Premiki togega telesa

Premik togega telesa je sestavljen iz rotacije in vzporednega premika. Krajevni vektorji $\mathbf{x}$ točk na telesu se preslikajo v nove krajevne vektorje $\mathbf{y} = Q\mathbf{x} + \mathbf{b}$, pri čemer matrika Q opisuje zasuk telesa, vektor $\mathbf{b}$ pa vzporedni premik težišča.

Naša naloga je poiskati matriko Q in vektor $\mathbf{b}$, če poznamo krajevne vektorje $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ značilnih točk telesa pred premikom in krajevne vektorje $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ istih točk po premiku. Pravzaprav je to zelo znan problem, ki se pogosto rešuje v robotiki.

Način 1

Približno rekonstrukcijo vektorja translacije $\mathbf{b}$ dobimo tako, da izračunamo premik težišča izbranih točk. Točke $\mathbf{x}_i$ in $\mathbf{y}_i$ najprej prestavimo, tako da imajo težišče v koordinatnem izhodišču:

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}'_i = \mathbf{y}_i - \overline{\mathbf{y}}, \quad \text{kjer je} \quad \overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \quad \text{in} \quad \overline{\mathbf{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y}_i,$$

in nato izračunamo razliko $\mathbf{b} = \overline{\mathbf{y}} - \overline{\mathbf{x}}$.

Matrika zasuka Q je ortogonalna matrika, ki zadošča pogoju $Q\mathbf{x}'_i = \mathbf{y}'_i$ za vse $i = 1, \ldots, n$. Če označimo z X' in Y' matriki

$$X' = [\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n] \quad \text{ter} \quad Y' = [\mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_n],$$

lahko pogoj strnemo v $QX' = Y'$. Matriko Q nato poiščemo s pomočjo SVD razcepa z naslednjim postopkom:

- Izračunamo *kovariančno matriko* $C = Y'X'^{\mathsf{T}}$, ki ima dimenzijo 3×3.
- Poiščemo SVD razcep $C = USV^{\mathsf{T}}$, kjer je S diagonalna matrika s singularnimi vrednostmi matrike C.
- Matriko S nadomestimo z diagonalno matriko

  $$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix},$$

  kjer je $d = \pm 1$ predznak determinante $\det(C)$.
- Iskana matrika Q je enaka $Q = UDV^{\mathsf{T}}$.

Način 2

Če zaenkrat pozabimo na zahtevo o ortogonalnosti matrike Q, lahko enačbe

$$Q\mathbf{x}_i + \mathbf{b} = \mathbf{y}_i,\ i = 1, \ldots, n$$

gledamo kot sistem $3n$ enačb za $12 = 3 \times 3 + 3$ neznank. Zapiši matriko tega sistema in poišči rešitev, matriko Q' in vektor $\mathbf{b}$, po metodi najmanjših kvadratov. Ta matrika Q' ni nujno ortogonalna, zato jo zamenjamo s Q iz QR razcepa matrike $Q' = QR$.

Naloga

Vaša naloga je implementirati oba opisana postopka in ju preizkusiti na nekaj konkretnih primerih:

1. na umetnih podatkih, ki jih generirate sami,

2. na realnih, ki jih nekako pridobite sami; lahko na primer z GPS napravo izmerite koordinate nekaj značilnih točk na vašem avtomobilu ali kolesu, potem pa ga prestavite kam drugam in ponovno izmerite koordinate istih točk (uspeh poskusa bo odvisen od natančnosti vaše GPS naprave).

Kako se razlikujejo dobljene rešitve pri enem in drugem načinu?