МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Кафедра квантовой статистики и теории поля

Курсовая работа

Решение задачи трассировки пучка заряженных частиц в магнитном поле.

Выполнил студент

группы: 205

Болонкин Егор Владиславович

Научный руководитель:

профессор Перепёлкин Е. Е.

Москва

2024

1. Аннотация

В данной работе рассмотрено движение пучка релятивистских частиц в электромагнитном поле - магнитном поле создаваемом конфигурацией соленоидов. Решена задача о нахождении поля соленоида в любой точке некоторой области пространства , а также найдены траектории движения в данном поле каждой частицы из пучка. Результатом работы является компьютерная программа , способная произвести трассировку пучка электронов в магнитном поле , создаваемом соленоидами.

Содержание

2. Введение

Магнитное поле (или магнитная индукция) — это векторное поле, которое оказывает силу на движущиеся заряженные частицы. Источниками магнитного поля могут быть постоянные магниты, электрические токи и изменяющиеся электрические поля. Когда заряженная частица движется в магнитном поле, на неё действует сила Лоренца.

В релятивистском случае выражение для силы Лоренца остаётся тем же, но энергия и импульс частицы уже не связаны классическим образом.

Изучение движения релятивистских частиц в магнитных полях имеет важные применения в физике элементарных частиц, астрофизике и инженерии. Например, в ускорителях частиц, таких как Большой адронный коллайдер (LHC), сильные магнитные поля используются для управления траекториями высокоэнергетичных частиц.

Взаимодействие множества релятивистских частиц в магнитных полях усложняет динамику системы, так как необходимо учитывать не только взаимодействие каждой частицы с магнитным полем, но и взаимодействие частиц между собой.

Коллективные эффекты

В многочастичных системах коллективные эффекты могут существенно влиять на динамику. Примеры таких эффектов включают:

Плазма: В плазме, состоящей из большого числа заряженных частиц, взаимодействие между частицами (в первую очередь электростатическое) играет важную роль. Плазма в магнитном поле демонстрирует сложное поведение, включая явления, такие как магнитогидродинамическая нестабильность и альвеновские волны.

Взаимодействие частиц: Взаимодействие между частицами может приводить к рассеянию, что изменяет их траектории и энергию. В релятивистских плазмах такие взаимодействия могут включать кулоновское рассеяние и обмен фотонами.

В ускорителях частиц и астрофизических объектах часто встречаются релятивистские пучки частиц. Пучки частиц, движущиеся в одном направлении с высокой скоростью, могут иметь свои собственные коллективные эффекты и взаимодействия:

Электронные пучки: Релятивистские электронные пучки, движущиеся в магнитных полях, используются для генерации синхротронного излучения. Взаимодействие между электронами в пучке может вызывать такие явления, как пространственный заряд и пучковые неустойчивости.

Таким образом, исследование многочастичных систем в магнитных полях является важным направлением в современной физике, которое сочетает теоретические исследования, численные модели и экспериментальные данные для понимания сложных взаимодействий в природе и технике.

3. Моделирование поля в соленоиде.

В качестве модели для соленоида было решено взять конечный цилиндрический слой ,считая , что провода обмотки плотно прилегают друг к другу и их толщина много меньше толщины слоя , также считалось что J везде одинаков .

Для расчёта поля , создаваемого объёмными токами в точке μ ,воспользуемся формулой Био-Савара-Лапласа :

$$\vec{H}(\mu) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\left[\vec{J}, \overrightarrow{r_{\mu p}}\right]}{r_{\mu p}^3} dV$$

Если посчитать это векторное произведение и потом перейти в цилиндрическую систему координат , то получатся следующие выражения для компонент поля:

$$\begin{aligned} H_r(P) &= \frac{J}{4\pi}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{j+k}\cdot Hc_r\left(R_j, Z_k, \phi_{PC}\right) \\ H_t(P) &= \frac{J}{4\pi}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{j+k}\cdot Hc_t\left(R_j, Z_k, \phi_{PC}\right) \\ H_z(P) &= \frac{J}{4\pi}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{j+k}\cdot Hc_z\left(R_j, Z_k, \phi_{PC}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

где выражения для Hc_r , Hc_t , Hc_z имеют вид:

$$Hc_r\left(R_j, Z_k, \phi_{PC},\right) = \int_{-\phi_{PC}}^{2\pi-\phi_{PC}} \cos\psi\cdot\sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}\,d\psi +$$
$$+\int_{-\phi_{PC}}^{2\pi-\phi_{PC}} R_{PC}\cos^2(\psi)\cdot\ln\left(\left(R_j - R_{PC}\cos(\psi)\right) + \sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}\right)d\psi$$

$$Hc_t\left(R_j, Z_k, \phi_{PC}\right) = \int_{-\phi_{PC}}^{2\pi-\phi_{PC}} \sin(\psi)\cdot\sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}d\psi +$$

$$+\int_{-\phi_{\varphi C}}^{2\pi-\phi_{PC}} R_{PC}\cos(\psi)\sin(\psi)\cdot\ln\left(\left(R_j - R_{PC}\cos(\psi)\right) + \sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}\right)d\psi$$

$$Hc_z\left(R_j, Z_k, \phi_{PC}\right) = \int_{-\phi_{PC}}^{2\pi-\phi_{PC}} -Z_k\cdot\ln\left[\left(R_j - R_{PC}\cos(\psi)\right) + \sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}\right]d\psi +$$

$$+\int_{-\phi_{PC}}^{2\pi-\phi_{PC}} -R_{PC}\cos(\psi)\cdot\ln\left(-Z_k + \sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}\right)d\psi +$$

$$+\int_{-\phi_{PC}}^{2\pi-\phi_{PC}} R_{PC}\sin(\psi)\cdot\text{arctg}\left(\frac{Z_k\left(R_j - R_{PC}\cos(\psi)\right)}{R_{PC}\sin(\psi)\sqrt{R_{PC}^2 - 2R_{PC}R_j\cos(\psi) + R_j^2 + Z_k^2}}\right)d\psi$$

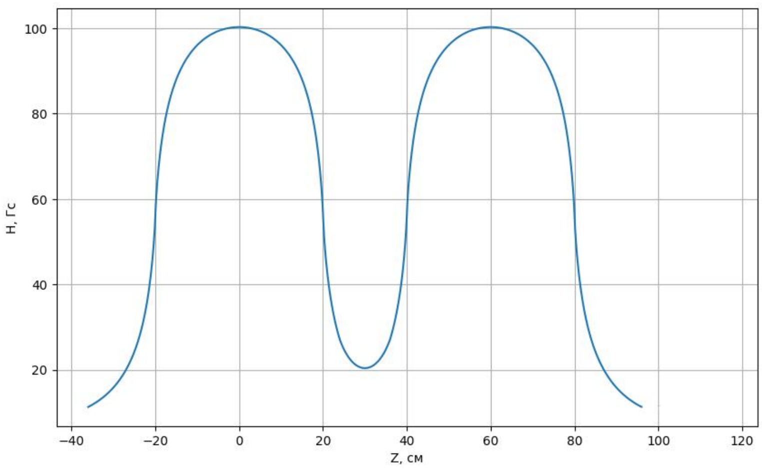
R_{PC}, Z_{PC}, $ф_{PC}$ - координата точки , в которой мы измеряем поле

$R_1 = R_C - a$; $R_2 = R_C + a$; $Z_1 = Z_{PC} + b$ $Z_2 = Z_{PC} - b$

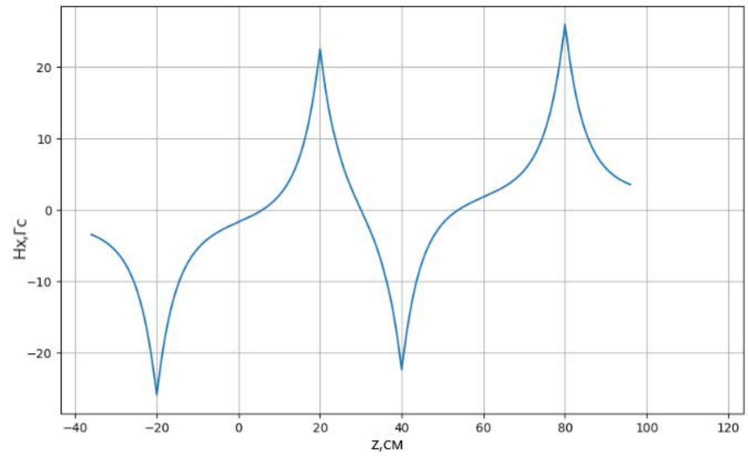
2a - толщина соленоида 2b - длинна соленоида , R_C - a и R_C+a радиусы внешней и внутренней поверхностей. R_C - радиус центра обмотки

Численно рассчитав интеграл можно получить поле в любой точке пространства , исключая , быть может , обмотки соленоида .

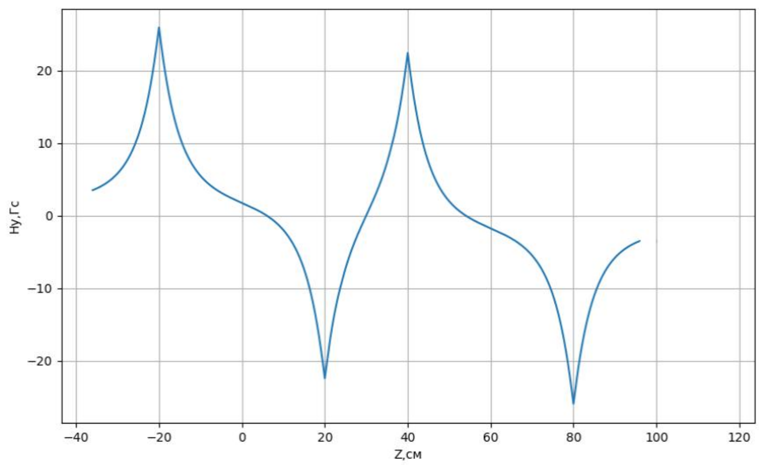
В данном случае расчёт проводился с помощью численного интегрирования . Вот графики зависимости проекций поля от координаты по оси z системы соленоидов поля на радиусе пуска пучка при угле $ф_{PC} = -\pi/4$:



a) График зависимости Hz(z).



b) График зависимости Hx(z).



c) График зависимости Hy(z).

4. **Постановка задачи.**

Для описания движения пучка релятивистских частиц в магнитном поле , составим уравнение движения . Запишем 2-ой Закон Ньютона в импульсной форме :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Запишем выражение для импульса релятивистской частицы

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v}$$

,где Лоренц-фактор

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Подставляя выражение для импульса в уравнение движения ,получаем следующее векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\gamma\frac{d\vec{v}}{dt} + m\frac{d\gamma}{dt}\vec{v}$$

Вычислим соответствующие производные и получим , что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\frac{d\vec{v}}{dt}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - m\vec{v}\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(-\frac{2v}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad [1]$$

Заменим вектор ускорения как сумму тангенциальной и нормальной компонент

$$\vec{a} \equiv a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} \quad , \quad \vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Подставим её в выражение [1] и после упростим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\left(a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m\vec{v}va_\tau}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{F} = \frac{ma_2\vec{\tau}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{ma_n\vec{n}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Теперь разложим силу на тангенциальную и нормальную составляющие

$$F_n\vec{n} + F_\tau\vec{\tau} = \gamma^3 ma_\tau\vec{\tau} + \gamma ma_n\vec{n}$$

Для решения и моделирования задачи необходимо выразить ускорение в явном виде . Для этого приравняем соответствующие компоненты , тогда ускорение будет иметь вид:

$$\vec{a} = \frac{F_n}{\gamma m}\vec{n} + \frac{F_\tau}{\gamma^3 m}\vec{\tau}$$

Для удобства введём матрицу перехода от приведённой силы к ускорению :

$$G = \begin{pmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta^3\end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\gamma}$$

Поскольку на частицу в магнитном поле действуют сила Лоренца и сила Кулона , вызываемая другими частицами пучка (различие по энергиям между частицами пучка мало), то 2-ой Закон Ньютона для j-ой частицы будет выглядеть следующим образом :

$$\ddot{\vec{x}}_j = G_j \cdot \vec{f}_j$$

,где приведённую силу и силу Кулона можно вычислить по формулам [2] и [3]

$$\vec{f}_j = \frac{q}{mc}\left[\dot{\vec{x}}_j\,, \vec{H}\left(\vec{x}_j\right)\right] + \frac{1}{m}\vec{F}_j \qquad [2]$$

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{\left(r_{ij}\right)^3} \vec{r}_{ij}, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{x}_j - \vec{x}_i$$

[3]

Теперь составим задачу Коши для получившегося дифференциального уравнения 2-ого порядка , задав дополнительно начальное положение и начальную скорость j-ой частицы :

$$\begin{cases} \ddot{\vec{x}}_j = G_j \cdot \vec{f}_j \\ \vec{x}_j\left(t_0\right) = x_j^0 \\ \dot{\vec{x}}_j\left(t_0\right) = v_j^0 \end{cases}$$

Для решения данной задачи Коши использовались методы Рунге-Кутты различных порядков (2) из библиотеки Pyton scipy (3) :

- RK23 : Явный метод Рунге-Кутты порядка 3(2). Этот метод использует пару формул Богацкого-Шампине (4). Ошибка контролируется, предполагая точность второго порядка метода, но шаги выполняются с использованием формулы третьего порядка точности (локальная экстраполяция). Для плотного вывода используется кубический полином Эрмита (5).

- RK45 : Явный метод Рунге-Кутты порядка 5(4). Для этого метода используется пара формул Дорманда-Принса (6) . Ошибка контролируется с предположением точности метода четвёртого порядка, но шаги выполняются с использованием формулы пятого порядка точности (локальная экстраполяция). Для плотного вывода используется интерполяционный полином четвёртой степени DOP853 : Явный метод Рунге-Кутты восьмого порядка точности

Также был самостоятельно реализован метод Рунге-Кутты 4-ого порядка точности.

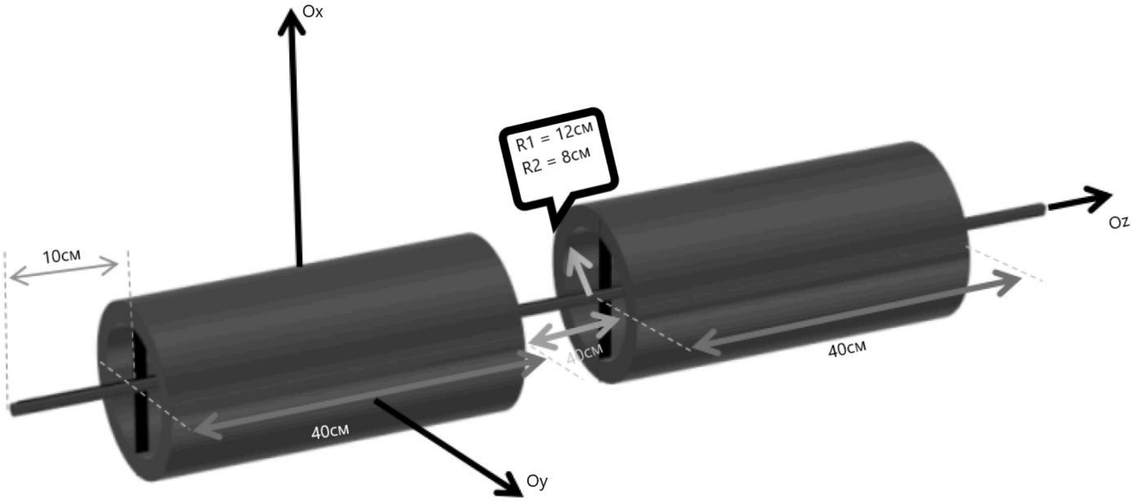
Для решения этими методами нужно переписать систему следующим образом :

$$\begin{cases} \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \\ \vec{a} = \frac{F_n}{\gamma m}\vec{n} + \frac{F_\tau}{\gamma^3 m}\vec{\tau} \\ \vec{v}\left(t_0\right) = \vec{v}_0 \\ \vec{x}\left(t_0\right) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

Качественного различия между решениями с использованием каждого из методов не выявлено, единственное ,что методам большей точности нужно меньше шагов , но время работы сравнимо.

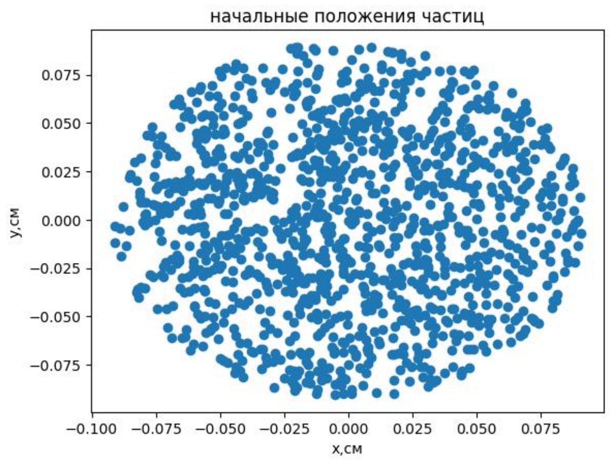
5. **Моделирование задачи и результаты исследования.**

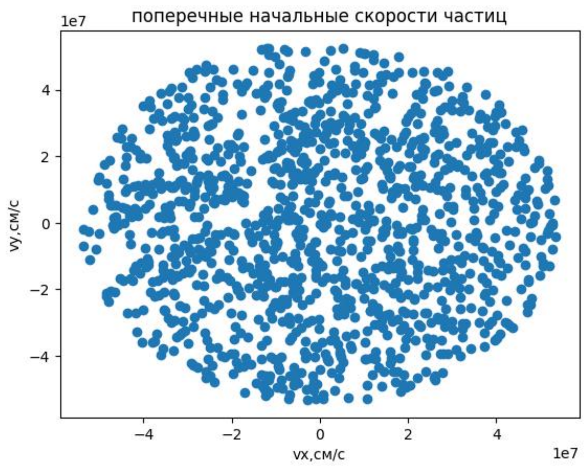
В качестве установки для трассировки пучка электронов была выбрана конструкция из двух одинаковых цилиндрических соленоидов , находящихся на расстоянии 40см , и на расстоянии 10см от первого соленоида . Координата центра первого соленоида 0 см. Поле в центре H = 92Gs .



По его оси запускается пучок частиц (на рисунке это жирная линия по центру) , заданных по нормальному распределению со средним 0 см и стандартным отклонением 0.091 см .Начальная энергия 480кэВ ,начальная скорость по оси z $v_z = 1.18e10$ см/с . В систему запускался C^{12}

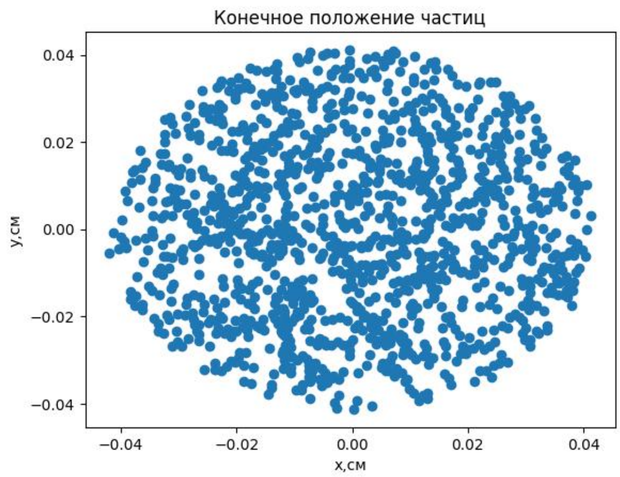
Ниже приведены начальные поперечные поперечные характеристики частиц .

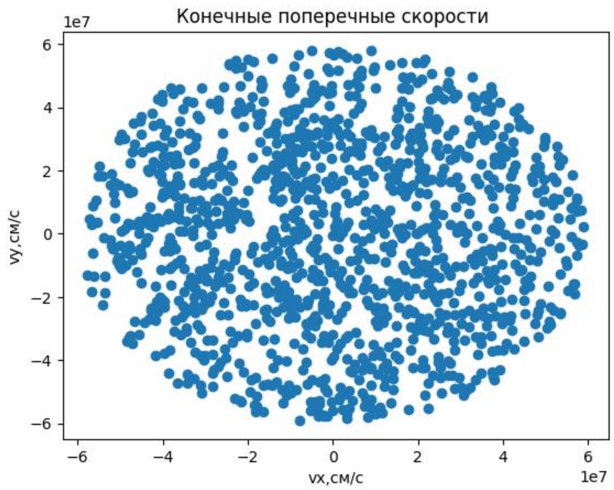




d) Начальные координаты в Oxy . e) Начальные скорости в Ov_xv_y.

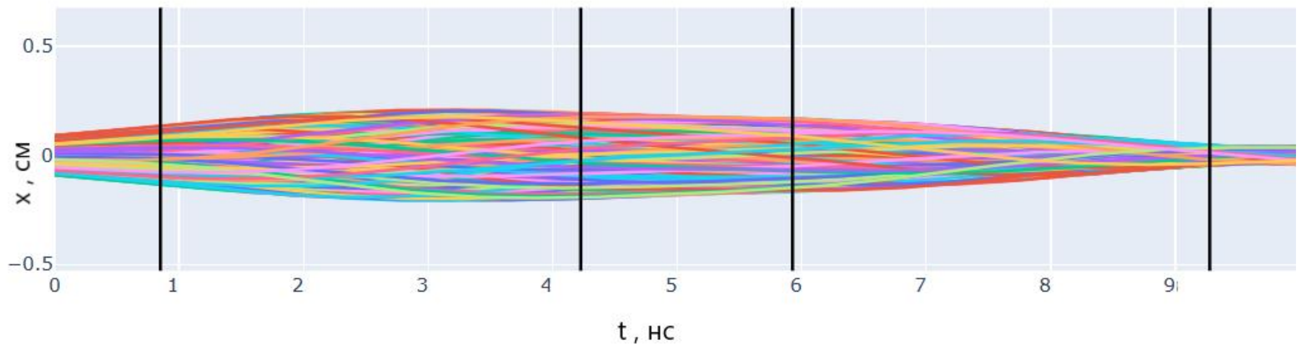
Ниже приведены результаты трассировки пучка в декартовых координатах



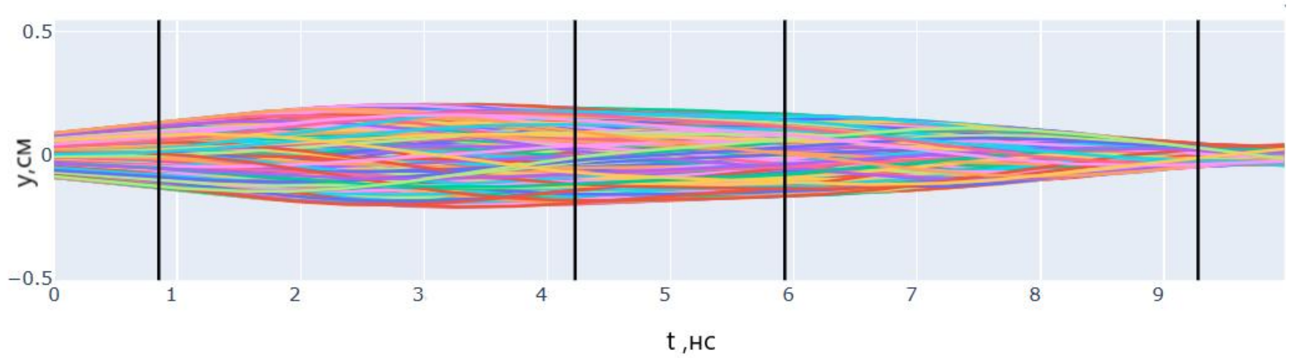


f) Конечные скорости частиц в Oxy. g) Конечные скорости частиц в Ov_xv_y.

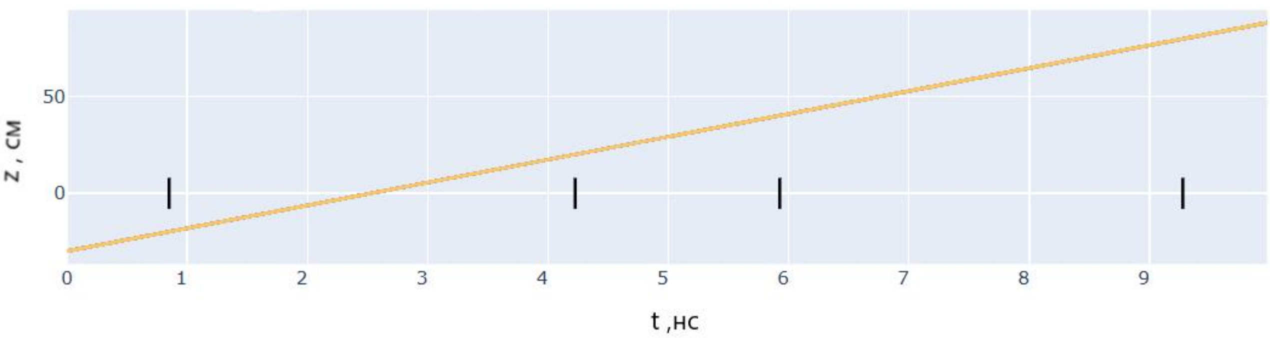
Каждому цвету соответствует отдельная частица , всего здесь 1250 частиц.



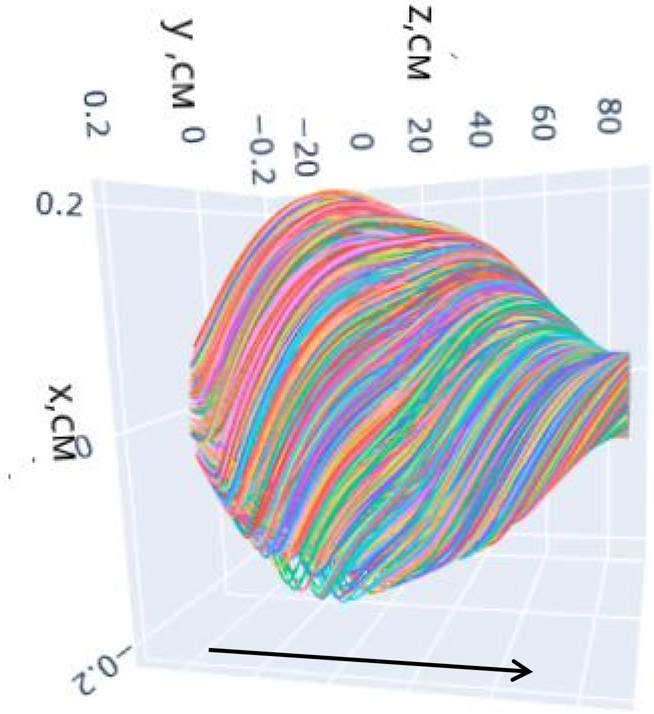
h) Проекция координаты частицы на ось X



i) Проекция координаты частицы на ось Y.



j) Проекция координаты на ось Z.



k) График траектории пучка частиц в трёхмерном пространстве . Направление движения частиц вдоль стрелки .

6. **Заключение.**

В результате выполнения работы была решена задача о трассировки пучка частиц через систему соленоидов с использованием компьютерной модели . Результатами моделирования стали графики зависимости проекций координат от времени а также график траектории. В дальнейшем планируется ,используя методы для моделирования многочастичных систем , что должно значительно ускорить программу , а значит позволит проводить трассировку для большего числа частиц.

7. **Список литературы.**

1) IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, том 21, номер 6, ноябрь 1985 года.

2) Бахвалов Н. ., Жидков Н. ., Кобельков Г. . Численные методы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 630 с. — ISBN 5-93208-043-4. — С. 363—375.

3) ttps://scipy.github.io/devdocs/

4) Богацкий, Перемышлав, Шампайн, Лоуренс Ф. (1989), «Пара формул Рунге-Кутты 3(2)», Письма по прикладной математике, **2** (4): 321–325, doi:10.1016/0893-9659(89)90079-7, ISSN 0893-9659.

5) Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. — М.: Мир, 2001. — 604 с. — ISBN 5-03-002143-4.

6) Дорманд, Дж.Р.; Принс,.Д. (1980). "Семейство встроенных формул Рунге-Кутты" . Журнал вычислительной и прикладной математики. **6** (1): 19–26. doi:10.1016/0771-050X(80)90013-3.

8. Приложение.

Ссылка на код :

https://colab.research.google.com/drive/1GFlegtTJbYN7CpBvHyhXd0M9yh2RhYku?usp=sharing

Код загружен на сайте Google Colab для его выполнения необходимо выполнить все ячейки результаты выполнения сохранены с предыдущего запуска , их можно посмотреть не выполняя код.