Лекция 1. ПРОСТРАНСТВО $\boldsymbol{R}^n$

1. Определение n-мерного пространства.
2. Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве.
3. Основные подмножества пространства $\boldsymbol{R}^n$.
4. Предельные точки. Замкнутые множества.

1. Определение n-мерного пространства.

При изучении многих физических процессов часто приходиться иметь дело с такими функциональными зависимостями, в которых числовые значения одной из них полностью определяется значениями нескольких других.

Примеры.

1. Температура T тела в данный момент времени t может меняться от точки к точке. Каждая точка определяется тремя координатами x, y, z. Если при этом учитывать время, то температура в общем случае зависит от четырех переменных $T = T(x, y, z, t)$.

2. При изучении звуковых колебаний газа плотность ρ и его давление P определяются значениями переменных x, y, z, t.

3. Объем параллелепипеда есть функция трех переменных x, y, z, т.е. $V = V(x, y, z)$.

Для изучения таких закономерностей вводится понятие функции нескольких переменных и рассматривается аппарат для исследования таких функций.

Определение 1. ***n-мерным арифметическим точечным пространством*** называется множество всех упорядоченных наборов ($x_1; x_2; ...; x_n$) действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\boldsymbol{R}^n$, а его элементы – ***точками*** или ***векторами*** пространства $\boldsymbol{R}^n$ (n-мерными точками или n-мерными векторами). Числа x_1, x_2, ..., x_n называются ***координатами*** точки (вектора) ($x_1; x_2; ...; x_n$).

Точки пространства $\boldsymbol{R}^n$ обозначаются $M(x_1; x_2; ...; x_n)$ или

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется ***началом координат***. Для n-мерного пространства (n – произвольное) вводится понятие расстояния между двумя точками.

Определение 2. ***Расстоянием*** (***метрикой***) $\rho(x,x')$ между двумя точками $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ n-мерного пространства называется число

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+...+(x_n-x_n')^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2}.$$

Расстояние $\rho(x;x')$ между двумя точками $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ и $x'=(x_1';x_2';...;x_n')$ n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ обладает **свойствами**:

1) *рефлективность*: $\rho(x;x')=0$ тогда и только тогда, когда $x=x'$;

2) *симметричность*: $\rho(x;x')=\rho(x';x)$;

3) *транзитивность*: $\rho(x;x'')\le\rho(x;x')+\rho(x';x'')$.

Если положить $n=1$, то получается формула расстояния между двумя точками на прямой (в пространстве $\boldsymbol{R}^1$): $\rho(x,x')=|x_1-x_1'|$, при $n=2$ – формула для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости (в пространстве $\boldsymbol{R}^2$):

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2},$$

при $n=3$ – в пространстве $\boldsymbol{R}^3$:

$$\rho(x;x')=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}.$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называют ***метрическим пространством*** $\boldsymbol{R}^n$ ***(евклидовым пространством)***.

При $n=1,2,3$ между точками пространства $\boldsymbol{R}^n$ и числовой прямой $\boldsymbol{R}$ (координатной плоскостью $\boldsymbol{R}^2$, координатным пространством $\boldsymbol{R}^3$) установлено взаимно однозначное соответствие, которое позволяет изучать реальные геометрические объекты

аналитически. При $n>3$ пространство $\boldsymbol{R}^n$ является абстракцией, при которой можно рассматривать произвольные подмножества этого пространства, удовлетворяющие некоторым условиям, как определенные «фигуры». Они задаются аналитически так же, как в $\boldsymbol{R}^2$ и $\boldsymbol{R}^3$, т.е. с помощью уравнений, неравенств и их систем, которым удовлетворяют координаты этих точек.

2. Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве.

Пусть $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, – последовательность точек метрического пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Определение 3. Говорят, что последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ ***сходится*** к точке a, $a=(a_1;a_2;...;a_n)$ (имеет ***предел*** a), если $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m;a)=0$.

Обозначается: $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=a$.

Определение 4. Последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если $\exists C\in\boldsymbol{R}$ и $\exists a\in X$ такие, что для любого $m\in\boldsymbol{N}$ выполнено неравенство $\rho(x_m;a)\le C$.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, имеет предел, то она ограничена.

2. Последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, не может сходиться к двум различным точкам.

3. Для того чтобы последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m=(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m)$, сходилась к пределу $a=(a_1;a_2;...;a_n)\in\boldsymbol{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{m\to\infty}x_1^m=a_1,\ \lim_{m\to\infty}x_2^m=a_2,\ ...,\ \lim_{m\to\infty}x_n^m=a_n.$$

4. Если последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ метрического пространства $\boldsymbol{R}^n$ сходится, то она является фундаментальной.

Замечание. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Фундаментальная последовательность может и не быть сходящейся.

Определение 5. Метрическое пространство $\boldsymbol{R}^n$ называется ***полным***, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности пространство $\boldsymbol{R}$ действительных чисел является полным.

Теорема 1. *Пространство* $\boldsymbol{R}^n$ *– полное.*

► Пусть $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$, – фундаментальная последовательность точек в $\boldsymbol{R}^n$. По определению фундаментальной последовательности $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$ такое, что для любых $l, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_l, x_m) < \varepsilon$.

Рассмотрим числовые последовательности $(x_k^m)_{m=1}^{\infty}$, $k = 1,2,...,n$. Тогда $\left|x_k^l - x_k^m\right| \le \rho(x_l, x_m) < \varepsilon$, $k = 1,2,...,n$. Значит, числовые последовательности $(x_k^m)_{m=1}^{\infty}$, $k = 1,2,...,n$, являются фундаментальными. В силу критерия Коши они являются сходящимися. По свойству 3 сходится и последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ в $\boldsymbol{R}^n$. ◄

3. Основные подмножества пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Определение 6. Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n'^0)$ не превосходит положительного числа r, называется ***n-мерным замкнутым шаром радиусом r с центром в точке*** x_0.

Обозначается:

$$B_{[x_0, r]} = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \middle| (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 \le r^2 \right\},$$

или $B_{[x_0, r]} = \{ x \in \boldsymbol{R}^n \mid \rho(x, x_0) \le r \}$.

В частности,

1) при $n = 1$ имеем

$$B_{[x_0, r]} = \{ x \mid |x - x_0| \le r \} = \{ x_0 - r \le x \le x_0 + r \},$$

т.е. ***одномерный*** замкнутый шар – это ***отрезок*** длиной $2r$ с центром в точке x_0;

2) при $n = 2$ имеем

$$B_{[x_0, y_0; r]} = \left\{ (x, y) \middle| (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2 \right\},$$

т.е. это множество является ***кругом*** радиусом r с центром в точке $P_0(x_0; y_0)$;

3) при $n = 3$

$$B_{[M_0, r]} = \left\{ M(x, y, z) \middle| (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le r^2 \right\},$$

т.е. это множество является ***шаром*** радиуса r с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Определение 7. ***Открытым n-мерным шаром с центром в точке*** x_0 называется множество точек x пространства $\boldsymbol{R}^n$, расстояние от каждой из которых до точки x_0 меньше r: $\rho(x, x_0) < r$.

Обозначается: $B_{(M_0, r)} = \{ x \in \boldsymbol{R}^n \mid \rho(x, x_0) < r \}$.

Определение 8. Множество точек $x \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) = r$, называется ***n-мерной сферой радиусом r с центром в точке*** x_0.

Обозначается: $\{ x \in \boldsymbol{R}^n \mid \rho(x, x_0) = r \}$

Определение 9. ***ε-окрестностью*** точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется открытый n-мерный шар радиусом ε с центром в точке x_0.

Обозначается:

$$U(\varepsilon, x_0) = \{ x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon \}.$$

В частности,

1) при $n = 1$ ε-окрестность $U(\varepsilon, x_0) = \{ x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \}$, т.е. окрестностью точки x_0 является интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$;

2) при $n = 2$ ε-окрестность

$$U(\varepsilon, M_0) = \left\{ M(x;y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\},$$

т.е. ε-окрестностью точки M_0 будет множество точек открытого круга радиусом ε с центром в этой точке.

Определение 10. Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\left|x_1 - x_1^0\right| \le d_1$, $\left|x_2 - x_2^0\right| \le d_2$, …, $\left|x_n - x_n^0\right| \le d_n$, называется ***$n$-мерным замкнутым параллелепипедом с центром в точке*** $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Обозначается:

$$P_{[d_1, d_2, ..., d_n; x_0]} =$$
$$= \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| \le d_1, \left|x_2 - x_2^0\right| \le d_2, ..., \left|x_n - x_2^0\right| \le d_n \right\}$$

Аналогично открытому n-мерному параллелепипеду определяется ***открытый*** n-мерный параллелепипед.

Определение 11. Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\left|x_1 - x_1^0\right| \le d$, $\left|x_2 - x_2^0\right| \le d$, …, $\left|x_n - x_n^0\right| \le d$, называется ***$n$-мерным открытым кубом с центром в точке*** $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Обозначается:

$$P_{(d; x_0)} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| < d, \left|x_2 - x_2^0\right| < d, ..., \left|x_n - x_2^0\right| < d \right\}.$$

Определение 12. Всякий n-мерный открытый параллелепипед

$$P_{(d_1, d_2, ..., d_n; x_0)} =$$
$$= \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| < d_1, \left|x_2 - x_2^0\right| < d_2, ..., \left|x_n - x_2^0\right| < d_n \right\}$$

называется ***прямоугольной окрестностью*** точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Лемма 1. *Любая ε-окрестность $U(\varepsilon, x_0)$ точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ содержит некоторую прямоугольную окрестность $P_{[d_1, d_2, ..., d_n; x_0]}$ и наоборот.*

Без доказательства.

Определение 13. ***Проколотой ε-окрестностью*** точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ радиусом ε называется множество точек $x \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Обозначается:

$$\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \middle| 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon \right\}.$$

Из определения проколотой окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ следует, что эта окрестность состоит из множества точек открытого n-мерного шара, исключая его центр.

4. Предельные точки. Замкнутые множества.

Пусть G – некоторое множество пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Определение 14. Точка $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***внутренней точкой*** множества G, если существует ε-окрестность $U(\varepsilon, x)$ точки x, целиком принадлежащая множеству G.

Определение 15. Множество $G \subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***открытым***, если все его точки внутренние.

Определение 16. Точка $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***граничной точкой*** множества G, если в любой ε-окрестности $U(\varepsilon, x)$ точки x содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется ***границей*** множества G и обозначается ∂G.

Граничная точка может как принадлежать множеству G, так и не принадлежать ему.

Определение 17. Точка $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***предельной точкой*** множества G, если в любой ε-окрестность $U(\varepsilon, x)$ точки x содержатся точки множества G, отличные от x. Точка $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$, не являющаяся предельной точкой множества G, называется ***изолированной*** точкой множества G.

Если точка $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ является изолированной точкой множества G, то существует такая ε-окрестность $U(\varepsilon,x)$ точки x, в которой нет точек множества G, отличные от x.

Определение 18. Множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G.

Обозначается: $\overline{G}$.

Пример. $\overline{B_{(x_0,r)}}=B_{[x_0,r]}$.

Определение 19. Множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***ограниченным***, если существует такой n-мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G.

Определение 20. Множество

$$L=\{P(x_1;x_2;...;x_n)|\ x_1=\varphi_1(t), x_2=\varphi_2(t),... x_n=\varphi_n(t); \alpha\le t\le\beta\},$$

где $\varphi_i(t)$, $i=1,2,...,n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, называется ***непрерывной кривой*** в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, соединяющей ***концы*** $P_1(\varphi_1(\alpha);\varphi_2(\alpha);...;\varphi_n(\alpha))$ и $P_2(\varphi_1(\beta);\varphi_2(\beta);...;\varphi_n(\beta))$ кривой Γ.

Определение 21. Множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***линейно связным*** (***связным***), если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ, целиком принадлежащей этому множеству.

Определение 22. Открытое связное множество называется ***областью***, объединение области и ее границы называется ***замкнутой областью***.

Определение 23. Множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***компактом*** в $\boldsymbol{R}^n$, если из любой последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству G.

Пример. Отрезок $[a;b]$ есть компакт в $\boldsymbol{R}$, а промежуток $[a;b)$ не является компактом в $\boldsymbol{R}$.

На пространство $\boldsymbol{R}^n$ обобщается теорема Больцано–Вейерштрасса.

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства* $\boldsymbol{R}^n$ *можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек.*

Следствие. *Для того чтобы множество* $G\subset \boldsymbol{R}^n$ *было компактом, необходимо и достаточно, чтобы множество* G *было ограниченным и замкнутым.*

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения: n-мерного арифметического пространства, расстояния в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, n-мерного евклидова пространства.
2. Дайте определения: n-мерного открытого шара, n-мерного замкнутого шара, n-мерной сферы, n-мерного параллелепипеда (открытого и замкнутого), n-мерного куба, ε-окрестности точки в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.
3. Дайте определения внутренней точки множества. Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству?
4. Дайте определение граничной точки множества. Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?
5. Какие точки множества называются предельными?
6. Дайте определение открытого и замкнутого множества.
7. Что является границей n-мерного замкнутого шара и параллелепипеда.
8. Дайте определения: ограниченного множества, непрерывной кривой в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, связного множества. Являются ли связными множествами n-мерная сфера, n-мерный шар, прямая в пространстве $\boldsymbol{R}^n$?
9. Дайте определения открытой и замкнутой области. Приведите примеры.
10. Дайте определение компакта в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.