,
ti-
tle=1,
sharp
cor-
ners,
boxrule=0.5pt

Formularium
Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het “Signals and Systems” formulariu
Laplace transform (LT)
*1.1 Definitie en eigenschappen

Initial value theorem:

Final value theorem:

Link met FTC:

*1.2 Useful Laplace pairs

Fourier transform (FTC)
*2.1 Basic formulae

*2.2 Useful Fourier pairs We gebruiken $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)x$.

Fourier series (FS)
*3.1 Cartesian form Voor periode T met $\omega_0 = 2\pi T$:

*3.2 Complex form

symmetry (reëel f): $c_{-k} = c_k^*$.
Spectrum:

*3.3 Links between cartesian and complex form

Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking
Oefening 1.1: Lineaire Systemen
Gegeven een systeem met operator $\mathcal{T}$ gedefinieerd als $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.
Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.
Oefening 1.2: RC-Circuit
Een RC-circuit heeft $R = 1000\ \Omega$ en $C = 10\ \mu$F. De ingangsspanning is een stapfunctie $v_{in}(t) = 5u(t)$ V.
Vraag:
[label=()]Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning $v_{uit}(t)$. Bereken de tijdsconstante τ van het cir
Oefening 1.3: Radioactief Verval
Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd.
Vraag: Hoeveel milligram blijft over om 14:00 uur?
Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit
Gegeven twee systemen:
Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Vraag:
[label=()]Test beide systemen op homogeniteit (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$. Test beide systemen op additiviteit: $\mathcal{T}$
Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning
Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?
[label=()]$y(t) = x(t-2)$ $y(t) = tx(t)$ $y(t) = |x(t)|$ $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$
Vraag: Motiveer je antwoorden.
Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit
Gegeven het systeem $\mathcal{T}$ met

Vraag:
[label=()]Is het systeem lineair en tijdinvariant? Is het systeem causaal? Is het systeem invertibel? Motiveer.
Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)
Beschouw de twee systemen:

Vraag:
[label=()]Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is. Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdinvarian
Oefening 1.8: Analyse van een Kwadratisch Modulatiesysteem (Uitgebreid)
Beschouw een systeem S waarbij de relatie tussen ingang en uitgang wordt gegeven door:

Vraag: Onderzoek de lineariteit en tijdsinvariantie van dit systeem.
[Gedetailleerde Oplossing]
1. Toetsing van Lineariteit
We onderzoeken de respons op een geschaalde som van twee invoersignalen: $x_{in}(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$.
De verwachte output voor een lineair systeem zou zijn $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, waarbij: $y_1(t) = x_1(t)\cos(2\pi t) + x_1^2(t)$
$y_2(t) = x_2(t)\cos(2\pi t) + x_2^2(t)$
De werkelijke output van het systeem op $x_{in}(t)$ is: $y_{out}(t) = [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]\cos(2\pi t) + [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]^2$
$= \alpha x_1(t)\cos(2\pi t) + \beta x_2(t)\cos(2\pi t)$
$+ \alpha^2 x_1^2(t) + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t) + \beta^2 x_2^2(t)$
Vergelijken we dit met de lineaire combinatie $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$:

accentkleurConclusie: Het systeem is **niet-lineair**. De term $x^2(t)$ zorgt voor kruistermen ($2\alpha\beta x_1 x_2$) en kwadrat

2. Toetsing van Tijdsinvariantie
Stel een vertraagde input $x_2(t) = x_1(t-\tau)$. De respons van het systeem op deze vertraagde input is:

Nu kijken we naar de vertraagde versie van de oorspronkelijke output $y_1(t)$:

Vergelijking van $y_2(t)$ en $y_1(t-\tau)$ toont een discrepantie in de cosinus-term. In $y_2(t)$ is de cosinus afhankelijk van c
accentkleurConclusie: Het systeem is **tijdsvariant**. De aanwezigheid van de expliciete tijdsfunctie $\cos(2\pi t)$ als c
Oefening 1.9: Causaliteit van een Integrator met Toekomstblik (Uitgebreid)
Beschouw het systeem gedefinieerd door:

Vraag: Is dit systeem causaal? Is het lineair?
[Oplossing]
1. Causaliteit
Causaliteit vereist dat de output op tijdstip t niet afhangt van inputs op tijdstippen $> t$.
De integraal loopt van $\tau = t-1$ tot $\tau = t+1$. Om de waarde van $y(t)$ te berekenen, hebben we de waarden van $x($
Dit interval bevat tijdstippen die groter zijn dan t (namelijk tot $t+1$). Het systeem moet dus "weten" wat de waar
accentkleurConclusie: Het systeem is **niet-causaal**. Dergelijke systemen zijn niet realiseerbaar in real-time toep

2. Lineariteit
Integraaloperatoren zijn inherent lineair: $y(t) = \int_{t-1}^{t+1}(ax_1(\tau) + bx_2(\tau))\,d\tau$
$= a\int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau)\,d\tau + b\int_{t-1}^{t+1} x_2(\tau)\,d\tau$
$= ay_1(t) + by_2(t)$

Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen
Oefening 2.1: Exponentiële Functies
Gegeven de signalen $x_1(t) = e^{0.2t}$ en $x_2(t) = e^{-0.5t}$.
Vraag:
[label=()]Bepaal welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont. Bereken de waarde van elk signaa
Oefening 2.2: Sinus en Cosinus
Een sinusgolf is gegeven door $x(t) = 3\sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$.
Vraag:
[label=()]Bepaal de amplitude, hoekfrequentie ω, frequentie f, en fasehoek. Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.
Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie
Gegeven $z(t) = e^{j2\pi t}$.
Vraag:
[label=()]Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formule van Euler. Bepaal de waarde
Oefening 2.4: Convolutie
Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

Zie Formularium: convolutie in tijd $\leftrightarrow$ product in frequentie in .
Vraag: Bepaal $(f * g)(t)$ en schets het resultaat.
Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling
Gegeven het signaal $x(t) = e^{-t}u(t)$.

Vraag:
[label=()]Bepaal $y_1(t) = x(t-2)$ (tijdsverschuiving). Bepaal $y_2(t) = x(2t)$ (tijdscompressie). Bepaal $y_3(t) = 2x(t)$ (ampl
Oefening 2.6: Signaalenergie
Bepaal de energie van de volgende signalen:
Vraag:
[label=()]$x(t) = e^{-t}u(t)$ $x(t) = 2\sin(t)u(t)$ over $0 \leq t \leq \pi$ $x(t) = rect(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$
Oefening 2.7: Driehoeksignaal met Stapfuncties
Definieer het signaal

Vraag:
[label=()]Schrijf $x(t)$ expliciet als stukgewijze functie. Bereken de energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$. Bepaal en schets $x(t-1)$.
Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)
Neem

Vraag:
[label=()]Schets $x(t)$. Schrijf $x(t-1)$ en $x(t+1)$ in termen van stapfuncties en schets ze. Schrijf $x(2t)$ en $x(-t)$ in term
Oefening 2.9: Analytische Convolutie van Exponentiële Signalen (Uitgebreid)
Gegeven twee causale signalen: x(t) = e$^{-3t}u(t)$
$h(t) = e^{-2t}u(t)$
Vraag: Bepaal de convolutie $y(t) = (x * h)(t)$.
[Oplossing]
De definitie van convolutie is:

Invullen van de functies:

Analyse van de grenzen:
De stapfuncties leggen beperkingen op aan het integratie-interval:
$u(\tau)$ is enkel niet-nul als $\tau \geq 0$
$u(t-\tau)$ is enkel niet-nul als $t - \tau \geq 0$, oftewel $\tau \leq t$
Hieruit volgt dat voor $t \geq 0$ de integraal wordt:

We kunnen e^{-2t} buiten de integraal halen:

Nu lossen we de elementaire integraal op:

Dus:

Oefening 2.10: Grafische Convolutie van een Blok en een Zaagtand (Uitgebreid)
Beschouw de volgende signalen:
$x(t)$: Een rechthoekige puls met amplitude 1 tussen $t = 0$ en $t = 2$. ($x(t) = u(t) - u(t-2)$)

Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie
Oefening 3.1: Standaard Laplace-paren
Bron: Formularium standaard transformaties.
Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:
Vraag:
[label=()]$f(t) = 5u(t)$ $f(t) = e^{-3t}u(t)$ $f(t) = t \cdot u(t)$ $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$ $f(t) = e^{-2t}\sin(3t)u(t)$
Zie Formularium: definitie en paren .
Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie met Partieelbreuken
Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:
Vraag:
[label=()]$F(s) = 3s + 2 + 5s^2 + 4$ $G(s) = 10s(s+1)(s+2)$ (tip: partieelbreuken) $H(s) = s + 3(s+1)^2$ (tip: dubbele po
Zie Formularium: paren .
Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem
Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:
Vraag:
[label=()]$dydt + 4y = 8u(t)$, $y(0) = 2$ $dydt + 3y = 6e^{-2t}u(t)$, $y(0) = 0$ $2dydt + y = u(t) - u(t-1)$, $y(0) = 1$
Zie Formularium: afgeleide-eigenschap .
Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem: Karakteristische Wortels
Vraag: Voor elk systeem: bepaal karakteristieke wortels, onderdamping-status, en los op voor $y(t)$.
[label=()]$d^2ydt^2 + 4dydt + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ $d^2ydt^2 + 4dydt + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (kritiek gedempt) d^2
Bonus: Schets $y(t)$ voor alle drie gevallen op dezelfde grafiek en bespreek het gedrag.
Oefening 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving (Tijddomein)
Vraag:
[label=()]Gegeven $F(s) = 2s^2 + 4$, bepaal $f(t)$ en vervolgens $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$. Bepaal de Laplacetransformatie var
Zie Formularium: tijdverschuiving in t .
Oefening 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd
Bepaal via partieelbreuken en inverse Laplace de volgende:
Vraag:
[label=()]$F(s) = 10(s+1)(s+2)(s+3)$ (drie verschillende polen) $G(s) = 5s + 7(s+1)^2(s+2)$ (dubbele pool) $H(s) = s$
Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling
Gegeven: $F(s) = 3s + 5s^2 + 4s + 3$
Vraag:
[label=()]Bepaal $f(0^+)$ met de beginwaardestelling. Bepaal $\lim_{t\to\infty} f(t)$ met de eindwaardestelling. Bepaal $f(t)$ explicie
Zie Formularium: begin- en eindwaardestelling .
Bonus: Voor welke $F(s)$ kan de eindwaardestelling NIET gebruikt worden?
Oefening 3.8: Convolutie via Laplace
Gegeven: $f(t) = u(t) - u(t-1)$ (puls), $g(t) = e^{-2t}u(t)$ (exponentieel verval)
Vraag:
[label=()]Bepaal $F(s)$ en $G(s)$. Bepaal $Y(s) = F(s) \cdot G(s)$ en vervolgens $y(t) = (f * g)(t)$. Geef $y(t)$ stukgewijs en schets
Zie Formularium: convolutie-eigenschap .
Oefening 3.9: Samenvattingsoefening Laplace
Vraag:
[label=()]Bepaal $\mathcal{L}\{u(t)\}$ en $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}$. Bepaal $\mathcal{L}\{t\,u(t)\}$ en $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}u(t)\}$. Bepaal inverse Laplace van $F(s) = 1s + 3$
Oefening 3.10: Staprespons van Eerste-Orde Systeem
Gegeven: Systeem $H(s) = K\tau s + 1$ met $K = 2$, $\tau = 0.5$ s, en ingangssignaal $x(t) = 3u(t)$.

Vraag:
[label=()]Bepaal $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$. Bepaal $y(t)$ en identificeer: steadystate waarde, tijdsconstante, settling time (2%).
Zie Formularium: afgeleide-eigenschap en stapfunctie-paar , .
Oefening 3.11: Inverse Laplacetransformatie met Tijdsverschuiving
Bron: Aanvullende oefeningen (praktische examenniveau).
Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

Vraag:
[label=()]Bepaal eerst de partieelbreukontwikkeling van $\frac{2}{s(s+2)}$ (negeer voorlopig e^{-2s}). Bepaal de inverse Laplacetransfo
Tip: De exponentiële term e^{-2s} geeft een tijdsverschuiving van 2 seconden.
Oefening 3.12: Differentiaalvergelijking met Beginvoorwaarden
Bron: Aanvullende oefeningen (examenniveau).
Los het volgende beginwaardeprobleem op met behulp van Laplacetransformatie:

Met beginvoorwaarden $y(0) = 1$ en $y'(0) = -2$.
Vraag:
[label=()]Transformeer beide zijden van de DV naar het Laplace-domein. Zet alle beginvoorwaarden in en los op voor Y

Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie
Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls
Gegeven een rechthoekpuls:

Zie Formularium: blok $\leftrightarrow$ sinc in .
Vraag:
[label=()]Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$. Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie. Bepaal de eerste
Oefening 4.2: Verschuivingsstelling
Gegeven $F\{f(t)\} = F(j\omega)$ bepaal de Fouriertransformatie van $f(t - t_0)$.
Zie Formularium: tijdverschuiving .
Vraag:
[label=()]Geef het bewijs van de verschuivingsstelling. Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met $t_0 = 1$ s, $A = 2$, $T =$
Oefening 4.3: Modulation Property
Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

waarbij $rect(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$ is.
Zie Formularium: modulatie (cosinus) in .
Vraag:
[label=()]Pas de modulatiestelling toe. Schets het amplitude- en fasespectrum.
Oefening 4.4: Parseval's Stelling
De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven $f(t) = e^{-t}u(t)$.
Zie Formularium: FTC-definitie en eigenschappen .
Vraag:
[label=()]Bepaal de totale energie in het tijdsdomein: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$. Bepaal $F(j\omega)$ en controleer de energie in het f
Oefening 4.5: Exponentieel Signaal
Gegeven $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$.
Vraag:
[label=()]Bepaal de Fouriertransformatie $F(j\omega)$. Schets het amplitude- en fasespectrum. Bepaal de bandbreedte (eerste
Oefening 4.6: Dirac Delta
Bepaal de Fouriertransformatie van:
Vraag:
[label=()]$f(t) = \delta(t)$ (impulsfunctie) $f(t) = \delta(t - t_0)$ (verschoven impulsfunctie) $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ (hint: gebruik dat cos(ω
Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)
Beschouw het bloksignaal

en definieer $y(t) = x(t - t_0)$ met $t_0 = 14$.
Vraag:
[label=()]Bepaal $X(j\omega)$. Bepaal $Y(j\omega)$ met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.
Oefening 4.8: FTC van delta's
Gebruik de bekende paren $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ en de verschuivingsstelling.
Vraag:
[label=()]Bepaal $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$. Bepaal de Fouriertransformatie van $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$. Wat is het amplitudespectru
Oefening 4.9: Spectrum van een Samengesteld Signaal
Bron: Aanvullende oefeningen (examenniveau).
Gegeven twee signalen waarvan het spectrum $X(\omega)$ en $H(\omega)$ bekend zijn. Bepaal het spectrum $Y(\omega)$ van:

Vraag:
[label=()]Pas de verschuivingsstelling toe op beide termen. Combineer beide resultaten en gebruik Euler's formule om d
Hint: $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$.
Oefening 4.10: Dualiteitseigenschap van FTC
Bron: Aanvullende oefeningen (geavanceerd).
Gebruik de dualiteitseigenschap van de Fouriertransformatie om de transformatie te vinden van:

Vraag:
[label=()]Je weet dat $e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$. Kies een passende waarde van a. Maak gebruik van de dualiteitsstelling: als $x(t)$
Oefening 4.11: Spectrum van een Driehoekpuls (Uitgebreid)
Bepaal de Fouriertransformatie van de driehoekpuls $\Lambda(t)$ gedefinieerd als:

Tip: Gebruik het feit dat een driehoek de convolutie is van twee rechthoeken.
[Oplossing via Convolutie-eigenschap]
De Fouriertransformatie van een rechthoek is een sinc-functie. Een driehoek is de convolutie van twee identieke rech
Laat $\Pi(t)$ een rechthoek zijn met breedte 1 en hoogte 1 (van -0.5 tot 0.5).
$\Pi(t) * \Pi(t) = \Lambda(t)$ is een driehoek.
De Fouriertransformatie van de rechthoek is:

Gebruikmakend van de convolutie-eigenschap:

Hoofdstuk 5: Fourierreeksen
Oefening 5.1: Blokgolf
Een periodieke blokgolf met periode $T = 2$ s is gedefinieerd als:

Zie Formularium: Fourierreeks (cartesisch) en (complex) .
Vraag:
[label=()]Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is. Bereken de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, en b_n. Schrijf d
Oefening 5.2: Zaagtandgolf
Een zaagtandgolf met periode $T = 1$ s is gegeven door $f(t) = 2t$ voor $0 < t < 1$.

Vraag:
[label=()]Bereken a_0. Bepaal b_1 en b_2. Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.
Oefening 5.3: Driehoekgolf
Een driehoekgolf met periode $T = 2$ is gedefinieerd als:

Vraag:
[label=()]Is dit signaal even of oneven? Bepaal de Fouriercoëfficiënten. Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fou
Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen
Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.
Vraag:
[label=()]Bereken de gemiddelde macht van het signaal: $P = \frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$. Bereken P uit de Fouriercoëfficiënten met P
Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC
Definieer een periodiek signaal met periode $T = 2$ als

Vraag:
[label=()]Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k (met $\omega_0 = 2\pi/T$). Geef een eenvoudige interpretatie van welke har
Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som
Neem een periodiek signaal met periode $T = 2\pi$:

Vraag:
[label=()]Geef ω_0. Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten a_0, a_n en b_n. Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen her
Oefening 5.7: De Blokgolf (Symmetrie) — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Gegeven een periodieke functie $f(t)$ met periode $T = 2\pi$:

[label=()]Schets de functie over twee periodes (van -2π tot 2π). Is deze functie even, oneven, of geen van beide? Wat b
Oefening 5.8: Fourierreeks door Inspectie — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Soms hoef je niet te integreren. Gegeven het signaal:

[label=()]Wat is de grondfrequentie ω_0 van dit signaal? (Hint: zoek de grootste gemene deler van de frequenties). Bepaa
Oefening 5.9: Parseval (Energie) — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
De stelling van Parseval zegt dat de vermogensinhoud in tijd gelijk is aan de som van de vermogens van de harmon
Bereken het gemiddelde vermogen van het signaal:

Oefening 5.10: Fourierreeks van een Gelijkgerichte Sinus (Uitgebreid)
Beschouw het signaal:

Vragen:
Wat is de fundamentele periode T?
Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k.
[Oplossing]
1. Periode
Hoewel $\sin(t)$ periode 2π heeft, zorgt de absolute waarde ervoor dat het negatieve deel wordt omgeklapt. De vorm
$T = \pi$. Grondfrequentie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$ rad/s.

2. Coëfficiënten
Formule: $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$.

Gebruik de Euler-vorm voor sinus: $\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$.
Na evaluatie van de integraal (zie volledige uitwerking) resulteert:

Hoofdstuk 6: LTC-Systemen
Oefening 6.1: Impulsrespons
Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$.

Vraag:
[label=()]Bereken de systeemrespons op een stapingang $f(t) = u(t)$ door convolutie. Verifieer je antwoord met de Laplac
Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper
Een massa-veer-dempersysteem heeft $m = 2$ kg, $k = 8$ N/m, en $c = 4$ Ns/m.
Vraag:
[label=()]Schrijf de differentiaalvergelijking. Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie ω_0. Is het systeem ondergedempt, kri
Oefening 6.3: Frequentierespons
Gegeven een LTC-systeem met overdracht $H(s) = \frac{10}{s+5}$.
Vraag:
[label=()]Bepaal de frequentierespons $H(j\omega)$. Bepaal de amplitude- en faserespons. Bepaal de 3dB bandbreedte (waar |
Oefening 6.4: Cascade Systemen
Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

Vraag:
[label=()]Bepaal de totale overdracht $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$. Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.
Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen
Bepaal voor de volgende systemen of ze BIBO-stabiel, marginaal stabiel of onstabiel zijn op basis van hun polen.
Vraag:
[label=()]$H_1(s) = \frac{1}{s-2}$ $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$ $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$
Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons
Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

Vraag:
[label=()]Bepaal de overdrachtsfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$. Bepaal de impulsrespons $h(t)$. Is het systeem BIBO-stabiel? Motiv
Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)
Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

Vraag:
[label=()]Bepaal de impulsrespons $h(t)$. Bepaal de staprespons $y(t)$ voor $x(t) = u(t)$. Wat is de tijdsconstante τ en de D
Oefening 6.8: Van DV naar $H(s)$ — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Een systeem wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

[label=()]Zet beide kanten om naar het Laplace-domein (neem aan dat alle beginvoorwaarden 0 zijn). Bepaal de transfe
Oefening 6.9: Impulsrespons en Stabiliteit — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Gegeven de transferfunctie:

[label=()]Splits de noemer in factoren $(s + a)(s + b)$. Gebruik partieelbreuksplitsing om $H(s)$ te schrijven als $\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$
Oefening 6.10: Gedrag bij frequenties — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Gegeven een eerste-orde systeem $H(s) = \frac{10}{s+2}$.
[label=()]Wat is de "DC-gain" (de versterking bij frequentie 0)? Hint: vul $s = 0$ in. Wat gebeurt er met de versterking
Oefening 6.11: Respons op een Sinus (Uitgebreid)
Een systeem heeft een transferfunctie:

Vraag: Bepaal de steady-state output $y_{ss}(t)$ als de input $x(t) = 3\cos(2t + 45°)$ is.
[Oplossing]
1. Frequentierespons bepalen
Vervang s door $j\omega$. De inputfrequentie is $\omega = 2$ rad/s.

2. Magnitude en Fase berekenen
Magnitude:

Fase:

Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren
Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen
Gegeven de matrix:

Vraag:
[label=()]Bepaal de karakteristieke veelterm $f(\lambda) = |A - \lambda I|$. Vind de eigenwaarden van A. Bereken voor elke eigenwaa
Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem
Voor het systeem uit oefening 3.4 ($\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$).
Vraag:
[label=()]Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:

Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix. Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit o
Oefening 7.3: Diagonalisatie
Gegeven de matrix:

Vraag:
[label=()]Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren. Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (om
Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling
Gegeven de matrix:

Vraag:
[label=()]Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix. Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling. E
Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit
Gegeven de matrix:

Vraag:
[label=()]Bepaal de eigenwaarden. Bepaal de eigenvectoren. Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn. Normalise
Oefening 7.6: Matrix Exponentiële
Gegeven de matrix $A = (0) 1$
$- 2 - 3$.
Vraag:
[label=()]Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A. Bereken de matrix exponentiële e^{At} via diagonalisatie of Cay
0.
Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal
Gegeven

Vraag:
[label=()]Bepaal de eigenwaarden van A en de dimensie van de eigenruimte. Is A diagonaliseerbaar? Motiveer. Bepaal e
Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis)
Gegeven

Vraag:
[label=()]Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector. Bereken A^3. Bereken e^{At}.
Oefening 7.9: Karakteristieke Vergelijking — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Gegeven de matrix A:

[label=()]Stel de karakteristieke vergelijking op: $\det(A - \lambda I) = 0$. Los deze kwadratische vergelijking op om de eigenwaa
Oefening 7.10: Eigenvectoren vinden — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Gebruik de eigenwaarden uit Oefening 7.9 ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$).
[label=()]Bepaal de eigenvector $\mathbf{v}_1$ die hoort bij $\lambda_1 = 2$ (los op: $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$). Bepaal de eigenvector $\mathbf{v}_2$ die hoort bij
Oefening 7.11: Diagonaalmatrix en machten — Starter Level
Bron: Starter Oefeningen.
Gegeven de matrix $D = (2) 0$
$0 - 1$.
[label=()]Wat zijn de eigenwaarden van D? (Dit zou je direct moeten zien). Bereken D^5 zonder de matrix 5 keer te ver

Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen
Oefening 8.1: Signaalspektrum en Symmetrie
Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1a, signaal-eigenschappen).
Gegeven de signalen $u(t)$ (Heaviside), $v(t) = 2\cos(2\pi t)$, en hun Fouriertransformaties $U(j\omega)$, $V(j\omega)$.
Vraag:
[label=()]Beschrijf welke van de volgende signalen *causaal*, *periodiek*, *even*, en/of *oneven* zijn:
$u(t)$ (Heaviside-stapfunctie)
$v(t) = 2\cos(2\pi t)$
$u(t) \cdot v(t)$ (product)
$u(t) * v(t)$ (convolutie)
Bepaal voor elk signaal welke symmetrie-eigenschappen van toepassing zijn en motiveer kort.
Oefening 8.2: Fouriertransformatie met Verschuiving en Modulatie
Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1b-c, FTC-transformaties).
Gegeven het bloksignaal

en de cosinusvorm $v(t) = 2\cos(2\pi t)$. Definieer $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ en $z(t) = x(t) + x(t-1)$.
Vraag:
[label=()]Bepaal $X(j\omega)$ (geïnspireerd door het sinc-paar uit het formularium,). Bepaal $Y(j\omega)$ met de modulatiestelling
Oefening 8.3: Impulsrespons, Causaliteit en Convolutie
Bron: Voorbeeldexamen (vraag 2, impulsrespons van LTC-systeem).
Gegeven het ingangssignaal en de impulsrespons:

Vraag:
[label=()]Bepaal de Laplacetransformatie $X(s)$ van het ingangssignaal. Is het systeem causaal? Motiveer op basis van d
Oefening 8.4: Complexe Fourierreeks van Periodiek Signaal
Bron: Voorbeeldexamen (vraag 3, impulsrespons en lineariteit).
Gegeven een periodiek puls-trein met periode $T = 2$ s:

Vraag:
[label=()]Bepaal de complexe Fouriercoëfficiënten c_k (gebruik $\omega_0 = 2\pi/T$, zie Formularium). Uit de eigenschap dat $p(t)$
Oefening 8.5: Laplacetransformatie met Verschuiving
Bron: Voorbeeldexamen (Laplace-transformatie met complexe signalen).
Gegeven

Vraag:
[label=()]Bepaal $X(s)$ (gebruik de verschuivingsstelling, zie Formularium). Bepaal $x(0^+)$ en $\lim_{t\to\infty} x(t)$ door rechtstre
Oefening 8.6: Differentiaalvergelijking via Laplace (met Beginvoorwaarden)
Bron: Voorbeeldexamen (oplossen van DV met Laplace).
Los op met behulp van de unilaterale Laplacetransformatie:

Vraag:
[label=()]Pas de Laplacetransformatie toe op beide zijden en zet alle beginvoorwaarden in. Los op voor $Y(s)$ en bepaal
Oefening 8.7: LTI-Systeem: Stabiliteit, Impuls- en Staprespons
Bron: Voorbeeldexamen (polen, stabiliteit en systeemrespons).
Een causaal LTI-systeem heeft overdrachtsfunctie

Vraag:
[label=()]Bepaal de polen van het systeem. Is het systeem BIBO-stabiel? Bepaal de impulsrespons $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ v
Oefening 8.8: Convolutie: Tijdsdomein versus Frequentiedomein
Bron: Voorbeeldexamen (convolutie met basis-signalen).
Gegeven

Vraag:
[label=()]Bepaal $y(t) = h(t) * x(t)$ rechtstreeks via (grafische) convolutie in het tijdsdomein. Geef het antwoord stukgew
Oefening 8.9: Fouriertransformatie en Energieanalyse
Bron: Voorbeeldexamen (FTC en Parseval voor energie-berekeningen).
Gegeven

Vraag:
[label=()]Bepaal $F(j\omega)$ (tip: split in twee delen, $f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$). Bereken de totale energie $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2$
Oefening 8.10: Reële Fourierreeks: Symmetrie en Spectrum
Bron: Voorbeeldexamen (periodieke signalen en Fourierreeks).
Gegeven een antisymmetrische blokvorm met periode $T = 2\pi$:

Vraag:
[label=()]Bepaal of $f(t)$ even, oneven, of geen van beide is. Bepaal de coëfficiënten a_0, a_n, b_n van de reële Fourierreeks.
Oefening 8.11: Staatruimtevergelijking en Stabiliteit
Bron: Voorbeeldexamen (toestandsrepresentatie, eigenwaarden).
Gegeven het eerste-orde systeem:

Oplossingen
Oplossingen Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking
*Oplossing 1.1
Gegeven: Systeem met operator $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$.
Vraag: Onderzoek of dit systeem lineair is.
Oplossing:
Test eigenschap 1 (schaling): $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t) + 2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t) + 2) = 3ax(t) + 2a$
Voor $a \neq 1$ geldt: $2 \neq 2a$, dus schaling klopt niet.
Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.
*Oplossing 1.2
Gegeven: RC-circuit met $R = 1000\ \Omega$, $C = 10\ \mu$F, ingangsspanning $v_{in}(t) = 5u(t)$ V.
Vraag:
[label=()]Schrijf de differentiaalvergelijking op. Bereken τ. Bepaal $v_{uit}(0.01)$.
Oplossing:
[label=()]De differentiaalvergelijking van een RC-circuit: $RC\frac{dv_{uit}}{dt} + v_{uit} = v_{in}$

Tijdsconstante: $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01$ s $= 10$ ms Voor een staprespons met $v_{uit}(0) = 0$:

Op $t = 10$ ms $= 0.01$ s:

*Oplossing 1.3
Gegeven: Radio-isotoop met halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur. Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.
Vraag: Hoeveel mg blijft over om 14:00?
Oplossing:
Model radioactief verval: $N(t) = N_0 e^{-kt}$
Halveringstijd $t_{1/2} = 6$ uur: $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155\ \text{h}^{-1}$
Van 08:00 tot 14:00 is $\Delta t = 6$ uur:

Antwoord: 10 mg blijft over.
*Oplossing 1.4
Gegeven: Twee systemen: - Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$ - Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Vraag: Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.
Oplossing:
Systeem A: $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\}$
Additiviteit: $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$
Systeem A is LINEAIR.
Systeem B: $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$
Homogeniteit: $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ (voor $a \neq 1$) X
Systeem B is NIET LINEAIR.
*Oplossing 1.5
Gegeven: Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?
Oplossing:
[label=()]$y(t) = x(t-2)$: LINEAIR en TIJDINVARIANT (zuivere vertraging) $y(t) = tx(t)$: LINEAIR maar NIET TIJ
Antwoord: (a) en (d) zijn LTI.
*Oplossing 1.6
Gegeven: $y(t) = x(t) + x(t-1)$.
Vraag: Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.
Oplossing:
[label=()]**Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tij

Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen, bijvoorbeeld:
$x(t) = A(-1)^t$ voor elke constante A
$x(t) = 0$ voor alle t
Omdat verschillende inputs tot dezelfde output leiden, is het systeem niet invertibel.
*Oplossing 1.7
Gegeven: (S1) $y(t) = 2x(t-1)$ en (S2) $y(t) = x(t) + u(t)$.
Vraag: Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).
Oplossing:
[label=()]**Lineariteit Systeem (S1):** $y(t) = 2x(t-1)$ **Test homogeniteit:** Voor $ax(t)$:

Test additiviteit: Voor $x_1(t) + x_2(t)$:

$\Rightarrow$ (S1) is **lineair**. **Systeem (S2):** $y(t) = x(t) + u(t)$ **Nultoestandtest:** Voor $x(t) = 0$:

Dit schendt het nultoestandcriterium voor lineariteit. $\Rightarrow$ (S2) is **niet lineair**. **Tijdinvariantie**

Vraag: Geef ω_0 en de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, b_n.
Oplossing:
[label=()]$\omega_0 = 2\pi/T = 1$. Schrijf de reéle Fourierreeks (Formularium):

Omdat $f(t)$ al in de basisvorm geschreven is met termen voor $n = 1$ en $n = 2$, herkennen we direct:

en alle overige a_n, b_n zijn nul. Ter verificatie:

We herkennen direct de standaardvorm

Vergelijken geeft:

en alle andere a_n, b_n zijn nul.
Dus de Fourierreeks is gewoon $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$.
*Oplossing 5.7: De Blokgolf (Symmetrie)
[label=()]**Symmetrie:** $f(t)$ is **oneven**, want $f(-t) = -f(t)$. (De grafiek is puntsymmetrisch rond de oorsprong). **Gevo**

(We integreren over de halve periode en doen $\times 2$ vanwege symmetrie).

Als n even is $(2, 4, \ldots)$, is $1 - 1 = 0$. Als n oneven is $(1, 3, \ldots)$, is $1 - (-1) = 2$. Dus: $b_n = \frac{4}{n\pi}$ voor oneven n.

*Oplossing 5.8: Inspectie
[label=()]Grondfrequentie van $4t$ en $10t$: De grootste gemene deler van 4 en 10 is 2. Dus $\omega_0 = 2$. De reeks is gewoon de

Alle andere coëfficiënten zijn 0.
*Oplossing 5.9: Parseval
Signaal: $3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$.

Oplossingen Hoofdstuk 6: LTC-Systemen
*Oplossing 6.1: Staprespons via Convolutie en Laplace
Gegeven: Eerste-orde systeem met impulsrespons $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ en ingangssignaal $x(t) = u(t)$.
Vraag: Bepaal systeemrespons $y(t)$ via convolutie; verifieer met Laplacetransformatie.
Oplossing:
[label=()]**Convolutie in tijdsdomein:**

Steady-state waarde: $y(\infty) = \frac{2}{5}$ V **Verificatie via Laplacetransformatie:**

Partieelbreukontwikkeling: Stel $\frac{2}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$ Vermenigvuldig met $s(s+5)$: $2 = A(s+5) + Bs$ Voor $s = 0$: $2 =$

Oplossingen Hoofdstuk 8

Oplossing:

[label=()]**Symmetrie controleren.**
Stap 1: noteer de definities.
even: $f(-t) = f(t)$
oneven: $f(-t) = -f(t)$
Stap 2: $x(t)$ is een rechthoekpuls rond 0 met dezelfde waarde links en rechts, dus $x(-t) = x(t)$ en $x(t)$ is **even**.
Stap 3: $v(t) = 2\cos(2\pi t)$ is **even** omdat cos even is.
Stap 4: $y(t) = x(t)\cos(2\pi t)$ is product van twee even functies, dus ook **even**.
Stap 5: $z(t) = x(t) + x(t-1)$ bevat een verschoven term $x(t-1)$; door die verschuiving is $z(-t)$ in het algemeen niet ge
$Y(j\omega)$ via modulatie.
Stap 1: bepaal $X(j\omega)$. Voor het blok met amplitude 1 en breedte 1 geldt (zoals in het formularium):

Stap 2: schrijf de cosinus als exponenti"elen:

Stap 3: vermenigvuldigen in de tijd is verschuiven in het frequentiedomein. Daaruit volgt de modulatieregel:

Stap 4: invullen van $X(j\omega)$ geeft

$Z(j\omega)$ via tijdverschuiving.
Stap 1: gebruik de verschuivingsregel $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$.
Stap 2: voor $t_0 = 1$ wordt $x(t-1) \leftrightarrow e^{-j\omega}X(j\omega)$.
Stap 3: optellen in tijd is optellen in frequentie, dus

*Oplossing 8.2

Gegeven: $x(t) = u(t) - u(t-2)$, $h(t) = e^{-t}u(t)$.

Oplossing:

[label=()]**Laplace van de ingang $x(t)$.**
Stap 1: gebruik $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$.
Stap 2: gebruik de verschuivingsregel $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$.
Dus

Causaliteit. Omdat $h(t) = e^{-t}u(t) = 0$ voor $t < 0$ is de impulsrespons rechtszijdig $\Rightarrow$ het LTI-systeem is **causaal**.
Uitgang $y(t)$ via Laplace.
Stap 1: bepaal $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s+1}$.
Stap 2: gebruik $Y(s) = H(s)X(s)$:

Stap 3: splits op in een niet-vertraagde en een vertraagde term:

Stap 4: herken de basis-inversie $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1 - e^{-t})u(t)$.
Stap 5: pas de vertraging toe: $e^{-2s}G(s) \leftrightarrow g(t-2)u(t-2)$.
Daarmee

*Oplossing 8.3

Gegeven: $T = 2$, $p(t) = 1$ op $(0, 12)$, anders 0, periodiek.

Oplossing:

[label=()]**Complexe Fourierreeksco"effici"enten c_k.**
Stap 1: grondfrequentie $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
Stap 2: definitie:

Stap 3: omdat $p(t) = 1$ enkel op $(0, 12)$ en 0 elders binnen $[0, 2)$, reduceert de integraal tot

Voor $k \neq 0$:

Voor $k = 0$ (gemiddelde waarde):