Bézierovi zlepki

Konstruirali bi radi gladek zlepek sestavljen iz Bézierovih krivulj, ki gre skozi dane točke v ravnini. Za izbrani zlepek, izračunamo še dolžino zlepka in morebitna samopresečišča.

Bézierove krivulje

Naj bodo $\mathbf{b}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, točke v ravnini. Bézierova ravninska krivulja stopnje n je definirana s predpisom

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \, B_i^n(t), \; B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i \, (1-t)^{n-i}, \quad t \in [0,1].$$

Točkam $\mathbf{b}_i$ rečemo kontrolne točke Bézierove krivulje, daljicam, ki jih zaporedoma povezujejo, pa kontrolni poligon. Pri danem parametru $t_0 \in [0,1]$, lahko točko $\mathbf{b}(t_0)$ na krivulji izračunamo direktno po formuli, ali po De Casteljauovem algoritmu takole:

$$\mathbf{b}_i^r(t_0) = (1-t_0)\, \mathbf{b}_i^{r-1}(t_0) + t_0\, \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t_0), \quad r = 1, \ldots, n, \quad i = 0, \ldots, n-r,$$

kjer je $\mathbf{b}_i^0(t_0) = \mathbf{b}_i$ in $\mathbf{b}_0^n(t_0) = \mathbf{b}(t_0)$. Pri tem zgornji indeksi ne pomenijo potenciranje, ampak nivo, na katerem se trenutno nahajamo!

Naloga

V okviru naloge boste konstruirali zlepek sestavljen iz Bézierovih krivulj iste stopnje, ki je načeloma majhna(med 2 in 5). Pričakujemo, da boste opravili naslednje naloge.

1. Izpeljite, katerim pogojem morajo zadoščati kontrolni poligoni krivulj v zlepku, da bo zlepek zvezno odvedljiv. Če ne gre v splošnem, pa vsaj za krivulje 3. stopnje.

2. Napišite pomožne funkcije za računanje točk in izris Bézierove krivulje s podanim poligonom. Izračun naj bo izveden z De Casteljauovem algoritmom. Rezultate preverite z direktnim izračunom po formuli.

3. Za dane točke v ravnini poiščite zvezno odvedljiv zlepek sestavljen iz Bézierovih krivulj iste stopnje.

4. Izpeljite formule in pomožne programe za izračun dolžine zlepka in morebitnega samopresečišča.

5. Napišite program, ki grafično prikaže vse rezultate iz prejšnjih točk. Program preiskusite na različnih naborih točk.