Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. (1 и 2 вопросы)

Понятие первообразной

Определение 1. Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}$, называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Пример. Первообразной для функции $f(x) = \sin x$ на множестве $\mathbf{R}$ является функция $F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x$ или $dF(x) = d(-\cos x) = \sin x dx \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Понятие неопределенного интеграла

2. Неопределенный интеграл и его свойства.

Определение 2. Совокупность $F(x) + C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

выражение $f(x)dx$ называется ***подынтегральным выражением***, $f(x)$ – ***подынтегральной*** функцией, x – ***переменной интегрирования***, а C – ***постоянной интегрирования***.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

Свойства неопределенного интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

► Пусть $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тогда

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x)$$

и дифференциал

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx. \blacktriangleleft$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

► Действительно, так как $dF(x) = F'(x)dx$, то $\int F'(x)dx = F(x) + C$. ◄

Пример. $\int 2xe^{x}dx = \int d\left(e^{x^2}\right) = e^{x^2} + C$.

3. Постоянный множитель $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

► Действительно, пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$: $F'(x) = f(x)$. Тогда $aF(x)$ – первообразная функции $af(x)$:

$$(aF(x))' = a'F(x) = af(x).$$

Отсюда следует, что

$$a\int f(x)dx = a(F(x)+C) = aF(x) + C_1 = \int af(x)dx,$$

где постоянная $C_1 = aC$. ◄

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечно числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))dx =$$

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx =$$

$$= \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx .$$

► Доказательство проведем для двух функций. Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ – первообразные функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$: $F'(x) = f_1(x)$, $\Phi'(x) = f_2(x)$. Тогда функции $F(x) \pm \Phi(x)$ являются первообразными функций $f_1(x) \pm f_2(x)$. Следовательно,

$$\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = (F(x) + C_1) \pm (\Phi(x) + C_2) = (F(x) \pm \Phi(x)) +$$

$$+ (C_1 \pm C_2) = (F(x) \pm \Phi(x)) + C = \int (f_1(x) \pm f_2(x))dx . ◄$$

5. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C .$$

► Действительно, $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) = f(ax+b)$. ◄

6 (**инвариантность формул интегрирования**). Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ или } \int f(u)du = F(u) + C ,$$

где u – дифференцируемая функция.

► Воспользуемся свойством инвариантности формы дифференциала первого порядка: если $dF(x) = F'(x)dx$ и $dF(u) = F'(u)du$, где $u = u(x)$. Пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow F'(x) = f(x).$$

Докажем, что $\int f(u)du = F(u) + C$.

Для этого найдем дифференциал от левой и правой части равенства:

$$d\left(\int f(u)du\right) = d(F(u) + C).$$

Отсюда

$$f(u)du = F'(u)du$$

или

$$f(u)du = f(u)du .$$

Из равенств этих дифференциалов следует справедливость свойства 6. ◄

Замена переменной в неопределенном интеграле (3 вопрос)

Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, учитывая $dx=\varphi'(t)dt$.

Теорема 3. *Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T. И пусть X – множество значений функции $x=\varphi(t)$, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

► Формула справедлива, если после дифференцирования обеих ее частей получаются одинаковые выражения.

Учитывая, что $f(x)=f(\varphi(t))$ – сложная функция, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right)=\int f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Продифференцировав правую часть данной формулы, получим

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

Таким образом, формула замены переменной в неопределенном интеграле справедлива. ◄

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют ***«подведением» множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.***

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx .$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x)=u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du .$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

Пример.

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [u = \cos x] = -\int \frac{du}{u} =$$

$$= -\ln|\cos x| + C .$$

Интегрирование по частям неопределенного интеграла (4 вопрос)

$$= -\ln|\cos x| + C .$$

Интегрирование по частям. Метод интегрирования по частям основан на следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x на промежутке X. И пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $v'(x)u(x)$ также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

► Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x. Тогда

$$d(uv) = udv + vdu .$$

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu .$$

Но так как $\int d(uv) = uv + C$, то

$$\int udv = uv - \int vdu . \blacktriangleleft$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Некоторые часто встречающиеся типы интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$. Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n \in \mathbf{N}$, относительно x, $k \in \mathbf{R}$. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u = P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз.

II. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,xdx$. Здесь $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n \in \mathbf{N}$, относительно x. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$.

III. Интегралы вида $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bxdx$, $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bxdx$ (a, b – числа) вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Метод замены переменной в неопределенном интеграле. (5 вопрос)

Теория из лекции

Интегрирование подстановкой (заменой переменной). Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x=\varphi(t)$, учитывая $dx=\varphi'(t)dt$.

Теорема 3. *Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T. И пусть X – множество значений функции $x=\varphi(t)$, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

► Формула справедлива, если после дифференцирования обеих ее частей получаются одинаковые выражения.

Учитывая, что $f(x)=f(\varphi(t))$ – сложная функция, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right)=\int f(x)dx=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Продифференцировав правую часть данной формулы, получим

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)=f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Таким образом, формула замены переменной в неопределенном интеграле справедлива. ◄

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx=d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют ***«подведением» множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала.***

Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x)=u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du.$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

Пример.

$$\int tgx\,dx=\int \frac{\sin x}{}dx=\int \frac{d(\cos x)}{}=[u=\cos x]=\int \frac{du}{}=$$

$$\int \operatorname{tg}x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [u = \cos x] = -\int \frac{du}{u} =$$
$$= -\ln|\cos x| + C.$$

Примеры из демидовича на заменну переменной

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int \operatorname{arctg} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{(\operatorname{arctg} x)'}\,dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)'\,dx =$$

$$= \int \operatorname{arctg}(x)\,d(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{dx}{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2dx}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \int \frac{2dx \cdot e^x}{e^{2x}+1} =$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$= \int \frac{2(e^x)'\,dx}{1+(e^x)^2} = \int \frac{2d(e^x)}{1+(e^x)^2} = 2\operatorname{arctg}(e^x) + C$$

$$\int \frac{2du}{1+u^2} = 2\operatorname{arctg} u$$

$$\int \frac{\ln 2x}{x \cdot \ln x}\,dx = \int \frac{\ln 2 + \ln x}{x \ln x}\,dx = \int \frac{\ln 2}{x \ln x}\,dx + \int \frac{\cancel{\ln x}}{x \cancel{\ln x}}\,dx =$$

$$= \ln 2 \int \frac{1}{x \ln x}\,dx + \underbrace{\int \frac{dx}{x}}_{\ln x} = \ln 2 \int \frac{(\ln x)'\,dx}{\ln x} + \ln x = \ln 2 \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} + \ln x =$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$= \ln 2 \cdot \ln(\ln(x)) + \ln x + C$$

Метод внесения множителя под знак дифференциала

Пусть про него не спрашивают в вопросе, но не зря же он находится в одном параграфе с методом замены переменной, поэтому можно его тоже рассмотреть.

Если говорить простым языком, то суть этого метода заключается в том, чтобы преобразовать подынтегральное выражение таким образом, чтобы какой-то его кусок являлся производной такой функции, при внесении которой под знак интеграла подынтегральное выражение станет табличным интегралом.

Примеры внесения множителя под знак дифференциала

Date :......./......./.......

№1694

$$\int \frac{dx}{x\cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} = \left| \begin{matrix} u=\ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dx = x\,du\end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{\cancel{x}\,du}{\cancel{x}\cdot u\cdot \ln u} = \int\frac{du}{u\cdot\ln u} = \left|\begin{matrix} v=\ln u\\ dv=\frac{1}{u}\cdot du \\ du = u\,dv\end{matrix}\right| =$$

$$= \int \frac{dv}{v} = \ln|v|+C = \ln|\ln(u)|+C = \ln|\ln(\ln(x))|+C$$

№1677

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \left|\begin{matrix} u=1+x^2 \\ du = 2x\,dx \\ x\,dx = \frac{du}{2}\end{matrix}\right| = \int\frac{u^2\cdot du}{2} = \frac{1}{2}\int u^2\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{u^3}{3}+C = \frac{(1+x^2)^3}{6}+C$$

Интегрирование рациональных выражений. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби. Метод неопределенных коэффициентов. (5 вопрос и 6 вопрос)

По факту эти два вопроса являются одним вопросом

Рациональные дроби (определение, условия при которых дробь является рациональной)

Перед тем, как говорить об интегрировании надо понять, что такое рациональная дробь.

Рациональная дробь вида:

$$ R(x) = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...\ + a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...\ + b_{m-1}x+b_m} = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} $$

является правильной, если $n < m$ $\frac{x}{x^2+5}$

является неправильной, если $n>=m$ $\frac{x^3}{3x^2+7x-4}$

Простая дробь является рациональной дробью, если она является 1 из следующих 4 типов:

1. $$ \frac{A}{x + a} \ \ \text{или} \ \ \frac{A}{x - a}

\ \ (A,a \in R) $$

2.

$$ \frac{A}{(x + a)^n} \ \ \text{или} \ \ \frac{A}{(x - a)^n}

\ \ (A,a \in R, \ n>=2) $$

3. $$ \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \ \ \ \ (M, N, p, q \in R) , \ \ (x^2+px+q = 0) $$

4. $$ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \ \ \ \ (M, N, p, q \in R) , \ \ (x^2+px+q = 0)

\ \ (n>=2) $$

Из каждой дроби можно взять интеграл:

1. $$ A\ln(|x + a|) + C \ \ \ \text{или} \ \ \ A\ln(|x - a|) + C $$

2. $$ \frac{A}{(1-n)(x + a)^{n-1}} + C \ \ \ \text{или} \ \ \ \frac{A}{(1-n)(x - a)^{n-1}} + C $$

3. $$ \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + (N - \frac{PM}{2}) *\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} * \arctg(\frac{x + \frac{P}{2}}{\sqrt{q - \frac{P^2}{4}}}) + C $$

4. $$ I_n = \frac{t}{a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^n}\frac{2n-3}{2n-2} * I_{n-1} $$ *На счет интеграла 4 типа я хз, может он неверн, надо будет проверить*

Теорема: Правильную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ , \ Q_m(x) = (x-a)^n * (x-b)^{\text{у меня там черточка}} *... \ * (x^2+px+q)^s$ можно обр. (хз что за полное слово) разложить на сумму простейших дробей $$ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} +... + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} +... +\frac{B_l}{(x-b^l)} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}

- ...\ + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s} $$

Теперь, когда стало ясно, что такое рациональная дробь, стоит поговорить о том как найти интеграл от такой дроби, есть несколько методов:

Метод неопределенных коэффециентов

Перед тем, как говорить о самом методе, нужно сказать, что очень важно определить является ли дробь **РАЦИОНАЛЬНОЙ**, потом является ли она **ПРАВИЛЬНОЙ** или **НЕПРАВИЛЬНОЙ**.

Если дробь правильная (самая большая степень вверху строго меньше самой большой степени внизу), то нужно просто разложить нижнию часть дроби на множители.

Если дробь неправильная (самая большая степень вверху больше или равна самой большой степени внизу), то нужно выделить целую часть (поделить верхнюю часть дроби на нижнюю), чтоб в итоге в выражении $S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ дробь $\frac{R(x)}{Q(x)}$ была правильной.

Алгоритм выполнения

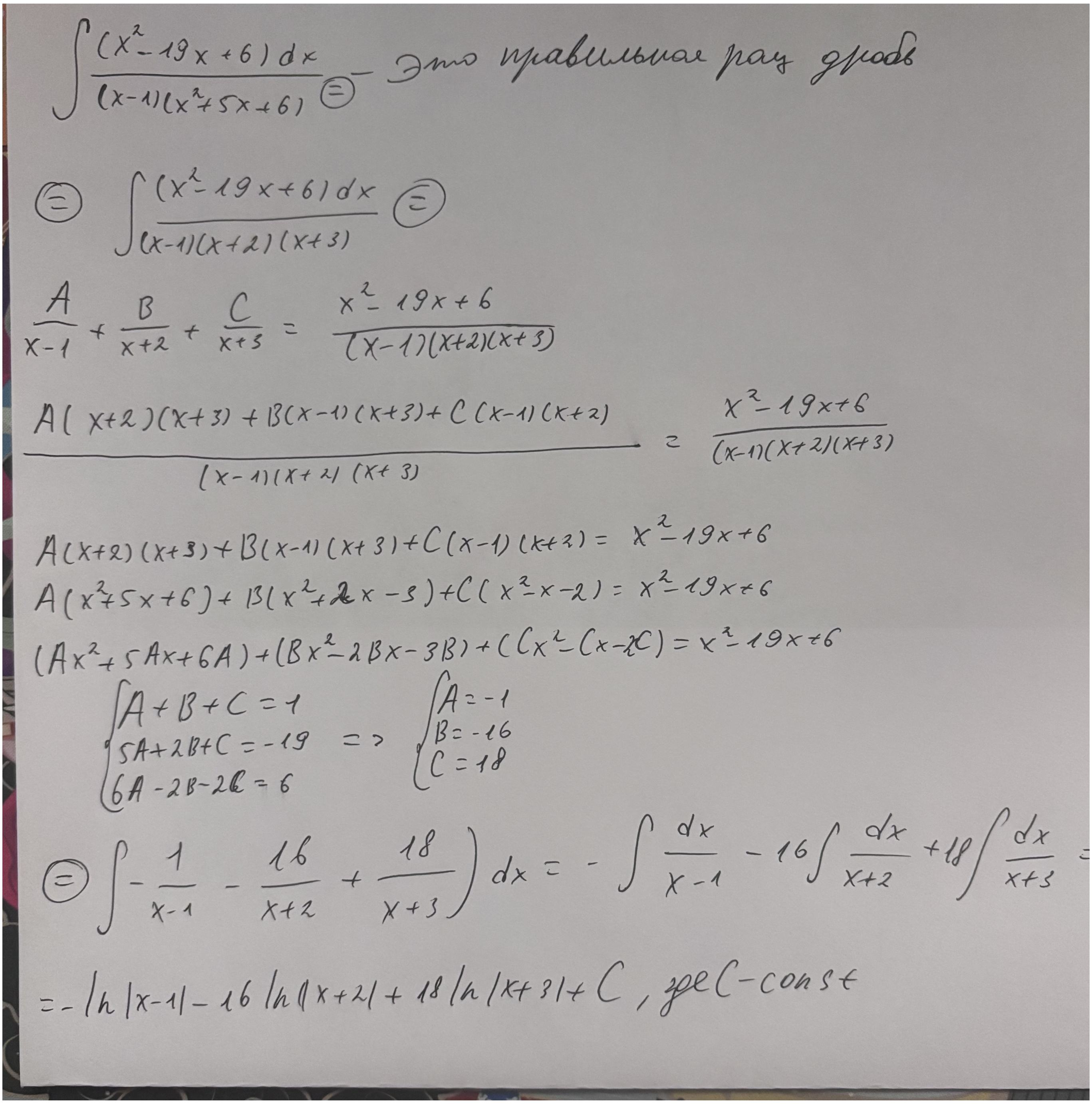
1. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби по формуле 1: $$ \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} $$

2. Привести простейшие дроби к общему знаменателю

3. Приведем числители

4. Получаем СЛАУ, решая которую, получаем неопределенные коэффециенты. После этого находим интеграл

Пример решения



$$\int \frac{(x^2-19x+6)\,dx}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \text{— это правильная рац дробь}$$

$$= \int \frac{(x^2-19x+6)\,dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} =$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2) = x^2-19x+6$$

$$A(x^2+5x+6) + B(x^2+2x-3) + C(x^2-x-2) = x^2-19x+6$$

$$(Ax^2+5Ax+6A) + (Bx^2-2Bx-3B) + (Cx^2-Cx-2C) = x^2-19x+6$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-2B-2C=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=-16 \\ C=18 \end{cases}$$

$$= \int \left(-\frac{1}{x-1} - \frac{16}{x+2} + \frac{18}{x+3}\right) dx = -\int \frac{dx}{x-1} - 16\int \frac{dx}{x+2} + 18\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\ln|x-1| - 16\ln|x+2| + 18\ln|x+3| + C, \text{ где } C - const$$

Метод частных значений

В данном методе придаем переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов). Получим СЛАУ, решая которую, получим неопределенные коэффециенты. Данный метод очень быстро работает, когда корни многочлена простые и действительные.

Пример решения

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2+4)}\,dx = \int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}\,dx$$

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x^2+4}$$

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) =$$

$$= 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+B+C=9 \\ x^2 & -4A-2B-6C+D=-30 \\ x^1 & 4A+4B+8C-6D=28 \\ x^0 & -16A \cancel{+} -8B+8D=-88 \end{array} \quad ; \quad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

$$\int \frac{5}{x-2}\,dx + \int \frac{3}{x-4}\,dx + \int \frac{x+2}{x^2+4}\,dx = 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

Интегрирование иррациональных выражений 7 вопрос

Определение из лекции

Интеграл вида

$$ \int{R (x, \sqrt{x^{m_1}}, \sqrt{x^{m_2}}, ...) dx} = |

\text{$x = t^S$, S - общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$} | =

\int{R (t^S, \frac{Sm_1}{n_1}, \frac{Sm_1}{n_1}, ...) St^{S-1}dt} \ \ \ \text{, где R - рациональная дробь, x - иррациональная часть} $$

Способ решения иррационального интеграла

Чтобы найти интеграл от иррациональной функции нужно нужно заменить подкоренное выражение на t со степенью корня. Например, для $\sqrt{x + 1}$ заменой будет являеться $t^2 = x + 1$, таким образом при подстановке получим $\sqrt{t^2} = t$. Теперь рассмотрим данный метод решения на некоторых примерах

Примеры

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = \left| \begin{array}{l} t^2 = x \\ dx = 2t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2t\,dt}{t(t^2+3)} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}} + C$$

$$\int \frac{\sqrt{x+2}\cdot dx}{x-3} = \left| \begin{array}{l} t^2 = x+2 \\ dx = 2t\,dt \\ x = t^2-2 \\ x-3 = t^2-5 \end{array} \right| = \int \frac{2t^2\,dt}{t^2-5} = \int \frac{2(t^2-5)+10}{t^2-5}\,dt =$$

$$= \int\left(2+\frac{10}{t^2-5}\right)dt = 2\int dt + 10\int \frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2} = 2t + \frac{10}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+2} + \sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right| + C$$

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right| = \int \frac{(t^6+\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{(t^6)^2})\cdot 6t^5\,dt}{t^6(1+\sqrt[3]{t^6})} =$$

$$= 6\int \frac{(t^6+t^3+t^4)\,dt}{t(1+t^2)} = 6\int \frac{(t^5+t^3+t^2)\,dt}{t^2+1} =$$

$$= 6\int \frac{t^3(t^2+1)+(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt = 6\int\left(t^3+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{6}{4}t^4+6t-6\operatorname{arctg}t + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C$$

P.s. примеры взять отсюда http://mathprofi.ru/integrirovanie_kornei.html. Тут так же есть информация про интегрирование биноминальных интегралов.

Интегрирование дифференциального бинома. Подстановки Эйлера. (8 вопрос)

Дифференциальный бином

Дифференциальный бином это выражение вида $\int (x^m(a +bx^ n)^p) dx$, где $(a, b \in R)\ \ \ (m,n,p \in Q)$

Он может проинтегрирован в трех случаях

1. $p < 0$ и p - целое
2. $\frac{m+1}{n}$ - целое
3. $\frac{m+1}{n}+p$ - целое

Подстановка Эйлера

Подстановки Эйлера — это замены переменных, которые преобразуют дифференциальный бином в более простую форму. Существует три типа подстановок, выбор которых зависит от структуры ($a + b x^n$).

1. Первая подстановка Эйлера

Условие: Используется, если ($a > 0$).

Подстановка: $ a + b x^n = t^k, \quad x = \left(\frac{t^k - a}{b} \right)^{1/n}, \quad dx = \frac{k t^{k-1}}{n b} \left(\frac{t^k - a}{b} \right)^{1/n - 1} , dt, $ где k — подходящее целое число, часто равное знаменателю (n).

Пример: Рассмотрим интеграл: $int x^2 \sqrt{1 + x^2} , dx$. Здесь $(m = 2, n = 2, p = \frac{1}{2}, a = 1, b = 1)$. Подставим $(1 + x^2 = t^2)$, тогда: $x = \sqrt{t^2 - 1}, \quad dx = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} , dt.$ Интеграл преобразуется: $int (\sqrt{t^2 - 1})^2 \sqrt{t^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} , dt = \int t^2 \sqrt{t^2 - 1} , dt. $ Дальнейшее интегрирование требует дополнительных подстановок или методов.

2. Вторая подстановка Эйлера

Условие: Используется, если ($b > 0$).

Подстановка: $a + b x^n = t x^k, \quad x = \left(\frac{a}{t - b x^{n-k}} \right)^{1/k}.$ Производная (dx) вычисляется в зависимости от (k) и (n).

Пример: Рассмотрим интеграл: $int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x}}. $ Здесь ($m = -1, n = 1, p = -\frac{1}{2}, a = 1, b = 1$). Подставим $\sqrt{1 + x} = t x $, тогда: $ 1 + x = t^2 x^2, \quad x = \frac{1}{t^2 - 1}, \quad dx = -\frac{2t}{(t^2 - 1)^2} , dt. $ Интеграл становится: $int \frac{1}{\frac{1}{t^2 - 1} \cdot t \cdot \frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}} , dt, $ что упрощается до рационального интеграла.

3. Третья подстановка Эйлера

Условие: Используется в специфических случаях, когда ($a + b x^n = t^2 x^k $).

Эта подстановка менее распространена и применяется, если первые две неэффективны. Она требует тщательного выбора (k) для упрощения.

Интегрирование тригонометрических функций (8 вопрос)

Способы нахождения

1 способ (использование тригонометрических формул)

$$\int \sin 5x \sin 7x \, dx =$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$= \int \frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 2x\, d(2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\int\cos 12x\, d(12x) =$$

$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 12x}{24} + C.$$

2 способ (понижение степени подынтегральной функции)

Данный приём работает, когда подынтегральные функции нафаршированы синусами и косинусами в чётных степенях. Для понижения степени используются форумлы:

$$ \sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2} , \ \ \ \cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \ \ \ \sin(2x) = 2\sin(x) $$

$$\int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \int(\sin^2 x)^2\, dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^4\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} x - 2\,\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4\cdot 2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right)+C$$

3 способ (метод замены переменных)

$$\int \frac{\cos 2x \, dx}{\sin^3 2x} = \left| \begin{array}{l} t = \sin 2x \\ dt = (\sin 2x)' dx = \cos 2x \, (2x)' dx = 2\cos 2x \, dx \\ \cos 2x \, dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2} \int t^{-3} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-2)} t^{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\sin^2 2x} + C$$

$$\int \cos^7 2x \sin 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos 2x \\ dt = -2\sin 2x \, dx \\ \sin 2x \, dx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int t^7 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^8}{8} + C =$$

$$= -\frac{\cos^8 2x}{16} + C$$

4 способ (универсальная тригонометрическая подстановка)

Универсальной тригонометрической подстановкой считается $t = \tg{\frac{x}{2}}$.

Таким образом, мы получаем, что

$$ \sin{x} = \frac{2t}{t^2 + 1}, \ \ \cos{x} = \frac{1 - t^2}{t^2 + 1} $$

$$ \frac{x}{2} = \arctg{t}, \ \ x = 2\arctg{t} $$

Универсальную тригонометрическую подстановку принято применять тогда, когда непонятно, что можно сделать, приведем пример такого случая:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x} = \left| \begin{array}{l} t=tg\,\frac{x}{2} \\ x = 2\,arctg\,t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{2(1-t^2)}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3(1+t^2)+2(1-t^2)-2t}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2-2t} = 2\int \frac{dt}{t^2-2t+5} = 2\int \frac{dt}{t^2-2t+1+4} =$$

$$= 2\int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2+2^2} = \frac{2}{2}\,arctg\left(\frac{t-1}{2}\right)+C = arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}-1}{2}\right)+C.$$

Определенный интеграл. Понятие интегральной суммы.

Понятие определенного интеграла

2. Определение определенного интеграла Римана.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, точками $x_0,x_1,...,x_n$.:

$$a=x_0<x_1...<x_{n-1}<x_n=b.$$

Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k)=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Понятие интегральной суммы

$k=1$

Определение 2. Сумма

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \qquad (1)$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k=\overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, называемая ***диаметром разбиения***.

Верхние и нижние суммы Дарбу. Свойства сумм Дарбу (11 вопрос)

4. Критерий интегрируемости Дарбу.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим

$$m_k = \inf_{[x_{k-1};x_k]} f(x),$$
$$M_k = \sup_{[x_{k-1};x_k]} f(x).$$

Определение 5. ***Нижней суммой Дарбу***, соответствующей разбиению τ_n, называется сумма

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k .$$

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n, на-

зывается сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k .$$

В случае, когда функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Поэтому суммы Дарбу s_n и S_n при любом разбиении τ_n принимают конечные значения. Далее будем рассматривать ограниченные функции $f(x)$.

Свойства интегральных сумм Дарбу

1. Для фиксированного разбиения τ_n имеет место неравенство $s_n \le S_n$.

2. Для фиксированного разбиения τ_n и любого выбора промежуточных точек ξ_i на этом разбиении имеет место неравенство $s_n \le \sigma_n \le S_n$.

3. Нижняя (верхняя) сумма Дарбу является нижней (верхней) гранью интегральных сумм Римана, соответствующих данному разбиению:

$$s_n = \inf_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} \sigma_n(f;\xi_k),$$
$$S_n = \sup \sigma_n(f;\xi_k).$$

$$S_n = \sup_{\xi_1;\xi_2;\ldots;\xi_n} \sigma_n(\tau_n;\xi_k).$$

4. Имеет место неравенство

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k ,$$

где $\omega_k(f)$ – колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k=\overline{1,n}$.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости (12 вопрос)

3. Необходимое условие интегрируемости функций.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если* $\int_a^b f(x)dx$ *существует, то функция* $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$.

► Действительно, если функция $f(x)$ неограничена на $[a;b]$, то для любого разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …, $[x_{n-1};x_n]$ найдется хотя бы один частичный отрезок $[x_{k-1};x_k]$, на котором функция $f(x)$ неограниченна. В силу неограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1};x_k]$ можно выбрать на нем точку ξ_k так, чтобы абсолютная величина произведения $f(\xi_k)\Delta x_k$ была больше наперед заданного числа. Таким образом, при любом разбиении τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки интегральная сумма

$$\sigma_n(\tau_n;\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

будет бесконечно большой по абсолютной величине. Следовательно, не существует конечного предела интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения λ к нулю, что противоречит условию теоремы. ◄

Свойства интегрируемых функций (13 вопрос)

2. Основные свойства определенного интеграла.

Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. *Если нижний и верхний пределы интегрирования равны* $(a=b)$, *то интеграл равен нулю*:

$$\int_a^b f(x)dx = 0 .$$

Это свойство следует из определения интеграла.

2. *Если* $f(x)=1$, *то* $\int_a^b dx = b-a$.

►Действительно, так как $f(x)=1$, то

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} 1\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a . \blacktriangleleft$$

3. *При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

► Данное утверждение следует из того, что в случае $b<a$ все числа $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ в разбиении $\tau_n = \{a = x_0 > x_1 > \ldots > x_n = b\}$ будут отрицательными (при $a<b$ все $\Delta x_k > 0$). ◄

Интеграл $\int_a^b f(x)dx$ был определен для случая $a<b$. Если $a>b$, свойство 3 рассматривается как дополнение к определению определенного интеграла. Его можно интерпретировать следующим образом: определенные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^a f(x)dx$ являются пределами интегральных сумм, различающихся лишь знаком.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла*:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbf{R}\,.$$

► Действительно,

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\xi_k)\Delta x_k = c\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)dx . ◄$$

5. *Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа интегрируемых на* $[a;b]$ *функций* $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ *равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых*:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx =$$

$$= \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx .$$

Доказательство этого свойства аналогично приведенному выше.

Замечание. Совокупность свойств 4 и 5 называются свойством **линейности**: *если* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы на* $[a;b]$*, то любая их линейная комбинация* $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$*, также интегрируема на* $[a;b]$:

$$\int_a^b \left(c_1 f_1(x) \pm c_2 f_2(x)\right)dx = c_1\int_a^b f_1(x)dx \pm c_2\int_a^b f_2(x)dx .$$

6 (аддитивность определенного интеграла). *Если существуют интегралы* $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$*, то существует также интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *и для любых чисел* a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

►Действительно, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и от выбора ξ_k. Это позволяет при составлении интегральной суммы включить точку c в число точек разбиения. Пусть $c = x_m$, т.е.

$$[a;b]=[a;c]\cup[c;b]=([a;x_1]\cup[x_1;x_2]\cup\ldots\cup[x_{m-1};x_m])\cup$$
$$\cup([x_m;x_{m+1}]\cup\ldots\cup[x_{n-1};b]).$$

Тогда $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=m}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Переходя к пределу при $\lambda = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i \to 0$, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx . \blacktriangleleft$$

Геометрический смысл свойства 6 состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рис.1.)

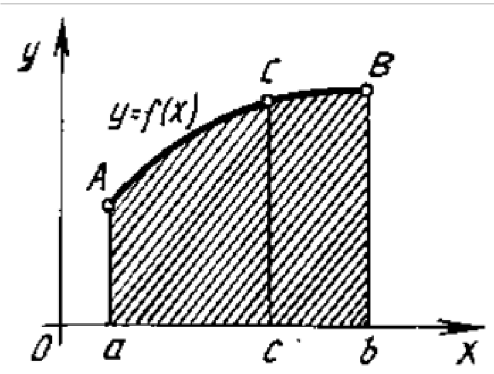


Рис. 1.

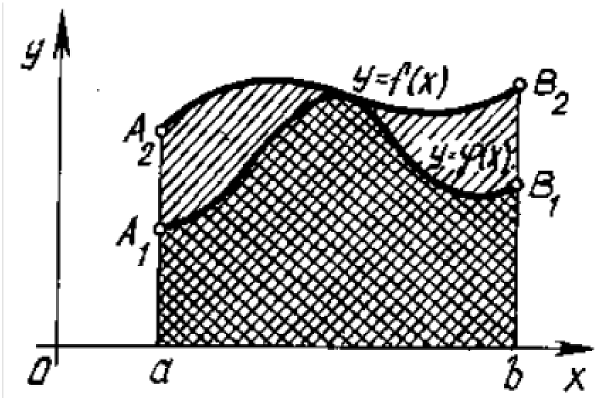


Рис.2.

7 (интегрирование неравенств). *Если* $f(x)\ge 0 \quad \forall x\in[a;b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$, $a<b$.

►Действительно, так как $f(\xi_k)\ge 0$ и $\Delta x_k \ge 0$, то интегральная сумма $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \ge 0$. Переходя к пределу в последнем равенстве, имеем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx \ge 0 . \blacktriangleleft$$

8 (монотонность определенного интеграла). *Если* *интегрируемые функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют неравенству* $f(x) \geq \varphi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx \text{ , } a < b \text{ .}$$

►Действительно, так как $f(x) - \varphi(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$, то, согласно свойствам 5 и 7, имеем

$$\int_a^b (f(x) - \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \geq 0 \text{ .}$$

Следовательно $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$.◄

На рис.2. дана **геометрическая** интерпретация свойства 8. Так как $f(x) \geq \varphi(x)$, то площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b .

Замечание. Так как $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \text{ .}$$

Отсюда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b f(x)dx$.

Оценки интегралов. Теорема о среднем значении (14 вопрос)

---

3. Интегральная теорема о среднем.

Терема 3 (о среднем). *Пусть 1) функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *2) для любого* $x \in [a;b]$ *справедливо неравенство* $m \le f(x) \le M$, *3) функция* $g(x)$ *не меняет знак на* $[a;b]$. *Тогда существует такое число* μ, $m \le \mu \le M$, *что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

►По условию $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$.

Умножим неравенство на $g(x)$.

Если $g(x) \ge 0$, получим $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$.

Если $g(x) \le 0$, получим $Mg(x) \le f(x)g(x) \le mg(x)$.

Интегрируя эти неравенства, имеем

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

или $M\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le m\int_a^b g(x)dx$.

В случае, когда $\int_a^b g(x)dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и теорема доказана.

В случае, когда $\int_a^b g(x)dx \ne 0$, то при $g(x) \ge 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx > 0$, а при $g(x) \le 0$ имеем $\int_a^b g(x)dx < 0$.

Разделим обе части двойных неравенств на $\int_a^b g(x)dx$. В обоих случаях получим одно и то неравенство

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M.$$

Полагая

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$\mu = \frac{{}_{a}}{\int\limits_a^b g(x)dx},$$

получим $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$. ◄

Следствие 1. *Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на $[a;b]$, то*

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \forall x \in [a;b].$$

►По условию $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$. Применяя свойство 8 к этим неравенствам, имеем

$$m\int\limits_a^b dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M\int\limits_a^b dx.$$

Согласно свойству 2, $\int\limits_a^b dx = b-a$, следовательно,

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a). ◄$$

На рисунке 3 дана **геометрическая** интерпретация следствия 1 в случае, когда $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$. Площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника aA_2B_2b – $M(b-a)$. Из неравенства $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ следует, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго.

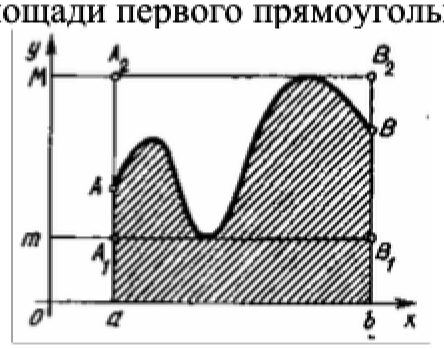


Рис.3.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

►Известно, что непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ достигает своего наименьшего m и наибольшего M значений, т.е. $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a;b]$. Из данного неравенства на основании следствия 1 имеем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Разделив все члены двойного неравенства на $b-a>0$, получим

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M.$$

Другими словами, число $\lambda = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ находится между наименьшим и наибольшим значениями функции $f(x)$. Поскольку непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения, лежащие между m и M, в том числе и значение λ, то существует $\xi \in [a;b]$, такое, что $f(\xi) = \lambda$.

Значит, $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Отсюда $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. ◄

Число $f(\xi)$, называется ***интегральным средним значением функции*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$.

Геометрически данное следствие означает, что, определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке ξ отрезка интегрирования $[a;b]$ и длины $b-a$ этого отрезка.

На рисунке 4 дана геометрическая интерпретация следствия 2 в случае, когда $f(x)>0 \quad \forall x \in [a;b]$. Так как значение $f(\xi)(b-a)$ численно равно площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(\xi)$, то теорема о среднем утверждает, что существует прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции $aABb$.

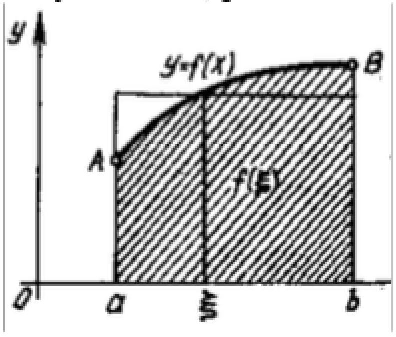


Рис.4.

Определенный интеграл как функция верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. (15 вопрос)

Определенный интеграл как функция верхнего предела

1. Определение интеграла с переменным верхним пределом.

Ранее рассматривался определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Если оставить постоянным нижний предел интегрирования a, а верхний x изменять так, чтобы $x \in [a;b]$, то величина интеграла будет изменяться.

Определение 1. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x),\ x \in [a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным верхним пределом*** и является функцией верхнего предела x.

Здесь для удобства переменная интегрирования обозначена буквой t, а верхний предел интегрирования – буквой x.

С **геометрической** точки зрения, функция $F(x)$ в случае $f(t) \geq 0$ представляет собой площадь заштрихованной на рисунке 1 криволинейной трапеции.

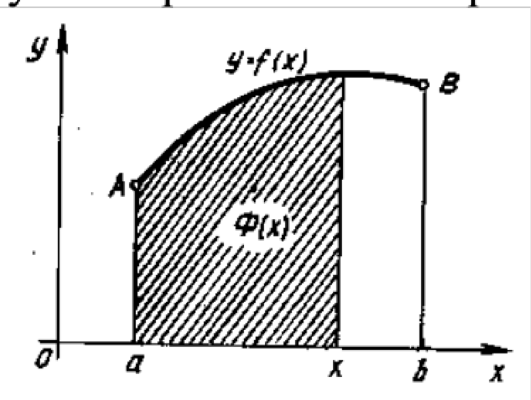


Рис.1.

Аналогично вводится определенный интеграл с переменным нижним пределом.

Определение 2. Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x),\ x \in [a;b],$$

называется ***определенным интегралом с переменным нижним пределом*** и является функцией нижнего предела x.

Формула Ньютона-Лейбница

4. Вычисление определенного интеграла.

Теорема 4 (формула Ньютона-Лейбница). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ *и* $F(x)$ *– какая-нибудь первообразная на этом отрезке, то справедлива формула*

Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

►Пусть функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Если $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ другая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то они отличаются на некоторую постоянную C и $\forall\ x \in [a;b]$ имеет место равенство

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C\ .$$

Положим $x = a$ и, учитывая, что $\int_a^a f(t)dt = 0$, получим $C = -F(a)$.

Подставляя это значение вместо C, имеем $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)\quad \forall x \in [a;b]$. Тогда при $x = b$ получаем $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. ◄

Замечание. Формула Ньютона – Лейбница называется ***основной формулой интегрального исчисления***. Иногда ее удобно записывать в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

Формула Ньютона – Лейбница позволяет избавиться от вычисления определенных интегралов как пределов интегральных сумм. Поэтому задача вычисления определенного интеграла сводится к задаче вычисления неопределенного интеграла.

Пример. Вычислить интегралы

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, 3) $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$, 4) $\int\limits_{-1}^0 e^{-2x} dx$.

Решение. Имеем

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1$.

2. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

3. $\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int\limits_1^6 (3+x)^{-1/2} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2$.

4. $\int\limits_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{e^2 - 1}{2}$.

Замена переменной в определенном интеграле. (Вопрос 16)

Теорема 5 (формула замены переменной в определенном интеграле). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *а функция* $x=\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[t_1;t_2]$, *причем* $\varphi([t_1;t_2])=[a;b]$ *и* $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, *то справедлива формула замены переменной*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(x))\varphi'(t)dt .$$

►Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Поскольку $\varphi(t_1)=a$, $\varphi(t_2)=b$, то по формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(\varphi(t_2))-F(\varphi(t_1))=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} dF(\varphi(t))=\int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt . ◄$$

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить, вычисления, т.е. привести

подынтегральное выражение к соответствующей табличной форме.

Замечание. При вычислении интеграла методом замены переменной одновременно с преобразованием подынтегрального выражения изменяются соответственно и пределы интегрирования. Для вычисления определенного интеграла по этой формуле необходимо:

– сделать замену $x=\varphi(t)$,

– вычислить $dx=\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – некоторая непрерывно дифференцируемая функция,

– найти пределы интегрирования по t, решив уравнения $\varphi(t_1)=a$ и $\varphi(t_2)=b$.

Формула интегрирования по частям для определенного интегралла (17 вопрос)

Теорема 6 (формула интегрирования по частям в определенном интеграле). *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывны вместе со своими производными на отрезке* $[a;b]$. *Тогда справедлива формула интегрирования по частям в определенном интеграле*

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

► Для дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ имеем $d(uv) = udv + vdu$. Проинтегрируем обе части последнего

равенства на отрезке $[a;b]$:

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b udv + \int_a^b vdu .$$

С другой стороны, по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = uv\Big|_a^b$$

Следовательно, $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$. ◄

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^e \ln x dx$.

***Решение*.** Имеем

$$\int_1^e \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x;\ du = \frac{1}{x}dx; \\ dv = dx;\ \ v = x \end{bmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} x dx = e - \int_1^e dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = 1 .$$

https://mathprofi.com/knigi_i_kursy/integraly/1_6_integrirovanie_po_chastyam_v_opredelennom_integrale.html

Геометрические приложения определенного интеграла. Длина кривой и площадь плоской

фигуры. (18 вопрос)

Длина кривой

2. Длина дуги кривой.

Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и кривая l – график этой функции (рис.8). Требуется найти длину дуги плоской кривой l, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

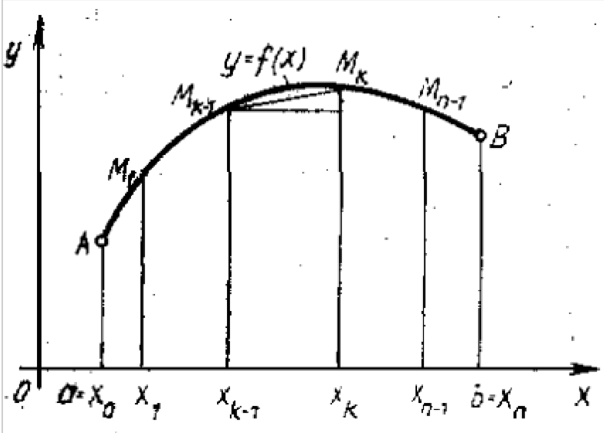


Рис.8.

Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Через точки x_i, $i = \overline{1,n}$, проведем вертикальные прямые, параллельные оси Oy, до пересечения с кривой l. Тогда дуга AB разобьется на n частей. Соединив каждые две соседние точки разбиения кривой l отрезками (хордами), получим ломаную $AM_1M_2...M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Обозначим длину ломаной через l_n:

$$l_n = \left|\overline{AM_1}\right| + \left|\overline{M_1M_2}\right| + ... + \left|\overline{M_{n-1}B}\right| = \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k ,$$

где Δl_k – длина хорды, стягивающей дугу $M_{k-1}M_k$.

Длина ломаной является приближенным значением длины дуги AB $(l \approx l_n)$. Очевидно, что если увеличивать число n точек разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки так, чтобы длина максимального из них стремилась к нулю, то длина вписанной ломаной стремится к длине дуги кривой AB

Если существует конечный предел l_n при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$, то этот предел называется ***длиной*** дуги l, а сама дуга называется ***спрямляемой***:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k .$$

Если конечный предел l_n не существует, то и длина дуги не существует, а сама дуга называется ***неспрямляемой***.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$. на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то кривая l – спрямляемая, и ее длина вычисляется по формуле*

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx .$$

►Вычислим длину стягивающей хорды $M_{k-1}M_k$. Так как $M_{k-1}(x_{k-1}; f(x_{k-1}))$, $M_k(x_k; f(x_k))$, то

$$\Delta l_k |M_{k-1}M_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k .$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k),\ \xi_k \in (x_{k-1}; x_k).$$

Следовательно, $\Delta l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\, \Delta x_k$.

Подставляя полученное выражение, получаем

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\, \Delta x_k .$$

В правой части формулы стоит интегральная сумма для функции: $\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}$ на отрезке $[a;b]$. Предел такой суммы существует и равен определенному интегралу от этой функции на отрезке $[a;b]$:

$$l = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx . \blacktriangleleft$$

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение. Имеем

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{235}{27}.$$

В параметрическом виде. Пусть уравнение кривой задано параметрическими уравнениями

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$

где $t \in [t_1; t_2]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t) \ne 0 \quad \forall t \in [t_1; t_2]$.

Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$, предварительно выполнив замену переменной: $x = x(t)$. Тогда $dx = x'(t)dt$ и $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Подставляя в формулу дины дуги, получим:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'(t)dt$$

или $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$.

Если пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $t_1 \le t \le t_2$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина дуги этой кривой определяется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

Пример. Вычислить длину астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

если $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. В силу симметричности астроиды относительно осей ее длина l равна

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \begin{bmatrix} x' = -3a\cos^2 t\sin t, \\ y' = 3a\cos t\sin^2 t \end{bmatrix} =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a\ .$$

В полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ $\forall\varphi \in [\alpha;\beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что $r = r(\varphi)$, получаем

$$\left.\begin{aligned} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\},\ \forall\varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой.

Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$\left.\begin{aligned} x_\varphi' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y_\varphi' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 = r^2 + (r')^2$

Следовательно, $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$.

Пример. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0 \le \varphi \le 2\pi$. Поэтому

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,d\varphi =$$

$$= a\left(\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right).$$

Площадь плоской фигуры

http://mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html

Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции и объем тела вращения. (18 вопрос)

Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции. В пункте 1.1 была получена формула для вычисления площади криволинейной трапеции (рис. 2.5), ограниченной сверху графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx \ . \qquad (2.7)$$

Если $f(x) \le 0$ для $\forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le 0$ и тогда $S = -\int_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим сложную криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x = a,\ x = b,\quad y = f(x), y = g(x)$, $\left(f(x) \ge g(x) \forall x \in [a,b]\right)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ (рис. 2.6).

Тогда площадь S будет равна

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx \ . \qquad (2.8)$$

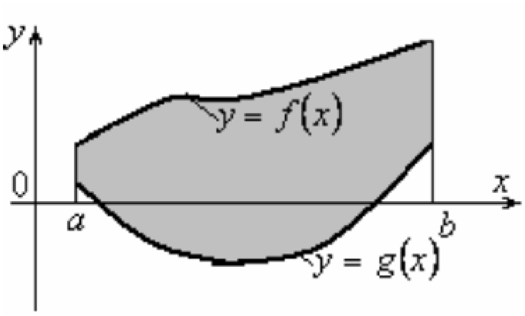


Рис. 2.6

Если верхняя граница $\overset{\cup}{AB}$ криволинейной трапеции задана *параметрически*:

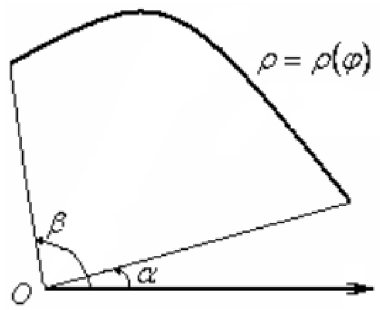


Рис. 2.7

$$\overset{\cup}{AB} : \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \ t \in [\alpha, \beta],\ x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b ,$$

функция $y(t)$ непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha, \beta]$, функция $x(t)$ имеет на этом отрезке непрерывную производную, тогда

$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \ . \qquad (2.9)$$

Площадь криволинейного сектора. Рассмотрим полярную систему координат на плоскости. *Криволинейным сектором* называется часть плоскости, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 2.7).

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi . \quad (2.10)$$

Пример 2.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$.

Решение. Изобразим кривые на плоскости *Oxy* (рис. 2.8).

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3, \\ y = 3x - 1 \end{cases}$, находим координаты точек пересечения кривых $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Используя формулу (2.8), получаем:

$$S = \int_1^4 \left(3x - 1 - \left(x^2 - 2x + 3\right)\right)dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 5x - 4\right)dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^4 + 5\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

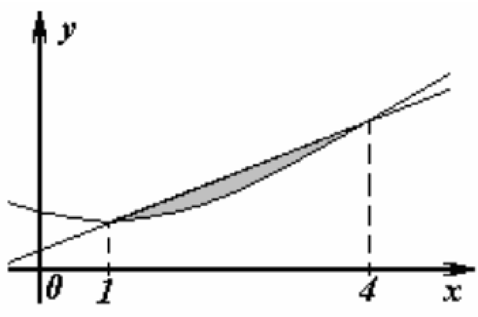


Рис. 2.8

Пример 2.5. Найти площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса: $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ (рис. 2.9). Учитывая симметрию фигуры, вычислим площадь заштрихованной криволинейной трапеции. По формуле (2.9), учитывая, что при $x = 0$ имеем $t = \frac{\pi}{2}$, а при $x = a$ имеем $t = 0$, получаем

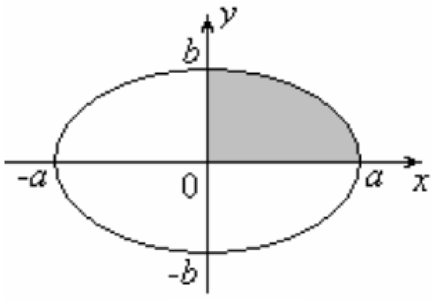


Рис. 2.9

$$S_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin t\,(b\cos t)'\,dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

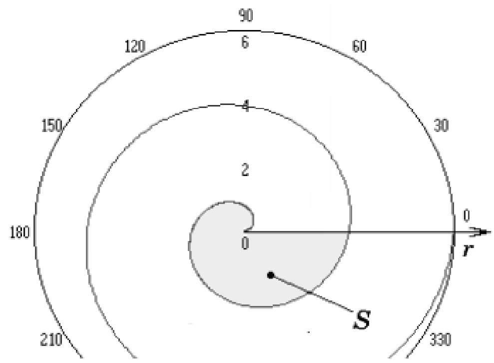
Тогда площадь всей фигуры $S = 4\cdot\frac{\pi ab}{4} = \pi ab$ (ед. кв.).

Пример 2.6. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, $a > 0$ (рис. 2.10).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор. Применяем формулу (2.10)

$$S = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2\,d\varphi\ ,$$

$$S = \frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2 \text{ (кв. ед.).}$$



Объем тела вращения

Вычисление объёмов тела.

Вычисление объёмов методом параллельных сечений. Пусть тело T заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, известна площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью $x = \text{const}$, функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда объём V тела T (рис. 2.12) равен

$$V = \int_a^b S(x)dx\,. \qquad (2.14)$$

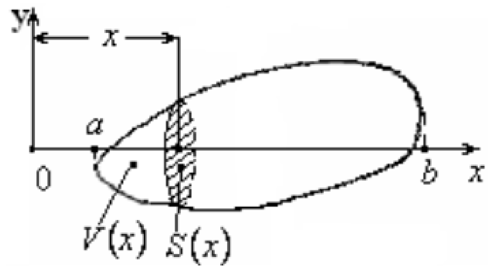


Рис. 2.12

Вычисление объёмов тел вращения. В случае, когда тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox (рис. 2.13), сечением тела вращения плоскостью $x = \text{const}$ будет круг радиуса $f(x)$, поэтому

$$S(x) = \pi f^2(x),$$

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx\,. \qquad (2.15)$$

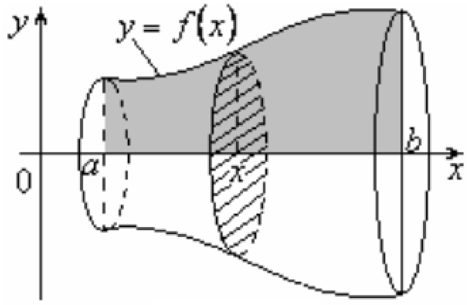


Рис. 2.13

Пример 2.10. Цилиндр радиуса R пересечён плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Методом параллельных сечений найти объём отсечённой части.

Решение. Методом сечений объём тела вычисляется по формуле (2.14).

Направим ось Ox вдоль того диаметра основания, по которому секущая плоскость пересекает цилиндр.

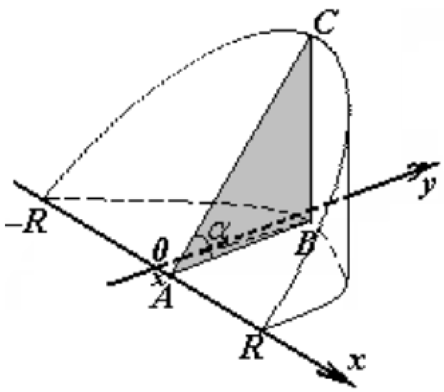
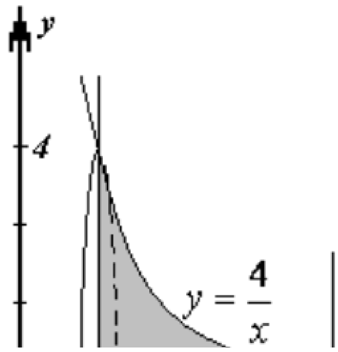


Рис. 2.14



Рассмотрим сечение ABC тела плоскостью $x = \text{const}$. Площадь этого сечения равна

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Тогда

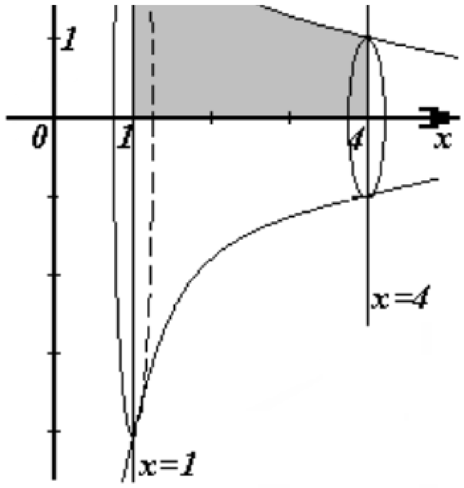


Рис. 2.15

$$V = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha dx =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\int_{0}^{R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \operatorname{tg}\alpha\cdot\left(R^2\, x\Big|_0^R - \frac{x^3}{3}\Big|_0^R\right) =$$

$$= \frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha \text{ (куб.ед.).}$$

Пример 2.11. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4,\ x = 1,\quad x = 4,\ y = 0$.

Решение. Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox , то объём тела вращения вычисляется по формуле (2.15).

В нашем случае $y = \dfrac{4}{x}$ и

$$V = \pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4\frac{dx}{x^2} = 16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 = 12\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример приложения определённого интеграла в механике.

Работа переменной силы. Работа, произведённая при перемещении материальной точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ $(a < b)$ по прямой линии под действием силы F, направленной параллельно перемещению, вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(s)ds\,. \tag{2.16}$$

Здесь сила $F(s)$ является непрерывной функцией от пройденного пути s.

Пример 5.12. Какую работу (Дж) нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1Н она растянется на 1 см?

Решение. Согласно закону Гука, сила растяжения пружины на x ед. длины равна $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Коэффициент пропорциональности найдём из условия: если $x = 0{,}01$ м, то $F = 1$ Н $\Rightarrow k = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$. Итак $F = 100x$. Тогда, используя формулу (2.16), получим

$$A = \int_0^{0,04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0,04} = 0{,}08 \text{ (Дж).}$$

Несобственный интеграл первого рода (20 вопрос)

1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $I(b)$, зависящий от верхнего предела интегрирования:

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например

площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=f(x)\geq 0$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью абсцисс. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования ($b\to+\infty$). При этом возможны два случая: либо $I(b)$ при $b\to+\infty$ имеет предел, либо не имеет.

Определение 1. ***Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом*** интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a;\infty)$ называется предел $I(b)$ при $b\to+\infty$:

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$.

Определение 2. ***Несобственным интегралом с бесконечным нижним пределом*** интегрирования, от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;b]$ называется предел $I(a)$ при $a\to-\infty$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ называется ***сходящимся***, если этот предел не существует, то – ***расходящимся***.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$, обозначаемый $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, предварительно представляют в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{\infty} f(x)dx,\ c \in (-\infty;\infty).$$

Тогда по определению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

причем этот несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется ***расходящимся***.

Интегралы $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются также ***несобственными интегралами первого рода.***

С **геометрической** точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S (рис.1).

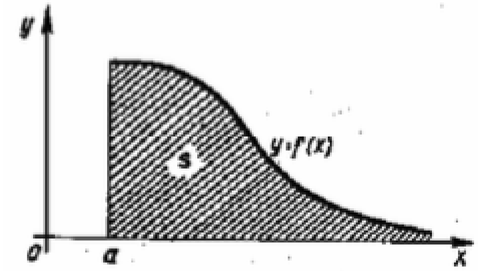


Рис.1.

Несобственный интеграл второго рода (21 вопрос)

2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (второго рода).

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т.е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$: существует интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, зависящий от переменного верхнего предела интегрирования.

Определение 4. ***Несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется предел интеграла $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Аналогично если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=a$.

Определение 5. ***Несобственным интегралом второго рода*** от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $(a;b]$ и имеющей бесконечный разрыв в точке называется предел интеграла $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ при $\varepsilon\to 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то, пользуясь свойством аддитивности определенного интеграла, данный интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

a a c a $c+\varepsilon_2$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы от разрывной функции в точках a, b и c называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися***.

С **геометрической** точки зрения сходящийся несобственный интеграл второго рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ $x=b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Oy при $x\to b-0$ ($x\to a+0, x\to c\pm 0$), имеет конечную площадь S (Рис.2, *а* – *в* соответственно).

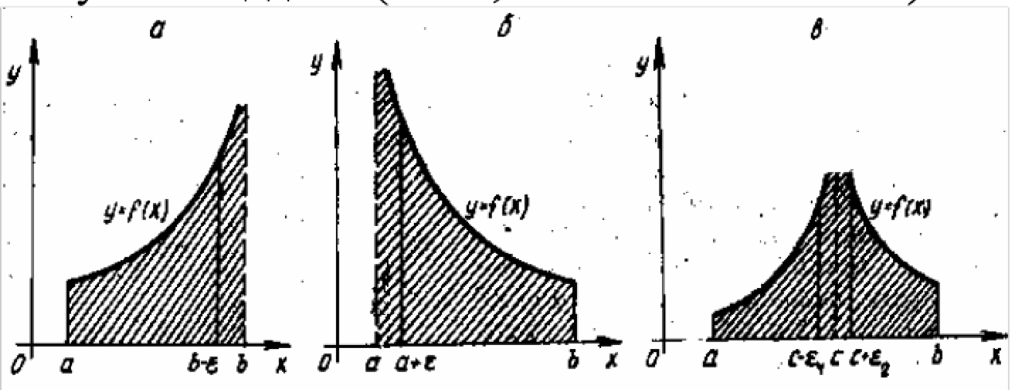


Рис.2.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Решение. При $p=1$ имеем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln 1 - \ln\varepsilon) = +\infty .$$

При $p\neq 1$ имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^1 x^{-p}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, \text{ если } p<1, \\ +\infty, \text{ если } p>1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\geq 1$.

Признаки сравнения. Понятие абсолютной сходимости несобственного интеграла (22 Вопрос)

Признаки сравнения для несобственных интегралов

Признаки сравнения используются для определения сходимости несобственных интегралов первого или второго рода. Они основаны на сравнении исследуемого интеграла с другим, сходимость которого известна.

Признаки сравнения

Без доказательства.

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть на промежутке* $[a;b)$ *определены две неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, *причем* $\forall x \in [a;b)$ *справедливо* $0 \le f(x) \le g(x)$. *Тогда*

1) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int_a^b f(x)dx$,

2) из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_a^b g(x)dx$.

► Для любого $\eta \in [a;b)$ имеем $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Случай 1. Если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ сходится, то согласно лемме 1 интегралы $\int_a^\eta g(x)dx$, $\eta \in [a;b)$, ограничены сверху. Значит, и интегралы $\int_a^\eta f(x)dx$ также ограничены сверху. По лемме 1 интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

Случай 2. Если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится, то в силу доказанного 1) интеграл $\int_a^b g(x)dx$ не может сходится. Если бы он сходился, то и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ также сходился бы. Значит, интеграл $\int_a^b g(x)dx$ расходится. ◄

Следствие 1 (предельный признак сравнения). *Пусть на промежутке* $[a;b)$ *определены две неотрицательные функции* *промежутке* $[a;b)$ *определены две неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, *причем* $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \ne 0$, *и существует конечный предел*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0\,.$$

Тогда 1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходится,*

2) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *расходится,*

3) если $\lim\limits_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *то интегралы* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *и* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Без доказательства.

Примеры. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$, 2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Решение. 1. Сравним интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$. Поскольку $\ln x = \ln(1+(x-1)) \sim x-1$ при $x \to 1$, то имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} = 1\,.$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ расходится.

2. Сравним данный интеграл со сходящимся интегралом

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \ \forall x \in [1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения

следует, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

Понятие абсолютной сходимости

2. Абсолютная сходимость.

Определение 1. Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется ***абсолютно сходящимся*** интегралом, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Теорема 2 (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла). *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство* $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$.

Без доказательства.

Теорема 3. *Если несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится, то он сходится.*

► Если несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то по теореме 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое η, что для всех η_1 и η_2, удовлетворяющих условию $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$.

Тогда

$$\left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)dx\right| < \left|\int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|dx\right| < \varepsilon .$$

В силу критерия Коши для сходимости интеграла, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится. ◄

Замечание. Обратное верно не всегда.

Пример. Исследовать на сходимость интегралы 1) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$,

2) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$.

Решение. 1. Имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\cos x)}{x} = -\left.\frac{\cos x}{x}\right|_1^{\infty} + \int\limits_1^{+\infty} \cos x d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= \cos 1 - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Поскольку $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл

$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ сходится.

2. Из неравенства

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta > 1$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{1}^{\eta} \frac{|\sin x| dx}{x} \geq \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{\eta} \frac{\cos 2x dx}{x}.$$

Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{d(\sin 2x)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Bigg|_{1}^{\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$$

и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ сходится, поскольку $\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходящийся, $\alpha = 2 > 1$.

Значит, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$ расходится.

Признак Абеля и признак Дирихле сходимости несобственных интегралов. (23 вопрос)

Признак Абеля

3. Признаки Дирихле и Абеля.

Теорема 4 (признак Дирихле). *Пусть на полуоси* $x \geq a$

1)функция $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную,*

2)функция $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и*

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$, $p > 1$.

Решение. Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 1$, убывает при $x \to +\infty$, т.е. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. Согласно признаку Дирихле интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится.

Признак Дирихле

Теорема 5 (признак Абеля). *Пусть на полуоси $x \geq a$*

1)функция $f(x)$ непрерывна и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится,

2)функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна.

Тогда интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$, $p > 1$.

Решение. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$, $p > 1$, сходится, а функция $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Пространства R^n и множества в них. Функции нескольких переменных. (24 вопрос)

Определение пространства R^n

Определение 1. ***n-мерным арифметическим точечным пространством*** называется множество всех упорядоченных наборов ($x_1; x_2; ...; x_n$) действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\boldsymbol{R}^n$, а его элементы – ***точками*** или ***векторами*** пространства $\boldsymbol{R}^n$ (n-мерными точками или n-мерными векторами). Числа x_1, x_2, ..., x_n называются ***координатами*** точки (вектора) ($x_1; x_2; ...; x_n$).

Точки пространства $\boldsymbol{R}^n$ обозначаются $M(x_1; x_2; ...; x_n)$ или $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется ***началом координат***. Для n-мерного пространства (n – произвольное) вводится понятие расстояния между двумя точками.

Определение 2. ***Расстоянием*** (***метрикой***) $\rho(x, x')$ между двумя точками $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n')$ n-мерного пространства называется число

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + ... + (x_n - x_n')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2}.$$

Расстояние $\rho(x; x')$ между двумя точками $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n')$ n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ обладает **свойствами**:

1) *рефлективность*: $\rho(x; x') = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x'$;

2) *симметричность*: $\rho(x; x') = \rho(x'; x)$;

3) *транзитивность*: $\rho(x; x'') \le \rho(x; x') + \rho(x'; x'')$.

Если положить $n = 1$, то получается формула расстояния между двумя точками на прямой (в пространстве $\boldsymbol{R}^1$): $\rho(x, x') = |x_1 - x_1'|$, при $n = 2$ – формула для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости (в пространстве $\boldsymbol{R}^2$):

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2},$$

при $n = 3$ – в пространстве $\boldsymbol{R}^3$:

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2}.$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называют ***метрическим пространством*** $\boldsymbol{R}^n$ ***(евклидовым пространством)***.

При $n = 1,2,3$ между точками пространства $\boldsymbol{R}^n$ и числовой прямой $\boldsymbol{R}$ (координатной плоскостью $\boldsymbol{R}^2$, координатным пространством $\boldsymbol{R}^3$) установлено взаимно однозначное соответствие, которое позволяет изучать реальные геометрические объекты

Подмножетсва пространсва R^n

n-мерный замкнутый шар с радиусом r и центром в точке x_0

3. Основные подмножества пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Определение 6. Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in \boldsymbol{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n'^0)$ не превосходит положительного числа r, называется ***n-мерным замкнутым шаром радиусом r с центром в точке*** x_0.

Обозначается:

$$B_{[x_0, r]} = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \middle| (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_n - x_n^0)^2 \le r^2 \right\},$$

$$\text{или } B_{[x_0, r]} = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \middle| \rho(x, x_0) \le r \right\}.$$

В частности,

1) при $n = 1$ имеем

$$B_{[x_0, r]} = \left\{ x \middle| \, |x - x_0| \le r \right\} = \{ x_0 - r \le x \le x_0 + r \},$$

т.е. ***одномерный*** замкнутый шар – это ***отрезок*** длиной $2r$ с центром в точке x_0;

2) при $n = 2$ имеем

$$B_{[x_0, y_0; r]} = \left\{ (x, y) \middle| (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r^2 \right\},$$

т.е. это множество является ***кругом*** радиусом r с центром в точке $P_0(x_0; y_0)$;

3) при $n = 3$

$$B_{[M_0, r]} = \left\{ M(x, y, z) \middle| (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \le r^2 \right\},$$

т.е. это множество является ***шаром*** радиуса r с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Открытый n-мерный шар с центром в точке x_0

Определение 7. ***Открытым n-мерным шаром с центром в точке*** x_0 называется множество точек x пространства $\boldsymbol{R}^n$, расстояние от каждой из которых до точки x_0 меньше r: $\rho(x, x_0) < r$.

Обозначается: $B_{(M_0, r)} = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \middle| \rho(x, x_0) < r \right\}$.

n-мерная сфера радиусом r с центром в точке x_0

Определение 8. Множество точек $x \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) = r$, называется ***n-мерной сферой радиусом r с центром в точке x_0***.

Обозначается: $\left\{x \in \boldsymbol{R}^n \middle| \rho(x, x_0) = r\right\}$

$\epsilon - окрестность$

Обозначается: $\left\{x \in \boldsymbol{R}^n \middle| \rho(x, x_0) = r\right\}$

Определение 9. ***ε-окрестностью*** точки $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$ называется открытый n-мерный шар радиусом ε с центром в точке x_0.

Обозначается:

$$U(\varepsilon, x_0) = \left\{x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon\right\}.$$

В частности,

1) при $n = 1$ ε-окрестность $U(\varepsilon, x_0) = \left\{x \middle| x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\right\}$, т.е. окрестностью точки x_0 является интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$;

2) при $n = 2$ ε-окрестность

$$U(\varepsilon, M_0) = \left\{M(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\right\},$$

т.е. ε-окрестностью точки M_0 будет множество точек открытого круга радиусом ε с центром в этой точке.

n-мерный замкнутый параллелепипед с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$

Определение 10. Множество точек $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\left|x_1 - x_1^0\right| \le d_1$, $\left|x_2 - x_2^0\right| \le d_2$, …, $\left|x_n - x_n^0\right| \le d_n$, называется ***$n$-мерным замкнутым параллелепипедом с центром в точке*** $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0\right)$.

Обозначается:

$$P_{[d_1, d_2, \ldots, d_n; x_0]} =$$

$$= \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| \le d_1, \left|x_2 - x_2^0\right| \le d_2, \ldots, \left|x_n - x_2^0\right| \le d_n\right\}$$

Аналогично открытому n-мерному параллелепипеду определяется ***открытый*** n-мерный параллелепипед.

n-мерный открытым кубом с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$

Определение 11. Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_1 - x_1^0| \le d$, $|x_2 - x_2^0| \le d$, ..., $|x_n - x_n^0| \le d$, называется ***n*-мерным открытым кубом с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.**

Обозначается:

$$P_{(d;x_0)} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, |x_1 - x_1^0| < d, |x_2 - x_2^0| < d, ..., |x_n - x_2^0| < d \right\}.$$

Прямоугольная окрестность

Определение 12. Всякий n-мерный открытый параллелепипед

$$P_{(d_1, d_2, ..., d_n; x_0)} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, |x_1 - x_1^0| < d_1, |x_2 - x_2^0| < d_2, ..., |x_n - x_2^0| < d_n \right\}$$

называется ***прямоугольной окрестностью*** точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Лемма 1. *Любая ε-окрестность $U(\varepsilon, x_0)$ точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ содержит некоторую прямоугольную окрестность $P_{[d_1, d_2, ..., d_n; x_0]}$ и наоборот.*

Без доказательства.

Проколатая ϵ окрестность

Определение 13. ***Проколотой ε-окрестностью*** точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ радиусом ε называется множество точек $x \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Обозначается:

$$\mathring{U}(\varepsilon, x_0) = \left\{x \in \boldsymbol{R}^n \middle| 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\right\}.$$

Из определения проколотой окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ следует, что эта окрестность состоит из множества точек открытого n-мерного шара, исключая его центр.

Функции нескольких переменных

Определение

1. Понятие функции многих переменных.

Пусть $G \subset \boldsymbol{R}^n$ – произвольное множество точек n-мерного евклидова пространства.

Определение 1. Если правило f каждой точке $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве G задана ***числовая функция (***или ***отображение) f от n переменных***.

Множество G называется ***областью определения***, $D(f) = G$, а множество $E = \{u \in \boldsymbol{R} \mid u = f(x), x \in G\}$ – ***множеством значений функции*** f.

Обозначается: $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$; $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В частном случае при $n = 2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Частное значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$ и $y = y_0$ обозначается $f(x_0, y_0)$, $f(M_0)$, $z\Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или $z\Big|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma = \left\{(x; y; z) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z = f(x, y)\right\},$$

которое есть некоторая поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Предел и непрерывность функции нескольких переменных. (25 вопрос)

Предел функции нескольких переменных

2. Определение предела функции многих переменных.

Пусть функция $z = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, определена в окре-

стности $U(\varepsilon, x_0)$.

О п р е д е л е н и е 2 (по Гейне). Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m)$, $m = \overline{1, \infty}$, $x_m \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$, соответствующая последовательность $(f(x_m))_{m=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A.

Символическая запись: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \forall (x_m)_{m=1}^{\infty},\ x_m \in U(\varepsilon, x_0),\ \lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \quad \lim_{k \to \infty} f(x_m) = f(x_0).$$

Для записи предела функции можно использовать обозначение:

$$A = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Как и в случае функции одной переменной, данное определение по Гейне предела функции двух переменных на языке последовательностей эквивалентно определению предела функции по Коши.

О п р е д е л е н и е 3 (по Коши). Число A называется ***пределом*** функции $z = f(x)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0\, \exists \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) : \forall M \in \overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Эквивалентность двух определений предела доказывается так же, как и для функции одной переменной.

Если функция двух переменных $z = f(x; y)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}(\varepsilon; (x_0, y_0))$ и число A является пределом при $(x, y) \to (x_0, y_0)$, то

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$$

называется ***двойным пределом***.

Непрерывность функции нескольких переменных.

4. Непрерывность функции многих переменных.

Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется с помощью предела.

Определение 4. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называется ***непрерывной*** в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, если выполнены следующие три условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 одно из указанных трех условий не выполняется, то она является точкой разрыва функции $u = f(x)$.

Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва. Для функции $u = f(x, y, z)$ трех независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Примеры. Найти точки разрыва функций:

1) $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$; 2) $z = \dfrac{1}{x - y}$; 3) $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

Решение. 1. Данная функция определена на $\boldsymbol{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции.

2. Данная функция определена для любых x, y, таких, что $x \neq y$. Следовательно, прямая $x = y$ является линией разрыва функции.

3. Функция $u = \dfrac{2}{\ldots}$ определена для любых x, y,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. Сфера с центром в начале координат и радиусом 3 является поверхностью разрыва функции.

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). *Пусть функции* $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0 = (t_1^0; t_2^0; ...; t_n^0) \in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0 = (\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0); ...; \varphi_n(t_0)) \in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t) = f(\varphi_1(t); \varphi_2(t); ...; \varphi_n(t))$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

Без доказательства.

Частные производные функций нескольких переменных. (26 вопрос)

2. Частные производные.

Напоминание. Производная функции $y = f(x)$ одной переменной характеризует скорость изменения функции в точке x. В случае двух и нескольких переменных можно говорить о скорости изменения функции в точке только в заданном направлении, так как скорость изменения функции нескольких переменных в точке по различным направлениям может быть не одинакова.

Определение 3. ***Частной производной*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции

$\Delta_{x1} f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Обозначается: $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'_{x_1}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

Примеры.

1. Найти частные производные функций

1) $z = x^2 + \sin\left(x + y^2\right)$, 2) $u = xy + \ln\left(x - y - z\right)$,

3) $u = xy + \sin^2\left(z - xt\right)$.

Решение.

1. Частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos\left(x + y^2\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \cos\left(x + y^2\right).$$

2. Частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{x - y - z} = \frac{xy - y^2 - yz + 1}{x - y - z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{1}{x - y - z} = \frac{x^2 - xy - xz - 1}{x - y - z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{x - y - z}.$$

3. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2\sin\left(z - xt\right)\cos\left(z - xt\right)\left(-t\right) = y - t\sin 2\left(z - xt\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\sin\left(z - xt\right)\cos\left(z - xt\right) = \sin 2\left(z - xt\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\sin\left(z - xt\right)\cos\left(z - xt\right)\left(-x\right) = -x\sin 2\left(z - xt\right).$$

Дифференциал функции нескольких переменных. (27 вопрос)

Дифференциал функции нескольких переменных

2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его геометрический смысл.

Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции.

Определение 3. Если функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то главная линейная относительно приращения аргументов часть ее полного приращения называется ***полным дифференциалом*** функции.

Обозначается:

$$dz\big|_{P(x_0;y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

или

$$df(x_0;y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

Пример. Если $z = x^2 y$, то $dz = 2xy\Delta x + x^2\Delta y \quad \forall P(x;y) \in \boldsymbol{R}^2$.

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются ***дифференциалами независимых переменных*** x и y и *обозначаются* соответственно dx и dy.

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$ называются ***частными дифференциалами*** функции $z = f(x;y)$.

Обозначаются: $d_x z$ и $d_y z$.

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z .$$

Геометрический смысл

Геометрический смысл дифференциала. Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Поэтому полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ представляет собой отрезок AB.

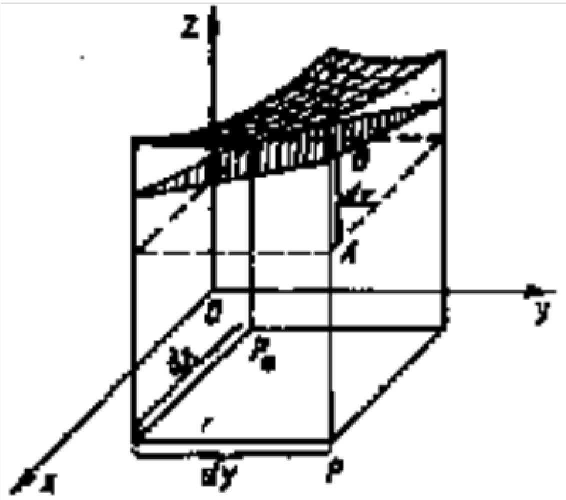


Рис.1.

Замечание. Определение дифференцируемости функции и ее дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + o(\rho),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n .$$

$$\partial x_1 \qquad \partial x_2 \qquad \qquad \partial x_n$$

Производные сложных функций. Инвариантность формы полного дифференциала.

Производные сложных функций

4. Дифференцирование сложной функции.

Пусть $z = f(u;v)$ – функция двух переменных u и v, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x и y, т.е. $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Тогда $z = f(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$ – сложная функция двух независимых переменных x и y, а переменные u и v – промежуточные переменные.

Теорема 4. *Если функция $z = f(u;v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0;v_0)$, а функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ дифференцируемы в точке $P_0(x_0;y_0)$, то сложная функция $z = F(x;y)$, где*

$u = u(x,y)$; $v = v(x,y)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, причем ее частные производные вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

►Докажем первую из формул. В точке $P_0(x_0;y_0)$ переменной x дадим приращение Δx, сохранив y_0 постоянной. Тогда функции u и v получат частные приращения $\Delta_x u$, $\Delta_x v$, а функция z – полное приращение Δz (так как $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ – приращения по обоим промежуточным аргументам). Функция $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0;v_0)$, поэтому ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha\Delta_x u + \beta\Delta_x v.$$

Разделим данное равенство на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\alpha\Delta_x u + \frac{1}{\Delta x}\beta\Delta_x v.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ в силу непрерывности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\Delta x}\alpha\,\Delta_x u=\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x},\ \frac{1}{\Delta x}\beta\,\Delta_x v=\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}=0$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично доказывается $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$. ◄

Замечание. Для функции трех переменных $w = f(u, v, t)$, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x, y, z т.е. $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $t = t(x, y, z)$ и $w = f(u(x, y, z), v(x, y, z), t(x, y, z)) = F(x, y, z)$ частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Аналогично для функции n, $n > 3$, переменных.

Частные случаи задания сложной функции $w = f(u, v, t)$.

1. Пусть $w = f(u, v, t)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $t = t(x, y)$.

Тогда $w = f(u(x, y), v(x, y), t(x, y)) = F(x, y)$, является сложной функцией только двух аргументов, и, значит, имеем две частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$.

2. Пусть $z = f(x, y, u)$, $y = y(x)$, $u = u(x)$.

Тогда $z = f(x, y(x), u(x)) = F(x)$ – функция одной переменной x. Найдем z'_x по общей формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как $y = y(x)$ и $u = u(x)$ – функции только одной переменной x, то их частные производные обращаются в обыкновенные производные. Кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}.$$

Производная $\dfrac{dz}{dx}$ сложной функции $z = f(x, y(x), u(x))$ называется ***полной производной***.

Между частной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полной $\dfrac{dz}{dx}$ производными имеется существенное различие. Полная производная $\dfrac{dz}{dx}$ – это обыкновенная производная от z как функции x, а $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от z по переменной x, входящей в выражение функции непосредственно, т.е. при условии, что другие переменные (y и u зависящие от x, при дифференцировании остаются постоянными).

Примеры.

1. Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(u,v) = u \cdot \ln v$, где $u = 3x - y$; $v = x^2 + y^2$.

Решение. Имеем $u'_x = 3$, $v'_x = 2x$, $u'_y = -1$, $v'_y = 2y$, $f'_u = \ln v$, $f'_v = \dfrac{u}{v}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 3\ln v + 2x\frac{u}{v} = 3\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2x\frac{3x - y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\ln v + 2y\frac{u}{v} = -\ln\left(x^2 + y^2\right) + 2y\frac{3x - y}{x^2 + y^2}.$$

2. Найти полную производную сложной функции $z = x\sin v\cos w$, где $v = \ln\left(x^2 + 1\right)$; $w = -\sqrt{1 - x^2}$.

Решение. По формуле имеем

$$\frac{dz}{dx} = \sin v\cos w + x\cos v\cos w\frac{2x}{x^2 + 1} - x\sin v\sin w\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Инвариантность формы полного дифференциал

4. Инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных.

Найдем полный дифференциал сложной функции

$z = f(u(x,y), v(x,y))$ в точке $P_0(x_0; y_0)$. Подставим выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

в формулу полного дифференциала сложной функции двух переменных $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Получим

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

или

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = dv$, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Видно, что форма записи полного дифференциала функции двух переменных не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными, или функциями других независимых переменных. В этом и заключается ***инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных***.

Частные производные высших порядков. (29 вопрос)

1. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $P(x; y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются ***частными производными первого порядка***. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$.

Обозначаются:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, z''_{xx} – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f''_{xy}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, z''_{xy} – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, z''_{yx} – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, z''_{yy} – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Производные второго порядка можно снова дифференциро-

вать как по x, так и по y. В результате получим восемь ***частных производных третьего порядка***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-

го порядка называется ***частнои произвоонои n-го поряока*** и обозначается $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$ называются ***смешанными производными***.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right),\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\boldsymbol{R}^2$.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Видно, что смешанные частные производные второго порядка этой функции равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4^2 x\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

вать как по x, так и по y. В результате получим восемь ***частных производных третьего порядка***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***частной производной n-го порядка*** и обозначается $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ называются ***смешанными производными***.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right), \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\boldsymbol{R}^2$.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right), \ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Видно, что смешанные частные производные второго порядка этой функции равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4^2 x\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

Дифференциалы высших порядков. (30 вопрос)

3. Дифференциалы высших порядков.

Случай 1. Функция $z = f(x;y)$**.** Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$. Придавая x и y приращения $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ можно вычислить полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$

который называют ***дифференциалом первого порядка*** функции $z = f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ если он существует, называется ***дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2z = d(dz).$$

Найдем аналитическое выражение для d^2z, считая dx и dy постоянными:

$$d^2z = d\big(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\big) = d\big(f'_x(x,y)\big)dx + d\big(f'_y(x,y)\big)dy =$$
$$= \big(f''_{xx}(x,y)dx + f''_{yx}(x,y)dy\big)dx + \big(f''_{yx}(x,y)dx + f''_{yy}(x,y)dy\big)dy =$$
$$= f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Поступая аналогично, получаем аналитическое выражение для ***дифференциала третьего порядка*** d^3z **:**

$$d^3z = d\big(d^2z\big) =$$
$$= f'''_{xxx}(x,y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2 + 3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Определение 1. Функция f называется k ***раз непрерывно дифференцируемой*** в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Обозначается: $f \in \mathrm{C}^k_G$.

Замечания. 1. Аналитические выражения для dz, d^2z и d^3z кратко записывают в виде следующих символических формул:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Тогда и для любого n справедливо соотношение

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

2. Если $z = f(x, y)$ – дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, можно получить новые выражения для $d^2z = d(dz)$, $d^3z = d(d^2z)$, …. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Пример. Найти dz и d^2z, если $z = \ln(x-y) + \sqrt{xy}$.

Решение. Используем формулу $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Так как

$$z'_x = \frac{1}{x-y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$

$$z'_y = \frac{-1}{x-y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y},$$

то

$$dz = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x-y}\right)dy.$$

Для определения d^2z вычислим предварительно частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{1}{(x-y)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}},$$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{1}{(x-y)^2},$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}.$$

Тогда

$$d^2z = \left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2 + 2\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy -$$

$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

Случай 2. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Пусть задана функция многих переменных $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$. Производные порядка выше первого определяются по формуле

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} ... \partial x_{i_k}}\right).$$

Дифференциал

$$du(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n,\ x \in G,$$

есть функция $2n$ переменных, а именно $x_1, x_2, ..., x_n$ и dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Если фиксировать переменные dx_1, dx_2, ..., dx_n, то дифференциал $du(x)$ является функцией x, имеющей в области G непрерывные частные производные. Следовательно, $du(x)$ как функция x имеет в каждой точке $x \in G$ дифференциал $d(du)$.

Обозначим приращения независимых переменных δx_1, δx_2, ..., δx_n. Тогда

$$d(du) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(du)}{\partial x_k}\delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} dx_i \delta x_k \ .$$

Выражение $d(du)$ есть билинейная форма относительно приращений δx_1, δx_2, ..., δx_n. Полагая

$$dx_1 = \delta x_1,\ dx_2 = \delta x_2,\ \dots,\ dx_n = \delta x_n$$

получаем квадратичную форму, которая называется ***вторым дифференциалом*** функции $u = f(x)$ в точке x.

Обозначается: $d^2 u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} dx_i dx_k$.

Аналогично, предполагая, что все частные производные третьего порядка непрерывны, определяется третий дифференциал функции $u = f(x)$:

$$d^3 u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \ \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} dx_i dx_k dx_j \ .$$

По индукции определяется дифференциал m-го порядка в предположении, что все частные производные m-го порядка непрерывны в точке x. Если дифференциал $d^{m-1}u$ вычислен как однородная форма порядка $m-1$ относительно dx_1, dx_2, ..., dx_n с коэффициентами, являющимися функциями x, то вычисляя первый дифференциал от $d^{m-1}u$ и полагая затем $dx_i = \delta x_i$, $i = 1,2,...,n$, получим:

$$d^m u = \sum_{k=1}^{n} \dots \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} dx_{i_1} \dots dx_{i_m} \ .$$