

Problem milijon teles

Imamo n teles v prostoru z masami m_i ($i = 1, \dots, n$), ki se gibljejo pod vplivom medsebojnih sil gravitacije. Radi bi preučili dinamiko takega sistema.

Za primer $n = 2$ je možno analitično izračunati vse možne rešitve, vsaj za točkaste mase. Že za problem treh teles pa ni več mogoče analitično v vsej splošnosti zapisati rešitve, ampak je to možno samo za posebne primere.

Za primer, ko je n več tisoč ali milijonov (na primer simulacije trka galaksij), se da analitično povedati kaj o kvalitativnih lastnostih takih sistemov, sicer pa ni druge izbire kot da računamo numerične približke gibanja.

Enačbe gibanja za tak sistem ni težko zapisati. Rešiti je treba Newtonove enačbe

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j \neq i} G \frac{m_j}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^3} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i), \text{ za } i = 1, \dots, n \quad (1)$$

kjer je $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ položaj i -te mase in G gravitacijska konstanta (ki je za naše potrebe lahko tudi 1). Tu smo seveda predpostavili, da so mase točkaste, kar je smiselno, če so radiji objektov zanemarljivi v primerjavi z razdaljami (in tudi v primeru, če so objekti okrogli in homogeni).

Numerične metode za reševanje tega problema lahko v grobem razdelimo na:

- **Poštene metode** : Direktno rešujemo sistem enačb (1). Problem takega načina je v tem, da moramo pri naivnem pristopu na vsakem koraku (mogoče večkrat) izračunati $n - 1$ sil za vsako od n mas, torej je časovna zahtevnost računanja sil reda n^2 , kar je lahko pri večjih n -jih precej počasno.
- **Nepoštene metode** : Z različnimi peonastavitvami, kot je razdelitev točk na skupine, ki imajo drevesno strukturo, lahko časovno zahtevnost računanja sil spravimo na red $n \log(n)$. Vendar pa je pri tem potrebno narediti kompromise zaradi katerih je rezultat izračunan samo približno.

Naloga

1. Napišite funkcijo, ki na 'pošten' način računa gibanje velikega števila zvezd. Program mora biti dovolj učinkovit, da lahko v realnem času vidimo potek dogajanja vsaj za nekaj tisoč zvezd.
2. Napišite funkcijo, ki približno računa vsoto sil na vsako zvezdo v dani skupini z naslednjim rekurzivnim algoritmom:

- (a) Če sta v skupini samo dve zvezdi (ali pa je v skupini dovolj majhno število *minzvezd*), izračunaj vse medsebojne sile, ki delujejo na zvezde v tej skupini in vrni maso in težišče te skupine, sicer pojdi na naslednjo točko.
- (b) Če je v skupini več zvezd, razdeli skupino zvezd na dve skupini, ki sta ‘čimbolj’ narazen. Pri tem si lahko pomagata s PCA-ju podobnim postopkom. Za vsako od teh skupin ponovi točko a) in ko dobiš rezultata pojdi na naslednjo točko.
- (c) Na tem koraku imamo težišči in masi dveh skupin zvezd iz prejšnje točke. Vsaki zvezdi v obeh skupinah prištej silo težišča druge skupine in vrni težišče in maso obeh skupin skupaj.

S takim postopkom na vsakem nivoju rekurzije opravimo reda n operacij (ali $n \log(n)$ operacij, če se odločimo, da bomo točke kako uredili). Nivojev rekurzije je okoli $\log(n)$, torej je skupaj reda $n \log(n)$ operacij (ali $n \log(n)^2$).

Pomanjkljivost tega postopka je, da sila gravitacije težišča skupine teles **ni** enaka vsoti vseh sil gravitacije teles te skupine. Enakost velja samo približno zunaj okrogle skupine ali skupine, ki je dovolj oddaljena, zato je za natančnost lahko pomembno, da te skupine izbirate, da so res ‘čimbolj’ narazen.

Ta postopek lahko tudi izboljšate (glede natančnosti in/ali hitrosti) na različne načine, ki jih najdete ali izumite ali jih predlaga asistent.

3. Oba načina preiskusite vsaj na dveh primerih:

- (a) galaksija, kjer na začetku zvezde krožijo okrog središča
- (b) mimobežni galaksiji oz. galaksiji, ki se trčita

Pri tem primerjajte rezultata obeh metod in na ta način ocenite natančnost oz. napako druge metode. Druga metoda mora seveda delovati hitro za precej večje n kot prva (čeprav bo za majhne n nejrž celo počasnejša). Če vam uspe pokazati spodobno hitrost za milijon zvezd, bo ocena iz tega dela avtomatsko 10.