בס"ד

מערכות ספרתיות
ייצוג מספרים

פרק 1

הוכן ע"י: ד"ר אילת בוטמן,
ד"ר תרצה הרסט וחני הכסטר

1

ייצוג מספרים בבסיסים שונים

- מספר מיוצג כרצף של ספרות.
- לכל מיקום במספר משייכים משקל.
- המשקל של ספרה הינו 10 בחזקת מיקום הסיפרה במספר (המרחק מהנקודה העשרונית).
- הערך הכללי של המספר הוא סכום הספרות המוכפלות במשקלם.

$1734=1*10^3+7*10^2+3*10^1+4*10^0$

2

נוסחה כללית לייצוג מספר עשרוני D

$$\sum_{i=-n}^{p} d_i * 10^i$$

$5185.68=5*10^3+1*10^2+8*10^1+5*10^0+6*10^{-1}+8*10^{-2}$

3

ייצוג מספרים בבסיס כלשהו

- ניתן לייצג מספרים לפי הערך המקומי גם במערכות מספרים שונות
  - במערכת העשרונית משתמשים ב-10 ספרות לייצוג המספרים 0-9.
  - מספר בבסיס 5 בנוי מספרות 0-4 בלבד.
  - מערכת מספרים בינארית היא מערכת מספרים שמורכבת רק משתי ספרות 0,1.
- בכל בסיס, רצף חוקי של ספרות מקבל משמעות נומרית שונה.

$194_{10}=1234_5$

4

ייצוג מספרים בבסיס כלשהו r

המשקל המקומי	$(בסיס)^{-1}$ $(בסיס)^{0}$ $(בסיס)^{1}$ $(בסיס)^{2}$
ספרות המספר	. ...

$$d_p d_{p-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-n} =$$

$$\sum_{i=-n}^{p} d_i * r^i$$

5

סימון: הבסיס ייכתב תמיד מימין למספר, בחלקו התחתון.
במקרה של בסיס 10, נוכל להשמיט את הבסיס.

- דוגמאות:
  - $730_8 = 7*8^2 + 3*8^1 + 0*8^0 = 472_{10}$
  - $32_5 = 3*5^1 + 2*5^0 = 17_{10}$
  - $10011_2=1*2^4+0*2^3+0*2^2+1*2^{1+}1*2^0 = 19_{10}$
  - $100010_2=1*2^5+0*2^4+0*2^3+0*2^2+1*2^1+0*2^0 = 34_{10}$
  - $101.001_2=1*2^2+0*2^1+1*2^0+0*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3} = 5.125_{10}$

6

הצגת מספרים בבסיס בינארי

- מערכות דיגיטליות מורכבות מיחידות אלקטרוניות בינאריות (דלוק/כבוי, מתח גבוה/נמוך, אמת/שקר, 0/1)
- בסיס 2 מורכב מהספרות 0,1 בלבד ונקרא גם **בסיס בינארי**, והמספרים בבסיס זה נקראים **מספרים בינאריים**.

$$B = \sum_{i=-n}^{p} b_i * 2^i$$

7

7

- דוגמאות :
  - $10011_2 = 1*16 + 0*8 + 0*4 + 1*2 + 1*1 =$
    $16 + 2 + 1 = 19_{10}$
  - $101.001_2 = 1*4 + 0*2 + 1*1 + 0*0.5 +$
    $0*0.25 + 1*0.125 =$
    $4 + 1 + 0.1235 = 5.125_{10}$

8

8

ייצוג בינארי למספרים 1-10:

1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10

9

9

בסיס אוקטלי (8) והקסדצימלי (16)

- בסיסים חשובים נוספים הם בסיס 8 (אוקטה) ובסיס 16 (הקסה) שמשמשים להצגה קצרה יותר של המספרים הבינאריים.
- בסיסים אלו נוחים לייצוג מספרים בינארים מכיון שהם מהווים חזקות של 2.
- בבסיס 8 משתמשים בספרות 0-7.
- בבסיס 16 משתמשים בספרות 0-9 A-F.

10

10

הספרות בבסיס 8 ו- 16

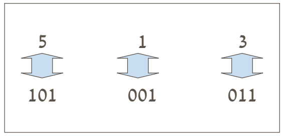
Dec	Bin	Oct	Hex	Dec	Bin	Oct	Hex
0	0	0	0	8	1000	10	8
1	1	1	1	9	1001	11	9
2	10	2	2	10	1010	12	A
3	11	3	3	11	1011	13	B
4	100	4	4	12	1100	14	C
5	101	5	5	13	1101	15	D
6	110	6	6	14	1110	16	E
7	111	7	7	15	1111	17	F

11

11

הקשר בין בסיס אוקטלי (8) לבסיס בינארי

דוגמא:
$513_8 = 331$
$331 = 101001011_2$



12

12

כל 3 ספרות בינאריות מהוות ספרה אוקטאלית אחת

- $011\ 101\ 101\ 110\ 101\ 001_2 =$
  $(3\ \ 5\ \ 5\ \ 6\ \ 5\ \ 1)_8$
- $10.1011001011_2 = 010\ .\ 101\ 100\ 101\ 100_2 =$
  $(2\ .\ \ 5\ \ 4\ \ 5\ \ 4)_8$
- $1357_8 = 001\ 011\ 101\ 111_2$
- $2046.17_8 = 010\ 000\ 100\ 110\ .\ 001\ 111_2$

13

13

הקשר בין בסיס הקסדצימלי לבין בסיס בינארי

דוגמא:
$A59_{16} = 2649$
$2649 = 101001011001_2$

A	5	9
1010	0101	1001

14

14

כל 4 ספרות בינאריות מהוות ספרה הקסדסימאלית אחת:

- $(1\ 1101\ 1011\ 1010\ 1001)_2 =$
  $(1\ \ D\ \ B\ \ A\ \ 9)_{16}$
- $(10.1011001011)_2 = (0010.1011\ 0010\ 1100)_2$
  $= (2\ .\ \ B\ \ 2\ \ C)_{16}$
- $(BEAD)_{16} = (1011\ 1110\ 1010\ 1101)_2$
- $(9F.46C)_{16} = (1001\ 1111\ .\ 0100\ 0110\ 11)_2$

15

15

המרה מבסיס כלשהו לבסיס 10

$$D = \sum_{i=-n}^{p} d_i * r^i$$

- דוגמה 1:
  - $F1A3_{16} = 15*16^3+1*16^2+10*16^1+3*16^0=61859_{10}$
- קיצור:
  - $F1A3_{16} = ((15*16+1)*16+10)*16+3$
- דוגמה 2:

$$(4021.2)_5 = 4\times5^3+0\times5^2+2\times5^1+1\cdot5^0+2\times5^{-1}$$
$$=(511.4)_{10}$$

16

16

המרה מבסיס 10 לבסיס כלשהו:
שיטת החלוקה

- מחלקים את המספר בבסיס החדש, ורושמים תוצאה ושארית.
- את התוצאה (ללא השבר) מחלקים שוב בבסיס, ורושמים תוצאה ושארית, וכך הלאה עד שהתוצאה המתקבלת היא 0.
- *סדרת השאריות שהתקבלה היא המספר החדש !*
- יש לכתוב את הספרות שקיבלנו בסדר הפוך.

17

17

המרת המספר 179 לבסיס בינארי:

179/2=89	1
89/2=44	1
44/2=22	0
22/2=11	0
11/2=5	1
5/2=2	1
2/2=1	0
1/2=0	1

$179_{10} =$
10110011_2

18

18

המרת המספר 467 לבסיס אוקטלי:

467/8=58	3
58/8=7	2
7/8=0	7

$467_{10}=723_8$

המרת המספר 3417 לבסיס הקסדסימאלי:

3417/16=213	9
213/16=13	5
13/16=0	13

$3417_{10}=D59_{16}$

19

19

המרת שבר עשרוני לבסיס *r*

- מכפילים את המספר בבסיס *r*, ומקבלים תוצאה המורכבת מחלק שלם ומשבר.
- את השבר בלבד מכפילים שוב בבסיס *r*.
- מבצעים זאת מספר פעמים – כמספר הספרות הנחוץ לאחר הנקודה, על פי הדיוק הנדרש.
- *סדרת השלמים שהתקבלה היא השבר בבסיס החדש !*

20

20

דוגמא 1

- המר את $(0.6875)_{10}$ למספר בינארי.
  - 0.6875 * 2 = 1.375
  - 0.375 * 2 = 0.75
  - 0.75 * 2 = 1.5
  - 0.5 * 2 = 1.0
  - $(0.6875)_{10} = (0.1011)_2$

21

21

דוגמא 2

- המר את $(0.513)_{10}$ למספר אוקטאלי עם דיוק של 3 ספרות אחרי הנקודה.
  - 0.513 * 8 = 4.104
  - 0.104 * 8 = 0.832
  - 0.832 * 8 = 6.656
  - $(0.513)_{10} = (0.406)_8$

22

22

המרת מספר עשרוני כלשהו לבסיס *r*

- ממירים **בנפרד** את החלק השלם ואת השבר !!!
- את החלק ה**שלם** ממירים ע"י **חלוקה** שוב ושוב בבסיס,
- את ה**שבר** ממירים ע"י **הכפלה** שוב ושוב בבסיס!

23

23

חיבור בבסיס בינארי

- החיבור מתבצע מימין לשמאל.
- בכל שלב יכול להיות נשא (Cout) שהתקבל כתוצאה מהחישוב הקודם ומחושב כקלט בחישוב הבא (Cin).

1	2	3	4
	1(נשא)	1(נשא)	1111 1(נשא)
1010	1001	1010	11001
+ 100	+ 1010	+ 10	+ 1111
1110	10011	1100	101000

24

24

חיסור בבסיס בינארי

- חיסור מתבצע מימין לשמאל.
- בכל שלב, כאשר המספר הראשון קטן מהמספר השני יש ללוות 1 מהמספר הבא (Bin) ולהקטין ב-1 את הספרה הבאה (Bout) .

1	2	3	4
	(נשא)0 1 10		0 10 10 0 1 10 0 10
1 1 1 0	1 0 0 1	11100101	1 1 0 1 0 0 1 0
- 1 1 0 0	-0 0 1 1	-00101110	- 0 1 1 0 1 1 0 1
0 0 1 0	0 1 1 0	10110111	0 1 1 0 0 1 0 1

25

25

חיבור מספרים שאינם בינארים

- נסכם כל עמודה לפי טבלת החיבור הדצימאלית
- נמיר את העמודות חזרה לבסיס הרצוי.
- נשא יתקבל כאשר תוצאת החישוב שווה או גדולה מגודל הבסיס.

$$\begin{array}{r} 19B9_{16} \\ +\underline{C7E6_{16}} \\ E19F_{16} \end{array}$$

1	9	11	9
12	7	14	6
14	17	25	15
14	16+1	16+9	15
E	1	9	F

26

26

כפל מספרים בינארים

```
      1 0 1 1
    * 0 1 1 0
      -------
      0 0 0 0
    1 0 1 1
  1 0 1 1
0 0 0 0
-------------
1 0 0 0 0 1 0
```

27

27

שיטות לייצוג מספרים

Unsigned, ביט סימן,
משלים ל-2

28

28

ייצוג מספרים בינאריים

- במחשב כל ספרה בינארית (0 או 1) נקראת **סיבית** **(bit)**.
- זיכרון המחשב בנוי מיחידות בנות 8 סיביות (בד"כ) הנקראות **בית** (byte)
- הסיבית הימנית ביותר נקראת :
  (LSB) Least Significant Bit
- הסיבית השמאלית ביותר נקראת :
  (MSB) Most Significant Bit

29

29

ייצוג מספרים חיוביים בשיטת Unsigned

- Unsigned הוא מספר ללא סימן (+ או -), המיוצג ע"י ערכו הבינארי.
- דוגמא : ייצוג המספר 25 ב- 8 סיביות :

0001 1001

MSB LSB

30

30

גלישה

- ביחידת זיכרון בת n סיביות:
  - ניתן לייצג 2^n ערכים בינאריים.
  - אם המספר צורך פחות מ-n סיביות נוסיף אפסים משמאל למספר (או מימין לנקודה העשרונית)
  - אם ננסה לייצג מספר הצורך יותר מ-n סיביות נקבל גלישה (overflow)

דוגמא 1:

```
  00101110
+ 01100111
  10010101
```

דוגמא 2:

```
    00101110
    11100111
(1) 00010101
```

גלישה מ-8 סיביות

31

טווח הייצוג של החיוביים ב-n סיביות

- המספר הקטן ביותר: $000\ldots0 = 0$
- המספר הגדול ביותר: $111\ldots1 = 2^n-1$
- **טווח הייצוג** הוא: $0 \le N \le (2^n-1)$

✓ **לדוגמא** עבור 8 סיביות התחום הוא:

$00000000_2 = 0$

$00000001_2 = 1$

$00000010_2 = 2$

...

$11111111_2 = 256 - 1 = 255$

32

ייצוג מספרים חיוביים ושליליים

- בשימושים היומיומיים מקובל להשתמש בתו מיוחד לסימון חיובי (+) או שלילי (-).
- במערכת דיגיטלית התווים היחידים האפשריים הם 0,1.
- נראה שלוש שיטות לייצג מספרים בינארים חיוביים ושליליים:
  - **גודל וסימן**
  - **משלים ל- 1**
  - **משלים ל- 2**
- חשוב להגדיר מראש את מספר הסיביות בהם משתמשים (n) !!!

33

שיטת גודל וסימן

- נייצג את הערך המוחלט של המספר בעזרת n-1 סיביות.
- בסיבית הנוספת (MSB) נסמן את הסימן. סיבית זו נקראת סיבית הסימן.

סיבית הסימן	הערך המוחלט של המספר

- 1 עבור מינוס
- 0 עבור פלוס

34

טווח הייצוג בשיטת הגודל וסימן

- המספר **הקטן** ביותר: $111\ldots1 = -(2^{n-1}-1)$
- המספר **הגדול** ביותר: $011\ldots1 = 2^{n-1}-1$
- **טווח הייצוג** הוא: $-(2^{n-1}-1) \le N \le (2^{n-1}-1)$

לדוגמא עבור 8 סיביות הטווח הוא:

מינימום: $11111111_2 = -127$

מקסימום: $01111111_2 = 127$

- שתי דרכים לייצוג 0:

$\mathbf{0}0000000 = 0 = \mathbf{1}0000000$

35

ייצוג בשיטת **גודל וסימן** ב-8 סיביות	מספר עשרוני
11111111	-127
11111110	-126
…	…
10000000	-0
00000000	+0
…	…
01111101	125
01111110	126
01111111	127

שני ייצוגים למספר 0

36

פעולות החשבון בייצוג גודל וסימן

- בעיה : אם נחבר שני מספרים שליליים ללא התחשבות מיוחדת בביט הסימן, שתי סיביות הסימן השליליות תבטלנה זו את זו, ונקבל שגיאה :

10000001_2		-1	
$\underline{10000001}_2$	בשיטת	$\underline{-1}$	עשרוני
$(1)\ 00000010_2$	ביט סימן	-2	

37

37

חיבור

- אם הסימנים זהים יש לבצע חיבור לפי הערך המוחלט ולהשאיר את הסימן זהה. (נקפיד שלא לגלוש, כמובן).
- אם הסימנים שונים יש להחסיר את המספר הקטן מהגדול, והסימן של התוצאה יהיה זהה לסימן של הגדול.

38

38

חיסור

- יש להפוך את הסימן של המספר השני ולבצע חיבור.
- חיסרון : יש צורך בבדיקות בנוסף לחישוב עצמו.
- המטרה : למצוא שיטה אחרת לייצוג המספרים השליליים שבה אין צורך בבדיקות לפני ביצוע החישובים.

39

39

שיטת המשלים ל- 1

- בסיבית השמאלית (MSB) נסמן את הסימן. סיבית זו נקראת סיבית הסימן.
- אם המספר חיובי – אזי סיבית הסימן תהיה 0, ומימינה יהיה רשום ערך המספר בבינארי. למשל 0101 מייצג 5.
- אם המספר שלילי – אזי הוא יהיה מיוצג ע״י המשלים ל-1 של הייצוג חיובי של המספר.
- המשלים ל-1 של מספר בינארי = היפוך כל הסיביות.
- למשל – המשלים ל- 1 של 011001 שווה : 100110.

40

40

דוגמאות למשלים ל - 1

- המשלים ל-1 של 0100 הוא 1011
- ולכן, המספר 1011 בשיטת המשלים ל-1 מייצג את הערך 4-.
- המשלים ל-1 של 01.1 הוא: 10.0

ולכן המספר 10.0 בשיטת המשלים ל-1 מייצג את הערך 1.5-.

שימו לב שהמשלים ל-1 של מס' חיובי יוצא מס' שלילי, ולהיפך.

41

41

טווח הייצוג בשיטת המשלים ל-1

- המספר החיובי הגדול ביותר: $01\ldots111 = 2^{n-1} - 1$
- המספר השלילי הקטן ביותר : $10\ldots000 = -(2^{n-1}-1)$
- הטווח הוא : $-(2^{n-1}-1) \leq N \leq 2^{n-1}-1$
- הטווח עבור 4 סיביות הוא : 7 --- 7-
- הטווח עבור 8 סיביות הוא : 127 --- 127-
- ל- 0 יש שני ייצוגים : 000...000 / 111...111

42

42

שיטת המשלים ל- 2

הגדרה: יהי B מספר חיובי בינארי, בעל חלק שלם הכולל n ספרות.

המשלים ל-2 של B הוא:

$2^n - B$ עבור $B \neq 0$

ו- 0 עבור $B = 0$

43

43

דוגמאות למשלים ל-2

- המשלים ל-2 של $(101100)_2$, כאשר n=6 הוא:
$(2^6)_{10} - (101100)_2 = (1000000 - 101100)_2 = (010100)_2$
- המשלים ל-2 של $(0.0110)_2$, כאשר n=0 הוא:
$(1 - 0.0110)_2 = (0.1010)_2$

44

44

ייצוג מספר שלילי ע"פ המשלים ל-2

- נייצג מספר חיובי ע"י הערך החיובי של המספר, עם 0 מוביל אחד לפחות (MSB=0) !
- נייצג מספר שלילי (שונה מ-0) בתור המשלים ל-2 של הייצוג החיובי של המספר. (יוצא: MSB=1)
  - רוב המחשבים היום מייצגים מספרים שליליים בשיטת המשלים ל-2.
  - הערה: גם כאן ה-MSB מייצגת את הסימן.

45

45

מציאת המשלים ל-2

ישנן שתי דרכים למציאת המשלים ל-2 של מספר בינארי כלשהו:

- דרך ראשונה:
  - הפוך כל מופע של 1 ל-0 וכל מופע של 0 ל-1
  - הוסף 1 למספר החדש שהתקבל
- דרך שניה:
  - עבור על כל הסיביות מימין לשמאל
  - השאר את כל הסיביות כפי שהן עד ה-1 הראשון
  - בהמשך, הפוך כל מופע של 1 ל-0 וכל מופע של 0 ל-1.

46

46

- דוגמא: נמצא את ייצוג המספר 6- ב: 5 סיביות.

המספר 6 ב- 5 סיביות	00110
לאחר הפיכת הסיביות	11001
הוספת 1	+ 1
	11010

- גם למצוא מהו ערכו של מספר שלילי משתמשים באותה שיטה. הופכים את הסיביות ומוסיפים 1.
- דוגמא:

המספר הנתון	100101
לאחר הפיכת הסיביות	011010
הוספת 1	1
	011011

קיבלנו 27 בייצוג הבינרי, כלומר 100101=-27

47

47

הערות

- חשוב מאוד לקבוע מראש מהו מספר הסיביות בהן משתמשים לייצוג!
- **המשלים ל-2 של מספר שלילי** המיוצג בשיטה זו, הוא המספר החיובי המתאים!
- דוגמה:
  - המספר הנתון ב-5 סיביות: 11001 = -7
  - המשלים ל-2: 00111 = 7

48

48

כל המספריים הבינריים ב- 4 סיביות המיוצגים בשיטת המשלים ל-2 (ייצוג יחיד למספר 0).

עשרוני	בינרי	עשרוני	בינרי
0	0000	-1	1111
1	0001	-2	1110
2	0010	-3	1101
3	0011	-4	1100
4	0100	-5	1011
5	0101	-6	1010
6	0110	-7	1001
7	0111	-8	1000

49

49

טווח הייצוג בשיטת המשלים ל-2

- המספר החיובי הגדול ביותר: $01\ldots111 = 2^{n-1} - 1$
- המספר השלילי הקטן ביותר : $10\ldots000 = -2^{n-1}$
- הטווח הוא : $-2^{n-1} \le N \le 2^{n-1}-1$
- הטווח עבור 4 סיביות הוא : 7 --- -8
- הטווח עבור 8 סיביות הוא : 127 --- -128
- ל- 0 יש רק ייצוג אחד : 000...000

50

50

החיבור במשלים ל- 2

- מבצעים חיבור בינארי בין המספרים תוך התעלמות מסיבית הסימן. אם יש נשא – זורקים אותו.
- דוגמא : נחשב את (-2) + 5 :

0101
<u>1110</u>
(1) 0011

- פעולת החיבור פשוטה. התוצאה מתקבלת מיידית ובייצוג הנכון!

51

51

דוגמאות

+ 3	0011	- 2	1110
+ + 4	0100	+ - 6	1010
+ 7	0111	- 8	11000
+ 6	0110	+ 4	0100
+ - 3	1101	+ - 7	1001
+ 3	10011	- 3	1101

52

52

חיסור במשלים ל- 2

- מבצעים חיבור של המספר הראשון עם השלילה של המספר השני. כלומר:
- נחשב את המשלים ל-2 של המספר השני.
- נסכם את המספר הראשון עם המשלים שמצאנו.
- ניתן לקצר:
  - נהפוך את הסיביות של המספר השני
  - נסכום את שני המספרים ונוסיף נשא (Cin) כבר בסיבית הראשונה.

53

53

דוגמאות

		1 Cin			1 Cin
+ 4	0100	0100	+ 3	0011	0011
- + 3	-0011	+1100	- + 4	-0100	+1011
+ 1		10001	- 1		1111
		1 Cin			1 Cin
+ 3	0011	0011	-3	1101	1101
- - 4	-1100	+0011	- -4	-1100	+0011
- 1		0111	+1		10001

54

54

תחום, וגלישה

- בשיטות הייצוג של המשלימים אפשר לחבר כל שני מספרים ללא התחשבות בסימן, **כל עוד המספרים והתוצאה נמצאים בתחום (טווח הייצוג).**
- כאשר התוצאה חורגת מהתחום, נקבל מספר שסימנו שונה מהסימן הצפוי - **גלישה.**
- גלישה מתקבלת כאשר הסימן של שני המספרים זהה ושונה מסימן התוצאה!!!
- כאשר סימני המחוברים שונה לא תהיה גלישה.

דוגמאות ל-**גלישה** עבור n=4

- 3 + - 6 - 9	1101 1010 10111 -> +7	+5 + +6 +11	0101 0110 1011 -> -5
-8 + -8 -16	1000 1000 10000 -> 0	+ 7 + + 7 +14	0111 0111 1110 -> -2

סוף