Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра теоретической информатики

В. С. Рублев

Элементы комбинаторики

(*индивидуальные работы № 2 и 3 по дисциплине*

«Дискретная математика»)

Учебно-методическое пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

Ярославль
ЯрГУ
2018

УДК 514(072)
ББК В126я73
Р82

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2018 года

Рецензент
кафедра теоретической информатики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Рублев, Вадим Сергеевич.
Р82 Элементы комбинаторики : (индивидуальные работы № 2 и 3 по дисциплине «Дискретная математика») : учебно-методическое пособие / В. С. Рублев ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2018. – 103 с.

Пособие содержит варианты индивидуальных заданий по теме “Элементы комбинаторики” (дисциплина «Дискретная математика»), а также необходимый материал для ее самостоятельного изучения и выполнения индивидуальных заданий. Для качественного усвоения курса в издании даны подробные определения, примеры, иллюстрации, обоснования, а также методические рекомендации для выполнения индивидуальных заданий.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся дисциплине «Дискретная математика».

УДК 514(072)
ББК В126я73

Оглавление

1. Предмет "Комбинаторика"

Комбинаторика — раздел математики, изучающий задачи выбора и расположения элементов некоторого конечного множества (*базового*) в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет комбинации из элементов базового множества, называемые **комбинаторной** конфигурацией или **моделью**. Комбинаторика изучает вопросы существования комбинаций определенной комбинаторной модели, алгоритмы их построения и перебора, а также решение задач перечисления (в частности, вычисления количества комбинаций для множества комбинаций комбинаторной модели).

Произвольная комбинация любого множества комбинаций имеет структуру, определенную правилом комбинаторной модели. Эта структура может быть любой сложности. Но, прежде всего, отметим, что элементы структуры могут быть упорядоченными (то есть различный порядок элементов приводит к различным комбинациям множества комбинаций) или не иметь порядка (перестановка элементов комбинации не приводит к другой комбинации). В первом случае каждую комбинацию можно описать вектором элементов комбинации (все элементы имеют одинаковую природу, то есть принадлежат одному множеству) или кортежем элементов комбинации (элементы комбинации могут иметь разную природу, то есть принадлежать разным множествам). Элементы таких комбинаций мы будем заключать в круглые скобки. Во втором случае, когда порядок элементов в комбинации не важен, мы будем заключать их в фигурные скобки (как у множества), даже если элементы комбинации могут повторяться (в отличие от множества, где элементы не повторяются). Элементы комбинации в случаях простых комбинаторных моделей принадлежат некоторому базовому множеству, но в более сложных комбинаторных моделях могут быть сами комбинациями, которые имеют порядок своих элементов или не имеют его.

Комбинаторика имеет приложения во многих разделах математики: в теории вероятностей, математической логике, теории чисел, информатике и кибернетике. Она использует современный мощный аппарат для решения сложных задач, но в курсе "Дискретная математика" излагаются наиболее **простые комбинаторные модели**: *перестановки* (каким числом способов можно расположить заданные объекты), *сочетания* (каким числом способов можно образовать подмножество с определенным количеством из имеющихся объектов), *размещения* (каким числом способов можно разместить на определенном количестве мест объекты или их часть), а также **2 комбинаторных правила** *умножения* и *сложения*, позволяющие из простых комбинаторных моделей строить более сложные и подсчитывать число их комбинаций.

В указанных трех основных комбинаторных моделях элементы базового множества могут не повторяться (*комбинации без повторения*) или повторяться (*комбинации с повторениями*). Поэтому мы будем рассматривать все 6 основных комбинаторных моделей. Эти модели дают возможность решать простые комбинаторные задачи, но при решении задач для более сложных моделей необходимо произвести *декомпозицию* задачи — ее разбиение на более простые части, решение которых позволяет получить решение исходной задачи. В некоторых случаях множество комбинаций может быть разбито на части таким образом, что решение задачи является суммой решений для частей. Это достигается *комбинаторным правилом сложения.* В других случаях применяется разбиение генерации каждой комбинации на отдельные действия таким образом, чтобы число комбинаций было равно произведению числа способов генераций для каждого действия. Это достигается *комбинаторным правилом умножения.*

Так как комбинаторное правило умножения применяется не только при использовании более сложных комбинаторных моделей, но и для подсчета числа комбинаций простых моделей, то в первую очередь займемся его изложением.

2. Комбинаторное правило умножения

Комбинаторное правило умножения связано с *прямым произведением множеств* и подсчетом числа его элементов. Прямым произведением двух множеств A и B называется множество

$$A \times B = \{(a, b)|\ a \in A\ \wedge\ b \in B\}.$$

Число элементов такого прямого произведения $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Эта формула выводится следующим образом. Каждый элемент $a_0 \in A$

сочетается с любым из $|B|$ элементов $b \in B$, а потому имеется $|B|$ элементов вида (a_0, b) и, следовательно, $|\{a_0\} \times B| = |B|$. Так как это справедливо для любого элемента $a \in B$, то

$$|A \times B| = \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = |A| \cdot |B|.$$

В общем случае произвольного числа множеств A_i $(i \in \overline{1, n})$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) |\ a_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge a_n \in A_n\}$$

и число элементов прямого произведения определяется формулой произведения чисел элементов для каждого из множеств

$$|\prod_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Эта формула выводится методом математической индукции.

Комбинаторное правило умножения связано с *генерацией комбинаций* при помощи последовательности действий, определяющих ту или иную часть каждой комбинации. Для этого комбинацию нужно разделить на несколько частей (т. е. представить как кортеж этих частей) и последовательно генерировать каждую часть. Формально схему можно описать следующим образом:

1. Выбор 1-й части комбинации – n_1 способов.

2. Выбор 2-й части комбинации – n_2 способов.

   ....

k. Выбор k-й части комбинации – n_k способов.

Пусть выполнены следующие условия:

- любая генерация дает некоторую комбинацию модели;

- каждая комбинация модели может быть получена при помощи генерации;

- действия генерации независимы – разные части комбинации определяются разными действиями, и потому любая комбинация может быть получена единственным способом;

- действия генерации независимы по числу способов – число способов каждого действия не зависит от выборов, совершенных на предыдущих действиях.

Тогда для каждой части определяется множество выборов этой части, эти множества независимы, а кортеж комбинации определяется как элемент прямого произведения этих множеств. Поэтому при выполнении условий ***число n комбинаций, определяемых генерацией с помощью действий, равно произведению чисел выборов каждого из действий***:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Это и есть *комбинаторное правило умножения.*

Заметим, что при описании формальной схемы мы действия каждого шага описывали словом *выбор*, но в описании реальной схемы генерации могут присутствовать и другие слова по описанию действия, например *размещение* или *перестановка*, в зависимости от задачи.

Рассмотрим пример: *сколько существует 4-значных чисел, у которых 1-я цифра нечетная, а 3-я – четная*? Так как 4-значное число представляет собой последовательность 4 цифр, то такое число естественно определяется кортежем его 4 цифр – элементов кортежа. Поэтому вполне генерацию такого числа можно определить 4 действиями, каждое из которых генерирует соответствующую цифру:

1. Выбор 1-й цифры – 5 способов (любая нечетная цифра может стоять на 1-м месте);

2. Выбор 2-й цифры – 10 способов (любая цифра может стоять на 2-м месте);

3. Выбор 3-й цифры – 5 способов (любая четная цифра может стоять на 3-м месте);

4. Выбор 4-й цифры – 10 способов (любая цифра может стоять на 4-м месте).

Любая генерация дает число, отвечающее условию. Так, в примере генерации:
1) 5
2) 0
3) 6
4) 0
будет сгенерировано число 5060. Любое число, отвечающее условиям задачи, может быть получено генерацией этими действиями. Так, число 3427 получается следующей генерацией:
1) 3
2) 4
3) 2
4) 7.
Действия независимы, так как они генерируют различные части числа и никакие 2 генерации не дают одно и то же число. И, наконец, действия независимы по числу способов выбора от выборов на предыдущих действиях. Поэтому, применяя правило умножения, получим $5^2 \cdot 10^2 = 2500$ чисел.

В применении правила умножения следует остерегаться нарушения описанных условий, и потому проверка выполнения условий является обязательной. Приведем примеры на нарушение условий.

Пример 1. *Сколько существует 4-значных чисел с четными цифрами?*
Следующими действиями:

1. Выбор 1-й цифры – 5 способов;
2. Выбор 2-й цифры – 5 способов;
3. Выбор 3-й цифры – 5 способов;
4. Выбор 4-й цифры – 5 способов

может быть сгенерировано любое число, отвечающее условию. Но генерация
1) 0
2) 0
3) 4

4) 6
определяет число 46, которое не является 4-значным. Таким образом, 1-е условие правила умножения не выполнено. Для коррекции действий генерации следует в 1-м действии исключить выбор 0 и тогда число выборов – 4. Действия независимы – выбирают разные части числа и никакие 2 генерации не дают одно и то же число – и независимы по числу выборов от предыдущих действий. Поэтому результатом решения задачи является $4 \cdot 5^3 = 500$ чисел.

Пример 2. *Сколько существует 3-значных чисел с четными цифрами?*
Применим генерацию из 3-х действий, где в каждом из них выбирается любая четная цифра, кроме 0 (4 способа выбора действия). Любая генерация дает число, отвечающее условиям задачи. Однако не любое 3-значное число с четными цифрами может быть получено с помощью генерации этими действиями. Так, число 420 отвечает условиям задачи, но не генерируется в силу запрета выбора 0 в 3-м действии. Исправить действия генерации можно так же, как в предыдущем примере.

Пример 3. *Каким количеством способов можно из 8 карт, содержащих тузов и королей всех мастей, выбрать 3 карты, включающие карты разных значений?*
Попробуем определить генерацию:

1. Выбор 1-й карты – 8 способов (любая карта из 8);

2. Выбор 2-й карты – 7 способов (любая карта из 7 оставшихся после 1-го выбора);

3. Выбор 3-й карты – число способов зависит от выборов предыдущих действий (если выбраны 2 туза, то 4 способа, а если выбран 1 туз и 1 король, то 6 способов).

Таким образом, нарушение 4-го условия правила умножения не позволяет воспользоваться такой "генерацией". Заметим также, что генерация не корректна еще и по другой причине: непонятно, что такое 1-я, 2-я и 3-я карта, а значит, мы не имеем дело с кортежем частей. Эту ситуацию можно было бы исправить, изменив условие примера 3, добавив к фразе "*выбрать 3 карты*" слова "*в определенном порядке*".

Но при этом ошибка *независимости действий по числу способов от предыдущих действий* все равно останется.

Пример 4. *Каким количеством способов можно из 8 карт, содержащих тузов и королей всех мастей, выбрать 3 карты, включающие туза и 2 королей?*
Попробуем определить генерацию:

1. Выбор туза – 4 способа (любой туз из 4);
2. Выбор одного короля – 4 способа (любой король из 4);
3. Выбор другого короля – 3 способа (любой король из 3 оставшихся).

Любая генерация дает комбинацию, отвечающую условиям задачи. Так, генерация
1) ТБ,
2) КП,
3) КЧ
дает комбинацию {ТБ, КП, КЧ}. Любую требуемую комбинацию можно получить с помощью генерации. Так, комбинация {КБ, ТП, КЧ} может быть получена следующей генерацией:
1) ТП,
2) КБ,
3) КЧ.
Но эту же комбинацию можно получить с помощью другой генерации:
1) ТП,
2) КЧ,
3) КБ.
Это является следствием того, что действия 2 и 3 не являются независимыми: выбор действия 2 может быть сделан и действием 3. Нетрудно видеть, что для каждой комбинации существует ровно 2 генерации этой комбинации, отличающиеся последовательностью выборов королей. Поэтому результат, полученный применением правила умножения, следует разделить на 2. Таким образом, получается результат: $(4 \cdot 4 \cdot 3)/2 = 24$ способа.

Отметим теперь, что мы не решили задачу примера 3, так как не смогли составить генерацию комбинаций задачи. Однако мы определили часть этих комбинаций в задаче примера 4. Если разбить множество всех комбинаций на такие части, чтобы каждая часть стала однородной и допускала применение правила умножения, то в каких случаях число всех комбинаций равно сумме чисел комбинаций частей? Ответ на этот вопрос дает другое правило – *комбинаторное правило сложения.*

3. Комбинаторное правило сложения

Пусть множество K комбинаций можно разбить на подмножества $K_1, \ldots, K_m$, объединение которых дает все множество

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i.$$

В каких случаях верна формула

$$|K| = \sum_{i=1}^{m} |K_i|?$$

Из формулы включений-исключений

$$|\bigcup_{i=1}^{m} K_i| = \sum_{i=1}^{m} |K_i| - \sum_{p=2}^{m} (-1)^p \sum_{i_1 < \cdots < i_p} |K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_p}|$$

следует, что интересующая нас формула – *число элементов объединения подмножеств равно сумме чисел элементов каждого из подмножеств* – ***верна тогда и только тогда, когда никакие 2 подмножества, входящие в объединение, не пересекаются***. В этом и состоит **комбинаторное правило сложения**.

Пусть множество комбинаций K можно разбить на m попарно не пересекающихся подмножества K_i $(i \in \overline{1, m})$, т. е. таких, что

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i \quad (\forall i, j \in \overline{1, m} : i \neq j \to K_i \cap K_j = \emptyset).$$

Тогда

$$|K| = \sum_{i=1}^{m} |K_i|.$$

Рассмотрим снова пример 3. Множество комбинаций K, отвечающих условию задачи, можно разбить на 2 непересекающихся подмножества комбинаций:

K_1, каждая из комбинаций которого содержит туза и 2 королей, и

K_2, каждая из комбинаций которого содержит короля и 2 тузов. Так как $K_1 \cup K_2 = K$ и $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, то $|K| = |K_1| + |K_2|$.

$|K_1| = 24$, что определено решением задачи примера 4. Но число элементов K_2 считается аналогичным образом и также равно 24. Поэтому $|K| = 24 + 24 = 48$, и задача решена с помощью правила сложения.

Следует отметить, что с применением правила сложения часто допускаются 2 типичные **ошибки**:

1) множество комбинаций не равно объединению подмножеств, на которые оно "разбито": $K \neq \bigcup_{i=1}^{m} K_i$;

2) все подмножества, входящие в объединение, не пересекаются ($\bigcap_{i=1}^{m} K_i = \emptyset$); но из этого не следует их попарная непересекаемость ($K_i \cap K_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$) при $m > 2$.

4. Отношения на множествах и взаимно-однозначное соответствие

В последующих разделах мы рассмотрим простые комбинаторные модели и для каждой из них выведем формулу определения количества элементов в зависимости от параметров модели. Но, для того чтобы пользоваться такими моделями для определения количества элементов других множеств комбинаций, необходимо обосновывать их применение. Для этого мы покажем,что 2 различных конечных множества имеют одинаковое количество элементов в том и только в том случае, когда между ними существует определенное отношение, называемое *взаимно-однозначным соответствием.*

Отношением на множествах называется подмножество прямого произведения этих множеств.

Число множеств, входящих в прямое произведение, может быть разным. При двух множествах, входящих в прямое произведение, отношение на множествах называется *бинарным отношением,* при трех – тернарным и т. д.

Пусть $R \subseteq A \times B$. Тогда отношение (*соответствие*) определяется некоторым набором пар: $< a, b >\in R$ $(a \in A, b \in B)$.

$\text{Пр}_1 R$ – *область определения* R, а $\text{Пр}_2 R$ называется *областью значений* R.

Если $\text{Пр}_1 R = A$, то соответствие R *всюду определено.*

Если $\text{Пр}_2 R = B$, то соответствие R *сюръективно.*

Обратное соответствие определяется следующим образом: $R^{-1} = \{< b, a > \mid\ < a, b >\in R\}$.

Если $< a, b >\in R$, то b – *образ* a, а a – *прообраз* b. Для множества всех образов a введем обозначение

$$r(a) = \{b \mid b \in B, < a, b >\in R\}.$$

Для множества всех прообразов b введем обозначение

$$r^{-1}(b) = \{a \mid a \in A, < a, b >\in R\}.$$

Для подмножества $X \subseteq A$ *образ* X есть

$$R(X) = \{y \mid \exists x \in X :< x, y >\in R\},$$

а для $Y \subseteq B$ *прообраз* Y есть

$$R^{-1}(Y) = \{x \mid \exists y \in Y :< y, x >\in R^{-1}\}.$$

Из определений следует, что $R(\text{Пр}_1 R) = \text{Пр}_2 R$ и $R^{-1}(\text{Пр}_2 R) = \text{Пр}_1 R$.

Соответствие R *функционально* (однозначно), если $\forall a \in A : |r(a)| \leq 1$. В этом случае введем *функцию соответствия*, определенную на $\text{Пр}_1 R$, и обозначим ее также $r(a)$.
Обратное соответствие R^{-1} *функционально* (однозначно), если $\forall b \in B : |r^{-1}(b)| \leq 1$. В этом случае введем *функцию обратного соответствия*, определенную на $\text{Пр}_2 R$, и обозначим ее также $r^{-1}(b)$.

Соответствие называется взаимно-однозначным, если оно всюду определено, функционально и обратное соответствие также всюду определено и функционально. Таким образом, для проверки того, что $R \subseteq A \times B$ является взаимно-однозначным соответствием, можно установить, что выполняются следующие условия:

1. Существует функция соответствия $r(a) = b$ (каждому аргументу $a \in A$ ставится в соответствие не более 1 значения), т. е. $|r(a)| \leq 1$;

2. Функция соответствия $r(a) = b$ всюду определена на A ($\text{Пр}_1 R = A$), т. е. $\forall a \in A\ \exists b \in B : r(a) = b$;

3. Существует функция обратного соответствия $r^{-1}(b) = a$ (каждому аргументу $b \in B$ ставится в соответствие не более 1 значения), т. е. $|r^{-1}(b)| \leq 1$;

4. Функция обратного соответствия $r^{-1}(b) = a$ всюду определена на B (соответствие R сюръективно $\text{Пр}_2 R = B$), т. е. $\forall b \in B\ \exists a \in A : r^{-1}(b) = a$;

5. Функции $r(a)$ и $r^{-1}(b)$ взаимно-обратны, т. е. $\forall a \in A:\ r^{-1}(r(a)) = a$ и $\forall b \in B:\ r(r^{-1}(b)) = b$.

Взаимно-однозначное соответствие часто также называют *биекцией*.

Рассмотрим примеры соответствий.

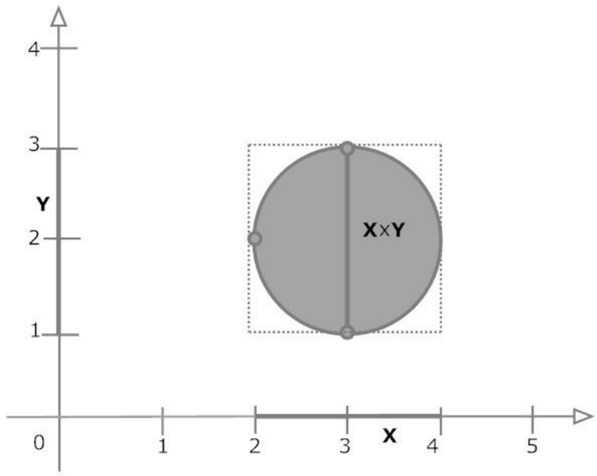

Рис. 1

1. R – круг $(x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ (рис. 1). Для $x = 2$ значение $y = 2$ является единственным элементом множества $r(2)$ образов x, но для $x = 3$ множество его образов $r(3)$ представляет отрезок $\{y|\ y \in [1, 3]\}$, а потому соответствие не функционально.

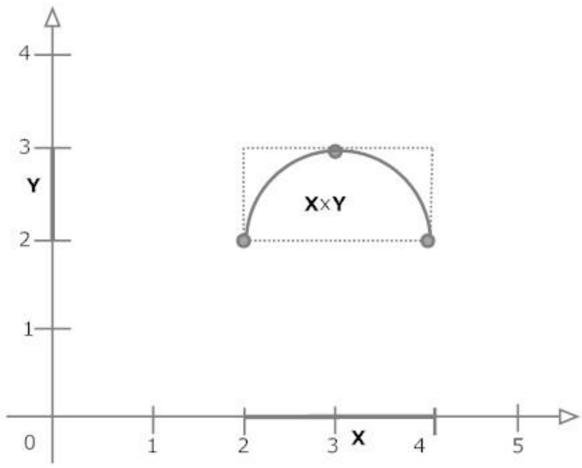

Рис. 2

2. R – дуга $\{(x,y)|\ (x-3)^2+(y-2)^2=1,\ y\geq 2\}$ (рис. 2). Соответствие R определено на отрезке $x\in[2,4]$ и является функциональным, так как $\forall x$ значение y определяется однозначно функцией $y=R(x)=\sqrt{1-(x-3)^2}+2$, но обратное соответствие $x=R^{-1}(y)=\pm\sqrt{1-(y-2)^2}+3$ является неоднозначным, т. е. не является функциональным.

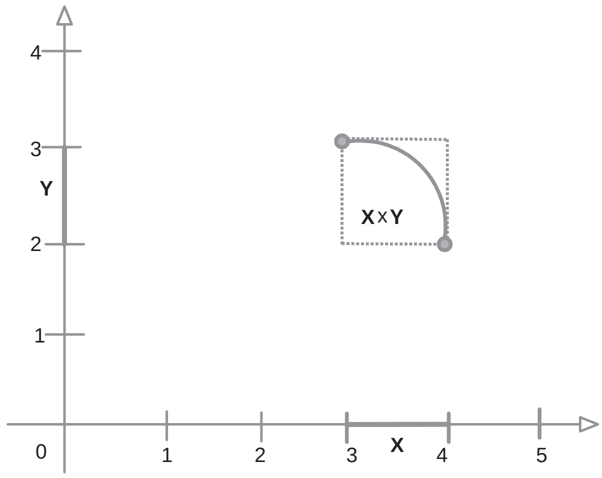

Рис. 3

3. R – дуга $\{(x,y)|\ (x-3)^2+(y-2)^2=1,\ y\geq 2,\ x\geq 3\}$ (рис. 3). Соответствие R определено на отрезке $X=[3,4]$, имеет область значений $Y=[2,3]$ и является функциональным $y=R(x)=\sqrt{1-(x-3)^2}+2$. Также является функциональным обратное соответствие $x=R^{-1}(y)=\sqrt{1-(y-2)^2}+3$. Таким образом, соот-

ветствие R является взаимно-однозначным для произведения множеств $X \times Y$.

4. Множество позиций $\overline{POZ}$ на шахматной доске
$D = \{< x, n > \mid x \in \overline{a, h},\ n \in \overline{1, 8}\}$ с множеством фигур
$FIG = \{Krw, Fw, Slw, Slw, Knw, Knw, Lw, Lw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Pw, Krb, Fb, Slb, Sb, Knb, Knb, Lb, Lb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb, Pb\}$ является соответствием
$POZ \subseteq F \times D^{'}$ между подмножеством $F \subseteq FIG$ оставшихся фигур и подмножеством $D^{'} \subseteq D$ клеток доски, на которых стоят эти фигуры. Например, $p = \{< Krw, < a, 3 >>, < Lw < b, 8 >>, < Krw, < h, 4 >>, < Pw < b, 6 >>, < Kn, < d, 7 >>\}$. Соответствие POZ является взаимно-однозначным, так как каждая фигура из подмножества F занимает ровно 1 позицию (функция соответствия однозначна на подмножестве оставшихся фигур) и каждая клетка из $D^{'}$ может быть занята не более чем одной фигурой из FIG (функция обратного соответствия однозначна на множестве занятых фигурами клеток доски).

5. Англо-русский словарь $S \subseteq A \times R$ осуществляет соответствие между некоторым подмножеством A английских слов и подмножеством R русских слов. Однако и прямое, и обратное соответствия не являются однозначными: образ английского слова может состоять из нескольких русских слов, а прообраз русского слова может иметь несколько английских слов.

Написание фразы *взаимно-однозначное соответствие* можно сокращать как 1-1с.

Теорема о взаимно-однозначном соответствии.
Между конечными множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие тогда и только тогда, когда количества элементов этих множеств равны ($|A| = |B|$).

Доказательство

Достаточность. Пусть $|A| = |B| = n$. Перенумеруем все элементы $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Построим функцию соответствия $r(a_i) = b_i$ $(i \in \overline{1, n})$ и функцию обратного соответствия $r^{-1}(b_i) = a_i$ $(i \in \overline{1, n})$. Эти функции отвечают всем вышеперечисленным условиям

1-1с, поэтому нами установлено 1-1с.
Необходимость. Пусть существует 1-1с $R \subseteq A \times B$. Доказательство проведем от противного. Если $|A| > |B|$, то в A найдутся 2 элемента с одним образом в B, что противоречит 1-1с R. Если же $|B| > |A|$, то в B найдутся 2 элемента с одним прообразом в A, что опять противоречит 1-1с R. Полученные противоречия завершают доказательство необходимости и всей теоремы.

Теорема о 1-1с позволяет в некоторых задачах комбинаторики обосновать правильность нахождения количества элементов некоторого множества. Для этого устанавливается 1-1с с некоторым другим множеством, число элементов которого может быть подсчитано или уже известно. Установление 1-1с требует определения функций прямого и обратного соответствия. Такое определение каждой функции должно выражать правило, которое определяет значение функции по ее аргументу. Это правило может быть задано либо с помощью формулы, либо словесным образом, либо с помощью таблицы соответствия, либо при помощи алгоритма, вычисляющего по аргументу значение функции. Но в любом случае это должно быть правило, точно и однозначно задающее значение функции по ее аргументу.

Помимо обоснования всюду определенности этих функций, необходимо также показать их взаимную обратность. Пусть, например, имеются множества A и B и для установления 1-1с определены функция $f(a) = b$ для любого аргумента $a \in A$ со значением $b \in B$, а также функция $f^{-1}(b) = a$ для любого аргумента $b \in B$ со значением $a \in A$. Хотя функции f и f^{-1}, осуществляющие соответствие, всюду определены (на A и B соответственно), но соответствие f^{-1} может не быть обратным для соответствия f, а потому их взаимную обратность нужно обосновать установлением свойств: $\forall a \in A : f^{-1}(f(a)) = a$, $\forall b \in b : f(f^{-1}(b)) = b$. Этим 1-1с между A и B будет установлено.

5. Перестановки без повторения

В этой простейшей комбинаторной модели базовое множество B состоит из n элементов $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, а каждая комбинация определяется *всеми* элементами базового множества, идущими в каком-либо порядке $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n})$ $(\forall j, k : j \neq k \to i_j \neq i_k)$. Поскольку комбинации отличаются лишь порядком элементов и могут быть получены одна из другой перестановками элементов, то они и называются *перестановками.* Заметим, что перестановка является вектором, даже если она состоит из одного элемента. Так, цифра 5 не может быть перестановкой, а вектор (5), содержащий 1 элемент – цифру 5, может быть перестановкой. Задача о числе перестановок формулируется следующим образом: *каким числом способов можно переставить последовательность из n элементов?*

Посчитаем число перестановок при помощи правила умножения. Для этого каждую перестановку разобьем на ее элементы в порядке их следования и будем генерировать каждый ее элемент отдельным действием:

1. Выбор 1-го элемента перестановки – n способов (любой элемент из B может быть на 1-м месте);

2. Выбор 2-го элемента перестановки – $n-1$ способ (любой элемент из B, кроме выбранного 1-м действием, может быть на 2-м месте);

   ....

n-1. Выбор $(n-1)$-го элемента перестановки – 2 способа (любой элемент из B, кроме выбранных на предыдущих $(n-2)$-х действиях, может быть на $(n-1)$-м месте);

n. Выбор n-го элемента перестановки – 1 способ (только 1 элемент из B может быть выбран на n-е место после выбора $(n-1)$-го элемента на предыдущих $(n-1)$-м действиях).

Каждая генерация дает перестановку. Так, например, генерация

1) выбор элемента b_n,
2) выбор элемента b_{n-1},
....
n) выбор элемента b_1

дает перестановку $(b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)$.

Любая перестановка может быть сгенерирована: например, перестановку $(b_2, b_1, b_3, \ldots, b_n)$ можно сгенерировать следующими выборами описанных действий:

1) выбор элемента b_2,

2) выбор элемента b_1,

3) выбор элемента b_3,

....

n) выбор элемента b_n.

Действия генерации независимы: они генерируют различные элементы перестановки, и никакая перестановка не может быть получена различными генерациями.

Действия независимы по числу способов, так как число выборов каждого действия определяется не выбранными элементами предыдущих действий, а только их числом. Поэтому все условия правила умножения выполнены, и потому число $n!$ [1] перестановок n элементов равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Пример 5. *Каким числом способов можно на шахматной доске расставить 8 ладей, чтобы ни одна ладья не била другую*?

Каждой расстановке 8 ладей на шахматной доске отвечает шахматная позиция, в которой указываются в шахматных координатах (по горизонтали латинские строчные буквы от a до h, а по вертикали цифры от 1 до 8) расположение 8 ладей. При этом условия задачи предполагают, что на одной горизонтали, отвечающей какой-либо цифре, находится не более одной ладьи и на одной вертикали, отвечающей какой-либо букве, также находится не более одной ладьи. Этим условиям отвечает, например, шахматная позиция $\{a2, b1, c4, d3, e5, f7, g8, h6\}$. А позиция $\{a2, b1, c2, d3, e5, d7, g8, h6\}$ не отвечает условиям задачи: ладьи, находящиеся на клетках $a2$ и $c2$ (на 2-й горизонтали), бьют друг друга и также бьют друг друга ладьи на клетках $d3$ и $d7$ (на вертикали d).

Так как ладей 8, то для выполнения условия задачи на каждой горизонтали должна находиться точно 1 ладья. По аналогии для этого на каждой вертикали тоже должна находиться ровно 1 ладья. Позицию как множество можно упорядочить единственным образом по возрастанию горизонталей (т. е. цифр в координатах ладей). Например, указанная позиция, отвечающая условиям задачи, при упорядочении выглядит как вектор $(b1, a2, d3, c4, e5, h6, f7, g8)$. Если в таком способе записи позиции опустить вторые координаты для каждой ладьи (номера

[1] Таково обозначение числа перестановок из n элементов.

цифр), то мы получим перестановку 8 различных букв. Например, для указанного примера такой является перестановка (b, a, d, c, e, h, f, g).

Установим взаимно-однозначное соответствие между множеством P перестановок 8 букв от a до h и множеством Z позиций шахматной доски, отвечающих условиям задачи. Для этого определим функцию f соответствия, которая по любой перестановке $p \in P$ однозначно определяет позицию $z \in Z$: $f(p) = z$. Функция f описывается следующим образом: по перестановке $p = (p_1, p_2, \ldots, p_8)$ определяется вектор $z = (p_1 1, p_2 2, \ldots, p_8 8)$ шахматной позиции, для которого первая координата i-го элемента $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ равна i-му элементу аргумента p, а вторая координата равна i. Это соответствие функционально – по перестановке p определяется точно одна позиция z, – и всюду определено на множестве P – для любой перестановки $p \in P$ определяется позиция z. Обратное соответствие f^{-1} определяет по позиции $z = (z_1 1, z_2 2, \ldots, z_8 8)$ перестановку $p = (z_1, z_2, \ldots, z_8)$, получающуюся из первых координат каждого элемента вектора $z : z_i = z_i i (i \in \overline{1, 8})$. Это соответствие также функционально – по позиции z однозначно определяется перестановка p, – и всюду определено, так как это имеет место для каждой позиции $z \in Z$. Функции f и f^{-1} взаимно-обратны, так как $f^{-1}(f(p)) = p$ и $f(f^{-1}(z)) = z$. Таким образом, выполнены все условия взаимно-однозначного соответствия и, следовательно, количество элементов множеств P и Z одинаково. Но P – это множество перестановок 8 элементов, а потому $|P| = 8!$. Следовательно, $|Z| = 8! = 40320$.

<u>Ответ</u>: *существует 40320 способов расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не били друг друга.*

В заключение данного раздела сформулируем **важные методические правила**:

*Всякий раз, когда **учащийся** использует правило умножения или правило сложения, он обязан **проверить условия** выполнения таких правил не простым перечислением этих условий, а убедительным выражением ответа на вопрос, <u>почему</u> то или иное условие <u>выполняется</u> (с возможной иллюстрацией примером).*

*Всякий раз, когда используется 1-1с, необходимо ввести обозначения множеств, между которыми устанавливается 1-1с, обозначение элементов этих множеств, **описать функции прямого и***

обратного соответствия *так, чтобы описание было четким и однозначным (избегающим различного толкования), указывающим правило, по которому аргументу ставится в соответствие значение (при этом, по возможности, избегать слова комбинация, заменяя его на имя комбинации с обозначением). Также необходимо* ***проверить 5 условий 1-1с*** *(однозначность и всюду определенность на множестве аргументов каждой из этих функций, а также их взаимную обратность), не простым перечислением этих условий, а убедительным выражением ответа на вопрос, почему то или иное условие выполняется (с возможной иллюстрацией примером).*

6. Размещения без повторения

В этой комбинаторной модели базовое множество B также состоит из n элементов $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, а каждая комбинация определяется m элементами базового множества, идущими в каком-либо порядке $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m})$ $(\forall j, k : j \neq k \to i_j \neq i_k)$. Такую комбинацию называют *размещением n элементов на m* $(m \leq n)$ *местах*. Отметим, что размещение, так же как и перестановка, является вектором, даже если она включает лишь 1 элемент. Задача о числе размещений может быть сформулирована следующим образом: *каким числом способов n элементов могут быть размещены на m местах?*

Подсчитаем число размещений без повторения при помощи правила умножения. Для этого каждое размещение разобьем на его элементы в порядке их следования и будем генерировать каждый его элемент отдельным действием:

1. Выбор 1-го элемента размещения – n способов (любой элемент из B может быть на 1-м месте);

2. Выбор 2-го элемента размещения – $n - 1$ способ (любой элемент из B, кроме выбранного 1-м действием, может быть на 2-м месте);

....

m-1. Выбор $(m-1)$-го элемента размещения – $n - m + 2$ способа (любой элемент из B, кроме выбранных на предыдущих $(m-2)$-х действиях, может быть на $(m-1)$-м месте);

m. Выбор m-го элемента размещения – $n-m+1$ способ (любой элемент из B, кроме $(m-1)$-го выбранных на предыдущих $(m-1)$-м действиях, может быть на m-м месте).

Любая генерация дает размещение. Например, генерация

1) выбор элемента b_m,

2) выбор элемента b_{m-1},

....

m) Выбор элемента b_1

дает размещение $(b_m, b_{m-1}, \dots, b_1)$.

Любое размещение может быть сгенерировано: например, размещение $(b_2, b_1, b_3, \dots, b_m)$ можно сгенерировать следующими выборами описанных действий:

1) выбор элемента b_2.

2) выбор элемента b_1.

3) выбор элемента b_3.

....

m) выбор элемента b_m.

Действия генерации независимы – они генерируют различные элементы размещения и каждое размещение получается только одной генерацией. Действия независимы по числу способов, так как число выборов каждого действия определяется не выбранными элементами предыдущих действий, а только их числом. Поэтому все условия правила умножения выполнены, и потому число A_n^m [2] размещений n элементов на m местах равно

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+2) \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 6. *Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются простыми числами?*

Решение. Цифры, которые являются простыми числами (имеют ровно 2 различных делителя: 1 и само число), это 2, 3, 5 и 7. Поэтому цифрами чисел является множество $B = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$. Примерами заданных условием задачи чисел являются 14689, 90468,...

[2] Таково обозначение числа размещений из n элементов на m местах.

Так как цифры любых разрядов каждого числа, заданного условием задачи множества A, различны, то комбинаторную модель следует искать среди моделей *без повторения.* Ввиду того что порядок цифр имеет значение (различный порядок определяет различные числа), комбинаторную модель следует искать среди моделей *с порядком элементов* в комбинации. Так как число цифр базового множества $|B|$=6 больше числа 5 разрядов искомых чисел, то ближе всего оказывается модель *размещений без повторения*, в которой 6 элементов базового множества B нужно разместить на 5 местах – разрядах числа.

Попробуем установить 1-1с между множеством C размещений без повторения элементов B на 5 местах и заданным задачей множеством A чисел. При этом в качестве функции f, такой что $\forall c \in C: \ f(c) = a$, где $a \in A$, осуществляющей 1-1с, возьмем функцию f, которая по любому размещению на 5 местах элементов B (например, $(9, 0, 4, 6, 8)$) определяет число, полученное из размещения выписыванием подряд ее цифр-элементов в порядке их следования в размещении (в указанном примере: 90468). Соответствие f функционально, но не определено всюду на множестве C: для размещения $c = (0, 9, 4, 6, 8)$ $f(c) = 09468$, т. е. число, не принадлежащее множеству A, так как оно является уже 4-значным. Поэтому в чистом виде модель размещений без повторения не годится.

Для исправления ситуации разобьем каждое 5-разрядное число $a = a_1a_2a_3a_4a_5 \in A$ на 2 части:

a=<голова числа a_1><хвост числа $a' = a_2a_3a_4a_5$>,

где голова числа a_1 принадлежит множеству $B\backslash\{0\}$, а хвост $a_2a_3a_4a_5$ числа может начинаться с любой цифры из множества $B\backslash\{a_1\}$, то есть и с 0. Прибегнем к следующей генерации чисел множества A:

1. Выбор в качестве головы числа любой цифры b из B, кроме 0: 5 способов, так как $|B\backslash\{0\}| = 5$;

2. Размещение на 4 последующих разрядах хвоста числа различных цифр множества $B \setminus \{b\}$.

Любая генерация дает число $a \in A$. Например, генерация

1) 1,

2) 4086

даст число $14086 \in A$.

Любое число из множества A может быть получено этой генерацией. Например, число 90468 получается генерацией:

1) 9,

2) 0486.

Действие 2-го шага генерации не зависит от действия 1-го шага, так как размещают цифры разных разрядов и разные генерации дают разные числа.

Имеется также независимость по числу способов 2-го шага от результатов выбора 1-го шага: какую бы цифру $b \in B \setminus \{0\}$ мы ни выбрали на 1-м шаге, для выбора цифр на 2-м шаге всегда имеются 5 из оставшихся цифр множества $B \setminus \{b\}$. Таким образом, все условия правила умножения обоснованы.

Для определения числа возможностей 2-го шага генерации установим 1-1с между множеством R размещений без повторения цифр множества $B^{'} = B \setminus \{b\}$ на 4 местах и множеством $A^{'}$ хвостов из 4 последних разрядов каждого числа из A (например, 4689, 0468,...). В качестве функции прямого соответствия f, такой что $\forall r \in R: \ f(r) = a^{'}$, где $a^{'} \in A^{'}$, возьмем функцию f, которая по любому размещению $r \in R$ на 4 местах элементов $B^{'}$ (например, $(0,4,6,8)$) определяет хвост $a^{'} \in A^{'}$ выписыванием подряд цифр-элементов размещения в том же порядке (в указанном примере: 0468). В качестве функции обратного соответствия f^{-1}, такой что $\forall a^{'} \in A^{'}: \ f^{-1}(a^{'}) = r$, где $r \in R$, возьмем функцию f^{-1}, которая по любому хвосту $a^{'} \in A^{'}$ аргумента-числа a (например, 4680) определяет размещение $r \in R$ выписыванием подряд цифр-разрядов хвоста $a^{'}$ в порядке их следования в хвосте (например, (4, 6, 8, 0)). Покажем, что функции f и f^{-1} осуществляют 1-1с.

1. Прямое соответствие f функционально: размещению $r \in R$ ставит в соответствие 1 хвост $a^{'} \in A^{'}$.

2. Оно определено всюду на множестве R: каждому размещению r из R оно определяет хвост $a^{'}$ из $A^{'}$.

3. Обратное соответствие f^{-1} функционально: хвосту $a^{'} \in A^{'}$ определяет единственным образом значение-размещение r из R.

4. Оно определено всюду на множестве $A^{'}$: каждому хвосту из $A^{'}$ оно определяет размещение r из R.

5. Соответствия f и f^{-1} взаимно-обратны, так как $f^{-1}(f(a^{'}) = a^{'}$ и $f(f^{-1}(r)) = r$.

Таким образом, множества A' и R находятся во взаимно-однозначном соответствии, а потому по теореме о 1-1с конечных множеств количества их элементов совпадают: $|A'| = |C'| = A_5^4$. По уже обоснованному правилу умножения получаем следующий результат:

$$|A| = 5 \cdot A_5^4 = 5\frac{5!}{(5-4)!} = 5 \cdot 5! = 5 \cdot 120 = 600.$$

<u>`Ответ`</u>: *существует 600 5-значных чисел с различными цифрами, не являющимися простыми числами.*

Отметим другие пути решения задачи примера 6. Во-первых, функции прямого соответствия и обратного соответствия можно определить точным математическим описанием. Так, $f(r) = a'$ можно задать формулой:

$$f(r) = ((r_1 \cdot 10 + r_2) \cdot 10 + r_3) \cdot 10 + r_4 \equiv a'.$$

Задание $f^{-1}(a') = r \equiv (r_1, r_2, r_3, r_4)$ определим следующим алгоритмом:

$r_4 = a' \,\%\, 10$ (% – получение остатка от целочисленного деления)
$r_3 = [a'/10] \,\%\, 10$ (квадратные скобки – взятие целой части)
$r_2 = [a'/10^2] \,\%\, 10$
$r_1 = [a'/10^3] \,\%\, 10.$

Все 5 свойств 1-1с могут быть непосредственно проверены.

Другой путь решения задачи состоит в том, что вместо использования генерации и правила умножения будем использовать правило сложения, разложив размещения R_5 любых 5 цифр базового множества B на 2 подмножества: R_{50} – начинающихся с 0 и R_{51} – не начинающихся с 0. Так как выполнены условия правила сложения:

$$R_5 = R_{50} \cup R_{51}, \quad R_{50} \cap R_{51} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad |R_5| = |R_{50}| + |R_{51}|,$$

то $|R_{51}| = |R_5| - |R_{50}|$. Так как можно установить 1-1с между множеством R_{51} и множеством A чисел, заданных условием задачи, то

$$|A| = |R_5| - |R_{50}| = A_6^5 - A_5^4 = 6!/(6-5)! - 5!/(5-4)! = 6! - 5! = 600.$$

7. Сочетания без повторения

В этой комбинаторной модели базовое множество B также состоит из n элементов $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, а каждая комбинация определяется подмножеством из m элементов базового множества $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}\}$ $(\forall j, k : j \neq k \to i_j \neq i_k)$. Такую комбинацию называют *сочетанием m элементов из n $(m \leq n)$ элементов*. Задача о числе сочетаний может быть сформулирована следующим образом: *каким числом способов из n элементов могут быть выбраны m элементов?*

Для решения поставленной задачи воспользуемся задачей о числе размещений n элементов на m местах. Разница между размещением n элементов на m местах и сочетанием m элементов из n состоит в том, что в размещении все m элементов упорядочены, а в сочетании m элементов не упорядочены.

Попробуем установить соответствие между множеством R размещений на m местах и множеством C сочетаний m элементов. Образуем функцию f, которая каждому размещению $r \in R$ будет ставить в соответствие сочетание $c \in C: \ f(r) = c$, по следующему правилу: кортеж размещения r функция f делает неупорядоченным множеством c, состоящим из тех же элементов, что и r. Соответствие f функционально (c по r определяется однозначно), всюду определено (для любого $r \in R$ определено $c \in C$). Но обратное соответствие f^{-1}, хотя и всюду определено на C, не является функциональным: c можно упорядочить $m!$ способами (число перестановок m элементов c). Поэтому соответствие f не является взаимно-однозначным: у каждого элемента из C существует $m!$ прообразов в R и $m!$ элементов из R имеют один и тот же образ в C.

Учитывая такое соответствие, мы делаем вывод, что число элементов множества C в $m!$ раз меньше числа элементов множества R. Поэтому число сочетаний C_n^m [3] m из n элементов определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \ .$$

<u>Пример 7</u>. Число путей в прямоугольном городе (все улицы либо параллельны, либо перпендикулярны и не имеют тупиков): *сколько существует кратчайших путей в прямоугольном городе между двумя перекрестками, отстоящими на n кварталов по горизонтали и на m кварталов по вертикали?*

[3] Таково распространенное обозначение в русскоязычной литературе, хотя употребляются и другие: $C_{n,m}$ и $\binom{n}{m}$.

Не ограничивая общность рассуждений, можно считать, что один из перекрестков (назовем его *первым*) лежит левее и ниже второго. Кратчайший путь между перекрестками можно описать движением по кварталам в горизонтальном и вертикальном направлении. Например, при $n = 3$, $m = 2$ один из путей описывается как последовательность (*г, в, г, г, в*), которая интерпретируется следующим образом: пройти квартал направо (по горизонтали), повернуть налево и пройти еще 1 квартал (вверх), повернуть направо и пройти 2 квартала (по горизонтали), повернуть налево и пройти последний квартал (вверх). Таким образом, каждый путь можно представить вектором из $n + m$ элементов (кварталов кратчайшего пути), в котором n элементов *г* (кварталы, проходимые по горизонтали) и m элементов *в* (кварталы, проходимые вверх). Различные пути определяются различной последовательностью n элементов *г* и m элементов *в*. Между множеством кратчайших путей и множеством таких векторов устанавливается взаимно-однозначное соответствие: любому кратчайшему пути (определяется последовтельностью прохождения кварталов в каждом направлении) однозначно соответствует единственный такой вектор (последовательности направлений) – функция прямого соответствия и, наоборот, любому такому вектору (последовательности направлений) однозначно соответствует кратчайший путь (последовтельность прохождения кварталов в каждом направлении) – функция обратного соответствия, а также эти 2 функции взаимно-обратны. Поэтому для нахождения числа путей можно определить число векторов длины $n + m$, у которых n элементов одного вида и m – другого вида.

Теперь обратим внимание на то, что 2 различных, описанных таким образом вектора отличаются множеством номеров, на которых стоят элементы одного вида, и эти номера все различны. Количество различных векторов определяется числом способов, которыми можно выбрать n мест для элементов одного вида из общего числа $n + m$ мест, что и определяет задачу о числе сочетаний n элементов из $n + m$ элементов. Поэтому число кратчайших путей между двумя перекрестками в прямоугольном городе определяется как $C_{n+m}^{n} = C_{n+m}^{m} = \frac{(n+m)!}{n! \cdot m!}$.

8. Индивидуальное задание № 2

1-3. Для каждой из первых трех задач **определить** одну из **комбинаторных моделей** [4], соответствующую этой задаче (*перестановки без повторений, сочетания без повторений, размещения без повторений; любая из них, возможно, в сочетании с правилами умножения или сложения*) [5], **установив 1-1с** (*взаимно-однозначное соответствие*) между множеством комбинаций задачи и множеством комбинаций модели [6], а затем **решить задачу**, используя **формулу для числа комбинаций** соответствующей модели.

4. Дать **развернутый ответ** на вопрос, объяснив заданную комбинаторную модель или комбинаторное правило и **вывод формулы** для числа комбинаций, определяемых этой моделью. Привести **пример использования** модели или правила из решения других задач этого задания. Если в задании таких задач нет, то привести свой пример (не из данного пособия).

Варианты индивидуального задания № 2

1

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны, отличны от 0 и делятся на 3?
2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых возрастают?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?
4. Комбинаторное правило сложения.

---

[4] Это учебные задачи, целью которых является идентификация комбинаторных моделей без повторения; поэтому правила умножения и сложения запрещается использовать в тех случаях, когда очевидным образом можно использовать одну из комбинаторных моделей.

[5] Совершенно обязательным является обоснование всех условий использованных при решении правил сложения и умножения.

[6] Установление 1-1с с точным описанием функций соответствия и обоснованием их свойств 1-1с является совершенно обязательным.

2

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны, нечетны и в сумме меньше 17?
2. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не делятся на 3?
3. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и возрастают?
4. Комбинаторное правило умножения.

3

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых четны и возрастают?
2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и нечетны?
3. Сколько существует 6-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе перестановок.

4

1. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых убывают?
2. Сколько существует 4-значных чисел с различными четными цифрами?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами?
4. Задача о числе сочетаний.

5

1. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 2?

2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых четны и произведение их положительно?
3. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?
4. Задача о числе размещений.

6

1. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами?
2. Сколько существует 2-значных чисел с четными цифрами в убывающем порядке?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются квадратами чисел?
4. Комбинаторное правило сложения.

7

1. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не делятся на 3?
2. Сколько существует 2-значных чисел с четными цифрами в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе перестановок.

8

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и в сумме меньше 10?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?
3. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и возрастают?

4. Задача о числе размещений.

9

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются простыми числами?
2. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и убывают?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися квадратами?
4. Комбинаторное правило умножения.

10

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и убывают?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 3?
3. Сколько существует 10-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе сочетаний.

11

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и различны?
2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются степенями 2?
3. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются степенями 2 и возрастают?
4. Комбинаторное правило сложения.

12

1. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 2?
2. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются степенями 2 и возрастают?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются степенями 2?
4. Задача о числе размещений.

13

1. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются степенями 3?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися квадратами?
3. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются квадратами и возрастают?
4. Задача о числе сочетаний.

14

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются степенями 3?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися квадратами?
3. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не делятся на 3 и убывают?
4. Задача о числе перестановок.

15

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых не являются квадратами и убывают?

2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и четны?
3. Сколько существует 7-значных чисел с различными цифрами?
4. Комбинаторное правило умножения.

16

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются квадратами и убывают?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, делящимися на 3?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и делятся на 3?
4. Задача о числе сочетаний.

17

1. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, делящимися на 3?
2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых идут в убывающем порядке?
4. Комбинаторное правило умножения.

18

1. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами?
2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр максимальная?

4. Комбинаторное правило сложения.

19

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?

2. Сколько существует 2-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в убывающем порядке?

3. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами, не являющимися простыми?

4. Задача о числе размещений.

20

1. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?

2. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами, не являющимися квадратами?

3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в возрастающем порядке?

4. Задача о числе перестановок.

21

1. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?

2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?

3. Сколько существует 6-значных чисел с различными цифрами?

4. Задача о числе сочетаний.

22

1. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами в убывающем порядке?
2. Сколько существует 5-значных чисел с различными цифрами?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?
4. Комбинаторное правило сложения.

23

1. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися степенями 2?
2. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?
3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися кубами чисел и идущими в убывающем порядке?
4. Задача о числе перестановок.

24

1. Сколько существует 8-значных чисел с различными цифрами?
2. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, квадрат которых 2-значен и которые идут в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?
4. Комбинаторное правило умножения.

25

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр максимальная?

2. Сколько существует 2-значных чисел с различными цифрами, квадрат которых 1-значен и которые идут в убывающем порядке?
3. Сколько существует 10-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе размещений.

26

1. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются степенями 3?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися квадратами?
3. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются квадратами и возрастают?
4. Задача о числе сочетаний.

27

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и в сумме меньше 10?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?
3. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и возрастают?
4. Задача о числе размещений.

28

1. Сколько существует 8-значных чисел с различными цифрами?
2. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, квадрат которых 2-значен и которые идут в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?

4. Комбинаторное правило умножения.

29

1. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?
2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?
3. Сколько существует 6-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе сочетаний.

30

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?
2. Сколько существует 2-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в убывающем порядке?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися простыми?
4. Задача о числе размещений.

31

1. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, делящимися на 3?
2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых идут в убывающем порядке?
4. Комбинаторное правило умножения.

32

1. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых убывают?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются простыми числами?
4. Задача о числе сочетаний.

33

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны, нечетны и в сумме меньше 17?
2. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не делятся на 3?
3. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и возрастают?
4. Комбинаторное правило умножения.

34

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются квадратами и убывают?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, делящимися на 3?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и делятся на 3?
4. Задача о числе сочетаний.

35

1. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами?

2. Сколько существует 2-значных чисел с четными цифрами в убывающем порядке?

3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются квадратами чисел?

4. Комбинаторное правило сложения.

36

1. Сколько существует 2-значных чисел с различными цифрами, являющимися степенями 2?

2. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?

3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися кубами чисел и идущими в убывающем порядке?

4. Задача о числе перестановок.

37

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и убывают?

2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 3?

3. Сколько существует 10-значных чисел с различными цифрами?

4. Задача о числе сочетаний.

38

1. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 2?

2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны, четны и произведение их положительно?

3. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?

4. Задача о числе размещений.

39

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются простыми числами?
2. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и убывают?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися квадратами?
4. Комбинаторное правило умножения.

40

1. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 2?
2. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются степенями 2 и возрастают?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются степенями 2?
4. Задача о числе размещений.

41

1. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?
2. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами, не являющимися квадратами?
3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в возрастающем порядке?
4. Задача о числе перестановок.

42

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны, отличны от 0 и делятся на 3?
2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых возрастают?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?
4. Комбинаторное правило сложения.

43

1. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами в убывающем порядке?
2. Сколько существует 5-значных чисел с различными цифрами?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр минимальная?
4. Комбинаторное правило сложения.

44

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр максимальная?
2. Сколько существует 2-значных чисел с различными цифрами, квадрат которых 1-значен и которые идут в убывающем порядке?
3. Сколько существует 10-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе размещений.

45

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых не являются квадратами и убывают?

2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и четны?
3. Сколько существует 7-значных чисел с различными цифрами?
4. Комбинаторное правило умножения.

46

1. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами?
2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и сумма цифр максимальная?
4. Комбинаторное правило сложения.

47

1. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых четны и возрастают?
2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и нечетны?
3. Сколько существует 6-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе перестановок.

48

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и различны?
2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются степенями 2?
3. Сколько существует 2-значных чисел, цифры каждого из которых являются степенями 2 и возрастают?
4. Комбинаторное правило сложения.

49

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются степенями 3?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися квадратами?
3. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не делятся на 3 и убывают?
4. Задача о числе перестановок.

50

1. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не делятся на 3?
2. Сколько существует 2-значных чисел с четными цифрами в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе перестановок.

51

1. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в убывающем порядке?
2. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и произведение цифр максимальное?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися квадратами?
4. Задача о числе размещений.

52

1. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и нечетны?

2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых четны и убывают?

3. Сколько существует 5-значных чисел с различными цифрами?

4. Задача о числе перестановок.

53

1. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются степенями 2?

2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и различны?

3. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и убывают?

4. Комбинаторное правило сложения.

54

1. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых не делятся на 3 и убывают?

2. Сколько существует 7-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не являются степенями 3?

3. Сколько существует 5-значных чисел с различными цифрами, не являющимися квадратами?

4. Задача о числе перестановок.

55

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны, отличны от 0 и делятся на 3?

2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых возрастают?

3. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?

4. Комбинаторное правило сложения.

56

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны, нечетны и в сумме меньше 17?
2. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не делятся на 3?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и возрастают?
4. Комбинаторное правило умножения.

57

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых четны и возрастают?
2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых различны и нечетны?
3. Сколько существует 7-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе перестановок.

58

1. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых убывают?
2. Сколько существует 3-значных чисел с различными четными цифрами?
3. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами?
4. Задача о числе сочетаний.

59

1. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 2?
2. Сколько существует 5-значных чисел, цифры каждого из которых четны и произведение их положительно?
3. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами в возрастающем порядке?
4. Задача о числе размещений.

60

1. Сколько существует 5-значных чисел с различными цифрами?
2. Сколько существует 4-значных чисел с четными цифрами в убывающем порядке?
3. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются квадратами чисел?
4. Комбинаторное правило сложения.

61

1. Сколько существует 6-значных чисел, цифры каждого из которых различны и не делятся на 3?
2. Сколько существует 3-значных чисел с четными цифрами в возрастающем порядке?
3. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе перестановок.

62

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и в сумме меньше 10?

2. Сколько существует 4-значных чисел с различными четными цифрами?
3. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и возрастают?
4. Задача о числе размещений.

63

1. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых различны и являются простыми числами?
2. Сколько существует 4-значных чисел, цифры каждого из которых не являются простыми числами и убывают?
3. Сколько существует 3-значных чисел с различными цифрами, являющимися квадратами?
4. Комбинаторное правило умножения.

64

1. Сколько существует 3-значных чисел, цифры каждого из которых не являются степенями 2 и убывают?
2. Сколько существует 4-значных чисел с различными цифрами, не являющимися степенями 3?
3. Сколько существует 10-значных чисел с различными цифрами?
4. Задача о числе сочетаний.

9. Методические рекомендации к заданию 2

1. Решение каждой задачи 1–3 нужно *начать с анализа множества чисел задачи* (ввести обозначение для этого множества – например, A), определив базовое множество цифр, составляющих числа, и особенности порядка их расположения и повторяемости в числах. На основе этого анализа выбрать наиболее подходящую комбинаторную модель. Множество комбинаций выбранной модели обозначить мнемонически (например, P – для перестановок, R – для размещений, C – для сочетаний).

2. Попытаться установить 1-1с между множеством A чисел задачи и множеством K комбинаций выбранной модели (это временное общее обозначение для методических рекомедаций; необходимо использовать выбранное мнемоническое обозначение). Для этого нужно описать функцию прямого соответствия $f(k)$ для любой комбинации k из множества K (здесь вместо комбинации k надо употреблять название и обозначение комбинации: *перестановка* p, размещение r или сочетание c) и функцию $f^{-1}(a)$ для любого числа a из множества A. Если это не удается по причине цифры 0 на старшем разряде числа a, то следует это устранить одним из следующих способов:

   - разложить структуру произвольного числа $a = a_0 a_1 a_2 \cdots \in A$ на *голову* a_0 числа (цифра старшего разряда) и *хвост* $ax = a_1 a_2 \ldots$ и прибегнуть к генерации чисел A подобно тому, как это описано в примере 6 раздела 6, с последующим обоснованием правила умножения, выбора подобной комбинаторной модели для хвоста K_x и установлением 1-1с между множеством A_x хвостов чисел из A и множеством K_x комбинаций модели;
   - разбить множество комбинаций модели K на подмножество K_0 комбинаций, начинающихся с 0, и множество K_n комбинаций, не начинающихся с 0, подобно способу в конце раздела 6. Затем, обосновав правило сложения для K, вывести из него формулу для определения $|K_n|$, и, наконец, установить 1-1с между множествами K_n и A.

3. Обосновать правило умножения для генерации, если она имела место, или правило сложения, если оно использовалось. При этом все условия соответствующего правила должны быть полностью объяснены. Типичными ошибками здесь являются формальное перечисление условий с утверждениями, что они выполняются, а также проверка не всех условий.

4. Установить 1-1с между множеством комбинаторной модели, выбранной на предыдущих шагах, и множеством чисел задачи (или его части, определенной на предыдущих шагах). Самое главное

здесь – точное описание функций прямого и обратного соответствий. Оно состоит в описании правила, с помощью которого для значения аргумента (из множества аргументов) определяется значение функции (элемент другого множества). Начнем с функции прямого соответствия.

Одной типичной ошибкой здесь является то, что элементы, из которых строится значение, берутся не у аргумента, а у базового множества. Если аргумент не перестановка, то таким образом можно построить много значений, а значит, это не функция.

Другой типичной ошибкой является то, что не используются все свойства аргумента. Например, для размещения указываются, что все цифры аргумента выписываются *подряд*. Но "подряд" не означает порядка: выписать подряд можно и в обратном порядке, и в порядке, когда сначала выписываются цифры на нечетных местах, а потом на четных, и еще много других порядков (при длине размещения m существуют $m!$ порядков, как это следует из модели перестановок без повторений). Так что нужно в этом случае точно указать порядок элементов, которые выписываются. Интересным является то, что любой выбранный порядок годится для установления 1-1с (а потому существует $m!$ различных способов установить 1-1с; при этом и для функции обратного соответствия нужно будет выбрать соответствующий порядок, чтобы было выполнено свойство взаимной обратности функций прямого и обратного соответствий).

5. При установлении функции обратного соответствия нужно поступать так же, как и при установлении функции прямого соответствия: точно описать построение значения функции по аргументу.

   Типичной ошибкой здесь является описание функции $f^{-1}(a)$ обратного соответствия, при котором аргументу a ставится в соответствие прообраз k для a в прямом соответствии $f(k)$. Хотя это и верно, но без точного описания функции обратного соответствия нельзя показать *всюду определенность* этой функции. Ведь в попытке доказать, что для любого числа $a \in A$ существует комбинация k такая, что $f(k) = a$, нужно будет точно описать функцию $f^{-1}(a)$.

6. После точного описания функций прямого и обратного соответствий необходимо проверить выполнение всех 5 условий построенного соответствия. В этом случае недостаточно перечислить утверждение выполнения этих условий, а надо неформально объяснить, почему они выполняются.

7. Только после этого можно написать формулу для вычислений, основанную на всем проведенном решении задачи, и произвести вычисления (хотя это и необязательно).

Перейдем теперь к рассмотрению комбинаторных моделей с повторением и начнем с наиболее простой из них – размещений с повторением.

10. Размещения с повторением

В этой комбинаторной модели каждая комбинация определяется m элементами базового множества $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, которые могут повторяться и идут в каком-либо порядке $(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m})$. Такую комбинацию называют *размещением с повторением n элементов на m местах*. В отличие от размещений без повторения, где обязательно $m \leq n$, в размещениях с повторениями m ничем не ограничено и может быть как меньше, так и больше n.

Задача о числе размещений с повторениями может быть сформулирована следующим образом: *каким числом способов n элементов могут быть размещены на m местах?*

Размещение с повторениями так же, как и размещение без повторений, является кортежем (вектором), у которого каждый элемент базового множества может быть любым элементом базового множества в отличие от размещений без повторения, которые не могут повторяться. Поэтому каждое размещение с повторением является элементом прямого произведения B^m (базового множества на себя m раз). Отсюда следует число размещений с повторениями $\overline{A}_n^m$ [7] из n элементов на m местах как число элементов прямого произведения B^m:

$$\overline{A}_n^m = |B^m| = n^m.$$

[7] Так мы будем обозначать число размещений с повторениями.

Пример 8. *Сколько существует 9-значных чисел, у которых более 7 цифр являются простыми числами?*

Решение. Цифры, которые являются простыми числами (имеют ровно 2 различных делителя: 1 и само число), – это 2, 3, 5 и 7. Поэтому не более чем 1 цифра берется из множества $B_n = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$, а остальные цифры берутся из множества $B_p = \{2, 3, 5, 7\}$. Примерами заданных условием задачи чисел являются 232057372, 575757575, ...

Для того чтобы сделать рассматриваемое множество A чисел однородным, разобьем его на 2 подмножества:

- A_0 – состоящее только из цифр, являющихся простыми числами;
- A_1 – содержащее ровно 1 цифру, не являющуюся простым числом.

Так как $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ и $A_0 \cup A_1 = A$, то $|A| = |A_0| + |A_1|$, то есть можно воспользоваться правилом сложения.

Найдем $|A_0|$. Каждая цифра числа из A_0 принадлежит множеству B_p и может повторяться. Поэтому здесь нужно выбрать комбинаторную модель *с повторением элементов*. Числа, состоящие из одних и тех же цифр, различны, если одинаковые цифры стоят в разных разрядах 9-значного числа. Поэтому комбинаторную модель следует искать среди моделей *с порядком элементов* в комбинации. Количество повторений той или иной цифры в числе не фиксировано, значит, это не модель перестановок с повторениями. Попытаемся использовать комбинаторную модель размещений с повторениями (по признакам годится только она).

Пусть R – множество размещений с повторениями элементов из множества B_p на 9 местах. Рассмотрим функцию f, ставящую каждому размещению с повторениями $r \in R$ число, цифры которого являются элементами r, идущими в том же порядке и с тем же числом повторений каждой цифры, что и в размещении r: $f((5, 7, 5, 7, 5, 7, 5, 7, 5)) =$ 5757575.

Она однозначна, так как значение-число единственным образом определяется по аргументу-размещению;

всюду определена на R, так как любому размещению (например, (7, 5, 7, 5, 7, 5, 7, 5, 7)) ставит в соответствие число (в примере получается число 757575757).

Обратное соответствие есть функция f^{-1}, которая числу a (например, 332332322) из A_0 ставит в соответствие размещение с повторением r из R, элементы которого являются разрядами-цифрами числа a, идущими в размещении (так, например, для числа 332332322 получается размещение (3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2)) в том же порядке и с тем же числом повторений, что и в числе. Функция f^{-1} однозначна, так как значением аргумента-размещения является единственное значение-число, и всюду определена, так как это имеет место для любого размещения из R. Функции f, f^{-1} взаимно-обратны ($\forall r \in R : f^{-1}(f(r)) = r$; $\forall a \in A_0 : f(f^{-1}(a)) = a$), а поэтому они осуществляют 1-1с между множествами R и A_0. По теореме об 1-1с конечных множеств

$$|A_0| = |C| = \overline{A}_4^9 = 4^9.$$

Теперь будем определять размер множества A_1. Поскольку числа из A_1 имеют 1 цифру из множества B_n и если эта цифра 0, то она может быть любым разрядом числа кроме 1-го, а если она не 0, то может быть любым разрядом числа, включая и 1-й. Это осложняет выбор простой комбинаторной модели, и потому мы вновь разобьем множество A_1 на 2 подмножества:

- A_{10} – включающее 1 цифру 0 и остальные из B_p;
- A_{11} – включающее 1 цифру из $B_n \setminus \{0\}$ и остальные из B_p.

Так как $A_{10} \cap A_{11} = \emptyset$ и $A_{10} \cup A_{11} = A$, то $|A_1| = |A_{10}| + |A_{11}|$, то есть можно воспользоваться правилом сложения.

Для определения $|A_{10}|$ построим генерацию этих чисел:

1. Выбор места для цифры 0 (любой из разрядов кроме 1-го) – $C_8^1 =$ 8 способов;

2. Размещение на остальных разрядах (их 8) цифр из B_p (их 4) – это размещение с повторением (обоснование аналогично рассмотренному), а потому число таких размещений равно $\overline{A}_4^8 = 4^8$.

Каждая генерация дает число из A_{10}. Например, генерация

1) 2

2) 3_53535353

дает число $303535353 \in A_{10}$.

Каждое число из A_{10}. Например, число $250253753 \in A_{10}$ может быть получено генерацией

1) 3

2) 25_253753.

Так как действия шагов генерации независимы (выбираются цифры разных разрядов на 1-м и 2-м шагах), а также число размещений на шаге 2 не зависит от выбора разряда на шаге 1, то

$$|A_{10}| = 8 \cdot 4^8 = 2 \cdot 4^9.$$

Для определения $|A_{11}|$ построим генерацию этих чисел:

1. Выбор разряда для цифры из $B_n \setminus \{0\}$ – $C_9^1 = 9$ способов;

2. Размещение цифры из $B_n \setminus \{0\}$ на этом разряде – $\overline{A}_5^1 = 5$ способов;

3. Размещение на остальных разрядах (их 8) цифр из B_p (их 4) – это размещение с повторением (обоснование аналогично рассмотренному), а потому число таких размещений равно $\overline{A}_4^8 = 4^8$.

Каждая генерация дает число из A_{11}. Например, генерация

1) 2

2) _1

3) 3_53535353

дает число $313535353 \in A_{11}$.

Каждое число из A_{11}. Например, число $254253753 \in A_{10}$ может быть получено генерацией

1) 3

2) _ _4

3) 25_253753.

Так как действия независимы (выбираются цифры разных разрядов на 2-м и 3-м шагах, а также размещение цифры на 2-м шаге не зависит от выбора разряда на 1-м шаге) и число размещений на шаге 3 не зависит от выбора разряда на шаге 1 и цифры на шаге 2, то воспользуемся правилом умножения:

$$|A_{11}| = 5 \cdot 9 \cdot 4^8 = 45 \cdot 4^8.$$

Выполняя сложение полученных размеров множеств, получим:

$$|A| = |A_0| + |A_{10}| + |A_{11}| = 4^9 + 2 \cdot 4^9 + 45 \cdot 4^8 = 4^8(4 + 8 + 45) = 57 \cdot 4^8.$$

<u>Ответ</u>: *существует* $57 \cdot 4^8$ *9-значных чисел, у которых более 7 цифр являются простыми числами.*

Приведем 2 замечания, которые могут сократить выполнение решения в некоторых случаях.

Первое замечание. Отметим, что приведенный в примере 8 способ разбиения на подмножества, использующий принцип наличия или отсутствия нулей, является во многих случаях плохим, так как может потребовать разбиения на большое число подмножеств. Пусть, например, в условии примера 8 фраза «более 7 цифр являются простыми числами» заменяется на «более 2 цифр являются простыми числами». Тогда, придерживаясь прежнего принципа разбиения, мы разобьем множество чисел A следующим образом: $A = \bigcup_{k=0}^{4} A_k$, где A_k – подмножество чисел, содержащих k цифр из множества B_n, и, значит, от 0 до 4 нулей. Если разбить подмножество A_k, в свою очередь, на подмножества A_{km}, где m означает количество нулей в числах и принимает значения от 0 до k, то A_k будет разбито на m подмножеств, а все множество A будет разбито на $(k+1)^2 - 1$ подмножеств (в примере 25), что приведет к большой работе по составлению генераций, а далее к большому счету. Но если разбить каждое из подмножеств A_k при $k > 0$ на 2 подмножества по принципу, из какого подмножества B_n или B_p берется цифра для 1-го разряда, то A будет разбито только на $2k - 1$ подмножеств (в примере 9), что существенно меньше прежнего. Поэтому принцип разбиения по первому разряду (из какого подмножества берется цифра) гораздо выгоднее.

Приведем в качестве примера разбиение подмножества A_1 из примера 8:

- A_{10} – на 1-м месте цифра из B_p;
- A_{11} – на 1-м месте цифра из $B_n \setminus \{0\}$.

Проверка правила сложения аналогична приведенной в примере 8. Генерация A_{10}:

1. Выбор места для цифры из B_n (любой из разрядов кроме 1-го) – $C_8^1 = 8$ способов;

2. Размещение на остальных разрядах (их 8) цифр из B_p (их 4) – это размещение с повторением (обоснование аналогично рассмотренному), а потому число таких размещений равно $\overline{A}_4^8 = 4^8$.

Генерация A_{11}:

1. Размещение цифры из $B_n \setminus \{0\}$ на 1-м разряде – $\overline{A}_5^1 = 5$ способов;

2. Размещение на остальных разрядах (их 8) цифр из B_p (их 4) – это размещение с повторением (обоснование аналогично рассмотренному), а потому число таких размещений равно $\overline{A}_4^8 = 4^8$.

Таким образом, эти генерации дают тот же результат, а количество шагов второй генерации даже сократилось.

Второе замечание. Иногда выгодно вместо заданного задачей множества A определить количество элементов его дополнения $\overline{A}$ до множества всех чисел с таким же количеством разрядов, и тогда, используя правило сложения, определить количество элементов A.

11. Перестановки с повторениями

Базовое множество B этой модели содержит k типов элементов комбинации $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. Каждая комбинация модели является кортежем (вектором) из n элементов базового множества ($n \geq k$) и при этом задано количество элементов в комбинации каждого типа: n_i ($i \in \overline{1,k}$) элементов типа b_i, причем $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Комбинации отличаются расположением элементов и называются *перестановками с повторением.* Следует заметить, что если переставить 2 элемента одного типа, то мы не получим новой перестановки.

Задача о числе перестановок с повторениями формулируется следующим образом: *каким числом способов можно переставить последовательность из n элементов, содержащих n_i $(i = 1, \ldots, k)$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ элементов каждого типа, которые неразличимы между собой?*

Обозначим через $P_{n,n_1,\ldots,n_k}$ множество перестановок из n элементов k типов с числами $n_1, \ldots, n_k$ элементов соответствующих типов ($n = \sum_{i=1}^{k} n_i$). Для вывода формулы этой задачи определим следующую последовательность действий для генерации каждой комбинации:

1. Выбор множества из n_1 мест для элементов 1-го типа (b_1) – $C_n^{n_1}$ способов;

2. Выбор множества из n_2 мест для элементов 2-го типа (b_2) – $C_{n-n_1}^{n_2}$ способов;

………………………………………………………………

k-1. Выбор множества из n_{k-1} мест для элементов (k-1)-го типа (b_{k-1}) – $C_{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}^{n_{k-1}}$ способов;

k. Выбор множества из n_k мест для элементов k-го типа (b_k) – $C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} = C_{n_k}^{n_k} = 1$ способ.

Каждая генерация строит перестановку с повторением из множества $P_{n,n_1,\dots,n_k}$. Любая перестановка из множества $P_{n,n_1,\dots,n_k}$ может быть получена генерацией. Действия генерации независимы, так как определяют различные группы элементов перестановки, и они не зависят по числу способов выбора от выборов предыдущих действий. Поэтому число $C_n^{n_1,\dots,n_k}$ [8] перестановок с повторением из n элементов k типов с числами $n_1, \dots, n_k$ элементов соответствующих типов ($n = \sum_{i=1}^k n_i$) определяется следующим образом:

$$C_n^{n_1,\dots,n_k} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_1} \cdot C_{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}^{n_{k-1}} =$$
$$= \frac{n!}{n_1! \cdot (n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2! \cdot (n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k! \cdot 1!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

Окончательная формула выглядит так:

$$|P_{n,n_1,\dots,n_k}| = C_n^{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}\ .$$

Отметим, что при $k = 2$ получается формула числа сочетаний, так как $n_2 = n - n_1$. Это объяснимо таким образом: при выборе n_1 мест для элементов 1-го типа мы автоматически выбираем оставшиеся $n - n_1$ мест для элементов 2-го типа.

Пример 9. *Каким числом способов можно разбить n-элементное множество на k непересекающихся подмножеств с различным числом элементов этих подмножеств* $n_1, \dots, n_k$, $n_i \neq n_j$ $(i \neq j)$, *где* $n = \sum_{i=1}^k n_i$*?*

Решение. Упорядочим каким-либо образом элементы исходного n-элементного множества. Каждому разбиению этого множества на k непересекающихся подмножеств с числом их элементов $n_1, \dots, n_k$, где $n = \sum_{i=1}^k n_i$, отнесем вектор из натуральных чисел от 1 до k, в котором число i $(i = 1, \dots, k)$ повторяется n_i раз и определяет места элементов исходного множества, на котором стоят элементы i-го подмножества.

[8] Так мы будем обозначать число перестановок с повторением из n элементов k типов с числами $n_1, \dots, n_k$ элементов соответствующих типов ($n = \sum_{i=1}^k n_i$).

Эта функция f всюду определена на множестве R разбиений на подмножества.

Соответствие $f^{-1}(v)$ между множеством V таких векторов и множеством R разбиений на подмножества по вектору $v \in V$ однозначно определяет разбиение на k подмножеств, где i-е подмножество состоит из элементов исходного множества с номерами, для которых в векторе-аргументе v значение компонент с этими номерами равно i. Значения этой функции определены для любых векторов из V, то есть эта функция всюду определена на V. Так как эти функции прямого и обратного соответствия взаимно-обратны, ими устанавливается 1-1с. Но число векторов множества V определяется формулой

$$C_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!} \ ,$$

а потому таково число разбиений на подмножества, удовлетворяющих условиям задачи.

12. Сочетания с повторениями

Базовое множество B этой модели содержит n типов элементов комбинации $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. В этой комбинаторной модели каждая комбинация определяется множеством из m элементов базового множества B, которые могут повторяться в комбинации $\{b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}\}$. Такую комбинацию называют *сочетанием с повторением m из n элементов*. В отличие от сочетаний без повторения, где обязательно $m \leq n$, в сочетаниях с повторениями m ничем не ограничено и может быть как меньше или равно, так и больше n.

Задача о числе сочетаний с повторениями формулируется следующим образом: *каким числом способов можно выбрать множество m элементов из n элементов базового множества $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, которые могут повторяться в комбинации?*

Приведем пример. Пусть базовое множество состоит из 3 элементов $B = \{a, b, c\}$. Тогда все сочетания по 2 из базового множества выглядят следующим образом:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, a\}, \{b, b\}, \{c, c\},$$

а все сочетания по 4 элемента представляют собой следующие множества:
$\{a, a, b, c\}, \{a, b, b, c\}, \{a, b, c, c\}, \{a, a, b, b\}, \{a, a, c, c\}, \{b, b, c, c\},$
$\{a, a, a, b\}, \{a, a, a, c\}, \{b, b, b, a\}, \{b, b, b, c\}, \{c, c, c, a\}, \{c, c, c, b\},$
$\{a, a, a, a\}, \{b, b, b, b\}, \{c, c, c, c\}.$

Для решения задачи мы любым способом определим порядок элементов базового множества и каждому сочетанию m элементов из n поставим в соответствие вектор из $\{0, 1\}$, который имеет m единиц и $n - 1$ нуль. Нули этого вектора разделяют множество из m единиц на n групп, некоторые из которых могут быть пустыми:

1-я группа – перед первым нулем,

2-я группа – между первым и вторым нулем,

....,

n-я группа – после последнего нуля.

Число единиц в каждой группе определяется количеством повторений в сочетании соответствующего элемента базового множества B:
если элемент в сочетании отсутствует, то либо 2 нуля идут подряд, если элемент не первый и не последний, либо вектор начинается с нуля, если элемент первый, либо вектор заканчивается нулем, если элемент последний;
если же элемент базового множества повторяется в сочетании $k > 0$ раз, то соответствующая группа вектора имеет ровно k единиц.

Так, в вышеописанном примере сочетанию $\{a, b\}$ ставится в соответствие вектор $(1, 0, 1, 0)$, сочетанию $\{c, c\}$ – вектор $(0, 0, 1, 1)$, а сочетанию $\{a, a, a, c\}$ – вектор $(1, 1, 1, 0, 0, 1)$.

Определенное таким образом соответствие f между множеством C сочетаний m элементов из n и множеством V векторов из $\{0{,}1\}$ является функциональным и всюду определенным на C. Обратное соответствие f^{-1}, ставящее по вектору $v \in V$ сочетание $c \in C$, определяет число повторений каждого элемента из B, равное числу единиц соответствующей группы вектора v. Оно также функционально и всюду определено на V, и так как функции f и f^{-1} взаимно-обратны, то они устанавливают 1-1с.

Следовательно, для подсчета числа сочетаний с повторением можно определить число соответствующих векторов v из множества V. Для этого следует заметить, что каждый вектор v однозначно определяется номерами мест, где стоят единицы, и таким соответствием является 1-1с. Поэтому число сочетаний с повторением m элементов из n определяется следующей формулой:

$$C_{n+m-1}^{m}.$$

Пример 10. *Сколько костей имеет домино?*

Решение. Ответ 28 нам известен, и мы его используем для контроля решения. Каждая кость домино представляет собой пару значений {a, b}, где $a, b \in \overline{0,6}$. Поскольку значения в паре могут повторяться, то число различных пар (или костей домино) равно числу сочетаний с повторением 2 элементов значений из 7 (от 0 до 6). Поэтому число костей домино равно

$$C_{2+7-1}^{2} = C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Пример 11. *Сколько различных неотрицательных целочисленных решений имеет уравнение*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m?$$

Решение. Каждое решение определяется целочисленным неотрицательным вектором $(a_1, \ldots, a_n)$, таким что $\sum_{i=1}^{n} a_i = m$. Его также можно определить вектором из m единиц и $n-1$ нулей, где a_1 единиц предшествует первому нулю, a_n единиц – после последнего нуля и a_i $(i \in \overline{2, n-1})$ единиц идет в группе между $(i-1)$-м и i-м нулями. Поэтому число неотрицательных целочисленных решений уравнения равно

$$C_{n+m-1}^{m}.$$

13. Бином Ньютона и полиномиальная теорема

Бином Ньютона есть формула для разложения произвольной натуральной степени двучлена $(x+y)^n$ в многочлен по степеням первого члена двучлена:

$$(x+y)^n = x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot y + \tfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \tfrac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} x \cdot y^{n-1} + y^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{n-k} y^k.$$

Коэффициенты C_n^k [9] этого разложения называют по этой причине биномиальными коэффициентами.

Обоснование формулы бинома Ньютона состоит в следующем. Перемножим $(x+y)$ n раз. Получим сумму слагаемых вида $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$, где $d_i (i = 1, \ldots, n)$ либо x, либо y. Разобьем все слагаемые на группы $B_0, B_1, \ldots, B_n$, где B_k $(k \in \overline{0, n})$ содержит лишь слагаемые вида $x^{n-k} \cdot y^k$. Число таких слагаемых равно числу способов выбрать в k скобках y, а в остальных x. Но это C_n^k, что и требовалось обосновать.

Из формулы Ньютона можно получить интересные соотношения для биномиальных коэффициентов. Подставив в формулу бинома $x = y = 1$, получаем

$$(1+1)^n = 2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k,$$

что означает: сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n. Учитывая, что число k-элементных подмножеств n-элементного множества равна биномиальному коэффициенту C_n^k (см. раздел 7), получаем, что *число всех подмножеств n-элементного множества равно* 2^n.
Впрочем, этот же факт можно получить, основываясь на модели размещения с повторением, если занумеровать каким-либо образом все элементы n-элементного множества и каждому его k-элементному подмножеству поставить в соответствие строку из k единиц и $n-k$ нулей, в которой единицы отмечают номера элементов, включенных в подмножество. Тогда количество всех подмножеств n-элементного множества равно количеству различных строк длины n из нулей и единиц. А все такие строки можно получить размещением с повторением нулей и единиц на n местах, и число таких размещений равно 2^n.

Другое отношение между суммами биномиальных коэффициентов можно получить, если подставить в формулу бинома $x = 1,\ y = -1$. Тогда получаем

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0,$$

откуда следует равенство сумм всех биномиальных коэффициентов с четным k и сумм всех биномиальных коэффициентов с нечетным k.

[9] Мы видели, что они определяют число сочетаний из n по k

Последнее приводит к следующему факту:
у любого непустого конечного множества количество подмножеств с четным числом элементов равно количеству подмножеств с нечетным числом элементов.

Блез Паскаль ввел оригинальный способ вычисления биномиальных коэффициентов, названный треугольником Паскаля и основанный на формуле
$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Для обоснования формулы выполним преобразование:
$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n-1)!\cdot(n-k+k)}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = C_n^k.$
В треугольнике Паскаля в каждой строке находятся биномиальные коэффициенты для некоторого значения n ($n = 0, 1, 2, \dots$), т. е. $C_n^0, \dots, C_n^n$ и к ним слева и справа дописывается 0. Тогда в следующей строке ниже выписываются биномиальные коэффициенты для $n+1$ так, что каждый коэффициент равен сумме коэффициентов в строке выше справа и слева от него.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & & & n=0 \\
 & & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & & & n=1 \\
 & & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & & & n=2 \\
 & & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & & & n=3 \\
 & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 & & n=4 \\
0 & & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & 0 & n=5
\end{array}$$

Вычисление биномиальных коэффициентов с использованием треугольника Паскаля требует только операций сложения и особенно эффективно по числу операций в том случае, когда приходится вычислять много коэффициентов.

Обобщением бинома Ньютона является **полиномиальная теорема** – разложение по сумме степеней k переменных n-й степени суммы переменных:
$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0, n_1 + \dots + n_k = n} C_n^{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Полиномиальными коэффициентами здесь являются числа перестановок с повторениями из n по любому набору неотрицательных целочисленных степеней $n_1, \dots, n_k$, сумма которых равна n. При $n = 2$ эта формула дает бином Ньютона.

Для доказательства полиномиальной теоремы перемножим сумму $(x_1 + \dots + x_k)$ на саму себя n раз. Получим сумму произведений вида $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$. При приведении подобных членов получим коэффициенты перед $x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$, определяемые числом выборов n_1 скобок, где берется x_1; n_2 скобок, где берется x_2, и т. д. Поскольку элементы, выбираемые в скобках, повторяются соответственно $n_1, n_2, \dots, n_k$ раз, то это и есть число сочетаний с повторением из n по $n_1, n_2, \dots, n_k$, что и требовалось доказать.

14. Индивидуальное задание № 3

1–3. Для каждой из первых трех задач **определить** одну из **комбинаторных моделей** [10], соответствующую этой задаче (*перестановки с повторениями, сочетания с повторениями, размещения с повторениями; любая из них, возможно, в сочетании с правилами умножения или сложения*) [11], **установив 1-1с** (*взаимно-однозначное соответствие*) между множеством комбинаций задачи и множеством комбинаций модели [12], а затем **решить задачу**, используя **формулу для числа комбинаций** соответствующей модели.

4. Дать **развернутый ответ** на вопрос, объяснив заданную модель и **вывод формулы** для числа комбинаций, определяемых этой моделью. Привести **пример использования** модели из решения других задач этого задания. Если в задании таких задач нет, то привести свой пример (не из данного пособия).

[10] Это учебные задачи, целью которых является идентификация комбинаторных моделей с повторением; поэтому правила умножения и сложения запрещается использовать в тех случаях, когда очевидным образом можно использовать одну из комбинаторных моделей.

[11] Совершенно обязательным является обоснование всех условий использованных при решении правил сложения и умножения.

[12] Установление 1-1с с точным описанием функций соответствия и обоснованием их свойств 1-1с является совершенно обязательным.

Варианты индивидуального задания № 3

1

1. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, кратными 3 и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых степень 2 и повторяется равное показателю число раз?
3. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются кубами чисел?
4. Задача о размещениях с повторениями.

2

1. Сколько существует 6-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются простыми?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых кратна 3 и повторяется равное кратности число раз?
4. Задача о перестановках с повторениями.

3

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является кубом и повторяется равное ей самой число раз?
2. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися простыми цифрами и идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 5 цифр являются четными?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

4

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не кратна 3 и повторяется равное ей самой число раз?
2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются степенями 2?
3. Сколько существует 3-значных чисел, которые состоят из четных цифр, идущих в невозрастающем порядке?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

5

1. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются четными?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не кратна 3 и повторяется число раз равное остатку от деления на 3?
3. Сколько существует 5-значных чисел, которые состоят из цифр, не кратных 3 и идущих в невозрастающем порядке?
4. Задача о перестановках с повторениями.

6

1. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 2, идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является квадратом числа и повторяется число раз, равное ей самой?
3. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются кубами чисел?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

7

1. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, не являющимися простыми числами и идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются степенями 2?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является простым числом и повторяется число раз, равное ей самой?
4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

8

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом числа и повторяется равное ей самой число раз?
2. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, являющимися кубами чисел и идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр некратно 3?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

9

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является квадратом и повторяется число раз, равное ей самой?
2. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются нечетными?
3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?
4. Задача о размещениях с повторениями.

10

1. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются кубами чисел?
2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 2 и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является степенью 2 и повторяется число раз, равное ей самой?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

11

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 2 цифр не являются простыми числами?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, равное ей самой?
3. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, не являющимися квадратами и идущими в невозрастающем порядке?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

12

1. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися кубами и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, равное ей самой?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются четными?
4. Задача о размещениях с повторениями.

13

1. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр кратно 3?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, равное ее половине?
4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

14

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются квадратами?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является простым числом и повторяется число раз на 1 меньше ее самой?
3. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, являющимися простыми числами и идущими в невозрастающем порядке?
4. Задача о перестановках с повторениями.

15

1. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, кратными 3 и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом и повторяется число раз на 2 больше ее самой?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не менее 2 цифр являются простыми числами?
4. Задача о размещениях с повторениями.

16

1. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, не являющимися простыми числами и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является простым числом и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
3. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не менее 1 цифры является степенью 3?
4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

17

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является нечетной и повторяется число раз, равное остатку от деления на 3?
2. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не менее 6 цифр не являются степенями 3?
3. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 2 и идущими в невозрастающем порядке?
4. Задача о размещениях с повторениями.

18

1. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не менее 2 цифр являются степенями 2?
2. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является простым числом и повторяется число раз, равное остатку от деления ее на 3?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

19

1. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не менее 3 цифр кратны 3?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является степенью 3 и повторяется число раз, равное показателю степени?
3. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися кубами и идущими в невозрастающем порядке?
4. Задача о перестановках с повторениями.

20

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является степенью 3 и повторяется число раз равное остатку от деления на 3?
2. Сколько существует 8-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 3 цифр не является степенями 3?
4. Задача о перестановках с повторениями.

21

1. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, не являющимися квадратами и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является квадратом и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
3. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не менее 5 цифр не являются квадратами чисел?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

22

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является квадратом и повторяется число раз, равное ей самой?

2. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются нечетными?

3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?

4. Задача о размещениях с повторениями.

23

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются квадратами?

2. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, являющимися квадратами и идущими в неубывающем порядке?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является квадратом и повторяется равное ей самой число раз?

4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

24

1. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются простыми числами?

2. Сколько существует 3-значных чисел с четными цифрами, идущими в неубывающем порядке?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является степенью 2 и повторяется число раз, равное ей самой?

4. Задача о перестановках с повторениями.

25

1. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, являющимися квадратами и идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются квадратами чисел?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является нечетной и повторяется на 1 раз меньше ее самой?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

26

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых некратна 3 и повторяется число раз, равное остатку от деления на 3?
2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, некратными 3 и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются четными?
4. Задача о перестановках с повторениями.

27

1. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не менее 3 цифр кратны 3?
2. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися кубами и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является степенью 3 и повторяется число раз, равное показателю степени?
4. Задача о перестановках с повторениями.

28

1. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются степенями 2?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является простым числом и повторяется число раз, равное ей самой?
3. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, не являющимися простыми числами и идущими в невозрастающем порядке?
4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

29

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются квадратами?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является квадратом и повторяется равное ей самой число раз?
3. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, являющимися квадратами и идущими в неубывающем порядке?
4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

30

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом и повторяется число раз на 2 больше ее самой?
2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не менее 2 цифр являются простыми числами?
3. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, кратными 3 и идущими в неубывающем порядке?
4. Задача о размещениях с повторениями.

31

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых некратна 3 и повторяется равное ей самой число раз?
2. Сколько существует 3-значных чисел с четными цифрами, идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются степенями 2?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

32

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является простым числом и повторяется число раз на 1 меньше ее самой?
2. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, являющимися простыми числами и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются квадратами?
4. Задача о перестановках с повторениями.

33

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является квадратом и повторяется число раз, равное ей самой?
2. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются нечетными?
4. Задача о размещениях с повторениями.

34

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является квадратом числа и повторяется число раз, равное ей самой?

2. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются кубами чисел?

3. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 2, идущими в неубывающем порядке?

4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

35

1. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися кубами и идущими в неубывающем порядке?

2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются четными?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, равное ей самой?

4. Задача о размещениях с повторениями.

36

1. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в неубывающем порядке?

2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является простым числом и повторяется число раз, равное остатку от деления ее на 3?

3. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не менее 2 цифр являются степенями 2?

4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

37

1. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются простыми числами?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является степенью 2 и повторяется число раз, равное ей самой?
3. Сколько существует 3-значных чисел с четными цифрами, идущими в неубывающем порядке?
4. Задача о перестановках с повторениями.

38

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых степень 2 и повторяется равное показателю число раз?
2. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются кубами чисел?
3. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, кратными 3 и идущими в неубывающем порядке?
4. Задача о размещениях с повторениями.

39

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является нечетной и повторяется число раз, равное остатку от деления на 3?
2. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 2 и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не менее 6 цифр не являются степенями 3?
4. Задача о размещениях с повторениями.

40

1. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися простыми цифрами и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 5 цифр являются четными?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является кубом и повторяется равное ей самой число раз?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

41

1. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются кубами чисел?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является степенью 2 и повторяется число раз, равное ей самой?
3. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 2 и идущими в невозрастающем порядке?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

42

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются квадратами чисел?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является нечетной и повторяется на 1 раз меньше ее самой?
3. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, являющимися квадратами и идущими в невозрастающем порядке?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

43

1. Сколько существует 6-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых кратна 3 и повторяется равное кратности число раз?
3. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются простыми?
4. Задача о перестановках с повторениями.

44

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, равное ей самой?
2. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, не являющимися квадратами и идущими в невозрастающем порядке?
3. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 2 цифр не являются простыми числами?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

45

1. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, не являющимися квадратами и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не менее 5 цифр не являются квадратами чисел?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является квадратом и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

46

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является простым числом и повторяется число раз на 1 раз больше ее самой?

2. Сколько существует 4-значных чисел, у которых не менее 1 цифры является степенью 3?

3. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, не являющимися простыми числами и идущими в неубывающем порядке?

4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

47

1. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?

2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, равное ее половине?

3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр кратно 3?

4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

48

1. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, являющимися кубами чисел и идущими в неубывающем порядке?

2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр некратно 3?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом числа и повторяется равное ей самой число раз?

4. Задача о сочетаниях с повторениями.

49

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является степенью 3 и повторяется число раз, равное остатку от деления на 3?

2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 3 цифр не является степенями 3?

3. Сколько существует 8-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в неубывающем порядке?

4. Задача о перестановках с повторениями.

50

1. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются нечетными?

2. Сколько существует 3-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является квадратом и повторяется число раз, равное ей самой?

4. Задача о размещениях с повторениями.

51

1. Сколько существует 4-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 2 и идущими в невозрастающем порядке?

2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является степенью 2 и повторяется число раз на 1 больше ей самой?

3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются кубами чисел?

4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

52

1. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не менее 2 цифр кратно 3?

2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, не являющимися степенями 3 и идущими в невозрастающем порядке?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является четной и повторяется число раз, в 2 раза большим ее самой?

4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

53

1. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не менее 2 цифр некратно 3?

2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, не являющимися кубами чисел и идущими в неубывающем порядке?

3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом числа и повторяется число раз на 1 больше ее самой?

4. Задача о сочетаниях с повторениями.

54

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых более 3 цифр являются степенями 3?

2. Сколько существует 8-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в невозрастающем порядке?

3. Задача о перестановках с повторениями.

4. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является степенью 3 и повторяется число раз на 1 больше остатка от деления на 3?

55

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не менее 2 цифр некратно 3?
2. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, не являющимися кубами чисел и идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом числа и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

56

1. Сколько существует 6-значных чисел, у которых более 3 цифр являются степенями 3?
2. Сколько существует 7-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в невозрастающем порядке?
3. Задача о перестановках с повторениями.
4. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является степенью 3 и повторяется число раз, равное остатку от деления на 3?

57

1. Сколько существует 6-значных чисел с цифрами, кратными 3 и идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых степень 2 и повторяется равное показателю число раз?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются кубами чисел?
4. Задача о размещениях с повторениями.

58

1. Сколько существует 5-значных чисел с нечетными цифрами, идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются простыми?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых кратна 3 и повторяется равное кратности число раз?
4. Задача о перестановках с повторениями.

59

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является кубом и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
2. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, являющимися простыми цифрами и идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует 8-значных чисел, у которых не более 5 цифр являются четными?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

60

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых некратна 3 и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
2. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются степенями 2?
3. Сколько существует 4-значных чисел, которые состоят из четных цифр, идущих в невозрастающем порядке?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

61

1. Сколько существует 7-значных чисел, у которых не более 2 цифр являются четными?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых некратна 3 и повторяется число раз на 1 большее остатка от деления на 3?
3. Сколько существует 5-значных чисел, которые состоят из цифр, некратных 3 и идущих в невозрастающем порядке?
4. Задача о перестановках с повторениями.

62

1. Сколько существует 5-значных чисел с цифрами, являющимися степенями 2, идущими в неубывающем порядке?
2. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых не является квадратом числа и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
3. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 3 цифр являются кубами чисел?
4. Бином Ньютона и вычисление биномиальных коэффициентов.

63

1. Сколько существует 8-значных чисел с цифрами, не являющимися простыми числами и идущими в невозрастающем порядке?
2. Сколько существует 5-значных чисел, у которых не более 4 цифр являются степенями 2?
3. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является простым числом и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
4. Полиномиальная теорема и полиномиальные коэффициенты.

1. Сколько существует чисел, состоящих из всех цифр, каждая из которых является кубом числа и повторяется число раз на 1 больше ее самой?
2. Сколько существует 7-значных чисел с цифрами, являющимися кубами чисел и идущими в неубывающем порядке?
3. Сколько существует 6-значных чисел, у которых не более 2 цифр некратно 3?
4. Задача о сочетаниях с повторениями.

15. Дополнительные методические рекомендации к заданию 3

1. Выполните рекомендации к заданию 2 с тем отличием, что выбираются модели с повторением элементов.
2. При описании функций прямого и обратного соответствия может возникнуть **еще одна ошибка**. Она состоит в отсутствии упоминания о том, что значение должно иметь такое же повторение каждой цифры, входящей в аргумент, как и у аргумента. Если это не соблюдать, то будет иметь место неоднозначность значения с различным числом повторений цифр аргумента. Поэтому правило описания значения функции по ее аргументу должно исключать эту ошибку.
3. После точного описания функций прямого и обратного соответствий необходимо проверить выполнение всех 5 условий построенного соответствия. В этом случае недостаточно перечислить утверждения выполнения этих условий, а надо неформально объяснить, почему они выполняются.
4. Только после этого можно написать формулу для вычислений, основанную на всем проведенном решении задачи, и произвести вычисления (хотя последнее и необязательно).

16. Решение более сложных комбинаторных задач

Рассмотренные нами комбинаторные модели позволяют решать элементарные задачи комбинаторики. Задачи индивидуальных заданий № 2, 3 являются элементарными: комбинаторная модель легко угадывается, а функция 1-1с между множеством комбинаций модели и множеством комбинаций задачи легко устанавливается. При решении более сложных задач надо использовать эти модели как "*кирпичи при построении здания*". При этом полезно придерживаться следующей методики.

1. Решение комбинаторной задачи следует начинать с *анализа множества комбинаций*. При этом необходимо ответить на такие вопросы:

- что собой представляет комбинация? (какие объекты отвечают условиям задачи и какие не отвечают?);
- каким образом можно ее описать? (при этом могут быть разные способы описания: последовательность значений или совокупность мест, где находится каждое значение и т. д.; для последующего всегда следует иметь в виду несколько способов представления комбинации).

2. *Обоснование способа представления* множества комбинаций: установление 1-1с между множеством комбинаций задачи и множеством представлений этих комбинаций.

3. *Декомпозиция задачи.* Для того или иного способа представления информации комбинаций следует провести попытку упрощения задачи, разбив ее на части и используя правила сложения и умножения. При этом следует ответить на вопросы:

- на какие части можно разделить комбинацию для попытки ее генерации? (под частью можно понимать то, что можно сгенерировать, использовав элементарную комбинаторную модель: отдельный элемент, или множество значений элемента, или место, где должен быть расположен элемент, или совокупность элементов, или множество значений совокупности элементов, или множество мест совокупности элементов и т. д.);

- можно ли последовательностью действий сгенерировать комбинацию или она является неоднородной и следует множество комбинаций разбить на части, сделав каждую часть регулярной для использования генерации?

4. *Обоснование декомпозиции задачи.* Если декомпозиция задачи произведена, то следует обосновать ее:

- обоснование правила сложения, или правила умножения, или того и другого.

  Если разбиение множества комбинаций задачи (или ее части) по правилу умножения не является очевидным при проверке условий правила, то следует привести обоснование этих условий. При разбиении множества на 2 подмножества по некоторому свойству, которое выполняется для одного подмножества и не выполняется для другого подмножества разбиения, **обоснование** становится **очевидным** (оно и **рекомендуется**). Но в остальных случаях требуется явное обоснование.

  Обоснование правила умножения становится неочевидным, если действиями генерации выбираются не все части комбинации (а подразумевают выбор единственным образом некоторых частей), так как в этом случае затруднительно проверять условие полноты генерации (получения ею комбинации) или генерирования любой комбинации. **Действия** генерации также должны быть описаны **ясно, однозначно с указанием** используемой комбинаторной **модели** (достаточно указания на обозначение формулы комбинаторной модели: сочетания, перестановки или размещения без повторения или с повторением элементов комбинации);

- обоснование выбора модели на каждом шаге генерации комбинации или генерации части комбинации, если это не очевидно.

5. Если обоснования не получается или оно получается слишком сложным, то можно попробовать *выбрать другое представление.*

Пример 12. Это пример второй задачи индивидуального задания № 4.
Сколько 7-значных чисел можно составить из цифр числа 393965321?

1. *Анализ задачи.* Базовое множество с повторяющимися элементами $B = \{1, 2, 5, 6, 9, 9, 3, 3, 3, \}$ содержит помимо 4 неповторяющихся элементов $B_n = \{1, 2, 5, 6\}$ 2 повторяющихся $B_p = \{3, 9\}$: 9 повторяется 2 раза, а 3 – 3 раза. Примерами 7-значных чисел, составленных из этих цифр являются:

3952619,

9162593,

1233356.

Числами, не отвечающими условию задачи, являются:

3399331 (цифра 3 повторяется 4 раза),

3499331 (цифра 4 не входит в исходное число).

2. *Способ представления* комбинации очевиден: последовательность из 7 элементов базового множества, где элементы могут повторяться. Каждый элемент определяется своим значением и номером места. Возможно брать несколько элементов, которые определяются одним и тем же значением и номерами мест.

3. *Декомпозиция задачи.* Нет одной простой комбинаторной модели, которая отвечает задаче, и генерация чисел при помощи одной последовательности действий, отвечающих правилу умножения, невозможна. Заметим также, что различных элементов базового множества всего 6 и потому в 7-значном числе должны быть повторяющиеся цифры. Поэтому разобьем искомое множество чисел на несколько непересекающихся подмножеств (для использования правила сложения), для каждого из которых можно будет найти количество его чисел одной комбинаторной моделью, быть может, в сочетании с генерацией (правилом умножения): A_k – k цифр из B_p (k=3, 4, 5).

4. *Обоснование правила сложения*: никакие 2 таких множества не пересекаются $A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i, j \in \overline{1, 5}, i \neq j)$, а их объединение есть все множество искомых чисел $A = \bigcup_3^5 A_k$.

5. *Декомпозиция задачи для множества* A_3: это множество содержит 3 цифры из B_p и все цифры B_n. Все цифры из B_p могут быть одинаковыми (подмножество A_{31}) и могут быть различными (подмножество A_{32}). Так как $A_3 = A_{31} \cup A_{32}$ и $A_{31} \cap A_{32} = \emptyset$, то $|A_3| = |A_{31}| + |A_{32}|$. Множество A_{31} можно сгенерировать следующим образом:

1. Выбор всех цифр из B_n – $C_4^4 = 1$ способ;

2. Определение повторяющейся цифры из B_p (определяется множество B_{p3} с 3 одинаковыми цифрами) – C_1^1=1 способ (только цифра 3 в исходном числе встречается 3 раза);

3. Перестановка цифр множества $B_n \cup B_{p3}$ – (перестановка с повторением) $C_7^{(3,1,1,1,1)} = = \frac{7!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способов.

Поскольку эти действия генерируют любое число из A_{31}, и только такое число, являются независимыми (определяют разные элементы комбинации) и независимы по числу способов каждого действия от предыдущих и поскольку любая генерация дает число из A_{31} и любое число из A_{31} может быть получено этой генерацией, то применимо правило умножения: $|A_{31}| = 1 \cdot 1 \cdot 840$.

Множество A_{32} можно сгенерировать следующим образом:

1. Выбор всех цифр из B_n – $C_4^4 = 1$ способ;

2. Выбор из B_p цифры, повторяющейся 2 раза, и цифры, повторяющейся 1 раз (определяется множество B_{p3} цифр из B_p), – $C_2^1 = 2$ способа;

3. Перестановка цифр множества $B_n \cup B_{p3}$ – (перестановка с повторением) $C_7^{(2,1,1,1,1,1)} = = \frac{7!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ способов.

Поскольку эти действия генерируют любое число из A_{32}, и только такое число, являются независимыми (определяют разные элементы комбинации) и независимы по числу способов каждого действия от предыдущих и поскольку любая генерация дает число из A_{32} и любое число из A_{32} может быть получено этой генерацией, то применимо правило умножения: $|A_{32}| = 1 \cdot 2 \cdot 2520 = 5040$.
Получаем $|A_3|$=840+5040=5880.

6. *Декомпозиция задачи для* A_4: это множество содержит 4 цифры из B_p и 3 цифры B_n. Цифры из B_p могут быть в равном количестве (подмножество A_{42}) и в разном количестве (подмножество A_{41}) Так как $A_4 = A_{41} \cup A_{42}$ и $A_{41} \cap A_{42} = \emptyset$, то $|A_4| = |A_{41}| + |A_{42}|$. Множество A_{41} можно сгенерировать следующим образом:

1. Выбор из B_p цифры, повторяющейся 3 раза, и цифры, повторяющейся 1 раз (определяется множество B_{p4} цифр из B_p) – $C_1^1 = 1$ способ;

2. Выбор из B_n 3 цифр (определяется множество B_{n4}) – (сочетание без повторения) $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ способа;

3. Перестановка цифр множества $B_{n4} \cup B_{p4}$ – (перестановка с повторением) $C_7^{(3,1,1,1,1)} = = \frac{7!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способов.

Поскольку эти действия генерируют любое число из A_{41}, и только такое число, являются независимыми (определяют разные элементы комбинации) и независимы по числу способов каждого действия от предыдущих и поскольку любая генерация дает число из A_{41} и любое число из A_{41} может быть получено этой генерацией, то применимо правило умножения: $|A_{41}| = 1 \cdot 4 \cdot 840 = 3360$.

Множество A_{42} можно сгенерировать следующим образом:

1. Определение множества B_{p4} из повторяющихся по 2 цифр множества B_p – $C_2^2 = 1$ способ;

2. Выбор из B_n 3 цифр (определяется множество B_{n4}) – (сочетание без повторения) $C_4^3 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$ способа;

3. Перестановка цифр множества $B_{n4} \cup B_{p4}$ – (перестановка с повторением) $C_7^{(2,2,1,1,1)} = = \frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 1260$ способов.

Поскольку эти действия генерируют любое число из A_{42}, и только такое число, являются независимыми (определяют разные элементы комбинации) и независимы по числу способов каждого действия от предыдущих и поскольку любая генерация дает число из A_{42} и любое число из A_{42} может быть получено этой генерацией, то применимо правило умножения: $|A_{42}| = 1 \cdot 4 \cdot 1260 = 5040$.
Получаем $|A_4|$=3360+5040=8400.

7. *Декомпозиция задачи для* A_5. Множество A_5 содержит множество с повторением 5 цифр из B_p (обозначим его B_{p5}) и 2 цифры B_n. Множество A_5 можно сгенерировать следующим образом:

1. Выбор из множества B_p всех цифр с учетом повторения – $C_5^5 = 1$ способ;

2. Выбор множества B_{n2} 2 цифр из B_n – (сочетание без повторения из 4 элементов B_n по 2) $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ способов;

3. Перестановка цифр множества $B_{n2} \cup B_{p5}$ – (перестановка с повторением) $C_7^{(3,2,1,1)} = = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 420$ способов.

Поскольку эти действия генерируют любое число из A_5 и только такое число, являются независимыми (определяют разные элементы комбинации) и независимы по числу способов каждого действия от предыдущих и поскольку любая генерация дает число из A_5 и любое число из A_5 может быть получено этой генерацией, то применимо правило умножения: $|A_5| = 6 \cdot 420 = 2520$.
Получаем $|A| = |A_3| + |A_4| + |A_5|$=5880+8400+2520=16800.

Ответ: *из цифр числа 393965321 можно составить 16800 7-значных чисел.*

Пример 13. Это пример 3-й задачи индивидуального задания № 5. *Каким числом способов можно выбрать 7 карт 3 мастей и 3 значений из полной колоды в 52 карты?*

Решение

1. *Анализ задачи.* Комбинация представляет собой множество пар: (значение, масть). При этом число различных мастей должно быть равно 3 и число различных значений также должно быть равно 3. Примерами комбинаций могут быть

{(Т,П), (Т,Б), (К,Ч), (К,Б), (Д,Ч), (Д,Б), (Д,П)} – 2 туза, 2 короля и 3 дамы мастей пики, бубны и червы;

{(Т,П), (Т,Б), (Т,Ч), (К,Б), (Д,Ч), (Д,Б), (Д,П)} – 3 туза, 1 король и 3 дамы мастей пики, бубны и червы.

Примерами, не являющимися комбинациями задачи, могут быть

{(Т,П), (Т,Б), (К,Ч), (К,Б), (Д,Ч), (Д,Б), (В,П)} – 2 туза, 2 короля, 2 дамы и 1 валет (4 значения) мастей пики, бубны и червы;

{(Т,П), (Т,Б), (К,Ч), (Д,Т), (Д,Ч), (Д,Б), (Д,П)} – 2 туза, 1 король и 4 дамы мастей пики, трефы, бубны и червы (4 масти).

{(Т,П), (Т,Б), (К,Ч), (К,Т), (Д,Ч), (Д,Б), (Д,П)} – 2 туза, 2 короля и 3 дамы мастей пики, трефы, бубны и червы (4 масти).

Анализ показывает, что одно из 3 значений обязательно имеет все 3 масти (3 значения по 2 масти каждая дадут только 6 различных карт). Могут также 2 значения иметь по 3 масти (3-е значение имеет только

1 карту). Но все 3 значения не могут иметь по 3 масти (это дает 9 различных карт).

2. *Способ представления*: множество из 7 пар (значение, масть), среди которых 1 или 2 значения имеют по 3 масти, а остальные значения имеют некоторые из этих 3 мастей.

3. *Декомпозиция задачи* может быть произведена при помощи генерации комбинаций следующими действиями:

1. Выбор 3 значений из 13 возможных – C_{13}^3 выборов (модель сочетаний из 13 по 3);

2. Выбор 3 мастей из 4 возможных – C_4^3 способов (модель сочетаний из 4 по 3);

3. Определение числа комбинаций множества K, для которого значения карт и масти уже определены – $|K|$ способов. Мы отложили эту часть задачи, так как это множество неоднородное (часть комбинаций имеет 1 значение с 3 мастями, а часть имеет 2 таких значения).

В примерах комбинаций, отвечающих условиям, 1-е действие выберет значения Т, К, Д (туза, короля и дамы), а 2-е действие выберет масти П, Б, Ч (пики, бубны и червы). Поскольку любую комбинацию из 3 мастей и 3 значений можно получить генерацией этих действий (и только такую комбинацию), действия независимы (определяют разные части комбинации) и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий, то можно применить правило умножения, которое дает $C_{13}^4 \cdot C_4^3 \cdot |K|$ таких комбинаций.

4. *Декомпозиция оставшейся части задачи* – разобьем множество K комбинаций, имеющих выбранные 3 масти и 3 значения, на 2 непересекающихся подмножества:

1) K_1, каждая комбинация которого имеет ровно 1 значение всех 3 мастей;

2) K_2, каждая комбинация которого имеет ровно 2 значения, каждое из которых имеют по 3 карты всех 3 мастей.

Так как $K = K_1 \cup K_2$ и $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, то выполнены условия для правила сложения: $|K| = |K_1| + |K_2|$.

Комбинация подмножества K_1 содержит 1 значение 3 мастей (для этого значения масти уже определены). 2 других значения имеют по 2 масти каждое. Генерацию K_1 произведем следующими действиями:

1. Определение значения, имеющего 3 масти – C_3^1 выборов (модель выбора 1 значения из 3 значений);

2. Размещение мастей для каждого значения, имеющего 2 масти, – $\overline{A}^2_{C_3^2} = (C_3^2)^2$ способов (модель размещения пар мастей по 2 местам-значениям).

Комбинацию {(Т,Б), (Т,Ч), (К,Б), (К,Ч), (Д,П), (Д,Б), (Д,Ч)} можно получить, выбирая 1-м действием значения Д, затем размещая 2-м действием масти {Б, Ч} для короля и для туза. Масти для дамы уже определены – все 3 {П, Б, Ч}. Комбинацию {(Т,П), (Т,Ч), (К,Б), (К,Ч), (Д,П), (Д,Б), (Д,Ч)} можно получить, выбирая 1-м действием значение Д, затем размещая 2-м действием пару мастей {П, Ч} для туза и пару мастей {Б, Ч} для короля. Масти для дамы уже определены – все 3 {П, Б, Ч}. Поскольку любая генерация этими действиями дает комбинацию из K_1, любую комбинацию из K_1 можно получить генерацией этими действиями (и только такую комбинацию), действия независимы (определяют разные части комбинации) и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий, то можно применить правило умножения, которое дает $|K_1| = C_3^1 \cdot (C_3^2)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$ таких комбинаций.

Комбинация подмножества K_2 содержит 2 значения 3 мастей (для каждого значения масти уже определены) и 1 значение 1-й масти. Ее генерацию произведем следующими действиями:

1. Определение значения, имеющего 1 масть (и 2 других значения, имеющих по 3 масти), – C_3^1 выборов (модель выбора из 3 значений одного);

2. Выбор масти для этого значения (имеющего 1 масть) – C_3^1 способов (модель выбора из 3 мастей 1 масти).

Комбинацию {(Т,П), (Т,Б), (Т,Ч), (К,Б), (Д,Ч), (Д,Б), (Д,П)} можно получить, выбирая 1-м действием значение К, затем выбирая 2-м действием масть Б для короля. Масти для дамы и туза уже определены – все 3 {П, Б, Ч}. Поскольку любая генерация этими действиями дает комбинацию из K_2, любую комбинацию из K_2 можно получить генерацией этими действиями (и только такую комбинацию), действия независимы (определяют разные части комбинации) и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий, то можно применить правило умножения, которое дает $C_3^1 \cdot C_3^1 = 3 \cdot 3 = 9$ таких комбинаций.

Теперь число элементов множества K, масти и значения комбинаций которого уже определены, получается по правилу сложения $|K| = 27 + 9 = 36$.

Остается подставить значение $|K| = 36$ в полученную выше формулу для числа всех комбинаций задачи

$C_{13}^4 \cdot C_4^3 \cdot |K| = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 \cdot 36 = 13 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 36 = 102960.$

Ответ: *7 карт 3 мастей с 3 значениями из полной колоды в 52 карты можно выбрать 102960 способами.*

Замечание. Количество комбинаций множества K для данной задачи можно найти гораздо проще, если заметить, что существует 9 карт 3 значений и 3 мастей, из которых надо взять 7 карт по условиям задачи. Отброшенные 2 карты не уменьшают число значений, так как 2 значения 3 мастей составляют 6 карт, что меньше 7. По аналогии, отброшенные 2 карты не уменьшают числа мастей в оставшейся совокупности из 7 карт. Поэтому $|K| = C_9^7 = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$, что и было получено.

Пример 14. *Каким числом способов можно рассадить n человек за круглым столом?*

Решение

1. *Анализ задачи.* Эта задача очень похожа на задачу о числе способов расставить в шеренгу n человек, которая определяется числом перестановок (так как любые различные комбинации отличаются порядком расположения людей в шеренге, т. е. порядком, при котором для кого-нибудь будет отличаться сосед слева или справа). При рассадке за круглым столом две комбинации также отличаются порядком расположения людей, при котором для кого-нибудь будет отличаться сосед слева или справа, но при расстановке в шеренгу есть человек, который не имеет соседа слева (а также человек, который не имеет соседа справа), а при рассадке за круглым столом такого человека нет,

если $n > 1$: для любого человека, сидящего за круглым столом, есть сосед как слева, так и справа. Таким образом, при рассадке за круглым столом нет двух крайних людей, которые есть при расстановке в шеренгу.

2. *Способ представления.* Пронумеруем людей от 1 до n. Каждую рассадку за круглым столом можно описать как циклическую последовательность, начинающуюся с любого номера от 1 до n и им заканчивающуюся. Например, (5, 3, 1, 4, 2, 5). Но такой рассадке соответствует и цикл (3, 1, 4, 2, 5, 3), т. е. цикл можно начинать с любого номера, например с первого. Тогда в последовательности, соответствующей циклу, мы можем не повторять в конце последовательности элемент 1. Например, последовательность (1, 4, 2, 5, 3) однозначно представляет указанную ранее циклическую последовательность. И наоборот, любой циклической последовательности соответствует вектор, начинающийся с 1. Полученное 1-1с между множеством рассадок за круглым столом и множеством векторов длины n, начинающихся с элемента 1, дает хороший способ описания рассадок.

3. *Сведение к комбинаторной модели.* Полученный способ представления подсказывает и выбор комбинаторной модели, поскольку каждому n-мерному вектору v ($n > 1$), начинающемуся с 1, соответствует $(n-1)$-мерный вектор w, состоящий из компонент v, начиная со второй. Это 1-1с, а потому число различных n-мерных векторов с различными элементами, начинающихся с 1, такое же, как число различных $(n-1)$-мерных векторов, содержащих $n-1$ различных номеров от 2 до n. Так как число последних определяется числом *перестановок без повторения* из $(n-1)$-го элемента, то способов получить различные циклические последовательности из n элементов $(n-1)!$.

Ответ: *n человек за круглым столом можно рассадить $(n-1)!$ способами.*

Пример 15. *Каким числом способов можно раздать 3 игрокам 12 карт (4 туза, 4 короля и 4 дамы), чтобы каждый получил по 4 карты всех значений?*

Решение

1. *Анализ задачи.* Поскольку каждый из игроков имеет по 4 карты всех 3 значений, то одно из значений должно у него повторяться. У 2

игроков не может повторяться одно и то же значение, так как тогда 3-й игрок не сможет иметь этого значения, что противоречит условию задачи. Таким образом, каждый игрок имеет 1 повторяющееся значение и оно различно для разных игроков.

2. *Способ представления* Все игроки различны, поэтому каждая комбинация определяется 3-мерным вектором, элементы которого представляют собой множество из 4 пар значение-масть, содержащее все 3 значения Т, К, Д, одно из которых должно повторяться, причем для разных игроков – различное значение. Например, ({(Т,п), (Т,б), (К,б), (Д,ч)}, {(Т,т), (К,ч), (К,т), (Д,п)}, {(Т,ч), (К,п), (Д,т), (Д,б)}).

3. *Декомпозиция задачи.* Ее можно проводить разными способами:

1) определяя карты сначала для 1-го игрока, затем для 2-го (оставшиеся для 3-го);

2) распределяя карты каждого значения между 3 игроками и определяя их масти.

В первом способе меньше однородности, так как после определения карт первого игрока мы должны учитывать выбранные для него карты при определении карт второго игрока. Поэтому выберем второй способ и определим следующую последовательность действий генерации комбинации:

1. Определение для каждого из значений {Т, К, Д} игрока, который получает 2 карты этого значения (а остальные значения по одному), – 3! способов.

   Покажем это. Каждый вектор 3 значений (Т, К, Д) определяет вектор номеров игроков, получающих по 2 карты соответствующего значения. В примере это (1, 2, 3) – игрок 1 получает 2 туза, игрок 2 – 2 короля, а игрок 3 – 2 дамы. Каждая перестановка вектора (1, 2, 3) определяет распределения значений 4 карт для каждого игрока (функция прямого соответствия однозначна, всюду определена), и каждому распределению 4 карт для каждого игрока однозначно соответствует такой вектор (функция обратного соответствия однозначна, всюду определена), и эти функции взаимно-обратны. Поэтому из установленного 1-1с следует, что число различных распределений значений карт между игроками определяется числом перестановок 3 различных номеров;

2. Определение мастей тузов, которые получает каждый игрок, – $C_4^{2,1,1}$ способов.

   Покажем это. Зафиксируем порядок мастей (например, (*п*, *т*, *б*, *ч*)) для каждого из значений. И тогда вектор (i_1, i_2, i_3, i_4), где $i_j \in \overline{1,3}$, определяет номер игрока, который получает соответствующую масть туза. (Так, в примере для тузов распределение мастей определяется вектором (1, 2, 1, 3), означающим, что масти тузов *п* и *б* для игрока 1, масть *т* для игрока 2 и масть *ч* для игрока 3). Поэтому число различных распределений мастей тузов определяется числом перестановок с повторением номеров игроков, где 1 из номеров в перестановку входит дважды, а 2 другие по одному, то есть $C_4^{2,1,1}$;

3. Определение мастей королей, которые получает каждый игрок, – $C_4^{2,1,1}$ способов (аналогично предыдущему);

4. Определение мастей дам, которые получает каждый игрок, – $C_4^{2,1,1}$ способов (аналогично предыдущему).

Поскольку любая генерация определяет комбинацию, удовлетворяющую условиям задачи, и любая комбинация, удовлетворяющая условиям задачи, может быть получена этой генерацией (и только одной), действия независимы, так как определяют разные части комбинации, и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий, то можно применить правило умножения. В результате получим:

$$3! \cdot (C_4^{2,1,1})^3 = 3! \cdot \left(\frac{4!}{2!}\right)^3 = 6 \cdot (12)^3 = 6^4 \cdot 2^3 = 1296 \cdot 8 = 10368.$$

Ответ: *имеется 10368 способов раздать 3 игрокам по 4 карты 3 значений, чтобы каждый из игроков содержал бы все карты разных значений.*

Пример 16. *Каким числом способов можно разделить колоду из 12 карт (4 туза, 4 короля и 4 дамы) пополам (по 6 карт), чтобы в каждой из половин число тузов, королей и дам было различным?*

Решение

1. *Анализ задачи и способ представления.* Каждая из половин колоды представляет собой неупорядоченное множество 6 карт из 12, но выбор 6 карт в одну половину автоматически определяет и вторую половину. Например, выбор карт {(Т,п), (К,б), (К,п), (Д,т), (Д,б), (Д,ч)} одной половины определяет карты {(Т,т), (Т,б), (Т,ч), (К,т), (К,ч), (Д,п)} второй половины. Но тогда выбор в одну половину карт {(Т,т), (Т,б), (Т,ч), (К,т), (К,ч), (Д,п)} приводит к тому же способу разделить карты пополам, так как при этом не определяются номера половин. Если в одной из половин число каких-либо 2 разных значений будет различно, то и в другой половине оно будет различным для этих значений. Так как это справедливо для любого способа выбрать 6 различных карт в одну половину с различным числом карт каждого значения, то из этого следует, что число способов выбрать 6 карт различных чисел для каждого значения в 2 раза больше, чем число способов разделить колоду 12 карт на 2 половины.

2. *Декомпозиция задачи.* Итак, мы свели задачу к определению числа выборов 6 карт с различным числом значений. Но, пытаясь определить действия, генерирующие каждую комбинацию, мы сталкиваемся с проблемой зависимости действий от числа значений: выбор карт какого-либо значения зависит от числа карт уже выбранных значений. Если одно из значений имеет 4 карты, то другое значение может иметь только 2 карты, а третье – не имеет карт совсем. Если же одно из значений имеет 3 карты, то число карт 2 других значений определяются как 2 и 1. Поэтому можно множество K всех комбинаций, удовлетворяющих условиям задачи, разбить на 2 подмножества $K_{3,2,1}$ и $K_{4,2,0}$. Так как $K = K_{3,2,1} \cup K_{4,2,0}$ и $K_{3,2,1} \cap K_{4,2,0} = \emptyset$, то можно применить правило сложения $|K| = |K_{3,2,1}| + |K_{4,2,0}|$.

Генерацию комбинаций множества $K_{3,2,1}$ с 3 числами значений можно определить следующей последовательностью действий:

1. Размещение 3 значений (Т, К, Д) по числам значений (1, 2, 3) – 3! способов (модель перестановки без повторений из 3 элементов);

2. Выбор масти для значения, имеющего 1 карту, – C_4^1 способов (модель сочетаний из 4 по 1);

3. Выбор мастей для значения, имеющего 2 карты, – C_4^2 способов

(модель сочетаний из 4 по 2);

4. Выбор мастей для значения, имеющего 3 карты, – C_4^3 способов (модель сочетаний из 4 по 3).

Поскольку любая генерация определяет комбинацию из этого множества, любую комбинацию из множества $K_{3,2,1}$ можно получить генерацией этими действиями (и единственным способом), действия независимы (определяют разные части комбинации) и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий, то можно применить правило умножения, что дает $|K_{3,2,1}| = 3! \cdot C_4^1 \cdot C_4^2 \cdot C_4^3 = 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = 576$.

Генерацию комбинаций множества $K_{4,2,0}$ с 3-мя числами значений можно определить следующей последовательностью действий:

1. Размещение 3-х значений (Т, К, Д) по числам значений (0, 2, 4) – 3! способов (модель перестановки без повторений из 3 элементов).

2. Выбор мастей для значения, имеющего 2 карты, – C_4^2 способов (модель сочетаний из 4 по 2).

3. Выбор мастей для значения, имеющего 4 карты, – 1 способ.

Поскольку любая генерация определяет комбинацию из этого множества, любую комбинацию из множества $K_{4,2,0}$ можно получить генерацией этими действиями (и единственным способом), действия независимы (определяют разные части комбинации) и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий, то можно применить правило умножения, что дает $|K_{4,2,0}| = 3! \cdot C_4^2 \cdot 1 = 6 \cdot 6 = 36$.

Теперь, применяя правило сложения, получим $|K| = 576 + 36 = 612$, и, учитывая замечание при анализе задачи, мы должны это число комбинаций разделить пополам.

Ответ: *имеется 306 способов разделить колоду из 12 карт пополам, чтобы в каждой половине число карт различных значений было неодинаково.*

Пример 17. *При каких условиях и каким числом способов можно расположить в ряд различимые только цветом p белых шаров и q черных шаров, чтобы никаких 2 черных шара не лежали рядом?*

Решение

1. *Анализ задачи и способ представления.* Представим белый шар единицей, а черный – нулем. Тогда каждой комбинации требуемого расположения черных и белых шаров отвечает последовательность из нулей и единиц, в которой никакие 2 нуля не находятся рядом. Такая последовательность определяется местами, где находятся единицы и нули. Если мы расположим единицы с промежутками перед ними, после них и между ними, то только в такие промежутки можно будет вставлять по 1 нулю (напомним, никакие 2 нуля не могут находиться рядом). Таких промежутков $p+1$. Поэтому условием решения задачи должно быть $q \leq p+1$. Так, например, при $p=3$ q может быть равно 0, 1, 2, 3, 4 и такое расположение дают, например, последовательности 111, 0111, 1011, 1110, 01011, 010101, 0101010.

2. *Выбор и обоснование комбинаторной модели.* Итак, имеются только $p+1$ место по отношению к единицам, на которых могут находиться q $(q \leq p+1)$ нулей. Всего различных выборов мест C_{p+1}^{q}. Каждому выбору таких мест отвечает некоторая комбинация расположения нулей и единиц, отвечающая условиям задачи. Например, при $p=3,\ q=2$ выбору мест $\{1,\ 4\}$ отвечает расположение нулей на 1-м и 4-м местах (01 1 10), а выбору мест $\{2,\ 3\}$ отвечает расположение нулей на 2-м и 3-м местах (10101). Установим соответствие f между множеством сочетаний мест из $(p+1)$-го по q и множеством расположения нулей и единиц, отвечающих условию задачи, при котором нули стоят на местах перед, между и после единиц, определяемых сочетанием мест. Такое соответствие f функционально (однозначно определяет расположение нулей), всюду определено (по любому сочетанию мест определяется расположение нулей), разным аргументам-сочетаниям соответствуют разные расположения нулей относительно единиц и, наконец, обратное соответствие f^{-1} всюду определено (разным расположениям нулей и единиц соответствуют разные сочетания мест, определяемых единицами). Поэтому f является 1-1с. Число расположений q нулей и p единиц, при котором нули не стоят рядом, равно C_{p+1}^{q}.

Ответ: *имеется C_{p+1}^{q} способов расположить p белых и q $(q \leq p+1)$ черных шаров в ряд, при которых никакие 2 черных шара не лежат рядом.*

Пример 18. *Каким числом способов можно за круглым столом рассадить 8 юношей и 5 девушек так, чтобы никакие 2 девушки не сидели рядом?*

Решение

Анализ задачи и ее решение. Эта задача похожа на предыдущую, но в отличие от нее все юноши и все девушки различаются, а также располагаются не в ряд, а по кольцу, которое не имеет начала и конца. Из решения задачи примера 14 следует, что существует 7! расположений юношей по кольцу. Между расположением юношей имеются 8 мест, на которые нам необходимо рассадить девушек.

Мы можем для начала выбрать расположение какого-нибудь определенного юноши и тогда отсчитывать места по часовой стрелке от него. Нам необходимо разместить 5 различных девушек на места из 8 мест. Здесь задача о размещениях без повторений, где роль мест играют девушки, а роль размещаемых элементов играют места. Действительно, каждому размещению из 8 элементов на 5 местах мы можем поставить в соответствие определение из 8 мест-промежутков между юношами тех 5, на которые рассаживаются девушки. Это 1-1с: оно однозначно, всюду определено, а также обратное соответствие однозначно и всюду определено. Задача о размещении из 8 элементов на 5 местах имеет A_8^5 способов. Таким образом мы описали генерацию каждой комбинации следующими действиями:

1. Размещение за круглым столом 8 юношей – 7! способов (модель перестановок без повторения из 7 элементов);
2. Размещение между юношами на 8 мест 5 девушек – A_8^5 способов (модель размещений без повторения из 8 по 5).

Например, действие 1 дает расположение (1,5,3,4,2,6,7,8) юношей по кругу, начиная от Ю1: (Ю1, Ю5, Ю3, Ю4, Ю2, Ю6, Ю7, Ю8). 2-е действие дает расположение мест для девушек (5,3,8,2,7) и размещение на них девушек между юношами (Ю1, Ю5, Д4, Ю3, Д2, Ю4, Ю2, Д1, Ю6, Ю7, Д5, Ю8, Д3). Любую комбинацию можно получить этими действиями (и никакую другую), действия независимы (определяют разные части комбинации) и независимы по числу способов от выборов предыдущих действий. Поэтому по правилу умножения получаем $7! \cdot A_8^5 = 7! \cdot \frac{8!}{3!} = 5040 \cdot 6720 = 33868800$.

Ответ: *имеется 33868800 способов рассадить 8 юношей и 5 девушек за круглым столом, при которых никакие девушки не сидят рядом.*

17. Использование формулы включений и исключений при решении комбинаторных задач

Решение некоторых комбинаторных задач может быть более просто получено с использованием формулы включений и исключений. Рассмотрим 2 примера.

Пример 19. *Какими числом способов можно расставить на шахматной доске 8 ладей, чтобы они не били друг друга и не стояли на белой диагонали?*

Решение

Анализ задачи. Эта задача похожа на задачу примера 5, но в той задаче не было ограничения, исключающего белую диагональ. Мы имеем множество A из 8! способов размещения ладей, включая белую диагональ. Нам нужно найти подмножество A_0 комбинаций, при которых ладьи не стоят на белой диагонали. Дополнение D этого множества A_0 до множества A является множеством $\overline{A_0} = D$ комбинаций, которые обязательно включают расположение ладей на белой диагонали

Решение задачи. Обозначим через D_i $(i \in \overline{1,8})$ подмножество комбинаций, которые имеют ладью на i-й вертикали белой диагонали. По формуле включений и исключений

$$|D| = |\bigcup_{i=1}^{8} D_i| = \sum_{i=1}^{8} |D_i| - \sum_{p=2}^{8} (-1)^p \sum_{i_1 < \cdots < i_p} |D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_p}|.$$

Найдем число элементов этих подмножеств:

$|D_i| = 7!$, так как после вычеркивания i-х строки и столбца клетки белой диагонали, на которой находится ладья, расположение остальных ладей определяется на остальной части шахматной доски 7×7;

$|D_{i_1} \cap D_{i_2}| = 6!$, так как после вычеркивания i_1-х и i_2-х строк и столбцов клеток белой диагонали, на которой находятся ладьи, расположение остальных ладей определяется на остальной части шахматной доски 6×6 и т. д.;

$|D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_p}| = (8-p)!$ $(p \in \overline{3,8})$, так как после вычеркивания i_1-х, …, i_p-х строк и столбцов клеток белой диагонали, на которой находятся ладьи, расположение остальных ладей определяется на остальной части шахматной доски $(8-p) \times (8-p)$.

Подставляя эти значения в формулу включений и исключений для D, получим:

$$|D| = 8 \cdot 7! - C_8^2 \cdot 6! + C_8^3 \cdot 5! - C_8^4 \cdot 4! + C_8^5 \cdot 3! - C_8^6 \cdot 2! + C_8^1 \cdot 1! - C_8^0 \cdot 0! =$$
$$= 8! - \tfrac{8!}{2!} + \tfrac{8!}{3!} - \tfrac{8!}{4!} + \tfrac{8!}{5!} - \tfrac{8!}{6!} + \tfrac{8!}{7!} - \tfrac{8!}{8!} =$$
$$= 40320 - 20160 + 6720 - 1680 + 336 - 56 + 8 - 1 = 25487.$$

Теперь искомое число комбинаций является дополнением D, которое мы и ищем: $|A_0| = 8! - |D| = 14833$.

Ответ: *имеется 14833 способа расставить 8 ладей на шахматной доске, исключая белую диагональ, при которых никакие 2 ладьи не бьют друг друга.*

Пример 20. *Сколько существует неотрицательных целых чисел меньше* 10^6, *содержащих все цифры 1, 2, 3, 4?*

Решение

Обозначим через A множество чисел меньше 10^6. $|A| = 10^6$.

Обозначим через A_i $(i \in \overline{1,4})$ подмножество множества A чисел, не содержащих цифру i. Поэтому $|A_i| = 9^6$.

$A_{i_1} \cap A_{i_2}$ не содержит цифр i_1 и i_2, и потому $|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = 8^6$.

Аналогично получаем $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = 7^6$ и $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 6^6$. Дополнение $\overline{A_i}$ содержит цифру i, поэтому нам нужно найти количество чисел множества $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}$. Так как $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, то для получения результата необходимо найти $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ по формуле включений и исключений:

$$|\bigcup_{i=1}^4 A_i| = \sum_{i=1}^4 |A_i| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 4} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$
$$4 \cdot 9^6 - 6 \cdot 8^6 + 4 \cdot 7^6 - 6^6 = 2125764 - 1572864 + 470596 - 46656 = 976840.$$

Поэтому получаем $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 10^6 - 4 \cdot 9^6 + 6 \cdot 8^6 - 4 \cdot 7^6 + 6^6 =$

$1000000 - 2125764 + 1572864 - 470596 + 46656 = 23160.$

Ответ: *существует 23160 неотрицательных целых чисел, меньших* 10^6*, содержащих все цифры 1, 2, 3, 4.*

18. Литература

1. Андерсон, Джеймс. Дискретная математика и комбинаторика – Discrete Mathematics with Combinatorics / Дж. Андерсон – М.: «Вильямс», 2006. – 960 с.

2. Виленкин, Н. Я. Популярная комбинаторика / Н. Я. Виленкин – М.: Наука, 1975.

3. Ерош, И. Л. Дискретная математика. Комбинаторика / И. Л. Ерош – СПб.: СПбГУАП, 2001. – 37 с.

4. Липский, В. Комбинаторика для программиста / В. Липский – М.: Мир, 1988. – 213 с.

Учебное издание

Рублев Вадим Сергеевич

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

(индивидуальные работы № 2 и 3 по дисциплине
«Дискретная математика»)

Учебно-методическое пособие

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерная верстка В. С. Рублев

Подписано в печать 28.02.2018 Формат $60\times84/16$.
Усл. печ. л. 6,0. Уч.-изд. л. 6,0.
Тираж 3 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.