Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

1 Линейные уравнения 1-ого порядка (23.10)

Пример 1.

$$y' = y + x.$$

Решение. Решим однородное уравнение

$$y' = y.$$

$$y = C \cdot e^x$$

Пусть C – функция, подставим решение в исходное уравнение

$$C'(x) \cdot e^x + \cancel{C(x) \cdot e^x} = \cancel{C(x) \cdot e^x} + x$$

$$C'(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$C(x) = \int x e^{-x} dx$$

$$u = x \implies u' = 1, v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x}$$

$$C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c$$

So

$$y = (-e^{-x}(x+1) + c)e^x$$

$$y = -(x+1) + ce^x$$

Пример 2.

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

Решение. Разделим на y^2

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{y} + e^x$$

Выполним замену $z = \frac{1}{y}$, тогда $z' = -\frac{y'}{y^2}$ Тогда, подставляя в исходное уравнение, получаем

$$z' = 2z - e^x$$

Решением данного линейного уравнения является функция

$$z = (e^{-x} + c) \cdot e^{2x}$$

Тогда, возвращаясь к исходной переменной

$$y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + c}$$

Пример 3.

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

Решение. Уравнение имеет вид уравнения Рикатти.

Очевидно, что $y = -e^x$ – одно из решений. Тогда сделаем замену $z = y - e^x$.

$$z' + e^x = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x} + e^x,$$

$$z' + e^x = z^2 + 2e^x z + e^{2x} - 2e^x z - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x,$$

$$z' = z^2,$$

$$-\frac{1}{z} = x + c,$$

$$z = \frac{-1}{x + c}.$$

Тогда, возвращаясь к исходным переменным, получаем $y = e^x - \frac{1}{x+c}$.

2 Уравнения в полных дифференциалах

Пример 4.

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

Решение. Рассмотрим производные коэффициентов

$$(2 - 9xy^2)x'_y = -18x^2y,$$

$$(4y^2 - 6x^3)y'_x = -18x^2y.$$

Так как они совпадают, то по признаку это уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0:

$$u'_x(x, y_0) = 2x - 9x^2y_0^2 \implies u(x, y_0) = x^2 - 3x^3y_0^2 + c(y_0).$$

Подставляя в уравнение $u'_y = (4y^2 - 6x^3)y$, получаем

$$\left(x^2 - 3x^3y^2 + c(y_0)\right)'_y = (4y^2 - 6x^3)y,$$

$$-6x^3y + c'(y) = (4y^2 - 6x^3)y,$$
$$c'(y) = 4y^3,$$
$$c(y) = y^4 + c.$$

Таким образом, получаем функцию $u = x^2 - 3x^3y_0^2 + y^4 + c$. Тогда уравнение $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$ неявно задает решение нашего уравнения.

Замечание (Свойства дифференциала).

1. $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du_\beta dv$,
2. $du = d_xu + d_yu$,
3. $d_xu = d_x\left(u + \varphi(y)\right)$,
4. $\varphi(x, y)dx = d_x\left(\int \varphi(x, y)dx\right)$.

Замечание. Можно решать УПД, используя свойства дифференциала. Рассмотрим пример из лекции и попробуем решить его, упращая выражение по свойствам.

Пример 5.

$$e^{-y}dx - \left(xe^{-y} + 2y\right)dy = 0.$$

Решение. Раскроем скобки

$$e^{-y}dx - xe^{-y}dy - 2ydy = 0.$$

Пользуясь четвертым свойством, перейдем к

$$d_x(xe^{-y}) + d_y(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

Используя второе свойство, получим

$$d(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

По первому свойству

$$d(xe^{-y} - y^2) = 0.$$

Тогда общее решение будем неявно задаваться уравнением

$$xe^{-y} - y^2 = c.$$

Пример 6.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение.

$$2xydx + x^2dy - y^2dy = 0,$$

$$d_x\left(x^2y\right) + d_y\left(x^2y\right) - \frac{1}{3}dy^3 = 0,$$

$$d\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) = 0.$$

Тогда $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ неявно задает решение.

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

Решение.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}dx - dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0,$$

$$d_x\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) - dx + d_y\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) = 0,$$

$$d\sqrt{x^2 - y^2} - dx = 0,$$

$$d\left(\sqrt{x^2 - y^2} - x\right) = 0.$$

Тогда $\sqrt{x^2 - y^2} - x = c$ неявно задает решение.

Пример 8. *Найти интегральный множитель*

$$\left(1 - x^2 y\right) dx + x^2 (y - x) dy = 0.$$

Решение. Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y \left(1 - x^2 y\right) - \mu x^2 = \mu'_x x^2 (y - x) + \mu \left(2xy - 3x^2\right).$$

Будем искать частное решение в виде $\mu = \mu(x)$.

$$\mu'_x x^2 (x - y) = 2\mu \left(xy - x^2\right),$$

$$\mu'_x x = -2\mu,$$

$$\mu = -\frac{1}{x^2}.$$

3 Метод введения параметра

Пример 9.

$$y = \left(y'\right)^2 e^{y'}.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} y' = v, \\ y = v^2 e^v. \end{cases}$$

Подставим в основное соотношение $dy = y'_x dx$

$$(2ve^v + v^2 e^v) dv = v dx,$$

$$(2 + v) e^v dv = dx,$$

$$x = e^v + ve^v + c.$$

Таким образом, ответом является $\begin{cases} x = e^v + ve^v + c, \\ y = v^2 e^v. \end{cases}$

Пример 10.

$$x^3 - (y')^3 = xy'.$$

Решение.

Замечание. Если кривая имеет уравнения вида $P(x,y) + Q(x,y) = 0$, где P, Q – однородные функции разной степени, то положив $y = xt$, получаем $x^\alpha P(1,t) + x^\beta Q(1,t) = 0$, откуда можно выразить x.

Используя предложенное в замечании, введем параметризацию $y' = xt$.

$$x^3 - (xt)^3 = x \cdot xt,$$

$$x = \frac{t}{1-t^3},$$

$$y' = \frac{t^2}{1-t^3}.$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$dy = \frac{t^2}{1-t^3}\frac{1-t^3+3t^3}{(1-t^3)^2}dt,$$

$$dy = \frac{t^2(1+2t^3)}{(1-t^3)^3}dt,$$

$$u = 1 + 2t^3 \implies u' = 6t^2$$

$$v' = \frac{t^2}{(1-t^3)^3} \implies v = \frac{1}{6(1-t^3)^2}$$

$$y = \frac{1+2t^3}{6(1-t^3)^2} - \frac{1}{3(1-t^3)} + c,$$

$$y = \frac{4t^3-1}{6(1-t^3)^2} + c.$$

Пример 11.

$$y = 2xy' - (y')^2.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = 2uv - v^2. \end{cases}$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$2vdu + 2udv - 2vdv = vdu,$$

$$vdu = 2(v-u)dv,$$

$$u' = 2 - \frac{2u}{v},$$

$$u = \left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-2},$$

Тогда решением является

$$\begin{cases} x = \left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-2}, \\ y = 2\left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-1} - v^2. \end{cases}$$

4 Решение уравнений, не разрешенных относительно производной

Пример 12.

$$y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0.$$

Решение. Разложим левую часть на множители

$$\left(y' + x^3 + x\sqrt{x^4+4y}\right)\left(y' + x^3 - x\sqrt{x^4+4y}\right) = 0.$$

Рассмотрим варианты:

1. $y' + x^3 + x\sqrt{x^4+4y} = 0$. Заменой $z = x^4 + 4y \implies z' = 4x^3 + 4y'$ сведем это уравнение к уравнению

$$\frac{z' - 4x^3}{4} + x^3 + x\sqrt{z} = 0,$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -2xdx,$$

$$\sqrt{z} = -x^2 + c,$$

$$z = (-x^2+c)^2, \quad \text{где } x^2 \leqslant c.$$

   Тогда $y = \frac{(-x^2+c)^2 - x^4}{4} = \frac{-2cx^2+c^2}{4}$ при $x^2 \leqslant c$.

2. $y' + x^3 - x\sqrt{x^4+4y} = 0$.
   Аналогично $y = \frac{2cx^2+c^2}{4}$ при $x^2 \geqslant -c$.

Попробуем объединить эти решения, переопределив константы. В первом случае возьмем $A = -\frac{c}{2}$, а во втором – $A = \frac{c}{2}$.

1. $y = Ax^2 + A^2$ при $A < 0$ и $x \in \left[-\sqrt{-2A}, \sqrt{-2A}\right]$,
2. $y = Ax^2 + A^2$ при $A \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$ и при $A < 0$ и $x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2A}\right] \cup \left[\sqrt{-2A}, +\infty\right)$.

Видно, что эти решения объединяются в одно:

$$y = Ax^2 + A^2, \text{ при } A \in \mathbb{R} \text{ и } x \in \mathbb{R}.$$

Также стоит не забывать случай $z = 0$, который образуется при решении уравнений (мы делим на $\sqrt{z}$). В этом случае $y = -\frac{x^4}{4}$.

Найдем дискриминантную кривую для данного уравнения.

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0, \\ 2y' + 2x^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 2x^6 - 4x^2y = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^4 + 4y\right) = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases}$$

Таким образом, кривая $\mathcal{D} = \left\{(x,y) : \ x\left(x^4+4y\right) = 0\right\}$ является дискриминантной.

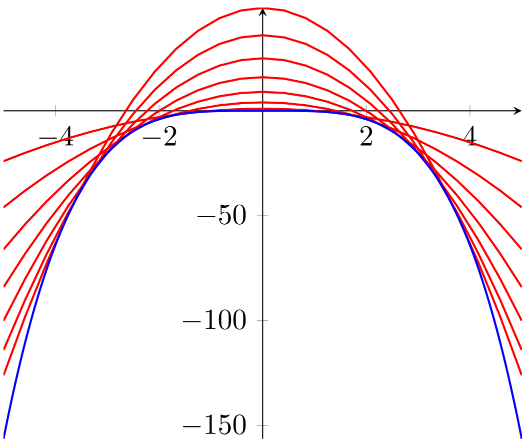
Очевидно, что только решение $y = -\frac{1}{4}x^4$ проходит через $\mathcal{D}$. То есть это решение подозрительное на особое.

Проверим по определению особого решения. Попробуем найти константу A такую, что $\psi(x) = Ax^2 + A^2$ удовлетворяет следующим условиям для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \psi(x_0) = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ \psi'(x_0) = -x_0^3, \\ \psi(x) \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall\, x \in U(x_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax_0^2 + A^2 = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ 2Ax_0 = -x_0^3, \\ Ax^2 + A^2 \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall\, x \in U(x_0). \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}x_0^2.$$

Понятно, что при этом A все условия выполняются, а значит кривая $y = -\frac{1}{4}x^4$ является особым решением исходного уравнения.



5 Системы дифференциальных уравнений

5.1 Метод последовательного интегрирования

Пример 13.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что каждое из уравнений содержит только одну функцию, поэтому можно решить их по отдельности

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Пример 14.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + x. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение содержит только одну функцию и мы можем его решить и подставить решение во второе.

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y' = y + C_1 e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t + C_1 t e^t. \end{cases}$$

Пример 15. *Считая $t > 0$, решить систему*

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x, \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t, \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x, \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y' = -\frac{1}{t} y + C_1(1+t^2) + t, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = (C_2 + \int (C_1(1+t^2) + t) t dt) \frac{1}{t}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = (C_2 + C_1(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}) + \frac{t^3}{3}) \frac{1}{t}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = C_2 \frac{1}{t} + C_1(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{4}) + \frac{t^2}{3}, \end{cases}$$

5.2 Метод исключения

Замечание. Под исключением понимается избавление от всех функций кроме одной.

Идея заключается в дифференцировании нескольких из уравнений системы.

Пусть есть система

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \\ y' = g(t, x, y). \end{cases}$$

При условии, что f непрерывно дифференцируемая, у x существует вторая производная. Дифференцируя первое уравнение, получаем

$$x'' = \frac{df}{dt} = f'_t + f'x \cdot x' + f'_y \cdot y' = f'_t + f'_x \cdot f(t, x, y) + f'_y \cdot g(t, x, y).$$

При условии, что y выражается из первого уравнения — $y = \beta(t, x, x')$, подставим в нашу вторую производную

$$x'' = \gamma(x, t, t').$$

Тогда если найдется решение $x(t)$, то можно подставить обратно и получить $y = \beta(t, x, x')$

Пример 16.

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{y}, \\ y' = \frac{1}{x-t}. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{1}{x-t}$ – непрерывно дифференцируема, то из первого уравнения системы, получим

$$y'' = -\frac{x' - 1}{(x-t)^2} = \frac{-\frac{1}{y}}{(x-t)^2}$$

И подставим второе

$$y'' = -\frac{y'^2}{y},$$

Однородное, решается заменой

$$y = C_2\sqrt{C_1 + 2x},$$

Тогда

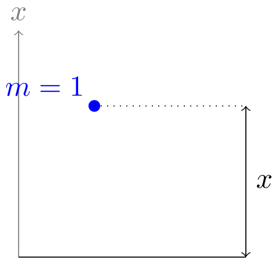
$$x = \frac{1}{y'} + t = \frac{1}{-\frac{1}{C_1+t}} + t = -C_1 + 1 + t$$

5.3 Первый интеграл

Определение 1. Функция $u : \Sigma \subset \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы $r' = f(r)$, если для любого решения φ этой системы $u(\varphi(t)) \equiv const$.

Замечание. Важно, что в правой части системы явно нет t (такие системы называются автономными).

Замечание. Рассмотрим задачу движения тела над поверхностью земли. По второму закону Ньютона



$$x'' = -g.$$

Запишем эквивалентную систему данному уравнению:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -g. \end{cases}$$

Ее решение есть $\begin{cases} x = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2, \\ v = -gt + c_1, \end{cases}$

Рассмотрим функцию полной механической энергии системы:

$$u(x, v) = \frac{v^2}{2} + gx.$$

Докажем, что это первый интеграл системы. Подставим решение в эту функцию

$$u(-\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2, -gt + c_1) = \frac{(-gt + c_1)^2}{2} + g\left(-\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2\right) =$$
$$= \cancel{\frac{g^2t^2}{2}} - \cancel{gtc_1} + \frac{c_1^2}{2} - \cancel{\frac{g^2t^2}{2}} + \cancel{gtc_1} + c_2g = \frac{c_1^2}{2} + c_2g.$$

Таким образом, получили константу при каждом конкретном решении, а значит это первый интеграл по определению.

Замечание. Можно было по-другому проверить. Например логично, что если это первый интеграл, то $u'(\varphi(t)) = 0$.

Предложение. *С другой стороны, нелогично находить первый интеграл, уже зная решение системы. Хочется применять его в обратную сторону: используя первый интеграл, находить решение системы уравнения.*

Попробуем это сделать в нашем примере.

Так как $u(x, v) = \frac{v^2}{2} + gx = const$, то можно выразить какую-нибудь из переменных через вторую. Тогда, подставляя в уравнение системы, мы получим уже дифференциальное уравнение относительно только одной переменной, которое решать уже легче.

Например, попробуем выразить $x = \frac{1}{g}\left(const - \frac{v^2}{2}\right)$ и подставим в первое уравнение системы

$$x' = v \Leftrightarrow -\frac{1}{g}vv' = v \Leftrightarrow v' = -g.$$

Предложение (Поиск первого интеграла для системы 2-ого порядка)**.** *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Пусть (x, y) – какое-то решение этой системы, тогда

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \implies g(x, y)dx = f(x, y)dy.$$

То есть (x, y) – параметрическое решение уравнения $g(x, y)dx = f(x, y)dy$. Иначе говоря, (x, y) – параметрическое задание интегральной кривой.

Пусть общее решение этого уравнения определено формулой $u(x, y) = c$. А тогда, подставляя исходное решение в это решение, получаем тождество $u(x(t), y(t)) \equiv c$. Таким образом, u – первый интеграл.

Пример 17. *Решить систему уравнений при $x, y > 0$*

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ y' = \frac{y}{(x+y)^2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{(x+y)^2}, \end{cases} \implies \frac{y}{(x+y)^2}dx = \frac{x}{(x+y)^2}dy \implies ydx = xdy \implies y = cx.$$

Таким образом, $u = \frac{y}{x}$ – первый интеграл ($u = c$).

Подставим во второе уравнение системы

$$y' = \cancel{c}x' = \frac{\cancel{cx}}{(c+1)^2 x^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow xdx = \frac{dt}{(c+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} =$$

$$= \frac{t}{(c+1)^2} + C \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2t}{(c+1)^2} + C}.$$

$$y = cx = c \cdot \sqrt{\frac{2t}{(c+1)^2} + C}.$$

Пример 18. *Решить систему уравнений при $x > z > 0$ и $y > 0$*

$$\begin{cases} x' = x^2 + z^2, \\ y' = y(x - z), \\ z' = 2xz. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что первое и третье уравнения системы не зависят от y. Решим их, как систему двух уравнений, используя первый интеграл

$$2xzdx = (x^2+z^2)dz \implies \frac{dx}{dz} = \frac{x^2+z^2}{2xz} = \frac{1}{2z}x + \frac{z}{2}x^{-1},$$

Это уравнение Бернулли, замена $t = \frac{x^2}{2}$.

$$xx' = \frac{1}{2z}x^2 + \frac{z}{2} \implies t' = \frac{1}{z}t + \frac{z}{2} \implies t = \left(C + \int \frac{z}{2}\cdot e^{-\ln z}\right)\cdot e^{\ln z}$$

6 Использование теоремы Пикара для нахождения приближенного решения задачи Коши

Пример 19. *Укажите какой-нибудь промежуток, на котором существует единственное решение при $|t| < 1$, $|x| < 1$.*

$$x' = t^2 + x^2, \qquad x(0) = 0.$$

Доказательство. Понятно, что заданное множество $G : |t| < 1, |x| < 1$ – это квадрат, который является областью. А также $f(t,x) = t^2 + x^2 \in C(G)$.

Рассмотрим производную функции f по всем переменным кроме t

$$f'_x = 2x \in C(G).$$

Таким образом область и функция удовлетворяют теореме Пикара с простым условием.

Рассмотрим прямоугольник П со сторонами $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{2}$.

Замечание. На самом деле не всегда следует искать $\|f\|$. Достаточно просто ограничить его каким-то M: $\|f\| \leqslant M$. Тогда очевидно, что $h \geqslant \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. А значит, если на отрезке $[0,h]$ существует единственное решение, то на $\left[0, \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}\right]$ тоже.

Тогда, так как $\|f\| \leqslant |t|^2 + |x|^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, то на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ по теореме Пикара существует единственное решение.

Пример 20. *Укажите какой-нибудь промежуток, на котором существует единственное решение при* $|t| < 1$

$$x' = t + \sin(t^2 + x), \qquad x(0) = 0.$$

Решение. Заданное условием $|t| < 1$ множество G является областью, при этом $f(t, x) = t + \sin(t^2 + x) \in C(G)$. Рассмотрим $f'_x(t, x) = \cos(t^2 + x) \in C(G)$.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Тогда $\|f\| = |t + \sin(t^2 + x)| \leqslant |t| + |\sin(t^2 + x)| \leqslant \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

А значит по теореме Пикара с простым условием, получаем, что для $h = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2}$ на отрезке $[-h, h]$ существует единственное решение задачи Коши.

Замечание. На самом деле, взяв $a = 1 - \varepsilon$, $b = (2 - \varepsilon)(1 - \varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$, получим, что на отрезке вида $[-(1 - \varepsilon), 1 - \varepsilon]$ существует единственное решение.

Предложение. *В общем случае последовательность из доказательства теоремы Пикара образуется*

$$\varphi_0(t) = r_0,$$
$$\varphi_m(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{m-1}(\tau))d\tau.$$

Пример 21. *Построить третье приближение Пикара* x_3

$$x' = t - x^2, \qquad x(0) = 0.$$

Решение.

$$\varphi_0(t) = 0,$$
$$\varphi_1(t) = \int\limits_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_2(t) = \int\limits_0^t (\tau - \left(\frac{\tau^2}{2}\right)^2) d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20},$$

$$\varphi_3(t) = \int\limits_0^t \left(\tau - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^5}{20}\right)^2\right) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20} + \frac{t^8}{160} - \frac{t^{11}}{4400}.$$

Замечание.

$$\int \varphi(t)dt = \begin{bmatrix} \int \varphi_1(t)dt, \\ \int \varphi_2(t)dt \end{bmatrix}.$$

Замечание. Для применения теоремы Пикара к уравнениям высшего порядка, необходимо переходить к эквивалентной системе уравнений первого порядка.

Пример 22. *Построить второе приближение Пикара*

$$y'' + (y')^2 - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Доказательство. Запишем эквивалентную систему дифференциальных уравнений: пусть $y_1 = y, y_2 = y'$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_2^2 + 2y_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 1 - 0^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 2\tau \\ 2 \cdot 1 - 4\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t - \frac{4}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда приближение Пикара для исходного уравнения есть $y = y_1 = t^2 + 1$.

7 Продолжение решений

Пример 23. *Доказать, что решение задачи Коши*

$$y' = x^3 - y^3, \qquad y(x_0) = y_0$$

продолжимо на $(x_0, +\infty]$.

Доказательство. Доказательство основывается на рассмотрении всевозможных квадратов - компактов с центром в начале, и утверждении, что интегральная кривая выходит по правой границе квадрата. из области $x \geqslant y$ возрастающая ($y' = (x-y)(x^2+xy+y^2) \geqslant 0$) кривая не может попасть в область $y \geqslant x$ (интересное доказательство через определение дифференцируемости и сравнение со значением y). а из $y \geqslant x$ она точно перейдет в $x \geqslant y$. тогда получается мы точно выйдем по правой границе.

8 Линейные однородные системы

Пример 24.

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $r' = Ar$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2\}.$$

Найдем собственные векторы

$\boxed{\lambda = 1}$

$$(A - E)\, h_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha. \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$(A - 2E)\, u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ -\frac{3}{2}\beta \end{bmatrix}.$$

Тогда фундаментальным решением будет

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}$$

Пример 25.

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Решение. В матричном виде

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i.$$

Найдем собственные векторы

$\boxed{\lambda = 2 + i}$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ -i\lambda \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2 - i}$

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ i\beta \end{bmatrix}$$

Тогда овеществленным решением будет

$$\operatorname{Re} e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \operatorname{Im} e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},$$

то есть

$$e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Пример 26.

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z, \\ y' = 6x - y - 6z, \\ z' = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$$

Решение. Собственные числа: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Найдем собственные и присоединенные векторы

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем присоединенный к нему

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \gamma + 1 \\ 3 \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Тогда фундаментальное решение есть

$$r = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 t e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$