Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

Множества. Отношения на множествах и мощность множества

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению
Фундаментальная информатика и информационные технологии

Ярославль
ЯрГУ
2015

УДК 514(072)
ББК В126я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2015 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики ЯрГУ

Рублев, Вадим Сергеевич.

Р82 Множества. Отношения на множествах и мощность множества : учебно-методическое пособие / В. С. Рублев : Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2015. – 44 с.

Учебно-методическое пособие содержит варианты индивидуального задания № 10, а также необходимый материал для его самостоятельного изучения и выполнения заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, утверждения с доказательствами, примеры, иллюстрации и обоснования.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 02.03.02 (010300.62) Фундаментальная информатика и информационные технологии (дисциплина «Дискретная математика», цикл Б3), очной формы обучения.

УДК 514(072)
ББК В126я73

1. Отношения на множествах

1.1. Прямое произведение множеств

Пусть заданы множества $A_1, \ldots, A_n$. *Кортежем* $< a_1 \ldots, a_n >$ называется последовательность элементов этих множеств, где $a_i \in A_i$ $(i \in \overline{1,n})$, а прямым произведением множеств называется множество кортежей

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{< a_1 \ldots, a_n > \mid a_i \in A_i \ \ (i \in \overline{1,n})\}.$$

Прямое произведение k одинаковых множеств A обозначается A^k. В этом случае такой кортеж называется *вектором*. Например,

$$a = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k.$$

Рассмотрим примеры.

1. $A = \{a, b\}$, B={c, d, e}. Тогда

$$A \times B = \{< a, c >, < a, d >, < a, e >, < b, c >, < b, d >, < b, e >\}.$$

2. Множество k-значных целых неотрицательных чисел есть подмножество прямого произведения C^k, где $C = \{0, 1, \ldots, 9\}$ – множество цифр.

3. Совокупность всех слов в фиксированном алфавите A (множество букв языка) есть подмножество объединений прямых произведений

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A^k.$$

Проекцией кортежа прямого произведения на i-ю ось называется i-я компонента кортежа. Проекцией кортежа $v =< a_1, \ldots, a_n >$ на оси $i_1, \ldots, i_k$ называют кортеж $< a_{i_1}, \ldots, a_{i_k} >$. Проекция прямого произведения на i-ю ось обозначается $\text{Пр}_i A_1 \times \cdots \times A_n = A_i$.

Теорема о количестве элементов прямого произведения конечных множеств.

Количество элементов прямого произведения конечного числа ко нечных множеств равна произведению количеств элементов каждого *из множеств:*

$$|\prod_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

.

Доказательство проведем с помощью метода математической индукции.
Основание индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. При $n = 2$ $A_1 \times A_2 = \bigcup_{j=1}^{|A_1|}\{< a_j^1, a_l^2 > \mid l \in \overline{1, |A_2|}\}$. Так как количество элементов множества $|\{< a_j^1, a_l^2 > \mid l \in \overline{1, |A_2|}\}| = |A_2|$ не зависит от выбора элемента a_j^1 ($j \in \overline{1, |A_1|}$), то $|A_1 \times A_2| = \sum_{j=1}^{|A_1|} |A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$, что и требовалось показать.
Шаг индукции. Пусть утверждение верно при любом $n \leq k$. $|\prod_{i=1}^{k+1} A_i| = |(\prod_{i=1}^{k} A_i) \times A_{k+1}| = |\prod_{i=1}^{k} A_i| \cdot |A_{k+1}| = (\prod_{i=1}^{k} |A_i|) \cdot |A_{k+1}| = \prod_{i=1}^{k+1} |A_i|$, что и доказывает шаг индукции. Доказательство закончено.

1.2. Определение отношения на множествах

Отношением на множествах называется подмножество прямого произведения этих множеств.

Число множеств, входящих в прямое произведение, может быть разным. При двух множествах, входящих в прямое произведение, отношение на множествах называется *бинарным отношением,* при трех – тернарным и т. д.

Пусть $R \subseteq A \times B$. Тогда отношение определяется некоторым набором пар $< a, b > \in R$ ($a \in A, b \in B$).

$\text{Пр}_1 R$ – *область определения* R, а $\text{Пр}_2 R$ называется *областью значений* R.

Если $\text{Пр}_1 R = A$, то соответствие R *всюду определено.*

Если $\text{Пр}_2 R = B$, то соответствие R *сюрьективно.*

Обратное соответствие определяется следующим образом:
$R^{-1} = \{< b, a > \mid\ < a, b > \in R\}$.

Если $< a, b > \in R$, то b – *образ* a, а a – *прообраз* b. Для множества всех образов a введем обозначение

$$r(a) = \{b \mid\ b \in B, < a, b > \in R\}.$$

Для множества всех прообразов b введем обозначение

$$r^{-1}(b) = \{a|\ a \in A, < a, b > \in R\}.$$

Для подмножества $X \subseteq A$ *образ* X есть

$$R(X) = \{y|\ \exists x \in X :< x, y > \in R\},$$

а для $Y \subseteq B$ *прообраз* Y есть

$$R^{-1}(Y) = \{x|\ \exists y \in Y :< y, x > \in R^{-1}\}.$$

Из определений следует, что $R(\text{Пр}_1 R)\ = \text{Пр}_2 R$ и $R^{-1}(\text{Пр}_2 R)\ = \text{Пр}_1 R$.

Соответствие R *функционально* (однозначно), если
$\forall a \in A : |r(a)| \leq 1$. В этом случае введем *функцию соответствия*, определенную на $\text{Пр}_1 R$, и обозначим ее также $r(a)$.
Обратное соответствие R^{-1} *функционально* (однозначно), если
$\forall b \in B : |r^{-1}(b)| \leq 1$. В этом случае введем *функцию обратного соответствия*, определенную на $\text{Пр}_2 R$, и обозначим ее также $r^{-1}(b)$.

1.3. Взаимно-однозначное соответствие

Соответствие называется взаимно-однозначным, если оно всюду определено, функционально и обратное соответствие также всюду определено и функционально. Таким образом, для проверки того, что $R \subseteq A \times B$ является взаимно-однозначным соответствием можно установить, что выполняются следующие условия:

1. Существует функция соответствия $r(a) = b$ (каждому аргументу $a \in A$ ставится в соответствие не более 1 значения), т. е. $|r(a)| \leq 1$.

2. Функция соответствия $r(a) = b$ всюду определена на A ($\text{Пр}_1 R = A$), т. е. $\forall a \in A\ \exists b \in B : r(a) = b$.

3. Существует функция обратного соответствия $r^{-1}(b) = a$ (каждому аргументу $b \in B$ ставится в соответствие не более 1 значения), т. е. $|r^{-1}(b)| \leq 1$.

4. Функция обратного соответствия $r^{-1}(b) = a$ всюду определена на B (соответствие R сюръективно $\text{Пр}_2 R = B$), т. е. $\forall b \in B\ \exists a \in A : r^{-1}(b) = a$.

5. Функции $r(a)$ и $r^{-1}(b)$ взаимно обратны, т. е.
   $\forall a \in A: \ r^{-1}(r(a)) = a$ и $\forall b \in B: \ r(r^{-1}(b)) = b$.

Взаимно-однозначное соответствие часто также называют *биекцией*.

Рассмотрим примеры соответствий.

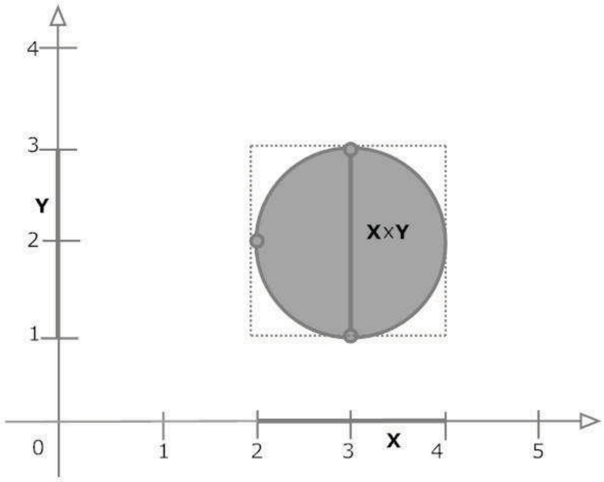

Рис. 1.

1. R – круг $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ (рис. 1). Для $x = 2$ значение $y = 2$ является единственным элементом множества $r(2)$ образов x, но для $x = 3$ множество его образов $r(3)$ представляет отрезок $\{y \mid y \in [1,3]\}$, а потому соответствие не функционально.

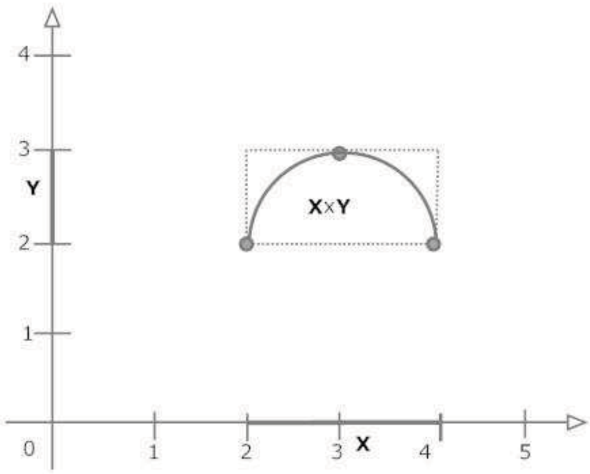

Рис. 2.

2. R – дуга $\{(x,y) \mid (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1, \ y \geq 2\}$ (рис. 2). Соответствие R определено на отрезке $x \in [2,4]$ и является функциональным, так как $\forall x$ значение y определяется однозначно функцией $y = R(x) = \sqrt{1-(x-3)^2} + 2$, но обратное соответствие

$x = R^{-1}(y) = \pm\sqrt{1-(y-2)^2}+3$ является неоднозначным, т. е. не является функциональным.

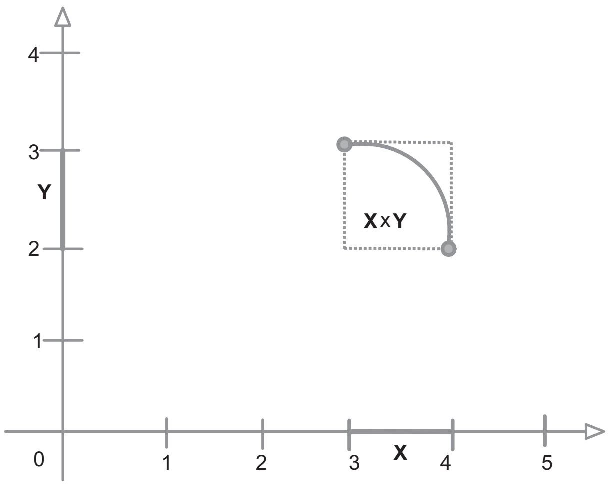

Рис. 3.

3. R – дуга $\{(x,y)|\ (x-3)^2+(y-2)^2=1,\ y \geq 2,\ x \geq 3\}$ (рис. 3). Соответствие R определено на отрезке $X=[3,4]$, имеет область значений $Y=[2,3]$ и является функциональным $y=R(x)=\sqrt{1-(x-3)^2}+2$. Также является функциональным обратное соответствие $x=R^{-1}(y)=\sqrt{1-(y-2)^2}+3$. Таким образом, соответствие R является взаимно-однозначным для произведения множеств $X \times Y$.

4. Множество позиций POZ на шахматной доске $D=\{<x,n>\mid x \in \overline{a,h},\ n \in \overline{1,8}\}$ с множеством фигур $FIG=\{Krw, Fw, Slw, Slw, Knw, Knw, Lw, Lw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Krb, Fb, Slb, Sb, Knb, Knb, Lb, Lb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb\}$ является соответствием $POZ \subseteq F \times D^{'}$ между подмножеством $F \subseteq FIG$ оставшихся фигур и подмножеством $D^{'} \subseteq D$ клеток доски, на которых стоят эти фигуры. Например, $p=\{<Krw,<a,3>>,<Lw<b,8>>,<Krw,<h,4>>,<Pw<b,6>>,<Kn,<d,7>>\}$. Соответствие POZ является взаимно-однозначным, так как каждая фигура из подмножества F занимает ровно 1 позицию (функция соответствия однозначна на подмножестве оставшихся фигур) и каждая клетка из $D^{'}$ может быть занята не более, чем одной

фигурой из FIG (функция обратного соответствия однозначна на множестве занятых фигурами клеток доски).

5. Англо-русский словарь $S \subseteq A \times R$ осуществляет соответствие между некоторым подмножеством A английских слов и подмножеством R русских слов. Однако и прямое, и обратное соответствия не являются однозначными: образ английского слова может состоять из нескольких русских слов, а прообраз русского слова может иметь несколько английских слов.

Написание фразы *взаимно-однозначное соответствие* можно сокращать как 1-1с.

Теорема о взаимно-однозначном соответствии.
Между конечными множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие тогда и только тогда, когда количества элементов этих множеств равны ($|A| = |B|$).

Доказательство
Достаточность. Пусть $|A| = |B| = n$. Перенумеруем все элементы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Построим функцию соответствия $r(a_i) = b_i$ ($i \in \overline{1,n}$) и функцию обратного соответствия $r^{-1}(b_i) = a_i$ ($i \in \overline{1,n}$). Эти функции отвечают всем вышеперечисленным условиям 1-1с, поэтому нами установлено 1-1с.
Необходимость. Пусть существует 1-1с $R \subseteq A \times B$. Доказательство проведем от противного. Если $|A| > |B|$, то в A найдутся 2 элемента с одним образом в B, что противоречит 1-1с R. Если же $|B| > |A|$, то в B найдутся 2 элемента с одним прообразом в A, что опять противоречит 1-1с R. Полученные противоречия завершают доказательство необходимости и всей теоремы.

Теорема о 1-1с позволяет в некоторых задачах комбинаторики обосновать правильность нахождения количества элементов некоторого множества. Для этого устанавливается 1-1с с некоторым другим множеством, число элементов которого может быть подсчитано или уже известно. Установление 1-1с требует определения функций прямого и обратного соответствия. Такое определение каждой функции должно выражать правило, которое определяет значение функции по ее аргументу. Это правило может быть задано либо с помощью формулы, либо словесным образом, либо с помощью таблицы соответствия, либо при помощи алгоритма, вычисляющего по аргументу значение функции. Но в любом случае это должно быть правило, точно и однозначно задающее значение функции по ее аргументу.

Помимо обоснования всюду определенности этих функций, необходимо также показать их взаимную обратность. Пусть, например, имеются множества A и B и для установления 1-1с определены функция $f(a) = b$ для любого аргумента $a \in A$ со значением $b \in B$, а также функция $f^{-1}(b) = a$ для любого аргумента $b \in B$ со значением $a \in A$. Хотя функции f и f^{-1}, осуществляющие соответствие, всюду определены (на A и B соответственно), но соответствие f^{-1} может не быть обратным для соответствия f, а потому их взаимную обратность нужно обосновать установлением свойств: $\forall a \in A : f^{-1}(f(a)) = a$, $\forall b \in b : f(f^{-1}(b)) = b$. Этим 1-1с между A и B будет установлено.

1.4. Отношения эквивалентности и порядка

Рассмотрим $R \subseteq A \times A$. Для каждого из таких отношений могут быть выполнены или не выполнены некоторые из следующих свойств:

1. <u>Рефлексивность</u>. $\forall a \in A : \ (a, a) \in R$.
2. <u>Антирефлексивность</u>. $\forall a \in A : \ (a, a) \notin R$.
3. <u>Симметричность</u>. $\forall a, b \in A : \ (a, b) \in R \ \rightarrow (b, a) \in R$.
4. <u>Антисимметричность</u>. $\forall a, b \in A : \ (a, b) \in R \ \rightarrow (b, a) \notin R$.
5. <u>Транзитивность</u>. $\forall a, b, c \in A : \ (a, b) \in R \wedge (b, c) \in A \ \rightarrow (a, c) \in R$.
6. <u>Линейность</u>. $\forall a, b \in A, \ a \neq b : \ (a, b) \in R \ \vee (b, a) \in R$.

1.4.1. Отношение эквивалентности

Отношением эквивалентности называется такое отношение, для которого выполняются свойства 1, 3, 5 (рефлексивность, симметричность и транзитивность).

Тривиальными примерами такого отношения являются отношения равенства чисел, равенства множеств. Часто в качестве обозначения отношения эквивалентности применяют знак $\equiv$.

Рассмотрим нетривиальный пример для множества N натуральных чисел: $a = b \mod n$ (числа $a \in N$ и $b \in N$ эквивалентны, если они имеют один и тот же остаток при делении на $n \in N$). Так, при $n = 3$ эквивалентными числами являются 1, 4, 7,..., или 2, 5, 8,..., или 3, 6, 9,.... Нетрудно видеть, что множество N разбивается этим отношением на 3 непересекающихся подмножества.

В общем случае вводится понятие *класса эквивалентности* как подмножества множества A всех элементов, которые эквивалентны некоторому выделенному элементу, называемому *представителем класса*. Оно может быть определено по любому представителю класса эквивалентности: $[a] \equiv \{b \in A|\ b \equiv a\}$. Нетрудно видеть, что $a \equiv b$ влечет $[a] = [b]$ и что $a \not\equiv b$ влечет $[a] \cap [b] = \emptyset$. Таким образом, введение отношения эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся классы эквивалентности, независимые от представителя. Если образовать множество, выбрав в каждом классе по представителю, то такое множество называется *фактор-множеством*: $F_A = \{a \in A|\ a, b \in F_A \to [a] \neq [b]\}$. Приведем примеры фактор-множества.

Пример 1

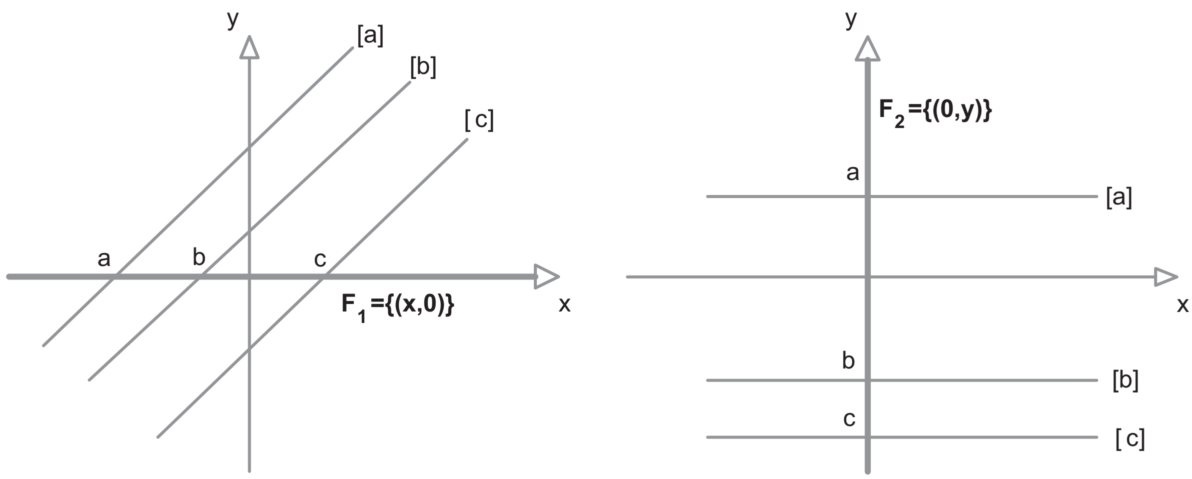

Рис. 4.

Рассмотрим вещественную плоскость $A = \{(x, y)|\ x, y \in (-\infty, \infty)\}$. Возьмем два различных вещественных числа a, b и определим следующее отношение эквивалентности $(x_1, y_1)R(x_2, y_2)\ :\ ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2$. Тогда в качестве фактор-множества при ненулевых значениях a, b можно взять $\{(x, 0)|\ x \in (-\infty, \infty)\}$ либо $\{(0, y)|\ y \in (-\infty, \infty)\}$, а при одном нулевом значении одного из параметров a, b можно взять одно из этих множеств, соответствующее ненулевому параметру. На рис. 4 представлены оба эти случая: $F_1 = \{(x,0)|\ x \in \mathbb{R}\}$ и $F_2 = \{(0,y)|\ y \in \mathbb{R}\}$.

Пример 2

Рассмотрим множество $A = \{(x,y)|x, y \in Z,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ целочисленных точек первого квадранта двумерной плоскости с бинарным отношением R, если для любых точек $(x,y) \in A$: $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$, когда $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$. Нетрудно проверить, что R является отношением эквивалентности. Действительно,

1) $\forall (x,y) \in A$: $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, то есть $(x,y)R(x,y)$, и, значит, свойство рефлексивности для R выполнено;

2) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A$ из симметричности равенства чисел $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ следует равенство $x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2$, то есть $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ влечет $(x_2,y_2)R(x_1,y_1)$, и значит свойство симметричности для R выполнено;

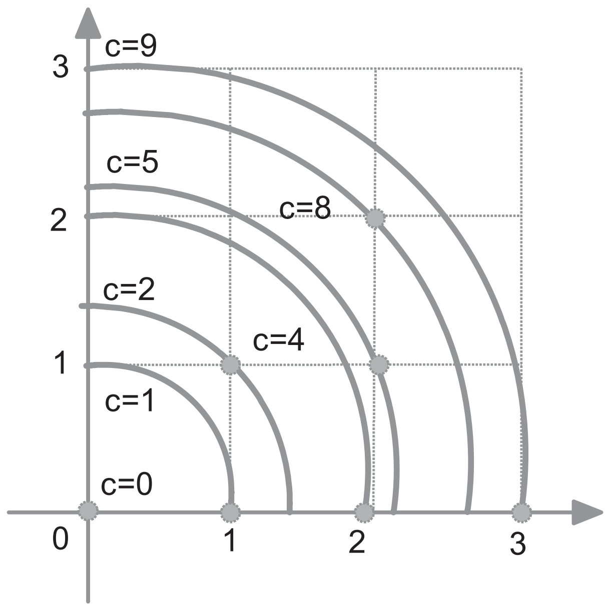

Рис. 5.

3) $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) \in A$ из транзитивности равенства чисел $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2,\ x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2$ следует равенство $x_1^2 + y_1^2 = x_3^2 + y_3^2$, то есть из $(x_1,y_1)R(x_2,y_2),\ (x_2,y_2)R(x_3,y_3)$ следует

$(x_1, y_1)R(x_3, y_3)$, и значит свойство транзитивности для R выполнено.

Класс эквивалентности – это множество $C_c = \{(x, y)|x^2 + y^2 = c\}$, то есть точки дуги окружности, проходящей через целочисленные точки первого квадранта плоскости $X \times Y$. При этом c – целое число, являющееся квадаратом радиуса окружности с центром в начале координат. Не для любых целых значений c такая окружность содержит целочисленные точки. Например, для $c = 3$ таких точек нет, так как число 3 не может быть представлено суммой двух квадратов целых чисел. На рис. 5 показаны классы эквивалентности для $c = 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9$. Множество C всех классов эквивалентности можно описать следующим образом: $C = \{c|\ x, y, c \in Z,\ c = x^2 + y^2\}$. Для образования фактор-множества F необходимо для каждого класса c выбрать одну целочисленную точку. Так как каждый класс, кроме $c = 0$, содержит более одной целочисленной точки, то необходим простой способ выбора точек для такого множества. В общем случае можно поступить, например, следующим образом: из множества целочисленных точек каждого класса выберем ту, которая имеет максимальное значение абсциссы x. Тогда получим $F = \{(x_c, y_c)|\ c \in C, x_c = \max\{x|\ (x, y) \in C_c\}, y_c = \sqrt{c - x_c^2}\}$. Подставляя определение класса c в эту формулу окончательно получим:

$$F = \{(x_c, y_c)|\ x_c, y_c, c \in Z, \{x|\ (x, y) \in Z, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = c\} \neq \emptyset,$$
$$x_c = \max\{x|\ (x, y) \in Z, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = c\}, y_c = \sqrt{c - x_c^2}\}.$$

На рис. 5 видно, что все точки фактор-множества F ограничены сектором $S = \{(x, y)|\ x \geq 0, y \geq 0, y \leq x\}$ и для каждого класса целочисленная точка вроде бы единственна, а потому вроде можно было бы описать это фактор-множество более простым способом:
$\{(x, y)|\ x, y \in Z, x \geq 0, y \geq 0, y \leq x\}$.

Но следующий пример ($7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2 = 65$) показывает, что предположение единственности в секторе S целочисленной точки для каждого класса является ошибочным, а потому упрощение описания F найти трудно.

1.4.2. Отношение порядка

Отношением порядка называется такое отношение, для которого выполняются свойства 2, 4, 5 (антирефлексивность, антисимметричность и транзитивность).

Тривиальными примерами такого отношения являются отношения $<$ и $>$ для чисел, отношения строгого включения $\subset$ и $\supset$ для множеств. Для обозначения отношения порядка часто используется знак $\prec$.

Рассмотрим нетривиальные примеры.

Пример 1. Множество целочисленных точек плоскости P (рис. 6) с отношением порядка $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_1 < x_2 + y_2$.

Прежде всего проверим, что введенное отношение $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ есть отношение порядка.

1) $\forall (x, y) \in P$ отношение $x + y < x + y$ не выполняется, то есть $(x, y) \not\prec (x, y)$, и значит свойство антирефлексивности для $\prec$ выполнено;

2) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$ из неравенства чисел $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ следует отрицание неравенства $x_2 + y_2 < x_1 + y_1$, то есть $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ влечет $(x_2, y_2) \not\prec (x_1, y_1)$, и значит свойство антисимметричности для $\prec$ выполнено;

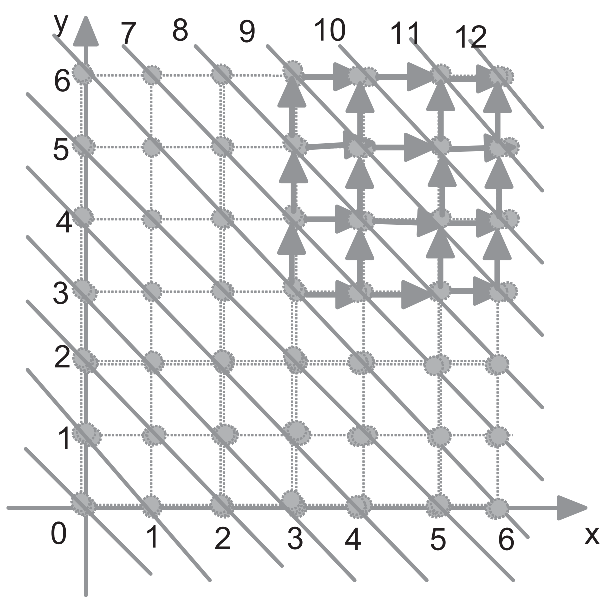

Рис. 6.

3) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P$ из неравенств чисел $x_1 + y_1 < x_2 + y_2$, $x_2 + y_2 < x_3 + y_3$ следует неравенство $x_1 + y_1 < x_3 + y_3$, то есть из $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$, $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$ следует $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$, и, значит, свойство транзитивности для $\prec$ выполнено.

Таким образом $\prec$ есть отношение порядка на множестве P. На рис. 6 стрелками показаны лишь некоторые отношения порядка для элемента (3, 3) (и больших по порядку элементов) с ближайшими большими по порядку элементами. Но свойство линейности для этого отношения не выполнено: для любых пар элементов $(x_1, y_1), (x_2, y_2) P$, которые лежат на одной прямой $x + y = const$, $(x_1, y_1) \not\prec (x_2, y_2)$ и $(x_2, y_2) \not\prec (x_1, y_1)$. Например, $(3, 4) \not\prec (4, 3)$ и $(4, 3) \not\prec (3, 4)$. Отношение порядка, для которого не выполнено свойство линейности, называется *частичным* отношением порядка, а множество с таким отношением порядка *частично-упорядоченным*.

При таком отношении имеется порядок элементов $(2, 0) \prec (1, 2) \prec (2, 2) \prec (3, 2) \prec (4, 2) \prec (4, 3) \prec (3, 5)$, но элементы множества (2, 4) и (4, 2) не связаны отношением порядка.

Пример 2. Множество целочисленных точек (рис. 7) плоскости P с отношением порядка

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2).$$

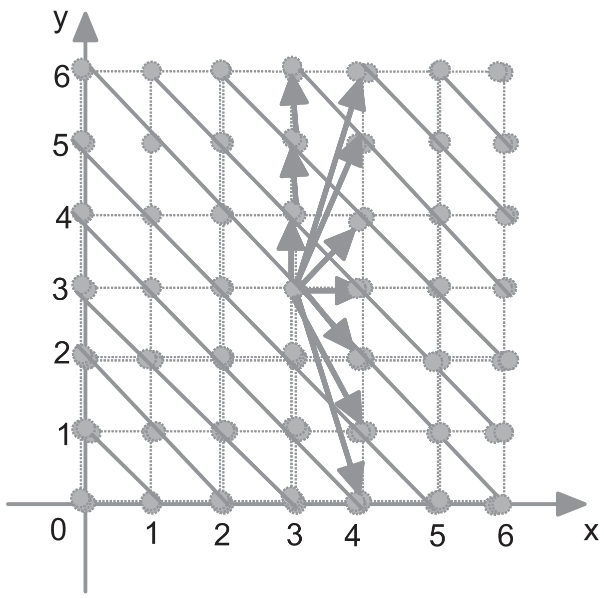

Рис. 7.

Для любых двух элементов этого множества порядок определяется первой координатой или, если обе первые координаты равны, порядок определяется по второй координате. На рис. 7 стрелками показаны лишь некоторые отношения порядка для элемента $(3, 3)$ с ближайшими большими по порядку элементами.

Прежде всего проверим, что введенное отношение $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ есть отношение порядка.

1) $\forall (x, y) \in P$ отношение $x < x \vee x = x \wedge y < y$ не выполняется, то есть $(x, y) \not\prec (x, y)$, и, значит, свойство антирефлексивности для $\prec$ выполнено;

2) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$, где $x_1 < x_2$ либо $x_1 = x_2,\ y_1 < y_2$

   - либо выполнено неравенство чисел $x_1 < x_2$, и тогда следует отрицание неравенства $x_2 < x_1$,
   - либо выполнено равенство чисел $x_1 = x_2$, и тогда из неравенства $y_1 < y_2$ следует отрицание неравенства $y_2 < y_1$,

   и, таким образом, $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$ влечет $(x_2, y_2) \not\prec (x_1, y_1)$, и, значит, свойство антисимметричности для $\prec$ выполнено;

3) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P$, если $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$, $(x_2, y_2) \prec (x_3, y_3)$, то имеют место неравенства чисел $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, что влечет $x_1 \leq x_3$, а потому имеют место случаи

   - $x_1 < x_3$, откуда следует $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$;
   - $x_1 = x_3$, что влечет $x_1 = x_2 = x_3$ и, следовательно, $y_1 < y_2 < y_3$, откуда следует $y_1 < y_3$, и тогда из $x_1 = x_3, y_1 < y_3$ вытекает $(x_1, y_1) \prec (x_3, y_3)$,

   и, значит. свойство транзитивности для $\prec$ выполнено.

Таким образом, $\prec$ есть отношение порядка на множестве P. Для такого отношения порядка выполнено свойство 6 линейности. Действительно, для любых различных элементов $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P$

- либо $x_1 < x_2$, и тогда $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$;
- либо $x_1 > x_2$, и тогда $(x_2, y_2) \prec (x_1, y_1)$;

- либо $x_1 = x_2,\ y_1 < y_2$, и тогда $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2)$;
- либо $x_1 = x_2,\ y_1 > y_2$, и тогда $(x_2, y_2) \prec (x_1, y_1)$,

что показывает выполнение свойства 6. Такой порядок называется *линейным*, а множество – *линейно-упорядоченным.*

Порядок примера 2 обобщается на любую степень n прямого произведения любого множества A введением следующего линейного отношения порядка для произвольных n-мерных векторов $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $(x_1^2, \ldots, x_n^2) \in A^n$:

$$(x_1^1, \ldots, x_n^1) \prec (x_1^2, \ldots, x_n^2) \leftrightarrow \exists i \in \overline{1,n} :\ x_i^1 < x_i^2 \wedge \forall k < i :\ x_k^1 = x_k^2.$$

Такой порядок называется *лексикографическим* порядком. Так, порядок возрастания для множества n-разрядных целых чисел является лексикографическим. Обычный порядок в словарях является лексикографическим, если каждое слово дополнить до самого длинного необходимым количеством пробелов (которые имеют код меньший, чем код любой буквы в словах словаря).

Линейный порядок может не быть лексикографическим. Например, для множества целочисленных точек плоскости P порядок с отношением

$$(x_1^1, \ldots, x_n^1) \prec (x_1^2, \ldots, x_n^2) \leftrightarrow \exists i \in \overline{1,n} :\ x_i^1 < x_i^2 \wedge \forall k > i :\ x_k^1 = x_k^2$$

является линейным (так как для любых двух различных элементов этого множества выполнено свойство линейности), но не является лексикографическим. Такой порядок используется в словарях с обратным расположением слов по их окончанию.

Для множества с введенным отношением порядка вводятся понятия *максимального, минимального, наибольшего и наименьшего элементов.*

Элемент называется максимальным (минимальным), если не существует элемента, которому он предшествует (который предшествует ему).

Элемент называется наибольшим (наименьшим), если любой другой элемент множества ему предшествует (если он предшествует любому другому элементу множества).

Наибольший (наименьший) элемент множества всегда является максимальным (минимальным). Действительно, если элемент x не максимальный (минимальный), то существует элемент y, которому он предшествует $x \prec y$ (который предшествует ему $y \prec x$), а это противоречит тому, что он наибольший (наименьший).

В случае же нескольких максимальных (минимальных) элементов наибольшего (наименьшего) элемента нет. Действительно, если элементы x, y максимальные (минимальные), то элемент x не может быть наибольшим (наименьшим), так как другой элемент y не может предшествовать ему, так как является максимальным (так как он не может предшествовать ему в силу своей максимальности).

В случае линейного порядка понятия максимального и наибольшего элементов совпадают так же, как и понятия минимального и наименьшего элементов.

Рассмотрим примеры определения максимальных, минимальных, наибольших и наименьших элементов.

Пример 3. Множество целочисленных точек круга (рис. 8)

$$C = \{(x, y)|\ x, y \in Z, (x-3)^2 + (y-2)^2 < 7\}$$

с отношением порядка $(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ (таким же, как и в примере 1).

Стрелками от элементов указываются ближайшие большие по порядку элементы. Максимальные элементы описываются множеством $Mx = \{(4,\ 4), (5,\ 3)\}$, так как для каждого из этих элементов нет большего по порядку. Покажем, как обосновать это не по рисунку, так как в некоторых случаях рисунок может исказить вывод. Предположим противное: есть элемент $(x_1, y_1) \in C$, которому предшествует элемент из Mx. Так как для элементов из $Mx : x + y = 4 + 4 = 5 + 3 = 8$, то для этого элемента $x_1 + y_1 = 9 > 8$, а потому $y_1 = 9 - x_1$. Из $(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 2)^2 < 7$ следует неравенство $(x_1 - 3)^2 + (7 - x_1)^2 < 7$, которое мы преобразуем к виду: $2x_1^2 - 20x_1 + 51 < 0$. Дискриминант квадратного трехчлена $D = 20^2 - 4 \cdot 2 \cdot 51 = -8 < 0$, а потому мы приходим к противоречию с тем, что такая точка есть. Полученное противоречие обосновывает максимальность элементов Mx.

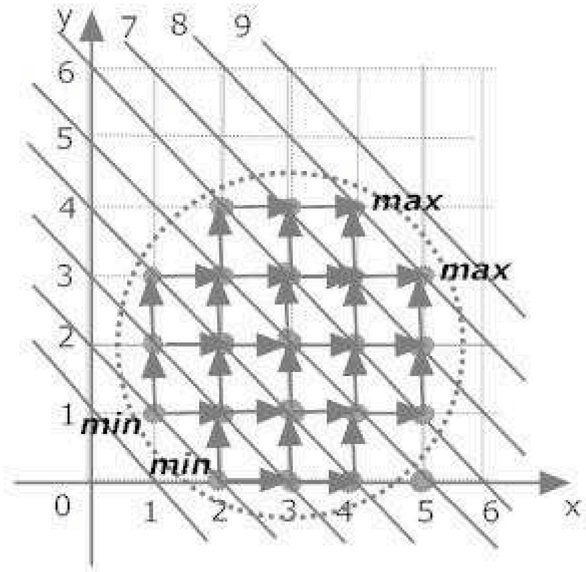

Рис. 8.

Наибольшего элемента среди них нет, так как количество максимальных элементов более 1. Минимальные элементы описываются множеством $Mn = \{(1,1),(2,0)\}$, так как для каждого из этих элементов нет меньшего по порядку. Обосновывается аналогичным образом. Наименьшего элемента среди них нет, так как их количество более 1.

Пример 4. Множество целочисленных точек круга (рис. 9)

$$C = \{(x,y)|\ x,y \in Z, (x-3)^2 + (y-2)^2 < 7\}$$

с отношением порядка

$$(x_1, y_1) \prec (x_2, y_2) \leftrightarrow x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 < y_2)$$

(таким же, как и в примере 2).

Стрелками от элементов указываются ближайшие большие по порядку элементы. Максимальный элемент (5, 3) единственен, а потому он является наибольшим элементом, так как для него нет большего по порядку. В предположении противного $\exists (x,y) : (5,\ 3) \prec (x,y)$ получаем противоречие, так как либо $x > 5$, но такие элементы не принадлежат кругу C, либо при $x = 5,\ y > 3$, но такие элементы также не принадлежат кругу C.

Минимальный элемент (1, 1) также единствен, так как для него нет меньшего по порядку, а потому он является наименьшим. В предположении противного $\exists (x,y) : (x,y) \prec (5,\ 3)$ получаем противоречие, так как либо $x < 1$, но такие элементы не принадлежат кругу C, либо при $x = 1,\ y < 1$, но такие элементы также не принадлежат кругу C.

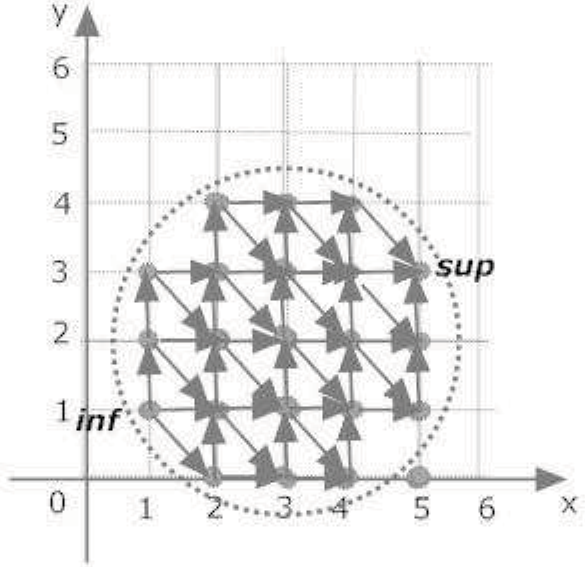

Рис. 9.

Элементы линейно-упорядоченного множества можно расположить в одну линейную цепочку по порядку от наименьшего к наибольшему.

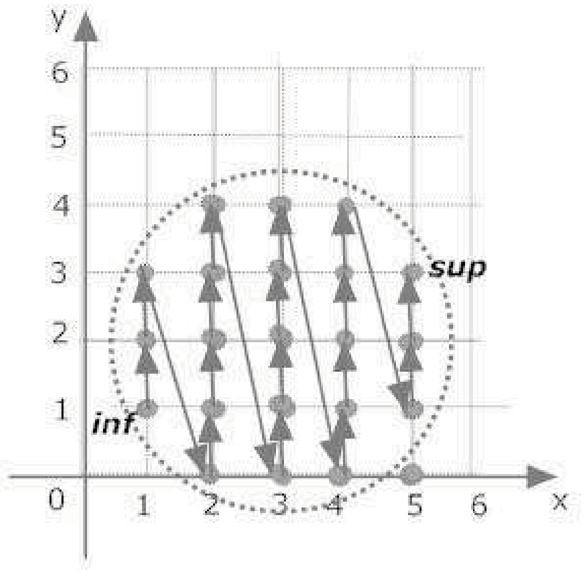

Рис. 10.

Так, в примере 4 линейное расположение элементов выглядит следующим образом:

$(1,1) \prec (1,2) \prec (1,3) \prec (2,0) \prec (2,1) \prec (2,3) \prec (2,4) \prec (3,0) \prec (3,1) \prec (3,2) \prec (3,3) \prec (3,4) \prec (4,0) \prec (4,1) \prec (4,2) \prec (4,3) \prec (4,4) \prec (5,0) \prec (5,1) \prec (5,2) \prec (5,3)$.

На рис. 10 стрелками указано это расположение элементов в линейную цепочку.

2. Мощность множества

Мощность множества является одной из его важных характеристик. Для конечного множества она определяется количеством его элементов. Для бесконечного множества количество элементов не ограничено, но для сравнения таких множеств вводится понятие *равномощности множеств.*

Два множества называются равномощными, если между ними можно установить 1-1с.

Равномощные конечные множества имеют одинаковое количество элементов. Наиболее простым бесконечным множеством является множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел. Любое множество, равномощное множеству натуральных чисел, называется *счетным* множеством.

2.1. Счетные множества

Теорема 1

Любое бесконечное подмножество множества $\mathbf{N}$ *является счетным.*

Доказательство

Необходимо установить 1-1с между подмножеством $N' \subseteq \mathbf{N}$ и самим множеством $\mathbf{N}$. Для этого занумеруем все элементы N' следующим образом. Выберем минимальный элемент в N' и обозначим его n_1. Затем выберем минимальный элемент в $N' \setminus \{n_1\}$ и обозначим его n_2 и т. д. Тем самым мы пересчитаем все элементы, т. е. каждому элементу из N' поставим в соответствие его индекс как элемент $\mathbf{N}$. Обратное соответствие по натуральному числу $k \in \mathbf{N}$ определяет элемент $n_k \in N'$. Нетрудно видеть, что оба соответствия всюду определены и функциональны, а также они взаимно обратны. Этим установлено 1-1с, что и требовалось доказать.

Обобщением теоремы 1 является следующее

Следствие

Любое бесконечное подмножество счетного множества является счетным.

Теорема 2

Множество $\mathbf{N}^2$ *является счетным.*

Доказательство

Разобьем $\mathbf{N}^2$ на классы i $(i = 1, 2, \dots)$, где к классу i отнесем

$$\{(a, b) \in \mathbf{N}^2 \mid a + b = i\} = \{(i-1, 1), (i-2, 2), \dots, (1, i-1)\}.$$

Классы упорядочены по возрастанию i. Если $a + b = i + 1$, то пара (a, b) получает номер $n = 1 + 2 + \dots + (i-1) + a = i \cdot (i-1)/2 + a = (a+b-1)(a+b-2)/2 + a$. Тем самым описывается функция соответствия $F((a, b)) = n$. На рис. 11 показаны первые 15 элементов $\mathbf{N}^2$. Функция обратного соответствия $F^{-1}(n) = (a, b)$ может быть определена следующим алгоритмом:

for (**int** $k = 1;\ k{*}(k{+}1) < 2{*}n;\ k{+}{+});\ a = n - k(k-1)/2;\ b = k + 1 - a;$

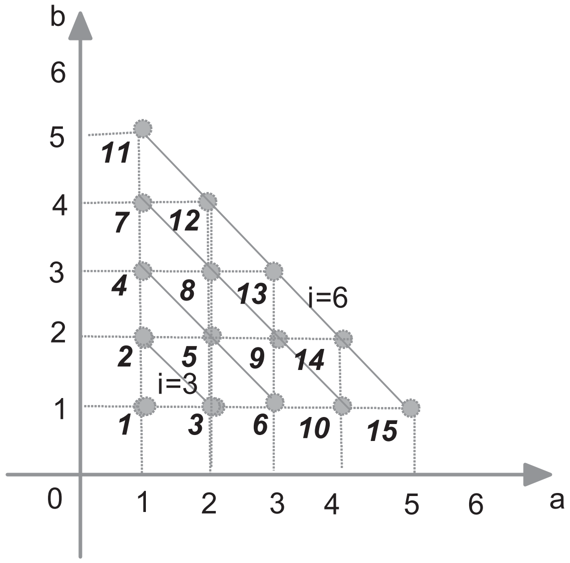

Рис. 11.

Проверим на нескольких примерах, что введенные функции $F(a, b)$ и $F^{-1}(n)$ 1-1с взаимно обратны.

1. $F((1, 1)) = (1 + 1 - 1)(1 + 1 - 2)/2 + 1 = 1$
   $F^{-1}(1) = (a, b);\ k = 1;\ 1 \cdot 2 < 2 \cdot 1$ не выполнено – выход из цикла;

$a = 1 - 1 \cdot (1-1)/2 = 1;\ b = 1 + 1 - 1 = 1$
Таким образом, $F^{-1}(F(1,1)) = (1,1);\ F(F^{-1}(1)) = 1$, т. е. взаимная обратность функций имеет место.

2. $F((2,3)) = (2+3-1)(2+3-2)/2 + 2 = 8$
   $F^{-1}(8) = (a,b);\ k = 4;\ 4 \cdot 5 < 2 \cdot 8$ не выполнено – выход из цикла; $a = 8 - 4 \cdot (4-1)/2 = 2;\ b = 4 + 1 - 2 = 3$
   Таким образом, $F^{-1}(F(2,3)) = (2,3);\ F(F^{-1}(8)) = 8$, т. е. взаимная обратность функций имеет место.

3. $F((4,2)) = (4+2-1)(4+2-2)/2 + 4 = 14$
   $F^{-1}(14) = (a,b);\ k = 5;\ 5 \cdot 6 < 2 \cdot 14$ не выполнено – выход из цикла; $a = 14 - 5 \cdot (5-1)/2 = 4;\ b = 5 + 1 - 4 = 2$
   Таким образом, $F^{-1}(F(4,2)) = (4,2);\ F(F^{-1}(14)) = 14$, т. е. взаимная обратность функций имеет место.

Так как выполнены условия 1-1с, то теорема доказана.

Теорема 3
Конечное объединение счетных множеств $M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ *счетно.*
Следствие 1
Множество $\boldsymbol{Z}$ *целых чисел счетно.*
Следствие 2
Множество рациональных чисел счетно.
Теорема 4
Счетное объединение конечных множеств

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \quad (|M_i| < \infty)$$

счетно.

2.2. Несчетные множества

Теорема 5. Теорема Кантора о несчетности континуума
Множество вещественных чисел отрезка $[0,\ 1]$ *не является счетным.*

Доказательство проведем от противного. Допустим множество континуума является счетным. Тогда все элементы этого множества можно выписать в последовательность бесконечных десятичных дробей с цифрами c_{ij} $(i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots)$:

$0,c_{11}c_{12}c_{13}\dots$
$0,c_{21}c_{22}c_{23}\dots$
$0,c_{31}c_{32}c_{33}\dots$
$\dots$
Рассмотрим любую бесконечную десятичную дробь:

$0,b_1b_2b_3\dots\ \ (b_1 \neq c_{11}, b_2 \neq c_{22}, b_3 \neq c_{33},\dots)$.

Эта дробь отличается от каждого числа в указанной последовательности. Поэтому получено противоречие, что все вещественные числа отрезка $[0,\ 1]$ пересчитаны, что и доказывает теорему.

Множество всех вещественных чисел, а также множество всех точек вещественного пространства также имеют мощность континуума.

Теорема 6. Теорема Кантора о неравномощности множества и множества его подмножеств.

Множество B всех подмножеств любого множества A имеет мощность большую, чем множество A.

Доказательство

Если $|A| < \infty$, т. е. конечное множество, то $|B| = 2^{|A|}$, и утверждение теоремы сводится к тривиальному факту для натурального $n:\ n < 2^n$. В случае бесконечного множества очевидно, что множество B не может иметь мощность, меньшую чем множество A, так как B содержит все одноэлементные подмножества множества A. Поэтому требуется доказать, что не существует 1-1с между A и B. Предположим противное: существует 1-1с между A и B, и для любого $x \in A$ функция $f(x) \in B$ отображает элемент A в подмножество $f(x)$, которое является элементом B. Элементы A разделим на 2 категории:
1. $\{x \in A|\ f(x) \in B, x \in f(x)\}$ – множество хороших элементов A.
2. $\{x \in A|\ f(x) \in B, x \notin f(x)\}$ – множество плохих элементов A.

$f^{-1}(\emptyset)$ – плохой элемент, так как никакой элемент не принадлежит пустому множеству.

$f^{-1}(A)$ – хороший элемент, так как он входит в множество A.

Образуем множество всех плохих элементов

$C = \{x \in A|$ x – плохой элемент $A\}$.

Является ли $f^{-1}(C)$ плохим или хорошим? Он не может быть хорошим, так как в этом случае входил бы в C, которое состоит только из плохих элементов. Но он не может быть и плохим, так как сразу бы стал хорошим. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 7. Теорема Кантора о связи счетного множества и множества континуума.

Множество подмножеств счетного множества имеет мощность континуума.

Для мощности счетного множества вводится обозначение c. Тогда мощность континуума может быть обозначена как 2^c. Рассматривая множество всех подмножеств континуума, а затем множества подмножеств этого множества. и т. д., получаем ряд для обозначений мощностей

$$|A| < 2^{|A|} < c < 2^c < 2^{2^c} < \dots$$

Этот ряд носит название *кардинальные числа.*

Не существует *множества всех множеств*, так как такое множество должно было бы принадлежать самому себе, а его множество подмножеств не могло бы входить в него.

2.3. Примеры установления мощности множества с обоснованием

Для конечного множества мощность – это число элементов множества. Такой пример мы не будем рассматривать, так как установление такой мощности является тривиальной задачей.

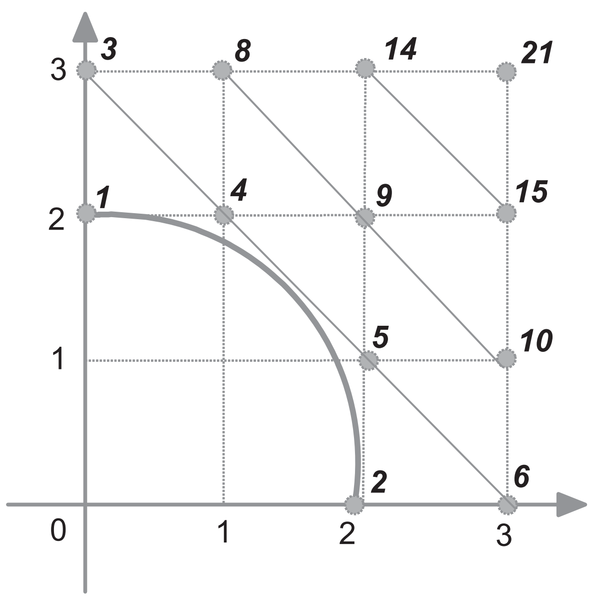

Рис. 12.

Пример 1

Рассматривается множество A целочисленных точек части 1-го квадранта плоскости, ограниченной условием $x^2 + y^2 > 2$. На рис. 12 показана часть этого множества, ограниченная неравенствами $x \leq 3, \ y \leq 3$.

Воспользуемся идеей нумерации при установлении 1-1с между множеством N^2 точек с натуральными координатами с множеством N натуральных чисел, при которой мы нумеровали точки по прямым $x + y = c$ со значениями $c = 2, 3, \ldots$

Отличие множества A от N^2 состоит в том, что множество A не содержит точку $(1, 1) \in N^2$, но зато содержит точки $\{(0, y) | \ y \in N, y > 1\}$ и $\{(x, 0) | \ x \in N, x > 1\}$, которые не содержит N^2. Поэтому точкам (0,2) и (2, 0) дадим отдельно номера *1* и *2*. Следующая группа из 4 точек с суммой координат $x + y = 3$ должна получить номера 3, 4, 5, 6. Следующая группа из 6 точек с суммой координат $x + y = 4$ должна получить номера от 7 до 11, а далее – с суммой 5 – номера от 12 до 17 и т. д. Нетрудно видеть, что номера точек (0, y) для сумм координат $x + y = 3, 4, 5, \ldots$ изменяются как 3, 7, 12,..., а потому закон их изменения описывается как $(x + y)(x + y + 1)/2 - 3$. Это служит основанием построения функции $\varphi(x, y)$ нумерации точек A, т. е. прямого соответствия из A в N:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, y = 2, \\ 2, & \text{если } x = 2, y = 0, \\ (x + y)(x + y + 1)/2 - 3 + x, & \text{если } x + y > 3. \end{cases}$$

Проверим вычисление номеров для точек $(1, \ 2), \ (3, \ 3)$:
$\varphi(1, \ 2) = (1 + 2)(1 + 2 + 1)/2 - 3 + 1 = 6 - 2 = 4$,
$\varphi(3, \ 3) = (3 + 3)(3 + 3 + 1)/2 - 3 + 3 = 21$,
что соответствует нумерации на рис. 12.

Теперь надо построить функцию обратного соответствия $\varphi^{-1}(n)$, взаимнообратную функции $\varphi(x, y)$: $\varphi(\varphi^{-1}(n)) = n$; $\varphi^{-1}(\varphi(x, y)) = (x, y)$. Для ее построения также выделим точки с номерами 1 и 2, а для остальных точек зададим значение функции алгоритмом:

$$\varphi^{-1}(n) = \begin{cases} (0,2), & \text{если } n = 1, \\ (2,0), & \text{если } n = 2, \\ (x,y), & \text{если } n > 2, \text{ где } x, y \text{ определяются алгоритмом:} \\ \quad \{for(k=1;\ k*(k+1) \le 2*n+6;\ k++);\ k--; \\ \qquad x = n - k*(k+1)/2 + 3;\ y = k - x;\}. \end{cases}$$

Проверим вычисления для номеров $n = 4, n = 21$:

$n = 4;\ k*(k+1) > 2*4+6 = 14 \Rightarrow k = 4;\ k = 3;$

$$x = 4 - 3*4/2 + 3 = 1;\ y = 3 - 1 = 2; \Rightarrow (1,2),$$

$n = 21;\ k*(k+1) > 2*21+6 = 48 \Rightarrow k = 7;\ k = 6;$

$$x = 21 - 6*7/2 + 3 = 3;\ y = 6 - 3 = 3; \Rightarrow (3,3).$$

Из этого видно, что прямая и обратная функции 1-1с взаимно обратны.

Пример 2

Рассматривается множество B вещественных точек 1-го квадранта вещественной плоскости, ограниченное гиперболой $x \cdot y > 1$. На рис. 13 заштрихована часть множества B с ограниченными координатами: $x \le 3, y \le 3$. Множество B является частью множества вещественной плоскости, которая имеет мощность континуума (вещественного отрезка [0, 1]).

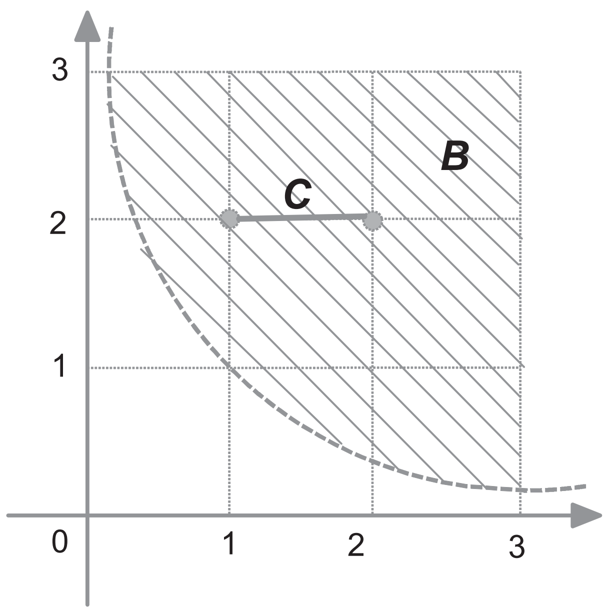

Рис. 13.

Для того чтобы установить, что множество B имеет также мощность континуума, покажем, что подмножество $C = \{(x, 2)|\ x \in [2, 3]\} \subset B$ имеет мощность континуума. Для этого установим 1-1с между множеством C и отрезком [0, 1]. Функция $\varphi((x, y)) = x - 1$ ставит в соответствие каждой точке $(x, y) \in C$ точку $x - 1 \in [0, 1]$. Обратная функция $\varphi^{-1}(x) = (x + 1, 2)$ отображает каждую точку $x \in [0, 1]$ в точку C. Так как обе функции взаимно обратны: $\forall x \in [0, 1]\ \varphi(\varphi^{-1}(x) = x$ и $\forall (x, y) \in C\ \varphi^{-1}(\varphi(x, y)) = (x, y)$, то 1-1с между C и [0, 1] установлено, и следовательно множество B имеет мощность континуума, что и требовалось доказать.

3. Цель работы и общее задание

1. Умение проверять для множества и заданного отношения свойства отношения эквивалентности.
2. Умение выделять для множества и отношения эквивалентности классы эквивалентности множества и описывать фактор-множество наиболее простой формулой.
3. Умение проверять для множества свойства заданного отношения порядка.
4. Умение устанавливать с обоснованием для множества с заданным отношением порядка наибольший (наименьший) и максимальные (минимальные) элементы множества.
5. Умение устанавливать счетность (несчетность) множества.
6. Умение устанавливать нумерацию (эквивалентность натуральному ряду) всех элементов счетного множества.

Задание по теме *Множества. Отношения на множествах, мощность множества* содержит 3 задачи. Их решение предполагает последовательное выполнение (в отдельной тонкой тетради) всех следующих частей общего задания для варианта индивидуального задания, выданного студенту.

Задача 1

1. Описать свойства, которым определяется *отношение эквивалентности* R для элементов произвольного множества X.

2. Для заданного множества A установить, является ли каждое из заданных отношений R_1, R_2 *отношением эквивалентности*, проверяя выполнение каждого из свойств такого отношения (обоснование).

3. Для множества и заданного отношения, являющегося отношением эквивалентности, описать классы эквивалентности и фактор-множество (наиболее простой формулой для множества), а также изобразить их графически (с координатными осями и координатной сеткой) разными цветами.

Задача 2

1. Описать свойства *отношения частичного порядка и линейного порядка* для произвольного множества X.

2. Для множества B, являющегося частью множества A из задачи 1 при заданных ограничениях G, установить, является ли каждое из заданных отношений R_1, R_2 *отношением порядка* (частичного или линейного), проверяя выполнение каждого из свойств такого отношения (обоснование).

3. Для множества B и каждого заданного отношения, являющегося отношением порядка, описать наибольший (наименьший) элемент и максимальные (минимальные) элементы этого множества (те, которые есть), строго обосновав выполнение определения, и указать их на графике (с координатной сеткой) черным цветом наибольший элемент, зеленым – наименьший, синим – остальные максимальные и желтым – остальные минимальные элементы, а также пометить их надписями: *max* – максимальный, *min* – минимальный, *sup* – наибольший, *inf* – наименьший, указав их координаты в дискретном случае.

Задача 3

1. Описать определения мощности множества, равномощных множеств, *счетного* и *несчетного* множества.

2. Для множества A из задачи 1 и множества B из задачи 2 установить (с обоснованием), является ли каждое из них конечным, счетным или несчетным (обоснование).

3. Построить для счетного множества 1-1с множества с натуральным рядом N, а для несчетного множества 1-1с части множества с континуумом (отрезком [0;1]).

4. Варианты индивидуального задания № 10

<u>Задача 1</u>

1. A – множество целочисленных точек плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \ x_1 + y_2 = y_1 + x_2;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \ x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$

2. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \ 3x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \ x_1 - x_2^2 = y_1 - y_2^2.$

3. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \ x_1 + |y_2| = y_1 + |x_2|;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \ x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$

4. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \ 3x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \ x_1 - x_2^2 = y_1 - y_2^2.$

5. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \ x_1 - y_2 = y_1 - x_2;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \ x_1^2 + 2y_1 = x_2^2 + 2y_2.$

6. A – множество целочисленных точек 2-го квадранта $(x \leq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \ 2x_1^2 + 3y_1^2 = 2x_2^2 + 3y_2^2;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \ 3x_1^2 - 2x_2^2 = 3y_1^2 - 2y_2^2.$

7. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ |x_1 x_2| = |y_1 y_2|;$
   $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3.$

8. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 + 2y_2 = x_2^2 - 2y_1^2;$
   $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ 2x_1 + 3y_1 = 2x_2 + 3y_2.$

9. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
   $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1^2 + 3y_1^2 = x_2^2 + 3y_2^2;$
   $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2^2| = |y_1^2 - y_2^2|.$

10. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
    $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2;$
    $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ 3x_1 + 2y_1^3 = 3x_2 + 2y_2^3.$

11. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
    $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 x_2 = y_1 y_2;$
    $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ 5x_1^3 + 2y_1^3 = 5x_2^3 + 2y_2^3.$

12. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
    $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2;$
    $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1 - x_2^2 = y_1 - y_2^2.$

13. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
    $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ 3x_1 - x_2 = 3y_1 - y_2;$
    $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1 + 2y_1^2 = x_2 + 2y_2^2.$

14. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
    $(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2;$
    $(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1 |x_2| = y_1 |y_2|.$

15. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + 3y_1^2 = x_2 + 3y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1y_1 = x_2y_2$.

16. A – множество вещественных точек плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1x_2| = |y_1y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^4 + y_1^4 = x_2^4 + y_2^4$.

17. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 3x_1^2 + 4y_1^2 = 3x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2| = |y_1^2 - y_2|$.

18. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_2 = x_2^2 + y_1^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 - x_2 = 2y_2 - 2y_1$.

19. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 3x_1 + 7y_1^2 = 3x_2 + 7y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ y_1y_2 = x_1x_2$.

20. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - 2x_2| = |y_1 - 2y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^3 + y_1^2 = x_2^3 + y_2^2$.

21. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_2 = x_2^2 + y_1^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2$.

22. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$.

23. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + 2|y_2| = y_1 + 2|x_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 5x_1^2 + 3y_1 = 5x_2^2 + 3y_2$.

24. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3$.

25. A – множество вещественных точек плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

26. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1|x_2| = y_1|y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 2x_1 + y_1^3 = 2x_2 + y_2^3$.

27. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 - y_2 = y_1 - x_2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 5x_1^2 + 2y_1 = 5x_2^2 + 2y_2$.

28. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^2 = x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 - 2x_2^2 = y_1^2 - 2y_2^2$.

29. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 3x_1^2 - 3x_2^2 = 2y_2^2 - 2y_1^2$.

30. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1^2 - 5y_1^3 = x_2^2 + 5y_2^3$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 2x_1^2 - 3x_2^2 = 2y_1^2 - 3y_2^2$.

31. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 3x_1^2 + 4y_1^2 = 3x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2^2| = |y_1^2 - y_2^2|$.

32. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 2x_1x_2 = 2y_1y_2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^4 + 3y_1^4 = x_2^4 + 3y_2^4$.

33. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 5x_1 + y_1^2 = 5x_2 + y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1|x_2| = y_1|y_2|$.

34. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^2 = x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2^2| = |y_1^2 - y_2^2|$.

35. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$.

36. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 3x_1^3 + 2y_1^3 = 3x_2^3 + 2y_2^3$.

37. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_2 = x_2^2 + y_1^2$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 3x_1 - 3x_2 = 2y_2 - 2y_1$.

38. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 5x_1^2 + 4y_1^3 = 5x_2^2 + 4y_2^3$;
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2| = |y_1^2 - y_2|$.

39. A – множество целочисленных точек 2-го квадранта $(x \leq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 y_1 = x_2 y_2.$

40. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 5x_1^2 + 4y_1^2 = 5x_2^2 + 4y_2^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 - 2x_2^2 = y_1^2 - 2y_2^2.$

41. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |x_1 - x_2| = |y_1 - y_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 3x_1^2 - 3x_2^2 = 2y_2^2 - 2y_1^2.$

42. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 3x_1 + y_1^3 = 3x_2 + y_2^3.$

43. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_2 = x_2^2 - y_1^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 2x_1 + 3y_1 = 2x_2 + 3y_2.$

44. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_2 = y_1 + x_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 + y_1 = x_2^2 + y_2.$

45. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + |y_2| = y_1 + |x_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 + 5y_1 = x_2^2 + 5y_2.$

46. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + 2y_2 = x_2^2 - 2y_1^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 2x_1 + 3y_1 = 2x_2 + 3y_2.$

47. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 2x_1 + 2y_2 = x_2^2 + y_1^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 + 7y_1 = x_2 + 7y_2.$

48. A – множество целочисленных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 3x_1^2 + 4y_1^3 = 3x_2^2 + 4y_2^3;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 - 2x_2^2 = y_1^2 - 2y_2^2.$

49. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 3x_1 + 2y_1^2 = 3x_2 + 2y_2^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ y_1 y_2 = x_1 x_2.$

50. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^3 = x_2^2 + 4y_2^3;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 - 2x_2^2 = y_1^2 - 2y_2^2.$

51. A – множество целочисленных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + 2|y_2| = y_1 + 2|x_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 + 3y_1 = x_2^2 + 3y_2.$

52. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \geq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ 2x_1 + 3y_1^2 = 2x_2 + 3y_2^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 y_1 = x_2 y_2.$

53. A – множество целочисленных точек плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 - x_2^2 = y_1 - y_2^2.$

54. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 - y_2^2 = x_2 - y_1^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 y_1 = x_2 y_2.$

55. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \le 0, y \le 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ |x_1 x_2| = |y_1 y_2|$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ 2x_1^3 + y_1^3 = 2x_2^3 + y_2^3$.

56. A – множество вещественных точек 2-го квадранта $(x \le 0, y \ge 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^2 = x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1^2 - 2x_2^2 = y_1^2 - 2y_2^2$.

57. A – множество вещественных точек 3-го квадранта $(x \le 0, y \le 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^2 = x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2| = |y_1^2 - y_2|$.

58. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \le 0, y \le 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 - x_2 = y_1 - y_2$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$.

59. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \ge 0, y \ge 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^2 = x_2^2 + 4y_2^2$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2^2| = |y_1^2 - y_2^2|$.

60. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \ge 0, y \ge 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 x_2 = y_1 y_2$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1^3 + 2y_1^3 = x_2^3 + 2y_2^3$.

61. A – множество вещественных точек 4-го квадранта $(x \ge 0, y \le 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1 |x_2| = y_1 |y_2|$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1 + y_1^3 = x_2 + y_2^3$.

62. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \ge 0, y \ge 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1) R_1 (x_2, y_2):\ x_1^2 - 5y_1^3 = x_2^2 + 5y_2^3$;
$(x_1, y_1) R_2 (x_2, y_2):\ x_1^2 - 3x_2^2 = y_1^2 - 3y_2^2$.

63. A – множество вещественных точек 1-го квадранта $(x \geq 0, y \geq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1^2 + 4y_1^3 = x_2^2 + 4y_2^3;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ |x_1^2 - x_2| = |y_1^2 - y_2|.$

64. A – множество целочисленных точек 3-го квадранта $(x \leq 0, y \leq 0)$ плоскости (x, y);
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 + y_2 = x_2^2 - y_1^2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ 2x_1 + y_1 = 2x_2 + y_2.$

Задача 2

1. $G : x^2 + y^2 \leq 20;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ x_1 \leq x_2 \vee y_1 < y_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ \max\{x_1, y_1\} < \max\{x_2, y_2\}.$

2. $G : x + 2y \leq 16;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ \max\{x_1, y_1\} \leq \max\{x_2, y_2\};$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 < x_2 \wedge y_1 \leq y_2.$

3. $G : x^2 + y^2 \leq 10;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ \min\{x_1, y_1\} < \min\{x_2, y_2\};$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^2 + y_1 \leq x_2^2 + y_2.$

4. $G : x^2 + y^2 \leq 16;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ \max\{x_1, y_1\} \leq \max\{x_2, y_2\};$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1^3 + y_1^2 < x_2^3 + y_2^2.$

5. $G : x^2 + y^2 \geq 20;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ \min\{x_1, y_1\} < \min\{x_2, y_2\};$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 < x_2 \vee y_1 \leq y_2.$

6. $G : x + 2y > 7;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ \max\{x_1, y_1\} < \max\{x_2, y_2\};$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2.$

7. $G : x^2 + y^2 \geq 25;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2):\ |\min\{x_1, y_1\}| \leq |\min\{x_2, y_2\}|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2):\ x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2.$

8. $G: x^2 + y^2 \geq 20;$
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; x_1 < x_2 \wedge y_1 \leq y_2;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; |x_1 - y_1| \leq |x_2 - y_2|.$

9. $G: x^2 + 2y^2 > 13;$
   $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; |\min\{x_1, y_1\}| < |\min\{x_2, y_2\}|;$
   $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1^2 + 3y_1 \leq x_2^2 + 3y_2.$

10. $G: x^2 + y^2 \geq 5;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2;$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1 + 2y_1^2 < x_2 + 2y_2^2.$

11. $G: x + 2y \geq 16;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; \max\{x_1, y_1\} < \max\{x_2, y_2\};$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2.$

12. $G: x + 2y \leq 16;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; \max\{x_1, |y_1|\} < \max\{x_2, |y_2|\};$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2.$

13. $G: x^2 + y^2 \geq 9;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; \min\{x_1, y_1\} < \min\{x_2, y_2\};$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1^2 - y_1 \leq x_2^2 - y_2.$

14. $G: x^2 + y^2 \geq 20;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; \min\{x_1, y_1\} < \min\{x_2, y_2\};$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1 < x_2 \vee |y_1| < |y_2|.$

15. $G: x^2 + 2y^2 > 10;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; \min\{x_1, y_1\} < \min\{x_2, y_2\};$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1^2 + y_1 \leq x_2^2 + y_2.$

16. $G: x^2 + y^2 \geq 25;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; |\min\{x_1, y_1\}| \leq |\min\{x_2, y_2\}|;$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1 < x_2 \vee |y_1| < |y_2|.$

17. $G: x^2 + y^2 \geq 8;$
    $(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2): \; x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2;$
    $(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2): \; x_1 + 2y_1^2 < x_2 + 2y_2^2.$

18. $G: x^2+y^2 \geq 9$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1-y_1 \leq x_2-y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1+2y_1^2 < x_2+2y_2^2$.

19. $G: x^2+y^2 \leq 20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \vee y_1 < y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} \leq \max\{x_2,y_2\}$.

20. $G: x+2y \geq 6$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} \leq \max\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 < x_2 \wedge y_1 \leq y_2$.

21. $G: x^2+y^2 < 20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,|y_1|\} < \max\{x_2,|y_2|\}$.

22. $G: x+2y > 6$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,|y_1|\} < \max\{x_2,|y_2|\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2$.

23. $G: x+2y \leq 6$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} \leq \max\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 < y_2$.

24. $G: x^2+y^2 \geq 9$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 < x_2 \wedge y_1 \leq y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ |x_1-y_1| < |x_2-y_2|$.

25. $G: 2x > 3y+12$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ y_1 < y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1+y_1^2 \leq x_2+y_2^2$.

26. $G: x^2+y^2 \geq 20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} < \min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2$.

27. $G: x^2+y^2 \leq 10$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} \leq \min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+y_1 < x_2^2+y_2$.

28. $G: x^2+y^2 \geq 10;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} < 2\max\{x_2,y_2\};$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ 3x_1^2+y_1^2 \leq 3x_2^2+y_2^2.$

29. $G: x \geq y+10;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |y_1| \leq |y_2|;$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1+y_1^2 < x_2+y_2^2.$

30. $G: x \leq y+10;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |x_1| \leq |x_2|;$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+y_1^2 < x_2^2+y_2^2.$

31. $G: x^2+y^2 < 25;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge |y_1| < |y_2|;$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} \leq \max\{x_2,y_2\}.$

32. $G: x^2+y^2 \geq 9;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} < \min\{x_2,y_2\};$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2-2y_1 \leq x_2^2-2y_2.$

33. $G: x^2+y^2 < 20;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge |y_1| \leq |y_2|;$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,|y_1|\} < \max\{x_2,|y_2|\}.$

34. $G: x^2+y^2 < 20;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 \leq x_2 \wedge y_1 \leq y_2;$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ |x_1-y_1| \leq |x_2-y_2|.$

35. $G: x^2+y^2 \geq 9;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} < \min\{x_2,y_2\};$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2-y_1 \leq x_2^2-y_2.$

36. $G: x^2+y^2 \leq 10;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} < \max\{x_2,y_2\};$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+y_1^2 \leq x_2^2+y_2^2.$

37. $G: x^2+y^2 \leq 9;$
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |\min\{x_1,y_1\}| \leq |min\{x_2,y_2\}|;$
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2-y_1 < x_2^2-y_2.$

38. $G: x^2+y^2 \le 10$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} \le \max\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+y_1^2 < x_2^2+y_2^2$.

39. $G: x^2+y^2 \ge 25$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} \le \min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2$.

40. $G: x^2+y^2 \ge 20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} \le \min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 < x_2 \vee y_1 < y_2$.

41. $G: x+2y \le 16$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} < \max\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1 \le x_2 \wedge y_1 \le y_2$.

42. $G: x^2+y^2 \le 8$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1-y_1 < x_2-y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1+2y_1^2 \le x_2+2y_2^2$.

43. $G: x \le y+16$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 < x_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+y_1^3 \le x_2^2+y_2^3$.

44. $G: x^2+y^2 \ge 9$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\} \le \min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2-y_1 < x_2^2-y_2$.

45. $G: x^2+y^2 \le 5$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1-y_1 < x_2-y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1+2y_1^2 \le x_2+2y_2^2$.

46. $G: x^2+y^2 \ge 5$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1-y_1 \le x_2-y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ 3x_1+2y_1^2 < 3x_2+2y_2^2$.

47. $G: x^2+y^2 < 20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1 \le x_2 \vee y_1 < y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\} \le \max\{x_2,y_2\}$.

48. $G: x^2+y^2<20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1\le x_2 \vee y_1<y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\}\le\max\{x_2,y_2\}$.

49. $G: x^2+y^2\le 17$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1\le x_2 \wedge y_1<y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ |x_1-y_1|\le|x_2-y_2|$.

50. $G: x^2+y^2\le 15$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |x_1-2y_1|<|x_2-2y_2|$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1+2y_1^2\le x_2+2y_2^2$.

51. $G: x^2+y^2\le 9$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\}\le\min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2-y_1<x_2^2-y_2$.

52. $G: x\le y+10$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |x_1|<|x_2|$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+y_1^2\le x_2^2+y_2^2$.

53. $G: x^2+y^2\ge 9$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ \min\{x_1,y_1\}\le\min\{x_2,y_2\}$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ |x_1^2-y_1|<|x_2^2-y_2|$.

54. $G: x^2+y^2<20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ x_1\le x_2 \wedge y_1<y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ \max\{x_1,y_1\}\le\max\{x_2,y_2\}$.

55. $G: x\le y+16$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |x_1|<|x_2|$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1^2+2y_1^2\le x_2^2+2y_2^2$.

56. $G: x^2+y^2>20$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |\min\{x_1,y_1\}|<|\min\{x_2,y_2\}|$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ x_1<x_2 \vee y_1\le y_2$.

57. $G: x^2+y^2\ge 9$;
$(x_1,y_1)R_1(x_2,y_2):\ |x_1|<|x_2| \wedge y_1\le y_2$;
$(x_1,y_1)R_2(x_2,y_2):\ |x_1-y_1|<|x_2-y_2|$.

58. $G : x > 2y + 12;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ |y_1| < |y_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ x_1 + y_1^2 \leq x_2 + y_2^2.$

59. $G : x \geq y + 10;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ |y_1| \leq |y_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ x_1 + y_1^2 < x_2 + y_2^2.$

60. $G : x^2 + y^2 \leq 20;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ x_1 \leq x_2 \vee |y_1| < |y_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ \max\{x_1, y_1\} \leq \max\{x_2, y_2\}.$

61. $G : x^2 + y^2 \leq 16;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ x_1 < x_2 \wedge y_1 \leq y_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ |x_1 - y_1| \leq |x_2 - y_2|.$

62. $G : x^2 + y^2 \geq 9;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ \min\{x_1, y_1\} \leq \min\{x_2, y_2\};$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ |x_1^2 - y_1| < |x_2^2 - y_2|.$

63. $G : x^2 + y^2 \geq 8;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ x_1 - y_1 \leq x_2 - y_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ x_1 + 2y_1^2 < x_2 + 2y_2^2.$

64. $G : x^2 + y^2 < 20;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ x_1 < x_2 \wedge y_1 \leq y_2;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ x_1 - y_1 < x_2 - y_2.$

65. $G : x^2 + y^2 \leq 20;$
$(x_1, y_1)R_1(x_2, y_2) : \ x_1 < x_2 \wedge |y_1| \leq |y_2|;$
$(x_1, y_1)R_2(x_2, y_2) : \ 2x_1 - y_1 \leq 2x_2 - y_2.$

Оглавление

Учебное издание

Рублев Вадим Сергеевич

Множества.
Отношения на множествах
и мощность множества

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка В. С. Рублев
Подписано в печать 28.08.2015 Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,0.
Тираж 50 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.