Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

# Множества

*(индивидуальная работа № 1*

*по дисциплине «Дискретная математика»)*

*Учебно-методическое пособие*

2-е издание, исправленное и дополненное

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 514(072)
ББК В126я73
Р82

*Рекомендовано*
*Редакционно-издательским советом университета*
*в качестве учебного издания. План 2018 года*

Рецензент:
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

**Рублев, Вадим Сергеевич**.
Р82 Множества : (индивидуальная работа № 1 по дисциплине «Дискретная математика») : учебно-методическое пособие / В. С. Рублев ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2018. – 53 с.

Пособие содержит варианты индивидуального задания по теме “Множества” (дисциплина «Дискретная математика»), а также необходимый материал для ее самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, примеры, иллюстрации, обоснования, а также методические рекомендации для выполнения индивидуального задания.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине «Дискретная математика».

УДК 514(072)
ББК В126я73

# Оглавление

# 1. Цель работы

1. Умение выражать формулой искомое множество через исходные множества при помощи операций над ними.

2. Умение использовать алгебру множеств для упрощения формул.

3. Умение наглядно изображать множества и их части с помощью диаграмм Венна.

4. Умение использовать формулу *включений и исключений* для вывода формулы, определяющей количество элементов множества.

5. Умение делать шаг вывода при проведении доказательства.

6. Умение использовать прямой и косвенный методы доказательства для обоснования утверждения относительно отношений множеств.

# 2. Общее задание

Задание по теме *Множества* содержит 2 задачи. Их решение предполагает последовательное выполнение (в отдельной тонкой тетради) варианта индивидуального задания, выданного студенту, по следующим требованиям к каждой задаче:

1. *Ввести обозначения множеств* утверждения 1-й задачи и *упростить* их формулы по мере возможности, используя алгебру множеств. Провести *доказательство* утверждения задачи, разделив его на отдельные части. Построить *диаграммы Венна* для множеств, входящих в утверждение задачи, для случаев выполнения условий утверждения и каждого случая невыполнения условий. Разные исходные множества выделить штриховкой, а образованные ими множества или их части выделить различными цветами с пояснениями. Построить *примеры с множествами из целых неотрицательных чисел* для случаев *выполнения условий* утверждения и каждого случая *невыполнения условий*, определив все множества примера и показав вычисление по частям.

2. Ввести *обозначения исходных множеств*, заданных во 2-й задаче, и *вывести формулу для искомого* в задаче множества через исходные множества. Построить *диаграмму Венна* для всех указанных в задаче множеств и выделить их штриховкой, цветом с пояснениями. Основываясь на формуле включений и исключений для множеств, *вывести формулу для числа элементов* искомого множества через количество элементов заданных множеств и только после этого *найти число* его элементов.

## 3. Определение множества

В *наивной* (неаксиоматической) теории множеств, созданной в конце XIX века Георгом Кантором, понятие множества считается изначально заданным. Г. Кантор определял множество как “*многое, мыслимое нами как целое*”.

В следующем общепринятом определении

> ***Множество*** *есть* ***совокупность объектов****, различаемых нашей интуицией или мыслью*

подчеркивается, что множество есть структура, состоящая из *элементов* (объектов) множества, никакие связи между которыми (например, порядок) не определены.

В следующих примерах: *стадо коров, совокупность решений уравнения, совокупность предметов в комнате* – множествами являются *стадо, совокупности*, а их элементами могут быть как однородные объекты (*коровы, решения*), так и неоднородные объекты (*стол, ковер, картина*). Каждый элемент обычно входит во множество лишь 1 раз[1].

Принято множество заключать в фигурные скобки, внутри которых либо идет перечисление элементов множества, либо задается свойство, накладываемое на все элементы множества. Так, в примерах

***Стадо*** = {*буренка, чернушка, милка*},

$\boldsymbol{X} = \{x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$,

[1] В некоторых случаях мы будем определять множества с повторяющимися элементами.

***ПредметыКомнаты*** $=$ {*стол, ковер, картина*}
определение свойством элементов используется во втором примере, задающем множество $\boldsymbol{X}$ решений уравнения $x^2+x-6=0$, а определение перечислением элементов – в первом и третьем.

В дальнейшем множества мы будем обозначать прописными (большими) буквами латинского и русского алфавитов (или именами, начинающимися с прописной буквы), а элементы множества – строчными (малыми) буквами этих алфавитов (или именами, начинающимися со строчной буквы). Принадлежность элемента множеству выражается *отношениями принадлежности*: $\in$ – принадлежит и $\notin$ – не принадлежит. Так, для вышеприведенных примеров: $2 \in X$, $3 \notin X$, *милка* $\in$ ***Стадо***, *стрелка* $\notin$ ***Стадо***. Понятие *принадлежности* является вторым неопределяемым понятием.

Отметим, что каждый элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству, т. е.

> ***не существует элемента, одновременно принадлежащего и не принадлежащего одному и тому же множеству.***

Предположение о существовании такого элемента является ***противоречием***, т. е. неверно.

## 4. Отношения между множествами

Принадлежность элемента множеству определяется отношением принадлежности между элементами и множествами. К отношениям между множествами прежде всего относится *отношение равенства множеств*:

> *Множества $A$ и $B$ равны ($A = B$) тогда и только тогда, когда любой элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$ и любой элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$.*

Например, если $Y = \{-3, 2\}$, то $X = Y$, так как только элементы $-3$ и 2 являются корнями уравнения $x^2 + x - 6 = 0$.

Иным способом определения равенства множеств служит следующее:

*Не существует элемента множества $A$, не принадлежащего множеству $B$, а также не существует элемента множества $B$, не принадлежащего множеству $A$.*

Отношение равенства множеств есть отношение эквивалентности:

1) отношение рефлексивно: любое множество равно самому себе;

2) отношение симметрично: из $A = B$ следует, что $A$ и $B$ состоят из одних и тех же элементов, а потому $B = A$;

3) отношение транзитивно: если $A = B$ и $B = C$, то $A, B, C$ состоят из одних и тех же элементов, а потому $A = C$.

Отметим, что выполнение равенства трех множеств $A = B = C$ означает выполнение двух отношений $A = B$ и $B = C$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым множеством.* Поскольку из определения равенства множеств следует, что все пустые множества равны, то тем самым пустое множество определяется однозначно свойством отсутствия элементов. Пустое множество обозначается знаком $\emptyset$.

Под отношением неравенства множеств будем понимать отрицание отношения равенства множеств, т. е. $A \neq B$, когда между ними нет отношения равенства:

*найдется элемент множества $A$ ($\exists a \in A$), который не принадлежит $B$ ($a \notin B$), либо найдется элемент множества $B$ ($\exists b \in B$), который не принадлежит $A$ ($b \notin A$).*

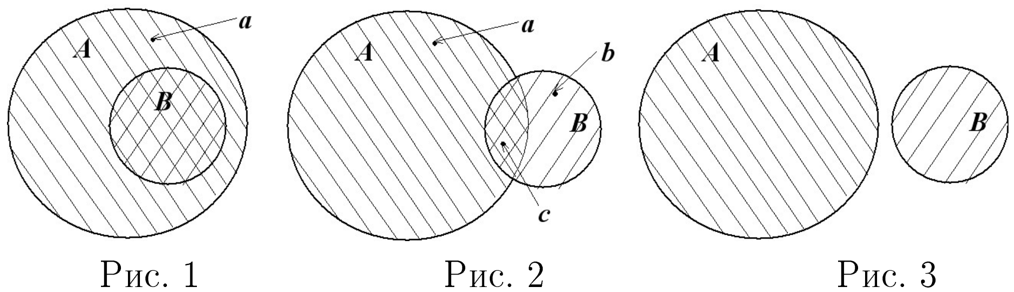


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Рис. 1-3 иллюстрируют неравенство множеств с помощью диаграмм

Венна. При этом рис. 1 показывает случай, когда существует элемент, принадлежащий одному множеству и не принадлежащий второму, но не наоборот. Рис. 2 демонстрирует случай, когда каждое множество имеет элемент, не принадлежащий другому множеству, а на рис. 3 изображены 2 множества, все элементы каждого из которых не принадлежат другому множеству. Взаимное расположение множеств на рис. 2 является *общим случаем* в отличие от *частных случаев* расположения на рис. 1 и 2. *При разработке диаграммы Венна нескольких множеств следует стремиться к их расположению в общем случае, если иное не диктуется условиями диаграммы.*

Отношение множеств $A$ и $B$, в котором все элементы множества $A$ принадлежат множеству $B$, называется *отношением включения* и изображается при помощи *знака включения* (нестрогого): $A \subseteq B$. В этом случае множество $A$ называют *подмножеством* множества $B$. Пустое множество $\emptyset$ всегда является подмножеством любого множества. Также само множество является своим подмножеством. Эти 2 особых подмножества называются *несобственными подмножествами*. Любое другое подмножество $A$ множества $B$ называется *собственным*, и для такого отношения в некоторых случаях употребляется *знак строгого включения* $A \subset B$.

Теперь можно сформулировать следующий еще один критерий равенства множеств:

> *Для равенства множеств $A = B$ необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств было подмножеством другого множества* ($A \subseteq B$ и $B \subseteq A$).

Действительно, если $A = B$, то по определению любой элемент из $A$ принадлежит $B$ и, значит, $A \subseteq B$, а также любой элемент из $B$ принадлежит $A$ и, значит, $B \subseteq A$.
Обратно, из $A \subseteq B$ следует, что любой элемент из $A$ принадлежит $B$, а из $B \subseteq A$ следует, что любой элемент из $B$ принадлежит $A$ и, значит, $A = B$.

Этим критерием пользуются для доказательства равенства двух множеств: доказывают $\forall x(x \in A \ \rightarrow \ x \in B)$ (читается *для любого $x$, если $x$ принадлежит $A$, то $x$ принадлежит $B$*), а затем в другую сторону $\forall x(x \in B \ \rightarrow \ x \in A)$.

## 5. Операции над множествами

Часто в задачах рассматриваются подмножества некоторого множества, которое принято называть *универсальным.* В тех случаях, когда такое множество явно не задается, можно в качестве универсального множества взять объединение рассматриваемых множеств одной природы, т. е. состоящих из элементов одного типа. Поэтому мы будем считать, что рассматриваются подмножества некоторого универсального множества $U$. С помощью операций над множествами одной природы можно получать другие множества, являющиеся либо частями (подмножествами) первых, либо объемлющие первые, либо дополняющие первые в универсальном множестве. Рассмотрим 3 наиболее употребительных операции над множествами: *объединение, пересечение, дополнение.*

***Объединением*** *множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого является либо элементом множества $A$, либо элементом множества $B$:*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Символ $\vee$ является знаком логической операции «*или*», и формула определения множества объединения читается так: множество $A \cup B$ состоит из тех элементов $x$, каждый из которых принадлежит множеству $A$ *или* принадлежит множеству $B$. На рис. 2 приведена диаграмма Венна для множеств $A$ и $B$, объединению $A \cup B$ принадлежит множество точек обоих кругов. Элемент $a$ объединения принадлежит только множеству $A$, элемент $b$ принадлежит только множеству $B$, а элемент $c$ объединения принадлежит как $A$, так и $B$. Каждый элемент $A$ и $B$ входит в объединение $A \cup B$ 1 раз.

Операция объединения является *коммутативной*

$$A \cup B = B \cup A$$

и *ассоциативной*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Это дает возможность включать в объединение произвольное число множеств, не определяя порядок выполнения операций объединения. Например,

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

***Пересечением*** *множеств $A$ и $B$ называется множество $A \cap B$, каждый элемент которого является как элементом множества $A$, так и элементом множества $B$:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Символ $\wedge$ является знаком логической операции «*и*», и формула определения множества пересечения читается так: множество $A \cap B$ состоит из тех элементов $x$, каждый из которых принадлежит множеству $A$ *и* принадлежит множеству $B$. На рис. 2 приведена диаграмма Венна для множеств $A$ и $B$, пересечение $A \cap B$ состоит из заштрихованной дважды области точек, принадлежащей обоим кругам. Элемент $a$ принадлежит только множеству $A$ и не принадлежит пересечению $A \cap B$, элемент $b$ принадлежит только множеству $B$ и не принадлежит пересечению $A \cap B$, а элемент $c$ пересечения принадлежит как $A$, так и $B$. Каждый элемент входит в пересечение $A \cap B$ 1 раз.

Операция пересечения является *коммутативной*

$$A \cap B = B \cap A$$

и *ассоциативной*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Это дает возможность включать в объединение произвольное число множеств, не определяя порядок выполнения операций пересечения. Например,

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Имеет место также *дистрибутивность* пересечения относительно объединения

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

и *дистрибутивность* объединения относительно пересечения

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

***Дополнением*** *множества $A$ (до универсального множества $U$) называется множество $\overline{A}$, составленное из элементов множества $U$, не принадлежащих множеству $A$*

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \ \wedge \ x \notin A\}.$$

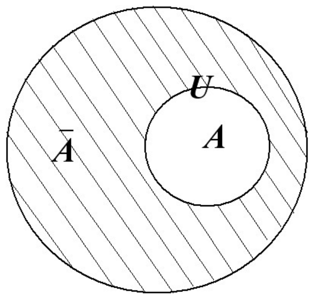


Рис. 4

Рис. 4 иллюстрирует на примере кругов Эйлера множество $A$ и его дополнение $\overline{A}$, представленное заштрихованной внешностью круга множества $A$ внутри круга множества $U$. Свойства дополнения множества определяются следующей теоремой о дополнении.

**Теорема о дополнении**. Для любого универсального множества $U$ и любого его подмножества $A$ выполняются следующие свойства дополнения $\overline{A}$:

1) $\overline{\overline{A}} = A$;

2) $A \cap \overline{A} = \emptyset$;

3) $A \cup \overline{A} = U$.

Для операций пересечения, объединения и дополнения справедливы следующие законы двойственности (де Моргана):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

***Разностью*** *множества $A$ и множества $B$ называется множество $A \setminus B$, составленное из элементов множества $A$, не принадлежащих множеству $B$:*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

Если $A$ – универсальное множество, то $A \setminus B = \overline{B}$. Для разности множеств справедливо следующее соотношение:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

## 6. Алгебра множеств

Введенные операции объединения, пересечения и дополнения для множеств образуют алгебру множеств, в которой пустое множество играет похожую роль, как нуль в арифметике, а универсальное множество – похожую роль, как единица в арифметике. Так же, как выражения над числами можно преобразовывать, используя законы алгебры чисел, выражения над множествами можно преобразовывать, используя законы алгебры множеств. Приведем список уже рассмотренных законов алгебры для ссылок при преобразованиях.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\overline{\overline{A}} = A$ | закон двойного дополнения |
| 2. | $A \cap B = B \cap A$ | коммутативность пересечения |
| 3. | $A \cup B = B \cup A$ | коммутативность объединения |
| 4. | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | ассоциативность пересечения |
| 5. | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | ассоциативность объединения |
| 6. | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | закон дистрибутивности |
| 7. | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | закон дистрибутивности |
| 8. | $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | закон двойственности |
| 9. | $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | закон двойственности |
| 10. | $A \cup A = A$ | закон идемпотентности |
| 11. | $A \cap A = A$ | закон идемпотентности |
| 12. | $A \cap U = A$ | |
| 13. | $A \cup \emptyset = A$ | |

14. $A \cup \overline{A} = U$
15. $A \cap \overline{A} = \emptyset$
16. $A \cap \emptyset = \emptyset$
17. $A \cup U = U$

## 7. Методика доказательства утверждений для множеств

Под доказательством полагают *рассуждения по определенным правилам*, обосновывающие на основе предположения о верности исходных утверждений верность некоторого другого утверждения. Правилами, которые могут использоваться в доказательстве, занимается логика, и они называются *элементарными выводами.* В теме *Булевы функции*, связанной с математической логикой, мы познакомимся с установлением правил, которые могут служить элементарными выводами. Пока же мы в доказательстве утверждений для множеств будем использовать несколько очевидных правил, описанных ниже. С каждым *элементарным выводом* связываются исходные утверждения, называемые *посылками*, и выводимое утверждение, называемое *выводом.* При этом в *схеме* доказательства, которая будет описана ниже, проводятся *стрелки* от каждой *посылки* к *выводу.* Например,

$$x \in A \cap B \ \rightarrow \ x \in A \tag{1}$$

или

$$\begin{matrix} x \in A \searrow \\ x \in B \nearrow \end{matrix} x \in A \cap B. \tag{2}$$

Сформулируем несколько общих правил для элементарных выводов.

1. ***Если элемент принадлежит некоторой части множества, то он принадледит и всему множеству***.

   Так, в примерах $x \in A \setminus B \ \rightarrow \ x \in A, \ \ x \in A \ \rightarrow \ x \in A \cup B$ $A \setminus B$ является частью множества $A$ и $A$ является частью множества $A \cup B$.

2. ***Если элемент принадлежит нескольким множествам, то он принадлежит пересечению этих множеств.***

   Пример (2) иллюстрирует это правило.

3. ***Если элемент не принадлежит множеству, то он не принадлежит любой его части.***

   Так, в примере $x \notin A \cup B \;\to\; x \notin A$ множество $A$ является частью множества $A \cup B$, а в примере $x \notin A \;\to\; x \notin A \cap B$ множество $A \cap B$ является частью множества $A$.

4. ***Если элемент не принадлежит нескольким множествам, то он не принадлежит объединению этих множеств.***

   Например,

   $$\left\{ \begin{array}{l} x \notin A \searrow \\ x \notin B \nearrow \end{array} \right. \notin A \cup B,$$

   где фигурная скобка указывает на объединение всех входящих в нее утверждений.

Эти правила лежат в основе большинства элементарных выводов в схеме доказательства утверждений для множеств. **Необходимо следить, чтобы для каждого элементарного вывода было достаточное количество посылок, и притом только необходимых.** Так, например, вывод

$$x \in A \;\to\; x \in A \cap B$$

*некорректен*, так как не содержит все необходимые посылки (*не хватает посылки* $x \in B \;\to \dots$) так же, как и вывод

$$x \notin B \;\to\; x \notin A \cup B$$

(не хватает посылки $x \notin A \;\to \dots$).

В следующем выводе

$$\begin{array}{l} x \in A \searrow \\ x \in B \nearrow \end{array} x \in A \cup B$$

одна из посылок является *лишней*, и, хотя это не делает доказательство некорректным, свидетельствует либо о неаккуратности (невнимательности) студента, либо о непонимании необходимых связей утверждений посылок с утверждением вывода.

При доказательстве утверждений для множеств используется как *прямой*, так и *косвенный* методы доказательства. Пусть, например, необходимо провести доказательства равенства множеств $A$ и $B$. Доказательство равенства $A = B$ разбивается на доказательство двух утверждений: 1) $A \subseteq B$ и 2) $B \subseteq A$.

При прямом методе доказательства одного из утверждений (например, первого из них) необходимо показать, что любой элемент одного множества (множества $A$) принадлежит другому множеству (множеству $B$). Это можно изобразить следующей схемой:

$$\forall x:\ x \in A \to \ldots \to x \in B \to \square,$$

где белый квадрат означает фразу «*что и требовалось доказать*».

При косвенном методе доказательства[2], например, второго утверждения в предположении противного – существует элемент множества $B$, который не принадлежит множеству $A$ – выводится противоречие с предполагаемыми фактами (условиями утверждения). Это можно изобразить следующей схемой:

$$\Cap\ \exists x:\ x \in B \wedge\ x \notin A \to \ldots \to \blacksquare,$$

означающей «*Предположим противное: существует такой элемент x, который принадлежит множеству B и не принадлежит множеству A. Тогда следует ... противоречие*[3]*, которое доказывает неверность предположения.*». Противоречие в общем случае может означать, например,

- существование элемента, который одновременно принадлежит и не принадлежит некоторому множеству,
- или существование элемента, который принадлежит одному из двух равных множеств и не принадлежит второму множеству,
- или существование элемента, который принадлежит некоторому множеству и не принадлежит множеству, включающему предыдущее множество и т. д.

Доказательство состоит из шагов, на каждом из которых производится либо *элементарный вывод*, либо *разбиение* проведения доказательства *на случаи*.

---

[2] Другие названия этого метода: *доказательство от протвного, приведение к абсурду.*

[3] Черный квадрат означает *противоречие.*

Основой для получения элементарных выводов являются следующие 2 соображения:

- если элемент принадлежит части множества, то он принадлежит всему множеству;
- если элемент не принадлежит множеству, то он не принадлежит любой его части.

В процессе доказательства при желании получить некотрый вывод о принадлежности элемента некоторому множеству необходимо рассмотреть все уже имеющиеся утверждения, которые можно использовать в качестве достаточных посылок для элементарного вывода, и исключить из них лишние посылки. Основой при этом является анализ вышеупомянутого отношения множества и его части относительно принадлежности или непринадлежности элемента:

- если элемент *принадлежит множеству вывода* и оно является *частью множества посылки*, то другие посылки должны обеспечить выделение этой части. Например, для разности множеств $x \in A \setminus B$ посылка $x \in A$ необходима, но недостаточна. Надо иметь еще посылку $x \notin B$ или посылку $x \in \overline{B}$, но не обе вместе – одна из них является лишней;
- если элемент *не принадлежит множеству вывода* и оно является *частью множества посылки*, которому также не принадлежит элемент, то уже получен необходимый элементарный вывод. Например, для вывода $x \notin A \setminus B$ посылка $x \notin A$ является уже достаточной для элементарного вывода;
- если элемент *принадлежит множеству посылки* и оно является *частью множества вывода*, то уже получен элементарный вывод. Например, для вывода $x \in A \cup B$ посылка $x \in A$ является достаточной для элементарного вывода, а добавление посылки $x \in B$ является уже лишним;
- если элемент *не принадлежит множеству посылки* и оно является *частью множества вывода*, которому также не принадлежит элемент, то другие посылки также должны обеспечить непринадлежность элемента этому выводу. Например, для вывода $x \notin A \cup B$

посылка $x \notin A$ является необходимой, но недостаточной. Необходимо добавить еще посылку $x \notin B$.

*Разбиение на случаи* производится либо когда посылкой вывода является принадлежность элемента объединению множеств, либо когда для дальнейшего рассматривается альтернатива принадлежности элемента какому-либо множеству. На схеме для наглядности выделение случаев мы будем отмечать альтернативной вертикальной чертой.

1. *Разбиение на случаи: если элемент принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из множеств.* При этом элемент обязательно принадлежит одному из множеств объединения, что выделяет случаи принадлежности элемента. Например,

$$x \in A \cup B \ \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right.$$

Случаи эти необязательно должны быть альтернативными – множества, входящие в объединение, могут иметь непустое пересечение. Но иногда требуется сделать альтернативное разбиение на случаи, при котором после проведения доказательства для одного из случаев может упростить доказательство для других случаев. Это можно сделать разными способами в зависимости от необходимости дальнейших путей проведения доказательства. Например,

$$x \in A \cup B \ \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin A, x \in B \end{array} \right.$$

или

$$x \in A \cup B \ \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \setminus B \\ x \in B \setminus A \end{array} \right.$$

2. *Разбиение на случаи: альтернатива принадлежности элемента какому-либо множеству* производится для того, чтобы разбить дальнейшее доказательство на альтернативные случаи, которые определяются предыдущими посылками в этой ветви доказательства и целью (в конце схемы). Например,

$$\rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in C \rightarrow \\ x \notin C \rightarrow \end{array} \right.$$

Если при прямом методе доказательства для какого-либо случая получается противоречие, то это означает, что такой случай не реализуется в силу других условий утверждения и его можно игнорировать. Если для всех остальных случаев будет проведено доказательство до получения результата, то доказательство будет полным.

Если же при исследовании принадлежности произвольного элемента какому-либо множеству для всех случаев будут получены противоречия, то это означает, что это множество не содержит ни одного элемента, то есть является пустым множеством.

Очень важным является следующее замечание.

> *При проведении доказательства для отдельных случаев* ***нельзя применять*** *вывод, в котором посылки используют* ***разные случаи****. Такой вывод* ***некорректен.***

В качестве итога кратко сформулируем полученную методику доказательства.

1. Разбить доказываемое утверждение на отдельные части, подлежащие доказательству.

2. Для доказываемой части (в дальнейшем – утверждения) выбрать метод доказательства (прямой или косвенный).

3. В начало схемы выбранного метода доказательства утверждения выписать все его исходные посылки.

4. Выписать конец схемы выбранного метода доказательства утверждения.

5. Применить одно из правил вывода, описанных выше, к посылке (или к нескольким посылкам) в начале схемы доказательства.

6. К посылкам, полученным в результате доказательства, применять правила вывода, имея в виду получение в качестве цели результата доказательства в конце схемы или ее части.

7. При разбиении доказательства на случаи получить доказательство для каждого случая, кроме тех, при доказательстве которых получено противоречие, сообщающее о невозможности данного случая.

8. Если для вывода не хватает посылки, то необходимо поискать ее среди исходных посылок или среди уже сделанных выводов в уже полученной ветви доказательства. Если такой посылки нет, то такой вывод делать еще рано и надо постараться вывести сначала такую посылку из уже имеющихся выводов.

Рассмотрим примеры проведения доказательства для утверждений теоремы о дополнении и теоремы двойственности (законы де Моргана).

***Пример 1.*** $\overline{\overline{A}} = A$.
Разобьем утверждение на 2 части:

1) $\overline{\overline{A}} \subseteq A$ и
2) $A \subseteq \overline{\overline{A}}$.

Выберем для первой части прямой метод доказательства. Его схема в данном случае:

$$\forall x: \; x \in \overline{\overline{A}} \; \rightarrow ... \rightarrow x \in A.$$

Имея в виду, что элемент принадлежит дополнению множества $\overline{A}$, когда он не принадлежит этому множеству, получаем:

$$\forall x: \; x \in \overline{\overline{A}} \; \rightarrow x \notin \overline{A} \; ... \rightarrow x \in A.$$

И так как элемент не принадлежит дополнению множества $A$, только когда он принадлежит $A$, получаем окончательную схему доказательства этой части:

$$\forall x: \; x \in \overline{\overline{A}} \; \rightarrow x \notin \overline{A} \; \rightarrow x \in A.$$

Для второй части выберем косвенный метод доказательства. Его схема в данном случае:

$$\Cap \; \exists x: \; \begin{cases} x \in A \\ x \notin \overline{\overline{A}} \end{cases} \rightarrow ... \; \rightarrow \blacksquare.$$

Мы стремимся получить противоречие, которое, например, состоит в том, что элемент $x$ принадлежит и не принадлежит какому-то множеству. Но так как из $x \in A$ следует $x \notin \overline{A}$, а из $x \notin \overline{\overline{A}}$ следует $x \in \overline{A}$, то получаем полную схему доказательства этой части:

$$\Cap \; \exists x: \; \left\{ \begin{array}{l} x \in A \; \rightarrow \; x \notin \overline{A} \searrow \\ x \notin \overline{\overline{A}} \; \rightarrow \; x \in \overline{A} \; \nearrow \end{array} \right. \; \blacksquare.$$

Полученные схемы доказательства обеих частей дают общее доказательство утверждения.

***Пример 2.*** $A\cap\overline{A}=\emptyset$.
Приведем полную схему доказательства косвенным методом:

$$\Cap\ \exists x:\ x\in A\cap\overline{A}\ \to \left\{\begin{array}{l} x\in A\ \to\ x\notin\overline{A}\searrow \\ x\in\overline{A}\ \to\!\longrightarrow\!\longrightarrow\nearrow \end{array}\right.\ \blacksquare.$$

***Пример 3.*** $A\cup\overline{A}=U$.
Так как любые введенные нами операции над подмножествами универсального множества $U$ оставляют полученное множество подмножеством $U$, то

$$A\cup\overline{A}\subseteq U$$

и остается доказать $U\subseteq A\cup\overline{A}$, что дает следующая схема:

$$\forall x:\ x\in U\ \to \left\|\begin{array}{l} x\in A\ \to\ x\in A\cup\overline{A}\ \to\ \Box \\ x\notin A\ \to\ x\in\overline{A}\ \to\ x\in A\cup\overline{A}\ \to\ \Box. \end{array}\right.$$

***Пример 4.*** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.
Доказательство разбивается на 2 части:

1) $\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$,
2) $\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$,

которые обосновываются следующими схемами доказательства:

$$\forall x: x\in\overline{A\cup B}\to x\notin A\cup B\to\left\{\begin{array}{l} x\notin A\ \to\ x\in\overline{A}\searrow \\ x\notin B\ \to\ x\in\overline{B}\nearrow \end{array}\right.\ x\in\overline{A}\cap\overline{B}\to\Box.$$

$$\forall x: x\in\overline{A}\cap\overline{B}\to\left\{\begin{array}{l} x\in\overline{A}\to x\notin A\searrow \\ x\in\overline{B}\to x\notin B\nearrow \end{array}\right.\ x\notin A\cup B\ \to\ x\in\overline{A\cup B}\ \to\ \Box.$$

***Пример 5.*** $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.
Доказательство получается из первого закона двойственности (пример 4), если к обеим частям равенства множеств применить операцию дополнения, а затем заменить множества, входящие в равенство, на их дополнения. Это дается следующими эквивалентными преобразованиями:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}\ \leftrightarrow\ \overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\ \leftrightarrow\ A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\ \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\ \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}}\ \leftrightarrow\ \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}.$$

В заключение приведем наиболее ***типичные ошибки*** при проведении ***доказательства***:

1. $x \in A \ \to \ x \in A \cap B$ – **ОШИБКА: элемент, принадлежащий множеству, может не принадлежать его части!!!**

2. $x \in A \cup B \ \to \ x \in A$ – **ОШИБКА: элемент, принадлежащий множеству, может не принадлежать его части!!!**

3. $x \in A \cup B \ \to \ \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$ – **ОШИБКА: элемент, принадлежащий множеству, может не принадлежать его части!!!**

4. $x \notin A \cap B \ \to \ x \notin A$ – **ОШИБКА: элемент, не принадлежащий части множества, может принадлежать множеству!!!**

5. $x \notin A \ \to \ x \notin A \cup B$ – **ОШИБКА: элемент, не принадлежащий части множества, может принадлежать множеству!!!**

6. $x \notin A \cup B \ \to \ \left\| \begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array} \right.$ – **ОШИБКА разделения на случаи: элемент, не принадлежащий множеству, не принадлежит всем его частям!!!**

7. $\left\| \begin{array}{l} x \in A \searrow \\ x \in B \nearrow \end{array} \right. x \in A \cap B$ – **ОШИБКА: нельзя делать вывод из посылок разных случаев!!!**

## 8. Формула включений и исключений

Во многих задачах, связанных с конечными множествами (например, в комбинаторике), требуется найти количество элементов множества, исходя из количеств элементов некоторых его подмножеств. *Формула включений и исключений* определяет связь количества элементов объединения множеств с количествами элементов самих множеств и их пересечений. В дальнейшем будем обозначать через $|X|$ число элементов произвольного конечного множества $X$.

Выведем сначала формулу для объединения двух множеств. Пусть $A$ и $B$ – произвольные конечные множества. Тогда, если эти множества не пересекаются ($A \cap B = \emptyset$), количество элементов объединения этих множеств равно сумме количеств элементов каждого из множеств

$|A \cup B| = |A| + |B|$. Но это не так, если множества $A$ и $B$ пересекаются: в сумму $|A| + |B|$ число элементов пересечения $|A \cap B|$ войдет дважды – при подсчете количества элементов каждого из множеств. Поэтому верной будет формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Эта формула остается верной и в случае, когда множества $A$ и $B$ не пересекаются, так как число элементов пустого множества равно 0.

Выведем теперь формулу для объединения трех множеств, используя полученный результат для двух множеств.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|) = \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

Объединяя начало и конец, получим формулу включений и исключений для объединения трех множеств:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Формула включений и исключений для произвольного числа $k$ множеств $X_i$ ($i \in \overline{1, k}$) (можно получить методом математической индукции) выглядит следующим образом:

$$|\bigcup_{i=1}^{k} X_i| = \sum_{i=1}^{k} |X_i| - \sum_{p=2}^{k} (-1)^p \sum_{i_1 < \cdots < i_p} |X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_p}|.$$

Здесь знак суммы $\sum_{i_1 < \cdots < i_p}$ означает суммирование количеств всех различных пересечений $p$ множеств из объединения. Нетрудно убедиться, что при $k = 2$ и при $k = 3$ эта формула совпадает с выведенными выше. Поскольку знак перед каждой суммой меняется, то идет попеременное включение и исключение количеств пересечений множеств, что и дает название формуле *включений и исключений*.

Использование формулы включений и исключений показано на примере задачи 2 задания (см. ниже).

# 9. Диаграммы Венна

Диаграммы Венна – это изображение множеств в виде геометрических фигур, дающее возможность наглядного выражения отношений множеств, количеств элементов их частей. В отличие от кругов Эйлера, обычно используемых для иллюстрации основных операций над множествами, диаграммы Венна дают возможность наглядно решить некоторые задачи, связанные с определением количества элементов некоторых множеств. Для усиления наглядности отдельные множества на диаграмме выделяют штриховкой и цветом.

В примерах раздела 10 приведены диаграммы Венна для множеств каждой задачи.

# 10. Пример задания и его решения

***Задача 1***

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset \text{ и } X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U \leftrightarrow (X_2 \setminus X_3) \cup (X_1 \setminus X_2) = X_1 \cup \overline{X}_3$$

*Доказательство*

Введем обозначения $A = (X_2 \setminus X_3) \cup (X_1 \setminus X_2)$; $\quad B = X_1 \cup \overline{X}_3$.
В данном примере формулы для всех множеств достаточно простые и потому не требуют упрощения.

Доказательство разобьем на отдельные части.

1) $A = B \ \rightarrow \ X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$.

$$\Cap\ \exists x: \ x \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \rightarrow \begin{cases} x \in X_1 \rightarrow \boxed{1} \\ x \in X_2 \rightarrow x \notin X_1 \setminus X_2 \rightarrow \ x \notin A \rightarrow \boxed{2} \\ x \in X_3 \rightarrow x \notin X_2 \setminus X_3 \nearrow \end{cases}$$

$$\boxed{1} \rightarrow x \in X_1 \searrow$$

$$\boxed{2} \rightarrow x \notin B \rightarrow x \notin X_1 \rightarrow \blacksquare.$$

2) $A = B \ \rightarrow \ X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$.

$$\Cap\ \exists x: \ x \notin X_1 \cup X_2 \cup X_3 \ \rightarrow \ \begin{cases} x \notin X_1 \rightarrow x \notin X_1 \setminus X_2 \rightarrow x \notin A \searrow \\ x \notin X_2 \rightarrow x \notin X_2 \setminus X_3 \nearrow \\ x \notin X_3 \rightarrow x \in \overline{X}_3 \rightarrow x \in B \longrightarrow \nearrow \end{cases} \qquad \blacksquare.$$

3) $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$ и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U \ \rightarrow\ A = B$.

$$\text{a) } \forall x:\ x \in A \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in X_2 \setminus X_3 \rightarrow x \notin X_3 \rightarrow x \in \overline{X}_3 \rightarrow x \in B \rightarrow \square. \\ x \in X_1 \setminus X_2 \rightarrow x \in X_1 \rightarrow x \in B \rightarrow \square. \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \forall x:\ x \in B \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in X_1 \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in X_2 \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in X_3 \rightarrow x \in X_1 \cap X_2 \cap X_3 \\ \qquad \rightarrow \blacksquare. \\ x \notin X_3 \rightarrow x \in X_2 \setminus X_3 \rightarrow \\ \qquad \rightarrow x \in A \rightarrow \square. \end{array} \right. \\ x \notin X_2 \rightarrow x \in X_1 \setminus X_2 \rightarrow x \in A \rightarrow \square. \end{array} \right. \\ x \notin X_1 \rightarrow x \in \overline{X}_3 \rightarrow \left\| \begin{array}{l} x \in X_2 \rightarrow x \in X_2 \setminus X_3 \rightarrow \\ \qquad \rightarrow x \in A \rightarrow \square. \\ x \notin X_2 \rightarrow x \notin X_1 \cup X_2 \cup X_3 \\ \qquad \rightarrow \blacksquare. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

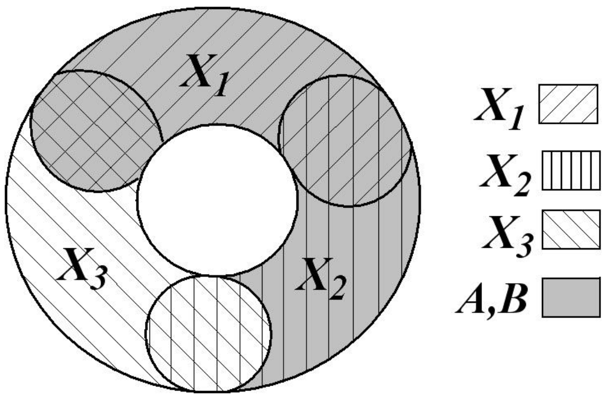


Рис. 5 ($U$ – заштрихованное кольцо; условия выполнены)

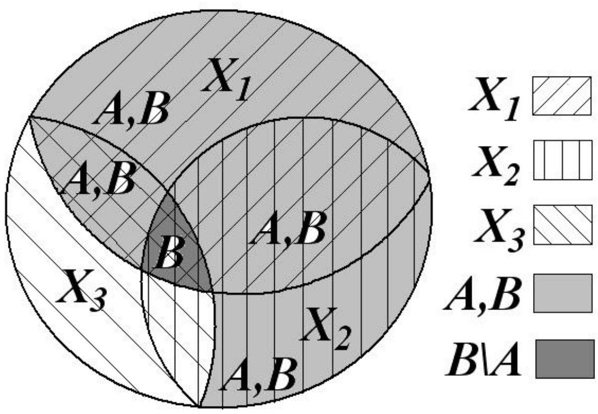


Рис. 6 ($U$ – круг; не выполнено первое условие: $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = B \setminus A$)

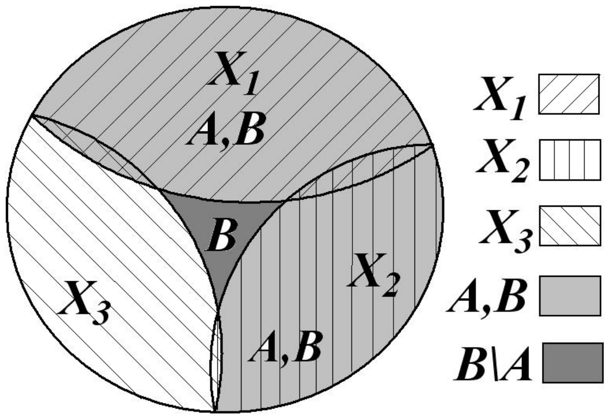


Рис. 7 ($U$ – круг; не выполнено второе условие: $\overline{X_1 \cup X_2 \cup X_3} = B \setminus A$)

*Диаграммы Венна*

1. Обязательны все диаграммы: для случая выполнения условий утверждения равенства множеств и для каждого случая невыполнения условий.

2. Обязательно указание универсального множества U.

3. Каждая диаграмма должна быть ясной и отражать *общий случай* взаимного расположения множеств: на диаграмме должны быть выделены все входящие в утверждения множества и множества, входящие в равенство. При неясности диаграммы рекомендуется для выделения исходных множеств использовать различную штриховку, а для выделения множеств, входящих в равенство утверждения, использовать различные цвета для отдельных их частей (пересечения и разности множеств). Общий случай означает такое расположение исходных множеств, которое ограничено только условиями. Например, если не задано условиями включение одного множества в другое или их непересекаемость, то они и не должны быть использованы; или, если не заданы условия объединения или пересечения исходных множеств, то они и не должны быть использованы.

*Примеры множеств из целых неотрицательных чисел*

Обязательные рекомендации для таких примеров:

1. Количество элементов универсального множества кратно 8, а его элементы начинаются с 0 и идут подряд.

2. Общий случай взаимного размещения элементов – такое же, как и для диаграмм.

3. Обязательно показать проверку всех условий и всех промежуточных при вычислениях множеств.

1) Выполнение условий $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $X_2 = \{2, 3, 6, 7\}$;
$X_3 = \{4, 5, 7\}$
$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = U$
$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
$A = \{0, 1, 4\} \cup \{2, 3, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$
$A = B$

2) Невыполнение первого условия
$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$; $\quad X_2 = \{2, 3, 6, 7\}$; $\quad X_3 = \{3, 4, 5, 7\}$
$X_1 \cup X_2 \cup X_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = U$
$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{3\}$
$A = \{0, 1, 4\} \cup \{2, 6\} = \{0, 1, 2, 4, 6\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$
$A \subset B$

3) Невыполнение второго условия
$X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $\quad X_2 = \{2, 3, 5, 6, 7\}$; $\quad X_3 = \{4, 5, 7\}$
$U = \{0, \ldots, 7\}$
$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \{5\}$
$A = \{0, 1, 4\} \cup \{2, 3, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{0, 1, 2, 3, 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \subset B$

Замечание. Во всех приведенных примерах множеств (и геометрических, и для числовых множеств) можно заметить, что при любом невыполнении условий имеет место включение $A \subset B$. Примеры не доказывают этого факта, но наводят на него. Попытка проведения доказательства

$$\forall x :\ x \in A \to \left\| \begin{array}{l} x \in (X_2 \setminus X_3) \to x \notin X_3 \to x \in X_1 \cup \overline{X}_3 \to x \in B \to \\ \hfill \to A \subset B\ \square. \\ x \in (X_1 \setminus X_2) \to x \in X_1 \to x \in X_1 \cup \overline{X}_3 \to x \in B \to \\ \hfill \to A \subset B\ \square. \end{array} \right.$$

заканчивается успешно. Таким образом, независимо от выполнения условий $A \subseteq B$.

### *Задача 2*

В летний период транспортом пользовалось 90 % населения. Причем 55 % населения передвигалось поездом, 20 % – самолетом, 40 % – автобусом, 10 % – поездом и самолетом, 5 % – всеми тремя видами. Какой процент населения, использовавшего не менее чем два вида транспорта, один из которых автобус?

*Решение*

Введем обозначения:

$\Pi$ – множество пассажиров, использовавших поезд ($|\Pi|$=55);

$C$ – множество пассажиров, использовавших самолет ($|C|$=20);

$A$ – множество пассажиров, использовавших автобус ($|A|$=40).

Тогда

$\Pi \cup C \cup A$ – множество пассажиров, использовавших транспорт ($|\Pi \cup C \cup A|$=90);

$\Pi \cap C$ – множество пассажиров, использовавших поезд и самолет ($|\Pi \cap C|$=10);

$\Pi \cap C \cap A$ – множество пассажиров, использовавших все 3 вида транспорта

($|\Pi \cap C \cap A|$=5).

Нам необходимо выразить множество пассажиров, которые использовали автобус и еще хотя бы 1 вид транспорта, т. е. поезд или самолет. Множество пассажиров, использовавших поезд или самолет, выражается как $\Pi \cup C$, а множество пассажиров, использовавших автобус – $A$. Поэтому множество пассажиров, использовавших поезд или самолет, а также автобус, выражается как

$$(\Pi \cup C) \cap A.$$

В это множество входят и пассажиры, использовавшие все 3 вида транспорта, т. е. оно состоит из пассажиров, использовавших не менее чем 2 вида транспорта, один из которых автобус. Таким образом, это и есть искомое множество

$$X = (\Pi \cup C) \cap A.$$

Отметим, что выделение искомого множества должно в решении задачи предшествовать определению количества его элементов, так как для определения количества элементов чаще всего используется эта формула.

*Диаграмма Венна*

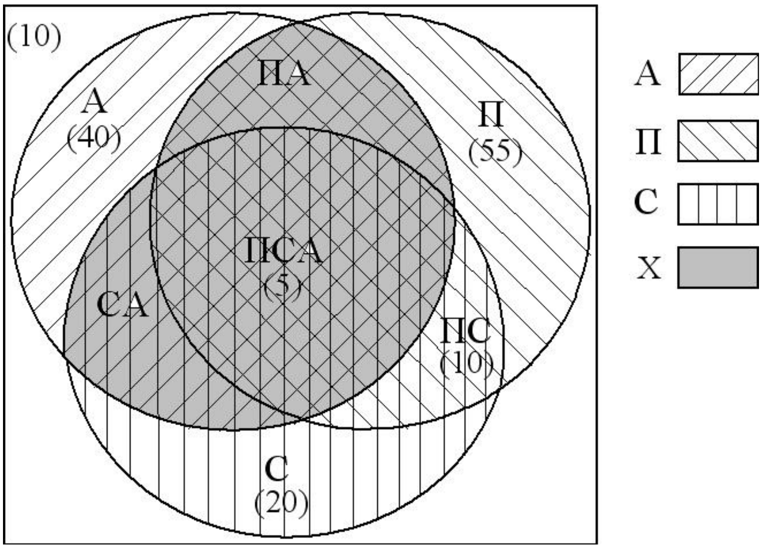


Рис. 8 (искомое множество выделено серым цветом)

Нам необходимо найти количество элементов этого множества, выраженное в процентах числа пассажиров. Выразим формулу множества в виде объединения:

$X = (\textit{П} \cup C) \cap A = (\textit{П} \cap A) \cup (C \cap A)),$

а теперь, используя для количества элементов объединения формулу включений и исключений, получим формулу

$$|X| = |(\textit{П} \cap A) \cup (C \cap A))| = |\textit{П} \cap A| + |C \cap A| - |\textit{П} \cap C \cap A|, \quad (3)$$

в которой первые 2 слагаемых пока неизвестны (поскольку не заданы).

Попробуем их найти, используя формулу включений и исключений для множества всех пассажиров, которое нам известно:

$$|\textit{П} \cup C \cup A| = |\textit{П}| + |C| + |A| - |\textit{П} \cap C| - |\textit{П} \cap A| - |C \cap A| + |\textit{П} \cap C \cap A| \quad (4)$$

Выразим последние 3 слагаемых в (2) из формулы (1):

$$|\textit{П} \cup C \cup A| = |\textit{П}| + |C| + |A| - |\textit{П} \cap C| - |X|$$

и окончательно получим

$$|X| = |\textit{П}| + |C| + |A| - |\textit{П} \cap C| - |\textit{П} \cup C \cup A|. \quad (5)$$

Подставляя в формулу (5) исходные данные, получим

$$|X| = 55 + 20 + 40 - 10 - 90 = 15.$$

Таким образом, ответ: 15 % населения использовало в текущем году 2 вида транспорта, один из которых автобус.

Упражнения. Напишите формулы, выражающие заданное множество через исходные множества $\Pi, C, A$:
1. Не используют ни автобус, ни самолет.
2. Не используют автобус или не используют самолет.
3. Используют автобус, но не самолет.
4. Используют автобус или не используют самолет.
5. Используют только автобус.
6. Используют автобус, но не все 3 вида транспорта.
7. Используют только 2 вида транспорта, среди которых автобус.
8. Используют не все 3 вида транспорта.
9. Не используют 3 вида транспорта.
10. Не используют автобус или самолет.

Какие из этих формул выражают одно и то же множество?

Замечание. Русский язык довольно хорошо выражает логику, связанную с операциями над множествами, если для *отрицания* ставить дополнение множества, для союза *и* – пересечение, а для союза *или* объединение. Причину этого мы увидим позже, когда будем изучать логические операции и их связь с операциями над множествами.

## 11. Варианты индивидуального задания 1

### *Задача 1*

1. $\overline{X}_1 \cup (X_2 \setminus (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_3)) = X_2 \cup \overline{X_1 \cap X_3} \;\leftrightarrow\; X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$

2. $(X_1 \cap \overline{X}_2) \cup (X_2 \cap \overline{X}_3) = \overline{(X_1 \cup \overline{X}_2) \cap (\overline{X}_1 \cup X_2)} \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$ и $X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$

3. $\overline{(X_1 \cap \overline{X}_2) \cup \overline{X}_3} = (X_2 \cup X_3) \cap \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$ и $X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

4. $X_3 \subseteq \overline{X}_1 \cup X_2 \;\leftrightarrow\; (X_2 \setminus (\overline{X}_1 \cap X_3)) \cup \overline{X}_1 = \overline{X}_1 \cup X_2 \cup X_3$

5. $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$ и $X_2 \subseteq X_1 \cup X_3 \;\leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \overline{X_1 \cup X_2} \cup (X_2 \cap \overline{X}_3) = (X_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2)$$

6. $(X_2 \cup X_3) \cap X_1 = \overline{(\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup \overline{X}_3} \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$ и $X_3 \supseteq X_1 \cap X_2$

7. $(\overline{X}_2 \setminus \overline{X_1 \cup X_3}) \cup \overline{X}_1 = \overline{X_1 \cap X_2 \cap X_3} \;\leftrightarrow\; X_3 \supseteq X_1 \cap X_2$

8. $\overline{(\overline{X}_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup \overline{X}_2)} = (\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_2 \cap \overline{X}_3) \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$ и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$

9. $X_2 \supseteq X_1 \cap X_3$ и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U \;\leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \overline{(X_1 \cap X_2) \cup \overline{X}_3} = \overline{X}_1 \cap (\overline{X}_2 \cup X_3)$$

10. $\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup X_3 = (\overline{X}_2 \setminus (\overline{X}_1 \cap X_3)) \cup \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$

11. $X_2 \cup X_3 \supseteq X_1$ и $X_3 \subseteq X_1 \cup X_2 \;\leftrightarrow\; \overline{X_1 \cup \overline{X}_2} \cup (\overline{X}_2 \cap X_3) =$

$$= \overline{\overline{X}_1 \cup X_2} \cup (\overline{X}_1 \cap X_2)$$

12. $X_1 \cap (\overline{X}_2 \cup X_3) = \overline{(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup \overline{X}_3} \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \supseteq X_3$ и $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$

13. $X_1 \supseteq X_2 \cap X_3 \;\leftrightarrow\; X_1 \cup (\overline{X}_2 \setminus (X_1 \cap X_3)) = X_1 \cup \overline{X}_2 \cup X_3$

14. $(X_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_2 \cap X_3) = (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup \overline{\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2} \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$ и $X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$

15. $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$ и $X_1 \cap X_3 \subseteq X_2 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap (\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3) =$

$$= \overline{(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup X_3}$$

16. $X_3 \subseteq X_1 \cup X_2 \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \cup X_3 = X_1 \cup (X_2 \setminus (X_1 \cap X_3))$

17. $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$ и $X_1 \cup X_3 \supseteq X_2 \;\leftrightarrow\; (\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap \overline{X}_2) =$

$$= \overline{\overline{X}_1 \cup X_2} \cup (X_2 \cap X_3)$$

18. $\overline{(\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup X_3} = X_1 \cap (X_2 \cup \overline{X}_3) \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$ и $X_1 \cup X_3 \supseteq X_2$

19. $X_1 \cup \overline{X}_2 \cup \overline{X}_3 = (\overline{X}_2 \setminus (X_1 \cap \overline{X}_3)) \cup X_1 \;\leftrightarrow\; X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

20. $(X_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) = \overline{X_1 \cup X_2} \cup (X_2 \cap X_3) \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$ и $X_1 \supseteq X_2 \cap X_3$

21. $X_3 \supseteq X_1 \cap X_2$ и $X_1 \supseteq X_2 \cap X_3 \;\leftrightarrow\; \overline{X}_1 \cap (X_2 \cup \overline{X}_3) = \overline{(X_1 \cap \overline{X}_2) \cup X_3}$

22. $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \cup \overline{X}_3 = X_1 \cup (X_2 \setminus (X_1 \cap \overline{X}_3))$

23. $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$ и $X_3 \subseteq X_1 \cup X_2 \;\leftrightarrow\; \overline{X_1 \cup \overline{X}_2} \cup (\overline{X}_2 \cap \overline{X}_3) =$
$= (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup (\overline{X}_1 \cap X_2)$

24. $\overline{(X_1 \cap X_2) \cup X_3} = (\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3) \cap \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$ и $X_1 \cup X_2 \supseteq X_3$

25. $X_1 \cup X_3 \supseteq X_2 \;\leftrightarrow\; \overline{X}_2 \cup (X_1 \setminus (\overline{X}_2 \cap \overline{X}_3)) = X_1 \cup \overline{X_2 \cap X_3}$

26. $\overline{X}_2 \cup (X_3 \setminus (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2)) = \overline{X_1 \cap X_2} \cup X_3 \;\leftrightarrow X_1 \cup X_3 \supseteq X_2$

27. $(X_1 \cap \overline{X}_2) \cup (X_2 \cap \overline{X}_3) = \overline{(X_1 \cup \overline{X}_2) \cap (\overline{X}_1 \cup X_2)} \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$
и $X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$

28. $\overline{(X_1 \cap \overline{X}_2) \cup \overline{X}_3} = (X_2 \cup X_3) \cap \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
и $X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

29. $\overline{X}_1 \cup (X_2 \setminus (\overline{X}_1 \cap X_3)) = X_2 \cup \overline{X}_1 \cup X_3 \;\leftrightarrow\; X_3 \subseteq \overline{X}_1 \cup X_2$

30. $\overline{(\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup \overline{X}_3} = (X_2 \cup X_3) \cap X_1 \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$ и $X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$

31. $\overline{X_1 \cup X_2} \cup (X_2 \cap \overline{X}_3) = (X_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
и $X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

32. $\overline{X}_1 \cup (\overline{X}_2 \setminus (\overline{X}_3 \cap \overline{X}_1)) = \overline{X_1 \cap X_2 \cap X_3} \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$

33. $(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_2 \cap \overline{X}_3) = \overline{(\overline{X}_1 \cup X_2) \cap (X_1 \cup \overline{X}_2)} \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$
и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$

34. $\overline{(X_1 \cap X_2) \cup \overline{X}_3} = (\overline{X}_2 \cup X_3) \cap \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$
и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$

35. $(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_2 \cap X_3) = \overline{\overline{X}_1 \cup X_2} \cup (\overline{X}_1 \cap X_2) \;\leftrightarrow\; X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$
и $X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$

36. $\overline{X}_1 \cup (\overline{X}_2 \setminus (X_3 \cap \overline{X}_1)) = \overline{X}_2 \cup \overline{X}_1 \cup X_3 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$

37. $\overline{(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup \overline{X}_3} = (\overline{X}_2 \cup X_3) \cap X_1 \;\leftrightarrow\; X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$ и $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$

38. $(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_2 \cap X_3) = (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup (\overline{X}_1 \cap X_2) \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$
и $X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$

39. $\overline{(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup X_3} = (\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3) \cap X_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$
и $X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$

40. $X_1 \cup (\overline{X}_2 \setminus (X_3 \cap X_1)) = \overline{X}_2 \cup X_1 \cup X_3 \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$

41. $\overline{(\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup X_3} = (X_2 \cup \overline{X}_3) \cap X_1 \;\leftrightarrow\; X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$
и $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$

42. $(\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup (X_2 \cap X_3) = (\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
и $X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

43. $X_1 \cup (X_2 \setminus (X_3 \cap X_1)) = X_2 \cup X_1 \cup X_3 \;\leftrightarrow\; X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$

44. $(\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup (X_2 \cap \overline{X_3}) = (\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$
и $X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$

45. $X_1 \cup (\overline{X}_2 \setminus (\overline{X}_3 \cap X_1)) = \overline{X}_2 \cup X_1 \cup \overline{X}_3 \;\leftrightarrow\; X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

46. $\overline{(X_1 \cap \overline{X}_2) \cup X_3} = (X_2 \cup \overline{X}_3) \cap \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$ и $X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$

47. $X_1 \cup (X_2 \setminus (\overline{X}_3 \cap X_1)) = X_2 \cup X_1 \cup \overline{X}_3 \;\leftrightarrow\; X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$

48. $\overline{(X_1 \cap X_2) \cup X_3} = (\overline{X}_2 \cup \overline{X}_3) \cap \overline{X}_1 \;\leftrightarrow\; X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$ и $X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$

49. $(\overline{X}_1 \cap X_2) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_3) = (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_2) \cup (\overline{X}_1 \cap X_2) \;\leftrightarrow\; X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$

50. $\overline{(X_2 \cap \overline{X}_3) \cup \overline{X}_1} = (X_1 \cup X_3) \cap \overline{X}_2 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
и $X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$

51. $(X_3 \setminus X_1) \setminus X_2 = (X_1 \setminus X_2) \setminus X_3 \;\leftrightarrow\; X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$ и $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$

52. $\overline{X}_3 \cup (X_1 \setminus (\overline{X}_3 \cap \overline{X}_2)) = X_1 \cup \overline{X_3 \cap X_2} \;\leftrightarrow\; X_3 \subseteq X_1 \cup X_2$

53. $(X_3 \cap \overline{X}_1) \cup (X_1 \cap \overline{X}_2) = \overline{(X_3 \cup \overline{X}_1) \cap (\overline{X}_3 \cup X_1)} \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \subseteq X_3$
и $X_3 \cap X_1 \subseteq X_2$

54. $\overline{(X_3 \cap \overline{X_1}) \cup \overline{X_2}} = (X_1 \cup X_2) \cap \overline{X_3} \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$
и $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$

55. $\overline{X}_2 \cup (X_1 \setminus (\overline{X}_2 \cap \overline{X}_3)) = X_1 \cup \overline{X_2 \cap X_3} \;\leftrightarrow\; X_2 \subseteq X_1 \cup X_3$

56. $(X_2 \cap \overline{X}_1) \cup (X_1 \cap \overline{X}_3) = \overline{(X_2 \cup \overline{X}_1) \cap (\overline{X}_2 \cup X_1)} \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$
и $X_2 \cap X_1 \subseteq X_3$

57. $\overline{(X_2 \cap \overline{X_1}) \cup \overline{X_3}} = (X_1 \cup X_3) \cap \overline{X_2} \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_1 \cap X_3 = \emptyset$
и $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3$

58. $X_3 \subseteq \overline{X}_2 \cup X_1 \;\leftrightarrow\; (X_1 \setminus (\overline{X}_2 \cap X_3)) \cup \overline{X}_2 = \overline{X}_2 \cup X_1 \cup X_3$

59. $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$ и $X_1 \subseteq X_2 \cup X_3 \;\leftrightarrow$
$\leftrightarrow \overline{X_2 \cup X_1} \cup (X_1 \cap \overline{X}_3) = (X_2 \cap X_1) \cup (\overline{X}_2 \cap \overline{X}_1)$

60. $(X_1 \cup X_3) \cap X_2 = \overline{(\overline{X}_2 \cap \overline{X}_1) \cup \overline{X}_3} \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_3 \subseteq X_2$ и $X_3 \supseteq X_1 \cap X_2$

61. $(\overline{X}_1 \setminus \overline{X_2 \cup X_3}) \cup \overline{X}_2 = \overline{X_1 \cap X_2 \cap X_3} \;\leftrightarrow\; X_3 \supseteq X_1 \cap X_2$

62. $\overline{(\overline{X}_2 \cup X_1) \cap (X_2 \cup \overline{X}_1)} = (\overline{X}_2 \cap X_1) \cup (\overline{X}_1 \cap \overline{X}_3) \;\leftrightarrow\; X_2 \cap X_3 \subseteq X_1$
и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U$

63. $X_1 \supseteq X_2 \cap X_3$ и $X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U \;\leftrightarrow$
$\leftrightarrow \overline{(X_1 \cap X_2) \cup \overline{X}_3} = \overline{X}_2 \cap (\overline{X}_1 \cup X_3)$

64. $\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup X_3 = (\overline{X}_1 \setminus (\overline{X}_2 \cap X_3)) \cup \overline{X}_2 \;\leftrightarrow\; X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset$

## *Задача 2*

1. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский, причем 70 % изучают английский язык, 50 % – немецкий язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 30 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Каков процент студентов, изучающих французский язык?

2. 60 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 50 % посещают кинотеатры или выставки, 10 % – театры и выставки, 20 % – театры и кинотеатры, 12 % – выставки, 45 % – кинотеатры, а 5 % посещают все. Каков процент горожан, ежегодно посещающих театр?

3. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 40 студентов, алгебру – 42, информатику – 38. Среди сдавших матанализ 36 студентов сдали алгебру или информатику, а все предметы сдали 34 студента. Алгебру и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов в конце сессии отчислено за неуспеваемость (не сдали ни одного из предметов)?

4. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, не выращивающих ни яблони, ни сливы, ни вишни?

5. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, щук и лещей – 25 %, а лещей и окуней – 10 %. Каков процент рыболовов, поймавших все 3 вида рыб?

6. 95 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 75 % изучают английский язык, 70 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 6 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 36 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, изучающих французский язык?

7. 70 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % – театры и кинотеатры, а 3 % посещают все. Каков процент горожан, ежегодно посещающих только выставки или кинотеатры?

8. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 60 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 52 студента, алгебру – 53, информатику – 51. Среди сдавших алгебру 49 студентов сдали матанализ или информатику. Алгебру и информатику сдали 47 студентов. Только матанализ сдал 1 студент, а только информатику – 2 студента. Сколько студентов успешно сдали сессию?

9. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивает 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, которые выращивают только 1 вид деревьев из трех перечисленных?

10. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, а лещей и окуней – 10 %. Все 3 вида поймали 5 % рыболовов. Каков процент рыболовов, поймавших щук и лещей?

11. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 70 % изучают английский язык, 50 % – немецкий язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 30 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Каков процент студентов, изучающих только французский язык?

12. 60 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 50 % посещают кинотеатры или выставки, 10 % – театры и выставки, 20 % – театры и кинотеатры, 12 % – выставки, 45 % – кинотеатры, а 5 % посещают все. Каков процент горожан, которые ежегодно не посещают театр?

13. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: матанализ сдало 40 студентов, алгебру – 42, информатику – 38. Среди сдавших матанализ 36 студентов сдали алгебру или информатику, а все предметы – 34 студента. Алгебру и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов имеют по 2 переэкзаменовки?

14. 90 % садоводов выращивают по крайней мере 1 из 3 видов деревьев: яблони, сливы и вишни. 40 % садоводов в своих садах выращивают сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, выращивающих яблони?

15. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, щук и лещей – 25 %, а лещей и окуней – 10 %. Каков процент рыболовов, поймавших ровно 2 вида рыб из перечисленных 3 видов?

16. 95 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 75 % изучают английский язык, 70 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 6 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 36 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, изучающих французский язык, но не изучающих немецкий язык?

17. 70 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % посещают театры и кинотеатры, а 3 % посещают все. Какой процент горожан, ежегодно посещающих театры?

18. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 60 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 52 студента, алгебру – 53, информатику – 51. Среди сдавших алгебру 49 студентов сдали матанализ или информатику. Алгебру и информатику сдали 47 студентов. Только матанализ сдал 1 студент, а только информатику – 2 студента. Сколько студентов имеют 2 переэкзаменовки?

19. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивает 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, выращивающих не все из 3 перечисленных видов деревьев?

20. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, а лещей и окуней – 10 %. Все 3 вида поймали 5 % рыболовов. Каков процент рыболовов, не поймавших ни щук, ни лещей?

21. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 70 % изучают английский язык, 50 % – немецкий язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Ан-

глийский и немецкий языки изучают 30 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Каков процент студентов, не изучающих только французский язык?

22. 60 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 50 % посещают кинотеатры или выставки, 23 % – только выставки или только кинотеатры, 10 % – театры и выставки, 20 % – театры и кинотеатры, 12 % – выставки, а 5 % посещают все. Какой процент горожан, ежегодно посещающих театры или выставки?

23. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 60 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 52 студента, алгебру – 53, информатику – 51. Среди сдавших алгебру 49 студентов сдали матанализ или информатику. Алгебру и информатику сдали 47 студентов. Только матанализ сдал 1 студент, а только информатику – 2 студента. Сколько студентов имеют переэкзаменовки?

24. 90 % садоводов выращивают по крайней мере 1 из видов деревьев: яблони, сливы и вишни. 40 % садоводов в своих садах выращивают сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, не выращивающих яблони?

25. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, щук и лещей – 25 %, а лещей и окуней – 10 %. Каков процент рыболовов, поймавших не все 3 вида рыб?

26. 95 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 75 % изучают английский язык, 70 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 6 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 36 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, изучающих ровно 2 языка?

27. 70 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % – театры и кинотеатры, а 3 % посещают все. Процент горожан, посещающих как выставки, так и кинотеатры, в 2 раза больше чем тех, кто посещает только выставки. Какой процент горожан, ежегодно посещающих только выставки?

28. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: матанализ сдало 40 студентов, алгебру – 42, информатику – 38. Среди сдавших матанализ 36 студентов сдали алгебру или информатику, а все предметы – 34 студента. Алгебру и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов имеют по 1 переэкзаменовке?

29. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, не выращивающих ни яблони, ни сливы, ни вишни?

30. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, а лещей и окуней – 10 %. Все 3 вида поймали 5 % рыболовов. Каков процент рыболовов, поймавших только 1 вид из этих 3 видов рыб?

31. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 70 % изучают английский язык, 50 % – немецкий язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 30 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Каков процент студентов, не изучающих только 1 язык?

32. 60 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 50 % посещают кинотеатры или выставки, 23 % – только выставки или только кинотеатры, 10 % посещают театры и вы-

ставки, 20 % – театры и кинотеатры, 12 % – выставки, а 5 % посещают все. Какой процент горожан, ежегодно посещающих, кроме кинотеатров, выставки или театры?

33. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 60 студентами 1 курса таковы: матанализ сдало 52 студента, алгебру – 53, информатику – 51. Среди сдавших алгебру 49 студентов сдали матанализ или информатику. Алгебру и информатику сдали 47 студентов. Только матанализ сдал 1 студент, а только информатику – 2 студента. Сколько студентов имеют 1 переэкзаменовку?

34. 90 % садоводов выращивают по крайней мере 1 из видов деревьев: яблони, сливы и вишни. 60 % садоводов в своих садах выращивают яблони и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивает 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивает 5 % садоводов. Какой процент садоводов, выращивающих сливы?

35. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щука, окунь, лещ. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, щук и лещей – 25 %, а лещей и окуней – 10 %. Каков процент рыболовов, поймавших не только 1 вид рыб из этих 3 видов?

36. 95 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 75 % изучают английский язык, 70 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 6 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 36 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, изучающих не менее 2 языков?

37. 70 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % – театры и кинотеатры, а 3 % посещают все. Процент горожан, посещающих как выставки, так и кинотеатры, в 2 раза больше, чем тех, кто посещает только выставки. Какой процент горожан, ежегодно посещающих только кинотеатры?

38. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 40 студентов, алгебру – 42, информатику – 38. Среди сдавших матанализ 36 студентов сдали алгебру или информатику, а все предметы сдали 34 студента. Алгебру и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов имеют переэкзаменовки?

39. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, выращивающих ровно 2 вида из трех перечисленных видов деревьев?

40. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, а лещей и окуней – 10 %. Все 3 вида поймали 5 % рыболовов. Каков процент рыболовов, поймавших ровно 2 вида из этих 3 видов рыб?

41. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 70 % изучают английский язык, 50 % изучают немецкий язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 30 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Каков процент студентов, не изучающих французский или немецкий языки?

42. 60 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 50 % посещают кинотеатры или выставки, 23 % – только выставки или только кинотеатры, 10 % посещают театры и выставки, 20 % – театры и кинотеатры, 12 % – выставки, а 5 % посещают все. Какой процент горожан ежегодно посещают, кроме выставок, театры или кинотеатры?

43. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 60 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 52 студента, алгебру – 53, информатику – 51. Среди сдавших алгебру 49 студентов

сдали матанализ или информатику. Алгебру и информатику сдали 47 студентов. Только матанализ сдал 1 студент, а только информатику – 2 студента. Сколько студентов отчислено по результатам сессии (не сдали ни одного предмета)?

44. 90 % садоводов выращивают по крайней мере 1 из видов деревьев: яблони, сливы и вишни. 60 % садоводов в своих садах выращивают яблони и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, не выращивающих сливы?

45. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, щук и лещей – 25 %, а лещей и окуней – 10 %. Каков процент рыболовов, не поймавших ровно 2 вида рыб из этих 3 видов?

46. 95 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 75 % изучают английский язык, 70 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 6 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 36 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, изучающих либо немецкий, либо французский языки, но не оба?

47. 70 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % – театры и кинотеатры, а 3 % посещают все. Процент горожан, посещающих как выставки, так и кинотеатры, в 2 раза больше, чем тех, кто посещает только выставки. Каков процент горожан, ежегодно посещающих только выставки, или только театры, или только кинотеатры?

48. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 40 студентов, ал-

гебру – 42, информатику – 38. Среди сдавших матанализ 36 студентов сдали алгебру или информатику, а все предметы сдали 34 студента. Алгебру и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов, сдавших матанализ, имеют переэкзаменовки?

49. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, выращивающих хотя бы 1 вид из перечисленных 3 видов деревьев?

50. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, а лещей и окуней – 10 %. Все 3 вида поймали 5 % рыболовов. Каков процент рыболовов, не поймавших ровно 1 вид из этих 3 видов рыб?

51. 90 % садоводов выращивают по крайней мере 1 из видов деревьев: яблони, сливы и вишни. 60 % садоводов в своих садах выращивают яблони и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивают 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, выращивающих только сливы?

52. 75 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % – театры и кинотеатры, а 3 % посещают все. Процент горожан, посещающих как выставки, так и кинотеатры, в 2 раза больше, чем тех, кто посещает только выставки. Каков процент горожан, ежегодно не посещающих только выставки, или только театры, или только кинотеатры?

53. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: алгебру сдало 40 студентов, матанализ – 42, информатику – 38. Среди сдавших алгебру 36 студентов сдали матанализ или информатику, а все предметы сдали 34

студента. Маианализ и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов, сдавших алгебру, имеют переэкзаменовки?

54. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 70 % изучают английский язык, 75 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 35 %, английский и французский – 20 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, не изучающих ни немецкий, ни французский языки?

55. 90 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 70 % изучают английский язык, 50 % изучают немецкий язык. 3 языка изучают 5 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 30 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Каков процент студентов, не изучающих французский язык?

56. 60 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 50 % посещают кинотеатры или выставки, 10 % – театры и выставки, 20 % – театры и кинотеатры, 12 % – выставки, 45 % – кинотеатры, а 5 % посещают все. Каков процент горожан, ежегодно не посещающих театр?

57. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 50 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 40 студентов, алгебру – 42, информатику – 38. Среди сдавших матанализ 36 студентов сдали алгебру или информатику, а все предметы сдали 34 студента. Алгебру и информатику сдали 36 студентов. Только информатику сдали 2 студента. Сколько студентов в конце сессии не сдали 2 предмета?

58. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивает 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, не выращивающих яблони, или сливы, или вишни?

59. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей. Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, щук и лещей – 25 %, а лещей и окуней – 10 %. Каков процент рыболовов, не поймавших все 3 вида рыб?

60. 95 % студентов университета изучают иностранные языки: английский, немецкий и французский. Причем 75 % изучают английский язык, 70 % – немецкий или французский язык. 3 языка изучают 6 % студентов. Английский и немецкий языки изучают 36 %, английский и французский – 20 %, а французский и немецкий – 10 % студентов. Только немецкий язык никто не изучает. Каков процент студентов, изучающих французский или английский языки?

61. 70 % горожан ежегодно посещают выставки, театры, кинотеатры. Причем 60 % посещают кинотеатры или выставки, 80 % не посещают выставок или не посещают кинотеатров, 10 % посещают театры и выставки, 8 % – театры и кинотеатры, а 3 % горожан посещают все. Каков процент горожан, ежегодно посещающих не только выставки или не только кинотеатры?

62. В зимнюю экзаменационную сессию результаты сдачи экзаменов 60 студентами 1 курса таковы: матанализ сдали 52 студента, алгебру – 53, информатику – 51. Среди сдавших алгебру 49 студентов сдали матанализ или информатику. Алгебру и информатику сдали 47 студентов. Только матанализ сдал 1 студент, а только информатику – 2 студента. Сколько студентов не сдали успешно сессию (не сдали все 3 дисциплины)?

63. 55 % садоводов в своих садах выращивают яблони, 40 % – сливы и 50 % – вишни. Яблони и сливы выращивает 20 % садоводов, яблони и вишни – 30 %, а сливы и вишни – 10 %. Все три вида деревьев выращивают 5 % садоводов. Каков процент садоводов, которые не выращивают только 1 вид деревьев из перечисленных трех?

64. 85 % рыболовов поймали по крайней мере 1 из 3 видов рыб: щуки, окуни, лещи. 55 % поймали щук, 50 % – окуней и 40 % – лещей.

Щук и окуней поймали 35 % рыболовов, а лещей и окуней – 10 %. Все 3 вида поймали 5 % рыболовов. Каков процент рыболовов, которые не поймали щук и лещей?

# 12. Методические рекомендации для выполнения индивидуального задания 1

### *Доказательство утверждения задачи 1*

1. *Введите обозначения* множеств, входящих в отношение равенства множеств, и *упростите их алгебраически* (используя алгебру множеств). При этом представление множества в виде объединения других подмножеств позволяет удобнее проводить начало прямого доказательства равенства множеств за счет разбиения на случаи (доказательство каждого случая не зависит от остальных случаев). Представление множества в виде пересечения также может быть удобным в других случаях (непринадлежность элемента одному из подмножеств, входящих в пересечение, позволяет сделать вывод о непринадлежности элемента всему множеству; принадлежность элемента всем подмножествам, входящим в пересечение, позволяет сделать вывод о принадлежности элемента всему множеству). Поэтому часто удобнее иметь оба представления – в виде объединения и в виде пересечения.

2. Если в утверждении дано *сложное условие* (например, равенство трех множеств или включение одного множества в другое, которое включается в третье множество), то *представьте* его *как конъюнкцию* простых условий (простых отношений включения).

3. Общее *утверждение разбейте на отдельные части* так, что конъюнкция утверждений для отдельных частей эквивалентна общему утверждению. Это позволит доказательство каждой части проводить независимо от остальных. Так, в общей схеме задания (*2 множества равны тогда и только тогда, когда выполняются условия*) можно выделить следующие части: из равенства 2 множеств следует выполнение каждого из условий; из конъюнкции

условий следует равенство 2 множеств (последнюю часть также можно разбить на 2 части: включение первого множества во второе; включение второго множества в первое).

4. Выберите метод доказательства для каждой части: прямой или косвенный. Чаще всего косвенный метод удобен при доказательстве условий (но могут быть случаи, когда прямой метод проще и нагляднее).

5. После выбора метода доказательства одной из частей общего утверждения выпишите все исходные посылки. Так, при доказательстве равенства множеств (включения множеств) исходными посылками являются все условия общего утверждения. При доказательстве утверждения одного из условий исходной является посылка равенства двух множеств утверждения, а также исходными могут быть все уже доказанные условия (последнее может облегчить процесс доказательства).

6. Каждый шаг доказательства является либо элементарным выводом, либо разбиением на случаи.

7. Каждый *элементарный вывод требует достаточного количества посылок*, которые изображаются стрелками, идущими от посылок к выводу. Если посылок недостаточно, то вывод не является элементарным (объявляется некорректным). Поэтому требуется анализ, все ли посылки указаны. Если не хватает посылки, то требуется найти ее среди уже имеющихся посылок и выводов в текущей ветви доказательства (все посылки и выводы уже имеющегося доказательства, кроме ветвей других случаев доказательства). Если такой посылки нет, то надо ее сначала получить, убрав пока некорректный вывод. Рекомендуется, чтобы каждый вывод, как правило, имел не более двух посылок, а при большем числе посылок вывод разбить на несколько.

8. Каждый элементарный вывод не должен содержать *лишних посылок*, наличие которых является ошибкой неаккуратности мышления, а потому при обучении недопустим.

9. При прямом методе доказательства включения одного множества (первого) в другое (второе) исходной посылкой (кроме посылок, следующих из условий доказываемой части) является принадлежность первому множеству любого элемента, а *целью* доказательства является обоснование принадлежности этого элемента второму множеству. Каждый *элементарный вывод* должен идти в направлении этой цели: если второе множество представлено в виде объединения своих частей, то доказывать принадлежность одной из частей; если второе множество представлено в виде пересечения нескольких других множеств, то доказывать принадлежность каждому из этих множеств. Эти идеи могут быть использованы в комбинации: часть второго множества может быть представлена в виде пересечения других множеств.

10. При косвенном методе доказательства включения одного множества (первого) в другое (второе) исходной посылкой является предположение о существовании элемента, который принадлежит первому множеству и не принадлежит второму множеству. Эта посылка должна при помощи элементарных выводов привести к противоречию с одним из условий доказываемой части. Поэтому каждый *элементарный вывод* должен идти *в направлении цели* получения такого противоречия.

11. Все элементарные выводы, следующие из одних и тех же посылок, объединяются фигурной скобкой для наглядности.

12. Если посылка является принадлежностью элемента объединению множеств (или непринадлежностью элемента пересечению множеств), то имеет место разбиение на случаи принадлежности (или соответственно непринадлежности) элемента одному из множеств. Кроме того, разбиение на случаи можно создать, когда не хватает посылки, и тогда можно ее ввести в качестве одного из случаев, а ее отрицание в качестве другого альтернативного случая. Другой случай может иметь совершенно другое доказательство либо приводить к противоречию, которое показывает, что этот случай не имеет места. Разбиение на случаи в схеме доказательства указывается вертикальной чертой.

13. Доказательство каждого случая *не* должно *использовать* выводы доказательства *другого случая*. Даже, если окончание доказательств двух случаев одинаково, оно не должно быть общим — для каждого случая его нужно будет написать отдельно.

14. Если доказательство для одного из случаев проведено, а для другого случая Вы испытываете затруднения, то можно перейти к альтернативным случаям, когда второй случай включает в себя дополнительно отрицание первого случая. Эта дополнительная информация нередко позволяет решить проблему. Но можно и сразу проектировать альтернативные случаи. Пусть, например, неальтернативное разбиение состоит из принадлежности элемента подмножествам C и D, то есть имеет место пересечение этих множеств. Тогда альтернативным будет разбиение на 3 случая: $C \cap D,\ C \setminus D,\ D \setminus C$.

15. Доказательство всех случаев должно быть законченным: либо доведено до цели, либо доведено до противоречия.

16. Если все случаи заканчиваются противоречием, то это означает, что исходная посылка утверждения не верна. При косвенном методе доказательства это означает справедливость утверждения. При прямом методе доказательства, когда берется произвольный элемент одного из множеств доказываемого равенства множеств, полученное противоречие означает, что такого элемента не существует, а значит множество пустое. Если таким образом получено, что и второе множество из равенства множеств также пустое, то этим доказывается равенство обоих множеств как пустых.

### ***Диаграммы Венна для задачи 1***

1. Прежде всего *определите* геометрический *вид универсального множества U* для диаграммы случая выполнения всех условий утверждения (кольцо, круг, прямоугольник). Кольцо удобнее для случая условий, когда объединение подмножеств есть универсальное множество, а пересечение есть пустое множество.

2. *Определите вид подмножеств* $X_1, X_2, X_3$ *для выполнения всех условий утверждения* и общего случая их взаимного расположения:

- любые 2 подмножества имеют непустое пересечение;
- ни одно из подмножеств не включено целиком в другое;
- пересечение всех подмножеств непусто, если это не требуется условиями;
- объединение всех подмножеств отлично от универсального множества, если это не требуется условиями.

Если условия не позволяют задать все подмножества фигурами связных областей, то допускается одно из подмножеств задать двумя фигурами, несвязных между собой областей.

3. *Определите вид универсального множества и его подмножеств* $X_1, X_2, X_3$ для каждого случая невыполнения одного из условий утверждения с общим случаем их взаимного расположения (как в предыдущем пункте). При этом другие условия утверждения, если они есть, должны выполняться. Это можно сделать, постепенно перемещая и растягивая фигуры подмножеств.

4. *Определите надписи на* каждой *диаграмме*, указывающие универсальное множество и 3 подмножества утверждения.

5. *Определите* различную *штриховку подмножеств* утверждения для каждой диаграммы.

6. *Раскрасьте* на каждой диаграмме в различные цвета *различные части подмножеств* $A$ *и* $B$, входящих в отношение равенства утверждения, ($A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$ – те, которые есть).

### ***Числовые примеры для задачи 1***

1. *Определите универсальное множество* целых неотрицательных чисел с кратным 8 количеством элементов, которые начинаются с 0 (например, $U = \overline{0,7}$ или $U = \overline{0,15}$).

2. *Определите подмножества* $X_1, X_2, X_3$ *для выполнения всех условий утверждения* и общего случая их взаимного отношения (требования такие же, как и для диаграмм). С этой целью сначала включите в каждое подмножество различные элементы $U$, затем добавьте в подмножества каждой пары подмножеств одинаковые

элементы, но различные для каждой пары, и, наконец, добавьте в подмножества элементы так, чтобы выполнялись условия общего случая.

3. *Определите подмножества* $X_1, X_2, X_3$ *для каждого случая невыполнения* одного из условий утверждения с общим случаем их взаимного отношения (требования такие же, как и для диаграмм). С этой целью измените подмножества, полученные для случая выполнения всех условий так, чтобы нарушалось только одно из условий, если есть другие условия.

4. Приведите промежуточные вычисления выполнения (невыполнения) всех условий, а также промежуточные вычисления множеств A и B для каждого примера.

### *Вывод формул для искомого множества и количества его элементов задачи 2*

1. После введения обозначений для исходных множеств задачи необходимо написать формулу для искомого множества. Ее написание следует начать с анализа фразы определения множества на русском языке. Прежде всего в этой фразе употребляется причастие (например, одно из причастий *знающих, выращивающих, изучающих, посещающих и т.д.*) или соответствующий глагол (*знает, выращивает, изучает, посещает и т. д.*). Для примера мы будем использовать причастие *изучающих*, которое означает, что мы интересуемся множеством изучающих что-то.

   Если определение множества начинается с частицы *не* перед причастием, то формула искомого множества строится как дополнение ко множеству, определяемому фразой без этой частицы. Однако, если идет перечисление с союзом *ни*, то такая фраза эквивалентна фразе, где частица *не* перед причастием относится к каждому объекту перечисления, а союз *ни* заменен союзом *и*. Например, фраза *не изучающих ни испанский, ни итальянский* заменяется на фразу *не изучающих испанский и не изучающих итальянский*. Таким образом, частица *не* определяет дополнение множества, определяемого частью фразы, идущей после этой частицы.

Союз *и* определяет пересечение множеств, которых он соединяет, а союз *или* определяет объединение соединяемых им множеств.

Местоимение *все* эквивалентно перечислению всех объектов, которое оно определяет, а потому связано с пересечением всех множеств объектов в контексте такого перечисления.

Предлог *кроме*, стоящий между объектами, определяет разность множеств первого и второго объектов. Так, фраза *изучающих испанский, кроме греческого,* означает разность множеств $И \setminus Г$, описывающих тех, кто изучает испанский язык, но не изучает греческий язык. Этот же предлог, стоящий перед первым объектом эквивалентен союзу *и*, стоящему между объектами. Так, фраза *кроме истальянского, иэучющие греческий или латышский* означает множество $И \cap (Г \cup Л)$ тех, кто изучает, помимо испанского, греческий или латышский языки.

Приведем примеры. В контексте изучения трех языков (испанский, греческий, латышский) фраза *не изучающих все языки* означает множество $\overline{И \cap Г \cap Л}$, а фраза *изучающих не все языки* означает множество $И \cup Г \cup Л \setminus И \cap Г \cap Л$.

2. Вывод формулы для количества элементов искомого множества зависит от полученной формулы искомого множества. Как правило, чем короче формула искомого множества, тем быстрее может быть выведена формула для количества его элементов через заданные условием задачи множества с их количеством элементов. Поэтому стремление получить более простую формулу искомого множества на предыдущем шаге вполне оправдано. Вывод с формулы количества элементов искомого множества нужно начинать с последней выполняемой операции в формуле искомого множества.

   Если это разность множеств (например, $A \setminus B$) и второе множество включено в первое, то количество элементов разности множеств равно разности их количеств ($|A \setminus B| = |A| - |B|$), что следует из формулы включений и исключений:
   $A = (A \setminus B) \cup B, \quad (A \setminus B) \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; |A| = |A \setminus B| + |B|.$
   После этого дальнейший анализ можно проводить независимо для

частей A и B исходного множества. Если в разности множеств второе множество не включено в первое,то разность множеств можно преобразовать, заменив вычитаемое множество на его пересечение с уменьшаемым множеством. Тогда, например, $|A \setminus B| = |A| - |B \cap A|$ и дальнейший анализ можно проводить для этих частей вычитания.

Если это дополнение множества (например, $\overline{A}$), то количество его элементов получается формулой вычитания из числа элементов универсального множества $U$ количества элементов множества, стоящего под знаком дополнения (в примере $|\overline{A}| = |U| - |A|$), что также следует из формулы включений и исключений ($|U| = |\overline{A}| + |A|$). После этого дальнейший анализ можно проводить только для части A исходного множества.

Если это объединение множеств и количество его элементов не задано, то следует применить формулу включений и исключений к этому объединению, а затем выделить в получившейся формуле части с известными по условию задачи количествами их элементов и части, не являющимися таковыми. Дальнейший анализ проводить только для последних частей.

Если это пересечение множеств, то, применяя формулу включений и исключений для объединения этих множеств, можно из нее выразить количество элементов пересечения. Дальнейший анализ нужно проводить только для частей полученной формулы с неизвестным количеством элементов.

3. Все действия по получению новых формул нужно описывать, а формулы нумеровать так, как это делается в примере задачи 2 из раздела 10.

4. В полученной формуле для числа элементов искомого множества должны быть приведены все подобные члены.

5. Только после этого исходные данные задачи можно подставить в полученную формулу и получить числовой ответ.

## 13. Литература


1. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

2. Дехтярь, М. И. Лекции по дискретной математике : учебное пособие / М. И. Дехтярь. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий ; БИНОМ, Лаборатория знаний, 2007. – 259 с



Учебное издание

**Рублев** Вадим Сергеевич

МНОЖЕСТВА

(индивидуальная работа № 1 по дисциплине
«Дискретная математика»)

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова

Компьютерная верстка В. С. Рублев

Подписано в печать 28.01.2018 Формат 60×84/16.

Усл. печ. л. 3,1. Уч.-изд. л. 3,0.

Тираж 3 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.