Метод замены переменной в неопределенном интеграле. (2 вопрос)

Теория из лекции

1 2

Примеры из демидовича на заменну переменной

3

Метод внесения множителя под знак дифференциала

Пусть про него не спрашивают в вопросе, но не зря же он находится в одном параграфе с методом замены переменной, поэтому можно его тоже рассмотреть.

Если говорить простым языком, то суть этого метода заключается в том, чтобы преобразовать подынтегральное выражение таким образом, чтобы какой-то его кусок являлся производной такой функции, при внесении которой под знак интеграла подынтегральное выражение станет табличным интегралом.

Примеры внесения множителя под знак дифференциала

1

Интегрирование рациональных выражений. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби. Метод неопределенных коэффициентов. (4 вопрос и 5 вопрос)

По факту эти два вопроса являются одним вопросом

Рациональные дроби (определение, условия при которых дробь является рациональной)

Перед тем, как говорить об интегрировании надо понять, что такое рациональная дробь.

Рациональная дробь вида:

$$ R(x) = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...\ + a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...\ + b_{m-1}x+b_m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} $$

является правильной, если $n < m$ $\frac{x}{x^2+5}$

является неправильной, если $n>=m$ $\frac{x^3}{3x^2+7x-4}$

Простая дробь является рациональной дробью, если она является 1 из следующих 4 типов:

1. $$ \frac{A}{x + a} \ \ \text{или} \ \ \frac{A}{x - a}

\ \ (A,a \in R) $$

2.

$$ \frac{A}{(x + a)^n} \ \ \text{или} \ \ \frac{A}{(x - a)^n}

\ \ (A,a \in R, \ n>=2) $$

3. $$ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \ \ \ \ (M, N, p, q \in R) , \ \ (x^2+px+q = 0) $$

4. $$ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \ \ \ \ (M, N, p, q \in R) , \ \ (x^2+px+q = 0)

\ \ (n>=2) $$

Из каждой дроби можно взять интеграл:

1. $$ A\ln(|x + a|) + C \ \ \ \text{или} \ \ \ A\ln(|x - a|) + C $$

2. $$ \frac{A}{(1-n)(x + a)^{n-1}} + C \ \ \ \text{или} \ \ \ \frac{A}{(1-n)(x - a)^{n-1}} + C $$

3. $$ \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + (N - \frac{PM}{2}) *\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} * \arctg(\frac{x + \frac{P}{2}}{\sqrt{q - \frac{P^2}{4}}}) + C $$

4. $$ I_n = \frac{t}{a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^n}\frac{2n-3}{2n-2} * I_{n-1} $$ *На счет интеграла 4 типа я хз, может он неверн, надо будет проверить*

Теорема: Правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ , \ Q_m(x) = (x-a)^n * (x-b)^{\text{у меня там черточка}} *... \ * (x^2+px+q)^s$ можно обр. (хз что за полное слово) разложить на сумму простейших дробей $$ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} +... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} +... +\frac{B_l}{(x-b^l)} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}

- ...\ + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} $$

Теперь, когда стало ясно, что такое рациональная дробь, стоит поговорить о том как найти интеграл от такой дроби, есть несколько методов:

Метод неопределенных коэффециентов

Перед тем, как говорить о самом методе, нужно сказать, что очень важно определить является ли дробь **РАЦИОНАЛЬНОЙ**, потом является ли она **ПРАВИЛЬНОЙ** или **НЕПРАВИЛЬНОЙ**.

Если дробь правильная (самая большая степень вверху строго меньше самой большой степени внизу), то нужно просто разложить нижнюю часть дроби на множители.

Если дробь неправильная (самая большая степень вверху больше или равна самой большой степени внизу), то нужно выделить целую часть (поделить верхнюю часть дроби на нижнюю), чтоб в итоге в выражении $S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ была правильной.

Алгоритм выполнения

1. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби по формуле 1: $$ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} $$

2. Привести простейшие дроби к общему знаменателю

3. Приведем числители

4. Получаем СЛАУ, решая которую, получаем неопределенные коэффециенты. После этого находим интеграл

Пример решения

1

Метод частных значений

В данном методе придаем переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов). Получим СЛАУ, решая которую, получим неопределенные коэффециенты. Данный метод очень быстро работает, когда корни многочлена простые и действительные.

Пример решения

1

Интегрирование иррациональных выражений (6 вопрос)

Определение из лекции

Интеграл вида

$$ \int{R (x, \sqrt{x^{m_1}}, \sqrt{x^{m_2}}, ...) dx} = |

\text{$x = t^S$, S - общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$} | =

\int{R (t^S, \frac{Sm_1}{n_1}, \frac{Sm_1}{n_1}, ...) St^{S-1}dt} \ \ \ \text{, где R - рациональная дробь, x - иррациональная часть} $$

Способ решения иррационального интеграла

Чтобы найти интеграл от иррациональной функции нужно нужно заменить подкоренное выражение на t со степенью корня. Например, для $\sqrt{x + 1}$ заменой будет являеться $t^2 = x + 1$, таким образом при подстановке получим $\sqrt{t^2} = t$. Теперь рассмотрим данный метод решения на некоторых примерах

Примеры

1

P.s. примеры взять отсюда http://mathprofi.ru/integrirovanie_kornei.html. Тут так же есть информация про интегрирование биноминальных интегралов.

Интегрирование тригонометрических функций (8 вопрос)

Способы нахождения

1 способ (использование тригонометрических формул)

1

2 способ (понижение степени подынтегральной функции)

Данный приём работает, когда подынтегральные функции нафаршированы синусами и косинусами в чётных степенях. Для понижения степени используются форумлы:

$$ \sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2} , \ \ \ \cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \ \ \ \sin(2x) = 2\sin(x) $$

1

3 способ (метод замены переменных)

1

4 способ (универсальная тригонометрическая подстановка)

Универсальной тригонометрической подстановкой считается $t = \tg{\frac{x}{2}}$.

Таким образом, мы получаем, что

$$ \sin{x} = \frac{2t}{t^2 + 1}, \ \ \cos{x} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} $$

$$ \frac{x}{2} = \arctg{t}, \ \ x = 2\arctg{t} $$

Универсальную тригонометрическую подстановку принято применять тогда, когда непонятно, что можно сделать, приведем пример такого случая:

1

Верхние и нижние суммы Дарбу. Свойства сумм Дарбу (10 вопрос)

1 2

Свойства интегрируемых функций (12 вопрос)

1 2 3 3 3

Определенный интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. (14 вопрос)

Определенный интеграл как функция верхнего предела

1 1

Формула Ньютона-Лейбница

1 1 1

Формула интегрирования по частям для определенного интегралла (16 вопрос)

1 1

https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/1_6_integrirovanie_po_chastyam_v_opredelennom_integrale.html

Геометрические приложения определенного интеграла. Длина кривой и площадь плоской фигуры. (17 вопрос)

Длина кривой

1 1 1 1 1

Площадь плоской фигуры

http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html

Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции и

объем тела вращения. (18 вопрос)

Площадь криволинейной трапеции

Объем тела вращения

Несобственный интеграл второго рода (20 вопрос)

Знакопостоянные ряды. Необходимое условие сходимости ряда. (22 вопрос)

Знакопостоянные ряды и их сходимость

Рассмотрим числовой ряд:

$$ \sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots $$

Знакопостоянный ряд — это ряд, члены которого сохраняют один и тот же знак, т.е. либо все $ a_n > 0 $, либо все $ a_n < 0 $. В частности:

- Если $ a_n > 0 $ для всех $ n $, ряд называют **положительным**.
- Если $ a_n < 0 $ для всех $ n $, ряд называют **отрицательным**.

Сходимость такого ряда обычно исследуется с помощью признаков сравнения, интегрального признака, признака Даламбера и других тестов.

Необходимое условие сходимости ряда

Для того чтобы ряд $ \sum a_n $ сходился, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0. $$

Если

$$ \lim\limits_{n \to \infty} a_n \neq 0 $$

или не существует, то ряд **расходится**.

Однако **это условие не является достаточным**: даже если $ a_n \to 0 $, ряд все равно может расходиться. Например, гармонический ряд:

$$ \sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots $$

имеет члены, стремящиеся к нулю, но **расходится**. Поэтому для исследования сходимости ряда применяют дополнительные признаки (например, сравнения, Даламбера, Коши и т. д.).

Признаки сравнения знакопостоянных рядов. (24 вопрос)

Признаки сравнения знакопостоянных рядов

Для исследования сходимости знакопостоянных рядов часто используются **признаки сравнения**. Рассмотрим два ряда:

$$ \sum a_n, \quad \sum b_n $$

где все $ a_n $ и $ b_n $ положительны ($ a_n > 0 $, $ b_n > 0 $).

Первый признак сравнения

Если существуют два ряда $ \sum a_n $ и $ \sum b_n $ такие, что начиная с некоторого номера $ N $:

$$ 0 \leq a_n \leq b_n, $$

то:

- если ряд $ \sum b_n $ **сходится**, то и ряд $ \sum a_n $ **сходится**.
- если ряд $ \sum a_n $ **расходится**, то и ряд $ \sum b_n $ **расходится**.

Другими словами, **если меньший ряд расходится, то больший тоже расходится; если больший сходится, то меньший тоже сходится**.

Второй признак сравнения (предел сравнения)

Пусть существуют два ряда $ \sum a_n $ и $ \sum b_n $, такие что предел отношения их членов существует и конечен:

$$ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = C, \quad 0 < C < \infty. $$

Тогда оба ряда ведут себя одинаково:

- если $ \sum b_n $ **сходится**, то и $ \sum a_n $ **сходится**.
- если $ \sum b_n $ **расходится**, то и $ \sum a_n $ **расходится**.

Этот признак особенно удобен, когда можно подобрать удобный эталонный ряд $ \sum b_n $, например:

- **Геометрический ряд** $ \sum \frac{1}{2^n} $,
- **p-ряды** $ \sum \frac{1}{n^p} $, где известно, что они сходятся при $ p > 1 $ и расходятся при $ p \leq 1 $.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости ряда. (26 вопрос)

1 1 1 1

Действия над рядами. Сумма и произведение рядов. (28 вопрос)

Рассмотрим два числовых ряда:

$$ \sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots $$

$$ \sum b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots $$

Можно определить операции сложения и умножения рядов.

Сумма рядов

Пусть ряды $ \sum a_n $ и $ \sum b_n $ сходятся, тогда их сумма определяется как ряд, составленный из сумм соответствующих членов:

$$ \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n. $$

При этом **если оба ряда сходятся, то и их сумма сходится**. Однако, если хотя бы один из них расходится, то их сумма может либо расходиться, либо иметь неопределенное поведение.

Произведение рядов (Ряд Коши)

Произведение двух рядов определяется с помощью **произведения Коши**:

$$ \left(\sum a_n \right) \cdot \left(\sum b_n \right) = \sum c_n, $$

где коэффициенты $ c_n $ определяются по формуле:

$$ c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. $$

Этот ряд называется **произведением Коши** рядов $ \sum a_n $ и $ \sum b_n $. Его сходимость сложнее, чем у суммы рядов, и требует дополнительных условий:

- Если ряды $ \sum a_n $ и $ \sum b_n $ **абсолютно сходятся**, то их произведение Коши тоже **сходится**.
- Если ряды **не абсолютно сходятся**, то их произведение может **расходиться**.

Теорема о дифференцируемости функциональных рядов. (30 вопрос)

---

1 1

Равномерная сходимость. Мажорантный признак Вейерштрасса. (32 вопрос)

1

Ряд Тейлора. Ряд Макллорена. Остаточный член ряда Тейлора в различных формах. (34 вопрос)

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Формулировка

Пусть функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно на отрезке $[a, b]$ и $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна на этом отрезке. Тогда для любого $x \in [a, b]$ верна следующая формула разложения функции в ряд Тейлора:

$$ f(x) = P_n(x) + R_n(x), $$

где:

1. $P_n(x)$ — полином Тейлора степени n: $$ P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n, $$

2. $R_n(x)$ — остаточный член в форме Лагранжа: $$ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, $$ где c — некоторое число из интервала (a, x).

Доказательство

1. Вспомогательная функция

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(t)$: $$ F(t) = f(t) - P_n(t), $$ где $P_n(t)$ — это многочлен Тейлора функции $f(t)$ в точке a, записанный до n-го порядка включительно: $$ P_n(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + \frac{f''(a)}{2!}(t - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t - a)^n. $$

Очевидно, что $F(a) = f(a) - P_n(a) = 0$, так как $P_n(a) = f(a)$.

---

2. Дифференцирование функции $F(t)$

Производная $(n+1)$-го порядка от $F(t)$ равна: $$ F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - P_n^{(n+1)}(t). $$

Но $P_n^{(n+1)}(t) = 0$, так как $P_n(t)$ — это полином степени n. Поэтому: $$ F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t). $$

---

3. Применение теоремы Коши о среднем значении

Рассмотрим следующую модифицированную функцию: $$ G(t) = F(t) \cdot (x - t)^{n+1}. $$

Мы хотим найти значение $F(x)$, поскольку: $$ f(x) = P_n(x) + F(x). $$

Функция $G(t)$ обнуляется на концах интервала: $G(a) = G(x) = 0$. Применим теорему Коши о среднем значении на интервале (a, x) для $G(t)$.

---

4. Применение правила дифференцирования

По теореме Коши, существует $c \in (a, x)$, такое что: $$ G'(c) = 0. $$

Рассчитаем производную $G(t)$: $$ G(t) = F(t) \cdot (x - t)^{n+1}. $$

Применяем правило произведения: $$ G'(t) = F'(t) \cdot (x - t)^{n+1} - (n+1) \cdot F(t) \cdot (x - t)^n. $$

---

5. Нахождение остаточного члена

Так как $G'(c) = 0$, то: $$ F'(c) \cdot (x - c)^{n+1} - (n+1) \cdot F(c) \cdot (x - c)^n = 0. $$

Выразим $F(c)$: $$ F(c) = \frac{F'(c) \cdot (x - c)^{n+1}}{(n+1) \cdot (x - c)^n}. $$

Подставляем $F'(c) = f^{(n+1)}(c)$, так как $F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, и получаем: $$ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, $$ где $c \in (a, x)$.

Итог

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа записывается как: $$ f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}. $$

Остаточный член $R_n(x)$ зависит от $(n+1)$-й производной функции и положения $c \in (a, x)$.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Формулировка

Пусть функция $f(x)$ имеет производные до порядка n включительно в окрестности точки a. Тогда функция $f(x)$ представляется в виде разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано следующим образом:

$$ f(x) = P_n(x) + o((x - a)^n), \quad \text{при } x \to a, $$

где:

1. $P_n(x)$ — полином Тейлора степени n: $$ P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n, $$

2. Остаточный член $o((x - a)^n)$ означает, что: $$ \lim_{x \to a} \frac{o((x - a)^n)}{(x - a)^n} = 0. $$

Интуитивный смысл

Остаточный член в форме Пеано $o((x - a)^n)$ показывает, что при $x \to a$ разность между функцией $f(x)$ и её полиномом Тейлора $P_n(x)$ убывает быстрее, чем $(x - a)^n$. Это делает полином Тейлора хорошим приближением функции вблизи точки a.

Пример

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$ и её разложение в ряд Тейлора в точке $a = 0$ до второго порядка: $$ P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}. $$

Тогда: $$ f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{при } x \to 0. $$

Вывод

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано даёт компактное представление разложения функции с указанием того, что остаточный член убывает быстрее, чем последний учтённый порядок $(x - a)^n$.

Формула Маклорена

Определение

Формула Маклорена — это частный случай формулы Тейлора, где разложение функции происходит в окрестности точки $a = 0$. Функция $f(x)$ разлагается в ряд по степеням x следующим образом:

$$ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), $$

где:

1. $f^{(k)}(0)$ — производная функции $f(x)$ порядка k, вычисленная в точке $x = 0$.
2. $R_n(x)$ — остаточный член, который можно записать, например, в форме Лагранжа: $$ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0, x). $$

Примеры

1. Разложение e^x

Функция e^x имеет все производные равные самой функции, то есть $f^{(k)}(0) = 1$ для всех k. Ряд Маклорена для e^x имеет вид: $$ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x). $$

2. Разложение $\sin(x)$

Функция $\sin(x)$ имеет чередующиеся производные:

- $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, и так далее.

Ряд Маклорена для $\sin(x)$: $$ \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots. $$

3. Разложение $\cos(x)$

Функция $\cos(x)$ также имеет чередующиеся производные:

- $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, и так далее.

Ряд Маклорена для $\cos(x)$: $$ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots. $$

Интуитивный смысл

Формула Маклорена представляет функцию в виде суммы многочлена и остаточного члена. Чем больше членов ряда мы берём, тем точнее приближение функции вблизи $x = 0$. Она широко применяется для приближённых вычислений и анализа поведения функций.

Вывод

Формула Маклорена записывается как: $$ f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x). $$

Это мощный инструмент анализа, применяемый в математике, физике и инженерии для упрощения сложных функций в окрестности точки $x = 0$.

Функциональные пространства (метрические, линейные, гильбертовы). Определения и примеры. (36 вопрос)

Метрическое

1 1 1 1 1

Линейное

1 1 1

Гибельтово

1 1 1

Основная тригонометрическая система функций. (38 вопрос)

1 1 1 1

Приближение функций в среднем. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. (40 вопрос)

1 1 1 1

Ряд Фурье для периодической функции с периодом Т. (42 вопрос)

1 1 1 1 1

Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций, непериодических функций. (44 вопрос)

1 1 1 1 1 1