Metody Numeryczne N06

Jakub Kurek

1. Wstęp

Celem zadania jest znalezienie miejsc zerowych wielomianu:

$$243x^7 - 486x^6 + 783x^5 - 990x^4 + 558x^3 - 28x^2 - 72x + 16$$

Program liczący rozwiązania został napisany w C++23. Cały kod wykorzystywany do obliczeń znajduje się w repozytorium na ***GitHub***.

2. Metoda Laguerra

Dla wielomianów $P_{n(z)}$ metoda znajdywania miejsc zerowych jest metoda Laguerre'a, która zadana jest iteracją:

$$z_{i+1} = z_i - \frac{nP_n(z_i)}{P_n'(z_i) \pm \sqrt{(n-1)\left((n-1)[P_n'(z_i)]^2 - nP_n(z_i)P_n''(z_i)\right)}}$$

gdzie znak w mianowniku wybieramy tak, aby moduł mianownika był większy.

2.1. Obniżanie stopnia wielomianu i wygładzanie

Aby unikać zbiegania metody do poprzednio znalezionego miejsca zerowego obniżamy stopień wielomianu, czyli znajdujemy faktoryzacje $P_n(z) = (z - z_1)P_{n-1}(z)$, gdzie z_1 jest znalezionym miejscem zerowym.

Następnie szukamy miejsca zerowego wielomianu $P_{n-1}(z)$. Ze względu na istnienie zaburzeń znalezione miejsce zerowe poprawiamy za pomocą pełnego, nie wydzielonego wielomianu. Dla znalezionego miejsca zerowego $\tilde{z}_2$ wielomianu P_{n-1}, wykonujemy wygładzenie poprzez zapoczątkowanie metody Laguerre'a miejscem $\tilde{z}_2$ jako warunkiem początkowym dla wielominau P_n.

Dopiero dla wygładzonego miejsca z_2 znajdujemy faktoryzację $P_{n-1} = (z - z_2)P_{n-2}(z)$

Aby znaleźć faktoryzację należy rozwiązać układ:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ -z_0 b_{n-1} + b_{n-2} &= a_{n-1} \\ -z_0 b_{n-2} + b_{n-3} &= a_{n-2} \\ &\vdots \\ -z_0 b_2 + b_1 &= a_2 \\ -z_0 b_1 + b_0 &= a_1 \\ -z_0 b_0 &= a_0 \end{aligned}$$

Po uproszczeniu i korzystaniu z znanych nam informacji otrzymujemy układ równań, który można rozwiązać metoda forward substitution:

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & \\
-z_0 & 1 & & & & \\
& -z_0 & 1 & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \\
& & & -z_0 & 1 & \\
& & & & -z_0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ b_{n-3} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_2 \\ a_1
\end{pmatrix}
$$

Obniżamy kolejne wielomiany P_{n-k} aż do uzyskania wielomianu P_2, który rozwiązujemy ze znanych nam wzorów analitycznych.

3. Rozwiązanie

i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
wartość	0.333333	0.666662	0.666665	-0.333333	0.666665	$1.41421i$	$-1.41421i$

Tabela 1: Miejsca zerowe wielomianu

4. Podsumowanie

Metoda Laguerra jest efektywną metodą znajdowania miejsc zerowych wielomianów. Posiada zbieżność sześcienna dla pojedyńczych pierwiastków oraz liniowa dla wielokrotnych. Znajduje ona równiez zespolone pierwiaski, dzięki czemu dla każdegowielomianu możemy znaleźć jego pełną faktoryzację. Metoda ta jest równiez praktycznie zawsze zbieżna do pierwiastku co praktycznie niweluje potrzebe specjalnego dobierania miejsca, z którego zaczynamy iterację.