Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

Булевы функции

(индивидуальные работы № 4 и 5
по дисциплине «Дискретная математика»)

Учебно-методическое пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 514(072)
ББК В126я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2018 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Рублев, Вадим Сергеевич.
Р82 Булевы функции : (индивидуальные работы № 4 и 5 по дисциплине «Дискретная математика») : учебно-методическое пособие / В. С. Рублев ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2018. – 56 с.

Пособие содержит варианты индивидуальных заданий по теме “Булевы функции” (дисциплина «Дискретная математика»), а также необходимый материал для ее самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, примеры, иллюстрации, обоснования, а также методические рекомендации для выполнения индивидуальных заданий.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по дисциплине «Дискретная математика».

УДК 514(072)
ББК В126я73

Оглавление

1. Булевы функции

Самые простые дискретные функции – это функции, аргументы которых имеют наименьшее число различных значений и которые также имеют наименьшее число значений. Это наименьшее число значений равно двум, так как функция, имеющая только одно значение, является константной, а потому мало интересна, а если аргумент имеет только одно значение, то функция фактически не зависит от такого аргумента (значение ее не изменяется).

Так как безразлично, какие обозначения выбирать в качестве значений аргумента или функции (всегда можно переобозначить), то мы для дальнейшего выберем в качестве таких значений 0 и 1. Таким образом, простейшие дискретные функции с n аргументами действуют из прямого произведения $\{0,1\}^n$ на множество $\{0{,}1\}$. Впервые их стал изучать английский математик и логик Джордж Буль – создатель формальной логики, и они названы булевыми по его имени.

Самые простые булевы функции имеют 1 аргумент. Таблица каждой такой функции состоит из двух строк, в каждой из которых дается значение функции в зависимости от значения аргумента. Например, таблица некоторой булевой функции $f(x)$ может выглядеть следующим образом:

x	$f(x)$
0	1
1	0

.

Так как в такой таблице булева функция может принимать при каждом значении аргумента только 1 из 2 значений, то число различных булевых функций с 1 аргументом определяется как размещение с повторением из 2 (значений аргумента) по 2 (значения функции), т. е. имеется $2^2 = 4$ различных функции.

Выпишем табличное задание для всех 4 функций 1 аргумента:

x	$f_1(x) = 0$	$f_2(x) = x$	$f_3(x) = \overline{x}$	$f_4(x) = 1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции f_1 и f_4 принимают константные значения соответственно 0 и 1 и называются *тождественный 0* и *тождественная 1*. Функция f_2

принимает значение аргумента и называется *тождественной* функцией, а функция f_3 принимает значение, противоположное аргументу (1 для 0 и 0 для 1), и называется *отрицанием.*

Число различных булевых функций с n аргументами можно подсчитать следующим образом:
1) во-первых, число различных наборов аргументов определяется как число элементов прямого произведения $|\{0,1\}^n| = 2^n$;
2) во-вторых, каждая функция определяется как вектор из 2^n нулей и единиц.
А потому число различных булевых функций с n аргументами определяется как число размещений с повторениями 2 элементов (значений функции) на 2^n местах и равно 2^{2^n}. Для $n = 1$ это число $2^2 = 4$ мы уже нашли. Для $n = 2$ это число равно $2^{2^2} = 2^4 = 16$. Для $n = 3$ оно равно $2^{2^3} = 256$, а для $n = 4$ это число $2^{16} = 65576$, и далее оно растет очень быстро (сверхэкспонента). Но мы увидим в дальнейшем, что для описания любой булевой функции с любым числом аргументов вполне достаточно описать такие функции с двумя аргументами и использовать суперпозиции таких функций.

Наибольшее использование булевы функции нашли в операциях формальной логики высказываний [1], а потому мы их введем для описания операций над высказываниями.

2. Высказывания и операции над ними

Под *высказыванием* понимается любое повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или оно *ложно.* Например, утверждение «$2 \times 2 = 4$» является истинным высказыванием, а утверждение «Земля вращается вокруг Марса» является ложным высказыванием. Предложение «Как хорошо!» не является высказыванием (кому хорошо, а кому не очень). Также не является высказыванием предложение «Сегодня хорошая погода», так как оно носит субъективный характер, и потому об истинности его ничего сказать нельзя. Не является высказыванием и вопросительное предложение «Все ли студенты пришли на лекцию?».

[1] Дж. Буль создавал их как раз для описания формальной логики.

Для высказывания вводится истинностное значение, которое в различных системах описания по-разному обозначается. Наиболее частыми обозначениями являются следующие:

- *true* – для обозначения истинного высказывания и *false* для обозначения ложного высказывания;
- T и F – аналогично;
- *И* и *Л* – аналогично;
- 1 – для обозначения истинного высказывания и 0 – для обозначения ложного высказывания.

Мы будем использовать последнее обозначение 1 и 0, которые и ввел Дж. Буль.

Из простых высказываний можно получать более сложные высказывания, соединяя их различными союзами или условными предложениями. Один из самых простых способов – из высказывания x получить его *отрицание*, т. е. высказывание *не* x. Оно истинно тогда и только тогда, когда ложно исходное высказывание x. Операция отрицания является унарной. Для ее обозначения используется знак $\neg$ перед высказыванием либо знак $^{-}$ (черты) над высказыванием. Мы будем использовать последний. Например, $\overline{x < 1}$ означает высказывание «*неверно, что x меньше 1*», которое можно записать и без операции отрицания, т. е. как $x \geq 1$.

В языке программирования C^{++} для отрицания используется восклицательный знак ! перед высказыванием.

Приведем таблицу истинности для операции отрицания:

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Примером использования отрицания для множеств является $\overline{x \in A}$, что означает $x \notin A$ или $x \in \overline{A}$. Такое обозначение отрицания похоже на обозначение операции дополнения для множеств, и далее мы увидим тесную связь между операцией отрицания для высказываний и операцией дополнения для множества.

Другой способ получения более сложного высказывание – это их объединение при помощи союза *и*. Например, высказывание «$x < 1$ и $\sin x < 0$» состоит из двух высказываний $x < 1$ и $\sin x < 0$, соединенных союзом *и*. Такое высказывание истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания, составляющие его, являются истинными. Оно называется *конъюнкцией высказываний*. Операция конъюнкции, таким образом, соединяет 2 высказывания в одно, истинность которого зависит от истинности обоих входящих в него высказываний. Конъюнкция высказываний x и y имеет разные обозначения, из которых наиболее употребительны & и $\wedge$. Мы будем использовать последнее, в то время как в языке программирования C^{++} используются два знака амперсанд && для операции конъюнкции.

Приведем таблицу истинности для операции конъюнкции:

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примером использования конъюнкции для множеств является

$$x \in A \ \wedge \ x \in B,$$

что мы обычно записываем как $x \in A \cap B$. Обозначение операции пересечения множеств похоже на обозначение конъюнкции, поэтому мы и выбрали такое обозначение: в дальнейшем мы покажем, что между операцией пересечения для множеств и операцией конъюнкции для высказываний есть тесная связь.

Еще один способ получения более сложного высказывания – это соединение двух высказываний при помощи союза *или*. Например, высказывание «$x < 1$ или $\sin x < 0$» состоит из двух высказываний $x < 1$ и $\sin x < 0$, соединенных союзом *или*. Такое высказывание ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания, составляющие его, являются ложными. Оно называется *дизъюнкцией высказываний*. Операция дизъюнкции, таким образом, соединяет 2 высказывания в одно, истинность которого зависит от истинности хотя бы одного из входящих в него высказываний. Дизъюнкция высказываний x и y имеет разные обозначения, из которых наиболее употребительны $|$ и $\vee$. Мы будем использовать последнее, в то время как в языке программирования C^{++} используются два знака вертикальной черты $||$ для операции дизъюнкции.

Приведем таблицу истинности для операции дизъюнкции:

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Примером использования дизъюнкции для множеств является

$$x \in A \ \vee \ x \in B,$$

что мы обычно записываем как $x \in A \cup B$. Обозначение операции объединения множеств похоже на обозначение дизъюнкции, поэтому мы и выбрали такое обозначение: в дальнейшем мы покажем, что между операцией объединения для множеств и операцией дизъюнкции для высказываний есть тесная связь.

Следующий способ получения более сложного высказывания из двух более простых – их соединение при помощи условия «*если…, то…*». Например, «*если* $x = \pi$, *то* $\cos x = -1$» получено из простых высказываний $x = \pi$ и $\cos x = -1$. Условие при этом можно выражать и другими фразами, например «*из* $x = \pi$ *следует* $\cos x = -1$», или «$x = \pi$ *влечет* $\cos x = -1$», или «$\cos x = -1$ *вытекает из* $x = \pi$». Такое соединение двух высказываний называется *импликацией*, первое высказывание в форме «*если…, то…*» называется *посылкой*, а второе – *заключением*. Заметим, что импликация высказываний не устанавливает причинно-следственную связь между посылкой и заключением, поскольку импликация не является *выводом*, используемым при доказательстве утверждений.

Импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно независимо от смысла высказываний. При ложности посылки импликация всегда является истинной. Действительно, фразу «*если* $2\times 2=5$, *то* $\cos x=2$» можно интерпретировать следующим образом: «*уж если* $2\times 2=5$, *то и* $\cos x=2$», а потому считать ее истинной. При этом заключение необязательно должно быть ложным. Например, высказывание «*Поскольку* $2\times 2=5$, *то* $2+2=4$» мы тоже должны считать истинным. Для обозначения импликации используется знак $\to$, который находится между посылкой и заключением (стрелка идет в сторону заключения). Например, $x=\pi \ \to\ \cos x=-1$ или $2\times 2=5\ \to\ 2+2=4$. В языке программирования C^{++} для импликации используется отношение $<=$ (нетрудно видеть, что это отношение для булевых значений 0 и 1 ложно тогда и только тогда, когда посылка имеет значение 1, т. е. истинна, а заключение имеет значение 0, т. е. ложно).

Приведем таблицу истинности для операции импликации:

x	y	$x\to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Примером использования импликации для множеств является

$$x\in A\ \to\ x\in B.$$

Если это выполнено для любого элемента $x\in A$, то мы пишем включение множества A в множество B: $A\subseteq B$. Эту связь между отношением включения для множеств и операцией импликации для высказываний о принадлежности элементов множествам мы установим позже.

Рассмотрим последнее широко употребительное соединение двух высказываний посредством условия «*... тогда и только тогда, когда ...*» или аналогичных ему: «*... в том и только в том случае, когда ...*», «*Для ... необходимо и достаточно, чтобы ...*», «*... эквивалентно ...*» и т. д. Такая операция соединения двух высказываний называется *эквиваленцией*.

Эквиваленция истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания, входящие в нее, имеют одинаковые значения истинности, т. е. либо оба истинны, либо оба ложны. Для эквиваленции мы будем использовать знак двусторонней стрелки $\leftrightarrow$. Например, $x=k\pi,\ k\in\mathbb{N}\ \ \leftrightarrow$

$\sin x = 0$. В языке программирования C^{++} для импликации используется отношение $==$ (нетрудно видеть, что это отношение для булевых значений 0 и 1 истинно тогда и только тогда, когда оба операнда этого отношения имеют одинаковые значения, т. е. оба 0 или оба 1). Приведем таблицу истинности для операции эквиваленции:

x	y	$x \leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Примером использования эквиваленции для множеств является

$$x \in A \ \leftrightarrow \ x \in B.$$

Если это выполнено для любого элемента $x \in U$ (универсального множества), то мы пишем равенство множеств $A = B$. Эту связь между отношением равенства для множеств и операцией эквиваленции для высказываний об элементах множеств мы установим позже.

Выпишем таблицу истинности для тех булевых функций двух переменных, которые мы уже получили:

x	y	0	1	x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \to y$	$y \to x$	$x \leftrightarrow y$
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1

Из 16 булевых функций двух переменных мы в этой таблице указали 11. Они имеют свои названия: *тождественный 0, тождественная 1, тождественный первый аргумент, тождественный второй аргумент и т. д.* Две функции из функций, не вошедших в эту таблицу, также имеют свои названия, но мы их введем позже.

3. Формулы высказываний и их выполнимость

Введенные операции над высказываниями позволяют выражать любые сложные высказывания. Но, для того чтобы определить порядок выполнения операций над высказываниями, необходимо либо каждый операнд заключать в круглые скобки и выполнять операции в порядке скобок, заменяя каждый операнд на вычисленное его значение, либо договориться о приоритете операций и тогда расставлять скобки только в тех случаях, когда порядок операций не соответствует приоритету. Последний случай более предпочтителен, так как делает запись формулы высказываний более наглядной.

Принят приоритет операций в том порядке, в котором мы описывали операции, т. е. $\bar{}\,, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ – в первую очередь, внутри самых внутренних скобок выполняется отрицание, затем конъюнкция, дизъюнкция, импликация и, наконец, эквиваленция и т. д.; затем самые внутренние скобки убираются (заменяются вычисленным значением) и вычисления продолжаются в том же порядке.

Для еще большей наглядности опускают знак конъюнкции, как в алгебраическом выражении опускают знак умножения, таблица функции конъюнкции полностью совпадает с таблицей функции умножения x на y.

Пусть, например, необходимо вычислять формулу

$$F_1 = (((x \rightarrow \overline{y}) \leftrightarrow (y \vee z)) \wedge (x \wedge y)).$$

С учетом сделанных замечаний о приоритете и опускании знака операции конъюнкции формула преобразуется в более наглядную:

$$F_1 = (x \rightarrow \overline{y} \leftrightarrow y \vee z)(xy).$$

Пусть необходимо вычислить значение этой формулы при следующих значениях аргументов: $x = 1, y = 1, z = 0$. Тогда последовательным вычислением в порядке приоритета получаем:

$$\overline{y} = 0,\ y \vee z = 1,\ x \rightarrow 0 = 0,\ 0 \leftrightarrow 1 = 0,\ xy = x \wedge y = 1,\ F_1 = 0 \wedge 1 = 0,$$

и, следовательно, значение формулы равно 0.

Каждая формула выражает булеву функцию, значение которой зависит от значений высказываний, входящих в формулу. Булева функция называется *выполнимой*, если существует такой набор значений переменных (высказываний, входящих в формулу), для которых значение функции истинно (равно 1). Для определения свойства выполнимости булевой функции пока неизвестны алгоритмы, отличные по трудоемкости от вычисления значений функции для всех наборов переменных (и, по всей видимости, они не существуют).

Поэтому для установления выполнимости булевой функции, заданной формулой F_1, составим последовательно таблицу истинности для каждой операции, входящей в формулу F_1, а затем и для значения формулы F_1:

x	y	z	$\overbrace{\overline{y}}^{f_1}$	$\overbrace{y \vee z}^{f_2}$	$\overbrace{x \to f_1}^{f_3}$	$\overbrace{f_3 \leftrightarrow f_2}^{f_4}$	$\overbrace{x \wedge y}^{f_5}$	$\overbrace{f_4 \wedge f_5}^{F_1}$
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0

Из таблицы истинности следует, что функция F_1 невыполнима. Такая функция называется *тождественно ложной* или *противоречием.*

Рассмотрим теперь формулу

$$F_2 = (x \to \overline{y} \leftrightarrow \overline{y \vee z})(x \wedge y).$$

Ее таблица истинности, приведенная ниже, показывает, что эта функция F_2 выполнима.

x	y	z	$\overbrace{\overline{y}}^{f_1}$	$\overbrace{y \vee z}^{f_2}$	$\overbrace{\overline{f_2}}^{f_3}$	$\overbrace{x \to f_1}^{f_4}$	$\overbrace{f_4 \leftrightarrow f_3}^{f_5}$	$\overbrace{x \wedge y}^{f_6}$	$\overbrace{f_5 \wedge f_6}^{F_2}$
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1

Если функция выполнима при любом наборе переменных, то она называется *тождественно истинной* или *тавтологией*. Примером такой функции может служить формула

$$F_3 = (x \to y) \wedge (y \to z) \to (x \to z).$$

Ее таблица истинности приведена ниже:

x	y	z	$\overbrace{x \to y}^{f_1}$	$\overbrace{y \to z}^{f_2}$	$\overbrace{f_1 \wedge f_2}^{f_3}$	$\overbrace{x \to z}^{f_4}$	$\overbrace{f_3 \to f_4}^{F_3}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Эта тавтология выражает закон транзитивности импликации: *если из x следует y и из y следует z, то из x следует z.* Тавтологии играют исключительно важную роль при доказательстве утверждений. Поэтому приведем список тавтологий, выполняющих роль законов вывода:

1.	$x \vee \overline{x}$	закон исключенного третьего
2.	$\overline{\overline{x}} \leftrightarrow x$	закон двойного отрицания
3.	$x \wedge x \leftrightarrow x$	закон поглощения
4.	$x \vee x \leftrightarrow x$	закон поглощения
5.	$x \wedge y \to x$	закон вывода
6.	$x \to x \vee y$	закон вывода
7.	$x \wedge y \leftrightarrow y \wedge x$	з. коммутативности конъюнкции
8.	$x \vee y \leftrightarrow y \vee x$	з. коммутативности дизъюнкции
9.	$x \wedge (y \wedge z) \leftrightarrow (x \wedge y) \wedge z$	з. ассоциативности конъюнкции
10.	$x \vee (y \vee z) \leftrightarrow (x \vee y) \vee z$	з. ассоциативности дизъюнкции
11.	$x \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	закон дистрибутивности
12.	$x \vee (y \wedge z) \leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	закон дистрибутивности
13.	$\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$	закон двойственности
14.	$\overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{x} \wedge \overline{y}$	закон двойственности
15.	$x \to y \leftrightarrow \overline{y} \to \overline{x}$	закон контрпозиции

16. $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (x \to z)$ з. транзитивности импликации
17. $(\overline{x} \to y) \wedge (\overline{x} \to \overline{y}) \to x$ з. косвенного доказательства
18. $(x \vee y) \wedge (x \to z) \wedge (y \to z) \leftrightarrow z$ закон разбора случаев
19. $(x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z) \to (x \leftrightarrow z)$ з. транзитивности эквиваленции
20. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow (\overline{x} \leftrightarrow \overline{y})$ закон противоположностей

Заметим, что ассоциативность дизъюнкции и ассоциативность конъюнкции позволяют ввести групповые операции конъюнкции и дизъюнкции:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i, \qquad \bigvee_{i=1}^{n} x_i.$$

4. Равносильность (эквивалентность) формул высказываний

Две формулы высказываний равносильны (эквивалентны), если для любых наборов значений переменных они принимают одинаковые значения. Тождество

$$A(x_1, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, \ldots, x_n)$$

следует читать A *равносильно* B. Если A – тавтология, то будем писать $A \equiv 1$, а если A – противоречие, то $A \equiv 0$.

Теорема 1. $A \equiv B \;\Leftrightarrow\; (A \leftrightarrow B) \equiv 1$.

Действительно, если $A \equiv B$, то для любого набора переменных значения обеих формул одинаковы и, значит, их эквиваленция является тавтологией. Обратно, если эквиваленция формул A и B является тавтологией, то обе формулы принимают одинаковые значения на каждом наборе переменных и, следовательно, они равносильны.

Равносильность формул позволяет их преобразовывать так же, как это делается в алгебре числовых выражений. Приведем список равносильностей, часто используемых для этого:

1. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ закон двойного отрицания
2. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ коммутат. конъюнкции
3. $A \vee B \equiv B \vee A$ коммутат. дизъюнкции
4. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ ассоциат. конъюнкции
5. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ ассоциат. дизъюнкции

6. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ закон дистрибутивности
7. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ закон дистрибутивности
8. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ закон двойственности
9. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ закон двойственности
10. $A \vee A \equiv A$ закон идемпотентности
11. $A \wedge A \equiv A$ закон идемпотентности
12. $A \wedge 1 \equiv A$
13. $A \vee 0 \equiv A$
14. $A \vee \overline{A} = 1$ закон исключ. третьего
15. $A \wedge \overline{A} = 0$ закон исключ. третьего
16. $A \wedge 0 \equiv 0$
17. $A \vee 1 \equiv 1$
18. $1 \to A \equiv A$
19. $A \to 1 \equiv 1$
20. $A \to 0 \equiv \overline{A}$
21. $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$
22. $A \leftrightarrow B \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$
23. $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$
24. $A \to B \wedge C \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$
25. $A \wedge B \to C \equiv A \to (B \to C)$
26. $A \to \overline{B} \equiv B \to \overline{A}$

Используя равносильности формул, можно приводить их к более простому виду. Приведем пример.
$(A \vee A) \wedge B \vee A \overset{10}{\equiv} A \wedge B \vee A \overset{12}{\equiv} A \wedge B \vee A \wedge 1 \overset{6}{\equiv} A \wedge (B \vee 1) \overset{17}{\equiv} A \wedge 1 \overset{12}{\equiv} A.$
В этом примере над каждым использованием равносильности мы пишем ее номер в списке.

Подобно группированию конъюнкций под одним знаком общей конъюнкции, а также группированию дизъюнкций под одним знаком общей дизъюнкции мы будем поступать и с равносильностью формул, используя знаки общей конъюнкции и общей дизъюнкции для формул группирования:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i, \qquad \bigvee_{i=1}^{n} A_i.$$

Заметим, что закон дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции напоминает закон дистрибутивности умножения относительно сложения. Поэтому конъюнкцию часто называют логическим умножением[2], а дизъюнкцию – логическим сложением. Подобно алгебре чисел, где введены операции умножения, сложения и константы 1 и 0, введенные нами операции логического умножения, сложения, а также логические константы 1 и 0 подчиняются аналогичным законам (равносильности 1-13), и потому такая система операций называется алгеброй Буля, или *булевой алгеброй.*

Таким образом, алгебра высказываний есть булева алгебра. Если для алгебры множеств операцию пересечения интерпретировать как конъюнкцию, операцию объединения интерпретировать как дизъюнкцию, а операцию дополнения – как отрицание, то нетрудно убедиться, что выполняются все законы с 1 по 13 для алгебры множеств. Поэтому алгебра множеств также является булевой алгеброй.

Еще 1 пример булевой алгебры – это множество точек отрезка $[a, b]$ с введенными операциями:

- сложение $x \vee y = \max\{x, y\}$;
- умножение $x \wedge y = \min\{x, y\}$;
- отрицание $\overline{x} = a + b - x$ (точка отрезку $[a, b]$, симметричная x относительно середины отрезка $\frac{a+b}{2}$).

Роль 0 играет левый конец отрезка a, а роль 1 – правый конец отрезка b. Законы 1–13 непосредственно проверяются.

5. Связь алгебры множеств и алгебры высказываний

Так как обе алгебры – множеств и высказываний – являются булевыми алгебрами, то можно установить такую связь между операциями над множествами и операциями над высказываниями, которая позволяла бы проверку некоторого утверждения для множеств свести к проверке тождественной истинности высказывания. Последняя может быть осуществлена при помощи компьютерной программы, что в значительной степени облегчает процесс доказательства утверждения для множеств.

[2] К тому же таблицы истинности для конъюнкции и умножения совпадают.

Пусть U – некоторое универсальное множество и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – его подмножества. Для любого элемента $x \in U$ введем высказывания

$$x_i = x \in X_i \quad (i \in \overline{1, n}).$$

Пусть A – произвольная формула алгебры высказываний, не содержащая констант 0 и 1 и содержащая только операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции с переменными (высказываниями) $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обозначим через $A(x)$ выражение, полученное из формулы A заменой x_i на $x \in X_i$. Например,
если $A_1 = x_1 \wedge \ \overline{x_2}$, то $A_1(x) = x \in X_1 \ \wedge \ \overline{x \in X_2}$,
а если $A_2 = x_1 \wedge \ \overline{x_2 \vee x_3}$, то $A_2(x) = x \in X_1 \ \wedge \ \overline{x \in X_2 \ \vee x \in X_3}$.

Обозначим через Z_A выражение, полученное из A заменой x_i на X_i и символов $\wedge, \vee, ^{-}$ на $\cap, \cup, ^{-}$ соответственно. Например,
$Z_{A_1} = X_1 \cap \overline{X_2}, \quad Z_{A_2} = X_1 \cap \overline{X_2 \cup X_3}$.

Теорема 2 (о связи операций над множествами и операций над высказываниями). *Для любой формулы A, любого множества U и его подмножеств $X_1, X_2, \ldots$, любого $x \in U$ $A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $x \in Z_A$.*

Доказательство. Доказательство ведем методом математической индукции по числу операций $\wedge, \vee, ^{-}$ в формуле A. Назовем это число *степенью* данной формулы A.

1. Пусть степень A равна 0. Тогда $A = x_i$, $A(x) = x \in X_i, Z_A = X_i$ и утверждение теоремы превращается в тавтологию: $x \in X_i \ \Leftrightarrow x \in X_i$. Базис индукции доказан.

2. Пусть утверждение теоремы верно для всех формул степени, меньшей k. Рассмотрим формулу A степени k. Тогда последней выполняемой в формуле A операцией является одна из операций множества $\{\wedge, \vee, ^{-}\}$, т. е. A имеет один из видов:

$$1)\ A = \overline{B}, \qquad 2)\ A = B \vee C, \qquad 3)\ A = B \wedge C,$$

   причем B и C имеют степени, меньшие k. Рассмотрим каждый случай.
   1) $Z_A = \overline{Z_B}$, $A(x) = \overline{B(x)}$. Так как $A = \overline{B}$, высказывание $A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда ложно $B(x)$, т. е. тогда и только тогда, когда $x \notin Z_B$, что эквивалентно $x \in Z_A$. Случай

доказан.

2) $Z_A = Z_B \cup Z_C$, $A(x) = B(x) \vee C(x)$. Так как $A = B \vee C$, высказывание $A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда истинно $B(x) \vee C(x)$, т. е. тогда только тогда, когда $x \in Z_B$ или $x \in Z_C$, что эквивалентно $x \in Z_B \cup Z_C = Z_A$. Случай доказан.

3) $Z_A = Z_B \cap Z_C$, $A(x) = B(x) \wedge C(x)$. Так как $A = B \wedge C$, высказывание $A(x)$ истинно т. и т.т., когда истинно $B(x) \wedge C(x)$, т. е. тогда и только тогда, когда $x \in Z_B$ и $x \in Z_C$, что эквивалентно $x \in Z_B \cap Z_C = Z_A$. Случай доказан.

Шаг индукции сделан. Теорема доказана.

Следствие 1. $Z_A = U \ \Leftrightarrow \forall x: \ (x \in U \Rightarrow A(x) = 1)$.
Если для любого $x \in U$ $A(x) = 1$, то по теореме $x \in Z_A$, т. е. $Z_A = U$. Обратно, если $Z_A = U$, то для любого $x \in U: \ x \in Z_A$ и, следовательно, по теореме $A(x) = 1$ для любого $x \in U$.

Следствие 2. $Z_A = \emptyset \ \Leftrightarrow \forall x: \ (x \in U \Rightarrow A(x) = 0)$.
Если $Z_A = \emptyset$, то $\forall x : x \notin Z_A$ и по теореме $A(x) = 0$. Обратно, если для любого $x \in U$ $A(x) = 0$, то по теореме $x \notin Z_A$ и, следовательно $Z_A = \emptyset$.

Следствие 3. $Z_A = Z_B \ \Leftrightarrow \forall x: \ (x \in U \Rightarrow A(x) = B(x))$.
Если для любого $x \in U : A(x) = B(x)$, то в случае $A(x) = B(x) = 1$ по теореме $x \in Z_A, x \in Z_B$; а в случае $A(x) = B(x) = 0$ по теореме $x \notin Z_A, x \notin Z_B$; объединяя оба случая, получим, что Z_A и Z_B состоят из одних и тех же элементов, т. е. $Z_A = Z_B$. Обратно, если $Z_A = Z_B$, то для любого $x \in U: \ x \in Z_A = Z_B$ по теореме $A(x) = B(x) = 1$; а для любого $x \in U: \ x \notin Z_A = Z_B$ по теореме $A(x) = B(x) = 0$; и, следовательно, в обоих случаях $A(x) = B(x)$.

Следствие 4. $Z_A \subseteq Z_B \ \Leftrightarrow \forall x: \ (x \in U \Rightarrow (A(x) \to B(x)) = 1)$.
Пусть $Z_A \subseteq Z_B$. Если $x \in Z_A$, то $x \in Z_B$ и по теореме $A(x) = B(x) = 1$; если же $x \notin Z_A$, то по теореме $A(x) = 0$ и, следовательно, $A(x) \to B(x) = 1$; объединяя оба случая, получим, что для всех $x \in U : (A(x) \to B(x)) = 1$. Обратно, пусть $\forall x \ (x \in U \Rightarrow (A(x) \to B(x)) = 1)$. Тогда, если $x \in Z_A$, то по теореме $A(x) = 1$, а из условия следует $B(x) = 1$, а потому по теореме $x \in Z_B$ и, следовательно, $Z_A \subseteq Z_B$.

Доказанные теорема 2 и следствия из нее дают возможность свести доказательство утверждения для множеств к проверке тождественной истинности соответствующего высказывания, которое получается следующими действиями:

1. Выделить из утверждения все отношения множеств (равенства, включения).

2. Каждое отношение множеств в утверждении заменить на высказывание следующим образом:
   1) каждое множество X_i заменить на высказывание $x_i \equiv x \in X_i$;
   2) каждую операцию пересечения множеств заменить на конъюнкцию высказываний, соответствующих этим множествам;
   3) каждую операцию объединения множеств заменить на дизъюнкцию высказываний, соответствующих этим множествам;
   4) каждую операцию дополнения множества заменить на отрицание высказывания, соответствующего этому множеству.

3. Подставить каждое полученное высказывание в исходное утверждение на место соответствующего отношения множеств.

Обоснование сведения зависит от отношений множеств, входящих в утверждение, и мы его оставляем в качестве упражнения при выполнении задания. Пример такого сведения приведен в индивидуальном задании 4.

6. Индивидуальное задание 4

1. Решить задачу 1 задания 1 путем сведения к проверке тождественной истинности формулы алгебры высказываний. Обосновать сведение утверждения для множеств [3] к формуле алгебры высказываний ссылками на теорему и следствия для каждой ее части.

2. Решить комбинаторную задачу: *сколько чисел с заданным числом знаков можно составить из цифр заданного числа?*. Обосновать подробно весь ход решения.

[3] Это учебная задача, в решении которой запрещаются любые преобразования множеств за исключением замены разности множеств на пересечение множества первого операнда с дополнением множества второго операнда.

6.1. Пример задачи 1 и ее решения

$$X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \emptyset \text{ и } X_1 \cup X_2 \cup X_3 = U \;\leftrightarrow\; (X_2 \setminus X_3) \cup (X_1 \setminus X_2) = X_1 \cup \overline{X}_3$$

Введем обозначения:
$Z_A \equiv (X_2 \setminus X_3) \cup (X_1 \setminus X_2)$; $Z_B \equiv X_1 \cup \overline{X}_3$; $Z_C \equiv X_1 \cap X_2 \cap X_3$; $Z_D \equiv X_1 \cup X_2 \cup X_3$.

Тогда $Z_C = \emptyset \;\wedge\; Z_D = U \;\leftrightarrow\; Z_A = Z_B$.

Преобразуем разность множеств $Z_A = (X_2 \cap \overline{X}_3) \cup (X_1 \cap \overline{X}_2)$.

Пусть $x \in U$ – произвольный элемент U. Введем обозначение для высказываний

$$y_i \equiv x \in X_i.$$

Тогда по теореме о связи формул алгебры множеств и формул алгебры высказываний

$$x \in Z_A \;\leftrightarrow y_2 \wedge \overline{y_3} \vee y_1 \wedge \overline{y_2} = 1; \quad x \in Z_B \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3} = 1;$$

$$x \in Z_C \;\leftrightarrow y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 = 1; \quad x \in Z_D \;\leftrightarrow y_1 \vee y_2 \vee y_3 = 1$$

и, следовательно, по следствию 3 из теоремы

$$Z_A = Z_B \;\leftrightarrow (y_2 \wedge \overline{y_3} \vee y_1 \wedge \overline{y_2} \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3} = 1),$$

а по следствиям 1 и 2

$$Z_C = \emptyset \;\leftrightarrow y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 = 0; \quad Z_D = U \;\leftrightarrow y_1 \vee y_2 \vee y_3 = 1.$$

Окончательно получаем[4]

$$(Z_C = \emptyset \;\wedge\; Z_D = U \;\leftrightarrow\; Z_A = Z_B) \;\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\; (\overline{y_1 \wedge y_2 \wedge y_3} \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \;\leftrightarrow (y_2 \wedge \overline{y_3} \vee y_1 \wedge \overline{y_2} \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3})),$$

и проверка утверждения задачи сводится к проверке тождественной истинности следующей формулы алгебры высказываний:

$$F \equiv \overline{y_1 \wedge y_2 \wedge y_3} \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \;\leftrightarrow (y_2 \wedge \overline{y_3} \vee y_1 \wedge \overline{y_2} \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3}).$$

[4] Следует обратить внимание на правильность выполнения эквиваленций, что в некоторых случаях может быть достигнуто лишь правильной расстановкой дополнительных скобок. Не следует также расставлять лишние скобки, если приоритет операций позволяет обойтись без них.

Обозначим
$F_1 \equiv \overline{y_1 \wedge y_2 \wedge y_3}$; $\quad F_2 \equiv y_1 \vee y_2 \vee y_3$; $\quad F_3 \equiv y_2 \wedge \overline{y_3}$; $\quad F_4 \equiv y_1 \wedge \overline{y_2}$;
$F_5 \equiv y_1 \vee \overline{y_3}$.
Тогда $F = F_1 \wedge F_2 \leftrightarrow (F_3 \vee F_4 \leftrightarrow F_5)$.

Составим таблицу истинности F:

$y_1y_2y_3$	F_1	F_2	$F_1 \wedge F_2$	F_3	F_4	$F_3 \vee F_4$	F_5	$F_3 \vee F_4 \leftrightarrow F_5$	F
0 0 0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
0 0 1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0 1 0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
1 0 0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1 0 1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1 1 1	0	1	0	0	0	0	1	0	1

Из таблицы истинности видно, что $F \equiv 1$, т. е. F – тавтология, что доказывает истинность утверждения для множеств.

6.2. Методические рекомендации для задания 4

Задача 1

1. Цель задачи 1 показать, что обоснование или опровержение утверждения для множеств может быть достигнуто путем формального сведения проверки утверждения для множеств к проверке тождественной истинности соответствующей булевой функции, полученной исключительно формальным образом. Поэтому не следует преобразовывать формулы множеств (входящие в отношения для множеств), за исключением замены разности множеств на пересечение с дополнением вычитаемого множества. Поэтому **типичной ошибкой** являются **ненужные преобразования**.

2. При выводе булевой функции необходимо следить за правильностью получаемых утверждений. **Типичной ошибкой** является нарушение **порядка выполнения операций эквиваленции**.

3. При расстановке скобок для сохранения порядка выполнения эквиваленций может оказаться, что многие скобки являются лиш-

ними, и это является еще одной **типичной ошибкой незнания приоритета операций**. Все лишние скобки следует удалить, чтобы выражение было легкочитаемым и легкопроверяемым.

4. В таблице истинности для окончательной формулы булевой функции все промежуточные выражения должны содержать возможно меньшее количество операций, позволяющее проверить вычисления таблицы истинности. Иначе отмечается **ошибка составления таблицы истинности**.

Задача 2

1. Прежде всего изучить рекомендации в разделе 16 "Решение более сложных комбинаторных задач" пособия "Элементы комбинаторики" и разбить базовое множество задачи на 2 различных подмножества по повторению цифр (например, на подмножество B_n неповотряющихся цифр и подмножество B_p повторяющихся цифр; а если все цифры повторяются, то выделить подмножество максимально повторяющихся цифр и подмножество остальных цифр).

2. Разбить множество A чисел задачи на некоторое количество подмножеств A_k по количеству k цифр одного из частей базового множества и перейти к генерации этих подмножеств по очереди.

3. Если генерация A_k с выполнением условий правила умножения невозможна, то разбить множество A_k по очевидному свойству, которое выполнено для одного подмножества разбиения и не выполнено для другого (например, цифры из B_p в равном количестве или в разном количестве). Тогда обоснования становятся очевидными. В противном случае требуется привести эти обоснования и это может оказаться не более простым способом разбиения. **Типичная ошибка** здесь **отсутствие обоснования** правила умножения.

4. Если генерация для подмножества возможна, то разбить ее на последовательность действий таким образом, чтобы проверка выполнения условий правила умножения также стала очевидной. Наиболее просто сначала выбрать все цифры для числа из A, а затем

определить их порядок в числе. Не надо вводить правила умолчания для выбора цифр числа, так как это затрудняет проверку условия полноты генерации (каждая генерация дает число).

5. Каждое действие генерации должно четко указывать комбинаторную модель, которую описывает это действие. Допускается указывать модель формулой модели, определяющей количество способов генерации. **Типичная ошибка** здесь **отсутствие указания модели** шага генерации.

6. После каждой генерации и ее обоснования должен быть подсчитан размер генерируемого подмножества.

7. После генерации всех подмножеств разбиения должен быть подсчитан его размер.

6.3. Варианты второй задачи индивидуального задания 4

1. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 12115233?
2. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 12335233?
3. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 12235233?
4. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 12115233?
5. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 12135233?
6. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 12525233?
7. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 12333233?
8. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 12225233?
9. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 12125233?
10. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 12335333?
11. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 12115231?
12. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 12115233?

13. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 12335233?

14. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 21447752?

15. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 14477522?

16. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 767533432?

17. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 675433327?

18. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 754333276?

19. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 543327767?

20. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 881326644?

21. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 813662448?

22. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 136426848?

23. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 364862841?

24. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 974972671?

25. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 749627719?

26. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 496772917?

27. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 694277179?

28. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 942177976?

29. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 421977679?

30. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 219767497?

31. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 197672794?

32. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 882233315?

33. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 282383153?

34. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 823138352?

35. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 231838253?

36. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 141455666?

37. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 414565616?

38. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 145654166?

39. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 456154661?

40. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 822735544?

41. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 227535484?

42. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 275453284?

43. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 754235248?

44. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 243342517?

45. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 433542172?

46. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 353124274?

47. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 531422753?

48. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 857531222?

49. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 573221258?

50. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 732122585?

51. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 832122585?

52. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 243517342?

53. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 421433572?

54. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 242743531?

55. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 12135233?

56. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 72525233?

57. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 72333233?

58. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 72225233?

59. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 72125233?

60. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 72335333?

61. Сколько 4-значных чисел можно составить из цифр числа 72115231?

62. Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 72115233?

63. Сколько 5-значных чисел можно составить из цифр числа 72335233?

64. Сколько 6-значных чисел можно составить из цифр числа 26447752?

7. Двойственные булевы функции и принцип двойственности

Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Заметим, что отрицание $\overline{f}$ в этом определении означает, что в таблице истинности все значения функции инвертируются (нули заменяются единицами, единицы – нулями). Отрицание каждого аргумента $\overline{x_i}$ $(i = 1, \ldots, x_n)$ означает, что мы переходим к противоположному набору аргументов. При лексикографическом упорядочивании наборов аргументов в таблице истинности противоположные наборы симметричны относительно их середины. Поэтому верен следующий способ получения по таблице истинности какой-либо булевой функции таблицы истинности для ее двойственной функции:

- инвертировать столбец функции;
- перевернуть столбец.

Эти действия можно выполнять в любом порядке. Например, в следующей таблице истинности приведена одна из булевых функции с 3 аргументами и ее двойственная функция, полученная описанными действиями (инвертирование и переворот столбца). Нетрудно видеть, что функция, двойственная к двойственной функции, является исходной функцией, т. е. $f^{**} = (f^*)^* = f$. В самом деле, в таблице истинности нужно дважды инвертировать и дважды перевернуть столбец, что приведет к таблице истинности исходной функции. Поэтому на парах булевых функций определяется *симметричное отношение двойственности.* Так, функция 0 двойственна к функции 1 и, наоборот, функция 1 двойственна к функции 0. Функции конъюнкции и дизъюнкции двойственны друг другу. Взаимодвойственными являются функции эквиваленции и исключающей дизъюнкции (сложения по модулю 2).

x y z	f	f^*
0 0 0	1	1
0 0 1	0	0
0 1 0	1	1
0 1 1	1	0
1 0 0	1	0
1 0 1	0	0
1 1 0	1	1
1 1 1	0	0

Булева функция, двойственная сама себе, называется *самодвойственной*. Таковы, например, функция отрицания $\overline{x}$, тождественная функция x или функция, выраженная формулой: $xy \vee x\overline{y}$. Нетривиальным примером самодвойственной функции 3 аргументов является функция $f(x, y, z) = \overline{x}y \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

Последний пример приводит к задаче: *как по формуле булевой функции получить формулу двойственной функции*, которая называется *двойственной формулой*. Следующая *теорема двойственности* отвечает на этот вопрос.

Теорема двойственности. *Для любой формулы булевой функции*

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) \;=\; f(\; f_1(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})\;),$$

где

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \bigcup_{i=1}^{m} \{x_{i1}, \ldots, x_{ip_i}\},$$

двойственная функция выражается формулой

$$\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = f^*(\; f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m^*(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})\;),$$

полученной заменой функций, входящих в суперпозицию исходной функции, на двойственные к ним.

Доказательство.

$$\Phi^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\Phi}(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) =$$
$$= \overline{f}(\; f_1(\overline{x_{11}}, \ldots, \overline{x_{1p_1}}), \ldots, f_m(\overline{x_{m1}}, \ldots, \overline{x_{mp_m}})\;) =$$

$$= \overline{f}\big(\ \overline{\overline{f_1}}(\overline{x_{11}}, \ldots, \overline{x_{1p_1}}), \ldots, \overline{\overline{f_m}}(\overline{x_{m1}}, \ldots, \overline{x_{mp_m}})\ \big) =$$
$$= \overline{f}\big(\ \overline{f_1^*}(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, \overline{f_m^*}(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})\ \big) =$$
$$= f^*\big(\ f_1^*(x_{11}, \ldots, x_{1p_1}), \ldots, f_m^*(x_{m1}, \ldots, x_{mp_m})\ \big).$$

В качестве примера образуем двойственную формулу для функции $f(x, y, z) = \overline{x}y \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}$. Получаем $f^*(x, y, z) = (\overline{x} \vee y) \wedge (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$. В качестве самостоятельного упражнения покажите самодвойственность этой функции, используя преобразования булевой алгебры.

Из теоремы двойственности следует **принцип двойственности**: *для любой формулы $A(f_1, \ldots, f_s)$ двойственная к ней формула получается заменой всех входящих в нее функций на двойственные, т. е. $A(f_1^*, \ldots, f_s^*)$.*

Таким образом, для получения двойственной формулы необходимо заменить 0 на 1, 1 на 0, $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$ и т. д. Например, для формулы $x \vee y \wedge \overline{z}$ получаем двойственную формулу $x \wedge (y \vee \overline{z})$.

Из принципа двойственности следует
теорема о равносильности двойственных формул. *Если A* и *B – равносильные формулы, то формулы A^** и *B^* также равносильны.*

Например, из первого закона де Моргана $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ вытекает второй закон де Моргана $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Другой пример: какая формула двойственна для импликации $A \to B$? Двойственная формула выражается как $\overline{\overline{A} \to \overline{B}}$. Как ее упростить? Проще использовать равносильную формулу $\overline{A} \vee B$ для импликации. Тогда двойственная для нее формула $\overline{A}\ \wedge\ B$, т. е. $\overline{\overline{A} \to \overline{B}} = \overline{A}\ \wedge\ B$. Таким образом, принцип двойственности позволяет сократить тождественные преобразования.

8. Реализация булевой функции формулой

Каждая формула высказываний представляет собой некоторую булеву функцию. Используя равносильности формул, можно преобразовывать формулы. Некоторые из видов формул имеют специальное название *формы*. К ним прежде всего относятся дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ) и *конъюнктивно-нормальная форма* (КНФ). Обе формы являются формулами, содержащими только 3 операции из рассмотренных 5: отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для их определения введем понятия *элементарной конъюнкции* и *элементарной дизъюнкции*.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция переменных, входящих в формулу, или их отрицаний. При этом каждая переменная входит в формулу элементарной конъюнкции не более 1 раза. Например, формулы $x \wedge y \wedge \overline{z}$ и $\overline{y}$ являются элементарными конъюнкциями, а формула $x \wedge y \vee \overline{z}$ не является таковой.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных, входящих в формулу, или их отрицаний. При этом каждая переменная входит в формулу элементарной дизъюнкции не более 1 раза. Например, формулы $x \vee y \vee \overline{z}$ и $\overline{y}$ являются элементарными дизъюнкциями, а формула $x \vee y \wedge \overline{z}$ не является таковой.

Дизъюнктивно-нормальной формой называется дизъюнкция элементарных конъюнкций. Например, формулы $xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}$ и $\overline{x}y$ являются ДНФ, а формула $\overline{xy}$ таковой не является.

Конъюнктивно-нормальной формой называется конъюнкция элементарных дизъюнкций. Например, формулы $xy\overline{z} \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$ и $\overline{x} \vee y$ являются КНФ, а формула $\overline{xy}$ таковой не является.

Можно ли любую булеву функцию представить формулой? Можно ли любую формулу привести эквивалентными преобразованиями (равносильностями) к ДНФ или к КНФ? Мы дадим положительный ответ на эти вопросы и покажем, как это сделать.

Введем обозначение:

$$x_i^{v_i} \equiv \begin{cases} x_i, & v_i = 1, \\ \overline{x_i}, & v_i = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим формулу

$$\bigvee_{v_1,\ldots,v_n} f(v_1,\ldots,v_n) \wedge x_1^{v_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{v_n}.$$

Это ДНФ, у которой каждый конъюнктивный член дизъюнкции имеет вид

$$f(v_1,\ldots,v_n) \wedge x_1^{v_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{v_n}.$$

Например,

$$f(0,1,\ldots,1,0)x_1^0 x_2^1 \ldots x_{n-1}^1 x_n^0 = f(0,1,\ldots,1,0)\overline{x_1}x_2\ldots x_{n-1}\overline{x_n}.$$

При значениях переменных формулы $x_1, \ldots, x_n$, равных соответственно $v_1, \ldots, v_n$, каждое $x_i^{v_i} = 1 \quad (i \in \overline{1, n})$. Действительно, при $v_i = 1$ $x_i^{v_i} = x_i = v_i = 1$, а при $v_i = 0 \quad x_i^{v_i} = \overline{x_i} = 1$. Поэтому при значениях переменных формулы $x_1, \ldots, x_n$, равных соответственно $v_1, \ldots, v_n$, конъюнктивный член $f(v_1, \ldots, v_n) \wedge x_1^{v_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{v_n} = f(v_1, \ldots, v_n)$, а на любом другом наборе этот конъюнктивный член равен 0 (для какого-то индекса i, где $x_i \neq v_i \quad x_i^{v_i} = 0$, а потому и значение такого конъюнктивного члена равно 0).

Тем самым мы показали, что на каждом наборе переменных значение функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ совпадает со значением указанной ДНФ. Таким образом, мы доказали теорему о разложении булевой функции по переменным.

Теорема о разложении булевой функции по переменным. *Любая булева функция представляется в виде ДНФ*:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \ = \bigvee_{v_1, \ldots, v_n} f(v_1, \ldots, v_n) \wedge x_1^{v_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{v_n}.$$

Полученную формулу можно упростить, сделав ее зависящей только от переменных. Для этого

1) нужно опустить все слагаемые, для которых $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$, так как каждый соответствующий конъюнктивный член равен 0, а в силу равносильности формул $A \vee 0 \equiv A$, т. е. все нулевые слагаемые (логические) можно опустить;

2) в остальных слагаемых $f(v_1, \ldots, v_n) = 1$ нужно опустить этот множитель (логический) $f(v_1, \ldots, v_n)$, так как $A \wedge 1 \equiv A$.

Получившаяся при этом упрощении ДНФ называется *совершенной дизъюнктивно-нормальной формой* (СДНФ).

СДНФ – это такая ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой содержит все переменные формулы или их отрицания по 1 разу. Например, ДНФ $x\overline{y} \vee y\overline{z}$ и $xy\overline{x} \vee yxy$ не являются СДНФ, так как в первой формуле элементарные конъюнкции содержат не все переменные, а во второй – переменные в каждой элементарной конъюнкции повторяются.

Алгоритм получения СДНФ булевой функции по ее таблице истинности довольно прост:

1. Для каждого *единичного набора переменных* (набора, где функция принимает значение 1) составить элементарную конъюнкцию, в которую переменная входит сама, если ее значение в наборе равно 1, и входит отрицание переменной, если ее значение в наборе равно 0.

2. Составить дизъюнкцию всех полученных элементарных конъюнкций.

Пример 1. Записать СДНФ булевой функции от трех переменных, которая принимает значение 1 тогда и только тогда, когда значения всех переменных одинаковы.

Решение. Единичными будут только 2 набора: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Поэтому наша функция записывается следующей СДНФ: $x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}$.

Из теоремы следуют также ответы на поставленные вопросы: любую функцию можно записать в виде формулы и любую формулу можно привести к ДНФ.

Рассмотрим формулу для отрицания функции:

$$\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) \ = \bigvee_{v_1,\ldots,v_n} \overline{f}(v_1, \ldots, v_n) \wedge x_1^{v_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{v_n}$$

и применим отрицание к обеим частям равенства:
$f(x_1, \ldots, x_n) \ = \ \overline{\bigvee_{v_1,\ldots,v_n} \overline{f}(v_1, \ldots, v_n) \wedge x_1^{v_1} \wedge \cdots \wedge x_n^{v_n}} =$
$= \bigwedge_{v_1,\ldots,v_n} f(v_1, \ldots, v_n) \vee \overline{x_1^{v_1}} \vee \cdots \vee \overline{x_n^{v_n}}$.
Получим представление в виде КНФ:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \ = \bigwedge_{v_1,\ldots,v_n} f(v_1, \ldots, v_n) \vee \overline{x_1^{v_1}} \vee \cdots \vee \overline{x_n^{v_n}}.$$

Если в этой формуле

1) опустить все элементарные дизъюнкции, для которых $f(v_1, \ldots, v_n) = 1$, так как $A \wedge 1 \equiv A$;

2) опустить в оставшихся множителях (логических) слагаемые $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$, так как $A \vee 0 \equiv A$,

то мы получим *совершенную конъюнктивно-нормальную форму* (СКНФ).

СКНФ – это такая КНФ, каждая элементарная дизъюнкция которой содержит все переменные формулы или их отрицания по 1 *разу.* Например, КНФ $(x \vee \overline{y}) \wedge (y \vee \overline{z})$ и $(x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (y \vee x \vee y)$ не являются СКНФ, так как в первой формуле элементарные дизъюнкции содержат не все переменные, а во второй – переменные в каждой элементарной дизъюнкции повторяются.

Алгоритм получения СКНФ булевой функции по ее таблице истинности также прост:

1. Для каждого *нулевого набора переменных* (набора, где функция принимает значение 0) составить элементарную дизъюнкцию, в которую переменная входит сама, если ее значение в наборе равно 0, или входит отрицание переменной, если ее значение в наборе равно 1.

2. Составить конъюнкцию всех полученных элементарных дизъюнкций.

<u>Пример 2</u>. Представить в виде формулы функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, равную 1 тогда и только тогда, когда хотя бы 2 аргумента принимают значение 0.

<u>Решение</u>. Всего $2^4 = 16$ строк в таблице истинности функции. Сколько в ней строк (наборов переменных), где есть хотя бы 2 нуля? Без нулей – 1 строка, а с 1 нулем – 4 строки. Поэтому единичных наборов будет 11, и, следовательно, СДНФ будет содержать 11 слагаемых. Нулевых наборов всего 5, а потому запись в виде СКНФ предпочтительна:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$
$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}).$$

9. Полнота системы булевых функций

Мы видели, что любая булева функция может быть выражена в виде формулы через 3 элементарные функции $\overline{x}$, $x \wedge y$, $x \vee y$. Система этих 3 функций полна с точки зрения представления любой функции.

Система булевых функций $\{f_1, \ldots, f_k, \ldots\}$ называется функционально ***полной*** *(полной), если любая булева функция может быть представлена через функции этой системы.*

Таким образом, полна вышеуказанная система 3 функций: отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Другим примером (крайним) полной системы является система P_2 всех булевых функций. Какие есть еще системы функций, обладающие этим свойством? На этот вопрос ответ может дать следующая теорема.

Теорема о полноте системы булевых функций. *Пусть дана полная система булевых функций*

$$F = \{f_1, f_2, \dots\}.$$

Если известно, что каждая функция системы F выражается в виде формулы через функции другой системы

$$G = \{g_1, g_2, \dots\},$$

то система функций G также является полной.

Доказательство. Пусть $p \in P_2$ – любая булева функция. Тогда

$$p = A(f_1, f_2, \dots).$$

По условию теоремы $f_1 = A_1(g_1, g_2, \dots)$, $f_2 = A_2(g_1, g_2 \dots), \dots$. Поэтому
$A(f_1, f_2, \dots) = A(\, A_1(g_1, g_2, \dots),\, A_2(g_1, g_2, \dots), \dots\,) = A'(g_1, g_2, \dots)$. Таким образом, $p = A'(g_1, g_2, \dots)$, т. е. любая булева функция выражается через функции системы G. Следовательно, G полна.

В качестве следствия теоремы обоснуем полноту 2 систем булевых функций.

1. Система $\{\overline{x},\ x \wedge y\}$ является полной. Для этого достаточно показать, что все функции полной системы $\{\overline{x},\ x \wedge y, x \vee y\}$ выражаются через функции этой системы. 2 функции обеих систем совпадают. Но, используя законы де Моргана, получаем $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$, что и требовалось.

2. Система $\{\overline{x},\ x \vee y\}$ является полной. Доказательство аналогично предыдущему.

Мы видим, что полная система булевых функций может содержать всего 2 функции. А может ли это число быть уменьшенным, т. е. существует ли полная система из одной функции? На этот вопрос следует положительный ответ: такими функциями являются *штрих Шеффера*, определяемый как отрицание конъюнкции (его обозначение – вертикальная черта | между операндами), и *стрелка Пирса*, определяемая как отрицание дизъюнкции (его обозначение – вертикальная стрелка вниз $\downarrow$ между операндами). Приведем таблицу истинности этих функций:

$x\ y$	$x \vert y$	$x \downarrow y$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	1	0
1 1	0	0

Покажем, что система булевых функций $\{|\}$, которая включает только штрих Шеффера, является полной. Для этого достаточно согласно теореме о полноте выразить функции какой-либо полной системы через штрих Шеффера. Возьмем в качестве такой систему, содержащую отрицание и конъюнкцию. Так как $x|y = \overline{x \wedge y}$, то $x|x = \overline{x \wedge x} = \overline{x}$, то отрицание выражено через штрих Шеффера:

$$\overline{x} = x|x.$$

Применив отрицание к обеим частям определения штриха Шеффера, а затем выразив отрицание через штрих Шеффера, получим

$$x \wedge y = \overline{x|y} = (x|y)|(x|y).$$

Пример 1. Выразить через штрих Шеффера дизъюнкцию.

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{(\overline{x}|\overline{y})|(\overline{x}|\overline{y})} = \overline{((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))} =$$
$$= ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))|(((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))).$$

Выражение громоздкое, но каждая операция – только штрих Шеффера.

Рассмотрим еще одну часто используемую систему:

$$G = \{1,\ 0, xy, x + y(mod2)\},$$

состоящую из двух констант, произведения и суммы по модулю 2 (остатка от деления суммы на 2). Формула, построенная из функций этой системы, после раскрытия скобок и алгебраических преобразований переходит в многочлен по модулю 2, который называется *полиномом Жегалкина*. Полноту системы G обосновывает следующая теорема.

Теорема Жегалкина. *Каждая булева функция может быть выражена единственным образом в виде полинома Жегалкина.*

Доказательство. Любой полином Жегалкина выражается суммой по модулю 2:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_s} \alpha_{i_1,\ldots,i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s}.$$

При этом 0 выражается единственным образом – все коэффициенты $\alpha_{i_1,\ldots,i_s} = 0$, и потому 2 различных полинома имеют различные коэффициенты $\alpha_{i_1,\ldots,i_s}$ (иначе их разность будет равна 0, что противоречит их различности). Число членов $x_{i_1} \ldots x_{i_s}$ равно числу подмножеств $\{i_1, \ldots, i_s\}$ из n чисел $1, \ldots, n$, т. е. 2^n. Коэффициенты $\alpha_{i_1,\ldots,i_s} \in \overline{0,1}$, а потому число различных полиномов Жегалкина 2^{2^n}, т. е. столько же, сколько существует булевых функций. Значит, каждая булева функция имеет единственного представителя в виде многочлена Жегалкина, что и требовалось доказать.

Пример 2. Выразить полиномом Жегалкина дизъюнкцию.

Запишем дизъюнкцию в виде полинома Жегалкина с неопределенными коэффициентами: $x \vee y = axy + bx + cy + d$.
При $x = y = 0 : \quad 0 = x \vee y = d$.
При $x = 0, y = 1 : \quad 1 = x \vee y = c + d = c \;\Rightarrow\; c = 1$.
При $x = 1, y = 0 : \quad 1 = x \vee y = b + d = b \;\Rightarrow\; b = 1$.
При $x = 1, y = 1 : \quad 1 = x \vee y = a + b + c + d = a \;\Rightarrow\; a = 1$.
Таким образом, $x \vee y = xy + x + y$.

Подобным образом можно получить формулы для отрицания и конъюнкции $\overline{x} = x + 1; \quad x \wedge y = xy$.

10. Замкнутые классы булевых функций и теорема Поста о полноте

Приведенная в предыдущем разделе теорема о полноте не является достаточно конструктивной, так как для ее использования неясно, как в общем случае установить возможность выражения какой-либо полной системы функций через заданную. Если попытки не позволяют установить такое для какой-либо функции полной системы, то неясно, возможно ли это: может, заданная система не является полной, а может, мы еще не проявили достаточного умения для этого. Поэтому требуется критерий для установления, является ли система полной или нет, который бы проверялся просто. Э.Пост установил такой критерий, использующий понятие *замкнутого класса множеств булевых функций.*

Пусть F – подмножество множества P_2 булевых функций.

Замыканием $[F]$ *множества* F *булевых функций называется множество функций, которые могут быть представлены через формулы, содержащие только функции* F.

Одним примером замыкания множества является весь класс булевых функций: $[P_2] = P_2$, а другим – класс $L = [\{0, 1, x + y \ (mod 2)\}]$ линейных функций, которые могут быть представлены в виде

$$f(x_1 \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \ \ (a_i \in \{0, 1\} \ i \in \overline{0, 1}).$$

Свойства замыкания:

1. $[F] \supseteq F$.
2. $[[F]] = [F]$.
3. $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow [F_1] \subseteq [F_2]$.
4. $[F_1 \cup F_2] \supseteq [F_1] \cup [F_2]$.

Класс F *булевых функций называется* ***замкнутым****, если* $[F] = F$.

Примерами замкнутых классов являются P_2, L. Не является замкнутым множество $\{0, 1, x + y(mod2)\}$. С помощью понятий замыкания и замкнутого класса можно дать другое определение полноты системы булевых функций.

F *– полная система, если* $[F] = P_2$.

Для формулирования теоремы Поста о полноте системы булевых функций мы рассмотрим 5 замкнутых классов булевых функций:

$\mathbf{T_0}$ – класс булевых функций, *сохраняющих 0,* т. е.

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Примеры: $\{0, \ x, \ x \wedge y, \ x \vee y, \ x + y\} \subseteq T_0 \quad 1, \ \overline{x} \notin T_0$.

Так как на наборе из нулей значение функций из T_0 определено, а на остальных наборах значения могут быть любые, то $|T_0| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2}2^{2^n}$, т. е. половина всех булевых функций сохраняет 0. Покажем замкнутость T_0. Пусть $f, f_1, \ldots, f_m \in T_0$. Тогда для любой функции $f(f_1, \ldots, f_m) = \Phi$:

$$\Phi(0, \ldots, 0) = f(f_1(0, \ldots, 0), \ldots, f_m(o, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0.$$

$\mathbf{T_1}$ – класс всех булевых функций, *сохраняющих 1*, т. е.

$$f(1, 1, \ldots, 1) = 1.$$

Примеры: $\{1,\ x,\ x \wedge y,\ x \vee y\} \subseteq T_1 \quad 0,\ \overline{x},\ x + y \notin T_1$.
T_1 состоит из функций, двойственных классу T_0. Поэтому будем говорить T_1 *двойственно* T_0.
Отсюда следует, что класс T_1 также имеет половину всех булевых функций и тоже замкнут.

S – класс *самодвойственных* булевых функций, т. е. $f \in S \Rightarrow f^* = f$.
Примеры: $\{x,\ \overline{x}\} \subseteq S \quad x+y,\ x \leftrightarrow y \notin S$. Нетривиальный пример: $h(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 = (x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_3) = h^*$ также самодвойственная функция.
Так как на противоположных наборах аргументов самодвойственная функция принимает противоположное значение, то для определения самодвойственных функций достаточно половины наборов. Поэтому $|S| = 2^{2^n/2} = \sqrt{2^{2^n}}$. Покажем замкнутость S. Пусть $f, f_1, \ldots, f_m \in S$. Тогда для любой функции $f(f_1, \ldots, f_m) = \Phi$:

$$\Phi = f(f_1, \ldots, f_m) \quad \Phi^* = f^*(f_1^*, \ldots, f_m^*) = f(f_1, \ldots, f_m) = \Phi.$$

M – класс *монотонных* функций. Вводится отношение частичного порядка для наборов аргументов:
$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \preceq \tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \ \Leftrightarrow\ \alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leq \beta_n$.
Функция f называется *монотонной* ($f \in M$), если

$$\tilde{\alpha} \preceq \tilde{\beta} \ \Rightarrow\ f(\tilde{\alpha}) \leq f(\tilde{\beta}).$$

Примеры: $\{0,\ 1,\ x,\ x \wedge y,\ x \vee y\} \subseteq M \quad x+y,\ x \to y, x \leftrightarrow y \notin M$.
Для доказательства замкнутости возьмем произвольные монотонные функции $f,\ f_1, \ldots,\ f_m \in M$ и $\Phi = f(f_1, \ldots, f_m)$, каждая из

которых определена соответственно на наборах аргументов $x^\Phi = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^{f_i} = (x_{i1}, \ldots, x_{ip_i})$ $(i \in \overline{1,m})$, причем x^Φ состоит из тех и только тех аргументов, которые входят в $\bigcup_{i=1}^m x^{f_i}$. Пусть α^Φ и β^Φ – два произвольных набора аргументов x^Φ и $\alpha^\Phi \preceq \beta^\Phi$. Они определяют значения α^{f_i} и β^{f_i} аргументов x^{f_i} $(i \in \overline{1,m})$ такие, что $\alpha^{f_i} \preceq \beta^{f_i}$. Из монотонности $f_1, \ldots, f_m$ следует
$f_1(\alpha^{f_1}) \le f_1(\beta^{f_1}), \ldots, f_1(\alpha^{f_m}) \le f_m(\beta^{f_m})$. Поэтому
$(f_1(\alpha^{f_1}), \ldots, f_m(\alpha^{f_m})) \preceq (f_1(\beta^{f_1}), \ldots, f_m(\beta^{f_m}))$ и в силу монотонности f:
$f(\ f_1(\alpha^{f_1}), \ldots, f_m(\alpha^{f_m})\ ) \le\ f(\ f_1(\beta^{f_1}), \ldots, f_m(\beta^{f_m})\ )$.
Отсюда $\Phi(\alpha^\Phi) \le \Phi(\beta^\Phi)$, что обосновывает монотонность Φ и замкнутость M.

L – класс линейных функций.
Примеры: $\{0,\ 1,\ x,\ \overline{x},\ x+y\} \subseteq L$ $\quad xy,\ x|y \notin L$. Замкнутость класса L обоснована в предыдущем разделе.

Классы $T_0,\ T_1,\ S,\ M,\ L$ попарно различны. Это показывает следующая таблица принадлежности функций 0, 1 и $\overline{x}$.

f	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\overline{x}$	−	−	+	−	+

Совершенно ясно, что полная система булевых функций не может целиком принадлежать ни одному из этих пяти классов. Э. Пост доказал, что это условие является не только необходимым, но и достаточным.

Теорема Поста о полноте (критерий полноты системы булевых функций).
Система функций полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из 5 замкнутых классов $T_0,\ T_1,\ S,\ M,\ L$.

Пример 1. Является ли система функций $\{xy,\ 0,\ 1,\ x+y+z\}$ полной? Является ли она замкнутой?

Решение. Составим таблицу истинности функций системы, введя для них по порядку обозначения

$f_1(x,y,z) = xy,\ f_2(x,y,z) = 0,\ f_3(x,y,z) = 1,\ f_4(x,y,z) = x+y+z.$

x	y	z	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1
T_0			$+$	$+$	$-$	$+$
T_1			$+$	$-$	$+$	$+$
S			$-$	$-$	$-$	$+$
M			$+$	$+$	$+$	$-$
L			$-$	$+$	$+$	$+$

Установление принадлежности классам $T_0,\ T_1,\ S, M$ или не принадлежности им делается по самой таблице истинности непосредственно (для T_0, T_1 нужно посмотреть соответственно на набор значений из нулей и набор значений из единиц; для S нужно перевернуть, инвертировать столбец и сравнить его с исходным, а для M нужно последовательно сравнить каждый единичный набор с каждым нулевым на предмет монотонного порядка). Установление принадлежности L делается непосредственно для функций 0, 1, $x+y+z$ из их вида, а то, что f_1 не принадлежит L, делается попыткой выразить ее в линейном виде $ax+by+c$:
$f_1(0,0) = 0 = c$;
$f_1(0,1) = 0 = b+c = b$;
$f_1(1,0) = 0 = a+c = a$;
$f_1(1,1) = 1 = a+b+c = 0$, что приводит к противоречию 1=0.

Мы установили, что $f_3 \notin T_0,\ f_2 \notin T_1,\ f_1, f_2, f_3 \notin S,\ f_4 \notin M,\ f_1 \notin L$. Поэтому выполнены условия критерия Поста (каждый из 5 классов не содержит, по крайней мере, одну из функций системы). Таким образом, система $\{xy,\ 0,\ 1,\ x+y+z\}$ полна.

Из этого следует, что система не является замкнутой, так как с ее помощью можно образовать любую булеву функцию, не принадлежащую системе (например, $x \vee y$ не принадлежит системе, так как ее таблица истинности не тождественна таблицам истинности ни одной из функций системы).

Ответ: *система булевых функций* $\{xy,\ 0,\ 1,\ x+y+z\}$ *полна, но не замкнута.*

Любая подсистема рассмотренной в примере системы функций не является уже полной, так как все ее функции принадлежат одному из 5 базовых замкнутых классов. Такая система называется *базисом.*

Система булевых функций $\{f_1,\ f_2,\dots\}$ *из замкнутого класса* F *называется полной в* F*, если* $[\{f_1,\ f_2,\dots\}] = F$.

Система булевых функций $\{f_1,\ f_2,\dots\} \subseteq F$ *называется базисом в* F*, если она полна в* F *и никакая ее подсистема не является полной в* F.

Э. Пост установил, что каждый замкнутый класс из P_2 имеет конечный базис не более чем из 4 функций. Минимальный базис состоит из одной функции (например, штрих Шеффера для P_2 или f для $[f]$).

Пример 2. Является ли система функций $\{x,\ 0,\ 1,\ \overline{x}\}$ полной? Является ли она замкнутой?

Решение. Составим таблицу истинности функций системы (см. ниже), введя для них по порядку обозначения $f_1(x) = x,\ f_2(x) = 0,$ $f_3(x) = 1,\ f_4(x) = \overline{x}$. Установление принадлежности классам (или не принадлежности им) $T_0,\ T_1,\ S,\ M$ делается по самой таблице истинности непосредственно (для T_0, T_1 нужно посмотреть соответственно на набор значений из нулей и набор значений из единиц; для S нужно перевернуть, инвертировать столбец и сравнить его с исходным, а для M нужно последовательно сравнить каждый единичный набор с каждым нулевым на предмет монотонного порядка). Установление принадлежности L делается непосредственно для функций x, 0, 1, а то, что $\overline{x}$ принадлежит L, делается попыткой выразить ее в линейном виде $ax+b$:
$f_4(0) = 1 = c$;
$f_4(1) = 0 = a + b = a + 1 \Rightarrow a = 1$, что приводит к линейному виду функции $\overline{x} = x + 1$.

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	1	0	1	0
T_0	+	+	−	−
T_1	+	−	+	−
S	+	−	−	+
M	+	+	+	−
L	+	+	+	+

Мы установили, что все функции системы принадлежат классу L, и потому, по теореме Поста, система не является полной.

Так как существует всего 4 булевых функции одного аргумента и все они входят в систему, то она замкнута (никакими операциями не удастся получить какую-либо другую функцию).

Ответ: *система булевых функций* $\{x,\ 0,\ 1,\ \overline{x}\}$ *не является полной, но замкнута.*

11. Индивидуальное задание 5

1. Булеву функцию, полученную в ходе решения задачи 1 задания 4 для равенства множеств, представить в следующих формах (с обоснованием при помощи вывода и проверкой совпадения таблиц истинности):

1) СДНФ;

2) СКНФ[5];

3) полином Жегалкина;

4) формулу, содержащую только штрих Шеффера.

2. Установить, является ли заданная система булевых функций полной и замкнутой. Обосновать подробно весь ход решения [6].

[5] Одну из форм СДНФ или СКНФ нужно получить по алгоритму для таблицы истинности, а другую вывести с помощью преобразования булевой алгебры.

[6] При обосновании незамкнутости системы привести суперпозицию функций системы,

3. Решить комбинаторную задачу: *каким числом способов можно выбрать заданное число карт с заданными свойствами из полной колоды в 52 карты?*. Обосновать подробно весь ход решения.

11.1. Пример задачи 1 и ее решения

Для равенства множеств:

$$(X_2 \setminus X_3) \cup (X_1 \setminus X_2) = X_1 \cup \overline{X}_3$$

в задании 4 была получена следующая булева функция:

$$G \equiv y_2 \wedge \overline{y_3} \vee y_1 \wedge \overline{y_2} \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3}.$$

В дальнейшем для большей наглядности знак операции конъюнкции будем опускать, подразумевая его между любыми выражениями, написанными подряд, где не стоит знак другой бинарной операции.

$$G = y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2} \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3}.$$

Составим таблицу истинности G:

$y_1y_2y_3$	$y_2\overline{y_3}$	$y_1\overline{y_2}$	$y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2}$	$y_1 \vee \overline{y_3}$	$G = y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2} \;\leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3}$
0 0 0	0	0	0	1	0
0 0 1	0	0	0	0	1
0 1 0	1	0	1	1	1
0 1 1	0	0	0	0	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	1	0	1	1	1
1 1 1	0	0	0	1	0

В дальнейших выводах мы над знаками эквивалентности будем обязательно писать номера используемых при преобразовании равносильностей (см. далее Список равносильностей).

которая отличается от всех функций системы. При обосновании замкнутости показать, что ни одна из суперпозиций функций системы не дает функцию, отличную от функций системы. Для этого возможно придется рассмотреть все функции пересечения всех классов, которым принадлежат функции системы.

1. Выведем **СДНФ**.

$$G = y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2} \leftrightarrow y_1 \vee \overline{y_3} \stackrel{22}{\equiv} (\overline{y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2}} \vee y_1 \vee \overline{y_3})(\overline{y_1 \vee \overline{y_3}} \vee y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2}) \equiv$$
$$\stackrel{9,9}{\equiv} (\overline{y_2\overline{y_3}}\;\overline{y_1\overline{y_2}} \vee y_1 \vee \overline{y_3})(\overline{y_1}y_3 \vee y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2}) \equiv$$
$$\stackrel{8}{\equiv} ((\overline{y_2} \vee y_3)(\overline{y_1} \vee y_2) \vee y_1 \vee \overline{y_3})(\overline{y_1}y_3 \vee y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2})$$

Преобразуем отдельно левый операнд полученной конъюнкции:

$$((\overline{y_2} \vee y_3)(\overline{y_1} \vee y_2) \vee y_1 \vee \overline{y_3}) \stackrel{6,7}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee \overline{y_2}y_2 \vee y_3\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee y_1 \vee \overline{y_3} \equiv$$
$$\stackrel{15,12}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee 0 \vee y_3\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee y_1 \vee \overline{y_3}1 \stackrel{13,14}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee y_3\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee y_1 \vee \overline{y_3}(y_1 \vee \overline{y_1}) \equiv$$
$$\stackrel{3,6}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee y_1 \vee y_3\overline{y_1} \vee \overline{y_3}\;\overline{y_1} \vee \overline{y_3}y_1 \equiv$$
$$\stackrel{6}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee y_1 \vee (y_3 \vee \overline{y_3})\overline{y_1} \vee \overline{y_3}y_1 \equiv$$
$$\stackrel{14,12}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee y_1 \vee \overline{y_1} \vee \overline{y_3}y_1 \stackrel{14}{\equiv} \overline{y_2}\;\overline{y_1} \vee y_3y_2 \vee 1 \vee \overline{y_3}y_1 \stackrel{17}{\equiv} 1.$$

Поэтому

$$G = 1(\overline{y_1}y_3 \vee y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2}) \stackrel{12}{\equiv} \overline{y_1}y_3 \vee y_2\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2} \equiv$$
$$\stackrel{12}{\equiv} \overline{y_1}y_3(y_2 \vee \overline{y_2}) \vee y_2\overline{y_3}(y_1 \vee \overline{y_1}) \vee y_1\overline{y_2}(y_3 \vee \overline{y_3}) \equiv$$
$$\stackrel{6}{\equiv} \overline{y_1}y_3y_2 \vee \overline{y_1}y_3\overline{y_2} \vee y_2\overline{y_3}y_1 \vee y_2\overline{y_3}\;\overline{y_1} \vee y_1\overline{y_2}y_3 \vee y_1\overline{y_2}\;\overline{y_3} \equiv$$
$$\stackrel{3}{\equiv} \overline{y_1}\;\overline{y_2}y_3 \vee \overline{y_1}\;y_2\overline{y_3} \vee \overline{y_1}y_2y_3 \vee y_1\overline{y_2}\;\overline{y_3} \vee y_1\overline{y_2}y_3 \vee y_1y_2\overline{y_3},$$

что соответствует определению СДНФ по единичным наборам таблицы истинности.

2. Определение **СКНФ** произведем по таблице истинности, образуя для каждого нулевого набора элементарную дизъюнкцию, для которой значению 0 переменной в наборе соответствует она сама, а значению 1 – ее отрицание. После этого образуем конъюнкцию всех полученных элементарных дизъюнкций. Получим

$$(\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3})(y_1 \vee y_2 \vee y_3).$$

3. Для получения полинома **Жегалкина** возьмем в качестве начального выражения СКНФ (как более короткое выражение в данном примере) и будем производить последовательную замену выражений сначала с операциями отрицания ($\overline{x} = x + 1$), затем с операциями дизъюнкции ($x \vee y = x * y + x + y$) и, наконец, с операцией конъюнкции ($x \wedge y = x * y$). При этом будем раскрывать скобки и упрощать при помощи сложения (по модулю 2) подобных частей выражения:

$$\overline{y_1} \vee \overline{y_2} = (y_1 + 1) * (y_2 + 1) + (y_1 + 1) + (y_2 + 1) =$$
$$= y_1 * y_2 + y_1 + y_2 + 1 + y_1 + y_2 + 1 + 1 = y_1 * y_2 + 1$$

$\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3} = (\overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \vee \overline{y_3} = (y_1 * y_2 + 1) * (y_3 + 1) + (y_1 * y_2 + 1) + (y_3 + 1) =$
$= y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_3 + 1 + y_1 * y_2 + 1 + y_3 + 1 = y_1 * y_2 * y_3 + 1$

$y_1 \vee y_2 = y_1 * y_2 + y_1 + y_2$

$y_1 \vee y_2 \vee y_3 = (y_1 \vee y_2) \vee y_3 =$
$= (y_1 * y_2 + y_1 + y_2) * y_3 + y_1 * y_2 + y_1 + y_2 + y_3 =$
$= y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_1 + y_2 + y_3 =$
$= y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 + y_2 + y_3$

$(\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3}) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3) =$
$= (y_1 * y_2 * y_3 + 1) * (y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 + y_2 + y_3) =$
$= y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_2 + y_1 * y_2 * y_3 + y_1 * y_3 * +$
$+ y_1 * y_2 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 * y_2 * y_3 + y_1 + y_1 * y_2 * y_3 + y_2 + y_1 * y_2 * y_3 + y_3 =$
$= y_1 * y_2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 + y_2 + y_3$

Построим таблицу истинности $A = y_1 * y_2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 + y_2 + y_3$:

$y_1 y_2 y_3$	$y_1 * y_2$	$y_1 * y_3$	$y_2 * y_3$	A
0 0 0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1
0 1 0	0	0	0	1
0 1 1	0	0	1	1
1 0 0	0	0	0	1
1 0 1	0	1	0	1
1 1 0	1	0	0	1
1 1 1	1	1	1	0

Одинаковость таблиц истинности для G и A подтверждает, что вывод сделан верно и

$$G = y_1 * y_2 + y_1 * y_3 + y_2 * y_3 + y_1 + y_2 + y_3.$$

4. Для получения формулы, содержащей только штрих **Шеффера**, произведем для данного примера сначала замену выражений с операцией отрицания ($\overline{x} = x|x$), затем замену выражений с операциями дизъюнкции ($x \vee y = (x|x)|(y|y)$), и, наконец, замену выражений с операциями конъюнкции ($x \wedge x = (x|y)|(x|y)$):

$\overline{y_1} \vee \overline{y_2} = \overline{y_1 \wedge y_2} = y_1|y_2$

$\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3} = (\overline{y_1} \vee \overline{y_2}) \vee \overline{y_3} = (y_1|y_2) \vee \overline{y_3} = \overline{\overline{y_1|y_2} \wedge y_3} = ((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|y_3$

$y_1 \vee y_2 = (y_1|y_1)|(y_2|y_2)$

$y_1 \vee y_2 \vee y_3 = (y_1 \vee y_2) \vee y_3 = (((y_1|y_1)|(y_2|y_2))|((y_1|y_1)|(y_2|y_2)))|(y_3|y_3)$

$$(\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3}) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3) = \\ = ((\,(((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|y_3)|((((y_1|y_1)|(y_2|y_2))|((y_1|y_1)|(y_2|y_2)))|(y_3|y_3))\,)| \\ |((\,((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|y_3)|((((y_1|y_1)|(y_2|y_2))|((y_1|y_1)|(y_2|y_2)))|(y_3|y_3))\,))$$

Для проверки правильности вывода построим таблицу истинности выведенной формулы. Для этого введем обозначения:

$a_i \equiv y_i|y_i\ (i = 1, 2, 3);\quad b \equiv y_1|y_2;\quad c \equiv b|b;\quad d \equiv a_1|a_2;\quad e \equiv d|d;$
$f \equiv c|y_3;\quad g \equiv e|a_3;\quad h = f|g.$
Тогда

$$(\overline{y_1} \vee \overline{y_2} \vee \overline{y_3}) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3) = h|h.$$

$y_1y_2y_3$	a_1	a_2	a_3	b	c	d	e	f	g	h	$h\|h$
0 0 0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0 0 1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0 1 0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
0 1 1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1 0 0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1 0 1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1 1 1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Одинаковость таблиц истинности для G и $h|h$ подтверждает, что вывод сделан верно и

$$G = ((\,(((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|y_3)|((((y_1|y_1)|(y_2|y_2))|((y_1|y_1)|(y_2|y_2)))|(y_3|y_3))\,)| \\ |((\,((y_1|y_2)|(y_1|y_2))|y_3)|((((y_1|y_1)|(y_2|y_2))|((y_1|y_1)|(y_2|y_2)))|(y_3|y_3))\,)).$$

11.2. Методические рекомендации для задания 5

Задача 1

1. Использовать булеву функцию, полученную в задаче 1 задания 4 для отношения равенства множеств (без преобразования). Построить для нее таблицу истинности. Используя булеву алгебру, путем преобразований получить СДНФ. При этом каждое тождественное преобразование пометить (над знаком тождества) номе-

ром закона преобразования булевой алгебры (или номерами законов, последовательно используемых в преобразовании). **Типичная ошибка – получение ДНФ**, а не СДНФ. Для полученной СДНФ построить таблицу истинности, используя единичные наборы в СДНФ.

2. Построить СКНФ, используя нулевые наборы булевой функции.

3. Построить полином Жегалкина для исходной булевой функции, заменив в СКНФ все отрицания (на сумму с 1), все дизъюнкции (на сумму произведения сомножителей и самих сомножителей) и конъюнкции (на произведение сомножителей), после чего привести все подобные члены и упростить, удаляя сумму двух одинаковых слагаемых (сумма их по модулю 2 равна 0) и повторные множители в произведении. Для полученного полинома построить таблицу истинности и сравнить с таблицей истинности исходной функции.

4. Построить для исходной булевой функции формулу, содержащую только штрих Шеффера, заменяя в СКНФ последовательно операции отрицания, дизъюнкции и конъюнкции на формулы, содержащие только штрих Шеффера. Для полученной формулы построить таблицу истинности, выполняя последовательно операции штриха Шеффера.

Задача 2

1. Ввести обозначения функций, заданных булевыми формулами $f_i(x.y) \equiv <i$-я формула$>$ $\quad (i \in \overline{1,n})$. Написать таблицу истинности этих функций. **Ошибка – неверная таблица истинности** – плохое знание булевых операций.

2. Составить таблицу принадлежности каждой функции классам булевых функций T_0, T_1, S, L, M. Принадлежность классу L обосновать методом неопределенных коэффициентов, за исключением функций, которые уже имеют линейный вид (например, x, $x+y$, $\overline{x} = x+1$ и т. д.). **Ошибка – плохое знание классов**.

3. Сформулировав теорему Поста, определить полноту системы. **Ошибка – незнание теоремы Поста**.

4. Если система полная, то она незамкнутая. Привести пример суперпозиции функций системы $f_{n+1}(x,\ y) = f_k(f_l(x,\ y),\ f_m(x,\ y))$ $(k, l, m \in \overline{1, n})$, не принадлежащей системе. Для этого можно попробовать суперпозиции с одинаковыми индексами k, l, m или различными индексами.

5. Если система неполная, то система может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Незамкнутость системы можно установить, как это делается в предыдущем пункте. Если это не удается, то необходимо обосновать замкнутость системы, исходя либо из соображений невозможности получить суперпозицией новую функцию (например, все функции фактически одной переменной, а вторая фиктивная и любая их суперпозиция уже есть в системе) или перебором показать, что новой функции не возникает.

Задача 3

1. Прежде всего можно выполнить неполную генерацию n карт задачи, когда выбираются в заданном условиями задачи количестве z значений и в количестве m мастей, а последним действием выбираются все комбинации множества из n карт этих значений с мастями, которые отвечают условиям задачи и для которых надо еще определить количество выборов. Назовем это множество K.

2. Как правило, нет простого способа генерации множества K, и потому его надо разбить на части. С этой целью нужно сделать анализ и определить максимальное число p мастей, которое может иметь какое-либо значение. Это позволяет нам разбить все множество K на 2 подмножества по свойству: есть значение с p мастями (подмножество K_p) или нет (подмножество K_{p-1}).

3. Подмножество K_p можно разбить на несколько подмножеств по количеству s значений, которые имеют максимальное число мастей p: K_{ps} $(s = 1, 2, \dots)$. Далее для каждого вновь полученного подмножества K_{ps} можно вновь строить его разбиение по остальным значениям, которые имеют число мастей меньше p.

4. Рассмотрим 2 случая: $p = m$ и $p < m$.

- В случае $p = m$ генерация K_{ps} выполняется обычным образом: сначала выбираются все s значений с p мастями и тем самым определяются $p \cdot s$ карт, а затем следующими шагами для каждой из групп значений с $t = p - 1, \ldots, 1$ мастями (если такая группа непуста) размещаются для каждого значения t мастей. После проверки правила умножения для генерации вычисляется $|K_{ps}|$, а затем эти значения суммируются $|K_p| = \sum_{s=1,\ldots} |K_{ps}|$.
- В случае $p < m$ мы так же, как и в предыдущем случае, проведем генерацию K_{ps}. Но не все сгенерированные комбинации отвечают условиям задачи, так как число мастей в комбинации может быть меньше m. Поэтому это множество K_{ps} разделим на 2 непересекающихся подмножества: K^1_{ps}, отвечающее условиям задачи, и K^2_{ps}, содержащее лишние комбинации с меньшим m числом мастей (т. е. комбинации, не отвечающее условиям задачи). Так как $K_p = K^1_{ps} \cup K^2_{ps}$, то из правила сложения следует $|K^1_{ps}| = |K_{ps}| - |K^2_{ps}|$ и тогда $|K_p| = \sum_{s=1,\ldots} |K^1_{ps}|$.

  Заметим, что для получения количества комбинаций подмножества K^2_{ps} нужно по очереди выбирать $m - 1$ масть из множества используемых мастей (m способов $q = \overline{1, m}$), то есть представить его в виде объединения $\bigcup_{q=1}^{m} K^2_{psq}$ и найти количество элементов этого объединения, возможно, с использованием формулы включений и исключений.

5. Генерацию подмножества K_{p-1}, если оно непусто, проведем аналогично генерации K_p для случая $p < m$ и после этого получим $|K| = |K_p| + |K_{p-1}|$, что войдет множителем для общей генерации.

11.3. Варианты второй задачи индивидуального задания 5

1. $\{\overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x}\}$
2. $\{0, 1, x, y, x \vee y\}$
3. $\{\overline{x \to \overline{y}}, \overline{x}\}$

4. $\{0, 1, x, y, x \wedge y\}$
5. $\{x + y, 1, \overline{x}, x \to y\}$
6. $\{x, \overline{x}, y, \overline{y}\}$
7. $\{y \to x, \overline{x} \wedge y\}$
8. $\{x, \overline{x}, x + y, y, x \leftrightarrow y\}$
9. $\{x \vee \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$
10. $\{0, 1, x, \overline{x}\}$
11. $\{x \vee \overline{y}, x \wedge \overline{y}\}$
12. $\{x, x \vee y, x \to y, y \to x\}$
13. $\{x \to \overline{y}, \overline{x}\}$
14. $\{0, 1, x, y, x + y\}$
15. $\{\overline{x} \to y, \overline{x}\}$
16. $\{0, 1, x, y, x \leftrightarrow y\}$
17. $\{x + y, x \leftrightarrow y\}$
18. $\{x + \overline{y}, \overline{x} \cdot y\}$
19. $\{0, 1, x, y, \overline{x \wedge y}\}$
20. $\{\overline{x + y}, 1, \overline{x}, x \to y\}$
21. $\{\overline{y \to x}, \overline{x} \wedge y\}$
22. $\{x, \overline{x + y}, y, x \leftrightarrow y\}$
23. $\{\overline{x} \vee \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$
24. $\{x, x \vee y, \overline{x \to y}, y \to x\}$
25. $\{\overline{x \to \overline{y}}, \overline{x}\}$
26. $\{\overline{x} \to y, \overline{x}\}$
27. $\{x, x \vee y, x \to y, y \to x\}$

28. $\{y \to x, \overline{x} \wedge y\}$

29. $\{0, 1, x, y, \overline{x \wedge y}\}$

30. $\{0, 1, x, y, x \vee y\}$

31. $\{x + \overline{y}, \overline{x} \cdot y\}$

32. $\{x + y, x \leftrightarrow y\}$

33. $\{x, x \vee y, \overline{x \to y}, y \to x\}$

34. $\{0, 1, x, y, x \wedge y\}$

35. $\{x \to \overline{y}, \overline{x}\}$

36. $\{\overline{x} \vee \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$

37. $\{\overline{x} \wedge \overline{y}, \overline{x}\}$

38. $\{0, 1, x, \overline{x}\}$

39. $\{x, \overline{x}, y, \overline{y}\}$

40. $\{\overline{y \to x}, \overline{x} \wedge y\}$

41. $\{\overline{x + y}, 1, \overline{x}, x \to y\}$

42. $\{\overline{x \to \overline{y}}, \overline{x}\}$

43. $\{x, \overline{x}, x + y, y, x \leftrightarrow y\}$

44. $\{0, 1, x, y, x \leftrightarrow y\}$

45. $\{x, \overline{x + y}, y, x \leftrightarrow y\}$

46. $\{x \vee \overline{y}, x \wedge \overline{y}\}$

47. $\{x \vee \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$

48. $\{\overline{x \to \overline{y}}, \overline{x}\}$

49. $\{0, 1, x, y, x + y\}$

50. $\{x + y, 1, \overline{x}, x \to y\}$

51. $\{\overline{x} \to y, 0, \overline{y}\}$

52. $\{\overline{x} \wedge y, \overline{x} \vee \overline{y}\}$

53. $\{\overline{x \to y}, x, x \vee y, y \to x\}$

54. $\{\overline{x} \wedge y, \overline{y \to x}\}$

55. $\{\overline{x} \to y, \overline{x}\}$

56. $\{0, 1, x, y, x \leftrightarrow y\}$

57. $\{x + y, x \leftrightarrow y\}$

58. $\{x + \overline{y}, \overline{x} \cdot y\}$

59. $\{0, 1, x, y, \overline{x \wedge y}\}$

60. $\{\overline{x + y}, 1, \overline{x}, x \to y\}$

61. $\{\overline{y \to x}, \overline{x} \wedge y\}$

62. $\{x, \overline{x + y}, y, x \leftrightarrow y\}$

63. $\{\overline{x} \vee \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$

64. $\{x, x \vee y, \overline{x \to y}, y \to x\}$

11.4. Варианты третьей задачи индивидуального задания 5

1. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 5 различных значений и 3 масти?
2. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих все масти и 3 значения?
3. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 2 масти и 5 значений?
4. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 4 различных значения и 2 масти?
5. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 2 масти и 4 значения?
6. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 4 карты, содержащие 2 значения и не все масти?

7. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих все масти и 2 значения?
8. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 3 масти и 2 значения?
9. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 2 масти и 3 значения?
10. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 4 карты, содержащие 2 значения и не все масти?
11. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?
12. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 2 масти и 4 значения?
13. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих все масти и 3 значения?
14. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?
15. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 2 масти и 5 значений?
16. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 различных значений и все масти?
17. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 4 различных значения и 3 масти?
18. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 различных значений и 2 масти?
19. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 различных значений и все масти?
20. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 4 различных значения и 3 масти?

21. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 различных значения и не все масти?

22. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 4 различных значения и 2 масти?

23. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 5 различных значений и 3 масти?

24. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 значений и 2 масти?

25. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих не все масти и 2 значения?

26. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?

27. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 4 различных значения и 3 масти?

28. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?

29. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих все масти?

30. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 4 различных значения и 2 масти?

31. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 2 масти и 4 значения?

32. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?

33. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 различных значений и все масти?

34. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?

35. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 3 масти и 2 значения?

36. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?

37. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 4 различных значения и 2 масти?

38. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 5 различных значений всех мастей?

39. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 2 масти и 3 значения?

40. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 4 различных значения и 3 масти?

41. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих все масти и 3 значения?

42. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 2 масти и 4 значения?

43. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих все масти и 3 значения?

44. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 5 различных значений и 3 масти?

45. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих все масти и 3 значения?

46. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 2 масти и 5 значений?

47. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 4 различных значения и 2 масти?

48. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 различных значений и 2 масти?

49. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 4 различных значения и 3 масти?

50. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 масти и 5 значений?

51. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 2 масти и 5 значений?

52. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 8 карт, содержащих 3 масти и 5 различных значений?

53. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 различных значений и все масти?

54. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 5 значений и 2 масти?

55. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих не все масти и 2 значения?

56. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих не все масти и 3 значения?

57. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих все масти и 3 значения?

58. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 3 масти и 3 значения?

59. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 5 карт, содержащих 2 масти и 4 значения?

60. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 4 карты, содержащие 2 значения и не все масти?

61. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 3 масти и 4 значения?

62. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 6 карт, содержащих 2 масти и 4 значения?

63. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих все масти и 4 значения?

64. Каким числом способов можно из полной колоды в 52 карты выбрать 7 карт, содержащих 3 масти и 4 значения?

12. Литература

1. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон-Вельский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

2. Дехтярь, М. И. Лекции по дискретной математике : учебное пособие / М. И. Дехтярь. – М. : Интернет-Университет Информационных Технологий ; БИНОМ, Лаборатория знаний, 2007. – 259 с

Учебное издание

Рублев Вадим Сергеевич

БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

(индивидуальные работы № 4 и 5 по дисциплине «Дискретная математика»)

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка В. С. Рублев
Подписано в печать 29.01.2018 Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,3. Уч.-изд. л. 3,0.
Тираж 3 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.