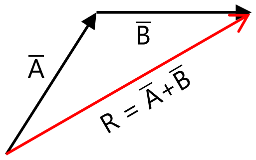
Vektor

A. PENDAHULUAN

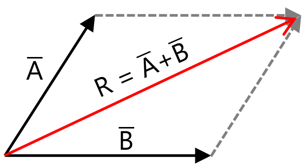
- **Besaran** berdasarkan arahnya terdiri dari:
  1) **Besaran skalar**, besaran yang tak punya arah.
     Contoh: massa (m), panjang (L), waktu (t), kelajuan (v), massa jenis (ρ).
  2) **Besaran vektor**, besaran yang punya arah.
     Contoh: gaya ($\vec{F}$), percepatan ($\vec{a}$), kecepatan ($\vec{v}$), momentum ($\vec{p}$).
- **Vektor** diberi nama dengan huruf kecil bergaris atas atau menyebut titik pangkal dan ujungnya.
  1) **Anak panah** menunjuk arah yang ditunjuk vektor.
  2) **Besar kecilnya vektor** dilambangkan dengan besar kecilnya anak panah.
- **Nilai arah vektor:**
  1) **Vektor positif** pada koordinat kartesius arahnya ke atas (terhadap y) atau ke kanan (terhadap x).
  2) **Vektor negatif** pada koordinat kartesius arahnya ke bawah (terhadap y) atau ke kiri (terhadap x).
  3) **Vektor memiliki resultan** yang merupakan hasil dari penjumlahan, pengurangan atau perkaliannya.

B. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN VEKTOR

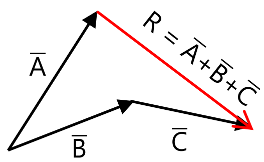
- **Penjumlahan dan pengurangan** vektor digunakan untuk mencari resultan vektor.
- **Resultan vektor** dapat dicari dengan menghubungkan pangkal vektor awal dengan ujung vektor akhir.
  1) **Cara segitiga** (dua vektor)



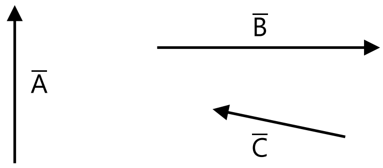
  2) **Cara jajar genjang** (dua vektor)



  3) **Cara poligon** (lebih dari dua vektor)

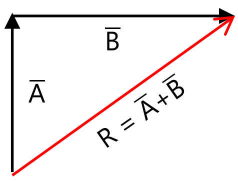


- **Pengurangan vektor** dapat menggunakan sifat operasi hitung:
  $R = \overline{A} - \overline{B} = \overline{A} + (-\overline{B})$ (berbalik arah)
  Contoh:
  Jika diketahui arah vektor A, B, dan C berikut,

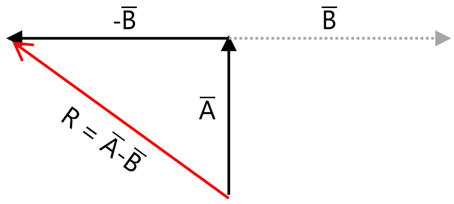


Tentukan:

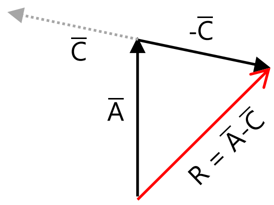
a. Resultan $\overline{A} + \overline{B}$



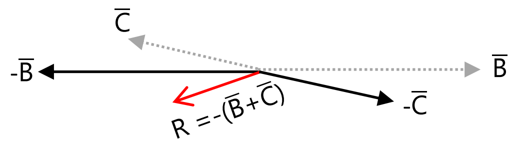
b. Resultan $\overline{A} - \overline{B}$



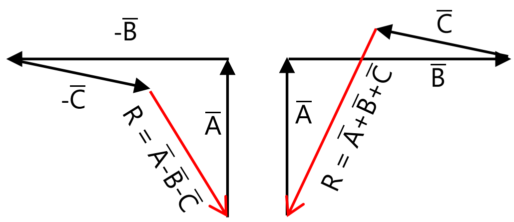
c. Resultan $\overline{A} - \overline{C}$



d. Resultan $-(\overline{B} + \overline{C})$



e. Resultan $\overline{A} - \overline{B} - \overline{C}$ dan $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$



- **Kemungkinan resultan vektor** dapat dirumuskan:

$$|\overline{A}-\overline{B}| \le R \le |\overline{A}+\overline{B}|$$

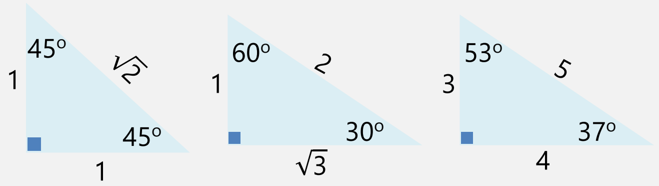
TRIGONOMETRI SEDERHANA

Nilai perbandingan trigonometri

$$\sin\theta = \frac{\text{sisi depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{sisi depan sudut}}{\text{sisi samping sudut}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{sisi samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} \qquad = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Segitiga istimewa

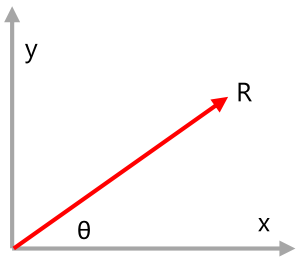


Sudut istimewa

	0°	30°	45°	60°	90°	37°	53°
sin	0	$^1/_2$	$^1/_2\sqrt{2}$	$^1/_2\sqrt{3}$	1	$^3/_5$	$^4/_5$
cos	1	$^1/_2\sqrt{3}$	$^1/_2\sqrt{2}$	$^1/_2$	0	$^4/_5$	$^3/_5$
tan	0	$^1/_3\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$^3/_4$	$^4/_3$

C. PENJUMLAHAN VEKTOR SECARA ANALITIK

- **Sebuah vektor** dapat diuraikan menjadi dua buah vektor pada sumbu horizontal (x) dan sumbu vertikal (y).
- **Vektor** tersebut terurai menjadi komponen x dan y yang saling tegak lurus dan memiliki resultan dengan arah yang merupakan vektor yang terurai itu sendiri.
- **Cara menentukan** komponen vektor:



$$\mathbf{x = R\cos\theta}$$

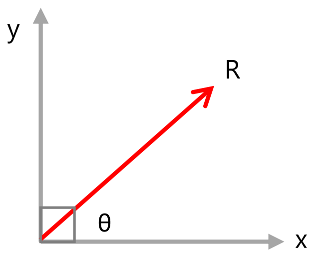
$$\mathbf{y = R\sin\theta}$$

$$\mathbf{R = \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\mathbf{\tan\theta = \frac{y}{x}}$$

- **Penjumlahan vektor secara analitik** dapat dilakukan dalam tiga kondisi:

1) **Dua buah vektor yang tegak lurus**



Resultan vektor dihitung menggunakan teorema Phytagoras:

$$\mathbf{R = \sqrt{x^2+y^2}}$$

Arah resultan terhadap sumbu x dapat dihitung:

$$\mathbf{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$$

Contoh:

Gaya 4 N yang bergerak ke arah utara dan gaya 10 N yang bergerak ke barat dilambangkan dengan vektor. Tentukan resultan dan arahnya!

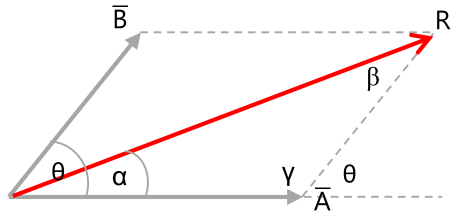
Jawab:

$R = \sqrt{10^2+4^2} = \sqrt{100+16}$

$R = \sqrt{116}$ $\qquad$ R = <u>10,77 N</u>

$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{10}$ $\qquad$ θ = <u>21,80°</u> (kalkulator)

2) **Dua buah vektor yang tidak tegak lurus**



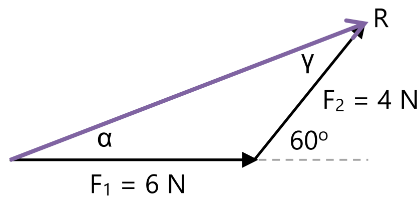
Resultan vektor dihitung menggunakan persamaan kosinus:

$$\mathbf{R = \sqrt{A^2+B^2 \pm 2AB\cos\theta}}$$

Arah resultan terhadap sumbu x dapat dihitung dengan persamaan sinus:

$$\mathbf{\frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}}$$

Contoh:



Tentukan nilai resultan dan arah resultan vektor F_1 dan F_2!

Jawab:

Sudut 60° merupakan sudut θ.

$R = \sqrt{6^2+4^2+2.6.4\cos60}$

$R = \sqrt{36+16+48.0,5}$

$R = \sqrt{76}$ $\qquad$ R = <u>8,71 N</u>

Dari gambar diatas, dapat kita ketahui bahwa β = 180°-60° = 120°.

$\frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta}$ $\qquad$ $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin120}$

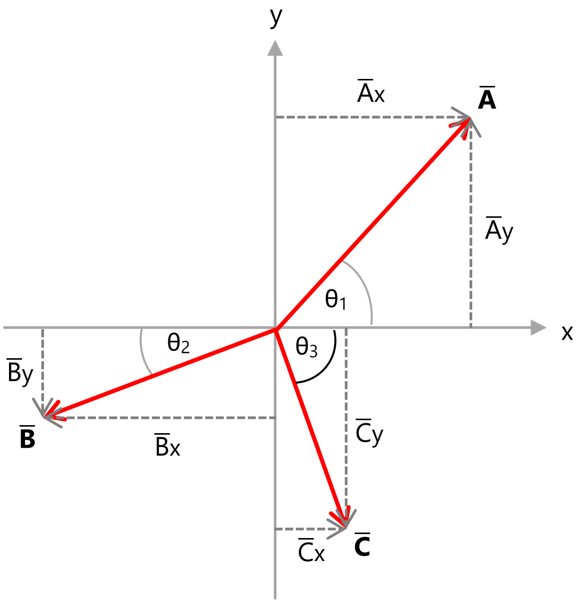
$4.\sin 60 = 6.\sin\alpha$

$4.\frac{1}{2}\sqrt{3} = 6.\sin\alpha$

$\alpha = \sin^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{6}$ $\qquad \alpha = \underline{35{,}26^o}$ (kalkulator)

3) **Lebih dari dua buah vektor**

Jika terdapat lebih dari dua buah vektor, harus diketahui terlebih dahulu resultan komponen x dan y nya, sehingga menjadi dua vektor yang tegak lurus, kemudian resultan baru dapat dicari.



Resultan komponen vektor x:

$$\Sigma R_x = R_{x_1} \pm R_{x_2} \pm \ldots R_{x_n}$$

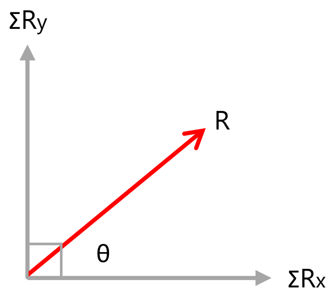
$$\mathbf{x = R\cos\theta}$$

Resultan komponen vektor y:

$$\Sigma R_y = R_{y_1} \pm R_{y_2} \pm \ldots R_{y_n}$$

$$\mathbf{y = R\sin\theta}$$

Setelah kedua komponen dihitung, maka **susunan vektor** menjadi:



Resultan akhir vektor:

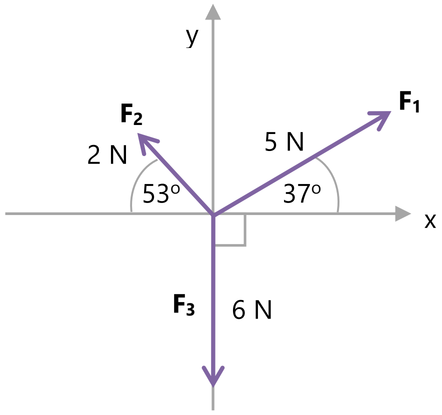
$$\mathbf{R = \sqrt{\Sigma R_x^{\,2} + \Sigma R_y^{\,2}}}$$

Arah resultan vektor:

$$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{\Sigma R_x}{\Sigma R_y}}$$

Contoh:

Suatu benda ditarik oleh tiga buah gaya sesuai diagram dibawah. Tentukan resultan gaya dan arah perpindahan benda!



Jawab:

$\Sigma F_x = F_{x_1} - F_{x_2} + F_{x_3}$

$\Sigma F_x = F_1.\cos 37 - F_2.\cos 53 + F_3.\cos 90$

$\Sigma F_x = 5.\frac{4}{5} - 2.\frac{3}{5} + 6.\,0$

$\Sigma F_x = 4 - 1{,}2 + 0$

$\Sigma F_x = \underline{2{,}8\text{ N}}$

$\Sigma F_y = F_{y_1} + F_{y_2} - F_{y_3}$

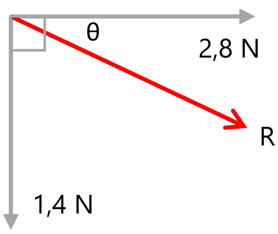
$\Sigma F_y = F_1.\sin 37 - F_2.\sin 53 + F_3.\sin 90$

$\Sigma F_y = 5.\frac{3}{5} + 2.\frac{4}{5} - 6.\,1$

$\Sigma F_y = 3 + 1{,}6 - 6$

$\Sigma F_y = \underline{-1{,}4\text{ N}}$

Kemudian dapat dibentuk:



$R = \sqrt{2{,}8^2 + 1{,}4^2}$

$R = \sqrt{7{,}84 + 1{,}96}$

$R = \sqrt{9{,}8}$

$R = \underline{3{,}13\text{ N}}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{1{,}4}{2{,}8}$

$\theta = \underline{30^o}$

Arah perpindahan adalah barat condong ke selatan sebesar 30°.

D. PERKALIAN VEKTOR

- **Perkalian vektor** terdiri dari dua, yaitu perkalian titik (dot), dan perkalian silang (cross).
- **Bentuk penulisan vektor:**

1) **Vektor posisi**, ditulis dalam notasi vektor terhadap titik acuan.

Contoh: vektor posisi titik A dari O adalah $\overline{OA}$.

2) **Vektor basis**, ditulis dalam vektor satuan.

Vektor satuan sumbu x adalah i, sumbu y adalah j, dan sumbu z adalah k.

$$\bar{a} = x.i + y.j + z.k$$

Panjang/nilai skalar dari vektor yang ditulis dalam vektor basis adalah:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- **Perkalian skalar/titik (•)** menghasilkan besaran skalar, memiliki definisi:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = |a||b|\cos\theta$$

- **Perkalian skalar** dengan vektor basis dengan $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

- **Sifat-sifat perkalian skalar:**

Identitas	$a \bullet a = \|a\|^2$
Vektor satuan	$i \bullet i = j \bullet j = k \bullet k = 1$ $i \bullet j = j \bullet k = k \bullet i = 0$
Komutatif	$a \bullet b = b \bullet a$
Distributif	$a \bullet (b \pm c) = (a \bullet b) \pm (a \bullet c)$
Asosiatif	$(m.a) \bullet (n.b) = (m.n)(a \bullet b)$
Tegak lurus	$a \bullet b = 0$, maka $a \perp b$

- **Perkalian vektor/silang (×)** menghasilkan besaran vektor yang tegak lurus terhadap dua vektor yang dikali silang, memiliki definisi:

$$\bar{a} \times \bar{b} = |a||b|\sin\theta\ \bar{e}$$

- **Perkalian vektor** dengan vektor basis dengan $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ dan $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ diketahui dapat dihitung:

$$a \times b = \left|\begin{matrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} i & j \\ x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (y_1.z_2 - y_2.z_1)\ i + (z_1.x_2 - z_2.x_1)\ j + (y_1.x_2 - y_2.x_1)\ k$$

- **Sifat-sifat perkalian vektor:**

Identitas	$a \times a = 0$
Vektor satuan	$i \times i = j \times j = k \times k = 0$ $i \times j = k \quad j \times k = i \quad k \times i = j$ $j \times i = -k \quad k \times j = -i \quad i \times k = -j$
Anti-Komutatif	$a \times b \neq b \times a$ $a \times b = -(b \times a)$
Distributif	$a \times (b \pm c) = (a \times b) \pm (a \times c)$ $(b \pm c) \times a = (b \times a) \pm (c \times a)$

- **Sudut dua vektor** dapat dicari menggunakan perkalian skalar.

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$