Лекция 4. **ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ**

1. Частные и полные приращения функции многих переменных.
2. Частные производные.
3. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.
4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1. Частные и полные приращения функции многих переменных.

Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, …, x_n^0 оставим без изменения.

Определение 1. ***Частным приращением*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, …, $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, …, x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Определение 2. ***Полным приращением*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Геометрически для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных частные и полное приращения функции в точке $(x_0; y_0)$

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рис.1).

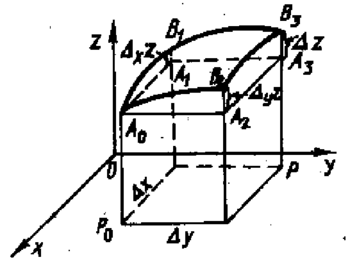

Рис.1.

Пример. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x,$$
$$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Аналогично

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = x_0 (y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$
$$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2,$$
$$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84.$$

Тогда

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$
$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324.$$

2. Частные производные.

Напоминание. Производная функции $y = f(x)$ одной переменной характеризует скорость изменения функции в точке x. В случае двух и нескольких переменных можно говорить о скорости изменения функции в точке только в заданном направлении, так как скорость изменения функции нескольких переменных в точке по различным направлениям может быть не одинакова.

Определение 3. ***Частной производной*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции

$\Delta_{x1} f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Обозначается: $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'_{x_1}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

Примеры.

1. Найти частные производные функций

1) $z = x^2 + \sin(x + y^2)$, 2) $u = xy + \ln(x - y - z)$,

3) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение.

1. Частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos(x + y^2).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \cos(x + y^2).$$

2. Частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z}.$$

3. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-t) = y - t\sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt) = \sin 2(z - xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin(z - xt)\cos(z - xt)(-x) = -x\sin 2(z - xt).$$

3. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.

Геометрический смысл частных производных. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$. Графиком функции $z = f(x, y)$ является некоторая поверхность Q. Возьмем точку $P_0(x_0; y_0) \in D(f)$. На этой поверхности ей соответствует точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y = y_0$. В сечении получим кривую $z = f(x; y_0)$ (на рис.2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z = f(x; y_0)$ в плоскости $y = y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0; y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (см. рис.2).

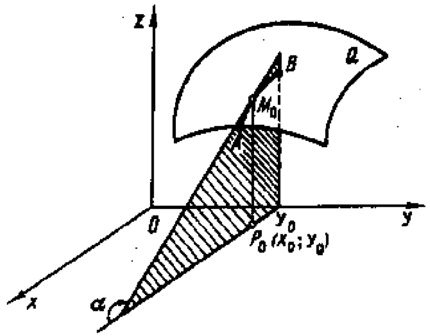

Рис.2.

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z = f(x, y)$ по y.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в данной точке $P_0(x_0; y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y = y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0, y_0)$ – в направлении прямой $x = x_0$ (относительно переменной y).

4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является некоторая поверхность Q (рис.3). Выберем на ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

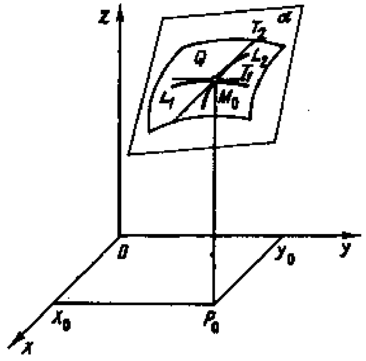

Рис.3.

Определение 4. ***Касательной плоскостью*** к поверхности Q в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0. Для этого рассмотрим сечения поверхности Q плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$. Линия пересечения L_1 поверхности Q плоскостью $x = x_0$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0, \end{cases}$$

а линия пересечения L_2 поверхности Q плоскостью $y = y_0$ – системой уравнений

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Уравнения касательных T_1 и T_2 к линиям L_1 и L_2 в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеют вид соответственно

$$T_1:\begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{cases}$$

$$T_2:\begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0). \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости α, проходящей через касательные T_1 и T_2. Уравнение любой плоскости, проходящей через точку $x = x_0$, $y = y_0$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = -\frac{A}{C}(x - x_0) - \frac{B}{C}(y - y_0).$$

Касательные T_1 и T_2 получаются сечением плоскости двумя плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$. Следовательно, уравнение касательной T_1

$$\begin{cases} z - z_0 = -\dfrac{B}{C}(y - y_0), \\ x = x_0, \end{cases}$$

а уравнение касательной T_2

$$\begin{cases} z - z_0 = -\dfrac{A}{C}(x - x_0), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Сравнивая коэффициенты при $y - y_0$ и при $x - x_0$ в формулах, получим

$$-\frac{A}{C} = f'_x(x_0, y_0), \; -\frac{B}{C} = f'_y(x_0, y_0).$$

Подставляя эти значения в уравнение плоскости, находим уравнение искомой плоскости α, проходящей через касательные T_1 и T_2:

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

Определение 5. ***Нормалью*** к поверхности Q в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Замечание. Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется ***особой точкой поверхности***. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Решение. Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -2, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -2.$$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 3) = 0 \text{ или } 2x + 2y + z - 7 = 0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1} \text{ или } \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{1}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных.

2. Дайте определение частных производных.

3. В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.

4. Выведите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.