

תרגילים - ניתוח לשיעורין

1. סדרה של n פעולות מתבצעת על מבנה נתונים. הפעולה i עולה i אם i הוא חזקה מדויקת של 2. אחרת, העלות היא 1. השתמשי בשיטת הצבירה לקביעת העלות לשיעורין של כל פעולה.

2.

סדרה של n פעולות מתבצעת על מבנה נתונים. הפעולה k עולה k יחידות אם k הינה חזקה מדויקת של 2; אחרת, הפעולה עולה $\lfloor \lg k \rfloor$ יחידות ($k = 1, \dots, n$).

- השתמשו בשיטת הצבירה כדי לקבוע את העלות לשיעורין של כל פעולה.
- השתמשו בשיטת החיובים (שיטת הבנקאי) כדי לקבוע את העלות לשיעורין של כל פעולה.

3.

על מבנה נתונים מוגדרת פעולה $f()$. הפעולה מבוצעת n פעמים.
 זמן הריצה של הקריאה i ל- $f()$ היא:
 $O(i)$ אם i הוא חזקה של 2.
 $O(\lg i)$ אם i הוא חזקה של 3.
 לכל ערך אחר של i זמן הריצה של $f()$ הוא $O(1)$.
 מה זמן הריצה האמורטי של $f()$? הוכיחי את תשובתך בעזרת שיטת הצבירה.

4. טענה: סיבוכיות זמן הריצה לשיעורין תמיד קטנה מסיבוכיות זמן הריצה במקרה הגרוע. האם הטענה נכונה. הסבירי את תשובתך.

5.

תכנית צריכה לקרוא מספרים מהקלט, ולכל מספר שנקלט להדפיס את המספר האחרון שנקלט שהיה גדול ממנו (אם אין כזה יודפס nil).

כיצד לממש קליטה של מספר שעלותה לשיעורין היא $O(1)$?

6.

- ברצוננו לממש תור Q באמצעות שתי מחסניות S_1 ו- S_2 .
- תארו את מבנה המימוש וכתבו בפסידוקוד את הפעולות ENQUEUE ו-DEQUEUE של Q בעזרת פעולות המחסניות PUSH ו-POP.
 - בהנחה ש- Q ריק מלכתחילה, מבצעים n פעולות הכנסה ו- m פעולות מחיקה, בסדר אפשרי כלשהו ($m \leq n$). כמה פעולות PUSH וכמה פעולות POP מתבצעות במבנה לכל היותר?
 - מהו זמן הריצה של כל פעולה של Q במקרה הגרוע ובמקרה הטוב?
 - מהו זמן הריצה לשיעורין של כל אחת משתי הפעולות?

7.

עליך לממש בעזרת שלוש מחסניות ו- $O(1)$ זיכרון נוסף, מבנה נתונים עליו מוגדרות הפעולות הבאות:

- א. $insert(ds, x)$ – מכניסה את x למבנה ds .
- ב. $removeLast(ds)$ – מוחקת מהמבנה ומחזירה את האיבר האחרון שהוכנס למבנה.
- ג. $removeFirst(ds)$ – מוחקת מהמבנה ומחזירה את האיבר הראשון שהוכנס למבנה, מבין האיברים שבמבנה.
- ד. $isEmpty(ds)$ – מחזירה $true$ אם מבנה הנתונים ריקה ו- $false$ אחרת.

זמן הריצה לשיעורין של כל פעולה צריך להיות $O(1)$.

תארי את מבנה הנתונים ואת אופן הביצוע של כל פעולה. הראי שזמן הריצה של המימוש שלך עומד בתנאי השאלה.

8.

הבעיה:

את נדרשת לממש 3 מחסניות, S_1, S_2, S_3 בעזרת מערך יחיד בגודל $6n$, כאשר ברגע נתון, סך כל האיברים בשלושת המחסניות יחדיו, הוא לכל היותר $5n$ איברים. הזכרון הנוסף המותר (מעבר למערך הנתון) הוא בגודל של $O(1)$ לכל היותר. על המימוש לעמוד בדרישה שלכל רצף של הכנסות ומחיקות אל/ומהמחסניות, ניתוח הזמן לשיעורין לפעולה אחת הוא $O(1)$. הניחי כי המחסניות מתחילות ריקות, והמקום בזיכרון עבור המערך הוקצה מראש.

חברתך מציעה את הפתרון הבא:

מחסנית S_1 , תתחיל מתחילת המערך, כלומר החל מאינדקס 0 והאינדקס גדל בכל הכנסה, מחסנית S_3 תתחיל מסוף המערך, כלומר החל מאינדקס $6n-1$, והאינדקס יקטן בכל הכנסה, ומחסנית S_2 , תתחיל מאינדקס $2n$, כאשר האינדקס יגדל בכל הכנסה. כאשר רוצים להכניס איבר לאחת המחסניות, ואין מקום במערך להכניסו (ההכנסה גורמת ל"התנגשות" כמפורט בסוף השאלה), מזיזים את איברי מחסנית S_2 לכיוון השני.

עליך להחליט האם המימוש המוצע לך על ידי חברתך מתאים לנדרש בשאלה.

אם כן, עליך להסביר במדויק את מימוש פעולות ההוצאה והכנסה של איברים למחסניות השונות ואת אופן הטיפול בהתנגשויות בין מחסניות, כלומר להגדיר את אופן הזזת איברי מחסנית S_2 כך שהפתרון המוצע יעמוד בדרישות זמן הריצה לשיעורין הנדרש.

אם לא, עליך להסביר מדוע פתרון זה לא מאפשר לעמוד בניתוח הזמן לשיעורין הנדרש בשאלה.

שימי לב:

1. מצב של "התנגשות" בין מחסניות יכולה להתרחש רק בין מחסניות צמודות, כלומר בין S_1 ו- S_2 או בין S_2 ל- S_3 . במקרה של התנגשות, אם ההתנגשות היא בין מחסנית S_1 למחסנית S_2 , נזיז את איברי מחסנית S_2 לכיוון מחסנית S_3 . אם ההתנגשות מתרחשת בין מחסנית S_2 למחסנית S_3 , נזיז את איברי מחסנית S_2 לכיוון מחסנית S_1 .
2. הפעולות האפשריות על מבנה הנתונים, הן הכנסה והוצאה של איבר לתוך/מתוך כל אחת משלושת המחסניות.