Fisica Matematica 1 - Formule

Capitolo 1 - Spazio, Tempo e Velocità

- Variazione di Posizione: $\Delta x = x_2 - x_1$
- Variazione di Tempo: $\Delta t = t_2 - t_1$
- Velocità Media: $\overline{v}_{1,2} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
- Formula della velocità: $v(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{x(t+h) - x(t)}{h} = \dot{x}(t)$
- Moto rettilineo uniforme: $x(t) = vt + x_0$
- Velocità nel moto rettilineo uniforme: $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = v$
- Tempo di incontro di due moti con versi diversi $\tilde{t} = \dfrac{D}{v_1 + v_2}$
- Serie Geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \dfrac{1}{1-\alpha} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \alpha^k = \dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$
- Trasformazioni di Galileo: $\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + vt' \\ t' = t \end{cases}$

Capitolo 2 - Accelerazione

- Accelerazione Media: $\overline{a}_{1,2} = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$
- Accelerazione istantanea: $a(t) = \lim_{h \to 0} \dfrac{v(t+h) - v(t)}{h} = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Spazio percorso (in generale): $x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
- Velocità media (in moto accelerato): $\overline{v} = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{v(t_2) + v(t_1)}{2}$
- Legge di Conservazione: $v^t(t) - 2ax(t) = \text{Costante}$
- Moto del grave: $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$
- Tempo per tornare nella posizione di partenza: $\overline{t} = \dfrac{2v_0}{g}$
- Tempo per raggiungere la massima altezza: $t_{max} = \dfrac{v_0}{g}$
- Valore della massima altezza: $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$

Capitolo 3 - Moti Piani

- Modi di scrivere un vettore: $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|r\| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(\frac{y}{x}) \end{cases}$
- Versori: $\hat{\boldsymbol{\imath}} = (1,0,0), \hat{\boldsymbol{\jmath}} = (0,1,0), \hat{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$
- In una circonferenza vale: $\theta = \dfrac{l}{r}$
- Prodotto scalare: $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \|\boldsymbol{v}_1\| \|\boldsymbol{v}_2\| \cos(\theta_{1,2})$
- Moto del proiettile: $\begin{cases} x(t) = v_{0_x} t + x_0 \\ y(t) = y_0 + v_{0_y} - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$
- Traiettoria del proiettile: $y(x) = -\dfrac{gx^2}{2v_{0_x}^2} + \left(\dfrac{v_{0_y}}{v_{0_x}} + \dfrac{g x_0}{v_{0_x}^2} \right) x + y_0 - x_0 \dfrac{v_{0_y}}{v_{0_x}} - g^2 \dfrac{x_0^2}{2v_{0_x}^2}$

- Traiettoria del proiettile con tangente: $-\dfrac{g(x-x_0)^2}{2v^2}(1+\tan^2\theta)+\tan\theta\,(x-x_0)+y_0$
- Traiettoria (dall'origine): $y(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{gx^2}{v_{0_x}^2}+\dfrac{v_{0y}}{v_{0_x}}x$
- Traiettoria (dall'origine e con tangente): $y(x)=-\dfrac{gx^2}{2v^2}(1+\tan^2\theta)+\tan\theta\,x$
- Equazione della gittata: $x_G=\dfrac{2v_{0_y}}{v}v_{0_x}$
- Equazione della gittata massima $x_{G,max}=\dfrac{v^2}{g}$
- Derivate in più dimensioni: $\dfrac{d\boldsymbol{w}(t)}{dt}=\dfrac{dw_x(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{i}}+\dfrac{dw_y(t)}{dt}\hat{\boldsymbol{j}}$
- Leibniz per i vettori: $\dfrac{d}{dw}(\boldsymbol{w}_1(t)\cdot\boldsymbol{w}_2(t))=\dfrac{d\boldsymbol{w}_1(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{w}_2(t)+\boldsymbol{w}_1(t)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{w}_2(t)}{dt}$
- Moto circolare uniforme $\begin{cases}r(t)=r=\text{Costante}\\ \omega(t)=\omega t,\ \omega=\text{Costante}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{r}(t)=0\\ \dot{\omega}(t)=\omega=\text{Velocità Angolare}\end{cases}$
- Scrivendole come moti uniformi diventa: $\begin{cases}x(t)=r\cos(\omega t)\\ y(t)=r\sin(\omega t)\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{r}(t)=r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{i}}+r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{j}}$
- La velocità diventa: $\boldsymbol{v}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t)=-\omega r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{i}}+\omega r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{j}}$
- L'accelerazione sarà: $\boldsymbol{a}(t)=\dot{\boldsymbol{v}}(t)=-\omega^2r\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{i}}-\omega^2r\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{j}}=-\omega^2\boldsymbol{r}(t)\Rightarrow\boldsymbol{a}(t)=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=-\omega^2\boldsymbol{r}(t)$

Capitolo 4 - Dinamica e Leggi di Newton

- Primo Principio della Dinamica: $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{v}t+\boldsymbol{r}_0$
- Secondo Principio della Dinamica: $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$
- Terzo Principio della Dinamica: $\boldsymbol{F}_{A\to B}=-\boldsymbol{F}_{B\to A}$
- Quantità di Moto: $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}=m\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}\Rightarrow\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{F}$
- In un sistema isolato, la quantità di moto si conserva

Capitolo 5 - Lavoro ed Energia

- Lavoro: $L=F\cdot\Delta x=ma(x_f-f_i)$
- Energia Cinetica: $T=\dfrac{1}{2}mv^2\Rightarrow L=\Delta T$
- In generale il lavoro: $\displaystyle\int_{t_i}^{t_f}F(t)\,v(t)\,dt=\int_{x_i}^{x_f}F(x)\,dx$ da cui $\displaystyle L=\int_{T_i}^{T_f}dT=\Delta T$
- Differenziale di una funzione: $df(x)=\dfrac{df}{df}(x)dx$
- Energia Potenziale gravitazionale: $L=-mg(hf-h_i)=\Delta U\Rightarrow U=mgh+\text{Cost}$
- Energia Meccanica (che si conserva): $E=T+U\xRightarrow{\text{Nella Gravitazione}}\dfrac{1}{2}mv^2+mgh$
- Nella Forza Elastica:
  $\displaystyle L_e=-k\int_{x_i}^{x_f}x\,dx=-\frac{1}{2}k(x_f^2-x_i^2)=-\Delta U\Rightarrow U_e=\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow E=T+U=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$
- Per le forze posizionali vale: $\displaystyle L=\int_{x_i}^{x_f}F(x)\,dx=-\int_{x_f}^{x_i}F(x)\,dx$
- In più dimensioni diventa: $L=\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=F_x\Delta x+F_y\Delta y+F_z\Delta z=\|\boldsymbol{F}\|\|\Delta\boldsymbol{r}\|\cos\theta$
- In generale una forza in più dimensioni si può scrivere come: $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\begin{cases}F_x(x,y,z)\\ F_y(x,y,z)\\ F_z(x,y,z)\end{cases}$
- Il lavoro diventa: $\displaystyle L_{\mathcal{C}_{i,f}}=\int_{\boldsymbol{r}_i}^{\boldsymbol{r}_f}\boldsymbol{F}(x,y,z)\,d\boldsymbol{r}=\int_{x_i}^{x_f}F_x(x,y,z)\,dx+\int_{y_i}^{y_f}F_y(x,y,z)\,dy+\int_{z_i}^{z_f}F_z(x,y,z)\,dz$

- Con l'energia cinetica: $L = \Delta(T_x) + \Delta(T_y) + \Delta(T_z) = \Delta(T_x + T_y + T_z) = \Delta T$ dove $T = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\|v\|^2$
- Forza Conservativa è tale se il lavoro dipende solo dai punti iniziale e finale di un percorso chiuso
- Per una forza costante: $L = \int_{\mathcal{C}_{i,f}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x \int_{x_i}^{x_f} dx + F_y \int_{y_i}^{y_f} dy + F_z \int_{z_i}^{z_f} dz = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z = \boldsymbol{F} \cdot \Delta r$
- La sua energia potenziale sarà $L = -\Delta U \Rightarrow U = -\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{r} + \text{Cost}$
- Per una forza elastica disomogenea: $L = -k_1 \int_{x_i}^{x_f} x\ dx - k_2 \int_{y_i}^{y_f} y\ dy - k_3 \int_{z_i}^{z_f} z\ dz = \frac{1}{2}[k_1 \Delta x_{i,f}^2 + k_2 \Delta y_{i,f}^2 + k_3 \Delta z_{i,f}^2]$
- La sua energia potenziale sarà: $U(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}[k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2] + \text{Cost}$
- Si può ricavare anche la Forza dal Potenziale $\boldsymbol{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = -\nabla U$

Capitolo 6 - Gravitazione Universale

- La Forza Gravitazionale tra due corpi è $\|\boldsymbol{F}\| = G\frac{mM}{r^2}$
- Scritto in modo vettoriale diventa: $\boldsymbol{F} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} = -GmM\frac{x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$
- Per un punto qualsiasi $r > R_T$ il campo gravitazionale sarà: $g(M_t, r) = \frac{GM_T}{R_T^2}\frac{R_T^2}{r^2}$
- Prima legge di Keplero: $\text{Le orbite sono ellittiche e il sole occupa uno dei due fuochi}$
- Seconda Legge di Keplero: $\text{La velocità areolare è costante}$
- Terza Legge di Keplero: $T^2/R^3 = \text{Costante}$
- Per due punti qualsiasi la legge di gravitazione è: $\boldsymbol{F}_{1,2} = -Gm_1m_2\frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\|^3} = -Gm_1m_2\frac{(x_2 - x_1)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (y_2 - y_1)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (z_2 - z_1)\hat{\boldsymbol{k}}}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2)^{3/2}}$
- Il lavoro della gravitazione diventa: $L_{\mathcal{C}_{i,f}} = \int_{\mathcal{C}_{i,f}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\boldsymbol{r}_i}^{r_f} -\frac{GmM}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = \int_{r_i}^{r_f} -G\frac{mM}{r^2}dr = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_{r_i}^{r_f} = -\Delta U$
- L'Energia Potenziale diventa quindi $U(r) = -\frac{GmM}{r} + \text{Costante}$
- L'Energia Meccanica sarà $E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}$
- Il campo gravitazionale è $\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -G\frac{M}{r^3}\boldsymbol{r}$
- Il potenziale gravitazionale si ricava $\int_{\mathcal{C}_{i,f}} \boldsymbol{g}\ d\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{C}_{i,f}} -G\frac{M}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} = -\frac{1}{m}\Delta U = -\Delta V$
- Infatti il potenziale è $V(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r} + \text{Costante}$
- Come il per l'energia potenziale di può stabilire $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = -\frac{GM}{r^3}\boldsymbol{r} = \left(-\frac{GM}{r^3}x, -\frac{GM}{r^3}y, -\frac{GM}{r^3}z\right) = -\nabla V$

Capitolo 7 - Flusso del Campo Gravitazionale

- Si definisce segmento orientato: $\boldsymbol{l} = l\hat{\boldsymbol{n}}$
- Il flusso attraverso un segmento orientato è $\phi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{l} = vl\cos\alpha$
- Il flusso infinitesimale è $d\phi = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}(x, y) = \hat{\boldsymbol{n}}(x, y)\ dl$
- Il flusso attraverso una curva lista e chiusa è $\Phi_{\mathcal{C}_{A,B}} = \int_{\mathcal{C}_{A,B}} d\phi = \int_{\mathcal{C}_{A,B}} \boldsymbol{v} \cdot d = \int_{\mathcal{C}_{A,B}} \boldsymbol{v}(x, y) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(x, y)\ dl$
- Il flusso infinitesimo del campo di Newton in due dimensioni vale: $d\phi = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r} \cdot d\boldsymbol{l} = d\hat{\theta}$

- Il flusso del campo di Newton in due dimensioni vale: $\Phi_{\mathcal{C}_{A,B}} = \int_{\mathcal{C}_{A,B}} d\phi = \int_{\mathcal{C}_{A,B}} d\hat{\theta} = \hat{\theta}_{\mathcal{C}_{A,B}}$
- Se la curva chiusa abbraccia l'origine vale 2π, altrimenti vale 0
- Si definisce angolo solido: $\Omega_\Sigma = \frac{S}{r^2}$, da cui l'angolo solido della sfera vale 4π
- Si definisce superficie orientata: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}\hat{n}$
- Il flusso per una superficie orientata è: $\phi = \boldsymbol{v} \cdot S = \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} S = vS\cos\alpha$
- Il flusso infinitesimo in tre dimensioni è: $d\phi = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{v}(x,y,z) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(x,y,z)\ dS$
- Il flusso in tre dimensioni attraverso una superficie è: $\Phi_{\hat{\Sigma}} = \iint_{\hat{\Sigma}} d\phi = \iint_{\hat{\Sigma}} \boldsymbol{v} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ dS$
- Il flusso infinitesimo nel campo di Newton vale: $d\phi = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \cdot d\boldsymbol{S} = d\hat{\Omega}$
- il flusso nel campo di Newton vale: $\Phi_{\hat{\Sigma}} = \iint_{\hat{\Sigma}} \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\ dS = \iint_{\hat{\Sigma}} d\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_{\hat{\Sigma}}$
- Se la superficie abbraccia l'origine il flusso vale 4π, altrimenti vale 0
- Il teorema di Newton dice che $\Phi_{\hat{\Sigma}} = \begin{cases} -4\pi G M_{int} & \text{se } \hat{\Sigma} \text{ abbraccia l'origine} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ (in $\mathbb{R}^3$)
- Il teorema di Newton dice che $\Phi_{\hat{\Sigma}} = \begin{cases} -2\pi G M_{int} & \text{se } \hat{\Sigma} \text{ abbraccia l'origine} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ (in $\mathbb{R}^2$)
- Per una sfera il campo gravitazionale vale: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\frac{GM_T}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} & r > R_T \\ -\frac{GM_T}{R_T^3} r\hat{\boldsymbol{r}} & r < R_T \end{cases}$
- Posto $\hat{\boldsymbol{d}} = \frac{x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, il campo gravitazionale di un filo infinito sull'asse z vale $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{d}) = -\frac{2G\lambda}{d}\hat{\boldsymbol{d}}$ dove λ rappresenta la densità lineare
- Il campo gravitazionale di un piano infinito $(x=0, y=0)$ vale $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}) = -2\pi G\sigma\ sgn(z)\hat{\boldsymbol{k}}$, dove σ rappresenta la densità superficiale

---

Capitolo 8 - Argomenti Monografici

- Dalla conservazione dell'energia meccanica si ricava che: $v = \sqrt{2gh}$
- La quantità di moto del sistema è pari a: $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i$
- Se il sistema è isolato: $F = \sum_{i=1}^{n} F_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i = 0 \Rightarrow \boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i = \text{Costante}$
- Si definisce baricentro: $\boldsymbol{r}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$ e se il sistema è isolato, la sua velocità p costante
- Le variazioni di energia cinetica sono invarianti per trasformazioni di Galileo
- Il Teorema Iterativo del Baricentro dice che, data una bipartizione delle masse totali: $\boldsymbol{r}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} r_i} = \frac{M_1 \boldsymbol{r}_{B_1}}{M_1 + M_2} + \frac{M_2 \boldsymbol{r}_{B_2}}{M_1 + M_2}$ dove M_i è la somma delle masse della i-esima porzione dell'insieme e $\boldsymbol{r}_{B_i}$ è il baricentro di quella porzione.
- Un'urto tra due corpi si definisce elastico se: $\begin{cases} m_1 v_{1_i} + m_2 v_{2_i} = m_1 v_{1_f} + m_2 v_{2_f} \\ \frac{1}{2}(m_1 v_{1_i}^2 + m_2 v_{2_i}^2) = \frac{1}{2}(m_1 v_{1_f}^2 + m_2 v_{2_f}^2) \end{cases}$
- Sapendo che $dp = F\ dt$, allora l'urto è una forza impulsiva, per cui: $-2mv = \Delta p = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dp = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} F(t)\ dt$, per cui $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{F(t)}{-2mv}\ dt = 1$. Nessuna funzione risolve quest'integrale per $\varepsilon \to 0$. Questa è la distribuzione di Dirac
- Un urto si definisce completamente anaelastico se $m_1 v_1 + m_2 v_2 = V(m_1 + m_2)$
- In un urto completamente anaelastico, la perdita di energia vale: $\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2$

Capitolo 9 - Moti Rotatori

- Riprendendo il moto circolare, la velocità angolare è: $\omega(t) = \dot{\theta}(t) = \frac{\dot{l}(t)}{r} = \frac{v(t)}{r}$
- L'accelerazione angolare è: $\alpha(t) = \ddot{\theta}(t) = \frac{\ddot{l}(t)}{r} = \frac{a_{tan}(t)}{r}$
- Si ricava che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{tan},\ \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{tan} + \boldsymbol{a}_{cp}$ dove $\|\boldsymbol{a}_{cp}\| = \omega^2(t)r$ e $\|\boldsymbol{a}_{tan}\| = |\alpha(t)|r$
- Quindi in generale il modo circolare non è altro che un parallelo di quello lineare: $\begin{cases} \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \\ \omega(t) = \dot{\theta}(t) = \alpha t + \omega_0 \\ \alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\theta}(t) = \alpha \end{cases}$
- Si definisce momento di inerzia: $I = mr^2$
- Si definisce momento angolare: $l = I\omega$
- Si definisce momento torcente: $\tau = rF_{tan}$
- Queste permettono di scrivere $rF_{tan} = mr^2\alpha \Rightarrow \tau = I\alpha = \dot{l}$
- Il prodotto vettoriale è definito come: $\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}_2 = det\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (y_1 z2 _- y_2 z_1, z_1 x_2 - x_1 z_2, z_1 y_2 - y_1 x_2)$
- Il prodotto vettoriale è antisimmetrico, bilineare, genera un vettore ortogonale ai primi due e $\|\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}_2\| = \|\boldsymbol{r}_1\|\|\boldsymbol{r}_2\| \sin\theta$, con $\theta =$ angolo tra i due vettori
- Vale la terna destrorsa $\begin{cases} \hat{\boldsymbol{i}} \wedge \hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\boldsymbol{j}} \wedge \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{i}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} \wedge \hat{\boldsymbol{i}} = \hat{\boldsymbol{j}} \end{cases}$
- Il prodotto misto vale $\boldsymbol{r}_1 \cdot (\boldsymbol{r}_2 \wedge \boldsymbol{r}_3) = det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$
- Vale la regola di Leibniz: $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_1 \wedge \boldsymbol{r}_2) = \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} \wedge \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1 \wedge \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}$
- Utilizzando i vettori si ha che: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}$ come momento della forza e $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}$ come momento angolare
- Vale inoltre: $\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \underbrace{\boldsymbol{v} \wedge m\boldsymbol{v}}_{=0} + \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau}$
- Per un corpo rigido (in cui le distanze dei punti interni sono costanti) vale: $\tau_{tot} = \sum_i \tau_i = \underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)}_{=I}\alpha = I\alpha$
- L'energia cinetica di rotazione vale: $T_{tot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$
- La forza che agisce su un pendolo è pari a $F = -mg\sin\theta$ in quanto la Tensione della corda e la componente perpendicolare al moto si annullano.
- In particolare $F = -mg\sin\theta \simeq -mg\theta = -\frac{mg}{L}s = m\ddot{s}$, ossia è una forza elastica dove $k = \frac{mg}{L}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Otteniamo quindi $\ddot{s} = -\frac{g}{L}s$
- Poiché non compare la massa nella formula del periodo, gode della proprietà di isocronismo.
- La formula della posizione diventa: $s(t) = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi_0\right)$ e quella dell'angolo: $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t + \phi_0\right)$
- In una rotazione, ogni punto si sposta di una quantita $d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{r}$, dove $d\boldsymbol{\theta} = d\theta\hat{\boldsymbol{k}}$ (se ruota attorno all'asse z)
- Il lavoro di una forza rotatoria diventa quindi $L = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{r} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{\tau} \cdot d\theta$
- Si ottiene quindi (come nel caso lineare) che: $L = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \Delta T$
- Per un momento torcente costante si ha che $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_0 \cdot d\theta = \tau_0 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \tau_0(\theta_2 - \theta_1) = -\Delta U$
- L'energia meccanica diventa quindi: $E = T + U = \frac{1}{2}I\omega^2 - \tau_0\theta = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - \tau\theta$

- In un momento torcente elastico $\tau = -h\theta$: $L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \cdot d\theta = -h \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \cdot d\theta = -\frac{h}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) = -\Delta U$
- L'energia meccanica diventa quindi: $E = T + U = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} h\theta^2$

Capitolo 10 - Relatività Ristretta

- Primo Postulato sulla Relatività Ristretta: La luce si propaga nel vuoto in modo omogeneo e isotropo alla velocità di $c = 299\ 792\ 458\ m/s$
- Secondo Postulato sulla Relatività Ristretta: Le leggi della fisica valgono in ogni sistema di riferimento inerziale
- Le trasformazioni di Lorentz sono: $\begin{cases} x' = \cosh\theta\, x + \sinh\theta\, ct \\ t' = \sinh\theta\, x + \cosh\theta\, ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$
- La pseudodistanza di Minkowski vale $d_{\mathcal{M}}^{(2)}(E_1, E_2) = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$
- La pseudodistanza di Minkowski è di tipo $\begin{cases} \text{Luce} & \text{se } d_{\mathcal{M}}^{(2)} = 0 \\ \text{Tempo} & \text{se } d_{C}^{(2)} > 0 \\ \text{Spazio} & \text{se } d_{\mathcal{M}}^{(2)} < 0 \end{cases}$
- Non è possibile invertire temporalmente due eventi se la loro distanza è di tipo tempo
- Non è possibile invertire spazialmente due eventi se la loro distanza è di tipo spazio
- Si definisce Lunghezza Propria una lunghezza misurata nel sistema di riferimento in quiete con essa
- Si definisce Tempo Proprio un intervallo misurato nel sistema di riferimento in quiete con l'orologio
- Composizione delle velocità: $u' = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$
- Ponendo $\varepsilon = \frac{v^2}{c^2}$ si può vedere che se le trasformazioni di Lorentz non sono altro che una generalizzazione delle trasformazioni di Galileo

---

Capitolo 11 - Passeggiata Aleatoria

- La formula del moto browniano o diffusivo è: $d^t(t) = 2Dt$
- Uno spazio di probabilità discreta è costituito da un insieme di eventi elementari $I = \{1, \ldots, n\}$ e un insieme di numeri reali, ognuno dei quali rappresenta la probabilità degli eventi elementari $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
- Valgono le tre leggi di Kolmogorov $\begin{cases} K1)\ P(C) \geq 0 \\ K2)\ P(I) = 1 \\ K3)\ P(A) \cap P(B) = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \end{cases}$
- Se due eventi sono disgiunti allora $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$
- Se due eventi non sono disgiunti allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- La probabilità condizionata di due eventi è $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- La probabilità di due eventi indipendenti è $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- Due eventi indipendenti non possono essere disgiunti, infatti $0 = P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$
- Si definisce variabile aleatoria una funzione che associa un numero reale ad un evento aleatorio elementare $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$ e possono essere combinate linearmente o moltiplicate tra di loro
- Si definisce valor medio o valor di aspettazione la funzione $\mathbb{E} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[f] = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i$
- Il valor medio è lineare, positivo e normalizzato
- Si definisce Varianza il valore $\mathbb{V}[f] = \mathbb{E}[(f - \mathbb{E}[f])^2]$. Il valore $\sqrt{\mathbb{V}[f]}$ prende il nome di deviazione standard
- La Varianza si può calcolare anche come $\mathbb{V}[f] = \mathbb{E}[f^2] - (\mathbb{E}[f])^2$
- Vale la proprietà della varianza $\mathbb{V}(af + b) = a^2\mathbb{V}(f)$

- Si definisce Spettro di una Variabile Aleatoria $\mathcal{S}_f = \{r \in \mathbb{R} \mid r = f_i, i \in I\} = Im(f)$, cioè l'insieme dei valori che f può assumere sullo spazio degli eventi elementari I
- La probabilità che f assuma un valore r è: $P_f(r) = P(f = r) = P(f^{-1}(r)) = \sum_{i \in I;\ f_i = r} p_i$
- Se invece la funzione f è "invertibile", ossia $\exists! i$ tale che $f(i) = r$ allora la sua probabilità è p_i
- Con lo spettro, il valor medio diventa $\mathbb{E}[f] = \sum_{r \in \mathcal{S}_f} r p_f(r)$
- Si definisce Probabilità congiunta di f e g: $p_{f,g}(r,s) = P(f = r, g = s) = P(f^{-1}(r), g^{-1}(s)) = \sum_{i \in I, f_i = r, g_i = s} p_i$
- Si definiscono le Marginali della Probabilità Congiunta di f: $\sum_{s \in \mathcal{S}_g} p_{f,g}(r,s) = p_f(r)$ (analogo per g)
- Se f e g sono due variabili indipendenti, allora vale: $\mathbb{E}(f,g) = \mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g)$
- Si ha che: $\mathbb{V} = (f+g) = \mathbb{V}(f) + \mathbb{V}(g) + 2\mathbb{E}(fg - \mathbb{E}(f)\mathbb{E}(g))$
- Se f e g sono variabili indipendenti, allora $\mathbb{V}(\alpha f + \beta g) = \alpha^2 \mathbb{V}(f) + \beta^2 \mathbb{V}(g)$
- Sia $\sigma = \{+1, -1\}$ una variabile di Spin, allora $P(\sigma) = \frac{e^{h\sigma}}{2\cosh h}$ dove h è il valore di propensione ad assumere ± 1
- Sia σ come sopra, allora $\mathbb{E}(\sigma) = \tanh h$ e $\mathbb{V}(\sigma) = 1 - \tanh^2 h$
- La probabilità di un generico cammino è $P(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = P(\sigma_1) \cdot \dots \cdot P(\sigma_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{h\sigma_i}}{2\cosh h}$ e la sua posizione sarà $X_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$. Valor medio e varianza saranno $\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\sigma_i) = n \tanh h$ e $\mathbb{V}(X_n) = n(1 - \tanh^2 h)$
- Riprendendo la prima formula del capitolo $d^2(n) = \mathbb{V}(X_n) = n$