Oefeningenmodule: De Kernconcepten

Fourierreeksen, LTC Systemen Eigenwaarden

Simpel, maar niet triviaal

13 december 2025

Inhoudsopgave

1 Oefeningen

2 Onderwerp 1: Fourierreeksen

Doel: Coëfficiënten berekenen en symmetrie gebruiken.

Oefening 1.1: De Blokgolf (Symmetrie)

Gegeven een periodieke functie $f(t)$ met periode $T = 2\pi$:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{voor } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

(a) Schets de functie over twee periodes (van -2π tot 2π).

(b) Is deze functie even, oneven, of geen van beide? Wat betekent dit voor de coëfficiënten a_0, a_n en b_n?

(c) Bereken de niet-nul coëfficiënten en schrijf de eerste drie termen van de reeks op.

Oefening 1.2: Fourierreeks door Inspectie

Soms hoef je niet te integreren. Gegeven het signaal:

$$f(t) = 3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$$

(a) Wat is de grondfrequentie ω_0 van dit signaal? (Hint: zoek de grootste gemene deler van de frequenties).

(b) Bepaal direct de Fouriercoëfficiënten a_0, a_n, b_n.

Oefening 1.3: Parseval (Energie)

De stelling van Parseval zegt dat de vermogensinhoud in tijd gelijk is aan de som van de vermogens van de harmonischen: $P = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum(a_n^2 + b_n^2)$.
Bereken het gemiddelde vermogen van het signaal uit Oefening 1.2:

$$f(t) = 3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$$

3 Onderwerp 2: LTC Systemen

Doel: Van DV naar Transferfunctie, Polen Stabiliteit.

Oefening 2.1: Van DV naar $H(s)$

Een systeem wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 4x(t)$$

(a) Zet beide kanten om naar het Laplace-domein (neem aan dat alle beginvoorwaarden 0 zijn).

(b) Bepaal de transferfunctie $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

(c) Wat zijn de polen en nulpunten van dit systeem?

Oefening 2.2: Impulsrespons en Stabiliteit

Gegeven de transferfunctie:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

(a) Splits de noemer in factoren $(s + a)(s + b)$.

(b) Gebruik partieelbreuksplitsing om $H(s)$ te schrijven als $\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$.

(c) Bepaal de impulsrespons $h(t)$ (de inverse Laplace van $H(s)$).

(d) Is dit systeem BIBO-stabiel? Waarom?

Oefening 2.3: Gedrag bij frequenties (Bode-intuïtie)

Gegeven een eerste-orde systeem $H(s) = \frac{10}{s+2}$.

(a) Wat is de "DC-gain"(de versterking bij frequentie 0)? Hint: vul $s = 0$ in.

(b) Wat gebeurt er met de versterking $|H(j\omega)|$ als de frequentie ω naar oneindig gaat?

(c) Wat voor type filter is dit? (Laagdoorlaat, Hoogdoorlaat?)

4 Onderwerp 3: Eigenwaarden en Eigenvectoren

Doel: Karakteristieke vergelijking en basis berekeningen.

Oefening 3.1: Karakteristieke Vergelijking

Gegeven de matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Stel de karakteristieke vergelijking op: $\det(A - \lambda I) = 0$.

(b) Los deze kwadratische vergelijking op om de eigenwaarden λ_1 en λ_2 te vinden.

Oefening 3.2: Eigenvectoren vinden

Gebruik de eigenwaarden uit Oefening 3.1 ($\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$).

(a) Bepaal de eigenvector $\mathbf{v}_1$ die hoort bij $\lambda_1 = 2$. (Los op: $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$).

(b) Bepaal de eigenvector $\mathbf{v}_2$ die hoort bij $\lambda_2 = 5$.

Oefening 3.3: Diagonaalmatrix en machten

Gegeven de matrix $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Wat zijn de eigenwaarden van D? (Dit zou je direct moeten zien).

(b) Bereken D^5 zonder de matrix 5 keer te vermenigvuldigen. (Hint: bij diagonaalmatrices mag je de macht per element nemen).

5 Oplossingen

Oplossing 1.1: De Blokgolf

(a) **Symmetrie:** $f(t)$ is **oneven**, want $f(-t) = -f(t)$. (De grafiek is puntsymmetrisch rond de oorsprong).

(b) **Gevolg:** $a_0 = 0$ (gemiddelde is 0) en alle $a_n = 0$. We hoeven alleen b_n te berekenen.

(c) **Berekening b_n:**

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1) \sin(nt) dt$$

(We integreren over de halve periode en doen $\times 2$ vanwege symmetrie).

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos(n\pi))$$

Als n even is $(2, 4, \dots)$, is $1 - 1 = 0$. Als n oneven is $(1, 3, \dots)$, is $1 - (-1) = 2$. Dus: $b_n = \frac{4}{n\pi}$ voor oneven n.

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t)$$

Oplossing 1.2: Inspectie

(a) Grondfrequentie van $4t$ en $10t$: De grootste gemene deler van 4 en 10 is 2. Dus $\omega_0 = 2$.

(b) De reeks is gewoon de som van sinussen/cosinussen.

$$a_0 = 3$$

$$\text{Bij } 4t\ (2\omega_0): \quad a_2 = 2$$

$$\text{Bij } 10t\ (5\omega_0): \quad b_5 = -5$$

Alle andere coëfficiënten zijn 0.

Oplossing 1.3: Parseval

Signaal: $3 + 2\cos(4t) - 5\sin(10t)$.

$$P = a_0^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}b_5^2$$

$$P = 3^2 + \frac{1}{2}(2^2) + \frac{1}{2}(-5)^2$$

$$P = 9 + 2 + 12.5 = 23.5$$

Oplossing 2.1: Van DV naar $H(s)$

(a) Laplace: $s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$

(b) $Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s)(s + 4) \implies H(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2}$

(c) $H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$. Nulpunt: $s = -4$. Polen: $s = -1, s = -2$.

Oplossing 2.2: Impulsrespons

(a) $s^2 + 4s + 3 = (s+1)(s+3)$.

(b) $\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$. A vinden: bedek $(s+1)$, vul $s = -1$ in: $\frac{1}{-1+3} = 0.5$. B vinden: bedek $(s+3)$, vul $s = -3$ in: $\frac{1}{-3+1} = -0.5$. $H(s) = \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+3}$.

(c) $h(t) = 0.5e^{-t}u(t) - 0.5e^{-3t}u(t)$.

(d) Ja, stabiel. De polen (-1 en -3) zijn negatief. De exponentiële functies sterven uit.

Oplossing 2.3: Frequentiegedrag

(a) DC-gain ($s = 0$): $H(0) = \frac{10}{2} = 5$.

(b) Als $\omega \to \infty$, dan $|H(j\omega)| = |\frac{10}{j\omega+2}| \approx \frac{10}{\omega} \to 0$.

(c) Laagdoorlaatfilter (laat lage frequenties door, blokkeert hoge).

Oplossing 3.1: Karakteristieke vergelijking

(a) $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$.

(b) $\lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = 0 \implies \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. Ontbinden: $(\lambda-2)(\lambda-5) = 0$. Eigenwaarden: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$.

Oplossing 3.2: Eigenvectoren

(a) Voor $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit geeft $2x+y = 0 \implies y = -2x$. Kies $x = 1$, dan $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(b) Voor $\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dit geeft $-x + y = 0 \implies y = x$. Kies $x = 1$, dan $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Oplossing 3.3: Diagonaalmatrix

(a) Eigenwaarden zijn de diagonaalelementen: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

(b) $D^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.