



Universidad Marítima del Caribe  
Cálculo III  
Ing. Karla Sánchez  
Ing. Fernando Fernández

#### GUIA # 4

## INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS CARTESIANAS

Una integral doble es de la forma:  $\iint_R f(x, y) dA$

$R$  es una región en el plano  $XY$

$f(x, y)$  es una función acotada y definida en  $R$

$dA$  es un diferencial de área, también denotada como  $dx dy$  ó  $dy dx$ .

### TEOREMA DE FUBINI:

Si  $f$  es continua en el rectángulo  $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , entonces:

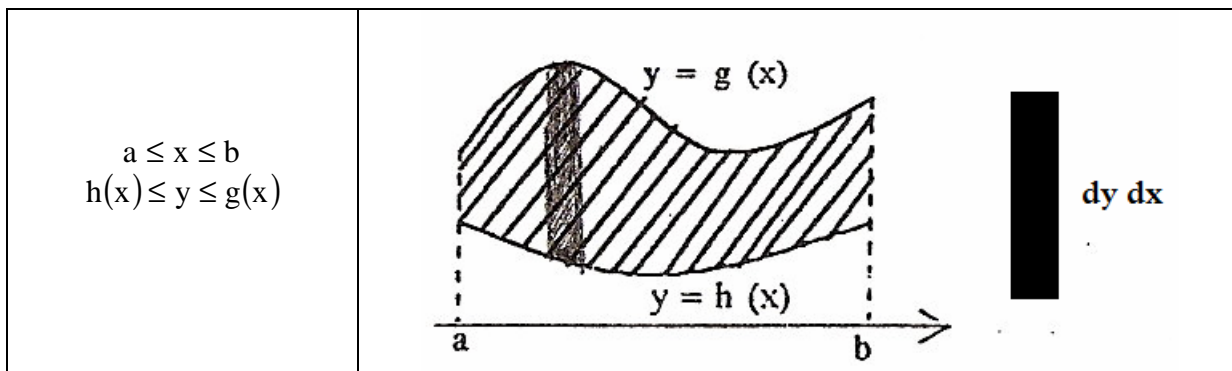
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

De manera más general, lo anterior se cumple si suponemos que  $f$  es acotada en  $R$ , es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

Si las regiones no son rectángulos, dicha región  $R$  puede ser clasificada de dos formas:

#### a) REGIÓN VERTICALMENTE SIMPLE:

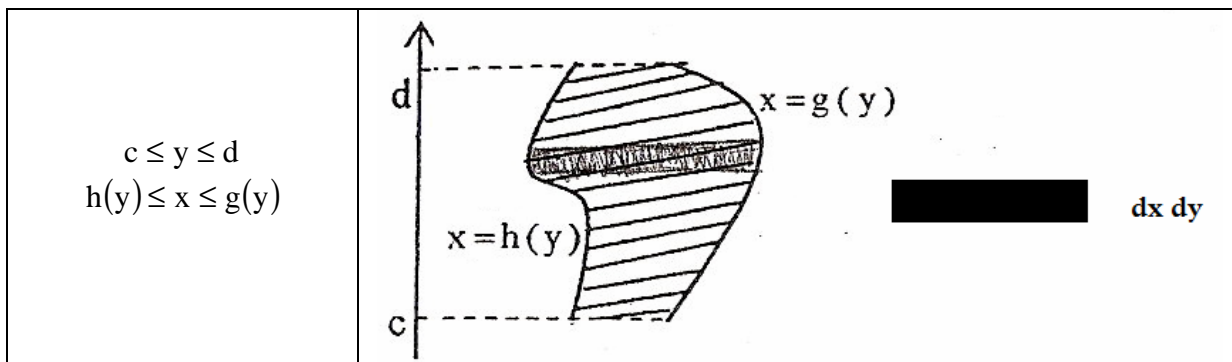
Una región es verticalmente simple, si la podemos describir mediante las desigualdades siguientes:





### b) REGIÓN HORIZONTALMENTE SIMPLE:

Una región es horizontalmente simple, si la podemos describir mediante las desigualdades siguientes:



### INTEGRALES ITERADAS:

Supóngase que  $f(x, y)$  es una función continua y definida en una región  $R$  (por lo tanto acotada) limitada del plano  $XY$ .

Si la región es verticalmente simple descrita por:  $a \leq x \leq b$  ,  $h(x) \leq y \leq g(x)$  entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx$$

Los diferenciales  $dydx$  indican que primero calculamos la integral interna, integrando respecto de  $Y$ , considerando a  $X$  constante, luego calculamos la integral de la función resultante respecto de  $X$ .

Si la región es horizontalmente simple descrita por:  $c \leq y \leq d$  ,  $h(y) \leq x \leq g(y)$  entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx dy$$

Los diferenciales  $dx dy$  indican que primero calculamos la integral interna, integrando respecto de  $X$ , considerando a  $Y$  constante, luego calculamos la integral de la función resultante respecto de  $Y$ .

### ÁREAS Y VOLUMENES MEDIANDO LA INTEGRAL DOBLE:

En la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  si  $f(x, y) = 1$  entonces estaremos calculando el área de una región en el plano.



$$\text{Área: } \iint_R dA$$

Si  $f(x, y) > 0$  en  $R$  podremos hallar el volumen de la siguiente manera:

$$\text{Volumen: } \iint_R f(x, y) dA$$

Si el volumen que se desea hallar está comprendido entre dos curvas, ambas positivas, se calcula de la forma:

$$\text{Volumen: } \iint_R \left( f(x, y)_{\text{Superior}} - f(x, y)_{\text{Inferior}} \right) dA$$

1) Halle el valor de las siguientes integrales dobles utilizando el Teorema de Fubini:

|      |  |      |   |
|------|--|------|---|
| 1.1  | $\int_0^3 \int_0^3 (xy + 7x + y) dx dy$                                | 1.2  | $\int_{-1}^2 \int_1^3 (2x - 7y) dy dx$  |
| 1.3  | $\int_0^2 \int_0^4 (3x + 4y) dx dy$                                    | 1.4  | $\int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$   |
| 1.5  | $\int_0^{\ln(2)} \int_0^{\ln(5)} e^{2x-y} dx dy$                       | 1.6  | $\int_1^4 \int_1^2 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$                        |
| 1.7  | $\int_1^2 \int_0^1 (x + y)^{-2} dx dy$                                 | 1.8  | $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \text{Sen}(y) dy dx$   |
| 1.9  | $\int_0^1 \int_1^2 \frac{x e^x}{y} dy dx$                              | 1.10 | $\int_0^1 \int_0^1 x \text{ArcTg}(y) dy dx$   |
| 1.11 | $\int_1^3 \int_0^2 (2x - 3y)^5 dy dx$                                  | 1.12 | $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$<br>$R = \{(x, y)   0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$ |
| 1.13 | $\int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{x + y} dy dx$                              | 1.14 | $\int_0^1 \int_{-2}^2 x^2 e^y dx dy$  |
| 1.15 | $\int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) dx dy$ | 1.16 | $\int_0^{\pi/2} \int_1^e \frac{\text{Sen}(y)}{x} dx dy$                                   |



|      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 1.17 | $\int_0^1 \int_0^{\pi} e^x \text{Sen}(y) dy dx$             | 1.18 | $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \text{Sen}(x) \text{Cos}(y) dy dx$  |
| 1.19 | $\int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (2xy^2 - 3x^2y) dy dx$             | 1.20 | $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy$  |
| 1.21 | $\iint_R xye^{x^2y} dA$<br>$R = [0,1] \times [0,2]$         | 1.22 | $\iint_R (x - 3y^2) dA$<br>$R = \{(x,y)   0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$                              |
| 1.23 | $\iint_R y \text{Sen}(xy) dA$<br>$R = [1,2] \times [0,\pi]$ | 1.24 | $\iint_R x \text{Sen}(x+y) dA$<br>$R = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ |

2) Halle el valor de las siguientes integrales dobles según el orden de integración que se indica:

|     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| 2.1 | $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\text{Cos}(\theta)} e^{\text{Sen}(\theta)} dr d\theta$ | 2.2 | $\int_0^1 \int_0^y \sqrt{x} dx dy$   |
| 2.3 | $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$   | 2.4 | $\iint_R \sqrt{xy} dA$<br>$R = \{(x,y)   0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$ |
| 2.5 | $\iint_R ye^x dA$<br>$R = \{(x,y)   0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$      | 2.6 | $\iint_R (4 - y^2) dA$<br>$R = \{(x,y)   y^2 \leq 2x, y^2 \leq 8 - 2x\}$       |
| 2.7 | $\iint_R  xy  dA$<br>$R = \{(x,y)   x^2 + y^2 \leq 1\}$                        | 2.8 | $\iint_R e^{x+y} dA$<br>$R = \{(x,y)    x  +  y  \leq 1\}$                     |

3) Plantee las integrales de la forma  $\iint_R dA$  con regiones vertical y/u horizontalmente simple que permiten hallar la región limitada entre:

|     |   |     |                                    |
|-----|---|-----|------------------------------------|
| 3.1 | $y =  x - 1  \text{ y } y = 3 - 2(x - 1)^2$ | 3.2 | $y = x^2 \text{ y } x = y^2$       |
| 3.3 | $x = y^2 \text{ y } x = 4 - y^2$            | 3.4 | $y = x^2 - 1 \text{ y } y = x + 1$ |



|     |  |     |   |
|-----|--|-----|---|
| 3.5 | $y =  x - 4  \text{ y } y = 4 + \sqrt{16 - (x - 4)^2}$ | 3.6 | $x - 1 = y^2 + z^2 \text{ y } x - 2 = -y^2 - z^2$ |
|-----|--|-----|---|

- 4) Halle el valor de las siguientes integrales utilizando regiones vertical u horizontalmente simples para las regiones  $R$  que se indican:

|      |   |      |   |
|------|---|------|---|
| 4.1  | $\iint_R (2x - y) dA$ <p><math>R</math> es la región delimitada por la circulo con centro en el origen y radio 2.</p>                                     | 4.2  | $\iint_R xy dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por la recta <math>y = x - 1</math> y la parábola <math>y^2 = 2x + 6</math></p>                          |
| 4.3  | $\iint_R (x + 2y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = 2x^2</math> y <math>y = 1 + x^2</math></p>                                     | 4.4  | $\iint_R xy dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = x</math> y <math>x = 1 + \sqrt{1 - y^2}</math> en el 1er Cuadrante.</p>                    |
| 4.5  | $\iint_R (x + y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = x^2</math> y <math>y = x + 2</math></p>   | 4.6  | $\iint_R x \cos(y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = 0</math>, <math>y = x^2</math> y <math>x = 1</math></p>                             |
| 4.7  | $\iint_R y^3 dA$ <p><math>R</math> es la región triangular con vértices en los puntos: <math>(0,2)</math>, <math>(1,1)</math> y <math>(3,2)</math></p>    | 4.8  | $\iint_R (x^2 - 2y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = -x^2</math>, <math>y = x^2</math>, <math>x = 0</math> y <math>x = 1</math></p>     |
| 4.9  | $\iint_R (x - y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = (x - 1)^2</math>, <math>y = (x + 1)^2</math>, <math>y = 0</math></p>            | 4.10 | $\iint_R e^{x+y} dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>x = -1</math>, <math>x = 1</math>, <math>y = -2</math> y <math>y = 2</math></p>           |
| 4.11 | $\iint_R (xy - y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = -x^2</math>, <math>y = x^2</math>, <math>x = 0</math> y <math>x = 1</math></p> | 4.12 | $\iint_R \sqrt{xy} dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y^2 = x</math>, <math>y = x</math>, <math>y = 0</math> y <math>y = 1</math></p>         |
| 4.13 | $\iint_R (2 - y^2) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = 1 - x^2</math> y <math>y = 3 - 2x^2</math></p>                                | 4.14 | $\iint_R \cos(x + y) dA$ <p><math>R</math> es la región acotada por <math>x = 0</math>, <math>x = \pi/2</math>, <math>y = 0</math> y <math>y = \pi/2</math></p> |



|      |  |      |   |
|------|--|------|---|
| 4.15 | $\iint_R (2x + 3y) dA$ <p>R es la región acotada por <math>y = x^2</math> y <math>y = 4 - x^2</math></p> | 4.16 | $\iint_R dA$ <p>R es la región acotada por <math>x + y = a</math> y <math>\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}</math></p> |
|------|--|------|---|

5) Halle las siguientes integrales de la forma  $\iint_R f(x, y) dA$ , las cuales representan un volumen según las siguientes restricciones:

|      |  |      |   |
|------|--|------|---|
| 5.1  | Bajo el plano $x + 2y - z = 0$ y por encima de la región acotada por $y = x$ y $y = x^4$                         | 5.2  | Bajo el plano $z = xy$ y por encima de la región triangular con vértices en los puntos: $(1,1)$ , $(4,1)$ y $(1,2)$           |
| 5.3  | Bajo el plano $x + y + z = 1$ y comprendida entre los planos $x = 0$ , $y = 0$ y $z = 0$                         | 5.4  | Acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $y = z$ , $x = 0$ y $z = 0$ , en el 1er octante.                         |
| 5.5  | Tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$ , $x = 2y$ , $x = 0$ y $z = 0$                                 | 5.6  | Bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por encima del plano XY acotado por $y = 2x$ y $y = x^2$                                |
| 5.7  | Comprendido entre el cilindro $z = 9 - y^2$ y el plano $x = 2$ en el primer octante.                             | 5.8  | Comprendido entre el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ y la región $R = [-1,1] \times [-2,2]$      |
| 5.9  | Bajo el plano $3x + 2y + z = 12$ y por encima de la región $R = [0,1] \times [-2,3]$                             | 5.10 | Comprendido entre el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$ , los planos $x = 2$ , $y = 2$ y los tres planos coordenados. |
| 5.11 | Comprendido entre el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ y por encima de la región $R = [-1,1] \times [1,3]$ | 5.12 | Comprendido entre $y = x^2$ , $z = 0$ y $y + z = 1$   |



|      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 5.13 | En forma de cuña acotada por $x = 3$ , $y + 2z = 4$ y los planos coordenados.                               | 5.14 | Limitado por las superficies $z = xy$ , $x^2 + y^2 = 1$ , $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ , $z = 0$        |
| 5.15 | Limitado por las superficies $x = y^2$ , $y = 0$ , $z = 0$ , $x + z = 1$                                    | 5.16 | Limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ , $y = x^2$ , $y = 1$ , $z = 0$                           |
| 5.17 | Limitado por la superficie $z = 1 + x^2 + y^2$ y las restricciones: $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x^2$ | 5.18 | Cuña cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por el plano $z = y$ y que se encuentra sobre el plano XY. |
| 5.19 | Comprendido entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$                                    | 5.20 | Acotado por $z = x^2 + y^2$ y las restricciones $x = 0$ , $x = 2$ , $y = 0$ y $y = 2$                  |
| 5.21 | Acotado por $z = 1 - x - y$ y las restricciones $x = 0$ , $y = 0$ , y $x + y = 1$                           | 5.22 | En forma de cuña acotada por $z = 0$ , $x = 0$ , $y = x^2$ y $y + z = 1$                               |
| 5.23 | Acotado por $z = 2 + x^2 + y^2$ y las restricciones $y = x$ , $y = 2 - x^2$ , $x = 0$ en el I Cuadrante.    | 5.24 | Acotado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la restricción $x^2 + y^2 \leq 4$                                 |
| 5.25 | Interior al Cilindro $x^2 + y^2 = b^2$ y acotado por el plano $y + z = a^2$ y $z = 0$                       | 5.26 | Limitado por los paraboloides $z = x^2 + 2y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$                                   |

6) Establezca un orden que permita evaluar las siguientes integrales:

|     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| 6.1 | $\iint_R e^{-x^2} dA$<br>$R$ es la región limitada por $y = x$ , $y = x^3$ en el I Cuadrante. | 6.2 | $\iint_R \frac{\text{Sen}(x)}{x} dA$<br>$R$ es la región limitada por $y = x$ , $x = \pi$ y $y = 0$ . |
|-----|---|-----|---|



|     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| 6.3 | $\iint_R x^2 \sqrt{1+y^4} dA$ <p>R es la región limitada por <math>y = x</math>, <math>y = 2</math> y <math>x = 0</math>.</p>   | 6.4 | $\iint_R \cos(y^2) dA$ <p>R es la región limitada por <math>y = x</math>, <math>y = 1</math> y <math>x = 0</math>.</p>            |
| 6.5 | $\iint_R \sqrt{x} \sin(x) dA$ <p>R es la región limitada por <math>x = y^2</math>, <math>x = 4</math> y <math>y = 0</math>.</p> | 6.6 | $\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} dA$ <p>R es la región limitada por <math>y = x</math>, <math>y = 2x</math> y <math>x = 2</math>.</p> |

- 7) Proceda a graficar la región de integración en la integral que se presenta, cambie el orden de integración y posteriormente halle su respuesta:

|     |   |     |   |
|-----|---|-----|---|
| 7.1 | $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3) dy dx$ | 7.2 | $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$                               |
| 7.3 | $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$        | 7.4 | $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$                       |
| 7.5 | $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$         | 7.6 | $\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx dy$ |

En los siguientes ejercicios dibuje la región de integración y cambie el orden de integración:

|      |  |      |   |
|------|--|------|---|
| 7.7  | $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$       | 7.8  | $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy$        |
| 7.9  | $\int_1^2 \int_0^{\ln(x)} f(x, y) dy dx$         | 7.10 | $\int_{-2}^2 \int_{y^2-4}^{4-y^2} f(x, y) dx dy$                    |
| 7.11 | $\int_0^1 \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$ | 7.12 | $\int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx$ |
| 7.13 | $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx$            | 7.14 | $\int_0^3 \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy$        |



|      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 7.15 | $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy dx$ | 7.16 | $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx dy$ |
|------|---|------|--|

Dada las siguientes integrales, proceda a graficar la región de integración y luego a cambiar el orden de integración:

$$7.17) \iint_R f(x,y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y) dx dy$$

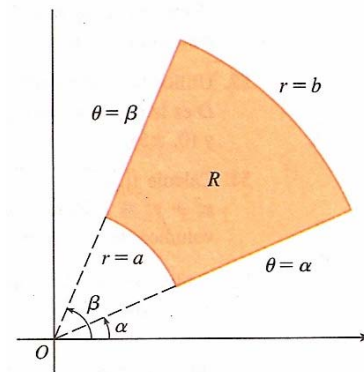
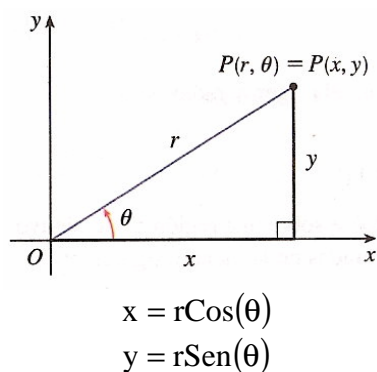
$$7.18) \iint_R f(x,y) dA = \int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dy dx + \int_0^a \int_{-a+x}^{a-x} f(x,y) dy dx$$

## INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

Muchas integrales dobles son más fáciles de calcular en coordenadas polares que en coordenadas cartesianas especialmente cuando la integral contiene expresiones como:

$$x^2 + y^2 \quad \text{ó} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ó} \quad \sqrt{R - x^2 - y^2}$$

Sea  $f(x,y)$  una función definida y continua en una región  $R$  del plano  $XY$  y supongamos que la región  $R$  se transforma mediante las ecuaciones:



El rectángulo polar queda descrito:

$$R = \{ (x,y) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, a \leq r \leq b \}$$



El  $dA$  de coordenadas cartesianas queda escrito en polares de la forma:  $dA = r dr d\theta$

Por tanto la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  podrá escribirse en coordenadas polares de la forma:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

IMPORTANTE: El  $dA$  de coordenadas cartesianas queda escrito en polares de la forma:  $dA = r dr d\theta$

8) Convierta las siguientes integrales dadas en coordenadas cartesianas a polares y proceda a evaluarlas:

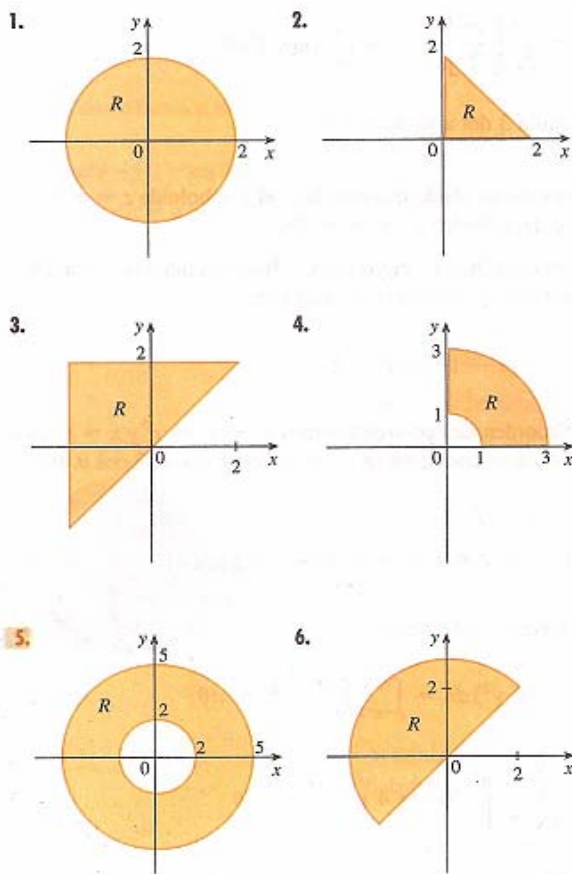
|     |   |      |   |
|-----|---|------|---|
| 8.1 | $\iint_R (3x + 4y^2) dA$ <p>Donde <math>R</math> es la región del semiplano superior acotado por los círculos <math>x^2 + y^2 = 1</math> y <math>x^2 + y^2 = 4</math></p> | 8.2  | $\iint_R xy dA$ <p>Donde <math>R</math> es el disco con centro en el origen y radio 3.</p>  |
| 8.3 | $\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA$ <p>Donde <math>R</math> es la región que está encima del eje X dentro del círculo <math>x^2 + y^2 = 9</math></p>                             | 8.4  | $\iint_R (x + y) dA$ <p>Donde <math>R</math> es la región a la izquierda del eje Y entre los círculos <math>x^2 + y^2 = 1</math> y <math>x^2 + y^2 = 4</math></p> |
| 8.5 | $\iint_R \operatorname{ArcTg}\left(\frac{y}{x}\right) dA$ <p><math>R = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}</math></p>                                | 8.6  | $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA$ <p><math>R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}</math></p>  |
| 8.7 | $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{Sen}(x^2 + y^2) dy dx$   | 8.8  | $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x + y) dx dy$  |
| 8.9 | $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y dx dy$   | 8.10 | $\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA$ <p>Donde <math>R</math> es un semicírculo de radio <math>a</math> con centro en el origen de coordenadas, en eje OX.</p>      |



9) Determine el volumen del sólido que se indica utilizando las coordenadas polares:

|     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| 9.1 | Encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ | 9.2 | Acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$                                |
| 9.3 | Adentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ como del Elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$   | 9.4 | Esfera de radio $a$  |
| 9.5 | Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y encima del disco $x^2 + y^2 \leq 4$          | 9.6 | Bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ , encima del plano XY y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ |

10) Se muestra una región  $R$ . Escriba la integral iterada, tanto en cartesianas como en polares, y decida cual de ellas es más sencilla de evaluar.





## **APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES:**

Supongamos que una lámina plana ocupa una región  $R$  del plano  $XY$  y que su densidad viene dada por la función continua  $\rho(x, y)$  para todos los  $(x, y)$  en  $R$

Definimos la masa de la lámina mediante la integral doble:

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA = \iint_R dm, \text{ donde } dm = \rho(x, y) dA$$

Los momentos de la lámina respecto al eje  $X$  y el eje  $Y$  respectivamente se definen como:

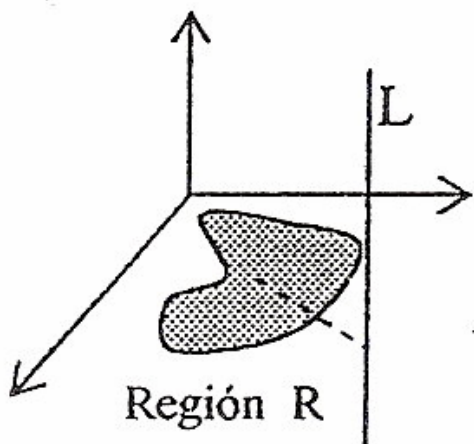
$$M_x = \iint_R y dm, \quad M_y = \iint_R x dm$$

Las coordenadas  $\left( \bar{x}, \bar{y} \right)$  del centro de masa de la lámina vienen dadas por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_R x dm, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_R y dm$$

Si  $\rho(x, y) = 1$  en la región  $R$ , entonces  $\left( \bar{x}, \bar{y} \right)$  se llama centroide de la región  $R$

### **MOMENTO DE INERCIA:**



Considérese una lámina que ocupa una región  $R$  del plano  $XY$  y  $L$  una recta que puede estar o no en el mismo plano de  $R$ . El momento de inercia  $I$  de la lámina respecto al eje  $L$  se define como:

$$I = \iint_R W^2 dm$$

donde  $W = W(x, y)$  es la distancia perpendicular de todo punto de  $R$  a la recta.  $dm = \rho(x, y) dA$ .



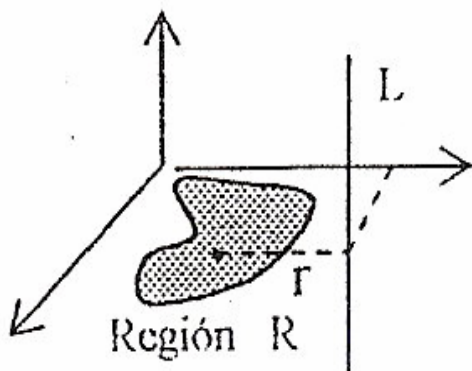
En particular, si la recta  $L$  es el eje  $X$  ó el eje  $Y$ , entonces el momento de Inercia respecto al eje  $X$  o al eje  $Y$  es respectivamente:

$$I_x = \iint_R x^2 dm, \quad I_y = \iint_R y^2 dm$$

La suma de estos dos momentos se llama **MOMENTO POLAR DE INERCIA** y se denota como  $I_o$  :

$$I_o = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) dm$$

### **RADIO DE GIRO:**



El radio de giro  $r$  de una lámina de masa  $m$  con respecto a un eje se define como:

$$r = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

En particular,

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}, \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

Son los radios de giro de la lámina a los ejes  $X$  e  $Y$  respectivamente.



Tabla de Integrales:

|    |  |    |   |
|----|--|----|---|
| 1  | $\int dx = x + C$  | 2  | $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \text{con } m \neq -1$                           |
| 3  | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad \text{con } a > 0$                       | 4  | $\int e^x dx = e^x + C$   |
| 5  | $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x  + C$                                  | 6  | $\int \text{Sen}(x) dx = -\text{Cos}(x) + C$  |
| 7  | $\int \text{Cos}(x) dx = \text{Sen}(x) + C$  | 8  | $\int \text{Sec}^2(x) dx = \text{Tg}(x) + C$  |
| 9  | $\int \text{Csc}^2(x) dx = -\text{Ctg}(x) + C$                                       | 10 | $\int \text{Sec}(x) \text{Tg}(x) dx = \text{Sec}(x) + C$                                      |
| 11 | $\int \text{Csc}(x) \text{Ctg}(x) dx = -\text{Csc}(x) + C$                           | 12 | $\int \text{Tg}(x) dx = -\ln \text{Cos}(x)  + C$  |
| 13 | $\int \text{Ctg}(x) dx = \ln \text{Sen}(x)  + C$                                     | 14 | $\int \text{Sec}(x) dx = \ln \text{Sec}(x) + \text{Tg}(x)  + C$                               |
| 15 | $\int \text{Csc}(x) dx = \ln \text{Csc}(x) - \text{Ctg}(x)  + C$                     | 16 | $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \text{ArcSen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$              |
| 17 | $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \text{ArcTg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ | 18 | $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \text{ArcSec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$ |
| 19 | $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{x-a}{x+a}\right  + C$     | 20 | $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right  + C$              |
| 21 | $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + C$   | 22 | $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad \text{con } a \neq 0$                        |
| 23 | $\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$                               | 24 | $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C$                    |

El uso de esta tabla estará permitido durante la evaluación.



Fórmulas de Recurrencias:

$$\int \text{Sen}^n(x) dx = \frac{-1}{n} \text{Sen}^{n-1}(x) \text{Cos}(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \text{Sen}^{n-2}(x) dx$$

$$\int \text{Cos}^n(x) dx = \frac{1}{n} \text{Cos}^{n-1}(x) \text{Sen}(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \text{Cos}^{n-2}(x) dx$$

si  $n \neq 1 \Rightarrow \int \text{Tg}^n(x) dx = \frac{\text{Tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \text{Tg}^{n-2}(x) dx$

si  $n \neq 1 \Rightarrow \int \text{Ctg}^n(x) dx = \frac{-\text{Ctg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \text{Ctg}^{n-2}(x) dx$

si  $n \neq 1 \Rightarrow \int \text{Sec}^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \text{Tg}(x) \text{Sec}^{n-2}(x) + \frac{(n-2)}{n-1} \int \text{Sec}^{n-2}(x) dx$

si  $n \neq 1 \Rightarrow \int \text{Csc}^n(x) dx = \frac{-1}{n-1} \text{Ctg}(x) \text{Csc}^{n-2}(x) + \frac{(n-2)}{n-1} \int \text{Csc}^{n-2}(x) dx$

$$\int \text{Sen}^n(x) \text{Cos}^m(x) dx = \frac{-\text{Cos}^{m+1}(x) \text{Sen}^{n-1}(x)}{m+n} + \left( \frac{n-1}{m+n} \right) \int \text{Sen}^{n-2}(x) \text{Cos}^m(x) dx$$

$$\int \text{Sen}(ax) \text{Sen}(bx) dx = \frac{\text{Sen}[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\text{Sen}[(a+b)x]}{2(a+b)} + C$$

$$\int \text{Cos}(ax) \text{Cos}(bx) dx = \frac{\text{Sen}[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\text{Sen}[(a+b)x]}{2(a+b)} + C$$

$$\int \text{Sen}(ax) \text{Cos}(bx) dx = \frac{-\text{Cos}[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\text{Cos}[(a+b)x]}{2(a+b)} + C$$