# Metody Numeryczne N05

Jakub Kurek

## 1. Wstęp

Celem zadania jest numerycznie rozwiązanie całki:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\exp(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$

Program liczący rozwiązania został napisany w C++23. Cały kod wykorzystywany do obliczeń oraz generowania wykresów znajduje się w repozytorium na ***GitHub***.

## 2. Przekształcenie całki

Aby całka nie posiadała nieskończoności na granicach przedziału, możemy dokonać podstawienia:

$$x = \sin(t)$$
$$\mathrm{d}x = \cos(t) \, \mathrm{d}t$$

Obliczamy nowe przedziały całkowania:

$$x = -1 \Rightarrow \sin(t) = -1 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$$
$$x = 1 \Rightarrow \sin(t) = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

Podstawiamy do naszej całki i upraszczamy:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\sin(t)^2)}{\sqrt{1-\sin(x)^2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\sin(t)^2)}{\sqrt{\cos(x)^2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp(\sin(t)^2) \, \mathrm{d}t$$

## 3. Całkowanie numeryczne

Całki były liczone przy użyciu zamkniętych kwadratur Newtona-Cotensa z różnymi stopniami wielomianów interpolacyjnych, wraz z iteracyjnym zagęszczaniem przedziałów. Wiele przybliżeń całek na małych przedziałach daje lepsza dokładność niż jeden duży wielomina interpolacyjny.

### 3.1. Zagęszczanie przedziałów

W każdej iteracji powstawało $2 \cdot (N-1)$ dodatkowych punktów, które były umieszczone pomiędzy punktami poprzedniej iteracji. Wartości obliczonej funkcji całkowej były przechowywane co pozwoliło na ponowne wykorzystanie raz obliczonej wartości w każdej późniejszej iteracji.

### 3.2. Metody

Użyte metody:

- Metoda trapezów

$$\int_a^b \simeq \frac{b-a}{2} \cdot (f_0 + f_1)$$

- Metoda Simpsona

$$\int_a^b \simeq \frac{b-a}{6} \cdot (f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Metoda 3/8

$$\int_a^b \simeq \frac{b-a}{8} \cdot (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

### 3.3. Porównanie metod

| Metoda | Ilość obliczeń funkcji |
|---|---|
| trapezów | 17 |
| Simpsona | 33 |
| 3/8 | 49 |

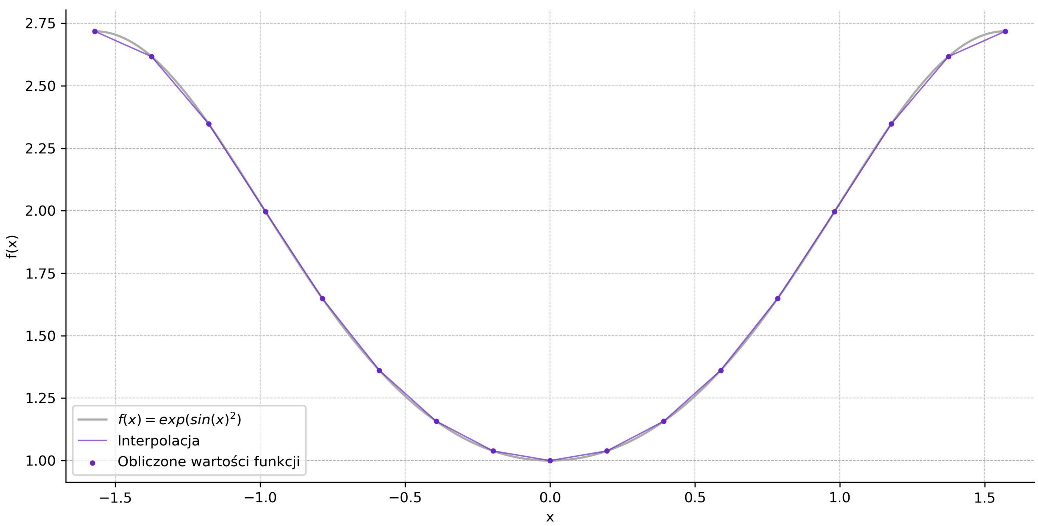
Tabela 1: Ilość obliczonych wartości funkcji dla różnych metod

Obliczenia były prowadzone do momentu spełnienia warunku stopu:

$$|I_n - I_{n-1}| < \varepsilon, \quad \text{gdzie } \varepsilon = 10^{-6}$$

Koniec obliczen następował dla:

$$I = 5.508429773886$$




Wykres 1: Całkowana funkcja z metody trapezów

## 4. Podsumowanie

Najbardziej efektywna okazała się metoda trapezów, co pokazuje Wykres 1 funkcja ta dla 17 punktów bardzo dobrze przybliża całkowaną funkcję. Wykonała ona najmniejszą liczbę obliczeń funkcji całkowanej, co stanowi największy numeryczny koszt we wszystkich metodach. Podstawienie $x = \sin(t)$ pozwoliło nam na usunięcie nieskończoności na krancach przedziałów i zastosowanie zamkniętych kwadratur Newtona-Cotensa.