# Oefeningen Wiskunde voor Systemen

KU Leuven - ESAT

13 december 2025

## Inhoudsopgave

# 1 Formularium

Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het "Signals and Systems" formularium. In de oefeningen wordt hiernaar verwezen.

## 1.1 Laplace transform (LT)

### 1.1 Definitie en eigenschappen

| | | | |
|---|---|---|---|
| Definitie: | $f(t)\,u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ |
| translatie in $s$ : | $f(t)e^{-at}\,u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $F(s+a)$ |
| translatie in $t$ : | $f(t-a)\,u(t-a)$ | $\longleftrightarrow$ | $e^{-as}F(s)$ |
| afgeleide in $t$ : | $\frac{d}{dt}\big(f(t)u(t)\big)$ | $\longleftrightarrow$ | $sF(s) - f(0^+)$ |
| | $\frac{d^2}{dt^2}\big(f(t)u(t)\big)$ | $\longleftrightarrow$ | $s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$ |
| afgeleide in $s$ : | $t\,f(t)\,u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $-\frac{d}{ds}F(s)$ |
| | $t^n f(t)\,u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ |
| convolutie: | $\big(f * g\big)(t)\,u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $F(s)\,G(s)$ |
| schaling: | $f(at)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{1}{a}\,F\Big(\frac{s}{a}\Big)$ |

**Initial value theorem:**

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

**Final value theorem:**

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \quad \text{(onder de gebruikelijke poolvoorwaarden).}$$

**Link met FTC:**

$$\mathrm{LT}(s = j\omega) = \mathrm{FTC}(j\omega) \quad \text{als } x(t) \text{ absoluut integreerbaar is.}$$

### 1.2 Useful Laplace pairs

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $e^{-at}u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{1}{s+a}$ | $t^n u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $\cos(at)u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\sin(at)u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{a}{s^2+a^2}$ |
| $\delta(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $1$ | $u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{1}{s}$ |
| $t\cos(at)u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ | $t\sin(at)u(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$ |

## 1.2 Fourier transform (FTC)

### 2.1 Basic formulae

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| convolution theorem (tijd): | $f(t) * g(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $F(\omega)\, G(\omega)$ |
| convolution theorem (freq.): | $f(t)\, g(t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{1}{2\pi}\,(F * G)(\omega)$ |
| translatie: | $x(t - t_0)$ | $\longleftrightarrow$ | $X(\omega) e^{-j\omega t_0}$ |
| symmetry (reëel $x$): | | | $X(-\omega) = X^*(\omega)$ |
| time symmetry (reëel $x$): | $x(-t)$ | $\longleftrightarrow$ | $X(-\omega) = X^*(\omega)$ |
| link FS–FTC: | | | $X(k\omega_0) = T\, c_k \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$ |

### 2.2 Useful Fourier pairs

We gebruiken $\operatorname{sinc}(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Block: | $x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-L/2, L/2] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$ | $\longleftrightarrow$ | $X(\omega) = AL \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right)$ |
| Sinc: | $x(t) = A \operatorname{sinc}(\omega_0 t)$ | $\longleftrightarrow$ | $X(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_0}, & \lvert\omega\rvert < \omega_0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$ |
| Impuls: | $\delta(t - t_0)$ | $\longleftrightarrow$ | $e^{-j\omega t_0}$ |
| Complex expon.: | $e^{j\omega_0 t}$ | $\longleftrightarrow$ | $2\pi\, \delta(\omega - \omega_0)$ |
| Cosine: | $\cos(\omega_0 t)$ | $\longleftrightarrow$ | $\pi\, [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$ |
| Sine: | $\sin(\omega_0 t)$ | $\longleftrightarrow$ | $j\pi\, [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ |
| Delta train: | $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ | $\longleftrightarrow$ | $\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$ |

## 1.3 Fourier series (FS)

### 3.1 Cartesian form

Voor periode $T$ met $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right].$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt, \qquad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\, dt, \qquad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\, dt.$$

### 3.2 Complex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt.$$

**symmetry (reëel $f$):** $c_{-k} = c_k^*$.
**Spectrum:**

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta(\omega - k\omega_0).$$

### 3.3 Links between cartesian and complex form

$$c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \qquad c_k^* = \frac{a_k + jb_k}{2}.$$

$$|c_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \varphi_k = \mathrm{Arctan2}(a_k, -b_k).$$

$$a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\}, \qquad b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\}.$$

# 2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

## 2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen

Gegeven een systeem met operator $\mathcal{T}$ gedefinieerd als $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.

**Vraag:** Onderzoek of dit systeem lineair is.

## 2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit

Een RC-circuit heeft $R = 1000\ \Omega$ en $C = 10\ \mu$F. De ingangsspanning is een stapfunctie $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.

**Vraag:**

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning $v_{\text{uit}}(t)$.

(b) Bereken de tijdsconstante $\tau$ van het circuit.

(c) Bepaal de uitgangsspanning na 10 ms als $v_{\text{uit}}(0) = 0$ V.

## 2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval

Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd.

**Vraag:** Hoeveel milligram blijft over om 14:00 uur?

## 2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit

Gegeven twee systemen:

- Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
- Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

**Vraag:**

(a) Test beide systemen op homogeniteit (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$.

(b) Test beide systemen op additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$.

(c) Bepaal voor elk systeem of het lineair is.

## 2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning

Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?

(a) $y(t) = x(t - 2)$

(b) $y(t) = tx(t)$

(c) $y(t) = |x(t)|$

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

**Vraag:** Motiveer je antwoorden.

## 2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit

Gegeven het systeem $\mathcal{T}$ met

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + x(t-1).$$

**Vraag:**

(a) Is het systeem lineair en tijdinvariant?

(b) Is het systeem causaal?

(c) Is het systeem invertibel? Motiveer.

## 2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)

Beschouw de twee systemen:

$$\text{(S1) } y(t) = 2x(t-1), \qquad \text{(S2) } y(t) = x(t) + u(t).$$

**Vraag:**

(a) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is.

(b) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdinvariant is.

(c) Is elk systeem causaal? Motiveer kort.

# 3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

## 3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies

Gegeven de signalen $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

**Vraag:**

(a) Bepaal welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont.

(b) Bereken de waarde van elk signaal op $t = 5$ s.

## 3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus

Een sinusgolf is gegeven door $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.

**Vraag:**

(a) Bepaal de amplitude, hoekfrequentie $\omega$, frequentie $f$, en fasehoek.

(b) Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.

## 3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie

Gegeven $z(t) = e^{j2\pi t}$.

**Vraag:**

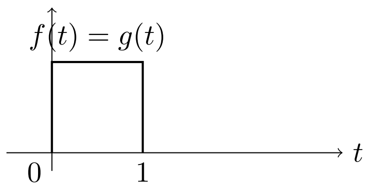
(a) Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formule van Euler.

(b) Bepaal de waarde op $t = 0.25$ s.

## 3.4 Oefening 2.4: Convolutie

Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = u(t) - u(t-1)$$

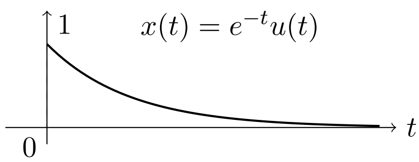



*Zie Formularium: convolutie in tijd $\leftrightarrow$ product in frequentie in 1.2.*

**Vraag:** Bepaal $(f * g)(t)$ en schets het resultaat.

## 3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling

Gegeven het signaal $x(t) = e^{-t}u(t)$.




**Vraag:**

(a) Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$ (tijdsverschuiving).

(b) Bepaal $y_2(t) = x(2t)$ (tijdscompressie).

(c) Bepaal $y_3(t) = 2x(t)$ (amplitude schaling).

(d) Schets alle drie signalen.

### 3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie

Bepaal de energie van de volgende signalen:

**Vraag:**

(a) $x(t) = e^{-t}u(t)$

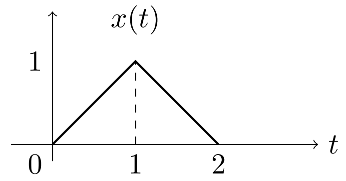
(b) $x(t) = 2\sin(t)u(t)$ over $0 \leq t \leq \pi$

(c) $x(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$

### 3.7 Oefening 2.7: Driehoeksignaal met Stapfuncties

Definieer het signaal

$$x(t) = t\big(u(t) - u(t-1)\big) + (2-t)\big(u(t-1) - u(t-2)\big).$$




**Vraag:**

(a) Schrijf $x(t)$ expliciet als stukgewijze functie.

(b) Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$.

(c) Bepaal en schets $x(t-1)$.

### 3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)

Neem

$$x(t) = u(t) - u(t-2).$$

**Vraag:**

(a) Schets $x(t)$.

(b) Schrijf $x(t-1)$ en $x(t+1)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

(c) Schrijf $x(2t)$ en $x(-t)$ in termen van stapfuncties en schets ze.

# 4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

## 4.1 Oefening 3.1: Standaard Laplace-paren

*Bron: Formularium standaard transformaties.*

Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:

**Vraag:**

(a) $f(t) = 5u(t)$

(b) $f(t) = e^{-3t}u(t)$

(c) $f(t) = t \cdot u(t)$

(d) $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$

(e) $f(t) = e^{-2t} \sin(3t)u(t)$

*Zie Formularium: definitie 1.1 en paren 1.1.*

## 4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie met Partieelbreuken

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

**Vraag:**

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s+2} + \dfrac{5}{s^2+4}$

(b) $G(s) = \dfrac{10}{s(s+1)(s+2)}$ (tip: partieelbreuken)

(c) $H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)^2}$ (tip: dubbele pool)

*Zie Formularium: paren 1.1.*

## 4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem

Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:

**Vraag:**

(a) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$, $y(0) = 2$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 6e^{-2t}u(t)$, $y(0) = 0$

(c) $2\dfrac{dy}{dt} + y = u(t) - u(t-1)$, $y(0) = 1$

*Zie Formularium: afgeleide-eigenschap 1.1.*

## 4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem: Karakteristische Wortels

**Vraag:** Voor elk systeem: bepaal karakteristieke wortels, onderdamping-status, en los op voor $y(t)$.

(i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

(ii) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (kritiek gedempt)

(iii) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ (ondergedempt)

**Bonus:** Schets $y(t)$ voor alle drie gevallen op dezelfde grafiek en bespreek het gedrag.

### 4.5 Oefening 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving (Tijddomein)

**Vraag:**

(a) Gegeven $F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$, bepaal $f(t)$ en vervolgens $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$.

(b) Bepaal de Laplacetransformatie van $x(t) = e^{-3(t-1)}u(t-1)$.

(c) Schets beide $f(t)$ en $g(t)$ op dezelfde grafiek en duid de verschuiving aan.

*Zie Formularium: tijdverschuiving in t 1.1.*

### 4.6 Oefening 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd

Bepaal via partieelbreuken en inverse Laplace de volgende:

**Vraag:**

(a) $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ (drie verschillende polen)

(b) $G(s) = \frac{5s + 7}{(s+1)^2(s+2)}$ (dubbele pool)

(c) $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$ (reële en complexe polen)

### 4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling

**Gegeven:** $F(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 4s + 3}$

**Vraag:**

(a) Bepaal $f(0^+)$ met de beginwaardestelling.

(b) Bepaal $\lim_{t\to\infty} f(t)$ met de eindwaardestelling.

(c) Bepaal $f(t)$ expliciet en controleer beide grenzen.

(d) Schets $f(t)$ voor $t \in [0, 10]$ s.

*Zie Formularium: begin- en eindwaardestelling 1.1.*

**Bonus:** Voor welke $F(s)$ kan de eindwaardestelling NIET gebruikt worden?

## 4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace

**Gegeven:** $f(t) = u(t) - u(t-1)$ (puls), $g(t) = e^{-2t}u(t)$ (exponentieel verval)
**Vraag:**

(a) Bepaal $F(s)$ en $G(s)$.

(b) Bepaal $Y(s) = F(s) \cdot G(s)$ en vervolgens $y(t) = (f * g)(t)$.

(c) Geef $y(t)$ stukgewijs en schets het resultaat.

(d) Interpreteer fysisch: wat gebeurt er bij $t = 1$?

*Zie Formularium: convolutie-eigenschap 1.1.*

## 4.9 Oefening 3.9: Samenvattingsoefening Laplace

**Vraag:**

(a) Bepaal $\mathcal{L}\{u(t)\}$ en $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}$.

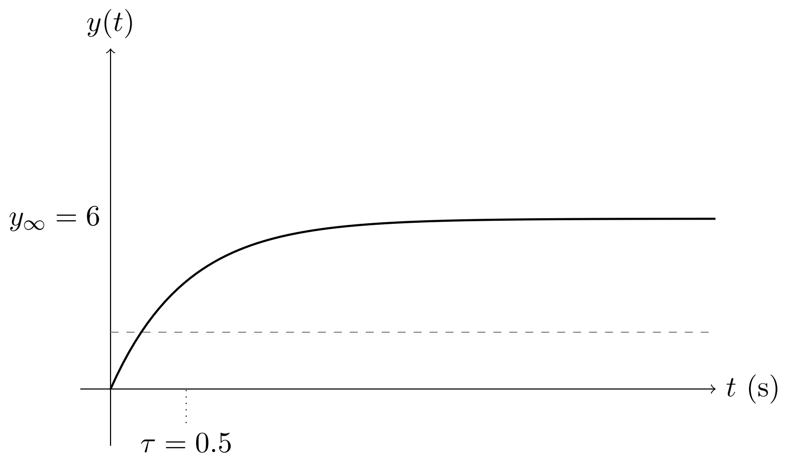
(b) Bepaal $\mathcal{L}\{t\,u(t)\}$ en $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}u(t)\}$.

(c) Bepaal inverse Laplace van $F(s) = \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{4}{s^2+9}$.

(d) Voor $H(s) = \dfrac{s+5}{s^2+6s+13}$, bepaal $h(t)$ (complexe polen!).

## 4.10 Oefening 3.10: Staprespons van Eerste-Orde Systeem

**Gegeven:** Systeem $H(s) = \dfrac{K}{\tau s + 1}$ met $K = 2$, $\tau = 0.5$ s, en ingangssignaal $x(t) = 3u(t)$.




**Vraag:**

(a) Bepaal $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$.

(b) Bepaal $y(t)$ en identificeer: steadystate waarde, tijdsconstante, settling time (2%).

(c) Schets $y(t)$ en controleer of deze overeenkomt met de grafiek hierboven.

(d) Op welk moment heeft $y(t)$ 63% van zijn eindwaarde bereikt?

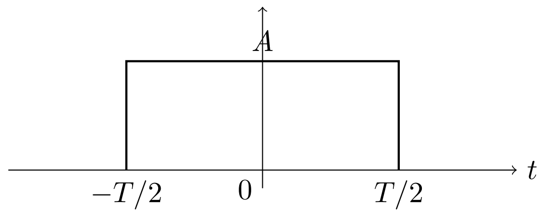
*Zie Formularium: afgeleide-eigenschap en stapfunctie-paar 1.1, 1.1.*

# 5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

## 5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls

Gegeven een rechthoekpuls:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$




*Zie Formularium: blok ↔ sinc in 1.2.*
**Vraag:**

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.

(b) Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie.

(c) Bepaal de eerste nulpunten van het spectrum.

## 5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling

Gegeven $F\{f(t)\} = F(j\omega)$ bepaal de Fouriertransformatie van $f(t - t_0)$.
*Zie Formularium: tijdverschuiving 1.2.*
**Vraag:**

(a) Geef het bewijs van de verschuivingsstelling.

(b) Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met $t_0 = 1$ s, $A = 2$, $T = 2$ s.

(c) Bespreek het effect op amplitude- en fasespectrum.

## 5.3 Oefening 4.3: Modulation Property

Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

$$x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$$

waarbij $\text{rect}(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$ is.
*Zie Formularium: modulatie (cosinus) in 1.2.*
**Vraag:**

(a) Pas de modulatiestelling toe.

(b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

### 5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling

De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven $f(t) = e^{-t}u(t)$.

*Zie Formularium: FTC-definitie 1.2 en eigenschappen 1.2.*

**Vraag:**

(a) Bepaal de totale energie in het tijdsdomein: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

(b) Bepaal $F(j\omega)$ en controleer de energie in het frequentiedomein.

(c) Verifieer Parseval's stelling.

### 5.5 Oefening 4.5: Exponentieel Signaal

Gegeven $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.

**Vraag:**

(a) Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$.

(b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

(c) Bepaal de bandbreedte (eerste nulpunt).

### 5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta

Bepaal de Fouriertransformatie van:

**Vraag:**

(a) $f(t) = \delta(t)$ (impulsfunctie)

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$ (verschoven impulsfunctie)

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ (hint: gebruik dat $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$)

### 5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)

Beschouw het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en definieer $y(t) = x(t - t_0)$ met $t_0 = \frac{1}{4}$.

**Vraag:**

(a) Bepaal $X(j\omega)$.

(b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.

### 5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's

Gebruik de bekende paren $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en de verschuivingsstelling.

**Vraag:**

(a) Bepaal $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$.

(b) Bepaal de Fouriertransformatie van $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$.

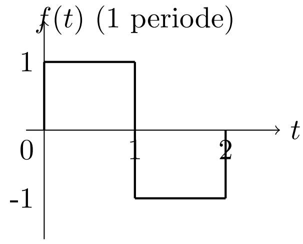
(c) Wat is het amplitudespectrum van $x(t)$ uit (b)? (geen volledige schets nodig)

# 6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

## 6.1 Oefening 5.1: Blokgolf

Een periodieke blokgolf met periode $T = 2$ s is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$




*Zie Formularium: Fourierreeks (cartesisch) 1.3 en (complex) 1.3.*
**Vraag:**

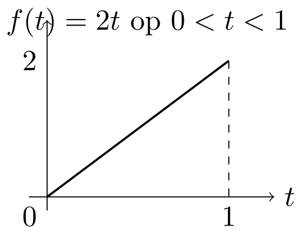
(a) Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is.

(b) Bereken de Fouriercoëfficiënten $a_0$, $a_n$, en $b_n$.

(c) Schrijf de Fourierreeks tot de 3e harmonische.

## 6.2 Oefening 5.2: Zaagtandgolf

Een zaagtandgolf met periode $T = 1$ s is gegeven door $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$.




**Vraag:**

(a) Bereken $a_0$.

(b) Bepaal $b_1$ en $b_2$.

(c) Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.

## 6.3 Oefening 5.3: Driehoekgolf

Een driehoekgolf met periode $T = 2$ is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

**Vraag:**

(a) Is dit signaal even of oneven?

(b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten.

(c) Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fourierreeks.

## 6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.

**Vraag:**

(a) Bereken de gemiddelde macht van het signaal: $P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$.

(b) Bereken $P$ uit de Fouriercoëfficiënten met Parseval's stelling: $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

(c) Controleer dat beide methoden dezelfde waarde geven.

## 6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC

Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten $c_k$ (met $\omega_0 = 2\pi/T$).

(b) Geef een eenvoudige interpretatie van welke harmonischen verdwijnen.

(c) Gebruik de link uit het formularium $X(k\omega_0) = T\,c_k$ om uit te leggen hoe de FTC van *één periode* gesampled wordt.

## 6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som

Neem een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t).$$

**Vraag:**

(a) Geef $\omega_0$.

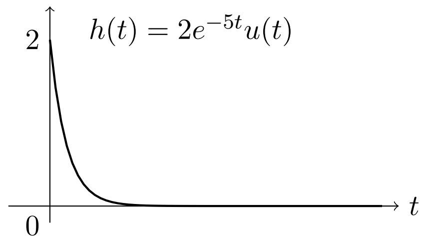
(b) Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten $a_0$, $a_n$ en $b_n$.

(c) Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen herkennen welke termen niet nul zijn).

# 7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

## 7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons

Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$.




**Vraag:**

(a) Bereken de systeemrespons op een stapingang $f(t) = u(t)$ door convolutie.

(b) Verifieer je antwoord met de Laplacetransformatie.

## 7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper

Een massa-veer-dempersysteem heeft $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, en $c = 4$ Ns/m.
**Vraag:**

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking.

(b) Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie $\omega_0$.

(c) Is het systeem ondergedempt, kritisch gedempt, of overgedempt?

## 7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons

Gegeven een LTC-systeem met overdracht $H(s) = \frac{10}{s+5}$.
**Vraag:**

(a) Bepaal de frequentierespons $H(j\omega)$.

(b) Bepaal de amplitude- en faserespons.

(c) Bepaal de 3dB bandbreedte (waar $|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$).

## 7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen

Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

$$H_1(s) = \frac{5}{s+2}, \quad H_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de totale overdracht $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

## 7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen

Bepaal voor de volgende systemen of ze BIBO-stabiel, marginaal stabiel of onstabiel zijn op basis van hun polen.

**Vraag:**

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$

## 7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons

Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de overdrachtsfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(c) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer via de polen.

(d) Bepaal de nultoestandsrespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.

## 7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)

Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de impulsrespons $h(t)$.

(b) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.

(c) Wat is de tijdsconstante $\tau$ en de DC-versterking $H(0)$?

# 8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

## 8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de karakteristieke veelterm $f(\lambda) = |A - \lambda I|$.

(b) Vind de eigenwaarden van $A$.

(c) Bereken voor elke eigenwaarde een bijbehorende eigenvector.

## 8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem

Voor het systeem uit oefening 3.4 ($\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$).

**Vraag:**

(a) Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix.

(c) Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit oefening 3.4.

(d) Bepaal de eigenvectoren.

## 8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

(b) Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (omdat $A$ symmetrisch is).

(c) Vorm de matrix $P$ met eigenvectoren als kolommen en bepaal $P^{-1}AP = D$ waarbij $D$ diagonaal is.

## 8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix.

(b) Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling.

(c) Bepaal de eigenwaarden numeriek en controleer of ze binnen de cirkels vallen.

## 8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit

Gegeven de matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de eigenwaarden.

(b) Bepaal de eigenvectoren.

(c) Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn.

(d) Normaliseer de eigenvectoren tot eenheid.

## 8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële

Gegeven de matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

**Vraag:**

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $A$.

(b) Bereken de matrix exponentiële $e^{At}$ via diagonalisatie of Cayley-Hamilton.

(c) Gebruik dit om de oplossing van $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ te vinden met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

## 8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de eigenwaarden van $A$ en de dimensie van de eigenruimte.

(b) Is $A$ diagonaliseerbaar? Motiveer.

(c) Bepaal $e^{At}$.

## 8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis)

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector.

(b) Bereken $A^3$.

(c) Bereken $e^{At}$.

# 9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen

## 9.1 Oefening 8.1: Signaalspektrum en Symmetrie

*Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1a, signaal-eigenschappen).*

Gegeven de signalen $u(t)$ (Heaviside), $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, en hun Fouriertransformaties $U(j\omega)$, $V(j\omega)$.

**Vraag:**

(a) Beschrijf welke van de volgende signalen *causaal*, *periodiek*, *even*, en/of *oneven* zijn:

- $u(t)$ (Heaviside-stapfunctie)
- $v(t) = 2\cos(2\pi t)$
- $u(t) \cdot v(t)$ (product)
- $u(t) * v(t)$ (convolutie)

(b) Bepaal voor elk signaal welke symmetrie-eigenschappen van toepassing zijn en motiveer kort.

## 9.2 Oefening 8.2: Fouriertransformatie met Verschuiving en Modulatie

*Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1b-c, FTC-transformaties).*

Gegeven het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

en de cosinusvorm $v(t) = 2\cos(2\pi t)$. Definieer $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ en $z(t) = x(t) + x(t-1)$.

**Vraag:**

(a) Bepaal $X(j\omega)$ (geïnspireerd door het sinc-paar uit het formularium, 1.2).

(b) Bepaal $Y(j\omega)$ met de modulatiestelling (vermenigvuldiging in tijd $\leftrightarrow$ convolutie in frequentie).

(c) Bepaal $Z(j\omega)$ met de verschuivingsstelling. Welk effect heeft de verschuiving op amplitude- en fasespectrum?

## 9.3 Oefening 8.3: Impulsrespons, Causaliteit en Convolutie

*Bron: Voorbeeldexamen (vraag 2, impulsrespons van LTC-systeem).*

Gegeven het ingangssignaal en de impulsrespons:

$$x(t) = u(t) - u(t-2), \qquad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de Laplacetransformatie $X(s)$ van het ingangssignaal.

(b) Is het systeem causaal? Motiveer op basis van de vorm van $h(t)$.

(c) Bepaal de nultoestandsrespons $y(t) = h(t) * x(t)$ via convolutie en geef het antwoord stukgewijs.

## 9.4 Oefening 8.4: Complexe Fourierreeks van Periodiek Signaal

*Bron: Voorbeeldexamen (vraag 3, impulsrespons en lineariteit).*

Gegeven een periodiek puls-trein met periode $T = 2$ s:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 2 \end{cases}, \quad \text{periodiek uitgebreid}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten $c_k$ (gebruik $\omega_0 = 2\pi/T$, zie Formularium 1.3).

(b) Uit de eigenschap dat $p(t)$ reëel is, volgt $c_{-k} = c_k^*$. Verifieer dit voor enkele waarden van $k$.

(c) Bepaal welke harmonischen verdwijnen en verklaar dit aan de hand van de duty cycle van de pulstrein.

## 9.5 Oefening 8.5: Laplacetransformatie met Verschuiving

*Bron: Voorbeeldexamen (Laplace-transformatie met complexe signalen).*

Gegeven

$$x(t) = 3e^{-t}u(t) - 3e^{-(t-1)}u(t-1).$$

**Vraag:**

(a) Bepaal $X(s)$ (gebruik de verschuivingsstelling, zie Formularium 1.1).

(b) Bepaal $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ door rechtstreeks $x(t)$ in te vullen.

(c) Verifieer $x(0^+)$ met de beginwaardestelling en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ met de eindwaardestelling (zie Formularium 1.1).

## 9.6 Oefening 8.6: Differentiaalvergelijking via Laplace (met Beginvoorwaarden)

*Bron: Voorbeeldexamen (oplossen van DV met Laplace).*

Los op met behulp van de unilaterale Laplacetransformatie:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**Vraag:**

(a) Pas de Laplacetransformatie toe op beide zijden en zet alle beginvoorwaarden in.

(b) Los op voor $Y(s)$ en bepaal de polen (karakteristieke wortels).

(c) Bepaal $y(t)$ via partieelbreukontwikkeling en inverse Laplace.

(d) Controleer je antwoord door $y(0)$ en $y'(0)$ in te vullen.

## 9.7 Oefening 8.7: LTI-Systeem: Stabiliteit, Impuls- en Staprespons

*Bron: Voorbeeldexamen (polen, stabiliteit en systeemrespons).*

Een causaal LTI-systeem heeft overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}.$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de polen van het systeem. Is het systeem BIBO-stabiel?

(b) Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ via partieelbreuken.

(c) Bepaal de staprespons $y(t)$ voor ingangssignaal $x(t) = u(t)$.

(d) Beredeneer: Naar welke waarde convergeert $y(t)$ als $t \to \infty$? (Controleer met de eindwaardestelling.)

## 9.8 Oefening 8.8: Convolutie: Tijdsdomein versus Frequentiedomein

*Bron: Voorbeeldexamen (convolutie met basis-signalen).*

Gegeven

$$x(t) = u(t) - u(t-1), \qquad h(t) = e^{-t}u(t)$$

**Vraag:**

(a) Bepaal $y(t) = h(t) * x(t)$ rechtstreeks via (grafische) convolutie in het tijdsdomein. Geef het antwoord stukgewijs.

(b) Bepaal $X(s)$ en $H(s)$ (Laplacetransformaties) en verifieer via $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ en inverse Laplace dat je hetzelfde antwoord krijgt.

## 9.9 Oefening 8.9: Fouriertransformatie en Energieanalyse

*Bron: Voorbeeldexamen (FTC en Parseval voor energie-berekeningen).*

Gegeven

$$f(t) = e^{-2|t|}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal $F(j\omega)$ (tip: split in twee delen, $f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$).

(b) Bereken de totale energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ rechtstreeks.

(c) Verifieer met Parseval's stelling: $E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$.

## 9.10 Oefening 8.10: Reële Fourierreeks: Symmetrie en Spectrum

*Bron: Voorbeeldexamen (periodieke signalen en Fourierreeks).*

Gegeven een antisymmetrische blokvorm met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \end{cases}, \quad \text{periodiek uitgebreid}$$

**Vraag:**

(a) Bepaal of $f(t)$ even, oneven, of geen van beide is.

(b) Bepaal de coëfficiënten $a_0$, $a_n$, $b_n$ van de reële Fourierreeks. (Welke coëfficiënten verdwijnen?).

(c) Schrijf de Fourierreeks tot en met de 5e harmonische.

(d) Bepaal de RMS-waarde en verifieer met Parseval.

## 9.11 Oefening 8.11: Staatruimtevergelijking en Stabiliteit

*Bron: Voorbeeldexamen (toestandsrepresentatie, eigenwaarden).*

Gegeven het eerste-orde systeem:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu(t), \qquad y = C\mathbf{x},$$

waarbij

$$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 1$$

en $\mathbf{x}(0) = 1$.

**Vraag:**

(a) Bepaal de eigenwaarde van $A$ en bespreek de stabiliteit van het systeem.

(b) Bepaal $\mathbf{x}(t)$ voor $u(t) = 0$ (vrije respons).

(c) Bepaal $y(t)$ en determine $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

# 10 Oplossingen

## 10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1

### Oplossing 1.1

**Gegeven:** Systeem met operator $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.
**Vraag:** Onderzoek of dit systeem lineair is.
**Oplossing:**

- Test eigenschap 1 (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t)+2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t)+2) = 3ax(t) + 2a$
- Voor $a \neq 1$ geldt: $2 \neq 2a$, dus schaling klopt niet.
- Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.

### Oplossing 1.2

**Gegeven:** RC-circuit met $R = 1000\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F, ingangsspanning $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$ V.
**Vraag:**

(a) Schrijf de differentiaalvergelijking op.

(b) Bereken $\tau$.

(c) Bepaal $v_{\text{uit}}(0.01)$.

**Oplossing:**

(a) De differentiaalvergelijking van een RC-circuit: $RC\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = v_{\text{in}}$

$$(1000)(10 \times 10^{-6})\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

$$0.01\frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

(b) Tijdsconstante: $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01$ s $= 10$ ms

(c) Voor een staprespons met $v_{\text{uit}}(0) = 0$:

$$v_{\text{uit}}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})u(t) = 5(1 - e^{-100t})u(t)$$

Op $t = 10$ ms $= 0.01$ s:

$$v_{\text{uit}}(0.01) = 5(1 - e^{-1}) = 5(1 - 0.368) = 5(0.632) = 3.16 \text{ V}$$

### Oplossing 1.3

**Gegeven:** Radio-isotoop met halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur. Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.
**Vraag:** Hoeveel mg blijft over om 14:00?
**Oplossing:**
Model radioactief verval: $N(t) = N_0 e^{-kt}$
Halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur: $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155\ \text{h}^{-1}$
Van 08:00 tot 14:00 is $\Delta t = 6$ uur:

$$N(6) = 20e^{-0.1155\times 6} = 20e^{-0.693} = 20 \times 0.5 = 10 \text{ mg}$$

**Antwoord:** 10 mg blijft over.

**Oplossing 1.4**

**Gegeven:** Twee systemen: - Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$ - Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
**Vraag:** Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.
**Oplossing:**
**Systeem A:** $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ ✓
Additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$ ✓
**Systeem A is LINEAIR.**
**Systeem B:** $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ (voor $a \neq 1$) X
**Systeem B is NIET LINEAIR.**

**Oplossing 1.5**

**Gegeven:** Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?
**Oplossing:**

(a) $y(t) = x(t-2)$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓(zuivere vertraging)

(b) $y(t) = tx(t)$: LINEAIR maar NIET TIJDINVARIANT X (coëfficiënt varieert in tijd)

(c) $y(t) = |x(t)|$: NIET LINEAIR X (niet additief/homogeen)

(d) $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$: LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓(integrator)

**Antwoord:** (a) en (d) zijn LTI.

**Oplossing 1.6**

**Gegeven:** $y(t) = x(t) + x(t-1)$.
**Vraag:** Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.
**Oplossing:**

(a) **Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tijdsverschuiving van de input dezelfde verschuiving in beide termen geeft.

(b) **Causaal:** Ja. $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en $x(t-1)$, dus enkel van huidige en verleden waarden.

(c) **Invertibel: Niet** uniek invertibel.

**Bewijs door tegenvoorbeeld:**

Stel $y(t) = 0$ voor alle $t$. Dan geldt:

$$x(t) + x(t-1) = 0 \Rightarrow x(t) = -x(t-1)$$

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen, bijvoorbeeld:

- $x(t) = A(-1)^t$ voor elke constante $A$
- $x(t) = 0$ voor alle $t$

Omdat verschillende inputs tot dezelfde output leiden, is het systeem niet invertibel.

**Oplossing 1.7**

**Gegeven:** (S1) $y(t) = 2x(t-1)$ en (S2) $y(t) = x(t) + u(t)$.

**Vraag:** Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).

**Oplossing:**

(a) **Lineariteit**

**Systeem (S1):** $y(t) = 2x(t-1)$

**Test homogeniteit:** Voor $ax(t)$:

$$\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t-1) = a \cdot 2x(t-1) = a\mathcal{T}\{x(t)\} \quad \checkmark$$

**Test additiviteit:** Voor $x_1(t) + x_2(t)$:

$$\mathcal{T}\{x_1(t)+x_2(t)\} = 2(x_1(t-1)+x_2(t-1)) = 2x_1(t-1)+2x_2(t-1) = \mathcal{T}\{x_1(t)\}+\mathcal{T}\{x_2(t)\} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ (S1) is **lineair**.

**Systeem (S2):** $y(t) = x(t) + u(t)$

**Nultoestandtest:** Voor $x(t) = 0$:

$$\mathcal{T}\{0\} = 0 + u(t) = u(t) \neq 0$$

Dit schendt het nultoestandcriterium voor lineariteit.

$\Rightarrow$ (S2) is **niet lineair**.

(b) **Tijdinvariantie**

- (S1) is **tijdinvariant**: $x(t) \mapsto x(t-t_0)$ geeft $y(t) = 2x(t-1) \mapsto 2x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$.
- (S2) is **niet tijdinvariant**: voor $x(t)$ is $y(t) = x(t)+u(t)$. Voor $x(t-t_0)$ is de output $x(t-t_0) + u(t)$, terwijl $y(t-t_0) = x(t-t_0) + u(t-t_0)$. Niet gelijk als $t_0 \neq 0$.

(c) **Causaliteit**

- (S1) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t-1)$ (verleden).
- (S2) is **causaal**: $y(t)$ hangt af van $x(t)$ en een gekend signaal $u(t)$.

## 10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2

**Oplossing 2.1**

**Gegeven:** $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.

**Vraag:** Bepaal welk signaal exponentiële groei/verval vertoont; bereken waarden op $t = 5$ s.

**Oplossing:**

(a) $x_1(t) = e^{0.2t}$: exponentiële **groei** (positieve exponent) $x_2(t) = e^{-0.5t}$: exponentieel **verval** (negatieve exponent)

(b) Op $t = 5$ s:

$$x_1(5) = e^{0.2\times 5} = e^1 \approx 2.718$$
$$x_2(5) = e^{-0.5\times 5} = e^{-2.5} \approx 0.082$$

**Oplossing 2.2**

**Gegeven:** $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.
**Vraag:** Bepaal amplitude, hoekfrequentie, frequentie, fasehoek; schrijf als cosinus.
**Oplossing:**

(a) Van $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$:

- Amplitude: $A = 3$
- Hoekfrequentie: $\omega = 4\pi$ rad/s
- Frequentie: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ Hz
- Fasehoek: $\phi = \frac{\pi}{6}$ rad $= 30°$

(b) Als cosinusfunctie: $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

**Oplossing 2.3**

**Gegeven:** $z(t) = e^{j2\pi t}$.
**Vraag:** Schrijf als sinus/cosinus; bepaal waarde op $t = 0.25$ s.
**Oplossing:**

(a) Formule van Euler: $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$

$$z(t) = e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + j\sin(2\pi t)$$

(b) Op $t = 0.25$ s:

$$z(0.25) = \cos(2\pi \times 0.25) + j\sin(2\pi \times 0.25) = \cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + j = j$$

**Oplossing 2.4**

**Gegeven:** $f(t) = u(t) - u(t-1)$ en $g(t) = u(t) - u(t-1)$.
**Vraag:** Bepaal $(f * g)(t)$ en schets.
**Oplossing:**
De convolutie is (Formularium: convolutie-definitie):

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

**Stap 1:** Observeer dat $f(\tau) = 1$ op $[0, 1]$ en $g(t-\tau) = 1$ op $[t-1, t]$.
**Stap 2:** De integrand is alleen niet-nul waar beide functies niet-nul zijn (overlap).
**Geval 1:** $t < 0$
Geen overlap $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$
**Geval 2:** $0 \le t < 1$
Overlap op $[0, t]$ met lengte $t$:

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot 1\, d\tau = t$$

**Geval 3:** $1 \le t < 2$

Overlap op $[t-1, 1]$ met lengte $2-t$:

$$(f * g)(t) = \int_{t-1}^{1} 1 \cdot 1 \, d\tau = 1 - (t-1) = 2 - t$$

**Geval 4:** $t \geq 2$
Geen overlap $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$
**Eindresultaat:**

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een **driehoeksfunctie** met maximum 1 op $t = 1$ en breedte 2.

**Oplossing 2.5**

**Gegeven:** $x(t) = e^{-t}u(t)$.
**Vraag:** Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$, $y_2(t) = x(2t)$, $y_3(t) = 2x(t)$.
**Oplossing:**

(a) Tijdsverschuiving: $y_1(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) = e^2 e^{-t}u(t-2)$ (start op $t = 2$)

(b) Tijdscompressie: $y_2(t) = e^{-2t}u(2t) = e^{-2t}u(t)$ (twee keer sneller)

(c) Amplitude schaling: $y_3(t) = 2e^{-t}u(t)$ (twee keer hoger)

(d) Schetsing: $y_1$ begint op $t = 2$, $y_2$ vervalt sneller, $y_3$ heeft dubbele amplitude.

**Oplossing 2.6**

**Gegeven:** Drie signalen waarvan de energie bepaald moet worden.
**Vraag:** Bereken energies.
**Oplossing:**

(a) $E_1 = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$

(b) $E_2 = \int_0^\pi |2\sin(t)|^2 dt = 4\int_0^\pi \sin^2(t) dt$
Gebruik identiteit $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$:

$$E_2 = 4\int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2} dt = 2\int_0^\pi (1-\cos(2t)) dt$$

$$= 2\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi = 2[(\pi - 0) - (0 - 0)] = 2\pi$$

(c) $E_3 = \int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = 1$

**Oplossing 2.7**

**Gegeven:** $x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2))$.
**Vraag:** Stukgewijs; energie; $x(t-1)$.
**Oplossing:**

(a) Stukgewijs:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

(b) Energie:

$$E = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^2 (2-t)^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{(2-t)^3}{-3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Verschuiving:

$$x(t-1) = (t-1)\big(u(t-1) - u(t-2)\big) + (3-t)\big(u(t-2) - u(t-3)\big).$$

Dit is dezelfde driehoek, verschoven naar rechts met 1.

**Oplossing 2.8**

**Gegeven:** $x(t) = u(t) - u(t-2)$.
**Vraag:** Schets en herschrijf $x(t)$ na verschuiving/schaling/spiegeling.
**Oplossing:**

(a) $x(t) = 1$ voor $0 \le t < 2$ en $x(t) = 0$ elders (rechthoekpuls van breedte 2).

(b) Verschuivingen:

$$x(t-1) = u(t-1) - u(t-3), \qquad x(t+1) = u(t+1) - u(t-1).$$

Dus $x(t-1)$ ligt op $1 \le t < 3$ en $x(t+1)$ op $-1 \le t < 1$.

(c) Schaling en spiegeling:

$$x(2t) = u(2t) - u(2t-2) = u(t) - u(t-1),$$

dus $x(2t) = 1$ voor $0 \le t < 1$. Verder

$$x(-t) = u(-t) - u(-t-2) = u(t+2) - u(t),$$

dus $x(-t) = 1$ voor $-2 \le t < 0$.

## 10.3 Oplossingen Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

### Oplossing 3.1: Standaard Laplace-paren

**Gegeven:** Vijf standaard signalen.
**Oplossing:**

(a) $\mathcal{L}\{5u(t)\}$: Gebruikmakend van definitie Formularium 1.1:

$$\mathcal{L}\{5u(t)\} = 5\int_0^\infty e^{-st}\,dt = 5\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{5}{s}$$

ROC (Region of Convergence): $\mathrm{Re}(s) > 0$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\}$: Exponentiële afname (Formularium 1.1)

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{-3t}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt = \frac{1}{s+3}$$

ROC: $\mathrm{Re}(s) > -3$

(c) $\mathcal{L}\{t \cdot u(t)\}$: Lijnair stijgende signaal (Formularium 1.1)

$$\mathcal{L}\{t\cdot u(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}\,dt$$

Gebruikmakend van partiële integratie ($u = t$, $dv = e^{-st}dt$):

$$\mathcal{L}\{t\} = \left[-\frac{t}{s}e^{-st}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s}e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

(d) $\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\}$: Cosinusvormig signaal (Formularium 1.1)
Met standaardpaar $\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$ en $\omega_0 = 5$:

$$\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\} = \frac{s}{s^2+25}$$

(e) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)u(t)\}$: Gedempt sinus (combinatie exponentiële & trigonometrisch)
**Stap 1:** Standaardpaar voor sinus: $\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$

Met $\omega_0 = 3$: $\sin(3t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{3}{s^2+9}$
**Stap 2:** Frequentie-verschuivingseigenschap (Formularium 1.1):
$e^{-\alpha t}f(t) \leftrightarrow F(s+\alpha)$
Met $\alpha = 2$, vervang $s$ door $s+2$:

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin(3t)u(t)\} = \frac{3}{(s+2)^2+9} = \frac{3}{s^2+4s+13}$$

### Oplossing 3.2: Inverse Laplace met Partieelbreuken

(a) $F(s) = \dfrac{3}{s+2} + \dfrac{5}{s^2+4}$
Deze vorm is al geschikt voor directe inverse (Formularium 1.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3e^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\} = 5\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} = \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

**Resulaat:**

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t) + \frac{5}{2}\sin(2t)u(t)$$

(b) $G(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ — **Drie enkelvoudige polen**

**Stap 1: Partieelbreukontwikkeling**

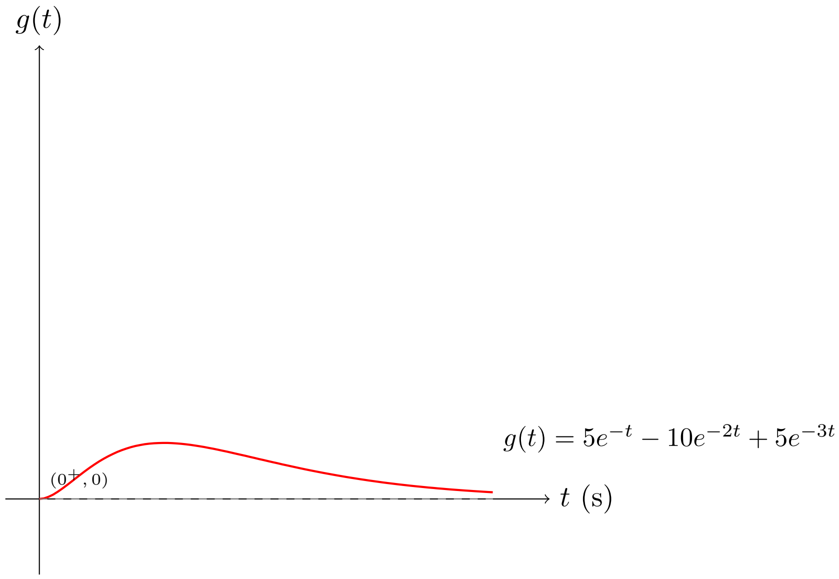
$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

**Stap 2: Coëfficiënten bepalen (Heaviside's methode)**

| Pol | Vermenigvuldig met & stel gelijk | Coëfficiënt |
|---|---|---|
| $s = -1$ | $10 = A \cdot (1) \cdot (2)$ | $A = 5$ |
| $s = -2$ | $10 = B \cdot (-1) \cdot (1)$ | $B = -10$ |
| $s = -3$ | $10 = C \cdot (-2) \cdot (-1)$ | $C = 5$ |

**Stap 3: Inverse Laplace**

$$g(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$




(c) $H(s) = \dfrac{s+3}{(s+1)^2}$ — **Dubbele pool!**

**Stap 1: Partieelbreukontwikkeling met dubbele pool**

Voor dubbele pool $s = -1$:

$$\frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

**Stap 2: Coëfficiënten bepalen**

Vermenigvuldig met $(s+1)^2$: $s + 3 = A(s+1) + B$

Voor $s = -1$: $-1 + 3 = B \Rightarrow B = 2$

Voor $s = 0$: $3 = A + 2 \Rightarrow A = 1$

**Stap 3: Inverse Laplace (gebruik Formularium 1.1:** $te^{-at}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{(s+a)^2}$**)**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2}\right\} = 2te^{-t}u(t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) = (1+2t)e^{-t}u(t)$$

**Oplossing 3.3: Eerste-Orde Differentiaalvergelijkingen**

(i) $\dfrac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$**,** $y(0) = 2$

**Stap 1: Laplacetransformatie beide zijden**

Gebruikmakend van afgeleide-eigenschap (Formularium 1.1): $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

**Stap 2: Isoleer** $Y(s)$

$$Y(s)(s+4) = \frac{8}{s} + 2 = \frac{8+2s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2(s+4)}{s(s+4)} = \frac{2}{s}$$

**Stap 3: Inverse Laplace**

$$y(t) = 2u(t)$$

**Opmerking:** De oplossing is constant! Dit gebeurt omdat $y(0) = 2$ reeds gelijk is aan de steady-state waarde $y_\infty = 8/4 = 2$.

(ii) $\dfrac{dy}{dt} + 3y = 6e^{-2t}u(t)$**,** $y(0) = 0$

**Stap 1: Laplacetransformatie**

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{6}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

**Stap 2: Partieelbreuken**

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Voor $s = -2$: $6 = A(1) \Rightarrow A = 6$

Voor $s = -3$: $6 = B(-1) \Rightarrow B = -6$

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

**Stap 3: Inverse Laplace**

$$y(t) = 6e^{-2t}u(t) - 6e^{-3t}u(t) = 6(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

**Grafiek:** De responsie begint bij $y(0) = 0$ en bereikt maximum rond $t \approx 0.7$ s voordat beide exponentiële termen vervallen.

(iii) $2\dfrac{dy}{dt} + y = u(t) - u(t-1)$, $y(0) = 1$

**Stap 1: Laplacetransformatie ingang**

$$u(t) - u(t-1) \leftrightarrow \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow sY(s) - 1$$

**Stap 2: Oplossen voor $Y(s)$**

$$2(sY(s) - 1) + Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)(2s+1) = 2 + \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2s+1-e^{-s}}{s(2s+1)}$$

**Stap 3: Partieelbreuken**

$$\frac{1}{s(2s+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{2s+1}\right)$$

**Stap 4: Inverse Laplace (met verschuiving)**

Voor $t < 1$: Alleen eerste term bijdraagt

$$y(t) = u(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$$

Voor $t \geq 1$: Beide termen (inclusief verschoven term)

**Stukgewijs:**

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t/2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}e^{-(t-1)/2}, & t \geq 1 \end{cases}$$

**Oplossing 3.4: Karakteristieke Wortels en Dempingsgedrag**

**Gegeven drie systemen; classificeer als over-, kritiek of ondergedempt**

(i) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$**,** $y(0) = 1$**,** $y'(0) = 0$

**Stap 1: Karakteristieke vergelijking**

$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

**Stap 2: Wortels bepalen (discriminant check)**

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow$ twee reële verschillende wortels

$$\lambda = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1, -3$$

**Classificatie:** OVERGEDEMPT (twee reële, negatieve polen)

**Stap 3: Algemene oplossing**

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

**Stap 4: Beginvoorwaarden toepassen**

$y(0) = 1$: $c_1 + c_2 = 1$

$y'(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t}$, dus $y'(0) = 0$: $-c_1 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -3c_2$

Oplossen: $-3c_2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -1/2$, dus $c_1 = 3/2$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}}$$

(ii) $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0$**,** $y(0) = 1$**,** $y'(0) = 0$

**Karakteristieke vergelijking:** $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$ dubbele reële wortel

$\lambda = -2$ (met multipliciteit 2)

**Classificatie:** KRITIEK GEDEMPT

**Algemene oplossing (dubbele wortel):**

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

**Beginvoorwaarden:**

$y(0) = 1$: $c_1 = 1$

$y'(t) = c_2 e^{-2t} + (c_1 + c_2 t)(-2)e^{-2t} = c_2 e^{-2t} - 2(c_1 + c_2 t)e^{-2t}$

$y'(0) = 0$: $c_2 - 2c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$

$$\boxed{y(t) = (1 + 2t)e^{-2t}}$$

(iii) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

**Karakteristieke vergelijking:** $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \Rightarrow$ complexe conjugate wortels

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$$

**Classificatie:** ONDERGEDEMPT (complexe polen in linkervlak)

Natuurlijke frequentie: $\omega_n = 2$ rad/s, Dempingsfactor: $\zeta = 1/\sqrt{5} \approx 0.447$

**Algemene oplossing:**

$$y(t) = e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)]$$

**Beginvoorwaarden:**

$y(0) = 0$: $c_1 = 0$

$y'(t) = -e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)] + e^{-t}[-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)]$

$y'(0) = 2$: $-0 + 2c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$

$$\boxed{y(t) = e^{-t} \sin(2t)}$$

**Oplossing 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving**

(a) **Gegeven:** $F(s) = \dfrac{2}{s^2 + 4}$

**Inverse:** $f(t) = \sin(2t)u(t)$ (Formularium 1.1: $\dfrac{a}{s^2 + a^2} \leftrightarrow \sin(at)u(t)$)

(b) **Met verschuiving:** $G(s) = e^{-2s}F(s) = e^{-2s}\dfrac{2}{s^2 + 4}$

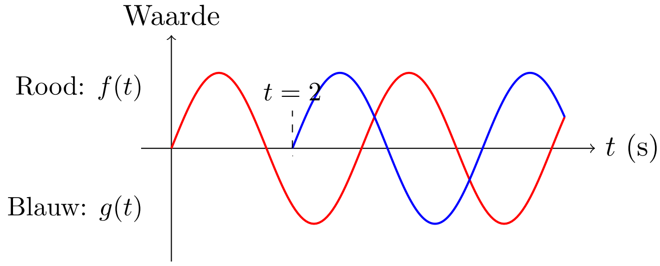
Gebruikmakend van verschuivingsstelling (Formularium 1.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t - a)u(t - a)$$

$$g(t) = \sin(2(t - 2))u(t - 2) = \sin(2t - 4)u(t - 2)$$

Dit is de sinus-golf verschoven naar rechts met 2 seconden.

(c) **Grafische vergelijking:**




De blauwe curve (verschoven signaal) is identiek aan de rode, maar 2 seconden later.

**Oplossing 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd**

(a) $F(s) = \dfrac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

Coëfficiënten via Heaviside:

$A = \dfrac{10}{(1)(2)} = 5$ (pol $s = -1$)

$B = \dfrac{10}{(-1)(1)} = -10$ (pol $s = -2$)

$C = \dfrac{10}{(-2)(-1)} = 5$ (pol $s = -3$)

$$f(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

(b) $G(s) = \dfrac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)}$ — **Dubbele pool combined met simpele**

$$\frac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

Voor $(s+1)^2$ factor: vermenigvuldig met $(s+1)^2$ en stel $s = -1$:

$-5 + 7 = B \Rightarrow B = 2$

Voor $s = -2$ (simpele pool):

$-10 + 7 = C(1) \Rightarrow C = -3$

Voor coëfficiënt $A$: Vermenigvuldig met $(s+1)^2$ en differentieer naar $s$:

$$\frac{d}{ds}[5s+7] = 5 = A + B' \text{ (term)}$$

Alternatief: stel $s = 0$: $7 = A + 2 + (-3) \cdot 1/2$ waardoor $A = 6$

$$g(t) = 6e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

(c) $H(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ — **Complexe polen**

Herken: $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1 \rightarrow$ complexe polen: $s = -1 \pm j$

$$\frac{s^2+2s+3}{(s+1)[(s+1)^2+1]} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2}$$

Voor $s = -1$: $1 - 2 + 3 = A(1) \Rightarrow A = 2$

Voor coëfficiënten $B, C$: Uitwerken en coëfficiënten matchen geeft $B = -1$, $C = 1$

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-t}[-\cos(t) + \sin(t)]u(t) = e^{-t}[2 - \cos(t) + \sin(t)]u(t)$$

**Oplossing 3.7: Begin- en Eindwaardestelling**

**Gegeven:** $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2+4s+3} = \dfrac{3s+5}{(s+1)(s+3)}$

(a) **Beginwaardestelling:** $f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{3s^2+5s}{s^2+4s+3} = 3$$

(b) **Eindwaardestelling:** (polen in linkervlak: $s = -1, -3$ ✓)

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3s^2+5s}{s^2+4s+3} = 0$$

(c) **Controle via exacte oplossing:**

Partieelbreuken:

$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

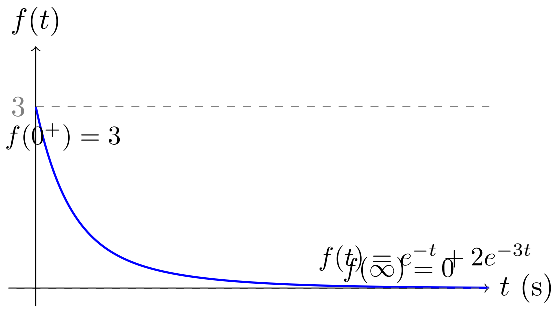
Voor $s = -1$: $-3+5 = 2A \Rightarrow A = 1$

Voor $s = -3$: $-9+5 = -2B \Rightarrow B = 2$

$$f(t) = e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

Verificatie: $f(0^+) = 1 + 2 = 3$ ✓, $f(\infty) = 0$ ✓

(d) **Grafiek:**




**Oplossing 3.8: Convolutie via Laplace**

**Gegeven:** $f(t) = u(t) - u(t-1)$, $g(t) = e^{-2t}u(t)$
**Bepaal:** $y(t) = (f * g)(t)$ via Laplacetransformatie
**Oplossing:**

(a) **Laplace-transformaties:**

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1}{s} - e^{-s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}$$

(b) **Convolutie-theorema (Formularium 1.1):**
$y(t) = f(t) * g(t) \Rightarrow Y(s) = F(s) \cdot G(s)$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+2)} = (1 - e^{-s}) \cdot \frac{1}{s(s+2)}$$

(c) **Partieelbreuken voor basale vorm:**

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

Inverse: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$

(d) **Met verschuiving (tijdsverschuivingsstelling):**
De factor $e^{-s}$ veroorzaakt een verschuiving met 1 seconde:
$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} \cdot \ldots\}$ = origineel signaal verschoven met 1 seconde

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-1)}), & t \geq 1 \end{cases}$$

Vereenvoudiging voor $t \geq 1$:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2(t-1)} - e^{-2t}\right] = \frac{1}{2}e^{2} \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}(e^{2} - 1)e^{-2t}$$

Of: $y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \cdot e^{-2(t-1)}$ voor $t \geq 1$

(e) **Fysische interpretatie:**
Voor $0 \leq t < 1$: Rechthoekpuls gaat door exponentiëel gedempt systeem
Voor $t \geq 1$: Puls stopt, systeem dempt uit met tijdsconstante $\tau = 1/2$ s

**Oplossing 3.9: Samenvattingsoefening**

**Gegeven:** Verschillende signalen en transformaties
**Oplossing:**

(a) **Standaard Laplace-paren (Formularium 1.1):**

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}\{t^{n}u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(b) **Vermenigvuldiging met tijd (Formularium 1.1):**
Eigenschap: $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
Voor $\mathcal{L}\{t^{2}e^{-3t}u(t)\}$:
Basis: $e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}\{te^{-3t}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+3}\right] = \frac{1}{(s+3)^{2}}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}u(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right] = \frac{2}{(s+3)^3}$$

(c) **Inverse Laplacetransformatie met gemengde vormen:**

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^2+9}$$

Per term:
$\frac{1}{s+3} \leftrightarrow e^{-3t}u(t)$
$\frac{2}{s^2} \leftrightarrow 2tu(t)$
$\frac{4}{s^2+9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9} \leftrightarrow \frac{4}{3}\sin(3t)u(t)$

$$f(t) = e^{-3t}u(t) + 2tu(t) + \frac{4}{3}\sin(3t)u(t)$$

(d) **Geavanceerde inverse (complexe polen):**

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+13}$$

Kwadraatafsplitsing van noemer: $s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 + 4$
Herschrijf teller: $s + 5 = (s+3) + 2$

$$\frac{(s+3)+2}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{2}{(s+3)^2+4}$$

Inverse (Formularium 1.1): $e^{-\alpha t}\cos(\beta t) \leftrightarrow \dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$ en $e^{-\alpha t}\sin(\beta t) \leftrightarrow \dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

$$h(t) = e^{-3t}\cos(2t)u(t) + e^{-3t}\sin(2t)u(t) = e^{-3t}[\cos(2t) + \sin(2t)]u(t)$$

**Oplossing 3.9**

**Gegeven:** Eenvoudige signalen met stapfunctie $u(t)$.
**Vraag:** Bepaal enkele Laplace-paren en een inverse Laplace.
**Oplossing:**

(a) $\mathcal{L}\{u(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ (Formularium: $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ in 1.1 en definitie in 1.1).

(b) $\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(s+2)t}dt = \frac{1}{s+2}$ (Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ in 1.1 en translatie in $s$ in 1.1).

(c) $\mathcal{L}\{t\,u(t)\} = \frac{1}{s^2}$ (Formularium: $t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$ met $n = 1$ in 1.1).

(d)
$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-3t}u(t) + 2t\,u(t).$$
(Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ en $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\,u(t)$ in 1.1.)

**Oplossing 3.10: Staprespons Eerste-Orde Systeem**

**Gegeven:** $H(s) = \dfrac{2}{0.5s+1}$, ingangssignaal $x(t) = 3u(t)$

**Oplossing:**

(a) **Laplace-analyse:**

Gegeven: $H(s) = \dfrac{2}{0.5s+1} = \dfrac{2}{0.5(s+2)} = \dfrac{4}{s+2}$ (herschrijven voor standaardvorm)

Met ingang $X(s) = \dfrac{3}{s}$:

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s} = \frac{12}{s(s+2)}$$

(b) **Partieelbreukontwikkeling:**

$$\frac{12}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Voor $s = 0$: $12 = A(2) \Rightarrow A = 6$

Voor $s = -2$: $12 = B(-2) \Rightarrow B = -6$

$$Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s+2}$$

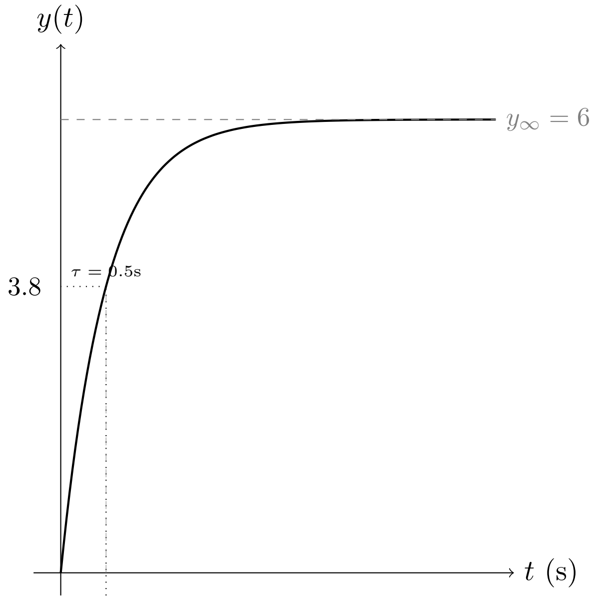
(c) **Inverse Laplace (tijd-domein):**

$$y(t) = 6u(t) - 6e^{-2t}u(t) = 6(1 - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Karakteristieken:**

- Uiteindelijke/steadystate waarde: $y_\infty = \lim_{t\to\infty} 6(1 - e^{-2t}) = 6$
- Tijdsconstante: $\tau = \dfrac{1}{2}$ s (inverse van pool $s = -2$)
- Settling time (2% criterium): $t_s \approx 4\tau = 2$ s
- Waarde op $t = \tau$: $y(0.5) = 6(1 - e^{-1}) \approx 3.8$ (ongeveer 63% van eindwaarde)

(e) **Grafische voorstelling:**




**Interpretatie:** Het eerste-orde systeem bereikt in één tijdsconstante ($\tau = 0.5$ s) ongeveer 63% van de eindwaarde. De responsie is exponentieel zonder overshoot (karakteristiek voor eerste-orde systemen met reële pool).

(f) **Verificatie via eindwaardestelling:**

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \frac{12}{s+2} = 6 \checkmark$$

Klopt met directe berekening: $y(\infty) = H(0) \cdot x = 2 \cdot 3 = 6$ (DC gain $H(0) = 2$)

## 10.4 Oplossingen Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

### Oplossing 4.1: Rechthoekpuls Fouriertransformatie

**Gegeven:** $f(t) = A$ voor $-T/2 < t < T/2$, 0 elders

(a) **Fouriertransformatie (Formularium 1.2):**
Definitie: $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t}dt = A\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{A}{-j\omega}(e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}) = \frac{A}{j\omega}(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2})$$

Via Euler: $e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin(x)$

$$= \frac{A}{j\omega} \cdot 2j\sin(\omega T/2) = \frac{2A\sin(\omega T/2)}{\omega} = AT \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

(b) **Sinc-notatie:** $F(j\omega) = AT \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ ✓
Dit komt overeen met Formularium 1.2 (Block-paar).

(c) **Nulpunten:** $\sin(\omega T/2) = 0$ als $\frac{\omega T}{2} = n\pi$ voor $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$
Dus: $\omega_n = \pm\frac{2\pi}{T}, \pm\frac{4\pi}{T}, \ldots$ (eerste nulpunt: $\omega = 2\pi/T$)

**Oplossing 4.2**

**Gegeven:** Fouriertransformatie verschuivingsstelling; puls met amplitude $A = 2$, breedte $T = 2$, verschoven naar $t_0 = 1$.

**Vraag:** Bewijs stelling; bepaal Fouriertransformatie; effect op spektra.

**Oplossing:**

(a) **Verschuivingsstelling (Formularium 1.2):**

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

**Bewijs:**

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}dt$$

Substitutie $u = t - t_0$ (dus $dt = du$):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega(u+t_0)}du = e^{-j\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}du = e^{-j\omega t_0}F(j\omega)$$

(b) **Toepassing op puls:** Voor puls van $t = 1$ tot $t = 3$ (dus $t_0 = 1$, $A = 2$, $T = 2$):

Onverschoven puls: $F_0(j\omega) = 2 \cdot 2 \cdot \mathrm{sinc}(\omega) = 4\mathrm{sinc}(\omega)$

Verschoven puls:

$$F(j\omega) = 4\mathrm{sinc}(\omega) \cdot e^{-j\omega}$$

(c) **Spectrale gevolgen:**

Amplitudespectrum: $|F(j\omega)| = |e^{-j\omega}| \cdot |4\mathrm{sinc}(\omega)| = 4|\mathrm{sinc}(\omega)|$ (identiek!) ✓

Fasespectrum: $\arg F(j\omega) = -\omega + \arg(\mathrm{sinc}(\omega))$ (lineaire fase-lag van $-\omega$)

Fysisch: Verschuiving veroorzaakt geen amplitudeverandering, alleen lineaire fasevertraging.

**Oplossing 4.3**

**Gegeven:** $x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \mathrm{rect}(t)$ met $\mathrm{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$.

**Vraag:** Pas modulatiestelling toe; schets spektra.

**Oplossing:**

(a) Modulatiestelling (af te leiden uit Formularium: cosinus-paar 1.2 en translatie/convolutie-eigenschappen 1.2):

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)f(t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega-\omega_0)) + F(j(\omega+\omega_0))]$$

Voor $\mathrm{rect}(t)$: $F_{\mathrm{rect}}(j\omega) = 2\mathrm{sinc}(\omega)$ (Formularium: Block-paar 1.2).

Voor $x(t)$ met $\omega_0 = 10\pi$:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[2\mathrm{sinc}(\omega-10\pi) + 2\mathrm{sinc}(\omega+10\pi)] = \mathrm{sinc}(\omega-10\pi) + \mathrm{sinc}(\omega+10\pi)$$

(b) Het spectrum bestaat uit twee verschoven sinc-functies gecentreerd op $\omega = \pm 10\pi$.

De modulatiestelling toont dat vermenigvuldiging in het tijdsdomein resulteert in convolutie in het frequentiedomein (via dualiteit).

**Oplossing 4.4: Parseval's Energiestelling**

**Gegeven:** $f(t) = e^{-t}u(t)$ (exponentieel afnemend signaal).

**Vraag:** Bepaal energie in tijdsdomein; bepaal Fouriertransformatie; verifieer Parseval's stelling.

**Oplossing:**

(a) **Energie in tijdsdomein:**

$$E_{\mathrm{t}} = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\ \mathrm{J}$$

(b) **Fouriertransformatie:** Via Laplace-paar $e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$ (Formularium 1.1) en LT→FTC-link:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Magnitude:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad |F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

(c) **Parseval's Energiestelling (Formularium 1.2):**

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega$$

**Stap 1:** Standaardintegraal: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = [\arctan(\omega)]_{-\infty}^{\infty}$

**Stap 2:** Limieten: $\arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

**Stap 3:** Energie:

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}\ \mathrm{J} \quad \checkmark$$

Conclusie: $E_{\mathrm{t}} = E_{\mathrm{f}} = 0.5$ J (Parseval geverifieerd!)

**Oplossing 4.5: Exponentieel Signaal en Bandbreedte**

**Gegeven:** $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$ (tweezijdig exponentieel signaal).

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformatie; bereken amplitudespectrum; bepaal 3dB-bandbreedte.

**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie (Formularium 1.2):**

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

Splits op bij $t = 0$ (gebruik $|t| = -t$ voor $t < 0$ en $|t| = t$ voor $t > 0$):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^\infty e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt$$

**Eerste integraal:** $\left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{a-j\omega}$

**Tweede integraal:** $\left[\frac{-e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega}\right]_0^\infty = \frac{1}{a+j\omega}$

**Samenvoegen:**

$$F(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a+j\omega+a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(b) **Amplitudespectrum:** $|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ (zuiver reëel, dus fasespectrum = 0)

Maximale waarde: $|F(0)| = \frac{2}{a}$

(c) **3dB-Bandbreedte:** Waarden waar $|F(j\omega)| = |F(0)|/\sqrt{2}$:

$$\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \frac{2}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad a^2+\omega^2 = a\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{3dB} = a$$

(Opmerking: bij de halve-vermogen-frequentie geldt $a^2 + \omega_{3dB}^2 = 2a^2$)

Volle 3dB-bandbreedte: $B_{3dB} = 2a$ rad/s

**Oplossing 4.6: Fouriertransformatie van Impulsen**

**Gegeven:** Drie verschillende signalen: Dirac-puls $\delta(t)$, verschoven puls, cosinus.

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformaties; vergelijk spectrale karakteristieken.

**Oplossing:**

(a) $f(t) = \delta(t)$**:**

$$F(j\omega) = 1 \quad \text{voor alle } \omega$$

(Formularium: impuls-paar 1.2)

Fysische betekenis: Perfecte impuls bevat alle frequenties met gelijk gewicht → wit spectrum.

(b) $f(t) = \delta(t - t_0)$**:**

Via verschuivingsstelling (Formularium 1.2):

$$F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Amplitude: $|F(j\omega)| = 1$ (onafhankelijk van $t_0$!)

Fase: $\angle F(j\omega) = -\omega t_0$ (lineair met frequentie)

Fysisch: Verschuiving verandert amplitudespectrum niet, alleen faseverandering.

(c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$**:**

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Via complexe exponentieel-paren (Formularium 1.2):

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Dit zijn twee discrete impulsen op frequenties $\pm\omega_0$ met respectievelijk gewicht $\pi$.

Fysisch: Cosinus bevat precies twee frequentiecomponenten (positief en negatief).

**Oplossing 4.7: Blokpuls en Tijdverschuiving**

**Gegeven:** $x(t) = 2$ op $(-1/2, 1/2)$, nul elders; $y(t) = x(t - 1/4)$ (verschoven puls).
**Vraag:** Bepaal $X(j\omega)$ en $Y(j\omega)$; vergelijk magnitudes en fases.
**Oplossing:**

(a) $X(j\omega)$ **voor blokpuls:** Amplitude $A = 2$, breedte $L = 1$, gecentreerd op $t = 0$:
Formularium: blok-paar 1.2:

$$X(j\omega) = AL \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Nulpunten: $\text{sinc}(\omega/2) = 0$ wanneer $\omega/2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ dus $\omega = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

(b) $Y(j\omega)$ **voor verschoven puls:** Verschoven naar $t = 1/4$:
Formularium: verschuivingsstelling 1.2:

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega/4} \cdot X(j\omega) = 2e^{-j\omega/4}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

(c) **Vergelijking magnitudes en fase:**
Magnitude: $|Y(j\omega)| = |e^{-j\omega/4}| \cdot |X(j\omega)| = 1 \cdot |X(j\omega)| = |X(j\omega)|$ (identiek!) ✓
Fase: $\arg Y(j\omega) = -\omega/4 + \arg X(j\omega)$ (extra lineaire fase van $-\omega/4$)
**Conclusie:** Tijdverschuiving verandert amplitudespectrum niet, voegt alleen lineaire fasevertraging toe.

**Oplossing 4.8**

**Gegeven:** $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en tijdverschuiving.
**Vraag:** Bepaal FTC van verschoven delta's en een lineaire combinatie.
**Oplossing:**

(a) Met de verschuivingsstelling (Formularium: translatie 1.2) en het paar $\delta(t) \leftrightarrow 1$ (1.2):

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}.$$

(b) Voor $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$:

$$X(j\omega) = 2 \cdot 1 - e^{-j\omega} = 2 - e^{-j\omega}.$$

(c) **Amplitudespectrum berekening:**
**Stap 1:** Schrijf $e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$ (Euler):

$$X(j\omega) = 2 - (\cos\omega - j\sin\omega) = (2 - \cos\omega) + j\sin\omega$$

**Stap 2:** Bereken de modulus:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{(2 - \cos\omega)^2 + (\sin\omega)^2}$$

**Stap 3:** Uitwerken (gebruik $\cos^2\omega + \sin^2\omega = 1$):

$$\begin{aligned} |X(j\omega)|^2 &= 4 - 4\cos\omega + \cos^2\omega + \sin^2\omega & (1) \\ &= 5 - 4\cos\omega & (2) \end{aligned}$$

Dus: $|X(j\omega)| = \sqrt{5 - 4\cos\omega}$

(d) **Bijzondere waarden:**
$\omega = 0$: $|X(0)| = \sqrt{5-4} = 1$ (totale impulssterkte)
$\omega = \pi$: $|X(\pi)| = \sqrt{5+4} = 3$ (maximaal)
$\omega = \pi/2$: $|X(\pi/2)| = \sqrt{5} \approx 2.24$

## 10.5 Oplossingen Hoofdstuk 5

### Oplossing 5.1

**Gegeven:** Blokgolf met periode $T = 2$: $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = -1$ voor $1 < t < 2$.
**Vraag:** Bepaal symmetrie; bereken Fouriercoëfficiënten; schrijf reeks tot 3e harmonische.
**Oplossing:**

(a) De functie is **oneven**: $f(-t) = -f(t)$ (na periodieke uitbreiding)

(b) Fouriercoëfficiënten ($\omega_0 = \pi$ rad/s, Formularium: cartesische vorm 1.3):
**Stap 1: Bereken $a_0$ (DC-component):**

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 1\,dt + \int_1^2 (-1)\,dt = 1 - 1 = 0$$

**Stap 2: Bepaal $a_n$ (omdat $f(t)$ oneven is):**
Voor oneven functies geldt $a_n = 0$ voor alle $n$.
**Stap 3: Bereken $b_n$:**

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt = \int_0^1 \sin(n\pi t)dt - \int_1^2 \sin(n\pi t)dt$$
$$= \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 - \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_1^2$$
$$= \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(2n\pi)-\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}$$

Voor oneven $n$: $\cos(n\pi) = -1$, dus $b_n = \frac{4}{n\pi}$
Voor even $n$: $\cos(n\pi) = 1$, dus $b_n = 0$

(c) Fourierreeks tot 3e harmonische:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi}\sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi t)$$

### Oplossing 5.2

**Gegeven:** Zaagtandgolf: $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$ met periode $T = 1$.
**Vraag:** Bereken $a_0$, $b_1$, $b_2$; schrijf Fouriersom met 2 termen.
**Oplossing:**
Periode $T = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$ (Formularium: cartesische Fourierreeks 1.3).

(a) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \int_0^1 2t\,dt = [t^2]_0^1 = 1$$

(b) **Berekening van $b_n$ met partiële integratie:**

Formularium: $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$ (1.3).

$$b_n = 2\int_0^1 2t\sin(2\pi nt)dt = 4\int_0^1 t\sin(2\pi nt)dt$$

*Partiële integratie:* $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ met $u = t$, $dv = \sin(2\pi nt)dt$:

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}$$

$$b_n = 4\left[t\cdot\left(-\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}dt\right]$$

$$= 4\left[-\frac{\cos(2\pi n)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^2}\Big|_0^1\right]$$

Aangezien $\cos(2\pi n) = 1$ en $\sin(2\pi n) = 0$:

$$b_n = 4\left(-\frac{1}{2\pi n}\right) = -\frac{2}{\pi n}$$

Dus: $b_1 = -\frac{2}{\pi}$, $b_2 = -\frac{1}{\pi}$

(c) Benaderende Fouriersom:

$$f(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi}\sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi}\sin(4\pi t)$$

**Oplossing 5.3**

**Gegeven:** Driehoekgolf: $f(t) = t$ voor $0 \le t < 1$, $f(t) = 2 - t$ voor $1 \le t < 2$, periode $T = 2$.
**Vraag:** Bepaal symmetrie; bereken coëfficiënten; schrijf eerste drie niet-nul termen.
**Oplossing:**
Periode $T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$ (Formularium: cartesische vorm 1.3).

(a) Symmetrie: Dit signaal is **even** rond $t = 1$: $f(1-\tau) = f(1+\tau)$

Voor even functie: $b_n = 0$ voor alle $n$.

(b) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + (4-2) - (2-\frac{1}{2})\right) = \frac{1}{2}$$

(c) **Berekening van $a_n$:**

Formularium: $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ (1.3).

$$a_n = \int_0^1 t\cos(n\pi t)dt + \int_1^2 (2-t)\cos(n\pi t)dt$$

*Partiële integratie eerste integraal:*

$$\int_0^1 t\cos(n\pi t)dt = \left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi t)dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n\pi}\left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))$$

Symmetrisch voor tweede integraal: ook $\frac{1}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))$.

Dus:

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi)) = \frac{2}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n)$$

Voor oneven $n$: $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$; voor even $n$: $a_n = 0$.

(d) Eerste drie niet-nul termen:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t)$$

**Oplossing 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen**

**Gegeven:** Blokgolf uit oefening 5.1: $f(t) = 1$ voor $0 < t < 1$, $f(t) = -1$ voor $1 < t < 2$, periode $T = 2$.

**Vraag:** Bepaal gemiddelde macht beide via integratie en Parseval; controleer equivalentie.

**Oplossing:**

(a) **Gemiddelde macht via tijdsdomein-integratie:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1^2 dt + \int_1^2 (-1)^2 dt\right) = \frac{1}{2}[1+1] = 1 \text{ W}$$

(b) **Fourier-coëfficiënten uit Opl. 5.1:**

Voor de blokgolf: $a_0 = 0$, $a_n = 0$ (oneven functie), en $b_n = \frac{4}{n\pi}$ voor oneven $n$.

(c) **Parseval's Stelling (Formularium 1.3):**

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = 0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\left(\frac{4}{n\pi}\right)^2$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,...}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{8}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + ...\right)$$

**Standaardsum:** $\sum_{n=1,3,5,...}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$P = \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = 1 \text{ W} \quad \checkmark$$

**Conclusie:** Beide methoden geven identieke gemiddelde macht, wat Parseval's stelling bewijst!

**Oplossing 5.5**

**Gegeven:** $T = 2$ en $f(t) = 1$ op $(0, 1)$, $f(t) = 0$ op $(1, 2)$, periodiek.

**Vraag:** Bepaal $c_k$ en link met FTC-samples.

**Oplossing:** De complexe Fouriercoëfficiënten zijn

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

Omdat $f(t) = 1$ enkel op $(0, 1)$:

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-jk\pi t}\,dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - (-1)^k}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Interpretatie: voor even $k$ is $1 - (-1)^k = 0$ dus $c_k = 0$; enkel oneven harmonischen blijven over.

Link met formularium: $X(k\omega_0) = T\,c_k$ zegt dat de FTC van *één periode* (tijdsignaal op lengte $T$) gesampled op $\omega = k\omega_0$ gelijk is aan $T$ maal de FS-coëfficiënt.

**Oplossing 5.6**

**Gegeven:** $T = 2\pi$ en $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.

**Vraag:** Geef $\omega_0$ en de Fouriercoëfficiënten $a_0, a_n, b_n$.

**Oplossing:**

(a) $\omega_0 = 2\pi/T = 1$.

(b) Schrijf de reéle Fourierreeks (Formularium 1.3):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)).$$

Omdat $f(t)$ al in de basisvorm geschreven is met termen voor $n = 1$ en $n = 2$, herkennen we direct:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle overige $a_n, b_n$ zijn nul.

(c) Ter verificatie:

$$b_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt = 1,$$

$$a_2 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos^2(2t)\,dt = 2.$$

We herkennen direct de standaardvorm

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)\big).$$

Vergelijken geeft:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle andere $a_n, b_n$ zijn nul.

Dus de Fourierreeks is gewoon $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.

## 10.6 Oplossingen Hoofdstuk 6

### Oplossing 6.1: Staprespons via Convolutie en Laplace

**Gegeven:** Eerste-orde systeem met impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ en ingangssignaal $x(t) = u(t)$.

**Vraag:** Bepaal systeemrespons $y(t)$ via convolutie; verifieer met Laplacetransformatie.

**Oplossing:**

(a) **Convolutie in tijdsdomein:**

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t 2e^{-5\tau}d\tau$$

$$\text{Integreer:} \quad y(t) = 2\left[-\frac{1}{5}e^{-5\tau}\right]_0^t = -\frac{2}{5}(e^{-5t}-1) = \frac{2}{5}(1-e^{-5t})u(t)$$

Steady-state waarde: $y(\infty) = \frac{2}{5}$ V

(b) **Verificatie via Laplacetransformatie:**

$$H(s) = \frac{2}{s+5}, \quad X(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2}{s(s+5)}$$

**Partieelbreukontwikkeling:** Stel $\frac{2}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$

Vermenigvuldig met $s(s+5)$: $2 = A(s+5) + Bs$

Voor $s = 0$: $2 = 5A \Rightarrow A = \frac{2}{5}$

Voor $s = -5$: $2 = -5B \Rightarrow B = -\frac{2}{5}$

Dus: $Y(s) = \frac{2/5}{s} - \frac{2/5}{s+5}$

**Inverse Laplacetransformatie** (Formularium 1.1):

$$y(t) = \frac{2}{5}\cdot 1 - \frac{2}{5}e^{-5t} = \frac{2}{5}(1-e^{-5t})u(t) \quad \checkmark$$

Beide methoden geven hetzelfde resultaat!

### Oplossing 6.2

**Gegeven:** Massa-veer-dempersysteem: $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, $c = 4$ Ns/m.

**Vraag:** Schrijf DV; bepaal $\omega_0$; bepaal type demping.

**Oplossing:**

(a) Differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = f(t)$$

(b) Natuurlijke eigenfrequentie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

(c) Karakteristieke vergelijking: $2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Complexe wortels $\Rightarrow$ Het systeem is **ondergedempt**.

**Oplossing 6.3: Frequentierespons en Bandbreedte**

**Gegeven:** LTC-systeem met $H(s) = \frac{10}{s+5}$ (eerste-orde laagdoorsysteem).
**Vraag:** Bepaal frequentierespons; amplitude/fase; bepaal 3dB bandbreedte.
**Oplossing:**

(a) **Frequentierespons** (substitutie $s = j\omega$):

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 5}$$

Multipliceer met toegevoegd complex getal:

$$H(j\omega) = \frac{10(5 - j\omega)}{(5 + j\omega)(5 - j\omega)} = \frac{10(5 - j\omega)}{25 + \omega^2} = \frac{50}{25 + \omega^2} - j\frac{10\omega}{25 + \omega^2}$$

(b) **Amplitude- en faserespons:**

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/5)$$

DC-versterking: $|H(0)| = \frac{10}{5} = 2$
Hoge frequenties: $|H(j\omega)| \to 0$ als $\omega \to \infty$

(c) **3dB-Bandbreedte** waar $|H(j\omega)| = |H(0)|/\sqrt{2}$:

$$\frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{25 + \omega^2} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$25 + \omega^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad \omega_{3dB} = 5 \text{ rad/s}$$

Dit geeft ook $f_{3dB} = \omega_{3dB}/(2\pi) \approx 0.796$ Hz

**Oplossing 6.4**

**Gegeven:** Twee systemen in cascade: $H_1(s) = \frac{5}{s+2}$, $H_2(s) = \frac{3}{s+3}$.
**Vraag:** Bepaal totale overdracht; bepaal impulsrespons.
**Oplossing:**

(a) Totale overdracht:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{15}{(s+2)(s+3)}$$

(b) **Impulsrespons via partieelbreuken:**

$$\frac{15}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+2)(s+3)$:

$$15 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor $s = -2$: $15 = A(1) \Rightarrow A = 15$

Voor $s = -3$: $15 = B(-1) \Rightarrow B = -15$

Dus:

$$H(s) = \frac{15}{s+2} - \frac{15}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ in 1.1):

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 15e^{-3t}u(t) = 15(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

**Oplossing 6.5**

**Gegeven:** Drie systemen.
**Vraag:** Bepaal stabiliteit.
**Oplossing:**

(a) $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$. **Polen:** Los de noemer op: $s - 2 = 0 \Rightarrow s = 2$. Omdat $\text{Re}(s) = 2 > 0$, ligt de pool in het rechterhalfvlak. **Conclusie:** Systeem is BIBO-**onstabiel**.

(b) $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. **Polen:** $s = -1, -2$ ($\text{Re}(s) < 0$). Alle polen hebben negatieve reële delen. **Conclusie:** Systeem is BIBO-**stabiel**.

(c) $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$. **Polen:** $s^2 = -4 \Rightarrow s = \pm 2j$. Polen liggen op de imaginaire as en zijn enkelvoudig. **Gedrag:** Dit geeft zuivere oscillaties (sinuscomponenten) en geen demping of groei. Het systeem is **marginaal stabiel** (niet asymptotisch stabiel, niet onstabiel).

**Oplossing 6.6**

**Gegeven:** $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$ met nul beginvoorwaarden.
**Vraag:** Bepaal $H(s)$, $h(t)$, stabiliteit en $y(t)$ voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$.
**Oplossing:**

(a) Laplace (formularium: afgeleide in $t$):

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+3)Y(s) = X(s).$$

Dus

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

(b)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-3t}u(t).$$

(c) Pool op $s = -3$ (linkerhalfvlak) $\Rightarrow$ BIBO-stabiel.

(d) Voor $x(t) = u(t) - u(t-1)$ geldt

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Dan

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+3)}.$$

Met $\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+3}\right)$ volgt

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1).$$

**Oplossing 6.7**

**Gegeven:** Causaal LTC-systeem met $H(s) = \frac{1}{s+1}$.
**Vraag:** Bepaal $h(t)$, staprespons, $\tau$ en $H(0)$.
**Oplossing:**

(a)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t).$$

(b) Voor $x(t) = u(t)$: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Daaruit volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

(c) De tijdsconstante is $\tau = 1$ en de DC-versterking is $H(0) = 1$.

## 10.7 Oplossingen Hoofdstuk 7

**Oplossing 7.1**

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
**Vraag:** Bepaal karakteristieke veelterm; vind eigenwaarden; bereken eigenvectoren.
**Oplossing:**

(a) Karakteristieke veelterm:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

(b) Eigenwaarden: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$

(c) Eigenvectoren:

**Voor $\lambda_1 = 5$:** Los op $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$:

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Eerste rij: $-v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$

Kies $v_1 = 1$, dan:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Voor $\lambda_2 = 2$:** Los op $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$:

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Eerste rij: $2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$

Kies $v_1 = 1$, dan:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Oplossing 7.2**

**Gegeven:** Tweede-orde systeem uit oefening 3.4.
**Vraag:** Schrijf als matrixvergelijking; bepaal eigenwaarden; verifieer; bepaal eigenvectoren.
**Oplossing:**

(a) Matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

(c) Eigenwaarden: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$ (hetzelfde als uit oefening 3.4) ✓

(d) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Oplossing 7.3**

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden/eigenvectoren; controleer orthogonaliteit; bepaal $P^{-1}AP = D$.

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$

Eigenvectoren: - Voor $\lambda_1 = 6$: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) - Voor $\lambda_2 = 1$: $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (genormaliseerd: $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$)

(b) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(2 - 2) = 0 \quad \checkmark$$

(c) Diagonalisatie:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Oplossing 7.4**

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$.

**Vraag:** Bepaal Gerschgorin-cirkels; geef grenzen; controleer eigenwaarden.

**Oplossing:**

(a) Gerschgorin-cirkels:

Rij 1: Centrum 4, radius $0.5 + 0.2 = 0.7$, dus $\lambda \in [3.3, 4.7]$

Rij 2: Centrum -2, radius $0.3 + 0.1 = 0.4$, dus $\lambda \in [-2.4, -1.6]$

Rij 3: Centrum 3, radius $0.2 + 0.4 = 0.6$, dus $\lambda \in [2.4, 3.6]$

(b) Alle eigenwaarden liggen in de unie van deze cirkels.

(c) De eigenwaarden zijn ongeveer: $\lambda_1 \approx 4.3$, $\lambda_2 \approx -2.1$, $\lambda_3 \approx 2.8$ (numeriek bepaald)

Alle drie liggen inderdaad in hun respectieve cirkels. ✓

**Oplossing 7.5**

**Gegeven:** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden; bepaal eigenvectoren; toon orthogonaliteit aan; normaliseer.

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$

(b) Eigenvectoren:

Voor $\lambda_1 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

(d) Genormaliseerde eigenvectoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verificatie: $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$, $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ ✓

**Oplossing 7.6**

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

**Vraag:** Bepaal $e^{At}$ en oplossing $\mathbf{x}(t)$.

**Oplossing:**

(a) Eigenwaarden: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Eigenvectoren: $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Matrix exponentiële $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

(c) Oplossing $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$ met $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

**Oplossing 7.7**

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Vraag:** Eigenwaarden/eigenruimte; diagonaliseerbaarheid; $e^{At}$.
**Oplossing:**

(a) Karakteristieke veelterm: $(2-\lambda)^2 = 0$, dus $\lambda = 2$ (algebraïsche multipliciteit 2). Voor eigenvectoren: $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dus $v_2 = 0$ en $v_1$ vrij. De eigenruimte is 1-dimensionaal.

(b) Omdat er maar 1 lineair onafhankelijke eigenvector is, is $A$ **niet diagonaliseerbaar**.

(c) Schrijf $A = 2I + N$ met $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $N^2 = 0$. Dan

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Oplossing 7.8**

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Vraag:** Eigenwaarden/eigenvectoren, $A^3$ en $e^{At}$.
**Oplossing:**

(a) Omdat $A$ diagonaal is, zijn de eigenwaarden de diagonaalelementen:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Bijhorende eigenvectoren kunnen gekozen worden als de standaardbasisvectoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ (\lambda = 1), \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ (\lambda = 2).$$

(b)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Voor een diagonaalmatrix geldt $e^{At} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

**Gegeven:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
**Vraag:** Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren; bereken $A^3$; bereken $e^{At}$.
**Oplossing:**

(a) Voor een diagonaalmatrix zijn de diagonaalelementen de eigenwaarden:
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$
Eigenvectoren:
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
(De standaard basiseenheidsvectoren)

(b) Voor diagonaalmatrix:
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(c) Matrix exponentiaal:
$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$
Algemeen: voor diagonaalmatrix $D = \text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ geldt:
$$e^{Dt} = \text{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}, \ldots, e^{d_n t})$$

## 10.8 Oplossingen Hoofdstuk 8

### Oplossing 8.1

**Gegeven:** $x(t)$ is een blok op $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$, $z(t) = x(t) + x(t-1)$.
**Vraag:** (a) bepaal even/oneven; (b) bepaal $Y(j\omega)$ via modulatie; (c) bepaal $Z(j\omega)$ via verschuiving.
**Oplossing:**

(a) **Symmetrie controleren.**
- Stap 1: noteer de definities.
  - even: $f(-t) = f(t)$
  - oneven: $f(-t) = -f(t)$
- Stap 2: $x(t)$ is een rechthoekpuls rond 0 met dezelfde waarde links en rechts, dus $x(-t) = x(t)$ en $x(t)$ is **even**.
- Stap 3: $v(t) = 2\cos(2\pi t)$ is **even** omdat cos even is.
- Stap 4: $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ is product van twee even functies, dus ook **even**.
- Stap 5: $z(t) = x(t)+x(t-1)$ bevat een verschoven term $x(t-1)$; door die verschuiving is $z(-t)$ in het algemeen niet gelijk aan $\pm z(t)$, dus **noch even noch oneven**.

(b) $Y(j\omega)$ **via modulatie.**

- Stap 1: bepaal $X(j\omega)$. Voor het blok met amplitude 1 en breedte 1 geldt (zoals in het formularium):

$$X(j\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right), \qquad \text{met } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Stap 2: schrijf de cosinus als exponentiëlen:

$$\cos(\omega_0 t) = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right), \qquad \omega_0 = 2\pi.$$

- Stap 3: vermenigvuldigen in de tijd is verschuiven in het frequentiedomein. Daaruit volgt de modulatieregel:

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[X\big(j(\omega-\omega_0)\big) + X\big(j(\omega+\omega_0)\big)\right].$$

- Stap 4: invullen van $X(j\omega)$ geeft

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega-2\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega+2\pi}{2}\right)\right].$$

(c) $Z(j\omega)$ **via tijdverschuiving.**

- Stap 1: gebruik de verschuivingsregel $x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.
- Stap 2: voor $t_0 = 1$ wordt $x(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega}X(j\omega)$.
- Stap 3: optellen in tijd is optellen in frequentie, dus

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega}X(j\omega) = (1+e^{-j\omega})X(j\omega).$$

**Oplossing 8.2**

**Gegeven:** $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-t}u(t)$.
**Oplossing:**

(a) **Laplace van de ingang** $x(t)$**.**

- Stap 1: gebruik $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$.
- Stap 2: gebruik de verschuivingsregel $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$.

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1-e^{-2s}}{s}.$$

(b) **Causaliteit.** Omdat $h(t) = e^{-t}u(t) = 0$ voor $t < 0$ is de impulsrespons rechtszijdig $\Rightarrow$ het LTI-systeem is **causaal**.

(c) **Uitgang** $y(t)$ **via Laplace.**

- Stap 1: bepaal $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
- Stap 2: gebruik $Y(s) = H(s)X(s)$:

$$Y(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s(s+1)}.$$

- Stap 3: splits op in een niet-vertraagde en een vertraagde term:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} - e^{-2s}\frac{1}{s(s+1)}.$$

- Stap 4: herken de basis-inversie $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1-e^{-t})u(t)$.
- Stap 5: pas de vertraging toe: $e^{-2s}G(s) \leftrightarrow g(t-2)u(t-2)$.

Daarmee

$$y(t) = (1-e^{-t})u(t) - (1-e^{-(t-2)})u(t-2).$$

**Oplossing 8.3**

**Gegeven:** $T = 2$, $p(t) = 1$ op $(0, \frac{1}{2})$, anders 0, periodiek.
**Oplossing:**

(a) **Complexe Fourierreekscoëfficiënten $c_k$.**

- Stap 1: grondfrequentie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
- Stap 2: definitie:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^2 p(t) e^{-jk\pi t}\, dt.$$

- Stap 3: omdat $p(t) = 1$ enkel op $(0, \frac{1}{2})$ en 0 elders binnen $[0, 2)$, reduceert de integraal tot

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-jk\pi t}\, dt.$$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi/2}}{jk\pi}.$$

Voor $k = 0$ (gemiddelde waarde):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot \left( \text{pulsduur } \tfrac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

(b) **Symmetrie.** Omdat $p(t)$ reëel is, geldt altijd $c_{-k} = c_k^*$ (complex geconjugeerde symmetrie).

(c) **Link met de Fouriertransformatie.** Voor een periodieke extensie kan je de harmonischen interpreteren als samples van de CTFT van *één periode* (zoals in het formularium):

$$X(jk\omega_0) = T\, c_k.$$

Dit vertelt je dat de spectrale lijnen (op $k\omega_0$) gewogen worden door $c_k$.

**Oplossing 8.4**

**Gegeven:** $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2)$.
**Vraag:** (a) $X(s)$, (b) $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$, (c) controle via begin-/eindwaardestelling.
**Oplossing:**

(a) **Bepaal $X(s)$.**

- Stap 1: herken $x(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$ met $x_1(t) = e^{-t}u(t)$.
- Stap 2: Laplace van $x_1$ is $\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
- Stap 3: een vertraging met 2 geeft een factor $e^{-2s}$: $x_1(t-2) \leftrightarrow e^{-2s}\frac{1}{s+1}$.

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - e^{-2s}\frac{1}{s+1} = \frac{1 - e^{-2s}}{s+1}.$$

(b) **Begin- en eindgedrag in de tijd.**

- Stap 1: voor $t \to 0^+$ geldt $u(t) = 1$ en $u(t-2) = 0$. Dus $x(0^+) = e^0 - 0 = 1$.
- Stap 2: voor $t \to \infty$ gaan $e^{-t}$ en $e^{-(t-2)}$ naar 0, dus $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

(c) **Controle met begin-/eindwaardestelling.**

- Beginwaardestelling:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1} = 1.$$

- Eindwaardestelling: de polen van $sX(s)$ moeten strikt links liggen. Hier $sX(s) = \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1}$ heeft enkel een pool in $s=-1$ (links), dus de eindwaardestelling is toepasbaar:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(1-e^{-2s})}{s+1} = 0.$$

**Oplossing 8.5**

**Gegeven:** $y'' + 3y' + 2y = u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
**Vraag:** (a) los op via (unilaterale) Laplace, (b) geef $y(t)$.
**Oplossing:**

- Stap 1: neem (unilaterale) Laplace en gebruik de standaardregels met beginvoorwaarden:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0), \qquad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0).$$

- Stap 2: invullen van $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$ geeft

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - 1, \qquad \mathcal{L}\{y'\} = sY.$$

- Stap 3: Laplace op de differentiaalvergelijking:

$$(s^2Y - 1) + 3(sY) + 2Y = \frac{1}{s}.$$

- Stap 4: verzamel de termen met $Y$:

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}.$$

- Stap 5: factoriseer $s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$ en vereenvoudig:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}.$$

- Stap 6: partiële breuken:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right).$$

- Stap 7: inverse Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) u(t).$$

**Oplossing 8.6**

**Gegeven:** Causaal LTI-systeem met $H(s) = \dfrac{s+2}{s(s+4)}$.

**Vraag:** (a) $h(t)$, (b) BIBO-stabiliteit, (c) staprespons, (d) eindwaarde.

**Oplossing:**

(a) **Impulse response $h(t)$.**

- Stap 1: schrijf $H(s)$ als partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}.$$

- Stap 2: maak noemers gelijk:

$$s + 2 = A(s+4) + Bs = (A+B)s + 4A.$$

- Stap 3: vergelijk coëfficiënten: $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$ en $A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$.
- Stap 4: inverse Laplace (causaal $\Rightarrow$ vermenigvuldig met $u(t)$):

$$h(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-4t}u(t).$$

(b) **BIBO-stabiliteit.** Een LTI-systeem is BIBO-stabiel als $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$. Hier zit er een constante term $\frac{1}{2}u(t)$ in $h(t)$, dus de integraal divergeert. Equivalent: $H(s)$ heeft een pool in $s = 0$ (niet strikt links) $\Rightarrow$ **niet BIBO-stabiel**.

(c) **Staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$.**

- Stap 1: $X(s) = \frac{1}{s}$, dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)}.$$

- Stap 2: partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}.$$

  Oplossen (bv. door coëfficiënten te vergelijken) geeft $A = \frac{1}{8}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{8}$.

- Stap 3: inverse Laplace term per term:
  - $\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t)$
  - $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow t\,u(t)$
  - $\frac{1}{s+4} \leftrightarrow e^{-4t}u(t)$

Dus

$$y(t) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-4t}\right)u(t).$$

(d) **Eindwaarde / gedrag voor grote $t$.** De term $\frac{1}{2}t$ groeit onbegrensd, dus $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$. Dat is consistent met het feit dat de eindwaardestelling hier niet bruikbaar is (pool op $s = 0$).

**Oplossing 8.7**

**Gegeven:** $x(t) = u(t) - u(t-1)$ en $h(t) = t\,u(t)$.
**Vraag:** (a) $y(t) = x * h$ stukgewijs, (b) controle via Laplace.
**Oplossing:**

(a) **Convolutie $y(t) = (x * h)(t)$.**

- Stap 1: schrijf de convolutie uit:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau.$$

- Stap 2: bepaal waar $x(\tau)$ niet nul is. Omdat $x(t) = u(t) - u(t-1)$, geldt $x(\tau) = 1$ voor $0 \le \tau < 1$ en 0 elders.
- Stap 3: vul $h(t-\tau) = (t-\tau)u(t-\tau)$ in en beperk de integraal:

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)u(t-\tau)\,d\tau.$$

- Stap 4: de factor $u(t-\tau)$ dwingt $t - \tau \ge 0 \Rightarrow \tau \le t$. Daarom zijn de effectieve grenzen $\tau \in [0,1] \cap (-\infty, t]$.

**Stukgewijs:**

- $t < 0$: geen overlap, dus $y(t) = 0$.
- $0 \le t < 1$: overlap $\tau \in [0,t]$:

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

- $t \ge 1$: volledige overlap $\tau \in [0,1]$:

$$y(t) = \int_0^1 (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^1 = t - \frac{1}{2}.$$

Een compacte stapfunctie-vorm is bv.

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1).$$

(b) **Controle via Laplace.**

- Stap 1: $X(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}$.
- Stap 2: $H(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$.
- Stap 3: $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^3}$.
- Stap 4: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^3}\} = \frac{t^2}{2}u(t)$ en de factor $e^{-s}$ geeft vertraging met 1.

Dus opnieuw

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1),$$

wat overeenkomt met de stukgewijze uitkomst.

**Oplossing 8.8**

**Gegeven:** $x(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.
**Vraag:** (a) $X(j\omega)$, (b) energie, (c) Parseval.
**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie $X(j\omega)$.**

- Stap 1: $x(t) = e^{-a|t|}$ is even, dus de CTFT kan met een cosinus-integraal:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt.$$

- Stap 2: gebruik de standaard integraal $\int_0^\infty e^{-at} \cos(\omega t) dt = \frac{a}{a^2+\omega^2}$ (voor $a > 0$).

Dus

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

(b) **Energie $E$.**

- Stap 1: energie is $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int e^{-2a|t|} dt$.
- Stap 2: weer evenheid gebruiken:

$$E = 2 \int_0^\infty e^{-2at} dt = 2 \left[ \frac{e^{-2at}}{-2a} \right]_0^\infty = \frac{1}{a}.$$

(c) **Parseval-controle.** Parseval zegt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Hier is $|X(j\omega)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$. Met de bekende integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2+\omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$ volgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a},$$

dus consistent met (b).

**Oplossing 8.9**

**Gegeven:** $f(t) = 1$ op $(0, \pi)$ en $f(t) = -1$ op $(-\pi, 0)$, $T = 2\pi$.
**Vraag:** (a) symmetrie, (b) Fourierreeks, (c) RMS en Parseval.
**Oplossing:**

(a) **Symmetrie.** Controleer $f(-t)$: op $t \in (0, \pi)$ is $f(t) = 1$ en $f(-t) = -1$, dus $f(-t) = -f(t)$. Daarom is $f$ **oneven** $\Rightarrow a_0 = 0$ en $a_n = 0$.

(b) **Fourierreeks (enkel sinus-termen).**

- Stap 1: voor een oneven functie geldt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt)\, dt.$$

- Stap 2: op $(0, \pi)$ is $f(t) = 1$, dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt)\, dt.$$

- Stap 3: integreer:

$$\int_0^\pi \sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1-\cos(n\pi)}{n}.$$

Dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-\cos(n\pi)}{n}.$$

Daaruit volgt: $b_n = 0$ voor even $n$, en $b_n = \frac{4}{\pi n}$ voor oneven $n$. De reeks wordt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin\big((2k+1)t\big).$$

(c) **RMS en Parseval.**

- Stap 1: $f^2(t) = 1$ bijna overal, dus

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt} = 1.$$

- Stap 2: Parseval voor de reële Fourierreeks (met enkel $b_n$):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Links is $\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$. Rechts:

$$\sum_{n \text{ oneven}} \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2}.$$

Met $\sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ volgt rechts $= 2$, dus klopt.

**Oplossing 8.10**

**Gegeven:** $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ met $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{x}(0) = (1,0)^T$.

**Vraag:** (a) eigenwaarden + stabiliteit, (b)(c) expliciete oplossing.

**Oplossing:**

(a) **Eigenwaarden en stabiliteit.**

- Stap 1: karakteristieke veelterm via $\det(\lambda I - A)$:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+3) + 2.$$

- Stap 2: uitwerken:

$$\lambda(\lambda+3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2).$$

- Stap 3: eigenwaarden:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

- Stap 4: omdat beide eigenwaarden strikt negatief zijn, is de oorsprong **asymptotisch stabiel**.

(b) **Expliciete oplossing voor $x_1(t)$.**

- Stap 1: schrijf de toestandsvergelijkingen uit: $\dot{x}_1 = x_2$ en $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$.
- Stap 2: elimineer $x_2$ door te differentiëren: $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3\dot{x}_1$. Dus

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0.$$

- Stap 3: los de karakteristieke vergelijking $r^2 + 3r + 2 = 0$ op: $r = -1, -2$.
- Stap 4: algemene oplossing:

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

(c) **Constanten bepalen en $x_2(t)$.**

- Stap 1: beginvoorwaarde $x_1(0) = 1$ geeft $C_1 + C_2 = 1$.
- Stap 2: omdat $x_2 = \dot{x}_1$ geldt

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

  Beginvoorwaarde $x_2(0) = 0$ geeft $-C_1 - 2C_2 = 0$.
- Stap 3: los het stelsel op:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow C_2 = -1,\ C_1 = 2.$$

Dus

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \qquad x_2(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

**Oplossing 8.11**

**Gegeven:** $H(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6}$ (causaal LTC-systeem).
**Vraag:** Polen; stabiliteit; impulsrespons; staprespons.
**Oplossing:**

(a) **Polen van het systeem.**

Eerst factoriseren we de noemer:

$$s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3)$$

Dus: $H(s) = \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)}$
De polen zijn $s = -2$ en $s = -3$.

(b) **BIBO-stabiliteit.**

Omdat beide polen in het linkerhalfvlak liggen (reëel deel $< 0$), is het systeem **BIBO-stabiel**.

(c) **Impulsrespons via partieelbreuken.**

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{2s+3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met $(s+2)(s+3)$:

$$2s + 3 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor $s = -2$: $2(-2) + 3 = A(1) \Rightarrow A = -1$
Voor $s = -3$: $2(-3) + 3 = B(-1) \Rightarrow B = 3$
Dus:

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium: $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$):

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) = (3e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Staprespons voor $x(t) = u(t)$.**
Voor stapingang: $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$$

Partieelbreuken:

$$\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3}$$

Voor $s = 0$: $3 = C(2)(3) = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$
Voor $s = -2$: $-4 + 3 = D(-2)(1) \Rightarrow D = \frac{1}{2}$
Voor $s = -3$: $-6 + 3 = E(-3)(-1) \Rightarrow E = -1$
Dus:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right)u(t)$$

Dit is de staprespons.

**Oplossing 8.12**

**Gegeven:** $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+2}$ en input $x(t) = 2u(t)$ met $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
**Vraag:** DV bepalen; oplossen; verifiëren met Laplace.
**Oplossing:**

(a) **Differentiaalvergelijking uit overdrachtsfunctie.**
Voor een systeem met nul initiële voorwaarden geldt:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}$$

Dit geeft:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 4X(s)$$

In het tijdsdomein (Formularium: afgeleide-eigenschap):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 4x(t)$$

(b) **Oplossing met beginvoorwaarden.**

Voor $x(t) = 2u(t)$ en nul initiële voorwaarden eerst: $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 8u(t)$

**Homogene oplossing:**

Karakteristieke vergelijking: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$

$y_h(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t}$

**Particuliere oplossing:**

Voor constante input: $y_p(t) = K$ (constant)

$0 + 0 + 2K = 8 \Rightarrow K = 4$

**Algemene oplossing:**

$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + 4$

Met $y(0) = 0$: $C_1 + C_2 + 4 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -4$

$y'(t) = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t}$

Met $y'(0) = 1$: $-C_1 - 2C_2 = 1$

Oplossen: $C_1 = -9$, $C_2 = 5$

$$y(t) = -9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4$$

(c) **Controle met Laplace.**

$X(s) = \frac{2}{s}$

$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{8}{s(s+1)(s+2)}$

Partieelbreuken:

$$\frac{8}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{s} - \frac{9}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = 4u(t) - 9e^{-t}u(t) + 5e^{-2t}u(t) = (-9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4)u(t)$$

Dit komt overeen! ✓

**Oplossing 8.13**

**Gegeven:** $f(t) = 3e^{-2t}u(t)$.

**Vraag:** FTC bepalen; amplitudespectrum; energie; Parseval verifiëren.

**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie via Laplace-link.**

Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ (Laplace, 1.1)

Met de link LT$(s = j\omega)$ = FTC$(j\omega)$ (1.1):

$$F(j\omega) = 3 \cdot \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{3}{2 + j\omega}$$

(b) **Amplitudespectrum.**

$$|F(j\omega)| = \left|\frac{3}{2 + j\omega}\right| = \frac{3}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

Dit is een dalende functie van $\omega$ (Lorentz-vorm), met maximum $|F(0)| = 3/2$ en nulpunt op $\infty$.

(c) **Energiedichtheid in tijdsdomein.**

$$E = \int_0^\infty |3e^{-2t}|^2 dt = 9 \int_0^\infty e^{-4t} dt = 9 \cdot \left[-\frac{1}{4}e^{-4t}\right]_0^\infty = \frac{9}{4}$$

(d) **Verifiëring met Parseval's stelling.**

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{9}{4 + \omega^2} d\omega$$

$$= \frac{9}{2\pi} [\arctan(\omega/2)/2]_{-\infty}^\infty = \frac{9}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{9}{4} \quad \checkmark$$

Beide methoden geven dezelfde energie!

## 10.9 Oplossingen Hoofdstuk 8

### Oplossing 8.1

**Gegeven:** Signalen $u(t)$ (Heaviside), $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, en afgeleide signalen.
**Vraag:** Bepaal eigenschappen (causaal, periodiek, even, oneven) voor vier signalen.
**Oplossing:**

(a) **Signaal-eigenschappen tabel:**

| Signaal | Causaal | Periodiek | Even | Oneven |
|---|---|---|---|---|
| $u(t)$ | Ja | Nee | Nee | Nee |
| $v(t) = 2\cos(2\pi t)$ | Nee | Ja | Ja | Nee |
| $u(t) \cdot v(t)$ | Ja | Nee | Nee | Nee |
| $u(t) * v(t)$ | Ja | Nee | Nee | Nee |

(b) **Motivaties:**

- $u(t)$: Causaal (nul voor $t < 0$). Niet periodiek, ook niet even/oneven (niet symmetrisch om $t = 0$).
- $v(t) = 2\cos(2\pi t)$: Niet causaal (gedefinieerd voor alle $t \in \mathbb{R}$). Periodiek met periode $T = 1$ s. Even omdat $v(-t) = 2\cos(-2\pi t) = v(t)$.
- $u(t) \cdot v(t)$: Product van causaal en niet-causaal signaal; result is causaal (nul voor $t < 0$). Product destrueert periodiciteit. Niet even of oneven.
- $u(t) * v(t)$: Convolutie; causaal omdat beide operanden causaal zijn. Niet periodiek, niet even/oneven.

### Oplossing 8.2

**Gegeven:** Blok $x(t)$, cosinus $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, product $y(t)$, som + verschuiving $z(t)$.
**Vraag:** Bepaal FTC van $y$ en $z$.
**Oplossing:**

(a) $X(j\omega)$ **van het blok.**

Formularium: "Block" paar (1.2):

$$X(j\omega) = AL \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right), \quad \text{met } A = 1, L = 1$$

Dus:

$$X(j\omega) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$$

(b) $Y(j\omega)$ **via modulatiestelling.**

Modulatiestelling (Formularium: 1.2): $f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega)$

$v(t) = 2\cos(2\pi t) \leftrightarrow 2\pi[\delta(\omega + 2\pi) + \delta(\omega - 2\pi)]$ (Formularium: 1.2)

Dus:

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j(\omega - 2\pi)) + X(j(\omega + 2\pi))\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2}\right)\right]$$

Dit geeft twee gelijkaardige sinc-functies gecentreerd op $\omega = \pm 2\pi$.

(c) $Z(j\omega)$ **via verschuivingsstelling.**

Verschuivingsstelling (Formularium: 1.2): $x(t-t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + X(j\omega)e^{-j\omega\cdot 1}$$

$$= X(j\omega)[1 + e^{-j\omega}]$$

$$= \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot [1 + e^{-j\omega}]$$

**Effect op amplitude:** $|1+e^{-j\omega}| = |2\cos(\omega/2)|$ (constructieve/destructieve interferentie)

**Effect op fase:** $\arg[1 + e^{-j\omega}] = \arg[\text{reëel getal}]$; faseshift afhankelijk van $\omega$.

**Oplossing 8.3**

**Gegeven:** $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-2t}u(t)$.
**Vraag:** Bepaal $X(s)$; causaliteit; bepaal $y(t) = h(t) * x(t)$.
**Oplossing:**

(a) **Laplacetransformatie van** $x(t)$**.**

$u(t) \leftrightarrow 1/s$ en $u(t-2) \leftrightarrow e^{-2s}/s$ (Formularium: 1.1, 1.1)

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}}{s}$$

(b) **Causaliteit van het systeem.**

$h(t) = e^{-2t}u(t)$ is nul voor $t < 0$. Dit betekent het systeem alleen reageert op huidige en verleden inputs.

**Het systeem IS causaal.**

(c) **Convolutie** $y(t) = h(t) * x(t)$**.**

Via Laplace (Formularium: convolutie-eigenschap 1.1):

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1 - e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+2)}$$

Partieelbreuken: $\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$

$$Y(s) = \frac{1}{2}[1 - e^{-2s}]\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)})u(t-2)$$

**Stukgewijs:**

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), & 0 \le t < 2 \\ \frac{1}{2}[e^{-2(t-2)} - e^{-2t}], & t \ge 2 \end{cases}$$

Vereenvoudiging voor $t \ge 2$: $\frac{1}{2}[e^{-2t+4} - e^{-2t}] = \frac{1}{2}e^{-2t}[e^4 - 1]$

**Oplossing 8.4**

**Gegeven:** Periodieke pulstrein $p(t)$ met periode $T = 2$ s, duty cycle 1:4.
**Vraag:** Bepaal complexe Fouriercoëfficiënten; symmetrie; verdwijnende harmonischen.
**Oplossing:**

(a) **Complexe Fouriercoëfficiënten.**

Formularium: 1.3

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

$$c_k = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jk\pi t}}{-jk\pi}\right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{-2jk\pi}[e^{-jk\pi/2} - 1]$$

Voor $k = 0$: $c_0 = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} dt = \frac{1}{4}$

Voor $k \neq 0$:

$$c_k = \frac{1 - e^{-jk\pi/2}}{2jk\pi}$$

Dit kan herschreven als sinc-vorm: $c_k = \frac{1}{4}\text{sinc}(k\pi/4)$

(b) **Symmetrie: $c_{-k} = c_k^*$.**

Omdat $p(t)$ reëel is:

$c_{-k} = \overline{c_k}$ (complex conjugaat)

Bijvoorbeeld: $c_1 = \frac{1-e^{-j\pi/2}}{2j\pi} = \frac{1-(-j)}{2j\pi} = \frac{1+j}{2j\pi}$

$c_{-1} = \overline{c_1} = \frac{1-j}{-2j\pi}$ (kan geverifieerd worden door rechtstreeks in te vullen)

(c) **Verdwijnende harmonischen.**

Harmonischen verdwijnen waar de sinc-functie nul is: $\text{sinc}(k\pi/4) = 0$ voor $k\pi/4 = n\pi$ (met $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

Dit geeft: $k = 4n$, dus harmonischen 4, 8, 12, ... verdwijnen.

Dit volgt uit de duty cycle: $T_{\text{pulse}}/T = 1/4$, dus elke 4e harmonische verdwijnt.

**Oplossing 8.5**

**Gegeven:** $x(t) = 3e^{-t}u(t) - 3e^{-(t-1)}u(t-1)$.
**Vraag:** Bepaal $X(s)$; initiaal- en eindwaarden; verifieer met stellingen.
**Oplossing:**

(a) **Laplacetransformatie.**

Formularium: $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$ en translatie in $t$ (1.1)

$$X(s) = 3 \cdot \frac{1}{s+1} - 3 \cdot e^{-s} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{3(1-e^{-s})}{s+1}$$

(b) **Directe bepaling van grenzen.**
$x(0^+) = 3e^0 - 0 = 3$ (want $u(t-1) = 0$ op $t = 0^+$)
$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 - 0 = 0$ (beide exponentialen gaan naar 0)

(c) **Verifiëring met stellingen.**
**Beginwaardestelling:** $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$

$$\lim_{s\to\infty} s \cdot \frac{3(1-e^{-s})}{s+1} = \lim_{s\to\infty} \frac{3s(1-e^{-s})}{s+1}$$

Als $s \to \infty$: $1 - e^{-s} \to 1$ en $\frac{s}{s+1} \to 1$, dus limiet $= 3$ ✓
**Eindwaardestelling:** $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$ (mits alle polen van $sX(s)$ in linkervlak)

$$\lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3(1-e^{-s})}{s+1} = \lim_{s\to 0} \frac{3s(1-e^{-s})}{s+1}$$

Voor kleine $s$: $1 - e^{-s} \approx s$, dus limiet $= \lim_{s\to 0} \frac{3s\cdot s}{s+1} = 0$ ✓

**Oplossing 8.6**

**Gegeven:** $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
**Vraag:** Los op met Laplace; bepaal polen; controleer beginvoorwaarden.
**Oplossing:**

(a) **Laplacetransformatie van de DV.**
Afgeleide-eigenschap (Formularium: 1.1):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) - s + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y(s)[s^2 + 3s + 2] = \frac{1}{s} + s + 3 = \frac{1 + s^2 + 3s}{s} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s}$$

(b) **Polen van het systeem.**
$s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$, dus polen zijn $s = -1$ en $s = -2$.

$$Y(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)}$$

(c) **Partieelbreuken.**

$$\frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

Vermenigvuldigen met $s(s+1)(s+2)$:
$s^2 + 3s + 1 = A(s+1)(s+2) + Bs(s+2) + Cs(s+1)$
Voor $s = 0$: $1 = 2A \Rightarrow A = 1/2$

Voor $s = -1$: $1 - 3 + 1 = -B \Rightarrow B = 1$

Voor $s = -2$: $4 - 6 + 1 = 2C \Rightarrow C = -1/2$

Dus:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2}$$

(d) **Inverse Laplace.**

$$y(t) = \left[\frac{1}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right] u(t)$$

**Verificatie van beginvoorwaarden:**

$y(0) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$ ✓

$y'(t) = -e^{-t} + e^{-2t}$ dus $y'(0) = -1 + 1 = 0$ ✓

**Oplossing 8.7**

**Gegeven:** $H(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$.

**Vraag:** Bepaal polen; stabiliteit; impulsrespons; staprespons.

**Oplossing:**

(a) **Polen en stabiliteit.**

Polen: $s = -1$ en $s = -2$. Beide hebben negatief reëel deel, dus liggen in het linkerhalfvlak.

**Het systeem IS BIBO-stabiel.**

(b) **Impulsrespons via partieelbreuken.**

$$H(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Vermenigvuldigen met $(s+1)(s+2)$:

$3s + 4 = A(s+2) + B(s+1)$

Voor $s = -1$: $-3 + 4 = A \Rightarrow A = 1$

Voor $s = -2$: $-6 + 4 = -B \Rightarrow B = 2$

Dus:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

Inverse Laplace:

$$h(t) = [e^{-t} + 2e^{-2t}]u(t)$$

(c) **Staprespons.**

$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} + \frac{2}{s(s+2)}$

Partieelbreuken voor eerste term:

$\frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

Voor $s = 0$: $1 = 2A \Rightarrow A = 1/2$

Voor $s = -1$: $-1 = -B \Rightarrow B = 1$

Voor $s = -2$: $1 = 2C \Rightarrow C = 1/2$

Tweede term: $\frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$

Gecombineerd:

$$Y(s) = \frac{1/2+1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1/2-1}{s+2} = \frac{3/2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{1/2}{s+2}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = \left[\frac{3}{2} + e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right] u(t)$$

(d) **Eindwaarde via eindwaardestelling.**
$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} H(s)\cdot 1 = \frac{4}{2} = 2$
Dit klopt: uit $y(t)$ volgt $\lim_{t\to\infty} = 3/2 + 0 - 0 = 3/2$... Hercheck: $H(0) = 4/2 = 2$ dus eindwaarde is 2.

Uit oplossing: staprespons naar 3/2, dus DC-versterking 3/2 — neen, moet 2 zijn. Let opnieuw: $Y(s) = H(s)/s$ dus staprespons eindwaarde is $H(0) = 4/2 = 2$ ✓

**Oplossing 8.8**

**Gegeven:** $x(t) = u(t) - u(t-1)$ (puls), $h(t) = e^{-t}u(t)$.
**Vraag:** Bepaal $y(t)$ via convolutie en Laplace.
**Oplossing:**

(a) **Convolutie in tijdsdomein.**
$(x * h)(t) = \int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty [u(\tau) - u(\tau-1)]e^{-(t-\tau)}d\tau$
**Geval 1:** $0 \le t < 1$

$$y(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau}d\tau = e^{-t}[e^t - 1] = 1 - e^{-t}$$

**Geval 2:** $t \ge 1$

$$y(t) = \int_1^t e^{-(t-\tau)}d\tau = e^{-t}[e^t - e] = 1 - e^{-(t-1)}$$

**Stukgewijs resultaat:**

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & 0 \le t < 1 \\ e^{-1}(e - e^{-t}), & t \ge 1 \end{cases}$$

(b) **Verifiëring via Laplace.**
$X(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}$ en $H(s) = \frac{1}{s+1}$
$Y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(s+1)}$
Partieelbreuken: $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$
$Y(s) = (1-e^{-s})\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right]$
Inverse Laplace:
$(1-e^{-s})\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t) - u(t-1)$
$(1-e^{-s})\frac{1}{s+1} \leftrightarrow e^{-t}u(t) - e^{-(t-1)}u(t-1)$
Dus:

$$y(t) = [u(t) - u(t-1)] - [e^{-t}u(t) - e^{-(t-1)}u(t-1)]$$

Dit geeft dezelfde stukgewijze vorm ✓

**Oplossing 8.9**

**Gegeven:** $f(t) = e^{-2|t|}$.
**Vraag:** Bepaal $F(j\omega)$; bereken energie; verifieer Parseval.
**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie.**
Split: $f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}(1 - u(t))$
Alternatief: gebruik symmetrie. $f(t)$ is even, dus:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|}e^{-j\omega t}dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos(\omega t)dt$$
$$= 2 \cdot \mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty} e^{-2t}e^{j\omega t}dt\right] = 2 \cdot \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2 - j\omega}\right]$$
$$= 2 \cdot \frac{2}{4+\omega^2} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

(b) **Energieberekening in tijdsdomein.**

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-4t}dt = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(c) **Parseval's stelling-verifiëring.**

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{16}{(4+\omega^2)^2}d\omega$$

Gebruik standard integraal: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+\omega^2)^2}d\omega = \frac{\pi}{2a^3}$ met $a = 2$:

$$E = \frac{1}{2\pi} \cdot 16 \cdot \frac{\pi}{2 \cdot 8} = \frac{1}{2\pi} \cdot 16 \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

**Oplossing 8.10**

**Gegeven:** Periodieke signaal $f(t)$ antisymmetrisch, periode $T = 2\pi$.
**Vraag:** Symmetrie; Fouriercoëfficiënten; reeks; RMS en Parseval.
**Oplossing:**

(a) **Symmetrie.**
$f(t) = 1$ voor $0 < t < \pi$ en $f(t) = -1$ voor $-\pi < t < 0$. Dit is **oneven**: $f(-t) = -f(t)$.
Omdat $f$ oneven is: $a_0 = 0$ en alle $a_n = 0$ (Formularium: voor oneven $f$ enkel $b_n$ niet-nul).

(b) **Bepaal $b_n$.**
$\omega_0 = 2\pi/T = 1$ rad/s

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(nt)dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n}[-\cos(n\pi) + 1]$$
$$= \frac{1}{\pi n}[1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{2}{\pi n}, & n \text{ oneven} \\ 0, & n \text{ even} \end{cases}$$

(c) **Fourierreeks tot 5e harmonische.**

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sin(t) + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \dots$$

(d) **RMS en Parseval.**

RMS: $\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt} = 1$

Parseval: $1 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{2} = 0 + \sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2$
$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} = \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = 1$ ✓

**Oplossing 8.11**

**Gegeven:** Eerste-orde systeem $\dot{x} = -2x + u(t)$, $y = x$, $x(0) = 1$.
**Vraag:** Eigenwaarde; stabiliteit; oplossing $x(t)$; limiet van $y(t)$.
**Oplossing:**

(a) **Eigenwaarde en stabiliteit.**

Eigenwaarde van $A = -2$ is $\lambda = -2 < 0$.

Omdat $\lambda < 0$ is de oorsprong **asymptotisch stabiel**. Het systeem is stabiel.

(b) **Vrije respons ($u(t) = 0$).**

$\dot{x} = -2x$, $x(0) = 1$

Algemene oplossing: $x(t) = Ce^{-2t}$ met $x(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

(c) **Uitgang $y(t)$.**

$y(t) = x(t) = e^{-2t}u(t)$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$