

אלגוריתמים ומבני נתונים 1

Algorithms and Data Structures 1

מבחן גמר

Final Exam

בהצלחה רבה!!!

Good Luck!!!

הוראות לנבחנת

- את התשובות יש למלא במחברת המענה המצורפת. לתשומת ליבך – טופס השאלות לא מועבר לבודקים ולכן תשובות שתכתבנה על טופס שאלות המבחן לא תיבדקנה.
- לפני תחילת המענה על הבחינה – שימי לב שהפרטים האישיים המופיעים על מחברת המענה-נכונים.
- מותר לכתוב בעט או בעפרון.
- דאגי לכך שהכתב ייצא ברור גם לאחר סריקה (הימנעי מכתב חלש מדוי).
- משך המבחן 4 שעות.
- חומר עזר מותר במבחן הוא חומר העזר שהודפס על ידינו ומונח על השולחנות. אין צורך במחשבון.
- אין לקשקש/ לכתוב על חומר העזר.
- את חומר העזר יש להשאיר על השולחן בסוף המבחן.
- אם הינך משתמשת בתשובתך בקטע קוד המופיע בחומר העזר המותר במבחן, אינך צריכה להעתיקו למחברת המענה-ניתן להסתפק בציון מיקום הקוד בו השתמשת.
- אסור בהחלט להעביר חומר עזר מאחת לרעותה. שימוש בחומר עזר משותף יגרום לפסילת הבחינות של כל השותפות בו.
- יש לשמור על דממה מוחלטת בשעת הבחינה. תלמידה שתדבר במהלך המבחן, מחברת הבחינה שלה תסומן. סימון זה יילקח בחשבון בעת בדיקת המבחן.
- דגש רב יושם לאיתור תשובות דומות מידי בין מבחנים סמוכים.
- במקרה כזה, תיערך בדיקה מול מצלמות האבטחה, ותישקל פסילת בחינות אלה.

בהצלחה רבה (:

שאלה 1 (25 נקודות)

אדואה מתפרנסת מדיג בשני חופים, החוף המזרחי והחוף המערבי. היא גילתה כי בחודשים מסוימים בשנה תפוקת הדיג עדיפה בחוף המזרחי ובחודשים אחרים בחוף המערבי. עומדות לרשותה שתי טבלאות E ו- W המפרטות את מספר הדגים שאפשר לדוג בכל חודש בכל אחד מהחופים, כך ש- $E[i]$ הוא מספר הדגים שאפשר לדוג בחודש i בחוף המזרחי ו- $W[i]$ הוא מספר הדגים שאפשר לדוג בחודש i בחוף המערבי. אדואה רוצה לדוג מספר מקסימלי אפשרי של דגים, ולשם כך נודדת מחוף לחוף בהתאם לנתוני הטבלאות. אולם, עליה לשלם סכום שהוא שווה ערך ל- L דגים לצורך כל מעבר בין החופים.

- בהינתן הטבלאות E ו- W , הערך L , ושני מספרים m_1 ו- m_2 (בטווח $[1..12]$), $|m_1 - m_2| < 12$:
- כתבי אלגוריתם שסיבוכיות זמן הריצה שלו קטנה ככל הניתן, המוצא את המספר המקסימלי של דגים שאדואה יכולה לדוג, החל מחודש m_1 ועד חודש m_2 (כולל).
 - צייני באיזו שיטה אלגוריתמית משתמש האלגוריתם שכתבת, ונתחי את סיבוכיות זמן הריצה שלו.
 - על האלגוריתם שכתבת בסעיף א' לייצר לאדואה בנוסף גם את תכנית הדיג המפרטת באיזה חוף עליה לדוג בכל אחד מהחודשים שבין חודש m_1 לחודש m_2 כך שתוכל לדוג את מספר הדגים המקסימלי.

שאלה 2 (25 נקודות)

- א. בהינתן שני מספרים טבעיים שונים מ- 0 , L ו- S , תארי במילים אלגוריתם יעיל ככל הניתן המוצא את המספר הטבעי המינימלי בעל L ספרות שונות מ- 0 שסכומן S , אם הוא קיים. אם לא קיים מספר העונה על הדרישות, האלגוריתם יחזיר 0 .
- דוגמאות: עבור $L=4$, $S=14$ המספר הטבעי המינימלי הוא 1139 (ואותו יחזיר האלגוריתם).
עבור $L=4$, $S=41$ האלגוריתם יחזיר 0 .
- ב. צייני באיזו שיטה אלגוריתמית משתמש האלגוריתם שכתבת, והוכיחי כי האלגוריתם שכתבת עונה על הדרישות בשאלה.

שאלה 3 (15 נקודות)

- נתון מערך S בגודל n המכיל בצורה מפוזרת את שמות התלמידות הלומדות ב- 3 סמינרים: סמינר א', סמינר ב' וסמינר ג'. כל איבר במערך מכיל את שם התלמידה ואת שם הסמינר בו היא לומדת (בשני שדות שונים).
אנו מעוניינים לסדר מחדש את המערך כך ששמות התלמידות מכל סמינר יופיעו בו ברצף באופן שבתחילת המערך יהיו תלמידות סמינר א', לאחריהן תלמידות סמינר ב' ולבסוף תלמידות סמינר ג'.
ניתן להשתמש בנוסף רק בזכרון קבוע.
- א. תארי במילים אלגוריתם לביצוע הסידור המבוקש במספר החלפות מינימלי.
- ב. תני דוגמה למערך S שיהווה מקרה גרוע ביותר עבור אלגוריתם המבצע את הסידור המבוקש במספר החלפות מינימלי.

שאלה 4 (25 נקודות: סעיף א - 13 נק'; סעיף ב.i - 8 נק'; סעיף ב.ii - 4 נק')

א. נתון מערך B בגודל n המורכב מרצף של 3 תתי-מערכים ממוינים $B1, B2, B3$ באופן ש- $B1$ ממוקם משמאל, לאחריו $B2$ ומימין $B3$. וכן נתון כי איברי $B1$ הם הגדולים ביותר ואיברי $B3$ הם הקטנים ביותר במערך B (כלומר אין חיתוך בין האינטרוולים שמיוצגים ע"י 3 תתי-המערכים). B מכיל n ערכים מספריים שונים זה מזה.

דוגמא: יהי מערך B בגודל $n=11$ המורכב מ-3 תתי המערכים הבאים ע"פ הסדר שהוסבר:

$$B1 = [50.25, 112.5, 134, 186.75], B2 = [-0.5, 2.44, 3.8, 6, 49.11], B3 = [-2.5, -1]$$

כתבי אלגוריתם יעיל המקבל את המערך B ומחזיר שני אינדקסים $i2$ ו- $i3$, כך ש- $i2$ הוא אינדקס האיבר הראשון של $B2$ (בתוך B), ו- $i3$ הוא אינדקס האיבר הראשון של $B3$ (בתוך B). עבור הדוגמא שלעיל האלגוריתם יחזיר: $i2 = 5, i3 = 10$.

ב. הערה: אין קשר בין השאלה שבסעיף א', לבין זו שסעיף ב'.

נתון מערך C בגודל n המכיל מספרים טבעיים ונתונים n_1, \dots, n_k , המערך C מורכב מרצף של k תתי-מערכים ממוינים שגדליהם n_1, \dots, n_k . $n = n_1 + \dots + n_k$. הניחי כי $n_i > 1$ לכל $1 \leq i \leq k$. המטרה היא לקבל את המערך C ממוין.

הערות:

- יתכן חיתוך בין האינטרוולים המיוצגים ע"י תתי-המערכים.
- ניתן להשתמש בזכרון נוסף בגודל $O(n)$ במידת הצורך.

1. האם הנתון כי כל אחד מתתי-המערכים כבר ממוין יכול לשפר את סיבוכיות זמן הריצה לקבלת מערך ממוין C , לעומת מצב שבו לא ידוע אם הם ממוינים?
2. אם תשובתך חיובית - תארי אלגוריתם יעיל המקבל את המערך C ואת גדלי תתי-המערכים, ומחזיר מערך C ממוין, ונתחי את סיבוכיות זמן הריצה שלו.
אם תשובתך שלילית - נמקי מדוע לא ניתן לשפר את הסיבוכיות (כאשר נתון שתתי-המערכים ממוינים) ונתחי את סיבוכיות זמן הריצה לקבלת המערך C המתואר לעיל - ממוין.

ii. בהינתן גם שההפרש בין האיבר המקסימלי לאיבר המינימלי במערך C הוא n , עני שוב על סעיף ב.i.

שאלה 5 (10 נקודות)

עבור מספר טבעי n יהי $k = \lfloor \log n \rfloor$ ויהי $\langle n_k, n_{k-1}, \dots, n_0 \rangle$ הייצוג הבינרי של n . תהי סדרת המערכים A_0, A_1, \dots, A_k כך שמערך A_i הוא בגודל 2^i לכל $0 \leq i \leq k$.
נאחסן n מספרים בסדרת $k+1$ המערכים בהתאם לייצוג הבינרי של n : אם $n_i = 1$, המערך A_i יאחסן מספרים כמלוא גודלו. אם $n_i = 0$, המערך A_i לא יאחסן מספרים כלל (כלומר, יהיה ריק). כל מערך בסדרה הוא ממוין, אך לא בהכרח מתקיים מיון בין המערכים בסדרה.

דוגמא: נסמן מערך ריק כך: $A_i = []$.

עבור $n = 13$, שייצוגו הבינרי הוא 1101, נאחסן את המספרים בסדרה באופן הבא:

$$A_0 = [17], \quad A_1 = [], \quad A_2 = [1, 15, 23, 27], \quad A_3 = [3, 9, 10, 28, 29, 33, 36, 38]$$

עבור הוספת n מספרים לסדרת מערכים ריקה, נתחי את זמן הריצה לשיעורין של פעולת הוספה אחת מתוך רצף של n פעולות הוספה לסדרת המערכים הנתונה.

פעולת הוספת המספר $n+1$ לסדרת המערכים שיש בה n מספרים תתבצע באופן הבא:

יהי B מערך עזר שנ ניתן לחזור ולהכפיל את גודלו פי 2.

בתחילה B יהיה בגודל 1 ויכיל רק את המפתח החדש.

נתחיל בתהליך של חיפוש מערך A_i ריק, החל מ- $i = 0$.

אם מצאנו A_i מערך ריק – נכניס אליו את תכולת B .

אחרת נכפיל פי 2 את גודל B ונמזג לתוך B המורחב את תוכנו הקודם (של B) ואת תוכנו של A_i , כך שיתקבל ב- B

מערך ממוין. פעולה זו מרוקנת את המערך A_i ולכן נסמן כעת את המערך A_i כמערך ריק.

נמשיך בתהליך עד למציאת המערך הריק הראשון.

אם לא מצאנו כזה, נוסיף את המערך הבא לפי האופן שבו הוגדרה סדרת המערכים.

המשך הדוגמא:

- לאחר הוספת המספר 30, סדרת המערכים מאחסנת 14 מספרים ולכן תהיה:

$$A_0 = [], \quad A_1 = [17, 30], \quad A_2 = [1, 15, 23, 27], \quad A_3 = [3, 9, 10, 28, 29, 33, 36, 38]$$

- לאחר הוספת עוד 2 מספרים לסדרת המערכים, יתווסף המערך A_4 אשר יכיל את כל 16 המספרים.

בהצלחה!