

Oefeningen Wiskunde voor Systemen

KU Leuven - ESAT

13 december 2025

Inhoudsopgave

1 Formularium	4
1.1 Laplace transform (LT)	4
1.2 Fourier transform (FTC)	4
1.3 Fourier series (FS)	5
2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking	7
2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen	7
2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit	7
2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval	7
2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit	7
2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning	7
2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit	8
2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)	8
3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen	9
3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies	9
3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus	9
3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie	9
3.4 Oefening 2.4: Convolutie	9
3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling	9
3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie	10
3.7 Oefening 2.7: Driehoeks signaal met Stapfuncties	10
3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)	10
4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie	11
4.1 Oefening 3.1: Eenvoudige Laplacetransformaties	11
4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie	11
4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem	11
4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem	11
4.5 Oefening 3.5: Laplace-transformatie met Verschuiving	11
4.6 Oefening 3.6: Partielbreuken	12
4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling	12
4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace	12
4.9 Oefening 3.9: Laplace	12
5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie	13
5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls	13
5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling	13
5.3 Oefening 4.3: Modulation Property	13
5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling	14

5.5	Oefening 4.5: Exponentieel Signaal	14
5.6	Oefening 4.6: Dirac Delta	14
5.7	Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)	14
5.8	Oefening 4.8: FTC van delta's	14
6	Hoofdstuk 5: Fourierreeksen	15
6.1	Oefening 5.1: Blokgolf	15
6.2	Oefening 5.2: Zaagtandgolf	15
6.3	Oefening 5.3: Driehoekgolf	15
6.4	Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen	16
6.5	Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC	16
6.6	Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som	16
7	Hoofdstuk 6: LTC-Systemen	17
7.1	Oefening 6.1: Impulsrespons	17
7.2	Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper	17
7.3	Oefening 6.3: Frequentierespons	17
7.4	Oefening 6.4: Cascade Systemen	17
7.5	Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen	18
7.6	Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons	18
7.7	Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)	18
8	Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren	19
8.1	Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen	19
8.2	Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem	19
8.3	Oefening 7.3: Diagonalisatie	19
8.4	Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling	19
8.5	Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit	20
8.6	Oefening 7.6: Matrix Exponentiële	20
8.7	Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal	20
8.8	Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonalmatrix (basis)	20
9	Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen	21
9.1	Oefening 8.1: FTC-eigenschappen (Verschuiving en Modulatie)	21
9.2	Oefening 8.2: Laplace, Causaliteit en Convolutie	21
9.3	Oefening 8.3: Complexe Fourierreeks (Puls-trein)	21
9.4	Oefening 8.4: Laplace met verschuiving en initieelwaarden	22
9.5	Oefening 8.5: Differentiaalvergelijking (Laplace, stapinput)	22
9.6	Oefening 8.6: LTI-systeem (polen, stabiliteit, staprespons)	22
9.7	Oefening 8.7: Convolutie + Laplace-check	22
9.8	Oefening 8.8: Fouriertransformatie + Parseval (energie)	22
9.9	Oefening 8.9: Reële Fourierreeks (symmetrie + RMS)	23
9.10	Oefening 8.10: Toestandruimte en eigenwaarden (stabiliteit + oplossing)	23
10	Oplossingen	24
10.1	Oplossingen Hoofdstuk 1	24
10.2	Oplossingen Hoofdstuk 2	26
10.3	Oplossingen Hoofdstuk 3	28
10.4	Oplossingen Hoofdstuk 4	32
10.5	Oplossingen Hoofdstuk 5	35
10.6	Oplossingen Hoofdstuk 6	37
10.7	Oplossingen Hoofdstuk 7	40

10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8	44
--	----

1 Formularium

Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het “Signals and Systems” formularium. In de oefeningen wordt hiernaar verwezen.

1.1 Laplace transform (LT)

1.1 Definitie en eigenschappen

Definitie:	$f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
translatie in s :	$f(t)e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow F(s+a)$
translatie in t :	$f(t-a) u(t-a)$	$\longleftrightarrow e^{-as} F(s)$
afgeleide in t :	$\frac{d}{dt}(f(t)u(t))$	$\longleftrightarrow sF(s) - f(0^+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t)u(t))$	$\longleftrightarrow s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
afgeleide in s :	$t f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow -\frac{d}{ds} F(s)$
	$t^n f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
convolutie:	$(f * g)(t) u(t)$	$\longleftrightarrow F(s) G(s)$
schaling:	$f(at)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Initial value theorem:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

Final value theorem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{onder de gebruikelijke poolvoorwaarden}).$$

Link met FTC:

$$\text{LT}(s = j\omega) = \text{FTC}(j\omega) \quad \text{als } x(t) \text{ absoluut integreerbaar is.}$$

1.2 Useful Laplace pairs

$e^{-at}u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$	$t^n u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{a}{s^2 + a^2}$
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow 1$	$u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{s}$
$t \cos(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$

1.2 Fourier transform (FTC)

2.1 Basic formulae

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

convolution theorem (tijd):	$f(t) * g(t)$	$\longleftrightarrow F(\omega) G(\omega)$
convolution theorem (freq.):	$f(t) g(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$
translatie:	$x(t - t_0)$	$\longleftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
symmetry (reëel x):		$X(-\omega) = X^*(\omega)$
time symmetry (reëel x):	$x(-t)$	$\longleftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$
link FS-FTC:		$X(k\omega_0) = T c_k \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$

2.2 Useful Fourier pairs

We gebruiken $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Block:	$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-L/2, L/2] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$	$\longleftrightarrow X(\omega) = AL \text{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right)$
Sinc:	$x(t) = A \text{sinc}(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow X(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_0}, & \omega < \omega_0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$
Impuls:	$\delta(t - t_0)$	$\longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$
Complex expon.:	$e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
Cosine:	$\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Sine:	$\sin(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
Delta train:	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

1.3 Fourier series (FS)

3.1 Cartesian form

Voor periode T met $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right].$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt.$$

3.2 Complex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

symmetry (reëel f): $c_{-k} = c_k^*$.

Spectrum:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

3.3 Links between cartesian and complex form

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2}, & c_k^* &= \frac{a_k + jb_k}{2}. \\ |c_k| &= \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \varphi_k &= \text{Arctan2}(a_k, -b_k). \\ a_k &= 2 \operatorname{Re}\{c_k\}, & b_k &= -2 \operatorname{Im}\{c_k\}. \end{aligned}$$

2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen

Gegeven een systeem met operator \mathcal{T} gedefinieerd als $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.

Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.

2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit

Een RC-circuit heeft $R = 1000 \Omega$ en $C = 10 \mu\text{F}$. De ingangsspanning is een stapfunctie $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.

Vraag:

- Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning $v_{\text{uit}}(t)$.
- Bereken de tijdsconstante τ van het circuit.
- Bepaal de uitgangsspanning na 10 ms als $v_{\text{uit}}(0) = 0$ V.

2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval

Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd.

Vraag: Hoeveel milligram blijft over om 14:00 uur?

2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit

Gegeven twee systemen:

- Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
- Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Vraag:

- Test beide systemen op homogeniteit (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$.
- Test beide systemen op additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$.
- Bepaal voor elk systeem of het lineair is.

2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning

Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?

- $y(t) = x(t - 2)$
- $y(t) = tx(t)$
- $y(t) = |x(t)|$
- $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

Vraag: Motiveer je antwoorden.

2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit

Gegeven het systeem \mathcal{T} met

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + x(t - 1).$$

Vraag:

- (a) Is het systeem lineair en tijdinvariant?
- (b) Is het systeem causaal?
- (c) Is het systeem invertibel? Motiveer.

2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)

Beschouw de twee systemen:

$$(S1) \quad y(t) = 2x(t - 1), \quad (S2) \quad y(t) = x(t) + u(t).$$

Vraag:

- (a) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is.
- (b) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdinvariant is.
- (c) Is elk systeem causaal? Motiveer kort.

3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies

Gegeven de signalen $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

Vraag:

- Bepaal welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont.
- Bereken de waarde van elk signaal op $t = 5$ s.

3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus

Een sinusgolf is gegeven door $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.

Vraag:

- Bepaal de amplitude, hoekfrequentie ω , frequentie f , en fasinhoek.
- Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.

3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie

Gegeven $z(t) = e^{j2\pi t}$.

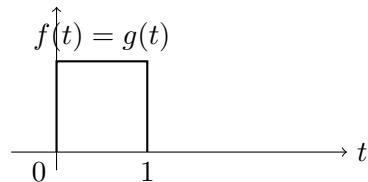
Vraag:

- Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formule van Euler.
- Bepaal de waarde op $t = 0.25$ s.

3.4 Oefening 2.4: Convolutie

Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = u(t) - u(t-1)$$

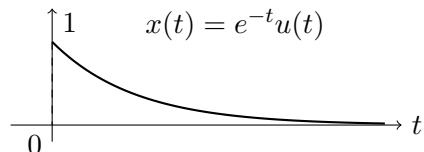


Zie Formularium: convolutie in tijd \leftrightarrow product in frequentie in ??.

Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets het resultaat.

3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling

Gegeven het signaal $x(t) = e^{-t}u(t)$.



Vraag:

- (a) Bepaal $y_1(t) = x(t - 2)$ (tijdsverschuiving).
- (b) Bepaal $y_2(t) = x(2t)$ (tijdscompressie).
- (c) Bepaal $y_3(t) = 2x(t)$ (amplitude schaling).
- (d) Schets alle drie signalen.

3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie

Bepaal de energie van de volgende signalen:

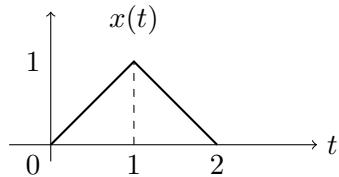
Vraag:

- (a) $x(t) = e^{-t}u(t)$
- (b) $x(t) = 2 \sin(t)u(t)$ over $0 \leq t \leq \pi$
- (c) $x(t) = \text{rect}(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$

3.7 Oefening 2.7: Driehoeks signaal met Stapfuncties

Definieer het signaal

$$x(t) = t(u(t) - u(t - 1)) + (2 - t)(u(t - 1) - u(t - 2)).$$



Vraag:

- (a) Schrijf $x(t)$ expliciet als stukgewijze functie.
- (b) Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$.
- (c) Bepaal en schets $x(t - 1)$.

3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)

Neem

$$x(t) = u(t) - u(t - 2).$$

Vraag:

- (a) Schets $x(t)$.
- (b) Schrijf $x(t - 1)$ en $x(t + 1)$ in termen van stapfuncties en schets ze.
- (c) Schrijf $x(2t)$ en $x(-t)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

4.1 Oefening 3.1: Eenvoudige Laplacetransformaties

Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:

Zie Formularium: definitie 1.1 en paren 1.1.

Vraag:

- (a) $f(t) = 5u(t)$
- (b) $f(t) = e^{-3t}u(t)$
- (c) $f(t) = t \cdot u(t)$
- (d) $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$

4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$$

Vraag: Vind $f(t)$.

Zie Formularium: paren 1.1.

4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem

Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:

$$\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t), \quad y(0) = 2$$

Vraag: Bepaal $y(t)$.

Zie Formularium: afgeleide-eigenschap ??.

4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem

Een massa-veer-dempersysteem wordt beschreven door:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Vraag:

- (a) Bepaal de karakteristieke vergelijking.
- (b) Vind de wortels van de karakteristieke vergelijking.
- (c) Los de differentiaalvergelijking op voor $y(t)$.

4.5 Oefening 3.5: Laplace-transformatie met Verschuiving

Gegeven $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$.

Vraag:

- (a) Bepaal $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.
- (b) Bepaal $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$ gebruikmakend van de tijdsverschuivingsstelling.

Zie Formularium: tijdsverschuiving in t ??.

4.6 Oefening 3.6: Partieelbreuken

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Vraag: Bepaal $f(t)$ via partieelbreukontwikkeling.

4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardeestelling

Gegeven de functie in het s-domein:

$$F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}$$

Vraag:

- Bepaal de beginwaarde $f(0^+)$ met de beginwaardeestelling.
- Bepaal de eindwaarde $f(\infty)$ met de eindwaardeestelling.
- Controleer je antwoorden door $f(t)$ te berekenen.

Zie Formularium: begin- en eindwaardeestelling ??.

4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace

Gegeven

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = e^{-2t}u(t).$$

Definieer $y(t) = (f * g)(t)$.

Zie Formularium: convolutie-eigenschap ??.

Vraag:

- Bepaal $F(s)$ en $G(s)$.
- Gebruik de convolutie-eigenschap in het s -domein om $Y(s)$ te vinden.
- Bepaal $y(t)$ en geef het antwoord stukgewijs.

4.9 Oefening 3.9: Laplace

Vraag:

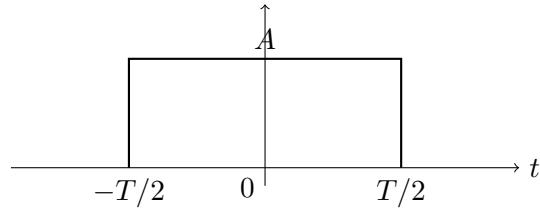
- Bepaal $\mathcal{L}\{u(t)\}$.
- Bepaal $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$.
- Bepaal $\mathcal{L}\{tu(t)\}$.
- Bepaal de inverse Laplace van $F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2}$.

5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls

Gegeven een rechthoekpuls:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Zie Formularium: blok \leftrightarrow sinc in 1.2.

Vraag:

- (a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.
- (b) Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie.
- (c) Bepaal de eerste nulpunten van het spectrum.

5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling

Gegeven $F\{f(t)\} = F(j\omega)$ bepaal de Fouriertransformatie van $f(t - t_0)$.

Zie Formularium: tijdverschuiving ??.

Vraag:

- (a) Geef het bewijs van de verschuivingsstelling.
- (b) Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met $t_0 = 1$ s, $A = 2$, $T = 2$ s.
- (c) Bespreek het effect op amplitude- en fasespectrum.

5.3 Oefening 4.3: Modulation Property

Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

$$x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$$

waarbij $\text{rect}(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$ is.

Zie Formularium: modulatie (cosinus) in 1.2.

Vraag:

- (a) Pas de modulatiestelling toe.
- (b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling

De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven $f(t) = e^{-t}u(t)$.

Zie Formularium: FTC-definitie 1.2 en eigenschappen ??.

Vraag:

- Bepaal de totale energie in het tijdsdomein: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.
- Bepaal $F(j\omega)$ en controleer de energie in het frequentiedomein.
- Verifieer Parseval's stelling.

5.5 Oefening 4.5: Exponentieel Signaal

Gegeven $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.

Vraag:

- Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.
- Schets het amplitude- en fasespectrum.
- Bepaal de bandbreedte (eerste nulpunt).

5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta

Bepaal de Fouriertransformatie van:

Vraag:

- $f(t) = \delta(t)$ (impulsfunctie)
- $f(t) = \delta(t - t_0)$ (verschoven impulsfunctie)
- $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ (hint: gebruik dat $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$)

5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)

Beschouw het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en definieer $y(t) = x(t - t_0)$ met $t_0 = \frac{1}{4}$.

Vraag:

- Bepaal $X(j\omega)$.
- Bepaal $Y(j\omega)$ met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.

5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's

Gebruik de bekende paren $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en de verschuivingsstelling.

Vraag:

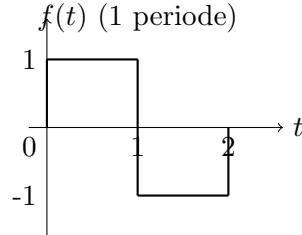
- Bepaal $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$.
- Bepaal de Fouriertransformatie van $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$.
- Wat is het amplitudespectrum van $x(t)$ uit (b)? (geen volledige schets nodig)

6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

6.1 Oefening 5.1: Blokgolf

Een periodieke blokgolf met periode $T = 2$ s is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



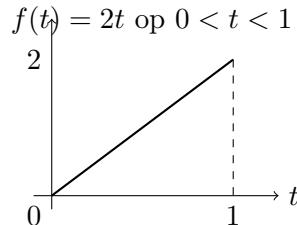
Zie Formularium: Fourierreeks (cartesisch) 1.3 en (complex) 1.3.

Vraag:

- (a) Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is.
- (b) Bereken de Fouriercoëfficiënten a_0 , a_n , en b_n .
- (c) Schrijf de Fourierreeks tot de 3e harmonische.

6.2 Oefening 5.2: Zaagtandgolf

Een zaagtandgolf met periode $T = 1$ s is gegeven door $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$.



Vraag:

- (a) Bereken a_0 .
- (b) Bepaal b_1 en b_2 .
- (c) Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.

6.3 Oefening 5.3: Driehoekgolf

Een driehoekgolf met periode $T = 2$ is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Vraag:

- (a) Is dit signaal even of oneven?
- (b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten.
- (c) Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fourierreeks.

6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.

Vraag:

- Bereken de gemiddelde macht van het signaal: $P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$.
- Bereken P uit de Fouriercoëfficiënten met Parseval's stelling: $P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.
- Controleer dat beide methoden dezelfde waarde geven.

6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

- Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k (met $\omega_0 = 2\pi/T$).
- Geef een eenvoudige interpretatie van welke harmonischen verdwijnen.
- Gebruik de link uit het formularium $X(k\omega_0) = T c_k$ om uit te leggen hoe de FTC van één periode gesampled wordt.

6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som

Neem een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \sin(t) + 2 \cos(2t).$$

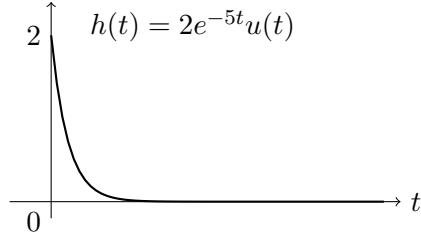
Vraag:

- Geef ω_0 .
- Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten a_0 , a_n en b_n .
- Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen herkennen welke termen niet nul zijn).

7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons

Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$.



Vraag:

- Bereken de systeemrespons op een stapingang $f(t) = u(t)$ door convolutie.
- Verifieer je antwoord met de Laplacetransformatie.

7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper

Een massa-veer-dempersysteem heeft $m = 2 \text{ kg}$, $k = 8 \text{ N/m}$, en $c = 4 \text{ Ns/m}$.

Vraag:

- Schrijf de differentiaalvergelijking.
- Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie ω_0 .
- Is het systeem ondergedempt, kritisch gedempt, of overgedempt?

7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons

Gegeven een LTC-systeem met overdracht $H(s) = \frac{10}{s+5}$.

Vraag:

- Bepaal de frequentierespons $H(j\omega)$.
- Bepaal de amplitude- en faserespons.
- Bepaal de 3dB bandbreedte (waar $|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$).

7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen

Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

$$H_1(s) = \frac{5}{s+2}, \quad H_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

Vraag:

- Bepaal de totale overdracht $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$.
- Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen

Bepaal voor de volgende systemen of ze BIBO-stabiel, marginaal stabiel of onstabiel zijn op basis van hun polen.

Vraag:

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$

7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons

Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

Vraag:

(a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(c) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer via de polen.

(d) Bepaal de nultoestandsrespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)

Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Vraag:

(a) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(b) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.

(c) Wat is de tijdsconstante τ en de DC-versterking $H(0)$?

8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

- Bepaal de karakteristieke veelterm $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.
- Vind de eigenwaarden van A .
- Bereken voor elke eigenwaarde een bijbehorende eigenvector.

8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem

Voor het systeem uit oefening 3.4 ($\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$).

Vraag:

- Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$
- Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix.
- Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit oefening 3.4.
- Bepaal de eigenvectoren.

8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vraag:

- Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.
- Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (omdat A symmetrisch is).
- Vorm de matrix P met eigenvectoren als kolommen en bepaal $P^{-1}AP = D$ waarbij D diagonaal is.

8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

- Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix.
- Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling.
- Bepaal de eigenwaarden numeriek en controleer of ze binnen de cirkels vallen.

8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit

Gegeven de matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vraag:

- (a) Bepaal de eigenwaarden.
- (b) Bepaal de eigenvectoren.
- (c) Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn.
- (d) Normaliseer de eigenvectoren tot eenheid.

8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële

Gegeven de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vraag:

- (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A .
- (b) Bereken de matrix exponentiële e^{At} via diagonalisatie of Cayley-Hamilton.
- (c) Gebruik dit om de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ te vinden met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

- (a) Bepaal de eigenwaarden van A en de dimensie van de eigenruimte.
- (b) Is A diagonaliseerbaar? Motiveer.
- (c) Bepaal e^{At} .

8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonalmatrix (basis)

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

- (a) Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector.
- (b) Bereken A^3 .
- (c) Bereken e^{At} .

9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen

9.1 Oefening 8.1: FTC-eigenschappen (Verschuiving en Modulatie)

Definieer het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

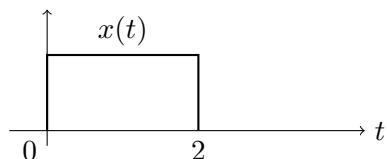
en de cosinus $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$. Definieer $y(t) = x(t) \cos(2\pi t)$ en $z(t) = x(t) + x(t-1)$.

Vraag:

- (a) Welke van de signalen $x(t)$, $v(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ zijn even/oneven?
- (b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de modulatiestelling en een gekende FTC-paar voor $x(t)$.
- (c) Bepaal $Z(j\omega)$ met de verschuivingsstelling.

9.2 Oefening 8.2: Laplace, Causaliteit en Convolutie

Het ingangssignaal is $x(t) = u(t) - u(t-2)$ en de impulsrespons is $h(t) = e^{-t}u(t)$.



Vraag:

- (a) Bepaal $X(s)$.
- (b) Is het systeem causaal? Motiveer op basis van $h(t)$.
- (c) Bepaal $y(t) = h(t) * x(t)$ en geef het antwoord stukgewijs.

9.3 Oefening 8.3: Complexe Fourierreeks (Puls-trein)

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

- (a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k .
- (b) Welke symmetrie zie je in c_{-k} t.o.v. c_k als $p(t)$ reëel is?
- (c) (Extra) Gebruik opnieuw de link $X(k\omega_0) = T c_k$ om te interpreteren wat de harmonischen betekenen in het frequentiedomein.

9.4 Oefening 8.4: Laplace met verschuiving en initieelwaarden

Beschouw

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2).$$

Vraag:

- (a) Bepaal $X(s)$.
- (b) Bepaal $x(0^+)$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ rechtstreeks uit $x(t)$.
- (c) Verifieer $x(0^+)$ met de beginwaardeestelling en $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ met de eindwaardeestelling (als toepasbaar).

9.5 Oefening 8.5: Differentiaalvergelijking (Laplace, stapinput)

Gegeven

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Vraag:

- (a) Los $y(t)$ op met de (unilaterale) Laplace-transformatie.
- (b) Geef $y(t)$ stukgewijs (indien nodig) en vereenvoudig maximaal.

9.6 Oefening 8.6: LTI-systeem (polen, stabiliteit, staprespons)

Een causaal LTI-systeem heeft

$$H(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}.$$

Vraag:

- (a) Bepaal $h(t)$.
- (b) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer.
- (c) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.
- (d) Bepaal $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ en controleer met de eindwaardeestelling.

9.7 Oefening 8.7: Convolutie + Laplace-check

Neem $x(t) = u(t) - u(t-1)$ en $h(t) = t u(t)$.

Vraag:

- (a) Bepaal $y(t) = (x * h)(t)$ via convolutie in het tijdsdomein en geef het resultaat stukgewijs.
- (b) Controleer je antwoord door Laplace: $Y(s) = X(s)H(s)$ en inverse Laplace.

9.8 Oefening 8.8: Fouriertransformatie + Parseval (energie)

Voor $a > 0$:

$$x(t) = e^{-a|t|}.$$

Vraag:

- (a) Bepaal $X(j\omega)$.
- (b) Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$.
- (c) Controleer met Parseval.

9.9 Oefening 8.9: Reële Fourierreeks (symmetrie + RMS)

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

Vraag:

- (a) Geef aan of $f(t)$ even/oneven is.
- (b) Bepaal de reële Fourierreeks van $f(t)$.
- (c) Bepaal de RMS-waarde van $f(t)$ en verifieer met Parseval (reeks-vorm).

9.10 Oefening 8.10: Toestandruimte en eigenwaarden (stabiliteit + oplossing)

Beschouw het systeem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vraag:

- (a) Bepaal de eigenwaarden van A en bespreek de stabiliteit van de oorsprong.
- (b) Bepaal $\mathbf{x}(t)$ expliciet (via diagonalisatie of via oplossing van een tweede-orde vergelijking).
- (c) Geef ook $x_1(t)$ en $x_2(t)$ afzonderlijk.

10 Oplossingen

10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1

Oplossing 1.1

Gegeven: Systeem met operator $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.

Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.

Oplossing:

Het systeem is **niet lineair**.

Bewijs:

- Test eigenschap 1 (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t) + 2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t) + 2) = 3ax(t) + 2a$
- Voor $a \neq 1$ geldt: $2 \neq 2a$, dus schaling klopt niet.
- Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.

Oplossing 1.2

Gegeven: RC-circuit met $R = 1000 \Omega$, $C = 10 \mu\text{F}$, ingangsspanning $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.

Vraag:

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op.

(b) Bereken τ .

(c) Bepaal $v_{\text{uit}}(0.01)$.

Oplossing:

(a) De differentiaalvergelijking van een RC-circuit: $RC \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = v_{\text{in}}$

$$(1000)(10 \times 10^{-6}) \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

$$0.01 \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

(b) Tijdsconstante: $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$

(c) Voor een staprespons met $v_{\text{uit}}(0) = 0$:

$$v_{\text{uit}}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})u(t) = 5(1 - e^{-100t})u(t)$$

Op $t = 10 \text{ ms} = 0.01 \text{ s}$:

$$v_{\text{uit}}(0.01) = 5(1 - e^{-1}) = 5(1 - 0.368) = 5(0.632) = 3.16 \text{ V}$$

Oplossing 1.3

Gegeven: Radio-isotoop met halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur. Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.

Vraag: Hoeveel mg blijft over om 14:00?

Oplossing:

Model radioactief verval: $N(t) = N_0 e^{-kt}$

Halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur: $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155 \text{ h}^{-1}$

Van 08:00 tot 14:00 is $\Delta t = 6$ uur:

$$N(6) = 20e^{-0.1155 \times 6} = 20e^{-0.693} = 20 \times 0.5 = 10 \text{ mg}$$

Antwoord: 10 mg blijft over.

Oplossing 1.4

Gegeven: Twee systemen: - Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$ - Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Vraag: Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.

Oplossing:

Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$

Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\} \checkmark$

Additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$

✓

Systeem A is LINEAIR.

Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ (voor $a \neq 1$) X

Systeem B is NIET LINEAIR.

Oplossing 1.5

Gegeven: Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?

Oplossing:

(a) $y(t) = x(t - 2)$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓ (zuivere vertraging)

(b) $y(t) = tx(t)$: LINEAIR maar NIET TIJDINVARIANT X (coëfficiënt varieert in tijd)

(c) $y(t) = |x(t)|$: NIET LINEAIR X (niet additief/homogeen)

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓ (integrator)

Antwoord: (a) en (d) zijn LTI.

Oplossing 1.6

Gegeven: $y(t) = x(t) + x(t - 1)$.

Vraag: Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.

Oplossing:

(a) **Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tijdsverschuiving van de input dezelfde verschuiving in beide termen geeft.

(b) **Causaal:** Ja. $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en $x(t - 1)$, dus enkel van huidige en verleden waarden.

(c) **Invertibel:** In het algemeen **niet** uniek invertibel: uit $y(t) = x(t) + x(t - 1)$ kan je $x(t)$ niet eenduidig bepalen zonder extra voorwaarden (bv. een beginvoorwaarde of beperking op $x(t)$). Er bestaan meerdere $x(t)$ die tot dezelfde $y(t)$ leiden.

Oplossing 1.7

Gegeven: (S1) $y(t) = 2x(t-1)$ en (S2) $y(t) = x(t) + u(t)$.

Vraag: Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).

Oplossing:

(a) **Lineariteit**

- (S1) is **lineair**: vertraging en vermenigvuldigen met 2 behouden additiviteit en homogeniteit.
- (S2) is **niet lineair**: bij $x(t) = 0$ krijg je $y(t) = u(t) \neq 0$ (nultoestandcriterium faalt).

(b) **Tijdinvariantie**

- (S1) is **tijdinvariant**: $x(t) \mapsto x(t-t_0)$ geeft $y(t) = 2x(t-1) \mapsto 2x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$.
- (S2) is **niet tijdinvariant**: voor $x(t)$ is $y(t) = x(t) + u(t)$. Voor $x(t-t_0)$ is de output $x(t-t_0) + u(t)$, terwijl $y(t-t_0) = x(t-t_0) + u(t-t_0)$. Niet gelijk als $t_0 \neq 0$.

(c) **Causaliteit**

- (S1) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t-1)$ (verleden).
- (S2) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en een gekend signaal $u(t)$.

10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2

Oplossing 2.1

Gegeven: $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

Vraag: Bepaal welk signaal exponentiële groei/verval vertoont; bereken waarden op $t = 5$ s.

Oplossing:

(a) $x_1(t) = e^{0.2t}$: exponentiële **groei** (positieve exponent) $x_2(t) = e^{-0.5t}$: exponentieel **verval** (negatieve exponent)

(b) Op $t = 5$ s:

$$\begin{aligned} x_1(5) &= e^{0.2 \times 5} = e^1 \approx 2.718 \\ x_2(5) &= e^{-0.5 \times 5} = e^{-2.5} \approx 0.082 \end{aligned}$$

Oplossing 2.2

Gegeven: $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.

Vraag: Bepaal amplitude, hoekfrequentie, frequentie, fasinhoek; schrijf als cosinus.

Oplossing:

(a) Van $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$:

- Amplitude: $A = 3$
- Hoekfrequentie: $\omega = 4\pi$ rad/s
- Frequentie: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ Hz
- Fasinhoek: $\phi = \frac{\pi}{6}$ rad = 30°

(b) Als cosinusfunctie: $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Oplossing 2.3

Gegeven: $z(t) = e^{j2\pi t}$.

Vraag: Schrijf als sinus/cosinus; bepaal waarde op $t = 0.25$ s.

Oplossing:

- (a) Formule van Euler: $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

$$z(t) = e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + j \sin(2\pi t)$$

- (b) Op $t = 0.25$ s:

$$z(0.25) = \cos(2\pi \times 0.25) + j \sin(2\pi \times 0.25) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j = j$$

Oplossing 2.4

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ en $g(t) = u(t) - u(t - 1)$.

Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets.

Oplossing:

Voor twee identieke pulsen van breedte 1:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een **driehoeksfunctie** met maximum 1 op $t = 1$ en breedte 2.

Oplossing 2.5

Gegeven: $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Vraag: Bepaal $y_1(t) = x(t - 2)$, $y_2(t) = x(2t)$, $y_3(t) = 2x(t)$.

Oplossing:

- (a) Tijdsverschuiving: $y_1(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) = e^2e^{-t}u(t-2)$ (start op $t = 2$)
(b) Tijdscompressie: $y_2(t) = e^{-2t}u(2t) = e^{-2t}u(t)$ (twee keer sneller)
(c) Amplitude schaling: $y_3(t) = 2e^{-t}u(t)$ (twee keer hoger)
(d) Schetsing: y_1 begint op $t = 2$, y_2 vervalt sneller, y_3 heeft dubbele amplitude.

Oplossing 2.6

Gegeven: Drie signalen waarvan de energie bepaald moet worden.

Vraag: Bereken energies.

Oplossing:

- (a) $E_1 = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$
(b) $E_2 = \int_0^\pi |2\sin(t)|^2 dt = 4 \int_0^\pi \sin^2(t) dt = 4 \int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 2[\pi - 0] = 2\pi$
(c) $E_3 = \int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = 1$

Oplossing 2.7

Gegeven: $x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2))$.

Vraag: Stukgewijs; energie; $x(t-1)$.

Oplossing:

(a) Stukgewijs:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

(b) Energie:

$$E = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{(2-t)^3}{-3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Verschuiving:

$$x(t-1) = (t-1)(u(t-1) - u(t-2)) + (3-t)(u(t-2) - u(t-3)).$$

Dit is dezelfde driehoek, verschoven naar rechts met 1.

Oplossing 2.8

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$.

Vraag: Schets en herschrijf $x(t)$ na verschuiving/schaling/spiegeling.

Oplossing:

(a) $x(t) = 1$ voor $0 \leq t < 2$ en $x(t) = 0$ elders (rechthoekpuls van breedte 2).

(b) Verschuivingen:

$$x(t-1) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(t+1) = u(t+1) - u(t-1).$$

Dus $x(t-1)$ ligt op $1 \leq t < 3$ en $x(t+1)$ op $-1 \leq t < 1$.

(c) Schaling en spiegeling:

$$x(2t) = u(2t) - u(2t-2) = u(t) - u(t-1),$$

dus $x(2t) = 1$ voor $0 \leq t < 1$. Verder

$$x(-t) = u(-t) - u(-t-2) = u(t+2) - u(t),$$

dus $x(-t) = 1$ voor $-2 \leq t < 0$.

10.3 Oplossingen Hoofdstuk 3

Oplossing 3.1

Gegeven: Vier functies.

Vraag: Bepaal Laplacetransformaties.

Oplossing:

(a) $\mathcal{L}\{5u(t)\} = \frac{5}{s}$, ROC: $\sigma > 0$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{s+3}$, ROC: $\sigma > -3$

(c) $\mathcal{L}\{t \cdot u(t)\} = \frac{1}{s^2}$, ROC: $\sigma > 0$

(d) $\mathcal{L}\{\cos(5t) \cdot u(t)\} = \frac{s}{s^2+25}$, ROC: $\sigma > 0$

Oplossing 3.2

Gegeven: $F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$.

Vraag: Vind inverse Laplacetransformatie.

Oplossing:

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+2^2}$$

Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t) + \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

Oplossing 3.3

Gegeven: $\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$, $y(0) = 2$.

Vraag: Los op met Laplacetransformatie.

Oplossing:

Laplacetransformatie van beide zijden:

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$Y(s)(s+4) = \frac{8}{s} + 2 = \frac{8+2s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{8+2s}{s(s+4)} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+4}$$

Inverse Laplacetransformatie:

$$y(t) = 2u(t) + 2e^{-4t}u(t) = (2 + 2e^{-4t})u(t)$$

Oplossing 3.4

Gegeven: $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Vraag:

(a) Karakteristieke vergelijking.

(b) Wortels.

(c) Los op.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

(b) Wortels:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$$

(c) Algemene oplossing:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

Met beginvoorwaarden: - $y(0) = 1$: $c_1 + c_2 = 1$ - $y'(0) = 0$: $-c_1 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -3c_2$

Oplossen: $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{3}{2}$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

Oplossing 3.5

Gegeven: $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$.

Vraag: Bepaal $f(t)$ en $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$.

Oplossing:

(a) Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin(2t)u(t)$$

(b) Gebruikmakend van de tijdsverschuivingsstelling $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$:

$$g(t) = f(t-2)u(t-2) = \sin(2(t-2))u(t-2) = \sin(2t-4)u(t-2)$$

Oplossing 3.6

Gegeven: $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$.

Vraag: Bepaal inverse via partieelbreuken.

Oplossing:

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+1)(s+2)(s+3)$:

$$10 = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$$

Voor $s = -1$: $10 = A(1)(2) = 2A \Rightarrow A = 5$

Voor $s = -2$: $10 = B(-1)(1) = -B \Rightarrow B = -10$

Voor $s = -3$: $10 = C(-2)(-1) = 2C \Rightarrow C = 5$

Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

Oplossing 3.7

Gegeven: $F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}$.

Vraag: Bepaal $f(0^+)$ en $f(\infty)$ met begin- en eindwaardeestelling; controleer door $f(t)$ te bepalen.

Oplossing:

(a) Beginwaardestelling (Formularium: initial value theorem $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$):

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = 3$$

(b) Eindwaardestelling (Formularium: final value theorem $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, mits alle polen van $sF(s)$ in het linkerhalfvlak liggen): De polen van $F(s)$ zijn $s = -1$ en $s = -3$ (beide in linkerhalfvlak), dus FVT is toepasbaar.

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = 0$$

(c) Controle door $f(t)$ te berekenen:

$$F(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s + 3}$$

$$f(t) = (e^{-t} + 2e^{-3t}) u(t)$$

Dan $f(0^+) = 1 + 2 = 3$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Oplossing 3.8

Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ en $g(t) = e^{-2t}u(t)$.

Vraag: Bepaal $y(t) = (f * g)(t)$ via Laplace.

Oplossing: Volgens het formularium geldt voor Laplace: convolutie in tijd \Rightarrow product in s -domein.

(a)

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t - 1)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad G(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}.$$

(b)

$$Y(s) = F(s)G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+2)}.$$

(c) Splits:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)} - e^{-s} \frac{1}{s(s+2)}.$$

Met partieelbreuken $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)$. Dus

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t).$$

En met de tijdsverschuiving (formularium: $f(t - a)u(t - a) \leftrightarrow e^{-as}F(s)$):

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-1)})u(t - 1).$$

Stukgewijs:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(e^{-2(t-1)} - e^{-2t}), & t \geq 1. \end{cases}$$

Oplossing 3.9

Gegeven: Eenvoudige signalen met stapfunctie $u(t)$.

Vraag: Bepaal enkele Laplace-paren en een inverse Laplace.

Oplossing:

$$(a) \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

$$(b) \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s+2)t} dt = \frac{1}{s+2}.$$

$$(c) \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}.$$

(d)

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} \Rightarrow f(t) = e^{-3t}u(t) + 2t u(t).$$

10.4 Oplossingen Hoofdstuk 4

Oplossing 4.1

Gegeven: Rechthoekpuls $f(t) = A$ voor $-T/2 < t < T/2$, 0 elders.

Vraag: Bepaal Fouriertransformatie; schrijf als sinc; bepaal nulpunten.

Oplossing:

(a) Fouriertransformatie:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j\omega t} dt = A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= A \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} = A \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} = AT \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \end{aligned}$$

(b) Sinc-vorm:

$$F(j\omega) = AT \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

(c) Eerste nulpunten: $\frac{\omega T}{2} = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

Dit geeft: $\omega = \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \dots$

Oplossing 4.2

Gegeven: Fouriertransformatie verschuivingsstelling.

Vraag: Bewijs; pas toe; bespreek effect op spektra.

Oplossing:

(a) Verschuivingsstelling:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

Bewijs:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Substitutie $\tau = t - t_0$:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

(b) Voor puls met $t_0 = 1$, $A = 2$, $T = 2$:

$$F(j\omega) = 2 \cdot 2 \cdot \text{sinc}(\omega) \cdot e^{-j\omega} = 4\text{sinc}(\omega)e^{-j\omega}$$

(c) Amplitude-spectrum: onveranderd (blijft $4|\text{sinc}(\omega)|$)

Fase-spectrum: lineair met $-\omega$ (effect van verschuiving)

Oplossing 4.3

Gegeven: $x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$ met $\text{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$.

Vraag: Pas modulatiestelling toe; schets spektra.

Oplossing:

(a) Modulatiestelling:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)f(t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$$

Voor $\text{rect}(t)$: $F_{\text{rect}}(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega)$

Voor $x(t)$ met $\omega_0 = 10\pi$:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[2\text{sinc}(\omega - 10\pi) + 2\text{sinc}(\omega + 10\pi)] = \text{sinc}(\omega - 10\pi) + \text{sinc}(\omega + 10\pi)$$

(b) Het spectrum bestaat uit twee verschoven sinc-functies gecentreerd op $\omega = \pm 10\pi$.

Oplossing 4.4

Gegeven: $f(t) = e^{-t}u(t)$.

Vraag: Bepaal energie in tijdsdomein; controleer in frequentiedomein; verifieer Parseval's stelling.

Oplossing:

(a) Energie in tijdsdomein:

$$E = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

(b) Fouriertransformatie: $F(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

(c) Energie in frequentiedomein (Parseval's stelling):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} [\arctan(\omega)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Oplossing 4.5

Gegeven: $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.

Vraag: Bepaal Fouriertransformatie; schets spektra; bepaal bandbreedte.

Oplossing:

(a) Fouriertransformatie:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(b) Amplitude-spectrum: $|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Fase-spectrum: $\angle F(j\omega) = 0$ (zuiver reeel en positief)

(c) Eerste nulpunt: geen nulpunten, maar bandbreedte op halve amplitude: $|F(j\omega)| = |F(0)|/2 = a$

Dit geeft: $\frac{2a}{a^2 + \omega^2} = a \Rightarrow \omega = a$ (3dB bandbreedte = $2a$)

Oplossing 4.6

Gegeven: Drie signalen.

Vraag: Bepaal Fouriertransformaties.

Oplossing:

(a) $f(t) = \delta(t)$: $F(j\omega) = 1$ (constant spectrum)

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$: $F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$ (lineaire fase)

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$:

$$F(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

(twee impulsen op $\pm\omega_0$)

Oplossing 4.7

Gegeven: $x(t) = 2$ op $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 0 elders en $y(t) = x(t - \frac{1}{4})$.

Vraag: Bepaal $X(j\omega)$ en $Y(j\omega)$.

Oplossing:

(a) Gebruik het FTC-paar uit het formularium (blok \leftrightarrow sinc): voor amplitude A en lengte L op $[-L/2, L/2]$ geldt

$$X(j\omega) = AL \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right).$$

Hier is $A = 2$ en $L = 1$, dus

$$X(j\omega) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(b) Tijdverschuiving (formularium: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$):

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega/4} X(j\omega) = 2e^{-j\omega/4} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Amplitude blijft gelijk, fase krijgt een lineaire term $-\omega/4$.

Oplossing 4.8

Gegeven: $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en tijdverschuiving.

Vraag: Bepaal FTC van verschoven delta's en een lineaire combinatie.

Oplossing:

- (a) Met de verschuivingsstelling:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}.$$

- (b) Voor $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$:

$$X(j\omega) = 2 \cdot 1 - e^{-j\omega} = 2 - e^{-j\omega}.$$

- (c) Het amplitudespectrum is

$$|X(j\omega)| = |2 - e^{-j\omega}| = \sqrt{(2 - \cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2} = \sqrt{5 - 4 \cos \omega}.$$

10.5 Oplossingen Hoofdstuk 5

Oplossing 5.1

Gegeven: Blokgolf met periode $T = 2$: $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = -1$ voor $1 < t < 2$.

Vraag: Bepaal symmetrie; bereken Fouriercoëfficiënten; schrijf reeks tot 3e harmonische.

Oplossing:

- (a) De functie is **oneven**: $f(-t) = -f(t)$ (na periodieke uitbreiding)
 (b) Fouriercoëfficiënten ($\omega_0 = \pi$ rad/s):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0$$

Voor oneven functie: $a_n = 0$

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi t) dt - \int_1^2 \sin(n\pi t) dt = \frac{4}{n\pi} \text{ voor oneven } n$$

- (c) Fourierreeks tot 3e harmonische:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi t)$$

Oplossing 5.2

Gegeven: Zaagtandgolf: $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$ met periode $T = 1$.

Vraag: Bereken a_0 , b_1 , b_2 ; schrijf Fouriersom met 2 termen.

Oplossing:

- (a) $a_0 = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1$

- (b) Voor b_n :

$$b_n = 2 \int_0^1 2t \sin(2\pi nt) dt = -\frac{2}{n\pi}$$

Dus: $b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_2 = -\frac{1}{\pi}$

- (c) Benaderende Fouriersom:

$$f(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi} \sin(4\pi t)$$

Oplossing 5.3

Gegeven: Driehoekgolf: $f(t) = t$ voor $0 \leq t < 1$, $f(t) = 2 - t$ voor $1 \leq t < 2$, periode $T = 2$.

Vraag: Bepaal symmetrie; bereken coëfficiënten; schrijf eerste drie niet-nul termen.

Oplossing:

(a) Symmetrie: Dit signaal is **even**: $f(2-t) = f(t)$

(b) Fouriercoëfficiënten ($\omega_0 = \pi$):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$

Voor even functie: $b_n = 0$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2} \sin(n\pi/2) \text{ (na integratie)}$$

(c) Eerste drie niet-nul termen:

$$f(t) \approx 0.5 + \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi t)$$

Oplossing 5.4

Gegeven: Blokgolf uit oefening 5.1.

Vraag: Bepaal gemiddelde macht; controleer met Parseval's stelling.

Oplossing:

(a) Gemiddelde macht via integratie:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^2 f^2(t) dt = \frac{1}{2} [1 + 1] = 1$$

(b) Parseval's stelling voor Fourierreeksen:

$$\begin{aligned} P &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16}{n^2\pi^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right] = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Oplossing 5.5

Gegeven: $T = 2$ en $f(t) = 1$ op $(0, 1)$, $f(t) = 0$ op $(1, 2)$, periodiek.

Vraag: Bepaal c_k en link met FTC-samples.

Oplossing: De complexe Fouriercoëfficiënten zijn

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

Omdat $f(t) = 1$ enkel op $(0, 1)$:

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jk\pi t} dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Interpretatie: voor even k is $1 - (-1)^k = 0$ dus $c_k = 0$; enkel oneven harmonischen blijven over.

Link met formularium: $X(k\omega_0) = T c_k$ zegt dat de FTC van één periode (tijdsignaal op lengte T) gesampled op $\omega = k\omega_0$ gelijk is aan T maal de FS-coëfficiënt.

Oplossing 5.6

Gegeven: $T = 2\pi$ en $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.

Vraag: Geef ω_0 en de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, b_n .

Oplossing:

Voor $T = 2\pi$ geldt $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$.

We herkennen direct de standaardvorm

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Vergelijken geeft:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle andere a_n, b_n zijn nul.

Dus de Fourierreeks is gewoon $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.

10.6 Oplossingen Hoofdstuk 6

Oplossing 6.1

Gegeven: Eerste-orde systeem met impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$.

Vraag: Bepaal systeemrespons op stapingang via convolutie; verifieer met Laplace.

Oplossing:

(a) Convolutie met stapingang:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t 2e^{-5\tau} d\tau = 2 \left[-\frac{1}{5}e^{-5\tau} \right]_0^t = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t)$$

(b) Via Laplacetransformatie:

$$H(s) = \frac{2}{s+5}, \quad F(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = \frac{2}{s(s+5)}$$

$$\text{Partieelbreuken: } \frac{2}{s(s+5)} = \frac{2/5}{s} - \frac{2/5}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t) \quad \checkmark$$

Oplossing 6.2

Gegeven: Massa-veer-dempersysteem: $m = 2 \text{ kg}$, $k = 8 \text{ N/m}$, $c = 4 \text{ Ns/m}$.

Vraag: Schrijf DV; bepaal ω_0 ; bepaal type demping.

Oplossing:

(a) Differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = f(t)$$

(b) Natuurlijke eigenfrequentie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

(c) Karakteristieke vergelijking: $2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Complexe wortels \Rightarrow Het systeem is **ondergedempt**.

Oplossing 6.3

Gegeven: LTC-systeem met $H(s) = \frac{10}{s+5}$.

Vraag: Bepaal frequentierespons; bepaal amplitude/faserespons; bepaal 3dB bandbreedte.

Oplossing:

(a) Frequentierespons:

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 5} = \frac{10(5 - j\omega)}{25 + \omega^2}$$

(b) Amplitude- en faserespons:

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/5)$$

(c) 3dB bandbreedte waar $|H(j\omega)| = |H(0)|/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$:

$$\frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow 25 + \omega^2 = 50 \Rightarrow \omega_{3dB} = 5 \text{ rad/s}$$

Oplossing 6.4

Gegeven: Twee systemen in cascade: $H_1(s) = \frac{5}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{3}{s+3}$.

Vraag: Bepaal totale overdracht; bepaal impulsrespons.

Oplossing:

(a) Totale overdracht:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{15}{(s+2)(s+3)}$$

(b) Impulsrespons via partieelbreuken:

$$\frac{15}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Voor $s = -2$: $15 = A(1) \Rightarrow A = 15$

Voor $s = -3$: $15 = B(-1) \Rightarrow B = -15$

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 15e^{-3t}u(t) = 15(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

Oplossing 6.5

Gegeven: Drie systemen.

Vraag: Bepaal stabiliteit.

Oplossing:

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$. Pool op $s = 2$ (rechterhalfvlak). \Rightarrow **Onstabiel**.

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Polen op $s = -1, -2$ (linkerhalfvlak). \Rightarrow **Stabiel**.

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$. Polen op $s = \pm 2j$ (op imaginaire as, enkelvoudig). \Rightarrow **Marginaal stabiel** (oscilleert).

Oplossing 6.6

Gegeven: $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$ met nul beginvoorwaarden.

Vraag: Bepaal $H(s)$, $h(t)$, stabiliteit en $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

Oplossing:

(a) Laplace (formularium: afgeleide in t):

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+3)Y(s) = X(s).$$

Dus

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

(b)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-3t}u(t).$$

(c) Pool op $s = -3$ (linkerhalfvlak) \Rightarrow BIBO-stabiel.

(d) Voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$ geldt

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Dan

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+3)}.$$

Met $\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right)$ volgt

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1).$$

Oplossing 6.7

Gegeven: Causaal LTC-systeem met $H(s) = \frac{1}{s+1}$.

Vraag: Bepaal $h(t)$, staprespons, τ en $H(0)$.

Oplossing:

(a)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}u(t).$$

(b) Voor $x(t) = u(t)$: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Daaruit volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

(c) De tijdsconstante is $\tau = 1$ en de DC-versterking is $H(0) = 1$.

10.7 Oplossingen Hoofdstuk 7

Oplossing 7.1

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal karakteristieke veelterm; vind eigenwaarden; bereken eigenvectoren.

Oplossing:

(a) Karakteristieke veelterm:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

(b) Eigenwaarden: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$$

(c) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.2

Gegeven: Tweede-orde systeem uit oefening 3.4.

Vraag: Schrijf als matrixvergelijking; bepaal eigenwaarden; verifieer; bepaal eigenvectoren.

Oplossing:

(a) Matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

(c) Eigenwaarden: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ (hetzelfde als uit oefening 3.4) ✓

(d) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.3

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden/eigenvectoren; controleer orthogonaliteit; bepaal $P^{-1}AP = D$.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$

Eigenvectoren: - Voor $\lambda_1 = 6$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) - Voor $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

(b) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(2 - 2) = 0 \quad \checkmark$$

(c) Diagonalisatie:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.4

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal Gerschgorin-cirkels; geef grenzen; controleer eigenwaarden.

Oplossing:

(a) Gerschgorin-cirkels:

Rij 1: Centrum 4, radius $0.5 + 0.2 = 0.7$, dus $\lambda \in [3.3, 4.7]$

Rij 2: Centrum -2, radius $0.3 + 0.1 = 0.4$, dus $\lambda \in [-2.4, -1.6]$

Rij 3: Centrum 3, radius $0.2 + 0.4 = 0.6$, dus $\lambda \in [2.4, 3.6]$

(b) Alle eigenwaarden liggen in de unie van deze cirkels.

(c) De eigenwaarden zijn ongeveer: $\lambda_1 \approx 4.3$, $\lambda_2 \approx -2.1$, $\lambda_3 \approx 2.8$ (numeriek bepaald)

Alle drie liggen inderdaad in hun respectieve cirkels. ✓

Oplossing 7.5

Gegeven: $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal eigenwaarden; bepaal eigenvectoren; toon orthogonaliteit aan; normaliseer.

Oplossing:

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

(b) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

(d) Genormaliseerde eigenvectoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verificatie: $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ ✓

Oplossing 7.6

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vraag: Bepaal e^{At} en oplossing $\mathbf{x}(t)$.

Oplossing:

(a) Eigenwaarden: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Eigenvectoren: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Matrix exponentiële $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Oplossing $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Oplossing 7.7

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Eigenwaarden/eigenruimte; diagonaliseerbaarheid; e^{At} .

Oplossing:

(a) Karakteristieke veelterm: $(2 - \lambda)^2 = 0$, dus $\lambda = 2$ (algebraïsche multipeliteit 2). Voor eigenvectoren: $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus $v_2 = 0$ en v_1 vrij. De eigenruimte is 1-dimensionaal.

(b) Omdat er maar 1 lineair onafhankelijke eigenvector is, is A **niet diagonaliseerbaar**.

(c) Schrijf $A = 2I + N$ met $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $N^2 = 0$. Dan

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing 7.8

Gegeven: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vraag: Eigenwaarden/eigenvectoren, A^3 en e^{At} .

Oplossing:

(a) Omdat A diagonaal is, zijn de eigenwaarden de diagonalelementen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Bijhorende eigenvectoren kunnen gekozen worden als de standaardbasisvectoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\lambda = 1), \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\lambda = 2).$$

(b)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Voor een diagonaalmatrix geldt $e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8

Oplossing 8.1

Gegeven: $x(t)$ is een blok op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$, $y(t) = x(t) \cos(2\pi t)$, $z(t) = x(t) + x(t-1)$.

extbfVraag: (a) bepaal even/oneven; (b) bepaal $Y(j\omega)$ via modulatie; (c) bepaal $Z(j\omega)$ via verschuiving.

Oplossing:

(a) $x(t)$ is even, $v(t)$ is even, $y(t)$ is even (product van even functies). $z(t)$ is in het algemeen noch even noch oneven door de verschuiving $x(t-1)$.

(b) Uit het formularium (blok \leftrightarrow sinc) volgt voor $x(t)$ met $A = 1$, $L = 1$:

$$X(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Met de modulatiestelling uit het formularium:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))], \quad \omega_0 = 2\pi.$$

Dus

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} \left[\text{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2}\right) \right].$$

(c) Tijdverschuiving (formularium): $x(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega} X(j\omega)$. Dus

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega} X(j\omega) = (1 + e^{-j\omega}) X(j\omega).$$

Oplossing 8.2

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-t} u(t)$.

Oplossing:

(a)

$$X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-2)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}}{s}.$$

(b) $h(t) = e^{-t} u(t) = 0$ voor $t < 0 \Rightarrow$ systeem is causaal.

(c) $H(s) = \frac{1}{s+1}$ en dus

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+1)}.$$

Net zoals in het formularium: tijdverschuiving in t correspondeert met e^{-as} in s . Omdat $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1 - e^{-t})u(t)$, volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2).$$

Oplossing 8.3

Gegeven: $T = 2$, $p(t) = 1$ op $(0, \frac{1}{2})$, anders 0, periodiek.

Oplossing:

(a) Met $\omega_0 = \pi$:

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-jk\pi t} dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi/2}}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Omdat $p(t)$ reëel is geldt de klassieke symmetrie $c_{-k} = c_k^*$.

(c) Link met formularium: $X(k\omega_0) = T c_k$ verbindt de harmonischen met samples van de FTC van één periode.

Oplossing 8.4

Gegeven: $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2)$.

Vraag: (a) $X(s)$, (b) $x(0^+)$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, (c) controle via begin-/eindwaardestelling.

Oplossing:

(a) Gebruik de verschuivingsregel $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}$ en $e^{-(t-2)}u(t-2) = (e^{-t}u(t))|_{t \mapsto t-2} \leftrightarrow e^{-2s} \frac{1}{s+1}$. Dus

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - e^{-2s} \frac{1}{s+1} = \frac{1 - e^{-2s}}{s+1}.$$

(b) Uit de definitie: voor $t \rightarrow 0^+$ is $u(t) = 1$ en $u(t-2) = 0$, dus $x(0^+) = 1$. Voor $t \rightarrow \infty$: beide exponentiëlen gaan naar 0, dus $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

(c) Beginwaardestelling: $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 1$.

Eindwaardestelling: vereist o.a. dat alle polen van $sX(s)$ strikt links liggen. Hier is $sX(s) = \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1}$ en de enige pool zit in $s = -1$ (links), dus toepasbaar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 0.$$

Oplossing 8.5

Gegeven: $y'' + 3y' + 2y = u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Vraag: (a) los op via (unilaterale) Laplace, (b) geef $y(t)$.

Oplossing: Neem Laplace en gebruik $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$, $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$. Dan

$$(s^2Y - 1) + 3(sY) + 2Y = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s} + 1.$$

Dus

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s} + 1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1+s}{s(s+1)(s+2)}.$$

Partieelbreuken:

$$\frac{1+s}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

Invullen $s = 0, -1, -2$ geeft $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{2}$. Dus

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t).$$

Oplossing 8.6

Gegeven: Causaal LTI-systeem met $H(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$.

Vraag: (a) $h(t)$, (b) BIBO-stabiliteit, (c) staprespons, (d) eindwaarde.

Oplossing:

(a) Partieelbreuken:

$$\frac{s+2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}.$$

Dan $s+2 = A(s+4) + Bs = (A+B)s + 4A$. Dus $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ en $A+B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$.

Voor causaal: ROC rechts van de meest rechtse pool, dus

$$h(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-4t}u(t).$$

(b) BIBO-stabiliteit: er is een pool in $s = 0$ (niet strikt links) \Rightarrow niet BIBO-stabiel.

(c) Voor $x(t) = u(t)$ is $X(s) = \frac{1}{s}$. Dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)}.$$

Partieelbreuken:

$$\frac{s+2}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}.$$

Opplossen geeft $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{8}$. Dus

$$y(t) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-4t} \right) u(t).$$

(d) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$ door de term $\frac{1}{2}t$. Eindwaardestelling is hier niet toepasbaar (systeem heeft pool op de imaginaire as), en strookt dus met de groei.

Oplossing 8.7

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-1)$ en $h(t) = t u(t)$.

Vraag: (a) $y(t) = x * h$ stukgewijs, (b) controle via Laplace.

Oplossing:

(a) Convolutie:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) d\tau.$$

Omdat $x(\tau) = 1$ voor $0 < \tau < 1$ en 0 elders, wordt

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)u(t-\tau) d\tau.$$

Nu stukgewijs:

- $t < 0$: $u(t-\tau) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$.

- $0 \leq t < 1$: integraal van 0 tot t : $y(t) = \int_0^t (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}$.
- $t \geq 1$: integraal van 0 tot 1: $y(t) = \int_0^1 (t - \tau) d\tau = t - \frac{1}{2}$.

Dus

$$y(t) = 0 \cdot u(-t) + \frac{t^2}{2} (u(t) - u(t-1)) + \left(t - \frac{1}{2} \right) u(t-1).$$

(b) Laplace-check: $X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$ en $H(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$. Dus

$$Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^3}.$$

Omdat $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2}u(t)$, volgt

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1),$$

wat equivalent is met de stukgewijze vorm hierboven.

Oplossing 8.8

Gegeven: $x(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.

Vraag: (a) $X(j\omega)$, (b) energie, (c) Parseval.

Oplossing:

(a) $x(t)$ is even:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

(b)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a}.$$

(c) Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Hier $|X|^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$ en met $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$ krijg je

$$\frac{1}{2\pi} \int |X|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a}.$$

Oplossing 8.9

Gegeven: $f(t) = 1$ op $(0, \pi)$ en $f(t) = -1$ op $(-\pi, 0)$, $T = 2\pi$.

Vraag: (a) symmetrie, (b) Fourierreeks, (c) RMS en Parseval.

Oplossing:

(a) $f(-t) = -f(t)$, dus f is **oneven**. Dan $a_0 = 0$ en $a_n = 0$.

(b) Voor $n \geq 1$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Dus $b_n = 0$ voor even n en $b_n = \frac{4}{\pi n}$ voor oneven n .

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)t).$$

(c) RMS: $f^2(t) = 1$ bijna overal, dus RMS = $\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt} = 1$. Parseval (reële reeks):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Links = 2. Rechts: $\sum_n \text{oneven } \frac{16}{\pi^2 n^2} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$, klopt.

Oplossing 8.10

Gegeven: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$.

Vraag: (a) eigenwaarden + stabiliteit, (b)(c) expliciete oplossing.

Oplossing:

(a) Eigenwaarden: karakteristieke veelterm

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Dus $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ (beiden negatief) \Rightarrow oorsprong is asymptotisch stabiel.

(b) De toestandvergelijkingen zijn $\dot{x}_1 = x_2$ en $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$. Elimineer x_2 : $x_1'' = \dot{x}_2 = -2\dot{x}_1 - 3x_1' = -2x_1 - 3x_1'$. Dus

$$x_1'' + 3x_1' + 2x_1 = 0.$$

Oplossing: $x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$. Met $x_1(0) = 1$ geeft $C_1 + C_2 = 1$. Verder $x_2 = \dot{x}_1 = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$ en $x_2(0) = 0$ geeft $-C_1 - 2C_2 = 0$. Hieruit volgt $C_2 = -1$ en $C_1 = 2$.

(c) Dus

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$