

# Oefeningen Wiskunde voor Systemen

KU Leuven - ESAT

13 december 2025

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Formularium</b>	<b>4</b>
1.1	Laplace transform (LT) . . . . .	4
1.2	Fourier transform (FTC) . . . . .	4
1.3	Fourier series (FS) . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking</b>	<b>7</b>
2.1	Oefening 1.1: Lineaire Systemen . . . . .	7
2.2	Oefening 1.2: RC-Circuit . . . . .	7
2.3	Oefening 1.3: Radioactief Verval . . . . .	7
2.4	Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit . . . . .	7
2.5	Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning . . . . .	7
2.6	Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit . . . . .	8
2.7	Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit) . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen</b>	<b>9</b>
3.1	Oefening 2.1: Exponentiële Functies . . . . .	9
3.2	Oefening 2.2: Sinus en Cosinus . . . . .	9
3.3	Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie . . . . .	9
3.4	Oefening 2.4: Convolutie . . . . .	9
3.5	Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling . . . . .	9
3.6	Oefening 2.6: Signaalenergie . . . . .	10
3.7	Oefening 2.7: Driehoeksignaal met Stapfuncties . . . . .	10
3.8	Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie) . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie</b>	<b>11</b>
4.1	Oefening 3.1: Eenvoudige Laplacetransformaties . . . . .	11
4.2	Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie . . . . .	11
4.3	Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem . . . . .	11
4.4	Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem . . . . .	11
4.5	Oefening 3.5: Laplace-transformatie met Verschuiving . . . . .	11
4.6	Oefening 3.6: Partieelbreuken . . . . .	12
4.7	Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling . . . . .	12
4.8	Oefening 3.8: Convolutie via Laplace . . . . .	12
4.9	Oefening 3.9: Laplace . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie</b>	<b>13</b>
5.1	Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls . . . . .	13
5.2	Oefening 4.2: Verschuivingsstelling . . . . .	13
5.3	Oefening 4.3: Modulation Property . . . . .	13
5.4	Oefening 4.4: Parseval's Stelling . . . . .	14

5.5	Oefening 4.5: Exponentieel Signaal . . . . .	14
5.6	Oefening 4.6: Dirac Delta . . . . .	14
5.7	Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC) . . . . .	14
5.8	Oefening 4.8: FTC van delta's . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Hoofdstuk 5: Fourierreeksen</b>	<b>15</b>
6.1	Oefening 5.1: Blokgolf . . . . .	15
6.2	Oefening 5.2: Zaagtandgolf . . . . .	15
6.3	Oefening 5.3: Driehoekgolf . . . . .	15
6.4	Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen . . . . .	16
6.5	Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC . . . . .	16
6.6	Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Hoofdstuk 6: LTC-Systemen</b>	<b>17</b>
7.1	Oefening 6.1: Impulsrespons . . . . .	17
7.2	Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper . . . . .	17
7.3	Oefening 6.3: Frequentierespons . . . . .	17
7.4	Oefening 6.4: Cascade Systemen . . . . .	17
7.5	Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen . . . . .	18
7.6	Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons . . . . .	18
7.7	Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis) . . . . .	18
<b>8</b>	<b>Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren</b>	<b>19</b>
8.1	Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen . . . . .	19
8.2	Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem . . . . .	19
8.3	Oefening 7.3: Diagonalisatie . . . . .	19
8.4	Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling . . . . .	19
8.5	Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit . . . . .	20
8.6	Oefening 7.6: Matrix Exponentiële . . . . .	20
8.7	Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal . . . . .	20
8.8	Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis) . . . . .	20
<b>9</b>	<b>Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen</b>	<b>21</b>
9.1	Oefening 8.1: FTC-eigenschappen (Verschuiving en Modulatie) . . . . .	21
9.2	Oefening 8.2: Laplace, Causaliteit en Convolutie . . . . .	21
9.3	Oefening 8.3: Complexe Fourierreeks (Puls-trein) . . . . .	21
9.4	Oefening 8.4: Laplace met verschuiving en initieelwaarden . . . . .	22
9.5	Oefening 8.5: Differentiaalvergelijking (Laplace, stapinput) . . . . .	22
9.6	Oefening 8.6: LTI-systeem (polen, stabiliteit, staprespons) . . . . .	22
9.7	Oefening 8.7: Convolutie + Laplace-check . . . . .	22
9.8	Oefening 8.8: Fouriertransformatie + Parseval (energie) . . . . .	22
9.9	Oefening 8.9: Reële Fourierreeks (symmetrie + RMS) . . . . .	23
9.10	Oefening 8.10: Toestandruimte en eigenwaarden (stabiliteit + oplossing) . . . . .	23
<b>10</b>	<b>Oplossingen</b>	<b>24</b>
10.1	Oplossingen Hoofdstuk 1 . . . . .	24
10.2	Oplossingen Hoofdstuk 2 . . . . .	26
10.3	Oplossingen Hoofdstuk 3 . . . . .	28
10.4	Oplossingen Hoofdstuk 4 . . . . .	32
10.5	Oplossingen Hoofdstuk 5 . . . . .	35
10.6	Oplossingen Hoofdstuk 6 . . . . .	37
10.7	Oplossingen Hoofdstuk 7 . . . . .	40

10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8 . . . . .	44
--	----

# 1 Formularium

Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het “Signals and Systems” formularium. In de oefeningen wordt hiernaar verwezen.

## 1.1 Laplace transform (LT)

### 1.1 Definitie en eigenschappen

Definitie:	$f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$
translatie in $s$ :	$f(t) e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s + a)$
translatie in $t$ :	$f(t - a) u(t - a)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-as} F(s)$
afgeleide in $t$ :	$\frac{d}{dt}(f(t) u(t))$	$\longleftrightarrow$	$sF(s) - f(0^+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t) u(t))$	$\longleftrightarrow$	$s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
afgeleide in $s$ :	$t f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$-\frac{d}{ds} F(s)$
	$t^n f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
convolutie:	$(f * g)(t) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(s) G(s)$
schaling:	$f(at)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

**Initial value theorem:**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

**Final value theorem:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{onder de gebruikelijke poolvoorwaarden}).$$

**Link met FTC:**

$$\text{LT}(s = j\omega) = \text{FTC}(j\omega) \quad \text{als } x(t) \text{ absoluut integreerbaar is.}$$

### 1.2 Useful Laplace pairs

$e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s + a}$	$t^n u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(at) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\sin(at) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow$	1	$u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{s}$
$t \cos(at) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin(at) u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$

## 1.2 Fourier transform (FTC)

### 2.1 Basic formulae

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

convolution theorem (tijd):	$f(t) * g(t)$	$\longleftrightarrow F(\omega) G(\omega)$
convolution theorem (freq.):	$f(t) g(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$
translatie:	$x(t - t_0)$	$\longleftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
symmetry (reëel $x$ ):		$X(-\omega) = X^*(\omega)$
time symmetry (reëel $x$ ):	$x(-t)$	$\longleftrightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$
link FS-FTC:		$X(k\omega_0) = T c_k \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$

## 2.2 Useful Fourier pairs

We gebruiken  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

Block:	$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-L/2, L/2] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$	$\longleftrightarrow X(\omega) = AL \text{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right)$
Sinc:	$x(t) = A \text{sinc}(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow X(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_0}, &  \omega  < \omega_0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$
Impuls:	$\delta(t - t_0)$	$\longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$
Complex expon.:	$e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
Cosine:	$\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Sine:	$\sin(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
Delta train:	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\longleftrightarrow \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

## 1.3 Fourier series (FS)

### 3.1 Cartesian form

Voor periode  $T$  met  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right].$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) dt.$$

### 3.2 Complex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

symmetry (reëel  $f$ ):  $c_{-k} = c_k^*$ .

Spectrum:

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

### 3.3 Links between cartesian and complex form

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2}, & c_k^* &= \frac{a_k + jb_k}{2}. \\|c_k| &= \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \varphi_k &= \text{Arctan2}(a_k, -b_k). \\a_k &= 2 \operatorname{Re}\{c_k\}, & b_k &= -2 \operatorname{Im}\{c_k\}.\end{aligned}$$

## 2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

### 2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen

Gegeven een systeem met operator  $\mathcal{T}$  gedefinieerd als  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$ .

**Vraag:** Onderzoek of dit systeem lineair is.

### 2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit

Een RC-circuit heeft  $R = 1000 \, \Omega$  en  $C = 10 \, \mu\text{F}$ . De ingangsspanning is een stapfunctie  $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$  V.

**Vraag:**

- (a) Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning  $v_{\text{uit}}(t)$ .
- (b) Bereken de tijdsconstante  $\tau$  van het circuit.
- (c) Bepaal de uitgangsspanning na 10 ms als  $v_{\text{uit}}(0) = 0$  V.

### 2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval

Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd.

**Vraag:** Hoeveel milligram blijft over om 14:00 uur?

### 2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit

Gegeven twee systemen:

- Systeem A:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
- Systeem B:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

**Vraag:**

- (a) Test beide systemen op homogeniteit (schaling):  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ .
- (b) Test beide systemen op additiviteit:  $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$ .
- (c) Bepaal voor elk systeem of het lineair is.

### 2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning

Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?

- (a)  $y(t) = x(t - 2)$
- (b)  $y(t) = tx(t)$
- (c)  $y(t) = |x(t)|$
- (d)  $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$

**Vraag:** Motiveer je antwoorden.

## 2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit

Gegeven het systeem  $\mathcal{T}$  met

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + x(t-1).$$

**Vraag:**

- (a) Is het systeem lineair en tijdinvariant?
- (b) Is het systeem causaal?
- (c) Is het systeem invertibel? Motiveer.

## 2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)

Beschouw de twee systemen:

$$(S1) \ y(t) = 2x(t-1), \quad (S2) \ y(t) = x(t) + u(t).$$

**Vraag:**

- (a) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is.
- (b) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdinvariant is.
- (c) Is elk systeem causaal? Motiveer kort.

## 3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

### 3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies

Gegeven de signalen  $x_1(t) = e^{0.2t}$  en  $x_2(t) = e^{-0.5t}$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont.
- (b) Bereken de waarde van elk signaal op  $t = 5$  s.

### 3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus

Een sinusgolf is gegeven door  $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal de amplitude, hoekfrequentie  $\omega$ , frequentie  $f$ , en fasehoek.
- (b) Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.

### 3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie

Gegeven  $z(t) = e^{j2\pi t}$ .

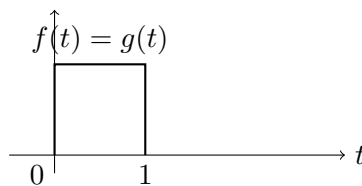
**Vraag:**

- (a) Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formules van Euler.
- (b) Bepaal de waarde op  $t = 0.25$  s.

### 3.4 Oefening 2.4: Convolutie

Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

$$f(t) = u(t) - u(t - 1), \quad g(t) = u(t) - u(t - 1)$$

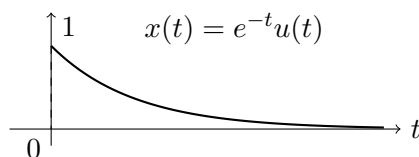


*Zie Formularium: convolutie in tijd  $\leftrightarrow$  product in frequentie in ??.*

**Vraag:** Bepaal  $(f * g)(t)$  en schets het resultaat.

### 3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling

Gegeven het signaal  $x(t) = e^{-t}u(t)$ .



**Vraag:**

- (a) Bepaal  $y_1(t) = x(t - 2)$  (tijdsverschuiving).
- (b) Bepaal  $y_2(t) = x(2t)$  (tijdscompressie).
- (c) Bepaal  $y_3(t) = 2x(t)$  (amplitude schaling).
- (d) Schets alle drie signalen.

### 3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie

Bepaal de energie van de volgende signalen:

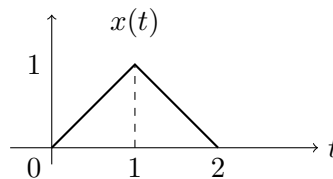
**Vraag:**

- (a)  $x(t) = e^{-t}u(t)$
- (b)  $x(t) = 2\sin(t)u(t)$  over  $0 \leq t \leq \pi$
- (c)  $x(t) = \text{rect}(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$

### 3.7 Oefening 2.7: Driehoeksignaal met Stapfuncties

Definieer het signaal

$$x(t) = t(u(t) - u(t - 1)) + (2 - t)(u(t - 1) - u(t - 2)).$$



**Vraag:**

- (a) Schrijf  $x(t)$  expliciet als stukgewijze functie.
- (b) Bereken de energie  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ .
- (c) Bepaal en schets  $x(t - 1)$ .

### 3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)

Neem

$$x(t) = u(t) - u(t - 2).$$

**Vraag:**

- (a) Schets  $x(t)$ .
- (b) Schrijf  $x(t - 1)$  en  $x(t + 1)$  in termen van stapfuncties en schets ze.
- (c) Schrijf  $x(2t)$  en  $x(-t)$  in termen van stapfuncties en schets ze.

## 4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

### 4.1 Oefening 3.1: Eenvoudige Laplacetransformaties

Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:

*Zie Formularium: definitie 1.1 en paren 1.1.*

**Vraag:**

- (a)  $f(t) = 5u(t)$
- (b)  $f(t) = e^{-3t}u(t)$
- (c)  $f(t) = t \cdot u(t)$
- (d)  $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$

### 4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$$

**Vraag:** Vind  $f(t)$ .

*Zie Formularium: paren 1.1.*

### 4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem

Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:

$$\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t), \quad y(0) = 2$$

**Vraag:** Bepaal  $y(t)$ .

*Zie Formularium: afgeleide-eigenschap ??.*

### 4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem

Een massa-veer-dempersysteem wordt beschreven door:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de karakteristieke vergelijking.
- (b) Vind de wortels van de karakteristieke vergelijking.
- (c) Los de differentiaalvergelijking op voor  $y(t)$ .

### 4.5 Oefening 3.5: Laplace-transformatie met Verschuiving

Gegeven  $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .
- (b) Bepaal  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$  gebruikmakend van de tijdsverschuivingsstelling.

*Zie Formularium: tijdsverschuiving in  $t$  ??.*

#### 4.6 Oefening 3.6: Partieelbreuken

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

**Vraag:** Bepaal  $f(t)$  via partieelbreukontwikkeling.

#### 4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling

Gegeven de functie in het  $s$ -domein:

$$F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de beginwaarde  $f(0^+)$  met de beginwaardestelling.
- (b) Bepaal de eindwaarde  $f(\infty)$  met de eindwaardestelling.
- (c) Controleer je antwoorden door  $f(t)$  te berekenen.

*Zie Formularium: begin- en eindwaardestelling ??.*

#### 4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace

Gegeven

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = e^{-2t}u(t).$$

Definieer  $y(t) = (f * g)(t)$ .

*Zie Formularium: convolutie-eigenschap ??.*

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $F(s)$  en  $G(s)$ .
- (b) Gebruik de convolutie-eigenschap in het  $s$ -domein om  $Y(s)$  te vinden.
- (c) Bepaal  $y(t)$  en geef het antwoord stukgewijs.

#### 4.9 Oefening 3.9: Laplace

**Vraag:**

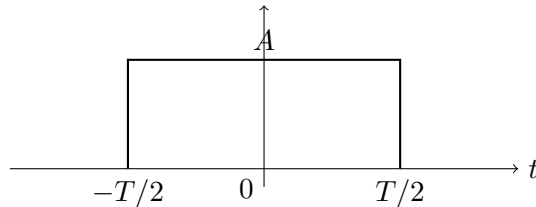
- (a) Bepaal  $\mathcal{L}\{u(t)\}$ .
- (b) Bepaal  $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\}$ .
- (c) Bepaal  $\mathcal{L}\{tu(t)\}$ .
- (d) Bepaal de inverse Laplace van  $F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2}$ .

## 5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

### 5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls

Gegeven een rechthoekpuls:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



*Zie Formularium: blok  $\leftrightarrow$  sinc in 1.2.*

**Vraag:**

- (a) Bepaal de Fouriertransformatie  $F(j\omega)$ .
- (b) Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie.
- (c) Bepaal de eerste nulpunten van het spectrum.

### 5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling

Gegeven  $F\{f(t)\} = F(j\omega)$  bepaal de Fouriertransformatie van  $f(t - t_0)$ .

*Zie Formularium: tijdsverschuiving ??.*

**Vraag:**

- (a) Geef het bewijs van de verschuivingsstelling.
- (b) Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met  $t_0 = 1$  s,  $A = 2$ ,  $T = 2$  s.
- (c) Bespreek het effect op amplitude- en fasespectrum.

### 5.3 Oefening 4.3: Modulation Property

Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

$$x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$$

waarbij  $\text{rect}(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$  is.

*Zie Formularium: modulatie (cosinus) in 1.2.*

**Vraag:**

- (a) Pas de modulatiestelling toe.
- (b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

## 5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling

De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven  $f(t) = e^{-t}u(t)$ .

*Zie Formularium: FTC-definitie 1.2 en eigenschappen ??.*

**Vraag:**

- (a) Bepaal de totale energie in het tijdsdomein:  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ .
- (b) Bepaal  $F(j\omega)$  en controleer de energie in het frequentiedomein.
- (c) Verifieer Parseval's stelling.

## 5.5 Oefening 4.5: Exponentieel Signaal

Gegeven  $f(t) = e^{-a|t|}$  met  $a > 0$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal de Fouriertransformatie  $F(j\omega)$ .
- (b) Schets het amplitude- en fasespectrum.
- (c) Bepaal de bandbreedte (eerste nulpunt).

## 5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta

Bepaal de Fouriertransformatie van:

**Vraag:**

- (a)  $f(t) = \delta(t)$  (impulsfunctie)
- (b)  $f(t) = \delta(t - t_0)$  (vershoven impulsfunctie)
- (c)  $f(t) = \cos(\omega_0 t)$  (hint: gebruik dat  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ )

## 5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)

Beschouw het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en definieer  $y(t) = x(t - t_0)$  met  $t_0 = \frac{1}{4}$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $X(j\omega)$ .
- (b) Bepaal  $Y(j\omega)$  met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.

## 5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's

Gebruik de bekende paren  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  en de verschuivingsstelling.

**Vraag:**

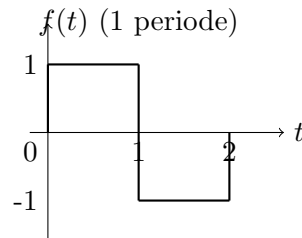
- (a) Bepaal  $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$ .
- (b) Bepaal de Fouriertransformatie van  $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$ .
- (c) Wat is het amplitudespectrum van  $x(t)$  uit (b)? (geen volledige schets nodig)

## 6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

### 6.1 Oefening 5.1: Blok golf

Een periodieke blok golf met periode  $T = 2$  s is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



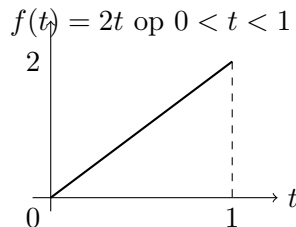
Zie Formularium: *Fourierreeks (cartesisch) 1.3 en (complex) 1.3.*

**Vraag:**

- (a) Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is.
- (b) Bereken de Fouriercoëfficiënten  $a_0$ ,  $a_n$ , en  $b_n$ .
- (c) Schrijf de Fourierreeks tot de 3e harmonische.

### 6.2 Oefening 5.2: Zaagtand golf

Een zaagtand golf met periode  $T = 1$  s is gegeven door  $f(t) = 2t$  voor  $0 < t < 1$ .



**Vraag:**

- (a) Bereken  $a_0$ .
- (b) Bepaal  $b_1$  en  $b_2$ .
- (c) Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.

### 6.3 Oefening 5.3: Driehoek golf

Een driehoek golf met periode  $T = 2$  is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

**Vraag:**

- (a) Is dit signaal even of oneven?
- (b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten.
- (c) Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fourierreeks.

## 6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.

**Vraag:**

- (a) Bereken de gemiddelde macht van het signaal:  $P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$ .
- (b) Bereken  $P$  uit de Fouriercoëfficiënten met Parseval's stelling:  $P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ .
- (c) Controleer dat beide methoden dezelfde waarde geven.

## 6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC

Definieer een periodiek signaal met periode  $T = 2$  als

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten  $c_k$  (met  $\omega_0 = 2\pi/T$ ).
- (b) Geef een eenvoudige interpretatie van welke harmonischen verdwijnen.
- (c) Gebruik de link uit het formularium  $X(k\omega_0) = T c_k$  om uit te leggen hoe de FTC van *één periode* gesampled wordt.

## 6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som

Neem een periodiek signaal met periode  $T = 2\pi$ :

$$f(t) = \sin(t) + 2 \cos(2t).$$

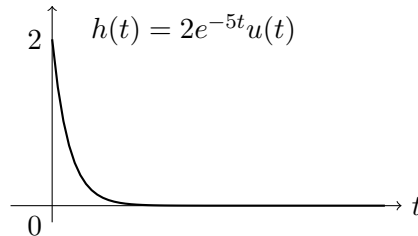
**Vraag:**

- (a) Geef  $\omega_0$ .
- (b) Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten  $a_0$ ,  $a_n$  en  $b_n$ .
- (c) Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen herkennen welke termen niet nul zijn).

## 7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

### 7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons

Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons  $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ .



**Vraag:**

- (a) Bereken de systeemrespons op een stapingang  $f(t) = u(t)$  door convolutie.
- (b) Verifieer je antwoord met de Laplacetransformatie.

### 7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper

Een massa-veer-dempersysteem heeft  $m = 2$  kg,  $k = 8$  N/m, en  $c = 4$  Ns/m.

**Vraag:**

- (a) Schrijf de differentiaalvergelijking.
- (b) Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie  $\omega_0$ .
- (c) Is het systeem ondergedempt, kritisch gedempt, of overgedempt?

### 7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons

Gegeven een LTC-systeem met overdracht  $H(s) = \frac{10}{s+5}$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal de frequentierespons  $H(j\omega)$ .
- (b) Bepaal de amplitude- en faserespons.
- (c) Bepaal de 3dB bandbreedte (waar  $|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$ ).

### 7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen

Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

$$H_1(s) = \frac{5}{s+2}, \quad H_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de totale overdracht  $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$ .
- (b) Bepaal de impulsrespons  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ .

### 7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen

Bepaal voor de volgende systemen of ze BIBO-stabiel, marginaal stabiel of onstabiel zijn op basis van hun polen.

**Vraag:**

(a)  $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$

(b)  $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(c)  $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$

### 7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons

Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de overdrachtsfunctie  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ .

(b) Bepaal de impulsrespons  $h(t)$ .

(c) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer via de polen.

(d) Bepaal de nultoestandsrespons  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t) - u(t-1)$ .

### 7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)

Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de impulsrespons  $h(t)$ .

(b) Bepaal de staprespons  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t)$ .

(c) Wat is de tijdsconstante  $\tau$  en de DC-versterking  $H(0)$ ?

## 8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

### 8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de karakteristieke veelterm  $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ .
- (b) Vind de eigenwaarden van  $A$ .
- (c) Bereken voor elke eigenwaarde een bijbehorende eigenvector.

### 8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem

Voor het systeem uit oefening 3.4 ( $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$ ).

**Vraag:**

- (a) Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

- (b) Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix.
- (c) Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit oefening 3.4.
- (d) Bepaal de eigenvectoren.

### 8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.
- (b) Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (omdat  $A$  symmetrisch is).
- (c) Vorm de matrix  $P$  met eigenvectoren als kolommen en bepaal  $P^{-1}AP = D$  waarbij  $D$  diagonaal is.

### 8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix.
- (b) Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling.
- (c) Bepaal de eigenwaarden numeriek en controleer of ze binnen de cirkels vallen.

### 8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit

Gegeven de matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden.
- (b) Bepaal de eigenvectoren.
- (c) Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn.
- (d) Normaliseer de eigenvectoren tot eenheid.

### 8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële

Gegeven de matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ .
- (b) Bereken de matrix exponentiële  $e^{At}$  via diagonalisatie of Cayley-Hamilton.
- (c) Gebruik dit om de oplossing van  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  te vinden met  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

### 8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden van  $A$  en de dimensie van de eigenruimte.
- (b) Is  $A$  diagonaliseerbaar? Motiveer.
- (c) Bepaal  $e^{At}$ .

### 8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis)

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector.
- (b) Bereken  $A^3$ .
- (c) Bereken  $e^{At}$ .

## 9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen

### 9.1 Oefening 8.1: FTC-eigenschappen (Verschuiving en Modulatie)

Definieer het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

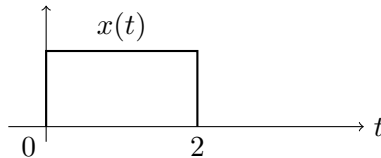
en de cosinus  $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$ . Definieer  $y(t) = x(t) \cos(2\pi t)$  en  $z(t) = x(t) + x(t-1)$ .

**Vraag:**

- (a) Welke van de signalen  $x(t)$ ,  $v(t)$ ,  $y(t)$  en  $z(t)$  zijn even/oneven?
- (b) Bepaal  $Y(j\omega)$  met de modulatiestelling en een gekende FTC-paar voor  $x(t)$ .
- (c) Bepaal  $Z(j\omega)$  met de verschuivingsstelling.

### 9.2 Oefening 8.2: Laplace, Causaliteit en Convolutie

Het ingangssignaal is  $x(t) = u(t) - u(t-2)$  en de impulsrespons is  $h(t) = e^{-t}u(t)$ .



**Vraag:**

- (a) Bepaal  $X(s)$ .
- (b) Is het systeem causaal? Motiveer op basis van  $h(t)$ .
- (c) Bepaal  $y(t) = h(t) * x(t)$  en geef het antwoord stukgewijs.

### 9.3 Oefening 8.3: Complexe Fourierreeks (Puls-trein)

Definieer een periodiek signaal met periode  $T = 2$  als

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten  $c_k$ .
- (b) Welke symmetrie zie je in  $c_{-k}$  t.o.v.  $c_k$  als  $p(t)$  reëel is?
- (c) (Extra) Gebruik opnieuw de link  $X(k\omega_0) = T c_k$  om te interpreteren wat de harmonischen betekenen in het frequentiedomein.

## 9.4 Oefening 8.4: Laplace met verschuiving en initieelwaarden

Beschouw

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2).$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $X(s)$ .
- (b) Bepaal  $x(0^+)$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  rechtstreeks uit  $x(t)$ .
- (c) Verifieer  $x(0^+)$  met de beginwaardestelling en  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  met de eindwaardestelling (als toepasbaar).

## 9.5 Oefening 8.5: Differentiaalvergelijking (Laplace, stapinput)

Gegeven

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Vraag:**

- (a) Los  $y(t)$  op met de (unilaterale) Laplace-transformatie.
- (b) Geef  $y(t)$  stukgewijs (indien nodig) en vereenvoudig maximaal.

## 9.6 Oefening 8.6: LTI-systeem (polen, stabiliteit, staprespons)

Een causaal LTI-systeem heeft

$$H(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $h(t)$ .
- (b) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer.
- (c) Bepaal de staprespons  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t)$ .
- (d) Bepaal  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  en controleer met de eindwaardestelling.

## 9.7 Oefening 8.7: Convolutie + Laplace-check

Neem  $x(t) = u(t) - u(t-1)$  en  $h(t) = t u(t)$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $y(t) = (x * h)(t)$  via convolutie in het tijdsdomein en geef het resultaat stukgewijs.
- (b) Controleer je antwoord door Laplace:  $Y(s) = X(s)H(s)$  en inverse Laplace.

## 9.8 Oefening 8.8: Fouriertransformatie + Parseval (energie)

Voor  $a > 0$ :

$$x(t) = e^{-a|t|}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $X(j\omega)$ .
- (b) Bereken de energie  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ .
- (c) Controleer met Parseval.

### 9.9 Oefening 8.9: Reële Fourierreeks (symmetrie + RMS)

Definieer een periodiek signaal met periode  $T = 2\pi$ :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

**Vraag:**

- (a) Geef aan of  $f(t)$  even/oneven is.
- (b) Bepaal de reële Fourierreeks van  $f(t)$ .
- (c) Bepaal de RMS-waarde van  $f(t)$  en verifieer met Parseval (reeks-vorm).

### 9.10 Oefening 8.10: Toestandruimte en eigenwaarden (stabiliteit + oplossing)

Beschouw het systeem

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden van  $A$  en bespreek de stabiliteit van de oorsprong.
- (b) Bepaal  $\mathbf{x}(t)$  expliciet (via diagonalisatie of via oplossing van een tweede-orde vergelijking).
- (c) Geef ook  $x_1(t)$  en  $x_2(t)$  afzonderlijk.

## 10 Oplossingen

### 10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1

#### Oplossing 1.1

**Gegeven:** Systeem met operator  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$ .

**Vraag:** Onderzoek of dit systeem lineair is.

**Oplossing:**

Het systeem is **niet lineair**.

**Bewijs:**

- Test eigenschap 1 (schaling):  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t) + 2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t) + 2) = 3ax(t) + 2a$
- Voor  $a \neq 1$  geldt:  $2 \neq 2a$ , dus schaling klopt niet.
- Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.

#### Oplossing 1.2

**Gegeven:** RC-circuit met  $R = 1000 \Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ , ingangsspanning  $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$  V.

**Vraag:**

- Schrijf de differentiaalvergelijking op.
- Bereken  $\tau$ .
- Bepaal  $v_{\text{uit}}(0.01)$ .

**Oplossing:**

- De differentiaalvergelijking van een RC-circuit:  $RC \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = v_{\text{in}}$

$$(1000)(10 \times 10^{-6}) \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

$$0.01 \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

- Tijdsconstante:  $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$
- Voor een staprespons met  $v_{\text{uit}}(0) = 0$ :

$$v_{\text{uit}}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})u(t) = 5(1 - e^{-100t})u(t)$$

Op  $t = 10 \text{ ms} = 0.01 \text{ s}$ :

$$v_{\text{uit}}(0.01) = 5(1 - e^{-1}) = 5(1 - 0.368) = 5(0.632) = 3.16 \text{ V}$$

### Oplossing 1.3

**Gegeven:** Radio-isotoop met halveringstijd  $t_{1/2} = 6$  uur. Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.

**Vraag:** Hoeveel mg blijft over om 14:00?

**Oplossing:**

Model radioactief verval:  $N(t) = N_0 e^{-kt}$

Halveringstijd  $t_{1/2} = 6$  uur:  $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155 \text{ h}^{-1}$

Van 08:00 tot 14:00 is  $\Delta t = 6$  uur:

$$N(6) = 20e^{-0.1155 \times 6} = 20e^{-0.693} = 20 \times 0.5 = 10 \text{ mg}$$

**Antwoord:** 10 mg blijft over.

### Oplossing 1.4

**Gegeven:** Twee systemen: - Systeem A:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$  - Systeem B:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

**Vraag:** Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.

**Oplossing:**

**Systeem A:**  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$

Homogeniteit:  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\}$  ✓

Additiviteit:  $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$

✓

**Systeem A is LINEAIR.**

**Systeem B:**  $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Homogeniteit:  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$  (voor  $a \neq 1$ ) ✗

**Systeem B is NIET LINEAIR.**

### Oplossing 1.5

**Gegeven:** Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?

**Oplossing:**

- (a)  $y(t) = x(t - 2)$ : LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓ (zuivere vertraging)
- (b)  $y(t) = tx(t)$ : LINEAIR maar NIET TIJDINVARIANT ✗ (coëfficiënt varieert in tijd)
- (c)  $y(t) = |x(t)|$ : NIET LINEAIR ✗ (niet additief/homogeen)
- (d)  $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ : LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓ (integrator)

**Antwoord:** (a) en (d) zijn LTI.

### Oplossing 1.6

**Gegeven:**  $y(t) = x(t) + x(t - 1)$ .

**Vraag:** Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.

**Oplossing:**

- (a) **Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tijdsverschuiving van de input dezelfde verschuiving in beide termen geeft.
- (b) **Causaal:** Ja.  $y(t)$  hangt af van  $x(t)$  en  $x(t-1)$ , dus enkel van huidige en verleden waarden.
- (c) **Invertibel:** In het algemeen **niet** uniek invertibel: uit  $y(t) = x(t) + x(t-1)$  kan je  $x(t)$  niet eenduidig bepalen zonder extra voorwaarden (bv. een beginvoorwaarde of beperking op  $x(t)$ ). Er bestaan meerdere  $x(t)$  die tot dezelfde  $y(t)$  leiden.

### Oplossing 1.7

**Gegeven:** (S1)  $y(t) = 2x(t-1)$  en (S2)  $y(t) = x(t) + u(t)$ .

**Vraag:** Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).

**Oplossing:**

(a) **Lineariteit**

- (S1) is **linear**: vertraging en vermenigvuldigen met 2 behouden additiviteit en homogeniteit.
- (S2) is **niet linear**: bij  $x(t) = 0$  krijg je  $y(t) = u(t) \neq 0$  (nultoestandcriterium faalt).

(b) **Tijdinvariantie**

- (S1) is **tijdinvariant**:  $x(t) \mapsto x(t-t_0)$  geeft  $y(t) = 2x(t-1) \mapsto 2x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$ .
- (S2) is **niet tijdinvariant**: voor  $x(t)$  is  $y(t) = x(t) + u(t)$ . Voor  $x(t-t_0)$  is de output  $x(t-t_0) + u(t)$ , terwijl  $y(t-t_0) = x(t-t_0) + u(t-t_0)$ . Niet gelijk als  $t_0 \neq 0$ .

(c) **Causaliteit**

- (S1) is **causaal**:  $y(t)$  hangt af van  $x(t-1)$  (verleden).
- (S2) is **causaal**:  $y(t)$  hangt af van  $x(t)$  en een gekend signaal  $u(t)$ .

## 10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2

### Oplossing 2.1

**Gegeven:**  $x_1(t) = e^{0.2t}$  en  $x_2(t) = e^{-0.5t}$ .

**Vraag:** Bepaal welk signaal exponentiële groei/verval vertoont; bereken waarden op  $t = 5$  s.

**Oplossing:**

- (a)  $x_1(t) = e^{0.2t}$ : exponentiële **groei** (positieve exponent)  $x_2(t) = e^{-0.5t}$ : exponentieel **verval** (negatieve exponent)
- (b) Op  $t = 5$  s:

$$x_1(5) = e^{0.2 \times 5} = e^1 \approx 2.718$$

$$x_2(5) = e^{-0.5 \times 5} = e^{-2.5} \approx 0.082$$

### Oplossing 2.2

**Gegeven:**  $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ .

**Vraag:** Bepaal amplitude, hoekfrequentie, frequentie, fasehoek; schrijf als cosinus.

**Oplossing:**

(a) Van  $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ :

- Amplitude:  $A = 3$
- Hoekfrequentie:  $\omega = 4\pi$  rad/s
- Frequentie:  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$  Hz
- Fasehoek:  $\phi = \frac{\pi}{6}$  rad =  $30^\circ$

(b) Als cosinusfunctie:  $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

### Oplossing 2.3

**Gegeven:**  $z(t) = e^{j2\pi t}$ .

**Vraag:** Schrijf als sinus/cosinus; bepaal waarde op  $t = 0.25$  s.

**Oplossing:**

(a) Formule van Euler:  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

$$z(t) = e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + j \sin(2\pi t)$$

(b) Op  $t = 0.25$  s:

$$z(0.25) = \cos(2\pi \times 0.25) + j \sin(2\pi \times 0.25) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j = j$$

### Oplossing 2.4

**Gegeven:**  $f(t) = u(t) - u(t-1)$  en  $g(t) = u(t) - u(t-1)$ .

**Vraag:** Bepaal  $(f * g)(t)$  en schets.

**Oplossing:**

Voor twee identieke pulsen van breedte 1:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een **driehoeksfunctie** met maximum 1 op  $t = 1$  en breedte 2.

### Oplossing 2.5

**Gegeven:**  $x(t) = e^{-t}u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal  $y_1(t) = x(t-2)$ ,  $y_2(t) = x(2t)$ ,  $y_3(t) = 2x(t)$ .

**Oplossing:**

(a) Tijdsverschuiving:  $y_1(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) = e^2 e^{-t}u(t-2)$  (start op  $t = 2$ )

(b) Tijdscompressie:  $y_2(t) = e^{-2t}u(2t) = e^{-2t}u(t)$  (twee keer sneller)

(c) Amplitude schaling:  $y_3(t) = 2e^{-t}u(t)$  (twee keer hoger)

(d) Schetsing:  $y_1$  begint op  $t = 2$ ,  $y_2$  vervalst sneller,  $y_3$  heeft dubbele amplitude.

### Oplossing 2.6

**Gegeven:** Drie signalen waarvan de energie bepaald moet worden.

**Vraag:** Bereken energies.

**Oplossing:**

$$(a) E_1 = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

$$(b) E_2 = \int_0^\pi |2 \sin(t)|^2 dt = 4 \int_0^\pi \sin^2(t) dt = 4 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = 2[\pi - 0] = 2\pi$$

$$(c) E_3 = \int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = 1$$

### Oplossing 2.7

**Gegeven:**  $x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2))$ .

**Vraag:** Stukgewijs; energie;  $x(t-1)$ .

**Oplossing:**

(a) Stukgewijs:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

(b) Energie:

$$E = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{(2-t)^3}{-3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Verschuiving:

$$x(t-1) = (t-1)(u(t-1) - u(t-2)) + (3-t)(u(t-2) - u(t-3)).$$

Dit is dezelfde driehoek, verschoven naar rechts met 1.

### Oplossing 2.8

**Gegeven:**  $x(t) = u(t) - u(t-2)$ .

**Vraag:** Schets en herschrijf  $x(t)$  na verschuiving/schaling/spiegeling.

**Oplossing:**

(a)  $x(t) = 1$  voor  $0 \leq t < 2$  en  $x(t) = 0$  elders (rechthoekpuls van breedte 2).

(b) Verschuivingen:

$$x(t-1) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(t+1) = u(t+1) - u(t-1).$$

Dus  $x(t-1)$  ligt op  $1 \leq t < 3$  en  $x(t+1)$  op  $-1 \leq t < 1$ .

(c) Schaling en spiegeling:

$$x(2t) = u(2t) - u(2t-2) = u(t) - u(t-1),$$

dus  $x(2t) = 1$  voor  $0 \leq t < 1$ . Verder

$$x(-t) = u(-t) - u(-t-2) = u(t+2) - u(t),$$

dus  $x(-t) = 1$  voor  $-2 \leq t < 0$ .

## 10.3 Oplossingen Hoofdstuk 3

### Oplossing 3.1

**Gegeven:** Vier functies.

**Vraag:** Bepaal Laplacetransformaties.

**Oplossing:**

(a)  $\mathcal{L}\{5u(t)\} = \frac{5}{s}$ , ROC:  $\sigma > 0$

(b)  $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{1}{s+3}$ , ROC:  $\sigma > -3$

(c)  $\mathcal{L}\{t \cdot u(t)\} = \frac{1}{s^2}$ , ROC:  $\sigma > 0$

(d)  $\mathcal{L}\{\cos(5t) \cdot u(t)\} = \frac{s}{s^2+25}$ , ROC:  $\sigma > 0$

### Oplossing 3.2

**Gegeven:**  $F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$ .

**Vraag:** Vind inverse Laplacetransformatie.

**Oplossing:**

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+2^2}$$

Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t) + \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

### Oplossing 3.3

**Gegeven:**  $\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$ ,  $y(0) = 2$ .

**Vraag:** Los op met Laplacetransformatie.

**Oplossing:**

Laplacetransformatie van beide zijden:

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

$$Y(s)(s+4) = \frac{8}{s} + 2 = \frac{8+2s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{8+2s}{s(s+4)} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+4}$$

Inverse Laplacetransformatie:

$$y(t) = 2u(t) + 2e^{-4t}u(t) = (2 + 2e^{-4t})u(t)$$

### Oplossing 3.4

**Gegeven:**  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .

**Vraag:**

- (a) Karakteristieke vergelijking.
- (b) Wortels.
- (c) Los op.

**Oplossing:**

- (a) Karakteristieke vergelijking:  $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$
- (b) Wortels:

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$$

(c) Algemene oplossing:

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

Met beginvoorwaarden: -  $y(0) = 1$ :  $c_1 + c_2 = 1$  -  $y'(0) = 0$ :  $-c_1 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -3c_2$

Oplossen:  $c_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $c_1 = \frac{3}{2}$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

### Oplossing 3.5

**Gegeven:**  $F(s) = \frac{2}{s^2+4}$ .

**Vraag:** Bepaal  $f(t)$  en  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$ .

**Oplossing:**

(a) Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin(2t)u(t)$$

(b) Gebruikmakend van de tijdsverschuivingsstelling  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$ :

$$g(t) = f(t-2)u(t-2) = \sin(2(t-2))u(t-2) = \sin(2t-4)u(t-2)$$

### Oplossing 3.6

**Gegeven:**  $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ .

**Vraag:** Bepaal inverse via partieelbreuken.

**Oplossing:**

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met  $(s+1)(s+2)(s+3)$ :

$$10 = A(s+2)(s+3) + B(s+1)(s+3) + C(s+1)(s+2)$$

Voor  $s = -1$ :  $10 = A(1)(2) = 2A \Rightarrow A = 5$

Voor  $s = -2$ :  $10 = B(-1)(1) = -B \Rightarrow B = -10$

Voor  $s = -3$ :  $10 = C(-2)(-1) = 2C \Rightarrow C = 5$

Inverse Laplacetransformatie:

$$f(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

### Oplossing 3.7

**Gegeven:**  $F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3}$ .

**Vraag:** Bepaal  $f(0^+)$  en  $f(\infty)$  met begin- en eindwaardestelling; controleer door  $f(t)$  te bepalen.

**Oplossing:**

(a) Beginwaardestelling (Formularium: initial value theorem  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ ):

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = 3$$

(b) Eindwaardestelling (Formularium: final value theorem  $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ , mits alle polen van  $sF(s)$  in het linkerhalfvlak liggen): De polen van  $F(s)$  zijn  $s = -1$  en  $s = -3$  (beide in linkerhalfvlak), dus FVT is toepasbaar.

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = 0$$

(c) Controle door  $f(t)$  te berekenen:

$$F(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 3)} = \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s + 3}$$

$$f(t) = (e^{-t} + 2e^{-3t}) u(t)$$

Dan  $f(0^+) = 1 + 2 = 3$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ .

### Oplossing 3.8

**Gegeven:**  $f(t) = u(t) - u(t - 1)$  en  $g(t) = e^{-2t}u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal  $y(t) = (f * g)(t)$  via Laplace.

**Oplossing:** Volgens het formularium geldt voor Laplace: convolutie in tijd  $\Rightarrow$  product in  $s$ -domein.

(a)

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t - 1)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad G(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s + 2}.$$

(b)

$$Y(s) = F(s)G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s + 2)}.$$

(c) Splits:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s + 2)} - e^{-s} \frac{1}{s(s + 2)}.$$

Met partieelbreuken  $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)$ . Dus

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s + 2)} \right\} = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) u(t).$$

En met de tijdsverschuiving (formularium:  $f(t - a)u(t - a) \leftrightarrow e^{-as}F(s)$ ):

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) u(t) - \frac{1}{2} (1 - e^{-2(t-1)}) u(t - 1).$$

Stukgewijs:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}), & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} (e^{-2(t-1)} - e^{-2t}), & t \geq 1. \end{cases}$$

### Oplossing 3.9

**Gegeven:** Eenvoudige signalen met stapfunctie  $u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal enkele Laplace-paren en een inverse Laplace.

**Oplossing:**

$$(a) \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

$$(b) \quad \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s+2)t} dt = \frac{1}{s+2}.$$

$$(c) \quad \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}.$$

(d)

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-3t}u(t) + 2tu(t).$$

## 10.4 Oplossingen Hoofdstuk 4

### Oplossing 4.1

**Gegeven:** Rechthoekpuls  $f(t) = A$  voor  $-T/2 < t < T/2$ , 0 elders.

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformatie; schrijf als sinc; bepaal nulpunten.

**Oplossing:**

(a) Fouriertransformatie:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t} dt = A \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= A \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{j\omega} = A \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} = AT \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \end{aligned}$$

(b) Sinc-vorm:

$$F(j\omega) = AT \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

(c) Eerste nulpunten:  $\frac{\omega T}{2} = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

Dit geeft:  $\omega = \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$

### Oplossing 4.2

**Gegeven:** Fouriertransformatie verschuivingsstelling.

**Vraag:** Bewijs; pas toe; bespreek effect op spektra.

**Oplossing:**

(a) Verschuivingsstelling:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

**Bewijs:**

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Substitutie  $\tau = t - t_0$ :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

(b) Voor puls met  $t_0 = 1$ ,  $A = 2$ ,  $T = 2$ :

$$F(j\omega) = 2 \cdot 2 \cdot \text{sinc}(\omega) \cdot e^{-j\omega} = 4\text{sinc}(\omega)e^{-j\omega}$$

(c) Amplitude-spectrum: onveranderd (blijft  $4|\text{sinc}(\omega)|$ )

Fase-spectrum: lineair met  $-\omega$  (effect van verschuiving)

### Oplossing 4.3

**Gegeven:**  $x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$  met  $\text{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$ .

**Vraag:** Pas modulatiestelling toe; schets spektra.

**Oplossing:**

(a) Modulatiestelling:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)f(t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$$

Voor  $\text{rect}(t)$ :  $F_{\text{rect}}(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega)$

Voor  $x(t)$  met  $\omega_0 = 10\pi$ :

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[2\text{sinc}(\omega - 10\pi) + 2\text{sinc}(\omega + 10\pi)] = \text{sinc}(\omega - 10\pi) + \text{sinc}(\omega + 10\pi)$$

(b) Het spectrum bestaat uit twee verschoven sinc-functies gecentreerd op  $\omega = \pm 10\pi$ .

### Oplossing 4.4

**Gegeven:**  $f(t) = e^{-t}u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal energie in tijdsdomein; controleer in frequentiedomein; verifieer Parseval's stelling.

**Oplossing:**

(a) Energie in tijdsdomein:

$$E = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[ -\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

(b) Fouriertransformatie:  $F(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\omega^2}$$

(c) Energie in frequentiedomein (Parseval's stelling):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+\omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} [\arctan(\omega)]_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} \quad \checkmark \end{aligned}$$

#### Oplossing 4.5

**Gegeven:**  $f(t) = e^{-a|t|}$  met  $a > 0$ .

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformatie; schets spektra; bepaal bandbreedte.

**Oplossing:**

(a) Fouriertransformatie:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(b) Amplitude-spectrum:  $|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$

Fase-spectrum:  $\angle F(j\omega) = 0$  (zuiver reeel en positief)

(c) Eerste nulpunt: geen nulpunten, maar bandbreedte op halve amplitude:  $|F(j\omega)| = |F(0)|/2 = a$

Dit geeft:  $\frac{2a}{a^2 + \omega^2} = a \Rightarrow \omega = a$  (3dB bandbreedte =  $2a$ )

#### Oplossing 4.6

**Gegeven:** Drie signalen.

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformaties.

**Oplossing:**

(a)  $f(t) = \delta(t)$ :  $F(j\omega) = 1$  (constant spectrum)

(b)  $f(t) = \delta(t - t_0)$ :  $F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$  (lineaire fase)

(c)  $f(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ :

$$F(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

(twee impulsen op  $\pm\omega_0$ )

#### Oplossing 4.7

**Gegeven:**  $x(t) = 2$  op  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , 0 elders en  $y(t) = x(t - \frac{1}{4})$ .

**Vraag:** Bepaal  $X(j\omega)$  en  $Y(j\omega)$ .

**Oplossing:**

(a) Gebruik het FTC-paar uit het formularium (blok  $\leftrightarrow$  sinc): voor amplitude  $A$  en lengte  $L$  op  $[-L/2, L/2]$  geldt

$$X(j\omega) = AL \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right).$$

Hier is  $A = 2$  en  $L = 1$ , dus

$$X(j\omega) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

(b) Tijdverschuiving (formularium:  $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ ):

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega/4} X(j\omega) = 2e^{-j\omega/4} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Amplitude blijft gelijk, fase krijgt een lineaire term  $-\omega/4$ .

### Oplossing 4.8

**Gegeven:**  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  en tijdsverschuiving.

**Vraag:** Bepaal FTC van verschoven delta's en een lineaire combinatie.

**Oplossing:**

(a) Met de verschuivingsstelling:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}.$$

(b) Voor  $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$ :

$$X(j\omega) = 2 \cdot 1 - e^{-j\omega} = 2 - e^{-j\omega}.$$

(c) Het amplitudespectrum is

$$|X(j\omega)| = |2 - e^{-j\omega}| = \sqrt{(2 - \cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2} = \sqrt{5 - 4 \cos \omega}.$$

## 10.5 Oplossingen Hoofdstuk 5

### Oplossing 5.1

**Gegeven:** Blok golf met periode  $T = 2$ :  $f(t) = 1$  voor  $0 < t < 1$ ,  $f(t) = -1$  voor  $1 < t < 2$ .

**Vraag:** Bepaal symmetrie; bereken Fouriercoëfficiënten; schrijf reeks tot 3e harmonische.

**Oplossing:**

(a) De functie is **oneven**:  $f(-t) = -f(t)$  (na periodieke uitbreiding)

(b) Fouriercoëfficiënten ( $\omega_0 = \pi$  rad/s):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} [1 - 1] = 0$$

Voor oneven functie:  $a_n = 0$

$$b_n = \int_0^1 \sin(n\pi t) dt - \int_1^2 \sin(n\pi t) dt = \frac{4}{n\pi} \text{ voor oneven } n$$

(c) Fourierreeks tot 3e harmonische:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi t)$$

### Oplossing 5.2

**Gegeven:** Zaagtandgolf:  $f(t) = 2t$  voor  $0 < t < 1$  met periode  $T = 1$ .

**Vraag:** Bereken  $a_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ; schrijf Fouriersom met 2 termen.

**Oplossing:**

(a)  $a_0 = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1$

(b) Voor  $b_n$ :

$$b_n = 2 \int_0^1 2t \sin(2\pi n t) dt = -\frac{2}{n\pi}$$

Dus:  $b_1 = -\frac{2}{\pi}$ ,  $b_2 = -\frac{1}{\pi}$

(c) Benaderende Fouriersom:

$$f(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi} \sin(4\pi t)$$

### Oplossing 5.3

**Gegeven:** Driehoeksgolf:  $f(t) = t$  voor  $0 \leq t < 1$ ,  $f(t) = 2 - t$  voor  $1 \leq t < 2$ , periode  $T = 2$ .

**Vraag:** Bepaal symmetrie; bereken coëfficiënten; schrijf eerste drie niet-nul termen.

**Oplossing:**

(a) Symmetrie: Dit signaal is **even**:  $f(2 - t) = f(t)$

(b) Fouriercoëfficiënten ( $\omega_0 = \pi$ ):

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$

Voor even functie:  $b_n = 0$

$$a_n = \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi/2) \text{ (na integratie)}$$

(c) Eerste drie niet-nul termen:

$$f(t) \approx 0.5 + \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t) - \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi t)$$

### Oplossing 5.4

**Gegeven:** Blok golf uit oefening 5.1.

**Vraag:** Bepaal gemiddelde macht; controleer met Parseval's stelling.

**Oplossing:**

(a) Gemiddelde macht via integratie:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^2 f^2(t) dt = \frac{1}{2} [1 + 1] = 1$$

(b) Parseval's stelling voor Fourierreeksen:

$$\begin{aligned} P &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16}{n^2 \pi^2} \\ &= \frac{8}{\pi^2} [1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots] = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

### Oplossing 5.5

**Gegeven:**  $T = 2$  en  $f(t) = 1$  op  $(0, 1)$ ,  $f(t) = 0$  op  $(1, 2)$ , periodiek.

**Vraag:** Bepaal  $c_k$  en link met FTC-samples.

**Oplossing:** De complexe Fouriercoëfficiënten zijn

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

Omdat  $f(t) = 1$  enkel op  $(0, 1)$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jk\pi t} dt.$$

Voor  $k \neq 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Interpretatie: voor even  $k$  is  $1 - (-1)^k = 0$  dus  $c_k = 0$ ; enkel oneven harmonischen blijven over.

Link met formularium:  $X(k\omega_0) = T c_k$  zegt dat de FTC van *één periode* (tijdsignaal op lengte  $T$ ) gesampled op  $\omega = k\omega_0$  gelijk is aan  $T$  maal de FS-coëfficiënt.

## Oplossing 5.6

**Gegeven:**  $T = 2\pi$  en  $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$ .

**Vraag:** Geef  $\omega_0$  en de Fouriercoëfficiënten  $a_0, a_n, b_n$ .

**Oplossing:**

Voor  $T = 2\pi$  geldt  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1$ .

We herkennen direct de standaardvorm

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Vergelijken geeft:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle andere  $a_n, b_n$  zijn nul.

Dus de Fourierreeks is gewoon  $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$ .

## 10.6 Oplossingen Hoofdstuk 6

### Oplossing 6.1

**Gegeven:** Eerste-orde systeem met impulsrespons  $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal systeemrespons op stapingang via convolutie; verifieer met Laplace.

**Oplossing:**

(a) Convolutie met stapingang:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t 2e^{-5\tau} d\tau = 2 \left[ -\frac{1}{5}e^{-5\tau} \right]_0^t = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t)$$

(b) Via Laplacetransformatie:

$$H(s) = \frac{2}{s+5}, \quad F(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = \frac{2}{s(s+5)}$$

$$\text{Partieelbreuken: } \frac{2}{s(s+5)} = \frac{2/5}{s} - \frac{2/5}{s+5}$$

$$y(t) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t) \quad \checkmark$$

### Oplossing 6.2

**Gegeven:** Massa-veer-dempersysteem:  $m = 2$  kg,  $k = 8$  N/m,  $c = 4$  Ns/m.

**Vraag:** Schrijf DV; bepaal  $\omega_0$ ; bepaal type damping.

**Oplossing:**

(a) Differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = f(t)$$

(b) Natuurlijke eigenfrequentie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

(c) Karakteristieke vergelijking:  $2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Complexe wortels  $\Rightarrow$  Het systeem is **ondergedempt**.

### Oplossing 6.3

**Gegeven:** LTC-systeem met  $H(s) = \frac{10}{s+5}$ .

**Vraag:** Bepaal frequentierespons; bepaal amplitude/faserespons; bepaal 3dB bandbreedte.

**Oplossing:**

(a) Frequentierespons:

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 5} = \frac{10(5 - j\omega)}{25 + \omega^2}$$

(b) Amplitude- en faserespons:

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/5)$$

(c) 3dB bandbreedte waar  $|H(j\omega)| = |H(0)|/\sqrt{2} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$ :

$$\frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}} = \sqrt{2} \Rightarrow 25 + \omega^2 = 50 \Rightarrow \omega_{3dB} = 5 \text{ rad/s}$$

### Oplossing 6.4

**Gegeven:** Twee systemen in cascade:  $H_1(s) = \frac{5}{s+2}$ ,  $H_2(s) = \frac{3}{s+3}$ .

**Vraag:** Bepaal totale overdracht; bepaal impulsrespons.

**Oplossing:**

(a) Totale overdracht:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{15}{(s+2)(s+3)}$$

(b) Impulsrespons via partieelbreuken:

$$\frac{15}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Voor  $s = -2$ :  $15 = A(1) \Rightarrow A = 15$

Voor  $s = -3$ :  $15 = B(-1) \Rightarrow B = -15$

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 15e^{-3t}u(t) = 15(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

### Oplossing 6.5

**Gegeven:** Drie systemen.

**Vraag:** Bepaal stabiliteit.

**Oplossing:**

(a)  $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$ . Pool op  $s = 2$  (rechterhalfvlak).  $\Rightarrow$  **Onstabiel**.

(b)  $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ . Polen op  $s = -1, -2$  (linkerhalfvlak).  $\Rightarrow$  **Stabiel**.

(c)  $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$ . Polen op  $s = \pm 2j$  (op imaginaire as, enkelvoudig).  $\Rightarrow$  **Marginaal stabiel** (oscilleert).

### Oplossing 6.6

**Gegeven:**  $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$  met nul beginvoorwaarden.

**Vraag:** Bepaal  $H(s)$ ,  $h(t)$ , stabiliteit en  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t) - u(t-1)$ .

**Oplossing:**

(a) Laplace (formularium: afgeleide in  $t$ ):

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+3)Y(s) = X(s).$$

Dus

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

(b)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-3t}u(t).$$

(c) Pool op  $s = -3$  (linkerhalfvlak)  $\Rightarrow$  BIBO-stabiel.

(d) Voor  $x(t) = u(t) - u(t-1)$  geldt

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Dan

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+3)}.$$

Met  $\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right)$  volgt

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1).$$

### Oplossing 6.7

**Gegeven:** Causaal LTC-systeem met  $H(s) = \frac{1}{s+1}$ .

**Vraag:** Bepaal  $h(t)$ , staprespons,  $\tau$  en  $H(0)$ .

**Oplossing:**

(a)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}u(t).$$

(b) Voor  $x(t) = u(t)$ :  $X(s) = \frac{1}{s}$ , dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Daaruit volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

(c) De tijdsconstante is  $\tau = 1$  en de DC-versterking is  $H(0) = 1$ .

## 10.7 Oplossingen Hoofdstuk 7

### Oplossing 7.1

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal karakteristieke veelterm; vind eigenwaarden; bereken eigenvectoren.

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke veelterm:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

(b) Eigenwaarden:  $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$$

(c) Eigenvectoren:

Voor  $\lambda_1 = 5$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor  $\lambda_2 = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

### Oplossing 7.2

**Gegeven:** Tweede-orde systeem uit oefening 3.4.

**Vraag:** Schrijf als matrixvergelijking; bepaal eigenwaarden; verifieer; bepaal eigenvectoren.

**Oplossing:**

(a) Matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

(c) Eigenwaarden:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$  (hetzelfde als uit oefening 3.4) ✓

(d) Eigenvectoren:

Voor  $\lambda_1 = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voor  $\lambda_2 = -3$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

### Oplossing 7.3

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden/eigenvectoren; controleer orthogonaliteit; bepaal  $P^{-1}AP = D$ .

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenwaarden:  $\lambda_1 = 6$ ,  $\lambda_2 = 1$

Eigenvectoren: - Voor  $\lambda_1 = 6$ :  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  (genormaliseerd:  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ) - Voor

$\lambda_2 = 1$ :  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (genormaliseerd:  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ )

(b) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(2 - 2) = 0 \quad \checkmark$$

(c) Diagonalisatie:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Oplossing 7.4

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal Gerschgorin-cirkels; geef grenzen; controleer eigenwaarden.

**Oplossing:**

(a) Gerschgorin-cirkels:

Rij 1: Centrum 4, radius  $0.5 + 0.2 = 0.7$ , dus  $\lambda \in [3.3, 4.7]$

Rij 2: Centrum -2, radius  $0.3 + 0.1 = 0.4$ , dus  $\lambda \in [-2.4, -1.6]$

Rij 3: Centrum 3, radius  $0.2 + 0.4 = 0.6$ , dus  $\lambda \in [2.4, 3.6]$

(b) Alle eigenwaarden liggen in de unie van deze cirkels.

(c) De eigenwaarden zijn ongeveer:  $\lambda_1 \approx 4.3$ ,  $\lambda_2 \approx -2.1$ ,  $\lambda_3 \approx 2.8$  (numeriek bepaald)

Alle drie liggen inderdaad in hun respectieve cirkels. ✓

### Oplossing 7.5

**Gegeven:**  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden; bepaal eigenvectoren; toon orthogonaliteit aan; normaliseer.

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 2$

(b) Eigenvectoren:

Voor  $\lambda_1 = 4$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor  $\lambda_2 = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

(d) Genormaliseerde eigenvectoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verificatie:  $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$ ,  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$  ✓

### Oplossing 7.6

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal  $e^{At}$  en oplossing  $\mathbf{x}(t)$ .

**Oplossing:**

(a) Eigenwaarden:  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ . Eigenvectoren:  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(b) Matrix exponentiële  $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Oplossing  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$  met  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

### Oplossing 7.7

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Eigenwaarden/eigenruimte; diagonaliseerbaarheid;  $e^{At}$ .

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke veelterm:  $(2 - \lambda)^2 = 0$ , dus  $\lambda = 2$  (algebraïsche multipliciteit 2). Voor eigenvectoren:  $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dus  $v_2 = 0$  en  $v_1$  vrij. De eigenruimte is 1-dimensionaal.

(b) Omdat er maar 1 lineair onafhankelijke eigenvector is, is  $A$  **niet diagonaliseerbaar**.

(c) Schrijf  $A = 2I + N$  met  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  en  $N^2 = 0$ . Dan

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Oplossing 7.8

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Eigenwaarden/eigenvectoren,  $A^3$  en  $e^{At}$ .

**Oplossing:**

(a) Omdat  $A$  diagonaal is, zijn de eigenwaarden de diagonaalelementen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Bijhorende eigenvectoren kunnen gekozen worden als de standaardbasisvectoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 1), \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 2).$$

(b)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Voor een diagonaalmatrix geldt  $e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

## 10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8

### Oplossing 8.1

**Gegeven:**  $x(t)$  is een blok op  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$ ,  $y(t) = x(t) \cos(2\pi t)$ ,  $z(t) = x(t) + x(t-1)$ .

extbfVraag: (a) bepaal even/oneven; (b) bepaal  $Y(j\omega)$  via modulatie; (c) bepaal  $Z(j\omega)$  via verschuiving.

**Oplossing:**

(a)  $x(t)$  is even,  $v(t)$  is even,  $y(t)$  is even (product van even functies).  $z(t)$  is in het algemeen noch even noch oneven door de verschuiving  $x(t-1)$ .

(b) Uit het formularium (blok  $\leftrightarrow$  sinc) volgt voor  $x(t)$  met  $A = 1$ ,  $L = 1$ :

$$X(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Met de modulatiestelling uit het formularium:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))], \quad \omega_0 = 2\pi.$$

Dus

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} \left[ \text{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2}\right) \right].$$

(c) Tijdverschuiving (formularium):  $x(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega} X(j\omega)$ . Dus

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega} X(j\omega) = (1 + e^{-j\omega}) X(j\omega).$$

### Oplossing 8.2

**Gegeven:**  $x(t) = u(t) - u(t-2)$ ,  $h(t) = e^{-t}u(t)$ .

**Oplossing:**

(a)

$$X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-2)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}}{s}.$$

(b)  $h(t) = e^{-t}u(t) = 0$  voor  $t < 0 \Rightarrow$  systeem is causaal.

(c)  $H(s) = \frac{1}{s+1}$  en dus

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+1)}.$$

Net zoals in het formularium: tijdverschuiving in  $t$  correspondeert met  $e^{-as}$  in  $s$ . Omdat  $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+1)}\} = (1 - e^{-t})u(t)$ , volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2).$$

### Oplossing 8.3

**Gegeven:**  $T = 2$ ,  $p(t) = 1$  op  $(0, \frac{1}{2})$ , anders 0, periodiek.

**Oplossing:**

(a) Met  $\omega_0 = \pi$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-jk\pi t} dt.$$

Voor  $k \neq 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi/2}}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Omdat  $p(t)$  reëel is geldt de klassieke symmetrie  $c_{-k} = c_k^*$ .

(c) Link met formularium:  $X(k\omega_0) = T c_k$  verbindt de harmonischen met samples van de FTC van één periode.

### Oplossing 8.4

**Gegeven:**  $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2)$ .

**Vraag:** (a)  $X(s)$ , (b)  $x(0^+)$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , (c) controle via begin-/eindwaardestelling.

**Oplossing:**

(a) Gebruik de verschuivingsregel  $e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}$  en  $e^{-(t-2)}u(t-2) = (e^{-t}u(t))|_{t \rightarrow t-2} \leftrightarrow e^{-2s} \frac{1}{s+1}$ . Dus

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - e^{-2s} \frac{1}{s+1} = \frac{1 - e^{-2s}}{s+1}.$$

(b) Uit de definitie: voor  $t \rightarrow 0^+$  is  $u(t) = 1$  en  $u(t-2) = 0$ , dus  $x(0^+) = 1$ . Voor  $t \rightarrow \infty$ : beide exponentiëlen gaan naar 0, dus  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

(c) Beginwaardestelling:  $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 1$ .

Eindwaardestelling: vereist o.a. dat alle polen van  $sX(s)$  strikt links liggen. Hier is  $sX(s) = \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1}$  en de enige pool zit in  $s = -1$  (links), dus toepasbaar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 0.$$

### Oplossing 8.5

**Gegeven:**  $y'' + 3y' + 2y = u(t)$  met  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Vraag:** (a) los op via (unilaterale) Laplace, (b) geef  $y(t)$ .

**Oplossing:** Neem Laplace en gebruik  $\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0)$ ,  $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0)$ . Dan

$$(s^2Y - 1) + 3(sY) + 2Y = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s} + 1.$$

Dus

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{s} + 1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1+s}{s(s+1)(s+2)}.$$

Partieelbreuken:

$$\frac{1+s}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}.$$

Invullen  $s = 0, -1, -2$  geeft  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = 0$ ,  $C = -\frac{1}{2}$ . Dus

$$Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t).$$

### Oplossing 8.6

**Gegeven:** Causaal LTI-systeem met  $H(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$ .

**Vraag:** (a)  $h(t)$ , (b) BIBO-stabiliteit, (c) staprespons, (d) eindwaarde.

**Oplossing:**

(a) Partieelbreuken:

$$\frac{s+2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}.$$

Dan  $s+2 = A(s+4) + Bs = (A+B)s + 4A$ . Dus  $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$  en  $A+B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$ .  
Voor causaal: ROC rechts van de meest rechtse pool, dus

$$h(t) = \frac{1}{2} u(t) + \frac{1}{2} e^{-4t} u(t).$$

(b) BIBO-stabiliteit: er is een pool in  $s = 0$  (niet strikt links)  $\Rightarrow$  **niet** BIBO-stabiel.

(c) Voor  $x(t) = u(t)$  is  $X(s) = \frac{1}{s}$ . Dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)}.$$

Partieelbreuken:

$$\frac{s+2}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}.$$

Oplossen geeft  $A = \frac{1}{8}$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $C = -\frac{1}{8}$ . Dus

$$y(t) = \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{2} t - \frac{1}{8} e^{-4t} \right) u(t).$$

(d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$  door de term  $\frac{1}{2}t$ . Eindwaardestelling is hier niet toepasbaar (systeem heeft pool op de imaginaire as), en strookt dus met de groei.

### Oplossing 8.7

**Gegeven:**  $x(t) = u(t) - u(t-1)$  en  $h(t) = t u(t)$ .

**Vraag:** (a)  $y(t) = x * h$  stukgewijs, (b) controle via Laplace.

**Oplossing:**

(a) Convolutie:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Omdat  $x(\tau) = 1$  voor  $0 < \tau < 1$  en 0 elders, wordt

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau) u(t-\tau) d\tau.$$

Nu stukgewijs:

- $t < 0$ :  $u(t-\tau) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$ .

- $0 \leq t < 1$ : integraal van 0 tot  $t$ :  $y(t) = \int_0^t (t - \tau) d\tau = \frac{t^2}{2}$ .
- $t \geq 1$ : integraal van 0 tot 1:  $y(t) = \int_0^1 (t - \tau) d\tau = t - \frac{1}{2}$ .

Dus

$$y(t) = 0 \cdot u(-t) + \frac{t^2}{2} (u(t) - u(t-1)) + \left(t - \frac{1}{2}\right) u(t-1).$$

(b) Laplace-check:  $X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$  en  $H(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$ . Dus

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^3}.$$

Omdat  $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2}u(t)$ , volgt

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1),$$

wat equivalent is met de stukgewijze vorm hierboven.

### Oplossing 8.8

**Gegeven:**  $x(t) = e^{-a|t|}$  met  $a > 0$ .

**Vraag:** (a)  $X(j\omega)$ , (b) energie, (c) Parseval.

**Oplossing:**

(a)  $x(t)$  is even:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

(b)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{a}.$$

(c) Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Hier  $|X|^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$  en met  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$  krijg je

$$\frac{1}{2\pi} \int |X|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a}.$$

### Oplossing 8.9

**Gegeven:**  $f(t) = 1$  op  $(0, \pi)$  en  $f(t) = -1$  op  $(-\pi, 0)$ ,  $T = 2\pi$ .

**Vraag:** (a) symmetrie, (b) Fourierreeks, (c) RMS en Parseval.

**Oplossing:**

(a)  $f(-t) = -f(t)$ , dus  $f$  is **oneven**. Dan  $a_0 = 0$  en  $a_n = 0$ .

(b) Voor  $n \geq 1$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Dus  $b_n = 0$  voor even  $n$  en  $b_n = \frac{4}{\pi n}$  voor oneven  $n$ .

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)t).$$

(c) RMS:  $f^2(t) = 1$  bijna overal, dus  $\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt} = 1$ . Parseval (reële reeks):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Links = 2. Rechts:  $\sum_{n \text{ oneven}} \frac{16}{\pi^2 n^2} = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2$ , klopt.

### Oplossing 8.10

**Gegeven:**  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  met  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ .

**Vraag:** (a) eigenwaarden + stabiliteit, (b)(c) expliciete oplossing.

**Oplossing:**

(a) Eigenwaarden: karakteristieke veelterm

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Dus  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$  (beiden negatief)  $\Rightarrow$  oorsprong is asymptotisch stabiel.

(b) De toestandvergelijkingen zijn  $\dot{x}_1 = x_2$  en  $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$ . Elimineer  $x_2$ :  $x_1'' = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_1'$ . Dus

$$x_1'' + 3x_1' + 2x_1 = 0.$$

Oplossing:  $x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$ . Met  $x_1(0) = 1$  geeft  $C_1 + C_2 = 1$ . Verder  $x_2 = \dot{x}_1 = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$  en  $x_2(0) = 0$  geeft  $-C_1 - 2C_2 = 0$ . Hieruit volgt  $C_2 = -1$  en  $C_1 = 2$ .

(c) Dus

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$