1-) Les vecteurs $\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 u_3$ dans le parallélépipède représente les arêtes. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ définissent le sens des vecteurs et $\| \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 \|$ représente la diagonale.

2-)

Il existe n vecteurs donc 2^n possibilités de parallélogramme dans l'espace.

$$S = \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \| \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 \dots + \varepsilon_n u_n \|^2$$

Pour simplifier on utilise $\|u+v\|^2 = \langle u,u\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle$

Donc pour chaque terme :

$$\langle \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 \dots \varepsilon_n u_n, \varepsilon_1 u_1 \dots \varepsilon_n u_n \rangle = \langle \varepsilon_1 u_1, \varepsilon_1 u_1 \rangle$$
$$+ 2\langle \varepsilon_1 u_1, \dots \rangle + \langle \dots, \dots \rangle$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\langle \dots, \dots \rangle = \langle \varepsilon_2 u_2 + \dots, \varepsilon_2 u_2 \dots \rangle$$
$$= \langle \varepsilon_2 u_2, \varepsilon_2 u_2 \rangle + 2\langle \varepsilon_2 u_2, \dots \rangle + \langle \dots, \dots \rangle$$

$$\langle \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 \dots \varepsilon_n u_n, \varepsilon_1 u_1 \dots \varepsilon_n u_n \rangle = \|\varepsilon_1 u_1\|^2 + \|\varepsilon_2 u_2\|^2 \dots \|\varepsilon_n u_n\|^2$$
$$+ 2 \underbrace{\langle \varepsilon_1 u_1, \varepsilon_2 u_2 + \varepsilon_3 u_3 \dots \varepsilon_n u_n \rangle}_{=0} + \dots$$

car $\varepsilon_1 u_1 \perp \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_3 u_3$

$$\langle \varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 \dots \varepsilon_n u_n, \varepsilon_1 u_1 + \dots + \varepsilon_n u_n \rangle = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$

Comme il existe 2^n terme différentes

$$S = 2^n \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2$$