

Metody Numeryczne N04

Jakub Kurek

1. Wstęp

Celem zadania jest znalezienie interpolacji Lagrange'a $f_{\text{approx}}(x)$ funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

na przedziale $x \in [-5, 5]$.

Program liczący rozwiązania został napisany w C++23. Wykresy zostały stworzone w języku Python przy użyciu biblioteki matplotlib. Cały kod wykorzystywany do obliczeń oraz generowania wykresów znajduje się w repozytorium na [GitHub](#).

2. Interpolacja Lagrange'a

Wzór interpolacji Lagrange ma postać:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j$$

gdzie:

$$l_j(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

2.1. Liczenie wartości bezpośrednio z wzoru interpolacyjnego

Normalne obliczanie wartości M punktów z wzoru interpolacyjnego Lagrange zajmowałoby $O(M \cdot N^2)$ operacji. Można jednak zastosować pewne optymalizację. Najpierw wyliczamy mianowniki wielomianów $l_j(x)$ i oznaczamy je m_j gdyż nie zależą one od x i są identyczne w każdym punkcie. Dla każdego punktu następnie obliczamy:

$$\omega(x) = \prod_i^N x - x_i$$

Wówczas wartość w punkcie liczymy ze wzoru:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_j) \cdot m_j}$$

Matematycznie jest to poprawne działanie, lecz w programie należy sprawdzić czy nasz x nie jest węzłem interpolacji, gdyż wówczas $\omega = 0$ oraz $(x - x_j) = 0$ co daje nam $\frac{0}{0} = \text{NaN}$.

Koszt obliczenia punktów tą metodą to $O(N^2 + M * N)$.

2.2. Liczenie współczynników wielomianu interpolacyjnego

Zakładamy, że żaden z węzłów interpolacji nie jest zerem. Jeśli, któryś z węzłów interpolacyjnych jest równy 0. To tworzymy wielomian Lagrange i wyliczamy jego wartość w punkcie $\tilde{x} \neq 0$ w tym przypadku $\tilde{x} = \frac{x_{i+1}}{2}$. Następnie usuwamy węzeł $x = 0$ i zastępujemy go przez \tilde{x} oraz $\tilde{f} = y(\tilde{x})$.

Wówczas wielomian ma postać:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j$$

Współczynnik a_0 wielomianu obliczamy, licząc wartość w zerze:

$$a_0 = y(0) = \sum_{j=1}^n l_j(0) f_j$$

Koszt obliczenia $O(N^2)$, przy czym zapamiętujemy wielomiany $l_j(0)$.

Można zauważać:

$$\frac{y(x) - a_0}{x} = \dots + a_1$$

Nie możemy jednak podzielić przez x , gdyż obliczamy wartości w 0. Możemy jednak skorzystać z interpolacji:

$$\frac{y(x_i) - a_0}{x_i} = \frac{1}{x_i} \left(\sum_{j=1}^n l_j(x_i) f_j - a_0 \right) = \frac{1}{x_i} \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} f_j - a_0 \right) = \frac{f_i - a_0}{x_i}$$

Wówczas budujemy tabelę

x_i	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$f_i^{(1)}$	$\frac{f_1 - a_0}{x_1}$	$\frac{f_2 - a_0}{x_2}$	$\frac{f_3 - a_0}{x_3}$	\dots	$\frac{f_n - a_0}{x_n}$

a na jej podstawie wielomian interpolacyjny:

$$y^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j^{(1)}$$

Korzystamy z faktu iż znamy $l_j(0)$, ponieważ zależą one tylko od węzłów. Możemy obliczyć wartość:

$$a_1 = y^{(1)}(0) = \sum_{j=1}^n l_j(0) f_j^{(1)}$$

Uogólniając ten algorytm otrzymujemy:

$$a_k = \sum_{j=1}^n l_j(0) f_j^{(k)} \quad k = 0, \dots, n-1$$

gdzie:

$$f_j^{(k)} = \begin{cases} f_j & k = 0 \\ \frac{f_j^{(k-1)} - a_{k-1}}{x_j} & k \neq 0 \end{cases}$$

Obliczenie kolejnego a_k dokonujemy w czasie $O(N)$, więc obliczenie współczynników wielomianu zajmuje w sumie $O(N^2)$.

2.3. Obliczanie wartości wielomianu

Dla efektywnego obliczania wartości wielomianu korzystamy z algorytu Hornera:

1. $P = a_n$
2. $k = n$
3. **while** $k > 0$:
 - $k = k - 1$
 - $P = P \cdot z + a_k$
4. **return** P

3. Interpolacja funkcji

Celem zadania było znalezienie optymalnej interpolacji, która zminimalizuje błąd przybliżenia $\Delta f = \max\{|f - f_{approx}| \}$ dla gęstej siatki punktów, które będą znajdować się również pomiędzy węzłami interpolacji. Dla zadanej funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in [-5, 5]$. Przeanalizowane były dwie metody dobierania węzłów:

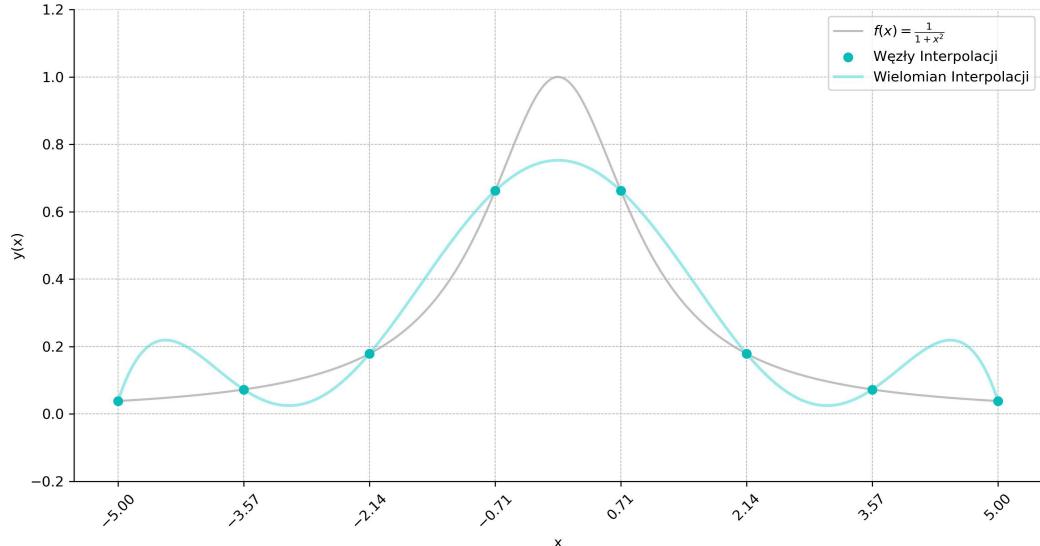
- węzły równoodległe: $x_n = -5 + 10 \frac{n}{N-1}$ dla $n \in 0, \dots, N$
- węzły Czebyszewa: $x_n = -5 \cos\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)$ dla $n \in 0, \dots, N$

3.1. Znajdowanie optymalnej ilości węzłów interpolacyjnych

Dla każdej metody doboru węzłów wygenerowane zostały interpolacje dla $n \in \{2, 3, \dots, 256\}$ oraz została policzona wartość $\Delta f(x)$ korzystając z siatki 1024 równorozmieszczonej punktów na przedziale $[-5, 5]$, gdyż w węzłach interpolacyjnych błąd zawsze wynosi 0, natomiast różnice w wartościach funkcji i interpolacji między węzłami determinują jakość interpolacji.

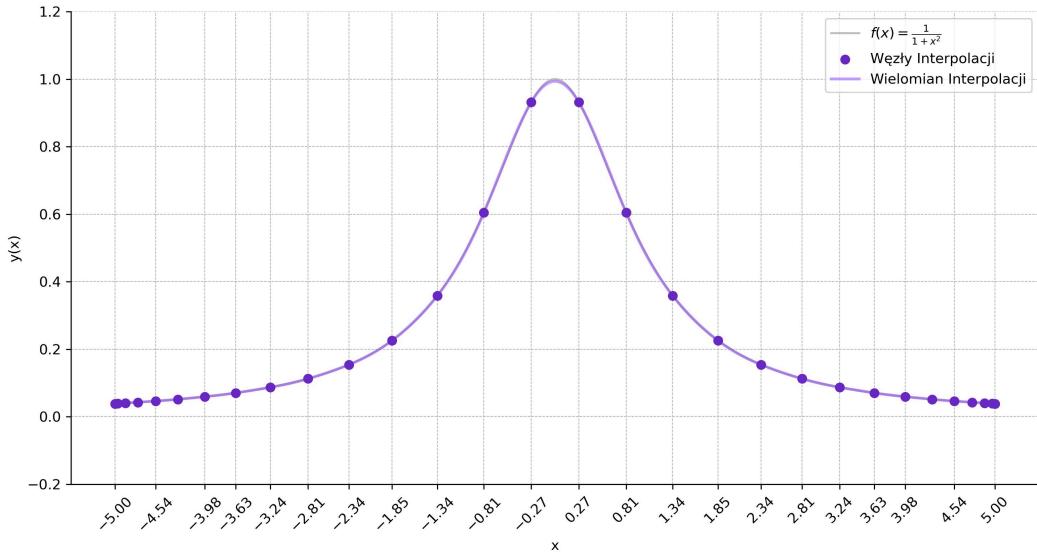
3.2. Porównanie metod doboru węzłów interpolacyjnych przy użyciu współczynników wielomianu

Dla węzłów równoodległych najbardziej optymalny był wielomian dla $N = 8$ z $\Delta f(x) = 0.247339$.



Wykres 1: Interpolacji wielomianem, którego współczynniki zostały policzone z równoodległych węzłów

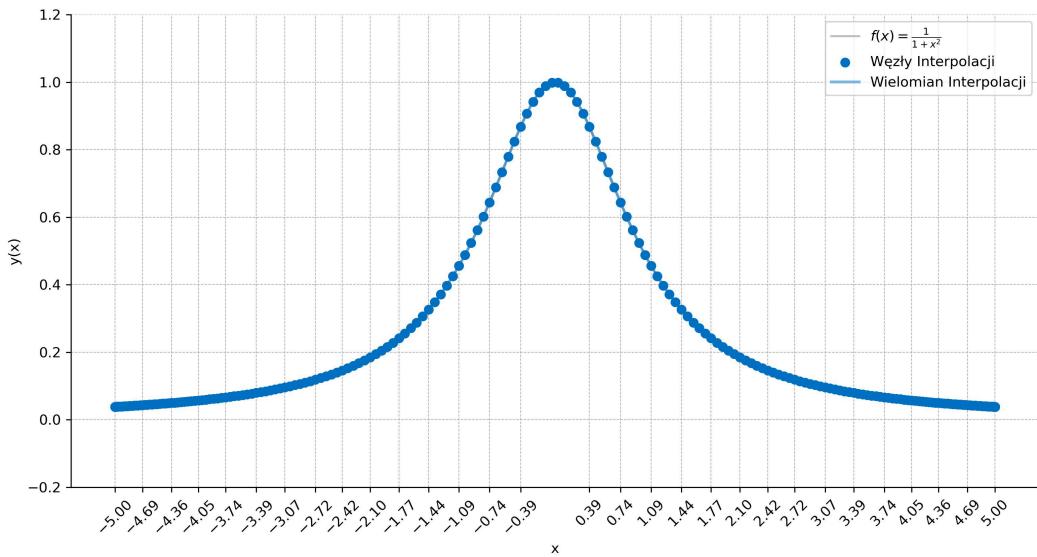
Dla węzłów Czebyszewa najbardziej optymalny był wielomian dla $N = 30$ z $\Delta f(x) = 0.00616472$



Wykres 2: Interpolacji wielomianem, którego współczynniki zostały policzone z węzłów Czebyszewa

3.3. Porównanie metod doboru węzłów interpolacyjnych, korzystając bezpośrednio ze wzoru

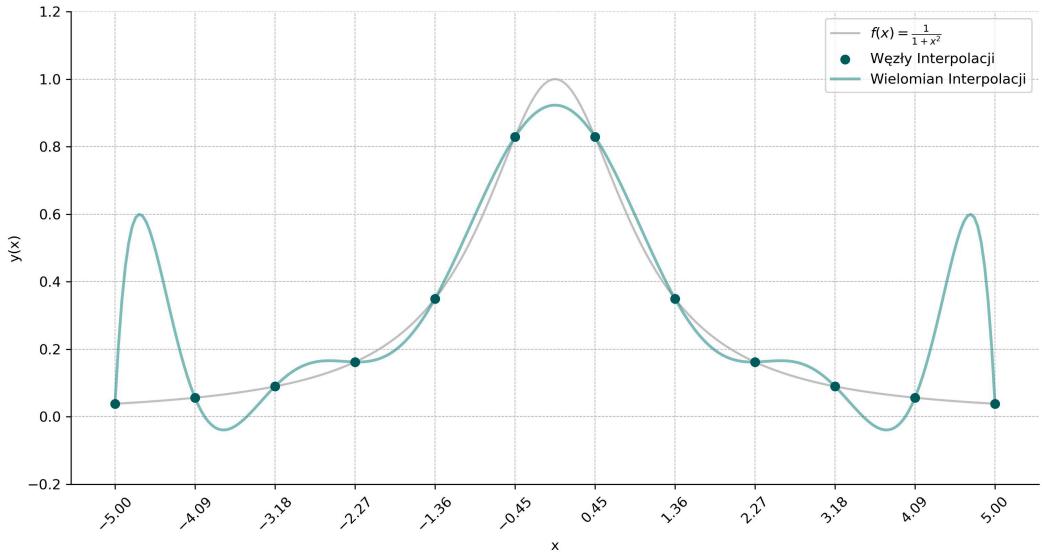
Dla węzłów równoodległych również najbardziej optymalny był wielomian z $N = 8$ i odpowiadający Wykres 1. Dużo lepszą dokładność jednak dostaliśmy korzystając z węzłów Czebyszewa gdzie najbardziej optymalna aproksymacja była dla $N = 222$ węzłów a $\Delta f(x) = 1.30104 * 10^{-18}$.



Wykres 3: Interpolacji wielomianem Lagrange'a

3.4. Problemy z ilością węzłów

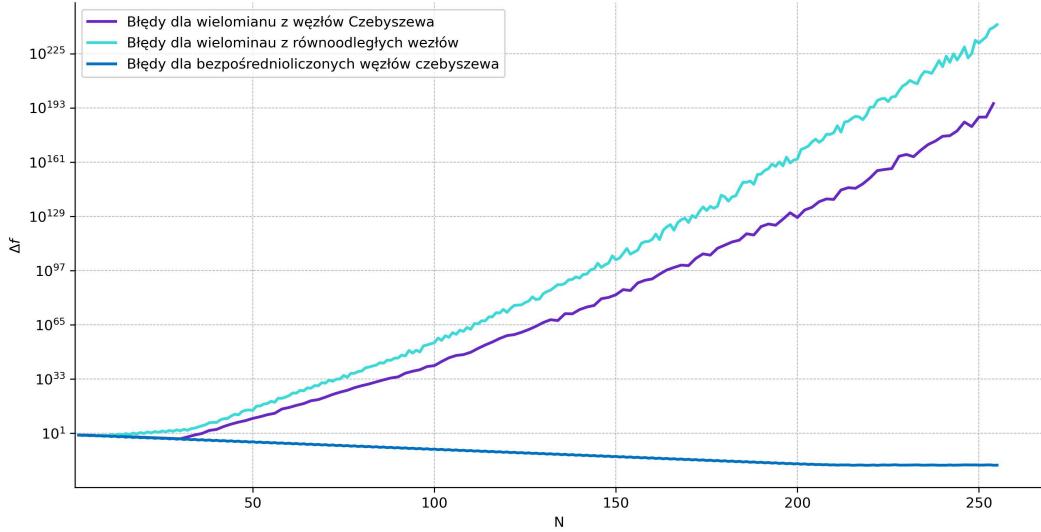
Interpolację wielomianem Lagrange'a dla równoodległych punktów bardzo szybko zabijają oscylacje Rungego, czyli gwałtowne zmiany między węzłami interpolacyjnymi.



Wykres 4: Wizualizacja oscylacji Rungego

Jak widać na Wykres 4 dla $x \in [-3, 3]$ funkcja ta dużo lepiej przybliża funkcję f lecz oscylacje dla $x \in [-5, -4] \cup [4, 5]$ powodują, że nasz błąd $\Delta f = 0.556723$ urósł ponad dwukrotnie. Dalsze zwiększenie ilości węzłów jeszcze bardziej potęguje siłę oddziaływania oscylacji Rungego co skutkuje jeszcze większym błędem Δf .

Rozwiązaniem dla szybko pojawiających się oscylacji Rungego dla równoodległych węzłów jest skorzystanie z węzłów Czebyszewa, których zagęszczenie zwiększa się na granicach przedziału i opóźnia się ich pojawienie. Pozwala to zwiększyć liczbę węzłów i lepiej dopasować interpolowaną funkcję.



Wykres 5: Wizualizacja błędów interpolacji dla różnych ilości węzłów

Wykres 5 pokazuje jak zmieniają się błędy Δf w zależności od ilości węzłów interpolacji. Dla obu metod z współczynnikami wielomianu najpierw błąd maleje, aż w pewnym momencie zaczyna rosnąć logarytmicznie do nieskończoności, odpowiednio są to $N = 10$ i $N = 30$ dla węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa. Dla węzłów równoodległych brak zwiększenia dokładności powodują oscylacje Rungego, natomiast dla węzłów Czebyszewa problemem staje się dokładność numeryczna.

Dopiero wyliczanie punktów bezpośrednio z wzoru Lagrange dla każdego punktu rozwiązuje ten problem. Zmniejszanie dokładności kończy się dla $N = 222$ i następuje stagnacja spowodowana skończoną dokładnością numeryczną, od tego punktu wartości oscylują wokoło wartości $2 \cdot 10^{-18}$.

4. Podsumowanie

Jeśli to tylko możliwe nie powinniśmy używać węzłów równo rozmieszczonych i zastąpić je węzłami Czebyszewa, które zmniejszają oscylacje Rungego. Dla dużych wielomianów znaczenie przejmują błędy numeryczne i to one psują interpolację w przypadku węzłów Czebyszewa. Najlepszym rozwiązaniem jest liczenie interpolowanych punktów bezpośrednio ze wzoru Lagrange'a wykorzystując jego właściwości i zmniejszając koszt obliczeń do $O(N^2 + M \cdot N)$ gdzie dla dostateczne dużych ilość interpolowanych punktów metoda ta ma złożoność $N(O(M \cdot N))$, gdyż człon z N^2 staje się zaniedbywalnie mały.