

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И
ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

Часть I

1 Линейные уравнения 1-ого порядка

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (1)$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛНУ или просто ЛУ).

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y \quad (2)$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОУ).

Замечание. Вообще, мы уже неоднократно сталкивались и решали уравнения такого вида. Однако для строгого обоснования наших решений рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1 (Общее решение ЛОУ). Пусть в линейном однородном уравнении $y' = p(x)y$ функция $p(x) \in C(a, b)$.

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = c \cdot e^{\int p}, \quad (3)$$

где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int p$ понимается какая-то производная функции $p(x)$.

Доказательство. Воспользуемся эквивалентным преобразованием

$$y' = p(x)y \Leftrightarrow dy = p(x)y dx.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

1. $y = 0$ – очевидно решение,
2. при $y > 0$: разделим на y с обеих сторон

$$\frac{dy}{y} = p(x) dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx,$$

$$\ln y = \int p(x)dx,$$

$$y = A \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } A > 0.$$

3. при $y < 0$: аналогично, но появляется минус, который можно засунуть в константу.

$$y = B \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } B < 0.$$

4. Осталось разобрать случай, когда интегральная кривая проходит через границу $y = 0$. Однако, рассматривая все кривые, видно, что они заданы строго в одной полуплоскости относительно $y = 0$:

$$y = A \cdot e^{\int p} > 0, \quad \text{где } A > 0, \quad y = B \cdot e^{\int p} < 0, \quad \text{где } B < 0.$$

Таким образом, действительно, общее решение ЛОУ можно записать в виде $y = c \cdot e^{\int p}$.

Замечание. Теперь мы строго доказали, ранее использовавшиеся факты. Как вывод из этого, мы получаем, что теперь можно каждый раз не решать ЛОУ, а просто пользоваться формулой. Или хотя бы всегда проверять, похоже ли решение на полученное в общем виде.

Замечание. Далее мы будем рассматривать общее решение неоднородного уравнения. Мы используем достаточно интересный метод доказательства: так, мы предоставим какое-то решение, которое мы назовем общим, а далее докажем, что любое другое решение на самом деле задается именно нашим выражением.

Оказывается, что такой метод можно применять и для решения любых уравнений. Достаточно лишь показать, что представленное выражение является решением, а также, что любое другое произвольное решение задается этим выражением.

Лемма 2 (Общее решение ЛНУ). Пусть в линейном уравнении $y' = p(x)y + q(x)$ функции $p(x), q(x) \in C(a, b)$.

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}, \quad (4)$$

где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int f$ понимается какая-то производная функции $f(x)$.

Доказательство. • Докажем, что данное множество решений включено в общее множество решений исходного уравнения. Проще говоря, проверим, правда ли, что представленное выражение является решением.

Найдем $y'(x)$:

$$y' = q \cdot e^{-\int p} \cdot e^{\int p} + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p} = q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p}.$$

Тогда, подставляя в исходное уравнение:

$$q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p} \equiv p \cdot \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p} + q,$$

получаем верное тождество.

- Докажем, что произвольное решение задается формулой $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$.

Пусть $\varphi \in (\alpha, \beta)$ – решение, не задающееся этой формулой.

Рассмотрим $x_0 \in (\alpha, \beta) : \varphi(x_0) = y_0$.

Найдем такое $c \in \mathbb{R}$, что наше решение проходит через точку (x_0, y_0) .

$$\begin{aligned} \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p} \Big|_{x=x_0} &= y_0, \\ c &= \left(y_0 \cdot e^{-\int p} - \int q \cdot e^{-\int p} \right) \Big|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Пусть решение с этим c – решение ψ . Тогда мы получили два решения задачи Коши $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ на интервале (α, β) . Так как $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C((\alpha, \beta) \times \mathbb{R})$, то по теореме об единственности решения задачи Коши $\varphi = \psi$, что противоречит предположению о том, что φ не задается решением вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$.

Таким образом, действительно любое решение можно представить в виде $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$.

Объединяя эти два факта, мы получаем, что показанное нами решение действительно является общим решением линейного дифференциального уравнения.

Замечание. В итоге мы имеем формулу для решения ЛУ, в которую можно подставить нужные значения. Однако достаточно тяжело помнить ее наизусть, поэтому нужно иметь какой-то метод, который сможет нас привести к этому решению. Напомним, что любой метод, который будет давать решение вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$ окажется верным, так как мы уже доказали, что это общее решение.

Предложение (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной). Пусть стоит задача решить линейное уравнение $y' = p(x)y + q(x)$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение $y' = p(x)y$. Его общее решение мы знаем (либо можем найти): $y = c \cdot e^{\int p}$.

Рассмотрим теперь c не как константу, а как функцию $c(x)$.

Подставляя $y = c(x) \cdot e^{\int p}$ в исходное линейное уравнение, получаем:

$$c'(x) \cdot e^{\int p} + \cancel{c(x) \cdot p e^{\int p}} = \cancel{p c(x) \cdot e^{\int p}} + q,$$

$$c'(x) = q \cdot e^{-\int p}.$$

Это уравнение мы снова можем решить:

$$c(x) = \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}.$$

Тогда, возвращаясь к решению однородного уравнения и подставляя c туда, получаем

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c} \right) \cdot e^{\int p},$$

то есть общее решение линейного уравнения.

2 Уравнения Бернулли и Рикатти

Замечание. Существует огромное количество уравнений первого порядка, которые можно свести к линейному какой-либо заменой. В этом пункте будут разобраны такие уравнения, представленные в XVII веке Якобом Бернулли¹ и Рикатти².

¹ Якоб Бернулли (1655–1705, Швейцария)

² Риккати Якопо Франческо (1676–1754, Италия)

Определение 3. Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad (5)$$

где $\alpha \neq \{0, 1\}$, называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Лемма 3. Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$ при $y \neq 0$ заменой $t = y^{1-\alpha}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению.

Доказательство. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha.$$

Поделим обе части уравнения на y^α :

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Сделаем замену $t = y^{1-\alpha}$, тогда $t' = (1 - \alpha) \frac{y'}{y^\alpha}$:

$$\frac{1}{1 - \alpha} t' = p(x)t + q(x),$$

$$t' = (1 - \alpha) (p(x)t + q(x)).$$

Получили линейное дифференциальное уравнение.

Определение 4. Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (6)$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Замечание. Уравнение Бернулли является частным случаем уравнения Рикатти при $r(x) \equiv 0$. Рикатти был знаком с семьей Бернулли, поэтому связь между этими уравнениями неслучайна.

Лемма 4. Пусть φ – какое-то решение уравнения Рикатти $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Подстановка $y = z + \varphi$ сводит это уравнение к уравнению Бернулли.

Доказательство. Найдем y' :

$$y' = z' + \varphi'.$$

Так как φ – решение уравнения Рикатти, то

$$\varphi' = p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x).$$

Тогда $y' = z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x)$.

Подставим замену в уравнение Рикатти

$$z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + \cancel{r(x)} = p(x)(z + \varphi)^2 + q(x)(z + \varphi) + \cancel{r(x)},$$

$$z' = z \underbrace{(2p(x)\varphi + q(x))}_{P(x)} + \underbrace{p(x)}_{Q(x)} z^2,$$

$$z' = P(x)z + Q(x)z^2.$$

Получили уравнение Бернулли для $\alpha = 2$.

3 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 5. Пусть существует функция u такая, что $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ (то есть $u'_x = P$, $u'_y = Q$). Тогда уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{7}$$

называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Теорема 1 (Общее решение УПД). Пусть $u \in C^1(G)$, причем $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $\varphi(x)$ является общим решением уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ на интервале (α, β) в том и только том случае, когда $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ и φ неявно задается уравнением $u(x, y) = c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Необходимость:

Так как φ – решение, то $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ и

$$P(x, \varphi(x))dx + Q(x, \varphi(x))d(\varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Заметим, что левая часть есть полная производная функции $u(x, \varphi(x))$.

$$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) \equiv 0,$$

$$u(x, \varphi(x)) \equiv c.$$

Таким образом, получаем, что φ действительно неявно задана уравнением $u(x, y) = c$.

Достаточность:

Так как φ неявно задана уравнением $u(x, y) = c$, то

$$u(x, \varphi(x)) \equiv c.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Так как $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, то φ является решением уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ по определению решения дифференциального уравнения.

Замечание. Назревает хороший вопрос: откуда эту функцию u взять и почему вообще она существует?

Пусть есть функция $u : u'_x = P$, $u'_y = Q$, $u \in C^2(G)$. Рассмотрим вторые производные:

$$\left. \begin{aligned} u_{xy}'' &= P'_y, \\ u_{yx}'' &= Q'_x \end{aligned} \right\} \Rightarrow P'_y = Q'_x.$$

На основе этого утверждения появляется следующая теорема.

Теорема 2 (Признак УПД). Пусть $P, Q \in C^1(G)$, причем $P'_y = Q'_x$, где G — односвязная область. Тогда существует функция $u : u'_x = P, u'_y = Q$. Кроме того, все такие функции имеют вид

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + c,$$

где $c \in \mathbb{R}$, $\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})$ — кривая в области G , соединяющая точки (x_0, y_0) и (\tilde{x}, \tilde{y}) .

Замечание. Таким образом, при определенных условиях мы поняли, как можно найти эту функцию u . И далее, решая уравнение $u = c$, можем найти общее решение УПД.

Однако вычисление данного криволинейного интеграла зачастую является непростой задачей, поэтому рассмотрим другие методы.

Определение 6. Функция u при условии $u'_x = P$, $u'_y = Q$ называется потенциалом поля (P, Q) , а поле (P, Q) — потенциальным полем.

Пример 1.

$$e^{-y}dx - (xe^{-y} + 2y)dy = 0.$$

Решение. Область определения уравнения есть \mathbb{R}^2 — односвязное множество.

Рассмотрим производные коэффициентов $P = e^{-y}$ и $Q = (xe^{-y} + 2y)$:

$$P'_y = -e^{-y} = Q'_x.$$

Таким образом, по признаку — это уравнение в полных дифференциалах.

Не будем вычислять криволинейный интеграл. Но рассмотрим систему

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -xe^{-y} - 2y. \end{cases}$$

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0 :

$$u'_x(x, y_0) = e^{-y_0} \implies u(x, y_0) = \int e^{-y_0} dx = xe^{-y_0} + c(y_0).$$

Подставляя во второе уравнение системы, получаем

$$(xe^{-y} + c(y))'_y = -xe^{-y} - 2y,$$

$$\cancel{xe^{-y}} + c'(y) = \cancel{-xe^{-y}} - 2y,$$

$$c' = -2y,$$

$$c(y) = -y^2 + A.$$

Таким образом, $u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$, а значит уравнение $xe^{-y} - y^2 = C$ задает решение УПД.

Замечание. В примере был показан другой способ решения УПД, избегающий криволинейное интегрирование. Однако данный способ далеко не всегда оказывается возможен. По крайней мере, не всегда можно взять интеграл, чтобы найти $u(x, y_0)$ (при плохой области интеграл по прямой будет достаточно сложен).

Определение 7. Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если при домножении этого уравнения на μ получается уравнение в полных дифференциалах.

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 - \text{УПД.}$$

Замечание. Если μ – интегрирующий множитель уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, причем $\mu, P, Q \in C^1(G)$. Тогда $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$. Расписывая производную получаем уравнение в частных производных

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x.$$

Решать его оказывается совсем непросто, однако чисто теоретически это является способом нахождения интегрирующего множества.

Однако стоит помнить, что нам не требуется находить общее решение. Нам достаточно лишь какое-то частное решение. Иногда его можно найти, как в следующем примере.

Пример 2. Рассмотрим линейное уравнение

$$y' = p(x)y + q(x),$$

где $p \neq 0$. Попробуем найти его интегрирующий множитель.

Решение. Перепишем исходное уравнение

$$(p(x)y + q(x)) dx - dy = 0.$$

Заметим, что это уравнение не является уравнением в полным дифференциалах.

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя.

$$\mu'_y (p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = -\mu'_x.$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда первое слагаемое слева обнулится

$$\mu p(x) = -\mu'_x,$$

$$\mu = Ce^{-\int p}.$$

Так как нам нужно лишь какое-то решение, то рассмотрим любое C , например $C = 1$.

Таким образом, $\mu = e^{-\int p}$ – интегрирующий множитель.

Умножим на μ исходное уравнение

$$y' e^{-\int p} = p(x)y e^{-\int p} + q(x)e^{-\int p},$$

$$y' e^{-\int p} - p(x)y e^{-\int p} = q(x)e^{-\int p}.$$

Заметим, что в левой части стоит производная произведения $(ye^{-\int p})$

$$\begin{aligned} (ye^{-\int p})' &= q(x)e^{-\int p}, \\ ye^{-\int p} &= \int q(x)e^{-\int p} + A, \\ y &= \left(\int q(x)e^{-\int p} + A \right) e^{\int p}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили общее решение линейного уравнения, а значит решение привело к верному ответу.

Замечание. Таким образом, мы получили еще один способ нахождения решения линейного уравнения, которым можно пользоваться на практике. Нужно запомнить интегрирующий множитель $\mu = e^{-\int p}$, а также свертывание в производную произведения.

Часть II

Уравнения, не разрешимые относительно производной

4 Уравнение, разрешимое относительно производной

Пример 3. Уравнение $(y')^3 - 2yx = 0$ очевидно является разрешимым относительно производной: $y' = \sqrt[3]{2yx}$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$.

Рассмотрим отдельно решения уравнений $y' = 2x$ и $y' = -2x$. Хочется сказать, что вместе эти решения дадут общее решение исходного. Однако это не так! Очевидно, что решениями являются параболы с ветвями вниз и вверх соответственно. Тогда можно посмотреть на кривую, содержащую левую ветвь одной из парабол и правую другой (Рис. 1). Это также интегральная кривая, так как она очевидно гладкая. Оказывается, что только в точке с абсциссой $x = 0$ возможны такие интегральные кривые, так как иначе гладкость не соблюдается.

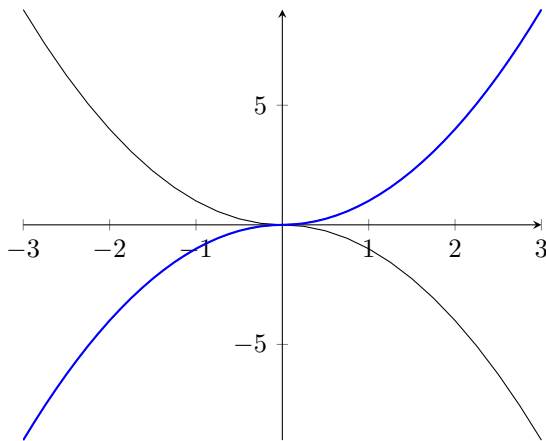


Рис. 1

5 Метод введения параметра

Определение 8. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и $\forall t \in I \ f(\varphi(t)) = \psi(t)$.

Замечание. Заметим, что определение можно переписать немного по-другому. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и множество $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$ является графиком функции f .

Нетрудно понять, что эти определения эквивалентны.

Пример 5. Зададим функцию $f(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$ параметрически.

Например, $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что это задание удовлетворяет определению.

Предложение. Рассмотрим уравнение $F(x, y') = 0$ от двух переменных x и y' . Пусть оно задает некоторую кривую $\gamma = \{(x, y') \mid F(x, y') = 0\}$ плоскости xOy' .

Возьмем функцию φ такую, что эта кривая является графиком функции φ' .

Тогда $F(x, \varphi'(x)) \equiv 0$.

Идея нахождения решения такого уравнения (в котором нельзя выразить y') заключается в том, чтобы задать функцию γ параметрически

и найти y также параметрически.

Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, $\varphi' \neq 0$, $\psi \in C(\alpha, \beta)$, причем эти функции задают параметрически наше уравнение $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$.

Тогда функция, задаваемая параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta)$$

является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

Замечание. Проверим, что функция действительно является решением.

Во-первых, проверим, что такое задание действительно является функцией, то есть каждому x соответствует ровно один y . Так как $\varphi' \neq 0$, то φ строго возрастает и тогда φ — биекция. Рассматривая обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, получаем $y = g \circ \varphi^{-1}$.

Во-вторых, проверим непрерывность и дифференцируемость решения. Так как $g \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, то их композиция также непрерывно дифференцируема.

В-третьих, проверим, что функция обращает наше уравнение в тождество.

$$F(x, y')|_{y=g \circ \varphi^{-1}(x)} = F\left(x, (g \circ \varphi^{-1})'(x)\right).$$

Так как $(g \circ \varphi^{-1})'(x) = g'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = (\psi(t)\varphi'(t))_{t=\varphi^{-1}(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$, то получаем

$$F\left(x, (g \circ \varphi^{-1})'(x)\right) = F(x, \psi(\varphi^{-1}(x))) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, наша функция действительно действительно обращает выражение в нуль. А значит, эта функция является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

Пример 6.

$$e^{y'} + y' = x.$$

Решение. Параметризуем множество, задаваемое этим уравнением

$$\{(x, y') : e^{y'} + y' = x\}.$$

Пусть $y' = t$. Тогда $x = e^t + t$.

Замечание (Основное соотношение метода введения параметра).

$$dy = y'_x dx.$$

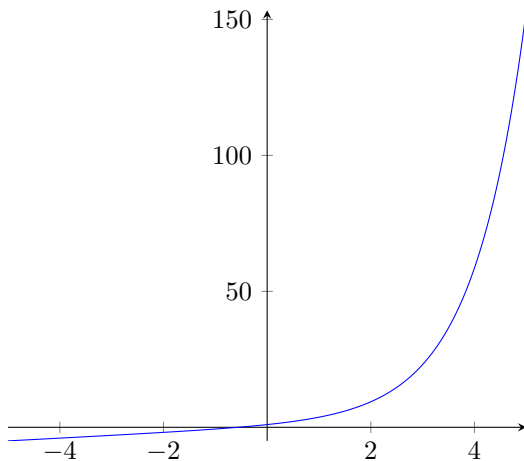


Рис. 2

Подставляя наши функции получаем

$$dy = t \cdot d(e^t + t),$$

$$dy = t \cdot (e^t + 1) dt,$$

$$y = \int t \cdot (e^t + 1) dt + c.$$

В итоге мы пришли к той же самой формуле, что и доказали ранее. А значит подстановки подходят.

Тогда следующая функция является решением

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Предложение (Общий случай метода введения параметра). Пусть есть уравнение $F(x, y, y') = 0$, задающее какую-то поверхность $\sigma = ((x, y, y') | F(x, y, y') = 0)$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ — параметризация σ .

Подставим эту параметризацию в основное соотношение $dy = y'_x dx$.

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(u, v) (\varphi'_u du + \varphi'_v dv).$$

Пусть $v = g(u, C)$ – решение этого уравнения.

Тогда получаем $\begin{cases} x = \varphi(u, v = g(u, C)), \\ y = \psi(u, v = g(u, C)) \end{cases}$ – параметризация решений исходного уравнения.

Пример 7.

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln v. \end{cases}$$

Тогда подставляя в основное соотношение, получаем

$$vdu + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = vdu,$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = 0,$$

При $\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$, получаем $v = 2e^{2u-1}$. Тогда $y = e^{2x-1}$.

При $dv = 0$, получаем $y = cx - \frac{c}{2} \ln \frac{c}{2}$.

Замечание. Важно помнить, что это могут быть не все решения уравнения!!! Такой случай уже был рассмотрен в примере 4.

6 Задача Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной

Замечание. Мы уже говорили о решении задачи Коши для нормального уравнения. Однако в силу того, что уравнение $F(x, y, y') = 0$ задает не одно поле направлений, а целую совокупность, оказывается, что через одну точку могут проходить несколько интегральных кривых, однако под разными углами. Именно поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно y' , требует дополнительного начального условия на y' .

Определение 9. Задачей Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$ (Под y'_0 понимается какое-то числовое значение, а не производная. Такое обозначение используется для визуального соответствия.)

Предложение. Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы, то есть $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$.

Теорема 3 (Существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешенного относительно производной). Пусть $F \in C^1(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область. Пусть также точка $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ такая, что $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение задачи $F(x, y, y') = 0$ при условиях $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$

Доказательство. TODO: PROOF

Определение 10. Решение φ уравнения $F(x, y, y') = 0$ на $\langle a, b \rangle$ называется особым, если для любой точки $x_0 \in \langle a, b \rangle$ найдется решение ψ такое, что

Часть III

Системы дифференциальных уравнений

7

8 Вспомогательные

Определение 11. Под нормой вектора $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем понимать $|x| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$.

Определение 12. Нормой матрицы $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ будем называть $|A| = \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} |a_{ij}|$.

Лемма 5. Пусть $f \in C([a, b])$. Тогда

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \max_{i=1, \dots, n} \left| \int_a^b f_i(t) dt \right| \leq \max_{i=1, \dots, n} \int_a^b |f_i(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $B \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$. Тогда $|A \cdot B| \leq n \cdot |A| \cdot |B|$.

Доказательство. Вспомним, как вводилось определение произведения матриц: $[A \cdot B]_{i,j} = \sum_{l=1}^n [A]_{i,l} \cdot [B]_{l,j}$. Тогда перейдем к нормам

$$|[A \cdot B]_{i,j}| = \left| \sum_{l=1}^n [A]_{i,l} \cdot [B]_{l,j} \right| \leq \sum_{l=1}^n |[A]_{i,l}| \cdot |[B]_{l,j}| \leq \sum_{l=1}^n |A| \cdot |B| = n \cdot |A| \cdot |B|.$$

Определение 13. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица на множестве D , если $\exists L : \forall r_1, r_2 \in D \implies |f(r_2) - f(r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$. И пишут $f \in \text{Lip}(D)$.

Пример 8. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $D = [\frac{1}{2}, 1]$.

$$|f(r_2) - f(r_1)| = |f'(\xi)| |r_2 - r_1| \leq \underbrace{\left| \max_{[\frac{1}{2}, 1]} f'(\xi) \right|}_L |r_2 - r_1|.$$

Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $D = [\frac{1}{2}, 1]$.

Предложение. Этот пример наводит на идею того, что всегда, когда производная ограничена, мы можем найти константу Липшица как

$$L = \left| \max_{[\frac{1}{2}, 1]} f'(\xi) \right|.$$

Предложение. На самом деле можно показать, что $C^1[a, b] \subset Lip[a, b] \subset C[a, b]$.

Пример 9. Рассмотрим все ту же функцию $f(x) = \sqrt{x}$, но на множестве $D = [0, 1]$. Покажем, что она не Липшицева.

Доказательство. Пусть $f \in LipD$, то есть нашлось такое L , что

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leq L|r_2 - r_1|.$$

Возьмем в качестве точки x_1 точку 0, а точку x_2 устремим к нулю

$$\sqrt{x_2} \leq L|x_2| \implies \infty \xleftarrow{x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_2}} \leq L \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} L,$$

что невозможно, а значит исходное предположение неверно и функция не Липшицева.

Замечание. Однако понятно, что, отступив на чуть-чуть от нуля в множестве D , функция сразу станет Липшицевой. Именно поэтому появляется понятие локальной Липшицевости.

Определение 14. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве D , если $\forall r \in D \implies \exists U(r) : f \in Lip(D \cap U)$. И пишут $f \in Lip_{loc}D$.

Пример 10. Несложно показать, что $f(x) = \sqrt{x}$ на множестве $D = (0, 1]$ удовлетворяет условию локальной Липшицевости, но не глобальной.

Определение 15. $f : D \rightarrow \mathbb{R}_{t,r}^n$ удовлетворяет условию Липшица по r на множестве D , если $\exists L : \forall (t, r_1), (t, r_2) \in D \implies |f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$. И пишут $f \in Lip_r D$.

Определение 16. $f : D \rightarrow \mathbb{R}_{t,r}^n$ удовлетворяет условию Липшица по r локально на множестве D , если $\forall (t, r) \in D \implies \exists U((t, r)) : f \in Lip_r(D \cap U)$. И пишут $f \in Lip_{r,loc}D$.

Пример 11. Рассмотрим $f(t, r) = \frac{1}{t} + \frac{1}{r}$ на множестве $D = (0, +\infty) \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Посмотрим на разность значений в разных точках $(t_1, r_1), (t_2, r_2)$:

$$|f(t_2, r_2) - f(t_1, r_1)| = \left| \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right|$$

Понятно, что при очень маленьких t_1, t_2 разность оказывается очень большой, а значит мы ничем не ограничим сверху. То есть глобальное условие Липшица не выполнено.

Однако локально

$$\left| \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right| \leq \left| \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} \right| + \left| \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \right| \leq \mu_1 |t_2 - t_1| + \mu_2 |r_2 - r_1| \leq \underbrace{\max \langle \mu_1, \mu_2 \rangle \cdot 2}_L |(t_1, r_1) - (t_2, r_2)|$$

она удовлетворяет условию Липшица.

Пример 12. Рассмотрим $f(t, r) = \sqrt{t}\sqrt{r}$ на множестве $[0, +\infty) \times (0, 1)$.

Локальному условию Липшица она не удовлетворяет, рассматривая точку 0.

Однако по r она локально Липшицева:

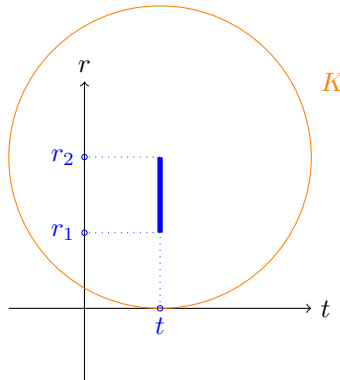
$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| = |\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}| \leq L |r_2 - r_1|,$$

где в качестве L возьмем максимум производной корня.

Лемма 7 (Достаточное условие для локальной Липшицевости по r). Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$. А также $f'_r \in \text{Mat}_{m,n}(C(G))$. Тогда $f \in \text{Lip}_{r, \text{loc}}(G)$.

Кроме того, если K – выпуклый компакт, а $M = \max_K |f'_r|$, то $f \in \text{Lip}_r K$ с константой Липшица $L = nM$.

Доказательство. Пусть K – выпуклый компакт.



Рассмотрим разность значений:

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| = \Delta.$$

Так как K – выпуклое, то отрезок тоже принадлежит K .

Рассмотрим функцию $g(s) = f(t, r_1 + s(r_2 - r_1))$, определенную на $[0, 1]$. Заметим, что g непрерывная, как композиция сужения f на r ($h(r) = f(t, r)$) и линейной там же ($r_1 + s(r_2 - r_1)$).

Тогда по интегральной теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \Delta = |g(1) - g(0)| &= \left| \int_0^1 g'(s) ds \right| = \left| \int_0^1 h'(r_1 + s(r_2 - r_1)) \cdot (r_1 + s(r_2 - r_1))' ds \right| = \\ &= \left| \int_0^1 f'_r(r_1 + s(r_2 - r_1)) \cdot (r_2 - r_1) ds \right| \leq \int_0^1 n \cdot |f'_r| \cdot |r_2 - r_1| ds \leq \\ &\leq n \cdot \underbrace{\max_K |f'_r|}_M \cdot |r_2 - r_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, Лишицева константа равна $n \cdot M$.

Рассмотрим область G . Вокруг каждой точки можем рассмотреть брус Π , который является компактом, а значит на нем у нас есть глобальная Липшицевость. То есть мы для каждой точки нашли окрестность, в которой есть глобальная Липшицевость, а значит по определению получили локальную Липшицевость на G .

Лемма 8 (Достаточное условие для Липшицевости по r). Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f \in Lip_{r,loc} K$, где $K \in G$ – компакт.

Тогда f глобально Липшицева на K .

Доказательство. Пусть $f \notin Lip_r K$, то есть

$$\forall L \quad \exists (t, r_2), (t, r_1) \in K : |f(t, r_2) - f(t, r_1)| > L |r_2 - r_1|.$$

Найдем для каждого натурального числа L пару таких точек $(t_n, r_n), (t_n, \tilde{r}_n)$. Так как K компакт в \mathbb{R}^{n+1} , то оно секвенциальный компакт, а значит можно выделить сходящиеся подпоследовательности.

Пусть для первой последовательности есть $\{(t_{k_s}, r_{k_s})\}_{s=1}^{\infty} : (t_{k_s}, r_{k_s}) \rightarrow (t, r)$. Выберем во второй последовательности с теми же номерами сходящуюся подпоследовательность $\{(t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}})\}_{l=1}^{\infty} : (t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}}) \rightarrow (t, \tilde{r})$.

1. Пусть $r = \tilde{r}$.

Так как $f \in Lip_{r,loc}K$, то есть на окрестности $U(t, r)$ $f \in Lip_r U$. Пусть условие Липшица выполнено с константой L , то есть

$$\forall (\tau, \rho_1), (\tau, \rho_2) \in D \implies |f(\tau, \rho_2) - f(\tau, \rho_1)| \leq L|\rho_2 - \rho_1|.$$

Так как начиная с какого-то номера все элементы наших последовательностей лежат в окрестности $U(t, r)$, то, выбирая l так, чтобы $L_{s_l} > L$, получаем противоречие нелипшицовости K , но липшицовости на U .

2. Пусть $r \neq \tilde{r}$.

$$\left| f(t_{k_{s_l}}, r_{k_{s_l}}) - f(t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}}) \right| > L_{s_l} \left| r_{k_{s_l}} - \tilde{r}_{k_{s_l}} \right|.$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, получаем

$$|f(t, r) - f(t, \tilde{r})| \geq \infty,$$

что невозможно. Снова пришли к противоречию.

А значит исходное предположение было неверным и на самом деле $f \in Lip_r K$.

9 Теоремы о существовании и единственности

Определение 17. Функция $\varphi : E = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение интегрального уравнения $r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau))d\tau$, если

1. Она непрерывна: $\varphi \in C(E)$,
2. Она обращает уравнение в тождество $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$.

Лемма 9 (О равносильном интегральном уравнении). Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда φ — решение задачи Коши $r' = f(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ на $E = \langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда φ — решение интегрального уравнения.

Доказательство. "Необходимость":

Так как φ — решение задачи Коши, то $\varphi \in C^1(E)$, а значит первый пункт определения решения интегрального уравнения выполнен. Второй же получаем просто проинтегрировав дифференциальное уравнение. "Достаточность":

Так как интеграл от непрерывной функции – непрерывно дифференцируем, то первый пункт определения решения задачи Коши получили. А второй получается дифференцируемостью второго пункта определения решения интегрального уравнения.

Лемма 10. Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Пусть также φ_+, φ_- – решения задачи Коши $r' = f(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ на $[t_0, b)$ и $(a, t_0]$ соответственно.

Тогда $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & t \in (a, t_0] \\ \varphi_+(t), & t \in [t_0, b) \end{cases}$ – решение этой же задачи Коши на интервале (a, b) .

Доказательство. Очевидно, что функция остается непрерывно дифференцируемой и обращает уравнение в тождество.

Лемма 11 (Gronwall). Пусть $\varphi \in C(E)$, где $E = \langle a, b \rangle$. Пусть также $\lambda, \mu \geq 0$ и $\forall t \in E \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|$.

Тогда $\varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$.

Доказательство. Заметим, что в правой части цепочки неравенств на самом деле стоит решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения.

Пусть $t \geq t_0$.

1. Пусть $\lambda > 0$. Обозначим $v(t) = \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|$.

Тогда $v'(t) = \mu\varphi(t) \leq \mu \cdot v(t)$.

Так как $\lambda > 0$, то и $v > 0$. Значит можем поделить на v .

$$\begin{aligned} \frac{v'(t)}{v(t)} &\leq \mu, \\ \int_{t_0}^t \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} d\tau &\leq \int_{t_0}^t \mu d\tau, \\ \ln \frac{v(t)}{v(t_0)} &\leq \mu(t - t_0), \\ v(t) &\leq \underbrace{v(t_0)}_{\lambda} e^{\mu(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(t) \leq v(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$.

2. Пусть $\lambda = 0$.

$$\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau < \underbrace{\delta}_{>0} + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Устремим δ к нулю для каждого t : $\varphi(t) \leq 0$, что и хотелось доказать.

При $t < t_0$ сделаем замену $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t)$.

$$\psi(2t_0 - t) \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^{2t_0 - t} \psi(s) ds$$

По доказанному (так как $2t_0 - t > t_0$) получаем $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t) \leq \lambda e^{\mu(2t_0 - t - t_0)}$.

Определение 18. Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Пусть $\Pi = \{|t - t_0| \leq a, |r - r_0| \leq b\}$ — брус с центром в точке (t_0, r_0) , вписанный в данную область (такой есть в силу открытости области).

Пусть $\|f\| = \max_{\Pi} |f|$. Тогда отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$, где $h = \min \left\{ a, \frac{b}{\|f\|} \right\}$ — называется отрезком Пеано, соответствующим t_0, r_0 .

Замечание. Рассмотрим, что имеется в виду, на простом двумерном примере $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ бруса. Для простоты рассмотрим случай бруса с центром в начале координат. Пусть есть какое-то решение φ , проходящее внутри бруса. Тогда

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t \varphi'(t) dt \right| \leq \int_0^t |\varphi'(t)| dt \leq \int_0^t \|f\| dt = \|f\| t.$$

То есть мы получили, что наше решение ограничено внутри бруса двумя лучами. Кардинально появляется два случая: лучи пересекают горизонтальное ребро бруса или вертикальное (см. Рис. 3). В первом случае мы можем уверенно утверждать, что наше решение лежит внутри бруса на отрезке до пересечения луча с брусом. А во втором — на всем отрезке бруса. Вот эти отрезки и называются отрезками Пеано $[0, h]$, где в первом случае $h = \frac{b}{\|f\|}$, а во втором — $h = a$.

Теорема 4 (Пеано о существовании решения). Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ — область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$.

Тогда задача Коши имеет решение на отрезке Пеано.

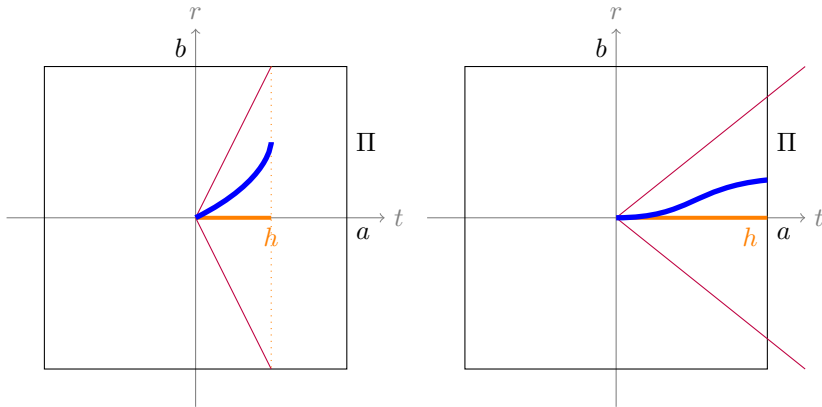


Рис. 3. Иллюстрация к определению отрезка Пеано

Замечание. Без доказательства.

Теорема 5 (Пикара о существовании и единственности решения). Пусть $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$ – область, $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$, $(t_0, r_0) \in G$.

Тогда

1. На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,
2. На любом интервале (a, b) решение задачи Коши единственно.

Доказательство. Не умоляя общности, рассмотрим в качестве (t_0, r_0) точку начала координат. Будем искать решение при $t \in [0, h]$, где $h = \min \left\{ A, \frac{B}{\|f\|} \right\}$ из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность, заданную рекуррентно

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 0, \\ \varphi_m(t) &= \int_0^t f(\tau, \varphi_{m-1}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Замечание. Укажем план нашего доказательства:

1. Докажем, что последовательность определена корректно, то есть $\varphi_m \in C[0, h]$ и $|\varphi_m(t)| \leq \|f\|t$,
2. Докажем равномерную сходимость последовательности, то есть $\exists \varphi : \varphi_m \rightrightarrows \varphi, m \rightarrow \infty$,

3. Докажем, что полученное φ является решением интегрального уравнения, связанного с задачей Коши,
- 4.