



## **INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS CARTESIANAS**

Una integral doble es de la forma:  $\iint_R f(x, y) dA$

$R$  es una región en el plano XY

$f(x, y)$  es una función acotada y definida en  $R$

$dA$  es un diferencial de área, también denotada como  $dxdy$  ó  $dydx$ .

### **TEOREMA DE FUBINI:**

Si  $f$  es continua en el rectángulo  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , entonces:

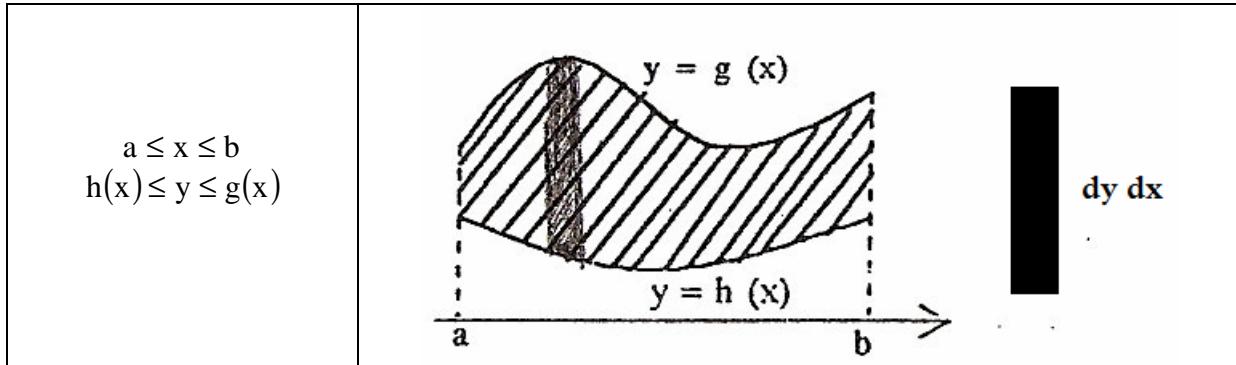
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

De manera más general, lo anterior se cumple si suponemos que  $f$  es acotada en  $R$ , es discontinua sólo en un número finito de curvas suaves y las integrales iteradas existen.

Si las regiones no son rectángulos, dicha región  $R$  puede ser clasificada de dos formas:

#### a) **REGIÓN VERTICALMENTE SIMPLE:**

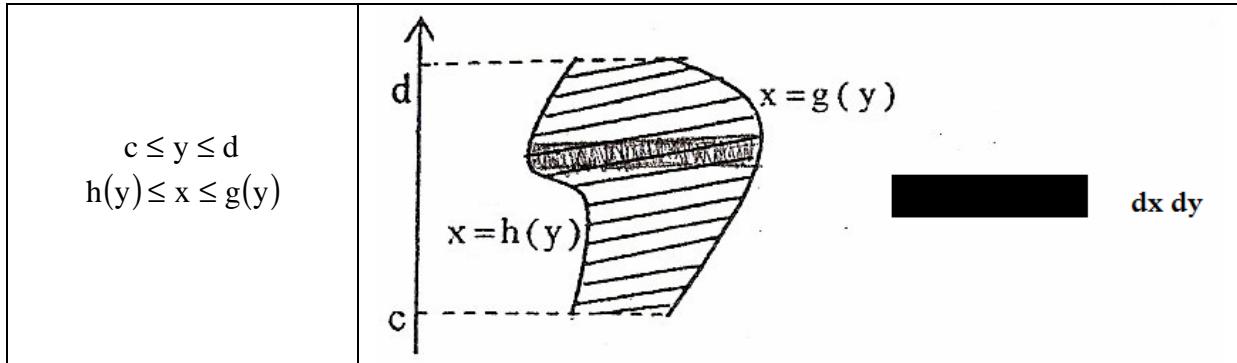
Una región es verticalmente simple, si la podemos describir mediante las desigualdades siguientes:





### b) REGIÓN HORIZONTALMENTE SIMPLE:

Una región es horizontalmente simple, si la podemos describir mediante las desigualdades siguientes:



### INTEGRALES ITERADAS:

Supóngase que  $f(x, y)$  es una función continua y definida en una región  $R$  (por lo tanto acotada) limitada del plano  $XY$ .

Si la región es verticalmente simple descrita por:  $a \leq x \leq b$  ,  $h(x) \leq y \leq g(x)$  entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x, y) dy dx$$

Los diferenciales  $dy dx$  indican que primero calculamos la integral interna, integrando respecto de  $Y$ , considerando a  $X$  constante, luego calculamos la integral de la función resultante respecto de  $X$ .

Si la región es horizontalmente simple descrita por:  $c \leq y \leq d$  ,  $h(y) \leq x \leq g(y)$  entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} f(x, y) dx dy$$

Los diferenciales  $dx dy$  indican que primero calculamos la integral interna, integrando respecto de  $X$ , considerando a  $Y$  constante, luego calculamos la integral de la función resultante respecto de  $Y$ .

### ÁREAS Y VOLUMENES MEDIANDO LA INTEGRAL DOBLE:

En la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  si  $f(x, y) = 1$  entonces estaremos calculando el área de una región en el plano.



$$\text{Área: } \iint_R dA$$

Si  $f(x, y) > 0$  en  $R$  podremos hallar el volumen de la siguiente manera:

$$\text{Volumen: } \iint_R f(x, y) dA$$

Si el volumen que se desea hallar está comprendido entre dos curvas, ambas positivas, se calcula de la forma:

$$\text{Volumen: } \iint_R \left( f(x, y)_{\text{Superior}} - f(x, y)_{\text{Inferior}} \right) dA$$

1) Halle el valor de las siguientes integrales dobles utilizando el Teorema de Fubini:

1.1	$\int_0^3 \int_0^3 (xy + 7x + y) dx dy$	1.2	$\int_{-1}^2 \int_1^3 (2x - 7y) dy dx$
1.3	$\int_0^2 \int_0^4 (3x + 4y) dx dy$	1.4	$\int_0^1 \int_0^1 xy \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$
1.5	$\int_0^{\ln(2)} \int_0^{\ln(5)} e^{2x-y} dx dy$	1.6	$\int_1^4 \int_1^2 \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dy dx$
1.7	$\int_1^2 \int_0^1 (x+y)^{-2} dx dy$	1.8	$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{Sen}(y) dy dx$
1.9	$\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} dy dx$	1.10	$\int_0^1 \int_0^1 x \operatorname{ArcTg}(y) dy dx$
1.11	$\int_1^3 \int_0^2 (2x - 3y)^5 dy dx$	1.12	$\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} dA$ $R = \{(x, y)   0 \leq x \leq 1, -3 \leq y \leq 3\}$
1.13	$\int_1^2 \int_0^1 \frac{1}{x+y} dy dx$	1.14	$\int_0^1 \int_{-2}^2 x^2 e^y dx dy$
1.15	$\int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) dx dy$	1.16	$\int_0^{\pi/2} \int_1^e \frac{\operatorname{Sen}(y)}{x} dx dy$



1.17	$\int_0^1 \int_0^\pi e^x \operatorname{Sen}(y) dy dx$	1.18	$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sen}(x) \operatorname{Cos}(y) dy dx$
1.19	$\int_{-1}^2 \int_{-1}^2 (2xy^2 - 3x^2 y) dy dx$	1.20	$\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy) dx dy$
1.21	$\iint_R xye^{x^2 y} dA$ $R = [0,1] \times [0,2]$	1.22	$\iint_R (x - 3y^2) dA$ $R = \{(x, y)   0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2\}$
1.23	$\iint_R y \operatorname{Sen}(xy) dA$ $R = [1,2] \times [0, \pi]$	1.24	$\iint_R x \operatorname{Sen}(x+y) dA$ $R = \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

2) Halle el valor de las siguientes integrales dobles según el orden de integración que se indica:

2.1	$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{Cos}(\theta)} e^{\operatorname{Sen}(\theta)} dr d\theta$	2.2	$\int_0^1 \int_0^e \sqrt{x} dx dy$
2.3	$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x + 2y) dy dx$	2.4	$\iint_R \sqrt{xy} dA$ $R = \{(x, y)   0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$
2.5	$\iint_R ye^x dA$ $R = \{(x, y)   0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$	2.6	$\iint_R (4 - y^2) dA$ $R = \{(x, y)   y^2 \leq 2x, y^2 \leq 8 - 2x\}$
2.7	$\iint_R  xy  dA$ $R = \{(x, y)   x^2 + y^2 \leq 1\}$	2.8	$\iint_R e^{x+y} dA$ $R = \{(x, y)    x  +  y  \leq 1\}$

3) Plantee las integrales de la forma  $\iint_R dA$  con regiones vertical y/u horizontalmente simple que permiten hallar la región limitada entre:

3.1	$y =  x - 1 $ y $y = 3 - 2(x - 1)^2$	3.2	$y = x^2$ y $x = y^2$
3.3	$x = y^2$ y $x = 4 - y^2$	3.4	$y = x^2 - 1$ y $y = x + 1$



3.5	$y =  x - 4  \text{ y } y = 4 + \sqrt{16 - (x - 4)^2}$	3.6	$x - 1 = y^2 + z^2 \text{ y } x - 2 = -y^2 - z^2$
-----	--	-----	---

- 4) Halle el valor de las siguientes integrales utilizando regiones vertical u horizontalmente simples para las regiones  $R$  que se indican:

4.1	$\iint_R (2x - y) dA$ $R$ $R$ es la región delimitada por la circulo con centro en el origen y radio 2.	4.2	$\iint_R xy dA$ $R$ $R$ es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$
4.3	$\iint_R (x + 2y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$	4.4	$\iint_R xy dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = x$ y $x = 1 + \sqrt{1 - y^2}$ en el 1er Cuadrante.
4.5	$\iint_R (x + y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = x^2$ y $y = x + 2$	4.6	$\iint_R x \cos(y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = 0$ , $y = x^2$ y $x = 1$
4.7	$\iint_R y^3 dA$ $R$ $R$ es la región triangular con vértices en los puntos: $(0,2)$ , $(1,1)$ y $(3,2)$	4.8	$\iint_R (x^2 - 2y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = -x^2$ , $y = x^2$ , $x = 0$ y $x = 1$
4.9	$\iint_R (x - y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = (x - 1)^2$ , $y = (x + 1)^2$ , $y = 0$	4.10	$\iint_R e^{x+y} dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $x = -1$ , $x = 1$ , $y = -2$ y $y = 2$
4.11	$\iint_R (xy - y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = -x^2$ , $y = x^2$ , $x = 0$ y $x = 1$	4.12	$\iint_R \sqrt{xy} dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y^2 = x$ , $y = x$ , $y = 0$ y $y = 1$
4.13	$\iint_R (2 - y^2) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $y = 1 - x^2$ y $y = 3 - 2x^2$	4.14	$\iint_R \cos(x + y) dA$ $R$ $R$ es la región acotada por $x = 0$ , $x = \pi/2$ , $y = 0$ y $y = \pi/2$



4.15 $\iint_R (2x + 3y) dA$ <p><math>R</math></p> <p><math>R</math> es la región acotada por <math>y = x^2</math> y  <math>y = 4 - x^2</math></p>	4.16 $\iint_R dA$ <p><math>R</math></p> <p><math>R</math> es la región acotada por <math>x + y = a</math> y  <math>\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}</math></p>
--	---

- 5) Halle las siguientes integrales de la forma  $\iint_R f(x, y) dA$ , las cuales representan un volumen según las siguientes restricciones:

5.1 <p>Bajo el plano <math>x + 2y - z = 0</math> y por encima de la región acotada por <math>y = x</math> y <math>y = x^4</math></p>	5.2 <p>Bajo el plano <math>z = xy</math> y por encima de la región triangular con vértices en los puntos: <math>(1,1)</math>, <math>(4,1)</math> y <math>(1,2)</math></p>
5.3 <p>Bajo el plano <math>x + y + z = 1</math> y comprendida entre los planos <math>x = 0</math>, <math>y = 0</math> y <math>z = 0</math></p>	5.4 <p>Acotado por el cilindro <math>x^2 + y^2 = 1</math> y los planos <math>y = z</math>, <math>x = 0</math> y <math>z = 0</math>, en el 1er octante.</p>
5.5 <p>Tetraedro acotado por los planos <math>x + 2y + z = 2</math>, <math>x = 2y</math>, <math>x = 0</math> y <math>z = 0</math></p>	5.6 <p>Bajo el parabolóide <math>z = x^2 + y^2</math> y por encima del plano XY acotado por <math>y = 2x</math> y <math>y = x^2</math></p>
5.7 <p>Comprendido entre el cilindro <math>z = 9 - y^2</math> y el plano <math>x = 2</math> en el primer octante.</p>	5.8 <p>Comprendido entre el parabolóide elíptico <math>\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1</math> y la región <math>R = [-1,1] \times [-2,2]</math></p>
5.9 <p>Bajo el plano <math>3x + 2y + z = 12</math> y por encima de la región <math>R = [0,1] \times [-2,3]</math></p>	5.10 <p>Comprendido entre el parabolóide elíptico <math>x^2 + 2y^2 + z = 16</math>, los planos <math>x = 2</math>, <math>y = 2</math> y los tres planos coordenados.</p>
5.11 <p>Comprendido entre el parabolóide hiperbólico <math>z = y^2 - x^2</math> y por encima de la región <math>R = [-1,1] \times [1,3]</math></p>	5.12 <p>Comprendido entre <math>y = x^2</math>, <math>z = 0</math> y <math>y + z = 1</math></p>



5.13	En forma de cuña acotada por $x = 3$ , $y + 2z = 4$ y los planos coordenados.	5.14	Limitado por las superficies $z = xy$ , $x^2 + y^2 = 1$ , $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ , $z = 0$
5.15	Limitado por las superficies $x = y^2$ , $y = 0$ , $z = 0$ , $x + z = 1$	5.16	Limitado por las superficies $z = x^2 + y^2$ , $y = x^2$ , $y = 1$ , $z = 0$
5.17	Limitado por la superficie $z = 1 + x^2 + y^2$ y las restricciones: $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq x^2$	5.18	Cuña cortada en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por el plano $z = y$ que se encuentra sobre el plano XY.
5.19	Comprendido entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$	5.20	Acotado por $z = x^2 + y^2$ y las restricciones $x = 0$ , $x = 2$ , $y = 0$ y $y = 2$
5.21	Acotado por $z = 1 - x - y$ y las restricciones $x = 0$ , $y = 0$ , $y + x = 1$	5.22	En forma de cuña acotada por $z = 0$ , $x = 0$ , $y = x^2$ y $y + z = 1$
5.23	Acotado por $z = 2 + x^2 + y^2$ y las restricciones $y = x$ , $y = 2 - x^2$ , $x = 0$ en el I Cuadrante.	5.24	Acotado por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la restricción $x^2 + y^2 \leq 4$
5.25	Interior al Cilindro $x^2 + y^2 = b^2$ y acotado por el plano $y + z = a^2$ y $z = 0$	5.26	Limitado por los paraboloides $z = x^2 + 2y^2$ y $z = 4 - x^2 - y^2$

6) Establezca un orden que permita evaluar las siguientes integrales:

6.1	$\iint_R e^{-x^2} dA$ $R$ es la región limitada por $y = x$ , $y = x^3$ en el I Cuadrante.	6.2	$\iint_R \frac{\operatorname{Sen}(x)}{x} dA$ $R$ es la región limitada por $y = x$ , $x = \pi$ y $y = 0$ .
-----	---	-----	---



6.3 $\iint_R x^2 \sqrt{1+y^4} dA$ $R$ $R$ es la región limitada por $y = x$ , $y = 2$ y $x = 0$ .	6.4 $\iint_R \cos(y^2) dA$ $R$ $R$ es la región limitada por $y = x$ , $y = 1$ y $x = 0$ .
6.5 $\iint_R \sqrt{x} \operatorname{Sen}(x) dA$ $R$ $R$ es la región limitada por $x = y^2$ , $x = 4$ y $y = 0$ .	6.6 $\iint_R \frac{y}{x^2 + y^2} dA$ $R$ $R$ es la región limitada por $y = x$ , $y = 2x$ y $x = 2$ .

- 7) Proceda a graficar la región de integración en la integral que se presenta, cambie el orden de integración y posteriormente halle su respuesta:

7.1 $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \operatorname{Sen}(y^3) dy dx$	7.2 $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$
7.3 $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$	7.4 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} dx dy$
7.5 $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{Sen}(y^2) dy dx$	7.6 $\int_0^1 \int_{\operatorname{ArcSen}(y)}^{\pi/2} \cos(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx dy$

En los siguientes ejercicios dibuje la región de integración y cambie el orden de integración:

7.7 $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$	7.8 $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy$
7.9 $\int_1^2 \int_0^{\ln(x)} f(x, y) dy dx$	7.10 $\int_{-2}^2 \int_{y^2-4}^{4-y^2} f(x, y) dx dy$
7.11 $\int_0^1 \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx$	7.12 $\int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx$
7.13 $\int_0^1 \int_{x^2}^x f(x, y) dy dx$	7.14 $\int_0^3 \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx dy$



7.15 $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx$	7.16 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy$
---	--

Dada las siguientes integrales, proceda a graficar la región de integración y luego a cambiar el orden de integración:

$$7.17) \iint_R f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y) dx dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y) dx dy$$

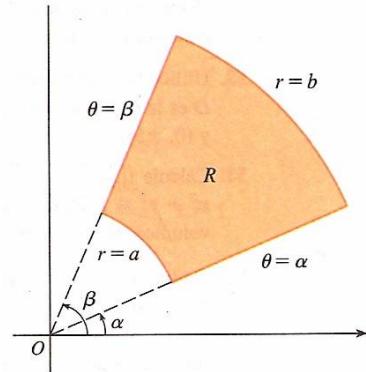
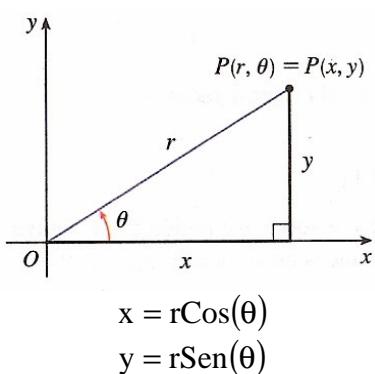
$$7.18) \iint_R f(x, y) dA = \int_{-a}^0 \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^a \int_{-a+x}^{a-x} f(x, y) dy dx$$

## **INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES**

Muchas integrales dobles son más fáciles de calcular en coordenadas polares que en coordenadas cartesianas especialmente cuando la integral contiene expresiones como:

$$x^2 + y^2 \text{ ó } \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ó } \sqrt{R - x^2 - y^2}$$

Sea  $f(x, y)$  una función definida y continua en una región  $R$  del plano XY y supongamos que la región  $R$  se transforma mediante las ecuaciones:



El rectángulo polar queda descrito:

$$R = \{ (x, y) | \alpha \leq \theta \leq \beta, a \leq r \leq b \}$$



El  $dA$  de coordenadas cartesianas queda escrito en polares de la forma:  $dA = r dr d\theta$

Por tanto la integral  $\iint_R f(x, y) dA$  podrá escribirse en coordenadas polares de la forma:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta$$

**IMPORTANTE:** El  $dA$  de coordenadas cartesianas queda escrito en polares de la forma:  $dA = r dr d\theta$

- 8) Convierta las siguientes integrales dadas en coordenadas cartesianas a polares y proceda a evaluarlas:

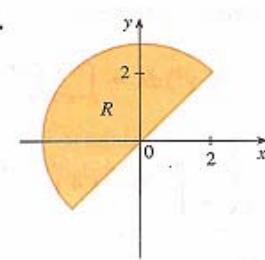
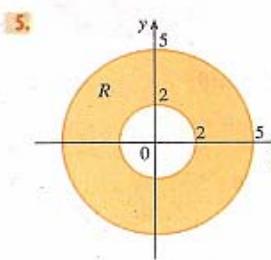
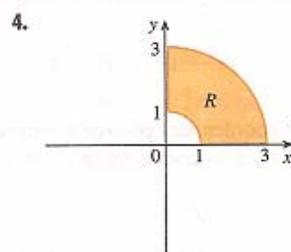
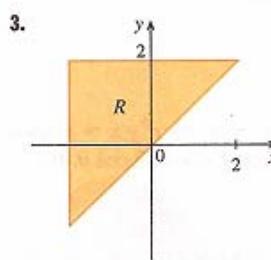
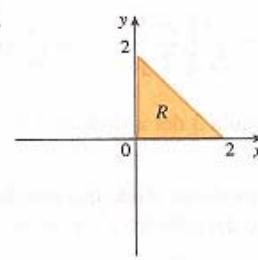
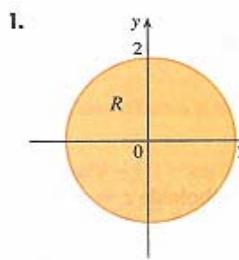
<p>8.1 <math>\iint_R (3x + 4y^2) dA</math> Donde <math>R</math> es la región del semiplano superior acotado por los círculos <math>x^2 + y^2 = 1</math> y <math>x^2 + y^2 = 4</math></p>	<p>8.2 <math>\iint_R xy dA</math> Donde <math>R</math> es el disco con centro en el origen y radio 3.</p>
<p>8.3 <math>\iint_R \cos(x^2 + y^2) dA</math> Donde <math>R</math> es la región que está encima del eje X dentro del círculo <math>x^2 + y^2 = 9</math></p>	<p>8.4 <math>\iint_R (x + y) dA</math> Donde <math>R</math> es la región a la izquierda del eje Y entre los círculos <math>x^2 + y^2 = 1</math> y <math>x^2 + y^2 = 4</math></p>
<p>8.5 <math>\iint_R \text{ArcTg}\left(\frac{y}{x}\right) dA</math> <math>R = \{(x, y)   1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}</math></p>	<p>8.6 <math>\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} dA</math> <math>R = \{(x, y)   x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}</math></p>
<p>8.7 <math>\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy dx</math></p>	<p>8.8 <math>\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x + y) dx dy</math></p>
<p>8.9 <math>\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^0 x^2 y dx dy</math></p>	<p>8.10 <math>\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dA</math> Donde <math>R</math> es un semicírculo de radio <math>a</math> con centro en el origen de coordenadas, en eje OX.</p>



9) Determine el volumen del sólido que se indica utilizando las coordenadas polares:

9.1	Encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$	9.2	Acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$
9.3	Adentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ como del Elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$	9.4	Esfera de radio $a$
9.5	Bajo el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y encima del disco $x^2 + y^2 \leq 4$	9.6	Bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ , encima del plano XY y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

10) Se muestra una región  $R$ . Escriba la integral iterada, tanto en cartesianas como en polares, y decida cual de ellas es más sencilla de evaluar.





## APLICACIONES DE LAS INTEGRALES DOBLES:

Supongamos que una lámina plana ocupa una región  $R$  del plano XY y que su densidad viene dada por la función continua  $\rho(x, y)$  para todos los  $(x, y)$  en  $R$

Definimos la masa de la lámina mediante la integral doble:

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA = \iint_R dm, \text{ donde } dm = \rho(x, y) dA$$

Los momentos de la lámina respecto al eje X y el eje Y respectivamente se definen como:

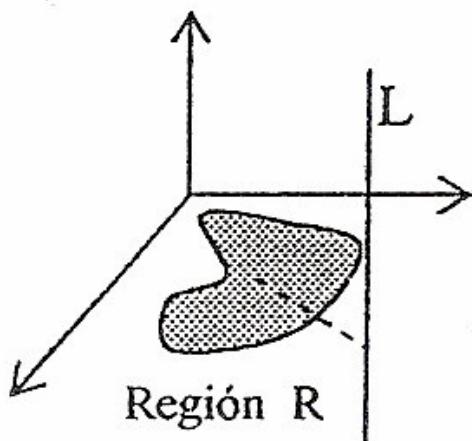
$$M_x = \iint_R y dm, M_y = \iint_R x dm$$

Las coordenadas  $\left( \bar{x}, \bar{y} \right)$  del centro de masa de la lámina vienen dadas por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_R x dm, \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_R y dm$$

Si  $\rho(x, y) = 1$  en la región  $R$ , entonces  $\left( \bar{x}, \bar{y} \right)$  se llama centroide de la región  $R$

### MOMENTO DE INERCIA:



Considérese una lámina que ocupa una región  $R$  del plano XY y  $L$  una recta que puede estar o no en el mismo plano de  $R$ . El momento de inercia  $I$  de la lámina respecto al eje  $L$  se define como:

$$I = \iint_R W^2 dm$$

donde  $W = W(x, y)$  es la distancia perpendicular de todo punto de  $R$  a la recta.  $dm = \rho(x, y) dA$ .



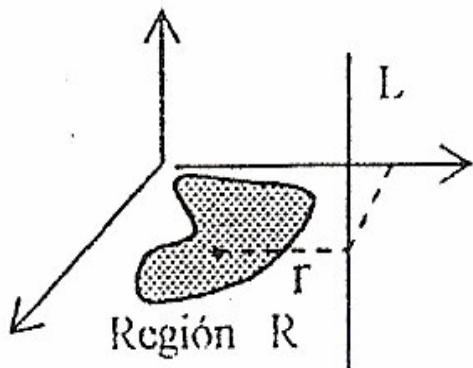
En particular, si la recta L es el eje X ó el eje Y, entonces el momento de Inercia respecto al eje X o al eje Y es respectivamente:

$$I_x = \iint_R x^2 dm, I_y = \iint_R y^2 dm$$

La suma de estos dos momentos se llama **MOMENTO POLAR DE INERCIA** y se denota como  $I_o$ :

$$I_o = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) dm$$

### **RADIO DE GIRO:**



El radio de giro  $r$  de una lámina de masa  $m$  con respecto a un eje se define como:

$$r = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

En particular,

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}, r_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

Son los radios de giro de la lámina a los ejes X e Y respectivamente.



Tabla de Integrales:

1	$\int dx = x + C$	2	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ con } m \neq -1$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \text{ con } a > 0$	4	$\int e^x dx = e^x + C$
5	$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x  + C$	6	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
7	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	8	$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
9	$\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$	10	$\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + C$
11	$\int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + C$	12	$\int \tan(x) dx = -\ln \cos(x)  + C$
13	$\int \cot(x) dx = \ln \sin(x)  + C$	14	$\int \sec(x) dx = \ln \sec(x) + \tan(x)  + C$
15	$\int \csc(x) dx = \ln \csc(x) - \cot(x)  + C$	16	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
17	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	18	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$
19	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{x-a}{x+a}\right  + C$	20	$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right  + C$
21	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x)  + C$	22	$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \text{ con } a \neq 0$
23	$\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C$	24	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}  + C$

El uso de esta tabla estará permitido durante la evaluación.



Fórmulas de Recurrencias:

$$\int \operatorname{Sen}^n(x) dx = \frac{-1}{n} \operatorname{Sen}^{n-1}(x) \operatorname{Cos}(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \operatorname{Sen}^{n-2}(x) dx$$

$$\int \operatorname{Cos}^n(x) dx = \frac{1}{n} \operatorname{Cos}^{n-1}(x) \operatorname{Sen}(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \operatorname{Cos}^{n-2}(x) dx$$

$$\text{si } n \neq 1 \Rightarrow \int \operatorname{Tg}^n(x) dx = \frac{\operatorname{Tg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \operatorname{Tg}^{n-2}(x) dx$$

$$\text{si } n \neq 1 \Rightarrow \int \operatorname{Ctg}^n(x) dx = \frac{-\operatorname{Ctg}^{n-1}(x)}{n-1} - \int \operatorname{Ctg}^{n-2}(x) dx$$

$$\text{si } n \neq 1 \Rightarrow \int \operatorname{Sec}^n(x) dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{Tg}(x) \operatorname{Sec}^{n-2}(x) + \frac{(n-2)}{n-1} \int \operatorname{Sec}^{n-2}(x) dx$$

$$\text{si } n \neq 1 \Rightarrow \int \operatorname{Csc}^n(x) dx = \frac{-1}{n-1} \operatorname{Ctg}(x) \operatorname{Csc}^{n-2}(x) + \frac{(n-2)}{n-1} \int \operatorname{Csc}^{n-2}(x) dx$$

$$\int \operatorname{Sen}^n(x) \operatorname{Cos}^m(x) dx = \frac{-\operatorname{Cos}^{m+1}(x) \operatorname{Sen}^{n-1}(x)}{m+n} + \left( \frac{n-1}{m+n} \right) \int \operatorname{Sen}^{n-2}(x) \operatorname{Cos}^m(x) dx$$

$$\int \operatorname{Sen}(ax) \operatorname{Sen}(bx) dx = \frac{\operatorname{Sen}[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{Sen}[(a+b)x]}{2(a+b)} + C$$

$$\int \operatorname{Cos}(ax) \operatorname{Cos}(bx) dx = \frac{\operatorname{Sen}[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{Sen}[(a+b)x]}{2(a+b)} + C$$

$$\int \operatorname{Sen}(ax) \operatorname{Cos}(bx) dx = \frac{-\operatorname{Cos}[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{Cos}[(a+b)x]}{2(a+b)} + C$$