

UNIVERSITÀ DI MILANO BICOCCA



Dipartimento di Fisica G. Occhialini

Dal paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen all'esperimento di Aspect

Elaborato Triennale

Relatore:
Prof. **Simone Alioli**

Candidato:
Efrem Maconi
Matricola: 814088

Anno Accademico 2018/2019

Indice

1	Introduzione	1
1.1	La meccanica quantistica e i suoi postulati	1
1.2	Misure concernenti solo una parte del sistema fisico	2
1.2.1	Prodotto tensore	2
1.2.2	Calcolo delle predizioni fisiche su di un sistema composto da due sottosistemi	4
1.2.3	Entanglement	6
1.3	Operatore di densità	7
1.3.1	Operatore di densità per stati puri	7
1.3.2	Operatore di densità per miscela statistica di stati	8
1.3.3	Descrizione di una sola parte del sistema: traccia parziale	9
2	Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen	11
2.1	Può la descrizione quanto-meccanica della realtà fisica considerarsi completa?	12
2.2	Parametri supplementari	14
3	Disuguaglianza di John S. Bell	15
3.1	La disuguaglianza	15
3.1.1	Previsione della meccanica quantistica	15
3.1.2	Previsione di una teoria a variabili nascoste locali	17
3.1.3	Incompatibilità tra le due previsioni	18
4	Esperimento di Alain Aspect	19
4.1	Esperimento con fotoni entangled	19
4.2	Un semplice esempio di teoria a parametri supplementari	20
4.3	Disuguaglianza CHSH	21
4.3.1	Disaccordo con la meccanica quantistica	22
4.4	Esperimenti ottici per la verifica delle disuguaglianze di Bell	24
4.4.1	Esperimenti ad un canale di polarizzazione	24
4.4.2	Esperimenti a due canali di polarizzazione	26
4.5	Esperimenti di Aspect (1980-1982)	26
4.5.1	Disuguaglianze di Bell testate usando analizzatori variabili nel tempo	27
5	Impossibilità di comunicazioni superluminali	31
5.1	Teorema di non comunicazione	31
5.2	Teorema di non clonazione	32
6	Conclusioni	35

1. Introduzione

1.1 La meccanica quantistica e i suoi postulati

All'inizio del secolo scorso, Max Planck introdusse la quantizzazione dello scambio di energia tra luce e materia; Albert Einstein, per spiegare l'effetto fotoelettrico, ipotizzò che la stessa radiazione elettromagnetica fosse costituita da quanti; negli stessi anni vennero fornite prove convincenti sull'esistenza delle molecole e questi risultati, insieme a molti altri esperimenti, portarono fisici e filosofi ad accettare la granularità della materia e la quantizzazione dell'energia nel mondo microscopico.

Tra i vari problemi vi era anche quello relativo alla descrizione degli spettri atomici e della struttura dell'atomo: fu naturale partire dalle leggi di Newton, dal momento che queste si rivelarono molto accurate nella descrizione dei moti planetari; tali modelli (si pensi ad esempio all'atomo di Bohr) erano basati su ipotesi ad hoc, permettevano di trattare unicamente sistemi fisici molto semplici e, inoltre, non davano una descrizione completa dei fenomeni osservati sperimentalmente.

Sulla base di questi fenomeni e sulla base di idee, all'apparenza bizzarre, come quella della dualità onda-particella proposta da Louis de Broglie (1924) nacque, negli anni Venti, la meccanica quantistica: le prime formulazioni si devono a Werner Karl Heisenberg con la sua 'meccanica delle matrici' e a Erwin Schrödinger con la sua 'meccanica ondulatoria' (due formalismi fisico-matematici equivalenti).

La meccanica quantistica, nel formalismo di E. Schrödinger, si basa sui seguenti postulati:

- *Primo Postulato*: all'istante di tempo fissato t_0 , lo stato di un sistema fisico è definito specificando un ket $|\psi(t_0)\rangle$ appartenente allo spazio degli stati \mathcal{E} .
- *Secondo Postulato*: Qualsiasi quantità fisica misurabile \mathcal{A} è descritta da un operatore A agente su \mathcal{E} ; questo operatore è un'osservabile.
- *Terzo Postulato*: Una misura della quantità fisica \mathcal{A} può dare come risultato unicamente uno degli autovalori della corrispondente osservabile A .
- *Quarto Postulato (caso di spettro discreto)*: quando la quantità fisica \mathcal{A} è misurata su un sistema che si trova nello stato normalizzato $|\psi\rangle$, la probabilità di ottenere l'autovalore a_n della corrispondente osservabile A è

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle u_n^i | \psi \rangle|^2,$$

dove g_n è il grado di degenerazione di a_n e $\{ |u_n^i\rangle \}$ ($i = 1, 2, \dots, g_n$) è un set ortonormale di vettori che forma una base del sottospazio \mathcal{E}_n associato all'autovalore a_n di A .

- *Quinto Postulato*: Se la misura della quantità fisica \mathcal{A} sul sistema nello stato fisico $|\psi\rangle$ restituisce a_n , lo stato del sistema immediatamente dopo la misura è la proiezione normalizzata di $|\psi\rangle$ sul sottospazio associato ad a_n :

$$|\psi\rangle \implies \frac{P_n |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}},$$

dove P_n è il proiettore su \mathcal{E}_n .

- *Sesto Postulato*: L'evoluzione temporale del vettore di stato $|\psi(t)\rangle$ è governata dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle,$$

dove $H(t)$ è l'osservabile associata all'energia totale del sistema.

Nell'interpretazione più diffusa della meccanica quantistica, l'interpretazione ortodossa, lo stato di una particella, in cui si sintetizza tutto ciò che è possibile sapere del sistema, è dunque rappresentato nel valore (complesso) di un'onda la cui evoluzione è regolata dall'equazione di Schrödinger; la conoscenza dello stato permette di descrivere e prevedere la statistica dei possibili risultati della misurazione.

Lecito è domandarsi che cosa effettivamente oscilla nella meccanica ondulatoria, dal momento che all'onda matematica non è associato nulla di materiale anche se, quell'onda, rappresenta la totalità dell'informazione posseduta su di un sistema quantistico; J. Bell risponde a tale quesito dicendo che "non abbiamo idea di ciò che oscilla... e non ci poniamo la domanda" [9] .

La funzione d'onda associata al sistema potrebbe essere vista come un'onda di possibilità in quanto essa permette di trovare la statistica dei possibili risultati di una misura; nell'ottica dell'interpretazione ortodossa, non è possibile associare a tali possibilità proprietà effettivamente possedute dalla particella fino al momento in cui viene eseguita una misurazione: il processo di misura, infatti, causa il collasso del pacchetto d'onda e, sempre in questa interpretazione, il concretizzarsi della particella su di uno stato ben preciso. Colpisce l'astrazione con cui si descrive il sistema microscopico, l'importanza posta nel processo di misura e la separazione netta tra il sistema microscopico e l'apparato di misura macroscopico che è descritto con le leggi della fisica classica.

1.2 Misure concernenti solo una parte del sistema fisico

1.2.1 Prodotto tensore

Il primo postulato della meccanica quantistica afferma che ogni stato quantistico della particella è caratterizzato da un vettore di stato appartenente ad uno spazio astratto, \mathcal{E} , detto *spazio degli stati* della particella.

Siano S_1 ed S_2 due sistemi fisici isolati e siano \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 i relativi spazi degli stati; nel caso in cui i due sistemi iniziassero ad interagire tra loro non sarebbe più possibile fare

riferimento ad S_1 ed S_2 come due sistemi isolati, ma è necessario considerare il sistema globale S , a cui corrisponde lo spazio degli stati \mathcal{E} .

Definizione

Per definizione lo spazio vettoriale \mathcal{E} è detto *prodotto tensore* di \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \quad (1.1)$$

se ad ogni coppia di vettori, $|\varphi(1)\rangle$ appartenente a \mathcal{E}_1 e $|\chi(2)\rangle$ appartenente \mathcal{E}_2 , è associato un vettore $|\psi\rangle$ di \mathcal{E} , denotato da

$$|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle. \quad (1.2)$$

Questa corrispondenza deve rispettare le seguenti condizioni:

1. Linearità rispetto alla moltiplicazione per numeri complessi:

$$\begin{aligned} [\lambda |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= \lambda [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle], \\ |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu |\chi(2)\rangle] &= \mu [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

2. Distributività rispetto all'addizione:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle, \\ [|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

3. Data una base dello spazio \mathcal{E}_1 , $\{|u_i(1)\rangle\}$, e una base di \mathcal{E}_2 , $\{|v_j(2)\rangle\}$, il set di vettori $\{|u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle\}$ costituisce una base in \mathcal{E} .

La definizione data può essere estesa facilmente al prodotto tensore di un numero finito di spazi.

Si noti che, come appena detto, preso un vettore di \mathcal{E}_1 ed un vettore di \mathcal{E}_2 ad essi corrisponde un vettore di \mathcal{E} ma esistono vettori in \mathcal{E} che non sono il prodotto tensore di un vettore di \mathcal{E}_1 per un vettore di \mathcal{E}_2 . Infatti, dal momento che $\{|u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle\}$ costituisce per ipotesi una base in \mathcal{E} , il più generale elemento di questo spazio può essere espresso come

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j} |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle. \quad (1.5)$$

Dati $N_1 N_2$ numeri arbitrari complessi $c_{i,j}$, non è sempre possibile porli nella forma di un prodotto $a_i b_j$, con N_1 numeri a_i ed N_2 numeri b_j .

Dunque, in generale, vettori $|\varphi(1)\rangle$ e $|\chi(2)\rangle$ di cui $|\psi\rangle$ è il prodotto tensore non esistono.

(Notazioni equivalenti: $|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ è equivalente a $|\varphi(1)\rangle |\chi(2)\rangle$ e a $|\varphi(1)\chi(2)\rangle$).

Esempio:

Si considerino due particelle di spin 1/2; lo stato più generale di $\mathcal{E}_s(1)$ descrivente la prima particella ha la forma

$$|\varphi(1)\rangle = \alpha_1 |1, +\rangle + \beta_1 |1, -\rangle \quad (1.6)$$

e lo stato di $\mathcal{E}_s(2)$ per la seconda particella è del tipo:

$$|\chi(1)\rangle = \alpha_2 |2, +\rangle + \beta_2 |2, -\rangle, \quad (1.7)$$

con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ numeri complessi.

L'unione delle due particelle in un unico sistema porta alla definizione dello spazio $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_s(1) \otimes \mathcal{E}_s(2)$ una cui base risulta essere:

$$\begin{aligned} |++\rangle &= |1, +\rangle |2, +\rangle, \\ |+-\rangle &= |1, +\rangle |2, -\rangle, \\ |-+\rangle &= |1, -\rangle |2, +\rangle, \\ |--\rangle &= |1, -\rangle |2, -\rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Usando un arbitrario vettore di $\mathcal{E}_s(1)$ ed un arbitrario vettore di $\mathcal{E}_s(2)$, è possibile costruire un ket di \mathcal{E}_s :

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\rangle |\chi(2)\rangle &= \\ &= \alpha_1 \alpha_2 |++\rangle + \alpha_1 \beta_2 |+-\rangle + \beta_1 \alpha_2 |-+\rangle + \beta_1 \beta_2 |--\rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Il più generale vettore di \mathcal{E}_s è una combinazione lineare dei vettori di base:

$$|\psi\rangle = \alpha |++\rangle + \beta |+-\rangle + \gamma |-+\rangle + \delta |--\rangle. \quad (1.10)$$

Non è in generale possibile trovare due ket $|\varphi(1)\rangle$ e $|\chi(2)\rangle$ il cui prodotto tensore sia $|\psi\rangle$; infatti, nel caso in esame, per avere (1.10) nella forma (1.9) è necessario che:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 \alpha_2 \\ \beta &= \alpha_1 \beta_2 \\ \gamma &= \beta_1 \alpha_2 \\ \delta &= \beta_1 \beta_2 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha/\beta = \gamma/\delta \quad (1.11)$$

condizione non necessariamente verificata.

1.2.2 Calcolo delle predizioni fisiche su di un sistema composto da due sottosistemi

Si consideri un sistema composto da due parti (1) e (2) e siano \mathcal{E}_1 ed \mathcal{E}_2 i rispettivi spazi degli stati; il sistema globale (1)+(2) è descritto da un ket appartenente allo spazio $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$.

Si possono immaginare misure che riguardano una sola parte (ad esempio la parte(1)) del sistema globale. Le osservabili $\tilde{A}(1)$ corrispondenti a queste misure sono definite in $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ estendendo le osservabili $A(1)$ agenti sono su \mathcal{E}_1 :

$$A(1) \implies \tilde{A}(1) = A(1) \otimes \mathbb{1}(2), \quad (1.12)$$

dove $\mathbb{1}(2)$ è l'operatore identità di \mathcal{E}_2 .

Lo spettro di $\tilde{A}(1)$ in $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ è lo stesso di $A(1)$ in \mathcal{E}_1 e gli autovalori di $\tilde{A}(1)$ sono degeneri in \mathcal{E} , anche nel caso in cui nessuno degli autovalori di $A(1)$ sia degeneri in \mathcal{E}_1 (nella condizione in cui la dimensione di \mathcal{E}_2 sia maggiore di 1).

Sia P_n il proiettore, in \mathcal{E}_1 , sul sottospazio associato all'autovalore a_n di $A(1)$:

$$P_n(1) = \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i(1)\rangle \langle u_n^i(1)|, \quad (1.13)$$

dove i ket $|u_n^i(1)\rangle$ sono g_n autovettori ortonormali associati ad a_n .

Sia $\tilde{P}_n(1)$ l'estensione di $P_n(1)$ in $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$:

$$\tilde{P}_n(1) = P_n(1) \otimes \mathbb{1}(2). \quad (1.14)$$

L'operatore identità $\mathbb{1}(2)$ di \mathcal{E}_2 , scelta una base per questo spazio vettoriale, può essere scritto tramite la relazione di chiusura nel seguente modo:

$$\mathbb{1}(2) = \sum_k |v_k(2)\rangle \langle v_k(2)|. \quad (1.15)$$

Sostituendo (1.13) e (1.15) in (1.14), si ottiene:

$$\tilde{P}_n(1) = \sum_{i=1}^{g_n} \sum_k |u_n^i(1)v_k(2)\rangle \langle u_n^i(1)v_k(2)|. \quad (1.16)$$

Conoscendo lo stato $|\psi\rangle$ (supposto normalizzato) del sistema globale è possibile calcolare la probabilità $\mathcal{P}(a_n)$ di trovare come risultato a_n in una misura di $A(1)$ sulla parte (1) di questo sistema. Si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= \langle \psi | \tilde{P}_n(1) | \psi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{g_n} \sum_k |\langle u_n^i(1)v_k(2) | \psi \rangle|^2. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Lo stato del sistema, $|\psi'\rangle$, dopo la misura è

$$|\psi'\rangle = \frac{\tilde{P}_n(1) |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \tilde{P}_n(1) | \psi \rangle}}. \quad (1.18)$$

Si noti, da quanto appena esposto, che:

1. La scelta della base $\{|v_k(2)\rangle\}$ in \mathcal{E}_2 è arbitraria e le predizioni riguardanti il sottosistema (1) non dipendono da essa.
2. Se lo stato $|\psi\rangle$ prima della misura può essere scritto nel seguente modo:

$$|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle, \quad (1.19)$$

dove $|\varphi(1)\rangle$ e $|\chi(2)\rangle$ sono due stati normalizzati di \mathcal{E}_1 e \mathcal{E}_2 , lo stato finale risulta essere:

$$|\psi'(1)\rangle = |\varphi'(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle, \quad (1.20)$$

con

$$|\varphi'(1)\rangle = \frac{P_n(1) |\varphi(1)\rangle}{\sqrt{\langle \varphi(1) | P_n(1) | \varphi(1) \rangle}}. \quad (1.21)$$

Lo stato del sistema (1) è dunque cambiato, ma non quello del sistema (2).

3. Se l'autovalore a_n di $A(1)$ è non degenere in \mathcal{E}_1 o, più in generale, se $A(1)$ rappresenta un set completo di osservabili commutanti in \mathcal{E}_1 , lo stato del sistema dopo una misura che restituisce a_n è

$$|\psi'\rangle = |u_n(1)\rangle \otimes |\chi'(2)\rangle, \quad (1.22)$$

dove il vettore normalizzato $|\chi'(2)\rangle$ di \mathcal{E}_2 è dato da:

$$|\chi'(2)\rangle = \frac{\sum_k |v_k(2)\rangle \langle u_n(1)v_k(2)|\psi\rangle}{\sqrt{\sum_k |\langle u_n(1)v_k(2)|\psi\rangle|^2}}. \quad (1.23)$$

Dunque, sia che lo stato $|\psi\rangle$ del sistema globale sia o meno rappresentabile come un prodotto tensore, dopo una misura completa rispetto al sottosistema (1), lo stato finale è scrivibile come un prodotto tensore.

1.2.3 Entanglement

Si consideri un sistema composto da due sottosistemi; quando lo stato $|\psi\rangle$ del sistema globale ha la forma (1.19) tutte le predizioni fisiche relative ad una sola parte del sistema non dipendono dallo stato dell'altra parte e sono espresse interamente in termini di $|\varphi(1)\rangle$ (o di $|\chi(2)\rangle$); infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_n) &= \langle \varphi(1)\chi(2) | P_n(1) \otimes \mathbb{1}(2) | \varphi(1)\chi(2) \rangle \\ &= \langle \varphi(1) | P_n(1) | \varphi(1) \rangle \langle \chi(2) | \mathbb{1}(2) | \chi(2) \rangle \\ &= \langle \varphi(1) | P_n(1) | \varphi(1) \rangle. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Lo stato $|\psi\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle$ può dunque essere considerato la semplice giustapposizione di due sistemi, uno nello stato $|\varphi(1)\rangle$ e l'altro nello stato $|\chi(2)\rangle$: una situazione di questo tipo avviene quando i due sistemi sono stati preparati separatamente e poi uniti senza interagire.

Si consideri ora il caso in cui lo stato del sistema globale sia descritto da un vettore di \mathcal{E} che non possa essere scritto come prodotto tensore di un ket di \mathcal{E}_1 per un ket di \mathcal{E}_2 : una situazione di questo tipo riflette l'esistenza di correlazioni tra il sottosistema (1) ed il sottosistema (2).

Il caso in analisi è in generale molto importante in quanto tutti i sistemi fisici hanno interagito con altri nel passato, anche se nel momento della misura possono essere ormai considerati sistemi non più interagenti; il non poter scrivere il sistema globale come prodotto tensore, implica che non è possibile affermare che il sottosistema (1) si trovi nello stato $|\varphi(1)\rangle$ e che il sottosistema (2) si trovi in $|\chi(2)\rangle$ (detto in altri termini, non è possibile parlare realmente dello stato di una o dell'altra particella separatamente): la descrizione delle due parti non avviene più associando loro un ket ma un operatore, detto *operatore densità*.

In ogni caso, come evidenziato, qualunque sia lo stato del sistema globale (1)+(2) prima della misura, un set completo di misure sul sistema (1), o sul sistema (2), pone il sistema globale in un prodotto tensore cancellando tutte le correlazioni risultanti dall'interazione tra i due sottosistemi.

Dalla formula (1.23) si deduce che, quando lo stato $|\psi\rangle$ del sistema non è un prodotto tensore, il ket $|\chi'(2)\rangle$ associato al sottosistema (2) dipende, dopo la misura, del set completo di misure fatte su (1) (questo non avviene quando $|\psi\rangle$ è in uno stato prodotto). Questo risultato può apparire sorprendente: lo stato del sistema (2) dipende dal risultato delle misure effettuate sul sistema (1), anche se i due sistemi, nel momento della misura, non sono più interagenti (quello che sorprende è che questa influenza deve essere istantanea).

Gli stati che non sono scrivibili come prodotto tensore sono detti *stati entangled*, cioè stati ingarbugliati, aggrovigliati e sono questi che rivelano la natura non-locale della funzione d'onda.

1.3 Operatore di densità

Per determinare lo stato di un sistema ad un dato istante è sufficiente eseguire un set completo di misure; però, in pratica, lo stato del sistema non sempre è perfettamente determinato: quando l'informazione che si ha di un sistema è incompleta si ricorre alla probabilità. In meccanica quantistica questo viene tradotto in una funzione d'onda, rappresentante lo stato del sistema, che è una *mistura statistica* di stati: il sistema può trovarsi nello stato $|\psi_1\rangle$ con probabilità p_1 , nello stato $|\psi_2\rangle$ con probabilità p_2 , etc ... Ovviamente, $p_1 + p_2 + \dots = 1$.

Eseguendo una misura sul sistema, se questo si trova nello stato $|\psi_k\rangle$, per ottenere la probabilità di una data misura si usano le regole enunciate dai postulati della teoria; però, dato che il sistema si trova nello stato $|\psi_k\rangle$ con probabilità p_k , bisogna pesare i risultati con p_k e sommare sui vari stati della mistura statistica.

Si noti che un sistema descritto da una mistura statistica di stati non va confuso con un sistema che è una sovrapposizione lineare di stati: in quest'ultimo caso si hanno effetti di interferenza tra gli stati, cosa che non avviene tra i vari vettori $|\psi_k\rangle$ che costituiscono la mistura statistica.

Per il calcolo delle predizioni fisiche si può procedere partendo dai vari $|\psi_k\rangle$ e pesando i risultati sulle probabilità p_k oppure si può introdurre l'operatore di densità.

1.3.1 Operatore di densità per stati puri

Un sistema si trova in uno *stato puro* se lo stato del sistema è perfettamente noto, cioè se tutte le p_k sono zero tranne una.

Caratterizzare un sistema tramite un vettore di stato è totalmente equivalente a caratterizzarlo con l'operatore densità e quasi tutte le formule ricavate per il caso puro rimangono valide anche per la mistura statistica di stati.

Si consideri un sistema il cui vettore di stato all'istante t è:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |u_n\rangle, \quad (1.25)$$

dove $\{ |u_n\rangle \}$ forma una base ortonormale dello spazio degli stati (si considera il caso discreto). Il ket è normalizzato, dunque:

$$\sum_n |c_n(t)|^2 = 1. \quad (1.26)$$

Data un'osservabile A si ha che:

$$\begin{aligned} A_{np} &= \langle u_n | A | u_p \rangle, \\ \langle A \rangle(t) &= \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) A_{np}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

L'evoluzione di $|\psi(t)\rangle$ è descritta dall'equazione:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.28)$$

dove $H(t)$ è l'hamiltoniana del sistema.

L'operatore di densità $\rho(t)$ è definito come:

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|. \quad (1.29)$$

L'operatore di densità è rappresentato nella base $\{ |u_n\rangle \}$ da una matrice detta *matrice densità*:

$$\rho_{pn}(t) = \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle = c_n^*(t) c_p(t). \quad (1.30)$$

Le predizioni fisiche calcolabili da $|\psi(t)\rangle$ si possono ottenere ugualmente da $\rho(t)$, infatti:

1. Da (1.26) e (1.30) si trova che: $\sum_n |c_n(t)|^2 = \sum_n \rho_{nn}(t) = \text{Tr} \rho(t) = 1$
2. Da (1.27) e (1.30):

$$\begin{aligned} \langle A \rangle(t) &= \sum_{n,p} \langle u_p | \rho(t) | u_n \rangle \langle u_n | A | u_p \rangle \\ &= \sum_p \langle u_p | \rho(t) A | u_p \rangle \\ &= \text{Tr} \{ \rho(t) A \} = \text{Tr} \{ A \rho(t) \}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

3. L'evoluzione temporale dell'operatore $\rho(t)$ può essere dedotta da (1.28):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= \left(\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \langle \psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| H(t) \\ &= \frac{1}{i\hbar} [H(t), \rho(t)]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

4. La probabilità di trovare l'autovalore a_n di un'osservabile A è:

$$\mathcal{P}(a_n) = \langle \psi(t) | P_n | \psi(t) \rangle = \text{Tr} \{ P_n \rho(t) \}. \quad (1.33)$$

Dalla definizione di $\rho(t)$ si ha inoltre che: $\rho^\dagger(t) = \rho(t)$; $\rho^2(t) = \rho(t)$; $\text{Tr} \rho^2(t) = 1$. Le ultime due relazioni valgono solo nel caso puro.

1.3.2 Operatore di densità per mistura statistica di stati

Torniamo al caso generale in cui lo stato del sistema è dato da $|\psi\rangle = \sum_k p_k |\psi_k\rangle$, con $0 \leq p_i \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$.

La probabilità di ottenere l'autovalore a_n a seguito di una misura dell'osservabile A è

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_k p_k \mathcal{P}_k(a_n), \quad (1.34)$$

dove $\mathcal{P}_k(a_n)$ è la probabilità di trovare a_n se il vettore di stato fosse $|\psi_k\rangle$.

Usando la (1.33) si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a_n) &= \sum_k p_k \text{Tr}\{\rho_k P_n\} \\ &= \text{Tr}\left\{\sum_k p_k \rho_k P_n\right\} \\ &= \text{Tr}\{\rho P_n\},\end{aligned}\tag{1.35}$$

dove si è posto $\rho = \sum_k p_k \rho_k$.

L'operatore densità del sistema è dunque definito come:

$$\rho(t) = \sum_k p_k \rho_k(t) = \sum_k p_k |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)|.\tag{1.36}$$

Il valore di aspettazione di un'osservabile è:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n) = \text{Tr}\left\{\rho \sum_n a_n P_n\right\} \\ &= \text{Tr}\{\rho A\}.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Alcune proprietà di ρ :

1. è hermitiano, in quanto lo sono i ρ_k ed i coefficienti p_k sono reali;
2. ha traccia pari ad 1: $\text{Tr}\rho = \sum_k p_k \text{Tr}\rho_k = \sum_k p_k = 1$;
3. la linearità di (1.36) e di (1.32) permette di trovare $\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}[H(t), \rho(t)]$;
4. $\rho^2 \neq \rho$ e $\text{Tr}\rho^2 \leq 1$: si assuma, ad esempio, che gli stati $|\psi_k\rangle$ siano ortogonali; in una base ortonormale che include i $|\psi_k\rangle$, ρ è diagonale e i suoi elementi sono i p_k . Per ottenere ρ^2 si sostituisce p_k con p_k^2 e, dato che i p_k sono minori di 1, si trova quanto detto;

1.3.3 Descrizione di una sola parte del sistema: traccia parziale

Si consideri il caso di un sistema composto da due sottosistemi (1)+(2), $\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) \otimes \mathcal{E}(2)$, con la relativa base $\{|u_n(1)\rangle |v_p(2)\rangle\}$.

L'operatore densità ρ è un operatore che agisce in \mathcal{E} ; l'obiettivo è quello di usare ρ per costruire un operatore $\rho(1)$ [o $\rho(2)$] agente unicamente su $\mathcal{E}(1)$ [o $\mathcal{E}(2)$] che permetta di fare predizioni fisiche concernenti solo una delle due parti del sistema globale.

Si introduce l'operatore $\rho(1)$, i cui elementi di matrice sono definiti da:

$$\langle u_n(1) | \rho(1) | u_m(1) \rangle = \sum_p \langle u_n(1) v_p(2) | \rho | u_m(1) v_p(2) \rangle.\tag{1.38}$$

Si dice che $\rho(1)$ è ottenuto da ρ eseguendo una traccia parziale sul sistema (2):

$$\rho(1) = \text{Tr}_2 \rho.\tag{1.39}$$

In modo simile si definisce l'operatore $\rho(2)$.

Sia $A(1)$ un'osservabile agente su $\mathcal{E}(1)$ e sia $\tilde{A} = A(1) \otimes \mathbb{1}(2)$ la sua estensione in \mathcal{E} . Usando (1.31), la definizione di traccia e la relazione di chiusura della base di \mathcal{E} , si trova:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{A}(1) \rangle &= Tr\{\rho \tilde{A}(1)\} \\
&= \sum_{n,p} \langle u_n(1)v_p(2) | \rho \tilde{A}(1) | u_n(1)v_p(2) \rangle \\
&= \sum_{n,p} \sum_{m,q} \langle u_n(1)v_p(2) | \rho | u_m(1)v_q(2) \rangle \langle u_m(1)v_q(2) | \tilde{A}(1) | u_n(1)v_p(2) \rangle \\
&= \sum_{n,m,p,q} \langle u_n(1)v_p(2) | \rho | u_m(1)v_q(2) \rangle \langle u_m(1) | A(1) | u_n(1) \rangle \langle v_q(2) | v_p(2) \rangle \\
&= \sum_{n,m} \left[\sum_p \langle u_n(1)v_p(2) | \rho | u_m(1)v_p(2) \rangle \right] \langle u_m(1) | A(1) | u_n(1) \rangle \\
&= \sum_{n,m} \langle u_n(1) | \rho(1) | u_m(1) \rangle \langle u_m(1) | A(1) | u_n(1) \rangle \\
&= \sum_n \langle u_n(1) | \rho(1) A(1) | u_n(1) \rangle \\
&= Tr\{\rho(1) A(1)\}.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Si noti che la traccia parziale $\rho(1)$ permette di calcolare il valore medio $\langle \tilde{A}(1) \rangle$ come se il sistema (1) fosse isolato ed avesse $\rho(1)$ come operatore densità.

Non è possibile assegnare un vettore di stato al sottosistema (1) [o (2)] quando lo stato globale (1)+(2) non è un prodotto tensore; l'operatore densità è, invece, uno strumento più semplice in quanto, qualsiasi sia lo stato del sistema e grazie alla traccia parziale, è sempre possibile assegnare un operatore al sottosistema (1) [o (2)] e calcolare così le predizioni fisiche concernenti questo sottosistema.

2. Il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen

Nel capitolo precedente è stato analizzato il problema relativo alla descrizione di un sistema fisico composto, ad esempio, da due sottosistemi; si è anche messa in luce l'esistenza di stati *entangled*, ossia stati che non possono esseri trattati in modo indipendente, persino quando i due componenti sono lontani l'uno dall'altro.

In meccanica quantistica ad una particella si associa una funzione d'onda ψ la quale contiene tutta l'informazione che la teoria è in grado di dare sul sistema; la meccanica quantistica non permette di predire con certezza il risultato di una misura ma solo la sua probabilità: questo fatto porta a domandarsi se l'indeterminazione sia un fatto di natura o un difetto insito nella teoria.

Differenti scuole di pensiero nacquero riguardo la natura dell'indeterminazione quantistica; le principali furono (si veda [18]):

- la posizione *realista*: considera la meccanica quantistica una teoria incompleta; la ψ non contiene tutte le informazioni necessarie alla descrizione esatta del sistema ed altre variabili, dette variabili nascoste, devono essere introdotte per una descrizione completa;
- la posizione *ortodossa* (Interpretazione di Copenhagen): l'indeterminazione è insita nella natura ed è nell'atto della misura che le proprietà della particella si manifestano;
- la posizione *agnostica, pragmatica*: la meccanica quantistica, all'epoca, stava collezionando un successo dopo l'altro e il dibattito su come interpretare l'indeterminazione introdotta dalla teoria appariva piuttosto accademico; aderire ad una delle precedenti posizioni sembrava essere una questione epistemologica senza alcuna conseguenza pratica. Pauli affermava: "Non ci si dovrebbe scervellare sul problema se qualcosa che non si può conoscere esista lo stesso, non più che sull'antica domanda di quanti angeli possono stare sulla punta di uno spillo" [20].

La posizione realista, sostenuta fortemente da Einstein, non poteva accettare la visione del mondo quantistico data dall'interpretazione di Copenhagen, interpretazione che può essere ben capita da alcune frasi pronunciate da Bohr, Heisenberg e Jordan (si veda [7]):

Bohr, alla domanda se la meccanica quantistica rispecchiasse una realtà quantistica sottostante, rispose che "non esiste un universo quantistico. Esiste solo una descrizione quantistica astratta; è sbagliato pensare che il compito della fisica sia quello di scoprire come è la Natura. La fisica si occupa di ciò che noi possiamo dire sulla Natura".

Anche Heisenberg sosteneva che: "Negli esperimenti sugli eventi atomici noi abbiamo a che fare con cose e fatti, con fenomeni che sono esattamente altrettanto reali quanto i fenomeni della vita quotidiana. Ma gli atomi e le stesse particelle elementari non sono altrettanto reali; formano un mondo di possibilità e di potenzialità piuttosto che un mondo di cose o di fatti".

E Jordan affermava che sono le stesse osservazioni a produrre il risultato della misura; ad esempio, in una misura di posizione "l'elettrone è costretto a una decisione. Noi lo obblighiamo ad assumere una posizione definita; prima esso non si trovava, in generale, né qui né là; non aveva ancora deciso una posizione ben definita [...] Noi stessi produciamo i risultati della misura".

In un contesto come questo va inserito il lavoro di Einstein, Rosen e Podolsky, i quali rifiutavano l'idea che le proprietà fisiche di un sistema non avessero una realtà oggettiva indipendente dall'osservazione; per questo motivo essi pubblicarono un articolo nel 1935, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?*, in cui cercavano di dimostrare che la meccanica quantistica fosse una teoria incompleta.

In questo articolo si concentrarono su due particelle fortemente correlate che si allontanano in due direzioni opposte; misure di velocità su una delle due particelle avrebbe permesso di conoscere esattamente ed immediatamente il valore di velocità dell'altra e, in ugual modo, la determinazione della posizione di una particella avrebbe individuato subito la posizione dell'altra: dal momento che le due particelle non sono causalmente connesse (in quanto separate spazialmente), dovevano possedere già in partenza tali caratteristiche e non è stato l'atto della misura a determinarle. La meccanica quantistica però, in virtù del principio di Heisenberg, non permette di conoscere simultaneamente il valore di due osservabili non commutanti: Einstein, Rosen e Podolsky ne trassero la conclusione che fosse una teoria incompleta, rigettando l'ipotesi di effetti a distanza in cui una osservazione fatta su di una particella, in uno stato entangled, rendesse reale ciò che prima non lo era, addirittura per la seconda particella, lontana dalla prima.

2.1 Può la descrizione quanto-meccanica della realtà fisica considerarsi completa?

A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, in un articolo del 1935 (si veda [15]), cercano di mostrare l'incompletezza della descrizione della realtà data dalla meccanica quantistica.

Per fare ciò, iniziano col domandarsi quando la descrizione di una teoria fisica possa dirsi completa; enunciano quindi una condizione che ritengono necessaria, detta *condizione di completezza*: una teoria fisica, per potersi dire completa, deve necessariamente associare ad ogni elemento della realtà fisica un elemento della teoria fisica.

Bisogna ora trovare un criterio per definire cosa sono gli elementi della realtà fisica; questo criterio, ritenuto ragionevole (sufficiente e non necessario) è: "Se, senza in alcun modo disturbare un sistema, possiamo predire con certezza (con probabilità uguale ad uno) il valore di una quantità fisica, allora a questa quantità fisica corrisponde un elemento della realtà fisica".

Si considerino due osservabili non commutanti A e B ; se il sistema si trova su di un autostato di una delle due si sa con certezza il valore di tale osservabile ma si sa anche che, in virtù del principio di indeterminazione di Heisenberg, il valore dell'altra quantità

fisica non è noto. La condizione di realtà sopra esposta e questa osservazione implicano che: o "la descrizione della realtà fornita dalla funzione d'onda non è completa" o "quando gli operatori corrispondenti a due quantità fisiche non commutano, le due quantità non possono avere simultanea realtà".

Einstein, Podolsky e Rosen cercano di dimostrare la falsità delle seconda ipotesi per poter così mostrare la verità della prima.

Per questo scopo si considerino due sistemi (1) e (2) che, dopo aver interagito per un tempo T , si allontanano e cessano di interagire. Si ipotizzi inoltre che la funzione d'onda del sistema globale sia

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{(i/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p}, \quad (2.1)$$

dove x_0 è una costante.

Se A è il momento della prima particella, le sue autofunzioni sono

$$u_p(x_1) = e^{(i/\hbar)p x_1} \quad (2.2)$$

corrispondenti all'autovalore p .

Lo stesso vale per P , momento della seconda particella:

$$\rho_p(x_2) = e^{-(i/\hbar)(x_2 - x_0)p} \quad (2.3)$$

corrispondenti all'autovalore $-p$. ψ è dunque scrivibile come

$$\psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp u_p(x_1) \rho_p(x_2). \quad (2.4)$$

In meccanica quantistica la scelta della base è arbitraria ed ora si decide di cambiarla ponendosi sulla base dell'operatore B che rappresenta la posizione della prima particella; le autofunzioni di B sono

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \quad (2.5)$$

corrispondenti all'autovalore x .

Lo stato $\psi(x_1, x_2)$ del sistema è riscrivibile come

$$\psi'(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx v_x(x_1) \varphi_x(x_2), \quad (2.6)$$

dove

$$\begin{aligned} \varphi_x(x_2) &= \langle v_x(x_1) | \psi(x_1, x_2) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \delta(x_1 - x) \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{(i/\hbar)(x_1 - x_2 + x_0)p} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{(i/\hbar)(x - x_2 + x_0)p} \\ &= h\delta(x - x_2 + x_0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cambiando base si ottiene che anche le $\varphi_x(x_2)$ sono autostati dell'operatore posizione Q della seconda particella con autovalore $x + x_0$.

Si noti che le due osservabili P e Q non commutano e che eseguendo una misura sulla prima particella, misurando A o B , è subito noto il valore assunto da P o Q , osservabili

concernenti il secondo sistema il quale, per EPR, non è stato disturbato durante la misura. Nel caso venga misurata A ad essere noto con certezza sarebbe l'autovalore di P; nel caso venga misurata B si conoscerebbe con esattezza Q: EPR, assumendo che valga il principio di località (ossia che eventi lontani non possono avere influenza istantanea l'uno sull'altro), affermano che è perciò necessario attribuire realtà fisica sia al momento che alla posizione della seconda particella. Dal momento che la meccanica quantistica non permette di conoscere allo stesso tempo il valore di due osservabili non commutanti, essi concludono che la teoria è una teoria incompleta.

Gli autori affermano che si potrebbe obiettare di aver scelto una condizione di realtà troppo poco restrittiva: tale condizione potrebbe essere resa più stringente richiedendo che due quantità fisiche possono essere considerate simultaneamente reali quando sono "simultaneamente misurate o predette"; con questo principio di realtà, dal momento che è noto il valore di P o di Q ma non di entrambe, si conclude che le due quantità non hanno realtà simultanea. Essi controbattono a questo facendo sempre appello al principio di località: il processo di misura è eseguito sul primo sistema e non disturba il secondo e i due sistemi sono separati spazialmente; nel momento in cui si esegue la misura sulla prima particella, *immediatamente* è nota la posizione o il momento della seconda particella la quale non può *immediatamente* venire a conoscenza dell'avvenuta misurazione e, dunque, possedeva tale valore (non è stato l'atto della misura a determinarlo, come sostenuto dall'interpretazione statistica che prevede il collasso istantaneo della funzione d'onda).

2.2 Parametri supplementari

Nell'ottica di Einstein, Rosen e Podolsky la meccanica quantistica è una teoria incompleta e, dunque, in linea di principio è possibile introdurre parametri supplementari che ne permettono il completamento. Nel loro paradosso, termine da loro mai utilizzato, mostrano che esistono sistemi particolari per i quali ci sono forti correlazioni tra i due sottosistemi. Le correlazioni tra sistemi ormai separati spazialmente che hanno in precedenza interagito sono comuni anche in meccanica classica: si pensi, ad esempio, ad un oggetto che inizialmente ha momento angolare nullo che, a causa di forze interne, si divide in due parti. Nel caso di evoluzione libera, il momento angolare di una parte è uguale ed opposto al momento angolare dell'altra: vi è dunque una forte correlazione tra i due sottosistemi, ma questa correlazione non stupisce.

Alla luce di questo si cerca di spiegare le correlazioni EPR introducendo parametri supplementari: tali teorie sono dette "teorie a variabili nascoste" o "teorie a parametri supplementari"; la speranza è quella di recuperare le previsioni statistiche della meccanica quantistica quando si media sui parametri supplementari; se questo avvenisse la meccanica quantistica potrebbe essere considerata come la meccanica statistica a livello microscopico.

J. Bell mostrerà però l'incompatibilità tra la teoria quantistica ed una qualsiasi teoria a variabili nascoste locali.

3. Disuguaglianza di John S. Bell

In seguito alla pubblicazione dell'articolo di Einstein, Podolsky e Rosen si sono susseguiti vari lavori, alcuni riguardanti la formulazione di teorie a variabili nascoste (sia locali che non locali), altri incentrati sul cercare di dimostrare l'incompatibilità tra la meccanica quantistica ed una qualsiasi teoria a variabili nascoste (come il lavoro di von Neumann, 1955).

Nel 1964 John Bell pubblicò un breve articolo, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, in cui, facendo riferimento al paradosso EPR nella versione di Aharonov e di Bohm (1957; si considerano due particelle di spin $1/2$, in uno stato di singoletto, che si allontanano in direzioni opposte) dimostra che le previsioni quantistiche sono incompatibili con una teoria che ammetta variabili nascoste locali: le correlazioni tra misure di spin sono, in una tale teoria, limitate da disuguaglianze (*disuguaglianze di Bell*) che vengono violate, in alcuni casi, dalla meccanica quantistica.

3.1 La disuguaglianza

Si considerino, come suggerito da Bell in [10], due particelle di spin $1/2$ in uno stato entangled (ad esempio in un singoletto di spin) che si allontanano in direzioni opposte. Sulle due particelle verranno eseguite, in due postazioni separate spazialmente, A e B, misure riguardanti lo spin (utilizzando, ad esempio, magneti di Stern e Gerlach). Le misure di spin vengono eseguite in A lungo la direzione del vettore \mathbf{a} e in B lungo \mathbf{b} ; se il risultato della misura di spin lungo una direzione restituisce spin up allora esso viene registrato come $+1$, nel caso di spin down con -1 . Ad ogni misura si esegue il prodotto dei valori registrati in A ed in B (il prodotto sarà ± 1) e, al termine di molte misurazioni, si calcola il valore medio di tale prodotto.

J. Bell ricava il valore di aspettazione del prodotto delle due misure sia usando la meccanica quantistica sia usando una generale teoria a variabili nascoste locali: confrontando tali predizioni giunge ad affermare che la meccanica quantistica è incompatibile con una qualsiasi teoria di questo tipo.

3.1.1 Previsione della meccanica quantistica

Si calcola il valore di aspettazione del prodotto degli operatori $S_{1,\mathbf{a}}$ ed $S_{2,\mathbf{b}}$ i quali rappresentano, rispettivamente, la proiezione del momento angolare di spin lungo \mathbf{a} per la prima particella e lungo \mathbf{b} per la seconda particella.

Si dimostra ora che la teoria quantistica prevede

$$\langle S_{1,\mathbf{a}} S_{2,\mathbf{b}} \rangle = \langle (\sigma_1 \mathbf{a}) (\sigma_2 \mathbf{b}) \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\cos \vartheta, \quad (3.1)$$

dove σ_1, σ_2 sono le matrici di Pauli e ϑ è l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Dimostrazione

Sia A_{\pm} il risultato della misura di spin lungo \mathbf{a} : A_+ equivale ad aver trovato la prima particella con spin up, A_- ad aver trovato spin down; lo stesso vale per la seconda particella (per la quale si ottiene B_{\pm} lungo \mathbf{b}).

Ora, supponendo di eseguire la misura in A e poi in B si ottiene:

$$\begin{aligned}\langle(\sigma_1\mathbf{a})(\sigma_2\mathbf{b})\rangle &= \sum_n P(a_n)a_n = \\ &= (1)[P(A_+)P(B_+|A_+) + P(A_-)P(B_-|A_-)] + \\ &\quad + (-1)[P(A_+)P(B_-|A_+) + P(A_-)P(B_+|A_-)].\end{aligned}\tag{3.2}$$

Sapendo poi che:

$$\begin{aligned}P(A_+) &= P(A_-) = 1/2, \\ P(B_+|A_+) &= P(B_-|A_-) = \sin^2(\vartheta/2), \\ P(B_-|A_+) &= P(B_+|A_-) = \cos^2(\vartheta/2),\end{aligned}\tag{3.3}$$

si ottiene, sostituendo in (3.2):

$$\langle(\sigma_1\mathbf{a})(\sigma_2\mathbf{b})\rangle = \sin^2(\vartheta/2) - \cos^2(\vartheta/2) = -\cos\vartheta = -\mathbf{ab}.\tag{3.4}$$

Si è così ottenuta la (3.1).

Le formule (3.3) sono state calcolate nel seguente modo: si consideri la postazione A e si definisca l'asse z nella stessa direzione del vettore \mathbf{a} ; ponendosi nella base delle osservabili $\{S_{tot}^2, S_{z,tot}\}$ la funzione d'onda del sistema prima della misura è

$$|\psi\rangle = |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle).\tag{3.5}$$

Se la particella in A viene trovata con spin up, lo stato dopo la misura è

$$|\psi'\rangle = |+-\rangle = |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2,\tag{3.6}$$

alimenti

$$|\psi'\rangle = |-+\rangle = |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2.\tag{3.7}$$

Si noti che dopo la misura lo stato è in un prodotto tensore e che la misura su A ha influenzato lo stato della seconda particella.

Ora, una qualsiasi osservabile di proiezione del momento angolare lungo un dato vettore \mathbf{v} è scrivibile, nella base di $\{S^2, S_z\}$, come

$$S_{\mathbf{v}} = \frac{\hbar}{2}[\sigma_x \sin\vartheta \cos\varphi + \sigma_y \sin\vartheta \sin\varphi + \sigma_z \cos\vartheta],\tag{3.8}$$

dove ϑ e φ sono gli angoli tra \mathbf{v} e gli assi.

Gli autovalori di $S_{\mathbf{v}}$ sono $\pm\hbar/2$ e gli autovettori corrispondenti sono

$$\begin{aligned}|\varphi_+\rangle &= \cos(\vartheta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \sin(\vartheta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle, \\ |\varphi_-\rangle &= -\sin(\vartheta/2)e^{-i\varphi/2}|+\rangle + \cos(\vartheta/2)e^{i\varphi/2}|-\rangle.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}P(B_+|A_+) &= P(B_-|A_-) = |\langle\varphi_+|-\rangle_2|^2 = |\langle\varphi_-|+\rangle_2|^2 = \sin^2(\vartheta/2) \\ P(B_-|A_+) &= P(B_+|A_-) = |\langle\varphi_+|+\rangle_2|^2 = |\langle\varphi_-|-\rangle_2|^2 = \cos^2(\vartheta/2)\end{aligned}\tag{3.10}$$

3.1.2 Previsione di una teoria a variabili nascoste locali

J. Bell nel proprio articolo, al fine di mostrare un contrasto tra la meccanica quantistica e una teoria a variabili nascoste, assume che la misura eseguita in una postazione non possa dipendere dall'orientazione di uno strumento dell'altra postazione (questo crea, come nel prossimo capitolo verrà messo in luce, una scappatoia temporale: lo stesso Bell suggerisce, per chiudere tale scappatoia, di far variare l'orientazione degli strumenti di misura mentre le particelle sono in volo).

Eseguendo una misura in A lungo \mathbf{a} si è in grado di predire, con certezza ed immediatamente, il risultato di una misura in B lungo \mathbf{a} ; dal momento che vale il principio di località, la seconda particella non potrà sapere subito che è stata eseguita una misura sulla prima: quindi, in quest'ottica, la seconda particella possedeva già in partenza tale proprietà o, in altre parole, i valori di spin erano predeterminati in partenza. La meccanica quantistica non è però in grado di fornire il risultato di una misura ma solo la probabilità di ottenere un dato valore e, per questo motivo, lo stato del sistema deve essere completato tramite l'introduzione di parametri λ . I parametri λ possono essere sia variabili, discrete o continue, sia funzioni: in questa trattazione sono convogliate nel parametro continuo λ . Il risultato di una misura effettuata in A o in B sarebbe perfettamente determinabile se si conoscesse il valore di λ .

Bell mostra che le correlazione previste da una teoria a variabili nascoste locale sono limitate da disuguaglianze (dette *disuguaglianze di Bell*) che non sono in accordo con alcune previsioni quantistiche.

Sia $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ la media sui valori di λ del prodotto dei risultati ottenuti in A e in B; si dimostra che vale la seguente disuguaglianza:

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + E(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (3.11)$$

Dimostrazione

I possibili risultati di una misura possono essere: $A(\mathbf{a}, \lambda) = \pm 1$ e $B(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$; inoltre, eseguendo una misura di spin sia in A che in B lungo la stessa direzione le due particelle avranno spin opposto: $A(\mathbf{a}, \lambda) = -B(\mathbf{a}, \lambda)$.

Al parametro λ è associata una densità di probabilità $\rho(\lambda)$, assunta normalizzata:

$$\int d\lambda \rho(\lambda) = 1. \quad (3.12)$$

Dunque:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \langle A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \rangle_\lambda \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda) \\ &= - \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ora, preso un altro vettore \mathbf{c} si ottiene che:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) [-A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) + A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) [A(\mathbf{b}, \lambda) A(\mathbf{c}, \lambda) - 1], \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove si è usato il fatto che $[A(\mathbf{b}, \lambda)]^2 = 1$.

Si noti che $A(\mathbf{a}, \lambda) A(\mathbf{b}, \lambda) = \pm 1$; allora:

$$\begin{aligned} |E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 + A(\mathbf{b}, \lambda)B(\mathbf{c}, \lambda)] \\ &\leq 1 + \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{b}, \lambda)B(\mathbf{c}, \lambda) \\ &= 1 + E(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si è dunque ottenuta la (3.11).

3.1.3 Incompatibilità tra le due previsioni

Per l'esperimento preso in considerazione, la meccanica quantistica prevede che

$$\langle (\sigma_1 \mathbf{a})(\sigma_2 \mathbf{b}) \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (3.16)$$

Questo dovrebbe coincidere con il valore di aspettazione ottenuto in una teoria a variabili nascoste locali:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\mathbf{a}, \lambda) B(\mathbf{b}, \lambda), \quad (3.17)$$

valore che è limitato dalla seguente disuguaglianza:

$$|E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + E(\mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (3.18)$$

Se la teoria quantistica fosse compatibile con una teoria a variabili nascoste locali, la disuguaglianza (3.18) sarebbe rispettata anche dalle previsioni quantistiche ma questo non avviene sempre; infatti scegliendo, ad esempio,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{c} = \sin \varphi \mathbf{a} + \cos \varphi \mathbf{b} \quad (3.19)$$

si ha che per $0 < \varphi < \pi/2$ la seguente disuguaglianza è violata:

$$|-\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}| \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \quad (3.20)$$

Le previsioni statistiche della meccanica quantistica sono dunque incompatibili con una teoria a variabili nascoste locali.

La questione è ora spostata sul piano sperimentale: è necessario riuscire a realizzare esperimenti in cui si eseguono misure su sistemi entangled e in cui si studiano le correlazioni tra i risultati per vedere se essi violano la disuguaglianza di Bell (rispettando le previsioni quantistiche) o se, invece, rispettano la disuguaglianza.

All'epoca in cui Bell pubblicò l'articolo non c'era nessun risultato sperimentale che permettesse una tale verifica quantitativa: i fisici iniziarono a pensare a come eseguire tali esperimenti e, dopo vari tentativi, all'inizio degli anni Ottanta, con l'esperimento di Aspect *et al.*, si ottennero risultati chiaramente in accordo con la previsione quantistica (furono poi eseguiti, e si eseguono ancora oggi, esperimenti sempre più precisi e sempre meglio progettati al fine di eliminare qualsiasi tipo di scappatoia il cui significato è spiegato nel capitolo seguente).

4. Esperimento di Alain Aspect

Con il teorema di Bell il dibattito sulla possibilità o meno di completare la meccanica quantistica non rappresentò più una questione meramente filosofica: è possibile, in linea di principio, strutturare un esperimento che permetta di verificare se la natura sia effettivamente in accordo con la teoria quantistica.

In seguito alla pubblicazione dell'articolo di Bell iniziarono, così, a susseguirsi una serie di lavori che cercarono di dare vita ad esperimenti con questa finalità; la disuguaglianza di Bell venne generalizzata con nuove relazioni come, ad esempio, le disuguaglianze CHSH e CH74 (si veda dopo) e vennero ideati esperimenti che si basavano sulla produzione di coppie di fotoni entangled dei quali si andava a misurare la polarizzazione.

Gli esperimenti furono e sono realizzati facendo delle ipotesi del tutto ragionevoli come, ad esempio, l'ipotesi di *equo campionamento* (non essendo tutte le particelle rilevate, a causa dell'inefficienza degli apparati, si assume che il campione analizzato rappresenti in modo corretto l'insieme completo) o la *condizione di località di Bell* (il risultato di una misura in una postazione non dipende dalla direzione di analisi effettuata nell'altra postazione; questa condizione è affrontata più nel dettaglio nel paragrafo *Disuguaglianze di Bell testate usando analizzatori variabili nel tempo*). Si attribuisce particolarmente importanza alle ipotesi sotto le quali l'esperimento è stato realizzato perchè, nel caso in cui esso mostri una violazione delle disuguaglianze, uno strenuo difensore di una teoria a variabili nascoste potrebbe contestare che tali ipotesi non sono corrette (cioè, ad esempio, che il campionamento non sia equo o che non valga la condizione di località e, quindi, i risultati di una misura dipendano dalla configurazione assunta nell'altra postazione); per questo motivo è importante cercare di realizzare verifiche che facciano appello al minor numero di ipotesi possibili, ossia esperimenti che chiudano tutte le "scappatoie" (o loophole) presenti.

4.1 Esperimento con fotoni entangled

L'esperimento è del tutto simile a quello proposto da Aharonov e Bohm: una sorgente emette due fotoni di frequenza ν_1 e ν_2 che contropropagano lungo l'asse z ; due postazioni, A e B, separate spazialmente, eseguono una misura di polarizzazione lineare rispettivamente lungo i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} (il risultato è registrato come +1 se la polarizzazione è parallela al vettore e come -1 se risulta essere ortogonale).

Supponendo che i due fotoni si trovino in uno stato entangled, lo stato del sistema può essere scritto come:

$$|\psi(\nu_1, \nu_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x, x\rangle + |y, y\rangle), \quad (4.1)$$

dove $|x\rangle$, $|y\rangle$ sono stati di polarizzazione lineare lungo le direzioni x ed y .

Definendo come al solito $P_{\pm}(\mathbf{v})$ la probabilit  di trovare polarizzazione parallela (o perpendicolare) al vettore \mathbf{v} , la meccanica quantistica prevede, essendo questa una mistura statistica di stati,

$$P_{\pm}(\mathbf{a}) = P_{\pm}(\mathbf{b}) = 1/2. \quad (4.2)$$

Dopo la misura, ipotizzando che la polarizzazione del primo fotone sia stata trovata parallela, o perpendicolare ad \mathbf{a} , lo stato del sistema diviene, rispettivamente:

$$\begin{aligned} |\psi'(v_1, v_2)\rangle &= |\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = |\mathbf{a}\rangle_1 \otimes (\cos \vartheta |\mathbf{b}\rangle_2 + \sin \vartheta |\mathbf{b}_{\perp}\rangle_2), \\ |\psi'(v_1, v_2)\rangle &= |\mathbf{a}_{\perp}, \mathbf{a}_{\perp}\rangle = |\mathbf{a}_{\perp}\rangle_1 \otimes (\sin \vartheta |\mathbf{b}\rangle_2 + \cos \vartheta |\mathbf{b}_{\perp}\rangle_2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

dove ϑ   l'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Considerando poi le probabilit  congiunte si ha:

$$\begin{aligned} P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta, \\ P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Per il valore di aspettazione del prodotto dei risultati, detto anche *coefficiente di correlazione*, $E(\mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (4.5)$$

la meccanica quantistica prevede

$$E_{MQ}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(2\vartheta). \quad (4.6)$$

4.2 Un semplice esempio di teoria a parametri supplementari

Si consideri il caso precedente di due fotoni che contropropagano e che vengono analizzati da polarizzatori posti in A e B formanti, rispettivamente, angoli α e β con l'asse x .

Una teoria a parametri supplementari   completamente definita dalla conoscenza di $\rho(\lambda)$, $A(\lambda, \mathbf{a})$ e $B(\lambda, \mathbf{b})$; si ipotizzi dunque che i due fotoni abbiano la medesima polarizzazione lineare che forma un angolo λ con l'asse x (λ   il parametro supplementare della teoria); se i fotoni sono emessi in modo isotropo, la distribuzione di λ risulta essere

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi}. \quad (4.7)$$

Per $A(\lambda, \mathbf{a})$ e $B(\lambda, \mathbf{b})$   possibile, ad esempio, pensare che siano uguali a +1 quando l'angolo tra la polarizzazione e la direzione del polarizzatore   minore di $\pi/4$, mentre valgano -1 quando la polarizzazione   pi  "vicina" al vettore ortogonale alla direzione di analisi.

Matematicamente questo   tradotto con:

$$\begin{aligned} A(\lambda, \mathbf{a}) &= \text{sign}[\cos 2(\alpha - \lambda)], \\ B(\lambda, \mathbf{b}) &= \text{sign}[\cos 2(\beta - \lambda)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Il coefficiente di correlazione è pari a

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\lambda \operatorname{sign}[\cos 2(\alpha - \lambda)] \operatorname{sign}[\cos 2(\beta - \lambda)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Risolvendo, ad esempio graficamente, si ottiene:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - \frac{4}{\pi} |\alpha - \beta| = 1 - \frac{4}{\pi} |\vartheta|, \quad (4.10)$$

con $-\pi/2 \leq |\alpha - \beta| \leq \pi/2$.

Si noti che, come nella previsione quantistica, il coefficiente di correlazione dipende unicamente dall'angolo tra \mathbf{a} e \mathbf{b} ; inoltre la differenza tra le due previsioni è sempre piccola (si veda figura 4.1) e le due teorie sono in accordo per ϑ pari a 0, $\pm\pi/4$ o $\pm\pi/2$: la teoria a variabili supplementari presentata è molto semplice e, quindi, si potrebbe sperare che un modello più elaborato possa riprodurre esattamente i risultati quantistici ma tale ricerca è senza speranza in quanto la meccanica quantistica è incompatibile con una qualsiasi teoria a variabili nascoste locali.

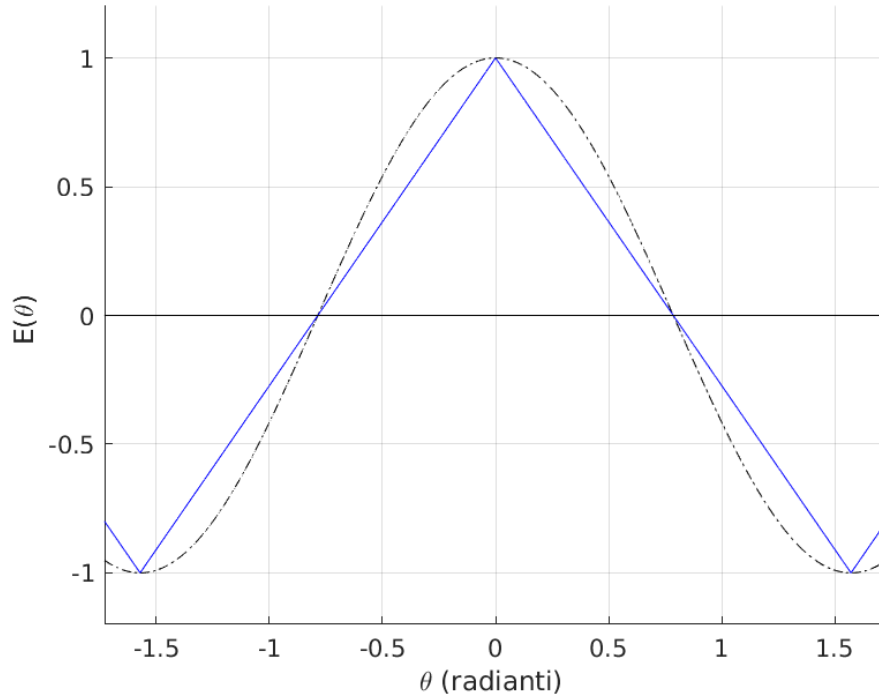


Figura 4.1: Confronto coefficiente di correlazione: in blu la previsione della teoria a variabili nascoste; in nero la previsione quantistica

4.3 Disuguaglianza CHSH

Nel 1969 Clauser, Horne, Shimony e Holt generalizzarono la disuguaglianza di Bell, introducendo la *disuguaglianza CHSH*:

$$-2 \leq S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') \leq 2, \quad (4.11)$$

dove la quantità S è:

$$S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}'). \quad (4.12)$$

Dimostrazione

In questa dimostrazione, si veda [8], si assume che anche gli strumenti possono avere delle variabili nascoste in grado di influenzare i risultati; si esegue per prima cosa una media su queste variabili e si ottiene:

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) \bar{A}(\mathbf{a}, \lambda) \bar{B}(\mathbf{b}, \lambda), \quad (4.13)$$

dove $|\bar{A}| \leq 1$ e $|\bar{B}| \leq 1$.

Nella dimostrazione i vettori vengono scritti come $\mathbf{v} = v$; $\bar{A} = A$ e $\bar{B} = B$; dunque:

$$\begin{aligned} E(a, b) - E(a, b') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(a, \lambda)B(b, \lambda) - A(a, \lambda)B(b', \lambda) \pm \\ &\quad \pm A(a, \lambda)B(b, \lambda)A(a', \lambda)B(b', \lambda) \mp A(a, \lambda)B(b, \lambda)A(a', \lambda)B(b', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 \pm A(a', \lambda)B(b', \lambda)] + \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)B(b', \lambda)[1 \pm A(a', \lambda)B(b, \lambda)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dunque, considerando il modulo si ottiene:

$$\begin{aligned} |E(a, b) - E(a, b')| &\leq \left| \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)B(b, \lambda)[1 \pm A(a', \lambda)B(b', \lambda)] \right| + \\ &\quad + \left| \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda)B(b', \lambda)[1 \pm A(a', \lambda)B(b, \lambda)] \right| \\ &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) |A(a, \lambda)B(b, \lambda)| |1 \pm A(a', \lambda)B(b', \lambda)| + \dots \\ &\leq 2 \pm [E(a', b') + E(a', b)]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Quindi si arriva alle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} |E(a, b) - E(a, b')| &\leq 2 \pm [E(a', b') + E(a', b)] \\ |E(a, b) - E(a, b')| &\leq 2 - |E(a', b') + E(a', b)| \\ |E(a, b) - E(a, b') + E(a', b') + E(a', b)| &\leq \\ &\leq |E(a, b) - E(a, b')| + |E(a', b') + E(a', b)| \leq 2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si è così trovata la (4.11).

4.3.1 Disaccordo con la meccanica quantistica

La meccanica quantistica viola, per certi angoli, la disuguaglianza CHSH; infatti:

$$\begin{aligned} S(\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}') &= E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \\ &= \cos 2\alpha - \cos 2(\alpha + \beta + \gamma) + \cos 2\beta + \cos 2\gamma, \end{aligned} \quad (4.17)$$

dove α , β e γ sono gli angoli tra i vettori.

S risulta dunque essere una funzione delle tre variabili indipendenti α , β e γ ; per trovare la relazione tra gli angoli tale per cui la violazione della disuguaglianza sia massima, si pongono a zero le tre derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \gamma} = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \sin 2\alpha = \sin 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ \sin 2\beta = \sin 2(\alpha + \beta + \gamma) \\ \sin 2\gamma = \sin 2(\alpha + \beta + \gamma) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Si trova che: $\alpha = \beta = \gamma (= \vartheta)$; S dunque diviene

$$S = 3 \cos 2\vartheta - \cos 6\vartheta. \quad (4.19)$$

Nella figura 4.2 è rappresentata la funzione (4.19): si noti che ci sono angoli per cui la meccanica quantistica rispetta la disuguaglianza CHSH ma ci sono poi valori per cui questa costrizione è violata; la massima violazione si ha, per esempio, per $\vartheta = \pi/8$ e $\vartheta = 3\pi/8$.

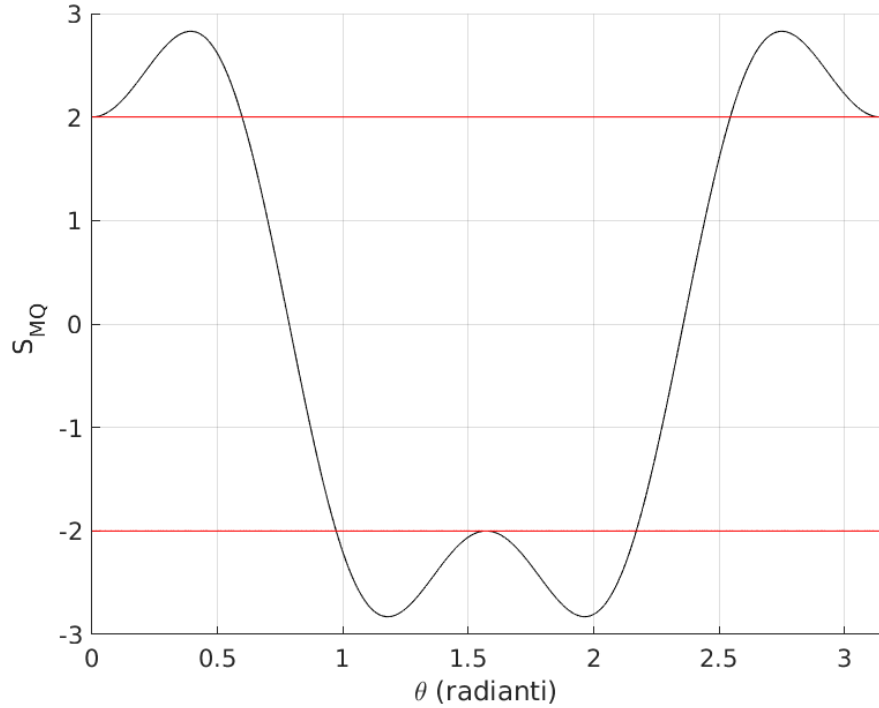


Figura 4.2: $S(\vartheta)$ calcolato con la teoria quantistica (in nero); in rosso i valori limite di S imposti dalla disuguaglianza

Risulta dunque impossibile per una teoria a variabili nascoste locali riprodurre tutte le predizioni della meccanica quantistica.

4.4 Esperimenti ottici per la verifica delle disuguaglianze di Bell

Alcuni esempi di esperimenti che possono essere fatti per studiare la violazione delle disuguaglianze di Bell sono gli esperimenti a singolo ed a doppio canale di polarizzazione; i fotoni sono ottenuti tramite una cascata atomica di un dato elemento chimico (come Calcio e Mercurio) eccitato tramite laser; quando il processo eccitazione-diseccitazione ha raggiunto l'equilibrio, è calcolato il numero di fotoni entangled che vengono emessi nell'unità di tempo.

Gli esperimenti non sono ovviamente ideali e, dunque, i coefficienti di correlazione sono ridotti di un fattore $F(u) \leq 1$: $E_{MQ}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F(u) \cos 2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

4.4.1 Esperimenti ad un canale di polarizzazione

In questo tipo di esperimenti la polarizzazione dei fotoni è analizzata, in ciascuna postazione, con un unico polarizzatore, nella postazione A orientato lungo \mathbf{a} e in B lungo \mathbf{b} . In questo modo si può misurare unicamente il numero di coppie di fotoni, $N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, in cui il primo fotone viene trovato con polarizzazione parallela ad \mathbf{a} ed il secondo parallelo a \mathbf{b} .

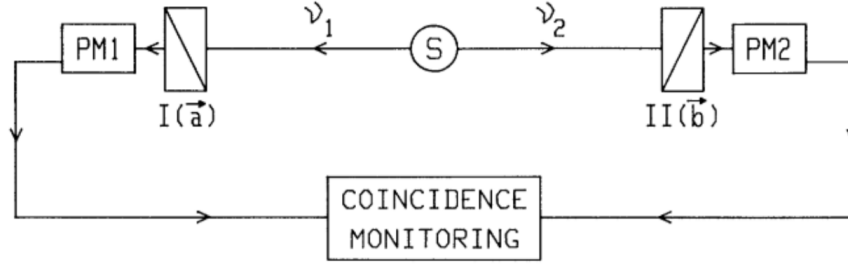


Figura 4.3: Schema esperimento ad un canale (immagine da [3])

Per calcolare il coefficiente di correlazione (si veda [1]):

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ &= \frac{N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{N_{tot}(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \end{aligned} \quad (4.20)$$

è necessario sapere anche il valore di N_{+-} , N_{-+} e N_{--} .

Per trovare i dati mancanti si eseguono misure con uno o entrambi i polarizzatori rimossi (la rimozione di un polarizzatore è indicata con ∞); in questo modo si possono trovare le relazioni tra le quantità misurate $N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $N_{++}(\mathbf{a}, \infty)$ e $N_{++}(\infty, \mathbf{b})$ e le quantità mancanti:

$$\begin{aligned} N(\infty, \infty) &= N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ N_{++}(\mathbf{a}, \infty) &= N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ N_{++}(\infty, \mathbf{b}) &= N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Usando poi (4.20), la CHSH ed eliminando le quantità che non sono misurate si trova una nuova disuguaglianza, detta CH74:

$$-1 \leq S' \leq 0, \quad (4.22)$$

dove S' è

$$S' = \frac{N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - N(\mathbf{a}', \infty) - N(\infty, \mathbf{b})}{N(\infty, \infty)}. \quad (4.23)$$

Dimostrazione

Le quantità mancanti, ricavate da (4.21), sono:

$$\begin{aligned} N_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{++}(\mathbf{a}, \infty) - N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ N_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N_{++}(\infty, \mathbf{b}) - N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ N_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= N(\infty, \infty) - N_{++}(\mathbf{a}, \infty) - N_{++}(\infty, \mathbf{b}) + N_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Sostituendo nella (4.20) si trova (pedici $++$ tralasciati):

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{[4N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - 2N(\mathbf{a}, \infty) - 2N(\infty, \mathbf{b}) + N(\infty, \infty)]}{N(\infty, \infty)}. \quad (4.25)$$

Dunque $S(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}')$ diviene

$$-2 \leq \frac{4[N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - N(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + N(\mathbf{a}', \mathbf{b}') - N(\mathbf{a}', \infty) - N(\infty, \mathbf{b})] + 2N(\infty, \infty)}{N(\infty, \infty)} \leq 2, \quad (4.26)$$

da cui si trova la (4.22).

La teoria quantistica prevede, per S' ,

$$S'_{MQ} = \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2} \cos^2 3\vartheta - 1 \quad (4.27)$$

e per gli angoli $\vartheta_1 = \pi/8$ e $\vartheta_2 = 3\pi/8$ vale:

$$\begin{aligned} S'_{MQ}(\vartheta_1) &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} > 0 \\ , S'_{MQ}(\vartheta_2) &= \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} < -1. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Usando un esperimento ad un solo canale è, quindi, comunque possibile verificare la compatibilità o meno tra la meccanica quantistica ed una teoria a variabili nascoste; il problema legato a questo tipo di esperimento è che quando una coppia di fotoni è stata emessa e nessun conteggio è stato ottenuto ad uno dei fotomoltiplicatori non vi è modo di sapere se la non rilevazione sia dovuta ad un'inefficienza dell'apparato o al fatto che siano stati bloccati dal polarizzatore.

La prima generazione di esperimenti per verificare o meno l'accordo della natura con le disuguaglianze di Bell si basò su esperimenti strutturati in questo modo: le sorgenti di fotoni entangled utilizzate erano poco efficienti come lo erano i fotomoltiplicatori e, inoltre, le prese dati duravano parecchie ore; i risultati ottenuti da diversi gruppi furono tra loro contrastanti (le referenze a questi esperimenti si trovano in [1]).

4.4.2 Esperimenti a due canali di polarizzazione

In questi esperimenti, i fotoni entangled emessi dalla sorgente, sono analizzati nelle postazioni in A e B da polarizzatori orientati lungo \mathbf{a} , \mathbf{a}_\perp , \mathbf{b} e \mathbf{b}_\perp ; i fotoni, nelle postazioni, tramite appositi strumenti vengono trasmessi se hanno, ad esempio, polarizzazione parallela ad \mathbf{a} e riflessi se hanno polarizzazione ortogonale ad \mathbf{a} e sono poi indirizzati verso dei rilevatori.

In questo modo, dopo l'elaborazione dei dati, si ottengono i numeri di coincidenze $N_{\pm\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b})$ che permettono di calcolare $E(\mathbf{a},\mathbf{b})$; si esegue dunque questa procedura per quattro orientazioni ed è così possibile calcolare $S(\mathbf{a},\mathbf{a}',\mathbf{b},\mathbf{b}')$.

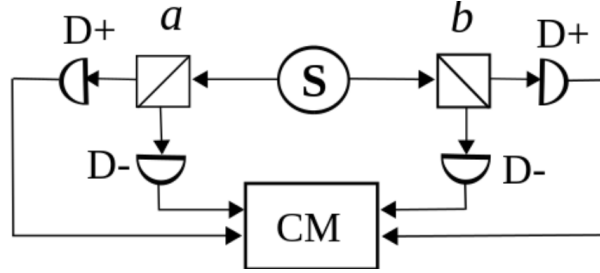


Figura 4.4: Schema esperimento a due canali (immagine da [5])

Si noti che entrambi i tipi di esperimenti a canale di polarizzazione si basano sull'assunzione dell'*equo campionamento*: in un esperimento alcuni fotoni potrebbero non essere rilevati (a causa delle inefficienze dell'apparato sperimentale) e, dunque, un sostenitore di teorie a variabili nascoste potrebbe obiettare che il campione di particelle rilevate può mostrare correlazioni che violano le disuguaglianze di Bell, correlazioni assenti invece se si considerassero tutte le particelle; questi esperimenti si basano, dunque, sull'ipotesi dell'equo campionamento, ossia che il sottogruppo di fotoni rilevato rappresenti bene le caratteristiche dell'intero ensemble.

4.5 Esperimenti di Aspect (1980-1982)

A. Aspect ed il suo gruppo di lavoro portarono a termine, tra il 1980 ed il 1982, tre esperimenti, strutturati in modo differente l'uno dall'altro, i cui risultati erano in completo accordo con le previsioni quantistiche e violavano, per certi angoli, le disuguaglianze di Bell.

La sorgente, comune a tutti e tre gli esperimenti, utilizza per la produzione di fotoni entangled in polarizzazione la cascata atomica del Calcio:

$$4p^2 (^1S_0) \rightarrow 4s4p (^1P_1) \rightarrow 4s^2 (^1S_0) \quad (4.29)$$

processo efficiente e stabile (si veda la figura 4.5) che permise agli sperimentatori di diminuire il tempo di presa dati ed aumentare notevolmente l'accuratezza dei risultati.

Per l'eccitazione della cascata del Calcio si usano un laser al Krypton ($\lambda_K = 406nm$) ed un laser a lunghezza d'onda alterabile ($\lambda_D = 581nm$); tramite vari accorgimenti (per maggiori dettagli, si veda [1]) si riesce a raggiungere un tasso di cascata pari a circa $N = 4 \times 10^7 s^{-1}$ coppie di fotoni.

La luce emessa dalla sorgente è indirizzata, tramite delle lenti, sui due bracci (ciascuno diretto ad una postazione); sul cammino dei fotoni è poi posto un filtro

interferenziale che seleziona le lunghezze della cascata atomica (551.3 nm e 422.7 nm), un polarizzatore ed un fotomoltiplicatore il quale fa capo ad una serie di strumenti usati per il conteggio delle coincidenze.

Il primo esperimento fatto da Aspect ed il suo gruppo di lavoro era un esperimento a singolo canale di polarizzazione mentre il secondo utilizzava due canali di polarizzazione: in entrambi i casi fu verificato l'accordo con le previsioni quantistiche e la violazione delle disuguaglianze di Bell (CHSH e CH74). Il terzo esperimento è quello più famoso in quanto è stato il primo esperimento a scelta ritardata e viene trattato più nel dettaglio nel paragrafo seguente.

4.5.1 Disuguaglianze di Bell testate usando analizzatori variabili nel tempo

L'esperimento di Aspect del 1982 (si veda [3]) in cui vengono usati dei polarizzatori variabili nel tempo è molto importante in quanto è stato il primo esperimento *a scelta ritardata* che ha permesso di chiudere, almeno in parte, la scappatoia della condizione di località di Bell; i risultati ottenuti sono in completo accordo con la teoria quantistica e le disuguaglianze sono violate.

Le disuguaglianze ricavate da Bell si fondano su un'ipotesi molto forte, detta *condizione di località di Bell*: la misura effettuata in una postazione non dipende dal modo in cui è stato predisposto l'apparato di misura nell'altra postazione, predisposizione che non influenza nemmeno la maniera in cui sono emesse le particelle (o i fotoni) da una sorgente; le costrizioni di Bell, infatti, non varrebbero più se, ad esempio, A (risultato di una misura nella postazione A) fosse $A(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ o se ρ (distribuzione di probabilità delle variabili nascoste) fosse $\rho(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

La condizione di località di Bell sembra molto ragionevole in quanto sarebbe strano che il risultato di un polarizzatore dipenda dall'orientazione dell'altro polarizzatore o che l'emissione dei fotoni dipenda dall'orientazione degli analizzatori; tale condizione, però, non è prescritta da alcuna legge fisica e per questo motivo, come suggerito dallo stesso Bell, bisognerebbe verificare le disuguaglianze in esperimenti in cui le configurazioni dei polarizzatori sono cambiate, velocemente ed in maniera casuale, mentre le particelle sono in volo (*esperimenti a scelta ritardata*).

Si può introdurre un'ipotesi, meno forte rispetto alla condizione di Bell, per la quale le disuguaglianze valgono ancora: la disposizione di un apparato di misura ad un certo

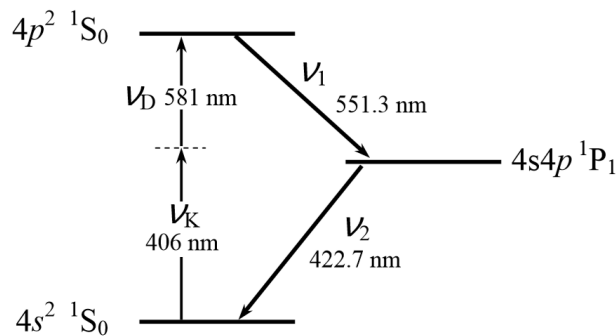


Figura 4.5: Cascata atomica del Calcio; vita media dello stato intermedio $\tau=5ns$ (immagine da [1])

tempo (evento E) non influenza il risultato ottenuto in un'altra postazione se i due eventi sono separati da un intervallo di tipo spazio; l'emissione di particelle da parte della sorgente non dipende dall'orientazione di un polarizzatore se non si trova nel cono del futuro di E. L'ipotesi appena riportata è nota come *Principio di separabilità di Einstein*.

Si noti che questo principio permette l'interazione tra apparati di misura (o tra apparato e sorgente) ma queste interazioni non propagano a velocità maggiori rispetto a quella della luce; una teoria a variabili nascoste che rispetta la condizione di località di Bell rispetta anche il principio di separabilità di Einstein ma non è vero il viceversa.

Negli esperimenti condotti prima dell'esperimento in analisi, le misure venivano effettuate lungo polarizzatori non variabili nel tempo ed essi erano, ovviamente, stati posti in quella configurazione qualche momento prima dell'esecuzione dell'esperimento: non è possibile, a priori, escludere che gli apparati siano entrati in rapporto, scambiandosi segnali a velocità minori o uguali a quelle della luce. I risultati di questi esperimenti hanno permesso di verificare l'incompatibilità tra la meccanica quantistica ed una teoria a variabili nascoste rispettante la condizione di Bell, ma non hanno mostrato che questo vale anche per teorie che rispettano unicamente il principio di Einstein: l'esperimento di Aspect è stato il primo a verificare tale incompatibilità.

Lo schema dell'esperimento è quello riportato in figura 4.6: la sorgente S è posta al centro; i fotoni emessi dalla sorgente, prima di entrare in contatto con i polarizzatori, incontrano dei dispositivi (C_I e C_{II}) che variano nel tempo la direzione lungo cui i fotoni sono indirizzati: ciascuno di questi dispositivi è seguito da due polarizzatori in orientazioni differenti (diretti lungo \mathbf{a} e \mathbf{a}' nella postazione A e lungo \mathbf{b} e \mathbf{b}' in B); un fotone incidente su C_I , ad esempio, può essere deviato verso il polarizzatore $I(\mathbf{a})$ o verso $I'(\mathbf{a}')$. Questo schema equivale ad uno schema in cui un singolo polarizzatore variabile alterna, nel tempo, misure lungo due direzioni differenti.

La distanza L tra le due postazioni di misura è di circa 12 metri e la luce impiega $40ns$ a percorrerla; i dispositivi C_I e C_{II} , che determinano il cambio di direzione dei fotoni, sono dei dispositivi acusto-ottici: in ciascun caso, due trasduttori elettro-acustici (segnale elettrico trasformato in segnale acustico) creano onde stazionarie ultrasoniche in un contenitore trasparente contenente acqua, attraverso la quale il fotone deve passare. La densità dell'acqua varia periodicamente e questo porta alla creazione di un reticolo di diffrazione (si veda figura 4.7): il fotone è trasmesso in direzione rettilinea se arriva al dispositivo quando l'onda stazionaria ha ampiezza nulla (densità dell'acqua costante); subisce, invece, una diffrazione di Bragg nel caso in cui incida quando l'onda ha ampiezza massima (densità non più costante, ma periodica); fotoni che incidono quando l'onda è in una fase intermedia, non vengono indirizzati verso nessun polarizzatore e, dunque, sono persi. Il cambio della direzione lungo cui è inviato il fotone avviene, in questo esperimento, mediamente ogni $10ns$ (le frequenze delle onde stazionarie nei due dispositivi sono diverse; un quarto di periodo è pari a $6.7ns$ per un dispositivo e a $13.3ns$ per l'altro): dal momento che un'onda elettromagnetica impiega $40ns$ a percorrere la distanza L , il risultato di una misura in una postazione e il cambio di orientazione nell'altra sono eventi non causalmente connessi, come lo sono l'emissione di particelle ed il cambio di orientazione.

I deflettori sono preceduti e seguiti da strumenti ottici che permettono di indirizzare i raggi di luce su C_I e C_{II} e sui polarizzatori; ciascun analizzatore è poi seguito da un fotomoltiplicatore connesso a strumenti elettronici che monitorano le coincidenze; i dati

sono poi elaborati da un computer.

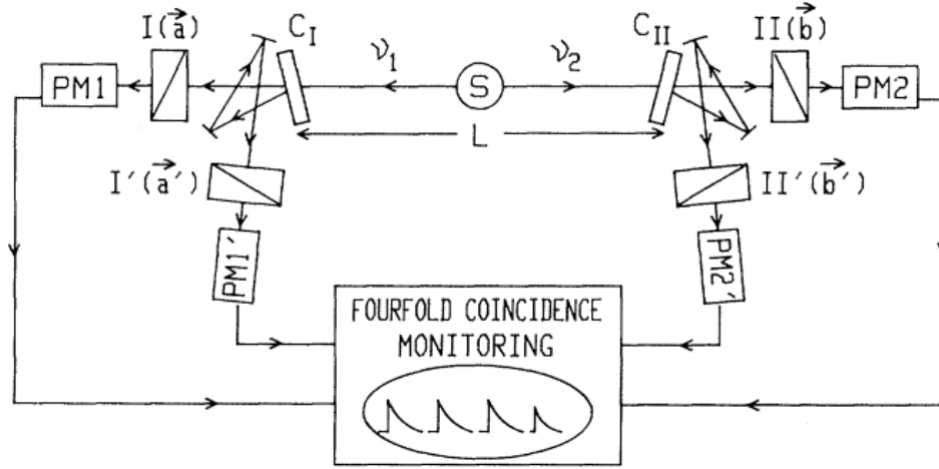


Figura 4.6: Schema esperimento con deflettori ottici variabili nel tempo (immagine da [3])

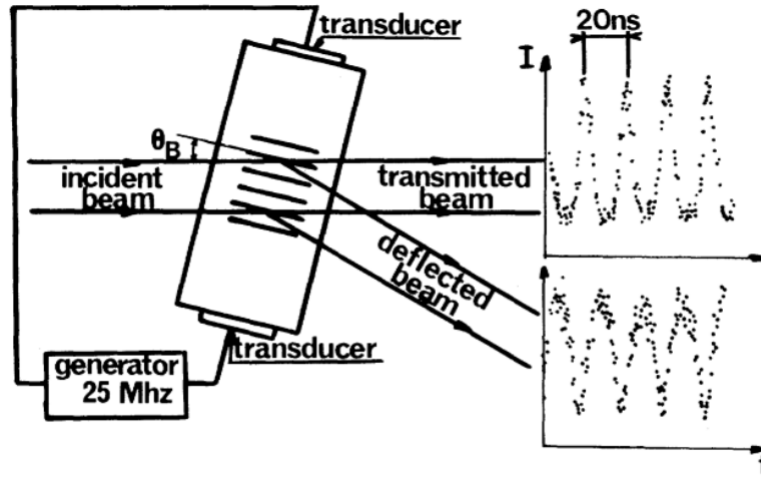


Figura 4.7: Deflettore ottico (immagine da [3])

L'esperimento è condotto prima con tutti i polarizzatori presenti, poi con la rimozione di alcuni di essi: si tratta, infatti, di un esperimento ad un unico canale e, perciò, la disuguaglianza testata è la (4.22); per le orientazioni tra i polarizzatori si è scelto uno degli angoli per cui si ha la massima violazione: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}') = (\mathbf{a}', \mathbf{b}') = 22.5^\circ$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = 67.5^\circ$.

Il valore previsto dalla meccanica quantistica sarebbe $S'_{MQ} = 0.207$; l'esperimento non è però ideale e, considerando le inefficienze introdotte dalla strumentazione, il valore di aspettazione di S' è ridotto a $S' = 0.112$; i risultati ottenuti sono in completo accordo con la teoria quantistica e violano la (4.22), in quanto si è ottenuto

$$S' = 0.101 \pm 0.020,$$

risultato che viola la disuguaglianza $S' \leq 0$ di 5 deviazioni standard.

Il risultato ottenuto è stata la prima prova sperimentale della non compatibilità tra teoria quantistica e teorie a parametri supplementari che obbediscono al principio di

Einstein; l'esperimento, comunque, è lontano dall'essere un'esperimento ideale e, quindi, un difensore delle variabili nascoste potrebbe obiettare che i risultati non sono validi proprio per il fatto che non tutte le scappatoie (loophole) sono state completamente chiuse (sostenere ancora la possibilità di una tale teoria sarebbe, comunque, ormai una posizione molto debole).

Infatti, si potrebbe argomentare che i deflettori (alimentati da generatori indipendenti a differenti frequenze ($23.1MHz$ e $24.2MHz$)) non operano casualmente ma in modo periodico: si potrebbe sostenere che, ad esempio, la strumentazione posta in A sia in possesso delle informazioni necessarie, visto che si tratta di un processo periodico, per prevedere la configurazione della postazione B ad un dato tempo e predisporre così in un particolare modo; è per questo motivo che non tutti erano stati convinti che la scappatoia della località fosse definitivamente chiusa, lasciando ancora aperta la possibilità di una teoria a parametri supplementari ad hoc rispettante il principio di Einstein.

L'esperimento di Aspect è stato solo il primo di una serie di esperimenti a scelta ritardata, esperimenti i cui risultati sono in perfetto accordo con la teoria quantistica. L'entanglement è, dunque, un fenomeno quantistico che va oltre la descrizione spazio-temporale descritta da Einstein: due particelle in uno stato entangled devono essere considerate come un unico sistema anche quando sono ormai lontane l'una dall'altra.

5. Impossibilità di comunicazioni superluminali

Gli aspetti non locali della teoria quantistica hanno portato alla nascita del problema riguardante la possibilità o meno di inviare messaggi superluminali.

Per instaurare una comunicazione superluminale si potrebbe pensare di sfruttare l'entanglement; lo schema più semplice che si può immaginare è lo stesso di un qualsiasi esperimento di Bell: una sorgente emette una coppia di particelle (o di fotoni) in uno stato entangled che contropropagano dirigendosi verso le postazioni A e B dove vi è la possibilità di effettuare, da parte di osservatori, delle misure. L'esecuzione di una misura causa il collasso istantaneo della funzione d'onda cambiando, così, lo stato del sistema; una comunicazione superluminale sarebbe possibile se, ad esempio, l'osservatore in A fosse in grado di dedurre, analizzando il sottosistema che si dirige verso la sua postazione, se in B sia stata compiuta o meno una misura (in questo semplice modo B potrebbe comunicare con A a velocità superluminali: ad esempio, l'esecuzione di una misura da parte di B sarebbe registrata da A con +1, la non esecuzione con 0; lo sperimentatore in A, analizzando la serie di particelle in arrivo e riportando i risultati, sarebbe in possesso di un codice binario inviatogli da B). La comunicazione superluminale è, però, vietata dal *Teorema di non comunicazione*.

5.1 Teorema di non comunicazione

Il teorema afferma l'impossibilità di instaurare, tra due osservatori, una comunicazione superluminale.

Per la dimostrazione di consideri un sistema quantistico S composto da due sottosistemi, S_1 ed S_2 , i quali contropropagano e possono essere analizzati, rispettivamente, dalle postazioni A e B (separate spazialmente); il sistema globale S può essere descritto mediante l'operatore densità ρ , il sistema S_1 mediante l'operatore $\rho(1)$ ed S_2 mediante $\rho(2)$. Si faccia riferimento alle previsioni quantistiche ottenibili dal sottosistema S_1 : esse sono contenute in $\rho(1)$, operatore ottenuto dalla traccia parziale di ρ sul sistema S_2 .

Il sistema S_2 può ad esempio, nella sua evoluzione, essere stato soggetto a:

- un'evoluzione libera o un'interazione con altri sistemi (si considerino interazioni avvenute in una regione spazio temporale di tipo spazio rispetto alla postazione A);
- una misura di una data osservabile da parte dell'osservatore in B.

L'operatore ρ che descrive il sistema, in seguito ad una misura, assume la forma:

$$\rho_{Iniziale} \longrightarrow \rho_{Finale} = \sum_k P_k \rho_I P_k \quad (5.1)$$

quando si misura un'osservabile senza isolare il caso in cui sia stato ottenuto un preciso autovalore; o la forma:

$$\rho_{Iniziale} \longrightarrow \rho_{Finale} = \frac{P_k \rho_I P_k}{Tr(P_k \rho_I)} \quad (5.2)$$

quando si è interessati ad un preciso autovalore (P_k è il proiettore sul sottospazio di tale autovalore).

Se i sistemi S_1 ed S_2 non si trovano in uno stato entangled il teorema è banale in quanto una qualsiasi azione di B su S_2 non muta lo stato S_1 : non ci può dunque essere comunicazione superluminale; si considerino S_1 ed S_2 in uno stato entangled e si confrontino le seguenti espressioni per $\rho(1)$:

- nessuna azione su S_2 : $\rho(1) = Tr_2 \rho$;
- evoluzione unitaria di S_2 : $Tr_2(U_2^\dagger \rho U_2) = Tr_2(U_2 U_2^\dagger \rho) = Tr_2 \rho = \rho(1)$, dove si è usata la proprietà ciclica della traccia e il fatto che U è unitario;
- misura di un'osservabile su S_2 : in questo caso il vettore di stato del sistema cambia e, con esso, anche l'operatore ρ ; il nuovo vettore di stato è delineato dal risultato ottenuto nella postazione B; l'osservatore in A può sfruttare questo fatto solo se conosce il risultato della misura, risultato che può essere comunicato solo tramite un canale non superluminale. Per questo motivo, in seguito alla misura eseguita in B, A potrà unicamente affermare che ρ è del tipo (5.1):

$$Tr_2(\sum_k P_k \rho P_k) = Tr_2(\sum_k P_k^2 \rho) = Tr_2(\sum_k P_k \rho) = Tr_2(\rho) = \rho(1), \quad (5.3)$$

dove si è usato il fatto che l'insieme di tutti i proiettori degli autovalori di un'osservabile è l'identità.

In tutti questi casi l'operatore $\rho(1)$ non è cambiato e, dunque, l'osservatore in A non è in grado di affermare se B abbia o meno compiuto qualche azione su S_2 : l'instaurazione di una comuniazione superluminale risulta perciò non possibile; il dibattito sulla possibilità o meno di un tale tipo di comunicazione rimase comunque aperto e vennero proposti vari metodi per la sua realizzazione: per la confutazione di tale metodi venne elaborato il *Teorema di non clonazione*.

5.2 Teorema di non clonazione

Nel 1982 N. Herbert pubblicò un articolo (*FLASH - A superluminal communicator based on a new kind of quantum measurement*) in cui proponeva di usare un'ipotetica macchina in grado di creare un numero arbitrario di copie di un qualsiasi sistema quantistico: se tale possibilità fosse realizzabile, sia teoricamente che praticamente, allora la comunicazione superluminale sarebbe possibile.

Si pensi ad una sorgente che emette una coppia di fotoni, in direzioni opposte, il cui stato è rotazionalmente invariante:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|H_1, H_2\rangle + |V_1, V_2\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|R_1, L_2\rangle + |L_1, R_2\rangle), \quad (5.4)$$

dove H, V, R ed L stanno per polarizzazione orizzontale, verticale, circolare destra e sinistra, rispettivamente.

L'osservatore in B può scegliere se misurare la polarizzazione (H,V) o (R,L); così facendo, se sceglierà di misurare la polarizzazione (H,V) anche l'altro fotone sarà proiettato in uno stato di polarizzazione piana, altrimenti avrà polarizzazione circolare.

Si immagini che la macchina copiatrice, in possesso dall'osservatore in A, copi lo stato quantistico in arrivo dalla sorgente in $4N$ copie, dove N è un numero grande:

$$\begin{aligned} |V_1, 1\rangle &\rightarrow |V_1, 4N\rangle, \\ |H_1, 1\rangle &\rightarrow |H_1, 4N\rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.5)$$

La comunicazione avverrebbe nel seguente modo:

- in B viene eseguita una misura di polarizzazione o (H,V) o (R,L);
- la polarizzazione del fotone che si dirige in A, a seconda della misura in B, è ora o piana o circolare;
- in A vengono eseguite $4N$ copie del fotone in arrivo; i $4N$ fotoni sono poi divisi in 4 fasci da N fotoni; ciascun fascio è analizzato da un dispositivo che verifica una diversa polarizzazione (H,V,R,L);
- A analizza i risultati ottenuti capendo se B ha eseguito una misura di polarizzazione piana o circolare; infatti:

1. se B ha cercato di capire se la polarizzazione fosse verticale o orizzontale, A troverebbe:

$$(H, V, R, L) = (0, N, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}) \quad o \quad (H, V, R, L) = (N, 0, \frac{N}{2}, \frac{N}{2});$$

2. se B ha misurato polarizzazione circolare:

$$(H, V, R, L) = (\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, 0, N) \quad o \quad (H, V, R, L) = (\frac{N}{2}, \frac{N}{2}, N, 0).$$

La comunicazione è dunque realizzata. Il processo di comunicazione appena illustrato è, però, reso impraticabile dal *Teorema di non clonatura* (la cui elaborazione fu proprio spinta dalla necessità di confutare la proposta di Herbert).

Teorema di non clonatura

Sia U un operatore unitario che permette di clonare uno stato quantistico nello stato $|x\rangle$:

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle \otimes |x\rangle &\xrightarrow{U} |\varphi\rangle \otimes |\varphi\rangle, \\ |\psi\rangle \otimes |x\rangle &\xrightarrow{U} |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle. \end{aligned}$$

Allora $\langle \varphi | \psi \rangle$ è 0 o 1.

Dimostrazione

La norma deve essere preservata:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle \langle \psi | \psi \rangle = (\langle \varphi | \psi \rangle)^2.$$

Perciò:

$$\langle \varphi | \psi \rangle = (\langle \varphi | \psi \rangle)^2.$$

Allora φ e ψ appartengono alla stessa base ortormale.

Il teorema può anche essere enunciato nel seguente modo: non esiste un operatore unitario in grado di clonare un arbitrario stato quantistico.

Dimostrazione

Si consideri lo stato $|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$; l'azione di U su $|\varphi\rangle$ è

$$U(|\varphi\rangle) = |\varphi\rangle |\varphi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle). \quad (5.6)$$

Per la linearità della teoria:

$$U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha U(|0\rangle) + \beta U(|1\rangle) = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad (5.7)$$

che è diverso da (5.6). Dunque U con queste proprietà non esiste.

Il teorema di non clonatura permette, dunque, l'esistenza di una macchina clonatrice con la seguente caratteristica: fissata una base ortonormale è possibile, almeno teoricamente, creare una macchina in grado di copiare ogni singolo vettore appartenente a tale base; non è però possibile duplicare una combinazione lineare di tali vettori (ed è su questo procedimento che si baserebbe la comunicazione superluminale).

Nell'esempio proposto da Herbert, si pensi ad una macchina in grado di clonare gli stati $|H\rangle$ e $|V\rangle$. La clonatura, ad esempio, dello stato $|R\rangle$ sarebbe:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle + |H\rangle) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|V, 4N\rangle + |H, 4N\rangle)$$

che è diverso dalla clonatura ideale

$$|R\rangle \longrightarrow |R, 4N\rangle;$$

l'osservatore in A non è dunque in grado di dire quale tipo di polarizzazione sia stata misurata in B.

Il collasso della funzione d'onda (una delle prescrizioni ancora dibattute della teoria quantistica), pur essendo un fenomeno non locale, sembra dunque non in contraddizione con la relatività in quanto non permette comunicazioni superluminali.

6. Conclusioni

Nel presente elaborato si sono illustrati brevemente alcuni lavori che, partendo dalla formulazione della teoria quantistica, hanno portato a mostrare la non località del mondo microscopico. In seguito all'enunciazione dei postulati della meccanica quantistica si sono poste in risalto alcune implicazioni di tali assunzioni: ad esempio, la stocasticità e la non linearità del processo di misura e la possibilità, mediante il formalismo matematico della teoria, di creare stati entangled.

Secondo l'interpretazione di Copenaghen la meccanica quantistica è una teoria completa: tutte le informazioni riguardanti un sistema fisico sono contenute nella funzione d'onda la quale permette di determinare la statistica dei possibili risultati di una misura. Contro tale interpretazione, che implica sia l'indeterminismo che la non località della natura (basti pensare al postulato riguardante il collasso della funzione d'onda), si è battuto, primo fra tutti, Einstein. Nell'elaborato si è, infatti, affrontato il paradosso di Einstein, Podolsky e Rosen, lavoro in cui gli autori hanno cercato di mostrare l'incompletezza della teoria quantistica, sfruttando due particelle fortemente correlate, il principio di località, il principio di Heisenberg e le condizioni di completezza e di realtà da loro stessi introdotte.

Le considerazioni fatte da Einstein, Rosen e Podolsky nei riguardi dell'incompletezza della teoria quantistica ricevettero l'attenzione di una parte del mondo accademico: Bohr rispose loro con un articolo poco chiaro, cercando continuamente di non affrontare il problema principale; Pauli sostenne l'inutilità di porsi domande a cui non era possibile darsi delle risposte; alcuni iniziarono a cercare di completare la teoria introducendo dei parametri supplementari: de Broglie, ad esempio, propose la teoria dell'onda pilota, idea ripresa poi da D. Bohm che elaborò la meccanica bohmiana, teoria a variabili nascoste non locali e deterministica (ancora oggi studiata); altri, come Neumann, cercarono di mostrare l'incompatibilità tra la teoria quantistica e le teorie a variabili nascoste (la dimostrazione proposta da Neumann è stata soggetta a varie critiche e, dunque, ha lasciato aperto il dibattito).

Nell'elaborato è stato affrontato il lavoro fondamentale di J. Bell che ha permesso di mostrare, in un modo semplice, l'impossibilità di completare la teoria quantistica mediante variabili nascoste locali; tale lavoro permise di portare sul piano sperimentale il dibattito riguardante la non località della teoria quantistica: gli esperimenti di A. Aspect, ed in particolare quello utilizzando analizzatori variabili nel tempo, sono stati i primi esperimenti in cui si sono ottenuti risultati in completo accordo con la meccanica quantistica, confermando la non località del mondo microscopico.

Si è terminato il lavoro ponendo in risalto l'impossibilità di trasferire informazioni a velocità superluminali, impossibilità sancita dai teoremi di non comunicazione e non clonazione: la non località quantistica sembra, dunque, non in diretta contrapposizione con i postulati della teoria della relatività. Una integrazione completa delle due teorie in forma covariante è però possibile solamente nella teoria quantistica dei campi.

Bibliografia

- [1] A. Aspect. *Bell's Theorem: The Naive View of an Experimentalist*. arXiv:quant-ph/0402001. 2004.
- [2] A. Aspect. «Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics». In: *Phys. Rev. D* 14 (1976), p. 1944.
- [3] A. Aspect, J. Dalibard e G. Roger. «Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers». In: *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), p. 1804.
- [4] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger. «Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities». In: *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), p. 91.
- [5] *Bell test experiments*. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Bell_test_experiments.
- [6] J.S. Bell. «Dicibile ed indicibile in meccanica quantistica». In: *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica*. Adelphi, 2010, pp. 224–228.
- [7] J.S. Bell. «I calzini di Bertlmann e la natura della realtà». In: *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica*. Adelphi, 2010, pp. 184–210.
- [8] J.S. Bell. «Introduzione alla questione delle variabili nascoste». In: *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica*. Adelphi, 2010, pp. 38–52.
- [9] J.S. Bell. «Sei possibili mondi della meccanica quantistica». In: *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica*. Adelphi, 2010, pp. 241–260.
- [10] J.S. Bell. «Sul paradosso di Einstein - Podolsky - Rosen». In: *Dicibile e Indicibile in Meccanica Quantistica*. Adelphi, 2010, pp. 20–29.
- [11] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. «System of two spin 1/2 particles». In: *Quantum Mechanics*. Vol. 1. Wiley-Vch, 1977. Cap. 4, pp. 430–436.
- [12] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. «The density operator». In: *Quantum Mechanics*. Vol. 1. Wiley-Vch, 1977. Cap. 3, pp. 295–307.
- [13] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. «The mathematical tools of quantum mechanics». In: *Quantum Mechanics*. Vol. 1. Wiley-Vch, 1977. Cap. 2, pp. 153–160.
- [14] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloe. «The postulates of quantum mechanics». In: *Quantum Mechanics*. Vol. 1. Wiley-Vch, 1977. Cap. 3, pp. 214–222.
- [15] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen. «Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?». In: *Phys. Rev.* 47 (1935), p. 777.
- [16] S. Forte e L. Rottoli. «Entanglement». In: *Fisica quantistica*. Zanichelli, 2018. Cap. 14.

- [17] G. Ghirardi. *Entanglement, Nonlocality, Superluminal Signaling and Cloning*. arXiv:1305.2305. 2013.
- [18] D.J. Griffiths. «Interpretazione statistica». In: *Introduzione alla Meccanica Quantistica*. CEA, 2005, pp. 2–5.
- [19] A.J. Legget. «Aspect Experiment». In: *Compendium of Quantum Physics*. Springer, 2009. Cap. 6, pp. 14–18.
- [20] N.D. Mermin. «Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory». In: *Phys. Today* (1985), p. 38.