Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

1 Линейные уравнения 1-ого порядка (23.10)

Пример 1.

$$y' = y + x.$$

Решение. Решим однородное уравнение

$$y' = y.$$

$$y = C \cdot e^x$$

Пусть C – функция, подставим решение в исходное уравнение

$$C'(x) \cdot e^x + \cancel{C(x) \cdot e^x} = \cancel{C(x) \cdot e^x} + x$$

$$C'(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx$$

$$u = x \implies u' = 1, v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x}$$

$$C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c$$

So

$$y = (-e^{-x}(x+1) + c)e^x$$

$$y = -(x+1) + ce^x$$

Пример 2.

$$y' + 2y = y^2e^x$$

Решение. Разделим на y^2

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{y} + e^x$$

Выполним замену $z = \frac{1}{y}$, тогда $z' = -\frac{y'}{y^2}$ Тогда, подставляя в исходное уравнение, получаем

$$z' = 2z - e^x$$

Решением данного линейного уравнения является функция

$$z = (e^{-x} + c) \cdot e^{2x}$$

Тогда, возвращаясь к исходной переменной

$$y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + c}$$

Пример 3.

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

Решение. Уравнение имеет вид уравнения Рикатти.

Очевидно, что $y = -e^x$ – одно из решений. Тогда сделаем замену $z = y - e^x$.

$$z' + e^x = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x} + e^x,$$

$$z' + e^x = z^2 + 2e^x z + e^{2x} - 2e^x z - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x,$$

$$z' = z^2,$$

$$-\frac{1}{z} = x + c,$$

$$z = \frac{-1}{x + c}.$$

Тогда, возвращаясь к исходным переменным, получаем $y = e^x - \frac{1}{x+c}$.

2 Уравнения в полных дифференциалах

Пример 4.

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

Решение. Рассмотрим производные коэффициентов

$$(2 - 9xy^2)x'_y = -18x^2 y,$$

$$(4y^2 - 6x^3)y'_x = -18x^2 y.$$

Так как они совпадают, то по признаку это уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0:

$$u'_x(x, y_0) = 2x - 9x^2y_0^2 \implies u(x, y_0) = x^2 - 3x^3y_0^2 + c(y_0).$$

Подставляя в уравнение $u'_y = (4y^2 - 6x^3)y$, получаем

$$\left(x^2 - 3x^3y^2 + c(y_0)\right)'_y = (4y^2 - 6x^3)y,$$

$$-6x^3y + c'(y) = (4y^2 - 6x^3)y,$$
$$c'(y) = 4y^3,$$
$$c(y) = y^4 + c.$$

Таким образом, получаем функцию $u = x^2 - 3x^3y_0^2 + y^4 + c$. Тогда уравнение $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$ неявно задает решение нашего уравнения.

Замечание (Свойства дифференциала).

1. $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du_\beta dv$,
2. $du = d_x u + d_y u$,
3. $d_x u = d_x \left(u + \varphi(y)\right)$,
4. $\varphi(x, y)dx = d_x \left(\int \varphi(x, y)dx\right)$.

Замечание. Можно решать УПД, используя свойства дифференциала. Рассмотрим пример из лекции и попробуем решить его, упращая выражение по свойствам.

Пример 5.

$$e^{-y}dx - \left(xe^{-y} + 2y\right)dy = 0.$$

Решение. Раскроем скобки

$$e^{-y}dx - xe^{-y}dy - 2ydy = 0.$$

Пользуясь четвертым свойством, перейдем к

$$d_x(xe^{-y}) + d_y(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

Используя второе свойство, получим

$$d(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

По первому свойству

$$d(xe^{-y} - y^2) = 0.$$

Тогда общее решение будем неявно задаваться уравнением

$$xe^{-y} - y^2 = c.$$

Пример 6.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение.

$$2xydx + x^2dy - y^2dy = 0,$$

$$d_x\left(x^2y\right) + d_y\left(x^2y\right) - \frac{1}{3}dy^3 = 0,$$

$$d\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) = 0.$$

Тогда $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ неявно задает решение.

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0.$$

Решение.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}dx - dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}} = 0,$$

$$d_x\left(\sqrt{x^2-y^2}\right) - dx + d_y\left(\sqrt{x^2-y^2}\right) = 0,$$

$$d\sqrt{x^2-y^2} - dx = 0,$$

$$d\left(\sqrt{x^2-y^2} - x\right) = 0.$$

Тогда $\sqrt{x^2-y^2} - x = c$ неявно задает решение.

Пример 8. *Найти интегральный множитель*

$$\left(1 - x^2 y\right) dx + x^2 (y - x) dy = 0.$$

Решение. Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y \left(1 - x^2 y\right) - \mu x^2 = \mu'_x x^2 (y - x) + \mu \left(2xy - 3x^2\right).$$

Будем искать частное решение в виде $\mu = \mu(x)$.

$$\mu'_x x^2 (x - y) = 2\mu \left(xy - x^2\right),$$

$$\mu'_x x = -2\mu,$$

$$\mu = -\frac{1}{x^2}.$$

3 Метод введения параметра

Пример 9.

$$y = \left(y'\right)^2 e^{y'}.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} y' = v, \\ y = v^2 e^v. \end{cases}$$

Подставим в основное соотношение $dy = y'_x dx$

$$(2ve^v + v^2 e^v) dv = v dx,$$

$$(2 + v) e^v dv = dx,$$

$$x = e^v + ve^v + c.$$

Таким образом, ответом является $\begin{cases} x = e^v + ve^v + c, \\ y = v^2 e^v. \end{cases}$

Пример 10.

$$x^3 - (y')^3 = xy'.$$

Решение.

Замечание. Если кривая имеет уравнения вида $P(x, y) + Q(x, y) = 0$, где P, Q – однородные функции разной степени, то положив $y = xt$, получаем $x^\alpha P(1, t) + x^\beta Q(1, t) = 0$, откуда можно выразить x.

Используя предложенное в замечании, введем параметризацию $y' = xt$.

$$x^3 - (xt)^3 = x \cdot xt,$$

$$x = \frac{t}{1 - t^3},$$

$$y' = \frac{t^2}{1 - t^3}.$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$dy = \frac{t^2}{1 - t^3} \frac{1 - t^3 + 3t^3}{(1 - t^3)^2} dt,$$

$$dy = \frac{t^2(1 + 2t^3)}{(1 - t^3)^3} dt,$$

$$u = 1 + 2t^3 \implies u' = 6t^2$$

$$v' = \frac{t^2}{(1 - t^3)^3} \implies v = \frac{1}{6(1 - t^3)^2}$$

$$y = \frac{1 + 2t^3}{6(1 - t^3)^2} - \frac{1}{3(1 - t^3)} + c,$$

$$y = \frac{4t^3 - 1}{6(1 - t^3)^2} + c.$$

Пример 11.

$$y = 2xy' - (y')^2.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = 2uv - v^2. \end{cases}$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$2vdu + 2udv - 2vdv = vdu,$$

$$vdu = 2(v-u)dv,$$

$$u' = 2 - \frac{2u}{v},$$

$$u = \left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-2},$$

Тогда решением является

$$\begin{cases} x = \left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-2}, \\ y = 2\left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-1} - v^2. \end{cases}$$

4 Решение уравнений, не разрешенных относительно производной

Пример 12.

$$y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0.$$

Решение. Разложим левую часть на множители

$$\left(y' + x^3 + x\sqrt{x^4+4y}\right)\left(y' + x^3 - x\sqrt{x^4+4y}\right) = 0.$$

Рассмотрим варианты:

1. $y' + x^3 + x\sqrt{x^4 + 4y} = 0$. Заменой $z = x^4 + 4y \implies z' = 4x^3 + 4y'$ сведем это уравнение к уравнению

$$\frac{z' - 4x^3}{4} + x^3 + x\sqrt{z} = 0,$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -2xdx,$$

$$\sqrt{z} = -x^2 + c,$$

$$z = (-x^2 + c)^2, \quad \text{где } x^2 \leqslant c.$$

Тогда $y = \frac{(-x^2+c)^2 - x^4}{4} = \frac{-2cx^2 + c^2}{4}$ при $x^2 \leqslant c$.

2. $y' + x^3 - x\sqrt{x^4 + 4y} = 0$.
Аналогично $y = \frac{2cx^2 + c^2}{4}$ при $x^2 \geqslant -c$.

Попробуем объединить эти решения, переопределив константы. В первом случае возьмем $A = -\frac{c}{2}$, а во втором – $A = \frac{c}{2}$.

1. $y = Ax^2 + A^2$ при $A < 0$ и $x \in \left[-\sqrt{-2A}, \sqrt{-2A}\right]$,
2. $y = Ax^2 + A^2$ при $A \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$ и при $A < 0$ и $x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2A}\right] \cup \left[\sqrt{-2A}, +\infty\right)$.

Видно, что эти решения объединяются в одно:

$$y = Ax^2 + A^2, \text{ при } A \in \mathbb{R} \text{ и } x \in \mathbb{R}.$$

Также стоит не забывать случай $z = 0$, который образуется при решении уравнений (мы делим на $\sqrt{z}$). В этом случае $y = -\frac{x^4}{4}$.

Найдем дискриминантную кривую для данного уравнения.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0, \\ 2y' + 2x^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 2x^6 - 4x^2y = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^4 + 4y\right) = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases}$$

Таким образом, кривая $\mathcal{D} = \left\{(x, y) :\ x\left(x^4 + 4y\right) = 0\right\}$ является дискриминантной.

Очевидно, что только решение $y = -\frac{1}{4}x^4$ проходит через $\mathcal{D}$. То есть это решение подозрительное на особое.

Проверим по определению особого решения. Попробуем найти константу A такую, что $\psi(x) = Ax^2 + A^2$ удовлетворяет следующим условиям для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \psi(x_0) = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ \psi'(x_0) = -x_0^3, \\ \psi(x) \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall\, x \in U(x_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax_0^2 + A^2 = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ 2Ax_0 = -x_0^3, \\ Ax^2 + A^2 \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall\, x \in U(x_0). \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}x_0^2.$$

Понятно, что при этом A все условия выполняются, а значит кривая $y = -\frac{1}{4}x^4$ является особым решением исходного уравнения.