Oefeningen Wiskunde voor Systemen

KU Leuven - ESAT

13 december 2025

Inhoudsopgave

1 Formularium

Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het "Signals and Systems" formularium. In de oefeningen wordt hiernaar verwezen.

1.1 Laplace transform (LT)

1.1 Definitie en eigenschappen

$$\begin{array}{llcl}
\text{Definitie:} & f(t)\,u(t) & \longleftrightarrow & F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt \\
\text{translatie in } s: & f(t)e^{-at}\,u(t) & \longleftrightarrow & F(s+a) \\
\text{translatie in } t: & f(t-a)\,u(t-a) & \longleftrightarrow & e^{-as}F(s) \\
\text{afgeleide in } t: & \frac{d}{dt}\big(f(t)u(t)\big) & \longleftrightarrow & sF(s) - f(0^+) \\
 & \frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)u(t)\big) & \longleftrightarrow & s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+) \\
\text{afgeleide in } s: & t\,f(t)\,u(t) & \longleftrightarrow & -\frac{d}{ds}F(s) \\
 & t^n f(t)\,u(t) & \longleftrightarrow & (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \\
\text{convolutie:} & \big(f * g\big)(t)\,u(t) & \longleftrightarrow & F(s)\,G(s) \\
\text{schaling:} & f(at) & \longleftrightarrow & \frac{1}{a}\,F\Big(\frac{s}{a}\Big)
\end{array}$$

Initial value theorem:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Final value theorem:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad \text{(onder de gebruikelijke poolvoorwaarden).}$$

Link met FTC:

$$\mathrm{LT}(s = j\omega) = \mathrm{FTC}(j\omega) \quad \text{als } x(t) \text{ absoluut integreerbaar is.}$$

1.2 Useful Laplace pairs

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
e^{-at}u(t) & \longleftrightarrow & \frac{1}{s+a} & t^n u(t) & \longleftrightarrow & \frac{n!}{s^{n+1}} \\
\cos(at)u(t) & \longleftrightarrow & \frac{s}{s^2+a^2} & \sin(at)u(t) & \longleftrightarrow & \frac{a}{s^2+a^2} \\
\delta(t) & \longleftrightarrow & 1 & u(t) & \longleftrightarrow & \frac{1}{s} \\
t\cos(at)u(t) & \longleftrightarrow & \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} & t\sin(at)u(t) & \longleftrightarrow & \frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}
\end{array}$$

1.2 Fourier transform (FTC)

2.1 Basic formulae

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

convolution theorem (tijd):	$f(t) * g(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega)\, G(\omega)$
convolution theorem (freq.):	$f(t)\, g(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi}\,(F * G)(\omega)$
translatie:	$x(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
symmetry (reëel x):			$X(-\omega) = X^*(\omega)$
time symmetry (reëel x):	$x(-t)$	$\longleftrightarrow$	$X(-\omega) = X^*(\omega)$
link FS–FTC:			$X(k\omega_0) = T\, c_k \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$

2.2 Useful Fourier pairs

We gebruiken $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Block:	$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-L/2, L/2] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) = AL \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right)$
Sinc:	$x(t) = A \operatorname{sinc}(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_0}, & \lvert\omega\rvert < \omega_0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$
Impuls:	$\delta(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j\omega t_0}$
Complex expon.:	$e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$
Cosine:	$\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$\pi\, [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Sine:	$\sin(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$j\pi\, [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
Delta train:	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

1.3 Fourier series (FS)

3.1 Cartesian form

Voor periode T met $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right].$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt, \qquad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt.$$

3.2 Complex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt.$$

symmetry (reëel f): $c_{-k} = c_k^*$.
Spectrum:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta(\omega - k\omega_0).$$

3.3 Links between cartesian and complex form

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \qquad c_k^* = \frac{a_k + jb_k}{2}.$$

$$|c_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \varphi_k = \mathrm{Arctan2}(a_k, -b_k).$$

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\}, \qquad b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\}.$$

2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen

Gegeven een systeem met operator $\mathcal{T}$ gedefinieerd als $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.

Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.

2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit

Een RC-circuit heeft $R = 1000\ \Omega$ en $C = 10\ \mu$F. De ingangsspanning is een stapfunctie $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.

Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning $v_{\text{uit}}(t)$.

(b) Bereken de tijdsconstante τ van het circuit.

(c) Bepaal de uitgangsspanning na 10 ms als $v_{\text{uit}}(0) = 0$ V.

2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval

Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd.

Vraag: Hoeveel milligram blijft over om 14:00 uur?

2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit

Gegeven twee systemen:

- Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
- Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Vraag:

(a) Test beide systemen op homogeniteit (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$.

(b) Test beide systemen op additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$.

(c) Bepaal voor elk systeem of het lineair is.

2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning

Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?

(a) $y(t) = x(t - 2)$

(b) $y(t) = tx(t)$

(c) $y(t) = |x(t)|$

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

Vraag: Motiveer je antwoorden.

2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit

Gegeven het systeem $\mathcal{T}$ met

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + x(t-1).$$

Vraag:

(a) Is het systeem lineair en tijdinvariant?

(b) Is het systeem causaal?

(c) Is het systeem invertibel? Motiveer.

2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)

Beschouw de twee systemen:

$$\text{(S1) } y(t) = 2x(t-1), \qquad \text{(S2) } y(t) = x(t) + u(t).$$

Vraag:

(a) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is.

(b) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdinvariant is.

(c) Is elk systeem causaal? Motiveer kort.

3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies

Gegeven de signalen $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

Vraag:

(a) Bepaal welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont.

(b) Bereken de waarde van elk signaal op $t = 5$ s.

3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus

Een sinusgolf is gegeven door $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.

Vraag:

(a) Bepaal de amplitude, hoekfrequentie ω, frequentie f, en fasehoek.

(b) Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.

3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie

Gegeven $z(t) = e^{j2\pi t}$.

Vraag:

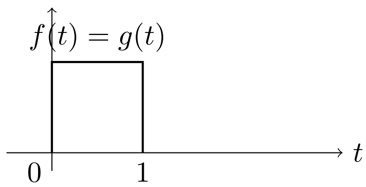
(a) Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formule van Euler.

(b) Bepaal de waarde op $t = 0.25$ s.

3.4 Oefening 2.4: Convolutie

Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = u(t) - u(t-1)$$

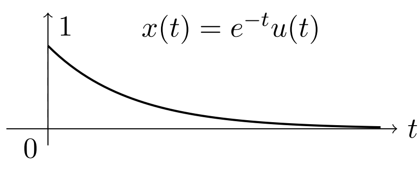


Zie Formularium: convolutie in tijd $\leftrightarrow$ product in frequentie in 1.2.

Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets het resultaat.

3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling

Gegeven het signaal $x(t) = e^{-t}u(t)$.



Vraag:

(a) Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$ (tijdsverschuiving).

(b) Bepaal $y_2(t) = x(2t)$ (tijdscompressie).

(c) Bepaal $y_3(t) = 2x(t)$ (amplitude schaling).

(d) Schets alle drie signalen.

3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie

Bepaal de energie van de volgende signalen:

Vraag:

(a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

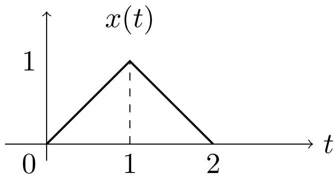
(b) $x(t) = 2\sin(t)u(t)$ over $0 \leq t \leq \pi$

(c) $x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$

3.7 Oefening 2.7: Driehoeksignaal met Stapfuncties

Definieer het signaal

$$x(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + (2-t)\big(u(t-1) - u(t-2)\big).$$



Vraag:

(a) Schrijf $x(t)$ expliciet als stukgewijze functie.

(b) Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$.

(c) Bepaal en schets $x(t-1)$.

3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)

Neem

$$x(t) = u(t) - u(t-2).$$

Vraag:

(a) Schets $x(t)$.

(b) Schrijf $x(t-1)$ en $x(t+1)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

(c) Schrijf $x(2t)$ en $x(-t)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

4.1 Oefening 3.1: Eenvoudige Laplacetransformaties

Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:

Zie Formularium: definitie 1.1 en paren 1.1.

Vraag:

(a) $f(t) = 5u(t)$

(b) $f(t) = e^{-3t}u(t)$

(c) $f(t) = t \cdot u(t)$

(d) $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$

4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$$

Vraag: Vind $f(t)$.

Zie Formularium: paren 1.1.

4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem

Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:

$$\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t), \quad y(0) = 2$$

Vraag: Bepaal $y(t)$.

Zie Formularium: afgeleide-eigenschap 1.1.

4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem

Een massa-veer-dempersysteem wordt beschreven door:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Vraag:

(a) Bepaal de karakteristieke vergelijking.

(b) Vind de wortels van de karakteristieke vergelijking.

(c) Los de differentiaalvergelijking op voor $y(t)$.

4.5 Oefening 3.5: Laplace-transformatie met Verschuiving

Gegeven $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$.

Vraag:

(a) Bepaal $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

(b) Bepaal $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$ gebruikmakend van de tijdsverschuivingsstelling.

Zie Formularium: tijdsverschuiving in t 1.1.

4.6 Oefening 3.6: Partieelbreuken

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Vraag: Bepaal $f(t)$ via partieelbreukontwikkeling.

4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling

Gegeven de functie in het s-domein:

$$F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}$$

Vraag:

(a) Bepaal de beginwaarde $f(0^+)$ met de beginwaardestelling.

(b) Bepaal de eindwaarde $f(\infty)$ met de eindwaardestelling.

(c) Controleer je antwoorden door $f(t)$ te berekenen.

Zie Formularium: begin- en eindwaardestelling 1.1.

4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace

Gegeven

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = e^{-2t}u(t).$$

Definieer $y(t) = (f * g)(t)$.

Zie Formularium: convolutie-eigenschap 1.1.

Vraag:

(a) Bepaal $F(s)$ en $G(s)$.

(b) Gebruik de convolutie-eigenschap in het s-domein om $Y(s)$ te vinden.

(c) Bepaal $y(t)$ en geef het antwoord stukgewijs.

4.9 Oefening 3.9: Laplace

Vraag:

(a) Bepaal $\mathcal{L}\{u(t)\}$.

(b) Bepaal $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$.

(c) Bepaal $\mathcal{L}\{t\,u(t)\}$.

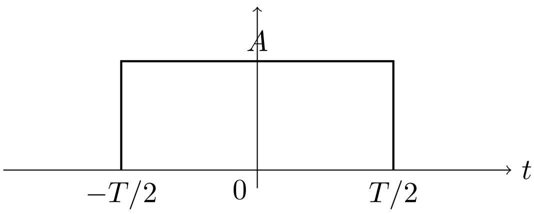
(d) Bepaal de inverse Laplace van $F(s) = \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{2}{s^2}$.

5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls

Gegeven een rechthoekpuls:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Zie Formularium: blok ↔ sinc in 1.2.
Vraag:

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.

(b) Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie.

(c) Bepaal de eerste nulpunten van het spectrum.

5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling

Gegeven $F\{f(t)\} = F(j\omega)$ bepaal de Fouriertransformatie van $f(t - t_0)$.
Zie Formularium: tijdverschuiving 1.2.
Vraag:

(a) Geef het bewijs van de verschuivingsstelling.

(b) Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met $t_0 = 1$ s, $A = 2$, $T = 2$ s.

(c) Bespreek het effect op amplitude- en fasespectrum.

5.3 Oefening 4.3: Modulation Property

Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

$$x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$$

waarbij $\text{rect}(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$ is.
Zie Formularium: modulatie (cosinus) in 1.2.
Vraag:

(a) Pas de modulatiestelling toe.

(b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling

De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven $f(t) = e^{-t}u(t)$.

Zie Formularium: FTC-definitie 1.2 en eigenschappen 1.2.

Vraag:

(a) Bepaal de totale energie in het tijdsdomein: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

(b) Bepaal $F(j\omega)$ en controleer de energie in het frequentiedomein.

(c) Verifieer Parseval's stelling.

5.5 Oefening 4.5: Exponentieel Signaal

Gegeven $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.

Vraag:

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.

(b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

(c) Bepaal de bandbreedte (eerste nulpunt).

5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta

Bepaal de Fouriertransformatie van:

Vraag:

(a) $f(t) = \delta(t)$ (impulsfunctie)

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$ (verschoven impulsfunctie)

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ (hint: gebruik dat $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$)

5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)

Beschouw het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en definieer $y(t) = x(t - t_0)$ met $t_0 = \frac{1}{4}$.

Vraag:

(a) Bepaal $X(j\omega)$.

(b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.

5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's

Gebruik de bekende paren $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en de verschuivingsstelling.

Vraag:

(a) Bepaal $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$.

(b) Bepaal de Fouriertransformatie van $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$.

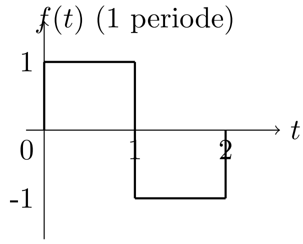
(c) Wat is het amplitudespectrum van $x(t)$ uit (b)? (geen volledige schets nodig)

6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

6.1 Oefening 5.1: Blokgolf

Een periodieke blokgolf met periode $T = 2$ s is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



Zie Formularium: Fourierreeks (cartesisch) 1.3 en (complex) 1.3.

Vraag:

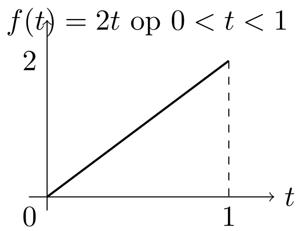
(a) Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is.

(b) Bereken de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, en b_n.

(c) Schrijf de Fourierreeks tot de 3e harmonische.

6.2 Oefening 5.2: Zaagtandgolf

Een zaagtandgolf met periode $T = 1$ s is gegeven door $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$.



Vraag:

(a) Bereken a_0.

(b) Bepaal b_1 en b_2.

(c) Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.

6.3 Oefening 5.3: Driehoekgolf

Een driehoekgolf met periode $T = 2$ is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Vraag:

(a) Is dit signaal even of oneven?

(b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten.

(c) Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fourierreeks.

6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.

Vraag:

(a) Bereken de gemiddelde macht van het signaal: $P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$.

(b) Bereken P uit de Fouriercoëfficiënten met Parseval's stelling: $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

(c) Controleer dat beide methoden dezelfde waarde geven.

6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

(a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k (met $\omega_0 = 2\pi/T$).

(b) Geef een eenvoudige interpretatie van welke harmonischen verdwijnen.

(c) Gebruik de link uit het formularium $X(k\omega_0) = T\,c_k$ om uit te leggen hoe de FTC van *één periode* gesampled wordt.

6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som

Neem een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t).$$

Vraag:

(a) Geef ω_0.

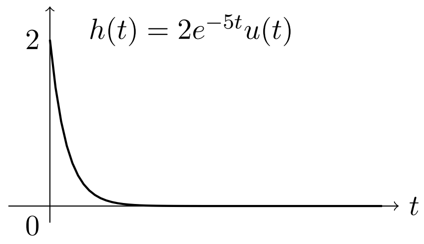
(b) Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten a_0, a_n en b_n.

(c) Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen herkennen welke termen niet nul zijn).

7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons

Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$.



Vraag:

(a) Bereken de systeemrespons op een stapingang $f(t) = u(t)$ door convolutie.

(b) Verifieer je antwoord met de Laplacetransformatie.

7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper

Een massa-veer-dempersysteem heeft $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, en $c = 4$ Ns/m.

Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking.

(b) Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie ω_0.

(c) Is het systeem ondergedempt, kritisch gedempt, of overgedempt?

7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons

Gegeven een LTC-systeem met overdracht $H(s) = \frac{10}{s+5}$.

Vraag:

(a) Bepaal de frequentierespons $H(j\omega)$.

(b) Bepaal de amplitude- en faserespons.

(c) Bepaal de 3dB bandbreedte (waar $|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$).

7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen

Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

$$H_1(s) = \frac{5}{s+2}, \quad H_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

Vraag:

(a) Bepaal de totale overdracht $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen

Bepaal voor de volgende systemen of ze BIBO-stabiel, marginaal stabiel of onstabiel zijn op basis van hun polen.

Vraag:

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$

7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons

Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

Vraag:

(a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(c) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer via de polen.

(d) Bepaal de nultoestandsrespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)

Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(b) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.

(c) Wat is de tijdsconstante τ en de DC-versterking $H(0)$?

8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal de karakteristieke veelterm $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.

(b) Vind de eigenwaarden van A.

(c) Bereken voor elke eigenwaarde een bijbehorende eigenvector.

8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem

Voor het systeem uit oefening 3.4 ($\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$).

Vraag:

(a) Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix.

(c) Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit oefening 3.4.

(d) Bepaal de eigenvectoren.

8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

(b) Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (omdat A symmetrisch is).

(c) Vorm de matrix P met eigenvectoren als kolommen en bepaal $P^{-1}AP = D$ waarbij D diagonaal is.

8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix.

(b) Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling.

(c) Bepaal de eigenwaarden numeriek en controleer of ze binnen de cirkels vallen.

8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit

Gegeven de matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden.

(b) Bepaal de eigenvectoren.

(c) Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn.

(d) Normaliseer de eigenvectoren tot eenheid.

8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële

Gegeven de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(b) Bereken de matrix exponentiële e^{At} via diagonalisatie of Cayley-Hamilton.

(c) Gebruik dit om de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ te vinden met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden van A en de dimensie van de eigenruimte.

(b) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer.

(c) Bepaal e^{At}.

8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis)

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector.

(b) Bereken A^3.

(c) Bereken e^{At}.

9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen

9.1 Oefening 8.1: FTC-eigenschappen (Verschuiving en Modulatie)

Definieer het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en de cosinus $v(t) = 2\cos(2\pi t)$. Definieer $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ en $z(t) = x(t) + x(t-1)$.

Vraag:

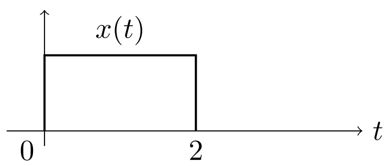
(a) Welke van de signalen $x(t)$, $v(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ zijn even/oneven?

(b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de modulatiestelling en een gekende FTC-paar voor $x(t)$.

(c) Bepaal $Z(j\omega)$ met de verschuivingsstelling.

9.2 Oefening 8.2: Laplace, Causaliteit en Convolutie

Het ingangssignaal is $x(t) = u(t) - u(t-2)$ en de impulsrespons is $h(t) = e^{-t}u(t)$.



Vraag:

(a) Bepaal $X(s)$.

(b) Is het systeem causaal? Motiveer op basis van $h(t)$.

(c) Bepaal $y(t) = h(t) * x(t)$ en geef het antwoord stukgewijs.

9.3 Oefening 8.3: Complexe Fourierreeks (Puls-trein)

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

(a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k.

(b) Welke symmetrie zie je in c_{-k} t.o.v. c_k als $p(t)$ reëel is?

(c) (Extra) Gebruik opnieuw de link $X(k\omega_0) = T\,c_k$ om te interpreteren wat de harmonischen betekenen in het frequentiedomein.

9.4 Oefening 8.4: Laplace met verschuiving en initieelwaarden

Beschouw

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2).$$

Vraag:

(a) Bepaal $X(s)$.

(b) Bepaal $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ rechtstreeks uit $x(t)$.

(c) Verifieer $x(0^+)$ met de beginwaardestelling en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ met de eindwaardestelling (als toepasbaar).

9.5 Oefening 8.5: Differentiaalvergelijking (Laplace, stapinput)

Gegeven

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Vraag:

(a) Los $y(t)$ op met de (unilaterale) Laplace-transformatie.

(b) Geef $y(t)$ stukgewijs (indien nodig) en vereenvoudig maximaal.

9.6 Oefening 8.6: LTI-systeem (polen, stabiliteit, staprespons)

Een causaal LTI-systeem heeft

$$H(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}.$$

Vraag:

(a) Bepaal $h(t)$.

(b) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer.

(c) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.

(d) Bepaal $\lim_{t\to\infty} y(t)$ en controleer met de eindwaardestelling.

9.7 Oefening 8.7: Convolutie + Laplace-check

Neem $x(t) = u(t) - u(t-1)$ en $h(t) = t\,u(t)$.

Vraag:

(a) Bepaal $y(t) = (x * h)(t)$ via convolutie in het tijdsdomein en geef het resultaat stukgewijs.

(b) Controleer je antwoord door Laplace: $Y(s) = X(s)H(s)$ en inverse Laplace.

9.8 Oefening 8.8: Fouriertransformatie + Parseval (energie)

Voor $a > 0$:

$$x(t) = e^{-a|t|}.$$

Vraag:

(a) Bepaal $X(j\omega)$.

(b) Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt$.

(c) Controleer met Parseval.

9.9 Oefening 8.9: Reële Fourierreeks (symmetrie + RMS)

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

(a) Geef aan of $f(t)$ even/oneven is.

(b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.

(c) Bepaal de RMS-waarde van $f(t)$ en verifieer met Parseval (reeks-vorm).

9.10 Oefening 8.10: Toestandruimte en eigenwaarden (stabiliteit + oplossing)

Beschouw het systeem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de eigenwaarden van A en bespreek de stabiliteit van de oorsprong.

(b) Bepaal $\mathbf{x}(t)$ expliciet (via diagonalisatie of via oplossing van een tweede-orde vergelijking).

(c) Geef ook $x_1(t)$ en $x_2(t)$ afzonderlijk.

9.11 Oefening 8.11: Impulsrespons en Stabiliteit met Polen

Gegeven een causaal LTC-systeem met overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6}.$$

Bron: Oefeningenbundel 25–26 (thema Laplace en LTI-systemen).
Vraag:

(a) Bepaal de polen van het systeem.

(b) Onderzoek BIBO-stabiliteit op basis van de poollocaties.

(c) Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ via partieelbreuken.

(d) Bepaal de staprespons voor $x(t) = u(t)$.

9.12 Oefening 8.12: Differentiaalvergelijking uit Overdrachtsfunctie

Een LTC-systeem wordt beschreven door de overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2+3s+2}.$$

Bron: Oefeningenbundel 25–26 (thema differentiaalvergelijkingen en Laplace).
Vraag:

(a) Bepaal de differentiaalvergelijking die het systeem beschrijft.

(b) Los deze differentiaalvergelijking op (homogeen + particulier) voor input $x(t) = 2u(t)$ met beginvoorwaarden $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

(c) Controleer je antwoord met de Laplacetransformatie.

9.13 Oefening 8.13: Fouriertransformatie van Exponentieel Signaal

Gegeven het signaal

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t).$$

Bron: Oefeningenbundel 25–26 (Fouriertransformatie en energieanalyse).
Vraag:

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$ (gebruik de link met Laplace).

(b) Bepaal en schets het amplitudespectrum $|F(j\omega)|$.

(c) Bereken de energiedichtheid $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

(d) Verifieer Parseval's stelling: $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$.

10 Oplossingen

10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1

Oplossing 1.1

Gegeven: Systeem met operator $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.
Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.
Oplossing:

- Test eigenschap 1 (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t)+2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t)+2) = 3ax(t)+2a$
- Voor $a \neq 1$ geldt: $2 \neq 2a$, dus schaling klopt niet.
- Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.

Oplossing 1.2

Gegeven: RC-circuit met $R = 1000\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F, ingangsspanning $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.
Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op.

(b) Bereken τ.

(c) Bepaal $v_{\text{uit}}(0.01)$.

Oplossing:

(a) De differentiaalvergelijking van een RC-circuit: $RC\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = v_{\text{in}}$

$$(1000)(10 \times 10^{-6})\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

$$0.01\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

(b) Tijdsconstante: $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01$ s $= 10$ ms

(c) Voor een stsaprespons met $v_{\text{uit}}(0) = 0$:

$$v_{\text{uit}}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})u(t) = 5(1 - e^{-100t})u(t)$$

Op $t = 10$ ms $= 0.01$ s:

$$v_{\text{uit}}(0.01) = 5(1 - e^{-1}) = 5(1 - 0.368) = 5(0.632) = 3.16 \text{ V}$$

Oplossing 1.3

Gegeven: Radio-isotoop met halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur. Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.
Vraag: Hoeveel mg blijft over om 14:00?
Oplossing:
Model radioactief verval: $N(t) = N_0e^{-kt}$
Halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur: $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155$ h^{-1}
Van 08:00 tot 14:00 is $\Delta t = 6$ uur:

$$N(6) = 20e^{-0.1155\times 6} = 20e^{-0.693} = 20 \times 0.5 = 10 \text{ mg}$$

Antwoord: 10 mg blijft over.

Oplossing 1.4

Gegeven: Twee systemen: - Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$ - Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Vraag: Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.
Oplossing:
Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ ✓
Additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$ ✓
Systeem A is LINEAIR.
Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ (voor $a \neq 1$) X
Systeem B is NIET LINEAIR.

Oplossing 1.5

Gegeven: Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?
Oplossing:

(a) $y(t) = x(t - 2)$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓(zuivere vertraging)

(b) $y(t) = tx(t)$: LINEAIR maar NIET TIJDINVARIANT X (coëfficiënt varieert in tijd)

(c) $y(t) = |x(t)|$: NIET LINEAIR X (niet additief/homogeen)

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓(integrator)

Antwoord: (a) en (d) zijn LTI.

Oplossing 1.6

Gegeven: $y(t) = x(t) + x(t - 1)$.
Vraag: Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.
Oplossing:

(a) **Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tijdsverschuiving van de input dezelfde verschuiving in beide termen geeft.

(b) **Causaal:** Ja. $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en $x(t-1)$, dus enkel van huidige en verleden waarden.

(c) **Invertibel: Niet** uniek invertibel.

Bewijs door tegenvoorbeeld:

Stel $y(t) = 0$ voor alle t. Dan geldt:

$$x(t) + x(t - 1) = 0 \Rightarrow x(t) = -x(t - 1)$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen, bijvoorbeeld:

- $x(t) = A(-1)^t$ voor elke constante A
- $x(t) = 0$ voor alle t

Omdat verschillende inputs tot dezelfde output leiden, is het systeem niet invertibel.

Oplossing 1.7

Gegeven: (S1) $y(t) = 2x(t-1)$ en (S2) $y(t) = x(t) + u(t)$.

Vraag: Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).

Oplossing:

(a) **Lineariteit**

Systeem (S1): $y(t) = 2x(t-1)$

Test homogeniteit: Voor $ax(t)$:

$$\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t-1) = a \cdot 2x(t-1) = a\mathcal{T}\{x(t)\} \quad \checkmark$$

Test additiviteit: Voor $x_1(t) + x_2(t)$:

$$\mathcal{T}\{x_1(t)+x_2(t)\} = 2(x_1(t-1)+x_2(t-1)) = 2x_1(t-1)+2x_2(t-1) = \mathcal{T}\{x_1(t)\}+\mathcal{T}\{x_2(t)\} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ (S1) is **lineair**.

Systeem (S2): $y(t) = x(t) + u(t)$

Nultoestandtest: Voor $x(t) = 0$:

$$\mathcal{T}\{0\} = 0 + u(t) = u(t) \neq 0$$

Dit schendt het nultoestandcriterium voor lineariteit.

$\Rightarrow$ (S2) is **niet lineair**.

(b) **Tijdinvariantie**

- (S1) is **tijdinvariant**: $x(t) \mapsto x(t-t_0)$ geeft $y(t) = 2x(t-1) \mapsto 2x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$.
- (S2) is **niet tijdinvariant**: voor $x(t)$ is $y(t) = x(t)+u(t)$. Voor $x(t-t_0)$ is de output $x(t-t_0) + u(t)$, terwijl $y(t-t_0) = x(t-t_0) + u(t-t_0)$. Niet gelijk als $t_0 \neq 0$.

(c) **Causaliteit**

- (S1) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t-1)$ (verleden).
- (S2) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en een gekend signaal $u(t)$.

10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2

Oplossing 2.1

Gegeven: $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

Vraag: Bepaal welk signaal exponentiële groei/verval vertoont; bereken waarden op $t = 5$ s.

Oplossing:

(a) $x_1(t) = e^{0.2t}$: exponentiële **groei** (positieve exponent) $x_2(t) = e^{-0.5t}$: exponentieel **verval** (negatieve exponent)

(b) Op $t = 5$ s:

$$x_1(5) = e^{0.2\times 5} = e^1 \approx 2.718$$
$$x_2(5) = e^{-0.5\times 5} = e^{-2.5} \approx 0.082$$

Oplossing 2.2

Gegeven: $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.
Vraag: Bepaal amplitude, hoekfrequentie, frequentie, fasehoek; schrijf als cosinus.
Oplossing:

(a) Van $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$:

- Amplitude: $A = 3$
- Hoekfrequentie: $\omega = 4\pi$ rad/s
- Frequentie: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ Hz
- Fasehoek: $\phi = \frac{\pi}{6}$ rad $= 30°$

(b) Als cosinusfunctie: $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Oplossing 2.3

Gegeven: $z(t) = e^{j2\pi t}$.
Vraag: Schrijf als sinus/cosinus; bepaal waarde op $t = 0.25$ s.
Oplossing:

(a) Formule van Euler: $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$$z(t) = e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + j\sin(2\pi t)$$

(b) Op $t = 0.25$ s:

$$z(0.25) = \cos(2\pi \times 0.25) + j\sin(2\pi \times 0.25) = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + j = j$$

Oplossing 2.4

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t-1)$ en $g(t) = u(t) - u(t-1)$.
Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets.
Oplossing:
De convolutie is (Formularium: convolutie-definitie):

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Stap 1: Observeer dat $f(\tau) = 1$ op $[0, 1]$ en $g(t-\tau) = 1$ op $[t-1, t]$.
Stap 2: De integrand is alleen niet-nul waar beide functies niet-nul zijn (overlap).
Geval 1: $t < 0$
Geen overlap $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$
Geval 2: $0 \le t < 1$
Overlap op $[0, t]$ met lengte t:

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot 1\, d\tau = t$$

Geval 3: $1 \le t < 2$

Overlap op $[t-1,1]$ met lengte $2-t$:

$$(f*g)(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 \, d\tau = 1 - (t-1) = 2 - t$$

Geval 4: $t \geq 2$
Geen overlap $\Rightarrow (f*g)(t) = 0$
Eindresultaat:

$$(f*g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een **driehoeksfunctie** met maximum 1 op $t = 1$ en breedte 2.

Oplossing 2.5

Gegeven: $x(t) = e^{-t}u(t)$.
Vraag: Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$, $y_2(t) = x(2t)$, $y_3(t) = 2x(t)$.
Oplossing:

(a) Tijdsverschuiving: $y_1(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) = e^2 e^{-t}u(t-2)$ (start op $t = 2$)

(b) Tijdscompressie: $y_2(t) = e^{-2t}u(2t) = e^{-2t}u(t)$ (twee keer sneller)

(c) Amplitude schaling: $y_3(t) = 2e^{-t}u(t)$ (twee keer hoger)

(d) Schetsing: y_1 begint op $t = 2$, y_2 vervalt sneller, y_3 heeft dubbele amplitude.

Oplossing 2.6

Gegeven: Drie signalen waarvan de energie bepaald moet worden.
Vraag: Bereken energies.
Oplossing:

(a) $E_1 = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

(b) $E_2 = \int_0^\pi |2\sin(t)|^2 dt = 4\int_0^\pi \sin^2(t) dt$

Gebruik identiteit $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$:

$$E_2 = 4\int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 2\int_0^\pi (1-\cos(2t)) dt$$

$$= 2\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi = 2[(\pi - 0) - (0 - 0)] = 2\pi$$

(c) $E_3 = \int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = 1$

Oplossing 2.7

Gegeven: $x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2))$.
Vraag: Stukgewijs; energie; $x(t-1)$.
Oplossing:

(a) Stukgewijs:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

(b) Energie:

$$E = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^2 (2-t)^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(2-t)^3}{-3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Verschuiving:

$$x(t-1) = (t-1)\big(u(t-1) - u(t-2)\big) + (3-t)\big(u(t-2) - u(t-3)\big).$$

Dit is dezelfde driehoek, verschoven naar rechts met 1.

Oplossing 2.8

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$.
Vraag: Schets en herschrijf $x(t)$ na verschuiving/schaling/spiegeling.
Oplossing:

(a) $x(t) = 1$ voor $0 \leq t < 2$ en $x(t) = 0$ elders (rechthoekpuls van breedte 2).

(b) Verschuivingen:

$$x(t-1) = u(t-1) - u(t-3), \qquad x(t+1) = u(t+1) - u(t-1).$$

Dus $x(t-1)$ ligt op $1 \leq t < 3$ en $x(t+1)$ op $-1 \leq t < 1$.

(c) Schaling en spiegeling:

$$x(2t) = u(2t) - u(2t-2) = u(t) - u(t-1),$$

dus $x(2t) = 1$ voor $0 \leq t < 1$. Verder

$$x(-t) = u(-t) - u(-t-2) = u(t+2) - u(t),$$

dus $x(-t) = 1$ voor $-2 \leq t < 0$.

10.3 Oplossingen Hoofdstuk 3

Oplossing 3.1

Gegeven: Vier functies.
Vraag: Bepaal Laplacetransformaties.
Oplossing:

(a) $\mathcal{L}\{5u(t)\}$: definieer de Laplace-transformatie als $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ (Formularium 1.1).

$$\mathcal{L}\{5u(t)\} = 5 \int_0^\infty e^{-st}\, dt = 5 \cdot \frac{1}{s} = \frac{5}{s}, \quad \text{ROC: Re}(s) > 0.$$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\}$:

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{-3t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\, dt = \frac{1}{s+3}, \quad \text{ROC: Re}(s) > -3.$$

(c) $\mathcal{L}\{t\, u(t)\}$ (gebruik $\int_0^\infty te^{-st}dt = 1/s^2$):

$$\mathcal{L}\{t\, u(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{1}{s^2}, \quad \text{ROC: Re}(s) > 0.$$

(d) $\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\}$: gebruik de standaardpar: $\cos(at) \leftrightarrow s/(s^2 + a^2)$.

$$\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\} = \frac{s}{s^2 + 25}, \quad \text{ROC: Re}(s) > 0.$$

Oplossing 3.2

Gegeven: $F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$.
Vraag: Vind inverse Laplacetransformatie.
Oplossing:

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2 + 2^2}$$

Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t) + \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

waarbij $\frac{3}{s+2} \leftrightarrow 3e^{-2t}u(t)$ en $\frac{5}{s^2+2^2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{s^2+2^2} \leftrightarrow \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$ (Formularium 1.1).

Oplossing 3.3

Gegeven: $\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$, $y(0) = 2$.
Vraag: Los op met Laplacetransformatie.
Oplossing:
Laplacetransformatie van beide zijden:
Gebruik de afgeleide-eigenschap uit het formularium (1.1): $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$, en het paar $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ (1.1).

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$Y(s)(s+4) = \frac{8}{s} + 2 = \frac{8+2s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{8+2s}{s(s+4)}$$

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{8+2s}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}$$

Vermenigvuldigen met $s(s+4)$:

$$8 + 2s = A(s+4) + Bs$$

Voor $s = 0$: $8 = A(4) \Rightarrow A = 2$
Voor $s = -4$: $8 + 2(-4) = B(-4) \Rightarrow 0 = -4B \Rightarrow B = 0$
Dus:

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{0}{s+4} = \frac{2}{s}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ in 1.1):

$$y(t) = 2u(t)$$

Oplossing 3.4

Gegeven: $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
Vraag:

(a) Karakteristieke vergelijking.

(b) Wortels.

(c) Los op.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

(b) Wortels:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$

(c) Algemene oplossing:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

Beginvoorwaarden toepassen:
Bereken eerst $y'(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t}$
Voorwaarde 1: $y(0) = 1$

$$c_1 + c_2 = 1$$

Voorwaarde 2: $y'(0) = 0$

$$-c_1 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -3c_2$$

Oplossen stelsel:

Substitueer $c_1 = -3c_2$ in eerste vergelijking:

$$-3c_2 + c_2 = 1 \Rightarrow -2c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}$$

Dus: $c_1 = -3\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Oplossing 3.5

Gegeven: $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$.
Vraag: Bepaal $f(t)$ en $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$.
Oplossing:

(a) Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin(2t)u(t) \quad \text{(Formularium: } \sin(at)u(t) \leftrightarrow \frac{a}{s^2+a^2} \text{ in 1.1).}$$

(b) Gebruikmakend van de tijdsverschuivingsstelling (Formularium: translatie in t in 1.1) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$:

$$g(t) = f(t-2)u(t-2) = \sin(2(t-2))u(t-2) = \sin(2t-4)u(t-2)$$

Oplossing 3.6

Gegeven: $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.
Vraag: Bepaal inverse via partieelbreuken.
Oplossing:
Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+1)(s+2)(s+3)$:

$$10 = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$$

Voor $s = -1$: $10 = A(1)(2) = 2A \Rightarrow A = 5$
Voor $s = -2$: $10 = B(-1)(1) = -B \Rightarrow B = -10$
Voor $s = -3$: $10 = C(-2)(-1) = 2C \Rightarrow C = 5$
Inverse Laplacetransformatie:
(Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ in 1.1.)

$$f(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

Oplossing 3.7

Gegeven: $F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}$.

Vraag: Bepaal $f(0^+)$ en $f(\infty)$ met begin- en eindwaardestelling; controleer door $f(t)$ te bepalen.

Oplossing:

(a) Beginwaardestelling (Formularium: initial value theorem $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$):

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2+5s}{s^2+4s+3} = 3$$

(b) Eindwaardestelling (Formularium: final value theorem $f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, mits alle polen van $sF(s)$ in het linkerhalfvlak liggen): De polen van $F(s)$ zijn $s = -1$ en $s = -3$ (beide in linkerhalfvlak), dus FVT is toepasbaar.

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s^2+5s}{s^2+4s+3} = 0$$

(c) Controle door $f(t)$ te berekenen:

Partieelbreuken:

$$F(s) = \frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldig met $(s+1)(s+3)$:

$$3s+5 = A(s+3) + B(s+1)$$

Voor $s = -1$: $3(-1)+5 = A(2) \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

Voor $s = -3$: $3(-3)+5 = B(-2) \Rightarrow -4 = -2B \Rightarrow B = 2$

Dus:

$$F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ in 1.1):

$$f(t) = \left(e^{-t} + 2e^{-3t}\right) u(t)$$

Verificatie: $f(0^+) = 1 + 2 = 3$ ✓ en $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ ✓

Oplossing 3.8

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t-1)$ en $g(t) = e^{-2t}u(t)$.

Vraag: Bepaal $y(t) = (f * g)(t)$ via Laplace.

Oplossing: Volgens het formularium geldt voor Laplace: convolutie in tijd $\Rightarrow$ product in s-domein (1.1).

(a)

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}, \qquad G(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}.$$

Hierbij gebruiken we $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ (1.1) en translatie in t (1.1) voor $u(t-1)$, en $e^{-2t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+2}$ (1.1).

(b)

$$Y(s) = F(s)G(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(s+2)}.$$

(c) Splits:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)} - e^{-s}\frac{1}{s(s+2)}.$$

Met partieelbreuken $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$. Dus

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t).$$

En met de tijdsverschuiving (Formularium: translatie in t in 1.1):

$$y(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t) - \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-1)})u(t-1).$$

Stukgewijs:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2t}), & 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}\left(e^{-2(t-1)} - e^{-2t}\right), & t \ge 1. \end{cases}$$

Oplossing 3.9

Gegeven: Eenvoudige signalen met stapfunctie $u(t)$.
Vraag: Bepaal enkele Laplace-paren en een inverse Laplace.
Oplossing:

(a) $\mathcal{L}\{u(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ (Formularium: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ in 1.1 en definitie in 1.1).

(b) $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(s+2)t}dt = \frac{1}{s+2}$ (Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ in 1.1 en translatie in s in 1.1).

(c) $\mathcal{L}\{t\,u(t)\} = \frac{1}{s^2}$ (Formularium: $t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ met $n=1$ in 1.1).

(d)

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-3t}u(t) + 2t\,u(t).$$

(Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ en $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\,u(t)$ in 1.1.)

10.4 Oplossingen Hoofdstuk 4

Oplossing 4.1

Gegeven: Rechthoekpuls $f(t) = A$ voor $-T/2 < t < T/2$, 0 elders.
Vraag: Bepaal Fouriertransformatie; schrijf als sinc; bepaal nulpunten.
Oplossing:

(a) Fouriertransformatie (Formularium: definitie 1.2):

$$F(j\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t}dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

Substitueer grenzen:

$$= A \cdot \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}\right) = A\frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega}$$

Gebruik formule van Euler: $e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x)$:

$$= A\frac{2j\sin(\omega T/2)}{j\omega} = A\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} = AT \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

(b) Sinc-vorm:

$$F(j\omega) = AT \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Dit komt overeen met het standaardpaar "Block" in 1.2.

(c) Eerste nulpunten: $\frac{\omega T}{2} = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
Dit geeft: $\omega = \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \ldots$

Oplossing 4.2

Gegeven: Fouriertransformatie verschuivingsstelling.
Vraag: Bewijs; pas toe; bespreek effect op spektra.
Oplossing:

(a) Verschuivingsstelling (Formularium: translatie 1.2):

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

Bewijs:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t}dt$$

Substitutie $\tau = t - t_0$:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau + t_0)}d\tau = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

(b) Voor puls met $t_0 = 1$, $A = 2$, $T = 2$:

$$F(j\omega) = 2 \cdot 2 \cdot \text{sinc}(\omega) \cdot e^{-j\omega} = 4\text{sinc}(\omega)e^{-j\omega}$$

(c) Amplitude-spectrum: onveranderd (blijft $4|\text{sinc}(\omega)|$)
Fase-spectrum: lineair met $-\omega$ (effect van verschuiving)

Oplossing 4.3

Gegeven: $x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$ met $\text{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$.

Vraag: Pas modulatiestelling toe; schets spektra.

Oplossing:

(a) Modulatiestelling (af te leiden uit Formularium: cosinus-paar 1.2 en translatie/convolutie-eigenschappen 1.2):

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t) f(t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$$

Voor rect(t): $F_{\text{rect}}(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega)$ (Formularium: Block-paar 1.2).

Voor $x(t)$ met $\omega_0 = 10\pi$:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[2\text{sinc}(\omega - 10\pi) + 2\text{sinc}(\omega + 10\pi)] = \text{sinc}(\omega - 10\pi) + \text{sinc}(\omega + 10\pi)$$

(b) Het spectrum bestaat uit twee verschoven sinc-functies gecentreerd op $\omega = \pm 10\pi$.

Oplossing 4.4

Gegeven: $f(t) = e^{-t}u(t)$.

Vraag: Bepaal energie in tijdsdomein; controleer in frequentiedomein; verifieer Parseval's stelling.

Oplossing:

(a) Energie in tijdsdomein:

$$E = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

(b) Fouriertransformatie: via Laplace-paar $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}$ (Formularium 1.1) en de link LT$\rightarrow$FTC (Formularium 1.1) krijg je

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}.$$

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

(c) Energie in frequentiedomein (Parseval's stelling, Formularium 1.2):

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega$$

Gebruik standaardintegraal $\int \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \arctan(\omega) + C$:

$$= \frac{1}{2\pi} [\arctan(\omega)]_{-\infty}^{\infty}$$

Evaluatie van limieten: $\lim_{\omega \to \infty} \arctan(\omega) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{\omega \to -\infty} \arctan(\omega) = -\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

Oplossing 4.5

Gegeven: $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.
Vraag: Bepaal Fouriertransformatie; schets spektra; bepaal bandbreedte.
Oplossing:

(a) **Fouriertransformatie** (Formularium: definitie 1.2):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

Splits op bij $t = 0$ met $|t| = -t$ voor $t < 0$ en $|t| = t$ voor $t > 0$:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

Eerste integraal:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a - j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a - j\omega}$$

Tweede integraal:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a + j\omega)}\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega}$$

Samenvoegen:

$$F(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{(a + j\omega) + (a - j\omega)}{a^2 + \omega^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

(b) Amplitude-spectrum: $|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$
Fase-spectrum: $\angle F(j\omega) = 0$ (zuiver reëel en positief)

(c) **Bandbreedte:** geen nulpunten; 3dB-bandbreedte waar $|F(j\omega)| = |F(0)|/\sqrt{2}$:
$|F(0)| = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a}$, dus $|F(j\omega_{3dB})| = \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{a}$

$$\frac{2a}{a^2 + \omega_{3dB}^2} = \frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow 2a^2 = \sqrt{2}(a^2 + \omega_{3dB}^2) \Rightarrow \omega_{3dB}^2 = a^2(\sqrt{2} - 1)$$

Alternatief: Halve-vermogen-punten bij $a^2 + \omega^2 = 2a^2$: dus $\omega_{3dB} = a$

Oplossing 4.6

Gegeven: Drie signalen.
Vraag: Bepaal Fouriertransformaties.
Oplossing:

(a) $f(t) = \delta(t)$: $F(j\omega) = 1$ (Formularium: impuls-paar 1.2)

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$: $F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$ (Formularium: impuls-paar 1.2)

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$:

$$F(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

(Formularium: cosinus-paar 1.2.)
(twee impulsen op $\pm\omega_0$)

Oplossing 4.7

Gegeven: $x(t) = 2$ op $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 0 elders en $y(t) = x(t - \frac{1}{4})$.
Vraag: Bepaal $X(j\omega)$ en $Y(j\omega)$.
Oplossing:

(a) Gebruik het FTC-paar uit het formularium (blok $\leftrightarrow$ sinc): voor amplitude A en lengte L op $[-L/2, L/2]$ geldt

$$X(j\omega) = AL\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right).$$

Hier is $A = 2$ en $L = 1$, dus

$$X(j\omega) = 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(b) Tijdverschuiving (formularium: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$):

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega/4}X(j\omega) = 2e^{-j\omega/4}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Amplitude blijft gelijk, fase krijgt een lineaire term $-\omega/4$.

Oplossing 4.8

Gegeven: $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en tijdverschuiving.
Vraag: Bepaal FTC van verschoven delta's en een lineaire combinatie.
Oplossing:

(a) Met de verschuivingsstelling (Formularium: translatie 1.2) en het paar $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (1.2):

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}.$$

(b) Voor $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$:

$$X(j\omega) = 2 \cdot 1 - e^{-j\omega} = 2 - e^{-j\omega}.$$

(c) **Amplitudespectrum berekening:**

Stap 1: Schrijf $e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$ (Euler):

$$X(j\omega) = 2 - (\cos\omega - j\sin\omega) = (2 - \cos\omega) + j\sin\omega$$

Stap 2: Bereken de modulus:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{(2 - \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2}$$

Stap 3: Uitwerken:

$$= \sqrt{4 - 4\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega}$$

Gebruik $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$:

$$= \sqrt{4 - 4\cos\omega + 1} = \sqrt{5 - 4\cos\omega}$$

10.5 Oplossingen Hoofdstuk 5

Oplossing 5.1

Gegeven: Blokgolf met periode $T = 2$: $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = -1$ voor $1 < t < 2$.
Vraag: Bepaal symmetrie; bereken Fouriercoëfficiënten; schrijf reeks tot 3e harmonische.
Oplossing:

(a) De functie is **oneven**: $f(-t) = -f(t)$ (na periodieke uitbreiding)

(b) Fouriercoëfficiënten ($\omega_0 = \pi$ rad/s, Formularium: cartesische vorm 1.3):

Stap 1: Bereken a_0 (DC-component):

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 (-1)\,dt = 1 - 1 = 0$$

Stap 2: Bepaal a_n (omdat $f(t)$ oneven is):

Voor oneven functies geldt $a_n = 0$ voor alle n.

Stap 3: Bereken b_n:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \int_0^1 \sin(n\pi t)dt - \int_1^2 \sin(n\pi t)dt$$

$$= \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2$$

$$= \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}$$

Voor oneven n: $\cos(n\pi) = -1$, dus $b_n = \frac{4}{n\pi}$

Voor even n: $\cos(n\pi) = 1$, dus $b_n = 0$

(c) Fourierreeks tot 3e harmonische:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

Oplossing 5.2

Gegeven: Zaagtandgolf: $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$ met periode $T = 1$.
Vraag: Bereken a_0, b_1, b_2; schrijf Fouriersom met 2 termen.
Oplossing:
Periode $T = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$ (Formularium: cartesische Fourierreeks 1.3).

(a) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 2t\,dt = [t^2]_0^1 = 1$$

(b) **Berekening van b_n met partiële integratie:**

Formularium: $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$ (1.3).

$$b_n = 2\int_0^1 2t\sin(2\pi n t)dt = 4\int_0^1 t\sin(2\pi n t)dt$$

Partiële integratie: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ met $u = t$, $dv = \sin(2\pi nt)dt$:

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}$$

$$b_n = 4\left[t \cdot \left(-\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}dt\right]$$

$$= 4\left[-\frac{\cos(2\pi n)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\Big|_0^1\right]$$

Aangezien $\cos(2\pi n) = 1$ en $\sin(2\pi n) = 0$:

$$b_n = 4\left(-\frac{1}{2\pi n}\right) = -\frac{2}{\pi n}$$

Dus: $b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_2 = -\frac{1}{\pi}$

(c) Benaderende Fouriersom:

$$f(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi}\sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi}\sin(4\pi t)$$

Oplossing 5.3

Gegeven: Driehoekgolf: $f(t) = t$ voor $0 \leq t < 1$, $f(t) = 2 - t$ voor $1 \leq t < 2$, periode $T = 2$.
Vraag: Bepaal symmetrie; bereken coëfficiënten; schrijf eerste drie niet-nul termen.
Oplossing:
Periode $T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$ (Formularium: cartesische vorm 1.3).

(a) Symmetrie: Dit signaal is **even** rond $t = 1$: $f(1-\tau) = f(1+\tau)$

Voor even functie: $b_n = 0$ voor alle n.

(b) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + (4-2) - (2-\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}$$

(c) **Berekening van a_n:**

Formularium: $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ (1.3).

$$a_n = \int_0^1 t\cos(n\pi t)dt + \int_1^2 (2-t)\cos(n\pi t)dt$$

Partiële integratie eerste integraal:

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt = \left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi t)dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$$

Symmetrisch voor tweede integraal: ook $\frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi))$.

Dus:

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{n^2\pi^2}(1 - (-1)^n)$$

Voor oneven n: $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$; voor even n: $a_n = 0$.

(d) Eerste drie niet-nul termen:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t)$$

Oplossing 5.4

Gegeven: Blokgolf uit oefening 5.1.
Vraag: Bepaal gemiddelde macht; controleer met Parseval's stelling.
Oplossing:

(a) Gemiddelde macht via integratie:

$$P = \frac{1}{2}\int_0^2 f^2(t)dt = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$

(b) Parseval's stelling voor Fourierreeksen:

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{16}{n^2\pi^2}$$

$$= \frac{8}{\pi^2}[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots] = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1 \quad \checkmark$$

Oplossing 5.5

Gegeven: $T = 2$ en $f(t) = 1$ op $(0, 1)$, $f(t) = 0$ op $(1, 2)$, periodiek.
Vraag: Bepaal c_k en link met FTC-samples.
Oplossing: De complexe Fouriercoëfficiënten zijn

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

Omdat $f(t) = 1$ enkel op $(0, 1)$:

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jk\pi t}\, dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Interpretatie: voor even k is $1-(-1)^k=0$ dus $c_k=0$; enkel oneven harmonischen blijven over.

Link met formularium: $X(k\omega_0)=T\,c_k$ zegt dat de FTC van *één periode* (tijdsignaal op lengte T) gesampled op $\omega=k\omega_0$ gelijk is aan T maal de FS-coëfficiënt.

Oplossing 5.6

Gegeven: $T=2\pi$ en $f(t)=\sin(t)+2\cos(2t)$.

Vraag: Geef ω_0 en de Fouriercoëfficiënten a_0,a_n,b_n.

Oplossing:

(a) $\omega_0=2\pi/T=1$.

(b) Schrijf de reéle Fourierreeks (Formularium 1.3):

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)).$$

Omdat $f(t)$ al in de basisvorm geschreven is met termen voor $n=1$ en $n=2$, herkennen we direct:

$$a_0=0,\quad b_1=1,\quad a_2=2,$$

en alle overige a_n,b_n zijn nul.

(c) Ter verificatie:

$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt=1,$$
$$a_2=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}2\cos^2(2t)\,dt=2.$$

We herkennen direct de standaardvorm

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\big).$$

Vergelijken geeft:

$$a_0=0,\quad b_1=1,\quad a_2=2,$$

en alle andere a_n,b_n zijn nul.

Dus de Fourierreeks is gewoon $f(t)=\sin(t)+2\cos(2t)$.

10.6 Oplossingen Hoofdstuk 6

Oplossing 6.1

Gegeven: Eerste-orde systeem met impulsrespons $h(t)=2e^{-5t}u(t)$.

Vraag: Bepaal systeemrespons op stapingang via convolutie; verifieer met Laplace.

Oplossing:

(a) Convolutie met stapingang:

$$y(t)=h(t)*u(t)=\int_0^t 2e^{-5\tau}d\tau=2\left[-\frac{1}{5}e^{-5\tau}\right]_0^t=\frac{2}{5}(1-e^{-5t})u(t)$$

(b) Via Laplacetransformatie:

$$H(s) = \frac{2}{s+5}, \quad F(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = H(s)F(s) = \frac{2}{s(s+5)}$$

Partieelbreuken:

$$\frac{2}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

Vermenigvuldig met $s(s+5)$:

$$2 = A(s+5) + Bs$$

Voor $s = 0$: $2 = A(5) \Rightarrow A = \frac{2}{5}$
Voor $s = -5$: $2 = B(-5) \Rightarrow B = -\frac{2}{5}$
Dus:

$$Y(s) = \frac{2/5}{s} - \frac{2/5}{s+5}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium 1.1):

$$y(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t) \quad \checkmark$$

Oplossing 6.2

Gegeven: Massa-veer-dempersysteem: $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, $c = 4$ Ns/m.
Vraag: Schrijf DV; bepaal ω_0; bepaal type demping.
Oplossing:

(a) Differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = f(t)$$

(b) Natuurlijke eigenfrequentie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

(c) Karakteristieke vergelijking: $2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Complexe wortels $\Rightarrow$ Het systeem is **ondergedempt**.

Oplossing 6.3

Gegeven: LTC-systeem met $H(s) = \frac{10}{s+5}$.
Vraag: Bepaal frequentierespons; bepaal amplitude/faserespons; bepaal 3dB bandbreedte.
Oplossing:

(a) Frequentierespons:

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 5} = \frac{10(5 - j\omega)}{25 + \omega^2}$$

(b) Amplitude- en faserespons:

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/5)$$

(c) 3dB bandbreedte waar $|H(j\omega)| = |H(0)|/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$:

$$\frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow 25 + \omega^2 = 50 \Rightarrow \omega_{3dB} = 5 \text{ rad/s}$$

Oplossing 6.4

Gegeven: Twee systemen in cascade: $H_1(s) = \frac{5}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{3}{s+3}$.
Vraag: Bepaal totale overdracht; bepaal impulsrespons.
Oplossing:

(a) Totale overdracht:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{15}{(s+2)(s+3)}$$

(b) **Impulsrespons via partieelbreuken:**

$$\frac{15}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+2)(s+3)$:

$$15 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor $s = -2$: $15 = A(1) \Rightarrow A = 15$

Voor $s = -3$: $15 = B(-1) \Rightarrow B = -15$

Dus:

$$H(s) = \frac{15}{s+2} - \frac{15}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ in 1.1):

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 15e^{-3t}u(t) = 15(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Oplossing 6.5

Gegeven: Drie systemen.
Vraag: Bepaal stabiliteit.
Oplossing:

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$. **Polen:** Los de noemer op: $s - 2 = 0 \Rightarrow s = 2$. Omdat $\mathrm{Re}(s) = 2 > 0$, ligt de pool in het rechterhalfvlak. **Conclusie:** Systeem is BIBO-**onstabiel**.

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. **Polen:** $s = -1, -2$ ($\mathrm{Re}(s) < 0$). Alle polen hebben negatieve reële delen. **Conclusie:** Systeem is BIBO-**stabiel**.

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$. **Polen:** $s^2 = -4 \Rightarrow s = \pm 2j$. Polen liggen op de imaginaire as en zijn enkelvoudig. **Gedrag:** Dit geeft zuivere oscillaties (sinuscomponenten) en geen demping of groei. Het systeem is **marginaal stabiel** (niet asymptotisch stabiel, niet onstabiel).

Oplossing 6.6

Gegeven: $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$ met nul beginvoorwaarden.
Vraag: Bepaal $H(s)$, $h(t)$, stabiliteit en $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.
Oplossing:

(a) Laplace (formularium: afgeleide in t):

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+3)Y(s) = X(s).$$

Dus

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

(b)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-3t}u(t).$$

(c) Pool op $s = -3$ (linkerhalfvlak) $\Rightarrow$ BIBO-stabiel.

(d) Voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$ geldt

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Dan

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+3)}.$$

Met $\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right)$ volgt

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1).$$

Oplossing 6.7

Gegeven: Causaal LTC-systeem met $H(s) = \frac{1}{s+1}$.
Vraag: Bepaal $h(t)$, staprespons, τ en $H(0)$.
Oplossing:

(a)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t).$$

(b) Voor $x(t) = u(t)$: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Daaruit volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

(c) De tijdsconstante is $\tau = 1$ en de DC-versterking is $H(0) = 1$.

10.7 Oplossingen Hoofdstuk 7

Oplossing 7.1

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal karakteristieke veelterm; vind eigenwaarden; bereken eigenvectoren.

Oplossing:

(a) Karakteristieke veelterm:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

(b) Eigenwaarden: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$

(c) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 5$: Los op $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$:

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Eerste rij: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

Kies $v_1 = 1$, dan:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$: Los op $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$:

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Eerste rij: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

Kies $v_1 = 1$, dan:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.2

Gegeven: Tweede-orde systeem uit oefening 3.4.

Vraag: Schrijf als matrixvergelijking; bepaal eigenwaarden; verifieer; bepaal eigenvectoren.

Oplossing:

(a) Matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

(c) Eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ (hetzelfde als uit oefening 3.4) ✓

(d) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.3

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden/eigenvectoren; controleer orthogonaliteit; bepaal $P^{-1}AP = D$.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$

Eigenvectoren: - Voor $\lambda_1 = 6$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) - Voor $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

(b) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(2 - 2) = 0 \quad ✓$$

(c) Diagonalisatie:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.4

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal Gerschgorin-cirkels; geef grenzen; controleer eigenwaarden.

Oplossing:

(a) Gerschgorin-cirkels:

Rij 1: Centrum 4, radius $0.5 + 0.2 = 0.7$, dus $\lambda \in [3.3, 4.7]$

Rij 2: Centrum -2, radius $0.3 + 0.1 = 0.4$, dus $\lambda \in [-2.4, -1.6]$

Rij 3: Centrum 3, radius $0.2 + 0.4 = 0.6$, dus $\lambda \in [2.4, 3.6]$

(b) Alle eigenwaarden liggen in de unie van deze cirkels.

(c) De eigenwaarden zijn ongeveer: $\lambda_1 \approx 4.3$, $\lambda_2 \approx -2.1$, $\lambda_3 \approx 2.8$ (numeriek bepaald)

Alle drie liggen inderdaad in hun respectieve cirkels. ✓

Oplossing 7.5

Gegeven: $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden; bepaal eigenvectoren; toon orthogonaliteit aan; normaliseer.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

(b) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

(d) Genormaliseerde eigenvectoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verificatie: $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ ✓

Oplossing 7.6

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal e^{At} en oplossing $\mathbf{x}(t)$.

Oplossing:

(a) Eigenwaarden: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Eigenvectoren: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Matrix exponentiële $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Oplossing $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.7

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Eigenwaarden/eigenruimte; diagonaliseerbaarheid; e^{At}.

Oplossing:

(a) Karakteristieke veelterm: $(2 - \lambda)^2 = 0$, dus $\lambda = 2$ (algebraïsche multipliciteit 2). Voor eigenvectoren: $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus $v_2 = 0$ en v_1 vrij. De eigenruimte is 1-dimensionaal.

(b) Omdat er maar 1 lineair onafhankelijke eigenvector is, is A **niet diagonaliseerbaar**.

(c) Schrijf $A = 2I + N$ met $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $N^2 = 0$. Dan

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing 7.8

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Eigenwaarden/eigenvectoren, A^3 en e^{At}.

Oplossing:

(a) Omdat A diagonaal is, zijn de eigenwaarden de diagonaalelementen:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Bijhorende eigenvectoren kunnen gekozen worden als de standaardbasisvectoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\lambda = 1), \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\lambda = 2).$$

(b)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Voor een diagonaalmatrix geldt $e^{At} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren; bereken A^3; bereken e^{At}.

Oplossing:

(a) Voor een diagonaalmatrix zijn de diagonaalelementen de eigenwaarden:

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(De standaard basiseenheidsvectoren)

(b) Voor diagonaalmatrix:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(c) Matrix exponentiaal:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Algemeen: voor diagonaalmatrix $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ geldt:

$$e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}, \ldots, e^{d_n t})$$

10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8

Oplossing 8.1

Gegeven: $x(t)$ is een blok op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$, $z(t) = x(t) + x(t-1)$.

Vraag: (a) bepaal even/oneven; (b) bepaal $Y(j\omega)$ via modulatie; (c) bepaal $Z(j\omega)$ via verschuiving.

Oplossing:

(a) **Symmetrie controleren.**

- Stap 1: noteer de definities.
  - even: $f(-t) = f(t)$
  - oneven: $f(-t) = -f(t)$
- Stap 2: $x(t)$ is een rechthoekpuls rond 0 met dezelfde waarde links en rechts, dus $x(-t) = x(t)$ en $x(t)$ is **even**.
- Stap 3: $v(t) = 2\cos(2\pi t)$ is **even** omdat cos even is.
- Stap 4: $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ is product van twee even functies, dus ook **even**.
- Stap 5: $z(t) = x(t)+x(t-1)$ bevat een verschoven term $x(t-1)$; door die verschuiving is $z(-t)$ in het algemeen niet gelijk aan $\pm z(t)$, dus **noch even noch oneven**.

(b) $Y(j\omega)$ **via modulatie.**

- Stap 1: bepaal $X(j\omega)$. Voor het blok met amplitude 1 en breedte 1 geldt (zoals in het formularium):

$$X(j\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad \text{met } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Stap 2: schrijf de cosinus als exponentiëlen:

$$\cos(\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right), \qquad \omega_0 = 2\pi.$$

- Stap 3: vermenigvuldigen in de tijd is verschuiven in het frequentiedomein. Daaruit volgt de modulatieregel:

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[X\big(j(\omega-\omega_0)\big) + X\big(j(\omega+\omega_0)\big)\right].$$

- Stap 4: invullen van $X(j\omega)$ geeft

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega+2\pi}{2}\right)\right].$$

(c) $Z(j\omega)$ **via tijdverschuiving.**

- Stap 1: gebruik de verschuivingsregel $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.
- Stap 2: voor $t_0 = 1$ wordt $x(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega}X(j\omega)$.
- Stap 3: optellen in tijd is optellen in frequentie, dus

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega}X(j\omega) = (1 + e^{-j\omega})X(j\omega).$$

Oplossing 8.2

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-t}u(t)$.
Oplossing:

(a) **Laplace van de ingang $x(t)$.**

- Stap 1: gebruik $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$.
- Stap 2: gebruik de verschuivingsregel $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$.

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1-e^{-2s}}{s}.$$

(b) **Causaliteit.** Omdat $h(t) = e^{-t}u(t) = 0$ voor $t < 0$ is de impulsrespons rechtszijdig $\Rightarrow$ het LTI-systeem is **causaal**.

(c) **Uitgang $y(t)$ via Laplace.**

- Stap 1: bepaal $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
- Stap 2: gebruik $Y(s) = H(s)X(s)$:

$$Y(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s+1)}.$$

- Stap 3: splits op in een niet-vertraagde en een vertraagde term:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} - e^{-2s}\frac{1}{s(s+1)}.$$

- Stap 4: herken de basis-inversie $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1-e^{-t})u(t)$.
- Stap 5: pas de vertraging toe: $e^{-2s}G(s) \leftrightarrow g(t-2)u(t-2)$.

Daarmee

$$y(t) = (1-e^{-t})u(t) - (1-e^{-(t-2)})u(t-2).$$

Oplossing 8.3

Gegeven: $T = 2$, $p(t) = 1$ op $(0, \frac{1}{2})$, anders 0, periodiek.
Oplossing:

(a) **Complexe Fourierreekscoëfficiënten c_k.**

- Stap 1: grondfrequentie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
- Stap 2: definitie:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 p(t)e^{-jk\pi t}\,dt.$$

- Stap 3: omdat $p(t) = 1$ enkel op $(0, \frac{1}{2})$ en 0 elders binnen $[0, 2)$, reduceert de integraal tot

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} e^{-jk\pi t}\,dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi/2}}{jk\pi}.$$

Voor $k = 0$ (gemiddelde waarde):

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\text{pulsduur } \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(b) **Symmetrie.** Omdat $p(t)$ reëel is, geldt altijd $c_{-k} = c_k^*$ (complex geconjugeerde symmetrie).

(c) **Link met de Fouriertransformatie.** Voor een periodieke extensie kan je de harmonischen interpreteren als samples van de CTFT van *één periode* (zoals in het formularium):

$$X(jk\omega_0) = T\,c_k.$$

Dit vertelt je dat de spectrale lijnen (op $k\omega_0$) gewogen worden door c_k.

Oplossing 8.4

Gegeven: $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2)$.
Vraag: (a) $X(s)$, (b) $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$, (c) controle via begin-/eindwaardestelling.
Oplossing:

(a) **Bepaal $X(s)$.**

- Stap 1: herken $x(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$ met $x_1(t) = e^{-t}u(t)$.
- Stap 2: Laplace van x_1 is $\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
- Stap 3: een vertraging met 2 geeft een factor e^{-2s}: $x_1(t-2) \leftrightarrow e^{-2s}\frac{1}{s+1}$.

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - e^{-2s}\frac{1}{s+1} = \frac{1 - e^{-2s}}{s+1}.$$

(b) **Begin- en eindgedrag in de tijd.**

- Stap 1: voor $t \to 0^+$ geldt $u(t) = 1$ en $u(t-2) = 0$. Dus $x(0^+) = e^0 - 0 = 1$.
- Stap 2: voor $t \to \infty$ gaan e^{-t} en $e^{-(t-2)}$ naar 0, dus $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

(c) **Controle met begin-/eindwaardestelling.**

- Beginwaardestelling:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 1.$$

- Eindwaardestelling: de polen van $sX(s)$ moeten strikt links liggen. Hier $sX(s) = \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1}$ heeft enkel een pool in $s = -1$ (links), dus de eindwaardestelling is toepasbaar:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 0.$$

Oplossing 8.5

Gegeven: $y'' + 3y' + 2y = u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Vraag: (a) los op via (unilaterale) Laplace, (b) geef $y(t)$.
Oplossing:

- Stap 1: neem (unilaterale) Laplace en gebruik de standaardregels met beginvoorwaarden:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0), \qquad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0).$$

- Stap 2: invullen van $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ geeft

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - 1, \qquad \mathcal{L}\{y'\} = sY.$$

- Stap 3: Laplace op de differentiaalvergelijking:

$$(s^2Y - 1) + 3(sY) + 2Y = \frac{1}{s}.$$

- Stap 4: verzamel de termen met Y:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}.$$

- Stap 5: factoriseer $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$ en vereenvoudig:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}.$$

- Stap 6: partiële breuken:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right).$$

- Stap 7: inverse Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) u(t).$$

Oplossing 8.6

Gegeven: Causaal LTI-systeem met $H(s) = \dfrac{s+2}{s(s+4)}$.
Vraag: (a) $h(t)$, (b) BIBO-stabiliteit, (c) staprespons, (d) eindwaarde.
Oplossing:

(a) **Impulse response $h(t)$.**

- Stap 1: schrijf $H(s)$ als partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}.$$

- Stap 2: maak noemers gelijk:

$$s + 2 = A(s + 4) + Bs = (A + B)s + 4A.$$

- Stap 3: vergelijk coëfficiënten: $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ en $A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$.

- Stap 4: inverse Laplace (causaal $\Rightarrow$ vermenigvuldig met $u(t)$):

$$h(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-4t}u(t).$$

(b) **BIBO-stabiliteit.** Een LTI-systeem is BIBO-stabiel als $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$. Hier zit er een constante term $\frac{1}{2}u(t)$ in $h(t)$, dus de integraal divergeert. Equivalent: $H(s)$ heeft een pool in $s = 0$ (niet strikt links) $\Rightarrow$ **niet BIBO-stabiel**.

(c) **Staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.**

- Stap 1: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)}.$$

- Stap 2: partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}.$$

  Oplossen (bv. door coëfficiënten te vergelijken) geeft $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{8}$.

- Stap 3: inverse Laplace term per term:
  - $\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t)$
  - $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\,u(t)$
  - $\frac{1}{s+4} \leftrightarrow e^{-4t}u(t)$

Dus

$$y(t) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-4t}\right)u(t).$$

(d) **Eindwaarde / gedrag voor grote t.** De term $\frac{1}{2}t$ groeit onbegrensd, dus $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$. Dat is consistent met het feit dat de eindwaardestelling hier niet bruikbaar is (pool op $s = 0$).

Oplossing 8.7

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-1)$ en $h(t) = t\,u(t)$.
Vraag: (a) $y(t) = x * h$ stukgewijs, (b) controle via Laplace.
Oplossing:

(a) **Convolutie $y(t) = (x * h)(t)$.**

- Stap 1: schrijf de convolutie uit:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.$$

- Stap 2: bepaal waar $x(\tau)$ niet nul is. Omdat $x(t) = u(t) - u(t-1)$, geldt $x(\tau) = 1$ voor $0 \le \tau < 1$ en 0 elders.
- Stap 3: vul $h(t-\tau) = (t-\tau)u(t-\tau)$ in en beperk de integraal:

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau.$$

- Stap 4: de factor $u(t-\tau)$ dwingt $t-\tau \geq 0 \Rightarrow \tau \leq t$. Daarom zijn de effectieve grenzen $\tau \in [0,1] \cap (-\infty, t]$.

Stukgewijs:

- $t < 0$: geen overlap, dus $y(t) = 0$.
- $0 \leq t < 1$: overlap $\tau \in [0, t]$:

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

- $t \geq 1$: volledige overlap $\tau \in [0, 1]$:

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^1 = t - \frac{1}{2}.$$

Een compacte stapfunctie-vorm is bv.

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1).$$

(b) **Controle via Laplace.**

- Stap 1: $X(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}$.
- Stap 2: $H(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$.
- Stap 3: $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^3}$.
- Stap 4: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2}u(t)$ en de factor e^{-s} geeft vertraging met 1.

Dus opnieuw

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1),$$

wat overeenkomt met de stukgewijze uitkomst.

Oplossing 8.8

Gegeven: $x(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.
Vraag: (a) $X(j\omega)$, (b) energie, (c) Parseval.
Oplossing:

(a) **Fouriertransformatie $X(j\omega)$.**

- Stap 1: $x(t) = e^{-a|t|}$ is even, dus de CTFT kan met een cosinus-integraal:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-j\omega t}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-at}\cos(\omega t)dt.$$

- Stap 2: gebruik de standaard integraal $\int_0^\infty e^{-at}\cos(\omega t)dt = \frac{a}{a^2+\omega^2}$ (voor $a > 0$).

Dus

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

(b) **Energie E.**

- Stap 1: energie is $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int e^{-2a|t|}dt$.

- Stap 2: weer evenheid gebruiken:

$$E = 2\int_0^\infty e^{-2at}dt = 2\left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}.$$

(c) **Parseval-controle.** Parseval zegt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Hier is $|X(j\omega)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$. Met de bekende integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$ volgt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a},$$

dus consistent met (b).

Oplossing 8.9

Gegeven: $f(t) = 1$ op $(0, \pi)$ en $f(t) = -1$ op $(-\pi, 0)$, $T = 2\pi$.
Vraag: (a) symmetrie, (b) Fourierreeks, (c) RMS en Parseval.
Oplossing:

(a) **Symmetrie.** Controleer $f(-t)$: op $t \in (0, \pi)$ is $f(t) = 1$ en $f(-t) = -1$, dus $f(-t) = -f(t)$. Daarom is f **oneven** $\Rightarrow a_0 = 0$ en $a_n = 0$.

(b) **Fourierreeks (enkel sinus-termen).**

- Stap 1: voor een oneven functie geldt

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

- Stap 2: op $(0, \pi)$ is $f(t) = 1$, dus

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt.$$

- Stap 3: integreer:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos(n\pi)}{n}.$$

Dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-\cos(n\pi)}{n}.$$

Daaruit volgt: $b_n = 0$ voor even n, en $b_n = \frac{4}{\pi n}$ voor oneven n. De reeks wordt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\big((2k+1)t\big).$$

(c) **RMS en Parseval.**

- Stap 1: $f^2(t) = 1$ bijna overal, dus

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt} = 1.$$

- Stap 2: Parseval voor de reële Fourierreeks (met enkel b_n):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Links is $\frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$. Rechts:

$$\sum_{n \text{ oneven}} \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2}.$$

Met $\sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ volgt rechts $= 2$, dus klopt.

Oplossing 8.10

Gegeven: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{x}(0) = (1,0)^T$.

Vraag: (a) eigenwaarden + stabiliteit, (b)(c) expliciete oplossing.

Oplossing:

(a) **Eigenwaarden en stabiliteit.**

- Stap 1: karakteristieke veelterm via $\det(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3)+2.$$

- Stap 2: uitwerken:

$$\lambda(\lambda+3)+2 = \lambda^2+3\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

- Stap 3: eigenwaarden:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

- Stap 4: omdat beide eigenwaarden strikt negatief zijn, is de oorsprong **asymptotisch stabiel**.

(b) **Expliciete oplossing voor $x_1(t)$.**

- Stap 1: schrijf de toestandsvergelijkingen uit: $\dot{x}_1 = x_2$ en $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$.
- Stap 2: elimineer x_2 door te differentiëren: $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3\dot{x}_1$. Dus

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0.$$

- Stap 3: los de karakteristieke vergelijking $r^2+3r+2=0$ op: $r=-1,-2$.
- Stap 4: algemene oplossing:

$$x_1(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}.$$

(c) **Constanten bepalen en $x_2(t)$.**

- Stap 1: beginvoorwaarde $x_1(0)=1$ geeft $C_1+C_2=1$.
- Stap 2: omdat $x_2 = \dot{x}_1$ geldt

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}.$$

Beginvoorwaarde $x_2(0)=0$ geeft $-C_1-2C_2=0$.

- Stap 3: los het stelsel op:

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ C_1+2C_2=0. \end{cases} \Rightarrow C_2=-1,\ C_1=2.$$

Dus

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad x_2(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

Oplossing 8.11

Gegeven: $H(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6}$ (causaal LTC-systeem).
Vraag: Polen; stabiliteit; impulsrespons; staprespons.
Oplossing:

(a) **Polen van het systeem.**

Eerst factoriseren we de noemer:

$$s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

Dus: $H(s) = \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)}$
De polen zijn $s = -2$ en $s = -3$.

(b) **BIBO-stabiliteit.**

Omdat beide polen in het linkerhalfvlak liggen (reëel deel < 0), is het systeem **BIBO-stabiel**.

(c) **Impulsrespons via partieelbreuken.**

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{2s+3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+2)(s+3)$:

$$2s + 3 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor $s = -2$: $2(-2) + 3 = A(1) \Rightarrow A = -1$

Voor $s = -3$: $2(-3) + 3 = B(-1) \Rightarrow B = 3$

Dus:

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$):

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) = (3e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Staprespons voor $x(t) = u(t)$.**

Voor stapingang: $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$$

Partieelbreuken:

$$\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3}$$

Voor $s = 0$: $3 = C(2)(3) = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Voor $s = -2$: $-4 + 3 = D(-2)(1) \Rightarrow D = \frac{1}{2}$

Voor $s = -3$: $-6 + 3 = E(-3)(-1) \Rightarrow E = -1$

Dus:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right) u(t)$$

Dit is de staprespons.

Oplossing 8.12

Gegeven: $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+2}$ en input $x(t) = 2u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Vraag: DV bepalen; oplossen; verifiëren met Laplace.
Oplossing:

(a) **Differentiaalvergelijking uit overdrachtsfunctie.**

Voor een systeem met nul initiële voorwaarden geldt:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}$$

Dit geeft:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 4X(s)$$

In het tijdsdomein (Formularium: afgeleide-eigenschap):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 4x(t)$$

(b) **Oplossing met beginvoorwaarden.**

Voor $x(t) = 2u(t)$ en nul initiële voorwaarden eerst: $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 8u(t)$

Homogene oplossing:

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

$y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

Particuliere oplossing:

Voor constante input: $y_p(t) = K$ (constant)

$0 + 0 + 2K = 8 \Rightarrow K = 4$

Algemene oplossing:

$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 4$

Met $y(0) = 0$: $C_1 + C_2 + 4 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -4$

$y'(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}$

Met $y'(0) = 1$: $-C_1 - 2C_2 = 1$

Oplossen: $C_1 = -9$, $C_2 = 5$

$$y(t) = -9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4$$

(c) **Controle met Laplace.**
$X(s) = \frac{2}{s}$
$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{8}{s(s+1)(s+2)}$
Partieelbreuken:

$$\frac{8}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{s} - \frac{9}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = 4u(t) - 9e^{-t}u(t) + 5e^{-2t}u(t) = (-9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4)u(t)$$

Dit komt overeen! ✓

Oplossing 8.13

Gegeven: $f(t) = 3e^{-2t}u(t)$.
Vraag: FTC bepalen; amplitudespectrum; energie; Parseval verifiëren.
Oplossing:

(a) **Fouriertransformatie via Laplace-link.**
Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ (Laplace, 1.1)
Met de link $\text{LT}(s = j\omega) = \text{FTC}(j\omega)$ (1.1):

$$F(j\omega) = 3 \cdot \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{3}{2 + j\omega}$$

(b) **Amplitudespectrum.**

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{3}{2 + j\omega}\right| = \frac{3}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

Dit is een dalende functie van ω (Lorentz-vorm), met maximum $|F(0)| = 3/2$ en nulpunt op ∞.

(c) **Energiedichtheid in tijdsdomein.**

$$E = \int_0^{\infty} |3e^{-2t}|^2 dt = 9\int_0^{\infty} e^{-4t}dt = 9 \cdot \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{4}$$

(d) **Verifiëring met Parseval's stelling.**

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{4 + \omega^2} d\omega$$

$$= \frac{9}{2\pi}\left[\arctan(\omega/2)/2\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{9}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{9}{4} \quad ✓$$

Beide methoden geven dezelfde energie!