Oefeningen Wiskunde voor Systemen

KU Leuven - ESAT

14 december 2025

Inhoudsopgave

1 Formularium

Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het "Signals and Systems" formularium. In de oefeningen wordt hiernaar verwezen.

1.1 Laplace transform (LT)

1.1 Definitie en eigenschappen

Definitie:	$f(t)\,u(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$
translatie in s :	$f(t)e^{-at}\,u(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s+a)$
translatie in t :	$f(t-a)\,u(t-a)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-as}F(s)$
afgeleide in t :	$\frac{d}{dt}\big(f(t)u(t)\big)$	$\longleftrightarrow$	$sF(s) - f(0^+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)u(t)\big)$	$\longleftrightarrow$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
afgeleide in s :	$t\,f(t)\,u(t)$	$\longleftrightarrow$	$-\frac{d}{ds}F(s)$
	$t^n f(t)\,u(t)$	$\longleftrightarrow$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$
convolutie:	$\big(f*g\big)(t)\,u(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s)\,G(s)$
schaling:	$f(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a}F\Big(\frac{s}{a}\Big)$

Initial value theorem:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Final value theorem:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad \text{(onder de gebruikelijke poolvoorwaarden).}$$

Link met FTC:

$$\mathrm{LT}(s = j\omega) = \mathrm{FTC}(j\omega) \quad \text{als } x(t) \text{ absoluut integreerbaar is.}$$

1.2 Useful Laplace pairs

$e^{-at}u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s+a}$	$t^n u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(at)u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\sin(at)u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1	$u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
$t\cos(at)u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin(at)u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$

1.2 Fourier transform (FTC)

2.1 Basic formulae

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

convolution theorem (tijd):	$f(t) * g(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega)\,G(\omega)$
convolution theorem (freq.):	$f(t)\,g(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}\,(F * G)(\omega)$
translatie:	$x(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
symmetry (reëel x):			$X(-\omega) = X^*(\omega)$
time symmetry (reëel x):	$x(-t)$	$\longleftrightarrow$	$X(-\omega) = X^*(\omega)$
link FS–FTC:			$X(k\omega_0) = T\,c_k \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$

2.2 Useful Fourier pairs

We gebruiken $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Block:	$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-L/2, L/2] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) = AL\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right)$
Sinc:	$x(t) = A\operatorname{sinc}(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_0}, & \lvert\omega\rvert < \omega_0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$
Impuls:	$\delta(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j\omega t_0}$
Complex expon.:	$e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$
Cosine:	$\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$\pi\,[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Sine:	$\sin(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$j\pi\,[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
Delta train:	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

1.3 Fourier series (FS)

3.1 Cartesian form

Voor periode T met $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right].$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt, \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\,dt, \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\,dt.$$

3.2 Complex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt.$$

symmetry (reëel f): $c_{-k} = c_k^*$.
Spectrum:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\delta(\omega - k\omega_0).$$

3.3 Links between cartesian and complex form

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \qquad c_k^* = \frac{a_k + jb_k}{2}.$$

$$|c_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \varphi_k = \mathrm{Arctan2}(a_k, -b_k).$$

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\}, \qquad b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\}.$$

2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen

Gegeven een systeem met operator $\mathcal{T}$ gedefinieerd als $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.

Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.

2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit

Een RC-circuit heeft $R = 1000\ \Omega$ en $C = 10\ \mu$F. De ingangsspanning is een stapfunctie $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.

Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning $v_{\text{uit}}(t)$.

(b) Bereken de tijdsconstante τ van het circuit.

(c) Bepaal de uitgangsspanning na 10 ms als $v_{\text{uit}}(0) = 0$ V.

2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval

Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd.

Vraag: Hoeveel milligram blijft over om 14:00 uur?

2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit

Gegeven twee systemen:

- Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
- Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Vraag:

(a) Test beide systemen op homogeniteit (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$.

(b) Test beide systemen op additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$.

(c) Bepaal voor elk systeem of het lineair is.

2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning

Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?

(a) $y(t) = x(t - 2)$

(b) $y(t) = tx(t)$

(c) $y(t) = |x(t)|$

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

Vraag: Motiveer je antwoorden.

2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit

Gegeven het systeem $\mathcal{T}$ met

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + x(t-1).$$

Vraag:

(a) Is het systeem lineair en tijdinvariant?

(b) Is het systeem causaal?

(c) Is het systeem invertibel? Motiveer.

2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)

Beschouw de twee systemen:

$$\text{(S1) } y(t) = 2x(t-1), \qquad \text{(S2) } y(t) = x(t) + u(t).$$

Vraag:

(a) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is.

(b) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdinvariant is.

(c) Is elk systeem causaal? Motiveer kort.

2.8 Oefening 1.8: Analyse van een Kwadratisch Modulatiesysteem (Uitgebreid)

Beschouw een systeem S waarbij de relatie tussen ingang en uitgang wordt gegeven door:

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi t) + x^2(t)$$

Vraag: Onderzoek de lineariteit en tijdsinvariantie van dit systeem.

2.9 Oefening 1.9: Causaliteit van een Integrator met Toekomstblik (Uitgebreid)

Stel een vertraagde input $x_2(t) = x_1(t-\tau)$. De respons van het systeem op deze vertraagde input is:

$$y_2(t) = x_2(t)\cos(2\pi t) + x_2^2(t) = x_1(t-\tau)\cos(2\pi t) + x_1^2(t-\tau)$$

Nu kijken we naar de vertraagde versie van de oorspronkelijke output $y_1(t)$:

$$y_1(t-\tau) = x_1(t-\tau)\cos(2\pi(t-\tau)) + x_1^2(t-\tau)$$

Vergelijking van $y_2(t)$ en $y_1(t-\tau)$ toont een discrepantie in de cosinus-term. In $y_2(t)$ is de cosinus afhankelijk van de absolute tijd t, terwijl in $y_1(t-\tau)$ de cosinus ook verschoven is.

Conclusie: Het systeem is **tijdsvariant**. De aanwezigheid van de expliciete tijdsfunctie $\cos(2\pi t)$ als coëfficiënt zorgt ervoor dat het moment waarop het signaal wordt aangelegd, invloed heeft op hoe het signaal wordt verwerkt.

2.10 Oefening 1.9: Causaliteit van een Integrator met Toekomstblik (Uitgebreid)

Beschouw het systeem gedefinieerd door:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$$

Vraag: Is dit systeem causaal? Is het lineair?

2.11 Oefening 1.10: Differentiaalvergelijking van een Mechanisch Systeem (Uitgebreid)

Situatie: Een massa M beweegt over een oppervlak met wrijvingscoëfficiënt B. De massa is verbonden aan een muur via een veer met constante K en wordt aangedreven door een externe kracht $F(t)$. De wrijving is echter niet lineair, maar evenredig met het kwadraat van de snelheid (luchtweerstand).

Opgave:

1. Stel de differentiaalvergelijking op voor de verplaatsing $y(t)$.
2. Is dit systeem lineair? Zo nee, lineariseer het systeem rond een evenwichtssnelheid v_0.

3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies

Gegeven de signalen $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

Vraag:

bBabcdefghijklmnopqrstuvwxyz) epaal
welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont.
Bereken de waarde van elk signaal op $t = 5$ s.

3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus

Een sinusgolf is gegeven door $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.

Vraag:

(a) Bepaal de amplitude, hoekfrequentie ω, frequentie f, en fasehoek.

(b) Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.

3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie

Gegeven $z(t) = e^{j2\pi t}$.

Vraag:

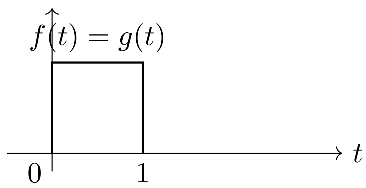
(a) Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formule van Euler.

(b) Bepaal de waarde op $t = 0.25$ s.

3.4 Oefening 2.4: Convolutie

Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = u(t) - u(t-1)$$

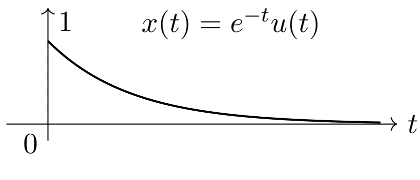


Zie Formularium: convolutie in tijd ↔ product in frequentie in 1.2.

Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets het resultaat.

3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling

Gegeven het signaal $x(t) = e^{-t}u(t)$.



Vraag:

(a) Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$ (tijdsverschuiving).

(b) Bepaal $y_2(t) = x(2t)$ (tijdscompressie).

(c) Bepaal $y_3(t) = 2x(t)$ (amplitude schaling).

(d) Schets alle drie signalen.

3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie

Bepaal de energie van de volgende signalen:

Vraag:

(a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

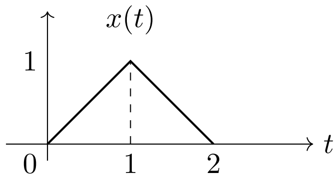
(b) $x(t) = 2\sin(t)u(t)$ over $0 \le t \le \pi$

(c) $x(t) = \text{rect}(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$

3.7 Oefening 2.7: Driehoeksignaal met Stapfuncties

Definieer het signaal

$$x(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + (2-t)\big(u(t-1) - u(t-2)\big).$$



Vraag:

(a) Schrijf $x(t)$ expliciet als stukgewijze functie.

(b) Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$.

(c) Bepaal en schets $x(t-1)$.

3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)

Neem

$$x(t) = u(t) - u(t-2).$$

Vraag:

(a) Schets $x(t)$.

(b) Schrijf $x(t-1)$ en $x(t+1)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

(c) Schrijf $x(2t)$ en $x(-t)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

3.9 Oefening 2.9: Analytische Convolutie van Exponentiële Signalen (Uitgebreid)

Gegeven twee causale signalen:

$$x(t) = e^{-3t}u(t)$$
$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Vraag: Bepaal de convolutie $y(t) = (x * h)(t)$.

3.10 Oefening 2.10: Grafische Convolutie van een Blok en een Zaagtand (Uitgebreid)

Beschouw de volgende signalen:

- $x(t)$: Een rechthoekige puls met amplitude 1 tussen $t = 0$ en $t = 2$. ($x(t) = u(t) - u(t-2)$)
- $h(t)$: Een zaagtandpuls gegeven door $h(t) = t$ voor $0 \leq t \leq 1$, en 0 elders.

Vraag: Bepaal grafisch en analytisch de convolutie $y(t)$.
Beschouw de volgende signalen:

- $x(t)$: Een rechthoekige puls met amplitude 1 tussen $t = 0$ en $t = 2$. ($x(t) = u(t) - u(t-2)$)
- $h(t)$: Een zaagtandpuls gegeven door $h(t) = t$ voor $0 \leq t \leq 1$, en 0 elders.

Vraag: Bepaal grafisch en analytisch de convolutie $y(t)$.

3.11 Oefening 2.11: RMS en Vermogen (Uitgebreid)

Gegeven het signaal:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Vraag: Bereken de RMS-waarde en toon aan dat de faseverschuiving geen invloed heeft op het vermogen.

4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

4.1 Oefening 3.1: Standaard Laplace-paren

Bron: Formularium standaard transformaties.

Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:

Vraag:

(a) $f(t) = 5u(t)$

(b) $f(t) = e^{-3t}u(t)$

(c) $f(t) = t \cdot u(t)$

(d) $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$

(e) $f(t) = e^{-2t}\sin(3t)u(t)$

Zie Formularium: definitie 1.1 en paren 1.1.

4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie met Partieelbreuken

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

Vraag:

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s+2} + \dfrac{5}{s^2+4}$

(b) $G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$ (tip: partieelbreuken)

(c) $H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)^2}$ (tip: dubbele pool)

Zie Formularium: paren 1.1.

4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem

Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:

Vraag:

(a) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$, $y(0) = 2$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 6e^{-2t}u(t)$, $y(0) = 0$

(c) $2\dfrac{dy}{dt} + y = u(t) - u(t-1)$, $y(0) = 1$

Zie Formularium: afgeleide-eigenschap 1.1.

4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem: Karakteristische Wortels

Vraag: Voor elk systeem: bepaal karakteristieke wortels, onderdamping-status, en los op voor $y(t)$.

(i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(ii) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ (kritiek gedempt)

(iii) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ (ondergedempt)

Bonus: Schets $y(t)$ voor alle drie gevallen op dezelfde grafiek en bespreek het gedrag.

4.5 Oefening 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving (Tijddomein)

Vraag:

(a) Gegeven $F(s) = \dfrac{2}{s^2+4}$, bepaal $f(t)$ en vervolgens $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$.

(b) Bepaal de Laplacetransformatie van $x(t) = e^{-3(t-1)}u(t-1)$.

(c) Schets beide $f(t)$ en $g(t)$ op dezelfde grafiek en duid de verschuiving aan.

Zie Formularium: tijdverschuiving in t 1.1.

4.6 Oefening 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd

Bepaal via partieelbreuken en inverse Laplace de volgende:

Vraag:

(a) $F(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ (drie verschillende polen)

(b) $G(s) = \dfrac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)}$ (dubbele pool)

(c) $H(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ (reële en complexe polen)

4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling

Gegeven: $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+4s+3}$

Vraag:

(a) Bepaal $f(0^+)$ met de beginwaardestelling.

(b) Bepaal $\lim_{t\to\infty} f(t)$ met de eindwaardestelling.

(c) Bepaal $f(t)$ expliciet en controleer beide grenzen.

(d) Schets $f(t)$ voor $t \in [0, 10]$ s.

Zie Formularium: begin- en eindwaardestelling 1.1.

Bonus: Voor welke $F(s)$ kan de eindwaardestelling NIET gebruikt worden?

4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t-1)$ (puls), $g(t) = e^{-2t}u(t)$ (exponentieel verval)
Vraag:

(a) Bepaal $F(s)$ en $G(s)$.

(b) Bepaal $Y(s) = F(s) \cdot G(s)$ en vervolgens $y(t) = (f * g)(t)$.

(c) Geef $y(t)$ stukgewijs en schets het resultaat.

(d) Interpreteer fysisch: wat gebeurt er bij $t = 1$?

Zie Formularium: convolutie-eigenschap 1.1.

4.9 Oefening 3.9: Samenvattingsoefening Laplace

Vraag:

(a) Bepaal $\mathcal{L}\{u(t)\}$ en $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}$.

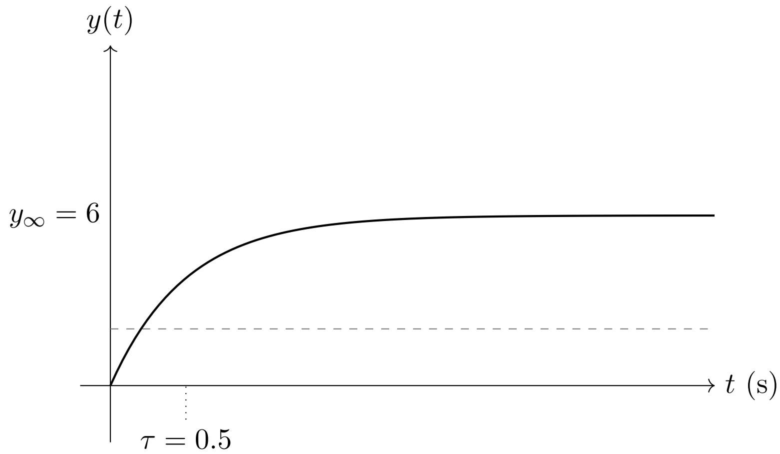
(b) Bepaal $\mathcal{L}\{t\,u(t)\}$ en $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}u(t)\}$.

(c) Bepaal inverse Laplace van $F(s) = \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{4}{s^2+9}$.

(d) Voor $H(s) = \dfrac{s+5}{s^2+6s+13}$, bepaal $h(t)$ (complexe polen!).

4.10 Oefening 3.10: Staprespons van Eerste-Orde Systeem

Gegeven: Systeem $H(s) = \dfrac{K}{\tau s+1}$ met $K = 2$, $\tau = 0.5$ s, en ingangssignaal $x(t) = 3u(t)$.



Vraag:

(a) Bepaal $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$.

(b) Bepaal $y(t)$ en identificeer: steadystate waarde, tijdsconstante, settling time (2%).

(c) Schets $y(t)$ en controleer of deze overeenkomt met de grafiek hierboven.

(d) Op welk moment heeft $y(t)$ 63% van zijn eindwaarde bereikt?

Zie Formularium: afgeleide-eigenschap en stapfunctie-paar 1.1, 1.1.

4.11 Oefening 3.11: Inverse Laplacetransformatie met Tijdsverschuiving

Bron: Aanvullende oefeningen (praktische examenniveau).

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s(s+2)}$$

Vraag:

(a) Bepaal eerst de partieelbreukontwikkeling van $\frac{2}{s(s+2)}$ (negeer voorlopig e^{-2s}).

(b) Bepaal de inverse Laplacetransformatie zonder e^{-2s}.

(c) Pas de verschuivingsstelling toe om $f(t)$ te vinden.

Tip: De exponentiële term e^{-2s} *geeft een tijdsverschuiving van 2 seconden.*

4.12 Oefening 3.12: Differentiaalvergelijking met Beginvoorwaarden

Bron: Aanvullende oefeningen (examenniveau).

Los het volgende beginwaardeprobleem op met behulp van Laplacetransformatie:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 6u(t)$$

Met beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$.

Vraag:

(a) Transformeer beide zijden van de DV naar het Laplace-domein.

(b) Zet alle beginvoorwaarden in en los op voor $Y(s)$.

(c) Bepaal $y(t)$ via partieelbreuken en inverse Laplacetransformatie.

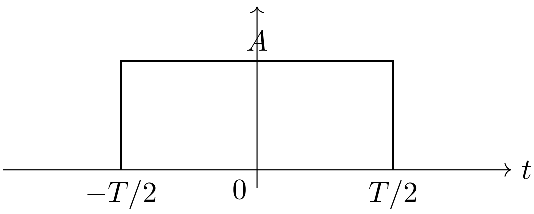
(d) Controleer je antwoord door $y(0)$ en $y'(0)$ in te vullen.

5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls

Gegeven een rechthoekpuls:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Zie Formularium: blok ↔ sinc in 1.2.
Vraag:

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.

(b) Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie.

(c) Bepaal de eerste nulpunten van het spectrum.

5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling

Gegeven $F\{f(t)\} = F(j\omega)$ bepaal de Fouriertransformatie van $f(t - t_0)$.
Zie Formularium: tijdverschuiving 1.2.
Vraag:

(a) Geef het bewijs van de verschuivingsstelling.

(b) Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met $t_0 = 1$ s, $A = 2$, $T = 2$ s.

(c) Bespreek het effect op amplitude- en fasespectrum.

5.3 Oefening 4.3: Modulation Property

Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

$$x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \mathrm{rect}(t)$$

waarbij $\mathrm{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$ is.
Zie Formularium: modulatie (cosinus) in 1.2.
Vraag:

(a) Pas de modulatiestelling toe.

(b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling

De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven $f(t) = e^{-t}u(t)$.

Zie Formularium: FTC-definitie 1.2 en eigenschappen 1.2.

Vraag:

(a) Bepaal de totale energie in het tijdsdomein: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

(b) Bepaal $F(j\omega)$ en controleer de energie in het frequentiedomein.

(c) Verifieer Parseval's stelling.

5.5 Oefening 4.5: Exponentieel Signaal

Gegeven $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.

Vraag:

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.

(b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

(c) Bepaal de bandbreedte (eerste nulpunt).

5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta

Bepaal de Fouriertransformatie van:

Vraag:

(a) $f(t) = \delta(t)$ (impulsfunctie)

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$ (verschoven impulsfunctie)

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ (hint: gebruik dat $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$)

5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)

Beschouw het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en definieer $y(t) = x(t - t_0)$ met $t_0 = \frac{1}{4}$.

Vraag:

(a) Bepaal $X(j\omega)$.

(b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.

5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's

Gebruik de bekende paren $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en de verschuivingsstelling.

Vraag:

(a) Bepaal $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$.

(b) Bepaal de Fouriertransformatie van $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$.

(c) Wat is het amplitudespectrum van $x(t)$ uit (b)? (geen volledige schets nodig)

5.9 Oefening 4.9: Spectrum van een Samengesteld Signaal

Bron: Aanvullende oefeningen (examenniveau).

Gegeven twee signalen waarvan het spectrum $X(\omega)$ en $H(\omega)$ bekend zijn. Bepaal het spectrum $Y(\omega)$ van:

$$y(t) = x(t-3) + x(t+3)$$

Vraag:

(a) Pas de verschuivingsstelling toe op beide termen.

(b) Combineer beide resultaten en gebruik Euler's formule om de vorm te vereenvoudigen.

(c) Wat gebeurt er met de amplitude en de fase van het spectrum?

Hint: $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$.

5.10 Oefening 4.10: Dualiteitseigenschap van FTC

Bron: Aanvullende oefeningen (geavanceerd).

Gebruik de dualiteitseigenschap van de Fouriertransformatie om de transformatie te vinden van:

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Vraag:

(a) Je weet dat $e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$. Kies een passende waarde van a.

(b) Maak gebruik van de dualiteitsstelling: als $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, dan $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$.

(c) Bepaal $\mathcal{F}\{\frac{1}{1+t^2}\}$.

5.11 Oefening 4.11: Spectrum van een Driehoekpuls (Uitgebreid)

Bepaal de Fouriertransformatie van de driehoekpuls $\Lambda(t)$ gedefinieerd als:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{voor } |t| < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

Tip: Gebruik het feit dat een driehoek de convolutie is van twee rechthoeken.

5.12 Oefening 4.12: Dualiteit en Frequentieverschuiving (Uitgebreid)

Gegeven is dat:

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

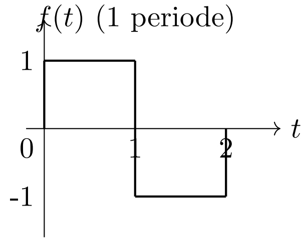
Vraag: Bepaal zonder integratie de Fouriertransformatie van het signaal $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

6.1 Oefening 5.1: Blokgolf

Een periodieke blokgolf met periode $T = 2$ s is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



Zie Formularium: Fourierreeks (cartesisch) 1.3 en (complex) 1.3.
Vraag:

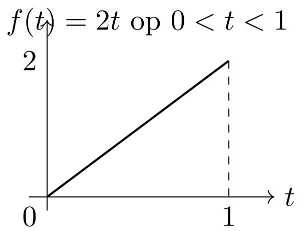
(a) Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is.

(b) Bereken de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, en b_n.

(c) Schrijf de Fourierreeks tot de 3e harmonische.

6.2 Oefening 5.2: Zaagtandgolf

Een zaagtandgolf met periode $T = 1$ s is gegeven door $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$.



Vraag:

(a) Bereken a_0.

(b) Bepaal b_1 en b_2.

(c) Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.

6.3 Oefening 5.3: Driehoekgolf

Een driehoekgolf met periode $T = 2$ is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Vraag:

(a) Is dit signaal even of oneven?

(b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten.

(c) Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fourierreeks.

6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.

Vraag:

(a) Bereken de gemiddelde macht van het signaal: $P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$.

(b) Bereken P uit de Fouriercoëfficiënten met Parseval's stelling: $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

(c) Controleer dat beide methoden dezelfde waarde geven.

6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

(a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k (met $\omega_0 = 2\pi/T$).

(b) Geef een eenvoudige interpretatie van welke harmonischen verdwijnen.

(c) Gebruik de link uit het formularium $X(k\omega_0) = T\,c_k$ om uit te leggen hoe de FTC van *één periode* gesampled wordt.

6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som

Neem een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t).$$

Vraag:

(a) Geef ω_0.

(b) Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten a_0, a_n en b_n.

(c) Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen herkennen welke termen niet nul zijn).

6.7 Oefening 5.7: De Blokgolf (Symmetrie) — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven een periodieke functie $f(t)$ met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{voor } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

(a) Schets de functie over twee periodes (van -2π tot 2π).

(b) Is deze functie even, oneven, of geen van beide? Wat betekent dit voor de coëfficiënten a_0, a_n en b_n?

(c) Bereken de niet-nul coëfficiënten en schrijf de eerste drie termen van de reeks op.

6.8 Oefening 5.8: Fourierreeks door Inspectie — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Soms hoef je niet te integreren. Gegeven het signaal:

$$f(t) = 3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$$

(a) Wat is de grondfrequentie ω_0 van dit signaal? (Hint: zoek de grootste gemene deler van de frequenties).

(b) Bepaal direct de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, b_n.

6.9 Oefening 5.9: Parseval (Energie) — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

De stelling van Parseval zegt dat de vermogensinhoud in tijd gelijk is aan de som van de vermogens van de harmonischen: $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum(a_n^2 + b_n^2)$.

Bereken het gemiddelde vermogen van het signaal:

$$f(t) = 3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$$

6.10 Oefening 5.10: Fourierreeks van een Gelijkgerichte Sinus (Uitgebreid)

Beschouw het signaal:

$$x(t) = |\sin(t)|$$

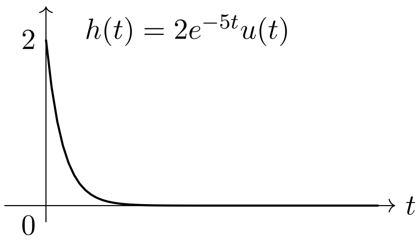
Vragen:

1. Wat is de fundamentele periode T?
2. Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k.

7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons

Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$.



Vraag:

(a) Bereken de systeemrespons op een stapingang $f(t) = u(t)$ door convolutie.

(b) Verifieer je antwoord met de Laplacetransformatie.

7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper

Een massa-veer-dempersysteem heeft $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, en $c = 4$ Ns/m.
Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking.

(b) Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie ω_0.

(c) Is het systeem ondergedempt, kritisch gedempt, of overgedempt?

7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons

Gegeven een LTC-systeem met overdracht $H(s) = \frac{10}{s+5}$.
Vraag:

(a) Bepaal de frequentierespons $H(j\omega)$.

(b) Bepaal de amplitude- en faserespons.

(c) Bepaal de 3dB bandbreedte (waar $|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$).

7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen

Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

$$H_1(s) = \frac{5}{s+2}, \quad H_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

Vraag:

(a) Bepaal de totale overdracht $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen

Bepaal voor de volgende systemen of ze BIBO-stabiel, marginaal stabiel of onstabiel zijn op basis van hun polen.

Vraag:

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$

7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons

Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

Vraag:

(a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(c) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer via de polen.

(d) Bepaal de nultoestandsrespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)

Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(b) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.

(c) Wat is de tijdsconstante τ en de DC-versterking $H(0)$?

7.8 Oefening 6.8: Van DV naar $H(s)$ — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Een systeem wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 4x(t)$$

(a) Zet beide kanten om naar het Laplace-domein (neem aan dat alle beginvoorwaarden 0 zijn).

(b) Bepaal de transferfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(c) Wat zijn de polen en nulpunten van dit systeem?

7.9 Oefening 6.9: Impulsrespons en Stabiliteit — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven de transferfunctie:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

(a) Splits de noemer in factoren $(s + a)(s + b)$.

(b) Gebruik partieelbreuksplitsing om $H(s)$ te schrijven als $\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$.

(c) Bepaal de impulsrespons $h(t)$ (de inverse Laplace van $H(s)$).

(d) Is dit systeem BIBO-stabiel? Waarom?

7.10 Oefening 6.10: Gedrag bij frequenties — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven een eerste-orde systeem $H(s) = \frac{10}{s+2}$.

(a) Wat is de "DC-gain" (de versterking bij frequentie 0)? Hint: vul $s = 0$ in.

(b) Wat gebeurt er met de versterking $|H(j\omega)|$ als de frequentie ω naar oneindig gaat?

(c) Wat voor type filter is dit? (Laagdoorlaat, Hoogdoorlaat?)

7.11 Oefening 6.11: Respons op een Sinus (Uitgebreid)

Een systeem heeft een transferfunctie:

$$H(s) = \frac{10}{s + 2}$$

Vraag: Bepaal de steady-state output $y_{ss}(t)$ als de input $x(t) = 3\cos(2t + 45°)$ is.

7.12 Oefening 6.12: Stabiliteitsanalyse via Polen (Uitgebreid)

Bepaal voor welke waarden van K het teruggekoppelde systeem met open-lus transferfunctie stabiel is:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal de karakteristieke veelterm $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.

(b) Vind de eigenwaarden van A.

(c) Bereken voor elke eigenwaarde een bijbehorende eigenvector.

8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem

Voor het systeem uit oefening 3.4 ($\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$).

Vraag:

(a) Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix.

(c) Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit oefening 3.4.

(d) Bepaal de eigenvectoren.

8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

(b) Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (omdat A symmetrisch is).

(c) Vorm de matrix P met eigenvectoren als kolommen en bepaal $P^{-1}AP = D$ waarbij D diagonaal is.

8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix.

(b) Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling.

(c) Bepaal de eigenwaarden numeriek en controleer of ze binnen de cirkels vallen.

8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit

Gegeven de matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden.

(b) Bepaal de eigenvectoren.

(c) Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn.

(d) Normaliseer de eigenvectoren tot eenheid.

8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële

Gegeven de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(b) Bereken de matrix exponentiële e^{At} via diagonalisatie of Cayley-Hamilton.

(c) Gebruik dit om de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ te vinden met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden van A en de dimensie van de eigenruimte.

(b) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer.

(c) Bepaal e^{At}.

8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis)

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector.

(b) Bereken A^3.

(c) Bereken e^{At}.

8.9 Oefening 7.9: Karakteristieke Vergelijking — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Stel de karakteristieke vergelijking op: $\det(A - \lambda I) = 0$.

(b) Los deze kwadratische vergelijking op om de eigenwaarden λ_1 en λ_2 te vinden.

8.10 Oefening 7.10: Eigenvectoren vinden — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gebruik de eigenwaarden uit Oefening 7.9 ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$).

(a) Bepaal de eigenvector $\mathbf{v}_1$ die hoort bij $\lambda_1 = 2$ (los op: $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

(b) Bepaal de eigenvector $\mathbf{v}_2$ die hoort bij $\lambda_2 = 5$.

8.11 Oefening 7.11: Diagonaalmatrix en machten — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven de matrix $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Wat zijn de eigenwaarden van D? (Dit zou je direct moeten zien).

(b) Bereken D^5 zonder de matrix 5 keer te vermenigvuldigen (Hint: bij diagonaalmatrices mag je de macht per element nemen).

9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen

9.1 Oefening 8.1: Signaalspektrum en Symmetrie

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1a, signaal-eigenschappen).

Gegeven de signalen $u(t)$ (Heaviside), $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, en hun Fouriertransformaties $U(j\omega)$, $V(j\omega)$.

Vraag:

(a) Beschrijf welke van de volgende signalen *causaal*, *periodiek*, *even*, en/of *oneven* zijn:

- $u(t)$ (Heaviside-stapfunctie)
- $v(t) = 2\cos(2\pi t)$
- $u(t) \cdot v(t)$ (product)
- $u(t) * v(t)$ (convolutie)

(b) Bepaal voor elk signaal welke symmetrie-eigenschappen van toepassing zijn en motiveer kort.

9.2 Oefening 8.2: Fouriertransformatie met Verschuiving en Modulatie

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1b-c, FTC-transformaties).

Gegeven het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

en de cosinusvorm $v(t) = 2\cos(2\pi t)$. Definieer $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ en $z(t) = x(t) + x(t-1)$.

Vraag:

(a) Bepaal $X(j\omega)$ (geïnspireerd door het sinc-paar uit het formularium, 1.2).

(b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de modulatiestelling (vermenigvuldiging in tijd $\leftrightarrow$ convolutie in frequentie).

(c) Bepaal $Z(j\omega)$ met de verschuivingsstelling. Welk effect heeft de verschuiving op amplitude- en fasespectrum?

9.3 Oefening 8.3: Impulsrespons, Causaliteit en Convolutie

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 2, impulsrespons van LTC-systeem).

Gegeven het ingangssignaal en de impulsrespons:

$$x(t) = u(t) - u(t-2), \qquad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

Vraag:

(a) Bepaal de Laplacetransformatie $X(s)$ van het ingangssignaal.

(b) Is het systeem causaal? Motiveer op basis van de vorm van $h(t)$.

(c) Bepaal de nultoestandsrespons $y(t) = h(t) * x(t)$ via convolutie en geef het antwoord stukgewijs.

9.4 Oefening 8.4: Complexe Fourierreeks van Periodiek Signaal

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 3, impulsrespons en lineariteit).

Gegeven een periodiek puls-trein met periode $T = 2$ s:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 2 \end{cases}, \quad \text{periodiek uitgebreid}$$

Vraag:

(a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k (gebruik $\omega_0 = 2\pi/T$, zie Formularium 1.3).

(b) Uit de eigenschap dat $p(t)$ reëel is, volgt $c_{-k} = c_k^*$. Verifieer dit voor enkele waarden van k.

(c) Bepaal welke harmonischen verdwijnen en verklaar dit aan de hand van de duty cycle van de pulstrein.

9.5 Oefening 8.5: Laplacetransformatie met Verschuiving

Bron: Voorbeeldexamen (Laplace-transformatie met complexe signalen).

Gegeven

$$x(t) = 3e^{-t}u(t) - 3e^{-(t-1)}u(t-1).$$

Vraag:

(a) Bepaal $X(s)$ (gebruik de verschuivingsstelling, zie Formularium 1.1).

(b) Bepaal $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ door rechtstreeks $x(t)$ in te vullen.

(c) Verifieer $x(0^+)$ met de beginwaardestelling en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ met de eindwaardestelling (zie Formularium 1.1).

9.6 Oefening 8.6: Differentiaalvergelijking via Laplace (met Beginvoorwaarden)

Bron: Voorbeeldexamen (oplossen van DV met Laplace).

Los op met behulp van de unilaterale Laplacetransformatie:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Vraag:

(a) Pas de Laplacetransformatie toe op beide zijden en zet alle beginvoorwaarden in.

(b) Los op voor $Y(s)$ en bepaal de polen (karakteristieke wortels).

(c) Bepaal $y(t)$ via partieelbreukontwikkeling en inverse Laplace.

(d) Controleer je antwoord door $y(0)$ en $y'(0)$ in te vullen.

9.7 Oefening 8.7: LTI-Systeem: Stabiliteit, Impuls- en Staprespons

Bron: Voorbeeldexamen (polen, stabiliteit en systeemrespons).

Een causaal LTI-systeem heeft overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de polen van het systeem. Is het systeem BIBO-stabiel?

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ via partieelbreuken.

(c) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor ingangssignaal $x(t) = u(t)$.

(d) Beredeneer: Naar welke waarde convergeert $y(t)$ als $t \to \infty$? (Controleer met de eindwaardestelling.)

9.8 Oefening 8.8: Convolutie: Tijdsdomein versus Frequentiedomein

Bron: Voorbeeldexamen (convolutie met basis-signalen).

Gegeven

$$x(t) = u(t) - u(t-1), \qquad h(t) = e^{-t}u(t)$$

Vraag:

(a) Bepaal $y(t) = h(t) * x(t)$ rechtstreeks via (grafische) convolutie in het tijdsdomein. Geef het antwoord stukgewijs.

(b) Bepaal $X(s)$ en $H(s)$ (Laplacetransformaties) en verifieer via $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ en inverse Laplace dat je hetzelfde antwoord krijgt.

9.9 Oefening 8.9: Fouriertransformatie en Energieanalyse

Bron: Voorbeeldexamen (FTC en Parseval voor energie-berekeningen).

Gegeven

$$f(t) = e^{-2|t|}$$

Vraag:

(a) Bepaal $F(j\omega)$ (tip: split in twee delen, $f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$).

(b) Bereken de totale energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ rechtstreeks.

(c) Verifieer met Parseval's stelling: $E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$.

9.10 Oefening 8.10: Reële Fourierreeks: Symmetrie en Spectrum

Bron: Voorbeeldexamen (periodieke signalen en Fourierreeks).

Gegeven een antisymmetrische blokvorm met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \end{cases}, \quad \text{periodiek uitgebreid}$$

Vraag:

(a) Bepaal of $f(t)$ even, oneven, of geen van beide is.

(b) Bepaal de coëfficiënten a_0, a_n, b_n van de reële Fourierreeks. (Welke coëfficiënten verdwijnen?).

(c) Schrijf de Fourierreeks tot en met de 5e harmonische.

(d) Bepaal de RMS-waarde en verifieer met Parseval.

9.11 Oefening 8.11: Staatruimtevergelijking en Stabiliteit

Bron: Voorbeeldexamen (toestandsrepresentatie, eigenwaarden).

Gegeven het eerste-orde systeem:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu(t), \qquad y = C\mathbf{x},$$

waarbij

$$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 1$$

en $\mathbf{x}(0) = 1$.

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarde van A en bespreek de stabiliteit van het systeem.

(b) Bepaal $\mathbf{x}(t)$ voor $u(t) = 0$ (vrije respons).

(c) Bepaal $y(t)$ en determine $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

10 Oplossingen

10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

Oplossing 1.1

Gegeven: Systeem met operator $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.
Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.
Oplossing:

- Test eigenschap 1 (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t)+2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t)+2) = 3ax(t)+2a$
- Voor $a \neq 1$ geldt: $2 \neq 2a$, dus schaling klopt niet.
- Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.

Oplossing 1.2

Gegeven: RC-circuit met $R = 1000\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F, ingangsspanning $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.
Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op.

(b) Bereken τ.

(c) Bepaal $v_{\text{uit}}(0.01)$.

Oplossing:

(a) De differentiaalvergelijking van een RC-circuit: $RC\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = v_{\text{in}}$

$$(1000)(10 \times 10^{-6})\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

$$0.01\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

(b) Tijdsconstante: $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01$ s $= 10$ ms

(c) Voor een staprespons met $v_{\text{uit}}(0) = 0$:

$$v_{\text{uit}}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})u(t) = 5(1 - e^{-100t})u(t)$$

Op $t = 10$ ms $= 0.01$ s:

$$v_{\text{uit}}(0.01) = 5(1 - e^{-1}) = 5(1 - 0.368) = 5(0.632) = 3.16 \text{ V}$$

Oplossing 1.3

Gegeven: Radio-isotoop met halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur. Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.
Vraag: Hoeveel mg blijft over om 14:00?
Oplossing:
Model radioactief verval: $N(t) = N_0 e^{-kt}$
Halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur: $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155\ \text{h}^{-1}$
Van 08:00 tot 14:00 is $\Delta t = 6$ uur:

$$N(6) = 20e^{-0.1155\times 6} = 20e^{-0.693} = 20 \times 0.5 = 10 \text{ mg}$$

Antwoord: 10 mg blijft over.

Oplossing 1.4

Gegeven: Twee systemen: - Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$ - Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Vraag: Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.
Oplossing:
Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ ✓
Additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$ ✓
Systeem A is LINEAIR.
Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ (voor $a \neq 1$) X
Systeem B is NIET LINEAIR.

Oplossing 1.5

Gegeven: Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?
Oplossing:

(a) $y(t) = x(t-2)$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓(zuivere vertraging)

(b) $y(t) = tx(t)$: LINEAIR maar NIET TIJDINVARIANT X (coëfficiënt varieert in tijd)

(c) $y(t) = |x(t)|$: NIET LINEAIR X (niet additief/homogeen)

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓(integrator)

Antwoord: (a) en (d) zijn LTI.

Oplossing 1.6

Gegeven: $y(t) = x(t) + x(t-1)$.
Vraag: Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.
Oplossing:

(a) **Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tijdsverschuiving van de input dezelfde verschuiving in beide termen geeft.

(b) **Causaal:** Ja. $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en $x(t-1)$, dus enkel van huidige en verleden waarden.

(c) **Invertibel: Niet** uniek invertibel.

Bewijs door tegenvoorbeeld:

Stel $y(t) = 0$ voor alle t. Dan geldt:

$$x(t) + x(t-1) = 0 \Rightarrow x(t) = -x(t-1)$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen, bijvoorbeeld:

- $x(t) = A(-1)^t$ voor elke constante A
- $x(t) = 0$ voor alle t

Omdat verschillende inputs tot dezelfde output leiden, is het systeem niet invertibel.

Oplossing 1.7

Gegeven: (S1) $y(t) = 2x(t-1)$ en (S2) $y(t) = x(t) + u(t)$.
Vraag: Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).
Oplossing:

(a) **Lineariteit**

Systeem (S1): $y(t) = 2x(t-1)$

Test homogeniteit: Voor $ax(t)$:

$$\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t-1) = a \cdot 2x(t-1) = a\mathcal{T}\{x(t)\} \quad \checkmark$$

Test additiviteit: Voor $x_1(t) + x_2(t)$:

$$\mathcal{T}\{x_1(t)+x_2(t)\} = 2(x_1(t-1)+x_2(t-1)) = 2x_1(t-1)+2x_2(t-1) = \mathcal{T}\{x_1(t)\}+\mathcal{T}\{x_2(t)\} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ (S1) is **lineair**.

Systeem (S2): $y(t) = x(t) + u(t)$

Nultoestandtest: Voor $x(t) = 0$:

$$\mathcal{T}\{0\} = 0 + u(t) = u(t) \neq 0$$

Dit schendt het nultoestandcriterium voor lineariteit.

$\Rightarrow$ (S2) is **niet lineair**.

(b) **Tijdinvariantie**

- (S1) is **tijdinvariant**: $x(t) \mapsto x(t-t_0)$ geeft $y(t) = 2x(t-1) \mapsto 2x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$.
- (S2) is **niet tijdinvariant**: voor $x(t)$ is $y(t) = x(t)+u(t)$. Voor $x(t-t_0)$ is de output $x(t-t_0) + u(t)$, terwijl $y(t-t_0) = x(t-t_0) + u(t-t_0)$. Niet gelijk als $t_0 \neq 0$.

(c) **Causaliteit**

- (S1) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t-1)$ (verleden).
- (S2) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en een gekend signaal $u(t)$.

10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

Oplossing 2.1

Gegeven: $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.
Vraag: Bepaal welk signaal exponentiële groei/verval vertoont; bereken waarden op $t = 5$ s.
Oplossing:

(a) $x_1(t) = e^{0.2t}$: exponentiële **groei** (positieve exponent) $x_2(t) = e^{-0.5t}$: exponentieel **verval** (negatieve exponent)

(b) Op $t = 5$ s:

$$x_1(5) = e^{0.2\times 5} = e^1 \approx 2.718$$
$$x_2(5) = e^{-0.5\times 5} = e^{-2.5} \approx 0.082$$

Oplossing 2.2

Gegeven: $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.
Vraag: Bepaal amplitude, hoekfrequentie, frequentie, fasehoek; schrijf als cosinus.
Oplossing:

(a) Van $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$:

- Amplitude: $A = 3$
- Hoekfrequentie: $\omega = 4\pi$ rad/s
- Frequentie: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ Hz
- Fasehoek: $\phi = \frac{\pi}{6}$ rad $= 30°$

(b) Als cosinusfunctie: $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Oplossing 2.3

Gegeven: $z(t) = e^{j2\pi t}$.
Vraag: Schrijf als sinus/cosinus; bepaal waarde op $t = 0.25$ s.
Oplossing:

(a) Formule van Euler: $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$$z(t) = e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + j\sin(2\pi t)$$

(b) Op $t = 0.25$ s:

$$z(0.25) = \cos(2\pi \times 0.25) + j\sin(2\pi \times 0.25) = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + j = j$$

Oplossing 2.4

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t-1)$ en $g(t) = u(t) - u(t-1)$.
Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets.
Oplossing:
De convolutie is (Formularium: convolutie-definitie):

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Stap 1: Observeer dat $f(\tau) = 1$ op $[0, 1]$ en $g(t-\tau) = 1$ op $[t-1, t]$.
Stap 2: De integrand is alleen niet-nul waar beide functies niet-nul zijn (overlap).
Geval 1: $t < 0$
Geen overlap $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$
Geval 2: $0 \leq t < 1$
Overlap op $[0, t]$ met lengte t:

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot 1\, d\tau = t$$

Geval 3: $1 \leq t < 2$

Overlap op $[t-1, 1]$ met lengte $2-t$:

$$(f * g)(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 \, d\tau = 1 - (t-1) = 2 - t$$

Geval 4: $t \geq 2$
Geen overlap $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$
Eindresultaat:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een **driehoeksfunctie** met maximum 1 op $t = 1$ en breedte 2.

Oplossing 2.5

Gegeven: $x(t) = e^{-t}u(t)$.
Vraag: Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$, $y_2(t) = x(2t)$, $y_3(t) = 2x(t)$.
Oplossing:

(a) Tijdsverschuiving: $y_1(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) = e^2 e^{-t} u(t-2)$ (start op $t = 2$)

(b) Tijdscompressie: $y_2(t) = e^{-2t}u(2t) = e^{-2t}u(t)$ (twee keer sneller)

(c) Amplitude schaling: $y_3(t) = 2e^{-t}u(t)$ (twee keer hoger)

(d) Schetsing: y_1 begint op $t = 2$, y_2 vervalt sneller, y_3 heeft dubbele amplitude.

Oplossing 2.6

Gegeven: Drie signalen waarvan de energie bepaald moet worden.
Vraag: Bereken energies.
Oplossing:

(a) $E_1 = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

(b) $E_2 = \int_0^\pi |2\sin(t)|^2 dt = 4\int_0^\pi \sin^2(t) dt$

Gebruik identiteit $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$:

$$E_2 = 4\int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 2\int_0^\pi (1-\cos(2t)) dt$$

$$= 2\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi = 2[(\pi - 0) - (0 - 0)] = 2\pi$$

(c) $E_3 = \int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = 1$

Oplossing 2.7

Gegeven: $x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2))$.
Vraag: Stukgewijs; energie; $x(t-1)$.
Oplossing:

(a) Stukgewijs:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

(b) Energie:

$$E = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^2 (2-t)^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(2-t)^3}{-3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Verschuiving:

$$x(t-1) = (t-1)\big(u(t-1) - u(t-2)\big) + (3-t)\big(u(t-2) - u(t-3)\big).$$

Dit is dezelfde driehoek, verschoven naar rechts met 1.

Oplossing 2.8

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$.
Vraag: Schets en herschrijf $x(t)$ na verschuiving/schaling/spiegeling.
Oplossing:

(a) $x(t) = 1$ voor $0 \le t < 2$ en $x(t) = 0$ elders (rechthoekpuls van breedte 2).

(b) Verschuivingen:

$$x(t-1) = u(t-1) - u(t-3), \qquad x(t+1) = u(t+1) - u(t-1).$$

Dus $x(t-1)$ ligt op $1 \le t < 3$ en $x(t+1)$ op $-1 \le t < 1$.

(c) Schaling en spiegeling:

$$x(2t) = u(2t) - u(2t-2) = u(t) - u(t-1),$$

dus $x(2t) = 1$ voor $0 \le t < 1$. Verder

$$x(-t) = u(-t) - u(-t-2) = u(t+2) - u(t),$$

dus $x(-t) = 1$ voor $-2 \le t < 0$.

10.3 Oplossingen Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

Oplossing 3.1: Standaard Laplace-paren

Gegeven: Vijf standaard signalen.
Oplossing:

(a) $\mathcal{L}\{5u(t)\}$: Gebruikmakend van definitie Formularium 1.1:

$$\mathcal{L}\{5u(t)\} = 5\int_0^\infty e^{-st}\,dt = 5\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{5}{s}$$

ROC (Region of Convergence): $\mathrm{Re}(s) > 0$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\}$: Exponentiële afname (Formularium 1.1)

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{-3t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt = \frac{1}{s+3}$$

ROC: $\mathrm{Re}(s) > -3$

(c) $\mathcal{L}\{t\cdot u(t)\}$: Lijnair stijgende signaal (Formularium 1.1)

$$\mathcal{L}\{t\cdot u(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}\,dt$$

Gebruikmakend van partiële integratie ($u = t$, $dv = e^{-st}dt$):

$$\mathcal{L}\{t\} = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

(d) $\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\}$: Cosinusvormig signaal (Formularium 1.1)
Met standaardpaar $\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ en $\omega_0 = 5$:

$$\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\} = \frac{s}{s^2+25}$$

(e) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)u(t)\}$: Gedempt sinus (combinatie exponentiële & trigonometrisch)
Stap 1: Standaardpaar voor sinus: $\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

Met $\omega_0 = 3$: $\sin(3t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{3}{s^2+9}$
Stap 2: Frequentie-verschuivingseigenschap (Formularium 1.1):
$e^{-\alpha t}f(t) \leftrightarrow F(s+\alpha)$
Met $\alpha = 2$, vervang s door $s+2$:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)u(t)\} = \frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{3}{s^2+4s+13}$$

Oplossing 3.2: Inverse Laplace met Partieelbreuken

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s+2} + \dfrac{5}{s^2+4}$
Deze vorm is al geschikt voor directe inverse (Formularium 1.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3e^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\} = 5\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} = \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

Resulaat:

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t) + \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

(b) $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ — **Drie enkelvoudige polen**

Stap 1: Partieelbreukontwikkeling

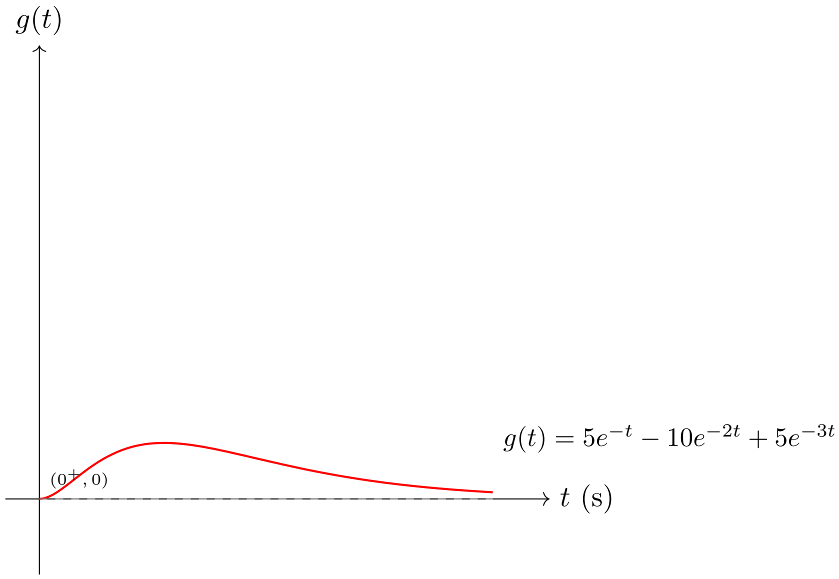
$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Stap 2: Coëfficiënten bepalen (Heaviside's methode)

Pol	**Vermenigvuldig met & stel gelijk**	**Coëfficiënt**
$s = -1$	$10 = A \cdot (1) \cdot (2)$	$A = 5$
$s = -2$	$10 = B \cdot (-1) \cdot (1)$	$B = -10$
$s = -3$	$10 = C \cdot (-2) \cdot (-1)$	$C = 5$

Stap 3: Inverse Laplace

$$g(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$



(c) $H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)^2}$ — **Dubbele pool!**

Stap 1: Partieelbreukontwikkeling met dubbele pool

Voor dubbele pool $s = -1$:

$$\frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

Stap 2: Coëfficiënten bepalen

Vermenigvuldig met $(s+1)^2$: $s + 3 = A(s+1) + B$

Voor $s = -1$: $-1 + 3 = B \Rightarrow B = 2$

Voor $s = 0$: $3 = A + 2 \Rightarrow A = 1$

Stap 3: Inverse Laplace (gebruik Formularium 1.1: $te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2}\right\} = 2te^{-t}u(t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) = (1+2t)e^{-t}u(t)$$

Oplossing 3.3: Eerste-Orde Differentiaalvergelijkingen

(i) $\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$, $y(0) = 2$

Stap 1: Laplacetransformatie beide zijden

Gebruikmakend van afgeleide-eigenschap (Formularium 1.1): $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

Stap 2: Isoleer $Y(s)$

$$Y(s)(s+4) = \frac{8}{s} + 2 = \frac{8+2s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2(s+4)}{s(s+4)} = \frac{2}{s}$$

Stap 3: Inverse Laplace

$$y(t) = 2u(t)$$

Opmerking: De oplossing is constant! Dit gebeurt omdat $y(0) = 2$ reeds gelijk is aan de steady-state waarde $y_\infty = 8/4 = 2$.

(ii) $\frac{dy}{dt} + 3y = 6e^{-2t}u(t)$, $y(0) = 0$

Stap 1: Laplacetransformatie

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{6}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

Stap 2: Partieelbreuken

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Voor $s = -2$: $6 = A(1) \Rightarrow A = 6$

Voor $s = -3$: $6 = B(-1) \Rightarrow B = -6$

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

Stap 3: Inverse Laplace

$$y(t) = 6e^{-2t}u(t) - 6e^{-3t}u(t) = 6(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Grafiek: De responsie begint bij $y(0) = 0$ en bereikt maximum rond $t \approx 0.7$ s voordat beide exponentiële termen vervallen.

(iii) $2\dfrac{dy}{dt} + y = u(t) - u(t-1)$, $y(0) = 1$

Stap 1: Laplacetransformatie ingang

$$u(t) - u(t-1) \leftrightarrow \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow sY(s) - 1$$

Stap 2: Oplossen voor $Y(s)$

$$2(sY(s) - 1) + Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)(2s+1) = 2 + \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1-e^{-s}}{s(2s+1)}$$

Stap 3: Partieelbreuken

$$\frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1}\right)$$

Stap 4: Inverse Laplace (met verschuiving)

Voor $t < 1$: Alleen eerste term bijdraagt

$$y(t) = u(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$$

Voor $t \geq 1$: Beide termen (inclusief verschoven term)

Stukgewijs:

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t/2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}e^{-(t-1)/2}, & t \geq 1 \end{cases}$$

Oplossing 3.4: Karakteristieke Wortels en Dempingsgedrag

Gegeven drie systemen; classificeer als over-, kritiek of ondergedempt

(i) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$**,** $y(0) = 1$**,** $y'(0) = 0$

Stap 1: Karakteristieke vergelijking

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

Stap 2: Wortels bepalen (discriminant check)

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$ twee reële verschillende wortels

$$\lambda = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1, -3$$

Classificatie: OVERGEDEMPT (twee reële, negatieve polen)

Stap 3: Algemene oplossing

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

Stap 4: Beginvoorwaarden toepassen

$y(0) = 1$: $c_1 + c_2 = 1$

$y'(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t}$, dus $y'(0) = 0$: $-c_1 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -3c_2$

Oplossen: $-3c_2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -1/2$, dus $c_1 = 3/2$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}}$$

(ii) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$**,** $y(0) = 1$**,** $y'(0) = 0$

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$ dubbele reële wortel

$\lambda = -2$ (met multipliciteit 2)

Classificatie: KRITIEK GEDEMPT

Algemene oplossing (dubbele wortel):

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

Beginvoorwaarden:

$y(0) = 1$: $c_1 = 1$

$y'(t) = c_2 e^{-2t} + (c_1 + c_2 t)(-2)e^{-2t} = c_2 e^{-2t} - 2(c_1 + c_2 t)e^{-2t}$

$y'(0) = 0$: $c_2 - 2c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$

$$\boxed{y(t) = (1 + 2t)e^{-2t}}$$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \Rightarrow$ complexe conjugate wortels

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$$

Classificatie: ONDERGEDEMPT (complexe polen in linkervlak)

Natuurlijke frequentie: $\omega_n = 2$ rad/s, Dempingsfactor: $\zeta = 1/\sqrt{5} \approx 0.447$

Algemene oplossing:

$$y(t) = e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)]$$

Beginvoorwaarden:

$y(0) = 0$: $c_1 = 0$

$y'(t) = -e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)] + e^{-t}[-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)]$

$y'(0) = 2$: $-0 + 2c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

$$\boxed{y(t) = e^{-t} \sin(2t)}$$

Oplossing 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving

(a) **Gegeven:** $F(s) = \dfrac{2}{s^2 + 4}$

Inverse: $f(t) = \sin(2t)u(t)$ (Formularium 1.1: $\dfrac{a}{s^2 + a^2} \leftrightarrow \sin(at)u(t)$)

(b) **Met verschuiving:** $G(s) = e^{-2s}F(s) = e^{-2s}\dfrac{2}{s^2 + 4}$

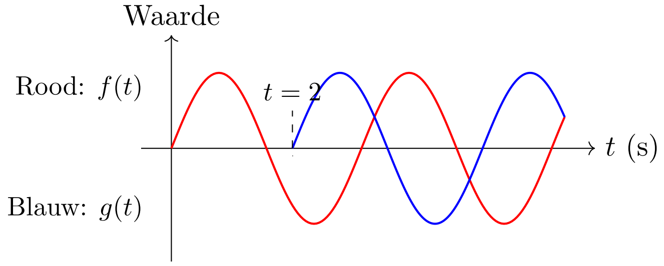
Gebruikmakend van verschuivingsstelling (Formularium 1.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)u(t - a)$$

$$g(t) = \sin(2(t - 2))u(t - 2) = \sin(2t - 4)u(t - 2)$$

Dit is de sinus-golf verschoven naar rechts met 2 seconden.

(c) **Grafische vergelijking:**



De blauwe curve (verschoven signaal) is identiek aan de rode, maar 2 seconden later.

Oplossing 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd

(a) $F(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Coëfficiënten via Heaviside:

$A = \dfrac{10}{(1)(2)} = 5$ (pol $s = -1$)

$B = \dfrac{10}{(-1)(1)} = -10$ (pol $s = -2$)

$C = \dfrac{10}{(-2)(-1)} = 5$ (pol $s = -3$)

$$f(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

(b) $G(s) = \dfrac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)}$ — **Dubbele pool combined met simpele**

$$\frac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

Voor $(s+1)^2$ factor: vermenigvuldig met $(s+1)^2$ en stel $s = -1$:

$-5 + 7 = B \Rightarrow B = 2$

Voor $s = -2$ (simpele pool):

$-10 + 7 = C(1) \Rightarrow C = -3$

Voor coëfficiënt A: Vermenigvuldig met $(s+1)^2$ en differentieer naar s:

$$\frac{d}{ds}[5s+7] = 5 = A + B' \text{ (term)}$$

Alternatief: stel $s = 0$: $7 = A + 2 + (-3) \cdot 1/2$ waardoor $A = 6$

$$g(t) = 6e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

(c) $H(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ — **Complexe polen**

Herken: $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1 \rightarrow$ complexe polen: $s = -1 \pm j$

$$\frac{s^2+2s+3}{(s+1)[(s+1)^2+1]} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Voor $s = -1$: $1 - 2 + 3 = A(1) \Rightarrow A = 2$

Voor coëfficiënten B, C: Uitwerken en coëfficiënten matchen geeft $B = -1$, $C = 1$

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-t}[-\cos(t) + \sin(t)]u(t) = e^{-t}[2 - \cos(t) + \sin(t)]u(t)$$

Oplossing 3.7: Begin- en Eindwaardestelling

Gegeven: $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+4s+3} = \dfrac{3s+5}{(s+1)(s+3)}$

(a) **Beginwaardestelling:** $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2+5s}{s^2+4s+3} = 3$$

(b) **Eindwaardestelling:** (polen in linkervlak: $s = -1, -3$ ✓)

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s^2+5s}{s^2+4s+3} = 0$$

(c) **Controle via exacte oplossing:**

Partieelbreuken:
$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

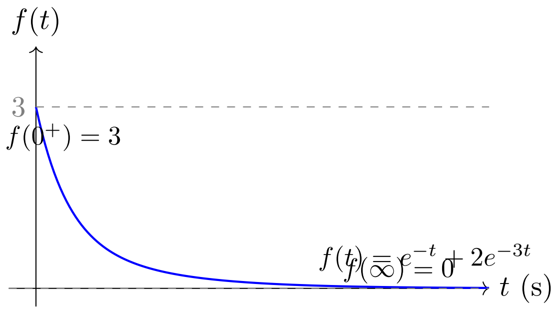
Voor $s = -1$: $-3+5 = 2A \Rightarrow A = 1$

Voor $s = -3$: $-9+5 = -2B \Rightarrow B = 2$

$$f(t) = e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

Verificatie: $f(0^+) = 1+2 = 3$ ✓, $f(\infty) = 0$ ✓

(d) **Grafiek:**



Oplossing 3.8: Convolutie via Laplace

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t-1)$, $g(t) = e^{-2t}u(t)$
Bepaal: $y(t) = (f * g)(t)$ via Laplacetransformatie
Oplossing:

(a) **Laplace-transformaties:**

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1}{s} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}$$

(b) **Convolutie-theorema (Formularium 1.1):**
$y(t) = f(t) * g(t) \Rightarrow Y(s) = F(s) \cdot G(s)$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+2)} = (1 - e^{-s}) \cdot \frac{1}{s(s+2)}$$

(c) **Partieelbreuken voor basale vorm:**

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

Inverse: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$

(d) **Met verschuiving (tijdsverschuivingsstelling):**
De factor e^{-s} veroorzaakt een verschuiving met 1 seconde:
$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} \cdot \ldots\}$ = origineel signaal verschoven met 1 seconde

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-1)}), & t \geq 1 \end{cases}$$

Vereenvoudiging voor $t \geq 1$:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2(t-1)} - e^{-2t}\right] = \frac{1}{2}e^{2} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}(e^{2} - 1)e^{-2t}$$

Of: $y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \cdot e^{-2(t-1)}$ voor $t \geq 1$

(e) **Fysische interpretatie:**
Voor $0 \leq t < 1$: Rechthoekpuls gaat door exponentiëel gedempt systeem
Voor $t \geq 1$: Puls stopt, systeem dempt uit met tijdsconstante $\tau = 1/2$ s

Oplossing 3.9: Samenvattingsoefening

Gegeven: Verschillende signalen en transformaties
Oplossing:

(a) **Standaard Laplace-paren (Formularium 1.1):**

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}\{t^{n}u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(b) **Vermenigvuldiging met tijd (Formularium 1.1):**
Eigenschap: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
Voor $\mathcal{L}\{t^{2}e^{-3t}u(t)\}$:
Basis: $e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}\{te^{-3t}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+3}\right] = \frac{1}{(s+3)^{2}}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right] = \frac{2}{(s+3)^3}$$

(c) **Inverse Laplacetransformatie met gemengde vormen:**

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^2+9}$$

Per term:
$\frac{1}{s+3} \leftrightarrow e^{-3t}u(t)$
$\frac{2}{s^2} \leftrightarrow 2tu(t)$
$\frac{4}{s^2+9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9} \leftrightarrow \frac{4}{3}\sin(3t)u(t)$

$$f(t) = e^{-3t}u(t) + 2tu(t) + \frac{4}{3}\sin(3t)u(t)$$

(d) **Geavanceerde inverse (complexe polen):**

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+13}$$

Kwadraatafsplitsing van noemer: $s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 + 4$
Herschrijf teller: $s + 5 = (s+3) + 2$

$$\frac{(s+3)+2}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{2}{(s+3)^2+4}$$

Inverse (Formularium 1.1): $e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \leftrightarrow \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ en $e^{-\alpha t}\sin(\beta t) \leftrightarrow \dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

$$h(t) = e^{-3t}\cos(2t)u(t) + e^{-3t}\sin(2t)u(t) = e^{-3t}[\cos(2t) + \sin(2t)]u(t)$$

Oplossing 3.9

Gegeven: Eenvoudige signalen met stapfunctie $u(t)$.
Vraag: Bepaal enkele Laplace-paren en een inverse Laplace.
Oplossing:

(a) $\mathcal{L}\{u(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ (Formularium: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ in 1.1 en definitie in 1.1).

(b) $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(s+2)t}dt = \frac{1}{s+2}$ (Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ in 1.1 en translatie in s in 1.1).

(c) $\mathcal{L}\{t\,u(t)\} = \frac{1}{s^2}$ (Formularium: $t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ met $n = 1$ in 1.1).

(d)
$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-3t}u(t) + 2t\,u(t).$$
(Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ en $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\,u(t)$ in 1.1.)

Oplossing 3.10: Staprespons Eerste-Orde Systeem

Gegeven: $H(s) = \dfrac{2}{0.5s+1}$, ingangssignaal $x(t) = 3u(t)$

Oplossing:

(a) **Laplace-analyse:**

Gegeven: $H(s) = \dfrac{2}{0.5s+1} = \dfrac{2}{0.5(s+2)} = \dfrac{4}{s+2}$ (herschrijven voor standaardvorm)

Met ingang $X(s) = \dfrac{3}{s}$:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s} = \frac{12}{s(s+2)}$$

(b) **Partieelbreukontwikkeling:**

$$\frac{12}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Voor $s = 0$: $12 = A(2) \Rightarrow A = 6$

Voor $s = -2$: $12 = B(-2) \Rightarrow B = -6$

$$Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s+2}$$

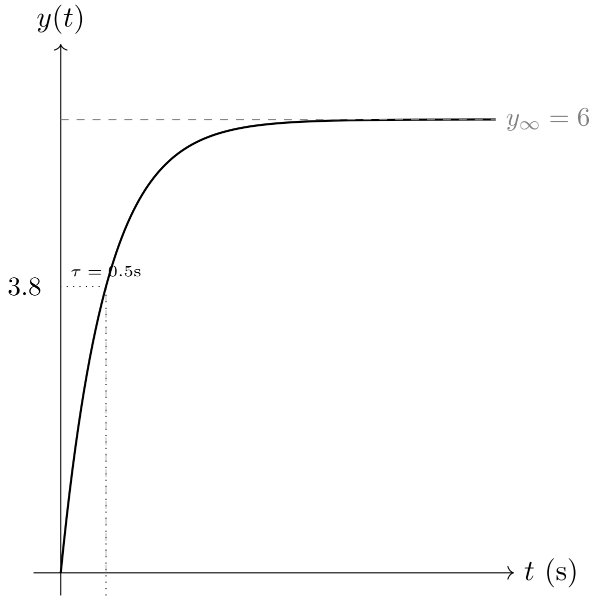
(c) **Inverse Laplace (tijd-domein):**

$$y(t) = 6u(t) - 6e^{-2t}u(t) = 6(1 - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Karakteristieken:**

- Uiteindelijke/steadystate waarde: $y_\infty = \lim_{t\to\infty} 6(1 - e^{-2t}) = 6$
- Tijdsconstante: $\tau = \dfrac{1}{2}$ s (inverse van pool $s = -2$)
- Settling time (2% criterium): $t_s \approx 4\tau = 2$ s
- Waarde op $t = \tau$: $y(0.5) = 6(1 - e^{-1}) \approx 3.8$ (ongeveer 63% van eindwaarde)

(e) **Grafische voorstelling:**



Interpretatie: Het eerste-orde systeem bereikt in één tijdsconstante ($\tau = 0.5$ s) ongeveer 63% van de eindwaarde. De responsie is exponentieel zonder overshoot (karakteristiek voor eerste-orde systemen met reële pool).

(f) **Verificatie via eindwaardestelling:**

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{12}{s+2} = 6 \checkmark$$

Klopt met directe berekening: $y(\infty) = H(0) \cdot x = 2 \cdot 3 = 6$ (DC gain $H(0) = 2$)

Oplossing 3.11: Inverse Laplace met Tijdsverschuiving

Gegeven: $F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s(s+2)}$
Oplossing:

(a) **Partieelbreukontwikkeling van $G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$:**

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Voor $s = 0$: $2 = 2A \Rightarrow A = 1$; Voor $s = -2$: $2 = -2B \Rightarrow B = -1$

Dus: $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$

(b) **Inverse Laplacetransformatie zonder e^{-2s}:**

$$g(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$$

(c) **Verschuivingsstelling toepassen:** $f(t) = g(t-2) = (1 - e^{-2(t-2)})u(t-2)$

Oplossing 3.12: DV met Beginvoorwaarden

Gegeven: $y'' + 4y' + 3y = 6u(t)$, met $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$.
Oplossing:

(a) **Laplacetransformatie met beginvoorwaarden:**

$$[s^2Y(s) - s + 2] + 4[sY(s) - 1] + 3Y(s) = \frac{6}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = \frac{s^2 + 2s + 6}{s}$$

(b) **Partieelbreukontwikkeling van** $\frac{s^2+2s+6}{s(s+1)(s+3)}$:
Voor $s = 0$: $A = 2$; Voor $s = -1$: $B = -2.5$; Voor $s = -3$: $C = 1.5$

(c) **Inverse Laplace:** $y(t) = (2 - 2.5e^{-t} + 1.5e^{-3t})u(t)$

(d) **Controle:** $y(0) = 2 - 2.5 + 1.5 = 1$ ✓, $y'(0) = 2.5 - 4.5 = -2$ ✓

10.4 Oplossingen Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

Oplossing 4.1: Rechthoekpuls Fouriertransformatie

Gegeven: $f(t) = A$ voor $-T/2 < t < T/2$, 0 elders

(a) **Fouriertransformatie (Formularium 1.2):**
Definitie: $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t}dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{A}{-j\omega}(e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}) = \frac{A}{j\omega}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})$$

Via Euler: $e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x)$

$$= \frac{A}{j\omega} \cdot 2j\sin(\omega T/2) = \frac{2A\sin(\omega T/2)}{\omega} = AT \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

(b) **Sinc-notatie:** $F(j\omega) = AT \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ ✓
Dit komt overeen met Formularium 1.2 (Block-paar).

(c) **Nulpunten:** $\sin(\omega T/2) = 0$ als $\frac{\omega T}{2} = n\pi$ voor $n = \pm1, \pm2, \ldots$
Dus: $\omega_n = \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \ldots$ (eerste nulpunt: $\omega = 2\pi/T$)

Oplossing 4.2

Gegeven: Fouriertransformatie verschuivingsstelling; puls met amplitude $A = 2$, breedte $T = 2$, verschoven naar $t_0 = 1$.
Vraag: Bewijs stelling; bepaal Fouriertransformatie; effect op spektra.
Oplossing:

(a) **Verschuivingsstelling (Formularium 1.2):**

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

Bewijs:

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

Substitutie $u = t - t_0$ (dus $dt = du$):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(u+t_0)}du = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}du = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

(b) **Toepassing op puls:** Voor puls van $t = 1$ tot $t = 3$ (dus $t_0 = 1$, $A = 2$, $T = 2$):

Onverschoven puls: $F_0(j\omega) = 2 \cdot 2 \cdot \text{sinc}(\omega) = 4\text{sinc}(\omega)$

Verschoven puls:

$$F(j\omega) = 4\text{sinc}(\omega) \cdot e^{-j\omega}$$

(c) **Spectrale gevolgen:**

Amplitudespectrum: $|F(j\omega)| = |e^{-j\omega}| \cdot |4\text{sinc}(\omega)| = 4|\text{sinc}(\omega)|$ (identiek!) ✓

Fasespectrum: $\arg F(j\omega) = -\omega + \arg(\text{sinc}(\omega))$ (lineaire fase-lag van $-\omega$)

Fysisch: Verschuiving veroorzaakt geen amplitudeverandering, alleen lineaire fasevertraging.

Oplossing 4.3

Gegeven: $x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$ met $\text{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$.
Vraag: Pas modulatiestelling toe; schets spektra.
Oplossing:

(a) Modulatiestelling (af te leiden uit Formularium: cosinus-paar 1.2 en translatie/convolutie-eigenschappen 1.2):

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)f(t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega-\omega_0)) + F(j(\omega+\omega_0))]$$

Voor $\text{rect}(t)$: $F_{\text{rect}}(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega)$ (Formularium: Block-paar 1.2).

Voor $x(t)$ met $\omega_0 = 10\pi$:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[2\text{sinc}(\omega - 10\pi) + 2\text{sinc}(\omega + 10\pi)] = \text{sinc}(\omega - 10\pi) + \text{sinc}(\omega + 10\pi)$$

(b) Het spectrum bestaat uit twee verschoven sinc-functies gecentreerd op $\omega = \pm 10\pi$.

De modulatiestelling toont dat vermenigvuldiging in het tijdsdomein resulteert in convolutie in het frequentiedomein (via dualiteit).

Oplossing 4.4: Parseval's Energiestelling

Gegeven: $f(t) = e^{-t}u(t)$ (exponentieel afnemend signaal).
Vraag: Bepaal energie in tijdsdomein; bepaal Fouriertransformatie; verifieer Parseval's stelling.
Oplossing:

(a) **Energie in tijdsdomein:**

$$E_{\text{t}} = \int_0^{\infty} |e^{-t}|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\ \text{J}$$

(b) **Fouriertransformatie:** Via Laplace-paar $e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$ (Formularium 1.1) en LT→FTC-link:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Magnitude:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad |F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$$

(c) **Parseval's Energiestelling (Formularium 1.2):**

$$E_\text{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega$$

Stap 1: Standaardintegraal: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = [\arctan(\omega)]_{-\infty}^{\infty}$

Stap 2: Limieten: $\arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

Stap 3: Energie:

$$E_\text{f} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} \text{ J} \quad \checkmark$$

Conclusie: $E_\text{t} = E_\text{f} = 0.5$ J (Parseval geverifieerd!)

Oplossing 4.5: Exponentieel Signaal en Bandbreedte

Gegeven: $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$ (tweezijdig exponentieel signaal).
Vraag: Bepaal Fouriertransformatie; bereken amplitudespectrum; bepaal 3dB-bandbreedte.
Oplossing:

(a) **Fouriertransformatie (Formularium 1.2):**

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

Splits op bij $t = 0$ (gebruik $|t| = -t$ voor $t < 0$ en $|t| = t$ voor $t > 0$):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

Eerste integraal: $\left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-j\omega}$

Tweede integraal: $\left[\frac{-e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$

Samenvoegen:

$$F(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a + j\omega + a - j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

(b) **Amplitudespectrum:** $|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ (zuiver reëel, dus fasespectrum = 0)

Maximale waarde: $|F(0)| = \frac{2}{a}$

(c) **3dB-Bandbreedte:** Waarden waar $|F(j\omega)| = |F(0)|/\sqrt{2}$:

$$\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \frac{2}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad a^2+\omega^2 = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{3dB} = a$$

(Opmerking: bij de halve-vermogen-frequentie geldt $a^2 + \omega_{3dB}^2 = 2a^2$)

Volle 3dB-bandbreedte: $B_{3dB} = 2a$ rad/s

Oplossing 4.6: Fouriertransformatie van Impulsen

Gegeven: Drie verschillende signalen: Dirac-puls $\delta(t)$, verschoven puls, cosinus.
Vraag: Bepaal Fouriertransformaties; vergelijk spectrale karakteristieken.
Oplossing:

(a) $f(t) = \delta(t)$**:**

$$F(j\omega) = 1 \quad \text{voor alle } \omega$$

(Formularium: impuls-paar 1.2)

Fysische betekenis: Perfecte impuls bevat alle frequenties met gelijk gewicht → wit spectrum.

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$**:**
Via verschuivingsstelling (Formularium 1.2):

$$F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Amplitude: $|F(j\omega)| = 1$ (onafhankelijk van t_0!)

Fase: $\angle F(j\omega) = -\omega t_0$ (lineair met frequentie)

Fysisch: Verschuiving verandert amplitudespectrum niet, alleen faseverandering.

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$**:**

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Via complexe exponentieel-paren (Formularium 1.2):

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Dit zijn twee discrete impulsen op frequenties $\pm\omega_0$ met respectievelijk gewicht π.

Fysisch: Cosinus bevat precies twee frequentiecomponenten (positief en negatief).

Oplossing 4.7: Blokpuls en Tijdverschuiving

Gegeven: $x(t) = 2$ op $(-1/2, 1/2)$, nul elders; $y(t) = x(t - 1/4)$ (verschoven puls).
Vraag: Bepaal $X(j\omega)$ en $Y(j\omega)$; vergelijk magnitudes en fases.
Oplossing:

(a) $X(j\omega)$ **voor blokpuls:** Amplitude $A = 2$, breedte $L = 1$, gecentreerd op $t = 0$:
Formularium: blok-paar 1.2:

$$X(j\omega) = AL \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Nulpunten: $\text{sinc}(\omega/2) = 0$ wanneer $\omega/2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ dus $\omega = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

(b) $Y(j\omega)$ **voor verschoven puls:** Verschoven naar $t = 1/4$:
Formularium: verschuivingsstelling 1.2:

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega/4} \cdot X(j\omega) = 2e^{-j\omega/4}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(c) **Vergelijking magnitudes en fase:**
Magnitude: $|Y(j\omega)| = |e^{-j\omega/4}| \cdot |X(j\omega)| = 1 \cdot |X(j\omega)| = |X(j\omega)|$ (identiek!) ✓
Fase: $\arg Y(j\omega) = -\omega/4 + \arg X(j\omega)$ (extra lineaire fase van $-\omega/4$)
Conclusie: Tijdverschuiving verandert amplitudespectrum niet, voegt alleen lineaire fasevertraging toe.

Oplossing 4.8

Gegeven: $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en tijdverschuiving.
Vraag: Bepaal FTC van verschoven delta's en een lineaire combinatie.
Oplossing:

(a) Met de verschuivingsstelling (Formularium: translatie 1.2) en het paar $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (1.2):

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}.$$

(b) Voor $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$:

$$X(j\omega) = 2 \cdot 1 - e^{-j\omega} = 2 - e^{-j\omega}.$$

(c) **Amplitudespectrum berekening:**
Stap 1: Schrijf $e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$ (Euler):

$$X(j\omega) = 2 - (\cos\omega - j\sin\omega) = (2 - \cos\omega) + j\sin\omega$$

Stap 2: Bereken de modulus:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{(2 - \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2}$$

Stap 3: Uitwerken (gebruik $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$):

$$|X(j\omega)|^2 = 4 - 4\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega \quad (1)$$
$$= 5 - 4\cos\omega \quad (2)$$

Dus: $|X(j\omega)| = \sqrt{5 - 4\cos\omega}$

(d) **Bijzondere waarden:**
$\omega = 0$: $|X(0)| = \sqrt{5 - 4} = 1$ (totale impulssterkte)
$\omega = \pi$: $|X(\pi)| = \sqrt{5 + 4} = 3$ (maximaal)
$\omega = \pi/2$: $|X(\pi/2)| = \sqrt{5} \approx 2.24$

Oplossing 4.9: Spectrum van Samengesteld Signaal

Gegeven: $y(t) = x(t-3) + x(t+3)$
Oplossing:

(a) Met de verschuivingsstelling (Formularium 1.2):

$$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j3\omega} + X(j\omega)e^{j3\omega}$$

(b) Factorisering:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)(e^{-j3\omega} + e^{j3\omega}) = 2X(j\omega)\cos(3\omega)$$

(c) Fysische interpretatie: Het spectrum van x wordt gemodulateerd met een cosinusfactor. Dit is een staande-golfpatroon met nulpunten waar $\cos(3\omega) = 0$.

Oplossing 4.10: Dualiteitseigenschap van FTC

Gegeven: $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (gebruik dualiteit)
Oplossing:

(a) Herken de standaardpaar (Formularium 1.2):

$$\frac{1}{a^2+t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|}$$

Voor $a = 1$: $\frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$

(b) **Dualiteitsstelling** (Formularium 1.2): Als $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, dan $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

In ons geval: $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \pi e^{-|\omega|}$

(c) Verificatie: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$ (arctangenstelling) ✓

10.5 Oplossingen Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

Oplossing 5.1

Gegeven: Blokgolf met periode $T = 2$: $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = -1$ voor $1 < t < 2$.
Vraag: Bepaal symmetrie; bereken Fouriercoëfficiënten; schrijf reeks tot 3e harmonische.
Oplossing:

(a) De functie is **oneven**: $f(-t) = -f(t)$ (na periodieke uitbreiding)

(b) Fouriercoëfficiënten ($\omega_0 = \pi$ rad/s, Formularium: cartesische vorm 1.3):

Stap 1: Bereken a_0 (DC-component):

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 (-1)\,dt = 1 - 1 = 0$$

Stap 2: Bepaal a_n (omdat $f(t)$ oneven is):

Voor oneven functies geldt $a_n = 0$ voor alle n.

Stap 3: Bereken b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \int_0^1 \sin(n\pi t)dt - \int_1^2 \sin(n\pi t)dt$$

$$= \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2$$

$$= \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(2n\pi)-\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}$$

Voor oneven n: $\cos(n\pi) = -1$, dus $b_n = \frac{4}{n\pi}$

Voor even n: $\cos(n\pi) = 1$, dus $b_n = 0$

(c) Fourierreeks tot 3e harmonische:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

Oplossing 5.2

Gegeven: Zaagtandgolf: $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$ met periode $T = 1$.
Vraag: Bereken a_0, b_1, b_2; schrijf Fouriersom met 2 termen.
Oplossing:
Periode $T = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$ (Formularium: cartesische Fourierreeks 1.3).

(a) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 2t\,dt = [t^2]_0^1 = 1$$

(b) **Berekening van b_n met partiële integratie:**
Formularium: $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$ (1.3).

$$b_n = 2\int_0^1 2t\sin(2\pi nt)dt = 4\int_0^1 t\sin(2\pi nt)dt$$

Partiële integratie: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ met $u = t$, $dv = \sin(2\pi nt)dt$:

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}$$

$$b_n = 4\left[t \cdot \left(-\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}dt\right]$$

$$= 4\left[-\frac{\cos(2\pi n)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\Big|_0^1\right]$$

Aangezien $\cos(2\pi n) = 1$ en $\sin(2\pi n) = 0$:

$$b_n = 4\left(-\frac{1}{2\pi n}\right) = -\frac{2}{\pi n}$$

Dus: $b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_2 = -\frac{1}{\pi}$

(c) Benaderende Fouriersom:

$$f(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi}\sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi}\sin(4\pi t)$$

Oplossing 5.3

Gegeven: Driehoekgolf: $f(t) = t$ voor $0 \leq t < 1$, $f(t) = 2 - t$ voor $1 \leq t < 2$, periode $T = 2$.
Vraag: Bepaal symmetrie; bereken coëfficiënten; schrijf eerste drie niet-nul termen.
Oplossing:
Periode $T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$ (Formularium: cartesische vorm 1.3).

(a) Symmetrie: Dit signaal is **even** rond $t = 1$: $f(1 - \tau) = f(1 + \tau)$

Voor even functie: $b_n = 0$ voor alle n.

(b) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + (4-2) - (2-\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}$$

(c) **Berekening van a_n:**

Formularium: $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ (1.3).

$$a_n = \int_0^1 t\cos(n\pi t)dt + \int_1^2 (2-t)\cos(n\pi t)dt$$

Partiële integratie eerste integraal:

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt = \left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi t)dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

Symmetrisch voor tweede integraal: ook $\frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$.

Dus:

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)$$

Voor oneven n: $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$; voor even n: $a_n = 0$.

(d) Eerste drie niet-nul termen:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t)$$

Oplossing 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven: Blokgolf uit oefening 5.1: $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = -1$ voor $1 < t < 2$, periode $T = 2$.

Vraag: Bepaal gemiddelde macht beide via integratie en Parseval; controleer equivalentie.

Oplossing:

(a) **Gemiddelde macht via tijdsdomein-integratie:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1^2 dt + \int_1^2 (-1)^2 dt\right) = \frac{1}{2}[1+1] = 1 \text{ W}$$

(b) **Fourier-coëfficiënten uit Opl. 5.1:**

Voor de blokgolf: $a_0 = 0$, $a_n = 0$ (oneven functie), en $b_n = \frac{4}{n\pi}$ voor oneven n.

(c) **Parseval's Stelling (Formularium 1.3):**

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots\right)$$

Standaardsum: $\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$P = \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = 1 \text{ W} \quad \checkmark$$

Conclusie: Beide methoden geven identieke gemiddelde macht, wat Parseval's stelling bewijst!

Oplossing 5.5

Gegeven: $T = 2$ en $f(t) = 1$ op $(0, 1)$, $f(t) = 0$ op $(1, 2)$, periodiek.

Vraag: Bepaal c_k en link met FTC-samples.

Oplossing: De complexe Fouriercoëfficiënten zijn

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

Omdat $f(t) = 1$ enkel op $(0, 1)$:

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jk\pi t}\,dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - (-1)^k}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Interpretatie: voor even k is $1 - (-1)^k = 0$ dus $c_k = 0$; enkel oneven harmonischen blijven over.

Link met formularium: $X(k\omega_0) = T\,c_k$ zegt dat de FTC van *één periode* (tijdsignaal op lengte T) gesampled op $\omega = k\omega_0$ gelijk is aan T maal de FS-coëfficiënt.

Oplossing 5.6

Gegeven: $T = 2\pi$ en $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.
Vraag: Geef ω_0 en de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, b_n.
Oplossing:

(a) $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

(b) Schrijf de reéle Fourierreeks (Formularium 1.3):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Omdat $f(t)$ al in de basisvorm geschreven is met termen voor $n = 1$ en $n = 2$, herkennen we direct:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle overige a_n, b_n zijn nul.

(c) Ter verificatie:

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\,dt = 1,$$
$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos^2(2t)\,dt = 2.$$

We herkennen direct de standaardvorm

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\big).$$

Vergelijken geeft:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle andere a_n, b_n zijn nul.
Dus de Fourierreeks is gewoon $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.

Oplossing 5.7: De Blokgolf (Symmetrie)

(a) **Symmetrie:** $f(t)$ is **oneven**, want $f(-t) = -f(t)$. (De grafiek is puntsymmetrisch rond de oorsprong).

(b) **Gevolg:** $a_0 = 0$ (gemiddelde is 0) en alle $a_n = 0$. We hoeven alleen b_n te berekenen.

(c) **Berekening b_n:**

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin(nt)dt$$

(We integreren over de halve periode en doen $\times 2$ vanwege symmetrie).

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

Als n even is $(2, 4, \dots)$, is $1 - 1 = 0$. Als n oneven is $(1, 3, \dots)$, is $1 - (-1) = 2$. Dus: $b_n = \frac{4}{n\pi}$ voor oneven n.

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t)$$

Oplossing 5.8: Inspectie

(a) Grondfrequentie van $4t$ en $10t$: De grootste gemene deler van 4 en 10 is 2. Dus $\omega_0 = 2$.

(b) De reeks is gewoon de som van sinussen/cosinussen.

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ \text{Bij } 4t\ (2\omega_0): \quad & a_2 = 2 \\ \text{Bij } 10t\ (5\omega_0): \quad & b_5 = -5 \end{aligned}$$

Alle andere coëfficiënten zijn 0.

Oplossing 5.9: Parseval

Signaal: $3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$.

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}b_5^2$$

$$P = 3^2 + \frac{1}{2}(2^2) + \frac{1}{2}(-5)^2$$

$$P = 9 + 2 + 12.5 = 23.5$$

10.6 Oplossingen Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

Oplossing 6.1: Staprespons via Convolutie en Laplace

Gegeven: Eerste-orde systeem met impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ en ingangssignaal $x(t) = u(t)$.

Vraag: Bepaal systeemrespons $y(t)$ via convolutie; verifieer met Laplacetransformatie.

Oplossing:

(a) **Convolutie in tijdsdomein:**

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t 2e^{-5\tau}d\tau$$

$$\text{Integreer:} \quad y(t) = 2\left[-\frac{1}{5}e^{-5\tau}\right]_0^t = -\frac{2}{5}(e^{-5t} - 1) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t)$$

Steady-state waarde: $y(\infty) = \frac{2}{5}$ V

(b) **Verificatie via Laplacetransformatie:**

$$H(s) = \frac{2}{s+5}, \quad X(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2}{s(s+5)}$$

Partieelbreukontwikkeling: Stel $\frac{2}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$

Vermenigvuldig met $s(s+5)$: $2 = A(s+5) + Bs$

Voor $s = 0$: $2 = 5A \Rightarrow A = \frac{2}{5}$

Voor $s = -5$: $2 = -5B \Rightarrow B = -\frac{2}{5}$

Dus: $Y(s) = \frac{2/5}{s} - \frac{2/5}{s+5}$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium 1.1):

$$y(t) = \frac{2}{5} \cdot 1 - \frac{2}{5}e^{-5t} = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t) \quad \checkmark$$

Beide methoden geven hetzelfde resultaat!

Oplossing 6.2

Gegeven: Massa-veer-dempersysteem: $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, $c = 4$ Ns/m.
Vraag: Schrijf DV; bepaal ω_0; bepaal type demping.
Oplossing:

(a) Differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = f(t)$$

(b) Natuurlijke eigenfrequentie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

(c) Karakteristieke vergelijking: $2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Complexe wortels $\Rightarrow$ Het systeem is **ondergedempt**.

Oplossing 6.3: Frequentierespons en Bandbreedte

Gegeven: LTC-systeem met $H(s) = \frac{10}{s+5}$ (eerste-orde laagdoorsysteem).
Vraag: Bepaal frequentierespons; amplitude/fase; bepaal 3dB bandbreedte.
Oplossing:

(a) **Frequentierespons** (substitutie $s = j\omega$):

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 5}$$

Multipliceer met toegevoegd complex getal:

$$H(j\omega) = \frac{10(5 - j\omega)}{(5 + j\omega)(5 - j\omega)} = \frac{10(5 - j\omega)}{25 + \omega^2} = \frac{50}{25 + \omega^2} - j\frac{10\omega}{25 + \omega^2}$$

(b) **Amplitude- en faserespons:**

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/5)$$

DC-versterking: $|H(0)| = \frac{10}{5} = 2$
Hoge frequenties: $|H(j\omega)| \to 0$ als $\omega \to \infty$

(c) **3dB-Bandbreedte** waar $|H(j\omega)| = |H(0)|/\sqrt{2}$:

$$\frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{25 + \omega^2} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$25 + \omega^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad \omega_{3dB} = 5 \text{ rad/s}$$

Dit geeft ook $f_{3dB} = \omega_{3dB}/(2\pi) \approx 0.796$ Hz

Oplossing 6.4

Gegeven: Twee systemen in cascade: $H_1(s) = \frac{5}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{3}{s+3}$.
Vraag: Bepaal totale overdracht; bepaal impulsrespons.
Oplossing:

(a) Totale overdracht:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{15}{(s+2)(s+3)}$$

(b) **Impulsrespons via partieelbreuken:**

$$\frac{15}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+2)(s+3)$:

$$15 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor $s = -2$: $15 = A(1) \Rightarrow A = 15$

Voor $s = -3$: $15 = B(-1) \Rightarrow B = -15$

Dus:

$$H(s) = \frac{15}{s+2} - \frac{15}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ in 1.1):

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 15e^{-3t}u(t) = 15(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Oplossing 6.5

Gegeven: Drie systemen.
Vraag: Bepaal stabiliteit.
Oplossing:

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$. **Polen:** Los de noemer op: $s - 2 = 0 \Rightarrow s = 2$. Omdat $\text{Re}(s) = 2 > 0$, ligt de pool in het rechterhalfvlak. **Conclusie:** Systeem is BIBO-**onstabiel**.

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. **Polen:** $s = -1, -2$ ($\text{Re}(s) < 0$). Alle polen hebben negatieve reële delen. **Conclusie:** Systeem is BIBO-**stabiel**.

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$. **Polen:** $s^2 = -4 \Rightarrow s = \pm 2j$. Polen liggen op de imaginaire as en zijn enkelvoudig. **Gedrag:** Dit geeft zuivere oscillaties (sinuscomponenten) en geen demping of groei. Het systeem is **marginaal stabiel** (niet asymptotisch stabiel, niet onstabiel).

Oplossing 6.6

Gegeven: $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$ met nul beginvoorwaarden.
Vraag: Bepaal $H(s)$, $h(t)$, stabiliteit en $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.
Oplossing:

(a) Laplace (formularium: afgeleide in t):

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+3)Y(s) = X(s).$$

Dus

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

(b)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-3t}u(t).$$

(c) Pool op $s = -3$ (linkerhalfvlak) $\Rightarrow$ BIBO-stabiel.

(d) Voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$ geldt

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Dan

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+3)}.$$

Met $\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right)$ volgt

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1).$$

Oplossing 6.7

Gegeven: Causaal LTC-systeem met $H(s) = \frac{1}{s+1}$.
Vraag: Bepaal $h(t)$, staprespons, τ en $H(0)$.
Oplossing:

(a)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t).$$

(b) Voor $x(t) = u(t)$: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Daaruit volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

(c) De tijdsconstante is $\tau = 1$ en de DC-versterking is $H(0) = 1$.

Oplossing 6.8: Van DV naar $H(s)$

(a) Laplace: $s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$

(b) $Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s)(s+4) \implies H(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2}$

(c) $H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$. Nulpunt: $s = -4$. Polen: $s = -1, s = -2$.

Oplossing 6.9: Impulsrespons

(a) $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$.

(b) $\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$. A vinden: bedek $(s+1)$, vul $s = -1$ in: $\frac{1}{-1+3} = 0.5$. B vinden: bedek $(s+3)$, vul $s = -3$ in: $\frac{1}{-3+1} = -0.5$. $H(s) = \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+3}$.

(c) $h(t) = 0.5e^{-t}u(t) - 0.5e^{-3t}u(t)$.

(d) Ja, stabiel. De polen (-1 en -3) zijn negatief. De exponentiële functies sterven uit.

Oplossing 6.10: Frequentiegedrag

(a) DC-gain ($s = 0$): $H(0) = \frac{10}{2} = 5$.

(b) Als $\omega \to \infty$, dan $|H(j\omega)| = |\frac{10}{j\omega+2}| \approx \frac{10}{\omega} \to 0$.

(c) Laagdoorlaatfilter (laat lage frequenties door, blokkeert hoge).

10.7 Oplossingen Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

Oplossing 7.1

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal karakteristieke veelterm; vind eigenwaarden; bereken eigenvectoren.

Oplossing:

(a) Karakteristieke veelterm:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

(b) Eigenwaarden: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$

(c) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 5$: Los op $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$:

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Eerste rij: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

Kies $v_1 = 1$, dan:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$: Los op $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$:

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Eerste rij: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

Kies $v_1 = 1$, dan:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.2

Gegeven: Tweede-orde systeem uit oefening 3.4.
Vraag: Schrijf als matrixvergelijking; bepaal eigenwaarden; verifieer; bepaal eigenvectoren.
Oplossing:

(a) Matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

(c) Eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ (hetzelfde als uit oefening 3.4) ✓

(d) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.3

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.
Vraag: Bepaal eigenwaarden/eigenvectoren; controleer orthogonaliteit; bepaal $P^{-1}AP = D$.
Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$

Eigenvectoren: - Voor $\lambda_1 = 6$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) - Voor $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

(b) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(2-2) = 0 \quad \checkmark$$

(c) Diagonalisatie:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.4

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal Gerschgorin-cirkels; geef grenzen; controleer eigenwaarden.

Oplossing:

(a) Gerschgorin-cirkels:

Rij 1: Centrum 4, radius $0.5 + 0.2 = 0.7$, dus $\lambda \in [3.3, 4.7]$

Rij 2: Centrum -2, radius $0.3 + 0.1 = 0.4$, dus $\lambda \in [-2.4, -1.6]$

Rij 3: Centrum 3, radius $0.2 + 0.4 = 0.6$, dus $\lambda \in [2.4, 3.6]$

(b) Alle eigenwaarden liggen in de unie van deze cirkels.

(c) De eigenwaarden zijn ongeveer: $\lambda_1 \approx 4.3$, $\lambda_2 \approx -2.1$, $\lambda_3 \approx 2.8$ (numeriek bepaald)

Alle drie liggen inderdaad in hun respectieve cirkels. ✓

Oplossing 7.5

Gegeven: $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden; bepaal eigenvectoren; toon orthogonaliteit aan; normaliseer.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

(b) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

(d) Genormaliseerde eigenvectoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Verificatie: $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ ✓

Oplossing 7.6

Gegeven: $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal e^{At} en oplossing $\mathbf{x}(t)$.

Oplossing:

(a) Eigenwaarden: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Eigenvectoren: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

(b) Matrix exponentiële $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\0 & e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-t} & 0\\0 & e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-2t}\\-e^{-t} & -2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & -1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\-2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Oplossing $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix}2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t}\\-2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^{-t} - e^{-2t}\\-2e^{-t} + 2e^{-2t}\end{pmatrix}$$

Oplossing 7.7

Gegeven: $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$.

Vraag: Eigenwaarden/eigenruimte; diagonaliseerbaarheid; e^{At}.

Oplossing:

(a) Karakteristieke veelterm: $(2-\lambda)^2 = 0$, dus $\lambda = 2$ (algebraïsche multipliciteit 2). Voor eigenvectoren: $(A - 2I) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$, dus $v_2 = 0$ en v_1 vrij. De eigenruimte is 1-dimensionaal.

(b) Omdat er maar 1 lineair onafhankelijke eigenvector is, is A **niet diagonaliseerbaar**.

(c) Schrijf $A = 2I + N$ met $N = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$ en $N^2 = 0$. Dan

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t}\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

Oplossing 7.8

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Eigenwaarden/eigenvectoren, A^3 en e^{At}.

Oplossing:

(a) Omdat A diagonaal is, zijn de eigenwaarden de diagonaalelementen:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Bijhorende eigenvectoren kunnen gekozen worden als de standaardbasisvectoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\lambda = 1), \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\lambda = 2).$$

(b)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Voor een diagonaalmatrix geldt $e^{At} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren; bereken A^3; bereken e^{At}.

Oplossing:

(a) Voor een diagonaalmatrix zijn de diagonaalelementen de eigenwaarden:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(De standaard basiseenheidsvectoren)

(b) Voor diagonaalmatrix:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(c) Matrix exponentiaal:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Algemeen: voor diagonaalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ geldt:

$$e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}, \ldots, e^{d_n t})$$

Oplossing 7.9: Karakteristieke Vergelijking

(a) det $\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$.

(b) $\lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = 0 \implies \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. Ontbinden: $(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$. Eigenwaarden: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.

Oplossing 7.10: Eigenvectoren

(a) Voor $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit geeft $2x + y = 0 \implies y = -2x$. Kies $x = 1$, dan $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Voor $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit geeft $-x + y = 0 \implies y = x$. Kies $x = 1$, dan $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oplossing 7.11: Diagonaalmatrix

(a) Eigenwaarden zijn de diagonaalelementen: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

(b) $D^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8

Oplossing:

(a) **Symmetrie controleren.**

- Stap 1: noteer de definities.
  - even: $f(-t) = f(t)$
  - oneven: $f(-t) = -f(t)$
- Stap 2: $x(t)$ is een rechthoekpuls rond 0 met dezelfde waarde links en rechts, dus $x(-t) = x(t)$ en $x(t)$ is **even**.
- Stap 3: $v(t) = 2\cos(2\pi t)$ is **even** omdat cos even is.
- Stap 4: $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ is product van twee even functies, dus ook **even**.
- Stap 5: $z(t) = x(t)+x(t-1)$ bevat een verschoven term $x(t-1)$; door die verschuiving is $z(-t)$ in het algemeen niet gelijk aan $\pm z(t)$, dus **noch even noch oneven**.

(b) $Y(j\omega)$ **via modulatie.**

- Stap 1: bepaal $X(j\omega)$. Voor het blok met amplitude 1 en breedte 1 geldt (zoals in het formularium):

$$X(j\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad \text{met } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Stap 2: schrijf de cosinus als exponentiëlen:

$$\cos(\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right), \qquad \omega_0 = 2\pi.$$

- Stap 3: vermenigvuldigen in de tijd is verschuiven in het frequentiedomein. Daaruit volgt de modulatieregel:

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[X\big(j(\omega-\omega_0)\big) + X\big(j(\omega+\omega_0)\big)\right].$$

- Stap 4: invullen van $X(j\omega)$ geeft

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega+2\pi}{2}\right)\right].$$

(c) $Z(j\omega)$ **via tijdverschuiving.**

- Stap 1: gebruik de verschuivingsregel $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.
- Stap 2: voor $t_0 = 1$ wordt $x(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega}X(j\omega)$.
- Stap 3: optellen in tijd is optellen in frequentie, dus

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega}X(j\omega) = (1+e^{-j\omega})X(j\omega).$$

Oplossing 8.2

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-t}u(t)$.
Oplossing:

(a) **Laplace van de ingang $x(t)$.**

- Stap 1: gebruik $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$.

- Stap 2: gebruik de verschuivingsregel $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$.

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1-e^{-2s}}{s}.$$

(b) **Causaliteit.** Omdat $h(t) = e^{-t}u(t) = 0$ voor $t < 0$ is de impulsrespons rechtszijdig $\Rightarrow$ het LTI-systeem is **causaal**.

(c) **Uitgang $y(t)$ via Laplace.**

- Stap 1: bepaal $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
- Stap 2: gebruik $Y(s) = H(s)X(s)$:

$$Y(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s+1)}.$$

- Stap 3: splits op in een niet-vertraagde en een vertraagde term:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} - e^{-2s}\frac{1}{s(s+1)}.$$

- Stap 4: herken de basis-inversie $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1-e^{-t})u(t)$.
- Stap 5: pas de vertraging toe: $e^{-2s}G(s) \leftrightarrow g(t-2)u(t-2)$.

Daarmee

$$y(t) = (1-e^{-t})u(t) - (1-e^{-(t-2)})u(t-2).$$

Oplossing 8.3

Gegeven: $T = 2$, $p(t) = 1$ op $(0, \frac{1}{2})$, anders 0, periodiek.
Oplossing:

(a) **Complexe Fourierreekscoëfficiënten c_k.**

- Stap 1: grondfrequentie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
- Stap 2: definitie:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 p(t)e^{-jk\pi t}\,dt.$$

- Stap 3: omdat $p(t) = 1$ enkel op $(0, \frac{1}{2})$ en 0 elders binnen $[0, 2)$, reduceert de integraal tot

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} e^{-jk\pi t}\,dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-e^{-jk\pi/2}}{jk\pi}.$$

Voor $k = 0$ (gemiddelde waarde):

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\text{pulsduur } \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) **Symmetrie.** Omdat $p(t)$ reëel is, geldt altijd $c_{-k} = c_k^*$ (complex geconjugeerde symmetrie).

(c) **Link met de Fouriertransformatie.** Voor een periodieke extensie kan je de harmonischen interpreteren als samples van de CTFT van *één periode* (zoals in het formularium):

$$X(jk\omega_0) = T\,c_k.$$

Dit vertelt je dat de spectrale lijnen (op $k\omega_0$) gewogen worden door c_k.

Oplossing 8.4

Gegeven: $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2)$.
Vraag: (a) $X(s)$, (b) $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$, (c) controle via begin-/eindwaardestelling.
Oplossing:

(a) **Bepaal $X(s)$.**

- Stap 1: herken $x(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$ met $x_1(t) = e^{-t}u(t)$.
- Stap 2: Laplace van x_1 is $\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
- Stap 3: een vertraging met 2 geeft een factor e^{-2s}: $x_1(t-2) \leftrightarrow e^{-2s}\frac{1}{s+1}$.

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - e^{-2s}\frac{1}{s+1} = \frac{1-e^{-2s}}{s+1}.$$

(b) **Begin- en eindgedrag in de tijd.**

- Stap 1: voor $t \to 0^+$ geldt $u(t) = 1$ en $u(t-2) = 0$. Dus $x(0^+) = e^0 - 0 = 1$.
- Stap 2: voor $t \to \infty$ gaan e^{-t} en $e^{-(t-2)}$ naar 0, dus $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

(c) **Controle met begin-/eindwaardestelling.**

- Beginwaardestelling:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1} = 1.$$

- Eindwaardestelling: de polen van $sX(s)$ moeten strikt links liggen. Hier $sX(s) = \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1}$ heeft enkel een pool in $s = -1$ (links), dus de eindwaardestelling is toepasbaar:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1} = 0.$$

Oplossing 8.5

Gegeven: $y'' + 3y' + 2y = u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Vraag: (a) los op via (unilaterale) Laplace, (b) geef $y(t)$.
Oplossing:

- Stap 1: neem (unilaterale) Laplace en gebruik de standaardregels met beginvoorwaarden:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0), \qquad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0).$$

- Stap 2: invullen van $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ geeft

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - 1, \qquad \mathcal{L}\{y'\} = sY.$$

- Stap 3: Laplace op de differentiaalvergelijking:

$$(s^2 Y - 1) + 3(sY) + 2Y = \frac{1}{s}.$$

- Stap 4: verzamel de termen met Y:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}.$$

- Stap 5: factoriseer $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ en vereenvoudig:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}.$$

- Stap 6: partiële breuken:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right).$$

- Stap 7: inverse Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t).$$

Oplossing 8.6

Gegeven: Causaal LTI-systeem met $H(s) = \dfrac{s+2}{s(s+4)}$.

Vraag: (a) $h(t)$, (b) BIBO-stabiliteit, (c) staprespons, (d) eindwaarde.
Oplossing:

(a) **Impulse response $h(t)$.**

- Stap 1: schrijf $H(s)$ als partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}.$$

- Stap 2: maak noemers gelijk:

$$s + 2 = A(s+4) + Bs = (A+B)s + 4A.$$

- Stap 3: vergelijk coëfficiënten: $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ en $A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$.
- Stap 4: inverse Laplace (causaal $\Rightarrow$ vermenigvuldig met $u(t)$):

$$h(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-4t}u(t).$$

(b) **BIBO-stabiliteit.** Een LTI-systeem is BIBO-stabiel als $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$. Hier zit er een constante term $\frac{1}{2}u(t)$ in $h(t)$, dus de integraal divergeert. Equivalent: $H(s)$ heeft een pool in $s = 0$ (niet strikt links) $\Rightarrow$ **niet BIBO-stabiel**.

(c) **Staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.**

- Stap 1: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)}.$$

- Stap 2: partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}.$$

Oplossen (bv. door coëfficiënten te vergelijken) geeft $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{8}$.

- Stap 3: inverse Laplace term per term:
  - $\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t)$
  - $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\,u(t)$
  - $\frac{1}{s+4} \leftrightarrow e^{-4t}u(t)$

Dus

$$y(t) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-4t}\right) u(t).$$

(d) **Eindwaarde / gedrag voor grote t.** De term $\frac{1}{2}t$ groeit onbegrensd, dus $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$. Dat is consistent met het feit dat de eindwaardestelling hier niet bruikbaar is (pool op $s = 0$).

Oplossing 8.7

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-1)$ en $h(t) = t\,u(t)$.
Vraag: (a) $y(t) = x * h$ stukgewijs, (b) controle via Laplace.
Oplossing:

(a) **Convolutie $y(t) = (x * h)(t)$.**

- Stap 1: schrijf de convolutie uit:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.$$

- Stap 2: bepaal waar $x(\tau)$ niet nul is. Omdat $x(t) = u(t) - u(t-1)$, geldt $x(\tau) = 1$ voor $0 \le \tau < 1$ en 0 elders.
- Stap 3: vul $h(t-\tau) = (t-\tau)u(t-\tau)$ in en beperk de integraal:

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau.$$

- Stap 4: de factor $u(t-\tau)$ dwingt $t - \tau \ge 0 \Rightarrow \tau \le t$. Daarom zijn de effectieve grenzen $\tau \in [0,1] \cap (-\infty, t]$.

Stukgewijs:

- $t < 0$: geen overlap, dus $y(t) = 0$.
- $0 \le t < 1$: overlap $\tau \in [0, t]$:

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

- $t \ge 1$: volledige overlap $\tau \in [0, 1]$:

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^1 = t - \frac{1}{2}.$$

Een compacte stapfunctie-vorm is bv.

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1).$$

(b) **Controle via Laplace.**

- Stap 1: $X(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}$.
- Stap 2: $H(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$.
- Stap 3: $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^3}$.
- Stap 4: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2}u(t)$ en de factor e^{-s} geeft vertraging met 1.

Dus opnieuw

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1),$$

wat overeenkomt met de stukgewijze uitkomst.

Oplossing 8.8

Gegeven: $x(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.
Vraag: (a) $X(j\omega)$, (b) energie, (c) Parseval.
Oplossing:

(a) **Fouriertransformatie $X(j\omega)$.**

- Stap 1: $x(t) = e^{-a|t|}$ is even, dus de CTFT kan met een cosinus-integraal:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(\omega t)dt.$$

- Stap 2: gebruik de standaard integraal $\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(\omega t)dt = \frac{a}{a^2+\omega^2}$ (voor $a > 0$).

Dus

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

(b) **Energie E.**

- Stap 1: energie is $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int e^{-2a|t|}dt$.
- Stap 2: weer evenheid gebruiken:

$$E = 2\int_0^{\infty} e^{-2at}dt = 2\left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

(c) **Parseval-controle.** Parseval zegt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Hier is $|X(j\omega)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$. Met de bekende integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$ volgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a},$$

dus consistent met (b).

Oplossing 8.9

Gegeven: $f(t) = 1$ op $(0, \pi)$ en $f(t) = -1$ op $(-\pi, 0)$, $T = 2\pi$.
Vraag: (a) symmetrie, (b) Fourierreeks, (c) RMS en Parseval.
Oplossing:

(a) **Symmetrie.** Controleer $f(-t)$: op $t \in (0, \pi)$ is $f(t) = 1$ en $f(-t) = -1$, dus $f(-t) = -f(t)$. Daarom is f **oneven** $\Rightarrow a_0 = 0$ en $a_n = 0$.

(b) **Fourierreeks (enkel sinus-termen).**

- Stap 1: voor een oneven functie geldt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt.$$

- Stap 2: op $(0, \pi)$ is $f(t) = 1$, dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, dt.$$

- Stap 3: integreer:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Daaruit volgt: $b_n = 0$ voor even n, en $b_n = \frac{4}{\pi n}$ voor oneven n. De reeks wordt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\big((2k+1)t\big).$$

(c) **RMS en Parseval.**

- Stap 1: $f^2(t) = 1$ bijna overal, dus

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt} = 1.$$

- Stap 2: Parseval voor de reële Fourierreeks (met enkel b_n):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Links is $\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$. Rechts:

$$\sum_{n \text{ oneven}} \left(\frac{4}{\pi n} \right)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2}.$$

Met $\sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ volgt rechts $= 2$, dus klopt.

Oplossing 8.10

Gegeven: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{x}(0) = (1,0)^T$.

Vraag: (a) eigenwaarden + stabiliteit, (b)(c) expliciete oplossing.

Oplossing:

(a) **Eigenwaarden en stabiliteit.**

- Stap 1: karakteristieke veelterm via $\det(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2.$$

- Stap 2: uitwerken:

$$\lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

- Stap 3: eigenwaarden:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

- Stap 4: omdat beide eigenwaarden strikt negatief zijn, is de oorsprong **asymptotisch stabiel**.

(b) **Expliciete oplossing voor $x_1(t)$.**

- Stap 1: schrijf de toestandsvergelijkingen uit: $\dot{x}_1 = x_2$ en $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$.
- Stap 2: elimineer x_2 door te differentiëren: $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3\dot{x}_1$. Dus

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0.$$

- Stap 3: los de karakteristieke vergelijking $r^2 + 3r + 2 = 0$ op: $r = -1, -2$.
- Stap 4: algemene oplossing:

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

(c) **Constanten bepalen en $x_2(t)$.**

- Stap 1: beginvoorwaarde $x_1(0) = 1$ geeft $C_1 + C_2 = 1$.
- Stap 2: omdat $x_2 = \dot{x}_1$ geldt

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

  Beginvoorwaarde $x_2(0) = 0$ geeft $-C_1 - 2C_2 = 0$.
- Stap 3: los het stelsel op:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow C_2 = -1,\ C_1 = 2.$$

Dus

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad x_2(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Oplossing 8.11

Gegeven: $H(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6}$ (causaal LTC-systeem).
Vraag: Polen; stabiliteit; impulsrespons; staprespons.
Oplossing:

(a) **Polen van het systeem.**

Eerst factoriseren we de noemer:

$$s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

Dus: $H(s) = \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)}$
De polen zijn $s = -2$ en $s = -3$.

(b) **BIBO-stabiliteit.**

Omdat beide polen in het linkerhalfvlak liggen (reëel deel < 0), is het systeem **BIBO-stabiel**.

(c) **Impulsrespons via partieelbreuken.**

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{2s+3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+2)(s+3)$:

$$2s + 3 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor $s = -2$: $2(-2) + 3 = A(1) \Rightarrow A = -1$
Voor $s = -3$: $2(-3) + 3 = B(-1) \Rightarrow B = 3$
Dus:

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$):

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) = (3e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Staprespons voor $x(t) = u(t)$.**

Voor stapingang: $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$$

Partieelbreuken:

$$\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3}$$

Voor $s = 0$: $3 = C(2)(3) = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$
Voor $s = -2$: $-4 + 3 = D(-2)(1) \Rightarrow D = \frac{1}{2}$
Voor $s = -3$: $-6 + 3 = E(-3)(-1) \Rightarrow E = -1$

Dus:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) u(t)$$

Dit is de staprespons.

Oplossing 8.12

Gegeven: $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+2}$ en input $x(t) = 2u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Vraag: DV bepalen; oplossen; verifiëren met Laplace.
Oplossing:

(a) **Differentiaalvergelijking uit overdrachtsfunctie.**

Voor een systeem met nul initiële voorwaarden geldt:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}$$

Dit geeft:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 4X(s)$$

In het tijdsdomein (Formularium: afgeleide-eigenschap):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 4x(t)$$

(b) **Oplossing met beginvoorwaarden.**

Voor $x(t) = 2u(t)$ en nul initiële voorwaarden eerst: $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 8u(t)$

Homogene oplossing:

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

$y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

Particuliere oplossing:

Voor constante input: $y_p(t) = K$ (constant)

$0 + 0 + 2K = 8 \Rightarrow K = 4$

Algemene oplossing:

$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 4$

Met $y(0) = 0$: $C_1 + C_2 + 4 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -4$

$y'(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}$

Met $y'(0) = 1$: $-C_1 - 2C_2 = 1$

Oplossen: $C_1 = -9$, $C_2 = 5$

$$y(t) = -9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4$$

(c) **Controle met Laplace.**
$X(s) = \frac{2}{s}$
$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{8}{s(s+1)(s+2)}$
Partieelbreuken:

$$\frac{8}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{s} - \frac{9}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = 4u(t) - 9e^{-t}u(t) + 5e^{-2t}u(t) = (-9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4)u(t)$$

Dit komt overeen! ✓

Oplossing 8.13

Gegeven: $f(t) = 3e^{-2t}u(t)$.
Vraag: FTC bepalen; amplitudespectrum; energie; Parseval verifiëren.
Oplossing:

(a) **Fouriertransformatie via Laplace-link.**
Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ (Laplace, 1.1)
Met de link LT($s = j\omega$) = FTC($j\omega$) (1.1):

$$F(j\omega) = 3 \cdot \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{3}{2 + j\omega}$$

(b) **Amplitudespectrum.**

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{3}{2 + j\omega}\right| = \frac{3}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

Dit is een dalende functie van ω (Lorentz-vorm), met maximum $|F(0)| = 3/2$ en nulpunt op ∞.

(c) **Energiedichtheid in tijdsdomein.**

$$E = \int_0^\infty |3e^{-2t}|^2 dt = 9 \int_0^\infty e^{-4t} dt = 9 \cdot \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^\infty = \frac{9}{4}$$

(d) **Verifiëring met Parseval's stelling.**

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{4 + \omega^2} d\omega$$

$$= \frac{9}{2\pi} [\arctan(\omega/2)/2]_{-\infty}^{\infty} = \frac{9}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{9}{4} \quad ✓$$

Beide methoden geven dezelfde energie!