

Metody Numeryczne N04

Jakub Kurek

1. Wstęp

Celem zadania jest znalezienie interpolacji Lagrange'a $f_{\text{approx}}(x)$ funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

na przedziale $x \in [-5, 5]$.

Program liczący rozwiązania został napisany w C++23. Wykresy zostały stworzone w języku Python przy użyciu biblioteki matplotlib. Cały kod wykorzystywany do obliczeń oraz generowania wykresów znajduje się w repozytorium na [GitHub](#).

2. Interpolacja Lagrange'a

Wzór interpolacji Lagrange ma postać:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j$$

gdzie:

$$l_j(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

2.1. Liczenie wartości bezpośrednio z wzoru interpolacyjnego

Normalne obliczanie wartości M punktów z wzoru interpolacyjnego Lagrange zajmowałoby $O(M \cdot N^2)$ operacji. Można jednak zastosować pewne optymalizację. Najpierw wyliczamy mianowniki wielomianów $l_j(x)$ i oznaczamy je m_j gdyż nie zależą one od x i są identyczne w każdym punkcie. Dla każdego punktu następnie obliczamy:

$$\omega(x) = \prod_i x - x_i$$

Wówczas wartość w punkcie liczymy ze wzoru:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\omega(x)}{(x - x_j) \cdot m_j}$$

Matematycznie jest to poprawne działanie, lecz w programie należy sprawdzić czy nasz x nie jest węzłem interpolacji, gdyż wówczas $\omega = 0$ oraz $(x - x_j) = 0$ co daje nam $\frac{0}{0} = \text{NaN}$.

Koszt obliczenia punktów tą metoda to $O(N^2 + M * N)$.

2.2. Liczenie współczynników wielomianu interpolacyjnego

Zakładamy, że żaden z węzłów interpolacji nie jest zerem. Jeśli, któryś z węzłów interpolacyjnych jest równy 0. To tworzymy wielomian Lagrange i wyliczamy jego wartość w punkcie $\tilde{x} \neq 0$ w tym przypadku $\tilde{x} = \frac{x_{i+1}}{2}$. Następnie usuwamy węzeł $x = 0$ i zastępujemy go przez \tilde{x} oraz $\tilde{f} = y(\tilde{x})$.

Wówczas wielomian ma postać:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j$$

Współczynnik a_0 wielomianu obliczamy, licząc wartość w zerze:

$$a_0 = y(0) = \sum_{j=1}^n l_j(0) f_j$$

Koszt obliczenia $O(N^2)$, przy czym zapamiętujemy wielomiany $l_j(0)$.

Można zauważyć:

$$\frac{y(x) - a_0}{x} = \dots + a_1$$

Nie możemy jednak podzielić przez x , gdyż obliczamy wartości w 0. Możemy jednak skorzystać z interpolacji:

$$\frac{y(x_i) - a_0}{x_i} = \frac{1}{x_i} \left(\sum_{j=1}^n l_j(x_i) f_j - a_0 \right) = \frac{1}{x_i} \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} f_j - a_0 \right) = \frac{f_i - a_0}{x_i}$$

Wówczas budujemy tabelę

x_i	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n
$f_i^{(1)}$	$\frac{f_1 - a_0}{x_1}$	$\frac{f_2 - a_0}{x_2}$	$\frac{f_3 - a_0}{x_3}$	\dots	$\frac{f_n - a_0}{x_n}$

a na jej podstawie wielomian interpolacyjny:

$$y^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^n l_j(x) f_j^{(1)}$$

Korzystamy z faktu iż znamy $l_j(0)$, ponieważ zależą one tylko od węzłów. Możemy obliczyć wartość:

$$a_1 = y^{(1)}(0) = \sum_{j=1}^n l_j(0) f_j^{(1)}$$

Uogólniając ten algorytm otrzymujemy:

$$a_k = \sum_{j=1}^n l_j(0) f_j^{(k)} \quad k = 0, \dots, n-1$$

gdzie:

$$f_j^{(k)} = \begin{cases} f_j & k = 0 \\ \frac{f_j^{(k-1)} - a_{k-1}}{x_j} & k \neq 0 \end{cases}$$

Obliczenie każdego kolejnego a_k dokonujemy w czasie $O(N)$, więc obliczenie współczynników wielomianu zajmuje w sumie $O(N^2)$.

2.3. Obliczanie wartości wielomianu

Dla efektywnego obliczania wartości wielomianu korzystamy z algorytmu Hornera:

1. $P = a_n$
2. $k = n$
3. **while** $k > 0$:
 - $k = k - 1$
 - $P = P \cdot z + a_k$
4. **return** P

3. Interpolacja funkcji

Celem zadania było znalezienie optymalnej interpolacji, która zminimalizuje błąd przybliżenia $\Delta f = \max\{|f - f_{\text{approx}}|\}$ dla gęstej siatki punktów, które będą znajdować się również pomiędzy węzłami interpolacji. Dla zadanej funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla $x \in [-5, 5]$. Przeanalizowane były dwie metody dobierania węzłów:

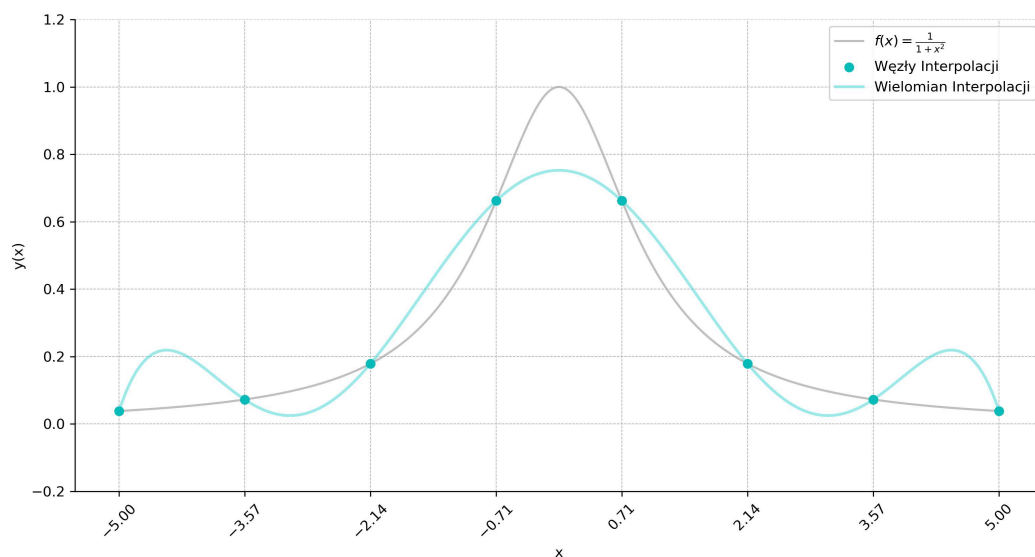
- węzły równoodległe: $x_n = -5 + 10 \frac{n}{N-1}$ dla $n \in 0, \dots, N$
- węzły Czebyszewa: $x_n = -5 \cos(\frac{n\pi}{N-1})$ dla $n \in 0, \dots, N$

3.1. Znajdowanie optymalnej ilości węzłów interpolacyjnych

Dla każdej metody doboru węzłów wygenerowane zostały interpolacje dla $n \in \{2, 3, \dots, 256\}$ oraz została policzona wartość $\Delta f(x)$ korzystając z siatki 1024 równorozmieszczonych punktów na przedziale $[-5, 5]$, gdyż w węzłach interpolacyjnych błąd zawsze wynosi 0, natomiast różnice w wartościach funkcji i interpolacji między węzłami determinują jakość interpolacji.

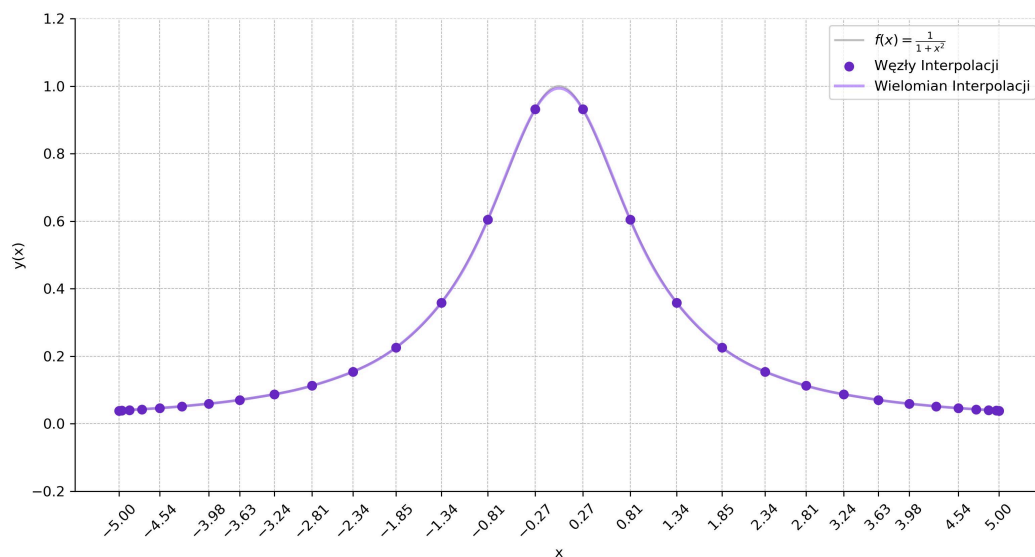
3.2. Porównanie metod doboru węzłów interpolacyjnych przy użyciu współczynników wielomianu

Dla węzłów równoodległych najbardziej optymalny był wielomian dla $N = 8$ z $\Delta f(x) = 0.247339$.



Wykres 1: Interpolacji wielomianem, którego współczynniki zostały policzone z równoodległych węzłów

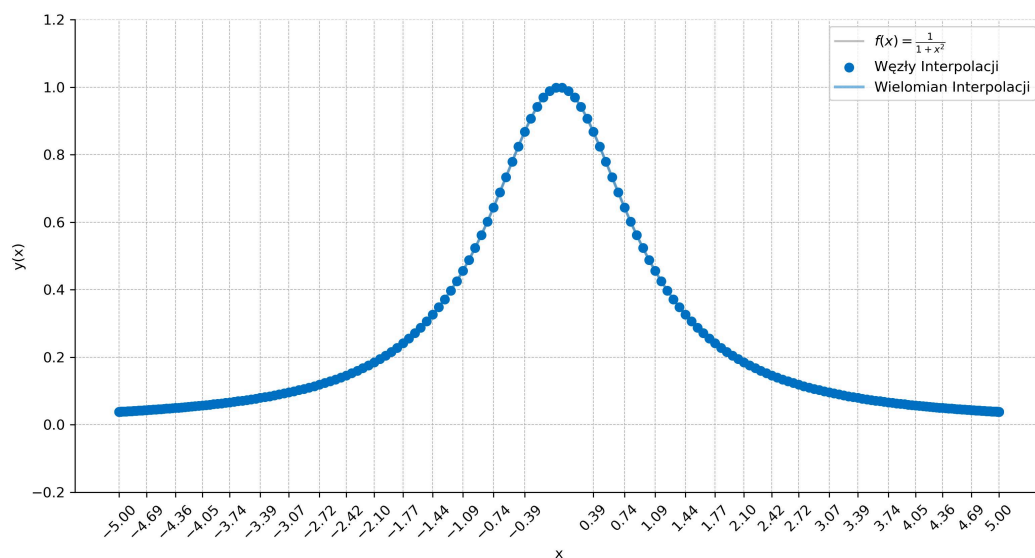
Dla węzłów Czebyszewa najbardziej optymalny był wielomian dla $N = 30$ z $\Delta f(x) = 0.00616472$



Wykres 2: Interpolacji wielomianem, którego współczynniki zostały policzone z węzłów Czebyszewa

3.3. Porównanie metod doboru węzłów interpolacyjnych, korzystając bezpośrednio ze wzoru interpolacyjnego

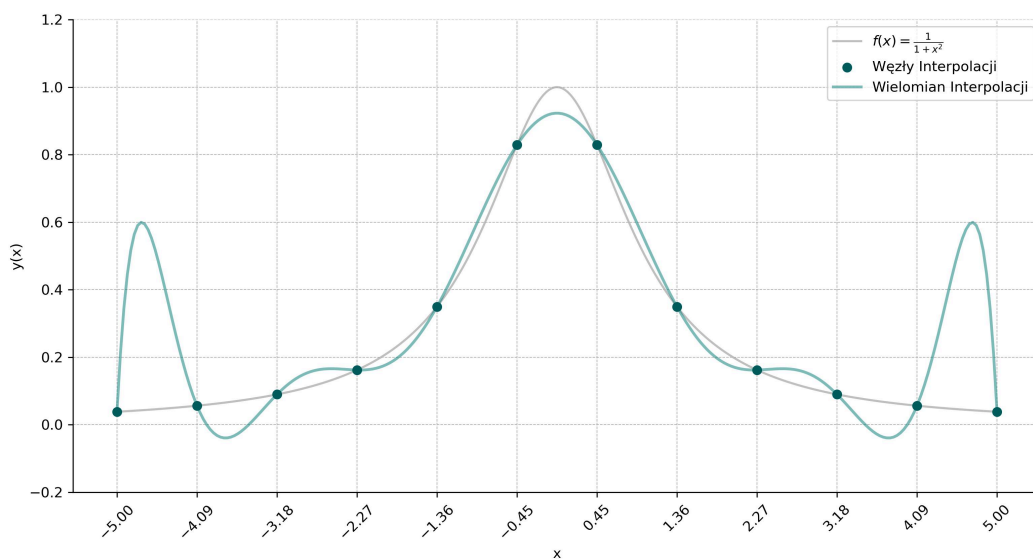
Dla węzłów równoodległych również najbardziej optymalny był wielomian z $N = 8$ i odpowiadający mu Wykres 1. Dużo lepszą dokładność jednak dostaliśmy korzystając z węzłów Czebyszewa gdzie najbardziej optymalna aproksymacja była dla $N = 222$ węzłów a $\Delta f(x) = 1.30104 \cdot 10^{-18}$.



Wykres 3: Interpolacja wielomianem Lagrange'a

3.4. Problemy z ilością węzłów

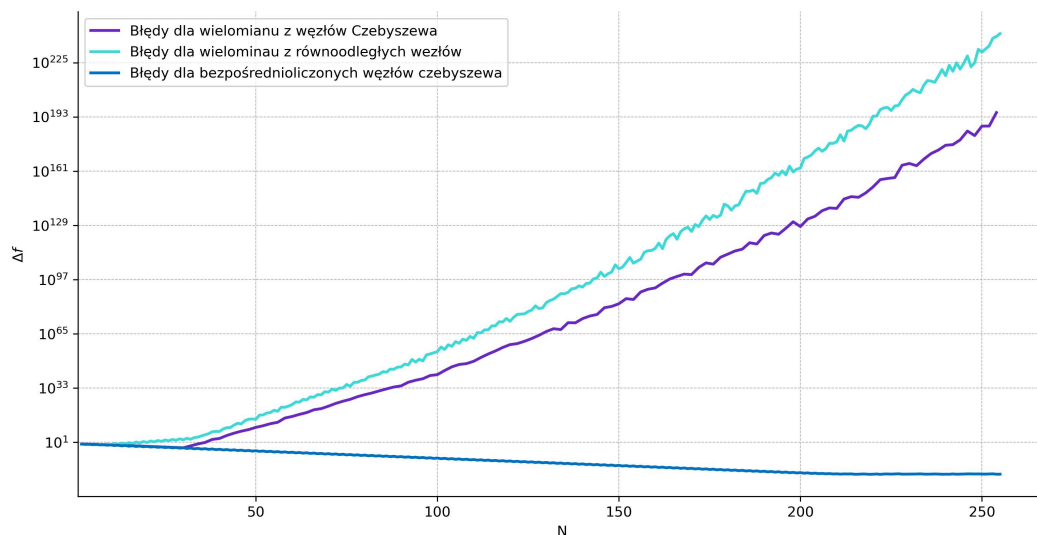
Interpolację wielomianem Lagrange'a dla równoodległych punktów bardzo szybko zabijają oscylacje Rungego, czyli gwałtowne zmiany między węzłami interpolacyjnymi.



Wykres 4: Wizualizacja oscylacji Rungego

Jak widać na Wykres 4 dla $x \in [-3, 3]$ funkcja ta dużo lepiej przybliża funkcję f lecz oscylacje dla $x \in [-5, -4] \cup [4, 5]$ powodują, że nasz błąd $\Delta f = 0.556723$ urósł ponad dwukrotnie. Dalsze zwiększanie ilości węzłów jeszcze bardziej potęguje siłę oddziaływania oscylacji Rungego co skutkuje jeszcze większym błędem Δf .

Rozwiązaniem dla szybko pojawiających się oscylacji Rungego dla równoodległych węzłów jest skorzystanie z węzłów Czebyszewa, których zagęszczenie zwiększa się na granicach przedziału i opóźnia się ich pojawienie. Pozwala to zwiększyć liczbę węzłów i lepiej dopasować interpolowaną funkcję.



Wykres 5: Wizualizacja błędów interpolacji dla różnych ilości węzłów

Wykres 5 pokazuje jak zmieniają się błędy Δf w zależności od ilości węzłów interpolacji. Dla obu metod z współczynnikami wielomianu najpierw błąd maleje, aż w pewnym momencie zaczyna rosnąć logarytmicznie do nieskończoności, odpowiednio są to $N = 10$ i $N = 30$ dla węzłów równoodległych oraz węzłów Czebyszewa. Dla węzłów równoodległych brak zwiększenia dokładności powodują oscylacje Rungego, natomiast dla węzłów Czebyszewa problemem staje się dokładność numeryczna

bezpośredniego wyliczania współczynników wielomianu. Dopiero wyliczanie punktów bezpośrednio z wzoru Lagrange dla każdego punktu rozwiązuje ten problem. Zmniejszanie dokładności kończy się dla $N = 222$ i następuje stagnacja spowodowana skończoną dokładnością numeryczną, od tego punktu wartości oscylują wokoło wartości $2 \cdot 10^{-18}$.

4. Podsumowanie

Jeśli to tylko możliwe nie powinniśmy używać węzłów równo rozmieszczonych i zastąpić je węzłami Czebyszewa, które zmniejszają oscylacje Rungego. Dla dużych wielomianów znaczenie przejmują błędy numeryczne i to one psują interpolację w przypadku węzłów Czebyszewa. Najlepszym rozwiązaniem jest liczenie interpolowanych punktów bezpośrednio ze wzoru Lagrange'a wykorzystując jego właściwości i zmniejszając koszt obliczeń do $O(N^2 + M \cdot N)$ gdzie dla dostatecznie dużych ilości interpolowanych punktów metoda ta ma złożoność $O(M \cdot N)$, gdyż człon z N^2 staje się zaniedbywalnie mały.