sia $y \neq x$. Sappiamo che lo spazio topologico è $T1$, quindi $\exists V_y$ intorno aperto di y si ha che $x \notin V_y$. In questo modo si ha che:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X} V_y$$

Cioè $X \setminus \{x\}$ è un'unione di aperti, quindi è aperto, da cui segue facilmente che $\{x\}$ è chiuso.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\{x\}$ chiuso, $\forall x \in X$. Siano $x \neq y$, allora $X \setminus \{x\}$ e $X \setminus \{y\}$ sono aperti, ma si ha che:

$$y \in X \setminus \{x\} \not\ni x \qquad x \in X \setminus \{y\} \not\ni y$$

Da cui segue che X è $T1$ □

Uno spazio topologico $T2$ è detto anche di **Housdorff**.

Proposizione 4.5.2

$T4 + T1 \Rightarrow T3 + T1 \Rightarrow T2 \Rightarrow T1$

Dimostrazione. $\boxed{T4 + T1 \Rightarrow T3 + T1}$ Per ipotesi abbiamo che $\forall x \in X, \{x\}$ è chiuso e che $\forall F, G$ chiusi e disgiunti, $\exists U, V$ aperti con $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$ tali che $U \cap V = \varnothing$. Allora abbiamo che $\forall F$ chiuso e $\forall x \notin F$, $\exists U, V$ aperti che separano i due chiusi F e $\{x\}$, cioè X è $T3$

$\boxed{T3 + T1 \Rightarrow T2}$ Dato F chiuso e $x \notin F$, $\exists U, V$ aperti che li separino. Sia $F = \{y\}$ e $y \neq x$. Allora li possiamo separare con due aperti. Quindi X è $T2$

$\boxed{T2 \Rightarrow T1}$ Segue dalla definizione □

Proposizione 4.5.3

Sia (X, d) uno spazio metrico con $\mathcal{T}_d$ topologia indotta da d. Allora

$$(X, \mathcal{T}_d) \text{ è } T4, T3, T2, T1$$

Dimostrazione. Sappiamo che $(X, \mathcal{T}_d)$ è $T2$ dall'esempio 67, mostriamo che è $T4$ (sapendo questo ho automaticamente che è anche $T3$) Siano quindi F, G due chiusi disgiunti. Allora $\forall A \subseteq X, \forall x \in X$ definisco:

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Quindi vale che $d_A(x) = 0$ se e solo se $x \in \overline{A}$ *(Da dimostrare)*
Vale anche che $x \mapsto d_A(x)$ è una funzione continua da (X, d) a $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *(da dimostrare)*
Consideriamo allora la funzione:

$$\delta : X \to ([0, 1], \mathcal{T}_\mathcal{E}) \qquad x \mapsto \frac{d_F(x)}{d_F(x) + d_G(x)}$$

Ho che δ è una funzione ben definita e è continua in quanto somma e prodotti di funzioni continue. Inoltre ho che:

$$\delta^{-1}(0) = \{x \in X : x \in F\} = F \qquad \delta^{-1}(1) = \{x \in X : x \in G\} = G$$

Mi basta quindi porre:

$$U = \delta^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) \qquad V = \delta^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

Infatti U e V sono due aperti disgiunti che contengono rispettivamente F e G □

Lemma 4.5.4

Sia X spazio topologico Ti con $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $f : X \to Y$ omeomorfismo. Allora Y è Ti

Dimostrazione. $\boxed{T1, T2}$ Se ho U aperto con $x \in U$, allora $f(U)$ è aperto con $f(x)$ e $f(x) \in f(U)$. Questo vale anche per gli insiemi che non contengono x.
Se ho $x \neq y$ con $x \in U, y \notin U$ e $x \notin V, y \in V$, allora ho che:

$$f(x) \in f(U) \not\ni f(y) \qquad f(x) \notin f(V) \ni f(y)$$

Se avessi che $U \cap V = \varnothing$ allora $f(V) \cap f(U) = \varnothing$

$\boxed{T3, T4}$ Se ho F chiuso e U aperto tale che $F \subseteq U$, allora ho $f(F)$ chiuso e $f(U)$ aperto con $f(F) \subseteq f(U)$.
Questo in particolare ci dice che se ho F, G chiusi di Y disgiunti, allora posso separare f^F e $f^{-1}(G)$ con U, V aperti in X. Infatti se ho $f^{-1}(F) \subseteq U$ e $f^{-1}(G) \subseteq V$ disgiunti, allora segue che $F \subseteq f(U)$, $G \subseteq f(V)$ e $f(U) \cap f(V) = \varnothing$
Dati invece $F \subseteq Y$ e $y \notin F$, presi $x \in f^{-1}(y)$ e $f^{-1}(F)$, allora per $T3$ di X ho che esistono U, V aperti con $x \in U$, $f^{-1}(F) \subseteq V$, da cui posso separare F e y. □

Proposizione 4.5.5

Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ e $Y \subseteq X$ con topologia indotta. Se X è $T1, T2$ o $T3$, allora anche Y lo è

Dimostrazione. $\boxed{T1}$ Visto che X è $T1$ abbiamo che $\forall x \in X, \{x\}$ è chiuso, quindi $\forall y \in Y$ si ha che:

$$\{y\} \cap Y = \{y\} \text{che è ancora chiuso per la topologia indotta}$$

Da cui segue che Y è $T1$.

$\boxed{T2}$ Siano $y_1, y_2 \in Y$ allora visto che X è $T2$:

$$\exists U, V \text{aperti di } X : y_1 \in U, y_2 \in V, V \cap U = \varnothing$$

Ma abbiamo che $y_1 \in U \cap Y$ e $y_2 \in V \cap Y$ e questi sono aperti in Y la cui intersezione è l'insieme vuoto.

$\boxed{T3}$ Sia $F \subseteq Y$ chiuso e sia $y \notin F, y \in Y$. Dal fatto che F sia chiuso in Y, abbiamo che $\exists G$ chiuso in X tale che $F = G \cap Y$. Siccome si ha che $y \in Y$ e $y \notin F$, segue che $y \notin G$. Sappiamo poi che X è $T3$, quindi esistono due aperti U, V in X tali che:

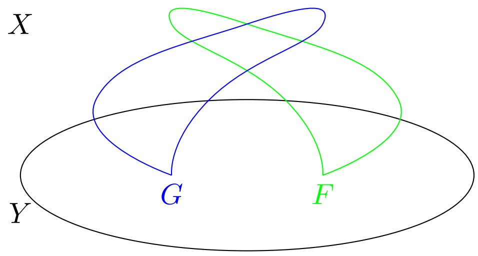
$$y \in U, F \subseteq V, V \cap U = \varnothing$$

Essendo poi $(U \cap Y)$ e $(V \cap Y)$ aperti in Y, abbiamo che:

$$y \in (U \cap Y) \quad F \subseteq (V \cap Y)$$

Quindi Y è $T3$ □

Perché non possiamo dire che se X è $T4$, allora Y è $T4$? Consideriamo il caso in cui:



In questo caso abbiamo trovare due chiusi disgiunti in Y ma che non sono in X, quindi non esistono due aperti disgiunti che li contengono.

Proposizione 4.5.6

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ con X, T spazi $T1, T2, T3$. Sia poi $X \times Y$ il prodotto con topologia prodotto. Allora quest'ultimo è $T1, T2, T3$

Dimostrazione. $\boxed{T1}$ Considero $\{(x, y)\} = \{x\} \times \{y\} = p_X^{-1}(\{x\}) \cap p_Y^{-1}(\{y\})$, cioè possiamo considerare un singolo punto del prodotto come intersezione delle preimmagini delle proiezioni. Tuttavia abbiamo che $\{x\}$ e $\{y\}$ dei chiusi ed essendo p continua, abbiamo che $\{(x, y)\}$ è chiuso, quindi $X \times Y$ è $T1$

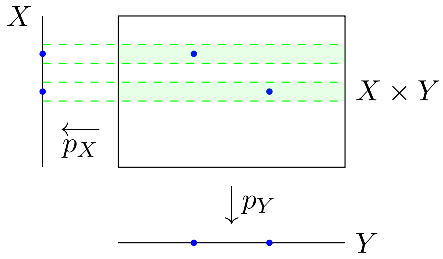
$\boxed{T2}$ Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) diversi tra loro. Affinché siano diversi, ci basta che solo una variabile sia diversa, quindi possiamo supporre che $x_1 \neq x_2$. Siccome poi X è $T2$, quindi esistono U, V aperti di X tali che:

$$x_1 \in U \quad x_2 \in V \quad U \cap V = \varnothing$$

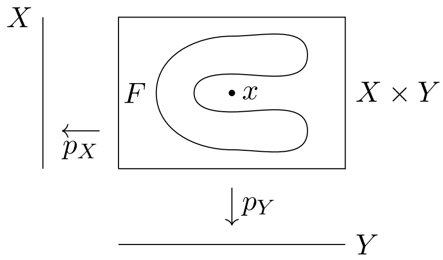
In questo modo abbiamo che $(x_1, y_1) \in p_X^{-1}(U)$ e $(x_2, y_2) \in p_X^{-1}(V)$. Ma questi sono aperti in quanto p è continua, quindi:

$$p_X^{-1}(U) \cap p_X^{-1}(V) = \varnothing$$

Quindi abbiamo che $X \times T$ è $T2$



$\boxed{T3}$ *Non possiamo fare come prima perché potremmo avere delle condizioni scomode come quella che segue*



Quello che faremo qui sostanzialmente è passare per il complementare di F, prendere un aperto lì dentro che contenga x, farne le proiezioni per poi riportarlo in $X \times Y$
Sia quindi F chiuso in $X \times Y$ e sia $(x, y) \notin F$. Sapendo che $(X \times Y) \setminus F$ è aperto, esistono V_x e V_y aperti in X e Y rispettivamente tali che $x \in V_x$ e $y \in V_y$ tali che:

$$(V_x \times V_y) \subseteq (X \times Y \setminus F)$$

Consideriamo i chiusi $X \setminus V_x$ e $Y \setminus V_y$. Allora abbiamo che:

$$x \notin X \setminus V_x \qquad y \notin Y \setminus V_y$$

Sappi:amo tuttavia, per ipotesi, che X e Y sono $T3$, abbiamo che $\exists V_x', W_x$ aperti di X e V_y' e W_y aperti di Y tali che:

$$x \in V_x' \qquad y \in V_y' \qquad X \setminus V_x \subseteq W_x \qquad Y \setminus V_y \subseteq W_y$$

In questo modo abbiamo che $(x, y) \in V_x' \times V_y'$, che è un aperto in $X \times Y$ e abbiamo che $F \subseteq p_X^{-1}(W_x) \cup p_Y^{-1}(W_y)$, che è aperto in $X \times Y$. Infatti abbiamo che $(X \setminus V_x) \times Y \subseteq p_X^{-1}(W_x)$ e $X \times (Y \setminus V_y) \subseteq p_Y^{-1}(W_y)$. Quindi abbiamo che:

$$(X \times Y) \setminus (V_x \times V_y) \subseteq p_X^{-1}(W_x) \cup p_Y^{-1}(W_y)$$

Infine abbiamo che:

$$(V_x' \times V_y') \cap (p_X^{-1}(W_x) \cup p_Y^{-1}(W_y)) = \varnothing$$

Quindi $X \times Y$ è $T3$

In parole povere quello che abbiamo fatto è stato: nel complementare di F abbiamo preso un aperto che contenesse (x, y); abbiamo fatto le proiezioni su X e Y. Ma questi sono $T3$ e la proiezione di un chiuso è un chiuso. Quindi esistono due aperti che li separino. Per il punto prendiamo un aperto dentro le rispettive proiezioni, per poi farne il prodotto cartesiano in $X \times Y$, mentre per il chiuso facciamo l'unione delle intersezioni, in questo modo lasciamo esterno l'aperto che conteneva il punto

□

Prima di enunciare il prossimo risultato, diamo la seguente definizione:

Definizione 4.5.7: Diagonale

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Si definisce **Diagonale** di X l'insieme:

$$\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$$

Teorema 4.5.8: Caratterizzazione di $T2$

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$ è $T2$ se e solo se la sua diagonale Δ_X è chiuso in $X \times X$, con $X \times X$ prodotto con topologia indotta

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia X uno spazio topologico $T2$ e sia $(x, y) \in X \times X$. Voglio mostrare che se:

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad (x, y) \notin \Delta_X$$

Siccome X è $T2$, esistono allora degli aperti U_x, V_y in X tali che:

$$x \in U_x \qquad y \in V_y \qquad U_x \cap V_y = \varnothing$$

Allora necessariamente si ha che:

$$(U_x \times V_y) \cap \Delta_X = \varnothing$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbe un elemento nell'intersezione, quindi ci sarebbe una coppia $(z, z) \in U_x \times V_y$, quindi $z \in U_x \cap V_y$, ma ciò è assurdo in quanto avevamo supposto che U_x e V_y erano disgiunti. Sappiamo poi che:

$$(X \times Y) \setminus (\Delta_X) = \bigcup_{x \neq y} U_x \times V_y$$

Quest'ultimo insieme è aperto (in quanto unione di aperti), quindi necessariamente Δ_X è chiuso.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sia Δ_X chiusa e siano $x \neq y \in X$. Allora segue subito che:

$$(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$$

Allora esistono degli aperti U e V in X tali che:

$$U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X : (x, y) \in U \times V$$

Sto usando la base canonica. Ma allora ho che $U \cap V = \varnothing$, con $x \in U$ e $y \in V$. Quindi X è $T2$ $\square$

Corollario 4.5.9

Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ funzioni continue con Y $T2$, allora:

$$\{x \in X : f(x) = g(x)\} \text{ è chiuso}$$

Dimostrazione. Sappiamo che Δ_Y è chiusa in $Y \times Y$. Consideriamo la funzione:

$$X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \qquad x \mapsto (f(x), g(x))$$

Sappiamo che questa funzione è continua per la proprietà universale del prodotto. Quindi vale:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "(f,g)"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & Y \times Y \arrow[dl, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
Y & & Y
\end{tikzcd}$$

Quindi $\{x \in X : f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_Y)$, che è chiuso □

Prima di enunciare il prossimo corollario, diamo la seguente definizione:

Definizione 4.5.10: Grafico di una funzione

Sia $f : X \to Y$ una funzione. Si definisce il **Grafico di** f l'insieme:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

Corollario 4.5.11

Sia $f : X \to Y$ continua con Y $T2$, allora il suo grafico Γ_f è chiuso in $X \times Y$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione:

$$X \times Y \xrightarrow{(f, id_Y)} Y \times Y$$

Questa è ancora continua per lo stesso motivo del corollario precedente. Abbiamo allora che:

$$(f, id_Y)^{-1}(\Delta_Y) = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\} = \Gamma_f$$

Quindi è chiuso □

Esempio 81. $\mathbb{R}/_{\mathbb{Q}}$ *non è* $T1$*, infatti* $[\mathbb{Q}]$ *non è chiuso*

Esempio 82. *La retta con doppia origine non è* $T2$*, in quanto le sue origini non sono separabili. Infatti, se prendiamo le funzioni* f *e* g *definite come* $f(x) = (x, 1)$ *e* $g(x) = (x, -1)$ *e poi le collassiamo, non è possibile separare le due origini.*

Proposizione 4.5.12

Sia X spazio topologico e sia $G \curvearrowright X$ con quoziente $\pi : X \to X/_G$. Allora $X/_G$ è $T2$ se e solo se l'insieme

$$K = \{(x, g(x)) : x \in X, g \in G\} \text{ è chiuso}$$

Esempio 83. *Consideriamo* $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$*, azione di gruppo tale che:*

$$(x, n) \mapsto x + n$$

Allora abbiamo che:

$$K = \{(x, x + n) : x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{y = x + n \text{ retta}\}$$

Questo è chiuso in quanto complementare dell'aperto $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$*, quindi* $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ *è chiuso*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sappiamo che $X/_G$ è $T2$, cioè $\Delta_{X/_G}$ è chiuso in $X/_G \times X/_G$ Consideriamo la funzione:

$$X \times X \xrightarrow{(\pi,\pi)} X/_G \times X/_G \qquad (x, y) \mapsto (\pi(x), \pi(y))$$

Questa è continua e aperta in quanto prodotto di funzioni continue e aperte. Sottolineiamo che è continua, questo significa che sulla base canonica ho:

$$(\pi, \pi)(U \times V) = (\pi(U), \pi(V))$$

Che è aperto (per l'esercizio 2.15). Quindi, visto che (π, π) è chiusa e $\Delta_{X/_G}$ è chiusa, abbiamo che:

$$K = (\pi, \pi)^{-1}(\Delta_{X/_G}) \text{ è chiuso}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sappiamo che K è chiuso, allora $(X \times X) \setminus K$ è aperto e siccome (π, π) è aperta, allora si ha che:

$$(\pi, \pi)((X \times X) \setminus K) = (X/_G \times X/_G) \setminus \Delta_{X/_G}$$

Quindi la diagonale è chiusa, quindi $X/_G$ è $T2$ □

Corollario 4.5.13

Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ $T2$ e sia $G \curvearrowright X$ tale che $|G| < +\infty$, allora $X/_G$ è $T2$

Dimostrazione. Sappiamo che:

$$K = \bigcup_{g \in G} \Gamma_g$$

Però l'unione è finita e Γ_g è chiuso, quindi K è chiuso, quindi $X/_G$ è $T2$ □

Proposizione 4.5.14

Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ $T2$ e sia $G \curvearrowright X$ e sia $A \subseteq X$ aperto tale che:

1. $\pi(A) = X/_G$
2. $G(A) = \{g \in G : A \cap g(A) \neq \varnothing\}$ è finito

Allora il quoziente è $T2$

Esempio 84. *Sia $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$. Consideriamo $A = (-\frac{1}{2}, 1)$. Sicuro abbiamo che $\pi(A) = \mathbb{R}/_\mathbb{Z}$. Inoltre abbiamo che:*

$$\{g \in G : A \cap g(A) \neq \varnothing\} = \{0, 1, -1\}$$

Allora abbiamo che $\mathbb{R}/_\mathbb{Z}$ è $T2$

Corollario 4.5.15

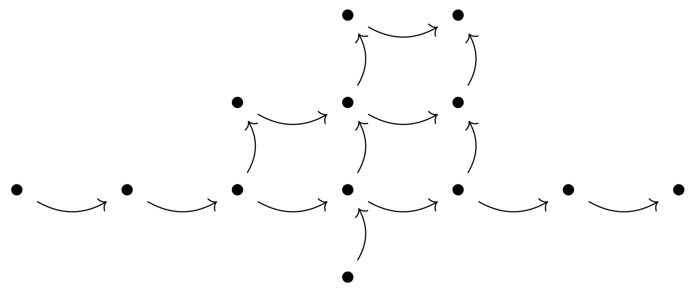
Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ $T2$ e sia $G \curvearrowright X$ tale che $|G| < +\infty$, allora $X/_G$ è $T2$

Dimostrazione. Mi basta prendere $A = X$ e applico la proposizione □

Esempio 85. *Consideriamo $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ tale che:*

$$g : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (n_1, n_2) \times (x_1, x_2) \mapsto (x_1 + n_1, x_2 + n_2)$$

Voglio mostrare che $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ sia $T2$.
Sostanzialmente quello che l'azione di gruppo fa è creare un reticolato per ogni punto.



Abbiamo che $[0,1)^2$ è un insieme di rappresentanti, ma ci serve un insieme aperto per applicare la proposizione 4.5.14, quindi possiamo prendere $(-\frac{1}{2}, 1)^2$. In questo modo abbiamo che:

$$\{g \in G : A \cap g(A) \neq \varnothing\} = \{(i,j) : i, j \in \{0, 1, -1\}\}$$

Quindi è $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2}$ è $T2$

Esempio 86. *Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^n$ e consideriamo l'azione $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \curvearrowright S^n$ tramite:*

$$(1, x) \mapsto x \quad (id) \qquad (-1, x) \mapsto -x \quad (-id)$$

Allora $S^n/_{\mathbb{Z}_{/2\mathbb{Z}}}$ è $T2$

Dimostriamo la proposizione che avevamo lasciato in sospeso.

Dimostrazione della Proposizione 4.5.14. Sia $G(A) = \{g_1, ..., g_n\}$, possiamo numerarli in quanto sono finiti.
Siano $\xi_1, \xi_2 \in X/_G$ diversi tra loro, allora esistono $p, q \in A$:

$$[p] = \xi_1 \qquad [q] = \xi_2$$

Sappiamo che X è $T2$, allora $\forall g_i \in G(A), \exists U_i, V_i$ aperto di X disgiunti e $p \in U_i, g_i(q) \in V_i$. Siano

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \cap A \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i \cap A$$

Questi sono entrambi aperti di X, il primo è un intorno di p, il secondo è un intorno di q.
Sappiamo che i due insiemi sono disgiunti in quanto, abbiamo che tra gli elementi di $G(A)$ c'è l'identità id_G. Per comodità possiamo supporre che sia g_1, allora abbiamo che $g^{-1}(V_1) = V_1$ e abbiamo che $U_1 \cap V = \varnothing$, sapendo poi che $U \subseteq U_1$ e $V \subseteq V_1$, si ottiene che $U \cap V = \varnothing$
Per arrivare al fatto che valga per ogni punto, iniziamo con il dimostrare che $\forall g \in G, U \cap g(V) = \varnothing$
Siccome $U, V \subseteq A$, $\forall g \in G \setminus G(A)$ abbiamo che $U \cap g(V) = \varnothing$. Sia ora $g = g_i \in G(A)$, allora abbiamo che $g_i(V) \subseteq (g_i \circ g_i^{-1})(V) = V_i$. Sappiamo però che:

$$U \subseteq U_i \quad \text{e} \quad U_i \cap V_i = \varnothing \quad \Rightarrow \quad g(V) \cap U = \varnothing$$

Cioè U_i è disgiunto dalla saturazione di V.
Poi sappiamo che:

$$(\pi^{-1} \circ \pi)(U) = \bigcup_{g \in G} g(U) \qquad \text{e} \qquad (\pi^{-1} \circ \pi)(V) = \bigcup_{g \in G} g(V)$$

Dobbiamo mostrare che questi due insiemi sono disgiunti.
Questo è equivalente al dover mostrare che $\forall g', g'' \in G$

$$g'(U) \cap g''(V) = \varnothing$$

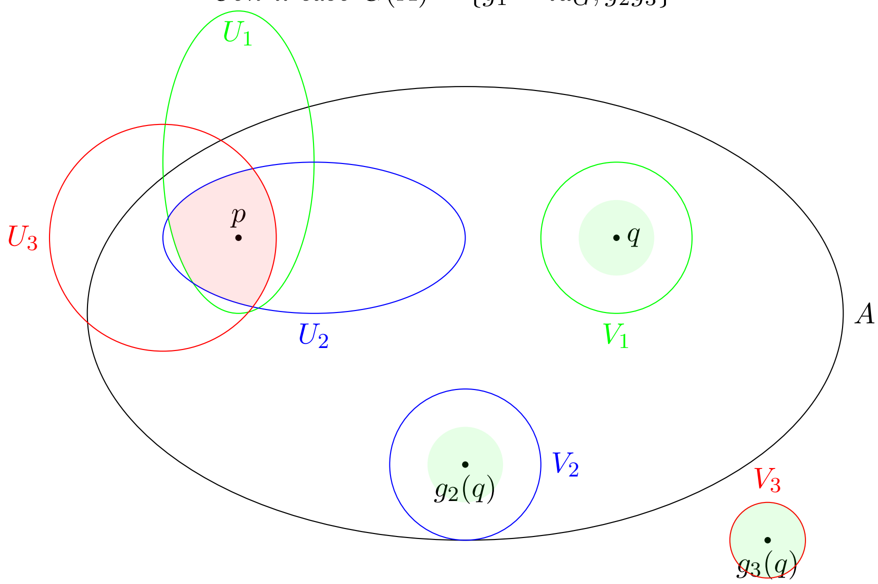
Ma questo è equivalente a:

$$g'(U) \cap g''(V) = g'(U \cap (g')^{-1}(g''(V))) = g'(U \cap \overline{g}(V)) = g'(\varnothing) = \varnothing$$

Sappiamo che $U \cap \overline{g}(V) = \varnothing$ per quanto fatto in precedenza □

Graficamente quello che abbiamo fatto in questa dimostrazione è stato il seguente:

Con il caso $G(A) = \{g_1 = id_G, g_2 g_3\}$



In rosso U *mentre in verde* $g_1(V), g_2(V), g_3(V)$

4.6 Conseguenze sulla Compattezza

Proposizione 4.6.1

Sia $f : X \to Y$ continua con X compatto, allora $f(X)$ è compatto con la topologia indotta da Y

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Per definizione di topologia indotta:

$$\forall i, \exists V_i \text{ aperto di } Y : U_i = V_i \cap f(X)$$

Chiamiamo $\mathcal{B} = \{f(V_i)\}_{i\in I} = \{f(U_i)\}_{i\in I}$. Questo è un ricoprimento aperto di X, in quanto f è continua, X è un aperto e U_i è un ricoprimento di $f(X)$.
Ma abbiamo che X è compatto, quindi:

$$\exists i_1, ..., i_n : X = f^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_n})$$

Quindi abbiamo che:

$$f(X) = f(f^{-1}(V_{i_1})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(V_{i_n})) = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

Ma questo è un sottoricoprimento di $\mathcal{A}$, quindi $f(X)$ è compatto. □

Corollario 4.6.2

La compattezza è una proprietà topologica (invariante per omomorfismo)

Corollario 4.6.3

Il quoziente di un compatto è compatto

Proposizione 4.6.4

Sia X compatto e sia $F \subseteq X$ chiuso, allora F con la topologia indotta è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di F, allora:

$$\forall i, \exists V_i \text{ aperto di } X : U_i = V_i \cap F$$

Ho sicuramente che:

$$F \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \qquad \Rightarrow \qquad X = \bigcup_{i\in I} V_i \cup (X \setminus F)$$

Ma tutti questi sono insiemi aperti, quindi per compattezza di X:

$$\exists i_1, ..., i_n : X = V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n} \cup (X \setminus F)$$

Da cui segue che:

$$F \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n} \quad \Rightarrow \quad F \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

E questo è un sottoricoprimento aperto di F □

Proposizione 4.6.5

Sia X spazio topologico e sia $K_1, ..., K_n \subseteq X$ compatti rispetto alla topologia indotta da X. Allora anche la loro unione è compatta rispetto alla topologia indotta.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di $K_1 \cup \cdots \cup K_n$. Allora:

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, U_i \cap \mathcal{A}_j \text{ è un ricoprimento aperto di } K_j$$

Quindi in particolare:

$$\exists i_{j_1}, ..., i_{j_{n_j}} : K_j = K_j \cap (U_{i_{j_1}} \cup \cdots \cup U_{i_{j_{n_j}}})$$

Quindi se prendiamo l'unione abbiamo che:

$$K_1 \cup \dots \cup K_n = \bigcup_j \left(U_{i_{j_1}} \cup \dots \cup U_{i_{j_{n_j}}} \right)$$

Ma questo è un sottoricoprimento finito, quindi:

$$K_1 \cup \dots \cup K_n \text{ è compatto}$$

□

Proposizione 4.6.6

Sia X $T2$ e K compatto con topologia indotta, allora K è chiuso

Dimostrazione. Mostriamo che $X \setminus K$ è aperto. Sia quindi $y \in X \setminus K$ e $x \in K$. Sappiamo tuttavia che X è $T2$, quindi:

$$\exists U_{y,x}, V_{y,x} \text{ aperti disgiunti} : y \in U_{y,x}, x \in V_{y,x}$$

Abbiamo quindi che al variare di $x \in K$ otteniamo che:

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} V_{y,x}$$

Equivalentemente abbiamo che $\{V_{y,x} \cap K\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto di K. Sappiamo tuttavia che K è compatto, quindi:

$$\exists x_1, ..., x_n \in K : K \subseteq V_{y,x_1} \cup \dots \cup V_{y,x_n}$$

In particolare abbiamo quindi che l'insieme U_y intorno di y è:

$$U_y = U_{y,x_1} \cap \dots \cap U_{y,x_n} \subseteq X \setminus K$$

Ma questo è un numero finito di aperti, quindi:

$$X \setminus K = \bigcup_{y \in X \setminus K} U_y \text{ aperti} \Rightarrow X \setminus K \text{ aperto } \Rightarrow K \text{ chiuso}$$

□

Teorema 4.6.7: Compatto Housdorff

Sia X compatto, Y $T2$ e $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora f è chiusa.

Dimostrazione. Sia $F \subseteq X$ chiuso, allora essendo X compatto si ha che anche F è compatto. Inoltre, essendo f continua, $f(F)$ è compatto e, essendo Y $T2$, $f(F)$ è chiuso. □

Teorema 4.6.8

Lo spazio topologico $([0, 1], \mathcal{T}_\mathcal{E})$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento di $[0,1]$ e sia $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i\in I}$ la famiglia con $\forall i, V_i = [0,1] \cap U_i$ e V_i aperti di $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Sia ora $X \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definito come:

$$X = \{t \in \mathbb{R}^+ : [0,t] \text{ sia ricoperto da un numero finito di elementi di } \mathcal{B}\}$$

Abbiamo che $0 \in X$, infatti $\mathcal{A}$ è un ricoprimento di $[0,1]$, quindi $\exists i_0$ con $0 \in U_{i_0}$, quindi $0 \in V_{i_0}$. Inoltre è aperto in $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in quanto $\exists \varepsilon$ con $[0,\varepsilon) \subseteq V_{i_0}$, quindi $\varepsilon/2 \in X$, da cui segue che $\sup X > 0$. Poniamo $b = \sup X$. Ora ci possono essere due casi, se $b > 1$ oppure se $b \leq 1$.
Se $b > 1$ abbiamo sostanzialmente finito, in quanto riusciamo ad ottenere un sottoricoprimento d finito da $\mathcal{A}$, quindi $[0,1]$ compatto.
Mostriamo che $b > 1$ è l'unica opzione. Supponiamo per assurdo che $b \leq 1$. In questo caso:

$$\exists U_{i,b} : b \in U_{i,b}$$

Ma abbiamo che $U_{i,b} = [0,1] \cap V_{i,b}$. Sia $U_{i,b}$ sia $V_{i,b}$ sono aperti di $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, quindi $\exists \varepsilon > 0$ tale che $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq V_{i,b}$. Ma avevamo che $b = \sup X$, allora $\forall t$, l'intervallo $[0, b-t]$ è ricoperto da un numero finito di elementi di $\mathcal{B}$. Siano quindi $V_{i,1_t}, ..., V_{i,n_t}$ tali elementi. Se abbiamo che $t < \varepsilon$ allora ho che:

$$V_{i,1_t} \cup \cdots \cup V_{i,n_t} \cup V_{i,b} \text{ ricopre almeno } \left[0, b + \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

Ma questo è assurdo, in quanto avremmo che $b + \frac{\varepsilon}{2} \in X$, quindi non sarebbe rispettata la condizione di $b = \sup X$. Quindi necessariamente $b > 1$ □

Proposizione 4.6.9

Sia $K \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$. Questo compatto rispetto alla topologia indotta se e solo se K è chiuso in $\mathbb{R}$ ed è limitato

Dimostrazione. $\boxed{\Leftarrow}$ Sia K limitato, allora esiste $N > 0$ tale che:

$$K \subseteq (-N, N) \subseteq [-N, N]$$

Sappiamo però che $[-N,N] \cong [0,1]$, quindi sappiamo che $[-N,N]$ è compatto. Sapendo anche che è chiuso abbiamo che:

$$K = K \cap [-N,N] \text{ è ancora chiuso} \quad \Rightarrow \quad K \text{ compatto}$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia K compatto. Sappiamo che $\mathbb{R}$ è $T2$, allora K è compatto. Sia $\mathcal{A} = \{(-N,N) \cap K\}_{N\in\mathbb{N}}$. Questo è un ricoprimento aperto di K, quindi:

$$\exists N_1, ..., N_n \in \mathbb{N} : K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (-N_i, N_i)$$

Poniamo $\overline{N} = \max N_i$, allora $K \subseteq (-\overline{N}, \overline{N})$, allora K è limitato. □

Teorema 4.6.10: di Wallace o Lemma del Tubo

Siano X, Y spazi topologici e siano $A \subseteq X, B \subseteq Y$ compatti e $W \subseteq X \times Y$ aperto tale che $A \times B \subseteq W$, allora:

$$\exists U \text{ aperto di } X, Y \text{ aperto di } Y : U \times V \subseteq W, A \subseteq U, B \subseteq V$$

Corollario 4.6.11

Sia X spazio topologico compatto e $T2$, allora è $T4$

Dimostrazione. Prendiamo F, G chiusi tali che $F \cap G = \varnothing$, allora:

$$F \times G \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$$

Sappiamo però che X è $T2$, quindi la diagonale è chiusa, quindi $(X \times X) \setminus \Delta_X$ è aperto. Sappiamo poi che F, G sono chiusi in un compatto, quindi sono compatti loro stessi. Per il teorema 4.6.10 di Wallace abbiamo che $\exists U, V$ aperti di X tali che:

$$F \subseteq U, G \subseteq V : F \times G \subseteq (U \times V) \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$$

Ma abbiamo che U e V sono disgiunti, quindi X è $T4$ □

Corollario 4.6.12

Sia X compatto e sia Y spazio topologico qualunque, allora $\pi_Y : X \times Y \to Y$ è chiusa

Dimostrazione. Sia $C \subseteq X \times Y$ chiuso. Se $\pi_Y(C) = Y$ allora non c'è niente da dimostrare Supponiamo quindi $\exists y \notin \pi_Y(C)$, consideriamo allora $X \times \{y\} \subseteq (X \times Y) \setminus C$. Per ipotesi abbiamo che X è compatto e che $(X \times Y) \setminus C$ è aperto, in quanto C è chiuso. Inoltre abbiamo che per la topologia indotta su $\{y\}$, in cui la topologia grossolana e quella discreta coincidono, $\{y\}$ è compatto. Quindi valgono le ipotesi del teorema 4.6.10 di Wallace, quindi esistono due aperti U, V_p aperti con $X \subseteq U, \{y\} \subseteq V_p$ tali che:

$$X \times \{y\} \subseteq U \times V_p \subseteq (X \times Y) \setminus C$$

Per ragioni piuttosto evidenti si ha che $U = X$. Abbiamo inoltre che $V_p \cap \pi_Y(C) = \varnothing$ per la condizione precedente, allora abbiamo che:

$$Y \setminus \pi_Y(C) = \bigcup_{p \in Y \setminus \pi_Y(C)} V_p$$

Essendo tutti questi aperti, abbiamo che $Y \setminus \pi_Y(X)$ è aperto, quindi $\pi(C)$ è chiuso, quindi π è chiusa □

Enunciamo un lemma estremamente utile, ma che dimostreremo solo in seguito.

Lemma 4.6.13

Sia $f : X \to Y$ funzione continua e chiusa con X e Y spazi topologici e con Y compatto tale che $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è compatto, allora X è compatto

In maniera del tutto euristica, possiamo considerare X come un salame e Y rappresenta la lunghezza del salame. Se le fette sono compatte, allora era compatto inizialmente il salame

Proposizione 4.6.14

Siano X, Y spazi topologici compatti, allora $X \times Y$ è compatto.

Dimostrazione. Consideriamo $\pi_Y : X \times Y \to Y$. Per il corollario precedente, abbiamo che π_Y è chiusa. Essendo una proiezione, abbiamo banalmente che è continua. Per ipotesi Y è compatto. Consideriamo poi $y \in Y$, allora:

$$\pi^{-1}(Y) = X \times \{y\} \cong X$$

Ma X è compatto, quindi anche $\pi_Y^{-1}(y)$. Ma allora per il lemma $X \times Y$ è compatto □

Osservazione. Questo vale per il prodotto di finiti compatti.

Dimostrazione del Teorema 4.6.10 di Wallace. Cominciamo dal caso in cui $A = \{a\}$.
Abbiamo che $\{a\} \times B \subseteq W$ aperto, allora $\forall b \in B, \exists U_b, V_b$ aperti di X e di Y rispettivamente tali che:

$$a \in U_b \qquad b \in V_b \qquad U_b \times V_b \subseteq W$$

Ottengo che $\{V_b \cap B\}_{b \in B}$ è un ricoprimento aperto di B, ma B è compatto per ipotesi, quindi esistono $b_1, ..., b_n \in B$ tali che:

$$V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n} \supset B$$

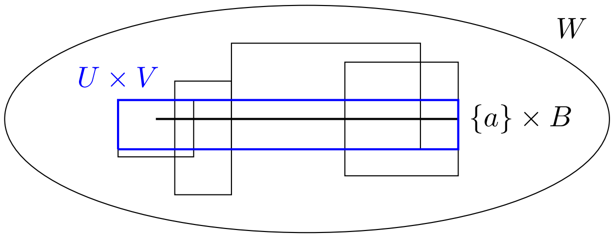
Poniamo:

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} V_{b_i} \ni a \qquad V = V_{b_1} \cup \cdots \cup V_{b_n} \supset B$$

Abbiamo che U e V sono aperti e $\{a\} \times B \subseteq U \times V$. Non ci resta da mostrare che $U \times V \subseteq W$.
Ma avevamo che:

$$U \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_{b_i} \times V_{b_i}) \subseteq W$$

Infatti se $x \in \bigcap U_i \Rightarrow x \in U_{b_i}, \forall i$, da cui, se $(x, y) \in U \times V$ esiste i tale che $y \in V_{b_i}$, da cui $(x, y) \in U_{b_i} \times V_{b_i}$
Graficamente abbiamo che:



Sia ora A qualunque. Sfruttando il passo precedente abbiamo che:

$$\forall a \in A, \exists U_a, V_a \text{ aperti } : (a, b) \in U_a \times V_a \subseteq W$$

Allora abbiamo che $\{U_a \cap A\}_{a \in A}$ è un ricoprimento aperto di A, ma A è compatto, quindi $\exists a_1, ..., a_m$ tali che:

$$U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_m} \supset A$$

Definiamo poi:

$$U = U_{a_1} \cup \cdots \cup A_{a_m} \supset A \qquad V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{a_i} \supset B$$

Ho quindi che:

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} (U_{a_i} \times V_{a_i}) \subseteq W$$

Inoltre abbiamo che $U \times V$ è aperto perché unione di aperti $\square$

Abbiamo sostanzialmente ripetuto quello fatto nella prima parte per ogni punto di A e poi abbiamo sostanzialmente "unito i rettangoli orizzontali"

Teorema 4.6.15

Sia X compatto e $T2$ e sia $\pi : X \to X/_\sim$. Allora si equivalgono:

1. $X/_\sim$ è $T2$
2. π è chiusa
3. $K = \{(x_1, x_2) : \pi(x_1) = \pi(x_2)\}$ è chiuso

Esempio 87. *Sia X compatto e $T2$ e sia $F \subseteq X$ chiuso, allora $X/_F$ è $T2$ (sfruttando il fatto che π è chiusa)*

Esempio 88. *Riprendendo l'esempio 58, con questo teorema possiamo dire che:*

$$D^n/_{S^{n-1}} \text{ è } T2$$

Dimostrazione. $\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Ho che $\Delta_{X/_\sim} \subseteq X/_\sim \times X/_\sim$ chiusa e che $K = (\pi, \pi)^{-1}(\Delta_{X/_\sim})$ chiuso.

$\boxed{3 \Rightarrow 2}$ π è chiusa se e solo se $\forall F$ chiuso ho $(\pi^{-1} \circ \pi)^{-1}(\Delta_{X/_\sim})$ è chiuso. Ma abbiamo che:

$$\pi^{-1}(\pi(F)) = p_1(K \cap p_2^{-1}(F))$$

Infatti, rappresentando con un grafo abbiamo che:

$$\begin{tikzcd} & X \times X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Abbiamo quindi che $p_2^{-1}(F) = X \times F$ che è chiuso in quanto p_2 è continua e F è chiuso. Abbiamo poi che:

$$K \cap p_2^{-1}(F) = \{(x, y) : y \in F, x \sim y\}$$

Ma K è chiuso, quindi anche $K \cap p_2^{-1}(F)$ è chiuso. Abbiamo poi che:

$$p_1(K \cap p_2^{-1}(F)) = \{\in X : \exists y \in F : x \sim y\} = \pi^{-1}(\pi(F))$$

Ma abbiamo anche che p_1 è chiusa e X è compatto, quindi $p_1(K \cap p_2^{-1}(F))$ è chiuso, quindi π è chiusa.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Siano $[a] \neq [b] \in X/_\sim$ e siano:

$$A = \pi^{-1}([a]) \qquad \text{e} \qquad B = \pi^{-1}([b])$$

Questi sono due chiusi in quanto $A = \pi^{-1} = \pi^{-1}(\pi(\{a\}))$ e $B = \pi^{-1}(\pi(\{b\}))$ e $\{a\}$ e $\{b\}$ sono chiusi in X in quanto X è $T1$ e perché la saturazione di chiusi è ancora chiusa. Ma A e B sono chiusi in un compatto e π è chiusa, quindi sono compatti loro stessi e $A \cap B = \varnothing$. Allora abbiamo che:

$$A \times B \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$$

Quest'ultimo insieme è aperto (in quanto X è $T2$), quindi possiamo applicare il teorema di Wallace, per cui $\exists U, V$ aperti di X tali che:

$$A \times B \subseteq U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta_X$$

Allora abbiamo che $U \cap V = \varnothing$. Sappiamo inoltre $\pi(X \setminus U)$ e $\pi(X \setminus V)$ sono chiusi in $X/_\sim$, allora:

$$X/_\sim \setminus \pi(X \setminus U) \text{ e } X/_\sim \setminus \pi(X \setminus V) \text{ sono aperti}$$

Inoltre questi rispettivamente contengono $[a]$ e $[b]$. Sappiamo che $X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ in quanto $U \cap V = \varnothing$. Mostriamo che questa proprietà è preservata nel quoziente. Supponiamo allora:

$$[c] \in (X/_\sim \setminus \pi(X \setminus U)) \cap (X/_\sim \setminus \pi(X \setminus V))$$

Tuttavia, per quanto fatto poco prima, abbiamo che $c \notin X \setminus U$ e contemporaneamente $x \notin X \setminus V$, quindi tale c non può esistere. Quindi sono disgiunti, quindi $X/_\sim$ è $T2$ $\square$

5 Teoria delle Categorie (Funtori)

5.1 Funtori Covarianti e Controvarianti

Definizione 5.1.1: Funtori Covarianti

Date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, un **Funtore Covariante** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è il dato di:

1. Una funzione $F : \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}) \to \boldsymbol{Ob}(\mathcal{D})$
2. $\forall A, B \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ è definita una funzione:

$$F : \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

   Tale che

   (a) $\forall A \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$, si ha $F(id_A) = id_{F(A)}$

   (b) $\forall A, B, C \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$, $\forall f \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B), \forall g \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{D}}(B, C)$:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

Esempio 89 (Funtori Dimenticanti)**.** *Data una categoria concreta, il funtore dimenticante dimentica una parte della struttura. Per Esempio:*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Set} \\ (X, \mathcal{T}) \mapsto X \\ f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S}) \mapsto f : X \to Y \end{gathered}$$

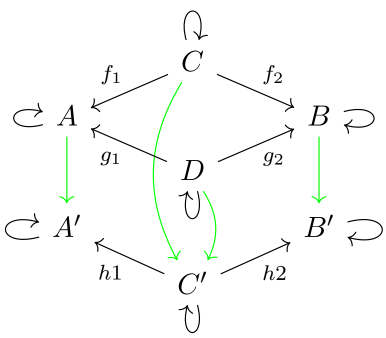
Esempio 90. *Altri esempi di Funtori dimenticanti sono:*

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Set} \\ \boldsymbol{Field} \to \boldsymbol{Ring} \\ \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} \to \boldsymbol{Grp} \end{gathered}$$

Esempio 91. *Se $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}$ è un'estensione di campi, allora anche la seguente funzione è un funtore dimenticante:*

$$\boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} \to \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{F}}$$

Esempio 92. *Siano dati i gradi delle categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. In base alla struttura possiamo definire il funtore (con le frecce blu) in modo che*



Mettendolo per scritto, abbiamo che $F(A) = A'$, $F(B) = B'$, $F(C) = F(D) = C'$ e poi i morfismi (non segnati) $F(f_1) = F(g_1) = h_1$ e $F(f_2) = F(g_2) = h_2$.
Ovviamente questa non era l'unica scelta possibile, potevamo per esempio mandare tutto in un unico oggetto, in questo modo tutti i morfismi sarebbero andati in $id_{F(A)}$

Esempio 93. *Siano $\mathbb{K}$ campo e W spazio vettoriale. Definiamo una funzione $\boldsymbol{Hom}(W, \cdot)$ tale che:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} &\to \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} \\ V &\mapsto Hom(W, V) \\ f : V_1 \to V_2 &\mapsto Hom(W, V_1) \to Hom(W, V_2) \\ & \qquad\qquad\qquad g \mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Vediamo ora se sono rispettate le proprietà della composizione.

- *Sia $id_V : V \to V$, allora ho che:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Hom}(id_V) : Hom(W, V) &\to Hom(W, V) \\ g &\mapsto g \circ id_V = g \end{aligned}$$

- *Siano $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$. Allora:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Hom}(g \circ f) = Hom(W, V_1) &\to Hom(W, V_3) \\ h &\mapsto (g \circ f) \circ h \\ \boldsymbol{Hom}(g) \circ \boldsymbol{Hom}(f) : Hom(W, V_1) &\to Hom(W, V_3) \\ h &\mapsto g \circ (f \circ h) \end{aligned}$$

  Ma la composizione è associativa, quindi questi due sono uguali, quindi:

$$\boldsymbol{Hom}(g \circ f) = \boldsymbol{Hom}(g) \circ \boldsymbol{Hom}(f)$$

  Quindi è un funtore

Definizione 5.1.2: Funtore Controvariante

Date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, un **Funtore Controvariante** F è il dato di:

1. Una funzione $F : \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C}) \to \boldsymbol{Ob}(\mathcal{D})$
2. $\forall A, B \in \boldsymbol{Ob}$ ho una funzione F tra i morfismi:

$$F : \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$

   tale che:

   (a) $\forall A \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ $F(id_A) = id_{F(A)}$
   (b) $\forall A, B, C \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$, $\forall f \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\forall g \in \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{D}}(B, C)$ vale:

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

Esempio 94. $\boldsymbol{Hom}(\cdot, W) : \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} \to \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}}$ *è un funtore controvariante.*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} &\to \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{K}} \\ V &\mapsto Hom(V, W) \\ f : V_1 \to V_2 &\mapsto Hom(V_2, W) \to Hom(V_1, W) \\ & \qquad\qquad\qquad g \mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Esempio 95 (Dualità)**.** *Se* $W = \mathbb{K}$*, allora* $\boldsymbol{Hom}(\circ, \mathbb{K})$ *è il funtore dualità:*

$$V \to V^*$$
$$V_1 \xrightarrow{f} V_2 \mapsto V_2^* \xrightarrow{f^*} V_1^*$$

Esempio 96 (Fascio delle Funzioni Continue)**.** *Consideriamo il funtore "Fascio delle Funzioni Continue" definito come:*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) : \boldsymbol{Top}(X) &\to \boldsymbol{Vect}_{\mathbb{R}} \\ U &\mapsto C(U, \mathbb{R}) = \{f : U \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \text{ continue}\} \\ V \hookrightarrow U &\mapsto C(U, \mathbb{R}) \mapsto C(V, \mathbb{R}) \\ & \qquad\qquad f \mapsto f|_V \end{aligned}$$

Osservazione. Un funtore controvariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}^{op}$

5.2 Proprietà dei Funtori

Definizione 5.2.1: Proprietà dei Funtori

Un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è detto:

- **Fedele**: $\forall A, B \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ la funzione:

$$F : \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \boldsymbol{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \text{ è iniettiva}$$

- **Pieno**: Come sopra ma suriettiva
- **Pienamente Fedele**: Se è pieno e fedele
- **Essenzialmente Suriettivo**: Se:

$$\forall D \in \mathcal{D}, \exists A \in \mathcal{C} : D \cong F(A)$$

Esempio 97. *Il funtore dimenticante* $\boldsymbol{Top} \to \boldsymbol{Set}$ *è fedele ma non pieno*

Esempio 98. *Il funtore dualità tra Spazi Vettoriali di dimensione finita è pienamente fedele ed essenzialmente suriettivo (infatti* $V \cong (\mathbb{K}^n)^*$ *per un opportuno* n*)*

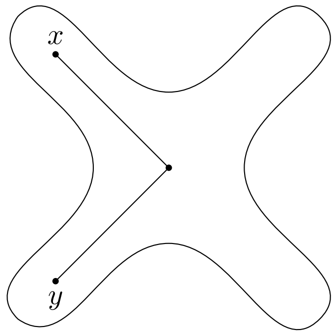
6 Connessione per Archi

6.1 Connessioni per Archi e Componenti Connessi per Archi

Definizione 6.1.1: Arco/Cammino e Cammino Chiuso/Laccio

Dato $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, una funzione continua $\gamma : ([0,1], \mathcal{T}_{\mathcal{E}}) \to (X, \mathcal{T})$ è detta **Arco** o **Cammino**. Se inoltre si ha che $\gamma(0) = \gamma(1)$, allora prende il nome di **Cammino Chiuso**, **Laccio** oppure **Cappio**

Esempio 99. *Sia $X \subseteq (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ stellato. Allora è connesso per archi, infatti*



Supponiamo, a meno di traslazioni, che il centro della stella stia nell'origine. Allora possiamo definire γ cammino come:

$$\gamma = \begin{cases} (1-2t)x & se\ t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2t-1)y & se\ t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Definizione 6.1.2: Insieme dei Cammini

Dati $x, y \in (X, \mathcal{T})$, definiamo come l'**Insieme dei Cammini** l'insieme:

$$\Omega(X, x, y) = \{\gamma : [0,1] \to X : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$$

Osservazione. X è connesso per archi se e solo se $\forall x, y \in X$, $\Omega(X, x, y) \neq \varnothing$

Proposizione 6.1.3

Se X, Y sono connessi per archi, allora $X \times Y$ è connesso per archi

Dimostrazione. Siano $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$. Per ipotesi esistono $\gamma_1 : [0,1] \to X$ cammino tale che $\gamma_1(0) = x_1$ e $\gamma_1(1) = x_2$ e $\gamma_2 : [0,1] \to Y$ tale che $\gamma_2(0) = y_1$ e $\gamma_2(1) = y_2$. Definiamo $\gamma : [0,1] \to X \times Y$ come:

$$t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

Questa è continua per la proprietà universale del prodotto e $\gamma(0) = (x_1, y_1)$ e $\gamma(1) = (x_2, y_2)$. Quindi $X \times Y$ è connesso per archi $\square$

Definizione 6.1.4: Giunzione di Cammini

Siano $x, y, z \in (X, \mathcal{T})$ e sia $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ e $\beta \in \Omega(X, y, z)$. Definisco la **Giunzione** di α e β come il cammino $\alpha * \beta \in \Omega(X, x, z)$ definito da:

$$\alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2} - 1] \end{cases}$$

Definizione 6.1.5: Inversione di un cammino

Definiamo l'**Inversione di un cammino** come:

$$i(\alpha) \in \Omega(X, y, x) \quad i(\alpha)(t) = \alpha(1 - t)$$

Proposizione 6.1.6

Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico e siano $A, B \subseteq X$ con topologia indotta tali che siano connessi per archi e disgiunti, allora $A \cup B$ è connesso per archi.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A \cap B$ e siano $x_1, x_2 \in A \cup B$.
Se entrambi sono contenuti in A o contenuti in B, allora non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo $x \in A$ e $x_2 \in B$. Visto che A e B sono connessi per archi, allora esistono $\gamma \in \Omega(X, x_1, x_2)$ e $\alpha \in \Omega(Y, x_0, x_2)$. Allora posso definire:

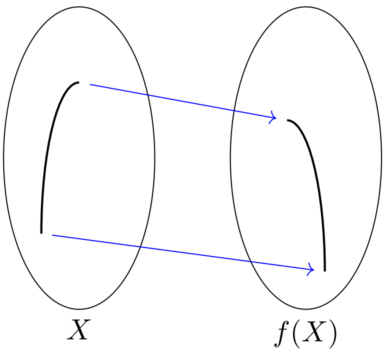
$$\gamma * \alpha \in \Omega(A \cup B, x_1, x_2)$$

Quindi è connesso per archi. □

Proposizione 6.1.7

Sia $f : X \to Y$ continua e X connesso per archi. Allora $f(X)$ è connesso per archi

Graficamente quello che stiamo dicendo è:



Dimostrazione. Siano $y_1, y_2 \in f(X)$, allora esiste $x_1, x_2 \in X : f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Ma X è connesso per archi, quindi:

$$\exists \gamma \in \Omega(X, x_1, x_2) \qquad \Rightarrow \qquad f \circ \gamma \in \Omega(f(X), y_1, y_2)$$

□

Corollario 6.1.8

La connessione per archi è invariante per omeomorfismo

Dimostrazione. Un omeomorfismo è invertibile come funzione continua ☐

Esempio 100. $[0,1) \ncong (0,1)$ *con la topologia euclidea. Infatti se per assurdo esistesse un omeomorfismo*

$$f : [0,1) \to (0,1)$$

Allora $\forall p \in [0,1)$ *ho che:*

$$f|_{[0,1)\setminus\{p\}} : [0,1) \setminus \{p\} \to (0,1) \setminus \{f(p)\} \text{ è un omeomorfismo}$$

Ma $[0,1) \setminus \{0\} = (0,1)$ *è connesso per archi, mentre* $(0,1) \setminus \{f(p)\}$ *non è connesso per archi per nessun* $p \in (0,1)$

Esempio 101. $[0,1], [0,1), (0,1)$ *non sono omeomorfi tra di loro rispetto alla topologia euclidea. In quanto il primo è compatto, mentre gli altri no*

Definizione 6.1.9: $\sim_{CPA}$

Dati due punti $x, y \in (X, \mathcal{T})$ spazio topologico, definiamo $x \sim_{CAP} y$ se e solo se:

$$\Omega(X, x, y) \neq \varnothing$$

Definizione 6.1.10: Componente Connessa per Archi

Dato $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, definiamo $Y \subseteq X$ **Componente Connessa per Archi** se:

1. $(Y, \mathcal{T}_Y)$ connesso per archi $\mathcal{T}_Y$ topologia indotta
2. $\forall Z$ connesso per archi e $Y \subseteq Z$, $Y = Z$

Proposizione 6.1.11

$\sim_{CPA}$ è una relazione di equivalenza

Dimostrazione. Verifichiamo che le tre proprietà siano effettivamente verificate

(R) $x \sim_{CPA} x$ tramite $f : X \to X, f(x) = x$

(S) Se $\gamma \in \Omega(X, x, y)$, allora $i(\gamma) \in \Omega(X, y, x)$

(T) Se $\gamma \in \Omega(X, x, y)$ e $\alpha \in \Omega(X, y, z)$, allora $\gamma * \alpha \in \Omega(X, x, z)$

☐

Proposizione 6.1.12

Sia $Y \subseteq X$ componente connessa per archi e sia $x \in Y$, allora $Y = [x]_{\sim_{CPA}}$

Dimostrazione. $\boxed{[x]_{\sim_{CPA}} \subseteq Y}$ Siano $x \in Y$ e Y connesso per archi, allora $Y \cup [x]_{\sim_{CPA}}$ è ancora connesso per archi, allora $[x]_{\sim_{CPA}} \cup Y = Y$ per massimalità.

$\boxed{Y \subseteq [x]_{\sim_{CPA}}}$ Sappiamo che $\forall y \in Y$, $\Omega(Y, x, y) \neq \varnothing$, ma allora vale anche che $\Omega(X, x, y) \neq \varnothing$, quindi $x \sim_{CPA} y$ □

Definizione 6.1.13: $\pi_0(X)$

Dato $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, definiamo

$$\pi_0(X) = X/_{\sim_{CPA}}$$

<u>solamente come insieme</u>

Proposizione 6.1.14

π_0 è un funtore ***Top*** $\rightarrow$ ***Set***

Dimostrazione. Vogliamo definire, data $f : X \rightarrow Y$, pi_0 come:

$$\begin{aligned} \pi_0(f) : X/_{\sim_{CPA}} &\rightarrow Y/_{\sim_{CPA}} \\ [x] &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

Dobbiamo vedere se è ben definita.
Sia $y \in X$ tale che $[x]_{\sim_{CPA}} = [y]_{\sim CPA}$, allora $\exists \gamma \in \Omega(X, x, y)$, allora abbiamo direttamente che:

$$f \circ \gamma \in \Omega(Y, f(x), f(y)) \qquad \Rightarrow \qquad [f(x)]_{\sim_{CPA}} = [f(y)]_{\sim_{CPA}}$$

Dobbiamo mostrare che valgono le proprietà del funtore.

- Dobbiamo mostrare che $\pi_0(id_X) = id_{\pi_0(X)}$. Sappiamo però che π_0 manda $[x]_{\sim_{CPA}}$ in $[id_X(x)] = [x]$, quindi è verificata.
- $\pi_0(f, g)[x] = [g(f(x))] = \pi_0(g)[f(x)] = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)[x]$

Abbiamo dimostrato anche che è un funtore covariante □

Proposizione 6.1.15

Sia $X \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_E)$. X è connesso per archi rispetto alla topologia indotta se e solo se X è un intervallo

Dimostrazione. X intervallo, allora $\forall a, b \in X (a \leq b)$ e $\forall x : a \leq c \leq b$ si ha che $c \in X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Un intervallo è convesso, quindi è connesso per archi

$\boxed{\Rightarrow}$ Siano $a, b \in X(a \leq b)$ e X connesso, allora $\exists \gamma \in \Omega(X, a, b)$, quindi $\exists \gamma \in \Omega(\mathbb{R}, a, b)$ con $Im(\gamma) \subseteq X$. Sia c tale che $a \leq c \leq b$ e applico il teorema dei valori intermedi, allora $x \in Im(\gamma)$, quindi $c \in X$ □

6.2 Omotopie

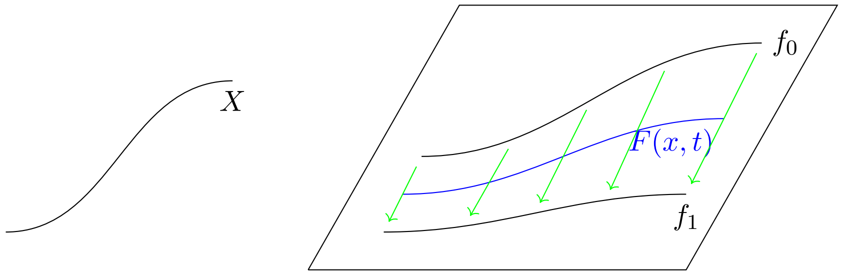
Definizione 6.2.1: Funzioni Omotope e Omotopia

Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazi topologici e siano $f_0, f_1 : X \to Y$. f_0 e f_1 si dicono **Omotope** se esiste $F : X \times [0,1] \to Y$ continua tale che:

$$F(x,0) = f_0(x) \qquad \text{e} \qquad F(x,1) = f_1(x)$$

La funzione F prende il nome di **Omotopia**

Graficamente quello che abbiamo è:



Osservazione. Per x fissato, possiamo definire $[0,1] \to Y$ come $t \mapsto F(x,t)$.
Per t fissato invece possiamo definire $X \to Y$ come $x \mapsto F(x,t)$.

Moralmente F è un cammino tra f_0 e f_1 in $\boldsymbol{Mor_{Top}}(X,Y)$

Definizione 6.2.2: $F * G$ Omotopia

Date F omotopia tra f_0 e f_1 e G omotopia tra f_1 e f_2, definiamo $F * G$ omotopia tra f_0 e f_2 tramite:

$$F * G = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Analogamente $i(F)$ è un'omotopia tra f_1 e f_0 definita da

$$i(F) = (x,t) = F(x, 1-t)$$

Proposizione 6.2.3

L'omotopia tra funzioni è una relazione di equivalenza

Dimostrazione. Come per la connessione per archi, usando l'omotopia costante, inversione e giunzione $\square$

Esempio 102. *Sia Y convesso di $\mathbb{R}^n$ oppure stellato, allora ogni coppia di funzioni da X a Y è omotopa. Infatti, siano $f_0, f_1 : X \to Y$. Definiamo:*

$$F(x,t) = tf_1(x) + (1-t)f_0(x) \in Y$$

Per Y stellato basta mandarlo prima tutto $f(X)$ nel centro e poi portarlo fuori

Esempio 103. *Sia $X = \{p\}$ un punto e sia $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e siano le funzioni:*

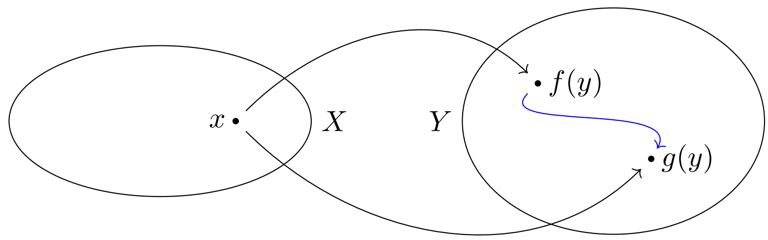
$$f_+(p) = 1 \qquad e \qquad f_-(p) = -1$$

Queste funzioni non sono omotope in quanto una loro omotopia dovrebbe avere un cammino tra 1 e -1 in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, il che è assurdo

Lemma 6.2.4

Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni omotope, allora $\pi_0(f) \equiv \pi_0(g)$

Dimostrazione. Quello che abbiamo è che:



Abbiamo che $\forall x \in X$, devo mostrare che $[f(x)] = [g(x)]$, ma $F(x,t) \in \Omega(Y, f(x), g(x))$, quindi è verificato. □

Definizione 6.2.5: Equivalenza Omotopica

$f : X \to Y$ funzione continua è detta **Equivalenza Omotopica** se $\exists g : Y \to X$ continua tale che:

$$g \circ f \sim id_X \qquad \text{e} f \circ g \sim id_Y$$

In tal caso X e Y si dicono **Omotopicamente Equivalenti** o **Omotopi** e si indica con $X \sim Y$

Esempio 104. *Sia $X \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ convesso, questo è omotopo ad un punto $\{p\}$*
Infatti se prendiamo $f : X \to \{p\}$ tale che $f(x) = p, \forall x \in X$ e prendiamo $g : \{p\} \to X$ tale che $g(p) = x_0 \in X$. Allora abbiamo che $g \circ f : X \to X$ è omotopa a id_X per il fatto che X è convesso. Ma abbiamo anche che $f \circ g : p \mapsto x_0 \mapsto x$, quindi $\circ g = id_{\{p\}}$

Osservazione. Due spazi omeomorfi sono anche omotopi, cioè $X \equiv Y \Rightarrow X \sim Y$. Basta infatti prendere $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$. Però non è vero il contrario: basta infatti prendere un insieme convesso con almeno due punti e il singoletto e la compattezza non è preservata dall'equivalenza omotopica. Cioè, per esempio, $\mathbb{R} \sim \{p\}$

Proposizione 6.2.6

$X \sim Y \Rightarrow \pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$

Dimostrazione. Ho $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ con $f \circ g = id_Y$ e $g \circ f = id_X$. Quindi:

$$\begin{tikzcd} \pi_0(X) \arrow[r, bend left, "\pi_0(f)"] \arrow[r, bend right, "\pi_0(g)"'] & \pi_0(Y) \end{tikzcd}$$

Quindi $g \circ f = id_X$, allora abbiamo che:

$$\pi_0(g) \circ \pi_0(f) = \pi_0(g \circ f) = \pi(id_X) = id_{\pi_0(X)}$$

In maniera del tutto analoga possiamo fare con $\pi_0(f) \circ \pi_0(g) = id_{\pi_0(Y)}$ Quindi abbiamo che $\pi_0(f)$ è invertibile, quindi $\pi_0(X) \cong \pi_0(Y)$ □

Definizione 6.2.7: Spazio Topologico Contraibile

Uno spazio topologico si dice **Contraibile** se è omotopo ad un punto.

Esempio 105. *X convesso o stellato di $\mathbb{R}^n$ è contraibile*

Definizione 6.2.8: Sottospazio Retratto per Deformazione

Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ spazio topologico e $Y \subseteq X$ con topologica indotta. Y è detto **Retratto per Contrazione** se $\exists R : X \times [0,1] \to X$ continua (detta **Retrazione**) tale che:

1. $R(x, 0) \in Y, \forall x \in Y$
2. $R(x, 1) = x, \forall x \in X$
3. $R(y, t) = Y, \forall y \in Y, t \in [0, 1]$

Esempio 106. 0 *è retratto per deformazione di $\mathbb{R}$ tramite:*

$$\begin{aligned} R : \mathbb{R} \times [0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto (1-t)x \end{aligned}$$

Proposizione 6.2.9

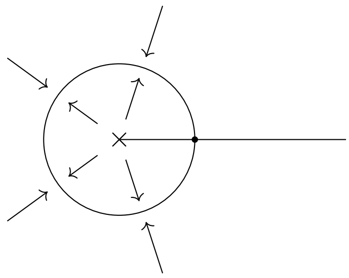
Sia $Y \subseteq X$ retratto per deformazione, allora $Y \sim X$ tramite inclusione

Dimostrazione. Sia $R : X \times [0,1] \to X$ una retrazione e sia $r : X \to Y$ data da $r(x) \cong R(x, 0)$ (avremmo che $i(r(x)) = R(x, 0)$ tramite i immesione). Ho allora che $r \circ i = id_Y$ per il punto 3 della definizione. Sappiamo poi che:

$$i \circ r = id_X$$

Ma il primo termine è una funzione che manda $x \mapsto R(x, 0)$ mentre il secondo manda x in $R(x, 1)$, quindi R definisce esattamente un'omotopia tra $i \circ r$ e id_X □

Esempio 107. *Sia $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con la topologia euclidea. Allora S^n è un retratto per deformazione.*



In particolare, è un detratto per deformazione tramite la funzione:

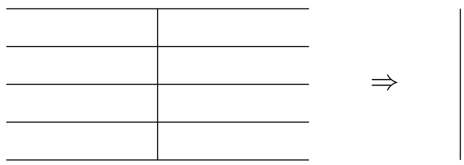
$$R(xt) = xt + (1-t)\frac{x}{\|x\|}$$

Esempio 108. *La retta $\{x = 0\}$ è un retratto per deformazione di:*

$$\{x = 0\} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} y = n$$

Tramite la funzione:

$$R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) = \begin{pmatrix} tx \\ y \end{pmatrix}$$



7 Connessione

7.1 Connessione e Sconnessione

Definizione 7.1.1: Connessione e Sconnessione

Sia $(X, \mathcal{T}) \neq \varnothing$ uno spazio topologico. Si dice che è **Connesso** se dati A, B aperti non vuoti con $A \cup B = X$, allora $A \cap B \neq \varnothing$. Altrimenti si dice che X è **Sconnesso**

Lemma 7.1.2

Si equivalgono:

1. A sconnesso
2. $\exists F, G$ chiusi non vuoti tali che $F \cup G = X$ e $F \cap G = \varnothing$
3. $\exists A \subseteq X$ non vuoto, $A \neq X$ che sia claperto
4. $\exists f : X \to (\{0, 1\}, \mathcal{T}_D)$ continua e suriettiva

Dimostrazione. $\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$ È banale, basta passare al complementare

$\boxed{1 \Leftrightarrow 3}$ A è claperto $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ è claperto, allora $A \cup (X \setminus A) = X$. Questa è un'unione vuota e disgiunta di aperti.

$\boxed{1 \Leftrightarrow 4}$ Sia $X = A \cup B$ aperti disgiunti non vuoti. Definiamo $f : X \to \{0, 1\}$ con $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$, allora f è continua, suriettiva e ben definita. Inoltre $X = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$, aperti disgiunti e non vuoti. □

Lemma 7.1.3

Sia $Y \subseteq X$, Y sottospazio connesso e sia $A \subseteq X$ claperto, allora $Y \cap A = \varnothing$ oppure $Y \cap A = Y$

Dimostrazione. Se $Y \cap A$ è claperto in Y, allora per il lemma 7.1.1 è $\varnothing$ oppure Y □

Proposizione 7.1.4

Sia $f : X \to Y$ continua con X connesso, allora $f(X)$ è connesso

Dimostrazione. Siano A, B aperti di $f(X)$ non vuoti tali che $f(X) = A \cup B$. Allora, per definizione di topologia indotta, $\exists C, D$ di Y tali che $A = C \cap f(X)$ e $B = D \cap f(X)$. Allora si ha che:

$$f^{-1}(C) = f^{-1}(A) \qquad \text{e} \qquad f^{-1}(D) = f^{-1}(B)$$

ovviamente si ha anche che $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ aperti non vuoti di X, ma X è connesso, quindi:

$$\exists x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in A \cap B$$

Quindi $f(X)$ è connesso □

Corollario 7.1.5

La connessione è invariante per omeomorfismi

Corollario 7.1.6

Quozienti di connessi sono connessi

Esempio 109. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *è sconnesso. Infatti può essere scritto come:*

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Esempio 110. $\mathbb{Q}$ *è sconnesso. Infatti può essere scritto attraverso i tagli di Dedekind come*

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : x < \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \alpha\} \qquad \alpha \in \mathbb{Q}$$

Esempio 111. $(X, \mathcal{T}_\mathcal{E}), X \neq \varnothing$ *è connesso*

Esempio 112. $(X, \mathcal{T}_D), |X| > 1$ *è sconnesso. Basta infatti prendere un insieme* $A \subseteq X, A \neq \varnothing$ *o* X *e questo è claperto*

Esempio 113. $(X, \mathcal{T}_{Cof})$ *e* $|X| \geq \infty$ *è connesso. Basta riprendere l'osservazione 4.1*

Teorema 7.1.7

$([0, 1], \mathcal{T}_\mathcal{E})$ è connesso

Prima di darne la dimostrazione, diamo il seguente corollario

Corollario 7.1.8

Un insieme connesso per archi è connesso

Dimostrazione. Sia X connesso per archi e $X = A \cup B$ aperti non vuoti, allora esiste $x \in A$ e $b \in B$. Sappiamo che X è connesso per archi, allora:

$$\exists \gamma \in \Omega(X, x, y)$$

Ma allora abbiamo che:

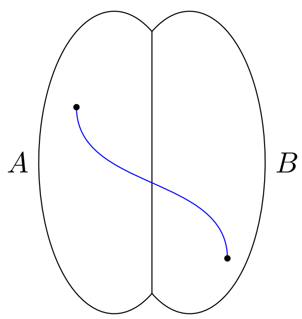
$$[0, 1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$$

Questi sono due insiemi aperti con $0 \in \gamma^{-1}(A)$ e $1 \in \gamma^{-1}(B)$. Ma allora abbiamo che:

$$\exists t : \gamma^{-1}(A) \cap \gamma^{-1}(B) \quad \Rightarrow \quad \gamma(t) \in A \cap B$$

Quindi X è connesso. □

Graficamente quello che è stato fatto è:



Dimostrazione del teorema 7.1.7. Siano C, D chiusi non vuoti tali che $[0,1] = C \cup D$. Sia $0 \in C$ (se così non fosse cambieremmo i nomi). Chiamiamo $d = \min(D)$. Se $d = 0$, allora $C \cap D \neq 0$ Supponiamo quindi $d > 0$ e chiamiamo $E = C \cap [0,d]$ chiuso. Allora $[0,d) \subseteq E$. Ma se andassimo a vedere la chiusura avremmo che:

$$[0,d] = \overline{[0,d)} \subseteq E$$

In realtà abbiamo l'uguaglianza. Da questo segue che:

$$d \in E \subseteq X \qquad \Rightarrow \qquad C \cap D \neq \varnothing$$

Quindi $[0,1]$ è connesso □

Corollario 7.1.9

Sia $X \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$. Questo è connesso se e solo se è un intervallo

Dimostrazione. $\boxed{\Leftarrow}$ X intervallo, allora X è connesso per archi, quindi è connesso

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia X non un intervallo, allora esistono a, b, c tali che $a \leq b \leq c$, con $a, c \in X$ e $b \notin X$. Da questo segue che:

$$X = (X \cap \{x > b\}) \cup (X \cap \{x < b\})$$

Al primo insieme appartiene a e al secondo insieme appartiene c. Questi sono due aperti disgiunti, quindi X è sconnesso. □

Corollario 7.1.10: Teorema dei Valori Intermedi

Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico connesso e sia $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(X)$ è un intervallo

Enunciamo una proposizione che ci tornerà comoda per il teorema.

Proposizione 7.1.11

Sia Y connesso e $f : X \to Y$ continua e suriettiva tale che:

- $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ è connesso
- f è aperta o chiusa

Allora X è connesso

Dimostrazione. Sia f aperta (il caso f chiusa è sostanzialmente identica). Siano A_1 e A_2 aperti di X non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$. Allora si ha che:

$$Y = f(A_1) \cup f(A_2) \text{ aperti non vuoti}$$

Abbiamo utilizzato che f è suriettiva e aperta. Abbiamo però anche che Y è connesso, quindi $\exists y \in f(A_1) \cap f(A_2)$, quindi:

$$f^{-1}(y) = (A_1 \cap f^{-1}(y)) \cup (A_2 \cap f^{-1}(y))$$

Questi ultimi due insiemi sono sicuramente non vuoti in quanto $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Inoltre è aperto per la topologia indotta. Ma abbiamo che $f^{-1}(y)$ è connesso, quindi:

$$\exists x \in (A_1 \cap f^{-1}) \cup (A_2 \cap f^{-1}(y)) \subseteq A_1 \cap A_2$$

Quindi X è connesso □

Teorema 7.1.12

Siano X, Y connessi, allora $X \times Y$ è connesso.

Dimostrazione. Consideriamo $p_Y : X \to Y$ continua e suriettiva. Sappiamo che Y è connesso e $\forall y \in Y, p_Y^{-1}(\{y\}) = X \times \{y\}$. Ma abbiamo anche che $X \times \{y\} \cong X$ connesso e p_Y aperta, quindi X è connesso. $\square$

7.2 Componenti Connesse

Definizione 7.2.1: Componente Connessa

Sia $C \subseteq X$. C è detta **Componente Connessa** se $C \neq \varnothing$ è connesso e $\forall A \subseteq X$ connesso e $C \subseteq A$, allora $C = A$

Teorema 7.2.2

Ogni spazio topologico non vuoto è unione disgiunta delle sue componenti connesse, che sono chiuse

Corollario 7.2.3

Il numero delle componenti connesse è invariante per omeomorfismo.

Esempio 114. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ncong \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. *Il primo insieme può essere scritto come unione di due componenti* $\{x < 0\} \cup \{x > 0\}$ *mentre il secondo come unione di tre componenti* $\{x < 0\} \cup (0, 1) \cup \{x > 1\}$. *Visto che* $2 \neq 3$, *questi non sono omeomorfi*

Lemma 7.2.4: A

Sia $Y \subseteq X$ sottospazio connesso e sia $W \subseteq X$ sottospazio con $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y} \subseteq X$. Allora W è connesso

Dimostrazione. Siano $A_1, A_2 \subseteq W$ aperti non vuoti tali che $A_1 \cup A_2 = W$. Allora abbiamo che:

$$(A_1 \cap Y) \cup (A_2 \cap Y) = Y$$

Ma questi due insiemi sono aperti di Y e se non sono entrambi vuoti, allora esiste $y \in (A_1 \cap Y) \cap (A_2 \cap Y)$. Allora A_1 e A_2 non sono disgiunti.
Supponiamo per assurdo che $Y \cap A_1 = \varnothing$. Allora abbiamo che $Y \subseteq W \setminus A_1$ chiuso, quindi $\overline{Y}^W \subseteq W \setminus A_1$. Ma abbiamo che:

$$\overline{Y}^W = \overline{Y}^X \cap W = W$$

Ma abbiamo un assurdo, quindi necessariamente abbiamo $Y \cap A_1 \neq \varnothing$ e W connesso $\square$

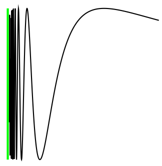
Esempio 115 (Seno del Topologo). *Sia* Γ *definito come:*

$$\Gamma = \overline{\left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\}}$$

Abbiamo che Γ *è connesso, infatti* $\{(x, \sin(\frac{1}{x})) : x > 0\}$ *è connesso per archi tramite:*

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto (1-t)x + ty$$

e $(\gamma(t), \sin(\frac{1}{\gamma(t)}))$ *collega i punti* $(x, \sin(\frac{1}{x}))$ *e* $(y, \sin(\frac{1}{y}))$*. Quindi* Γ *è connesso per il lemma appena fatto.*
Graficamente Γ *è:*



Mostriamo che Γ *non è connesso per archi. Sia* γ *un cammino tra* $(0,t)$ *e* $(1, \sin 1)$*. Sia poi* $T = \sup\{s : p_1(\gamma(t)) = 0\}$*. Sia inoltre* $a = p_2(\gamma(T)) \in [-1,1]$
Per la continuità di γ *si ha che:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : p_2(\gamma(s)) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \forall s \in (T-\delta, T+\delta)$$

Scegliamo allora $\varepsilon > 0$ *tale che* $[-1,1] \subsetneq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$*. Allora abbiamo che:*

$$\forall \delta > 0, p_1(\gamma(s)) > 0, \forall s \in (T, T+\delta)$$

Poniamo adesso $b = \sup\{p_1(\gamma(s)) : s \in (T, T+\delta)\}$*. Abbiamo quindi che* $(0,b) = p_1(\gamma(T, T+\delta))$*. Ma allora abbiamo che* $p_2(\gamma(T, T+\delta)) = [-1,1]$*. Quindi non esiste un* δ *tale che:*

$$p_2(\gamma(T, T+\delta)) \subseteq (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

Quindi non può esistere tale funzione γ

Lemma 7.2.5: B

Sia $x \in X$ e siano $\{Z_i\}_{i \in I}, I \neq \varnothing$ tali che $Z_i \subseteq X$ connesso e con topologia indotta tali che $x \in Z_i \forall i \in I$. Allora:

$$\bigcup_{i \in I} Z_i \qquad \text{è ancora connesso}$$

Dimostrazione. Per questioni di comodità di notazioni, poniamo W come l'unione di tutti i Z_i e sia $A \neq \varnothing$ aperto e chiuso in W. Supponiamo $x \in A$ (altrimenti lo sostituiamo con $W \setminus A$). Allora $\forall i \in I$ abbiamo che $A \cap Z_i \neq \varnothing$ ed è aperto e chiuso. Ma abbiamo che Z_i è connesso, quindi $A \cap Z_i = Z_i$ da cui segue che $Z_i \subseteq A$. Quindi:

$$\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A \qquad \Rightarrow \qquad W \subseteq A$$

Quindi W è connesso □

Corollario 7.2.6

A, B connessi ma non disgiunti, allora $A \cup B$ è connesso

Lemma 7.2.7: C

Sia $x \in X$ e sia $Conn(x) = \{Y \subseteq X \text{ connessi } : x \in Y\}$. Allora:

$$C(x) := \bigcup_{Y \in Conn(x)} Y \text{ è una componente connessa}$$

Dimostrazione. Abbiamo che $\{x\}$ è connesso con la topologia indotta (che coincide con quella grossolana). Allora sicuramente $\{x\} \in Conn(x)$. Quindi sicuramente $Conn(x) \neq \varnothing$, da cui sicuramente $C(x) \neq \varnothing$. Abbiamo inoltre che per il lemma B 7.2.5 abbiamo che $C(x)$ è connesso e $x \in C(x)$. Supponiamo ora Y connesso con $C(x) \subseteq Y$, allora abbiamo che $x \in Y$ quindi $Y \in Conn(x)$ da cui $Y \subseteq C(x)$ □

Dimostriamo ora il teorema 7.2

Dimostrazione del teorema 7.2.2. Sia l'insieme X scritto come:

$$X = \bigcup_{x \in X} C(x)$$

Per il lemma C abbiamo che queste sono tutte componenti connesse.
Siano ora $x, y \in X$. Se $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, allora esiste $z \in C(x) \cap C(y)$. Allora abbiamo che $C(z) \supseteq C(x) \cup C(y)$ per massimalità. Sempre per massimalità segue che $C(x) = C(y) = C(z)$. Eliminando le ripetizioni ad inizio uguaglianza otteniamo che:

$$Z \subseteq X : \forall z_1, z_2 \in Z, C(z_1) \neq C(z_2) \text{ e } \bigcup_{z \in Z} C(z) = X$$

In questo modo abbiamo che:

$$X = \coprod_{z \in Z} C(z)$$

Dove $\amalg$ *rappresenta l'unione disgiunta*
Si conclude poi con il lemma A, secondo cui le componenti connesse sono tutte chiuse □

Esempio 116 (Continuo del seno del topologo)**.** *Avevamo detto dalla prima parte che questo era connesso ma non per archi. Le sue componenti per archi sono:*

$$\left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) : x > 0 \right\} \qquad e \qquad \{0\} \times [-1, 1]$$

La prima componente è aperta in Γ *ma non chiusa mentre la seconda è chiusa in* Γ *ma non aperta*

Proposizione 7.2.8

X è localmente connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi coincidono con le componenti connesse e sono sia chiusa sia aperte.

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia $A = \{y \in X : \Omega(X, x, y) \neq \varnothing\}$ le sue componenti connessi per archi. Sia $y \in A$ e sia U un intorno di y connesso per archi, allora $U \subseteq A$. Quindi A è un intorno di tutti i suoi punti, ma allora A è aperto. Se facciamo un ragionamento analogo con B definito per tutti gli $x \notin A$, abbiamo che:

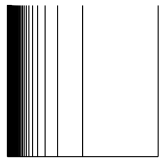
$$X \setminus A = \bigcup_{B \neq A, B \text{ Comp CPA}} B \text{ aperto} \qquad \Rightarrow \qquad A \text{ è chiuso}$$

Considerando la componente connessa $C(x) \supseteq A \neq \varnothing$, quindi $C(x) = A$ $\square$

Esempio 117 (Pettine del Topologo)**.** *Sia $X \subseteq (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ con:*

$$X = [0,1] \times \{0\} \cup \left(\bigcup_{y \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \{0\} \times [0,1]$$

Graficamente è:



X è certamente connesso per archi (infatti per arrivare da un qualsiasi punto ad un altro del pettine mi basta passare dal manico). Ma è localmente connesso per archi? La risposta è no.
Per ogni punto (x,y) con $x > 0$ e $y \neq 0$ abbiamo che:

$$\exists \varepsilon : B_\varepsilon(x,y) \cap X \text{ è connesso per archi}$$

Infatti:

$$\exists n : x = \frac{1}{n}$$

Ci basterà allora prendere:

$$\varepsilon < \min \left\{ y, \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right|, \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \right\}$$

In questo modo segue automaticamente che:

$$B_\varepsilon(x,y) \cap X = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$$

Per $x = 0$ e $y > 0$ le cose non funzionano più tanto bene. Cioè non è localmente connesso per archi. Se infatti esistesse tale $\gamma \in \Omega(U, (0,y), (\frac{1}{n}, y))$ con U che non interseca il manico del pettine, allora, essendo γ una funzione continua, avremmo che sicuramente γ passa per $(\frac{1}{n+1}, y)$, punto che non fa parte dell'intorno.

8 Varietà Topologiche

8.1 Definizioni Base

Definizione 8.1.1: Varietà Topologica

Una **Varietà Topologica** M di dimensione n è uno spazio topologico M tale che:

1. M è $T1$
2. M è localmente euclideo (con aperti di $\mathbb{R}^n$)
3. Ogni componente connessa di M è $N2$

Esempio 118. *$(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ è una varietà topologica di dimensione n*

Esempio 119. *Il seguente insieme M definito come:*

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n, y, y \in \mathbb{R} \subseteq (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_\mathcal{E})$$

è una varietà topologica di dimensione 1

Esempio 120. *$(\mathbb{Q}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ non è una varietà topologica. Infatti ogni aperto contiene numerabili punti è non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ che ha continui punti se $n \geq 1$ oppure un punto se $n = 0$*

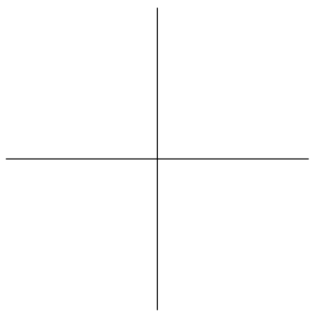
Esempio 121. *$(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ è una varietà topologica di dimensione 0*

Esempio 122. *S^n è una varietà topologica di dimensione n.*
Infatti, sappiamo che è $T2$ e $N2$ in quanto $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sottospazio (e $\mathbb{R}^{n+1}$ è già $N2$ e $T2$) È localmente euclideo tramite le due proiezioni stereografiche:

$$S^n \setminus \{(0, ..., 0, 1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \qquad S^n \setminus \{(0, ..., 0, -1)\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$$

Esempio 123. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto è una varietà topologica di dimensione n*

Esempio 124. *L'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ non è una varietà topologica.*
Se vogliamo rappresentare questo insieme, avremmo che:



Il problema è proprio nell'origine. In tutte le altre parti, è possibile trovare un aperto di $\mathbb{A}$ tale che sia isomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}$. Con l'origine, quello che stiamo cercando è un insieme aperto in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^2$ tale che sia omeomorfo ad una croce. Che è impossibile (basta infatti togliere un punto e avremmo che dalla croce otteniamo 4 componente connesse, mentre dall'intervallo ne avremmo due o dal piano una soltanto)

Esempio 125 (Importante: Teorema delle Funzioni Implicite)**.** *Il teorema delle funzioni implicite ci permette di definire varietà topologiche, per esempio:*

$$S^n = f^{-1}(0) \qquad \textit{con } f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x\| - 1$$

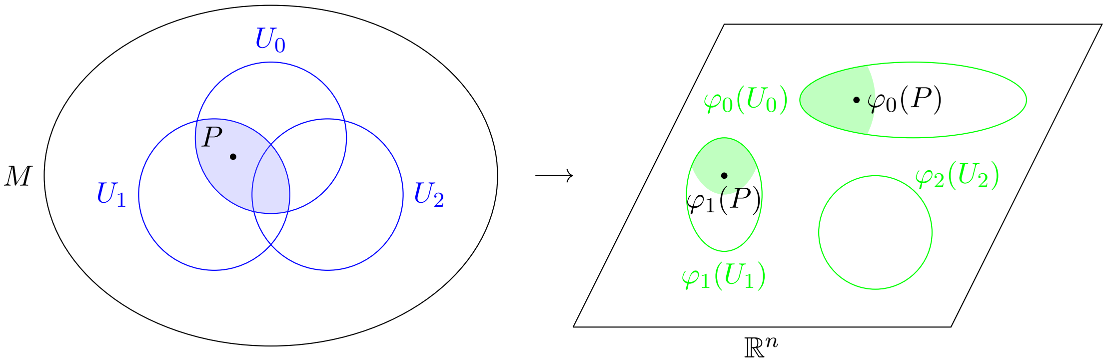
Esempio 126. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ *e* $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ *sono delle varietà topologiche di dimensione rispettivamente* n *e* $2n$ *tramite le carte affini.*

Definizione 8.1.2: Carta e Atlante

Una coppia (U, φ) con $U \subseteq M$ aperto di una varietà topologia è detta **Carta** di M se $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è aperta e omeomorfismo sulla sua immagine. Una collezione $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ è detto **Atlante** se:

$$\bigcup_{i \in I} U_i = M$$

Graficamente abbiamo che:



Le parti evidenziate sono l'intersezione tra U_0 *e* U_1 *(in blu) e le rispettive immagini rispetto a* φ_1 *e* φ_0 *(in verde)*

Possiamo definire allora la funzione $\varphi_{i,j}$ come:

$$\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

Questa funzione è sicuramente continua, ma è differenziabile?

Definizione 8.1.3: Varietà Differenziabile

Se $\forall i, j$ le carte dell'atlante di M varietà topologica danno funzioni del tipo $\varphi_{ij} : \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ di classe C^∞, allora M prende il nome di **Varietà Differenziabile**

9 Gruppo Fondamentale

9.1 Struttura del Gruppo Fondamentale

Definizione 9.1.1: Omotopie di Cammini

Sia $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico e $a, b \in X$ e $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$. Una **Omotopia di Cammini** α e β è una funzione:

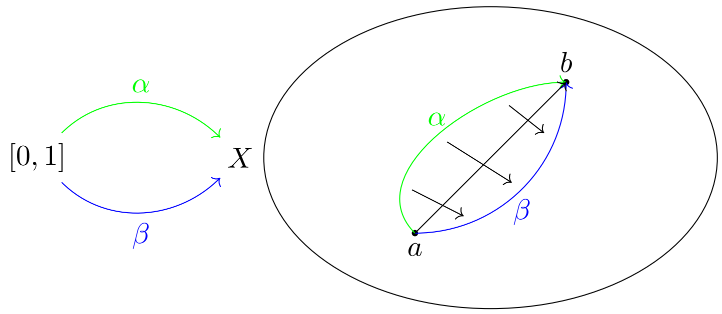
$$F : [0,1] \times [0,1] \to X$$

Tale che:

$$F(t,0) = \alpha(t) \qquad F(t,1) = \beta(t) \qquad F(0,s) = a \qquad F(1,s) = b$$

Osservazione. $\forall s \in [0,1]$, la funzione $t \mapsto F(t,s)$ è un cammino tra a e b.

Osservazione. Una omotopia di cammini è un modo "per deformare" un cammino in un altro:



Analogamente al caso delle omotopie si definiscono le inversioni e le giunzioni di omotopie:

$$i(F)(t,s) = F(t, 1-s) \qquad F \times G(t,s) = \begin{cases} F(t, 2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(t, 2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Lemma 9.1.2

L'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza $\sim$ tra cammini

Questo lemma si dimostra esattamente come con le omotopie

Definizione 9.1.3: Cammino Costante

Il **Cammino Costante** 1_a è il laccio in a $1_a \in \Omega(X, a, a)$ tale che:

$$f(t) = a \qquad \forall t$$

Esempio 127. *Sia X un insieme convesso in $\mathbb{R}^n$ e sia $a \in \Omega(X, a, a)$ con $a \in X$. Allora $\alpha \sim 1_a$ tramite:*

$$F(t,s) = \alpha(t) + s(a - \alpha(t))$$

Definizione 9.1.4: Gruppo Fondamentale

Sia X spazio topologico e $a \in X$. Si definisce il **Gruppo Fondamentale** di X in a come:

$$\pi_1(X, a) = \Omega(X, a, a)/_{\sim}$$

Esempio 128. *Sia X convesso e $a \in X$, allora $\pi_1(X, a) = \{[1_a]\}$*

Proposizione 9.1.5

Siano $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta, \beta' \in \Omega(X, b, c)$ tali che $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$. Allora:

$$i(\alpha) \sim i(\alpha') \qquad \text{e} \qquad \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$$

Dimostrazione. Sia F continua tra α e α' e G continua tra β e β'. Allora abbiamo che $F(1-t, s)$ è un'omotopia tra $i(\alpha)$ e $i(\alpha')$. Infatti per $s = 0$ ho $i(\alpha(t))$, per $s = 1$ ho $i(\alpha'(t))$, mentre per $t = 0$ ho b e per $t = 1$ ho a.

Costruiamoci manualmente l'omotopia tra $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$. Definiamo $H(t, s)$ come:

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t-1, s) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Questa è l'omotopia cercata in quanto abbiamo che:

$$H(t, 0) = \alpha * \beta(t) \qquad H(t, 1) = \alpha' * \beta'(t) \qquad H(0, s) = a \qquad H(1, s) = b$$

□

Lemma 9.1.6: di Riparametrizzazione

Sia α un cammino e sia $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ continua con $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Allora $\alpha \sim \alpha \circ \varphi$

Dimostrazione. Basta prendere infatti $F(t, s) = \alpha((1-s)t + s\varphi(t))$. In questo modo abbiamo che:

$$F(t, 0) = \alpha(t) \qquad F(t, 1) = \alpha \circ \varphi(t) \qquad F(0, s) = \alpha(0) \qquad F(1, s) = \alpha(1)$$

□

Proposizione 9.1.7

La congiunzione $*$ è associativa a meno di giunzione

Dimostrazione. Mostriamo che $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$. In particolare abbiamo che:

$$\alpha * (\beta * \gamma)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-2) & t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}] \\ \gamma(4t-3) & \in [\frac{3}{4}, 0] \end{cases} \qquad (\alpha * \beta) + \gamma(t) \begin{cases} \alpha(4t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4t-1) & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Allora tramite la funzione $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ con:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ t + \frac{1}{4} & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{t+1}{2} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Otteniamo che $(\alpha * \beta) * \gamma(t) = \alpha * (\beta * \gamma)(\varphi(t))$. Dal lemma precedente 9.1.6 otteniamo l'omotopia che stavamo cercando □

Proposizione 9.1.8

Dato $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, allora:

$$\alpha * 1_b \sim \alpha \sim 1_a * \alpha$$

Dimostrazione. Utilizziamo il lemma di Riparametrizzazione 9.1.6. Abbiamo che:

$$1_a * \alpha(t) = \alpha(\varphi_1(t))$$

Dove $\varphi_1(t) = 0$ se $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\varphi_1(t) = 2t - 1$ se $t \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\alpha * 1_b(t) = \alpha(\varphi_2(t))$$

Dove $\varphi_2(t) = 2t$ se $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $\varphi_2(t) = 1$ se $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ □

Lemma 9.1.9: del Triangolo

Siano $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$. Sia il triangolo:

$$T = \left\{ t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3 : \sum_{i=1}^{3} t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

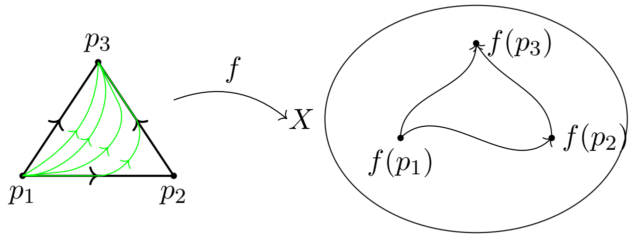
Sia poi $f : T \to X, \mathcal{T})$ con f funzione continua e siano le funzioni $f_{i,j} : [0, 1] \to X$ date da:

$$f_{i,j}(t) = f(tp_j + (1 - t)p_i)$$

Allora:

$$f_{1,3} \sim f_{1,2} * f_{2,3}$$

Dimostrazione. Graficamente abbiamo che:



Definiamo $q(t, s)$ come:

$$q(t, s) = \begin{cases} (1 - t - ts)p_1 + 2tsp_2 + (t - ts)p_3 & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1 - t - s + ts)p_1 + 2(1 - t)sp_2 + (t - s + ts)p_3 & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$

q ha immagine in T ed è un'omotopia tra $\overline{12} * \overline{23}$ e $\overline{13}$ dentro T, quindi possono definire:

$$F(t, s) = f(q(t, s)) \qquad \Rightarrow \qquad f_{1,2} * f_{2,3} \sim f_{1,3}$$

□

Proposizione 9.1.10

$\forall \alpha \in \Omega(X, a, b)$ vale $\alpha * i(\alpha) \sim 1_a$

Dimostrazione. Uso un triangolo degenere con $p_1 = p_3 = 0$ e $p_2 = 1$ e poi mi basta applicare il lemma del triangolo 9.1.9. Definiamo poi l'applicazione:

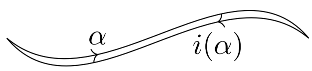
$$f : T = [0, 1 \to X \qquad t \mapsto \alpha(t)]$$

In questo modo abbiamo che $f_{1,3}(t) = \alpha(0) = a$, per cui abbiamo che $f_{1,3} = 1_a$. Per le altre abbiamo che:

$$f_{1,2}(t) = \alpha(t) \qquad \text{e} \qquad f_{2,3}(t) = i(\alpha(t))$$

Quindi per il lemma del triangolo si ha che $\alpha * i(\alpha) = 1_a$ □

Graficamente quello che abbiamo fatto nella dimostrazione è stato:



Teorema 9.1.11: Gruppo Fondamentale

$\pi_1(X, a)$ è un gruppo con l'operazione $*$, elemento neutro 1_a e vale:

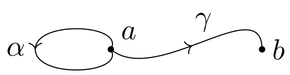
$$\forall [\alpha] \in \pi_1(X, a) \quad [\alpha]^{-1} = [i(\alpha)]$$

Il gruppo fondamentale prende anche il nome di **Gruppo di Poincaré** o **Primo Gruppo di Omotopia**

Dimostrazione. $*$ è ben definito nel quoziente.
$*$ è associativa per quanto visto nella proposizione 9.1.7.
1_a è l'elemento neutro per quanto visto nella proposizione 9.1.8
$[i(\alpha)] = [\alpha]^{-1}$ per quanto visto nella proposizione 9.1.10 □

9.2 Proprietà del Gruppo Fondamentale

Osservazione. Se abbiamo che $\Omega(X, a, b) \neq \varnothing$ allora abbiamo che:



in particolare abbiamo che:

$$i(\gamma) * \alpha * \gamma$$

Proposizione 9.2.1

Dato $\gamma \in \Omega(X, a, b)$ la funzione

$$\gamma_\sharp : \pi_1(X, b) \to \pi_1(X, a)$$

definita come:

$$\gamma_\sharp([\alpha]) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

è un isomorfismo di gruppi

Dimostrazione. Intanto notiamo che $[i(\gamma)*\alpha*\gamma]$ non dipende dalla scelta di $[\alpha]$. Quindi sicuramente $\gamma_\sharp$ è ben definita. Inoltre:

$$\gamma_\sharp(\alpha) * \gamma_\sharp(\beta) = [i(\gamma) * \alpha * \gamma] * [i(\gamma) * \beta * \gamma] = [i(\gamma) * \alpha * \beta * \gamma] = \gamma_\sharp(\alpha * \beta)$$

Quindi $\gamma_\sharp$ è un omomorfismo di gruppi. In realtà possiamo dire che è un isomorfismo in quanto:

$$i(\gamma)_\sharp(\gamma_\sharp(\alpha)) = [\gamma * i(\gamma) * \alpha * \gamma * i(\gamma)] = [\alpha]$$

□

Definizione 9.2.2: Classe di Isomorfismo

Se X è connesso per archi è ben definita la **Classe di Isomorfismo** di $\pi_1(X,a), \forall a \in X$, che viene definita come $\pi_1(X)$

Definizione 9.2.3: Semplicemente Connessione

Se X è connesso per archi e $\pi_1(X) = \{0\}$, allora X si dice **Semplicemente Connesso**

Esempio 129. *Sia* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *convesso, allora* X *è semplicemente connesso. Quindi anche* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_\mathcal{E})$ *è semplicemente connesso, così come le sue palle aperte*

Proposizione 9.2.4

Sia $f : X \to Y$ continua e siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ e $\gamma \in \Omega(X, b, c)$. Allora:

1. $\alpha \sim \beta \Rightarrow f(\alpha) \sim f(\beta)$
2. $f(\alpha * \gamma) = f(\alpha) = f(\gamma)$

Dimostrazione. $\boxed{2}$ Questa affermazione è vera per definizione.

$\boxed{1}$ Sia F omotopia tra α e β, allora $f(F)$ è omotopia tra $f(\alpha)$ e $f(\beta)$, infatti:

$$f(F(t,0)) = f(\alpha,t) \qquad f(F(t,1)) = f(\beta,t) \qquad f(F(0,s)) = f(a) \qquad f(F(1,s)) = f(b)$$

□

Teorema 9.2.5

π_1 è un funtore tra $\boldsymbol{Top_{pt}}$ e $\boldsymbol{Grp}$ dove $\boldsymbol{Top_{pt}}$ ha come elementi le coppie $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico e $x_0 \in X$ e i morfismi:

$$f : (X, \mathcal{T}_X, x_0) \to (Y, \mathcal{T}_Y, y_0) \qquad \text{tali che } f(x_0) = y_0$$

Dimostrazione. Definiamo $f : (X, \mathcal{T}_X, x_0) \to (Y, \mathcal{T}_Y, y_0)$. Allora sappiamo che:

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \qquad [x] \mapsto [f(x)]$$

è un omomorfismo di gruppi e che

$$[g \circ f \circ \alpha] = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)[\alpha] \qquad \text{e} \qquad \pi_1(id_X) = id_{\pi_1(X,x_0)}$$

□

Da adesso in avanti iniziamo a chiamare $\pi_1(f)$ come f_* e la chiameremo "f pushforward" oppure f sospinta

Proposizione 9.2.6

Dati A e B spazi topologici e $a_0 \in A$ e $b_0 \in B$. Allora:

$$\pi_1(A \times B, (a_0, b_0)) \cong \pi_1(A, a_0) \times \pi_1(B, b_0)$$

Il prodotto in $\boldsymbol{Top_{pt}}$ commuta il funtore π_1

Dimostrazione. Tramite la proposizione universale del prodotto abbiamo un isomorfismo:

$$\Omega(A \times B, (a_0, b_0), (a_0, b_0)) \cong \Omega(A, a_0, a_0) \times \Omega(B, b_0, b_0) \qquad \gamma \mapsto (p_A \circ \gamma, p_B \circ \gamma)$$

Lo stesso discorso vale anche per le omotopie. Infatti se $\gamma \sim \beta$ tramite F, allora:

$$p_1 \circ \gamma \sim p_2 \circ \beta \text{ tramite } p_1 \circ F \qquad p_2 \circ \gamma \sim p_2 \circ \beta \text{ tramite } p_2 \circ F$$

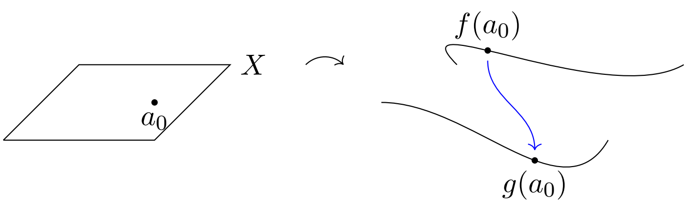
□

Proposizione 9.2.7

Siano $f, g : X \to Y$ continue con $f \sim g$ tramite omotopia F e sia $\gamma : [0,1] \to Y$ definito da $\gamma(s) = F(a_0, s)$, allora:

$$\gamma_\sharp \circ f_* = g_*$$

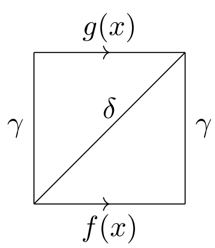
Graficamente abbiamo che:



Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\forall \alpha \in \pi_1(X, a_0)$ che:

$$[g(\alpha)] = [i(\gamma) * f(\alpha) * \gamma] \qquad \Leftrightarrow \qquad [\gamma \circ g(\alpha)] = [f(\alpha) \circ \gamma]$$

Consideriamo $G : [0,1] \times [0,1] \to Y$ tale che $(t, s) \mapsto F(\alpha(t), s)$. Abbiamo allora che:



Quindi abbiamo che:

$$G(t,0)=f(\alpha(t)) \qquad G(t,1)=g(\alpha(t)) \qquad G(0,s)=\gamma(s) \qquad G(1,s)=\gamma(s)$$

Quindi per il lemma 9.1.9 abbiamo:

$$f(\alpha)*\gamma=\delta=\gamma*g(\alpha)$$

Quindi abbiamo sostanzialmente finito □

Corollario 9.2.8

Se $f\sim id_X$, allora f_* è un isomorfismo.

9.3 Teorema di Van Kampen

Lemma 9.3.1

Siano $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$ in ***Set***. Se $g\circ f$ è invertibile e $h\circ g$ è iniettiva, allora f è invertibie.

Teorema 9.3.2

Se $f:X\to Y$ è un'equivalenza omotopica, allora f_* è un isomorfismo

Dimostrazione. Sia $g:Y\to X$ tale che $f\circ g\sim id_Y$ e $g\circ f\sim id_X$. Allora abbiamo che $\forall x_0\in X$:

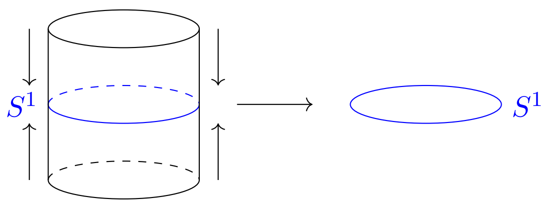
$$\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{f_*}\pi_1(Y,f(x_0))\xrightarrow{g_*}\pi_1(X,g\circ f(x_0))\xrightarrow{f_*}\pi_1(Y,f\circ g\circ f(x_0))$$

Sappiamo che $f\circ g\sim id_Y$, allora $f_*\circ g_*=(f\circ g)_*$ è invertibile. Sappiamo anche che $g\circ f\sim id_X$, quindi $g_*\circ f_*=(f\circ g)_*$ è invertibile. Quindi per il lemma 9.3.1, abbiamo che f_* è invertibile, quindi è un isomorfismo. □

Esempio 130. *Se X è invertibile, allora $\forall x_0\in X$ si ha che:*

$$\pi_1(X,x_0)=\{1_{x_0}\}$$

Esempio 131. π_1*(Cilindro)* $\cong\pi_1(S^1)$. *Infatti:*



Sostanzialmente quello che facciamo è retratto per deformazione su S^1 tramite:

$$R((x,y),t)=(x,ty) \qquad \text{con } x\in S^1, y\in I$$

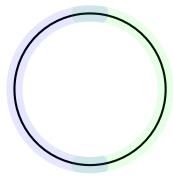
Esempio 132. $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\},x_0)\cong\pi_1(S^n,x_0)$, *per $n\geq 1$. La scelta di x_0 è del tutto ininfluente, in quanto abbiamo che i due insiemi sono connessi per archi. Sappiamo effettivamente che i due gruppi sono isomorfi, ma non sappiamo quale sia tale gruppo*

Esempio 133. *Prendiamo la retta dei numeri reali $\mathbb{R}$, questa può essere scritta come unione di due intervalli aperti non disgiunti del tipo:*

$$\mathbb{R} = (-\infty, 1) \cup (-1, +\infty)$$

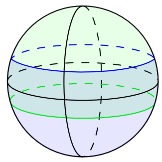
Questi due aperti hanno intersezione $(-1, 1)$. Sappiamo inoltre che sono convessi, quindi connessi per archi e la stessa cosa vale anche per la loro intersezione. Quindi possiamo dedurre (cosa che già sapevamo) che $\mathbb{R}$ è convesso, quindi $\pi_1(\mathbb{R}, x_0)$ è banale

Esempio 134. *Facciamo una cosa simile però con una circonferenza e prendiamo due aperti nel seguente modo:*



Gli aperti sono i due insiemi colorati. Notiamo che sono entrambi connessi per archi ma la loro intersezione non lo è. Quindi sicuramente $\pi_1(S^1)$ non è banale

Esempio 135. *Prendiamo invece una sfera di dimensioni superiori (3 nel disegno) e prendiamo gli aperti nel seguente modo:*



Anche qui come prima, prendiamo le due parti colorate. Entrambe sono semplicemente connesse, quindi con gruppo fondamentale banale. Notiamo però che vale:

$$\pi_1(\textit{Intersezione}) \cong S^{n-1}$$

Lemma 9.3.3

Sia $\alpha : [0, 1] \to X$ continua e sia $\{A_i\}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un numero $n \in \mathbb{N}$ tale che $\forall j \in \{0, ..., n-1\}$ si ha che:

$$\alpha|_{[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]} \text{ sia tutto contenuto in uno degli aperti}$$

Esempio 136. $\pi_1((S^1)^n) \cong \pi_1(S^1)^n$. *Da questo possiamo vedere subito come un toro non sia isomorfo ad un cilindro, ma:*

$$\pi_1(\textit{Toro}) \cong \pi_1(S^1)^2$$

Lemma 9.3.4

Sia α un cammino e $t_0 \in [0, 1]$. Dato $\alpha_1(t) = \alpha(t_0 t)$ e $\alpha_2(t) = \alpha(t_0 + (1-t)t_0)$, abbiamo allora che:

$$\alpha \sim \alpha_1 * \alpha_2$$

Teorema 9.3.5: di Van Kampen (Prima parte)

Sia X uno spazio topologico e siano $A, B \subseteq X$ aperti tali che:

- $A \cup B = X$
- $\{A, B, A \cap B\}$ siano connessi per archi

Siano $x_0 \in A \cap B$ e siano $i_A : A \to X$ inclusione e $i_B : B \to X$ inclusione, allora:

$$\pi_1(X, x_0) = \langle i_{A*}(\pi_1(A, x_0)), i_{B*}(\pi_1(B, x_0)) \rangle$$

Cioè:

1. Ogni laccio in X centrato in x_0 è omotopo alla giunzione di infiniti lacci o in A o in B.
2. La funzione $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \xrightarrow{(i_{A*}, i_{B*})} \pi_1(X, x_0)$ è una suriezione

Corollario 9.3.6

Sia $X = A \cup B$ tali che $A, B, A \cap B$ siano connessi per archi e A e B semplicemente connessi. Allora X è semplicemente connesso

Lo si potrebbe dimostrare osservando che $\pi_1(X)$ è banale perché prodotto libero di $\pi_1(A)$ e di $\pi_1(B)$.

Corollario 9.3.7

S^n con $n > 1$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono semplicemente connessi, ma non contraibili

Dimostrazione. $\boxed{S^n}$ Consideriamo $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Questo lo possiamo scrivere come unione di due aperti non disgiunti come:

$$A = \left\{ x \in S^n : x_{n+1} < \frac{1}{2} \right\} \qquad \text{e} \qquad B = \left\{ x \in S^n : x_{n+1} > -\frac{1}{2} \right\}$$

Abbiamo che A e B sono connessi per archi (ma anche contraibili). Abbiamo poi che $A \cap B$ è connesso per archi se $n > 1$. Quindi per il corollario precedente abbiamo che A e B sono semplicemente connessi, quindi anche X lo è.

$\boxed{\mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$. Quest'insieme può essere scritto come:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = U_0 \cup \cdots \cup U_n$$

Dove abbiamo che $U_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] : x_i \neq 0\}$ sono le carte affini. Consideriamo poi $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ omeomorfismi definiti da:

$$[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Abbiamo che ogni U_i è semplicemente connesso.
Infatti, consideriamo prima $U_0 \cap U_1$. La sua immagine attraverso φ_0 è:

$$\{(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C} : z_1 \neq 0\} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n-1}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora avremmo che $U_0 \cap U_1$ non è connesso per archi.
Per il teorema di Van Kampen 9.3.5, abbiamo che $U_0 \cup U_1$ è semplicemente connesso.
Poi continuiamo e consideriamo $U_0 \cup U_1$ e U_2 aperti e semplicemente connessi. Allora abbiamo che:

$$(U_0 \cup U_1) \cap U_2 = (U_0 \cap U_2) \cup (U_1 \cap U_2)$$

e abbiamo che:

$$\varphi_0(U_0 \cap U_1 \cap U_2) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$$

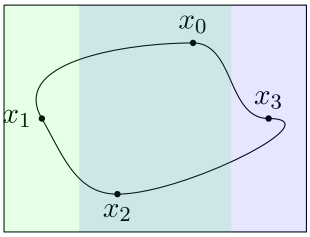
Quindi sempre per Van Kampen abbiamo che $U_0 \cap U_1 \cap U_2$ è semplicemente connesso.
Quindi iterando il numero necessario di volte, abbiamo che $\mathbb{P}^(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso □

Dimostriamo ora il teorema di Van Vampen

Dimostrazione del Teorema 9.3.5. Sia $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Vogliamo mostrare che:

$$\alpha \sim \gamma_0 * \gamma_1 * \cdots * \gamma_{n-1}$$

con $\gamma_i \in \Omega(A, x_0, x_0)$ oppure $\gamma_i \in \Omega(B, x_0, x_0)$. Graficamente abbiamo che:



Per il lemma 9.3.3, sappiamo che esiste n tale che $\forall u \in \{0, ..., n-1\}$:

$$Im\left(\alpha|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}\right) \subseteq A \qquad \text{oppure} \qquad Im\left(\alpha|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}\right) \subseteq B$$

Siccome $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi, esistono dei cammini β_i tra x_0 e x_i con β_i contenuto in A se $x_i \in A$, in B se $x_i \in B$, oppure in $A \cap B$ se $x_i \in A \cap B$. Pongo:

$$\gamma_0 = \alpha_0 * i(\beta_1) \quad \gamma_1 = \beta_1 * \alpha_1 * i(\beta_2) \quad \cdots \quad \gamma_{n-2} = \beta_{n-2} * \alpha_{n-2} * i(\beta_{n-1}) \quad \gamma_{n-1} = \beta_{n-1} * \alpha_{n-1}$$

Allora segue che:

$$\gamma_0 * \gamma_1 * \cdots * \gamma_{n-1} \sim \alpha_0 * \alpha_1 * \cdots * \alpha_{n-1} \sim \alpha$$

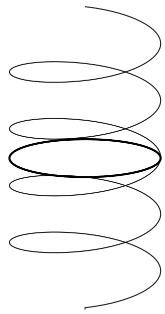
Quindi per il lemma 9.3.4 (iterato diverse volte) □

9.4 Sollevamento

Teorema 9.4.1

$\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$ con $\pi_1(S^1, 1) = \{\gamma_n\}$ e $\gamma_n : [0,1] \to S^1$, definita come $t \mapsto e^{2\pi int}$

Graficamente può essere vista come



Consideriamo in poi consideriamo la funzione e come:

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\to S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2\pi i t} \end{aligned}$$

Lemma 9.4.2

Sia $U \subseteq S^1$ aperto connesso con $U \neq S^1$. Allora esiste $V \subseteq \mathbb{R}$ aperto tale che:

1. $e|_V : V \to U$ è un omeomorfismo
2. Vale l'uguaglianza:
$$e^{-1}(U) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} n + V$$
Dove $n + V = \{x + n : x \in V\}$

Dimostrazione. $\boxed{1}$ A meno di una rotazione di S^1 (che comunque sono omeomorfismi tra S^1), posso supporre che $U \subseteq S^1 \setminus \{1\}$.
Sia adesso $V = e^{-1}(U) \cap [0,1] = e^{-1}(U) \cap (0,1)$ (che è un aperto). Consideriamo adesso $e|_V : V \to U$. Abbiamo che questa è una funzione aperta (in quanto e è aperta e vale $W \subseteq V$ aperto $\Leftrightarrow W \subseteq \mathbb{R}$ aperto).
Possiamo dire che $e|_V$ è iniettiva in quanto lo è $(e|_{(0,1)})$, è suriettiva in quanto $(0,1]$ è un insieme di rappresentanti dell'azione data da $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}$.
Quindi $e|_V$ è un omeomorfismo.
$\boxed{2}$ Abbiamo che vale:

$$e^{-1}(V) \cap [n, n+1] = e^{-1}(V) \cap (n, n+1) = n + V$$

Inoltre $e|_{n+V} : n + V \to U$ è ancora un omeomorfismo (lo si dimostra come la funzione precedente lo era). $\square$

Proposizione 9.4.3

Ogni funzione $f : [0,1] \to S^1$ continua ha un sollevamento:

$$\tilde{f} : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad e \circ \tilde{f} = f$$

Inoltre fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ con $e(x_0) = f(0)$, esiste un unico sollevamento di f tale che:

$$f(0) = x_0$$

Con un diagramma abbiamo che:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Consideriamo $U_0 = S^1 \setminus \{1\}$ e $U_1 = S^1 \setminus \{-1\}$, allora abbiamo che:

$$e^{-1}(U_0) = \coprod_{n\ in\mathbb{Z}} (n, n+1) \qquad \text{e} \qquad e^{-1}(U_1) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \left(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right)$$

Come nel teorema di Van Kampen, $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che:

$$f|_{[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}]} \subseteq U_0 \text{ oppure } U_1$$

Definiamo quindi:

$$y_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Definiamo allora con $\tilde{f}$ una funzione tale che:

- $\tilde{f}(0) = x_0$ con x_0 punto tale che $e(x_0) = f(0)$
- $e(x_0) = y_0$ e $\exists j \in \{0, 1\}$ tale che $y_0 \in U_j$ e
$$f\left(\left[0, \frac{1}{m}\right]\right) \subseteq U_j$$

Sia ora V_0 la componente connessa di $e^{-1}(U_j)$ contenente x_0, allora abbiamo che:

$$e|_{V_0} : V_0 \to U_j \text{ è omeomorfismo}$$

Definiamo allora $\tilde{f}(t) = e|_{V_0^1} \circ f(t)$ per $t \in [0, \frac{1}{m}]$. Definiamo allora $x_1 = \tilde{f}(\frac{1}{m})$, da cui segue in maniera naturale che $e(x_1) = f(\frac{1}{m}) = y_1$.
Iterando otteniamo un sollevamento:

$$\tilde{f} : \left[0, \frac{1}{m}\right] \to \mathbb{R} \qquad \text{di} \qquad f : \left[0, \frac{1}{m}\right] \to S^1$$

tale che:

$$\tilde{f}(0) = x_0 \qquad e(x_0) = y_0 \qquad f\left(\frac{1}{m}\right) = x_i \qquad e(x_i) = y_i$$

Abbiamo inoltre che per $j \in \{0, 1\}$ si ha che:

$$f\left(\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right) \subseteq U_j$$

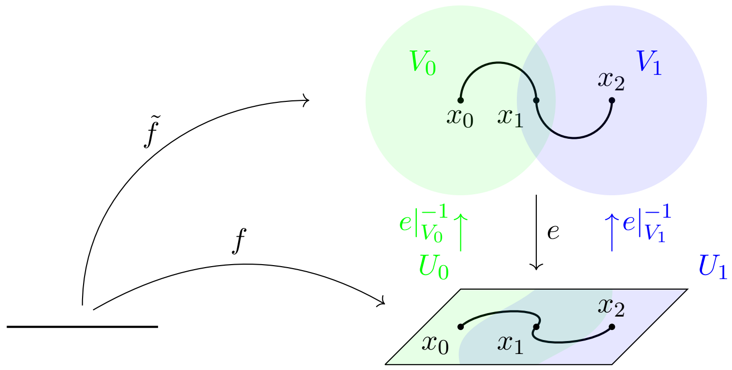
Definiamo allora, come fatto in precedenza, V_i come la componente connessa $e^{-1}(U_j)$ contenente x_i e definiamo:

$$\tilde{f}(t) = (e|_{V_i})^{-1} \circ f(t) \qquad \text{per } t \in \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right]$$

In questo modo otteniamo una $\vec{f}$ definita a tratti e continua tale che $\tilde{f}$ sollevi f.

L'unicità di tale sollevamento segue dalla definizione di $\tilde{f}$ stessa. In particolare segue dal fatto che l'unica scelta fatta è la scelta di $f(0) = x_0$ □

Graficamente quello che abbiamo fatto è:



Esempio 137. *Solleviamo γ_n definita come:*

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0,1] &\to S^1 \\ t &\mapsto e^{2\pi i n t}\end{aligned}$$

Spezziamolo in 4 pezzi in modo tale che:

$$\gamma\left[\frac{i}{4n}, \frac{i+1}{4n}\right] \subseteq U_j \qquad j \in \{0,1\}$$

Fissiamo quindi $0 \in \mathbb{R}$ con $e(0) = \gamma_n(0)$. Allora abbiamo che:

$$\gamma_n\left[0, \frac{1}{4n}\right] \subseteq U_1 \qquad \Rightarrow \qquad V_0\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Definiamo allora

$$\tilde{\gamma}_n(t) = e|_{V_0}^{-1} \circ \gamma_n(t) = nt \qquad t \in \left[0, \frac{1}{4n}\right]$$

Infatti:

$$e(nt) = e^{2\pi i n t}$$

Iterando, definiamo il sollevamento $\tilde{\gamma}_n(t) = nt$

Proposizione 9.4.4

Ogni $F : [0,1]^2 \to S^1$ ammette un sollevamento $\tilde{F} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che:

$$e \circ \tilde{F} = F$$

Inoltre, dato $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $e(x_0) = F(0,0)$, esiste un unico sollevamento $\tilde{F}$ di F tale che:

$$\tilde{F}(0,0) = x_0$$

Corollario 9.4.5

Siano $\alpha, \beta \in \Omega(S^1, 1, 1)$ tali che $\alpha \sim \beta$. Siano $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ due sollevamenti tali che $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$, allora:

$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$$

Dimostrazione. Sia F omotopia tra α e β, quindi $F : [0,1]^2 \to S^1$ tale che:

$$F(t,0) = \alpha(0) \qquad F(t,1) = \beta(t) \qquad F(0,s) = 1 \qquad F(1,s) = 1$$

Per la proposizione precedente abbiamo che esiste un unico sollevamento $\tilde{F} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ di F tale che:

$$\tilde{F}(0,0) = \tilde{\alpha}(0)\tilde{\beta}(0)$$

Abbiamo anche che:

$$e \circ \tilde{F}(t,0) = F(t,0) = \alpha(t)$$

Da questo segue che $t \mapsto \tilde{F}(t,0)$ definisce un sollevamento di α tale che valga $\tilde{\alpha}(0)$ per $t = 0$. Dall'unicità del sollevamento segue anche che:

$$\tilde{F}(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$$

D'altra parte abbiamo che:

$$e \circ \tilde{F}(0,s) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{F}(0,s) \subseteq e^{-1}(\{1\})\mathbb{Z}$$

$\tilde{F}$ definisce una funzione continua $s \mapsto \tilde{F}(0,s) \in \mathbb{Z}$ che quindi è costante (in quanto $[0,1]$ connesso). Abbiamo inoltre che:

$$\tilde{F}(0,1) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$$

Ma per l'unicità del sollevamento abbiamo che:

$$\tilde{F}(t,1) = \tilde{\beta}(t)$$

Quindi, analogamente a quanto fatto prima abbiamo che $\tilde{F}(1,s)$ è costante, quindi $\tilde{F}(1,s) = \tilde{\alpha}(1)$, da questo segue che:

$$F(1,1) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$$

Per cui $\tilde{F}$ è un'omotopia tra $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ □

Definizione 9.4.6: Grado di α

Dato $\alpha \in \Omega(S^1, 1, 1)$ e $\tilde{\alpha}$ suo sollevamento con $\tilde{\alpha}(0) = 0$, definiamo il **Grado di** α come:

$$\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$$

Dimostriamo ora il teorema 9.4.1

Dimostrazione del Teorema 9.4.1. Definiamo φ come:

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(S^1, 1) &\to \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\mapsto \deg(\alpha) \end{aligned}$$

Dal corollario precedente abbiamo che φ è ben definita (in quanto cammini omotopi hanno lo stesso grado). Cerchiamo allora di capire come calcolare:

$$\varphi(\alpha * \beta) = \widetilde{\alpha * \beta}$$

Noi sappiamo già di partenza come calcolare $\varphi(\alpha)$, infatti:

$$\varphi(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \widetilde{\alpha * \beta}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Sappiamo anche che:

$$\varphi(\beta) = \tilde{\beta}(1) = \widetilde{\alpha * \beta}(1) - \widetilde{\alpha * \beta}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Da cui segue direttamente che:

$$\varphi(\alpha * \beta) = \widetilde{\alpha * \beta}(1) = \widetilde{\alpha * \beta}(1) - \widetilde{\alpha * \beta}\left(\frac{1}{2}\right) + \widetilde{\alpha * \beta}\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi(\beta) + \varphi(\alpha)$$

Quindi è un omomorfismo di Gruppi.

φ è suriettiva, in quanto $\deg(\gamma_n) = \gamma_n(1) = n$, da cui $\varphi(\gamma_n) = n$.

φ è iniettiva. Infatti, sia α cammino con $\deg(\alpha) = 0$, allora abbiamo che $\tilde{\alpha}(1) = 0$, per cui abbiamo che $\tilde{\alpha} \sim 1_0$ tramite un'omotopia $\tilde{F}$. Ma allora $e \circ \tilde{F}$ è omotopia tra α e $e \circ 1_0 = 1_1$ (1_1 è il cammino costante su S^1). Ma allora segue che $\varphi(\alpha) = 0$ se e solo se $[\alpha] = [1_1]$. Quindi è iniettiva.

Quindi abbiamo dimostrato che è un isomorfismo di gruppi □

Abbiamo quindi che:

$$\begin{tikzcd}
(A \cap B, x_0) \arrow[r, hook, "j_2"] \arrow[d, hook, "j_1"] & (B, x_0) \arrow[d, hook, "i_2"] \\
(A, x_0) \arrow[r, hook, "i_1"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Attraverso il funtore π_1

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A \cap B, x_0) \arrow[r, "j_{2*}"] \arrow[d, "j_{1*}"] & \pi_1(B, x_0) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "i_{2*}"] & \\
\pi_1(A, x_0) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "i_{1*}"] & \pi_1(A, x_0) \star \pi_1(B, x_0) \arrow[dr, "k"] & \\
& & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Dove non ci sono le frecce abbiamo le funzioni canoniche del prodotto libero di gruppi, mentre la funzione k è la stessa della prima forma del teorema di Van Kampen 9.3.5

Adesso possiamo enunciare la seconda parte del teorema di Van Kampen

Teorema 9.4.7: di Van Kampen (Seconda Parte)

Siano $A, B, A \cap B$ aperti e connessi per archi di X tali che $A \cap B = X$. Il diagramma precedente è commutativo e la funzione k è suriettiva. Inoltre:

$$Ker(k) = N(j_{1*}(\gamma) * (j_{2*}(\gamma))^{-1}) \qquad \gamma \in \pi_1(A \cap B, x_0)$$

Dove la lettera N sta ad indicare il "sottogruppo normale generato da"

Osservazione. La relazione $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ ci dice che $i_{1*} \circ j_{1*} = i_{2*} \circ j_{2*}$ e la commutatività del diagramma di dice che:

$$k \circ j_{1*}(\gamma) = i_{1*} \circ j_{1*}(\gamma) = i_{2*} \circ j_{2*}(\gamma) = k \circ j_{2*}(\gamma)$$

Inoltre:

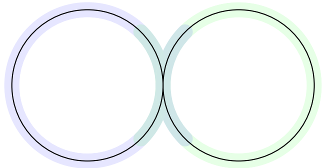
$$k \circ j_{1*}(\gamma) = k \circ j_{2*}(\gamma) \qquad \Rightarrow \qquad k(j_{1*}(\gamma) * (j_{2*}(\gamma))^{-1}) = 1_{\pi_1(x)}$$

Corollario 9.4.8

Se ho $A, B, A \cap B$ come nel teorema e $\pi_1(A \cap B, x_0) \sim \{1\}$, allora:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(B, x_0)$$

Esempio 138 (Gruppo Fondamentale non Abeliano)**.** *Andiamo a studiare il gruppo fondamentale di un bouquet di circonferenze $S^1 \times S^1$. Non possiamo prendere solamente le due circonferenze, in quanto queste sono dei chiusi, quindi possiamo prendere un po' di più delle singole circonferenze.*



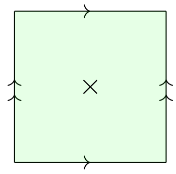
Abbiamo che $A \sim S^1$, $B \sim S^1$ e $A \cap B$ è semplicemente connesso. Per cui abbiamo che:

$$\pi_1(S^1 \times S^1, p) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$$

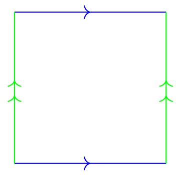
Così, in maniera del tutto analoga, abbiamo che:

$$\pi_1(\underbrace{S^1 \times \cdots S^1}_{n}) \cong \mathbb{Z}^{\star n}$$

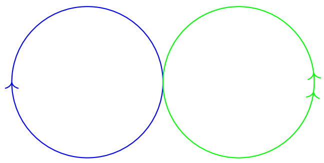
Esempio 139. *Vediamo un toro con un buco $S^1 \times S^1 \setminus \{p\}$. Sfruttando rotazioni, possiamo rappresentarlo come:*



Cioè possiamo portare il punto tolto in posizione centrale. Sfruttando poi le retrazioni per deformazioni, possiamo portarlo a:



Che può essere rappresentato come un bouquet di circonferenze:



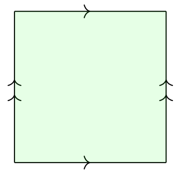
Da cui segue che:

$$\pi_1(S^1 \times S^1 \setminus \{p\}, q) \cong \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$$

Esempio 140 (π_1 del Toro con Van Kampen)**.** *Sia quindi X un toro, cioè:*

$$X = S^1 \times S^1 \cong [0,1]^2/\sim$$

Proprio come nell'esempio precedente possiamo rappresentarlo come



Cerchiamo due aperti A e B come nel teorema. Allora possiamo prendere:

$$A = [0,1]^2/\sim \setminus \left\{ \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \qquad e \qquad B = (0,1)^2/\sim \cong (0,1)^2$$

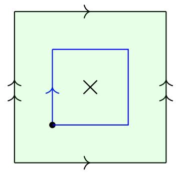
In particolare abbiamo che vale l'isomorfismo per B in quanto può essere vista come un quoziente di un'azione di gruppo (e π è aperta). In questo modo abbiamo che l'intersezione è:

$$A \cap B = (0,1)^2/\sim \setminus \left\{ \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\} \cong (0,1)^2/\sim \setminus \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

Prendiamo allora un punto appartenente all'intersezione, per esempio $x_0 = \{[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]\}$ e calcoliamo i gruppi fondamentali dei sottospazi topologici. Sappiamo che B è concesso, quindi vale:

$$\pi_1(B, x_0) \cong \{1\}$$

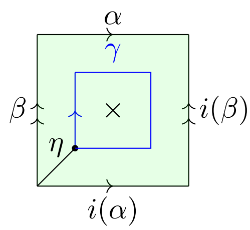
In $A \cap B$ possiamo prendere un laccio γ nel seguente modo



Tramite delle retrazioni per deformazioni, abbiamo che possiamo portare tutto $A \cap B$ nel laccio γ, che è omeomorfo ad S^1, per cui:

$$\pi_1(A \cap B, x_0) = \mathbb{Z}\gamma \qquad \textit{Sono i multipli di } \gamma$$

Per quanto visto nell'esempio precedente abbiamo che $\pi_1(A, x_0) = \mathbb{Z}\alpha \star \mathbb{Z}\beta$ dove α e β sono i lacci rappresentati dai "lati del quadrato". Tuttavia questi non passano per x_0, quindi non possono essere usati per il gruppo fondamentale. Cerchiamo quindi un cammino η che colleghi $[0,0]$ e x_0.



Possiamo quindi definire:

$$\alpha' = \eta * \alpha * i(\eta) = i(\eta)_\sharp(\alpha) \qquad e \qquad \beta' = \eta * \beta * i(\eta) = i(\eta)_\sharp(\beta)$$

Quindi:

$$\pi_1(A, x_0) = \mathbb{Z}\alpha' \star \mathbb{Z}\beta'$$

Quindi per il teorema di Van Kampen 9.4.7 abbiamo che:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\mathbb{Z}i_{1*}(\alpha') \star \mathbb{Z}i_{1*}(\beta')}{N(j_{1*}(\gamma^n) * j_{2*}(\gamma^{-n}))_{n\in\mathbb{Z}}}$$

Cerchiamo di capire come sono fatti i generatori del nucleo. Ricordiamo che γ è un cammino che sta nell'intersezione, quindi, rispetto al diagramma commutativo prima del teorema 9.4 abbiamo che $j_{1*}(\gamma)$ sta in $\pi_1(A, x_0)$ e $j_{2*}(\gamma)$ sta in $\pi_1(B, x_0)$. Necessariamente abbiamo che $j_{2*} = 1_{\pi_1(B,x_0)}$ (è l'unica scelta possibile). Per $j_{1*}(\gamma)$ possiamo notare che con un'omotopia possiamo schiacciare γ al bordo del quadrato, cioè:

$$i(\eta) * j_{1*}(\gamma) * \eta = \beta * \alpha * \beta^{-1} * \alpha^{-1}$$

Da cui segue che:

$$j_{1*} = \beta' * \alpha' * \beta'^{-1} * \alpha'^{-1}$$

Per cui abbiamo che il gruppo fondamentale di X è diventato:

$$\pi_1(X, x_0) = \frac{\mathbb{Z}i_{1*}(\alpha') \star \mathbb{Z}i_{1*}(\beta')}{N(\beta' * \alpha' * \beta'^{-1} * \alpha'^{-1})}$$

Cerchiamo di capire ancora meglio. Sappiamo che $\beta' * \alpha' * \beta'^{-1} * \alpha'^{-1}$ è un elemento di $\mathbb{Z}\alpha' \star \mathbb{Z}\beta'$, quindi, stando al diagramma commutativo prima di 9.4.7, abbiamo che $k(\beta' * \alpha' * \beta'^{-1} * \alpha'^{-1}) \in \pi_1(X, x_0)$. Possiamo dire di più. Visto che stiamo quozientando possiamo dire che:

$$k(\beta' * \alpha' * \beta'^{-1} * \alpha'^{-1}) = 1_{\pi_1(X,x_0)}$$

Cioè abbiamo la condizione che:

$$k(\beta' * \alpha') = k(\alpha' * \beta')$$

Questa è la condizione che ci da la commutatività, quindi:

$$\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}i_{1*}(\alpha') \times \mathbb{Z}i_{1*}(\beta')$$

10 Prodotti di Spazi Topologici

10.1 Prodotti di Spazi Topologici

Definizione 10.1.1: Prodotto di Insiemi

Dati $\{X_i\}_{i\in I}$ famiglia di insiemi definiamo il **Prodotto di Insiemi** con:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{I\text{-uple } x = (x_1, ..., x_I : x_i \in X_i, \forall i \in I)\}$$

x_i è detta la **i-esima componente** di x.

Esempio 141. *Se esiste un indice $i_0 \in I$ tale che $X_{i_0} = \varnothing$, allora:*

$$\prod_{i\in I} X_i = \varnothing$$

Se per ogni $i \in I$ abbiamo che $X_i = X$, allora possiamo denotare:

$$\prod_{i\in I} = X^I$$

Notiamo però che $X^I = \{f : I \to X \text{ funzioni}\} = \boldsymbol{Mor_{Set}}(I, X)$

Esempio 142. *Possiamo indicare con $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come l'insieme delle successioni in $\mathbb{R}$*

Definizione 10.1.2: Prodotto di Oggetti

Data una categoria $\mathcal{C}$ e una famiglia di oggetti in $\mathcal{C}$ $\{X_i\}_{i\in I}$, definiamo il **Prodotto degli** $X_i, i \in I$ in $\mathcal{C}$ come un oggetto P con una collezione $\{p_i\}_{i\in I}$ di morfismi $p_i : P \to X_i$ tale che $\forall Z \in \boldsymbol{Ob}(\mathcal{C})$ e $\forall$ famiglie $\{f_i\}_{i\in I}$ con $f_i : Z \to X_i$

$$\exists! f_p : Z \to P : p_i \circ f_p = f_i, \forall i \in I$$

Cioè vale:

$$\begin{tikzcd}
 & & & Z \arrow[dd, bend right] \arrow[ddlll, bend right] \arrow[ddl] \arrow[ddr] \arrow[ddrrr, bend left] \arrow[d, blue, "f_p"] & & & \\
 & & & P \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[drrr] & & & \\
X_1 & \cdots & X_{i-1} & X_i & X_{i+1} & \cdots & X_I
\end{tikzcd}$$

Esempio 143. $\prod X_i$ *è un prodotto in* $\boldsymbol{Set}$ *e p_i associa una I-upla alla i-esima coordinata*

Definizione 10.1.3: Prebase

Dato $(X, \mathcal{T})$ spazio topologico, un insieme $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ è detto **Prebase** se:

$$\mathcal{B} = \{\text{Intersezioni finite di elementi di } \mathcal{P}\} \text{ è una base}$$

Definizione 10.1.4: Prebase Canonica

Data $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ famiglia di spazi topologici, definiamo la **Prebase Canonica** di $X = \prod X_i$ come:

$$\mathcal{P}_c = \{p_i^{-1}(U_j) : p_i : X \to X_i, U_j \in \mathcal{T}_i\}$$

Esempio 144. *Se $U = \{1, 2\}$, allora abbiamo che la prebase canonica è:*

$$\mathcal{P}_c = \{p_1^{-1}(U), p_2^{-1}(V) : U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\} = \{U \times X_2 : U \in \mathcal{T}_1\} \cup \{X_1 \times V : V \in \mathcal{T}_2\}$$

Abbiamo inoltre che:

$$\{\textit{Le intersezioni finite in } \mathcal{P}_c\} = \{U \times V : U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\} = \mathcal{B}_c$$

Definizione 10.1.5: Base Canonica del Prodotto

Definiamo $\mathcal{B}_c$ come la **Base Canonica della Topologia Prodotto** come le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}_c$, cioè:

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \prod_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{T}_i, U_i \neq X_i \text{ per al più un numero finito di } i \right\}$$

Proposizione 10.1.6

$\mathcal{B}_c$ è la base di una topologia di $X = \prod X_i$ detta **Topologia Prodotto** e vale che $\forall Z \to X$ con Z spazio topologico si ha che:

$$f \text{ è continua} \quad \Leftrightarrow \quad p_i \circ f \text{ è continua per } \forall i \in I$$

Inoltre è la topologia meno fine che renda le p_i continue

Dimostrazione. Applichiamo il teorema della Base 1.3.2:

1. $\forall i \in I, p_i^{-1}(X_i) \in \mathcal{B}_c$ e $p_i^{-1}(X_i) = X$, per cui abbiamo che:

$$\bigcup_{A\in\mathcal{B}_c} A = X$$

2. È immediato in quanto $\forall A, B \in \mathcal{B}_c$ si ha che $A \cap B \in \mathcal{B}_c$, quindi $\mathcal{B}_c$ è una topologia.

Inoltre questa è la meno fine che rende le proiezioni p_i continue per la definizione di prebase. L'ultimo punto è analogo al caso finito □

Esempio 145. *Sia $\{(X_i, \mathcal{T}_{GR})\}_{i\in I}$, allora abbiamo che $\prod X_i$ ha la topologia grossolana*

Esempio 146. *Sia $\{(X_i, \mathcal{T}_D)\}_{i\in I}$ con $|I = +\infty|$, allora $\prod X_i$ ha una topologia meno fine di quella discreta (infatti posso scegliere insiemi arbitrari solo su un numero finito di indici). Abbiamo inoltre che i singoletti non sono aperti, in quanto dovrei fare intersezioni infinite.*

Esempio 147 (Topologia Finito Aperta)**.** *Siano* (Y, d) *spazio metrico e* $(X, \mathcal{T})$ *spazio topologico e sia* $\boldsymbol{Mor_{Set}}(X, Y) = Y^X$ *con topologia prodotto. Allora questo ha la topologia della* ***Convergenza Puntuale*** *con prebase data da:*

$$p(s, U) = \{f : X \to Y : f(s) \in U, s \in X, U \subseteq Y \text{ aperto}\}$$

Ma abbiamo che $p(s, U) = p_s^{-1}(U)$

Se nell'esempio precedente avessimo avuto un compatto al posto di un singoletto, avremmo avuto che la topologia si sarebbe chiamata **Compatto Aperta**

Teorema 10.1.7: di Alexander

Uno spazio topologico è compatto se e solo se da ogni ricoprimento di una prebase, si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Teorema 10.1.8: di Tichonov

Un prodotto di spazi topologici compatti è compatto.

Dimostrazione. Siano $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ i fattori e sia $X = \prod X_i$ il prodotto. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di elementi di $\mathcal{P}_c$. Allora lo possiamo suddividere in componenti:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$$

Dove $\mathcal{A}_i$ contiene tutti e i soli elementi di $\mathcal{A}$ che sono preimmagine di un aperto di X_i. Allora possiamo scrivere $\mathcal{A}_i$ come:

$$\mathcal{A}_i = \{p_i^{-1}(U_{i,j}) : U_{i,j} \in \mathcal{T}_i, j \in J_i\}$$

Definiamo allora C_i come:

$$C_i = X_i \setminus \left(\bigcup_{j \in J_i} \right) U_{i,j}$$

Supponiamo per assurdo che nessun C_i sia vuoto, allora abbiamo che:

$$C = \prod_{i \in I} C_i \subset X \text{ è un insieme non vuoto}$$

Quindi sia $x \in C$, allora abbiamo che $\forall i \in I, \forall j \in J_i$, si ha che:

$$x \notin p^{-1}(U_{i,j}) \qquad \Rightarrow \qquad x \notin \bigcup_{i \in I, j \in J_i} p_i^{-1}(U_{i,j})$$

Allora abbiamo che $\mathcal{A}$ non è un ricoprimento, assurdo, in quanto avevamo che lo era per Ipotesi. Esiste quindi necessariamente $i_o \in I$ tale che $C_{i_0} = \varnothing$, per cui $\{U_{i_0,j}\}_{j \in J_{i_0}}$ è un ricoprimento aperto di X_{i_0}. Ma abbiamo che X è compatto, quindi esiste un sottoricoprimento finito $U_{1_0,j_1}, ..., U_{i_0,j_n}$ tale che:

$$p_{i_0}^{-1}(U_{i_0,j_1}), ..., p_{i_0}^{-1}(U_{i_0,j_n}) \text{ è un sottoricoprimento aperto di } \mathcal{A}$$

Quindi per il teorema precedente di Alexander abbiamo che X è compatto □

Teorema 10.1.9

Un prodotto di Spazi Topologici connessi è connesso

Dimostrazione. Siano $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ spazi topologici e sia $X = \prod X_i$. Sia $x_0 \in X$ e definiamo:

$$F(x_0) = \{y \in X : x_0 \text{ e } y \text{ abbiano un numero finito di coordinate diverse}\}$$

Vogliamo mostrare che:

1. $F(x_0)$ è connesso
2. $F(x_0)$ è denso

$\boxed{1}$ Sia $J \subseteq I$ finito e consideriamo la funzione:

$$h_J : \prod_{j\in J} X_j \to X \qquad h_J(y)_i = \begin{cases} y_i & \text{se } i \in J \\ (x_0)_i & \text{se } i \notin J \end{cases}$$

In ogni caso abbiamo che $h_J(y) \in F(x_0)$. Abbiamo che $h_J(y)$ è continua e che:

$$p_i \circ h_J = \begin{cases} \text{Una funzione costante se } i \notin J \\ \text{Una proiezione } \displaystyle\prod_{j\in J} X_j \to X \text{ se } j \in J \end{cases}$$

Quindi abbiamo che $Im(h_J)$ è un connesso contenuto in $F(x_0)$ ($\prod X_j$ con $j \in J$ è connesso). Abbiamo inoltre che:

$$\prod_{J\subseteq I, |J|<+\infty} h_J\left(\prod_{j\in J} X_j\right) = F(x_0)$$

Siccome poi $x_0 \in Im(h_J), \forall J$ finito, si ha che $\bigcup Im(h_J)$ è ancora connesso, per cui $F(x_0)$ è connesso.

$\boxed{2}$ Sia $U \in \mathcal{B}_c$ non vuoto, allora lo possiamo scrivere come:

$$U = \prod_{i\in J} U_i \times \prod_{i\notin J} X_i \text{ con } J \text{ insieme di indici a meno di riordinarli}$$

Sapendo che è non vuoto, abbiamo che $U_i \neq \varnothing$. Sia allora $y \in \prod X_i$ per $i \in J$, allora abbiamo che:

$$h_J(y) \in F(x_0) \cap U$$

Da questo abbiamo che $F(X_0)$ è denso in X, cioè $X = \overline{F(x_0)}$ è connesso per il lemma B 7.2.5 sulla connessione. □

Proposizione 10.1.10

Un prodotto di Spazi Topologici $T1$ o $T2$ è $T1$ o $T2$

Dimostrazione. Siano $(X_i, \mathcal{T}_i)$ spazi topologici $T1$ o $T2$ e sia $X = \prod X_i$. Siano ora $x, y \in X$ punti distinti, allora esiste $i_0 : x_{i_0} \neq y_{i_0}$.

$\boxed{T1}$ Siano U e V intorni di $p_{i_0}(x)$ e $p_{i_0}(y)$ rispettivamente, allora, essendo X_{i_0} $T1$:

$$p_{i_0}(x) \notin U \qquad p_{i_0}(y) \notin U$$

Cioè:

$$x \in p_{i_0}^{-1}(U) \quad y \in p_{i_0}^{-1}(V) \qquad x \notin p_{i_0}^{-1}(V) \quad y \notin p_{i_0}^{-1}(U)$$

Per cui X è $T1$

$\boxed{2}$ Si dimostra in maniera analoga scegliendo U e V disgiunti. □

Esempio 148. *Esistono alcuni chiusi nella topologia prodotto della forma:*

$$\prod_{i \in I} F_i \qquad F_i \subseteq X_i \text{ chiusi}$$

Infatti $p_i^{-1}(F_i)$ è chiuso per continuità di p_i e

$$\prod_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} p_i^{-1}(F_i)$$

11 Spazi Metrici

11.1 Primi passi

Definizione 11.1.1: Spazio Chiuso per Successioni

Dato (X, d) spazio metrico e $C \subseteq X$. C è detto **Chiuso per Successioni** se ogni successione di elementi in C convergente ha limite in C.

Proposizione 11.1.2

Data $\mathcal{T}_d$ topologia associata a d, C è chiuso per successioni in (X, d) se e solo se è chiuso per $\mathcal{T}_d$

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $A = X \setminus C$ e sia $x \in A$. Se non esistesse $\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A$ avrei che:

$$\forall n > 0, x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C \text{ e } x_n \to x$$

Ma questa è una successione convergente a C, quindi è assurdo
$\boxed{\Leftarrow}$ Sia x_n successione in C e sia $x = \lim_{n \to +\infty} x_n$. Se $x \notin C$, allora esiste $\varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(x) \cap C = \varnothing$$

Ma $X \setminus C$ è aperto, quindi è assurdo in quanto x_n non può tendere a C, quindi $x \in X$ $\square$

Osservazione. Abbiamo visto che una funzione tra spazi metrici è continua se e solo se lo è tra le topologie associate. Questo significa che il funtore naturale:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Metr} \to \boldsymbol{Top} \\ (X, d) \mapsto (X, \mathcal{T}_d) \\ f : (X, d) \to (Y, d) \mapsto f : (X, \mathcal{T}_d) \to (Y, \mathcal{T}_d) \end{gathered}$$

È essenzialmente suriettivo

11.2 Compattezza e Completezza

Definizione 11.2.1: Spazio Metrico Completo

Uno spazio metrico è detto **Completo** se ogni successione di Cauchy è convergente

Teorema 11.2.2

$(\mathbb{R}^n, d_\mathcal{E})$ e $(\mathbb{C}^n, d_\mathcal{E})$ sono completi

Esempio 149. $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subseteq (\mathbb{R}, d_\mathcal{E})$ *è completo (l'unica successione non banale ha limite nello spazio metrico)*

Esempio 150. $(\mathbb{Q}, d_\mathcal{E})$ *non è completo*

Osservazione. La completezza è una proprietà dello spazio metrico, <u>non</u> topologico

Esempio 151. *Abbiamo che:*

$$(\mathbb{R}, d_{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\cong} (S^1 \setminus \{N\}, d_{\mathcal{E}})$$

Però il primo è completo mentre il secondo non lo è (in quanto esistono successioni con limite il punto N)

Proposizione 11.2.3

Sia (X, d_X) spazio metrico completo e sia $Y \subseteq X$ con metrica indotta da d_X. Allora Y è completo se e solo se Y è chiuso in $(X, \mathcal{T}_d)$

Dimostrazione. $\boxed{\Leftarrow}$ Sia $\{y_n\}$ una successione di Cauchy, quindi:

$$\exists a = \lim_{n \to +\infty} y_n \in X$$

Sappiamo tuttavia che X è chiuso, quindi $a \in Y$. Quindi Y è completo

$\boxed{\Rightarrow}$ Una successione convergente è di Cauchy, quindi hanno tutte limite in Y □

Definizione 11.2.4: Compattezza per Successioni

Uno spazio metrico (X, d) è **Compatto per Successioni** se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente.

Definizione 11.2.5: Spazio Metrico Totalmente Limitato

Uno spazio metrico (X, d) è detto **Totalmente Limitato** se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, ..., x_{n_\varepsilon} \in X : X = B_\varepsilon(x_1) \cup \cdots \cup B_\varepsilon(x_{n_\varepsilon})$$

Esempio 152. *Supponiamo di avere uno spazio metrico (X, d_D) con $|X| = +\infty$, dove d_D è la **metrica discreta**, cioè $d(x, y) = 0$ se $x = y$, $d(x, y) = 1$ altrimenti. Sia $x \in X$, allora abbiamo che $X = B_2(x)$, quindi X è limitato ma non totalmente limitato, in quanto mi basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{2}$:*

$$\forall x \in X, B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$$

Avendo poi un'infinità di punti in X, non posso riempire X con un numero finito di palle

Fatto: In $\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme è limitato se e solo se è totalmente limitato

Teorema 11.2.6

Sia (X, d) spazio metrico e sia $\mathcal{T}_d$ la topologia associata a d. Allora sono equivalenti:

1. $(X, \mathcal{T}_d)$ è compatto
2. (X, d) è compatto per successioni
3. (X, d) è completo e totalmente limitato

Prima di dare la dimostrazione, diamo prima un corollario

Corollario 11.2.7: Teorema di Heine - Borel

$X \subseteq (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\mathcal{E}})$ è compatto se e solo se è chiuso in $\mathbb{R}^n$ ed è limitato

Dimostrazione. Segue dal teorema e dal fatto che essendo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio compatto di uno spazio completo è anche esso stesso completo e del fatto precedente. □

Diamo ora la dimostrazione del teorema 11.2.6

Dimostrazione. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione. Se la successione assume finiti valori, allora posso estrarre una sottosuccessione costante (quindi è necessariamente convergente).
Sia ora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successione che assume infiniti valori e distinguiamo 2 casi.
Supponiamo esista $a \in X$ tale che $\forall U$ intorno di a, $U \cap \{x_0\}$ abbia infiniti elementi. Allora posso trovare una sottosuccessione convergente data da $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con:

$$y_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Da questa condizione segue che:

$$d(y_n, y_{n+k}) < \frac{2}{n} \qquad \text{e} \qquad d(y_n, a) < \frac{1}{n}$$

Dalla prima otteniamo che la successione è di Cauchy, mentre dalla seconda otteniamo che $y_n \to a$ per $n \to +\infty$. Quindi converge.
Supponiamo (per assurdo) che non esista un elemento a come quello della prima parte del teorema, cioè:

$$\forall x \in X, \exists U_x \text{ intorno aperto tale che } U_x \cap \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ abbia finiti elementi}$$

Da allora segue che:

$$X = \bigcup_{x\in X} U_x \text{ è un ricoprimento aperto}$$

Tuttavia sappiamo che X è compatto per ipotesi, quindi esistono $z_1, ..., z_n \in X$ tali che:

$$X = U_{z_1} \cup \cdots \cup U_{z_n}$$

Da cui segue che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assume finiti valori. Ma questo è un assurdo in quanto avevamo assunto che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ assumesse infiniti valori.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Allora, sapendo che X è compatto per successioni, abbiamo che esiste una sottosuccessione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente ad un valore a. Fissiamo allora un valore $\varepsilon > 0$. Per le disuguaglianze triangolari abbiamo che:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, a)$$

Tuttavia, dal fatto che X è compatto per successioni abbiamo che:

$$\exists \overline{n} : d(y_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n > \overline{n}$$

Inoltre, sapendo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy, possiamo dire che:

$$\exists \overline{n} : d(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n, m > \overline{n}$$

Per cui abbiamo che $x_n \to a$. Per cui X è completo.
Sia adesso $\varepsilon > 0$ e sia $x_1 \in X$. Se abbiamo che $X = B_\varepsilon(x_1)$ abbiamo sostanzialmente finito. Supponiamo quindi $\exists x_2 \in X \setminus B_\varepsilon(x_1)$. Iteriamo quanto appena fatto: se $X = B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2)$ abbiamo finito, altrimenti esiste un altro valore $x_3 \in X \setminus (B_\varepsilon(x_1) \cup B_\varepsilon(x_2))$. Se ad un certo punto terminiamo, abbiamo ricoperto X con un numero finito di pale di raggio ε. Se (per assurdo) non

terminiamo, abbiamo ottenuto una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tuttavia non esistono sottosuccesioni di $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che siano convergenti, in quanto abbiamo che:

$$d(z_n, z_m) > \varepsilon \qquad \forall n \neq m$$

Abbiamo quindi un assurdo e otteniamo che il procedimento deve necessariamente terminare $\forall\varepsilon$. Per cui X è totalmente limitata.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Sia $\mathcal{A} = \{A_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ un ricoprimento aperto di X. Vogliamo come prima cosa mostrare che esista un sottoricoprimento numerabile.
Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ ho $x_{1,n}, ..., x_{k(n),n} \in X$ tali che:

$$X = B_{\frac{1}{n}}(x_{1,n}) \cup \cdots \cup B_{\frac{1}{n}}(x_{k(n),n})$$

Sia ora $\mathcal{B} = \{x_{i,n} : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, ..., k(n)\}\}$. Questo è un insieme numerabile. Allora $\forall x_{i,n} \in \mathcal{B}$ scegliamo, se esiste, un solo elemento $A_{i,n} \in \mathcal{A}$ tale che:

$$B_{\frac{1}{n}} \subseteq A_{i,n}$$

Sia ora $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ il sottoinsieme per cui esiste l'elemento di $\mathcal{A}$ e questo mi individua numerabili elementi di $\mathcal{A}$. Sia quindi $x \in X$, allora:

$$\exists A \in \mathcal{A} : x \in A \text{ e } \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A$$

Per la totale limitatezza dell'insieme, abbiamo che esistono n e $r \in \{1, ..., k(n)\}$ tale che:

$$x \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(x_{r,n}) \subseteq \mathcal{B}_\varepsilon(x)$$

Da cui segue che $x_{r,n} \in \mathcal{C}$ e:

$$x \in \bigcup_{i,n} A_{i,n}$$

Per cui abbiamo che $\{A_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sottoricoprimento numerabile di X. Rinumeriamo allora tali elementi e otteniamo un sottoricoprimento $\mathcal{A}'$ del tipo:

$$\mathcal{A}' = \{A_0, ..., A_n, ...\}$$

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{A}'$ non abbia sottoricoprimenti finiti, allora:

$$\forall m, \exists y_m \notin A_0 \cup \cdots \cup A_m$$

Otteniamo allora una succesione di $\{y_m\}$ che non ha sottosuccessioni convergenti. Infatti, se esistesse una tale sottosuccessione con limite a, allora esisterebbe $\overline{m}$ tale che $a \in A_{\overline{m}}$. Quindi, per la definizione di $\{y_m\}$ che abbiamo dato, esistono infiniti valori di $\{y_m\}$ dentro $A_{\overline{m}}$. Qui cade un assurdo, in quanto questa cosa va contro la definizione di $\{y_m\}$. Quindi non ci possono essere sottosuccessioni convergenti.
Per la totale limitatezza di X, abbiamo che $\exists p \in \{1, ..., k(1)\}$ tale che $\{y_n\} \cap B_1(x_{p,n})$ abbia infiniti elementi. Scelgo questi elementi in modo tale da mantenere l'ordine e otteniamo $\{z_n^{(1)}\}$ sottosuccessione di $\{y_1\}$, in modo tale che:

$$z_n^{(1)} = y_{n'} \qquad \text{con } n \geq n'$$

Iteriamo il procedimento, allora abbiamo che $\exists p_2 \in \{1, ..., k(2)\}$ tale che $\{z_n^{(1)}\} \cap B_{\frac{1}{2}}(x_{p_2,2})$ abbia infiniti elementi. Da questo otteniamo una successione $\{z_n^{(2)}\}$ sottosuccessione di $\{z_n^{(1)}\}$. Andando avanti in questo modo, otteniamo $z_n^{(r)}$ catene di sottosuccessioni $\forall n \in \mathbb{N}$, ciascuna contenuta in una sfera di raggio $\frac{1}{r}$. Abbiamo quindi:

$$\begin{matrix} z_1^{(1)} & z_2^{(1)} & z_3^{(1)} & z_4^{(1)} & \cdots \\ z_1^{(2)} & z_2^{(2)} & z_3^{(2)} & z_4^{(2)} & \cdots \\ z_1^{(3)} & z_2^{(3)} & z_3^{(3)} & z_4^{(3)} & \cdots \\ z_1^{(4)} & z_2^{(4)} & z_3^{(4)} & z_4^{(4)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Definiamo allora una successione:

$$w_s = z_s^{(s)}$$

Questa è una sottosuccessione di $\{y_m\}$. Ma abbiamo che:

$$w_{s+k} = z_{s+k}^{(s+k)} = z_{s+k+\delta}^{(s)} \qquad \Rightarrow \qquad d(w_s, w_{s+k}) < \frac{2}{s}$$

Quindi abbiamo che $\{w_s\}$ è una successione di Cauchy. Ma avevamo per ipotesi che X è completo, quindi converge. Qui cade l'assurdo, perché avevamo supposto che $\{y_m\}$ non avesse sottosuccessioni convergenti. Quello che ha causato l'assurdo è proprio l'esistenza di $\{y_m\}$. Quindi non può esistere tale successione, quindi necessariamente $\mathcal{A}'$ ha un sottoricoprimento finito, quindi anche $\mathcal{A}$, quindi X è completo $\square$