Федеральное агентство по образованию РФ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИФИ»

ПОСОБИЕ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть II. Стереометрия

В помощь учащимся
10–11-х классов

Москва 2009

УДК 512(076)
ББК 22.143я7

Пособие по геометрии. Часть II. Стереометрия. В помощь учащимся 10–11-х классов./ О.В. Нагорнов, А.В. Баскаков, О.Б. Баскакова, Н.В. Серебрякова. – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 108 с.

Пособие составлено в соответствии со школьной программой углубленного изучения математики в 10–11-х классах. В каждой теме представлены необходимые сведения из теории и типовые задачи с решениями. Предлагаемые в достаточном количестве задачи для самостоятельного решения взяты из вариантов вступительных экзаменов в МИФИ, МАИ, ГУУ и другие вузы Москвы и Санкт-Петербурга, а также из вариантов ЕЭГ.

Пособие предназначено для углубленного изучения математики. Работа с ним поможет подготовиться к олимпиадам, поступлению в физико-математические лицеи и НИЯУ МИФИ. Учителя могут использовать данное пособие для подготовки к занятиям.

Рецензент проф. *Н.А. Кудряшов*

Рекомендовано редсоветом НИЯУ МИФИ
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 978-5-7262-1175-6

Редактор *Е. Н. Кочубей*
Макет подготовлен *Е. Н. Кочубей*

Подписано в печать 25.07.2009. Формат 60×84 1/16.
Изд. № 082-1. П.л. 6,75. Уч.-изд. л. 6,75. Тираж 4500 экз. Заказ №
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

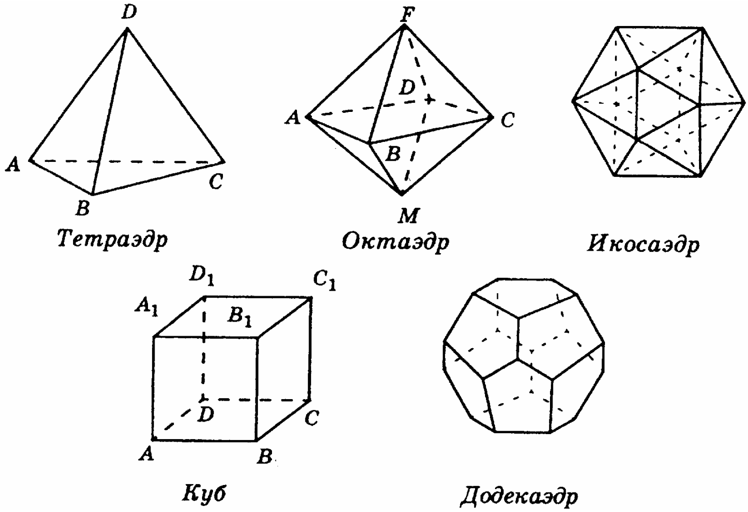
Содержание

I. МНОГОГРАННИКИ:
ПРИЗМА, ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД, ПИРАМИДЫ

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками, причем общие стороны смежных многоугольников называются *ребрами*, а сами многоугольники – *гранями* многогранника.

Выпуклый *многогранник* называется *правильным*, если все его грани – равные правильные многоугольники и в каждой вершине сходится одинаковое количество ребер.

Общий вид правильных многогранников:



Тетраэдр *Октаэдр* *Икосаэдр*

Куб *Додекаэдр*

Тип многогранника (длина ребра a)	Число			Площадь поверхности	Объем
	ребер	граней	вершин		
Тетраэдр	6	4	4	$a^2\sqrt{3}$	$a^3\sqrt{2}/12$
Октаэдр	12	8	6	$2a^2\sqrt{3}$	$a^3\sqrt{2}/3$
Икосаэдр	30	20	12	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3-\sqrt{5})$
Куб (гексаэдр)	12	6	8	$6a^2$	a^3
Додекаэдр	30	12	20	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{12}(15+7\sqrt{5})$

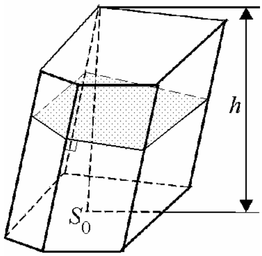
Для всех выпуклых многогранников выполняется *формула* (теорема) *Эйлера:*

$$P + 2 = B + Г,$$

где P – число ребер, B – вершин, $Г$ – граней.

Правильные многоугольники, имеющие более пяти сторон, не могут быть гранями правильного многогранника, так как сумма всех плоских углов при вершине должна быть меньше 360°.

Напомним основные сведения о многогранниках, изучаемых в курсе стереометрии.



Призма. Основание – равные многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях, боковые грани – параллелограммы; боковые ребра параллельны и равны.

Если боковые ребра перпендикулярны основаниям, то призма называется *прямой*.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания – правильные многоугольники. (У правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.)

Объем призмы:

$V = S_{осн}h$, где $S_{осн}$ – площадь основания; h – высота;

$V = S_{\perp}l$, где $S_{\perp}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра.

Перпендикулярное сечение – сечение призмы плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.

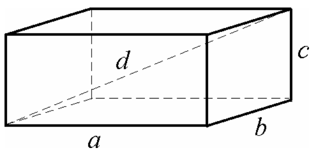
Площадь полной поверхности призмы:

$$S_{полн} = S_{б.п} + 2S_{осн},$$

где $S_{б.п}$ – площадь боковой поверхности, $S_{осн}$ – площадь основания;

$S_{б.п} = P_{\perp}\, l$, где $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного сечения, l – боковое ребро;

$S_{б.п\ прямой\ призмы} = P_{осн}\, h$, где $P_{осн}$ – периметр основания, h – высота призмы.

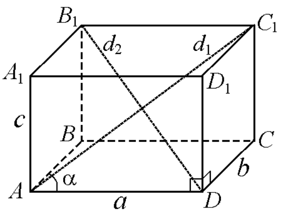


Параллелепипед – это призма, все грани которой – параллелограммы. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.

У *прямоугольного* параллелепипеда все грани – прямоугольники.

Диагональ параллелепипеда – отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани.

Сумма квадратов диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов всех его ребер: $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$.



Диагонали *прямого параллелепипеда* вычисляются по формулам:

$$d_1^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\alpha,$$

$$d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha.$$

$AC_1 = A_1C = d_1, \quad BD_1 = B_1D = d_2,$

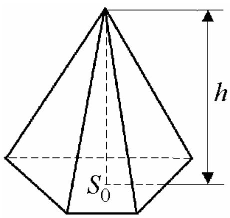
$d_1 \neq d_2, \quad AA_1 \perp ABC, \alpha = \angle BAD.$

Диагонали *прямоугольного* параллелепипеда равны и находятся по формуле: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$.

Площадь полной поверхности $S = 2(ab + ac + bc)$.

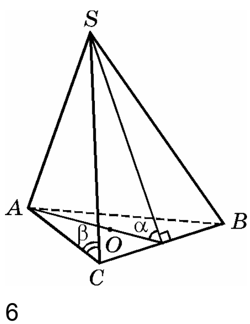
Куб (гексаэдр) – параллелепипед, у которого все 6 граней – квадраты. Объем куба со стороной a равен $V = a^3$, площадь поверхности $S = 6a^2$.



Пирамида. Основание – многоугольник, боковые грани – треугольники, имеющие общую вершину.

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$, где $S_{осн}$ – площадь основания; h – высота.

Площадь полной поверхности $S = S_{осн} + S_{б.п}$, где $S_{осн}$ – площадь основания; $S_{б.п}$ – площадь боковой поверхности.



Правильная пирамида – пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник и вершина проектируется в центр этого основания.

У правильной пирамиды:

- боковые ребра равны;

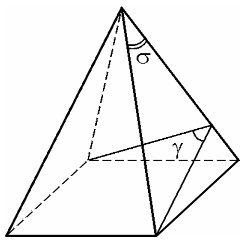
- боковые грани – равные равнобедренные треугольники;
- двугранные углы при ребрах основания равны;
- двугранные углы при боковых ребрах равны;
- плоские углы при вершине равны;
- все апофемы (высоты боковых граней, опущенные на ребра основания) равны.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды:

$S_{\text{б.п.прав.пир}} = lp$, где l – апофема; p – полупериметр основания.

$S_{\text{б.п.прав.пир}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$, где α – двугранный угол при ребре основания.

Заметим, что боковые ребра SA, SB и SC равны *между собой,* но не равны ребру основания AB!



При этом *двугранный угол при основании пирамиды* (α) *не равен* углу при основании боковой грани (β).

Двугранный угол между соседними боковыми гранями (γ) не равен плоскому углу при вершине (σ)!

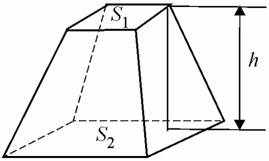
Тетраэдр – это треугольная пирамида, все четыре грани которой – треугольники, любая из граней может быть принята за основание тетраэдра. (Можно провести четыре высоты.)

Площади боковых граней тетраэдра обратно пропорциональны опущенным на них высотам.

Полезны при решении задач следующие теоремы.

Теорема I. Если углы между боковыми гранями пирамиды и плоскостью основания одинаковы (равны α), то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности и при этом $S_{\text{б.п}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}$; $h = r\cdot\mathrm{tg}\alpha$, где r – радиус вписанной окружности, h – высота пирамиды.

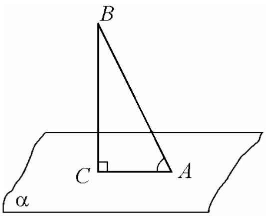
Теорема II. Если боковые ребра пирамиды равны между собой, то: а) около основания можно описать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности; б) все углы между боковыми ребрами и основанием равны.



Усеченная пирамида. Основания S_1 и S_2 параллельны. Площадь полной поверхности $S = S_1 + S_2 + S_{б.п}$, где $S_{б.п}$ – площадь боковой поверхности. Объем

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2).$$

Углы в пространстве



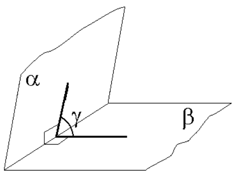
Угол между наклонной и плоскостью равен углу между наклонной и ее проекцией на эту плоскость.

AB – наклонная,

AC – проекция,

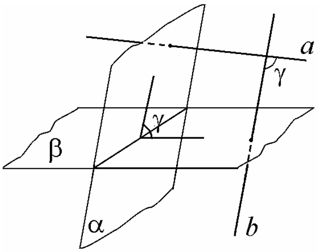
$AB \wedge (\alpha) = \angle A$.

Двугранный угол – фигура, образованная двумя непараллельными полуплоскостями, имеющими общую границу (ребро двугранного угла).



Теорема III. Угол между двумя непараллельными плоскостями равен углу между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, лежащими в этих плоскостях:

$$(\alpha) \wedge (\beta) = \gamma.$$



Теорема IV. Угол между двумя плоскостями равен углу между перпендикулярными прямыми к этим плоскостям.

$(\alpha) \wedge (\beta) = \gamma < 90°$,

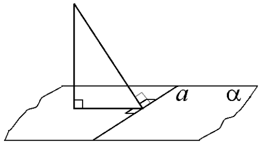
$a \perp \alpha$,

$b \perp \beta$,

$(\alpha) \wedge (\beta) = a \wedge b = \gamma$.

Очень часто при решении задач используется **теорема о трех перпендикулярах**: прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно к проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

Справедлива и **обратная теорема**: прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно наклонной к этой плоскости, перпендикулярна и ее проекции.



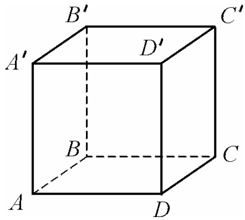
Примеры решения задач

Задача 1.1. В основании прямого параллелепипеда, объем которого равен 1, лежит ромб со стороной, равной 4. Площадь боковой поверхности призмы $\sqrt{2}$. Найти острый угол между сторонами ромба.

Решение. Поскольку все боковые грани – прямоугольники, то площадь боковой поверхности параллелепипеда равна периметру основания, умноженному на высоту:

$$S_{б.п} = (AB + BC + CD + DA) \cdot AA' =$$

$$= 4 \cdot AB \cdot AA' \Rightarrow \sqrt{2} = 4 \cdot 4 \cdot AA' \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{2}}{16}.$$



Объем параллелепипеда равен

$$V = S_{ABCD} \cdot AA' \Leftrightarrow 1 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot S_{ABCD} \Rightarrow$$

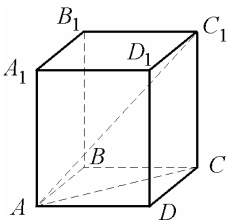
$$S_{ABCD} = 8\sqrt{2},$$

но площадь $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD = 4 \cdot 4 \cdot \sin\angle BAD \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{2} = 16\sin\angle BAD \Leftrightarrow \sin\angle BAD = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle BAD = 45°.$$

Ответ: 45°.

Задача 1.2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC_1 - AB = 9$, $AC_1 - AD = 5$ и $AC_1 - AA_1 = 2$. Определить: а) AC_1; б) площадь боковой поверхности параллелепипеда; в) площадь полной поверхности параллелепипеда; г) объем параллелепипеда.



Решение. а) Так как $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$, то, полагая $AC_1 = x$, приходим к уравнению

$$x^2 = (x-2)^2 + (x-5)^2 + (x-9)^2$$
$$\text{или} \quad x^2 - 16x + 55 = 0,$$
решив которое, получим $x_1 = 5$, $x_2 = 11$. Корень x_1 не удовлетворяет условию задачи: при $x = 5 \Rightarrow AC_1 - AB = 5 - 9 < 0$. Второй корень удовлетворяет всем условиям задачи и, следовательно, $AC_1 = 11$.

б) Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда равна сумме площадей боковых его граней:
$$S_{\text{б.п}} = 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B} = 2AA_1(AB + AD).$$

Так как $AB = AC_1 - 9 = 11 - 9 = 2$, $AD = AC_1 - 5 = 11 - 5 = 6$, $AA_1 = 11 - 2 = 9$, то $S_{\text{б.п}} = 2 \cdot 9 \cdot (2+6) = 144$.

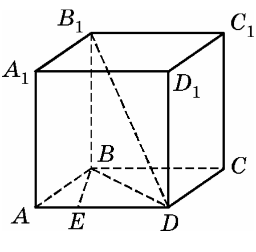
в) Для нахождения площади полной поверхности параллелепипеда определим площадь прямоугольника $ABCD$:
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2 \cdot 6 = 12.$$
Таким образом, $S_{\text{полн}} = S_{\text{б.п}} + 2S_{ABCD} = 144 + 2 \cdot 12 = 168$.

г) Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его измерений, т. е. $V = AB \cdot AD \cdot AA_1 = 2 \cdot 6 \cdot 9 = 108$.

Ответ: а) $AC_1 = 11$; б) $S_{\text{б.п}} = 144$; в) $S_{\text{полн}} = 168$; г) $V = 108$.

Задача 1.3. Полная поверхность прямого параллелепипеда равна 896, а боковая 672. Меньшая из диагоналей основания равна $8\sqrt{2}$, а угол между нею и большей стороной основания равен 45°. Определить меньшую диагональ параллелепипеда.

Решение. Пусть $BD<AC$ и $AD>AB$, тогда $\angle ADB = 45°$. Для нахождения B_1D $(B_1D < AC_1)$ необходимо определить длину бокового ребра BB_1, после чего из равенства $B_1D^2 = BD^2 + BB_1^2$ вычисляется B_1D.



Введем следующие обозначения: $AB = x$, $AD = y$, $BE = h$ $(BE \perp AD)$ и $BB_1 = H$.

Из условия задачи имеем
$$2hy + 2(x+y)H = 896,$$
$$(x+y)H = 672.$$
Из этих уравнений находим $hy = 112$, а затем из прямоугольного треугольника BED находим h:
$$h = BE = DB \cdot \sin\angle ADB = 8\sqrt{2}\sin 45°.$$

Так как $hy = 8y = 112$, то $y = AD = 14$. Теперь для нахождения x (с тем, чтобы из уравнения $2(x + y)H = 672$ найти H) воспользуемся теоремой косинусов:

$$x^2 = AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\cdot AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$$

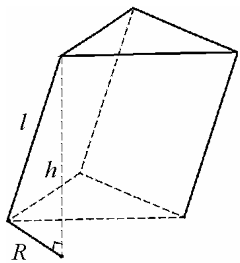
или $x^2 = 14^2 + (8\sqrt{2})^2 - 2\cdot 14\cdot 8\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 100$, откуда $x = 10$.

Далее находим $H = BB_1 = \dfrac{672}{2\cdot(x+y)} = \dfrac{336}{10+14} = 14$,

$$B_1D = \sqrt{14^2 + (8\sqrt{2})^2} = 18.$$

Ответ: $B_1D = 18$.

Задача 1.4. Основанием наклонной призмы является треугольник со сторонами $a = 14$, $b = 30$ и $c = 40$. Боковое ребро призмы $l = 65$, а одна из вершин верхнего основания проектируется (ортогонально) в центр окружности, описанной около нижнего основания. Определить объем призмы.



Решение. Так как объем призмы $V = S_{\text{осн}}h$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания призмы и h – ее высота, то имеем две задачи: определение $S_{\text{осн}}$ и нахождение высоты h. Решим первую из них.

По формуле Герона находим

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{p(p-a)(p-ab)(p-c)} =$$
$$= \sqrt{42\cdot 28\cdot 12\cdot 2} = 168.$$

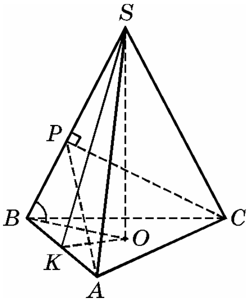
Для решение второй задачи необходимо найти радиус R описанной около треугольника окружности. Это можно сделать, используя формулу

$$R = \frac{abc}{4S_{\text{осн}}} = \frac{14\cdot 30\cdot 40}{4\cdot 168} = 25.$$

Теперь найдем $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$ (здесь l – длина бокового ребра) и, наконец, $V = 168\cdot 60 = 10080$.

Ответ: $V = 10080$.

Задача 1.5. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найти величину двугранного угла между смежными боковыми гранями.



Решение. Вершина пирамиды S проектируется в центр O ΔABC, BO – радиус описанной около правильного ΔABC окружности, т. е. $BO = \dfrac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Из прямоугольного ΔBSO имеем катет $SO = BO\,\mathrm{tg}\angle OBS = 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}60° = 6$, гипотенуза

$$BS = \frac{BO}{\cos\angle OBS} = 2BO = 4\sqrt{3}.$$

Пусть K – середина AB. Гипотенузу SK треугольника KSO находим по теореме Пифагора: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2}$, где OK – радиус вписанной в ΔABC окружности, т. е.

$$OK = \frac{AB}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

откуда $SK = \sqrt{36+3} = \sqrt{39}$.

Двугранный угол между соседними боковыми гранями определяется углом $\angle APC$, где AP и PC – высоты боковых граней. Поскольку $SK \cdot AB = BS \cdot AP$, то

$$AP = \frac{SK \cdot AB}{BS} = \frac{\sqrt{39}\cdot 6}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}.$$

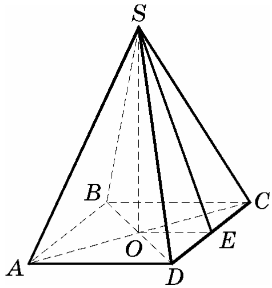
По теореме косинусов

$$\cos\angle APC = \frac{2AP^2 - AC^2}{2AP^2} = \frac{\dfrac{9\cdot 13}{2} - 36}{\dfrac{9\cdot 13}{2}} = \frac{117-72}{117} = \frac{45}{117} = \frac{5}{13}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{5}{13}$.

Задача 1.6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина бокового ребра равна l, а величина $\angle ASB$ равна α. Найти площадь полной поверхности и объем пирамиды.

Решение. Площадь полной поверхности любой пирамиды складывается из суммы площадей боковых граней и площади основания. Так как пирамида $SABCD$ – правильная, то $S_{\text{полн}} = 4S_{CSD} + S_{ABCD}$, где Q_{CSD} – площадь боковой грани CSD, а S_{ABCD} – площадь квадрата $ABCD$. В ΔCSD стороны $DS = CD = l$, $\angle DSC = \alpha$ и, следовательно, $S_{CSD} = \dfrac{1}{2} l^2 \sin\alpha$.



Теперь найдем площадь квадрата $ABCD$. Проведем высоту SE (апофему пирамиды) в ΔCSD. Поскольку этот треугольник равнобедренный, то $DE = EC$, $\angle DSE = \angle CSE = \dfrac{\alpha}{2}$ и $DE = \dfrac{1}{2} DC = l\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Таким образом:

$$S_{ABCD} = DC^2 = \left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Окончательно получаем

$$S_{\text{полн}} = 4\cdot\frac{1}{2} l^2\sin\alpha + 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2l^2\left(\sin\alpha + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Вычислим далее объем пирамиды по формуле

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABCD},$$

где SO – длина высоты пирамиды. Найдем SO. В прямоугольном ΔSOE гипотенуза $SE^2 = OE^2 + OS^2$, и так как $SE = l\cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $OE = DE = l\sin\dfrac{\alpha}{2}$, то $OS = \sqrt{l^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - l^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}} = l\sqrt{\cos\alpha}$.

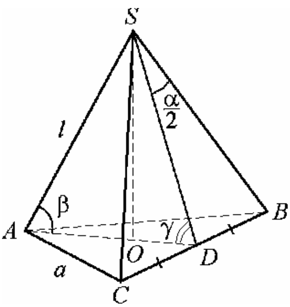
Окончательно получаем

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} l\sqrt{\cos\alpha}\cdot 4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{3} l^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}.$$

Ответ: $S_{\text{полн}} = 2l^2\left(\sin\alpha + 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$; $V_{SABCD} = \dfrac{4}{3} l^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$.

В заключение рассмотрим несколько задач на нахождение величин углов в правильных пирамидах (такие задачи часто приходится решать на вступительных экзаменах).

Задача 1.7. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ величина каждого плоского угла при вершине S пирамиды равна α. Найти: а) величину угла β между боковым ребром AS и плоскостью основания пирамиды; б) величину угла γ наклона плоскости боковой грани BSC к плоскости основания; в) величину двугранного угла φ при ребре AS.



Решение. а) Проведем плоскость через ребро AS и точку D – середину отрезка BC. Эта плоскость перпендикулярна к плоскости основания, и поэтому $\angle SAD = \beta$ – величина угла между боковым ребром AS и плоскостью основания. Для удобства введем обозначения $AS = l$ и $AC = a$.

Из ΔAOS следует, что $AO = l\cos\beta$, а из ΔABC находим $AO\sqrt{3} = a$ (так как AO – радиус описанной окружности в равностороннем треугольнике). Исключив из этих равенств AO, получим

$$a = l\sqrt{3}\cos\beta. \qquad (1)$$

Так как SD является биссектрисой и высотой в равнобедренном треугольнике BCS, то

$$BD = \frac{a}{2} = BS\sin\frac{\alpha}{2} = l\sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad a = 2l\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Приравняем правые части уравнений (1) и (2):

$$l\sqrt{3}\cos\beta = 2l\sin\frac{\alpha}{2} \text{ или } \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2},$$

а отсюда находим $\angle\ SAD = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ \sin\ \frac{\alpha}{2}\right)$.

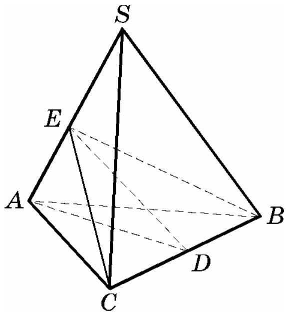
б) Из прямоугольного ΔSOD находим $OD = SD\cos\angle ADS$ (положим далее $\angle ADS = \gamma$ – величина угла наклона плоскости боковой грани BSC к плоскости основания). Так как $OD=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $SD=l\cos\frac{\alpha}{2}$ (OD – радиус вписанного в ΔABC круга, а SD – апофема боковой грани BSC), то имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{6}2l\sin\frac{\alpha}{2}=l\cos\frac{\alpha}{2}\cos\gamma \text{ или } \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, $\gamma=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Замечание. Из равенства $AO\cdot\operatorname{tg}\beta=OD\cdot\operatorname{tg}\gamma$ легко устанавливается зависимость между углами β и γ: $\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$.

в) Проведем через ребро основания BC плоскость, перпендикулярную к ребру AS, которая пересечет прямую AS в точке E (такая плоскость существует, так как $BC \perp AS$).



Величина $\angle BEC$, образованного пересечением плоскости BEC и граней ASC и ASB и есть величина искомого угла между боковыми гранями ASC и ASB.

Пусть $\angle BEC=\varphi$. Тогда

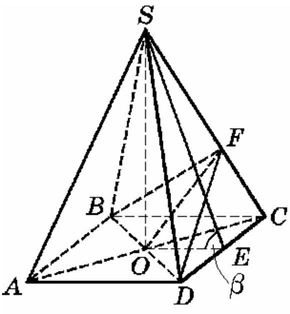
$$EC\sin\frac{\varphi}{2}=CD=\frac{a}{2},$$

и так как $CE\perp AS$, то $EC=l\sin\alpha$, и мы получаем уравнение $l\sin\alpha\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{2}$, из которого находим $l\sin\alpha\sin\frac{\varphi}{2}=l\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\varphi=2\arcsin\left(\frac{1}{2\cos(\alpha/2)}\right)$.

Ответ: $\beta=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, $\gamma=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, $\varphi=2\arcsin\left(\frac{1}{2\cos\alpha/2}\right)$.

Замечание. Решение проводится таким же образом, если точка E не принадлежит ребру SA (когда $\alpha>\pi/2$).

Задача 1.8. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ величина угла между боковым ребром SA плоскостью $ABCD$ на β. Найти: а) величину угла наклона плоскости боковой грани CSD к плоскости основания; б) величину угла CSD; в) величину двугранного угла при ребре CS.



Решение. а) Соединим середину E отрезка CD с вершиной S. Очевидно, что плоскость ESO (SO – высота пирамиды) перпендикулярна к CD, и поэтому угол $OES = \gamma$ – величина угла наклона плоскости DSC к плоскости основания.

Из треугольников AOS и EOS имеем $AO = OS\operatorname{ctg}\beta$ и $EO = OS\operatorname{ctg}\gamma$. А так как $AO = OC = OE\sqrt{2}$, то, исключая из последних двух равенств OE и OS, получаем $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\gamma$, а отсюда находим $\gamma = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\beta\right)$.

б) Так как $SE = \frac{OS}{\sin\gamma}$ и $SC = \frac{OS}{\sin\beta}$, то $\frac{SE}{SC} = \cos\angle ESC = = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$. Поскольку $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}\beta$ и $1+\operatorname{ctg}^2\gamma = \frac{1}{\sin^2\gamma}$, то получаем $1+\frac{\operatorname{ctg}^2\beta}{2} = \frac{1}{\sin^2\gamma}$, откуда $\frac{1}{\sin\gamma} = \sqrt{\frac{2\sin^2\beta+\cos^2\beta}{2\sin^2\beta}}$, а $\cos\angle ESC = \sin\beta\cdot\frac{1}{\sin\gamma} = \sqrt{\frac{1+\sin^2\beta}{2}}$. Далее находим

$$\angle CSD = 2\angle ESC = 2\arccos\sqrt{\frac{1+\sin^2\beta}{2}}.$$

в) Проведем $OF \perp SC$. Плоскость $BFD \perp SC$ и $\angle BFD = \varphi$ – величина двугранного угла при ребре SC. Из ΔOFD и ΔOSD имеем

$$OD = OF\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}, \tag{1}$$

$$OD = OS\,\mathrm{ctg}\,\beta. \tag{2}$$

Поскольку $OF = OS\sin\angle OSF = OS\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = OS\cos\beta$, то, приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получаем (после сокращения на OS) $\cos\beta\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \mathrm{ctg}\,\beta$. Далее, поскольку $\cos\beta \neq 0$, то $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sin\beta}$ и $\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sin\beta}$.

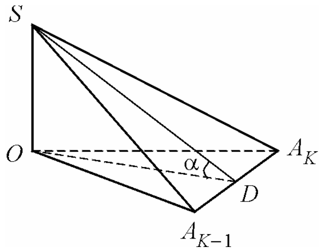
Замечание. Из последней формулы следует:

$$\frac{1}{\sin\beta} > 1 \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sin\beta} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi > \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\mathrm{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ctg}\,\beta\right)$, б) $2\arccos\sqrt{\frac{1+\sin^2\beta}{2}}$, в) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sin\beta}$.

Задача 1.9. В правильной n-угольной пирамиде ($n > 3$) площадь основания равна S, а плоскость каждой боковой грани составляет с плоскостью основания угол величиной α. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Рассмотрим часть пирамиды $OSA_{K-1}A_K$ (n-я часть n-угольной пирамиды) и найдем площадь $\Delta\, SA_{K-1}A_K$:



$$S_{\Delta A_K SA_{K-1}} = \frac{1}{2} A_{K-1}A_K \cdot SD.$$

Так как $SD = \frac{OD}{\cos\alpha}$, то

$$S_{\Delta A_K SA_{K-1}} = \frac{1}{2}\frac{|A_{K-1}A_K|\cdot|OD|}{\cos\alpha}.$$

Далее находим площадь боковой поверхности пирамиды:

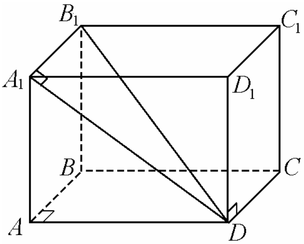
$$S_{\text{б.п}} = \frac{n}{2} \cdot \frac{|A_{K-1}A_K| \cdot |OD|}{\cos\alpha} = n\frac{S_{\Delta A_K O A_{K-1}}}{\cos\alpha} = \frac{S}{\cos\alpha}.$$

Окончательно получаем

$$S_{\text{полн}} = S + \frac{S}{\cos\alpha} = S\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= S\left(\frac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha}\right) = \frac{2S\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Задача 1.10. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани AA_1D_1D призмы и плоскостью a, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой B_1D, если расстояние между прямыми A_1C_1 и BD равно $\sqrt{3}$.



Решение. Необходимо найти $\operatorname{tg}\gamma$.

$\gamma = (AA_1D_1D)\wedge(\alpha)$.

Расстояние между скрещивающимися прямыми A_1C_1 и BD равно длине общего перпендикуляра к этим прямым.

1) $\left.\begin{array}{l} AA_1 \perp A_1C_1 \\ AA_1 \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow AA_1 = \sqrt{3}$ (расстояние между A_1C_1 и BD);

2) $B_1D \perp (\alpha)$ по условию. $B_1A_1 \perp (AA_1D_1D)$ (так как $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник), тогда $\gamma = B_1D \wedge B_1A_1$ по теореме IV;

3) $\left.\begin{array}{l} BA_1 \perp (A_1D_1DA \\ A_1D \in (A_1D_1DA) \end{array}\right\} \Rightarrow B_1A_1 \perp A_1D \Rightarrow \Delta A_1B_1D -$ прямоугольный,

отсюда $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{A_1D}{A_1B_1}$; $A_1B_1 = AB = 5$, $A_1D = \sqrt{AA_1^2 + AD^2} = \sqrt{3+33} = 6.$

Тогда $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{A_1D}{A_1B_1} = \dfrac{6}{5} = 1{,}2.$

Ответ: 1,2

Задачи для самостоятельного решения

1. Наклонная равна *a*. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью проекции угол, равный: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

2. Расстояния отточки до точки плоскости равно *h*. Найти длину наклонных, проведенных из точки под следующими углами к плоскости: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

3. В ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Через точку *C* проведена прямая *CM*, перпендикулярная плоскости треугольника. $AC = 18$ см; $CM = 12$ см. Найти расстояние от точки *M* до прямой *AB* и расстояние от точки *B* до плоскости *ACM*.

4. В ромбе *ABCD* $\angle A = 60°$, сторона ромба равна 4 см. Прямая *AE* перпендикулярна плоскости ромба. Расстояние отточки *E* до прямой *DC* равно 4. Найдите расстояние отточки *E* до плоскости ромба и отточки *A* до плоскости *EDC*.

5. Отрезок *AM* является перпендикуляром к плоскости прямоугольника *ABCD*. Угол между прямой *MC* и этой плоскостью равен 30°; $AD = \sqrt{2}$; $CD = 2$. Найти: а) *AM*; б) двугранный угол *MCDA*.

6. В равнобедренном ΔABC, $AC = CB = a$, $\angle BAC = 30°$, отрезок *CM* – перпендикуляр к плоскости (*ABC*), $CM = a\sqrt{2}$. Найти тангенс двугранного угла *MABC* и угол между прямой *AM* и плоскостью *MBC*.

7. Определить диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1)1; 2; 2; 2) 2; 3; 6; 3) 6; 6; 7; 4) 8; 9; 12; 5) 12; 16; 21.

8. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 м и 8 м, и одна из диагоналей основания равна 12 м. Определить диагонали параллелепипеда.

9. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2, а высота равна 14 см. Определить диагональ этой призмы.

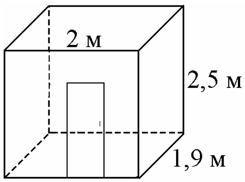
10. Основанием прямой призмы сложит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см; высота 2 см. Найти сторону основания.

11. Ребро куба равно 2 м. Найти его поверхность.

12. Определить ребро куба, если его поверхность равна: 1) 5046 см^2; 2) $793\frac{1}{2}$ дм^2.

13. Определить поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: $a = 10$ см, $b = 22$ см, $c = 16$ см.

14. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся, как 3 : 7 : 8, а поверхность содержит 808 см^2. Определить ребра.



15. Для оклейки стен ванной комнаты (см. рис.) нужно приобрести керамическую плитку, причем плитка покупается с запасом в 10 % от оклеиваемой площади. Ширина двери равна 0,75 м, высота 2 м. Цена плитки 300 руб. за 1 м^2. Определите стоимость плитки, если стены решено оклеить полностью от пола до потолка.

16. В прямом параллелепипеда стороны основания равны 6 и 8 м и образуют угол в 30°; боковое ребро равно 5 м. Определить полную поверхность этого параллелепипеда.

17. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32м^2, |а полная поверхность 40 м^2. Найти высоту.

18. В прямой треугольной призме стороны основания равны 25 дм, 29 дм и 36 дм, а полная поверхность равна 1620 дм^2. Определить боковую поверхность и высоту призмы.

19. Найти расстояние от центра грани единичного куба до вершин противоположной грани.

20. Диагональ куба равна $3\sqrt{3}$. Какова его полная поверхность?

21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти тангенс угла между плоскостями BC_1D и $ABCD$.

22. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известно, что $AA_1 = AB$. Найти косинус угла между диагональю AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

23. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали AC и BD основания $ABCD$ пересекаются в точке M, причем $\angle AMB =$ $= \alpha$. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если $B_1M = b$ и $\angle BMB_1 = \beta$.

24. Найти расстояние между серединами двух скрещивающихся ребер куба, полная поверхность которого равна 36.

25. Найти расстояние между серединами непараллельных сторон разных оснований правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 2.

26. В треугольной призме каждая сторона основания равна a. Одна из вершин верхнего основания проектируется в центр нижнего основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α. Найти площадь боковой поверхности призмы.

27. В наклонной треугольной призме боковые ребра равны по 8 см; стороны перпендикулярного сечения относятся, как 9:10:17, а его площадь равна 144 см^2. Определить боковую поверхность этой призмы.

28. Сторона куба равна 3 м. Найти объем.

29. Объем куба 8 м^3. Найти его поверхность.

30. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какую длину имеет ребро этого куба?

31. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Определить ребро.

32. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 54. Чему будет равен объем параллелепипеда, если каждое ребро уменьшить в 3 раза?

33. Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему по объему куба.

34. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 35 см, а ребра относятся, как 2:3:6. Определить объем параллелепипеда.

35. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда 2 м^2, 3 м^2 и 6 м^2. Найти его объем.

36. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна 17 см, а стороны равны 9 и 10 см. Полная поверхность этого параллелепипеда равна 334 см^2. Определить его объем.

37. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 м, а диагональ боковой грани 2,5 м. Определить объем.

38. В прямой треугольной призме стороны основания равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Определить объемы призмы.

39. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см^2, а площади боковых граней 9 см^2, 10 см^2 и 17 см^2. Определить объем.

40. Основанием призмы служит треугольник со сторонами 3 см, 5 см и 7 см. Боковое ребро длиной 8 см составляет с плоскостью основания угол в 60°. Определить объем призмы.

41. Определить объем правильной треугольной призмы, если сторона ее основания равна $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, а расстояние от вершины одного основания до стороны противоположного основания, не лежащей с вершиной в одной грани, равно $\sqrt{7}$.

42. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$. Найти объем параллелепипеда.

43. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1112. Боковая поверхность равна 728. Объем параллелепипеда равен 2496. Вычислить длину бокового ребра.

44. Объем правильной треугольной призмы равен 36, а высота призмы вдвое больше стороны основания. Найти сторону основания.

45. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого 4 см, а угол при нем равен $45°$. Определить объем призмы, если ее боковая поверхность равна сумме площадей оснований.

46. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $10\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол $45°$. Найти объем параллелепипеда, если одна сторона основания на 2 см больше другой.

47. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α. Ребро AA_1 равно b и образует с ребрамм AB и AD угол φ. Определить объем параллелепипеда.

48. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 12 см и составляет угол $30°$ с плоскостью боковой грани и угол $45°$ с боковым ребром. Найти объем параллелепипеда.

49. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна $6\sqrt{7}$ и образует с боковой гранью угол α, синус которого равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Найти объем призмы.

50. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна a, а угол между диагональю и большим основанием равен α. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом β. Найти объем призмы.

51. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания равна 8 см. Определить боковое ребро.

52. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы по 45°. Определить высоту этой пирамиды.

53. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислить высоту пирамиды.

54. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если ее высота равна 4 см, а апофема 8 см.

55. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность 18 м^2. Определить сторону основания и высоту пирамиды.

56. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a и боковое ребро составляет с плоскостью основания угол в 45°.

57. Определить сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро и боковая поверхность соответственно равны 10 см и 144 см^2.

58. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями в 6 и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, лежащего в основании пирамиды, и равна 1 м. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

59. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны содержат 20 и 36 см, а площадь равна 360 см^2, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

60. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого одна сторона содержит 40 см, а две другие по 25 см. Высота пирамиды проходит через вершину угла, образуемого равными сторонами основания, и равна 8 см. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

61. Основанием пирамиды служит квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота равна 21 дм.

62. Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной a; одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и равно стороне основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

63. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней – также равносторонний треугольник и перпендикулярна к плоскости основания. Определить боковую поверхность этой пирамиды.

64. В правильной четырехугольной пирамиде высота 3 м, боковое ребро 5 м. Найти объем.

65. Объем правильной шестиугольной пирамиды 6 см^2. Сторона основания 1 см. Найти боковое ребро.

66. Определить объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны.

67. Сторона основания правильной треугольной пирамиды a, а боковое ребро образует с плоскостью основания угол в 45°. Определить объем пирамиды.

68. Высота правильной треугольной пирамиды h, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60°. Определить объем пирамиды.

69. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Определить объем пирамиды.

70. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 9 и 12 м; каждое из боковых ребер равно 12,5 м. Найти объем пирамиды.

71. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39, 17 и 28 см; боковые ребра равны каждое 22,9 см. Определить объем этой пирамиды.

72. В данной треугольной пирамиде двугранные углы при основании равны между собой; стороны основания: 7, 8 и 9 см; объем пирамиды 40 см^2. Определить ее боковую поверхность.

73. Ромб со стороной в 15 см служит основанием пирамиды, каждая грань которой наклонена к основанию под углом в 45°. $S_{бок}$ = 3 дм^2. Найти объем пирамиды.

74. Боковые ребра треугольной пирамиды a, b и c взаимно перпендикулярны. Найти объем пирамиды.

75. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, площади их равны 6 м^2, 4 м^2 и 3 м^2. Найти объемы пирамиды.

76. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, у которой параллельные стороны равны 3 и 5 см, а боковая сторона 7 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, большее боковое ребро равно 10 см. Определить объем этой пирамиды.

77. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а сторона основания равна $12\sqrt{2}$. Найти: а) объем пирамиды; б) косинус угла наклона бокового ребра к основанию.

78. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 1 см, а ее боковая поверхность равна 3 см^2. Найти объем пирамиды.

79. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 3, а сторона основания равна 2. Вычислить косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

80. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найти объем пирамиды.

81. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен V. Угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен α. Найти боковое ребро пирамиды.

82. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Двугранный угол при основании $60°$. Найти объем пирамиды.

83. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $60°$. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

84. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, угол между боковым ребром и высотой пирамиды α. Найти объем пирамиды.

85. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды l, а высота – h. Определить: а) двугранный угол при основании; б) двугранный угол между смежными боковыми гранями.

86. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, а боковое ребро – b. Определить: а) двугранный угол при основании; б) двугранный угол между смежными боковыми гранями.

87. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна S дм^2, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен φ. Найти объем пирамиды.

88. Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна S. Двугранные углы при основании пирамиды равны φ. Найти площадь полной поверхности пирамиды.

89. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен $120°$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь ее диагонального сечения равна q.

90. В правильной треугольной пирамиде угол при вершине между двумя боковыми ребрами равен β. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

91. Основанием треугольной пирамиды служит прямоугольный треугольник, один из углов которого равен $30°$. Каждое из боковых ребер пирамиды равно 4 см и наклонено к плоскости основания под углом $60°$. Найти объем пирамиды.

92. Определить объем пирамиды, основанием которой является прямоугольный треугольник с острым углом $15°$, а боковые ребра, каждое длиной 8, образуют с плоскостью основания углы $30°$.

93. Основанием пирамиды служит ромб, меньшая диагональ которого равна d, а острый угол равен α. Каждая боковая грань наклонена к основанию под углом β. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

94. Каждое из боковых ребер пирамиды равно $\frac{269}{32}$. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Найти объем пирамиды.

95. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9. Каждое боковое ребро равно 13 см. Вычислить объем пирамиды.

96. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит ΔABC, у которого $BC = 11$, $CA = 13$, а высота $CE = \sqrt{105}$. Каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью ABC угол величиной α. Определить площадь основания и объем пирамиды.

97. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 12$. Длины высот всех боковых граней равны 16. Найти объем пирамиды.

98. В треугольной пирамиде каждое из боковых ребер равно a и один плоский угол при вершине равен $90°$, а остальные $60°$. Найти объем пирамиды.

99. Основанием пирамиды является равносторонний треугольник. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны основанию, а третья наклонена к основанию под углом α. Найти площадь основания пирамиды, если площадь ее боковой поверхности равна S.

100. Основание пирамиды $SABC$ – правильный ΔABC со стороной a. Одна боковая грань SAB является равнобедренным треугольником ($SA = SB$) и перпендикулярна плоскости основания. Противоположное этой грани боковое ребро SC образует с плоскостью основания угол β. Найти углы наклона к плоскости основания боковых граней и площадь боковой поверхности пирамиды.

101. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны 3, 4 и 5 см. Найти объем этой пирамиды.

102. Прямоугольник со сторонами 9 и 16 является основанием четырехугольной пирамиды. Высота пирамиды равна 12 и проектируется в одну из вершин основания. Найти полную поверхность пирамиды.

103. В основании пирамиды $PABCD$ лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$, площадь которого S, а диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причем отрезок PO является высотой пирмиды. Площадь треугольника ΔAPC равна S_1, а площадь ΔBPD равна S_2. Найти объем пирамиды, если длины AC, PO и BD являются последовательными членами геометрической прогрессии.

104. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований 10 и 2 см. Определить боковое ребро пирамиды.

105. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 4 и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найти высоту.

106. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 63 см, апофема равна 65 см, а стороны оснований относятся, как 7 : 3. Определить эти стороны.

107. Стороны основания правильной треугольной усеченной пирамиды 2 и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол в 60°. Найти высоту.

108. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 и 2 м. Высота равна 4 м. Найти полную поверхность.

109. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 6 и 12 дм; высота равна 1 дм. Найти боковую поверхность.

110. Стороны оснований правильной шестиугольной усеченной пирамиды 4 и 2 см; высота 1 см. Найти боковую поверхность.

111. Основаниями усеченной пирамиды служат прямоугольники, причем точки пересечения диагоналей оснований находятся на одном перпендикуляре к плоскости основания. Стороны одного прямоугольника равны 54 и 30 см; периметр другого прямоугольника 112 см; расстояние между их плоскостями равно 12 см. Определить боковую поверхность этой усеченной пирамиды.

112. Боковое ребро правильной четырехугольной усеченной пирамиды равно 3 м, стороны оснований 5 и 1м. Найти объем.

113. Площади оснований усеченной пирамиды равны 245 и 80 м^2, а высота полной пирамиды равна 35 м. Определить объем усеченной пирамиды.

114. В треугольной усеченной пирамиде высота 10 м стороны одного основания 27, 29, 52 м; периметр другого основания равен 72 м. Определить объем усеченной пирамиды.

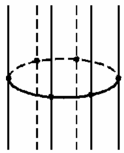
115. Определить объем правильной шестиугольной усеченной пирамиды. если стороны ее оснований a и b, а боковое ребро составляет с плоскостью нижнего основания угол в 30°.

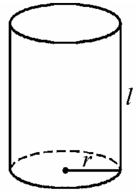
116. Длины ребер при основаниях правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5 см. Боковое ребро усеченной пирамиды равно $\sqrt{17}$ см. Найти площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

II. КРУГЛЫЕ ТЕЛА: ЦИЛИНДР, КОНУС, ШАР

Цилиндр. Фиксируем на плоскости окружность.

Множество точек, лежащих на прямых, перпендикулярных данной плоскости и проходящих через точки окружности, называются *цилиндрической поверхностью.*

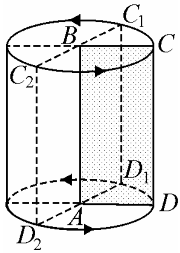




При этом окружность называется *направляющей,* а прямая перпендикулярная плоскости, называется *образующей.*

Часть пространства, заключенная внутри цилиндрической поверхности, лежащей между двумя плоскостями, перпендикулярными образующей, называется *прямым круговым цилиндром.*

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.



AB – ось вращения;

$C_1C_2D_2D$ – осевое сечение (прямоугольник);

AB – высота цилиндра (расстояние между плоскостями оснований.

Высота равна образующей: $h = l$.

Любое сечение цилиндра плоскостью, параллельной основанию, является кругом.

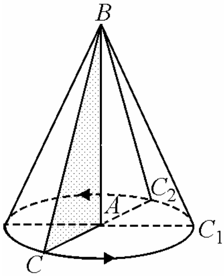
Объем цилиндра: $V = \pi r^2 l = \pi r^2 h$, где r – радиус основания цилиндра, l – длина образующей h – высота.

Площадь боковой поверхности $S_{б.п} = 2\pi rl$.

Площадь полной поверхности $S_{полн} = 2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r(l+r)$.

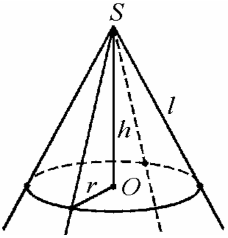
Конус. Фиксируем на плоскости окружность и точку S вне плоскости, которая проектируется в центр окружности.

Множество точек, лежащих на прямых, проходящих через точку S и через точки окружности, называется *конической поверхностью.*



Ограниченная часть пространства, заключенная между конической поверхностью и плоскостью, на которой лежит окружность, называется *прямым круговым конусом.*

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из своих катетов.



Пусть радиус основания конуса равен r, высота – h, образующая – l.

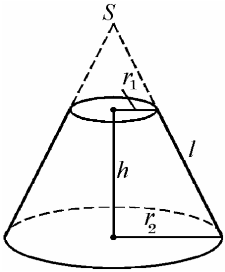
Объем конуса равен $V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Площадь боковой поверхности

$$S_{б.п} = \pi r l.$$

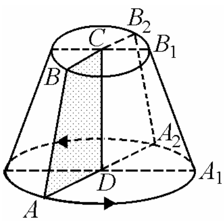
Площадь полной поверхности

$$S_{полн} = \pi r l + \pi r^2.$$



Часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется ***усеченным конусом***.

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной к основаниям.



BB_2A_2A – осевое сечение (равнобедренная трапеция);

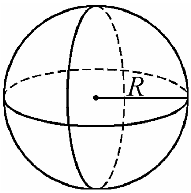
$CD = h, \quad h^2 + (R - r)^2 = l^2.$

Объем усеченного конуса равен

$$V = \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

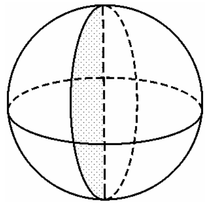
Площадь боковой поверхности

$$S_{б.п} = \pi l(r + R).$$



Шар – множество точек пространства, расстояние от которых до заданной точки (называемой *центром шара*) не превосходит числа R (*радиуса шара*).

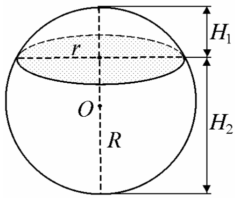
Объем шара $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.



Площадь *сферы* (поверхность шара) $S = 4\pi R^2$.

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром $C\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где $M\ (x;\ y;\ z)$ – произвольная точка сферы.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра. Осевое сечение – больший круг шара. Всякое сечение шара (сферы) плоскостью есть круг (окружность).



Секущая плоскость разбивает шар на *два шаровых сегмента.*

H – высота сегмента, $0 < H < 2R$;

r – радиус основания сегмента,

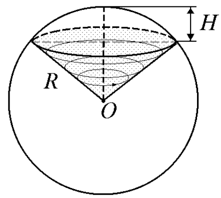
$$r = \sqrt{H(2R - H)};$$

Объем шарового сегмента

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right).$$

Площадь сферической поверхности шарового сегмента

$$S = 2\pi RH.$$



Шаровым сектором называется фигура вращения кругового сектора вокруг прямой, содержащей радиус, ограничивающий сектор.

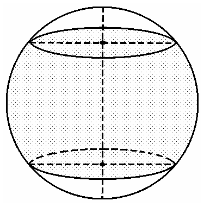
Объем шарового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Площадь полной поверхности шарового сектора

$$S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2}).$$

Шаровым слоем называется часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.



Примеры решения задач

Задача 2.1. Площадь полной поверхности цилиндра равна 172π. Найти площадь осевого сечения цилиндра, если диаметр его основания равен 8.

Решение. Пусть $ABCD$ – прямоугольник, который является осевым сечением цилиндра. По условию $AD = 8$ и $S_{ABCD} = 8l$, где l – образующая цилиндра.

Площадь полной поверхности цилиндра равна

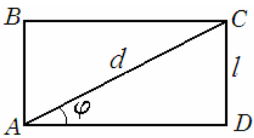
$$S_{\text{полн}} = 2\pi R^2 + 2\pi Rl = 2\pi R(l + R) = 8\pi(l + 4) = 172\pi.$$

Откуда $l + 4 = \dfrac{43}{2}$ и $l = \dfrac{35}{2}$, откуда $S_{ABCD} = 8 \cdot \dfrac{35}{2} = 140$.

Ответ: 140.

Задача 2.2. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник с диагональю d, которая составляет угол φ с основанием. Найти объем цилиндра.

Решение. Пусть $ABCD$ – развертка боковой поверхности цилиндра. Сторона AD – развертка окружности основания. Сторона AB – образующая.



$$AD = d\cos\varphi = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{d\cos\varphi}{2\pi},$$

$$AB = d\sin\varphi \Rightarrow l = d\sin\varphi.$$

Объем цилиндра равен

$$V = \pi l R^2 = \pi d \sin\varphi \frac{d\cos\varphi}{2\pi} = \frac{d^2 \sin\varphi\cos\varphi}{2} = \frac{d^2\sin 2\varphi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{d^2 \sin 2\varphi}{4}$.

Задача 2.3. Осевое сечение конуса – правильный треугольник площади $4\sqrt{3}$. Найти объем конуса.

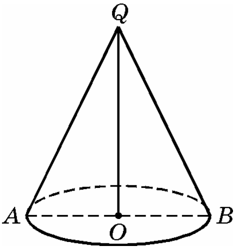
Решение. Площадь правильного треугольника AQB равна

$$S_{\Delta AQB} = \frac{OQ \cdot AB}{2} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

Таким образом, диаметр основания конуса и образующая конуса равны 4.

Высота конуса QO равна высоте ΔAQB, т.е.

$$h = OQ = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

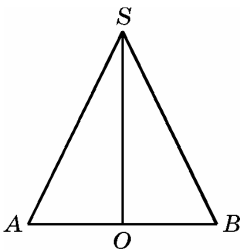


Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}$.

Задача 2.4. Образующая прямого кругового конуса равна l, а высота конуса равна h. Найти: а) радиус основания конуса; б) величину угла при вершине в осевом сечении конуса; в) объем конуса.



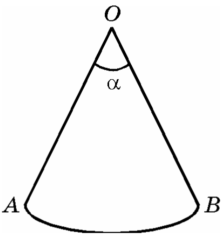
Решение. а) Пусть S – вершина конуса, AB – диаметр основания конуса, SO – высота конуса. Тогда осевым сечением конуса будет ΔASB ($AS = SB$). Так как SO является медианой ΔASB, то OB является радиусом основания: $OB = \sqrt{SB^2 - OS^2} = \sqrt{l^2 - h^2}$.

б) Так как ΔASB равнобедренный и SO является биссектрисой $\angle ASB$, то $\angle ASB = 2\angle OSB$. Найдем $\angle OSB$: $\cos\angle OSB = \dfrac{h}{l}$, откуда получаем, что $\angle OSB = \arccos\dfrac{h}{l}$. Окончательно имеем $\angle ASB = 2\arccos\dfrac{h}{l}$.

в) Объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OS = \frac{1}{3}\pi h\left(l^2 - h^2\right).$$

Задача 2.5. Круговой сектор радиуса R с центральным углом величиной α свернут в конус. Найти: а) площадь боковой поверхности этого конуса; б) объем конуса.



Решение. а) Боковая поверхность конуса (любого) совпадает с его разверткой, значит, площадь боковой поверхности равна площадь сектора радиуса R с центральным углом величиной α:

$$S_{\text{б.п}} = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

б) Радиус AO (OB) является образующей конуса, полученного из сектора, а дуга AB сектора при этом переходит в окружность основания конуса (точки A и B при этом совпадут). Таким образом, длина дуги AB равна длине окружности основания конуса: $\alpha R = 2\pi r$, где r – радиус окружности основания. Отсюда находим $r = \dfrac{\alpha R}{2\pi}$, а затем и высоту конуса

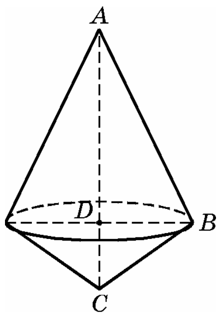
$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}.$$

Итак, объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2 R\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2} = \frac{\alpha^2 R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\alpha R^2}{2}$; $\dfrac{\alpha^2 R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$.

Задача 2.6. Треугольник со сторонами 20, 37 и 51 вращается около большей стороны. Найти площадь поверхности тела вращения.



Решение. Тело вращения этого треугольника показано на рисунке. Оно состоит из двух конусов с общим основанием – кругом с центром в точке D. Площадь поверхности вращения $S = \pi BD\,(AB + BC)$, где $AB = 37$, $BC = 20$, а BD – высота ΔABC.

Используя формулу Герона, находим площадь ΔABC, а затем BD:

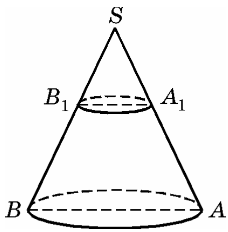
$$BD = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{2\sqrt{54 \cdot 34 \cdot 17 \cdot 3}}{51} = 12.$$

Теперь определим площадь поверхности тела вращения

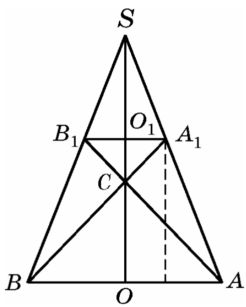
$$S = \pi \cdot 12 \cdot (37 + 20) = 684\pi.$$

Ответ: 684π.

Задача 2.7. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол величиной α имеет длину l. Определить объем этого конуса.



Решение. Найдем объем усеченного конуса ABB_1A_1 как разнообразность объемов конусов ASB и $A_1S_1B_1$.



Построим осевое сечение и введем обозначения: $AA_1 = l$, $\angle BAA_1 = \alpha$ (по условию), $OA = R$, $O_1A_1 = r$ (радиусы нижнего и верхнего основания конусов), $OO_1 = h$, $SO_1 = x$. Тогда объем усеченного конуса равен разности объемов конусов:

$$V_{ABB_1A_1} = V_{ASB} - V_{A_1SB_1} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2(h + x) - \frac{1}{3}\pi r^2 x.$$

Найдем R, r, h и x. Так как $BA_1 \perp AB_1$, $B_1C = CA_1$ ($A_1B = AB_1$), то $\angle O_1CA_1 = \angle CA_1O_1 = \frac{\pi}{4}$ и $CO_1 = r$.

Аналогично можно показать, что $CO = R$. Таким образом,

$$O_1C + CO = h = R + r = AA_1 \sin\angle A = l\sin\alpha, \qquad (1)$$

$$x = r\,\mathrm{tg}\alpha, \quad R - r = AA_1\cos\angle A = l\cos\alpha. \qquad (2)$$

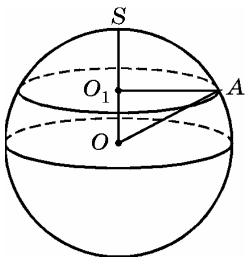
Из системы уравнений (1) и (2) находим:

$$R = \frac{l}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha); \qquad r = \frac{l}{2}(\sin\alpha - \cos\alpha);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left\{\left[\frac{1}{2}l(\sin\alpha + \cos\alpha)\right]^2\left[\frac{1}{2}l(\sin\alpha + \cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha\right] - \right.$$

$$-\left[\frac{1}{2}l(\sin\alpha-\cos\alpha)\right]^2\left[\frac{1}{2}l(\sin\alpha-\cos\alpha)\operatorname{tg}\alpha\right]\Bigg\}.$$

Задача 2.8. Плоскость сечения шара делит его радиус в отношении $1:3$ (считая от центра шара). Площадь поверхности шара равна 96. Найти площадь сечения.



Решение. Пусть искомое сечение пересекает радиус шара OS в точке O_1. Площадь поверхности шара $S = 4\pi R^2 = 96$, откуда $R^2 = \dfrac{24}{\pi}$.

Возьмем точку A на пересечении искомого сечения и сферы. В прямоугольном треугольнике OO_1A гипотенуза OA равна R и катет OO_1 равен $R/4$. Таким образом,

$$O_1A = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{16}} = R\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

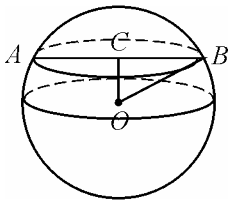
Площадь сечения равна

$$\pi\cdot O_1A^2 = \pi R^2\cdot\frac{15}{16} = \pi\cdot\frac{24}{\pi}\cdot\frac{15}{16} = \frac{45}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{45}{2}$.

Задача 2.9. Плоскость пересекает сферу по окружности радиусом r и отстоит от центра сферы на расстояние d. Найти площадь поверхности сферы и ее объем.

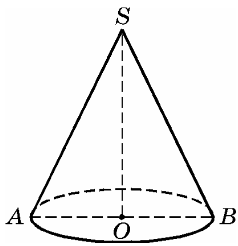
Решение. Построим сечение сферы плоскостью, перпендикулярной к секущей плоскости и проходящей через центр сферы и центр окружности сечения. Тогда $AB = 2r$, $BC = r$, $OC = d$. Так как ΔBOC прямоугольный, то $OB^2 = r^2 + d^2$ (OB – радиус сферы). Далее находим искомые величины:



$$S = 4\pi\cdot OB^2 = 4\pi\left(r^2 + d^2\right),$$

$$V = \frac{4}{3}\pi\cdot OB^3 = \frac{4}{3}\pi\left(r^2 + d^2\right)^{3/2}.$$

Задача 2.10. Шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ равновелик конусу, боковая поверхность которого в три раза больше площади основания. Найти высоту конуса.



Решение. Пусть ASB – осевое сечение конуса, SO – высота конуса. Площадь боковой поверхности конуса

$$S_{\text{б.п}} = \pi \cdot OB \cdot SB.$$

Площадь основания конуса $S_{\text{осн}} = \pi \cdot OB^2$.

По условию $S_{\text{б.п}} / S_{\text{осн}} = SB/OB = 3$.

Обозначим высоту конуса через h. Из прямоугольного треугольника SOB получим

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 \;\Leftrightarrow\; h^2 = 9OB^2 - OB^2 \;\Leftrightarrow\; OB = \frac{h}{2\sqrt{2}}.$$

Объем конуса $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} SO \cdot \pi \cdot OB^2 = \frac{1}{3} h^3 \cdot \pi \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{24} \pi h^3$.

Объем шара $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = \frac{8}{3} \pi$.

Так как $V_{\text{к}} = V_{\text{ш}}$, то $\frac{1}{24} \pi h^3 = \frac{8}{3} \pi \Rightarrow h^3 = 64$, $h = 4$.

Ответ: 4.

Задачи для самостоятельного решения

1. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найти: а) диагональ осевого сечения; б) площадь осевого сечения; в) площадь боковой поверхности цилиндра; г) площадь полной поверхности.

2. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого Q. Найти площадь основания.

3. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр этот пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние отсечения до оси.

4. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси h = 10 см; расстояние от секущей плоскости до оси a = 1 см. Определить площадь сечения.

5. Высота цилиндра на 10 см больше радиуса основания, а полная поверхность равна 144π см^2. Определить радиус основания и высоту.

6. Цилиндрическая труба с диаметром в 65 см имеет высоту в 18 м. Сколько квадратных метров жести нужно для ее изготовления, если на заклепку уходит 10% всего требующегося количества жести:

7. Стороны прямоугольника a и b. Найти боковую поверхность цилиндра, полученного от вращения этого прямоугольника вокруг стороны, равной a.

8. Диаметр основания цилиндра равен 1; высота равна длине окружности основания. Найти $S_{бок}$.

9. Осевое сечение цилиндра – квадрат, высота равна h. Найти боковую поверхность.

10. Радиус основания цилиндра равен R; боковая поверхность равна сумме площадей основания. Найти высоту.

11. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найти боковую поверхность.

12. Чему равно отношение боковой поверхности цилиндра к площади его осевого сечения?

13. В цилиндре радиус основания r = 2 см, а высота h = 7 см. Определить радиус круга, равновеликого полной поверхности этого цилиндра.

14. В цилиндре площадь основания равна Q, площадь осевого сечения M. Определить полную поверхность этого цилиндра.

15. Высота цилиндра равна 10 дм. Площадь сечения цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра и удаленной на 9 дм от нее, равна 240 дм^2. Найти радиус цилиндра.

16. Пусть V, r и h соответственно объем, радиус и высота цилиндра. Найти: а) V, если $r = 2\sqrt{2}$ см, h = 3 см; б) r, если V = 120 см^3, h = = 3,6 см; в) h, если $r = h$, $V = 8\pi$ см^3.

17. Цилиндр получен при вращении квадрата вокруг его стороны a. Найти: а) площадь осевого сечения; б) площадь боковой поверхности; в) площадь полной поверхности; г) объем цилиндра.

18. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

19. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя основания, чтобы объем его увеличился вдвое? в n раз?

20. Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя его высоты, чтобы объем его увеличился вдвое? в n раз?

21. Один цилиндр имеет высоту 2,4 м и диаметр основания 1 м; другой цилиндр имеет высоту 1,2 м и диаметр основания 0,5 м. Сравнить между собой объемы обоих цилиндров.

22. Боковая поверхность цилиндра равна S, а длина окружности основания C. Найти объем.

23. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра, если радиус основания увеличить в 5 раз, а высоту в 3 раза.

24. Высота цилиндра равна 8, диагональ осевого сечения составляет угол 45° с плоскостью основания. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.

25. Площадь боковой поверхности цилиндра в 5 раз больше площадь его основания; объем цилиндра равен 160π см^2. Найти площадь осевого сечения цилиндра.

26. Боковая поверхность цилиндра разворачивается в квадрат со стороной $4\sqrt[3]{\pi}$. Найти объем цилиндра.

27. Высота цилиндра равна 20, а диаметр основания 80. Сечение, параллельное оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу величиной 60°. Найти площадь сечения.

28. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найти образующую.

29. Образующая конуса L наклонена к плоскости основания под углом в 30°. Найти высоту.

30. Радиус основания конуса R. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

31. В осевом сечении конуса – правильный треугольник, радиус основания R. Найти площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 30°.

32. Через вершину конуса под углом в 45° к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10 см. Определить площадь сечения.

33. Высота конуса $h = 6$, радиус основания $r = 8$. Найти: а) боковую поверхность; б) полную поверхность; в) объем.

34. Высота конуса $h = 4$, образующая $a = 5$. Найти: а) боковую поверхность; б) полную поверхность; в) объем.

35. Конусообразная палатка высотой в 3,5 м и с диаметром основания в 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

36. Крыша башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м. Диаметр башни 6 м. Сколько листов кровельного железа потребовалось для покрытия крыши, если лист имеет размеры $0{,}7 \times 1{,}4$ (м^2) и на швы пошло 10 % требующегося железа?

37. Высота конуса 4, радиус основания 3; боковая поверхность конуса развернута на плоскость. Найти угол полученного сектора.

38. Радиус сектора равен 3 м; его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найти радиус основания конуса.

39. Жидкость, налитая в конический сосуд, имеющий 0,18 м высоты и 0,24 м в диаметре основания, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,10 м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?

40. Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник; площадь его 9 м^2. Найти объем конуса и полную поверхность.

41. Площадь основания конуса 9π см^2; полная поверхность его 24π см^2. Найти объем конуса.

42. Высота и образующая конуса относятся, как 4 : 5, а объем конуса 96π см^3. Найти его полную поверхность.

43. Высота конуса равна 15 м, а объем равен 320π м^3. Определить полную поверхность.

44. Высота конуса равна 6 см, а боковая поверхность 24π см^2. Определить объем конуса.

45. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найти поверхность и объем тела вращения.

46. Треугольник со сторонами в 10, 17 и 21 см вращается вокруг большей стороны. Определить объем и поверхность полученного тела.

47. Найти высоту конуса, если его объем равен 275π, а диаметр основания $5\sqrt{2}$.

48. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Площадь полной поверхности конуса 18. Найти площадь основания конуса.

49. Высота конуса $\sqrt[3]{\dfrac{24}{\pi}}$. Разверткой боковой поверхности этого конуса является сектор с центральным углом 120°. Вычислить объем этого конуса.

50. Найти длину образующей конуса, если ее объем равен π см^3, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $30°$.

51. Разность между образующей конуса и его высотой равна d, а угол между ними φ. Найти объем конуса.

52. Плоскость, параллельная основанию конуса, отсекает от него конус, объем которого равен 1/27 объема исходного конуса. В каком отношении эта плоскость делит высоту этого конуса,

53. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор с центральным углом $6\pi/5$. Найти объем конуса.

54. Объем конуса равен V. Высота его разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Найти объем средней отсеченной части.

55. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса под углом $30°$ к его оси, равна площади осевого сечения. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

56. Три образующие конуса взаимно перпендикулярны и равны $\sqrt[4]{6}$. Найти площадь боковой поверхности конуса.

57. Отношение полной поверхности конуса к его боковой поверхности равно 3 : 2. Найти наибольший угол между его образующими.

58. Высота конуса равна 20. Угол между высотой и образующей конуса равен $45°$. Найти площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен $30°$.

59. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м; высота 4 м. Найти образующую.

60. Радиусы оснований усеченного конуса R и r; образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти высоту.

61. Радиусы оснований усеченного конуса 11 и 16 см; образующая 13 см. Найти высоту.

62. Радиусы оснований усеченного конуса 3 и 7 дм, образующая 5 дм. Найти площадь осевого сечения.

63. Площади оснований усеченного конуса 4 и 16 м^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. Найти площадь сечения.

64. Площади оснований усеченного конуса 4 и 25. Высота разделена на 3 равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найти площади сечений.

65. Высота усеченного конуса 4 дм; радиусы его оснований 2 дм и 5 дм. Найти $S_{бок}$.

66. Радиусы оснований усеченного конуса R и r. Образующая наклонена к основанию под углом 60°. Найти боковую поверхность.

67. Радиусы оснований усеченного конуса и его образующая относятся, как 1:4: 5; высота равна 8 см. Найти $S_{бок}$.

68. Определить высоту усеченного конуса, если его полная поверхность равна 572π м^2, а радиусы оснований 6 и 14 м.

69. В усеченном конусе высота $h = 63$ дм, образующая $l = 65$ дм и боковая поверхность $S = 26\pi$ м^2. Определить радиусы оснований.

70. В усеченном конусе образующая $l = 5$ см, а радиусы оснований 1 и 5 см. Найти радиус цилиндра с такой же высотой и такой же величиной боковой поверхности.

71. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти объем.

72. Высота усеченного конуса равна 3. Радиус одного основания вдвое больше другого, а образующая наклонена к основанию под углом в 45°. Найти объем.

73. Объем усеченного конуса равен 584π см^3, а радиусы оснований 10 и 7 см. Определить высоту.

74. Объем усеченного конуса равен 248π см^3; его высота 8 см, радиус одного из оснований 4 см. Определить радиус второго основания.

75. Объем усеченного конуса равен 52 см^3; площадь одного основания в 9 раз более площади другого. Усеченный конус достроен до полного. Найти объем полного конуса.

76. Точка A $(0;\ \sqrt{2};\ \sqrt{5})$ лежит на сфере с центром O (3; 0; 0). а) Написать уравнение сферы. б) Принадлежат ли этой сфере точки с координатами B $(5; 0; 2\sqrt{3})$; C (4; –1; 0).

77. Даны точки A (–3; 1,5; –2); B (3; –2,5; 2). Отрезок AB является диаметром сферы. Написать уравнение сферы.

78. Найти: 1) площадь сферы; 2) объем шара, радиус которого равен: а) 6 см; б) 2 дм; в) $\sqrt{2}$ м; г) $2\sqrt{3}$ см.

79. Пусть V – объем шара радиуса R; S – площадь его поверхности. Найти: а) S и V, если $R = 4$ см; б) R и S, если $V = 1$ см^3; в) R и V, если $S = 64\pi$ см^2.

80. Площадь сечения сферы, проходящего через ее центр, равна 9 м^2. Найти площадь сферы.

81. Площадь сферы равна 324 см^2. Найти радиус сферы.

82. Поверхность шара равна 225π м^2. Определить его объем.

83. Как изменится поверхность и объем шара, если радиус увеличить в 4 раза? В 5 раз?

84. Вычислить радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

85. Радиусы двух параллельных сечений сферы равны 9 см и 12 см. Расстояние между секущими плоскостями равно 3 см. Найти площадь сферы.

86. Расстояние от центра шара радиуса R до секущей плоскости равно d. Вычислить: а) площадь сечения $S_{\text{сеч}}$, если $R = 12$ см, $d = 8$ см; б) R, если $S_{\text{сеч}} = 12$ см^2, $d = 2$ см.

87. Шар радиуса 41 пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 от центра. Найти площадь сечения.

88. Радиусы трех шаров 3, 4 и 5 см. Определить радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.

89. Нужно отлить свинцовый шар с диаметром в 3 см. Имеются свинцовые шарики с диаметром в 5 мм. Сколько таких шариков нужно взять?

90. Дан шар. Плоскость, перпендикулярная к диаметру, делит его на две части 3 и 9 см. Найти объемы двух полученных частей шара.

91. Сумма объемов четырех одинаковых шаров равна половине объема пятого шара, а сумма площадей поверхностей первых четырех шаров на 10 см^2 больше половины площади поверхности пятого шара. Найти радиус пятого шара.

92. Объем шара равен 288π см^3. Точка A лежит вне шара на расстоянии 6 см от его поверхности. Из точки A к сфере проведена касательная. Найти ее длину.

93. Через конец радиуса шара проведена плоскость под углом $60°$ к нему. Площадь полученного сечения равна 11. Найти площадь поверхности шара.

94. Конус и шар имеют равные объемы. Радиус основания конуса равен радиуса шара. Во сколько раз высота конуса больше радиуса шара?

95. Металлический шар радиуса $\sqrt[3]{2}$ переплавлен в конус, площадь боковой поверхности которого в 3 раза больше площади основания. Найти высоту конуса.

96. Радиус шарового сектора R, угол в осевом сечении 120°. Найти объем.

97. Определить объем шарового сегмента, радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

98. Найти объем шарового сегмента, если радиус окружности его равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.

99. Радиусы оснований шарового пояса 20 и 24 м, а радиус шара 25 м. Определить поверхность шарового пояса. (Два случая.)

III. СЕЧЕНИЕ МНОГОГРАННИКОВ

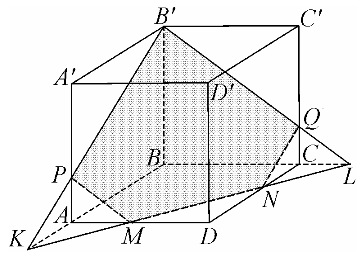
При пересечении поверхности плоскостью получается плоская фигура, которую называют **сечением.** Сечение поверхности плоскостью – плоская кривая, принадлежащая секущей плоскости.

При сечении многогранника плоскостью – это ломаная линия, при сечении кривой поверхности – кривая линия.

Поэтому задачу по определению линии пересечения поверхности многогранника плоскостью можно свести к многократному решению задачи по нахождению: а) линии пересечения двух плоскостей (граней многогранника и секущей плоскости); б) точки встречи прямой (рёбер многогранника) с секущей плоскостью.

Примеры решения задач

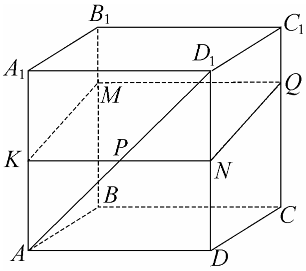
Метод сечений многогранников в стереометрии используется в задачах на построение. В его основе лежит умение строить сечение многогранника и определять вид сечения.



Задача 3.1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через вершину B' и середину ребер AD и CD.

Решение. Пусть M и N – середины ребер AD и CD. Секущая плоскость пересекает плоскость основания по прямой MN. Построим точку L пересечения прямых BC и MN. Точки B' и L лежат в секущей плоскости и в плоскости $BB'CC'$, т.е. прямая $B'L$ – линия пересечения лих плоскостей. Точка Q – пересечение ребра CC и прямой $B'L$. Аналогично находим точки K и P. Прямоугольник $PB'QNM$ – искомое сечение куба.

Задача 3.2. На ребрах BB_1, DD_1 и диагонали AD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты точки M, N и P соответственно так, что $B_1M = \frac{1}{2}MB$, $DN = ND_1$ и $AP = PD_1$. Через точки M, N и P проведена плоскость, разбивающая куб на два многогранника. Найти отношение объемов этих многогранников.



Решение. Так как точки P и N являются серединами отрезков AD_1 и DD_1, то прямая PN параллельна плоскости $ABCD$ и, следовательно, секущая плоскость пересечет грань BB_1CC_1 по прямой MQ, параллельной KN. Соединив точки K и M и N и Q, получим сечение куба плоскостью, которая разбивает его на две призмы $KA_1B_1MND_1C_1Q$ и $AKMBDNQC$.

Пусть $AA_1 = 1$. Найдем объем многогранника $KA_1B_1MND_1C_1Q$. Фигура KA_1B_1M – трапеция, у которой основания A_1K и B_1M имеют длину $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ соответственно, а высота трапеции A_1B_1 равна 1. Итак, объем V_1 указанной призмы найдем из формулы

$$V_1 = A_1D_1 \cdot \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot (A_1K + B_1M) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}.$$

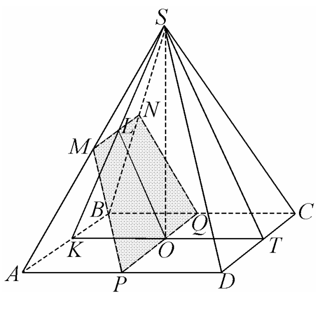
Аналогично находится объем другого многогранника: $V_2 = \frac{7}{12}$.

Итак, $V_1 : V_2 = 5:7$.

Ответ: 5:7.

Замечание. Объем V_2 можно было найти как разность объемов куба V первого многогранника: $V_2 = V - V_1$.

Задача 3.3. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 80 см, сторона основания 120 см. Вычислить площадь сечения, проходящего через центр основания параллельно боковой грани.



Решение. Пусть искомое сечение – $PMNQ$. Плоскости DSC и $PMNQ$ параллельны, т.е. они пересекают другие плоскости по параллельным прямым. Отсюда $PQ \parallel DC$, $NQ \parallel CS$ и $MP \parallel DS$.

Так как PQ параллелен DC и проходит через центр квадрата $ABCD$, то P и Q – середины AD и BC соответственно и, следовательно, QN и MP – средние линии BSC и ΔASD. Отсюда MN средняя линия ΔASB.

Сечение $PMNQ$ представляет собой равнобедренную трапецию с основаниями $PQ = 120$ см и $MN = AB/2 = 120 : 2 = 60$ см.

Для нахождения площади сечения осталось найти длину высоты. Пусть K – середина AB. Проведем отрезки SK и OK. Отрезок SK пересекает MN в точке L, а прямая KO отрезок DC в точке T. Высота сечения LO является средней линией ST ΔKST, т.е. высота равна $LO = \dfrac{ST}{2}$, где ST – апофема пирамиды.

Из прямоугольного ΔSOT получим

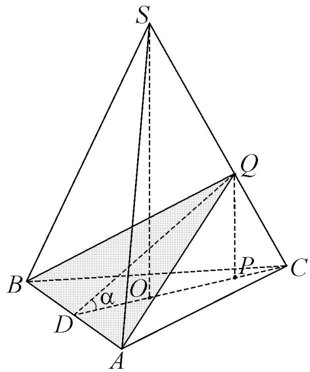
$$ST = \sqrt{SO^2 + OT^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = 100 \text{ (см)},$$

т.е. $LO = \dfrac{ST}{2} = 50$ см. Таким образом,

$$S_{PMNQ} = \frac{MN + PQ}{2} \cdot LO = \frac{60 + 120}{2} \cdot 50 = 4500 \text{ см}^2.$$

Ответ: 4500 см^2.

Задача 3.4. Высота правильной треугольной пирамиды равна 40 см, сторона основания – 10 см. Вычислить а) площадь сечения, проведенного через одну из сторон основания перпендикулярно к противоположному ребру; б) в каком отношении сечение делит объем пирамиды.



Решение. а) Из того, что сечение перпендикулярно ребру SC следует, что $\angle AQC = \angle BQS = 90°$. Соединим точку Q с серединой ребра AB – точкой D. Треугольник DQC – прямоугольный ($\angle DQC = 90°$).

Опустим высоту SO пирамиды. Катет OC прямоугольного ΔOSC является радиусом описанной окружности равностороннего ΔABC со стороной 10 см, т.е. $OC = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$ см. Таким образом,

$$\text{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{40 \cdot \sqrt{3}}{10} = 4\sqrt{3}.$$

Так как $\dfrac{1}{\cos^2 \angle SCO} = 1 + \mathrm{tg}^2\angle SCO = 1 + 48$, то $\cos\angle SCO = \dfrac{1}{7}$ и

$$\sin \angle SCO = \sqrt{1-\cos^2 \angle SCO} = \frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

Обозначим $\angle QDC = \alpha$. Поскольку $\alpha = \pi/2 - \angle SCO$, то $\cos\alpha =$ $= \sin\angle SCO = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$. Площадь основания пирамиды

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(10)^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}.$$

Искомое сечение – это проекция основания ΔABC на плоскость сечения, поэтому $S_{\Delta ABQ} = S_{\Delta ABC}\cos\alpha = 25\sqrt{3}\cdot\dfrac{4\sqrt{3}}{7} = \dfrac{300}{7}$ см^2.

Решим вторую часть задачи.

б) Опустим перпендикуляр QP на основание пирамиды. Объем пирамиды $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO,\ V_{QABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot QP$ т.е. $\dfrac{V_{QABC}}{V_{SABC}} = \dfrac{OP}{SO}$.

Из подобия треугольников POC и OSC имеем $\dfrac{QP}{SO} = \dfrac{QC}{SC}$. Из ΔOSC гипотенуза $SC = \dfrac{OS}{\sin\angle SCO} = \dfrac{40\cdot 7}{4\sqrt{3}} = \dfrac{70}{\sqrt{3}}$.

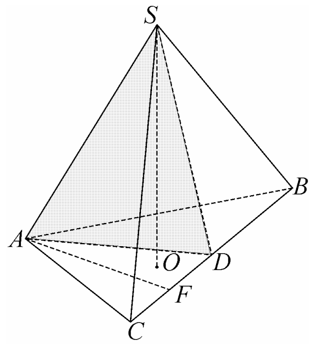
Из ΔDQC катет $QC = DC\cos\angle SCO = 5\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{7} = \dfrac{5\sqrt{3}}{7}$. Таким образом, $\dfrac{V_{QABC}}{V_{SABC}} = \dfrac{OP}{SO} = \dfrac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{7\cdot 70} = \dfrac{15}{490} = \dfrac{3}{98}$. Искомое соотношение

$$\frac{V_{SABQ}}{V_{QABC}} = \frac{V_{SABC} - V_{QABC}}{V_{QASC}} = \frac{98}{3} - 1 = \frac{95}{3}.$$

Ответ: а) $\dfrac{300}{7}$ см^2; б) $\dfrac{95}{3}$.

Задача 3.5. Плоскость, проходящая через боковое ребро треугольной пирамиды, делит противоположную сторону основания в отношении *m/n.* В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Решение. Найдем объем пирамид $SACD$ и $SABD$. Обе пирамиды имеют общую высоту SO, а площади треугольников ACD и ABD равны соответственно $\frac{1}{2}AF{\cdot}CD$ и $\frac{1}{2}AF{\cdot}DB$ ($AF \perp BC$, AF – высота треугольников ACD и BAD). Теперь найдем отношение объемов пирамид:

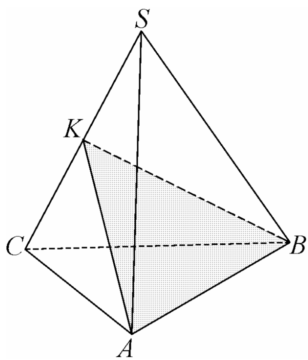


$$\frac{V_{SACD}}{V_{SABD}} = \frac{\frac{1}{3}SO \cdot \frac{1}{2}AF \cdot CD}{\frac{1}{3}SO \cdot \frac{1}{2}AF \cdot BD} = \frac{CD}{DB} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $m : n$.

Задача 3.6. В треугольной пирамиде $SABC$ через сторону AB основания проведена плоскость, перпендикулярная к боковому ребру SC. Площадь образовавшегося при этом сечения равна Q. Найти объем пирамиды $SABC$, если известно, что $SC = I$.

Решение. Пусть секущая плоскость пересекает ребро SC в точке K и площадь треугольника AKB равна Q. Найдем объем пирамиды $SABC$ как сумму объемов пирамид $SABK$ и $CAKB$.



Так как $SC \perp$ пл. AKB, то $V_{SABK} = \frac{1}{3}Q{\cdot}SK$ и $V_{CABK} = \frac{1}{3}Q{\cdot}CK$. Складывая эти уравнения почленно, получаем

$$V_{SABK} + V_{CABK} = \frac{1}{3}Q{\cdot}(SK + CK) = \frac{1}{3}Q{\cdot}I,$$

что и требовалось найти.

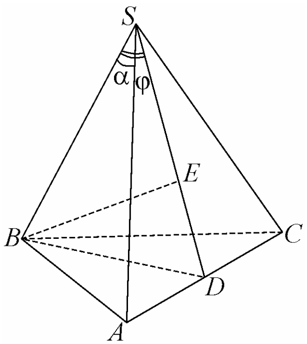
Ответ: $\frac{QI}{3}$.

Задача 3.7. В правильной треугольной пирамиде длина бокового ребра равна I, а ее объем равен $\frac{1}{6}I^3$. Определить величину плоского угла при вершине пирамиды.

Решение. Пусть $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$, $\angle BSD = \varphi$ (плоскость BSD – плоскость, перпендикулярная боковому ребру AC).

Вычислим объем пирамиды $SABC$, приняв за основание грань ASC, а BE – за высоту ($BE \perp SD$). Положим $BS = k$. Имеем объем

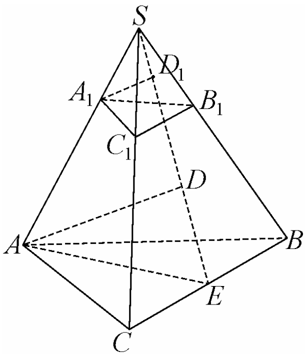
$$V_{SABC} = \frac{1}{3}BE \cdot S_{\Delta ASC} = \frac{1}{3}k\sin\varphi \cdot \frac{1}{2}I^2\sin\alpha = \frac{1}{6}I^2\sin\alpha\sin\varphi,$$



Так как по условию $V_{SABC} = \frac{1}{6}I^3$, то, приравняв правые части последних двух уравнений, получим $\frac{1}{6}I^2\sin\alpha\sin\varphi = \frac{1}{6}I^3$ или $\sin\alpha\sin\varphi = 1$. Последнее равенство выполняется лишь при $\sin\alpha = 1$ и $\sin\varphi = 1$, т. е. при $\alpha = \pi/2$ и $\varphi = \pi/2$ (причем эти равенства должны выполняться одновременно). Итак, величина каждого плоского угла при вершине пирамиды равна $\pi/2$.

Ответ: $\pi/2$.

Задача 3.8. На боковых ребрах SA, SB и SC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $SA_1 : SA = 1:3$, $SB_1 : SB = 2:5$ и $SC_1 : SC = 3:4$. Найти объем тетраэдра $SA_1B_1C_1$, если известен объем V пирамиды $SABC$.



Решение. Пусть $\angle BSC = \angle B_1SC_1 = \alpha$, $A_1D_1 \perp$ пл. B_1SC_1 и $AD \perp$ пл. BSC, а $\angle A_1SD = \angle ASD_1 = \varphi$. Тогда

$$V_{SA_1B_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot A_1D_1 \cdot S_{\Delta C_1SB_1} =$$

$$= \frac{1}{6}A_1S \cdot B_1S \cdot C_1S\sin\alpha\sin\varphi,$$

$$V_{SABC}\frac{1}{3} \cdot ADS_{\Delta CSB} =$$

$$= \frac{1}{6}AS \cdot BS \cdot CS\sin\alpha\sin\varphi.$$

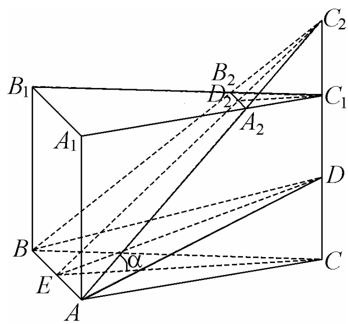
Поделив первое равенство на второе, получим:

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{A_1S}{AS} \cdot \frac{B_1S}{BS} \cdot \frac{C_1S}{CS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{10}$$

Ответ: объем тетраэдра $SA_1B_1C_1$ равен $0{,}1V$.

Задача 3.9. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a, а боковое ребро BB_1 имеет длину h. Через сторону основания призмы AB проведена плоскость, составляющая с плоскостью нижнего основания угол величиной α. Найти объемы многогранников, на которые разбивает эту призму секущая плоскость.

Решение. В зависимости от величины угла α возможны два случая пересечения призмы указанной плоскостью:



а) плоскость пересекает ребро CC_1 (плоскость ABD);

б) плоскость пересекает верхнее основание призмы (плоскость AA_2B_2B) (случай, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi/2$ мы не рассматриваем, так как в этом случае один из многогранников вырождается в треугольник ABC или прямоугольник AA_1B_1B; не рассматривается случай, когда угол α отсчитывается вниз от плоскости ABC, так как при этом одним из "многогранников" будет отрезок AB).

Рассмотрим случай а). Одним из многогранников является треугольная пирамида $DABC$. Найдем ее объем: $V_{DABC} = \frac{1}{3} DC \cdot S_{\Delta ABC}$.

Поскольку ΔABC правильный, то $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $DC = EC \cdot \mathrm{tg}\alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{tg}\alpha$. Таким образом $V_1 = V_{DABC} = \frac{a^3}{8}\mathrm{tg}\alpha$. Определим теперь объем V_2 многогранника $ADC_1A_1B_1B$. Объем призмы $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h$, поэтому $V_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h - \frac{a^3}{8}\mathrm{tg}\alpha$.

Установим, для каких углов α справедлива эта формула. Очевидно, что наши рассуждения верны, если $\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha \le h$, т.е. обе формулы описывают объемы многогранников верно, если $0 < \alpha \le$ $\le \operatorname{arctg}\frac{h}{a\sqrt{3}}$ (другими словами, рассуждения, приведенные выше корректны, если точка D лежит не выше точки C_1).

В случае б), когда имеем многогранники $ABCA_2C_1B_2$ (усеченная треугольная пирамида) и $AA_1A_2BB_1B_2$ будем сначала искать объем V_3 усеченной пирамиды, а затем объем V_4 другого многогранника (как разность $V_4 = V - V_3$). Секущая плоскость пересекает прямую CC_1 в точке C_2, а грани AA_1C_1C и BB_1C_1C по прямым AC_2 и BC_2 соответственно. Найдем объемы пирамид C_2ABC и $C_2A_2B_2C_1$:

$$V_{C_2ABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$V_{C_2A_2B_2C_1} = \frac{1}{3}C_1C_2 \cdot S_{A_2B_2C_1},$$

где $C_1C_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha - h$, $S_{A_2B_2C_1} = \frac{(A_2B_2)^2\sqrt{3}}{4}$. Определим A_2B_2. Так как $\frac{A_2B_2\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha = C_1C_2$, то

$$A_2B_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha - h\right)\operatorname{ctg}\alpha = a - \frac{2h}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким образом,

$$V_{C_2A_2B_2C_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha - h\right)\left(a - \frac{2h}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$V_3 = V_{C_2ABC} - V_{C_2A_2B_2C_1} = \frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha - h\right)\left(a - \frac{2h}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2,$$

$$V_4 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}h - \left(\frac{a^3}{8}\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha - h\right)\left(a - \frac{2h}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\right).$$

Замечание. При tgα = (точка D совпадает с точкой C_1) и $V_3=V_2$.

Ответ: при $\alpha \in \left(0, \operatorname{arctg}\dfrac{2h}{a\sqrt{3}}\right] \Rightarrow V_1$ и V_2;

при $\alpha \in \left(\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{a\sqrt{3}}; \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow V_3$ и V_4.

Задачи для самостоятельного решения

А. Сечения кубов, параллелепипедов, призм

1. Найти площадь сечения куба $ABCDA'B'C'D'$, ребро которого равно 1, плоскостью, проходящей через ребро AB и составляющим с плоскостью основания $ABCD$ угол: а) 30°; б) 60°; в) arctg3; г) α.

2. Найти объемы частей, на которые разбивает куб $ABCDA'B'C'D'$ (AB = 1) сечение, проходящее через AB и составляющее с плоскостью основания $ABCD$ угол: а) 30°; б) $\arcsin\dfrac{2}{3}$; в) α.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длины ребер которого AB, BC и AA_1 равны соответственно 1, 3 и 2, через ребро AB проведено сечение. Найти площадь сечения, если оно составляет с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 45°; в) α.

4. В условиях предыдущей задачи найти объемы частей, на которые плоскость сечения разбивает параллелепипед.

5. Найти площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и D_1C_1. Ребро куба равно a.

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K – середина ребра C_1D_1. Точка M делит ребро DD_1 в отношении $DM : D_1M = 2$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через A, K, M, если ребро куба равно a.

7. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC, если ребро куба равно 1.

8. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с длиной ребра 1. Найти площадь сечения, проходящего через диагональ основания AC и составляющего с плоскостью основания угол: а) 30°; б) 60°; в) α ($\alpha \in (0; \pi/2)$).

9. В условиях предыдущей задачи найти объемы частей, на которые плоскость сечения делит куб.

10. В основании прямой призмы лежит треугольник, длины сторон которого 5, 6 и 7. Известно, что плоскость сечения пересекает все три боковых ребра и составляет с плоскостью основания угол, равный $\arcsin \frac{1}{3}$. Найти площадь сечения.

11. В основании призмы лежит треугольник *ABC,* у которого длины сторон *AB* и *AC* равны 3 и 4, а угол $BAC = 30°$. Боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти площадь сечения, перпендикулярного боковому ребру, если известно, что оно пересекает все три боковых ребра.

12. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ все ребра равны 1. Точка *M* лежит на ребре $B'C'$, причем $\frac{B'M}{MC'} = \frac{4}{3}$. Точка *D* – середина *AB*. Найти площадь сечения, перпендикулярного плоскости основания, проходящего через точку *M* и а) перпендикулярного *CD;* б) параллельного *CD;* в) проходящего через *D*.

13. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ длина ребра при основании *AB* равна 1. Длина бокового ребра AA' равна 2.Точка *M* лежит на ребре $B'C'$, причем $B'M = 1/3$. Через точки *A, B* и *M* проведено сечение. Найти: а) площадь сечения; б) объемы частей, на которые сечение делит призму.

14. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ $(AB = 1, AA' = 2)$ на ребрах BB' и CC' взяты соответственно точки *M* и *N,* причем $BM = 1/2$ и $CN = 1$. Через точки *A, M* и *N* проведено сечение. Найти: а) площадь сечения; б) объемы тел, на которые плоскость сечения разбивает призму.

15. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ $(AB = 1, AA' = 5)$. На ребрах AA', BB', CC' взяты точки *M, N, P* так, что $AM = 1$, $BN = 2$, $CP = 4$. Найти объемы частей, на которые плоскость сечения разбивает призму.

16. Высота правильной треугольной призмы равна *H*. Через одно из ребер нижнего основания и противоположную ему вершину верхнего основания призмы проведена плоскость. Найти площадь сечения, если угол образовавшегося в сечении треугольника при заданной вершине призмы равен α.

17. Через вершину A основания куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 проведено сечение параллельно диагонали основания BD, составляющее угол α с плоскостью основания. Найти площадь сечения.

18. Через ребро основания правильной треугольной призмы проведено сечение под углом α к основанию. Найти площадь сечения, если сторона основания равна 1, а боковое ребро равно 2.

19. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$, угол B равен φ, радиус описанной окружности равен R). Длина ребра BB_1 равна H. Через ребро AC проведена плоскость под углом β к плоскости основания призмы. Найти площадь полученного сечения.

20. Высота правильной треугольной призмы равна 0,5. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания угол величиной 30°. Найти площадь сечения, образованного этой плоскостью.

21. Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определить площадь образовавшегося сечения, если объем пирамиды, отсеченной плоскостью от призмы, равен V.

22. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной основания 1 см, угол BAD равен 45°, боковое ребро CC_1 равно 2 см. Через ребро основания AB и середины боковых ребер CC_1 и DD_1 проведена плоскость. Найти ее угол наклона к плоскости основания.

23. Плоскость делит боковые ребра правильной треугольной призмы в соотношении 1:2, 2:3, 5:2, считая от нижнего основания. В каком отношении она делит объем призмы?

24. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребро основания равно высоте призмы и равно 4. Точка M делит диагональ A_1B в отношении $A_1M : MB = 1 : 2$. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через точку M, вершину B_1 и середину диагонали AC_1.

25. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона нижнего основания $AB = 12$ и боковое ребро $BB_1 = 18$. На боковых ребрах BB_1 и CC_1 взяты соответственно точки E и F, такие, что $BE : EB_1 = 1 : 2$ и $CF : FC_1 = 2 : 7$. Через точки A, E и F проведена плоскость. Найти объемы многоугольников, на которые секущая плоскость разбивает призму.

26. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длина ребра AB равна 4, длина AD равна 6, длина AA_1 равна 8. На ребрах AA_1, DD_1 и B_1C взяты точки K, L и M соответственно, причем $AK = 4$, $LD = 2$, $MC = 2B_1M$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через K, L и M.

27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ длины сторон основания равны $AB = 3$ м, $BC = 8$ м, длина бокового ребра $AA_1 = 5$ м. На ребре BC взята точка M так, что $BM : MC = 3:1$. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M и ребро AA_1.

28. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. На продолжении ребер AB, AA_1, AD отложены соответственно отрезки BP, A_1Q, DR длиной $1{,}5AB$ ($AP = AQ = AR = 2{,}5AB$). Через точки P, Q, R проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

29. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. На продолжении ребра A_1B_1 взята точка M так, что $B_1M = \frac{1}{2}A_1B_1$ ($A_1M = \frac{3}{2}A_1B_1$). Через M и середины ребер A_1C_1 и B_XB проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_X$ с длиной ребра, равной 1. Серединой ребра A_1B_1 является точка M, а серединой B_1C_1 – точка N. На прямой DD_1 расположена точка K так, что отношение $KD : KD_1 = 1:3$. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через M, N и K.

31. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) лежит правильный треугольник, имеющий площадь S. Через среднюю линию нижнего основания призмы проведена плоскость, пересекающая ребро AA_1 и составляющая угол α с плоскостью нижнего основания призмы. Найти радиус окружности, описанной около получившегося в сечении треугольника.

Б. Сечения пирамид

32. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ($AB = BC = AC = 1$, $SA=SB = SC = 3$) на ребре AS взята точка M ($AM = 1$). Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и а) параллельной плоскости ABC; б) параллельной плоскости SBC.

33. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ($AB = 2$, $SA = 3$) через середины ребер AB и AD и через вершину S проведено сечение. Найти: а) площадь сечения; б) объемы многогранников, на которые сечение делит пирамиду.

34. В правильной пирамиде $SABC$ с вершиной S через ребро BC основания проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Плоский угол при вершине S равен 60°, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$. Найти площадь сечения.

35. Найти площадь сечения правильной треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания параллельно одной из боковых граней, если боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α, а длина ребра основания пирамиды равна a.

36. Дана правильная треугольная пирамида, сторона основания которой a и боковое ребро b. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, равно уделенной от всех вершин.

37. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания AB равно a, а боковое ребро SA равно b. Пирамиду пересекает плоскость, параллельная ребрам AB и SC, причем расстояние от этой плоскости до точек A и B втрое меньше, чем расстояние до точек S и С. Найти: а) площадь сечения; б) объемы частей, на которые сечение делит пирамиду.

38. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина высоты SO равна h, а угол между этой высотой и боковой гранью ASB равен γ. Пирамида пересечена плоскостью, параллельной ребрам AB и SC, причем точки A и B удалены от указанной плоскости на расстояние вдвое больше, чем точки B и C. Определить: а) площадь сечения; б) объемы многогранников, на которые сечение разбило пирамиду.

39. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a и боковым ребром b пересечена плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найти его сторону.

40. На ребрах SA, SB и SC треугольной пирамиды взяты точки M, N и P так, что $SM : MA = 2:3$, $SN : NB = 4:1$ и $SP : PC = 5:2$. В каком отношении сечение, проходящее через точки M, N и P делит объем пирамиды?

41. Через диагональ BD основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведено сечение BDK под углом 45° к плоскости основания. Точка K делит боковое ребро AS пополам. Найти объем пирамиды $KABD$, если ребро AS равно $15\sqrt{2}$.

42. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через диагональ основания BD перпендикулярно ребру SC проведено сечение. Найти объем пирамиды $SABCD$, если плоскость сечения образует с плоскостью основания угол $\arcsin\frac{\sqrt{7}}{4}$, а площадь сечения равна 189.

43. В правильной треугольной пирамиде $SACD$ боковые ребра составляют с основанием угол β. Через сторону основания CD проведено сечение, перпендикулярное ребру SA. Найти площадь полученного сечения пирамиды, а также отношение объемов многогранников, на которые делит пирамиду это сечение, если радиус окружности, описанной около основания, равен 6.

44. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Точка F лежит на ребре SB, причем $FB:SB = 2:5$. Найти отношение объемов многогранников, на которые разбивает пирамиду плоскость, проходящая через точки A, D, F.

45. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Точка E принадлежит ребру SC, причем $SC : EC = 5 : 1$. Найти отношение объемов многогранников, на которые разбивает пирамиду плоскость, проходящая через точки A, B, E.

46. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна 2. Через сторону основания BC проведено сечение, которое пересекает ребро SA в точке M. Известно, что $SM : MA = 1:3$, а высота пирамиды равна $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Найти площадь полной поверхности пирамиды и площадь сечения.

47. В правильной треугольной пирамиде боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ, ребро основания равно a. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и площадь сечения, проходящего через ребро основания и середину противолежащего ему бокового ребра.

48. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания AB равна 1, высота пирамиды равна $\sqrt{2}$. Через ребро основания CD проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

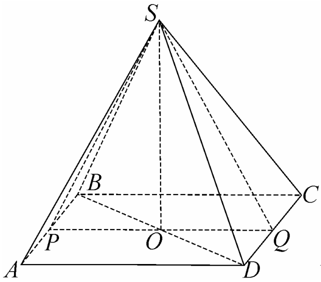
49. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания равна 8, верхнего – 5, а высота – 3. Через сторону нижнего основания и противолежащую вершину верхнего проведена плоскость. Найти площадь сечения и двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

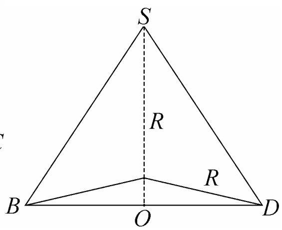
50. В основании пирамиды $SABCD$ – квадрат $ABCD$ со стороной a. Ребро SA перпендикулярно $ABCD$ и равно А. Проведено сечение через точку A параллельно BD, делящее SC на отрезки, относящиеся как 2:1, считая от вершины S. Найти площадь сечения.

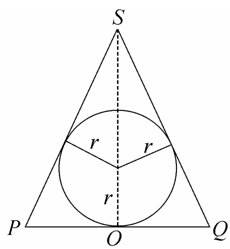
IV. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ СФЕРЫ. КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ И ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Приведем несколько соображений, полезных при решении задач на вписанные и описанные сферы у правильных пирамид.

Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамиды. Центры вписанной и описанной сфер лежат на высоте SO пирамиды (или на продолжении SO). Так как описанная сфера проходит через точки B, S и D и ее центр лежит в плоскости ΔBSD, то радиус описанной сферы равен радиусу описанной около ΔBSD окружности. При этом полезно отдельно начертить сечение BSD.

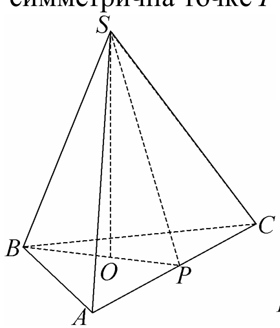


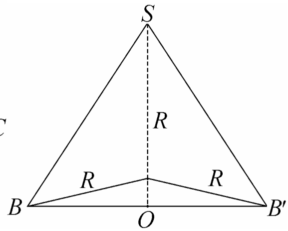


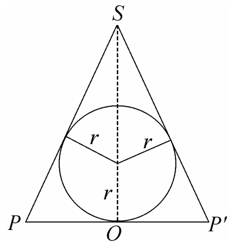


Вписанная сфера касается боковых граней в точках, лежащих на апофемах. При этом радиус вписанной сферы равен радиусу вписанной в ΔPSQ окружности.

При нахождении радиусов вписанной и описанной сфер у треугольной пирамиды $SABC$ можно взять $\Delta BSB'$ (где точка B' симметрична точке B относительно прямой SO) и $\Delta P'SP$, в котором точка P' симметрична точке P относительно SO.







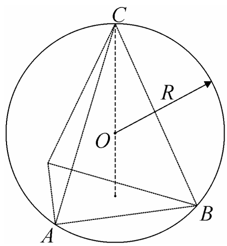
Замечание. В задачах, изложенных ниже, советуем построить объемный чертеж стереометрических объектов, тогда решение станет более понятным.

Описанная сфера. Сфера называется *описанной около многогранника*, если она проходит через все его вершины.

Для того чтобы около многогранника можно было описать сферу, необходимо (но недостаточно), чтобы около любой его грани можно было описать окружность.

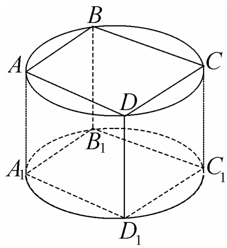
Центр описанной сферы (если таковая есть) лежит в плоскостях, перпендикулярных ребрам многогранника, проходящих через их середины; а также на прямых, перпендикулярных граням многогранника, проходящих через центры описанных около граней окружностей.

Радиус описанной сферы равен радиусу сферы, проходящей через любые четыре, не лежащие в одной плоскости вершины многогранника.

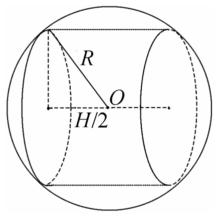


Около любой треугольной пирамиды можно описать сферу.

Около n-угольной пирамиды можно описать сферу тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность.



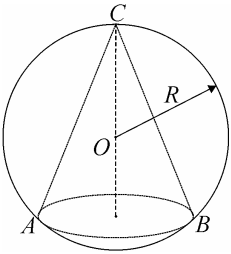
Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность.



Сфера называется описанной около цилиндра, если на ней лежат окружности оснований цилиндра.

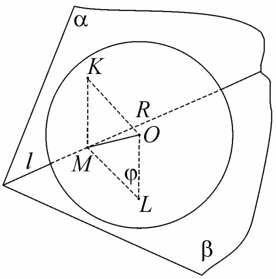
Около цилиндра всегда можно описать сферу.

$R^2 = 0{,}25H^2 + r^2.$



Сфера называется описанной около конуса, если на ней лежат вершина и окружность основания конуса.

Около конуса всегда можно описать сферу; ее радиус равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.



Если сфера касается граней двугранного угла, то ее центр лежит на полуплоскости, делящей этот двугранный угол на два равных двугранных угла.

$$MK \perp l;\ ML \perp l;\ OK \perp \alpha;\ OL \perp \beta.$$

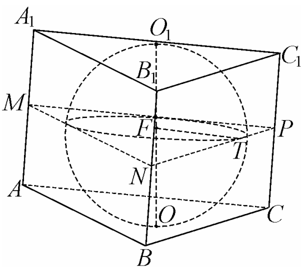
$$R = OM\sin\varphi = ML\,\mathrm{tg}\varphi = m,$$

где 2φ – величина двугранного угла, OM – расстояние от центра сферы до ребра, m – расстояние от центра сферы до грани.

Вписанная сфера. Сфера называется *вписанной в многогранник,* если она касается всех плоскостей, содержащих грани многогранника во внутренних точках граней.

В треугольную пирамиду всегда можно вписать сферу. В n-угольную пирамиду можно вписать сферу тогда и только тогда, когда биссекторные плоскости всех двугранных углов пирамиды имеют общую точку.

В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание.



В призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в ее перпендикулярное сечение.

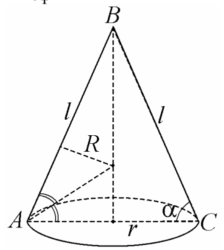
Если в многогранник можно вписать сферу, то: $V = \dfrac{1}{3}RS_{\text{полн}}$, где V – объем многогранника, $S_{\text{полн}}$ – полная поверхность многогранника.

Сфера называется вписанной в цилиндр, если она касается оснований цилиндра и цилиндрической поверхности. В цилиндр можно вписать сферу тогда и только тогда, когда его высота (образующая) равна диаметру основания. $R = 0{,}5H = R_{сф}$.

Сфера называется вписанной в конус, если она касается основания конуса и конической поверхности.

В конус всегда можно вписать сферу.

$$R = r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{S_{ABC}}{r+l}.$$



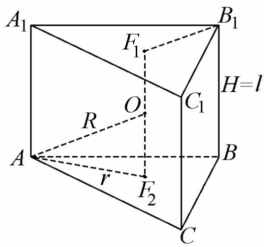
Около призмы можно *описать шар* тогда и только тогда, когда она прямая и около ее основания можно описать окружность.

$R = OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1$;

$r = OF_1 = OF_2 = \dfrac{1}{2}H$; $AA_1 \perp (ABC)$;

$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$,

R – радиус описанного шара, r – радиус описанной окружности.

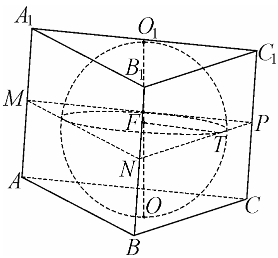


В призму можно *вписать шар* тогда и только тогда, когда в ее перпендикулярное сечение можно вписать окружность и диаметр этой окружности равен высоте призмы.

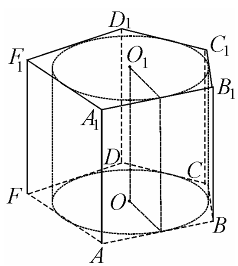
$(MNP) \perp AA_1$; $FO_1 = FT = R$; $OO_1 = H$;

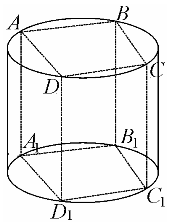
$R = r = 0{,}5H$; $\quad R = \dfrac{2S_\perp}{P_\perp}$,

R – радиус вписанного шара, r – радиус вписанной окружности.

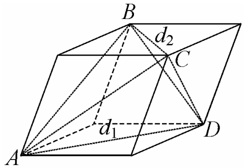


В прямую призму можно *вписать цилиндр,* если в ее основание можно вписать окружность.



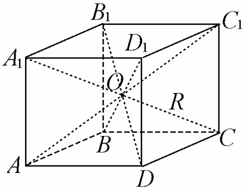


Около прямой призмы можно *описать цилиндр,* если около ее основания можно описать окружность.



В параллелепипед можно вписать *тетраэдр.*

Объем такого тетраэдра равен $\frac{1}{3}$ части объема параллелепипеда.



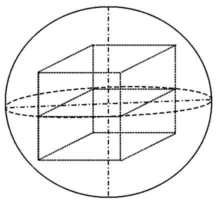
Куб – прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

Диагонали куба пересекаются в точке, являющейся центром вписанной и описанной сфер.

$AB = a$;

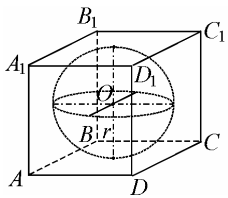
$OA = OB = OC = OD = OA_1 = OB_1 = OC_1 =$

$= OD_1 = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



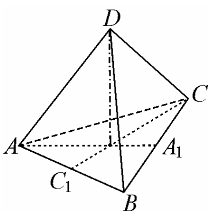
Для *куба, вписанного в сферу*: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

где R – радиус описанной сферы, a – ребро куба.



Для *сферы, вписанной в куб*: $r = \dfrac{1}{2}a$,

где r – радиус вписанной сферы, a – ребро куба.



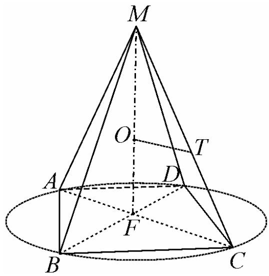
Правильным называется *тетраэдр*, у которого все грани – правильные треугольники.

$$R = \frac{3}{4}H\ ; \quad H = a\sqrt{\frac{2}{3}}\ ; \quad r = \frac{1}{4}H\ ; \quad R + r = H,$$

где R – радиус описанного шара, r – радиус вписанного шара.

Около основания *пирамиды, все боковые ребра которой равны между собой*, можно описать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

Все ребра одинаково наклонены к основанию.



$$MA = MB = MC = MD \Rightarrow$$
$$FA = FB = FC = FD.$$

Около такой пирамиды *можно описать шар.* Центр описанного шара лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды.

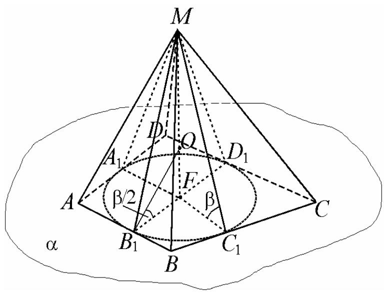
$MF \perp (ABC)$; $MT = TC$; $OT \perp MC \Rightarrow$

$OA = OB = OC = OD = OM = R$

(R – радиус описанного шара).

$$(H - R)^2 + FC^2 = R^2.$$

У *пирамиды, все двугранные углы при ребрах основания которой равны между собой*, в основание можно вписать окружность и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.



$F \in \alpha$; $MF \perp (ABC) \Rightarrow$

$FA_1 \perp AD$; $FB_1 \perp AB$;

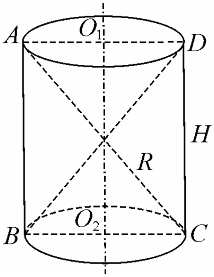
$FC_1 \perp BC$; $FD_1 \perp CD$.

Площадь боковой поверхности вычисляется по тем же формулам, что и для правильной пирамиды.

Высота вычисляется по формуле: $H = r\text{tg}\beta$, где r – радиус вписанной в основание окружности ($FA_1 = FD_1 = FC_1 = FB_1 = r$), а β – двугранный угол при ребре основания (B_1O – биссектриса угла $MB_1F = \beta$).

В такую пирамиду *можно вписать шар,* центр которого лежит на высоте.

$R = r\text{tg}\dfrac{\beta}{2}$, где R – радиус вписанного шара ($R - OF$), r – радиус вписанной в основание окружности.

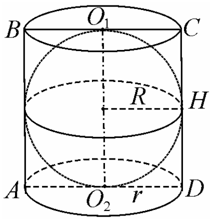


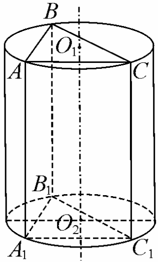
Около цилиндра всегда можно *описать шар*. Его центр лежит на середине высоты.

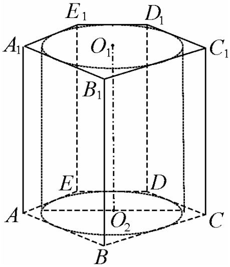
$R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$, где R – радиус шара ($R = AO = BO = CO = DO$), r – радиус основания цилиндра.

В цилиндр можно *вписать шар*, если диаметр основания цилиндра равен его высоте.

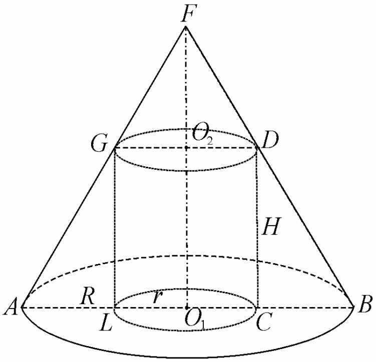
$R = r = 0{,}5H$, где R – радиус шара, r – радиус основания цилиндра.







В цилиндр можно *вписать призму* и около цилиндра можно *описать призму*.



Цилиндр можно *вписать в конус*. При этом:

$AO_2 = O_2B = R$,

$CD = GL = H$; $O_1G = r$.

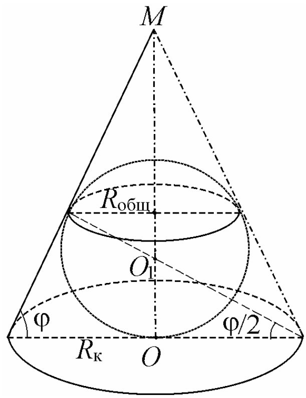
$$\frac{R-r}{H} = \frac{R}{FO_2} = \frac{r}{FO_2 - H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{H_к}{H_к - H},$$

где $H_к$ – высота конуса; H – высота цилиндра.

В *конус всегда можно вписать шар*. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник, являющийся осевым сечением конуса.

Около конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на оси конуса и совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, являющегося осевым сечением конуса.



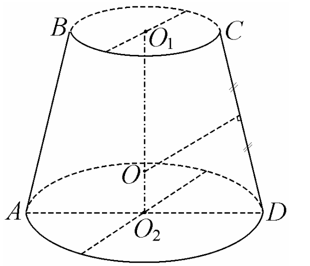
$$R_ш = R_к \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}; \quad R_ш = \frac{HR_к}{R_к + l};$$

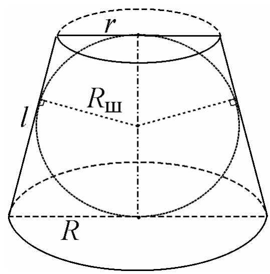
$R_{общ} = R_ш \sin\varphi$.

Около усеченного конуса всегда можно описать шар. Его центр лежит на прямой O_1O_2.

$CF = FD$; $OF \perp CD$,

где O – центр описанного шара; R – радиус описанного шара, равный радиусу окружности, описанной около ΔACD.





В усеченный конус можно вписать шар тогда и только тогда, когда образующая равна сумме радиусов оснований.

$R_ш = 0{,}5H$; $l = R + r \Leftrightarrow$ существует вписанный шар.

Примеры решения задач

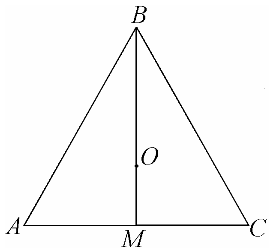
Задача 4.1. Найти радиус описанной сферы правильной пирамиды S_{ABC} со стороной основания 3 см и боковым ребром 5 см.

Решение. Построим треугольники ABC и BSB', где B' симметрична B относительно высоты S_0 пирамиды.

Так как точка O – центр правильного треугольника ABC, то

$$BO = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

так как $AB = 3$.

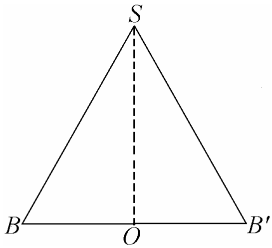


Таким образом, в треугольнике BSB' известны все стороны:

$$BS = SB' = 5, \quad BB' = 2\sqrt{3}.$$

Высота

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{25-3} = \sqrt{22}.$$



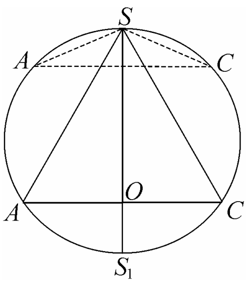
Площадь

$$S_{\Delta BSB'} = \frac{1}{2} BB' \cdot SO = \sqrt{3} \cdot \sqrt{22} = \sqrt{66}.$$

Радиус описанной около $\Delta BSB'$ окружности равен

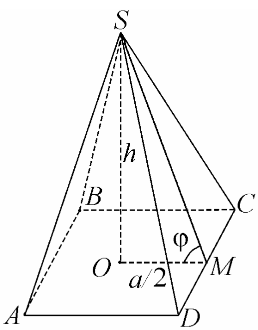
$$R = \frac{BS \cdot SB' \cdot BB'}{4S} = \frac{25 \cdot 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{22}} = \frac{25}{2\sqrt{22}}.$$

Ответ: $\dfrac{25}{2\sqrt{22}}$ см.



Задача 4.2. Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания, как 3:4. Найти величину угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

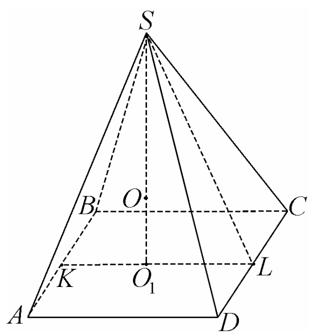
Решение. Пусть a – длина стороны квадрата, лежащего в основании пирамиды, h – длина высоты пирамиды и R – радиус описанной сферы.



Если построить сечение пирамиды и сферы плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту пирамиды, то из равенства $SO \cdot OS_1 = AO \cdot OC$ или $h(2R-h) = \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ можно получить уравнение $h\left(\dfrac{3}{2}a - h\right) = \dfrac{a^2}{2}$ или $2h^2 + 3ah + a^2 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$, где $t = h/a$.

Квадратное уравнение имеет два корня: $t_1 = 1$ и $t_2 = 1/2$. Обозначив угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания через φ, получим: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{OS}{OM} = \dfrac{2h}{a} = 2t$. Получили два значения φ: $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi_2 = \operatorname{arctg}2$.

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}; \operatorname{arctg}2\right\}$.

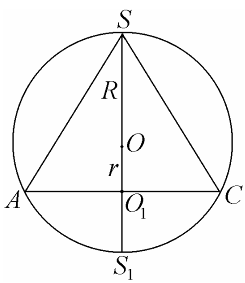


Задача 4.3. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанной в пирамиду сферы и описанной около пирамиды сферы совпадают. Определить величину угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

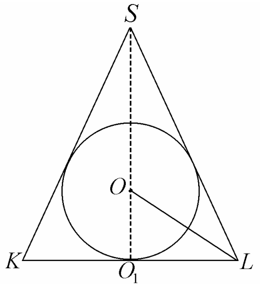
Решение. Пусть O – центр сферы вписанной в пирамиду и описанной около пирамиды $SABCD$ сферы. Построив сечение пирамиды и описанной сферы плоскостью SAC (A и C – противоположные вершины квадрата); пусть $SO = R$ – радиус описанной сферы, $OO_1 = r$ – радиус вписанной сферы и $AB = a$ ($AC = a\sqrt{2}$) как диагональ квадрата $ABCD$, лежащего в основании пирамиды.

Поскольку сечением описанной сферы плоскостью SAC является круг, центр которого совпадает с центром сферы, то из равенства $SO_1\ O_1S_1 = O_1C^2$ по свойству хорд, проведенных в круге (S_1 – точка пересечения прямой SO с описанной сферой), имеем $(R+r)(R-r) = \dfrac{a^2}{2}$, так как

$$O_1C = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (1)$$



Теперь построим сечение KSL пирамиды плоскостью, проходящей через высоту SO_1 пирамиды и середины сторон AB и CD квадрата $ABCD$. Эта плоскость пересечет вписанную сферу по большому кругу; пусть $\angle O_1LS = \gamma$; тогда $\angle O_1LO = \gamma/2$ (центр вписанного круга в треугольник KSL лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов этого треугольника). Так как $O_1L = \dfrac{a}{2}$, то можем составить еще два уравнения:



$$OO_1 = r = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2} \qquad (2)$$

и

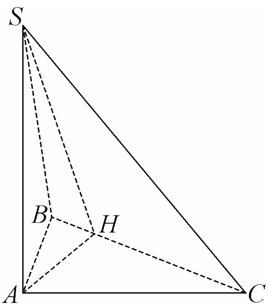
$$O_1S = R + r = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\gamma\,. \qquad (3)$$

Исключая из системы уравнений (1), (2) и (3) R, r, a, получаем тригонометрическое уравнение $\mathrm{tg}^2\gamma - 2\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\gamma - 2 = 0$, которое с помощью подстановки $\mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2} = t$ приводится к биквадратному относительно t уравнению $t^4 + 2t^2 - 1 = 0$. Решив это уравнение, найдем $t = \mathrm{tg}\,\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Итак, искомый угол $\gamma = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Ответ: $\gamma = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

Замечание. Полезно отметить, что если в многогранник можно вписать сферу, то ее радиус можно найти по формуле $r = \dfrac{3V}{S}$, где V – объем многогранника, а S – площадь его полной поверхности.

Задача 4.4. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 5$ см и $BC = 12$ см Боковое ребро SB перпендикулярно основанию и равно 8 см. Найти радиус вписанной сферы.



Решение. Опустим высоты BH и SH в треугольниках ABC и ASC соответственно. В прямоугольном треугольнике BHS

$$\mathrm{tg}\angle BHS = \frac{BS}{BH} = \frac{8}{BH}.$$

Отрезок BH является высотой в прямоугольном треугольнике ABC и равен $\frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{5 \cdot 12}{\sqrt{5^5 + 12^2}} = \frac{60}{13}$ по свойствам высоты, проведенной из прямого угла. Таким образом, $\operatorname{tg}\angle BHS = \frac{2 \cdot 13}{15} = \frac{26}{15}$,

$$\cos\angle BHS = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\angle BHS}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (26/15)^2}} = \frac{15}{\sqrt{901}}.$$

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} BS \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 80$.

Площадь полной поверхности пирамиды равна

$$S = S_{ABC} + S_{BSC} + S_{BSA} + S_{ASC},$$

где $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$, $S_{BSC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 = 48$, $S_{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$,

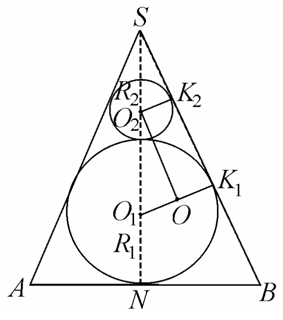
$S_{ASC} = \frac{S_{ABC}}{\cos\angle BHC} = \frac{30\sqrt{910}}{15} = 2\sqrt{910}$, откуда $S = 98 + 2\sqrt{901}$ и

$$r = \frac{3 \cdot 80}{98 + 2\sqrt{901}} = \frac{120}{49 + \sqrt{901}}.$$

Ответ: $r = \frac{120}{49 + \sqrt{901}}$.

Задача 4.5. В прямой круговой конус вписаны два шара так, что первый шар (радиуса R_1) касается боковой поверхности и основания конуса, а второй шар (радиуса R_2) – боковой поверхности и первого шара. Найти угол наклона *образующей конус к плоскости* основания.

Решение. Построим осевое сечение конуса.



Пусть O_1 и O_2 – центры шаров, K_1 и K_2 – точки касания шаров с боковой поверхностью конуса. Проведем $O_2O \perp O_1K_1$ (в осевом сечении, $O_2K_2 = OK_1$).

Треугольник O_1OO_2 – прямоугольный:

$O_1O_2 = R_1 + R_2$

$OO_1 = R_1 - R_2 = O_1K_1 - OK_1$;

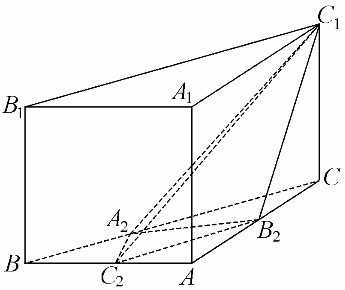
и так как $\angle O_2O_1O = \angle SAB$, так как ΔO_2O_1O подобен ΔSBN, то

$$\cos\angle O_2O_1O = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом, искомый угол $\angle SAB = \arccos\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$

Ответ: $\arccos\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$

Задача 4.6. Объем треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен V. Точка K, принадлежащая плоскости верхнего основания $A_1B_1C_1$ призмы, соединены с серединами A_2, B_2, C_2 ребер AB, BC и CA нижнего основания. Найти объем пирамиды $KA_2B_2C_2$.



Решение. Поскольку высота пирамиды $KA_2B_2C_2$ и ее объем не зависят от расположения точки K, то можем считать для удобства, что K совпадает с C_1.

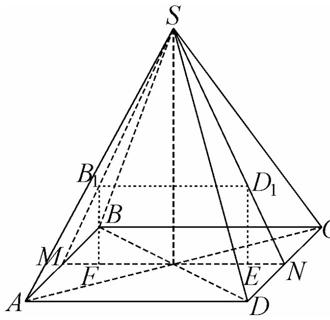
Тогда объем $V_{KA_2B_2C_2} = \frac{1}{3} S_{A_2B_2C_2} h$, где $S_{A_2B_2C_2}$ – площадь $\Delta A_2B_2C_2$, равная $\frac{1}{4}$ площади ΔABC, так как $\Delta A_2B_2C_2$ подобен ΔABC с коэффициентом подобия $k = 1/2$; тогда $S_{A_2B_2C_2} = k^2 S_{ABC}$, а h – высота пирамиды и призмы $ABCA_1B_1C_1$ (что означает независимость *величины искомого* объема $V_{KA_2B_2C_2}$ от положения точки K на плоскости $A_1B_1C_1$).

Таким образом, $V_{KA_2B_2C_2} = \frac{1}{3}\frac{1}{4} S_{ABC} h = \frac{1}{12} V$ (так как $V = S_{ABC}h$).

Ответ: $1/12V$.

Задача 4.7. Высота SO правильной четырех угольной пирамиды $SABCD$ имеет длину h, сторона квадрата $ABCD$ – a. В пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат в плоскости квадрата $ABCD$, а четыре другие – на апофемах боковых граней пирамиды. Найти площадь поверхности куба.

Решение. Построим сечение конфигурации "пирамида – куб" плоскостью, проходящей через высоту SO и противоположные вершины куба B_1 и D_1, лежащие на апофемах боковых граней ASB и CSD. (Сам куб на чертеже не показан.) Обозначим $D_1E = x$ (длина ребра куба). Тогда $FE = x\sqrt{2}$. Так как ΔB_1SD_1 подобен ΔMSN, то



$\dfrac{B_1D_1}{MN} = \dfrac{SO_1}{SO}$ или $\dfrac{x\sqrt{2}}{a} = \dfrac{h-x}{h}$, а отсюда находим $x = \dfrac{ah}{h\sqrt{2}+a}$.

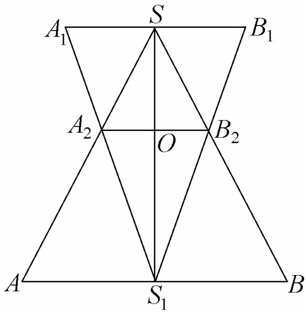
Таким образом, $S_{\text{куба}} = 6x^2 = 6\left(\dfrac{ah}{h\sqrt{2}+a}\right)^2$

Ответ: $6\left(\dfrac{ah}{h\sqrt{2}+a}\right)^2$.

Задача 4.8. Два конуса имеют общую высоту и параллельные основания, радиусы которых равны R и r. Найти радиус окружности, по которой пересекаются поверхности конусов.

Решение. Построим сечение конусов плоскостью, проходящей через высоту конусов (осевое сечение). Пусть $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$ и $A_2B_2 = 2x$ (x – искомый радиус). Из подобия треугольников OA_2S и S_1AS имеем

$$\frac{OA_2}{AS_1} = \frac{OS}{SS_1}, \qquad (1)$$



а из подобия треугольников OA_2S_1 и SA_1S_1 имеем

$$\frac{OA_2}{A_1S} = \frac{OS_1}{SS_1}. \qquad (1)$$

Складывая почленно равенства (1) и (2), получаем

$$\frac{OA_2}{AS_1} + \frac{OA_2}{A_1S} = \frac{OS}{SS_1} + \frac{OS_1}{SS_1} \quad \text{или} \quad x\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right) = 1.$$

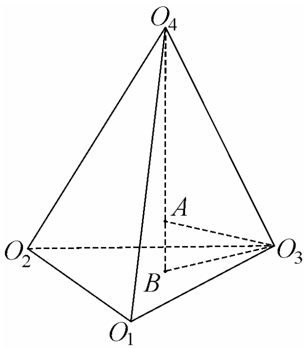
Решив последнее уравнение, найдем $x=\dfrac{rR}{R+r}$.

Ответ: $x=\dfrac{rR}{R+r}$.

Задача 4.9. Четыре одинаковых сферы радиуса R расположены в пространстве так, что каждая касается трех других. Определите радиус сферы, которая касается каждой из этих четырех сфер внешним образом.

Замечание. Подразумевается сфера, которая вложена в свободное пространство, остающееся между четырьмя одинаковыми заданными сферами радиуса R.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 – центры данных сфер, A – центр сферы, касающейся внешним образом заданных сфер и имеющей радиус x. Тогда у пирамиды $O_4O_1O_2O_3$ все ребра имеют длину $2R$ (длина каждого ребра равна расстоянию между центрами сфер), а вершина O_4 проектируется (ортогонально) в центр B правильного треугольника $O_1O_2O_3$ и



$$BO_3=\frac{2}{3}\frac{2R\sqrt{3}}{2}=\frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Так как A – центр сферы, касающейся данных сфер, то $AO_4 = AO_3 = R + x$. Составим уравнение для нахождения x:

$$O_4B=\sqrt{O_4O_3^2-BO_3^2}=\sqrt{(2R)^2-\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}\text{ и } O_4B = AO_4 + AB.$$

Найдем $AB=\sqrt{AO_3^2-BO_3^2}=\sqrt{(R+x)^2-\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}$. Итак, имеем уравнение $R+x+=\sqrt{(R+x)^2-\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{(2R)^2-\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}$, решив которое, получим ответ.

Ответ: $x=R\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}-1\right)$.

Задача 4.10. Около цилиндра описана призма, объем которой равен 480, а площадь ее боковой поверхности равна 320. Определить площадь полной поверхности цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна 10.

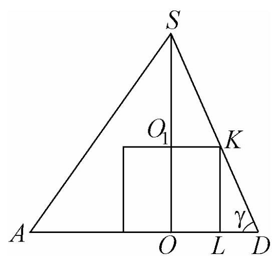
Решение. Так как прямая призма описана около цилиндра, то в многоугольник, лежащий в основании призмы, можно вписать круг. Определим радиус этого круга. Пусть S – площадь основания призмы, h – высота призмы (и цилиндра), P – периметр многоугольника, лежащего в основании призмы. Из условия задачи следуют два уравнения: $SH = 480$ и $PH = 320$. Поделив первое уравнение на второе, получим $S/P = 3/2$.

Далее для нахождения радиуса r круга, вписанного в многоугольник с периметром P (радиуса основания цилиндра), воспользуемся формулой $S = \frac{P}{2}r$ (площадь многоугольника, в который можно вписать круг, равна произведению радиуса круга и полупериметра многоугольника). Итак, $\frac{(P/2)r}{P} = \frac{3}{2}$ или $r = 3$.

Найдем теперь $H = \sqrt{d^2 - (2r)^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$, где d – диагональ осевого сечения. Далее имеем $S_{\text{бок}} = 2\pi rH = 2\pi \cdot 3 \cdot 8 = 48\pi$ и $2S_{\text{осн.ц}} = 2\pi \cdot 3^2 = 18\pi$. Итак, $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн.ц}} + 2\,S_{\text{осн}} = 66\pi$.

Ответ: 66π.

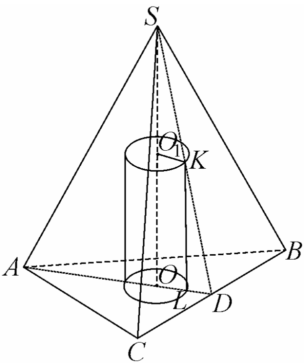
Задача 4.11. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина высоты SO равна h, а каждая боковая грань составляет с плоскостью основания угол величиной γ. В эту пирамиду вписан прямой круговой цилиндр так, что его нижнее основание лежит внутри треугольника ABC, и окружность верхнего основания касается боковых граней в точках пересечения медиан треугольников ASB, BSC и ASC. Найти площадь боковой поверхности цилиндра и его объем.



Решение. Пусть O_1 – центр верхнего основания цилиндра, K – точка касания верхней окружности плоскости BSC (точка K – точка пересечения медиан треугольника

BSC). Тогда сечение пирамиды и цилиндра плоскостью, проходящей через боковое ребро AS и высоту SO, будет иметь вид, показанный на рисунке (SD – медиана треугольника BSC).

Пусть $O_1K = r$ (радиус основания цилиндра), $OO_1 - H$ (его вы-



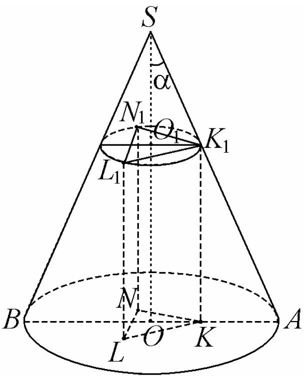
сота). Так как $KD = \frac{1}{3}SD$ (свойство медиан треугольника), то из подобия треугольников SOD и KLD устанавливаем, что $H = \frac{1}{3}h;$ из подобия треугольников SO_1K и SOD имеем $\frac{O_1K}{OD} = \frac{SK}{SD}$ или $\frac{r}{h\operatorname{ctg}\gamma} = \frac{2}{3}$. Итак, $r = \frac{2}{3}h\operatorname{ctg}\gamma$.

Далее находим площадь боковой поверхности $S = 2\pi rH = 2\pi\frac{2}{3}h\operatorname{ctg}\gamma\frac{h}{3} = \frac{4}{9}\pi h^2\operatorname{ctg}\gamma$ и объем цилиндра

$$V = \pi r^2 H = \pi\left(\frac{4}{9}\pi h^2\operatorname{ctg}\gamma\right)\frac{h}{3} = \frac{4}{27}\pi h^3\operatorname{ctg}^2\gamma.$$

Ответ. $V = \frac{4}{27}\pi h^3\operatorname{ctg}^2\gamma$.

Задача 4.12. В прямой круговой конус, высота которого имеет длину h, вписана правильная треугольная призма так, что нижнее



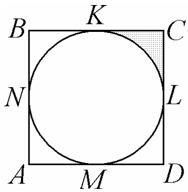
основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания расположены на боковой поверхности конуса. Найти площадь полной поверхности этой призмы, если известно, что все ребра этой призмы имеют одинаковую длину, а величина угла в осевом сечении конуса при вершине равна 2α.

Решение. Пусть $KLNK_1L_1N_1$ – призма, вписанная в конус. Положим $KK_1 = x$, тогда $SO_1 = h - x$, $O_1O = KK_1$ (O и O_1 – точки пересечения перпендикулярной прямой к плоскостям верхнего и нижнего оснований призмы). Так как треугольник $K_1L_1N_1$ является правильным, то $O_1K_1 = \frac{K_1L_1}{\sqrt{3}} = \frac{KK_1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Теперь из прямоугольного треугольника SO_1K_1 получаем равенство $(h - x)\mathrm{tg}\alpha = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Решив это уравнение, найдем $x = \frac{h\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}$, а затем и площадь полной поверхности призмы по формуле

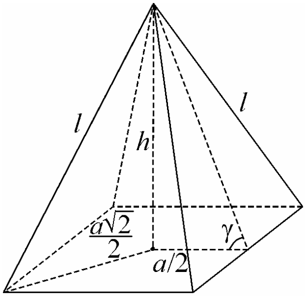
$$S = 3x^2 + 2\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x^2\left(3+\frac{2\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{h\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}\right)^2\left(3+\frac{2\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ответ: $\left(3+\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{h\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}\right)^2$.

Задача 4.13. Длина бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна l. Величина угла наклона боковой грани ASB к плоскости основания пирамиды равна γ. В эту пирамиду вписан прямой круговой конус с вершиной S, окружность основания которого касается сторон BC и CD квадрата $ABCD$ в точках K и L. Найти объем тела, ограниченного плоскостями ABC, SBC, CSD и конической поверхностью.



Решение. "Основанием" тела, объем которого необходимо найти, служит криволинейный треугольник KCL. Фигур, аналогичных фигуре KCL, в плоскости основания расположено еще три (MDL, MAN и BNK), поэтому искомый объем $V_{SKLC} = \frac{1}{4}(V_{\text{пир}} - V_{\text{кон}})$, где $V_{\text{пир}}$ и $V_{\text{кон}}$ – объемы пирамиды $SABCD$ и вписанного в нее конуса соответственно. Найдем эти объемы. Пусть длина стороны основания пирамиды равна a, высота пирамиды (и конуса) равна H. Тогда радиус основания конуса равен $a/2$.



Легко составляется следующая система уравнений:

$$l^2 - h^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2, \quad h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\gamma,$$

решив которую, получим

$$a = \frac{2h}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\gamma}}, \quad h = \frac{l\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\gamma}}.$$

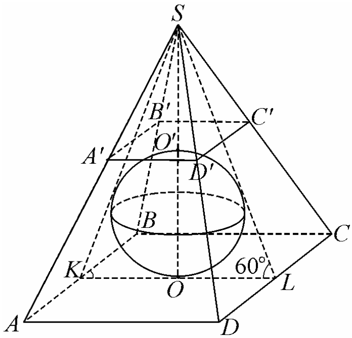
Итак,

$$V_{SKLC} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}a^2 h - \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}h\right) = \frac{1}{12}a^2 h\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Подставив значения a и h, получим окончательный ответ.

Ответ: $\dfrac{l^3\operatorname{tg}\gamma}{(2+\operatorname{tg}^2\gamma)^{3/2}}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

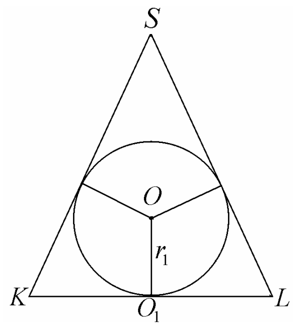
Задача 4.14. Боковые грани правильной треугольной пирамиды наклонены под углом 60° к плоскости основания. Сторона основания пирамиды равна *a.* В пирамиду вписан шар. Второй шар касается первого шара и всех боковых граней. Третий шар касается второго шара и всех боковых граней, *n*-й шар касается (*n* – 1)-го шара и всех боковых граней и т.д. Найти а) площадь поверхности 4-го шара; б) определить, какая часть объема пирамиды лежит внутри всех шаров.



Решение. Проведем сечение пирамиды *SABCD* через две противоположные апофемы *SK* и *SL.* Треугольник *KSL* правильный со стороной *a.* Радиус вписанного в пирамиду шара совпадает с радиусом вписанной в треугольник *KSL* окружности и равен $r_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Проведем сечение пирамиды *A'B'CD'* параллельно плоскости основания, которое касается вписанного шара.

Пирамиды $SA'B'C'D'$ и $SABCD$ подобны. Коэффициент подобия равен отношению высот



$$\frac{SO'}{SO}=\frac{SO-2r_1}{SO}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Второй шар является вписанным в пирамиду $SA'B'C'D'$ и, следовательно, его радиус равен $r_2=\frac{1}{3}r_1$. Проведя подобные рассуждения применительно к пирамиде $SA'B'C'D'$, получим, что $r_3=\frac{1}{3}r_2$ и т.д. В итоге $r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}=\frac{1}{3^{n-1}}r_1$, т. е. длины радиусов шаров образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 1/3. Площадь поверхности четвертого шара равна $4\pi r_4^2=\frac{4\pi r_1^2}{3^6}=\frac{4\pi a^2\cdot 3}{6^2\cdot 3^6}=\frac{\pi a^2}{3^7}$.

Поскольку объемы шаров представляют собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$, то сумма объемов всех шаров $V_ш$ – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$V_ш=\frac{V_1}{1-\frac{1}{27}}=\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{26}{27}}=\frac{4\pi a^3\cdot 3\sqrt{3}\cdot 27}{3\cdot 6^3\cdot 26}=\frac{4\pi a^3\sqrt{3}\cdot 3^4}{3^4\cdot 8\cdot 26}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{52}.$$

Поскольку объем пирамиды $V_0=\frac{1}{3}SO\cdot S_{ABCD}=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, то суммарный объем шаров составляет $V_ш/V_0$ объема пирамиды

$$\frac{V_ш}{V_0}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3\cdot 6}{52a^3\sqrt{3}}=\frac{3\pi}{26}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi a^2}{3^7}$; б) $\frac{3\pi}{26}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти объем куба, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

2. В конус вписан цилиндр, высота которого в 2 раза меньше высоты конуса. Образующая конуса равна l и образует с плоскостью основания угол $\pi/3$. Найти объем тела, ограниченного основанием конуса и боковыми поверхностями цилиндра и конуса.

3. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти величину угла между осью конуса и его образующей, зная, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 2 : 1.

4. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Найти величину угла между осью конуса и его образующей, если известно, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади полной поверхности конуса как 7:4.

5. Найти радиусы вписанного в конус и описанного около конуса шаров, если образующая конуса равна l, а угол при вершине осевого сечения равен α.

6. Найти объем конуса, радиус основания которого равен 3, а радиус вписанного в конус шара равен 1.

7. Найти объем конуса, если известно, что его образующая наклонена к плоскости основания под углом α, а радиус вписанного шара равен r.

8. Объем шара, вписанного в конус, равен $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{27}$. Угол при вершине осевого сечения равен 60°. Найти площадь боковой поверхности конуса.

9. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая видна под углом φ. Найти объем конуса.

10. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. Площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через центр вписанного шара параллельно основанию, равна Q. Найти объем конуса.

11. Найти радиус шара, описанного около конуса, если радиус основания конуса равен R и образующая равна l.

12. В шар вписан конус, объем которого в 4 раза меньше объема шара. Высота конуса равна H. Найти объем шара.

13. Около шара описан усеченный конус, площадь нижнего основания которого в 4 раза больше площади верхнего основания. Найти отношение объема усеченного конуса к объему шара.

14. В конус вписан шар. Плоскость, содержащая окружность касания шаровой и конической поверхности, делит объем шара в отношении 1 : 7. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

15. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно $\frac{2}{3}$. Найти отношение объема шара к объему конуса.

16. Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Объемы у конуса и шара равны. Вычислить отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности конуса, расположенной внутри шара.

17. В конус объемом $2V$ вписан шар объемом V. Найти высоту конуса.

18. Вокруг конуса объемом V и высотой H описан шар. Найти радиус шара.

19. В усеченный конус вписан шар радиуса R. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом φ. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса и его объем.

20. В конус вписан полушар так, что большой круг полушара лежит в плоскости основания конуса, а шаровая поверхность касается поверхности конуса. Найти площадь полной поверхности полушара и его объем, если образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол β.

21. Сфера с центром в вершине конуса делит конус на две равновеликие части. Найти радиус этой сферы, если радиус основания конуса равен α, а величина угла при вершине его осевого сечения равна a.

22. В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен а, вписан шар радиуса R. Найти объем части конуса, расположенного над шаром.

23. Определить площадь боковой поверхности конуса, зная длину R радиуса описанного около него шара и угол α, под которым из центра шара видна образующая конуса.

24. Около шара радиуса R описан прямой круговой конус, в котором угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определить площадь полной поверхности и объем конуса.

25. В шар радиуса R вписан конус, в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти площадь полной, поверхности цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α.

26. Найти радиусы вписанной и описанной сфер у правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

27. Найти радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна b, а угол между боковыми ребрами равен α.

28. Найти радиусы вписанной и описанной сфер у правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковое ребро – b.

29. Найти радиусы вписанной и описанной сфер у правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а боковое ребро – b.

30. Найти радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, высота которой равна H, а угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α.

31. Длина стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равна a. Боковая грань составляет с плоскостью, основания угол α. Найти радиус описанного шара.

32. Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти длину радиуса вписанного в пирамиду шара.

33. Вокруг правильной четырехугольной пирамиды объема V и ребром основания a описана сфера. Найти радиус сферы.

34. Около правильной четырехугольной пирамиды описан шар. Центр шара делит высоту пирамиды в отношении 9 : 7, считая от вершины. Найти тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

35. Высота правильной четырехугольной пирамиды и радиус описанной сферы равны соответственно h и R ($R \le h$). Найти площадь основания пирамиды.

36. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а радиус вписанного шара r. Найти объем пирамиды.

37. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Найти объем пирамиды, если угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания равен α.

38. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине α, длина бокового ребра – l. Найти площадь поверхности сферы, описанной около пирамиды.

39. Радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен 1, радиус вписанного шара равен $\sqrt{2} - 1$. Найти длины ребер пирамиды.

40. Шар касается основания и трех боковых ребер правильной треугольной пирамиды, боковые грани которой – прямоугольные треугольники. Найти радиус шара, если известно, что объем пирамиды равен 1.

41. В треугольную пирамиду, все ребра которой имеют длину a, вписан шар. В один из трехгранных углов пирамиды вновь вписан шар так, что он касается первого шара. Найти объем второго шара.

42. В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр с радиусом основания r. Высота цилиндра в два раза меньше высоты пирамиды. Плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти объем пирамиды.

43. В правильную треугольную пирамиду, ребро основания которой равно a, а высота – h, вписан цилиндр, осевое сечение которого – квадрат. Нижнее основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а верхнее основание касается боковых граней пирамиды. Найти объем цилиндра.

44. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Найти объем шара, вписанного в эту пирамиду.

45. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 5$ см и $AC = 12$ см. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 8 см. Найти радиус описанного около пирамиды сферы.

46. В конус вписана правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой наклонено к плоскости основания под углом α. Определить объем конуса, если сторона основания пирамиды имеет длину a.

47. В конус, образующая которого равна l и которая наклонена к плоскости основания под углом α, вписана пирамида, в основании которой прямоугольник с острым углом 2α между диагоналями. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса. Найти расстояние от основания высоты конуса до боковой грани пирамиды, проходящей через меньшую сторону основания.

48. Объем конуса равен V. В конус вписана пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α между боковыми сторонами. Найти объем пирамиды.

49. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом а, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с катетами a и b. Найти объем пирамиды.

50. Определить площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l и боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

51. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

52. В пирамиде $ABCD$ длины ребер $AB = 6$, $CD = 8$, остальные ребра равны $\sqrt{74}$. Найти радиус описанного шара.

53. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найти расстояние от центра сферы до ребра наибольшей длины.

53. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона квадрата, лежащего в основании, равна a, а величина угла между боковым ребром BS и плоскостью основания равна β. Найти расстояние от центра описанной около этой пирамиды сферы до плоскости, проходящей через середины ребер AB, BS и CS.

54. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через вершину A квадрата $ABCD$, лежащего в основании и середину E ребра SC проведена плоскость, параллельная диагонали BD. Определить расстояние от этой плоскости до центра вписанного в пирамиду шара, если длина бокового ребра пирамиды равна l, а каждая боковая грань составляет с плоскостью основания угол φ.

56. В прямой круговой конус помещена бесконечная последовательность шаров так, что первый шар касается основания конуса и всех его образующих, а каждый последующий шар касается предыдущего шара (внешним образом) и всех его образующих. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости его основания, если известно, что объем конуса в $\frac{13}{6}$ раз больше суммы объемов всех шаров.

57. В правильной треугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найти объем пирамиды, если длина ее бокового ребра равна l.

58. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанной и описанной сфер совпадают. Найти объем пирамиды, если длина ребра ее основания равна a.

V. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ИЛИ НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ

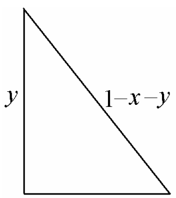
В последние годы такие задачи стали чаще появляться на вступительных экзаменах (особенно в МИФИ). Попробуем определить, в чем состоит их характерная особенность.

Большинство задач, которые рассматривались выше, имели следующий вид: фиксировались некоторые числовые характеристики геометрических фигур, и требовалось найти значения других характеристик. Например, заданы длины ребер правильной пирамиды; требуется найти длину диаметра вписанной сферы и плоский угол при вершине.

Задачи, которые мы рассмотрим ниже, аналогичны алгебраическим задачам с параметром, а именно: какие-то числовые характеристики будут заданы, а одна будет меняться (назовем ее t). Нужная нам величина является функцией от этого t ($S(t)$). И наша задача будет сводиться к алгебраической, т.е. надо найти, в каких пределах меняется значение параметра t ($t \in T$), а дальше искать $\max\limits_{t\in T} S(t)$ или $\min\limits_{t\in T} S(t)$.

Примеры решения задач

Задача 5.1. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольный треугольник, периметр которого равен 1?



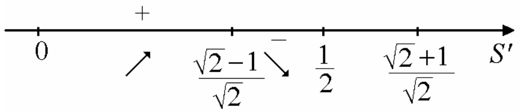
Решение. Обозначим через x и y катеты треугольника. Тогда гипотенуза равна $1 - x - y$. Применив теорему Пифагора, получаем

$$x^2 + y^2 = (1 - x - y)^2 \Rightarrow y = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Площадь треугольника $S(x) = \dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{2x-1}{2x+1}$, причем по смыслу задачи $x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$. Найдем производную:

$$S'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{2x^2-x}{x-1}\right)'=\frac{1}{4}\frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x+1}{4(x-1)^2},$$

$$S'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{\sqrt{2}\pm 1}{\sqrt{2}}.$$



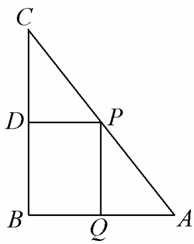
Поскольку $S'(x) > 0$ при $x\in\left(0;\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$ и $S'(x) < 0$ при $x\in\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}};\frac{1}{2}\right)$, то функция $S(x)$ достигает своего максимума в точке $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $\max\limits_{x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} S\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$.

Задача 5.2. В прямоугольный треугольник с углом 30° и меньшим катетом 3 вписан прямоугольник так, что две его стороны лежат на катетах треугольника, а одна из вершин – на гипотенузе. Известно, что прямоугольник имеет наибольшую возможную площадь. Найти отношение площадей прямоугольника и данного треугольника.

Решение. Пусть углы BCA = 30°, ABC = 90°. Тогда AB = 3, AC = 6, $BC = 3\sqrt{3}$. Положим $BQ = x$. В прямоугольном треугольнике APQ $\angle QPA$ = 30° и сторона $AQ = 3 - x$, поэтому

$$PQ = AQ\cdot \mathrm{ctg}30^\circ = (3-x)\sqrt{3}.$$



Площадь прямоугольника равна

$$S(x) = PQ\cdot BQ = \sqrt{3}x(3-x),$$

причем $x\in[0; 3]$. Находим производную $S'(x) = \sqrt{3}x(3-x)$:

$$S'(x)=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{2}{3}.$$

В точке $x=\dfrac{2}{3}$ производная меняет знак с " + " на "-", т.е. $x=\dfrac{2}{3}$ – максимум функции $S(x)$. Таким образом,

$$\max_{x\in[0;3]} S(x)=S\left(\frac{3}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

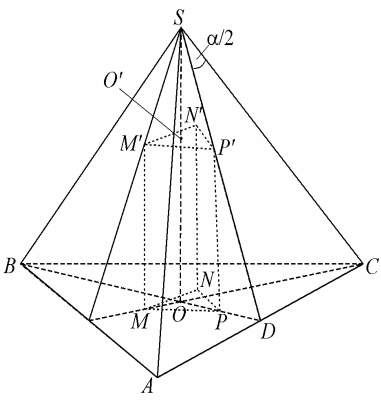
Площадь треугольника $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Отношение искомых площадей равно $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}:\dfrac{9\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Ответ: 1:2.

Задача 5.3. В правильную треугольную пирамиду с высотой H и плоским углом α при вершине вписана правильная треугольная призма так, что вершины нижнего основания лежат на основании пирамиды, а вершины верхнего – на апофемах. Найти площадь основания той призмы, которая имеет наибольшую площадь боковой поверхности.

Решение. Найдем длину ребра основания пирамиды AC. Пусть O – центр ΔABC, D – середина AC и радиус описанной около ΔABC окружности равен R. Тогда сторона $AC=R\sqrt{3}$. По теореме Пифагора



$$SC=\sqrt{OS^2+OC^2}=\sqrt{H^2+R^2}.$$

С другой стороны,

$$DC=SC\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{H^2R^2}\,\sin\alpha \Rightarrow$$

$$R=\frac{2H\sin\alpha/2}{\sqrt{3-4\sin^2\alpha/2}}.$$

Так как $OD=CO/2$, то

$$OD=\frac{H\sin\alpha/2}{\sqrt{3-4\sin^2\alpha/2}}.$$

Обозначим точку пересечения SO с верхнем основанием призмы $M'N'P'$ через O'. Заметим, что O' – центр $MA'N'P'$. Пусть $SO' = x$. Из подобия треугольников $O'SP'$ и OSD с коэффициентом подобия $k = x/H$ следует, что $O'P' = \dfrac{OD \cdot x}{H} = \dfrac{x \sin \alpha / 2}{\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha / 2}}$. Так как $O'P'$ – радиус описанной окружности в правильном треугольнике $M'N'P'$, то $M'P' = \dfrac{\sqrt{3} x \sin \alpha / 2}{\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha / 2}}$. Призма $MNPM'N'P'$ – прямая, следовательно, площадь боковой поверхности

$$S(x) = 3M'P' \cdot OO' = \frac{\sqrt{3} x \sin \alpha / 2}{\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha / 2}} \cdot x(H - x), \; x \in [0; H].$$

Так как

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3} x \sin \alpha / 2}{\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha / 2}} (H - x) = 0 \Rightarrow x = \frac{H}{2}.$$

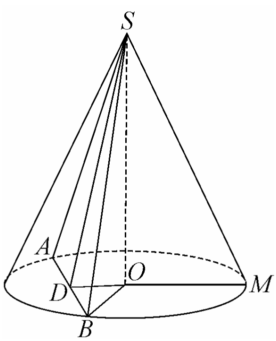
то $\dfrac{H}{2}$ – единственная критическая точка функции $S(x)$ на отрезке $[0; H]$, в котором производная меняет знак с " + " на "–", т.е. $x = \dfrac{H}{2}$ – точка максимума функции. При этом площадь основания искомой призмы равна

$$\frac{(M'P')^2 \sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3} \dfrac{H}{2} \sin \alpha / 2}{\sqrt{3 - 4\sin^2 \alpha / 2}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{16} H^2 \dfrac{\sin^2 \alpha / 2}{3 - 4\sin^2 \alpha / 2}$.

Задача 5.4. Дан конус, угол при вершине осевого сечения которого равен 2α, а образующая равна l. Какую максимальную площадь может принимать сечение, проходящее через вершину конуса.

Решение. Пусть ABS – сечение конуса, OD – перпендикуляр, опущенный из центра основания на хорду AB. Угол $OSB = \alpha$, по-



этому радиус $OB = l\sin\alpha$ и высота $OS =$ $= l\cos\alpha$. Пусть длина отрезка OD равна x. Площадь сечения $S_{\Delta ABS} = SD \cdot DB$, где

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{l^2\cos^2\alpha + x^2}$$

и

$$DB = \sqrt{OB^2 - OD^2} = \sqrt{l^2\cos^2\alpha - x^2}\ .$$

Тогда

$$S_{\Delta ABS} = S(x) = \sqrt{(l^2\cos^2\alpha + x^2)(l^2\cos^2\alpha - x^2} =$$

$$= \sqrt{l^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha + (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)l^2x^2 - x^4} =$$

$$= \sqrt{\frac{l^4}{4}\sin^2 2\alpha - l^2x^2\cos 2\alpha - x^4}.$$

Для облегчения вычислений положим $t = x^2$ и исследуем на максимум функцию

$$G(t) = \frac{l^4}{4}\sin^2 2\alpha - l^2\cos 2\alpha t - t^2,\ \ t \in [0; t^2\sin^2\alpha].$$

Находим производную

$$G'(t) = -l^2\cos 2\alpha t - t^2 = 0 \ \Rightarrow\ t_0 = -\frac{l^2\cos 2\alpha}{2}.$$

Определим, при каких значениях α число $t \in [0; t^2\sin^2\alpha]$

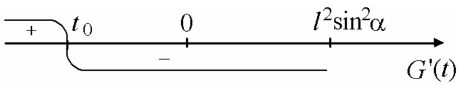
$$-\frac{l^2\cos 2\alpha}{2} \le l^2\sin 2\alpha \Rightarrow \frac{\cos 2\alpha}{2} \le \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \Rightarrow 0 \le 1\ \ -$$

выполняется при всех α

$$-l^2\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha \le 0 \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Рассмотрим два случая.

1) $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.



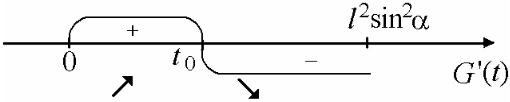
Функция $G(t)$ убывает на отрезке

$$[0;l^2\sin^2\alpha] \Rightarrow \max_{t\in[0;l^2\sin^2\alpha]} G(t) = G(0) = \frac{l^2}{4}\sin^2 2\alpha\,.$$

При этом минимальное значение площади равно

$$\sqrt{G(0)} = \frac{l^2}{4}\sin 2\alpha\,.$$

2) $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.



Максимум функции $G(t)$ достигается при $t = t_0$, и максимальная площадь равна

$$\sqrt{G(t_0)} = \sqrt{\frac{l^2}{4}\sin^2 2\alpha + \frac{l^2\cos^2 2\alpha}{2} - \frac{l^2\cos^2 2\alpha}{2}} =$$

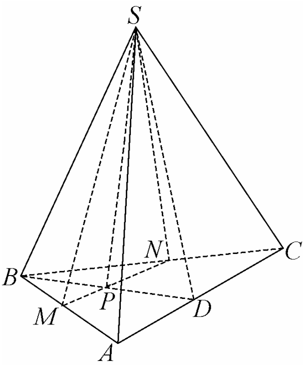
$$= l^2\sqrt{\frac{\sin^2 2\alpha}{4} + \frac{l^2\cos^2 2\alpha}{4}} = \frac{l^2}{2}.$$

Ответ. При $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow S = \frac{l^2}{4}\sin 2\alpha$,

при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow S = \frac{l^2}{2}$.

Задача 5.5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный ΔABC, а вершина S проектируется на плоскость основания в точку, расположенную на середине гипотенузы ΔABC. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. Через вершину S пирамиды параллельно гипотенузе ΔABC проведена плоскость так, что площадь получившегося сечения имеет наибольшее возможное значение. Найти отношение, в котором эта плоскость делит объем

Решение. Пусть MNS – искомое сечение. Поскольку сечение параллельно AC, то $MN \parallel AC$ и треугольники MBN и ABC подобны.



Точка D – середина AC, а BD и MN пересекаются в точке P. Обозначим $DC = a$ и $BP = x$.

Отрезок BP является высотой и медианой прямоугольного равнобедренного треугольника MBN, причем $MP = PN = x$. Аналогично, $BD = AD = DC = a$.

Из равенства треугольников MBS и NBS следует, что $MS = NS$ и SP – высота в сечении MSN. Площадь сечения равна

$$S_{\Delta MSN} = \frac{1}{2} PS \cdot MN = x \cdot PS.$$

Так как $\operatorname{tg}\angle SCD = \frac{\sqrt{2}}{5}$, то $SD = DC \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. Применив теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику SDP, получаем

$$PS = \sqrt{PD^2 + SD^2} = \sqrt{(BD - BP)^2 + SD^2} = \sqrt{(a-x)^2 + \frac{2a^2}{25}}.$$

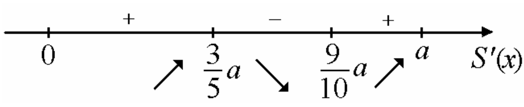
Таким образом, искомая площадь сечения

$$S_{\Delta MNS} = S(x) = x \cdot \sqrt{(a-x)^2 + \frac{2a^2}{25}} = x \cdot \sqrt{x^2 - 2ax + \frac{27}{25}a^2}.$$

По смыслу задачи $x \in [0; a]$. Задача свелась к нахождению $\max\limits_{x \in [0;a]} S(x)$. Находим производную:

$$S'(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + \frac{27}{25}a^2} + \frac{x(2x-2a)}{2\sqrt{x^2 - 2ax + \frac{27}{25}a^2}} = \frac{x^2 - 3ax + \frac{27}{25}a^2}{\sqrt{x^2 - 2ax + \frac{27}{25}a^2}},$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{5}a; \\ x_2 = \frac{9}{10}a. \end{array}\right.$$



$S'(x) > 0$ при $a \in \left[0; \frac{3}{4}a\right)$ и $a \in \left(\frac{9}{10}a; a\right]$. Это означает, что на этих интервалах функция $S(x)$ возрастает и наибольшее значение площади сечения может достигаться либо при $x = \frac{3}{5}a$, либо при $x = a$.

Вычисляем значения функции $S(x)$:

$$S(a) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{5} = \frac{a^2\sqrt{2}}{5},$$

$$S\left(\frac{3}{5}a\right) = \frac{3}{5}a\sqrt{\frac{4}{25}a^2 + \frac{2}{25}a^2} = \frac{3\sqrt{6}a^2}{25}.$$

Сравним эти две величины:

$$S(a) \vee S\left(\frac{3}{5}a\right),$$

$$\frac{a^2\sqrt{2}}{5} \vee \frac{3\sqrt{6}a^2}{25},$$

$$5\sqrt{2} \vee 3\sqrt{6}, \quad 50 \vee 9 \cdot 6 = 54,$$

$$50 < 54 \Rightarrow S(a) < S\left(\frac{3}{5}a\right).$$

Мы получили, что площадь сечения принимает наибольшее значение при $x = \frac{3}{5}a$.

Теперь ответим на вопрос задачи.

Поскольку у пирамид *SMBN* и *SAMNC* общая высота, то их объемы относятся как площади основания:

$$\frac{V_{SMBN}}{V_{SAMNC}} = \frac{S_{\Delta MBN}}{S_{AMNC}} = \frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC} - S_{\Delta MBN}} = \frac{S_{\Delta MBN} / S_{\Delta ABC}}{1 - (S_{\Delta MBN} / S_{\Delta ABC})}.$$

Но треугольники *ABC* и *MBN* подобны с коэффициентом подобия $k = 3/5$, поэтому $S_{\Delta MBN} / S_{\Delta ABC} = k^2 = \frac{9}{25}$.

Окончательно получаем

$$\frac{V_{SMBN}}{V_{SAMNC}}=\frac{9/25}{1-9/25}=\frac{9}{16}.$$

Ответ: 9 : 16.

Задачи для самостоятельного решения

1. Равнобедренный треугольник вписан в окружность радиуса R. Найти наибольшее значение длины высоты, опущенной на боковую сторону.

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, равна h. Найти наименьшее значение длины медианы треугольника, проведенной к большему катету.

3. В треугольнике ABC длина $BC = a$, угол $BAC = \alpha$. Найти наибольшее значение периметра треугольника.

4. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Каким должно быть ее большее основание, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

5. При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 8 см имеет наибольшую площадь.

6. Найти наименьшее возможное значение периметра параллелограмма с острым углом 30° и площадью 4 см^2.

7. Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются под прямым углом, сумма их длин равна 8 см. Каково наибольшее возможное значение площади четырехугольника?

8. Две вершины прямоугольника лежат на полуокружности, а другие – на диаметре полуокружности радиуса 2 м. Найти наибольшее значение площади прямоугольника.

9. Площадь трапеции, описанной около окружности, равна 8 см^2. Найти радиус окружности, если известно, что сумма длин боковых сторон и высоты трапеции принимает минимально возможное значение.

10. В равнобедренный треугольник с длинами сторон 15, 15 и 18 см вписан параллелограмм наибольшей площади так, что угол при основании у них общий. Найти периметр параллелограмма.

11. В трапеции $ABCD$ на основании $AD = 10$ см, $BC = 6$ см, боковая сторона $AB = 8$ см и перпендикулярна основаниям. Внутри трапеции расположен прямоугольник, у которого одна из сторон лежит на большем основании трапеции. Найти наибольшее значение площади прямоугольника.

12. Рассматриваются всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R, такие, при которых центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\frac{\sqrt{3}}{7}$. Найти боковую сторону той трапеции, которая имеет наибольшую площадь.

13. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол φ. При каком значении φ объем конуса будет наибольшим? Чему равен этот объем?

14. В полушар радиуса R вписан конус так, что вершина его находится в центре полушара. Найти радиус основания конуса, при котором его объем будет максимальным.

15. Конус объема V описан около шара. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Найти объем шара. При каком значении α объем будет наибольшим?

16. В прямой круговой конус с радиусом основания R вписан шар радиуса r. Через вершину конуса проведена плоскость, пересекающая этот шар. Найти площадь сечения конуса этой плоскостью, если известно, что эта площадь имеет наибольшее из всех возможных значений.

17. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро равно c. Проводится сечение пирамиды плоскостью, параллельной: а) двум скрещивающимся ребрам этой пирамиды; б) стороне основания и скрещивающейся с ней апофеме. Найти площадь сечения, если известно, что она имеет наибольшее возможное значение.

18. В правильную треугольную пирамиду с высотой H и плоским углом при вершине α вписана правильная треугольная призма так, что вершины нижнего основания лежат на основании пирамиды, а вершины верхнего – на боковых ребрах пирамиды. Найти высоту той призмы, которая имеет наибольший объем.

19. В шар радиуса R вписан конус: а) наибольшего возможного объема; б) наибольшей площади полной поверхности. Найти высоту этого конуса.

20. В конус, осевым сечением которого является равносторонний треугольник, вписан цилиндр наибольшего объема. Найти отношение высоты этого цилиндра к радиусу основания цилиндра.

21. Периметр осевого сечения конуса равен P. Найти угол при вершине осевого сечения конуса, при котором объем конуса максимален.

22. Дан цилиндр объема V. Определить его высоту и радиус основания, при котором периметр осевого сечения цилиндра имеет наименьшее значение.

23. Найти наименьшее значение объема четырехугольной пирамиды, радиус вписанного шара у которой равен R.

24. Найти наибольшее возможное значение, которое может принимать объем правильной четырехугольной пирамиды, вписанной в сферу радиуса R.

25. В правильной треугольной пирамиде ее высота образует с одной из боковых граней угол β. Радиус шара, вписанного в эту пирамиду равен 3. Определить площадь боковой поверхности пирамиды и то значение β, при котором эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

26. Основанием пирамиды $SKLMN$ является квадрат $KLMN$. Известно, что $LN = 2\sqrt{2}$. Расстояния SE и SF (E и F – середины ребер KN и LM) равны 3, а проекция вершины 5 на плоскость основания пирамиды находится внутри квадрата $KLMN$. Найти объем пирамиды, если известно, что вершина удалена от середины MN на расстояние m. При каком значении m этот объем наибольший?

27. Внутри правильной четырехугольной пирамиды с ребром основания 4 и высотой 6 расположена треугольная пирамида так, что вершины ее основания лежат на сторонах квадрата основания четырехугольной пирамиды. Известно, что в основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 45° при его вершине. Найти наименьшее возможное в этих условиях значение объема треугольной пирамиды, если ее высота не меньше 3.

28. Внутри правильной четырехугольной пирамиды расположена треугольная пирамида так, что плоскости их оснований совпадают. Ребро основания четырехугольной пирамиды равно 9, а ее высота равна $9\sqrt{2} + 3$. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема треугольной пирамиды, если одна из сторон треугольника ее основания равна 6.

29. Внутри правильной треугольной пирамиды с ребром основания a и высотой $\sqrt{2}\, a$ расположены два шара так, что их центры лежат на высоте пирамиды. Первый шар касается внешним образом второго шара и основания пирамиды, а второй шар касается боковых граней пирамиды, при этом сумма площадей поверхностей шаров имеет наименьшее возможное значение. Найти расстояние между центрами шаров.

30. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 5. Высота пирамиды равна 1. Через вершину пирамиды параллельно диагонали основания проведено сечение, площадь которого принимает максимально возможное значение. Найти объем отсекаемой этой плоскостью треугольной пирамиды.

31. Боковая грань RSP правильной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания PQR угол α, высота SO пирамиды имеет длину h. На ребре SQ взята точка B так, что сумма расстояний от нее до точек P, Q_y R и вершины S пирамиды имеет наименьшее возможное значение. Найти длину отрезка BS.

32. Внутри правильной четырехугольной пирамиды с ребром основания 1 и высотой 18 расположена треугольная пирамида так, что вершины ее основания лежат на сторонах квадрата основания четырехугольной пирамиды. Известно, что в основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник с углом 30° при вершине. Найти наибольшее возможное при этих условиях значение объема треугольной пирамиды.

33. В основании треугольной пирамиды $SABC$ с высотой $\frac{1}{3}\sqrt{30}$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 8. Вершина пирамиды S проектируется на основание в точку D, расположенную на середине ребра AB. Через вершину S проводятся сечения пирамиды плоскостями, параллельными AB. Найти наибольшее возможное значение площади сечения.

34. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S сторона основания равна 3, а высота – $\sqrt{78}$. В пирамиде $SABC$ параллельно ребрам AC и SB проведена секущая плоскость. Найти максимально возможное при этих условиях значение объема пирамиды, основанием которой служит данное сечение, а вершина расположена в точке A.

35. В правильную треугольную пирамиду вписаны два шара так, что первый касается основания пирамиды и ее боковых ребер, а второй шар касается внешним образом первого шара и боковых граней пирамиды. Радиус первого шара равен R. Найти радиус второго шара, если объем пирамиды при этих условиях является минимально возможным.

36. В основании правильной пирамиды лежит шестиугольник со стороной 7. Высота пирамиды равна 3. Через вершину пирамиды параллельно ребру основания проведена плоскость так, что площадь сечения имеет наименьшее возможное значение. Найти объем, отсекаемый этой плоскостью четырехугольной пирамиды.

37. В правильной четырехугольной пирамиде с ребром основания a боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. В пирамиде расположен конус так, что его вершина находится в центре основания пирамиды, а окружность основания конуса касается всех боковых граней пирамиды, причем объем конуса при этих условиях максимально возможный. Найти радиус шара, касающегося боковой поверхности конуса и всех боковых граней пирамиды.

38. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC, а все боковые ребра пирамиды равны d. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол β. Через ребро BC проведена плоскость, пересекающая отрезок SA.Определить площадь образовавшегося сечения пирамиды, если известно, что эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

39. В правильной треугольной пирамиде с ребром основания a и углом наклона бокового ребра к плоскости основания α проводятся сечения плоскостями, перпендикулярными боковому ребру. Найти максимальное возможное значение площади сечения.

ОТВЕТЫ

Тема I

1. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

3. 15 см; $6\sqrt{3}$ см.

4. 2 см; $\sqrt{3}$.

5. $\sqrt{2}$; 45°.

6. $2\sqrt{2}$; 30°.

7. 1) 3; 2) 7; 3) 11; 4) 17; 5) 29.

8. 13 м; 9 м.

9. 22 см.

10. 4,5 см.

11. 24 $м^2$

12. 1) 29 см; 2) $11\frac{1}{2}$ дм.

13. 1464 $см^2$.

14. 6 см; 14 см; 16 см.

15. 5940 руб.

16. 188 $м^2$.

17. 4 м.

18. 9 $м^2$; 1 м.

19. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

20. 54.

21. $\sqrt{2}$.

22. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

23. $2b^2\sin 2\beta(\cos\alpha/2 + \sin\alpha/2)$.

24. 3.

25. $\sqrt{5}$.

26. $\frac{a^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}\right)$.

27. 576 $см^2$.

28. 27 $м^3$.

29. 24 $м^2$.

30. 6 см.

31. 3 см.

32. 2.

33. 30 м.

34. 4500 $см^2$.

35. 6 $м^3$.

36. 360 $см^3$.

37. 3 $м^3$.

38. 48 $см^3$.

39. 12 $см^3$.

40. 45 $см^3$.

41. 4.

42. 144.

43. 13.

44. $2\sqrt{3}$.

45. $8(\sqrt{2}-1)$ см.

46. 480 $см^3$.

47. $\frac{ba^2\sin\alpha\sqrt{\cos^2\alpha/2-\cos^2\varphi}}{\cos\alpha/2}$.

48. $126\sqrt{2}$.

49. 392.

50. $\frac{1}{2}a^2\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$.

51. 9 см.

52. 3 см.

53. 12 см.

54. 288 $см^2$.

55. 1,8 м; 4 м.

56. $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$.
57. 16 и 6 см или 12 и 8 см.
58. 26 см^2.
59. 768 см^2.
60. 540 см^2.
61. 10 см^2.
62. $\dfrac{a^2(6+\sqrt{7})}{2}$.
63. $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{15})}{4}$.
64. 32 м^3.
65. 7 см.
66. $\dfrac{1}{24}a^2\sqrt{2}$.
67. $\dfrac{a^3}{12}$.
68. $\dfrac{h^3\sqrt{3}}{3}$.
69. $\dfrac{3a^3}{4}$.
70. 360 м^3.
71. 420 см^3.
72. 60 см^3.
73. 500 см^3.
74. $\dfrac{1}{6}abc$.
75. 4 м^3.
76. 80 см^3.
77. а) 288; б) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
78. $\dfrac{\sqrt{47}}{24}$ см^3.
79. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
80. 12.
81. $\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{3V\operatorname{ctg}\alpha}{2}}}{\cos\alpha}$.
82. 81.
83. $32(\sqrt{7}+1)$.
84. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.
85. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{2h}{\sqrt{l^2-h^2}}$;
б) $2\arcsin\dfrac{2l}{\sqrt{l^2+3h^2}}$.
86. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{4b^2-2a^2}}{a}$;
б) $2\arcsin\dfrac{b}{\sqrt{2b^2-a^2/2}}$.
87. $\dfrac{1}{6}S^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\varphi$.
88. $4S(1+\cos\varphi)$.
89. $4q$.
90. $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\right)$.
91. 4.
92. 32.
93. $\dfrac{d^2}{2\operatorname{tg}\alpha/2\cos\beta}$.
94. $60\dfrac{3}{8}$.
95. 108.
96. $6\sqrt{105}$ и $134\operatorname{tg}\alpha$ или
$2\sqrt{105}$ и $\dfrac{143}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

97. $6\sqrt{247}$.

98. $\dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

99. $\dfrac{S\cos\alpha}{2\sin\alpha+1}$.

100. $\dfrac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$; $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\beta)$;

$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}(\sqrt{4\operatorname{tg}^2\beta+1}+\operatorname{tg}\beta)$.

101. 10 см^2.

102. 504.

103. $\dfrac{S}{3}\sqrt[4]{4\cdot S_1S_2}$.

104. 9 см.

105. 1 дм.

106. 56 см; 24 см.

107. 2 см.

108. 168 м^2.

109. 54 дм^2.

110. 36 см^2.

111. 1920 см^2.

112. $10\dfrac{1}{3}$ м^3.

113. 2325 м^3.

114. 1900 м^3.

115. $\dfrac{a^3-b^3}{2}$.

116. 98 см^2.

Тема II

1. а) 5 м; б) 12 м^2; в) 12π м^2; г) 20π м^2.

2. $\dfrac{\pi Q}{4}$.

3. 3 дм.

4. $40\sqrt{3}$ см^2.

5. 4 см; 14 см.

6. $12{,}87\pi\approx 40{,}5$ м^2.

7. $2\pi ab$.

8. π^2.

9. πh^2.

10. R.

11. πQ.

12. π.

13. 6 см.

14. $\pi M+2Q$.

15. 15 дм.

16. а) 24π см^3; б) $\dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см; в) 2 см.

17. а) $2a^2$; б) $2\pi a^2$; в) $4\pi a^2$; г) πa^3.

18. $4\pi\sqrt{2}$.

19. В 2 раза; в n раз.

20. В $\sqrt{2}$ раза; в $\sqrt{n}$ раз.

21. $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{1}{8}$.

22. $\dfrac{SC}{4\pi}$.

23. 15.

24. 64π.

25. 80 см^2.

26. 16.

27. 800.

28. 5 м.

29. $L/2$.

30. $\dfrac{1}{4}\pi R^2$.

31. R^2.

32. $100\sqrt{2}$ см^2.

33. 1) 80π; б) 144π; в) 128π.

34. 1) 15π; б) 24π; в) 12π.
35. $\approx 25{,}4$ м^2.
36. ≈ 38 листов.
37. $216°$.
38. 1 м.
39. 0,3456 м.
40. 9π м^3; $9\pi(1+\sqrt{2})$ м^2.
41. 12π см^2.
42. 96π см^2.
43. 200π м^2.
44. 24π см^3.
45. $\pi a^2\sqrt{3}$; $\dfrac{1}{4}\pi a^3$.
46. 448π см^3; 216π см^2.
47. 66.
48. 6.
49. 1.
50. 2.
51. $\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{d}{1-\cos\varphi}\right)^3\sin^2\varphi\cos\varphi$.
52. 1 : 2.
53. 12π.
54. $\dfrac{7}{27}$.
55. $2\operatorname{arctg}\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
56. 2π.
57. $\pi/3$.
58. 200.
59. 5 м.
60. $R-r$.
61. 20 см.
62. 30 дм^2.
63. 9 м^2.
64. 9 и 16.
65. 35π дм^2.
66. $2\pi(R^2-r^2)$.
67. 100π см^2.
68. 15 м.
69. 28 дм; 12 дм.
70. 5 см.
71. $\dfrac{1}{3}\pi(R^2-r^2)$.
72. 63π.
73. 8 см.
74. 7 см.
75. 54 см^3
76. а) $(x-3)^2+y^2+z^2$; б) точка B – да, точка C – нет.
77. $x^2+(y+0{,}5)^2+z^2=17$.
78. а) 144π см^2; 288π см^3;
б) 16π дм^2; $\dfrac{32}{3}\pi$ дм^3;
в) 8π м^2; $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi$ м^3;
г) 48π см^2; $32\sqrt{3}\pi$ см^3.
79. а) 64π см^2; $\dfrac{256}{3}\pi$ см^3;
б) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}\pi}$ см; $\sqrt[3]{36\pi}$ см^2;
в) 4 см; $\dfrac{256}{3}\pi$ см^3.
80. 36 м^2.
81. $\dfrac{9}{\sqrt{\pi}}$ см.
82. 562,5 м^3.
83. Увеличится: в 16 раз и 64 раза; в 25 раз и 125 раз.
84. 10 м.
85. 900π см^2.

86. а) 80π см^2; б) $\sqrt{\frac{12}{\pi}+4}$ см.

87. 1600π дм^2.

88. 6 см.

89. 216.

90. 45π см^3 и 243π см^3.

91. $\sqrt{\frac{5}{\pi}}$ см.

92. $6\sqrt{3}$ см.

93. 176.

94. 4.

95. 4.

96. $\frac{1}{3}\pi R^3$.

97. $112{,}5\pi$ дм^3.

98. 58500π см^3 или 504000π см^3.

99. 400π м^2 или 1100π м^2.

Тема III

1. а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10}}{3}$;

г) $\frac{1}{\cos\alpha}$ при $\alpha \in (0;\ 45°]$;

$\frac{1}{\sin\alpha}$ при $\alpha \in (45°;\ 90°]$.

2. а) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ и $1-\frac{1}{2\sqrt{3}}$;

б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $1-\frac{1}{\sqrt{5}}$;

в) при $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow S_1 = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{2}$ и

$S_2 = 1-\frac{\mathrm{tg}\alpha}{2}$;

при $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow S_1 = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{2}$ и

$S_2 = 1-\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{2}$;

3. а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{2}$; в) при

$\alpha \in \left(0;\mathrm{arctg}\frac{2}{3}\right] \Rightarrow S = \frac{3}{\cos\alpha}$,

при

$\alpha \in \left(\mathrm{arctg}\frac{2}{3};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{2}{\sin\alpha}$.

4. а) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $6-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) 2 и 4;

в) при $\alpha \in \left(0;\mathrm{arctg}\frac{2}{3}\right] \Rightarrow$

$V_1 = \frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha$ и $V_2 = 6-\frac{3}{2}\mathrm{tg}\alpha$;

при $\alpha \in \left(\mathrm{arctg}\frac{2}{3};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$V_1 = 2\mathrm{ctg}\alpha$ и $V_2 = 6-2\mathrm{ctg}\alpha$.

5. $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$.

6. $\frac{35}{24}a^2$.

7. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

8. а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3}$;

в) при $\alpha \in \left(0;\mathrm{arctg}\sqrt{2}\right] \Rightarrow$

$V_1 = \frac{\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha}{12}$ и $V_2 = 1-\frac{\sqrt{2}\mathrm{tg}\alpha}{12}$,

при $\alpha \in \left(\mathrm{arctg}\sqrt{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$V_1 = \frac{3 - 3\sqrt{2}\text{ctg}\alpha - 2\text{ctg}^2\alpha}{6}$$

и $V_2 = 1 - V_1$.

10. $9\sqrt{3}$.

11. 6

12. а) $\frac{3}{7}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{57}}{14}$.

13. а) $\frac{35\sqrt{3}}{36}$; б) $\frac{4}{27}\sqrt{3}$ и $\frac{19}{547}\sqrt{3}$.

14. а) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ и $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

15. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$ и $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

16. $\frac{H^2 \sin\alpha}{4\cos\alpha - 2}$.

17. При $\alpha \in \left(0; \text{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow$

$$S = \frac{1}{\cos\alpha};$$

при

$\alpha \in \left(\text{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{arctg}\sqrt{2}\right] \Rightarrow$

$$S = \frac{2\sqrt{2}\text{ctg}\alpha - 1 - \text{ctg}^2\alpha}{\cos\alpha};$$

при $\alpha \in \left(\text{arctg}\sqrt{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$S = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

18. При $\alpha \in \left(0; \text{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}\right] \Rightarrow$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4\cos\alpha};$$

при $\alpha \in \left(\text{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$S = \frac{2\sqrt{3}}{3\cos\alpha}[\sqrt{3}\text{ctg}\alpha - 2\text{ctg}^2\alpha].$$

19.

При $\beta = \left(0; \frac{H}{2R\cos^2(\varphi/2)}\right] \Rightarrow$

$\frac{2R^2 \sin\varphi \cos^2(\varphi/2)}{\cos\beta}$; при

$\beta = \left(\text{arctg}\frac{H}{2R\cos^2(\varphi/2)}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$$\frac{(2R\sin\varphi - H\text{tg}(\varphi/2)\text{ctg}\beta)H}{\sin\beta}.$$

20. 1,5.

21. $\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}(V\text{ctg}\alpha)^{2/3}$.

22. $\text{arctg}\sqrt{2}$.

23. 152 : 153.

24. 1 : 2.

25. $120\sqrt{3}$ и $558\sqrt{3}$.

26. 28.

27. $15\sqrt{5}$.

28. 1 : 47.

29. 49 : 95.

30. $\frac{7\sqrt{6}}{16}$ или $\frac{103\sqrt{109}}{1152}$.

31. $\dfrac{\sqrt{S}(3+4\cos^2\alpha)}{\sqrt[4]{27}\cdot 8\cos\alpha}$.

32. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$; б) $\dfrac{\sqrt{35}}{36}$.

33. а) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$; б) $\dfrac{7\sqrt{7}}{2}$.

34. $\sqrt{2}$.

35. $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{27\cos\alpha}$.

36. $\dfrac{a^2}{4}$ или $\dfrac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{16}$.

37. а) $\dfrac{3}{16}ab$; б) $\dfrac{5}{27}$.

38. а) $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}h^2\text{ctg}\gamma\sqrt{1+4\text{ctg}^2\gamma}$;

б) $\dfrac{7}{20}$.

39. $\dfrac{ab}{a+b}$ при $a<\dfrac{b}{\sqrt{3}}$.

40. $\dfrac{8}{27}$.

41. 562,5.

42. 3024.

43. $27\sqrt{3}\sin\beta$, $\dfrac{2-3\cos^2\beta}{3\cos^2\beta}$.

44. $\dfrac{12}{13}$.

45. $\dfrac{7}{18}$.

46. $\dfrac{\sqrt{111}}{2}+\sqrt{3}$; $\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$.

47. $\dfrac{a^2\sqrt{12-9\cos^2\varphi}}{12\cos\varphi}$;

$\dfrac{a^2\sqrt{3+9\cos^2\varphi}}{12\cos\varphi}$.

48. $\dfrac{8\sqrt{6}}{25}$.

49. 24; 30°.

50. $\dfrac{2a}{15}\sqrt{16a^2+2h^2}$.

Тема IV

1. 8.

2. $\dfrac{\pi l^3\sqrt{3}}{48}$.

3. $\text{arctg}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

4. $2\text{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. $l\sin\dfrac{\alpha}{2}\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$ и $\dfrac{l}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

6. $\dfrac{27\pi}{10}$.

7. $\dfrac{1}{3}\pi r^3\text{ctg}^3\dfrac{\alpha}{2}\text{tg}\alpha$.

8. 2π.

9. $\dfrac{2}{3}\pi R^3\sin^2\varphi\sin^2\dfrac{\varphi}{2}$.

10. $8Q\text{tg}\varphi\cos^6\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{\dfrac{Q}{\pi}}$.

11. $\dfrac{l^2}{2\sqrt{l^2-R^2}}$.

12. $\dfrac{4\pi H^3}{3}$ или $\dfrac{\pi H^3(\sqrt{5}-1)^3}{6}$.

13. 1,75.

14. $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

15. 6,75.

16. $2\sqrt{5}$.

17. $\sqrt[3]{\dfrac{48V}{\pi}}$.

18. $\dfrac{H}{2}+\dfrac{3V}{2\pi H^2}$.

19. $\dfrac{4\pi R^2}{\sin^2\varphi}$ и

$\dfrac{2}{3}\pi R^3\left(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\varphi}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

20. $\dfrac{3}{4}\pi l^2\sin^2 2\beta$ и

$\dfrac{\pi}{12}l^3\sin^3 2\beta$.

21. $\dfrac{1}{2}a\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha/2}{\sin^2\alpha/4}}$.

22. $\dfrac{\pi R^3}{3}\left[\cos^4\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{cosec}\dfrac{\alpha}{2}-\right.$

$\left.-\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$.

23. $2\pi R^2\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

24. $\dfrac{\pi R^2\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha}$.

25. $\dfrac{24\pi R^2\sin^4\alpha}{(2+\operatorname{tg}\alpha)^2}$.

26. $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$ и $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

27. $\dfrac{b}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

28. $\dfrac{2\sqrt{3}a\sqrt{3b^2-a^2}}{6(a+\sqrt{3}\sqrt{4b^2-a^2})}$

и $\dfrac{\sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$.

29. $\dfrac{\sqrt{2}a\sqrt{2b^2-a^2}}{2(a+\sqrt{4b^2-a^2})}$

и $\dfrac{\sqrt{2}b^2}{2\sqrt{2b^2-a^2}}$.

30. $\dfrac{\pi\sqrt{2}m^2\operatorname{tg}^3\alpha(1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha)}{2(1+2\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

31. $\dfrac{a(1+\cos^2\alpha)}{2\sin 2\alpha}$.

32. $\dfrac{a}{6}\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha/2}{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha/2}}$.

33. $\dfrac{a^4}{12V}+\dfrac{3V}{2a^2}$.

34. 4.

35. $2h(2R-h)$.

36. $\dfrac{4r^3(1+\operatorname{tg}\alpha/2)}{3(1+\operatorname{tg}\alpha/2)^2}$.

37. $\dfrac{4}{3}R^3\sin^2\alpha\sin 2\alpha$.

38. $\dfrac{3\pi l^2}{1+2\cos\alpha}$.

39. $\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ и $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

40. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

41. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{1728}$.

42. $\dfrac{32r^3\sqrt{\cos\alpha}}{3\sin\alpha/2}$.

43. $2\pi\left(\dfrac{ah}{2(a+h\sqrt{3}}\right)^3$.

44. $\dfrac{\pi a^2}{6}\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\dfrac{\varphi}{2}$.

45. $\dfrac{\sqrt{269}}{2}$.

46. $\dfrac{\pi a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{9\sqrt{3}}$.

47. $\dfrac{l\cos^2\alpha\sqrt{3+\cos^2 2\alpha}}{2\sin\alpha}$ **.**

48. $\dfrac{2V}{\pi}\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha$.

49. $\dfrac{1}{12}ab\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{tg}\alpha$.

50. $\dfrac{\pi l^2\cos\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$.

51. $\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$.

52. 5.

53. $\dfrac{3\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}$.

54. $\dfrac{a\sqrt{2}\,|\,\mathrm{ctg}2\beta\,|}{2\sqrt{1+2\mathrm{tg}^2\beta}}$.

55. $\dfrac{l\sqrt{2}\,|\,1-3\mathrm{tg}^2\varphi/2\,|}{2\sqrt{20+\mathrm{tg}^2\varphi+36\mathrm{ctg}^2\varphi}}$.

56. $\arccos\dfrac{7}{13}$.

57. $\dfrac{l^2\sqrt{2}}{12}$.

58. $\dfrac{a^3}{6}\sqrt{2\sqrt{2}+2}$ **.**

Тема V

1. $\dfrac{8R}{3\sqrt{3}}$.

2. $\dfrac{3}{2}h$.

3. $a\left(1+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$.

4. 20 см.

5. $4(\sqrt{2}-1)$.

6. $8\sqrt{2}$.

7. 8 см^2.

8. 4 см^2.

9. 2 см.

10. 33 см.

11. 48 см^2.

12. $\dfrac{R}{14}\sqrt{2527}$.

13. $\mathrm{arcctg}\sqrt{2}$.

14. $R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

15. $\dfrac{4V\mathrm{tg}^3\alpha/2}{\mathrm{tg}\alpha}$, $\alpha=\arccos\dfrac{1}{3}$.

16. При $R\in(r,(1+\sqrt{2})r]\Rightarrow$

$$S=\frac{2rR^3}{R^2-r^2};$$

при $R\in((1+\sqrt{2})r;+\infty)\Rightarrow$

$$S=\frac{R^2}{2}\left(\frac{R^2+r^2}{R^2-r^2}\right)^2.$$

17. а) $\frac{ac}{4}$; б) $\frac{a}{12}\sqrt{16c^2-5a^2}$.

18. $\frac{H}{3}$.

19. а) $\frac{4R}{3}$; б) $\frac{23-\sqrt{17}}{16}R$.

20. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. $2\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$.

22. $h=r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

23. $\frac{32}{3}R^3$.

24. $\frac{64}{81}R^3$.

25. $27\sqrt{3}\frac{1+\sin\beta}{\sin\beta(1-\sin\beta)}$ при

$$\beta=\arcsin(\sqrt{2}-1).$$

26. $\frac{2\sqrt{18m^2-m^4-49}}{3}$

при $m=3$.

27. $4\sqrt{2}$.

28. 153.

29. $\frac{\sqrt{2}a}{5}$.

30. 1,5.

31. При $\alpha\in(0;\mathrm{arctg}2]\Rightarrow BS=0$;

при $\alpha\in(\mathrm{arctg}2;\pi/2]\Rightarrow$

$$BS=\frac{h(\mathrm{tg}^2\alpha-2)}{\mathrm{tg}\alpha\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

32. 2.

33. $\frac{7\sqrt{105}}{9}$.

34. $\frac{9\sqrt{26}}{16}$.

35. $\frac{R(\sqrt{33}-1)}{16}$.

37. $\frac{a\sin\alpha}{2+\sqrt{4-3\sin^2\alpha}}$.

38. При $\beta\in(0;\mathrm{arctg}\sqrt{2}]\Rightarrow$

$$S=\frac{d^2\sqrt{3}}{\cos\beta(4+\mathrm{tg}^2\beta)};$$

при $\beta\in(\mathrm{arctg}\sqrt{2};\pi/2]\Rightarrow$

$$S=\frac{3\sqrt{3}d^2\mathrm{tg}\beta}{(\sqrt{4+\mathrm{tg}^2\beta})^3}.$$

39. При $\alpha\in(0;\arccos\sqrt{2/3}]\Rightarrow$

$$S=\frac{a^2\sin\alpha}{3\sqrt{3}\cos^4\alpha};$$

при $\alpha\in(\arccos\sqrt{2/3};\pi/2)\Rightarrow$

$$S=\frac{a^2\sqrt{3}\sin\alpha}{4}.$$