

## Premiki togega telesa

Premik togega telesa je sestavljen iz rotacije in paralelnega premika. Koordinate  $x$  točk na telesu se preslikajo v nove koordinate  $y = Ax + b$ , pri čemer matrika  $A$  opisuje rotacijo telesa, vektor  $b$  pa premik težišča.

Naša naloga je poiskati matriko  $A$  in vektor  $b$ , če poznamo koordinate  $x_1, \dots, x_n$  nekaj značilnih točk telesa pred premikom in koordinate  $y_1, \dots, y_n$  istih točk po premiku. Pravzaprav je to zelo znan problem, ki se pogosto rešuje na primer v robotiki.

Približno rekonstrukcijo vektorja translacije  $b$  dobimo tako, da izračunamo premik težišča izbranih točk. Točke  $x_i$  in  $y_i$  najprej prestavimo tako, da imajo težišče v koordinatnem izhodišču:

$$x'_i = x_i - \bar{x}, \quad y_i = y_i - \bar{y}, \quad \text{kjer je} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{in} \quad \bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i,$$

in nato izračunamo razliko  $b = \bar{y} - \bar{x}$ .

Matrika rotacije  $A$  je ortogonalna matrika, ki zadošča pogoju  $AX = Y$ . Pri tem sta  $X$  in  $Y$  matriki dimenzije  $3 \times n$ ,  $X$  ima v stolpcih (premaknjene) točke  $x'_i$ ,  $Y$  pa točke  $y'_i$ . Zaradi napak pri meritvah enakost ne bo natančno izpolnjena, zato bomo poiskali matriko  $A$  tako, da bodo odstopanja, ki so zajeta v matriki  $AX - Y$  najmanjša možna.

Problem lahko rešimo s pomočjo SVD razcepa z naslednjim algoritmom:

- Izračunamo *kovariančno matriko*  $C = YX^T$ , ki ima dimenzijo  $3 \times 3$ .
- Poiščemo SVD razcep  $C = USV^T$ , kjer je  $S$  diagonalna matrika s singularnimi vrednostmi matrike  $C$ .
- Matriko  $S$  nadomestimo z diagonalno matriko

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix},$$

kjer je  $d = \pm 1$  predznak determinante  $\det(C)$ .

- Iskana matrika  $A$  je enaka  $A = UDV^T$ .

Vaša naloga je implementirati opisani algoritem in ga preizkusiti na nekaj konkretnih primerih:

1. na umetnih podatkih, ki jih zgenerirate sami,
2. na realnih, ki jih nekako pridobite sami; lahko na primer z GPS napravo izmerite koordinate nekaj značilnih točk na vašem avtomobilu ali kolesu, potem pa ga predstavite kam drugam in ponovno izmerite koordinate istih točk (uspeh poskusa bo odvisen od natančnosti vaše GPS naprave).