

# Oefeningen Wiskunde voor Systemen

KU Leuven - ESAT

14 december 2025

## Inhoudsopgave

<b>1 Formularium</b>	<b>4</b>
1.1 Laplace transform (LT) . . . . .	4
1.2 Fourier transform (FTC) . . . . .	4
1.3 Fourier series (FS) . . . . .	5
<b>2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking</b>	<b>7</b>
2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen . . . . .	7
2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit . . . . .	7
2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval . . . . .	7
2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit . . . . .	7
2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning . . . . .	7
2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit . . . . .	8
2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit) . . . . .	8
2.8 Oefening 1.8: Analyse van een Kwadratisch Modulatiesysteem (Uitgebreid) . . . . .	8
2.9 Oefening 1.9: Causaliteit van een Integrator met Toekomstblik (Uitgebreid) . . . . .	8
2.10 Oefening 1.10: Differentiaalvergelijking van een Mechanisch Systeem (Uitgebreid)	8
<b>3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen</b>	<b>9</b>
3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies . . . . .	9
3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus . . . . .	9
3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie . . . . .	9
3.4 Oefening 2.4: Convolutie . . . . .	9
3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling . . . . .	9
3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie . . . . .	10
3.7 Oefening 2.7: Driehoeks signaal met Staffuncties . . . . .	10
3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie) . . . . .	10
3.9 Oefening 2.9: Analytische Convolutie van Exponentiëlen (Uitgebreid) . . . . .	10
3.10 Oefening 2.10: Grafische Convolutie van een Blok en een Zaagtand (Uitgebreid) .	11
3.11 Oefening 2.11: RMS en Vermogen (Uitgebreid) . . . . .	11
<b>4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie</b>	<b>12</b>
4.1 Oefening 3.1: Standaard Laplace-paren . . . . .	12
4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie met Partieelbreuken . . . . .	12
4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem . . . . .	12
4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem: Karakteristische Wortels . . . . .	12
4.5 Oefening 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving (Tijddomein) . . . . .	13
4.6 Oefening 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd . . . . .	13
4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardestelling . . . . .	13
4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace . . . . .	14
4.9 Oefening 3.9: Samenvattingsoefening Laplace . . . . .	14

4.10 Oefening 3.10: Staprespons van Eerste-Orde Systeem . . . . .	14
4.11 Oefening 3.11: Inverse Laplacetransformatie met Tijdsverschuiving . . . . .	15
4.12 Oefening 3.12: Differentiaalvergelijking met Beginvoorwaarden . . . . .	15
<b>5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie</b>	<b>16</b>
5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls . . . . .	16
5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling . . . . .	16
5.3 Oefening 4.3: Modulation Property . . . . .	16
5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling . . . . .	17
5.5 Oefening 4.5: Reëel signaal en Bandbreedte . . . . .	17
5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta . . . . .	17
5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC) . . . . .	17
5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's . . . . .	17
5.9 Oefening 4.9: Spectrum van een Samengesteld Signaal . . . . .	18
5.10 Oefening 4.10: Dualiteitseigenschap van FTC . . . . .	18
5.11 Oefening 4.11: Spectrum van een Driehoekpuls (Uitgebreid) . . . . .	18
5.12 Oefening 4.12: Dualiteit en Frequentieververschuiving (Uitgebreid) . . . . .	18
<b>6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen</b>	<b>19</b>
6.1 Oefening 5.1: Blokgolf . . . . .	19
6.2 Oefening 5.2: Zaagtandgolf . . . . .	19
6.3 Oefening 5.3: Driehoekgolf . . . . .	19
6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen . . . . .	20
6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC . . . . .	20
6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som . . . . .	20
6.7 Oefening 5.7: De Blokgolf (Symmetrie) — Starter Level . . . . .	20
6.8 Oefening 5.8: Fourierreeks door Inspectie — Starter Level . . . . .	21
6.9 Oefening 5.9: Parseval (Energie) — Starter Level . . . . .	21
6.10 Oefening 5.10: Fourierreeks van een Gelijkgerichte Sinus (Uitgebreid) . . . . .	21
<b>7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen</b>	<b>22</b>
7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons . . . . .	22
7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper . . . . .	22
7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons . . . . .	22
7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen . . . . .	22
7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen . . . . .	23
7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons . . . . .	23
7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis) . . . . .	23
7.8 Oefening 6.8: Van DV naar $H(s)$ — Starter Level . . . . .	23
7.9 Oefening 6.9: Impulsrespons en Stabiliteit — Starter Level . . . . .	24
7.10 Oefening 6.10: Gedrag bij frequenties — Starter Level . . . . .	24
7.11 Oefening 6.11: Respons op een Sinus (Uitgebreid) . . . . .	24
7.12 Oefening 6.12: Stabiliteitsanalyse via Polen (Uitgebreid) . . . . .	24
<b>8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren</b>	<b>25</b>
8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen . . . . .	25
8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem . . . . .	25
8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie . . . . .	25
8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling . . . . .	25
8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit . . . . .	26
8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële . . . . .	26
8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal . . . . .	26

8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonaalmatrix (basis) . . . . .	26
8.9 Oefening 7.9: Karakteristieke Vergelijking — Starter Level . . . . .	27
8.10 Oefening 7.10: Eigenvectoren vinden — Starter Level . . . . .	27
8.11 Oefening 7.11: Diagonaalmatrix en machten — Starter Level . . . . .	27
<b>9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen</b>	<b>28</b>
9.1 Oefening 8.1: Signaalspektrum en Symmetrie . . . . .	28
9.2 Oefening 8.2: Fouriertransformatie met Verschuiving en Modulatie . . . . .	28
9.3 Oefening 8.3: Impulsrespons, Causaliteit en Convolutie . . . . .	28
9.4 Oefening 8.4: Complexe Fourierreeks van Periodiek Signaal . . . . .	29
9.5 Oefening 8.5: Laplacetransformatie met Verschuiving . . . . .	29
9.6 Oefening 8.6: Differentiaalvergelijking via Laplace (met Beginvoorwaarden) . . . . .	29
9.7 Oefening 8.7: LTI-Systeem: Stabiliteit, Impuls- en Staprespons . . . . .	29
9.8 Oefening 8.8: Convolutie: Tijdsdomein versus Frequentiedomein . . . . .	30
9.9 Oefening 8.9: Fouriertransformatie en Energieanalyse . . . . .	30
9.10 Oefening 8.10: Reële Fourierreeks: Symmetrie en Spectrum . . . . .	30
9.11 Oefening 8.11: Staattruimtevergelijking en Stabiliteit . . . . .	31
<b>10 Oplossingen</b>	<b>32</b>
10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking . . . . .	32
10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen . . . . .	35
10.3 Oefening 2.9: Analytische Convolutie van Exponentiëlen (Uitgebreid) . . . . .	38
10.4 Oplossingen Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie . . . . .	39
10.5 Oplossingen Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie . . . . .	51
10.6 Oplossingen Hoofdstuk 5: Fourierreeksen . . . . .	57
10.7 Oplossingen Hoofdstuk 6: LTC-Systemen . . . . .	63
10.8 Oplossingen Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren . . . . .	67
10.9 Oplossingen Hoofdstuk 8 Examengerichte oefeningen . . . . .	73

# 1 Formularium

Dit formularium is een compacte samenvatting van de standaardformules uit het “Signals and Systems” formularium. In de oefeningen wordt hiernaar verwezen.

## 1.1 Laplace transform (LT)

### 1.1 Definitie en eigenschappen

Definitie:	$f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$
translatie in $s$ :	$f(t)e^{-at} u(t)$	$\longleftrightarrow F(s+a)$
translatie in $t$ :	$f(t-a) u(t-a)$	$\longleftrightarrow e^{-as} F(s)$
afgeleide in $t$ :	$\frac{d}{dt}(f(t)u(t))$	$\longleftrightarrow sF(s) - f(0^+)$
	$\frac{d^2}{dt^2}(f(t)u(t))$	$\longleftrightarrow s^2 F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
afgeleide in $s$ :	$t f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow -\frac{d}{ds} F(s)$
	$t^n f(t) u(t)$	$\longleftrightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
convolutie:	$(f * g)(t) u(t)$	$\longleftrightarrow F(s) G(s)$
schaling:	$f(at)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

**Initial value theorem:**

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

**Final value theorem:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{onder de gebruikelijke poolvoorwaarden}).$$

**Link met FTC:**

$$\text{LT}(s = j\omega) = \text{FTC}(j\omega) \quad \text{als } x(t) \text{ absoluut integreerbaar is.}$$

## 1.2 Useful Laplace pairs

$e^{-at}u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$	$t^n u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$
$\cos(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + a^2}$	$\sin(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{a}{s^2 + a^2}$
$\delta(t)$	$\longleftrightarrow 1$	$u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{1}{s}$
$t \cos(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t \sin(at)u(t)$	$\longleftrightarrow \frac{2sa}{(s^2 + a^2)^2}$

## 1.2 Fourier transform (FTC)

### 2.1 Basic formulae

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

convolution theorem (tijd):	$f(t) * g(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega) G(\omega)$
convolution theorem (freq.):	$f(t) g(t)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{2\pi} (F * G)(\omega)$
translatie:	$x(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) e^{-j\omega t_0}$
symmetry (reëel $x$ ):			$X(-\omega) = X^*(\omega)$
time symmetry (reëel $x$ ):	$x(-t)$	$\longleftrightarrow$	$X(-\omega) = X^*(\omega)$
link FS-FTC:			$X(k\omega_0) = T c_k \quad (\omega_0 = 2\pi/T)$

## 2.2 Useful Fourier pairs

We gebruiken  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ .

Block:	$x(t) = \begin{cases} A, & t \in [-L/2, L/2] \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) = AL \text{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right)$
Sinc:	$x(t) = A \text{sinc}(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$X(\omega) = \begin{cases} \frac{A\pi}{\omega_0}, &  \omega  < \omega_0 \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$
Impuls:	$\delta(t - t_0)$	$\longleftrightarrow$	$e^{-j\omega t_0}$
Complex expon.:	$e^{j\omega_0 t}$	$\longleftrightarrow$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
Cosine:	$\cos(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Sine:	$\sin(\omega_0 t)$	$\longleftrightarrow$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
Delta train:	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$\longleftrightarrow$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$

## 1.3 Fourier series (FS)

### 3.1 Cartesian form

Voor periode  $T$  met  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right].$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt.$$

### 3.2 Complex form

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

**Symmetrie (reëel  $f$ ):**  $c_{-k} = c_k^*$ .

**Spectrum:**

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

### 3.3 Links between cartesian and complex form

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - jb_k}{2}, & c_k^* &= \frac{a_k + jb_k}{2}. \\ |c_k| &= \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \varphi_k &= \text{Arctan2}(a_k, -b_k). \\ a_k &= 2 \operatorname{Re}\{c_k\}, & b_k &= -2 \operatorname{Im}\{c_k\}. \end{aligned}$$

## 2 Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

### 2.1 Oefening 1.1: Lineaire Systemen

Gegeven een systeem met operator  $\mathcal{T}$  gedefinieerd als  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$ .

**Vraag:** Onderzoek of dit systeem lineair is.

### 2.2 Oefening 1.2: RC-Circuit

Een RC-circuit heeft  $R = 1000 \Omega$  en  $C = 10 \mu\text{F}$ . De ingangsspanning is een stapfunctie  $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$  V.

**Vraag:**

- Schrijf de differentiaalvergelijking op voor de uitgangsspanning  $v_{\text{uit}}(t)$ .
- Bereken de tijdsconstante  $\tau$  van het circuit.
- Bepaal de uitgangsspanning na 10 ms als  $v_{\text{uit}}(0) = 0$  V.

### 2.3 Oefening 1.3: Radioactief Verval

Een radio-isotoop heeft een halveringstijd van 6 uur. Om 08:00 uur wordt 20 mg geproduceerd. Reël milligram blijft over om 14:00 uur?

### 2.4 Oefening 1.4: Homogeniteit en Additiviteit

Gegeven twee systemen:

- Systeem A:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$
- Systeem B:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

**Vraag:**

- Test beide systemen op homogeniteit (schaling):  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = a\mathcal{T}\{x(t)\}$ .
- Test beide systemen op additiviteit:  $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$ .
- Bepaal voor elk systeem of het lineair is.

### 2.5 Oefening 1.5: LTI-Systeem Herkenning

Welke van de volgende systemen zijn lineair en tijdinvariant (LTI)?

- $y(t) = x(t - 2)$
- $y(t) = tx(t)$
- $y(t) = |x(t)|$
- $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$

**Vraag:** Motiveer je antwoorden.

## 2.6 Oefening 1.6: Causaliteit en Invertibiliteit

Gegeven het systeem  $\mathcal{T}$  met

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + x(t - 1).$$

**Vraag:**

- (a) Is het systeem lineair en tijdsinvariant?
- (b) Is het systeem causaal?
- (c) Is het systeem invertibel? Motiveer.

## 2.7 Oefening 1.7: Snelle check (lineariteit, TI en causaliteit)

Beschouw de twee systemen:

$$(S1) \quad y(t) = 2x(t - 1), \quad (S2) \quad y(t) = x(t) + u(t).$$

**Vraag:**

- (a) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem lineair is.
- (b) Onderzoek voor (S1) en (S2) of het systeem tijdsinvariant is.
- (c) Is elk systeem causaal? Motiveer kort.

## 2.8 Oefening 1.8: Analyse van een Kwadratisch Modulatiesysteem (Uitgebreid)

Beschouw een systeem  $S$  waarbij de relatie tussen ingang en uitgang wordt gegeven door:

$$y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi t) + x^2(t)$$

**Vraag:** Onderzoek de lineariteit en tijdsinvariantie van dit systeem.

## 2.9 Oefening 1.9: Causaliteit van een Integrator met Toekomstblik (Uitgebreid)

Beschouw het systeem gedefinieerd door:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} x(\tau) d\tau$$

**Vraag:** Is dit systeem causaal? Is het lineair?

## 2.10 Oefening 1.10: Differentiaalvergelijking van een Mechanisch Systeem (Uitgebreid)

**Situatie:** Een massa  $M$  beweegt over een oppervlak met wrijvingscoëfficiënte  $K$  en wordt aangedreven door een externe kracht  $F(t)$ . De wrijving is echter niet lineair, maar evenredig met het kwadraat van de snelheid (luchtweerstand).

**Opgave:**

1. Stel de differentiaalvergelijking op voor de verplaatsing  $y(t)$ .
2. Is dit systeem lineair? Zo nee, lineariseer het systeem rond een evenwichtssnelheid  $v_0$ .

### 3 Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

#### 3.1 Oefening 2.1: Exponentiële Functies

Gegeven de signalen  $x_1(t) = e^{0.2t}$  en  $x_2(t) = e^{-0.5t}$ .

**Vraag:**

- Bepaal welk signaal exponentiële groei en welk exponentieel verval vertoont.
- Bereken de waarde van elk signaal op  $t = 5$  s.

#### 3.2 Oefening 2.2: Sinus en Cosinus

Een sinusgolf is gegeven door  $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ .

**Vraag:**

- Bepaal de amplitude, hoekfrequentie  $\omega$ , frequentie  $f$ , en fasinhoek.
- Schrijf dit signaal als een cosinusfunctie.

#### 3.3 Oefening 2.3: Complexe Exponentiële Functie

Gegeven  $z(t) = e^{j2\pi t}$ .

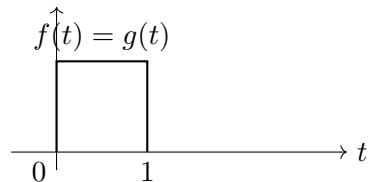
**Vraag:**

- Schrijf dit signaal in termen van sinus en cosinus gebruikmakend van de formule van Euler.
- Bepaal de waarde op  $t = 0.25$  s.

#### 3.4 Oefening 2.4: Convolutie

Bereken de convolutie van twee pulssignalen:

$$f(t) = u(t) - u(t-1), \quad g(t) = u(t) - u(t-1)$$

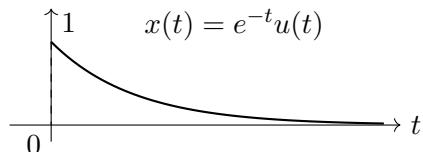


Zie Formularium: convolutie in tijd  $\leftrightarrow$  product in frequentie in 1.2.

**Vraag:** Bepaal  $(f * g)(t)$  en schets het resultaat.

#### 3.5 Oefening 2.5: Signaalverschuiving en Schaling

Gegeven het signaal  $x(t) = e^{-t}u(t)$ .



**Vraag:**

- (a) Bepaal  $y_1(t) = x(t - 2)$  (tijdsverschuiving).
- (b) Bepaal  $y_2(t) = x(2t)$  (tijdscompressie).
- (c) Bepaal  $y_3(t) = 2x(t)$  (amplitude schaling).
- (d) Schets alle drie signalen.

### 3.6 Oefening 2.6: Signaalenergie

Bepaal de energie van de volgende signalen:

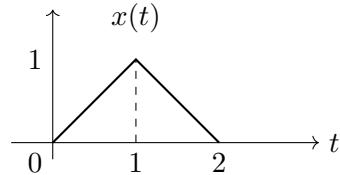
**Vraag:**

- (a)  $x(t) = e^{-t}u(t)$
- (b)  $x(t) = 2 \sin(t)u(t)$  over  $0 \leq t \leq \pi$
- (c)  $x(t) = \text{rect}(t) = u(t + 0.5) - u(t - 0.5)$

### 3.7 Oefening 2.7: Driehoeks signaal met Stapfuncties

Definieer het signaal

$$x(t) = t(u(t) - u(t - 1)) + (2 - t)(u(t - 1) - u(t - 2)).$$



**Vraag:**

- (a) Schrijf  $x(t)$  expliciet als stukgewijze functie.
- (b) Bereken de energie  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ .
- (c) Bepaal en schets  $x(t - 1)$ .

### 3.8 Oefening 2.8: Basis signaalbewerkingen (stapfunctie)

Neem

$$x(t) = u(t) - u(t - 2).$$

**Vraag:**

- (a) Schets  $x(t)$ .
- (b) Schrijf  $x(t - 1)$  en  $x(t + 1)$  in termen van stapfuncties en schets ze.
- (c) Schrijf  $x(2t)$  en  $x(-t)$  in termen van stapfuncties en schets ze.

### 3.9 Oefening 2.9: Analytische Convolutie van Exponentiëlen (Uitgebreid)

Gegeven twee causale signalen:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-3t}u(t) \\ h(t) &= e^{-2t}u(t) \end{aligned}$$

**Vraag:** Bepaal de convolutie  $y(t) = (x * h)(t)$ .

### 3.10 Oefening 2.10: Grafische Convolutie van een Blok en een Zaagtand (Uitgebreid)

Beschouw de volgende signalen:

- $x(t)$ : Een rechthoekige puls met amplitude 1 tussen  $t = 0$  en  $t = 2$ . ( $x(t) = u(t) - u(t-2)$ )
- $h(t)$ : Een zaagtandpuls gegeven door  $h(t) = t$  voor  $0 \leq t \leq 1$ , en 0 elders.

**Vraag:** Bepaal grafisch en analytisch de convolutie  $y(t)$ .

Beschouw de volgende signalen:

- $x(t)$ : Een rechthoekige puls met amplitude 1 tussen  $t = 0$  en  $t = 2$ . ( $x(t) = u(t) - u(t-2)$ )
- $h(t)$ : Een zaagtandpuls gegeven door  $h(t) = t$  voor  $0 \leq t \leq 1$ , en 0 elders.

**Vraag:** Bepaal grafisch en analytisch de convolutie  $y(t)$ .

### 3.11 Oefening 2.11: RMS en Vermogen (Uitgebreid)

Gegeven het signaal:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

**Vraag:** Bereken de RMS-waarde en toon aan dat de faseverschuiving geen invloed heeft op het vermogen.

## 4 Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

### 4.1 Oefening 3.1: Standaard Laplace-paren

Bron: *Formularium standaard transformaties*.

Bepaal de Laplacetransformatie van de volgende functies:

**Vraag:**

- (a)  $f(t) = 5u(t)$
- (b)  $f(t) = e^{-3t}u(t)$
- (c)  $f(t) = t \cdot u(t)$
- (d)  $f(t) = \cos(5t) \cdot u(t)$
- (e)  $f(t) = e^{-2t} \sin(3t)u(t)$

Zie *Formularium: definitie 1.1 en paren 1.1*.

### 4.2 Oefening 3.2: Inverse Laplacetransformatie met Partieelbreuken

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

**Vraag:**

- (a)  $F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$
- (b)  $G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$  (tip: partieelbreuken)
- (c)  $H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$  (tip: dubbele pool)

Zie *Formularium: paren 1.1*.

### 4.3 Oefening 3.3: Eerste-Orde Systeem

Los de volgende differentiaalvergelijking op met Laplacetransformatie:

**Vraag:**

- (a)  $\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t), y(0) = 2$
- (b)  $\frac{dy}{dt} + 3y = 6e^{-2t}u(t), y(0) = 0$
- (c)  $2\frac{dy}{dt} + y = u(t) - u(t-1), y(0) = 1$

Zie *Formularium: afgeleide-eigenschap 1.1*.

### 4.4 Oefening 3.4: Tweede-Orde Systeem: Karakteristische Wortels

**Vraag:** Voor elk systeem: bepaal karakteristieke wortels, onderdamping-status, en los op voor  $y(t)$ .

- (i)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

(ii)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$  (kritiek gedempt)

(iii)  $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$  (ondergedempt)

**Bonus:** Schets  $y(t)$  voor alle drie gevallen op dezelfde grafiek en bespreek het gedrag.

#### 4.5 Oefening 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving (Tijddomein)

**Vraag:**

(a) Gegeven  $F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$ , bepaal  $f(t)$  en vervolgens  $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\}$ .

(b) Bepaal de Laplacetransformatie van  $x(t) = e^{-3(t-1)}u(t-1)$ .

(c) Schets beide  $f(t)$  en  $g(t)$  op dezelfde grafiek en duid de verschuiving aan.

Zie Formularium: *tijdverschuiving in t 1.1*.

#### 4.6 Oefening 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd

Bepaal via partieelbreuken en inverse Laplace de volgende:

**Vraag:**

(a)  $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$  (drie verschillende polen)

(b)  $G(s) = \frac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)}$  (dubbele pool)

(c)  $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$  (reële en complexe polen)

#### 4.7 Oefening 3.7: Begin- en Eindwaardeestelling

**Gegeven:**  $F(s) = \frac{3s+5}{s^2 + 4s + 3}$

**Vraag:**

(a) Bepaal  $f(0^+)$  met de beginwaardeestelling.

(b) Bepaal  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  met de eindwaardeestelling.

(c) Bepaal  $f(t)$  expliciet en controleer beide grenzen.

(d) Schets  $f(t)$  voor  $t \in [0, 10]$  s.

Zie Formularium: *begin- en eindwaardeestelling 1.1*.

**Bonus:** Voor welke  $F(s)$  kan de eindwaardeestelling NIET gebruikt worden?

## 4.8 Oefening 3.8: Convolutie via Laplace

reël verval)

**Vraag:**

- Bepaal  $F(s)$  en  $G(s)$ .
- Bepaal  $Y(s) = F(s) \cdot G(s)$  en vervolgens  $y(t) = (f * g)(t)$ .
- Geef  $y(t)$  stuksgewijs en schets het resultaat.
- Interpreteer fysisch: wat gebeurt er bij  $t = 1$ ?

Zie Formularium: convolutie-eigenschap 1.1.

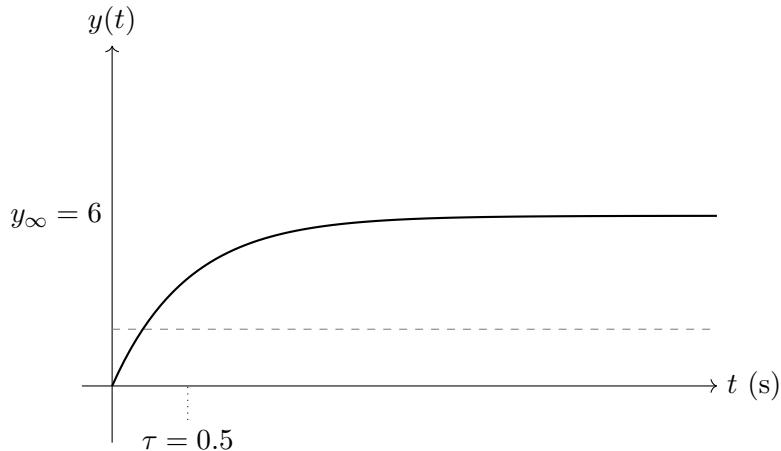
## 4.9 Oefening 3.9: Samenvattingsoefening Laplace

**Vraag:**

- Bepaal  $\mathcal{L}\{u(t)\}$  en  $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}$ .
- Bepaal  $\mathcal{L}\{tu(t)\}$  en  $\mathcal{L}\{t^2e^{-3t}u(t)\}$ .
- Bepaal inverse Laplace van  $F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^2+9}$ .
- Voor  $H(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+13}$ , bepaal  $h(t)$  (complexe polen!).

## 4.10 Oefening 3.10: Staprespons van Eerste-Orde Systeem

**Gegeven:** Systeem  $H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$  met  $K = 2$ ,  $\tau = 0.5$  s, en ingangssignaal  $x(t) = 3u(t)$ .



**Vraag:**

- Bepaal  $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$ .
- Bepaal  $y(t)$  en identificeer: steady-state waarde, tijdsconstante, settling time (2%).
- Schets  $y(t)$  en controleer of deze overeenkomt met de grafiek hierboven.
- Op welk moment heeft  $y(t)$  63% van zijn eindwaarde bereikt?

Zie Formularium: afgeleide-eigenschap en stapfunctie-paar 1.1, 1.1.

#### 4.11 Oefening 3.11: Inverse Laplacetransformatie met Tijdsverschuiving

Bron: Aanvullende oefeningen (praktische examenniveau).

Bepaal de inverse Laplacetransformatie van:

$$F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s(s+2)}$$

**Vraag:**

- Bepaal eerst de partieelbreukontwikkeling van  $\frac{2}{s(s+2)}$  (negeer voorlopig  $e^{-2s}$ ).
- Bepaal de inverse Laplacetransformatie zonder  $e^{-2s}$ .
- Pas de verschuivingsstelling toe om  $f(t)$  te vinden.

*Tip: De Exponentiële term  $e^{-2s}$  geeft een tijdsverschuiving van 2 seconden.*

#### 4.12 Oefening 3.12: Differentiaalvergelijking met Beginvoorwaarden

Bron: Aanvullende oefeningen (examenniveau).

Los het volgende beginwaardeprobleem op met behulp van Laplacetransformatie:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 6u(t)$$

Met beginvoorwaarden  $y(0) = 1$  en  $y'(0) = -2$ .

**Vraag:**

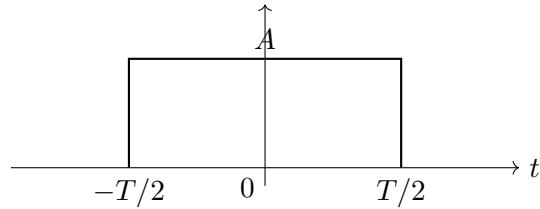
- Transformeer beide zijden van de DV naar het Laplace-domein.
- Zet alle beginvoorwaarden in en los op voor  $Y(s)$ .
- Bepaal  $y(t)$  via partieelbreuken en inverse Laplacetransformatie.
- Controleer je antwoord door  $y(0)$  en  $y'(0)$  in te vullen.

## 5 Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

### 5.1 Oefening 4.1: Fouriertransformatie van Rechthoekpuls

Gegeven een rechthoekpuls:

$$f(t) = \begin{cases} A, & -T/2 < t < T/2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$



Zie Formularium: blok  $\leftrightarrow$  sinc in 1.2.

**Vraag:**

- (a) Bepaal de Fouriertransformatie  $F(j\omega)$ .
- (b) Schrijf het resultaat in de vorm van een sinc-functie.
- (c) Bepaal de eerste nulpunten van het spectrum.

### 5.2 Oefening 4.2: Verschuivingsstelling

Gegeven  $F\{f(t)\} = F(j\omega)$  bepaal de Fouriertransformatie van  $f(t - t_0)$ .

Zie Formularium: tijdverschuiving 1.2.

**Vraag:**

- (a) Geef het bewijs van de verschuivingsstelling.
- (b) Pas deze toe op de puls uit oefening 4.1 met  $t_0 = 1$  s,  $A = 2$ ,  $T = 2$  s.
- (c) Bespreek het effect op amplitude- en fasespectrum.

### 5.3 Oefening 4.3: Modulation Property

Bepaal de Fouriertransformatie van het gemoduleerde signaal:

$$x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$$

waarbij  $\text{rect}(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$  is.

Zie Formularium: modulatie (cosinus) in 1.2.

**Vraag:**

- (a) Pas de modulatiestelling toe.
- (b) Schets het amplitude- en fasespectrum.

#### 5.4 Oefening 4.4: Parseval's Stelling

De energiedichtheid van een signaal wordt gegeven door Parseval's stelling. Gegeven  $f(t) = e^{-t}u(t)$ .

Zie Formularium: FTC-definitie 1.2 en eigenschappen 1.2.

**Vraag:**

- Bepaal de totale energie in het tijdsdomein:  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ .
- Bepaal  $F(j\omega)$  en controleer de energie in het frequentiedomein.
- Verifieer Parseval's stelling.

#### 5.5 Oefening 4.5: Reëel signaal en Bandbreedte

Gegeven  $f(t) = e^{-a|t|}$  met  $a > 0$ .

**Vraag:**

- Bepaal de Fouriertransformatie  $F(j\omega)$ .
- Schets het amplitude- en fasespectrum.
- Bepaal de bandbreedte (eerste nulpunt).

#### 5.6 Oefening 4.6: Dirac Delta

Bepaal de Fouriertransformatie van:

**Vraag:**

- $f(t) = \delta(t)$  (impulsfunctie)
- $f(t) = \delta(t - t_0)$  (verschoven impulsfunctie)
- $f(t) = \cos(\omega_0 t)$  (hint: gebruik dat  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ )

#### 5.7 Oefening 4.7: Verschuiving in de Tijd (FTC)

Beschouw het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

en definieer  $y(t) = x(t - t_0)$  met  $t_0 = \frac{1}{4}$ .

**Vraag:**

- Bepaal  $X(j\omega)$ .
- Bepaal  $Y(j\omega)$  met de verschuivingsstelling en bespreek het effect op fase en amplitude.

#### 5.8 Oefening 4.8: FTC van delta's

Gebruik de bekende paren  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  en de verschuivingsstelling.

**Vraag:**

- Bepaal  $\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$ .
- Bepaal de Fouriertransformatie van  $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$ .
- Wat is het amplitudespectrum van  $x(t)$  uit (b)? (geen volledige schets nodig)

## 5.9 Oefening 4.9: Spectrum van een Samengesteld Signaal

Bron: Aanvullende oefeningen (examenniveau).

Gegeven twee signalen waarvan het spectrum  $X(\omega)$  en  $H(\omega)$  bekend zijn. Bepaal het spectrum  $Y(\omega)$  van:

$$y(t) = x(t - 3) + x(t + 3)$$

**Vraag:**

- Pas de verschuivingsstelling toe op beide termen.
- Combineer beide resultaten en gebruik Euler's formule om de vorm te vereenvoudigen.
- Wat gebeurt er met de amplitude en de fase van het spectrum?

*Hint:  $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos(\theta)$ .*

## 5.10 Oefening 4.10: Dualiteitseigenschap van FTC

Bron: Aanvullende oefeningen (geavanceerd).

Gebruik de dualiteitseigenschap van de Fouriertransformatie om de transformatie te vinden van:

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

**Vraag:**

- Je weet dat  $e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ . Kies een passende waarde van  $a$ .
- Maak gebruik van de dualiteitsstelling: als  $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ , dan  $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$ .
- Bepaal  $\mathcal{F}\{\frac{1}{1+t^2}\}$ .

## 5.11 Oefening 4.11: Spectrum van een Driehoekpuls (Uitgebreid)

Bepaal de Fouriertransformatie van de driehoekpuls  $\Lambda(t)$  gedefinieerd als:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{voor } |t| < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

**Tip:** Gebruik het feit dat een driehoek de convolutie is van twee rechthoeken.

## 5.12 Oefening 4.12: Dualiteit en Frequentieverschuiving (Uitgebreid)

Gegeven is dat:

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

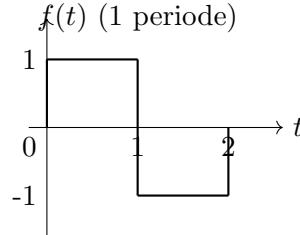
**Vraag:** Bepaal zonder integratie de Fouriertransformatie van het signaal  $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ .

## 6 Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

### 6.1 Oefening 5.1: Blokgolf

Een periodieke blokgolf met periode  $T = 2$  s is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ -1, & 1 < t < 2 \end{cases}$$



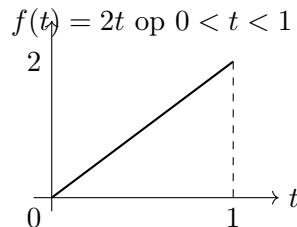
Zie Formularium: Fourierreeks (cartesisch) 1.3 en (complex) 1.3.

**Vraag:**

- (a) Bepaal of de functie even, oneven, of geen van beide is.
- (b) Bereken de Fouriercoëfficiënten  $a_0$ ,  $a_n$ , en  $b_n$ .
- (c) Schrijf de Fourierreeks tot de 3e harmonische.

### 6.2 Oefening 5.2: Zaagtandgolf

Een zaagtandgolf met periode  $T = 1$  s is gegeven door  $f(t) = 2t$  voor  $0 < t < 1$ .



**Vraag:**

- (a) Bereken  $a_0$ .
- (b) Bepaal  $b_1$  en  $b_2$ .
- (c) Schrijf de benaderende Fouriersom met 2 termen.

### 6.3 Oefening 5.3: Driehoekgolf

Een driehoekgolf met periode  $T = 2$  is gedefinieerd als:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

**Vraag:**

- (a) Is dit signaal even of oneven?
- (b) Bepaal de Fouriercoëfficiënten.
- (c) Schrijf de eerste drie niet-nul termen van de Fourierreeks.

#### 6.4 Oefening 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

Gegeven de blokgolf uit oefening 5.1.

**Vraag:**

- Bereken de gemiddelde macht van het signaal:  $P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt$ .
- Bereken  $P$  uit de Fouriercoëfficiënten met Parseval's stelling:  $P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ .
- Controleer dat beide methoden dezelfde waarde geven.

#### 6.5 Oefening 5.5: Complexe Fourierreeks en Link met FTC

Definieer een periodiek signaal met periode  $T = 2$  als

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \quad \text{en periodiek uitgebreid.}$$

**Vraag:**

- Bepaal de coëfficiënten  $c_k$  (met  $\omega_0 = 2\pi/T$ ).
- Geef een eenvoudige interpretatie van welke harmonischen verdwijnen.
- Gebruik de link uit het formularium  $X(k\omega_0) = T c_k$  om uit te leggen hoe de FTC van één periode gesampled wordt.

#### 6.6 Oefening 5.6: Fourierreeks van een eenvoudige som

Neem een periodiek signaal met periode  $T = 2\pi$ :

$$f(t) = \sin(t) + 2 \cos(2t).$$

**Vraag:**

- Geef  $\omega_0$ .
- Bepaal de reële Fouriercoëfficiënten  $a_0$ ,  $a_n$  en  $b_n$ .
- Schrijf de Fourierreeks expliciet (je mag meteen herkennen welke termen niet nul zijn).

#### 6.7 Oefening 5.7: De Blokgolf (Symmetrie) — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven een periodieke functie  $f(t)$  met periode  $T = 2\pi$ :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{voor } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{voor } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

- Schets de functie over twee periodes (van  $-2\pi$  tot  $2\pi$ ).
- Is deze functie even, oneven, of geen van beide? Wat betekent dit voor de coëfficiënten  $a_0$ ,  $a_n$  en  $b_n$ ?
- Bereken de niet-nul coëfficiënten en schrijf de eerste drie termen van de reeks op.

## 6.8 Oefening 5.8: Fourierreeks door Inspectie — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Soms hoef je niet te integreren. Gegeven het signaal:

$$f(t) = 3 + 2 \cos(4t) - 5 \sin(10t)$$

- (a) Wat is de grondfrequentie  $\omega_0$  van dit signaal? (Hint: zoek de grootste gemene deler van de frequenties).
- (b) Bepaal direct de Fouriercoëfficiënten  $a_0, a_n, b_n$ .

## 6.9 Oefening 5.9: Parseval (Energie) — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

De stelling van Parseval zegt dat de vermogensinhoud in tijd gelijk is aan de som van de vermogens van de harmonischen:  $P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2)$ .

Bereken het gemiddelde vermogen van het signaal:

$$f(t) = 3 + 2 \cos(4t) - 5 \sin(10t)$$

## 6.10 Oefening 5.10: Fourierreeks van een Gelijkgerichte Sinus (Uitgebreid)

Beschouw het signaal:

$$x(t) = |\sin(t)|$$

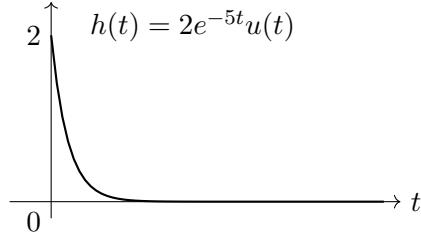
Vragen:

1. Wat is de fundamentele periode  $T$ ?
2. Bepaal de coëfficiënten  $c_k$ .

## 7 Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

### 7.1 Oefening 6.1: Impulsrespons

Een eerste-orde systeem heeft impulsrespons  $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$ .



**Vraag:**

- Bereken de systeemrespons op een stapingang  $f(t) = u(t)$  door convolutie.
- Verifieer je antwoord met de Laplacetransformatie.

### 7.2 Oefening 6.2: Massa-Veer-Demper

Een massa-veer-dempersysteem heeft  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $k = 8 \text{ N/m}$ , en  $c = 4 \text{ Ns/m}$ .

**Vraag:**

- Schrijf de differentiaalvergelijking.
- Bepaal de natuurlijke eigenfrequentie  $\omega_0$ .
- Is het systeem ondergedempt, kritisch gedempt, of overgedempt?

### 7.3 Oefening 6.3: Frequentierespons

Gegeven een LTC-systeem met overdracht  $H(s) = \frac{10}{s+5}$ .

**Vraag:**

- Bepaal de frequentierespons  $H(j\omega)$ .
- Bepaal de amplitude- en faserespons.
- Bepaal de 3dB bandbreedte (waar  $|H(j\omega)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$ ).

### 7.4 Oefening 6.4: Cascade Systemen

Gegeven twee LTC-systemen in cascade:

$$H_1(s) = \frac{5}{s+2}, \quad H_2(s) = \frac{3}{s+3}$$

**Vraag:**

- Bepaal de totale overdracht  $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$ .
- Bepaal de impulsrespons  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ .

## 7.5 Oefening 6.5: Stabiliteit en Polen

reël reël zijn op basis van hun polen.

**Vraag:**

(a)  $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$

(b)  $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}$

(c)  $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$

## 7.6 Oefening 6.6: Overdracht, Impulsrespons en Nultoestandsrespons

Een LTC-systeem voldoet aan de differentiaalvergelijking (met nul beginvoorwaarden)

$$\frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t).$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de overdrachtsfunctie  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ .

(b) Bepaal de impulsrespons  $h(t)$ .

(c) Is het systeem BIBO-stabiel? Motiveer via de polen.

(d) Bepaal de nultoestandsrespons  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t) - u(t-1)$ .

## 7.7 Oefening 6.7: Impuls- en staprespons (basis)

Een causaal LTC-systeem heeft overdracht

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

**Vraag:**

(a) Bepaal de impulsrespons  $h(t)$ .

(b) Bepaal de staprespons  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t)$ .

(c) Wat is de tijdsconstante  $\tau$  en de DC-versterking  $H(0)$ ?

## 7.8 Oefening 6.8: Van DV naar $H(s)$ — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Een systeem wordt beschreven door de differentiaalvergelijking:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 4x(t)$$

(a) Zet beide kanten om naar het Laplace-domein (neem aan dat alle beginvoorwaarden 0 zijn).

(b) Bepaal de transferfunctie  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ .

(c) Wat zijn de polen en nulpunten van dit systeem?

## 7.9 Oefening 6.9: Impulsrespons en Stabiliteit — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven de transferfunctie:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}$$

- (a) Splits de noemer in factoren  $(s + a)(s + b)$ .
- (b) Gebruik partieelbreuksplitsing om  $H(s)$  te schrijven als  $\frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$ .
- (c) Bepaal de impulsrespons  $h(t)$  (de inverse Laplace van  $H(s)$ ).
- (d) Is dit systeem BIBO-stabiel? Waarom?

## 7.10 Oefening 6.10: Gedrag bij frequenties — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven een eerste-orde systeem  $H(s) = \frac{10}{s+2}$ .

- (a) Wat is de “DC-gain” (de versterking bij frequentie 0)? Hint: vul  $s = 0$  in.
- (b) Wat gebeurt er met de versterking  $|H(j\omega)|$  als de frequentie  $\omega$  naar oneindig gaat?
- (c) Wat voor type filter is dit? (Laagdoorlaat, Hoogdoorlaat?)

## 7.11 Oefening 6.11: Respons op een Sinus (Uitgebreid)

Een systeem heeft een transferfunctie:

$$H(s) = \frac{10}{s + 2}$$

**Vraag:** Bepaal de steady-state output  $y_{ss}(t)$  als de input  $x(t) = 3 \cos(2t + 45^\circ)$  is.

## 7.12 Oefening 6.12: Stabiliteitsanalyse via Polen (Uitgebreid)

Gegeven:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 1)(s + 2)}$$

## 8 Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

### 8.1 Oefening 7.1: Eigenwaarden Berekenen

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- Bepaal de karakteristieke veelterm  $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ .
- Vind de eigenwaarden van  $A$ .
- Bereken voor elke eigenwaarde een bijbehorende eigenvector.

### 8.2 Oefening 7.2: Eigenwaarden van Tweede-Orde Systeem

Voor het systeem uit oefening 3.4 ( $\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0$ ).

**Vraag:**

- Schrijf dit differentiaalvergelijkingssysteem als een eerste-orde matrixvergelijking:
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$
- Bepaal de eigenwaarden van deze systeemmatrix.
- Verifieer dat dit overeenkomt met de karakteristieke vergelijking uit oefening 3.4.
- Bepaal de eigenvectoren.

### 8.3 Oefening 7.3: Diagonalisatie

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- Bepaal alle eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.
- Controleer dat de eigenvectoren orthogonaal zijn (omdat  $A$  symmetrisch is).
- Vorm de matrix  $P$  met eigenvectoren als kolommen en bepaal  $P^{-1}AP = D$  waarbij  $D$  diagonaal is.

### 8.4 Oefening 7.4: Gerschgorin-Cirkelstelling

Gegeven de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- Bepaal de Gerschgorin-cirkels voor deze matrix.
- Geef grenzen voor de eigenwaarden op basis van de stelling.
- Bepaal de eigenwaarden numeriek en controleer of ze binnen de cirkels vallen.

## 8.5 Oefening 7.5: Eigenvectoren en Orthogonaliteit

Gegeven de matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden.
- (b) Bepaal de eigenvectoren.
- (c) Toon aan dat de eigenvectoren orthogonaal zijn.
- (d) Normaliseer de eigenvectoren tot eenheid.

## 8.6 Oefening 7.6: Matrix Exponentiële

Gegeven de matrix  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van  $A$ .
- (b) Bereken de matrix Exponentiële  $e^{At}$  via diagonalisatie of Cayley-Hamilton.
- (c) Gebruik dit om de oplossing van  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  te vinden met  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 8.7 Oefening 7.7: Niet-diagonaliseerbaar en Matrixexponentiaal

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden van  $A$  en de dimensie van de eigenruimte.
- (b) Is  $A$  diagonaliseerbaar? Motiveer.
- (c) Bepaal  $e^{At}$ .

## 8.8 Oefening 7.8: Eigenwaarden van een diagonalmatrix (basis)

Gegeven

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarden en geef voor elke eigenwaarde een eigenvector.
- (b) Bereken  $A^3$ .
- (c) Bereken  $e^{At}$ .

## 8.9 Oefening 7.9: Karakteristieke Vergelijking — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven de matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Stel de karakteristieke vergelijking op:  $\det(A - \lambda I) = 0$ .
- (b) Los deze kwadratische vergelijking op om de eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  te vinden.

## 8.10 Oefening 7.10: Eigenvectoren vinden — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gebruik de eigenwaarden uit Oefening 7.9 ( $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$ ).

- (a) Bepaal de eigenvector  $\mathbf{v}_1$  die hoort bij  $\lambda_1 = 2$  (los op:  $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ).
- (b) Bepaal de eigenvector  $\mathbf{v}_2$  die hoort bij  $\lambda_2 = 5$ .

## 8.11 Oefening 7.11: Diagonaalmatrix en machten — Starter Level

Bron: Starter Oefeningen.

Gegeven de matrix  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

- (a) Wat zijn de eigenwaarden van  $D$ ? (Dit zou je direct moeten zien).
- (b) Bereken  $D^5$  zonder de matrix 5 keer te vermenigvuldigen (Hint: bij diagonaalmatrices mag je de macht per element nemen).

## 9 Hoofdstuk 8: Examengerichte Oefeningen

### 9.1 Oefening 8.1: Signaalspektrum en Symmetrie

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1a, signaal-eigenschappen).

Gegeven de signalen  $u(t)$  (Heaviside),  $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$ , en hun Fouriertransformaties  $U(j\omega)$ ,  $V(j\omega)$ .

**Vraag:**

(a) Beschrijf welke van de volgende signalen *causaal*, *periodiek*, *even*, en/of *oneven* zijn:

- $u(t)$  (Heaviside-stapfunctie)
- $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$
- $u(t) \cdot v(t)$  (product)
- $u(t) * v(t)$  (convolutie)

(b) Bepaal voor elk signaal welke symmetrie-eigenschappen van toepassing zijn en motiveer kort.

### 9.2 Oefening 8.2: Fouriertransformatie met Verschuiving en Modulatie

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 1b-c, FTC-transformaties).

Gegeven het bloksignaal

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{elders} \end{cases}$$

en de cosinusvorm  $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$ . Definieer  $y(t) = x(t) \cos(2\pi t)$  en  $z(t) = x(t) + x(t-1)$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $X(j\omega)$  (geïnspireerd door het sinc-paar uit het formularium, 1.2).
- (b) Bepaal  $Y(j\omega)$  met de modulatiestelling (vermenigvuldiging in tijd  $\leftrightarrow$  convolutie in frequentie).
- (c) Bepaal  $Z(j\omega)$  met de verschuivingsstelling. Welk effect heeft de verschuiving op amplitude- en fasespectrum?

### 9.3 Oefening 8.3: Impulsrespons, Causaliteit en Convolutie

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 2, impulsrespons van LTC-systeem).

Gegeven het ingangssignaal en de impulsrespons:

$$x(t) = u(t) - u(t-2), \quad h(t) = e^{-2t}u(t)$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de Laplacetransformatie  $X(s)$  van het ingangssignaal.
- (b) Is het systeem cawaal? Motiveer op basis van de vorm van  $h(t)$ .
- (c) Bepaal de nultoestandsrespons  $y(t) = h(t) * x(t)$  via convolutie en geef het antwoord stukgewijs.

## 9.4 Oefening 8.4: Complexe Fourierreeks van Periodiek Signaal

Bron: Voorbeeldexamen (vraag 3, impulsrespons en lineariteit).

Gegeven een periodiek puls-trein met periode  $T = 2$  s:

$$p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 2 \end{cases}, \quad \text{periodiek uitgebreid}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de coëfficiënten  $c_k$  (gebruik  $\omega_0 = 2\pi/T$ , zie Formularium 1.3). reël is, volgt  $c_{-k} = c_k^*$ . Verifieer dit voor enkele waarden van  $k$ .
- (b) Bepaal welke harmonischen verdwijnen en verklaar dit aan de hand van de duty cycle van de pulstrein.

## 9.5 Oefening 8.5: Laplacetransformatie met Verschuiving

Bron: Voorbeeldexamen (Laplace-transformatie met complexe signalen).

Gegeven

$$x(t) = 3e^{-t}u(t) - 3e^{-(t-1)}u(t-1).$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $X(s)$  (gebruik de verschuivingsstelling, zie Formularium 1.1).
- (b) Bepaal  $x(0^+)$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  door rechtstreeks  $x(t)$  in te vullen.
- (c) Verifieer  $x(0^+)$  met de beginwaardestelling en  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  met de eindwaardestelling (zie Formularium 1.1).

## 9.6 Oefening 8.6: Differentiaalvergelijking via Laplace (met Beginvoorwaarden)

Bron: Voorbeeldexamen (oplossen van DV met Laplace).

Los op met behulp van de unilaterale Laplacetransformatie:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**Vraag:**

- (a) Pas de Laplacetransformatie toe op beide zijden en zet alle beginvoorwaarden in.
- (b) Los op voor  $Y(s)$  en bepaal de polen (karakteristieke wortels).
- (c) Bepaal  $y(t)$  via partieelbreukontwikkeling en inverse Laplace.
- (d) Controleer je antwoord door  $y(0)$  en  $y'(0)$  in te vullen.

## 9.7 Oefening 8.7: LTI-Systeem: Stabiliteit, Impuls- en Staprespons

Bron: Voorbeeldexamen (polen, stabiliteit en systeemrespons).

Een causaal LTI-systeem heeft overdrachtsfunctie

$$H(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)}.$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal de polen van het systeem. Is het systeem BIBO-stabiel?
- (b) Bepaal de impulsrespons  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$  via partieelbreuken.
- (c) Bepaal de staprespons  $y(t)$  voor ingangssignaal  $x(t) = u(t)$ .
- (d) Beredeneer: Naar welke waarde convergeert  $y(t)$  als  $t \rightarrow \infty$ ? (Controleer met de eindwaardestelling.)

## 9.8 Oefening 8.8: Convolutie: Tijdsdomein versus Frequentiedomein

Bron: Voorbeeldexamen (*convolutie met basis-signalen*).

Gegeven

$$x(t) = u(t) - u(t-1), \quad h(t) = e^{-t}u(t)$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $y(t) = h(t) * x(t)$  rechtstreeks via (grafische) convolutie in het tijdsdomein. Geef het antwoord stukgewijs.
- (b) Bepaal  $X(s)$  en  $H(s)$  (Laplacetransformaties) en verifieer via  $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$  en inverse Laplace dat je hetzelfde antwoord krijgt.

## 9.9 Oefening 8.9: Fouriertransformatie en Energieanalyse

Bron: Voorbeeldexamen (*FTC en Parseval voor energie-berekeningen*).

Gegeven

$$f(t) = e^{-2|t|}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal  $F(j\omega)$  (tip: split in twee delen,  $f(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$ ).
- (b) Bereken de totale energie  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  rechtstreeks.
- (c) Verifieer met Parseval's stelling:  $E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$ .

## 9.10 Oefening 8.10: Reële Fouriereks: Symmetrie en Spectrum

Bron: Voorbeeldexamen (*periodieke signalen en Fourierreeks*).

Gegeven een antisymmetrische blokvorm met periode  $T = 2\pi$ :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \end{cases}, \quad \text{periodiek uitgebreid}$$

**Vraag:**

- (a) Bepaal of  $f(t)$  even, oneven, of geen van beide is.
- (b) Bepaal de coëfficiënten verdwijnen?).
- (c) Schrijf de Fouriereks tot en met de 5e harmonische.
- (d) Bepaal de RMS-waarde en verifieer met Parseval.

## 9.11 Oefening 8.11: Staattruimtevergelijking en Stabiliteit

Bron: Voorbeeldexamen (toestandsrepresentatie, eigenwaarden).

Gegeven het eerste-orde systeem:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu(t), \quad y = C\mathbf{x},$$

waarbij

$$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 1$$

en  $\mathbf{x}(0) = 1$ .

**Vraag:**

- (a) Bepaal de eigenwaarde van  $A$  en bespreek de stabiliteit van het systeem.
- (b) Bepaal  $\mathbf{x}(t)$  voor  $u(t) = 0$  (vrije respons).
- (c) Bepaal  $y(t)$  en determine  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ .

## 10 Oplossingen

### 10.1 Oplossingen Hoofdstuk 1: Signalen en Systemen - Eerste Kennismaking

#### Oplossing 1.1

**Gegeven:** Systeem met operator  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 3x(t) + 2$ .

**Vraag:** Onderzoek of dit systeem lineair is.

**Oplossing:**

- Test eigenschap 1 (schaling):  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 3ax(t) + 2 \neq a\mathcal{T}\{x(t)\} = a(3x(t) + 2) = 3ax(t) + 2a$
- Voor  $a \neq 1$  geldt:  $2 \neq 2a$ , dus schaling klopt niet.
- Omdat de schalingsvoorwaarde niet voldaan is, is het systeem niet lineair.

#### Oplossing 1.2

**Gegeven:** RC-circuit met  $R = 1000 \Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$ , ingangsspanning  $v_{\text{in}}(t) = 5u(t)$  V.

**Vraag:**

- Schrijf de differentiaalvergelijking op.
- Bereken  $\tau$ .
- Bepaal  $v_{\text{uit}}(0.01)$ .

**Oplossing:**

- (a) De differentiaalvergelijking van een RC-circuit:  $RC \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = v_{\text{in}}$

$$(1000)(10 \times 10^{-6}) \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

$$0.01 \frac{dv_{\text{uit}}}{dt} + v_{\text{uit}} = 5u(t)$$

- (b) Tijdsconstante:  $\tau = RC = (1000)(10 \times 10^{-6}) = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms}$

- (c) Voor een staprespons met  $v_{\text{uit}}(0) = 0$ :

$$v_{\text{uit}}(t) = 5(1 - e^{-t/\tau})u(t) = 5(1 - e^{-100t})u(t)$$

Op  $t = 10 \text{ ms} = 0.01 \text{ s}$ :

$$v_{\text{uit}}(0.01) = 5(1 - e^{-1}) = 5(1 - 0.368) = 5(0.632) = 3.16 \text{ V}$$

#### Oplossing 1.3

**Gegeven:** Radio-isotoop met halveringstijd  $t_{1/2} = 6 \text{ uur}$ . Initiële hoeveelheid: 20 mg om 08:00.

reël mg blijft over om 14:00?

**Oplossing:**

reël radioactief verval:  $N(t) = N_0 e^{-kt}$

Halveringstijd  $t_{1/2} = 6 \text{ uur}$ :  $\frac{1}{2} = e^{-6k} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{6} = 0.1155 \text{ h}^{-1}$

Van 08:00 tot 14:00 is  $\Delta t = 6 \text{ uur}$ :

$$N(6) = 20e^{-0.1155 \times 6} = 20e^{-0.693} = 20 \times 0.5 = 10 \text{ mg}$$

**Antwoord:** 10 mg blijft over.

## Oplossing 1.4

**Gegeven:** Twee systemen: - Systeem A:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$  - Systeem B:  $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

**Vraag:** Test op homogeniteit en additiviteit; bepaal lineariteit.

**Oplossing:**

**Systeem A:**  $\mathcal{T}\{x(t)\} = 2x(t)$

Homogeniteit:  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t) = a(2x(t)) = a\mathcal{T}\{x(t)\}$  ✓

Additiviteit:  $\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t) + x_2(t)) = 2x_1(t) + 2x_2(t) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\}$

✓

**Systeem A is LINEAIR.**

**Systeem B:**  $\mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) + 1$

Homogeniteit:  $\mathcal{T}\{ax(t)\} = ax(t) + 1 \neq a(x(t) + 1) = ax(t) + a = a\mathcal{T}\{x(t)\}$  (voor  $a \neq 1$ ) X

**Systeem B is NIET LINEAIR.**

## Oplossing 1.5

**Gegeven:** Vier systemen. **Vraag:** Welke zijn LTI?

**Oplossing:**

(a)  $y(t) = x(t - 2)$ : LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓ (zuivere vertraging)

(b)  $y(t) = tx(t)$ : LINEAIR maar NIET TIJDINVARIANT X (coëfficiënt varieert in tijd)

(c)  $y(t) = |x(t)|$ : NIET LINEAIR X (niet additief/homogeen)

(d)  $y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau$ : LINEAIR en TIJDINVARIANT ✓ (integrator)

**Antwoord:** (a) en (d) zijn LTI.

## Oplossing 1.6

**Gegeven:**  $y(t) = x(t) + x(t - 1)$ .

**Vraag:** Onderzoek lineariteit/tijdinvariantie; causaliteit; invertibiliteit.

**Oplossing:**

(a) **Lineair en tijdinvariant:** Het systeem is lineair (som van lineaire operatoren) en tijdinvariant omdat een tijdsverschuiving van de input dezelfde verschuiving in beide termen geeft. reël van huidige en verleden waarden.

(b) **Invertibel:** Niet uniek invertibel.

**Bewijs door tegenvoorbeeld:**

reël  $y(t) = 0$  voor alle  $t$ . Dan geldt:

$$x(t) + x(t - 1) = 0 \Rightarrow x(t) = -x(t - 1)$$

reël oplossingen, bijvoorbeeld:

- $x(t) = A(-1)^t$  voor elke constante  $A$
- $x(t) = 0$  voor alle  $t$

Omdat verschillende inputs tot dezelfde output leiden, is het systeem niet invertibel.

## Oplossing 1.7

**Gegeven:** (S1)  $y(t) = 2x(t - 1)$  en (S2)  $y(t) = x(t) + u(t)$ .

**Vraag:** Onderzoek lineariteit, tijdinvariantie en causaliteit voor (S1) en (S2).

**Oplossing:**

### (a) Lineariteit

**Systeem (S1):**  $y(t) = 2x(t - 1)$

**Test homogeniteit:** Voor  $ax(t)$ :

$$\mathcal{T}\{ax(t)\} = 2ax(t - 1) = a \cdot 2x(t - 1) = a\mathcal{T}\{x(t)\} \quad \checkmark$$

**Test additiviteit:** Voor  $x_1(t) + x_2(t)$ :

$$\mathcal{T}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2(x_1(t-1) + x_2(t-1)) = 2x_1(t-1) + 2x_2(t-1) = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$  (S1) is **lineair**.

**Systeem (S2):**  $y(t) = x(t) + u(t)$

**Nultoestandtest:** Voor  $x(t) = 0$ :

$$\mathcal{T}\{0\} = 0 + u(t) = u(t) \neq 0$$

Dit schendt het nultoestandcriterium voor lineariteit.

$\Rightarrow$  (S2) is **niet lineair**.

### (b) Tijdinvariantie

- (S1) is **tijdinvariant**:  $x(t) \mapsto x(t-t_0)$  geeft  $y(t) = 2x(t-1) \mapsto 2x(t-t_0-1) = y(t-t_0)$ .
- (S2) is **niet tijdinvariant**: voor  $x(t)$  is  $y(t) = x(t) + u(t)$ . Voor  $x(t-t_0)$  is de output  $x(t-t_0) + u(t)$ , terwijl  $y(t-t_0) = x(t-t_0) + u(t-t_0)$ . Niet gelijk als  $t_0 \neq 0$ .

### (c) Causaliteit

- (S1) is **causaal**:  $y(t)$  hangt af van  $x(t-1)$  (verleden).
- (S2) is **causaal**:  $y(t)$  hangt af van  $x(t)$  en een gekend signaal  $u(t)$ .

## Oplossing 1.8: Analyse van een Kwadratisch Modulatiesysteem

### 1. Toetsing van Lineariteit

We onderzoeken de respons op een geschaalde som van twee invoersignalen:  $x_{in}(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ .

De werkelijke output van het systeem is:

$$\begin{aligned} y_{out}(t) &= [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] \cos(2\pi t) + [\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)]^2 \\ &= \alpha x_1(t) \cos(2\pi t) + \beta x_2(t) \cos(2\pi t) + \alpha^2 x_1^2(t) + 2\alpha\beta x_1(t)x_2(t) + \beta^2 x_2^2(t) \end{aligned}$$

De lineaire combinatie zou zijn:

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha x_1(t) \cos(2\pi t) + \alpha x_1^2(t) + \beta x_2(t) \cos(2\pi t) + \beta x_2^2(t)$$

**Conclusie:** Het systeem is **niet-lineair** vanwege de kwadratische termen en kruistermen.

### 2. Toetsing van Tijdsinvariantie

Voor vertraagde input  $x_2(t) = x_1(t-\tau)$ :

$$y_2(t) = x_1(t-\tau) \cos(2\pi t) + x_1^2(t-\tau)$$

Dit verschilt van  $y_1(t-\tau) = x_1(t-\tau) \cos(2\pi(t-\tau)) + x_1^2(t-\tau)$  in de cosinus-term.

**Conclusie:** Het systeem is **tijdsvariant**.

### Oplossing 1.9: Causaliteit van een Integrator met Toekomstblik

#### 1. Causaliteit

De integraal loopt van  $\tau = t - 1$  tot  $\tau = t + 1$ . Het systeem moet “weten” wat de waarde van het ingangssignaal in de toekomst zal zijn (tot  $t + 1$ ).

**Conclusie:** Het systeem is **niet-causaal**.

#### 2. Lineariteit

Integraaloperatoren zijn lineair:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t+1} (ax_1(\tau) + bx_2(\tau)) d\tau = a \int_{t-1}^{t+1} x_1(\tau) d\tau + b \int_{t-1}^{t+1} x_2(\tau) d\tau = ay_1(t) + by_2(t)$$

**Conclusie:** Het systeem is **lineair**.

### Oplossing 1.10: Differentiaalvergelijking van een Mechanisch Systeem

#### 1. Opstellen Differentiaalvergelijking

Volgens Newton's tweede wet met krachten aandrijving, veerkracht en kwadratische wrijving:

$$M\ddot{y}(t) + B(\dot{y}(t))^2 + Ky(t) = F(t)$$

#### 2. Lineariteit en Linearisatie

De term  $(\dot{y}(t))^2$  maakt dit systeem **niet-lineair**. Linearisatie rond  $v_0$ :

$$Bv^2 \approx Bv_0^2 + 2Bv_0(v - v_0)$$

De gelineariseerde vergelijking wordt:

$$M\ddot{y}(t) + C_{\text{eq}}\dot{y}(t) + Ky(t) = F(t) - Bv_0^2$$

waarbij  $C_{\text{eq}} = 2Bv_0$  de effectieve dempingscoëfficiënt is.

## 10.2 Oplossingen Hoofdstuk 2: Basissignalen en Bewerkingen

### Oplossing 2.1

**Gegeven:**  $x_1(t) = e^{0.2t}$  en  $x_2(t) = e^{-0.5t}$ .

**Vraag:** Bepaal welk signaal Exponentiële groei/verval vertoont; bereken waarden op  $t = 5$  s.

**Oplossing:**

(a)  $x_1(t) = e^{0.2t}$ : Exponentiële **groei** (positieve exponent) reël **verval** (negatieve exponent)

(b) Op  $t = 5$  s:

$$\begin{aligned} x_1(5) &= e^{0.2 \times 5} = e^1 \approx 2.718 \\ x_2(5) &= e^{-0.5 \times 5} = e^{-2.5} \approx 0.082 \end{aligned}$$

### Oplossing 2.2

**Gegeven:**  $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ .

**Vraag:** Bepaal amplitude, hoekfrequentie, frequentie, fasinhoek; schrijf als cosinus.

**Oplossing:**

(a) Van  $x(t) = 3 \sin(4\pi t + \frac{\pi}{6})$ :

- Amplitude:  $A = 3$
- Hoekfrequentie:  $\omega = 4\pi$  rad/s
- Frequentie:  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$  Hz
- Fasehoek:  $\phi = \frac{\pi}{6}$  rad =  $30^\circ$

(b) Als cosinusfunctie:  $\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

### Oplossing 2.3

**Gegeven:**  $z(t) = e^{j2\pi t}$ .

**Vraag:** Schrijf als sinus/cosinus; bepaal waarde op  $t = 0.25$  s.

**Oplossing:**

(a) Formule van Euler:  $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$

$$z(t) = e^{j2\pi t} = \cos(2\pi t) + j \sin(2\pi t)$$

(b) Op  $t = 0.25$  s:

$$z(0.25) = \cos(2\pi \times 0.25) + j \sin(2\pi \times 0.25) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j = j$$

### Oplossing 2.4

**Gegeven:**  $f(t) = u(t) - u(t-1)$  en  $g(t) = u(t) - u(t-1)$ .

**Vraag:** Bepaal  $(f * g)(t)$  en schets.

**Oplossing:**

De convolutie is (Formularium: convolutie-definitie):

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

**Stap 1:** Observeer dat  $f(\tau) = 1$  op  $[0, 1]$  en  $g(t-\tau) = 1$  op  $[t-1, t]$ .

**Stap 2:** De integrand is alleen niet-nul waar beide functies niet-nul zijn (overlap).

**Geval 1:**  $t < 0$

Geen overlap  $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$

**Geval 2:**  $0 \leq t < 1$

Overlap op  $[0, t]$  met lengte  $t$ :

$$(f * g)(t) = \int_0^t 1 \cdot 1 d\tau = t$$

**Geval 3:**  $1 \leq t < 2$

Overlap op  $[t-1, 1]$  met lengte  $2-t$ :

$$(f * g)(t) = \int_{t-1}^1 1 \cdot 1 d\tau = 1 - (t-1) = 2 - t$$

**Geval 4:**  $t \geq 2$

Geen overlap  $\Rightarrow (f * g)(t) = 0$

**Eindresultaat:**

$$(f * g)(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Dit is een **driehoeksfunctie** met maximum 1 op  $t = 1$  en breedte 2.

### Oplossing 2.5

**Gegeven:**  $x(t) = e^{-t}u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal  $y_1(t) = x(t - 2)$ ,  $y_2(t) = x(2t)$ ,  $y_3(t) = 2x(t)$ .

**Oplossing:**

- (a) Tijdsverschuiving:  $y_1(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) = e^2e^{-t}u(t-2)$  (start op  $t = 2$ )
- (b) Tijdscompressie:  $y_2(t) = e^{-2t}u(2t) = e^{-2t}u(t)$  (twee keer sneller)
- (c) Amplitude schaling:  $y_3(t) = 2e^{-t}u(t)$  (twee keer hoger)
- (d) Schetsing:  $y_1$  begint op  $t = 2$ ,  $y_2$  vervalt sneller,  $y_3$  heeft dubbele amplitude.

### Oplossing 2.6

**Gegeven:** Drie signalen waarvan de energie bepaald moet worden.

**Vraag:** Bereken energies.

**Oplossing:**

$$(a) E_1 = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[ -\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

$$(b) E_2 = \int_0^\pi |2 \sin(t)|^2 dt = 4 \int_0^\pi \sin^2(t) dt$$

Gebruik identiteit  $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ :

$$E_2 = 4 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = 2 \int_0^\pi (1 - \cos(2t)) dt$$

$$= 2 \left[ t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^\pi = 2[(\pi - 0) - (0 - 0)] = 2\pi$$

$$(c) E_3 = \int_{-0.5}^{0.5} 1^2 dt = 1$$

### Oplossing 2.7

**Gegeven:**  $x(t) = t(u(t) - u(t-1)) + (2-t)(u(t-1) - u(t-2))$ .

**Vraag:** Stukgewijs; energie;  $x(t-1)$ .

**Oplossing:**

- (a) Stukgewijs:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

(b) Energie:

$$E = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt = \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{(2-t)^3}{-3} \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

(c) Verschuiving:

$$x(t-1) = (t-1)(u(t-1) - u(t-2)) + (3-t)(u(t-2) - u(t-3)).$$

Dit is dezelfde driehoek, verschoven naar rechts met 1.

### Oplossing 2.8

**Gegeven:**  $x(t) = u(t) - u(t-2)$ .

**Vraag:** Schets en herschrijf  $x(t)$  na verschuiving/schaling/spiegeling.

**Oplossing:**

(a)  $x(t) = 1$  voor  $0 \leq t < 2$  en  $x(t) = 0$  elders (rechthoekpuls van breedte 2).

(b) Verschuivingen:

$$x(t-1) = u(t-1) - u(t-3), \quad x(t+1) = u(t+1) - u(t-1).$$

Dus  $x(t-1)$  ligt op  $1 \leq t < 3$  en  $x(t+1)$  op  $-1 \leq t < 1$ .

(c) Schaling en spiegeling:

$$x(2t) = u(2t) - u(2t-2) = u(t) - u(t-1),$$

dus  $x(2t) = 1$  voor  $0 \leq t < 1$ . Verder

$$x(-t) = u(-t) - u(-t-2) = u(t+2) - u(t),$$

dus  $x(-t) = 1$  voor  $-2 \leq t < 0$ .

### 10.3 Oefening 2.9: Analytische Convolutie van Exponentiëlen (Uitgebreid)

De definitie van convolutie is:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau} u(\tau) \cdot e^{-2(t-\tau)} u(t-\tau) d\tau$$

Voor  $t \geq 0$  loopt de integratie van 0 tot  $t$ :

$$y(t) = e^{-2t} \int_0^t e^{-\tau} d\tau = e^{-2t}(1 - e^{-t})$$

$$\boxed{y(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)}$$

### Oplossing 2.10: Grafische Convolutie van een Blok en een Zaagtand

Met intervallen:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{(t-2)^2}{2} & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

Het resultaat vertoont een typische "bump"vorm: stijgend, constant plateau, dalend.

### Oplossing 2.11: RMS en Vermogen

Voor  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = C \cos(\omega_0 t + \phi)$  met  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T C^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) dt = \frac{C^2}{2}$$

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{2}} = \frac{C}{\sqrt{2}}$$

**Conclusie:** Het totale vermogen is onafhankelijk van de faseverschuiving  $\phi$ , alleen afhankelijk van de amplitudes  $A$  en  $B$ .

## 10.4 Oplossingen Hoofdstuk 3: Laplacetransformatie

### Oplossing 3.1: Standaard Laplace-paren

**Gegeven:** Vijf standaard signalen.

**Oplossing:**

(a)  $\mathcal{L}\{5u(t)\}$ : Gebruikmakend van definitie Formularium 1.1:

$$\mathcal{L}\{5u(t)\} = 5 \int_0^\infty e^{-st} dt = 5 \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{5}{s}$$

ROC (Region of Convergence):  $\text{Re}(s) > 0$

(b)  $\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\}$ : Exponentiële afname (Formularium 1.1)

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{-3t} dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t} dt = \frac{1}{s+3}$$

ROC:  $\text{Re}(s) > -3$

(c)  $\mathcal{L}\{t \cdot u(t)\}$ : Lijnair stijgende signaal (Formularium 1.1)

$$\mathcal{L}\{t \cdot u(t)\} = \int_0^\infty t e^{-st} dt$$

Gebruikmakend van partiële integratie ( $u = t$ ,  $dv = e^{-st} dt$ ):

$$\mathcal{L}\{t\} = \left[ -\frac{t}{s} e^{-st} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

(d)  $\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\}$ : Cosinusvormig signaal (Formularium 1.1)

Met standaardpaar  $\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$  en  $\omega_0 = 5$ :

$$\mathcal{L}\{\cos(5t)u(t)\} = \frac{s}{s^2 + 25}$$

(e)  $\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)u(t)\}$ : Gedempt sinus (combinatie Exponentiële & trigonometrisch)

**Stap 1:** Standaardpaar voor sinus:  $\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$

Met  $\omega_0 = 3$ :  $\sin(3t)u(t) \leftrightarrow \frac{3}{s^2 + 9}$

**Stap 2:** Frequentie-verschuivingseigenschap (Formularium 1.1):

$$e^{-\alpha t} f(t) \leftrightarrow F(s + \alpha)$$

Met  $\alpha = 2$ , vervang  $s$  door  $s + 2$ :

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(3t)u(t)\} = \frac{3}{(s+2)^2 + 9} = \frac{3}{s^2 + 4s + 13}$$

### Oplossing 3.2: Inverse Laplace met Partieelbreuken

$$(a) \quad F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{5}{s^2+4}$$

Deze vorm is al geschikt voor directe inverse (Formularium 1.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3e^{-2t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+4}\right\} = 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} = \frac{5}{2} \sin(2t)u(t)$$

**Resultaat:**

$$f(t) = 3e^{-2t}u(t) + \frac{5}{2} \sin(2t)u(t)$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} \text{ — Drie enkelvoudige polen}$$

### Stap 1: Partieelbreukontwikkeling

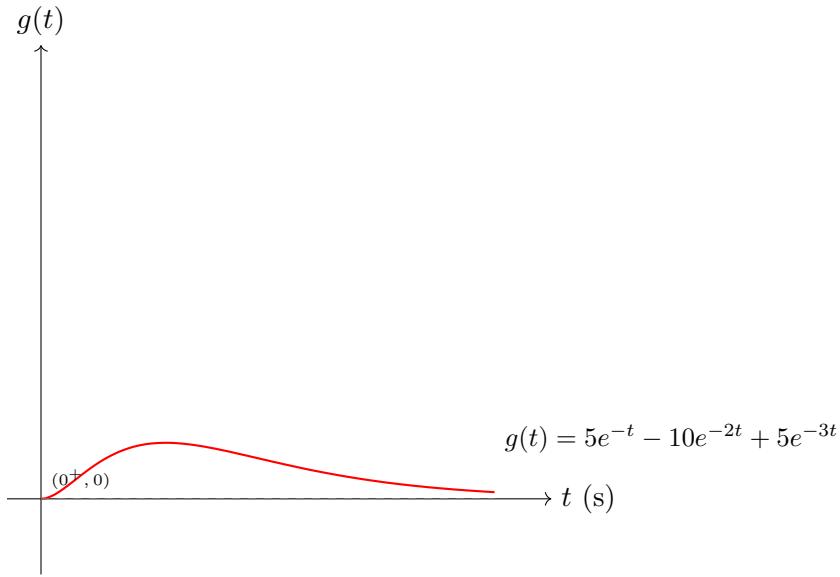
$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

### Stap 2: coëfficiënten bepalen (Heaviside's methode)

Pool	Gelijkheid	Coëfficiënt
$s = -1$	$10 = A \cdot (1) \cdot (2)$	$A = 5$
$s = -2$	$10 = B \cdot (-1) \cdot (1)$	$B = -10$
$s = -3$	$10 = C \cdot (-2) \cdot (-1)$	$C = 5$

### Stap 3: Inverse Laplace

$$g(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$



(c)  $H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$  — Dubbele pool!

**Stap 1: Partieelbreukontwikkeling met dubbele pool**

Voor dubbele pool  $s = -1$ :

$$\frac{s+3}{(s+1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2}$$

**Stap 2: coëfficiënten bepalen**

Vermenigvuldig met  $(s+1)^2$ :  $s+3 = A(s+1) + B$

Voor  $s = -1$ :  $-1 + 3 = B \Rightarrow B = 2$

Voor  $s = 0$ :  $3 = A + 2 \Rightarrow A = 1$

**Stap 3: Inverse Laplace (gebruik Formularium 1.1:  $te^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{(s+a)^2}$ )**

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s+1)^2} \right\} = 2te^{-t}u(t)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) = (1+2t)e^{-t}u(t)$$

**Oplossing 3.3: Eerste-Orde Differentiaalvergelijkingen**

(i)  $\frac{dy}{dt} + 4y = 8u(t)$ ,  $y(0) = 2$

**Stap 1: Laplacetransformatie beide zijden**

Gebruikmakend van afgeleide-eigenschap (Formularium 1.1):  $\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$

$$sY(s) - 2 + 4Y(s) = \frac{8}{s}$$

**Stap 2: Isoleer  $Y(s)$**

$$Y(s)(s+4) = \frac{8}{s} + 2 = \frac{8+2s}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2(s+4)}{s(s+4)} = \frac{2}{s}$$

### Stap 3: Inverse Laplace

$$y(t) = 2u(t)$$

**Opmerking:** De oplossing is constant! Dit gebeurt omdat  $y(0) = 2$  reeds gelijk is aan de steady-state waarde  $y_\infty = 8/4 = 2$ .

$$(ii) \frac{dy}{dt} + 3y = 6e^{-2t}u(t), \quad y(0) = 0$$

### Stap 1: Laplacetransformatie

$$sY(s) + 3Y(s) = \frac{6}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

### Stap 2: Partieelbreuken

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Voor  $s = -2$ :  $6 = A(1) \Rightarrow A = 6$

Voor  $s = -3$ :  $6 = B(-1) \Rightarrow B = -6$

$$\frac{6}{(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

### Stap 3: Inverse Laplace

$$y(t) = 6e^{-2t}u(t) - 6e^{-3t}u(t) = 6(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

**Grafiek:** De responsie begint bij  $y(0) = 0$  en bereikt maximum rond  $t \approx 0.7$  s voordat beide Exponentiële termen vervallen.

$$(iii) \quad 2\frac{dy}{dt} + y = u(t) - u(t-1), \quad y(0) = 1$$

### Stap 1: Laplacetransformatie ingang

$$u(t) - u(t-1) \leftrightarrow \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow sY(s) - 1$$

### Stap 2: Oplossen voor $Y(s)$

$$2(sY(s) - 1) + Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$Y(s)(2s + 1) = 2 + \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2s + 1 - e^{-s}}{s(2s + 1)}$$

### Stap 3: Partieelbreuken

$$\frac{1}{s(2s + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{2}{2s + 1} \right)$$

### Stap 4: Inverse Laplace (met verschuiving)

Voor  $t < 1$ : Alleen eerste term bijdraagt

$$y(t) = u(t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}u(t)$$

Voor  $t \geq 1$ : Beide termen (inclusief verschoven term)

**Stukgewijs:**

$$y(t) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-t/2}, & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}e^{-(t-1)/2}, & t \geq 1 \end{cases}$$

### Oplossing 3.4: Karakteristieke Wortels en Dempingsgedrag

Gegeven drie systemen; classificeer als over-, kritiek of ondergedempt

$$(i) \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**Stap 1: Karakteristieke vergelijking**

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

**Stap 2: Wortels bepalen (discriminant check)**

$$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0 \Rightarrow \text{twee reële verschillende wortels}$$

$$\lambda = \frac{-4 \pm 2}{2} = -1, -3$$

**Classificatie:** OVERGEDIEMPT (twee reële, negatieve polen)

**Stap 3: Algemene oplossing**

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$$

**Stap 4: Beginvoorwaarden toepassen**

$$y(0) = 1: \quad c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(t) = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t}, \quad \text{dus } y'(0) = 0: \quad -c_1 - 3c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -3c_2$$

$$\text{Oplossen: } -3c_2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -1/2, \quad \text{dus } c_1 = 3/2$$

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

$$(ii) \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

**Karakteristieke vergelijking:**  $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow$  dubbele reële wortel

$\lambda = -2$  (met multipliciteit 2)

**Classificatie:** KRITIEK GEDEEMPT

**Algemene oplossing (dubbele wortel):**

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

**Beginvoorwaarden:**

$$y(0) = 1: c_1 = 1$$

$$y'(t) = c_2 e^{-2t} + (c_1 + c_2 t)(-2)e^{-2t} = c_2 e^{-2t} - 2(c_1 + c_2 t)e^{-2t}$$

$$y'(0) = 0: c_2 - 2c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$y(t) = (1 + 2t)e^{-2t}$$

$$(iii) \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$$

**Karakteristieke vergelijking:**  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \Rightarrow$  complexe conjugate wortels

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2j$$

**Classificatie:** ONDERGEDEEMPT (complexe polen in linkervlak)

Natuurlijke frequentie:  $\omega_n = 2$  rad/s, Dempingsfactor:  $\zeta = 1/\sqrt{5} \approx 0.447$

**Algemene oplossing:**

$$y(t) = e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)]$$

**Beginvoorwaarden:**

$$y(0) = 0: c_1 = 0$$

$$y'(t) = -e^{-t}[c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)] + e^{-t}[-2c_1 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)]$$

$$y'(0) = 2: -0 + 2c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$y(t) = e^{-t} \sin(2t)$$

**Oplossing 3.5: Laplacetransformatie met Verschuiving**

$$(a) \text{ Gegeven: } F(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

**Inverse:**  $f(t) = \sin(2t)u(t)$  (Formularium 1.1:  $\frac{a}{s^2 + a^2} \leftrightarrow \sin(at)u(t)$ )

(b) **Met verschuiving:**  $G(s) = e^{-2s}F(s) = e^{-2s}\frac{2}{s^2 + 4}$

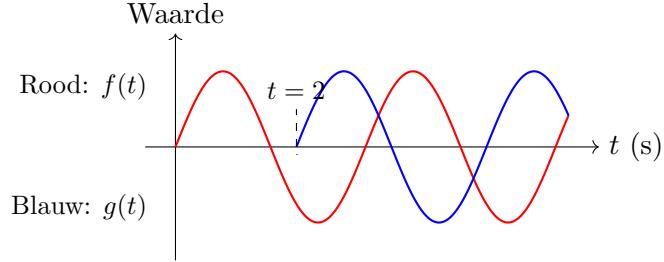
Gebruikmakend van verschuivingsstelling (Formularium 1.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a)$$

$$g(t) = \sin(2(t-2))u(t-2) = \sin(2t-4)u(t-2)$$

Dit is de sinus-golf verschoven naar rechts met 2 seconden.

(c) **Grafische vergelijking:**



De blauwe curve (verschoven signaal) is identiek aan de rode, maar 2 seconden later.

### Oplossing 3.6: Partieelbreukontwikkeling Geavanceerd

(a)  $F(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

$$\frac{10}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3}$$

coëfficiënten via Heaviside:

$$A = \frac{10}{(1)(2)} = 5 \text{ (pol } s = -1\text{)}$$

$$B = \frac{10}{(-1)(1)} = -10 \text{ (pol } s = -2\text{)}$$

$$C = \frac{10}{(-2)(-1)} = 5 \text{ (pol } s = -3\text{)}$$

$$f(t) = 5e^{-t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) + 5e^{-3t}u(t)$$

(b)  $G(s) = \frac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)}$  — **Dubbele pool combined met simpele**

$$\frac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2}$$

reël  $s = -1$ :

$$-5 + 7 = B \Rightarrow B = 2$$

Voor  $s = -2$  (simpele pool):

$$-10 + 7 = C(1) \Rightarrow C = -3$$

Voor coëfficiënt  $A$ : Vermenigvuldig met  $(s+1)^2$  en differentieer naar  $s$ :

$$\frac{d}{ds}[5s + 7] = 5 = A + B' \text{ (term)}$$

reëel  $s = 0$ :  $7 = A + 2 + (-3) \cdot 1/2$  waardoor  $A = 6$

$$g(t) = 6e^{-t}u(t) + 2te^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

(c)  $H(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$  — **Complexe polen**

Herken:  $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$  ? complexe polen:  $s = -1 \pm j$

$$\frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)[(s+1)^2 + 1]} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2 + 2s + 2}$$

Voor  $s = -1$ :  $1 - 2 + 3 = A(1) \Rightarrow A = 2$

Voor coëfficiënten matchen geeft  $B = -1$ ,  $C = 1$

$$h(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-t}[-\cos(t) + \sin(t)]u(t) = e^{-t}[2 - \cos(t) + \sin(t)]u(t)$$

### Oplossing 3.7: Begin- en Eindwaardestelling

**Gegeven:**  $F(s) = \frac{3s+5}{s^2+4s+3} = \frac{3s+5}{(s+1)(s+3)}$

(a) **Beginwaardestelling:**  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = 3$$

(b) **Eindwaardestelling:** (polen in linkervlak:  $s = -1, -3 \checkmark$ )

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s^2 + 5s}{s^2 + 4s + 3} = 0$$

(c) **Controle via exacte oplossing:**

Partieelbreuken:

$$\frac{3s+5}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

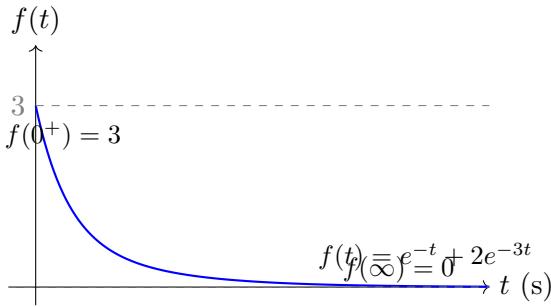
Voor  $s = -1$ :  $-3 + 5 = 2A \Rightarrow A = 1$

Voor  $s = -3$ :  $-9 + 5 = -2B \Rightarrow B = 2$

$$f(t) = e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

Verificatie:  $f(0^+) = 1 + 2 = 3 \checkmark$ ,  $f(\infty) = 0 \checkmark$

(d) **Grafiek:**



### Oplossing 3.8: Convolutie via Laplace

Gegeven:  $f(t) = u(t) - u(t-1)$ ,  $g(t) = e^{-2t}u(t)$

Bepaal:  $y(t) = (f * g)(t)$  via Laplacetransformatie

Oplossing:

(a) Laplace-transformaties:

$$F(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-1)\} = \frac{1}{s} - e^{-s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}$$

(b) Convolutie-theorema (Formularium 1.1):

$$y(t) = f(t) * g(t) \Rightarrow Y(s) = F(s) \cdot G(s)$$

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+2)} = (1 - e^{-s}) \cdot \frac{1}{s(s+2)}$$

(c) Partieelbreuken voor basale vorm:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right)$$

$$\text{Inverse: } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})u(t)$$

(d) Met verschuiving (tijdsverschuivingsstelling):

De factor  $e^{-s}$  veroorzaakt een verschuiving met 1 seconde, wat overeenkomt met een reëel signaal verschoven met 1 seconde.

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}), & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) - \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-1)}), & t \geq 1 \end{cases}$$

Vereenvoudiging voor  $t \geq 1$ :

$$y(t) = \frac{1}{2} [e^{-2(t-1)} - e^{-2t}] = \frac{1}{2}e^2 \cdot e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t}$$

$$\text{Of: } y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) \cdot e^{-2(t-1)} \text{ voor } t \geq 1$$

(e) **Fysische interpretatie:**

reël gedempt systeem

Voor  $t \geq 1$ : Puls stopt, systeem dempt uit met tijdsconstante  $\tau = 1/2$  s

**Oplossing 3.9: Samenvattingsoefening**

**Gegeven:** Verschillende signalen en transformaties

**Oplossing:**

(a) **Standaard Laplace-paren (Formularium 1.1):**

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \mathcal{L}\{t^n u(t)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

(b) **Vermenigvuldiging met tijd (Formularium 1.1):**

Eigenschap:  $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$

Voor  $\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}u(t)\}$ :

Basis:  $e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}$

$$\mathcal{L}\{te^{-3t}u(t)\} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{s+3} \right] = \frac{1}{(s+3)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}u(t)\} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{(s+3)^2} \right] = \frac{2}{(s+3)^3}$$

(c) **Inverse Laplacetransformatie met gemengde vormen:**

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s^2+9}$$

Per term:

$$\frac{1}{s+3} \leftrightarrow e^{-3t}u(t)$$

$$\frac{2}{s^2} \leftrightarrow 2tu(t)$$

$$\frac{4}{s^2+9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{s^2+9} \leftrightarrow \frac{4}{3} \sin(3t)u(t)$$

$$f(t) = e^{-3t}u(t) + 2tu(t) + \frac{4}{3} \sin(3t)u(t)$$

(d) **Geavanceerde inverse (complexe polen):**

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+6s+13}$$

Kwadraatafsplitsing van noemer:  $s^2 + 6s + 13 = (s+3)^2 + 4$

Herschrijf teller:  $s+5 = (s+3) + 2$

$$\frac{(s+3)+2}{(s+3)^2+4} = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{2}{(s+3)^2+4}$$

Inverse (Formularium 1.1):  $e^{-\alpha t} \cos(\beta t) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$  en  $e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \leftrightarrow \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$

$$h(t) = e^{-3t} \cos(2t)u(t) + e^{-3t} \sin(2t)u(t) = e^{-3t}[\cos(2t) + \sin(2t)]u(t)$$

### Oplossing 3.9

**Gegeven:** Eenvoudige signalen met stapfunctie  $u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal enkele Laplace-paren en een inverse Laplace.

**Oplossing:**

$$(a) \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} \text{ (Formularium: } u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \text{ in 1.1 en definitie in 1.1).}$$

$$(b) \mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s+2)t} dt = \frac{1}{s+2} \text{ (Formularium: } e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \text{ in 1.1 en translatie in } s \text{ in 1.1).}$$

$$(c) \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2} \text{ (Formularium: } t^n u(t) \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ met } n=1 \text{ in 1.1).}$$

(d)

$$F(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s^2} \Rightarrow f(t) = e^{-3t}u(t) + 2t u(t).$$

(Formularium:  $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$  en  $\frac{1}{s^2} \leftrightarrow tu(t)$  in 1.1.)

### Oplossing 3.10: Stapprespons Eerste-Orde Systeem

**Gegeven:**  $H(s) = \frac{2}{0.5s+1}$ , ingangssignaal  $x(t) = 3u(t)$

**Oplossing:**

(a) **Laplace-analyse:**

$$\text{Gegeven: } H(s) = \frac{2}{0.5s+1} = \frac{2}{0.5(s+2)} = \frac{4}{s+2} \text{ (herschrijven voor standaardvorm)}$$

$$\text{Met ingang } X(s) = \frac{3}{s}:$$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{4}{s+2} \cdot \frac{3}{s} = \frac{12}{s(s+2)}$$

(b) **Partieelbreukontwikkeling:**

$$\frac{12}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$\text{Voor } s=0: 12 = A(2) \Rightarrow A = 6$$

$$\text{Voor } s=-2: 12 = B(-2) \Rightarrow B = -6$$

$$Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s+2}$$

(c) **Inverse Laplace (tijd-domein):**

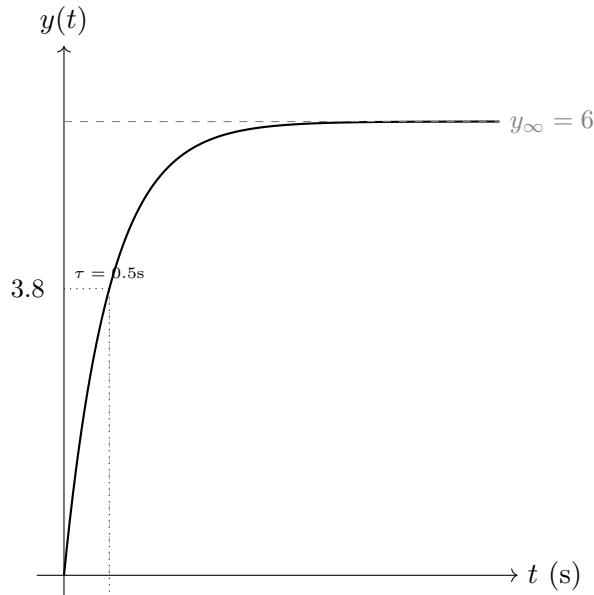
$$y(t) = 6u(t) - 6e^{-2t}u(t) = 6(1 - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Karakteristieken:**

- Uiteindelijke/steadystate waarde:  $y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} 6(1 - e^{-2t}) = 6$
- Tijdsconstante:  $\tau = \frac{1}{2}$  s (inverse van pool  $s = -2$ )

- Settling time (2% criterium):  $t_s \approx 4\tau = 2$  s
- Waarde op  $t = \tau$ :  $y(0.5) = 6(1 - e^{-1}) \approx 3.8$  (ongeveer 63% van eindwaarde)

(e) **Grafische voorstelling:**



reëel zonder overshoot (karakteristiek voor eerste-orde systemen met reële pool).

(f) **Verificatie via eindwaardestelling:**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{12}{s+2} = 6 \checkmark$$

Klopt met directe berekening:  $y(\infty) = H(0) \cdot x = 2 \cdot 3 = 6$  (DC gain  $H(0) = 2$ )

### Oplossing 3.11: Inverse Laplace met Tijdsverschuiving

Gegeven:  $F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s(s+2)}$   
Oplossing:

(a) **Partieelbreukontwikkeling van  $G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$ :**

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

Voor  $s = 0$ :  $2 = 2A \Rightarrow A = 1$ ; Voor  $s = -2$ :  $2 = -2B \Rightarrow B = -1$

Dus:  $G(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$

(b) **Inverse Laplacetransformatie zonder  $e^{-2s}$ :**

$$g(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$$

(c) **Verschuivingsstelling toepassen:**  $f(t) = g(t-2) = (1 - e^{-2(t-2)})u(t-2)$

### Oplossing 3.12: DV met Beginvoorwaarden

Gegeven:  $y'' + 4y' + 3y = 6u(t)$ , met  $y(0) = 1$  en  $y'(0) = -2$ .

Oplossing:

(a) Laplacetransformatie met beginvoorwaarden:

$$[s^2Y(s) - s + 2] + 4[sY(s) - 1] + 3Y(s) = \frac{6}{s}$$

$$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = \frac{s^2 + 2s + 6}{s}$$

(b) Partieelbreukontwikkeling van  $\frac{s^2 + 2s + 6}{s(s+1)(s+3)}$ :

Voor  $s = 0$ :  $A = 2$ ; Voor  $s = -1$ :  $B = -2.5$ ; Voor  $s = -3$ :  $C = 1.5$

(c) Inverse Laplace:  $y(t) = (2 - 2.5e^{-t} + 1.5e^{-3t})u(t)$

(d) Controle:  $y(0) = 2 - 2.5 + 1.5 = 1 \checkmark$ ,  $y'(0) = 2.5 - 4.5 = -2 \checkmark$

## 10.5 Oplossingen Hoofdstuk 4: Fouriertransformatie

### Oplossing 4.1: Rechthoekpuls Fouriertransformatie

Gegeven:  $f(t) = A$  voor  $-T/2 < t < T/2$ , 0 elders

(a) Fouriertransformatie (Formularium 1.2):

Definitie:  $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-T/2}^{T/2} Ae^{-j\omega t} dt = A \left[ \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{A}{-j\omega} (e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}) = \frac{A}{j\omega} (e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}) \end{aligned}$$

Via Euler:  $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin(x)$

$$= \frac{A}{j\omega} \cdot 2j \sin(\omega T/2) = \frac{2A \sin(\omega T/2)}{\omega} = AT \cdot \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

(b) Sinc-notatie:  $F(j\omega) = AT \cdot \text{sinc}(\frac{\omega T}{2}) \checkmark$

Dit komt overeen met Formularium 1.2 (Block-paar).

(c) Nulpunten:  $\sin(\omega T/2) = 0$  als  $\frac{\omega T}{2} = n\pi$  voor  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Dus:  $\omega_n = \pm \frac{2\pi}{T}, \pm \frac{4\pi}{T}, \dots$  (eerste nulpunt:  $\omega = 2\pi/T$ )

## Oplossing 4.2

**Gegeven:** Fouriertransformatie verschuivingsstelling; puls met amplitude  $A = 2$ , breedte  $T = 2$ , verschoven naar  $t_0 = 1$ .

**Vraag:** Bewijs stelling; bepaal Fouriertransformatie; effect op spektra.

**Oplossing:**

- (a) **Verschuivingsstelling (Formularium 1.2):**

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

**Bewijs:**

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

Substitutie  $u = t - t_0$  (dus  $dt = du$ ):

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega(u+t_0)} du = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j\omega u} du = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

- (b) **Toepassing op puls:** Voor puls van  $t = 1$  tot  $t = 3$  (dus  $t_0 = 1$ ,  $A = 2$ ,  $T = 2$ ):

Onverschoven puls:  $F_0(j\omega) = 2 \cdot 2 \cdot \text{sinc}(\omega) = 4\text{sinc}(\omega)$

Verschoven puls:

$$F(j\omega) = 4\text{sinc}(\omega) \cdot e^{-j\omega}$$

- (c) **Spectrale gevolgen:**

Amplitudespectrum:  $|F(j\omega)| = |e^{-j\omega}| \cdot |4\text{sinc}(\omega)| = 4|\text{sinc}(\omega)|$  (identiek!) ✓

Fasespectrum:  $\arg F(j\omega) = -\omega + \arg(\text{sinc}(\omega))$  (lineaire fase-lag van  $-\omega$ )

Fysisch: Verschuiving veroorzaakt geen amplitudeverandering, alleen lineaire faseverandering.

## Oplossing 4.3

**Gegeven:**  $x(t) = \cos(10\pi t) \cdot \text{rect}(t)$  met  $\text{rect}(t) = u(t+1) - u(t-1)$ .

**Vraag:** Pas modulatiestelling toe; schets spektra.

**Oplossing:**

- (a) Modulatiestelling (af te leiden uit Formularium: cosinus-paar 1.2 en translatie/convolutie-eigenschappen 1.2):

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t) f(t)\} = \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))]$$

Voor  $\text{rect}(t)$ :  $F_{\text{rect}}(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega)$  (Formularium: Block-paar 1.2).

Voor  $x(t)$  met  $\omega_0 = 10\pi$ :

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}[2\text{sinc}(\omega - 10\pi) + 2\text{sinc}(\omega + 10\pi)] = \text{sinc}(\omega - 10\pi) + \text{sinc}(\omega + 10\pi)$$

- (b) Het spectrum bestaat uit twee verschoven sinc-functies gecentreerd op  $\omega = \pm 10\pi$ .

De modulatiestelling toont dat vermenigvuldiging in het tijdsdomein resulteert in convolutie in het frequentiedomein (via dualiteit).

### Oplossing 4.4: Parseval's Energiestelling

reëel afnemend signaal.

**Vraag:** Bepaal energie in tijdsdomein; bepaal Fouriertransformatie; verifieer Parseval's stelling.

**Oplossing:**

(a) **Energie in tijdsdomein:**

$$E_t = \int_0^\infty |e^{-t}|^2 dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} J$$

(b) **Fouriertransformatie:** Via Laplace-paar  $e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+1}$  (Formularium 1.1) en LT?FTC-link:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$$

Magnitude:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}, \quad |F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

(c) **Parseval's Energiestelling (Formularium 1.2):**

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \omega^2} d\omega$$

**Stap 1:** Standaardintegraal:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = [\arctan(\omega)]_{-\infty}^{\infty}$

**Stap 2:** Limieten:  $\arctan(\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

**Stap 3:** Energie:

$$E_f = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2} J \quad \checkmark$$

Conclusie:  $E_t = E_f = 0.5 J$  (Parseval geverifieerd!)

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformatie; bereken amplitudespectrum; bepaal 3dB-bandbreedte.

**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie (Formularium 1.2):**

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt$$

Splits op bij  $t = 0$  (gebruik  $|t| = -t$  voor  $t < 0$  en  $|t| = t$  voor  $t > 0$ ):

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt$$

**Eerste integraal:**  $\left[ \frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega}$

**Tweede integraal:**  $\left[ \frac{-e^{-(a+j\omega)t}}{a+j\omega} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$

### Samenvoegen:

$$F(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{a+j\omega+a-j\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(b) **Amplitudespectrum:**  $|F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$  (zuiver reëel, dus fasespectrum = 0)

Maximale waarde:  $|F(0)| = \frac{2}{a}$

(c) **3dB-Bandbreedte:** Waarden waar  $|F(j\omega)| = |F(0)|/\sqrt{2}$ :

$$\frac{2a}{a^2+\omega^2} = \frac{2}{a\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 + \omega^2 = a\sqrt{2} \Rightarrow \omega_{3dB} = a$$

(Opmerking: bij de halve-vermogen-frequentie geldt  $a^2 + \omega_{3dB}^2 = 2a^2$ )

Volle 3dB-bandbreedte:  $B_{3dB} = 2a$  rad/s

### Oplossing 4.6: Fouriertransformatie van Impulsen

**Gegeven:** Drie verschillende signalen: Dirac-puls  $\delta(t)$ , verschoven puls, cosinus.

**Vraag:** Bepaal Fouriertransformaties; vergelijk spectrale karakteristieken.

**Oplossing:**

(a)  $f(t) = \delta(t)$ :

$$F(j\omega) = 1 \quad \text{voor alle } \omega$$

(Formularium: impuls-paar 1.2)

Fysische betekenis: Perfecte impuls bevat alle frequenties met gelijk gewicht ? wit spectrum.

(b)  $f(t) = \delta(t - t_0)$ :

Via verschuivingsstelling (Formularium 1.2):

$$F(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Amplitude:  $|F(j\omega)| = 1$  (onafhankelijk van  $t_0$ !)

Fase:  $\angle F(j\omega) = -\omega t_0$  (lineair met frequentie)

Fysisch: Verschuiving verandert amplitudespectrum niet, alleen faseverandering.

(c)  $f(t) = \cos(\omega_0 t)$ :

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

Via complexe exponentieel-paren (Formularium 1.2):

$$F(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

Dit zijn twee discrete impulsen op frequenties  $\pm\omega_0$  met respectievelijk gewicht  $\pi$ .

Fysisch: Cosinus bevat precies twee frequentiecomponenten (positief en negatief).

### Oplossing 4.7: Blokpuls en Tijdverschuiving

**Gegeven:**  $x(t) = 2$  op  $(-1/2, 1/2)$ , nul elders;  $y(t) = x(t - 1/4)$  (verschoven puls).

**Vraag:** Bepaal  $X(j\omega)$  en  $Y(j\omega)$ ; vergelijk magnitudes en fases.

**Oplossing:**

- (a)  **$X(j\omega)$  voor blokpuls:** Amplitude  $A = 2$ , breedte  $L = 1$ , gecentreerd op  $t = 0$ :

Formularium: blok-paar 1.2:

$$X(j\omega) = AL \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega L}{2}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Nulpunten:  $\text{sinc}(\omega/2) = 0$  wanneer  $\omega/2 = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  dus  $\omega = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$

- (b)  **$Y(j\omega)$  voor verschoven puls:** Verschoven naar  $t = 1/4$ :

Formularium: verschuivingsstelling 1.2:

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega/4} \cdot X(j\omega) = 2e^{-j\omega/4}\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- (c) **Vergelijking magnitudes en fase:**

Magnitude:  $|Y(j\omega)| = |e^{-j\omega/4}| \cdot |X(j\omega)| = 1 \cdot |X(j\omega)| = |X(j\omega)|$  (identiek!) ✓

Fase:  $\arg Y(j\omega) = -\omega/4 + \arg X(j\omega)$  (extra lineaire fase van  $-\omega/4$ )

**Conclusie:** Tijdverschuiving verandert amplitudespectrum niet, voegt alleen lineaire fasevertraging toe.

### Oplossing 4.8

**Gegeven:**  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  en tijdverschuiving.

**Vraag:** Bepaal FTC van verschoven delta's en een lineaire combinatie.

**Oplossing:**

- (a) Met de verschuivingsstelling (Formularium: translatie 1.2) en het paar  $\delta(t) \leftrightarrow 1$  (1.2):

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}.$$

- (b) Voor  $x(t) = 2\delta(t) - \delta(t - 1)$ :

$$X(j\omega) = 2 \cdot 1 - e^{-j\omega} = 2 - e^{-j\omega}.$$

- (c) **Amplitudespectrum berekening:**

**Stap 1:** Schrijf  $e^{-j\omega} = \cos \omega - j \sin \omega$  (Euler):

$$X(j\omega) = 2 - (\cos \omega - j \sin \omega) = (2 - \cos \omega) + j \sin \omega$$

**Stap 2:** Bereken de modulus:

$$|X(j\omega)| = \sqrt{(2 - \cos \omega)^2 + (\sin \omega)^2}$$

**Stap 3:** Uitwerken (gebruik  $\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$ ):

$$|X(j\omega)|^2 = 4 - 4 \cos \omega + \cos^2 \omega + \sin^2 \omega \tag{1}$$

$$= 5 - 4 \cos \omega \tag{2}$$

Dus:  $|X(j\omega)| = \sqrt{5 - 4 \cos \omega}$

(d) **Bijzondere waarden:**

$$\omega = 0: |X(0)| = \sqrt{5-4} = 1 \text{ (totale impulssterkte)}$$

$$\omega = \pi: |X(\pi)| = \sqrt{5+4} = 3 \text{ (maximaal)}$$

$$\omega = \pi/2: |X(\pi/2)| = \sqrt{5} \approx 2.24$$

### Oplossing 4.9: Spectrum van Samengesteld Signaal

**Gegeven:**  $y(t) = x(t-3) + x(t+3)$

**Oplossing:**

(a) Met de verschuivingsstelling (Formularium 1.2):

$$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j3\omega} + X(j\omega)e^{j3\omega}$$

(b) Factorisering:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)(e^{-j3\omega} + e^{j3\omega}) = 2X(j\omega)\cos(3\omega)$$

(c) Fysische interpretatie: Het spectrum van  $x$  wordt gemodulateerd met een cosinusfactor.  
Dit is een staande-golfpatroon met nulpunten waar  $\cos(3\omega) = 0$ .

### Oplossing 4.10: Dualiteitseigenschap van FTC

**Gegeven:**  $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$  (gebruik dualiteit)

**Oplossing:**

(a) Herken de standaardpaar (Formularium 1.2):

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

$$\text{Voor } a = 1: \frac{1}{1+t^2} \leftrightarrow \pi e^{-|\omega|}$$

(b) **Dualiteitsstelling** (Formularium 1.2): Als  $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ , dan  $F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

$$\text{In ons geval: } \mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \pi e^{-|\omega|}$$

(c) Verificatie:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$  (arctangenstelling) ✓

### Oplossing 4.11: Spectrum van een Driehoekpuls

Een driehoek is de convolutie van twee rechthoeken. Met de convolutie-eigenschap:

$$\mathcal{F}\{\Pi(t) * \Pi(t)\} = \mathcal{F}\{\Pi(t)\} \cdot \mathcal{F}\{\Pi(t)\}$$

Het spectrum van een rechthoek is sinc, dus:

$$X(\omega) = \left[ \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2$$

Het spectrum daalt als  $1/\omega^2$ , sneller dan een rechthoekpuls ( $1/\omega$ ).

### Oplossing 4.12: Dualiteit en Frequentieverschuiving

Gegeven  $\mathcal{F}\{e^{-|t|}\} = \frac{2}{1+\omega^2}$ .

Via dualiteit:  $\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$ .

Voor  $g(t) = \frac{2}{1+t^2}$ :

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

Voor  $x(t) = \frac{1}{2}g(t) = \frac{1}{1+t^2}$ :

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+t^2}\right\} = \pi e^{-|\omega|}}$$

reël spectrum.

### Oplossing 5.10: Fourierreeks van een Gelijkgerichte Sinus

Gegeven:  $f(t) = |\sin(t)|$  (periode  $T = \pi$ )

Analyse:

- Periode:  $T = \pi$ , dus  $\omega_0 = 2\pi/T = 2$  rad/s
- Symmetrie: Functie is even in  $t$  (omdat  $|\sin(-t)| = |\sin(t)|$ )
- Gevolg:  $b_n = 0$  (geen sinuscoëfficiënten), alleen cosinus

**DC-component:**

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |\sin(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) dt = \frac{2}{\pi} [-\cos(t)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

coëfficiënten  $a_n$  (**n oneven**): Alleen oneven harmonischen hebben coëfficiënten ongelijk nul:

$$a_n = \frac{4}{\pi(1-n^2)} \quad \text{voor } n = 1, 3, 5, \dots$$

**Fourierreeks:**

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2(2k+1)t)}{1-(2k+1)^2}}$$

reël sneller dan bij andere niet-sinusoidale signalen door het  $1/n^2$  karakter.

## 10.6 Oplossingen Hoofdstuk 5: Fourierreeksen

### Oplossing 5.1

Gegeven: Blokgolf met periode  $T = 2$ :  $f(t) = 1$  voor  $0 < t < 1$ ,  $f(t) = -1$  voor  $1 < t < 2$ .

Vraag: Bepaal symmetrie; bereken Fouriercoëfficiënten; schrijf reeks tot 3e harmonische.

Oplossing:

(a) De functie is **oneven**:  $f(-t) = -f(t)$  (na periodieke uitbreiding)

(b) Fouriercoëfficiënten ( $\omega_0 = \pi$  rad/s, Formularium: cartesische vorm 1.3):

**Stap 1: Bereken  $a_0$  (DC-component):**

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 1 dt + \int_1^2 (-1) dt = 1 - 1 = 0$$

**Stap 2: Bepaal  $a_n$  (omdat  $f(t)$  oneven is):**

Voor oneven functies geldt  $a_n = 0$  voor alle  $n$ .

**Stap 3: Bereken  $b_n$ :**

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \int_0^1 \sin(n\pi t) dt - \int_1^2 \sin(n\pi t) dt \\ &= \left[ -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 - \left[ -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_1^2 \\ &= \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(2n\pi) - \cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \end{aligned}$$

Voor oneven  $n$ :  $\cos(n\pi) = -1$ , dus  $b_n = \frac{4}{n\pi}$

Voor even  $n$ :  $\cos(n\pi) = 1$ , dus  $b_n = 0$

(c) Fourierreeks tot 3e harmonische:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(\pi t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3\pi t)$$

### Oplossing 5.2

**Gegeven:** Zaagtandgolf:  $f(t) = 2t$  voor  $0 < t < 1$  met periode  $T = 1$ .

**Vraag:** Bereken  $a_0, b_1, b_2$ ; schrijf Fouriersom met 2 termen.

**Oplossing:**

Periode  $T = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$  (Formularium: cartesische Fourierreeks 1.3).

(a) **DC-component:**

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1$$

(b) **Berekening van  $b_n$  met partiële integratie:**

Formularium:  $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$  (1.3).

$$b_n = 2 \int_0^1 2t \sin(2\pi nt) dt = 4 \int_0^1 t \sin(2\pi nt) dt$$

Partiële integratie:  $\int u dv = uv - \int v du$  met  $u = t$ ,  $dv = \sin(2\pi nt) dt$ :

$$du = dt, \quad v = -\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n}$$

$$\begin{aligned} b_n &= 4 \left[ t \cdot \left( -\frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(2\pi nt)}{2\pi n} dt \right] \\ &= 4 \left[ -\frac{\cos(2\pi n)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi nt)}{(2\pi n)^2} \Big|_0^1 \right] \end{aligned}$$

Aangezien  $\cos(2\pi n) = 1$  en  $\sin(2\pi n) = 0$ :

$$b_n = 4 \left( -\frac{1}{2\pi n} \right) = -\frac{2}{\pi n}$$

Dus:  $b_1 = -\frac{2}{\pi}$ ,  $b_2 = -\frac{1}{\pi}$

(c) Benaderende Fouriersom:

$$f(t) \approx 1 - \frac{2}{\pi} \sin(2\pi t) - \frac{1}{\pi} \sin(4\pi t)$$

### Oplossing 5.3

**Gegeven:** Driehoekgolf:  $f(t) = t$  voor  $0 \leq t < 1$ ,  $f(t) = 2 - t$  voor  $1 \leq t < 2$ , periode  $T = 2$ .

**Vraag:** Bepaal symmetrie; bereken coëfficiënten; schrijf eerste drie niet-nul termen.

**Oplossing:**

Periode  $T = 2 \Rightarrow \omega_0 = \pi$  (Formularium: cartesische vorm 1.3).

(a) Symmetrie: Dit signaal is **even** rond  $t = 1$ :  $f(1 - \tau) = f(1 + \tau)$

Voor even functie:  $b_n = 0$  voor alle  $n$ .

(b) **DC-component:**

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2-t) dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 + \left[ 2t - \frac{t^2}{2} \right]_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + (4-2) - (2-\frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) **Berekening van  $a_n$ :**

Formularium:  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$  (1.3).

$$a_n = \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt + \int_1^2 (2-t) \cos(n\pi t) dt$$

*Partiële integratie eerste integraal:*

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt &= \left[ \frac{t \sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt \\ &= 0 + \frac{1}{n\pi} \left[ -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \end{aligned}$$

Symmetrisch voor tweede integraal: ook  $\frac{1}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi))$ .

Dus:

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{n^2\pi^2} (1 - (-1)^n)$$

Voor oneven  $n$ :  $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$ ; voor even  $n$ :  $a_n = 0$ .

(d) Eerste drie niet-nul termen:

$$f(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos(\pi t) + \frac{4}{9\pi^2} \cos(3\pi t)$$

### Oplossing 5.4: Parseval's Stelling voor Fourierreeksen

**Gegeven:** Blokgolf uit oefening 5.1:  $f(t) = 1$  voor  $0 < t < 1$ ,  $f(t) = -1$  voor  $1 < t < 2$ , periode  $T = 2$ .

**Vraag:** Bepaal gemiddelde macht beide via integratie en Parseval; controleer equivalentie.  
**Oplossing:**

(a) **Gemiddelde macht via tijdsdomein-integratie:**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \left( \int_0^1 1^2 dt + \int_1^2 (-1)^2 dt \right) = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1 \text{ W}$$

(b) **Fourier-coëfficiënten uit Opl. 5.1:**

Voor de blokgolf:  $a_0 = 0$ ,  $a_n = 0$  (oneven functie), en  $b_n = \frac{4}{n\pi}$  voor oneven  $n$ .

(c) **Parseval's Stelling (Formularium 1.3):**

$$\begin{aligned} P &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left( \frac{4}{n\pi} \right)^2 \\ &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{8}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right) \end{aligned}$$

**Standaardsum:**  $\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$P = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{8} = 1 \text{ W} \quad \checkmark$$

**Conclusie:** Beide methoden geven identieke gemiddelde macht, wat Parseval's stelling bewijst!

### Oplossing 5.5

**Gegeven:**  $T = 2$  en  $f(t) = 1$  op  $(0, 1)$ ,  $f(t) = 0$  op  $(1, 2)$ , periodiek.

**Vraag:** Bepaal  $c_k$  en link met FTC-samples.

**Oplossing:** De coëfficiënten zijn

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi.$$

reël op  $(0, 1)$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jk\pi t} dt.$$

Voor  $k \neq 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^k}{jk\pi}.$$

En

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

reël oneven harmonischen blijven over.

Link met formularium:  $X(k\omega_0) = T c_k$  zegt dat de FTC van één periode (tijdsignaal op lengte  $T$ ) gesampled op  $\omega = k\omega_0$  gelijk is aan  $T$  maal de FS-coëfficiënt.

## Oplossing 5.6

**Gegeven:**  $T = 2\pi$  en  $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$ .

**Vraag:** Geef  $\omega_0$  en de Fouriercoëfficiënten  $a_0, a_n, b_n$ .

**Oplossing:**

$$(a) \omega_0 = 2\pi/T = 1.$$

(b) Schrijf de reële Fourierreeks (Formularium 1.3):

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Omdat  $f(t)$  al in de basisvorm geschreven is met termen voor  $n = 1$  en  $n = 2$ , herkennen we direct:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle overige  $a_n, b_n$  zijn nul.

(c) Ter verificatie:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt = 1, \\ a_2 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 2 \cos^2(2t) dt = 2. \end{aligned}$$

We herkennen direct de standaardvorm

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)).$$

Vergelijken geeft:

$$a_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad a_2 = 2,$$

en alle andere  $a_n, b_n$  zijn nul.

Dus de Fourierreeks is gewoon  $f(t) = \sin(t) + 2\cos(2t)$ .

## Oplossing 5.7: De Blokgolf (Symmetrie)

(a) **Symmetrie:**  $f(t)$  is **oneven**, want  $f(-t) = -f(t)$ . (De grafiek is puntsymmetrisch rond de oorsprong).

(b) **Gevolg:**  $a_0 = 0$  (gemiddelde is 0) en alle  $a_n = 0$ . We hoeven alleen  $b_n$  te berekenen.

(c) **Berekening**  $b_n$ :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1) \sin(nt) dt$$

(We integreren over de halve periode en doen  $\times 2$  vanwege symmetrie).

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-\cos(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$$

Als  $n$  even is ( $2, 4, \dots$ ), is  $1 - 1 = 0$ . Als  $n$  oneven is ( $1, 3, \dots$ ), is  $1 - (-1) = 2$ . Dus:  $b_n = \frac{4}{n\pi}$  voor oneven  $n$ .

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t)$$

### Oplossing 5.8: Inspectie

- (a) Grondfrequentie van  $4t$  en  $10t$ : De grootste gemene deler van 4 en 10 is 2. Dus  $\omega_0 = 2$ .
- (b) De reeks is gewoon de som van sinussen/cosinussen.

$$a_0 = 3$$

$$\text{Bij } 4t \ (2\omega_0) : \quad a_2 = 2$$

$$\text{Bij } 10t \ (5\omega_0) : \quad b_5 = -5$$

Alle andere coëfficiënten zijn 0.

### Oplossing 5.9: Parseval

Signaal:  $3 + 2 \cos(4t) - 5 \sin(10t)$ .

$$\begin{aligned} P &= a_0^2 + \frac{1}{2}a_2^2 + \frac{1}{2}b_5^2 \\ P &= 3^2 + \frac{1}{2}(2^2) + \frac{1}{2}(-5)^2 \\ P &= 9 + 2 + 12.5 = 23.5 \end{aligned}$$

### Oplossing 6.11: Respons op een Sinusoïde

**Gegeven:** LTC-systeem met ingang  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$  en frequentierespons  $H(j\omega)$ .

**Analyse:**

Voor een sinusoïdaal ingangssignaal bij frequentie  $\omega_0$  geldt:

$$H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)| e^{j\angle H(j\omega_0)}$$

**Uitgangssignaal:**

In het frequentiedomein:  $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$

Voor het sinusoïdale ingang:

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cos(\omega_0 t + \phi + \angle H(j\omega_0))$$

De **magnitude** bepaalt de amplitudeversterking; de **fase** bepaalt de faseverschuiving.

**Voorbeeld:** Bij  $\omega = \omega_0 = 0$  (DC):  $H(0)$  = gelijkstroomversterking.

### Oplossing 6.12: Stabiliteitsanalyse via Polen

**Gegeven:** Systeemfunctie  $H(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$  met polen  $s = p_k$ .

**Stabiliteitscriterium:**

**BIBO-stabiliteit** (bounded input  $\rightarrow$  bounded output) vereist:

$$\boxed{\text{Alle polen moeten in het linkerhalf-vlak liggen: } \operatorname{Re}(p_k) < 0}$$

**Gevolgen per poltype:**

- **Reële pool  $p = -a$  ( $a \neq 0$ )**: Exponentieel afnemend  $e^{-at} \rightarrow$  stabiel
- **Reële pool  $p = 0$** : Constant signaal  $\rightarrow$  marginaal stabiel
- **Reële pool  $p = a$  ( $a \neq 0$ )**: Exponentieel stijgend  $e^{at} \rightarrow$  INSTABIEL
- **Complex conjuagat paar  $p = -\sigma \pm j\omega_d$** : Gedempte oscillatie  $\rightarrow$  stabiel als  $\sigma > 0$

**Praktische test:** Laplace  $\rightarrow$  partiële breukdecompositie  $\rightarrow$  controleer reële delen van alle polen.

## 10.7 Oplossingen Hoofdstuk 6: LTC-Systemen

### Oplossing 6.1: Staprespons via Convolutie en Laplace

**Gegeven:** Eerste-orde systeem met impulsrespons  $h(t) = 2e^{-5t}u(t)$  en ingangssignaal  $x(t) = u(t)$ .

**Vraag:** Bepaal systeemrespons  $y(t)$  via convolutie; verifieer met Laplacetransformatie.

**Oplossing:**

(a) **Convolutie in tijdsdomein:**

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_0^t 2e^{-5\tau}d\tau$$

$$\text{Integreer: } y(t) = 2 \left[ -\frac{1}{5}e^{-5\tau} \right]_0^t = -\frac{2}{5}(e^{-5t} - 1) = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t)$$

Steady-state waarde:  $y(\infty) = \frac{2}{5}$  V

(b) **Verificatie via Laplacetransformatie:**

$$H(s) = \frac{2}{s+5}, \quad X(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = H(s)X(s) = \frac{2}{s(s+5)}$$

$$\text{re\"el } \frac{2}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

Vermenigvuldig met  $s(s+5)$ :  $2 = A(s+5) + Bs$

$$\text{Voor } s = 0: 2 = 5A \Rightarrow A = \frac{2}{5}$$

$$\text{Voor } s = -5: 2 = -5B \Rightarrow B = -\frac{2}{5}$$

$$\text{Dus: } Y(s) = \frac{2/5}{s} - \frac{2/5}{s+5}$$

**Inverse Laplacetransformatie** (Formularium 1.1):

$$y(t) = \frac{2}{5} \cdot 1 - \frac{2}{5}e^{-5t} = \frac{2}{5}(1 - e^{-5t})u(t) \quad \checkmark$$

Beide methoden geven hetzelfde resultaat!

### Oplossing 6.2

**Gegeven:** Massa-veer-dempersysteem:  $m = 2$  kg,  $k = 8$  N/m,  $c = 4$  Ns/m.

**Vraag:** Schrijf DV; bepaal  $\omega_0$ ; bepaal type demping.

**Oplossing:**

(a) Differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = f(t)$$

(b) Natuurlijke eigenfrequentie:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = 2 \text{ rad/s}$$

(c) Karakteristieke vergelijking:  $2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = -1 \pm j\sqrt{3}$$

Complexe wortels  $\Rightarrow$  Het systeem is **ondergedempt**.

### Oplossing 6.3: Frequentierespons en Bandbreedte

**Gegeven:** LTC-systeem met  $H(s) = \frac{10}{s+5}$  (eerste-orde laagdoorsysteem).

**Vraag:** Bepaal frequentierespons; amplitude/fase; bepaal 3dB bandbreedte.

**Oplossing:**

(a) **Frequentierespons** (substitutie  $s = j\omega$ ):

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 5}$$

Multipliceer met toegevoegd complex getal:

$$H(j\omega) = \frac{10(5 - j\omega)}{(5 + j\omega)(5 - j\omega)} = \frac{10(5 - j\omega)}{25 + \omega^2} = \frac{50}{25 + \omega^2} - j \frac{10\omega}{25 + \omega^2}$$

(b) **Amplitude- en faserespons:**

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}}, \quad \angle H(j\omega) = -\arctan(\omega/5)$$

DC-versterking:  $|H(0)| = \frac{10}{5} = 2$

Hoge frequenties:  $|H(j\omega)| \rightarrow 0$  als  $\omega \rightarrow \infty$

(c) **3dB-Bandbreedte** waar  $|H(j\omega)| = |H(0)|/\sqrt{2}$ :

$$\frac{10}{\sqrt{25 + \omega^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{25 + \omega^2} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$25 + \omega^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad \omega_{3dB} = 5 \text{ rad/s}$$

Dit geeft ook  $f_{3dB} = \omega_{3dB}/(2\pi) \approx 0.796 \text{ Hz}$

### Oplossing 6.4

**Gegeven:** Twee systemen in cascade:  $H_1(s) = \frac{5}{s+2}$ ,  $H_2(s) = \frac{3}{s+3}$ .

**Vraag:** Bepaal totale overdracht; bepaal impulsrespons.

**Oplossing:**

(a) Totale overdracht:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{5}{s+2} \cdot \frac{3}{s+3} = \frac{15}{(s+2)(s+3)}$$

(b) Impulsrespons via partieelbreuken:

$$\frac{15}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met  $(s+2)(s+3)$ :

$$15 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor  $s = -2$ :  $15 = A(1) \Rightarrow A = 15$

Voor  $s = -3$ :  $15 = B(-1) \Rightarrow B = -15$

Dus:

$$H(s) = \frac{15}{s+2} - \frac{15}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium:  $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$  in 1.1):

$$h(t) = 15e^{-2t}u(t) - 15e^{-3t}u(t) = 15(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

## Oplossing 6.5

**Gegeven:** Drie systemen.

**Vraag:** Bepaal stabiliteit.

**Oplossing:**

- (a)  $H_1(s) = \frac{1}{s-2}$ . **Polen:** Los de noemer op:  $s-2=0 \Rightarrow s=2$ . Omdat  $\text{Re}(s)=2>0$ , ligt de pool in het rechterhalfvlak. **Conclusie:** Systeem is BIBO-onstabiel.
- (b)  $H_2(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ . **Polen:**  $s=-1, -2$  ( $\text{Re}(s)<0$ ). Alle polen hebben negatieve reële delen. **Conclusie:** Systeem is BIBO-stabiel.
- (c)  $H_3(s) = \frac{1}{s^2+4}$ . **Polen:**  $s^2=-4 \Rightarrow s=\pm 2j$ . Polen liggen op de imaginaire as en zijn enkelvoudig. **Gedrag:** Dit geeft zuivere oscillaties (sinuscomponenten) en geen demping of groei. Het systeem is **marginaal stabiel** (niet asymptotisch stabiel, niet onstabiel).

## Oplossing 6.6

**Gegeven:**  $\dot{y}(t) + 3y(t) = x(t)$  met nul beginvoorwaarden.

**Vraag:** Bepaal  $H(s)$ ,  $h(t)$ , stabiliteit en  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t) - u(t-1)$ .

**Oplossing:**

- (a) Laplace (formularium: afgeleide in  $t$ ):

$$sY(s) - y(0) + 3Y(s) = X(s) \Rightarrow (s+3)Y(s) = X(s).$$

Dus

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+3}.$$

- (b)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = e^{-3t}u(t).$$

- (c) Pool op  $s = -3$  (linkerhalfvlak)  $\Rightarrow$  BIBO-stabiel.

(d) Voor  $x(t) = u(t) - u(t - 1)$  geldt

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}.$$

Dan

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s + 3)}.$$

Met  $\frac{1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \right)$  volgt

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})u(t) - \frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t - 1).$$

### Oplossing 6.7

**Gegeven:** Causaal LTC-systeem met  $H(s) = \frac{1}{s+1}$ .

**Vraag:** Bepaal  $h(t)$ , staprespons,  $\tau$  en  $H(0)$ .

**Oplossing:**

(a)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} = e^{-t}u(t).$$

(b) Voor  $x(t) = u(t)$ :  $X(s) = \frac{1}{s}$ , dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Daaruit volgt

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t).$$

(c) De tijdsconstante is  $\tau = 1$  en de DC-versterking is  $H(0) = 1$ .

### Oplossing 6.8: Van DV naar $H(s)$

(a) Laplace:  $s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 4X(s)$

(b)  $Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s)(s + 4) \implies H(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2}$

(c)  $H(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}$ . Nulpunt:  $s = -4$ . Polen:  $s = -1, s = -2$ .

### Oplossing 6.9: Impulsrespons

(a)  $s^2 + 4s + 3 = (s + 1)(s + 3)$ .

(b)  $\frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$ . A vinden: bedek  $(s + 1)$ , vul  $s = -1$  in:  $\frac{1}{-1+3} = 0.5$ . B vinden: bedek  $(s + 3)$ , vul  $s = -3$  in:  $\frac{1}{-3+1} = -0.5$ .  $H(s) = \frac{0.5}{s+1} - \frac{0.5}{s+3}$ .

(c)  $h(t) = 0.5e^{-t}u(t) - 0.5e^{-3t}u(t)$ .

(d) Ja, stabiel. De polen (-1 en -3) zijn negatief. De Exponentiële functies sterven uit.

### Oplossing 6.10: Frequentiegedrag

(a) DC-gain ( $s = 0$ ):  $H(0) = \frac{10}{2} = 5$ .

(b) Als  $\omega \rightarrow \infty$ , dan  $|H(j\omega)| = |\frac{10}{j\omega+2}| \approx \frac{10}{\omega} \rightarrow 0$ .

(c) Laagdoorlaatfilter (laat lage frequenties door, blokkeert hoge).

## 10.8 Oplossingen Hoofdstuk 7: Eigenwaarden en Eigenvectoren

### Oplossing 7.1

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal karakteristieke veelterm; vind eigenwaarden; bereken eigenvectoren.

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke veelterm:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

(b) Eigenwaarden:  $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$$

(c) Eigenvectoren:

**Voor**  $\lambda_1 = 5$ : Los op  $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$ :

$$(A - 5I) = \begin{pmatrix} 4 - 5 & 1 \\ 2 & 3 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Eerste rij: } -v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1$$

Kies  $v_1 = 1$ , dan:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Voor**  $\lambda_2 = 2$ : Los op  $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 = 0$ :

$$(A - 2I) = \begin{pmatrix} 4 - 2 & 1 \\ 2 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Eerste rij: } 2v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = -2v_1$$

Kies  $v_1 = 1$ , dan:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## Oplossing 7.2

**Gegeven:** Tweede-orde systeem uit oefening 3.4.

**Vraag:** Schrijf als matrixvergelijking; bepaal eigenwaarden; verifieer; bepaal eigenvectoren.

**Oplossing:**

(a) Matrixvergelijking:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

(b) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

(c) Eigenwaarden:  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$  (hetzelfde als uit oefening 3.4) ✓

(d) Eigenvectoren:

Voor  $\lambda_1 = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Voor  $\lambda_2 = -3$ :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

## Oplossing 7.3

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden/eigenvectoren; controleer orthogonaliteit; bepaal  $P^{-1}AP = D$ .

**Oplossing:**

(a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$$

Eigenwaarden:  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$

Eigenvectoren: - Voor  $\lambda_1 = 6$ :  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  (genormaliseerd:  $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ) - Voor  $\lambda_2 = 1$ :  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (genormaliseerd:  $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ )

(b) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = \frac{1}{5}(2 - 2) = 0 \quad \checkmark$$

(c) Diagonalisatie:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Oplossing 7.4

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal Gerschgorin-cirkels; geef grenzen; controleer eigenwaarden.

**Oplossing:**

- (a) Gerschgorin-cirkels:

Rij 1: Centrum 4, radius  $0.5 + 0.2 = 0.7$ , dus  $\lambda \in [3.3, 4.7]$

Rij 2: Centrum -2, radius  $0.3 + 0.1 = 0.4$ , dus  $\lambda \in [-2.4, -1.6]$

Rij 3: Centrum 3, radius  $0.2 + 0.4 = 0.6$ , dus  $\lambda \in [2.4, 3.6]$

- (b) Alle eigenwaarden liggen in de unie van deze cirkels.

- (c) De eigenwaarden zijn ongeveer:  $\lambda_1 \approx 4.3$ ,  $\lambda_2 \approx -2.1$ ,  $\lambda_3 \approx 2.8$  (numeriek bepaald)

Alle drie liggen inderdaad in hun respectieve cirkels. ✓

### Oplossing 7.5

**Gegeven:**  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden; bepaal eigenvectoren; toon orthogonaliteit aan; normaliseer.

**Oplossing:**

- (a) Karakteristieke vergelijking:

$$f(\lambda) = (3 - \lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

Eigenwaarden:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 2$

- (b) Eigenvectoren:

Voor  $\lambda_1 = 4$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Voor  $\lambda_2 = 2$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (c) Orthogonaliteit:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark$$

- (d) Genormaliseerde eigenvectoren:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verificatie:  $|\mathbf{u}_1| = |\mathbf{u}_2| = 1$ ,  $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$  ✓

### Oplossing 7.6

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal  $e^{At}$  en oplossing  $\mathbf{x}(t)$ .

**Oplossing:**

- (a) Eigenwaarden:  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ . Eigenvectoren:  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- (b) Matrix Exponentiële  $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$ .

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ -e^{-t} & -2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Oplossing  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0)$  met  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

### Oplossing 7.7

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Eigenwaarden/eigenruimte; diagonaliseerbaarheid;  $e^{At}$ .

**Oplossing:**

- (a) Karakteristieke veelterm:  $(2 - \lambda)^2 = 0$ , dus  $\lambda = 2$  (algebraïsche multiplicitet 2). Voor eigenvectoren:  $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , dus  $v_2 = 0$  en  $v_1$  vrij. De eigenruimte is 1-dimensionaal.
- (b) Omdat er maar 1 lineair onafhankelijke eigenvector is, is  $A$  **niet diagonaliseerbaar**.

- (c) Schrijf  $A = 2I + N$  met  $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  en  $N^2 = 0$ . Dan

$$e^{At} = e^{(2I+N)t} = e^{2t}e^{Nt} = e^{2t}(I + Nt) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Oplossing 7.8

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Eigenwaarden/eigenvectoren,  $A^3$  en  $e^{At}$ .

**Oplossing:**

- (a) Omdat  $A$  diagonaal is, zijn de eigenwaarden de diagonalelementen:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Bijhorende eigenvectoren kunnen gekozen worden als de standaardbasisvectoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\lambda = 1), \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\lambda = 2).$$

(b)

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

- (c) Voor een diagonaalmatrix geldt  $e^{At} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ :

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

**Gegeven:**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Vraag:** Bepaal eigenwaarden en eigenvectoren; bereken  $A^3$ ; bereken  $e^{At}$ .

**Oplossing:**

- (a) Voor een diagonaalmatrix zijn de diagonalelementen de eigenwaarden:

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

Eigenvectoren:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(De standaard basiseenheidsvectoren)

- (b) Voor diagonaalmatrix:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

- (c) Matrix exponentiaal:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Algemeen: voor diagonaalmatrix  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  geldt:

$$e^{Dt} = \text{diag}(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}, \dots, e^{d_n t})$$

**Oplossing 7.9: Karakteristieke Vergelijking**

(a)  $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0.$

(b)  $\lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = 0 \implies \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$  Ontbinden:  $(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0.$  Eigenwaarden:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5.$

**Oplossing 7.10: Eigenvectoren**

(a) Voor  $\lambda = 2:$   $\begin{pmatrix} 4-2 & 1 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$  Dit geeft  $2x+y=0 \implies y=-2x.$   
Kies  $x=1,$  dan  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$

(b) Voor  $\lambda = 5:$   $\begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 2 & 3-5 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$  Dit geeft  $-x+y=0 \implies y=x.$  Kies  $x=1,$  dan  $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

**Oplossing 7.11: Diagonaalmatrix**

(a) Eigenwaarden zijn de diagonalelementen:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$

(b)  $D^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

## 10.9 Oplossingen Hoofdstuk 8 Examengerichte oefeningen

**Oplossing:**

(a) **Symmetrie controleren.**

- Stap 1: noteer de definities.
  - even:  $f(-t) = f(t)$
  - oneven:  $f(-t) = -f(t)$
- Stap 2:  $x(t)$  is een rechthoekpuls rond 0 met dezelfde waarde links en rechts, dus  $x(-t) = x(t)$  en  $x(t)$  is **even**.
- Stap 3:  $v(t) = 2 \cos(2\pi t)$  is **even** omdat cos even is.
- Stap 4:  $y(t) = x(t) \cos(2\pi t)$  is product van twee even functies, dus ook **even**.
- Stap 5:  $z(t) = x(t) + x(t-1)$  bevat een verschoven term  $x(t-1)$ ; door die verschuiving is  $z(-t)$  in het algemeen niet gelijk aan  $\pm z(t)$ , dus **noch even noch oneven**.

(b)  $Y(j\omega)$  via modulatie.

- Stap 1: bepaal  $X(j\omega)$ . Voor het blok met amplitude 1 en breedte 1 geldt (zoals in het formularium):

$$X(j\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \text{met } \text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

- Stap 2: schrijf de cosinus als exponentiëlen:

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}), \quad \omega_0 = 2\pi.$$

- Stap 3: vermenigvuldigen in de tijd is verschuiven in het frequentiedomein. Daaruit volgt de modulatieregel:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega - \omega_0)) + X(j(\omega + \omega_0))].$$

- Stap 4: invullen van  $X(j\omega)$  geeft

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2} \left[ \text{sinc}\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2}\right) \right].$$

(c)  $Z(j\omega)$  via tijdverschuiving.

- Verschuiving:  $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$ .
- Stap 2: voor  $t_0 = 1$  wordt  $x(t - 1) \leftrightarrow e^{-j\omega} X(j\omega)$ .
- Stap 3: optellen in tijd is optellen in frequentie, dus

$$Z(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega} X(j\omega) = (1 + e^{-j\omega}) X(j\omega).$$

**Oplossing 8.2**

**Gegeven:**  $x(t) = u(t) - u(t-2)$ ,  $h(t) = e^{-t} u(t)$ .

**Oplossing:**

(a) **Laplace van de ingang  $x(t)$ .**

- Stap 1: gebruik  $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ .

- Daarnaast:  $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ .

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{1 - e^{-2s}}{s}.$$

- (b) **Causaliteit.** Omdat  $h(t) = e^{-t}u(t) = 0$  voor  $t < 0$  is de impulsrespons rechtszijdig  $\Rightarrow$  het LTI-systeem is **causaal**.

(c) **Uitgang  $y(t)$  via Laplace.**

- Stap 1: bepaal  $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s+1}$ .
- Stap 2: gebruik  $Y(s) = H(s)X(s)$ :

$$Y(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+1)}.$$

- Stap 3: splits op in een niet-vertraagde en een vertraagde term:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)} - e^{-2s} \frac{1}{s(s+1)}.$$

- Stap 4: herken de basis-inversie  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = (1 - e^{-t})u(t)$ .
- Stap 5: pas de vertraging toe:  $e^{-2s}G(s) \leftrightarrow g(t-2)u(t-2)$ .

Daarmee

$$y(t) = (1 - e^{-t})u(t) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2).$$

### Oplossing 8.3

**Gegeven:**  $T = 2$ ,  $p(t) = 1$  op  $(0, \frac{1}{2})$ , anders 0, periodiek.

**Oplossing:**

(a) **coëfficiënten  $c_k$ .**

- Stap 1: grondfrequentie  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$ .
- Stap 2: definitie:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)e^{-j k \omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 p(t)e^{-j k \pi t} dt.$$

reël op  $(0, \frac{1}{2})$  en 0 elders binnen  $[0, 2]$ , reduceert de integraal tot

$$c_k = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} e^{-j k \pi t} dt.$$

Voor  $k \neq 0$ :

$$c_k = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-j k \pi t}}{-j k \pi} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - e^{-j k \pi / 2}}{j k \pi}.$$

Voor  $k = 0$  (gemiddelde waarde):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \left( \text{pulsduur } \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

- (b) **Symmetrie.** reël is, geldt altijd  $c_{-k} = c_k^*$  (complex geconjugeerde symmetrie).

- (c) **Link met de Fouriertransformatie.** Voor een periodieke extensie kan je de harmonischen interpreteren als samples van de CTFT van één periode (zoals in het formularium):

$$X(j k \omega_0) = T c_k.$$

Dit vertelt je dat de spectrale lijnen (op  $k \omega_0$ ) gewogen worden door  $c_k$ .

## Oplossing 8.4

**Gegeven:**  $x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-(t-2)}u(t-2)$ .

**Vraag:** (a)  $X(s)$ , (b)  $x(0^+)$  en  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ , (c) controle via begin-/eindwaardestelling.

**Oplossing:**

(a) **Bepaal  $X(s)$ .**

- Stap 1: herken  $x(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$  met  $x_1(t) = e^{-t}u(t)$ .
- Stap 2: Laplace van  $x_1$  is  $\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}$ .
- Stap 3: een vertraging met 2 geeft een factor  $e^{-2s}$ :  $x_1(t-2) \leftrightarrow e^{-2s} \frac{1}{s+1}$ .

Dus

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - e^{-2s} \frac{1}{s+1} = \frac{1 - e^{-2s}}{s+1}.$$

(b) **Begin- en eindgedrag in de tijd.**

- Stap 1: voor  $t \rightarrow 0^+$  geldt  $u(t) = 1$  en  $u(t-2) = 0$ . Dus  $x(0^+) = e^0 - 0 = 1$ .
- Stap 2: voor  $t \rightarrow \infty$  gaan  $e^{-t}$  en  $e^{-(t-2)}$  naar 0, dus  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

(c) **Controle met begin-/eindwaardestelling.**

- Beginwaardestelling:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 1.$$

- Eindwaardestelling: de polen van  $sX(s)$  moeten strikt links liggen. Hier  $sX(s) = \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1}$  reëel een pool in  $s = -1$  (links), dus de eindwaardestelling is toepasbaar:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1 - e^{-2s})}{s+1} = 0.$$

## Oplossing 8.5

**Gegeven:**  $y'' + 3y' + 2y = u(t)$  met  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Vraag:** (a) los op via (unilaterale) Laplace, (b) geef  $y(t)$ .

**Oplossing:**

- Stap 1: neem (unilaterale) Laplace en gebruik de standaardregels met beginvoorwaarden:

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY - y(0), \quad \mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - sy(0) - y'(0).$$

- Stap 2: invullen van  $y(0) = 0$  en  $y'(0) = 1$  geeft

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y - 1, \quad \mathcal{L}\{y'\} = sY.$$

- Stap 3: Laplace op de differentiaalvergelijking:

$$(s^2Y - 1) + 3(sY) + 2Y = \frac{1}{s}.$$

reëel de termen met  $Y$ :

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{1}{s} + 1 = \frac{s+1}{s}.$$

- Stap 5: factoriseer  $s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$  en vereenvoudig:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s(s+2)}.$$

- Stap 6: partiële breuken:

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right).$$

- Stap 7: inverse Laplace:

$$y(t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t).$$

### Oplossing 8.6

**Gegeven:** Causaal LTI-systeem met  $H(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$ .

**Vraag:** (a)  $h(t)$ , (b) BIBO-stabiliteit, (c) staprespons, (d) eindwaarde.

**Oplossing:**

- (a) **Impulse response**  $h(t)$ .

- Stap 1: schrijf  $H(s)$  als partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4}.$$

- Stap 2: maak noemers gelijk:

$$s+2 = A(s+4) + Bs = (A+B)s + 4A.$$

- Stap 3: vergelijk coëfficiënten:  $4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$  en  $A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$ .
- Stap 4: inverse Laplace (causaal  $\Rightarrow$  vermenigvuldig met  $u(t)$ ):

$$h(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}e^{-4t}u(t).$$

- (b) **BIBO-stabiliteit.** reël als  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$ . Hier zit er een constante term  $\frac{1}{2}u(t)$  in  $h(t)$ , dus de integraal divergeert. Equivalent:  $H(s)$  heeft een pool in  $s = 0$  (niet strikt links)  $\Rightarrow$  niet **BIBO-stabiel**.

- (c) **Staprespons**  $y(t)$  voor  $x(t) = u(t)$ .

- Stap 1:  $X(s) = \frac{1}{s}$ , dus

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+2}{s^2(s+4)}.$$

- Stap 2: partiële breuken:

$$\frac{s+2}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}.$$

Oplossen (bv. door coëfficiënten te vergelijken) geeft  $A = \frac{1}{8}$ ,  $B = \frac{1}{2}$ ,  $C = -\frac{1}{8}$ .

- Stap 3: inverse Laplace term per term:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s} &\leftrightarrow u(t) \\ -\frac{1}{s^2} &\leftrightarrow t u(t) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{s+4} \leftrightarrow e^{-4t}u(t)$$

Dus

$$y(t) = \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}e^{-4t} \right) u(t).$$

- (d) **Eindwaarde / gedrag voor grote  $t$ .** De term  $\frac{1}{2}t$  groeit onbegrensd, dus  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty$ . Dat is consistent met het feit dat de eindwaardestelling hier niet bruikbaar is (pool op  $s = 0$ ).

### Oplossing 8.7

**Gegeven:**  $x(t) = u(t) - u(t - 1)$  en  $h(t) = t u(t)$ .

**Vraag:** (a)  $y(t) = x * h$  stukgewijs, (b) controle via Laplace.

**Oplossing:**

- (a) **Convolutie**  $y(t) = (x * h)(t)$ .

- Stap 1: schrijf de convolutie uit:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau.$$

- Stap 2: bepaal waar  $x(\tau)$  niet nul is. Omdat  $x(t) = u(t) - u(t - 1)$ , geldt  $x(\tau) = 1$  voor  $0 \leq \tau < 1$  en 0 elders.
- Stap 3: vul  $h(t - \tau) = (t - \tau)u(t - \tau)$  in en beperk de integraal:

$$y(t) = \int_0^1 (t - \tau)u(t - \tau) d\tau.$$

- Stap 4: de factor  $u(t - \tau)$  dwingt  $t - \tau \geq 0 \Rightarrow \tau \leq t$ . Daarom zijn de effectieve grenzen  $\tau \in [0, 1] \cap (-\infty, t]$ .

**Stukgewijs:**

- $t < 0$ : geen overlap, dus  $y(t) = 0$ .
- $0 \leq t < 1$ : overlap  $\tau \in [0, t]$ :

$$y(t) = \int_0^t (t - \tau) d\tau = \left[ t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}.$$

- $t \geq 1$ : volledige overlap  $\tau \in [0, 1]$ :

$$y(t) = \int_0^1 (t - \tau) d\tau = \left[ t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^1 = t - \frac{1}{2}.$$

Een compacte stapfunctie-vorm is bv.

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1).$$

- (b) **Controle via Laplace.**

- Stap 1:  $X(s) = \mathcal{L}\{u(t) - u(t - 1)\} = \frac{1-e^{-s}}{s}$ .
- Stap 2:  $H(s) = \mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}$ .

- Stap 3:  $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^3}$ .
- Stap 4:  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2}u(t)$  en de factor  $e^{-s}$  geeft vertraging met 1.

Dus opnieuw

$$y(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - \frac{(t-1)^2}{2}u(t-1),$$

wat overeenkomt met de stukgewijze uitkomst.

### Oplossing 8.8

**Gegeven:**  $x(t) = e^{-a|t|}$  met  $a > 0$ .

**Vraag:** (a)  $X(j\omega)$ , (b) energie, (c) Parseval.

**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie**  $X(j\omega)$ .

- Stap 1:  $x(t) = e^{-a|t|}$  is even, dus de CTFT kan met een cosinus-integraal:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt.$$

- Stap 2: gebruik de standaard integraal  $\int_0^{\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$  (voor  $a > 0$ ).

Dus

$$X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}.$$

(b) **Energie**  $E$ .

- Stap 1: energie is  $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int e^{-2a|t|} dt$ .
- Stap 2: weer evenheid gebruiken:

$$E = 2 \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = 2 \left[ \frac{e^{-2at}}{-2a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a}.$$

(c) **Parseval-controle.** Parseval zegt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Hier is  $|X(j\omega)|^2 = \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2}$ . Met de bekende integraal  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{(a^2 + \omega^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}$  volgt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^3} = \frac{1}{a},$$

dus consistent met (b).

### Oplossing 8.9

**Gegeven:**  $f(t) = 1$  op  $(0, \pi)$  en  $f(t) = -1$  op  $(-\pi, 0)$ ,  $T = 2\pi$ .

**Vraag:** (a) symmetrie, (b) Fourierreeks, (c) RMS en Parseval.

**Oplossing:**

(a) **Symmetrie.** Controleer  $f(-t)$ : op  $t \in (0, \pi)$  is  $f(t) = 1$  en  $f(-t) = -1$ , dus  $f(-t) = -f(t)$ . Daarom is  $f$  **oneven**  $\Rightarrow a_0 = 0$  en  $a_n = 0$ .

**Berekening van de sinus-termen:**

- Stap 1: voor een oneven functie geldt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

- Stap 2: op  $(0, \pi)$  is  $f(t) = 1$ , dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt.$$

- Stap 3: integreer:

$$\int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Dus

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Daaruit volgt:  $b_n = 0$  voor even  $n$ , en  $b_n = \frac{4}{\pi n}$  voor oneven  $n$ . De reeks wordt

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin((2k+1)t).$$

### (b) RMS en Parseval.

- Stap 1:  $f^2(t) = 1$  bijna overal, dus

$$\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt} = 1.$$

reëel  $b_n$ ):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Links is  $\frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$ . Rechts:

$$\sum_{n \text{ oneven}} \left( \frac{4}{\pi n} \right)^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2}.$$

Met  $\sum_{n \text{ oneven}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$  volgt rechts = 2, dus klopt.

### Oplossing 8.10

**Gegeven:**  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  met  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$  en  $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$ .

**Vraag:** (a) eigenwaarden + stabiliteit, (b)(c) expliciete oplossing.

**Oplossing:**

#### (a) Eigenwaarden en stabiliteit.

- Stap 1: karakteristieke veelterm via  $\det(\lambda I - A)$ :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2.$$

- Stap 2: uitwerken:

$$\lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

- Stap 3: eigenwaarden:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2.$$

- Stap 4: omdat beide eigenwaarden strikt negatief zijn, is de oorsprong **asymptotisch stabiel**.

(b) **Expliciete oplossing voor  $x_1(t)$ .**

- Stap 1: schrijf de toestandsvergelijkingen uit:  $\dot{x}_1 = x_2$  en  $\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2$ .
- Stap 2: elimineer  $x_2$  door te differentiëren:  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = -2x_1 - 3\dot{x}_1$ . Dus

$$\ddot{x}_1 + 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0.$$

- Stap 3: los de karakteristieke vergelijking  $r^2 + 3r + 2 = 0$  op:  $r = -1, -2$ .
- Stap 4: algemene oplossing:

$$x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

(c) **Constanten bepalen en  $x_2(t)$ .**

- Stap 1: beginvoorwaarde  $x_1(0) = 1$  geeft  $C_1 + C_2 = 1$ .
- Stap 2: omdat  $x_2 = \dot{x}_1$  geldt

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}.$$

Beginvoorwaarde  $x_2(0) = 0$  geeft  $-C_1 - 2C_2 = 0$ . reël op:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 + 2C_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow C_2 = -1, \quad C_1 = 2.$$

Dus

$$x_1(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad x_2(t) = -2e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

### Oplossing 8.11

**Gegeven:**  $H(s) = \frac{2s+3}{s^2+5s+6}$  (causaal LTC-systeem).

**Vraag:** Polen; stabiliteit; impulsrespons; staprespons.

**Oplossing:**

(a) **Polen van het systeem.**

Eerst factoriseren we de noemer:

$$s^2 + 5s + 6 = (s + 2)(s + 3)$$

Dus:  $H(s) = \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)}$

De polen zijn  $s = -2$  en  $s = -3$ .

(b) **BIBO-stabiliteit.**

reël reël  $< 0$ ), is het systeem **BIBO-stabiel**.

(c) **Impulsrespons via partieelbreuken.**

Partieelbreukontwikkeling:

$$\frac{2s+3}{(s+2)(s+3)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3}$$

Vermenigvuldigen met  $(s+2)(s+3)$ :

$$2s+3 = A(s+3) + B(s+2)$$

Voor  $s = -2$ :  $2(-2)+3 = A(1) \Rightarrow A = -1$

Voor  $s = -3$ :  $2(-3)+3 = B(-1) \Rightarrow B = 3$

Dus:

$$H(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

Inverse Laplacetransformatie (Formularium:  $\frac{1}{s+a} \leftrightarrow e^{-at}u(t)$ ):

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + 3e^{-3t}u(t) = (3e^{-3t} - e^{-2t})u(t)$$

(d) **Staprespons voor  $x(t) = u(t)$ .**

Voor stapingang:  $X(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)}$$

Partieelbreuken:

$$\frac{2s+3}{s(s+2)(s+3)} = \frac{C}{s} + \frac{D}{s+2} + \frac{E}{s+3}$$

Voor  $s = 0$ :  $3 = C(2)(3) = 6C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Voor  $s = -2$ :  $-4 + 3 = D(-2)(1) \Rightarrow D = \frac{1}{2}$

Voor  $s = -3$ :  $-6 + 3 = E(-3)(-1) \Rightarrow E = -1$

Dus:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{1/2}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \right) u(t)$$

Dit is de staprespons.

**Oplossing 8.12**

**Gegeven:**  $H(s) = \frac{4}{s^2+3s+2}$  en input  $x(t) = 2u(t)$  met  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Vraag:** DV bepalen; oplossen; verifiëren met Laplace.

**Oplossing:**

(a) **Differentiaalvergelijking uit overdrachtsfunctie.**

Voor een systeem met nul initiële voorwaarden geldt:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s + 2}$$

Dit geeft:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 4X(s)$$

In het tijdsdomein (Formularium: afgeleide-eigenschap):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 4x(t)$$

(b) **Oplossing met beginvoorwaarden.**

Voor  $x(t) = 2u(t)$  en nul initiële voorwaarden eerst:  $\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 8u(t)$

**Homogene oplossing:**

Karakteristieke vergelijking:  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

**Particuliere oplossing:**

Voor constante input:  $y_p(t) = K$  (constant)

$$0 + 0 + 2K = 8 \Rightarrow K = 4$$

**Algemene oplossing:**

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + 4$$

Met  $y(0) = 0$ :  $C_1 + C_2 + 4 = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -4$

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

Met  $y'(0) = 1$ :  $-C_1 - 2C_2 = 1$

Oplossen:  $C_1 = -9, C_2 = 5$

$$y(t) = -9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4$$

(c) **Controle met Laplace.**

$$X(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{4}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{2}{s} = \frac{8}{s(s+1)(s+2)}$$

Partieelbreuken:

$$\frac{8}{s(s+1)(s+2)} = \frac{4}{s} - \frac{9}{s+1} + \frac{5}{s+2}$$

Inverse Laplace:

$$y(t) = 4u(t) - 9e^{-t}u(t) + 5e^{-2t}u(t) = (-9e^{-t} + 5e^{-2t} + 4)u(t)$$

Dit komt overeen! ✓

### Oplossing 8.13

**Gegeven:**  $f(t) = 3e^{-2t}u(t)$ .

**Vraag:** FTC bepalen; amplitudespectrum; energie; Parseval verifiëren.

**Oplossing:**

(a) **Fouriertransformatie via Laplace-link.**

Formularium:  $e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}$  (Laplace, 1.1)

Met de link  $\text{LT}(s = j\omega) = \text{FTC}(j\omega)$  (1.1):

$$F(j\omega) = 3 \cdot \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{3}{2 + j\omega}$$

(b) **Amplitudespectrum.**

$$|F(j\omega)| = \left| \frac{3}{2 + j\omega} \right| = \frac{3}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

Dit is een dalende functie van  $\omega$  (Lorentz-vorm), met maximum  $|F(0)| = 3/2$  en nulpunt op  $\infty$ .

(c) **Energiedichtheid in tijdsdomein.**

$$E = \int_0^\infty |3e^{-2t}|^2 dt = 9 \int_0^\infty e^{-4t} dt = 9 \cdot \left[ -\frac{1}{4} e^{-4t} \right]_0^\infty = \frac{9}{4}$$

(d) **Verificering met Parseval's stelling.**

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{9}{4 + \omega^2} d\omega$$

$$= \frac{9}{2\pi} [\arctan(\omega/2)/2]_{-\infty}^{\infty} = \frac{9}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{9}{4} \quad \checkmark$$

Beide methoden geven dezelfde energie!