Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

# Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

**Магазенков Е. Н.**

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

# Часть I

# Уравнения первого порядка

## 1 Основные определения

**Определение 1.** Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

**Определение 2.** Функция $\varphi$ является решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ на промежутке $\langle a, b \rangle$, если

$$\varphi \in C \langle a, b \rangle,$$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

**Определение 3.** Интегральной кривой уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется график его решения.

**Определение 4.** Общим решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется множество всех его решений.
Частным же решением называют какое-то конкретное решение.

**Определение 5.** Общим интегралом уравнения $F(x, y, y') = 0$ называют соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$, где $C$ – константа, перебирающая некоторые значения и задающая решения.

*Замечание.* Общий интеграл не всегда описывает общее решение.

## 2 Уравнение в нормальной форме

**Определение 6.** Уравнение $y' = f(x, y)$, разрешённое относительно производной, называют нормальным уравнением или уравнением в нормальной форме.
При этом областью задания уравнения называется область определения его правой части $\operatorname{dom} f$.

# 3 Линейные уравнения 1-ого порядка

**Определение 7.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1}$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛНУ или просто ЛУ).

**Определение 8.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y \tag{2}$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОУ).

*Замечание.* Вообще, мы уже неоднократно сталкивались и решали уравнения такого вида. Однако для строгого обоснования наших решений рассмотрим следующую лемму.

**Лемма 1** (Общее решение ЛОУ)**.** *Пусть в линейном однородном уравнении $y' = p(x)y$ функция $p(x) \in C\,(a, b)$.*

*Тогда его общее решение имеет вид*

$$y = c \cdot e^{\int p}, \tag{3}$$

*где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int p$ понимается какая-то производная функции $p(x)$.*

*Доказательство.* Воспользуемся эквивалентным преобразованием

$$y' = p(x)y \Leftrightarrow dy = p(x)ydx.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

1. $y = 0$ – очевидно решение,
2. при $y > 0$: разделим на $y$ с обеих сторон

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx,$$

$$\ln y = \int p(x)dx,$$

$$y = A \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } A > 0.$$

3. при $y < 0$: аналогично, но появляется минус, который можно засунуть в константу.
$$y = B \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } B < 0.$$

4. Осталось разобрать случай, когда интегральная кривая проходит через границу $y = 0$. Однако, рассматривая все кривые, видно, что они заданы строго в одной полуплоскости относительно $y = 0$:
$$y = A \cdot e^{\int p} > 0, \quad \text{где } A > 0, \quad y = B \cdot e^{\int p} < 0, \quad \text{где } B < 0.$$

Таким образом, действительно, общее решение ЛОУ можно записать в виде $y = c \cdot e^{\int p}$.

*Замечание.* Теперь мы строго доказали, ранее использовавшиеся факты. Как вывод из этого, мы получаем, что теперь можно каждый раз не решать ЛОУ, а просто пользоваться формулой. Или хотя бы всегда проверять, похоже ли решение на полученное в общем виде.

*Замечание.* Далее мы будем рассматривать общее решение неоднородного уравнения. Мы используем достаточно интересный метод доказательства: так, мы предоставим какое-то решение, которое мы назовем общим, а далее докажем, что любое другое решение на самом деле задается именно нашим выражением.

Оказывается, что такой метод можно применять и для решения любых уравнений. Достаточно лишь показать, что представленное выражение является решением, а также, что любое другое произвольное решение задается этим выражением.

**Лемма 2** (Общее решение ЛНУ)**.** *Пусть в линейном уравнении $y' = p(x)y + q(x)$ функции $p(x)$, $q(x) \in C\,(a,b)$.*

*Тогда его общее решение имеет вид*

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}, \tag{4}$$

*где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int f$ понимается какая-то производная функции $f(x)$.*

*Доказательство.*

- Докажем, что данное данное множество решений включено в общее множество решений исходного уравнения. Проще говоря, проверим, правда ли, что представленное выражение является решением.
  Найдем $y'(x)$:
  $$y' = q\cdot e^{-\int p}\cdot e^{\int p} + \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot pe^{\int p} = q + \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot pe^{\int p}.$$
  Тогда, подставляя в исходное уравнение:
  $$q + \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot pe^{\int p} \equiv p\cdot\left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot e^{\int p} + q,$$
  получаем верное тождество.
- Докажем, что произвольное решение задается формулой $y = \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot e^{\int p}$.
  Пусть $\varphi \in (\alpha, \beta)$ – решение, не задающееся этой формулой.
  Рассмотрим $x_0 \in (\alpha, \beta):\ \varphi(x_0) = y_0$.
  Найдем такое $c \in \mathbb{R}$, что наше решение проходит через точку $(x_0, y_0)$.
  $$\left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot e^{\int p}\Big|_{x=x_0} = y_0,$$
  $$c = \left(y_0\cdot e^{-\int p} - \int q\cdot e^{-\int p}\right)\Big|_{x=x_0}.$$
  Пусть решение с этим $c$ – решение $\psi$. Тогда мы получили два решения задачи Коши $y = \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot e^{\int p}$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ на интервале $(\alpha, \beta)$. Так как $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C\left(()\, a, b\right)$, то по теореме об единственности решения задачи Коши $\varphi = \psi$, что противоречит предположению о том, что $\varphi$ не задается решением вида $y = \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot e^{\int p}$.
  Таким образом, действительно любое решение можно представить в виде $y = \left(\int q\cdot e^{-\int p} + c\right)\cdot e^{\int p}$.

Объединяя эти два факта, мы получаем, что показанное нами решение действительно является общим решением линейного дифференциального уравнения.

*Замечание.* В итоге мы имеем формулу для решения ЛУ, в которую можно подставить нужные значения. Однако достаточно тяжело помнить ее наизусть, поэтому нужно иметь какой-то метод, который сможет нас привести к этому решению. Напомним, что любой метод, который будет давать решение вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$ окажется верным, так как мы уже доказали, что это общее решение.

**Предложение** (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной)**.** *Пусть стоит задача решить линейное уравнение $y' = p(x)y+q(x)$.*

*Рассмотрим соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение $y' = p(x)y$. Его общее решение мы знаем (либо можем найти): $y = c \cdot e^{\int p}$.*

*Рассмотрим теперь $c$ не как константу, а как функцию $c(x)$.*

*Подставляя $y = c(x) \cdot e^{\int p}$ в исходное линейное уравнение, получаем:*

$$c'(x) \cdot e^{\int p} + \cancel{c(x) \cdot pe^{\int p}} = \cancel{pc(x) \cdot e^{\int p}} + q,$$

$$c'(x) = q \cdot e^{-\int p}.$$

*Это уравнение мы снова можем решить:*

$$c(x) = \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}.$$

*Тогда, возвращаясь к решению однородного уравнения и подставляя $c$ туда, получаем*

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}\right) \cdot e^{\int p},$$

*то есть общее решение линейного уравнения.*

# 4 Уравнения Бернулли и Рикатти

*Замечание.* Существует огромное количество уравнений первого порядка, которые можно свести к линейному какой-либо заменой. В этом пункте будут разобраны такие уравнения, представленные в XVII веке Якобом Бернулли [1] и Рикатти [2].

[1] Якоб Бернулли (1655–1705, Швейцария)

[2] Рикка́ти Якопо Франческо (1676–1754, Италия)

**Определение 9.** Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \tag{5}$$

где $\alpha \neq \{0, 1\}$, называется дифференциальным уравнением Бернулли.

**Лемма 3.** *Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$ при $y \neq 0$ заменой $t = y^{1-\alpha}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению.*

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha.$$

Поделим обе части уравнения на $y^\alpha$:

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Сделаем замену $t = y^{1-\alpha}$, тогда $t' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$:

$$\frac{1}{1-\alpha}t' = p(x)t + q(x),$$

$$t' = (1-\alpha)\left(p(x)t + q(x)\right).$$

Получили линейное дифференциальное уравнение.

**Определение 10.** Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{6}$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

*Замечание.* Уравнение Бернулли является частным случаем уравнения Рикатти при $r(x) \equiv 0$. Рикатти был знаком с семьей Бернулли, поэтому связь между этими уравнениями неслучайна.

**Лемма 4.** *Пусть $\varphi$ – какое-то решение уравнения Рикатти $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Подстановка $y = z + \varphi$ сводит это уравнение к уравнению Бернулли.*

*Доказательство.* Найдем $y'$:

$$y' = z' + \varphi'.$$

Так как $\varphi$ – решение уравнения Рикатти, то

$$\varphi' = p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x).$$

Тогда $y' = z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x)$.

Подставим замену в уравнение Рикатти

$$z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + \cancel{r(x)} = p(x)(z+\varphi)^2 + q(x)(z+\varphi) + \cancel{r(x)},$$

$$z' = z\underbrace{(2p(x)\varphi + q(x))}_{P(x)} + \underbrace{p(x)}_{Q(x)}z^2,$$

$$z' = P(x)z + Q(x)z^2.$$

Получили уравнение Бернулли для $\alpha = 2$.

# 5 Уравнение в полных дифференциалах

**Определение 11.** Пусть существует функция $u$ такая, что $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (то есть $u'_x = P$, $u'_y = Q$). Тогда уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

**Теорема 1** (Общее решение УПД)**.** *Пусть $u \in C^1(G)$, причем $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $\varphi(x)$ является общим решением уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ на интервале $(\alpha,\beta)$ в том и только том случае, когда $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и $\varphi$ неявно задается уравнением $u(x,y) = c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Необходимость:
Так как $\varphi$ – решение, то $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и

$$P(x,\varphi(x))dx + Q(x,\varphi(x))d(\varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Заметим, что левая часть есть полная производная функции $u(x,\varphi(x))$.

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) \equiv 0,$$

$$u(x,\varphi(x)) \equiv c.$$

Таким образом, получаем, что $\varphi$ действительно неявно задана уравнением $u(x, y) = c$.

Достаточность:
Так как $\varphi$ неявно задана уравнением $u(x, y) = c$, то

$$u(x, \varphi(x)) \equiv c.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} u(x, \varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Так как $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, то $\varphi$ является решением уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ по определению решения дифференциального уравнения.

*Замечание.* Назревает хороший вопрос: откуда эту функцию $u$ взять и почему вообще она существует?

Пусть есть функция $u : u'_x = P,\ u'_y = Q,\ u \in C^2(G)$. Рассмотрим вторые производные:

$$\left.\begin{aligned} u_x y'' &= P'_y, \\ u_y x'' &= Q'_x \end{aligned}\right\} \implies P'_y = Q'_x.$$

На основе этого утверждения появляется следующая теорема.

**Теорема 2** (Признак УПД). *Пусть $P, Q \in C^1(G)$, причем $P'_y = Q'_x$, где $G$ – односвязная область. Тогда существует функция $u : u'_x = P, u'_y = Q$. Кроме того, все такие функции имеют вид*

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + c,$$

*где $c \in \mathbb{R}$, $\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})$ – кривая в области $G$, соединяющая точки $(x_0, y_0)$ и $(\tilde{x}, \tilde{y})$.*

*Замечание.* Таким образом, при определенных условиях мы поняли, как можно найти эту функцию $u$. И далее, решая уравнение $u = c$, можем найти общее решение УПД.

Однако вычисление данного криволинейного интеграла зачастую является непростой задачей, поэтому рассмотрим другие методы.

**Определение 12.** Функция $u$ при условии $u'_x = P,\ u'_y = Q$ называется потенциалом поля $(P, Q)$, а поле $(P, Q)$ – потенциальным полем.

**Пример 1.**
$$e^{-y}dx - \big(xe^{-y} + 2y\big)\,dy = 0.$$

*Решение.* Область определения уравнения есть $\mathbb{R}^2$ – односвязное множество.

Рассмотрим производные коэффициентов $P = e^{-y}$ и $Q = (xe^{-y} + 2y)$:

$$P'_y = -e^{-y} = Q'_x.$$

Таким образом, по признаку – это уравнение в полных дифференциалах.

Не будем вычислять криволинейный интеграл. Но рассмотрим систему

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -xe^{-y} - 2y \end{cases}.$$

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой $y_0$:

$$u'_x(x, y_0) = e^{-y_0} \implies u(x, y_0) = \int e^{-y_0}dx = xe^{-y_0} + c(y_0).$$

Подставляя во второе уравнение системы, получаем

$$\big(xe^{-y} + c(y)\big)'_y = -xe^{-y} - 2y,$$

$$\cancel{-xe^{-y}} + c'(y) = \cancel{-xe^{-y}} - 2y,$$

$$c' = -2y,$$

$$c(y) = -y^2 + A.$$

Таким образом, $u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$, а значит уравнение $xe^{-y} - y^2 = C$ задает решение УПД.

*Замечание.* В примере был показан другой способ решения УПД, избегающий криволинейное интегрирование. Однако данный способ далеко не всегда оказывается возможен. По крайней мере, не всегда можно взять интеграл, чтобы найти $u(x, y_0)$ (при плохой области интеграл по прямой будет достаточно сложен).

**Определение 13.** Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если при домножении этого уравнения на $\mu$ получается уравнение в полных дифференциалах.

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \text{ — УПД}.$$

*Замечание.* Если $\mu$ – интегрирующий множитель уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, причем $\mu, P, Q \in C^1(G)$. Тогда $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$. Расписывая производную получаем уравнение в частных производных

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x.$$

Решать его оказывается совсем непросто, однако чисто теоретически это является способом нахождения интегрирующего множества.

Однако стоит помнить, что нам не требуется находить общее решение. Нам достаточно лишь какое-то частное решение. Иногда его можно найти, как в следующем примере.

**Пример 2.** *Рассмотрим линейное уравнение*

$$y' = p(x)y + q(x),$$

*где* $p \neq 0$*. Попробуем найти его интегрирующий множитель.*

*Решение.* Перепишем исходное уравнение

$$(p(x)y + q(x))\,dx - dy = 0.$$

Заметим, что это уравнение не является уравнением в полным дифференциалах.

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя.

$$\mu'_y\,(p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = -\mu'_x.$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда первое слагаемое слева обнулится

$$\mu p(x) = -\mu'_x,$$

$$\mu = Ce^{-\int p}.$$

Так как нам нужно лишь какое-то решение, то рассмотрим любое $C$, например $C = 1$.

Таким образом, $\mu = e^{-\int p}$ – интегрирующий множитель.

Умножим на $\mu$ исходное уравнение

$$y'e^{-\int p} = p(x)ye^{-\int p} + q(x)e^{-\int p},$$

$$y'e^{-\int p} - p(x)ye^{-\int p} = q(x)e^{-\int p}.$$

Заметим, что в левой части стоит производная произведения $\left(ye^{-\int p}\right)$

$$\left(ye^{-\int p}\right) = q(x)e^{-\int p},$$

$$ye^{-\int p} = \int q(x)e^{-\int p} + A,$$

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p} + A\right)e^{\int p}.$$

Таким образом, получили общее решение линейного уравнения, а значит решение привело к верному ответу.

*Замечание.* Таким образом, мы получили еще один способ нахождения решения линейного уравнения, которым можно пользоваться на практике. Нужно запомнить интегрирующий множитель $\mu = e^{-\int p}$, а также свертывание в производную произведения.

# Часть II
# Уравнения, не разрешимые относительно произодной

## 6 Уравнение, разрешимое относительно производной

**Пример 3.** *Уравнение $(y')^3 - 2yx = 0$ очевидно является разрешимым относительно производной: $y' = \sqrt[3]{2yx}$.*

**Пример 4.** *Рассмотрим уравнение $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$.*

*Рассмотрим отдельно решения уравнений $y' = 2x$ и $y' = -2x$. Хочется сказать, что вместе эти решения дадут общее решение исходного. Однако это не так! Очевидно, что решениями являются параболы с ветвями вниз и вверх соответственно. Тогда можно посмотреть на кривую, содержащую левую ветвь одной из парабол и правую другой (Рис. 1). Это также интегральная кривая, так как она очевидно гладкая. Оказывается, что только в точке с абсциссой $x = 0$ возможны такие интегральные кривые, так как иначе гладкость не соблюдается.*

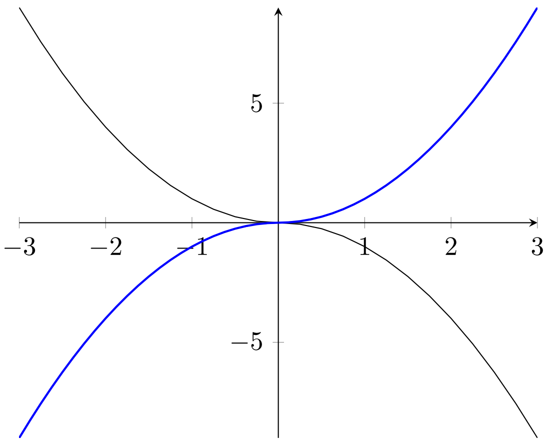



*Рис. 1*

# 7 Метод введения параметра

**Определение 14.** Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и $\forall t \in I\ f(\varphi(t)) = \psi(t)$.

*Замечание.* Заметим, что определение можно переписать немного по-другому. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и множество $[(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I]$ является графиком функции $f$.

Нетрудно понять, что эти определения эквивалентны.

**Пример 5.** *Зададим функцию $f(x) = 1, x \in [-1, 1]$ параметрически.*

*Например,* $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. *Очевидно, что это задание удовлетворяет определению.*

**Предложение.** *Рассмотрим уравнение $F(x, y') = 0$ от двух переменных $x$ и $y'$. Пусть оно задает некоторую кривую $\gamma = \{(x, y)\,|F(x, y') = 0\}$ плоскости $xOy'$.*

*Возьмем функцию $\varphi$ такую, что эта кривая является графиком функции $\varphi'$.*

*Тогда $F(x, \varphi'(x)) \equiv 0$.*

*Идея нахождения решения такого уравнения (в котором нельзя выразить $y'$) заключается в том, чтобы задать функцию $\gamma$ параметрически* *и найти $y$ также параметрически.*

*Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, $\varphi' \neq 0$, $\psi \in C(\alpha, \beta)$, причем эти функции задают параметрически наше уравнение $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$.*

*Тогда функция, задаваемая параметрически*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

*является решением уравнения $F(x, y') = 0$.*

*Замечание.* Проверим, что функция действительно является решением.

Во-первых, проверим, что такое задание действительно является функцией, то есть каждому $x$ соответствует ровно один $y$. Так как $\varphi' \neq 0$, то $\varphi$ строго возрастает и тогда $\varphi$ – биекция. Рассматривая обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, получаем $y = g \circ \varphi^{-1}$.

Во-вторых, проверим непрерывность и дифференцируемость решения. Так как $g \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, то их композиция также непрерывно дифференцируема.

В-третьих, проверим, что функция обращает наше уравнение в тождество.

$$F(x, y')|_{y = g\circ\varphi^{-1}(x)} = F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right).$$

Так как $\left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x) = g'(\varphi^{-1}(x))\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = (\psi(t)\varphi'(t))_{t=\varphi'(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$, то получаем

$$F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right) = F\left(x, \psi(\varphi^{-1}(x))\right) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, наша функция действительно действительно обращает выражение в нуль. А значит, эта функция является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

**Пример 6.**

$$e^{y'} + y' = x.$$

*Решение.* Параметризуем множество, задаваемое этим уравнением

$$\left\{(x, y') : \ e^{y'} + y' = x\right\}.$$

Пусть $y' = t$. Тогда $x = e^t + t$.

*Замечание* (Основное соотношение метода введение параметра).

$$dy = y'_x dx.$$

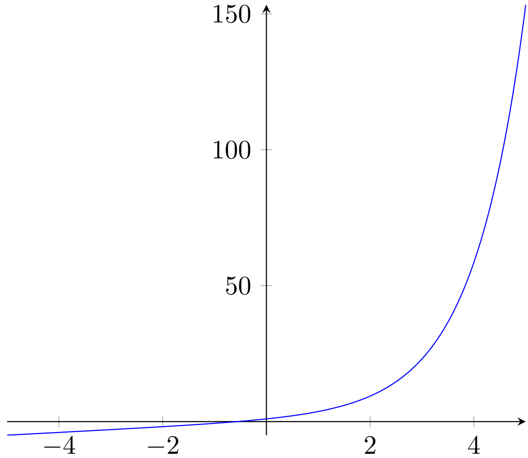



*Рис. 2*

Подставляя наши функции получаем

$$dy = t \cdot d(e^t + t),$$

$$dy = t \cdot \left(e^t + 1\right),$$

$$y = \int t \cdot \left(e^t + 1\right) dt + c.$$

В итоге мы пришли к той же самой формуле, что и доказали ранее. А значит подстановки подходят.

Тогда следующая функция является решением

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

**Предложение** (Общий случай метода введения параметра)**.** *Пусть есть уравнение* $F(x, y, y') = 0$, *задающее какую-то поверхность* $\sigma = ((x, y, y') \,|\, F(x, y, y') =$

*Пусть* $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ *– параметризация* $\sigma$.

*Подставим эту параметризацию в основное соотношение* $dy = y'_x dx$.

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(u, v) \left(\varphi'_u du + \varphi'_v dv\right).$$

*Пусть $v = g(u, C)$ – решение этого уравнения.*

*Тогда получаем* $\begin{cases} x = \varphi(u, v = g(u, C)), \\ y = \psi(u, v = g(u, C)) \end{cases}$ *– параметризация решений исходного уравнения.*

**Пример 7.**

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0.$$

*Решение.* Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln v. \end{cases}$$

Тогда подставляя в основное соотношение, получаем

$$\cancel{vdu} + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = \cancel{vdu},$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = 0,$$

При $\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$, получаем $v = 2e^{2u-1}$. Тогда $y = e^{2x-1}$.

При $dv = 0$, получаем $y = cx - \frac{c}{2} \ln \frac{c}{2}$.

*Замечание.* Важно помнить, что это могут быть не все решения уравнения!!! Такой случай уже был рассмотрен в примере 4.

# 8 Задача Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной

*Замечание.* Мы уже говорили о решении задачи Коши для нормального уравнения. Однако в силу того, что уравнение $F(x, y, y') = 0$ задает не одно поле направлений, а целую совокупность, оказывается, что через одну точку могут проходить несколько интегральных кривых, однако под разными углами. Именно поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно $y'$, требует дополнительного начального условия на $y'$.

**Определение 15.** Задачей Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$. (Под $y'_0$ понимается какое-то числовое значение, а не производная. Такое обозначение используется для визуального соответствия.)

**Предложение.** *Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы, то есть $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$.*

**Теорема 3** (Существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешенного относительно производной)**.** *Пусть $F \in C^1(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область. Пусть также точка $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ такая, что $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $x_0$ существует единственное решение задачи $F(x, y, y') = 0$ при условиях* $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$

*Доказательство.* TODO: PROOF

**Определение 16.** Решение $\varphi$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ на $\langle a, b \rangle$ называется особым, если для любой точки $x_0 \in \langle a, b \rangle$ найдется решение $\psi$ такое, что

# Часть III
# Системы дифференциальных уравнений

## 9

## 10 Вспомогательные

**Определение 17.** Под нормой вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем понимать $|x| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

**Определение 18.** Нормой матрицы $A = \left\| a_{ij} \right\|_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ будем называть $|A| = \max\limits_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} |a_{ij}|$.

**Лемма 5.** *Пусть* $f \in C([a,b])$. *Тогда*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

*Доказательство.*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \max_{i=1,\ldots,n}\left|\int_a^b f_i(t)dt\right| \leqslant \max_{i=1,\ldots,n}\int_a^b |f_i(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,\ldots,n}\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

**Лемма 6.** *Пусть* $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in Mat_{n\times k}(\mathbb{R})$. *Тогда* $|A\cdot B| \leqslant n \cdot |A|\cdot|B|$.

*Доказательство.* Вспомним, как вводилось определение произведения матриц: $[A\cdot B]_{i,j} = \sum\limits_{l=1}^{n} [A]_{i,l}\cdot[B]_{l,j}$. Тогда перейдем к нормам

$$\left|[A\cdot B]_{i,j}\right| = \left|\sum_{l=1}^{n}[A]_{i,l}\cdot[B]_{l,j}\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n}\left|[A]_{i,l}\right|\cdot\left|[B]_{l,j}\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n}|A|\cdot|B| = n\cdot|A|\cdot|B|\,.$$

**Определение 19.** Функция $f : D \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $D$, если $\exists L : \quad \forall r_1, r_2 \in D \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant L|r_2 - r_1|$. И пишут $f \in Lip(D)$.

**Пример 8.** *Рассмотрим функцию* $f(x) = \sqrt{x}$ *на отрезке* $D = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$|f(r_2) - f(r_1)| = |f'(\xi)|\,|r_2 - r_1| \leqslant \underbrace{\left|\max_{\left[\frac{1}{2},1\right]} f'(\xi)\right|}_{L}|r_2 - r_1|\,.$$

*Таким образом, функция* $f(x) = \sqrt{x}$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $D = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

**Предложение.** *Этот пример наводит на идею того, что всегда, когда производная ограничена, мы можем найти константу Липшица как* $L = \left|\max\limits_{\left[\frac{1}{2},1\right]} f'(\xi)\right|$.

**Предложение.** *На самом деле можно показать, что* $C^1[a,b] \subset Lip\,[a,b] \subset C\,[a,b]$.

**Пример 9.** *Рассмотрим все ту же функцию* $f(x) = \sqrt{x}$, *но на множестве* $D = [0,1]$. *Покажем, что она не Липшицива.*

*Доказательство.* Пусть $f \in LipD$, то есть нашлось такое $L$, что

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leqslant L|r_2 - r_1|.$$

Возьмем в качестве точки $x_1$ точку 0, а точку $x_2$ устремим к нулю

$$\sqrt{x_2} \leqslant L\,|x_2| \implies \infty \underset{x_2 \to 0}{\leftarrow} \frac{1}{\sqrt{x_2}} \leqslant L \underset{x_2 \to 0}{\to} L,$$

что невозможно, а значит исходное предположение неверно и функция не Липшицива.

*Замечание.* Однако понятно, что, отступив на чуть-чуть от нуля в множестве $D$, функция сразу станет Липшицевой. Именно поэтому появляется понятие локальной Липшицевости.

**Определение 20.** $f : D \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве $D$, если $\forall r \in D \implies \exists U(r) : \quad f \in Lip(D \cap U)$. И пишут $f \in Lip_{loc}D$.

**Пример 10.** *Несложно показать, что* $f(x) = \sqrt{x}$ *на множестве* $D = (0,1]$ *удовлетворяет условию локальной Липшицевости, но не глобальной.*

**Определение 21.** $f : D \to \mathbb{R}^n_{t,r}$ удовлетворяет условию Липшица по $r$ на множестве $D$, если $\exists L : \quad \forall (t,r_1),(t,r_2) \in D \implies |f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leqslant L|r_2 - r_1|$. И пишут $f \in Lip_r D$.

**Определение 22.** $f : D \to \mathbb{R}^n_{t,r}$ удовлетворяет условию Липшица по $r$ локально на множестве $D$, если $\forall (t,r) \in D \implies \exists U((t,r)) : \quad f \in Lip_r(D \cap U)$. И пишут $f \in Lip_{r,loc}D$.

**Пример 11.** *Рассмотрим* $f(t,r) = \frac{1}{t} + \frac{1}{r}$ *на множестве* $D = (0,+\infty) \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

*Посмотрим на разность значений в разных точках* $(t_1,r_1)$, $(t_2,r_2)$*:*

$$|f(t_2,r_2) - f(t_1,r_1)| = \left|\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right|$$

*Понятно, что при очень маленьких $t_1, t_2$ разность оказывается очень большой, а значит мы ничем не ограничим сверху. То есть глобальное условие Липшица не выполнено.*

*Однако локально*

$$\left|\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right| \leqslant \left|\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| + \left|\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mu_1 |t_2 - t_1| + \mu_2 |r_2 - r_1| \leqslant \underbrace{\max \langle \mu_1, \mu_2 \rangle \cdot 2}_{L} |(t_1, r_1) - (t_2, r_2)|$$

*она удовлетворяет условию Липшица.*

**Пример 12.** *Рассмотрим $f(t, r) = \sqrt{t}\sqrt{r}$ на множестве $[0, +\infty) \times (0, 1)$.*

*Локальному условию Липшица она не удовлетворяет, рассматривая точку 0.*

*Однако по $r$ она локально Липшицева:*

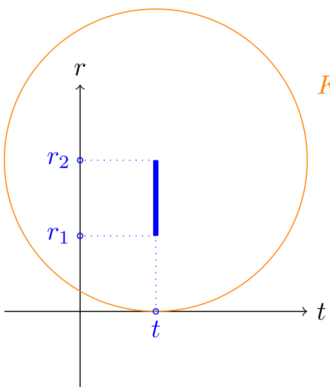
$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| = |\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}| \leqslant L |r_2 - r_1|,$$

*где в качестве $L$ возьмем максимум производной корня.*

**Лемма 7** (Достаточное условие для локальной Липшицевости по $r$)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f : G \to \mathbb{R}^m$. А также $f'_r \in Mat_{m,n}(C(G))$. Тогда $f \in Lip_{r,loc}(G)$.*

*Кроме того, если $K$ – выпуклый компакт, а $M = \max\limits_K |f'_r|$, то $f \in Lip_r K$ с константой Липшица $L = nM$.*

*Доказательство.* Пусть $K$ – выпуклый компакт.



Рассмотрим разность значений:

$$|f(t,r_2)-f(t,r_1)|=\Delta.$$

Так как $K$ – выпуклое, то отрезок тоже принадлежит $K$.
Рассмотрим функцию $g(s)=f(t,r_1+s(r_2-r_1))$, определенную на $[0,1]$. Заметим, что $g$ непрерывная, как композиция сужения $f$ на $r$ ($h(r)=f(t,r)$) и линейной там же ($r_1+s(r_2-r_1)$).
Тогда по интегральной теореме Лагранжа

$$\Delta=|g(1)-g(0)|=\left|\int\limits_0^1 g'(s)ds\right|=\left|\int\limits_0^1 h'(r_1+s(r_2-r_1))\cdot(r_1+s(r_2-r_1))'ds\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^1 f'_r(r_1+s(r_2-r_1))\cdot(r_2-r_1)ds\right|\leqslant\int\limits_0^1 n\cdot|f'_r|\cdot|r_2-r_1|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant n\cdot\underbrace{\max_K|f'_r|}_{M}\cdot|r_2-r_1|\,.$$

Таким образом, Лишицива константа равна $n\cdot M$.

Рассмотрим область $G$. Вокруг каждой точки можем рассмотреть брус П, который является компактом, а значит на нем у нас есть глобальная Липшицивость. То есть мы для каждой точки нашли окрестность, в которой есть глобальная Липшицивость, а значит по определению получили локальную Липшицивость на $G$.

**Лемма 8** (Достаточное условие для Липшицивости по $r$)**.** *Пусть $G\subset\mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f:\ G\to\mathbb{R}^m$, $f\in Lip_{r,loc}K$, где $K\in G$ – компакт.*

*Тогда $f$ глобально Липшицива на $K$.*

*Доказательство.* Пусть $f\notin Lip_rK$, то есть

$$\forall L\quad\exists(t,r_2),(t,r_1)\in K:\ |f(t,r_2)-f(t,r_1)|>L\,|r_2-r_1|\,.$$

Найдем для каждого натурального числа $L$ пару таких точек $(t_n,r_n),(t_n,\tilde{r_n})$. Так как $K$ компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, то оно секвенциальный компакт, а значит можно выделить сходящиеся подпоследовательности.

Пусть для первой последовательности есть $\{(t_{k_s},r_{k_s})\}_{s=1}^{\infty}:\quad(t_{k_s},r_{k_s})\to(t,r)$. Выберем во второй последовательности с теми же номерами сходящуюся подпоследовательность $\left\{(t_{k_{s_l}},\tilde{r}_{k_{s_l}})\right\}_{l=1}^{\infty}:\quad(t_{k_{s_l}},\tilde{r}_{k_{s_l}})\to(t,\tilde{r})$.

1. Пусть $r = \tilde{r}$.
   Так как $f \in Lip_{r,loc}K$, то есть на окрестности $U(t,r)$ $f \in Lip_r U$. Пусть условие Липшица выполнено с константой $L$, то есть
   $$\forall (\tau, \rho_1), (\tau, \rho_2) \in D \implies |f(\tau, \rho_2) - f(\tau, \rho_1)| \leqslant L|\rho_2 - \rho_1|.$$
   Так как начиная с какого-то номера все элементы наших последовательностей лежат в окрестности $U(t,r)$, то, выбирая $l$ так, чтобы $L_{s_l} > L$, получаем противоречие нелипшицивости $K$, но липшицивости на $U$.
2. Пусть $r \neq \tilde{r}$.
   $$\left|f(t_{k_{s_l}}, r_{k_{s_l}}) - f(t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}})\right| > L_{s_l}\left|r_{k_{s_l}} - \tilde{r}_{k_{s_l}}\right|.$$
   Переходя к пределу при $l \to \infty$, получаем
   $$|f(t,r) - f(t,\tilde{r})| \geqslant \infty,$$
   что невозможно. Снова пришли к противоречию.

А значит исходное предположение было неверным и на самом деле $f \in Lip_r K$.

# 11 Теоремы о существовании и единственности

**Определение 23.** Функция $\varphi : E = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ — решение интегрального уравнения $r(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))d\tau$, если

1. Она непрерывна: $\varphi \in C(E)$,
2. Она обращает уравнение в тождество $\varphi(t) \equiv r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$.

**Лемма 9** (О равносильном интегральном уравнении)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда $\varphi$ – решение задачи Коши $r' = f(t,r)$, $r(t_0) = r_0$ на $E = \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ – решение интегрального уравнения.*

*Доказательство.* "Необходимость":
Так как $\varphi$ – решение задачи Коши, то $\varphi \in C^1(E)$, а значит первый пункт

определения решения интегрального уравнения выполнен. Второй же получаем просто проинтегрировав дифференциальное уравнение. "Достаточность":
Так как интеграл от непрерывной функции – непрерывно дифференцируем, то первый пункт определения решения задачи Коши получили. А второй получается дифференцируемостью второго пункта определения решения интегрального уравнения.

**Лемма 10.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Пусть также $\varphi_+, \varphi_-$ – решения задачи Коши $r' = f(t,r)$, $r(t_0) = r_0$ на $[t_0, b)$ и $(a, t_0]$ соответственно.*

*Тогда $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & t \in (a, t_0] \\ \varphi_+(t), & t \in [t_0, b) \end{cases}$ – решение этой же задачи Коши на интервале $(a, b)$.*

*Доказательство.* Очевидно, что функция остается непрерывно дифференцируемой и обращает уравнение в тождество.

**Лемма 11** (Gronwall)**.** *Пусть $\varphi \in C(E)$, где $E = \langle a, b \rangle$. Пусть также $\lambda, \mu \geqslant 0$ и $\forall t \in E \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \right|$.*

*Тогда $\varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu|t-t_0|}$.*

*Доказательство.* Заметим, что в правой части цепочки неравенств на самом деле стоит решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения.

Пусть $t \geqslant t_0$.

1. Пусть $\lambda > 0$. Обозначим $v(t) = \lambda + \mu \left| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \right|$.

   Тогда $v'(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu \cdot v(t)$.
   Так как $\lambda > 0$, то и $v > 0$. Значит можем поделить на $v$.

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leqslant \mu,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \mu d\tau,$$

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \leqslant \mu \left( t - t_0 \right),$$

$$v(t) \leqslant \underbrace{v(t_0)}_{\lambda} e^{\mu(t-t_0)}.$$

Таким образом, $\varphi(t) \leqslant v(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$.

2. Пусть $\lambda = 0$.

$$\varphi(t) \leqslant \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau < \underbrace{\delta}_{>0} + \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau.$$

Устремим $\delta$ к нулю для каждого $t$: $\varphi(t) \leqslant 0$, что и хотелось доказать. При $t < t_0$ сделаем замену $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t)$.

$$\psi(2t_0 - t) \leqslant \lambda + \mu \int\limits_{t_0}^{2t_0 - t} \psi(s) ds$$

По доказанному (так как $2t_0 - t > t_0$) получаем $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t) \leqslant \lambda e^{\mu(2t_0 - t - t_0)}$.

**Определение 24.** Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Пусть $\Pi = \{|t - t_0| \leqslant a, |r - r_0| \leqslant b\}$ – брус с центром в точке $(t_0, r_0)$, вписанный в данную область (такой есть в силу открытости области).

Пусть $\|f\| = \max\limits_{\Pi} |f|$. Тогда отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$, где $h = \min\left\{a, \frac{b}{\|f\|}\right\}$ – называется отрезком Пеано, соответствующим $t_0, r_0$.

*Замечание.* Рассмотрим, что имеется в виду, на простом двумерном примере $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ бруса. Для простоты рассмотрим случай бруса с центром в начале координат. Пусть есть какое-то решение $\varphi$, проходящее внутри бруса. Тогда

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t \varphi'(t) dt \right| \leqslant \int_0^t |\varphi'(t)| dt \leqslant \int_0^t \|f\| dt = \|f\| t.$$

То есть мы получили, что наше решение ограничено внутри бруса двумя лучами. Кардинально появляется два случая: лучи пересекают горизонтальное ребро бруса или вертикальное (см. Рис. 3). В первом случае мы можем уверенно утверждать, что наше решение лежит внутри бруса на отрезке до пересечения луча с брусом. А во втором — на всем отрезке бруса. Вот эти отрезки и называются отрезками Пеано $[0, h]$, где в первом случае $h = \frac{b}{\|f\|}$, а во втором – $h = a$.

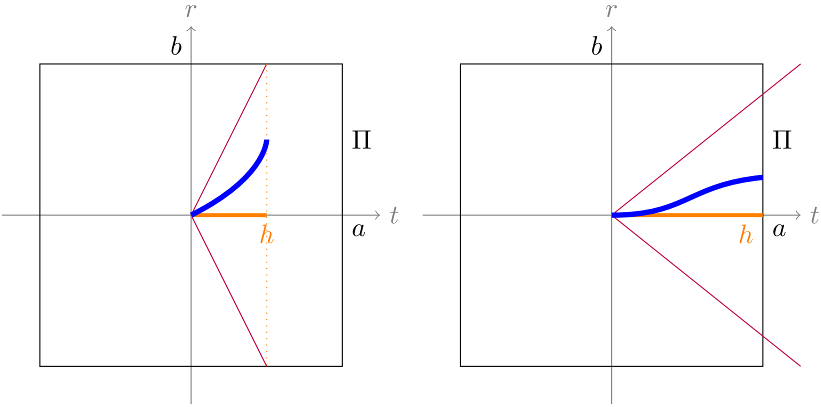



*Рис. 3. Иллюстрация к определению отрезка Пеано*

**Теорема 4** (Пеано о существовании решения). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$.*

*Тогда задача Коши имеет решение на отрезке Пеано.*

*Замечание.* Без доказательства.

**Теорема 5** (Пикара о существовании и единственности решения). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$, $(t_0, r_0) \in G$.*

*Тогда*

1. *На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,*
2. *На любом интервале $(a, b)$ решение задачи Коши единственно.*

*Доказательство.* Не умоляя общности, рассмотрим в качестве $(t_0, r_0)$ точку начала координат. Будем искать решение при $t \in [0, h]$, где $h = \min\left\{a, \frac{b}{\|f\|}\right\}$ из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность, заданную реккурентно

$$\varphi_0(t) = 0,$$
$$\varphi_m(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_{m-1}(\tau))d\tau.$$

*Замечание.* Укажем план нашего доказательства:

1. Докажем, что последовательность определена корректна, то есть $\varphi_m \in C\,[0, h]$ и $|\varphi_m(t)| \leqslant \|f\|t$,

2. Докажем равномерную сходимость последовательности, то есть $\exists\varphi$ : $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi$,
3. Докажем, что полученное $\varphi$ является решением интегрального уравнения, связанного с задачей Коши,
4. Докажем единственность.

•

1. Докажем методом математической индукции:
   При $m = 0$: $\varphi_0$ определена на $[0, h]$.
   Пусть $\varphi_m \in C([0, h])$ и $|\varphi_m(t)| \leqslant \|f\|t$.
   Рассмотрим $\varphi_{m+1}(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau$. Так как $t \leqslant h \leqslant \frac{b}{\|f\|}$, то $|\varphi_m| \leqslant b$. Тогда $f(\tau, \varphi_m(\tau))$ есть композиция непрерывных функций, а значит она интегрируема и функция $\varphi_{m+1}$ задана корректно на $[0, h]$, причем к тому же она непрерывна.

   $$|\varphi_{m+1}| \leqslant \left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau))|\, d\tau \leqslant \|f\| \int\limits_0^t d\tau = \|f\|t.$$

   Таким образом, индукционный переход выполняется, а значит наша последовательность задана корректно для любого $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажем, что $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная, то есть

   $$\forall\varepsilon \quad \exists n_0 : \quad \forall m \geqslant n_0, k \in \mathbb{N} \implies \|\varphi_m - \varphi_{m+k}\| < \varepsilon.$$

   На самом деле будем доказывать более сильное утверждение, а именно

   $$\forall t \in [0, h] \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N} \quad \exists L : \quad |\varphi_m(t) - \varphi_{m+k}(t)| \leqslant \frac{\|f\|L^m \cdot t^{m+1}}{(m+1)!}.$$

   Воспользуемся методом математической индукции по $m$.
   При $m = 0$:

   $$|\varphi_0(t) - \varphi_k(t)| = \left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_{k-1}(t))d\tau\right| \leqslant t \cdot \|f\|.$$

Пусть при некотором $m$ утверждение верно, докажем для $m+1$

$$|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_{m+1+k}(t)| = \left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(t))d\tau - \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau))d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_m(t))d\tau - f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau))d\tau| \boxed{\leqslant}$$

Так как у нас есть локальная Липшицевость, то можем найти на компакте, а именно на нашем брусе, $L$, что

$$\boxed{\leqslant} \int\limits_0^t L \cdot |\varphi_m(\tau) - \varphi_{m+k}(\tau)|\, d\tau \leqslant \frac{\|f\|L^{m+1}}{(m+1)!}\int\limits_0^t \tau^{m+1}d\tau =$$

$$= \frac{\|f\|L^{m+1}}{(m+2)!}t^{m+2}.$$

Таким образом, по Критерию Коши, есть $\varphi \in C([0,h])$, что $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi$.

3. Рассмотрим интегральное уравнение, равносильное задаче Коши.

$$\varphi_{m+1} = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau.$$

при $m \to \infty$

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty}\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau.$$

Рассмотрим

$$\left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau 0 \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant L\int\limits_0^t |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant L \cdot \|\varphi_m - \varphi\| \cdot h \to 0.$$

Таким образом, $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$, а значит $\varphi$ – решение интегрального уравнения, а тогда и задачи Коши.

4. Пусть есть два разных решения $\psi_1, \psi_2$ задачи Коши на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим

$$|\psi_1(t) - \psi_2(t)| = \left| \int\limits_0^t f(\tau, \psi_1(\tau))d\tau - \int\limits_0^t f(\tau, \psi_2(\tau))d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau))d\tau - f(\tau, \psi_2(\tau))| \, d\tau \boxed{\leqslant}$$

Рассмотрим графики $\gamma_1 = \psi_1|)[\alpha, \beta]$ и $\gamma_2 = \psi_2|)[\alpha, \beta]$. Тогда $\gamma_1 \cap \gamma_2$ – компакт. А значит из локальной Липшицевости на компакте можем найти константу $\mu$, для которой

$$\boxed{\leqslant} \int\limits_0^t \mu \, |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| \, d\tau.$$

А значит получили по лемме Gronwall $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leqslant 0$, то есть на самом деле $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Так как это утверждение выполнено для любых $\alpha, \beta$ из интервала $(a, b)$, то на самом деле $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \equiv 0$ на $(a, b)$.

Таким образом, два решения совпали.

**Следствие 1** (Теорема Пикара с простыми условиями)**.** *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *– область,* $(t_0, r_0) \in G$*,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$*, причем* $f'_r \in Mat_n(C(G))$*. Тогда*

1. *На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,*
2. *На любом интервале* $(a, b)$ *решение задачи Коши единственно.*

*А также*

$$\|\varphi - \varphi_m\| \leqslant \frac{\|f\| \cdot (n\|f\|)^n \cdot h^{n+1}}{(n+1)!}$$

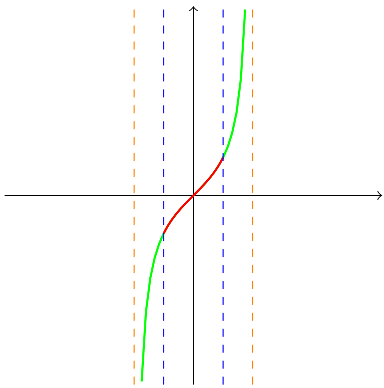
*Доказательство.* Из достаточного условия локальной Липшицевости прилетают все ограничения. А вторая часть из доказательства, устремляя $k$ к бесконечности.

# 12 Продолжение решений

*Замечание.* Теорема Пикара дает представление только о решении на отрезке Пеано, однако этот отрезок может оказаться очень маленьким и не давать необходимого понимания о дифференциальном уравнении. Поэтому хочется расширять решение за границы отрезка Пеано, причем понимая до куда мы это действительно можем сделать.

**Пример 13.**

$$x' = 1 + x^2, \qquad x(0) = 0.$$



*Решение.* Очевидно, что решение уравнения – это $x = \operatorname{tg} t$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Однако вполне очевидно, что решение можно продолжить до интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Причем дальше продолжать уже не получится, то есть это максимальное решение.

**Определение 25.** Решение $\varphi$ называется максимальным решением системы, если не существует другого решения $\psi$ такого, что $\varphi$ является сужением $\psi$.

**Теорема 6** (критерий продолжимости)**.** *Пусть $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, а $\varphi$ – решение на $(a, b)$. Тогда $\varphi$ продлолжимо на $(a, c)$, где $c > b$ тогда и только тогда, когда $(b, \varphi(b-0)) \in G$.*

*Доказательство.* Так как $\varphi$ непрерывно, то $\varphi(b-0) = \varphi(d)$. Тогда, так как каждая интегральная кривая должна лежать в $G$, то и точка $(d, \varphi(b))$ лежит в $G$.

Обратно. Решим задачу Коши с той же системой, но с начальным условием, что в точке $b$ значение равно $\varphi(b-0)$. Тогда по теореме Пеано, есть отрезок $[b, b+h]$ (на самом деле и левая часть отрезка тоже есть, но нам она неважна), на котором существует решение. Тогда по лемме о стыковке решений получим решение исходной задачи Коши на $(a, b+h]$, что является продолжением.

**Следствие 2.** *Пусть $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, а $\varphi$ – максимальное решение задачи Коши. Тогда область решения – обязательно интервал.*

*Доказательство.* Пусть решение – не интервал, а, например, $(a, b]$. Тогда точка $b$ лежит в $G$, а значит по критерию можем продолжить решение.

**Теорема 7** (О существовании единственного максимального решения)**.** *Пусть $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap Lip_{r,loc}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область. Тогда*

1. *Существует максимальное решение $\varphi$ задачи Коши*

$$r' = f(t, r), \qquad r(t_0) = r_0.$$

2. *Любое другое решение этой задаче Коши является сужением $\varphi$.*

*Доказательство.* Рассмотрим множество $s$ всех решений этой задачи Коши (заданных на любых промежутках). Пусть $a = \inf\limits_{\psi \in s} \inf \operatorname{dom} \psi$, $b = \sup\limits_{\psi \in s} \sup \operatorname{dom} \psi$, то есть это максимальные из левых и правых границ.

Рассмотрим точку $t \in [t_0, b)$. Из опрделения супремума найдется $\psi$ : $\sup \operatorname{dom} \psi > t$. Тогда определим в этой точке $\varphi(t) = \psi(t)$. Таким образом, в каждой точке $t \in [t_0, b)$ мы задали какое-то значение функции $\varphi(t)$.

*Замечание.* Однако может оказаться, что таких функций $\psi$ несколько. Тогда непонятно, каким образом выбирать значение для $\varphi$. Однако по второму пункту теоремы Пикара мы знаем, что на пересечении областей определения этих решений они совпадают. А точка $t$ точно лежит на этом пересечении, а значит все значения этих $\psi_i$ в точке $t$ одинаковы.

Аналогично задаем $\varphi$ на $(a, t_0]$.

Тогда, так как в точке $t \in (a, b)$ и ее какой-то окрестности $\varphi \equiv \psi$, то в силу того, что $\psi$ – решение, оказывается, что $\varphi$ – непрерывно дифференцируема в точке $t$ и при этом обращает уравнение в тождество. А значит $\varphi$ – решение.

Почему максимальное решение? Очевидно, что все решения из $s$ являются сужением $\varphi$, так как по второму пункту теоремы Пикара два решения $\varphi$ и $\psi$ совпадают на пересечении областей определения, которое на самом деле есть область $\psi$, а это пересечение есть А значит, по определению, $\varphi$ – максимальное решение.

**Теорема 8** (О выходе интегральной кривой за пределы любого компакта). *Пусть $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $\varphi$ – максимальное решение, заданное на $(a,b)$, $K \subset G$ – компакт. Тогда существует $\Delta$, что $\forall t \in (a, a+\Delta) \cup (b-\Delta, b) \quad (t, \varphi(t)) \notin K$ (то есть фактически любое решение точно выходит из компакта).*

*Доказательство.* Введем расстояние $\rho = \rho(K, \partial G) > 0$.

Рассмотрим брусы $\Pi(t', r') = \left\{(t,r) \in G \middle| \| (t',r') - (t,r) \| \leqslant \frac{\rho}{2}\right\}$ и множество таких брусов вокруг каждой точки компакта $K_\rho = \bigcup\limits_{(t',r') \in K} \Pi(t', r')$.

Тогда $K_\rho$ – компакт, причем $K_\rho \subset G$.

Рассмотрим произвольную точку $(t_0, r_0) \in K$. Посмотрим на величину $h$ из отрезка Пеано

$$h = \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\frac{\rho}{2}}{\|f\|_{\Pi(r_0,t_0)}}\right\} \geqslant \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\frac{\rho}{2}}{\|f\|_{K_\rho}}\right\} = \delta.$$

По теореме Пеано существует решение задачи Коши на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть

$$\forall\ \Delta \quad \exists t \in (a, a+\Delta) \cup (b - \Delta, b): \quad (t, \varphi(t)) \in K.$$

Не теряя общности, будем рассматривать случай, в котором $t \in (b - \Delta, b)$.

Положим $t_0 = b - \frac{\delta}{2}$. Тогда существует решение $\psi$ задачи Коши на отрезке $\left[b - \frac{\delta}{2} - \delta, b - \frac{\delta}{2} + \delta\right] = \left[b - \frac{3\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}\right]$.

Рассмотрим функцию

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (a, b), \\ \psi(t), & t \in \left[b - \frac{3\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}\right]. \end{cases}$$

При этом $\chi(t)$ тоже оказывается решением, однако уже на промежутке $\left(a, b + \frac{\delta}{2}\right]$. Но $\varphi$ – максимальное решение по условию, а значит такого быть не может.

Таким образом, предположение неверно, и решение выходит за границы компакта.

**Теорема 9** (о системе, сравнимой с линейной). *Пусть $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc,r}$, а также*

$$\exists u, v \in C(a,b): \quad |f(t,r)| \leqslant v(t) + u(t)\,|r| \ \ \forall t \in (a,b).$$

*Тогда максимальное решение уравнения $r' = f(t,r)$ задано на интервале $(a,b)$.*

*Доказательство.* Пусть $\varphi$ – максимальное решение на интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

Рассмотрим $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Запишем равносильное задаче Коши интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leqslant |\varphi(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau \leqslant \\ &\leqslant |\varphi(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau) + u(\tau)\, |r|\, d\tau = \\ &= |\varphi(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)\, |r|\, d\tau. \end{aligned}$$

Так как $u, v$ непрерывны, то они ограничены на $(\alpha, \beta)$. Пусть $|\varphi(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau \leqslant \lambda$, $u(t) \leqslant \mu$.

$$|\varphi(t)| \leqslant \lambda + \mu \int\limits_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau.$$

По лемме Гронуолла

$$|\varphi(t)| \leqslant \lambda e^{\mu(t - t_0)} \leqslant \lambda e^{\mu(\beta - t_0)} = C.$$

Рассмотрим компакт $K = [t_0, \beta] \times [-C, C]^n$. Заметим, что интегральная кривая $\varphi$ не выходит из этого компакта, что невозможно по предыдущей теореме. Получили противоречие, а значит на самом деле $\varphi$ – решение на $(a, b)$.

**Следствие 3.** *Пусть* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$*,* $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap Lip_r$*.*

*Тогда максимальное решение задано на* $(a, b)$*.*

# Часть IV
# Линейные системы дифференциальных уравнений

## 13 Линейная система и ее решения

**Определение 26.** Система уравнений $r' = P(t) \cdot r + q(t)$, где $P \in Mat_n(C\,(a, b) \to \mathbb{C})$, $q \in C\,((a, b) \to \mathbb{C}^n)$, называется линейной системой дифференциальных уравнений.

## 14

**Теорема 10.** *Пусть $P \in Mat_n\,(C\,(a, b))$. Тогда общее решение линейной однородной системы $r' = P(t)r$ есть $n$-мерное линейное пространство.*

*Доказательство.* Линейность этого пространства очевидна: сумма лежит в нем, умножение на скаляр – тоже.

Решим $n$ задач Коши для этой систем с условиями:

$$r(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, r(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots r(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

По теореме о существовании решения, существуют $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – решения этих задач Коши.

Рассмотрим их Вронскиан:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, он не равен нулю, а значит эти решения линейно независимы.

Пусть теперь $\varphi$ – общее решение исходной системы уравнений, причем $\varphi(t_0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Рассмотрим функцию $\phi(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(t)$. Заметим, что она также является решением системы. Рассмотрим его значение в точке $t_0$

$$\phi(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(t_0) = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} = \varphi(t_0).$$

А значит по теореме о совпадении решений получаем, что из совпадения в одной точке решений системы следует совпадение этих решений. А значит решение разложилось в линейную комбинацию $\varphi_i$. То есть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ – базис размерности $n$.

**Определение 27.** Фундаментальная система решения (ФСР) есть базис в пространстве решений.

**Определение 28.** Матрица $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ для фундаментальной системы решений $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ называется фундаментальной матрицей.

**Лемма 12** (о множестве фундаментальных матриц)**.** *Пусть $\Phi$ – фундаментальная матрица для линейной однородной системы.*

*Тогда $\{\Phi \cdot M \mid M \in M_n(\mathbb{C}) \& \det M \neq 0\}$ – множество всех фундаментальных матриц для этой системы.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ – множество фундаментальных решений, а $\mathcal{B} = \{\Phi \cdot M \mid M \in M_n(\mathbb{C}) \& \det M \neq 0\}$.

$\boxed{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$ Пусть $\Psi \in \mathcal{A}$.

$$\Psi \underset{\psi_i \text{ – решение}}{=} (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{1k}\phi_k, \sum_{k=1}^{n} c_{2k}\phi_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\phi_k\right).$$

Тогда, обозначая $M = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$, получаем

$$\Psi = \Phi \cdot M.$$

При этом осталось показать, что определитель $M$ не обнуляется.

$$\underbrace{\det \Psi}_{\neq 0} = \det \Phi \cdot M = \underbrace{\det \Phi}_{\neq 0} \cdot \det M \implies \det M \neq 0.$$

$\boxed{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}}$ Пусть $\det M \neq 0$. Рассмотрим $\Psi = \Phi \cdot M \in \mathcal{B}$. Так как $\psi_i$ есть линейная комбинация $\phi_k$, то $\psi_i$ – решения.

$$W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \det \Psi = \det \Phi \cdot \det M \neq 0.$$

Таким образом эти решения линейно независимы, а значит являются фундаментальной системой решений.

Таким образом, получаем вложения $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. А значит $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

**Лемма 13** (об овеществлении)**.** *Пусть* $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *– фундаментальная система решений в комплексном варианте, причем* $\varphi_1 = \overline{\varphi_2}$.

*Тогда* $\{\operatorname{Re} \varphi_1\}, \{\operatorname{Im} \varphi_1\}, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ *тоже фундаментальная система решений.*

*Доказательство.* Выразим вещественную и мнимую части через $\varphi_i{}_{i=1}^n$:

$$\operatorname{Re} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \overline{\varphi_1}}{2} = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2,$$

$$\operatorname{Re} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \overline{\varphi_1}}{2} = \frac{1}{2i}\varphi_1 - \frac{1}{2i}\varphi_2.$$

Тогда можно записать $(\operatorname{Re} \varphi_1), \{\operatorname{Im} \varphi_1\}, \varphi_3, \dots, \varphi_n = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{bmatrix}$. При этом определитель матрицы равен $-\frac{1}{2i} \neq 0$, а значит это тоже ФСР по предыдущей лемме.

# 15 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

**Определение 29.** Систему $r' = Ar$, где $A \in Mat_n(\mathbb{C})$, будем называть линейной однородной системой с постоянными коэффициентами.

**Лемма 14.** *Пусть $\lambda \in specA$, $h_1, h_2, \ldots, h_s$ – Жорданова цепочка, соответствуюшая $\lambda$.*

*Тогда $e^{\lambda t}h_1, e^{\lambda t}(th_1 + h_2), \ldots, e^{\lambda t}\left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}h_1 + \cdots + h_{s-1} + h_s\right)$ – решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.*

*Доказательство.*

*Замечание.* Вспомним, что такое Жорданова цепочка. Набор $h_1, h_2, \ldots, h_s$ такой, что

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, \\ (A - \lambda E)\, h_2 &= h_1 \\ (A - \lambda E)\, h_3 &= h_2 \\ &\ldots \\ (A - \lambda E)\, h_s &= h_{s-1} \end{aligned}$$

называется Жордановой цепочкой.

Проверим честной подстановкой Пусть $\varphi_k(t) = e^{\lambda t}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j$.

$$\begin{aligned} \varphi_k'(t) &= \lambda e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(k-j)t^{k-j-1}}{(k-j)!}h_j = \\ &= \lambda e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!}h_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \varphi_k(t) &= e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}Ah_j = e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\lambda h_1 + e^{\lambda t}\sum_{j=2}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}\left(\lambda h_j + h_{j-1}\right) = \\ &= e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}\lambda h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=2}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_{j-1} = \\ &= \lambda e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!}h_j. \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что $\varphi_k'(t) = A \cdot \varphi_k(t)$, а значит это решение.

**Лемма 15** (ФСР ЛОС с постоянными коэффициентами)**.** *Фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами в для Жорданова базиса* $\begin{matrix} \lambda_1 \leftrightarrow h_1, \ldots, h_s \\ \ldots \\ \lambda_d \leftrightarrow u_1, \ldots, u_m \end{matrix}$ *есть*

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t} h_1, e^{\lambda_1 t}(th_1 + h_2), \ldots, e^{\lambda_1 t}\left(\tfrac{t^{s-1}}{(s-1)!}h_1 + \cdots + h_{s-1} + h_s\right) \\ \ldots \\ e^{\lambda_d t} u_1, e^{\lambda_d t}(tu_1 + u_2), \ldots, e^{\lambda_d t}\left(\tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}h_1 + \cdots + h_{m-1} + h_m\right) \end{gathered}$$

*Доказательство.* Проверим определитель Вронского для этих решений

$$W(\{\phi_i\}, 0) = \det(h_1, h_2, \ldots, h_s, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) \neq 0.$$

(отличие от нуля есть из-за того, что матрица под детерминантом есть просто базис в $\mathbb{C}^n$). Значит это действительно фундаментальная система решений.

**Теорема 11** (Формула Остроградского-Лиувилля)**.** *Пусть есть линейная однородная система $R' = P(t)r$, где $P \in M_n(C(a,b))$, $r_1, \ldots, r_n$ – решения этой системы.*

*Тогда*

$$W(r_1, \ldots, r_n, t) = W(t_0) \cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{tr} P(\tau) d\tau}.$$

*Доказательство.* Заметим, что написанное выражение очень похоже на решение линейного однородного дифференциального уравнения 1 порядка $y = y_0 \cdot e^{\int p}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение $W' = \operatorname{tr} P(t) W$, то есть то, которое дает написанное выражение в качестве решения. Тогда, если Вронскиан удовлетворяет этому уравнению, то он удовлетворяет и написанному выражению.

Рассмотрим, что из себя представляет производная Вронскиана. Запишем определитель по определению

$$W(t) = \det(r_1, \ldots, r_n) = \begin{vmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \ldots & r_n^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^n & r_2^n & \ldots & r_n^n \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{[\pi]} r^1_{\pi(1)} r^2_{\pi(2)} \ldots r^n_{\pi(n)}.$$

Тогда производная

$$W'(t) = \sum_{\pi} (-1)^{[\pi]} \left( \left( \left( r^1_{\pi(1)} \right)' r^2_{\pi(2)} \dots r^n_{\pi(n)} \right) + \dots + \left( r^1_{\pi(1)} r^2_{\pi(2)} \dots \left( r^n_{\pi(n)} \right)' \right) \right) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} (r^1_1)' & (r^1_2)' & \dots & (r^1_n)' \\ r^2_1 & r^2_2 & \dots & r^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r^n_1 & r^n_2 & \dots & r^n_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} r^1_1 & r^1_2 & \dots & r^1_n \\ r^2_1 & r^2_2 & \dots & r^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r^n_1)' & (r^n_2)' & \dots & (r^n_n)' \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} R'_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R'_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R'_n \end{bmatrix}.$$

Из того, что $r_1, r_2, \dots, r_n$ – решения, получаем, что

$$(r'_1, r'_2, \dots r'_n) = P \cdot (r_1, r_2, \dots, r_n).$$

А тогда

$$R'_k = \sum_{j=1}^{n} [P]_{k,j} R_j.$$

Таким образом,

$$W'(t) = \det \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} [P]_{1,j} R_j \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} [P]_{2,j} R_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} [P]_{n,j} R_j \end{bmatrix} =$$

По свойству определителя вычтем строки, умноженные на необходимые коэффициенты в каждой матрице

$$= \det \begin{bmatrix} [P]_{1,1} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ [P]_{2,2} R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ [P]_{n,n} R_n \end{bmatrix} =$$

Вынесем коэффициенты из под определителя

$$= \left( \sum_{j=1}^{n} [P]_{j,j} \right) \cdot \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \operatorname{tr} P \cdot W.$$

# 16 Неоднородные линейные системы

**Теорема 12** (общее решение линейной неоднородной системы)**.** *Пусть $P \in M_n(C(a,b))$, $q \in C\left((a,b) \to \mathbb{C}^n\right)$, $\Phi$ – фундаментальная матрица соответствующей линейной однородной системы, $\varphi$ – частное решение линейной системы $r' = P(t)r + q(t)$.*

*Тогда общее решение линейной системы есть*

$$r = \Phi \cdot C + \varphi, \quad C \in \mathbb{C}^n.$$

*Доказательство.* Необходимо доказать равенство множеств $A = \{r = \Phi \cdot C + \varphi\}$ и $B = \{\text{множество всех решений}\}$.

$\boxed{A \subset B}$ Очевидно подстановкой в уравнение.

$$\Phi' \cdot C + \varphi' = P(t) \cdot (\Phi \cdot C + \varphi) + q(t),$$

$$\Phi' \cdot C + \varphi' = P(t) \cdot \Phi \cdot C + P(t) \cdot \varphi + q(t),$$

$$\underbrace{(\Phi' - P(t) \cdot \Phi)}_{\substack{=0\text{ , т.к.}\\ \Phi\text{ – фундаментальная}}} \cdot C = -\underbrace{(\varphi' - P(t)\varphi - q(t))}_{\substack{=0\text{ , т.к.}\\ \varphi\text{ – решение}}}.$$

$\boxed{B \subset A}$ Пусть $r$ – некоторое решение линейной системы. Тогда $r' = P(t)r + q$ и $\varphi' = P(t)\varphi + q$, а значит, вычитая, получаем

$$r' - \varphi' = P(t)(r - \varphi),$$

$$(r - \varphi)' = P(t)(r - \varphi),$$

По теореме для однородной линейной системы найдется $C \in \mathbb{C}^n$, что

$$r - \varphi = \Phi \cdot C,$$

$$r = \Phi \cdot C + \varphi.$$

**Теорема 13** (метод вариации постоянных). *Пусть $P \in M_n(C(a,b))$, $q \in C\left((a,b) \to \mathbb{C}^n\right)$, $\Phi$ – фундаментальная матрица соответствующей линейной однородной системы.*

*Тогда решение линейной системы имеет вид*

$$r = \Phi \cdot C, \quad \text{где } C \text{ – решение уравнения } \Phi \cdot C' = q.$$

*Доказательство.* Найдем решение уравнения $\Phi \cdot C' = q$.

$$C' = \Phi^{-1} q,$$

Так как $\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \tilde{\Phi}^T$, то правая часть непрерывна, а тогда есть первообразная.

$$C = \int \Phi^{-1} q + A.$$

Покажем, что тогда $r = \Phi\left(\int \Phi^{-1} q + A\right)$ является общим решением.

$$r = \Phi\left(\int \Phi^{-1} q + A\right) = \Phi \cdot A + \Phi \int \Phi^{-1} q.$$

Заметим, что оно имеет вид общего решения из предыдущей теоремы, при условии, что $\Phi \int \Phi^{-1} q$ является частным решением. Для проверки этого подставим в исходную линейную систему

$$\left(\Phi\left(\int \Phi^{-1} q\right)\right)' = P\Phi\left(\int \Phi^{-1} q\right) + q,$$

$$\Phi' \int \Phi^{-1} q + \cancel{(\Phi\Phi^{-1}) q} = P\Phi \int \Phi^{-1} q + \cancel{q},$$

$$(\Phi' - P\Phi) \int \Phi^{-1} q = 0.$$

А это уже верное равенство, так как $\Phi$ – фундаментальная матрица однородной системы.

Таким образом, получили, что $r = \Phi \cdot C = \Phi\left(\int \Phi^{-1} q + A\right)$ имеет вид общего решения системы.

# 17 Матричная экспонента

**Определение 30.** Матричной экспонентой матрицы $A$ называется ряд

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Теорема 14** (Свойства матричной экспоненты)**.**

1. *Для любой матрицы* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *ряд* $e^A$ *сходится.*
2. *Если для матриц* $A, B$ *выполнено* $AB = BA$, *то* $e^{A+B} = e^A e^B$.
3. $\left(e^{At}\right)'_t = Ae^{At}$.
4. *Если матрица* $A$ *представима в виде* $A = TJT^{-1}$, *то* $e^A = Te^J T^{-1}$.
5. *Если матрица* $A$ *– диагональная* $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_d)$, *то* $e^A = \operatorname{diag}\left(e^{A_1}, \ldots, e^{A_r}\right)$.
6. *Если есть некоторая Жорданова клетка размера* $s$ $J_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \ldots \\ & \lambda & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \ldots & & \lambda \end{bmatrix}$,

   *то* $e^{J_s(\lambda)t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ & 1 & t & \ldots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$

*Доказательство.* TODO

1.

**Следствие 4.** *Пусть* $A \in M_n(\mathbb{C})$, $r_0 \in \mathbb{C}^n$.

*Тогда* $r = e^{A(t-t_0)} r_0$ *является решением задачи Коши* $\begin{cases} r' = Ar, \\ r(t_0) = r_0. \end{cases}$

*Доказательство.* Рассмотрим по третьему свойству

$$\left(e^{A(t-t_0)}\right)'_t = Ae^{A(t-t_0)}.$$

Тогда, подставляя в уравнение, получаем

$$\left(e^{A(t-t_0)} r_0\right)'_t = Ae^{A(t-t_0)} r_0,$$

при этом $r(t_0) = e^{A(t_0-t_0)} r_0 = r_0$ и $\det e^{A(t_0-t_0)} = 1$.

А значит $e^{A(t-t_0)}$ является фундаментальной матрицей для системы.

*Замечание.* Заметим, что раскладывая в Жорданову форму, получим

$$e^{A(t-t_0)} r_0 = e^{At} \cdot e^{-At_0} r_0 = Te^{Jt} T^{-1} e^{-At_0} r_0 = Te^{Jt} \underbrace{\left(T^{-1} e^{-At_0} r_0\right)}_{C} = Te^{Jt} C.$$

Таким образом, между $C$ и $r_0$ устанавливается биекция.

Тогда, вспоминая, что $T = (h_1, \ldots, h_s, \ldots, v_1, \ldots, v_d)$, придем к решению линейной однородной системы с постоянными коэффициентами 15

$$Te^{Jt} = \left(e^{\lambda t}h_1, e^{\lambda t}(th_1 + h_2), \ldots, e^{\lambda t}\left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}h_1 + \cdots + h_{s-1} + h_s\right), \ldots\right).$$

# Часть V

# Линейные уравнения

## 18 title

**Определение 31.** Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t)$$

называется линейным уравнением $n$-ого порядка.

**Определение 32.** В случае, если в уравнении

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t)$$

$q(t) \equiv 0$, будем называть уравнение однородным. Иначе — неоднородным.

*Замечание.* Можно говорить о дифференциальном линейном операторе

$$Ly = y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(t)y' + p_0(t)y.$$

**Лемма 16** (о равносильной линейной системе)**.** *Если $\varphi$ – решение линейного уравнения на интервале $(a, b)$, то $\Lambda\varphi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{bmatrix}$ является решением системы $r' = P(t)r + q(t)$ на $(a, b)$, где $P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{n-1} \end{bmatrix}$.*

*А также наоборот, если* $\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$ *– решение линейной системы на* $(a, b)$, *то* $\varphi_1$ *– решение линейного уравнения, и, кроме того,* $\varphi_2 = \varphi_1'$, $\varphi_3 = \varphi_1''$, $\ldots$, $\varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}$.

*Доказательство.* TODO

**Теорема 15** (о существовании и единственности максимального решения)**.** *TOFO*

*Замечание.* Заметим, что в силу линейности дифференциального оператора $Ly$, сумма двух решений однородного линейного уравнения остается решением, а также умножение на скаляр остается решением. Таким образом, появляется мысль , что множество решений образует линейное пространство. На самом деле, все оказывается даже более удобным.

**Теорема 16** (об изоморфизме)**.** *Множество решений линейных однородных уравнений есть линейное пространство, изоморфное пространству решений системы* $r' = P(t)r$, *где* $P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{n-1} \end{bmatrix}$.

*При этом* $\Lambda\varphi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{bmatrix}$ *устанавливает этот изоморфизм.*

*Доказательство.* TODO

*Замечание.* Таким образом, у нас есть изоморфизм, в силу которого получаем равенство размерностей.

**Следствие 5.** *Множество решений линейного однородного уравнения есть* $n$*-мерное линейное пространство.*

**Определение 33.** Базис в пространстве решений линейного однородного уравнения будем называть фундаментальной системой решений (ФСР).

**Определение 34.** Вронскианом скалярных функций $y_1, \ldots, y_n$ будем называть соответствующий вронскиан вектор функций

$$W(y_1, \ldots, y_n, t) = W(\Lambda y_1, \ldots, \Lambda y_n, t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

*Замечание* (свойства Вронскиана решений линейных однородных уравнений). Пусть $y_1, \ldots, y_n$ – решения линейного однородного уравнения. Тогда

1. Если $\exists t_0 \in (a, b) \ : \ W(t_0) = 0$, то $y_1, \ldots, y_n$ – линейно зависимы,
2. Если $\exists t_0 \in (a, b) \ : \ W(t_0) \neq 0$, то $y_1, \ldots, y_n$ – линейно независимы.

Достаточно интересно, что эти свойства говорят также о том, что не может найтись точек, в которых Вронскиан равен нулю, и точек, в которых не равен, на одном наборе решений.

**Теорема 17** (формула Остроградского-Лиувилля)**.**

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int\limits_{t_0}^{t} p_{n-1}(\tau) d\tau}.$$

*TODO*

**Теорема 18** (общее решение линейного уравнения)**.** *Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ – ФСР для линейного однородного уравнения, $\psi_k$ – частное решение линейного уравнения.*

*Тогда $y = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \varphi_k + \psi_k$ является общим решением линейного уравнения.*

*Доказательство.* Заметим, что в силу изоморфизма $\Lambda$, $\{\Lambda\varphi_k\}_{k=1}^{n}$ является ФСР соответствующей линейной однородной системы, а $\Lambda\psi_k$ является частным решением соответствующей линейной системы.

Тогда по теореме об общем решении линейной системы получаем, что $r = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \Lambda\varphi_k + \Lambda\psi_k$ является общим решением линейной системы. В силу биективности $\Lambda$ найдем обратное от обеих частей

$$\Lambda^{-1} r = \Lambda^{-1} \left( \sum_{k=1}^{n} C_k \Lambda\varphi_k + \Lambda\psi_k \right) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k + \psi_k.$$

Тогда, взяв первую координату $r$, как раз и получим решение линейного уравнения.

**Теорема 19** (метод вариации постоянных)**.** *Пусть* $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ *– ФСР для линейного однородного уравнения.*

*Тогда общее решение линейного уравнения имеет вид*

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) y_k,$$

*где функции* $C_k$ *удовлетворяют системе*

$$\begin{bmatrix} \Lambda y_1, \Lambda y_2, \ldots, \Lambda y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Решим соответствующую линейному уравнению систему:

Общее решение, согласно методу вариации постоянных для линейных систем, имеет вид

$$r = \Phi \cdot C,$$

где $C$ удовлетворяет уравнению $\Phi \cdot C' = Q$.

Так как $\Phi = \begin{bmatrix} \Lambda y_1 & \Lambda y_2 & \ldots & \Lambda y_n \end{bmatrix}$ из изоморфизма, то

$$\Lambda^{-1} r = \Lambda^{-1} \left( \sum_{k=1}^{n} C_k \Lambda y_k \right) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k.$$

## 19 Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

**Определение 35.** Уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + p_0 y = q(t)$$

называется линейным с постоянными коэффициентами.

*Замечание.* Рассмотрим линейное однородное уравнение и подставим в него $y = e^{\lambda t}$:

$$\left( \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \right) e^{\lambda t}.$$

Выражение $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ называется характеристическим многочленом данного уравнения.

Заметим, что если $\lambda$ является корнем характеристического уравнения, то $e^{\lambda t}$ оказывается решением линейного однородного уравнения.

**Лемма 17.** *Если $\lambda \in \mathbb{C}$ – корень характеристического многочлена кратности $m$, то $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ являются решениями соответствующего линейного однородного уравнения.*

*Доказательство.* TODO

**Лемма 18.** *Пусть $\{(k_j, \lambda_j)\}_{j=1}^n$ – различные пары чисел $k_j \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$.*

*Тогда $\left\{t^{k_j} e^{\lambda_j t}\right\}_{j=1}^n$ – линейно независимый набор.*

**Пример 14.**

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

*Решение.* Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ есть $\lambda \in \{-2, -1\}$.

Таким образом, решение исходного уравнения есть $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$.

*Замечание.* В случае комплексных корней характеристического многочлена стоит овеществлять решение, заменяя сопряженные корни на вещественную и мнимую часть таких корней. Тогда коэффициенты $C_1, C_2$ тоже становятся вещественными.

# Часть VI

# Теория устойчивости

## 20 Автономные системы

**Определение 36.** Автономной системой назовем систему

$$r' = f(r).$$

*Замечание.* Фактическое отличие от рассматриваемых ранее систем заключается в независимости правой части от $t$.

**Определение 37.** Фазовым пространством назовем область определения $f$

$$\operatorname{dom} f \subset \mathbb{R}^n.$$

**Определение 38.** Расширенным фазовым пространством назовем

$$\mathbb{R} \times \operatorname{dom} f.$$

*Замечание.* То есть в расширенном фазовом пространстве добавляется временная часть.

**Пример 15.**

$$x' = x.$$

$\mathbb{R}^2$ – *расширенное фазовое пространство,* $\mathbb{R}$ – *фазовое пространство.*

**Определение 39.** Фазовая траектория есть проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

**Определение 40.** Фазовая скорость в точке $r \in \operatorname{dom} f$ есть значение $f(r)$.

**Определение 41.** Фазовая скорость касается фазовой траектории и указывает направление движения.

**Определение 42.** Точка покоя (положение равновесия, стационарная точка) – точка, в которой фазовая скорость равна нулю.

**Теорема 20** ("о понижении размерности автономной системы"). *Пусть* $u, v \in C(\Sigma)$, $G_0 = \{(x, y) \in G | u(x, y) = v(x, y) = 0\}$ – *множество точек покоя. Тогда на множестве* $G \backslash G_0$ *фазовое пространство для* $\begin{cases} x' = u(x, y), \\ y' = v(x, y) \end{cases}$ *совпадает с интегральными кривыми уравнения* $vdx = udy$.

**Пример 16.** *Рассмотрим математический маятник*

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -\omega_0^2 x_1. \end{cases}$$

*Согласно теореме, фазовое пространство совпадает с интегральными кривыми уравнения*

$$-\omega_0^2 x_1 dx_1 = x_2 dx_2,$$

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} = C,$$

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{2C}}{\omega_0}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\sqrt{2C}\right)^2} = 1.$$

*А это эллипс, как мы изначально и предполагали.*

**Следствие 6** (виды траекторий). *Пусть $f \in Lip_{loc}\Omega$, где $\Omega$ – область в $\mathbb{R}^n$.*

*Тогда любая траектория автономной системы является одной из трех возможных:*

1. *точка покоя,*
2. *замкнутая траектория без самопересечений,*
3. *незамкнутая траектория без самопересечений.*

# 21 Понятия устойчивости

**Определение 43.** Положение равновесия $r = 0$ называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \forall r_0 : |r_0| < \delta \quad \forall t \geqslant 0 \, |\varphi(t, r_0)| < \varepsilon,$$

где $\varphi(t, r_0)$ – решение задачи Коши $\begin{cases} r' = f(r), \\ r(0) = r_0. \end{cases}$

**Определение 44.** Положение равновесия $r = 0$ называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если

1. $r = 0$ – устойчивое,
2. $\exists \varepsilon : \forall r_0 : |r_0| < \varepsilon \implies \rho(t, r_0) \underset{t \to \infty}{\to} 0.$

**Определение 45.** Пусть $\varphi$ решение $r' = f(t, r)$ на $[r_0, +\infty)$.

Тогда $\varphi$ – устойчивое, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall r_0 : |\varphi(t_0) - r_0| < \delta \; \forall t \in [t_0, +\infty) \implies |\varphi(t, t_0, r_0) - \varphi(t)| < \varepsilon,$$

где $\varphi(t, t_0, r_0)$ – решение задачи Коши с соответствующими начальными условиями.

**Лемма 19.** *Решение $\varphi$ системы $r' = f(t, r)$ устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво решение $s = 0$ системы $s' = f(t, s + \varphi) - f(t, \varphi)$.*

*Доказательство.* Пусть последняя система имеет вид $s' = g(t, s)$. Понятно, что $s = 0$ является ее решением (подстановка очевидна). Проверим его на устойчивость, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \forall s_0 : |s_0| < \delta \quad \forall t \geqslant t_0 \implies |\psi(t, t_0, s_0)| < \varepsilon.$$

Переобозначим, введя $r_0 : \; s_0 = r_0 - \varphi(t_0)$ и TODOTODOTODOTODOTODOTODOTO

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \forall r_0 : |r_0 - \varphi(t_0)| < \delta \quad \forall t \geqslant t_0 \implies |\psi(t, t_0, s_0)| < \varepsilon.$$

# 22 Устойчивость линейной системы

*Замечание.* Линейная система имеет вид

$$r' = P(t)r + q(t).$$

Согласно последней лемме предыдущего пункта, характер устойчивости решения линейной системы такой же, как у решения $s = 0$ системы $s' = P(t)(s + \cancel{\varphi}) + \cancel{q(t)} - \cancel{P(t)\varphi} - \cancel{q(t)} = P(t)s$.

**Теорема 21** (Устойчивость ЛОС с постоянными коэффициентами)**.** *Пусть $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ – матрица системы ($r' = Ar$).*

*Тогда:*

1. *система асимптотически устойчива, если $\forall \lambda \in specA \quad Re\lambda < 0$,*
2. *система устойчива, но не асимптотически, если $\forall \lambda \in specA \quad \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, но $\exists \lambda \in specA : \quad \operatorname{Re}\lambda = 0$, для которых геометрическая кратность совпадает с алгебраической,*
3. *система неустойчива, если $\exists \lambda \in specA : \operatorname{Re}\lambda > 0$ или $\operatorname{Re}\lambda = 0$, но геометрическая разность меньше алгебраической.*

*Доказательство.* 1. Решение задачи Коши для этой системы с начальным условием $r_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ есть $r(t) = e^{At}r_0$.

Рассмотрим

$$|r(t)| = \left|T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} \cdot r_0\right| \leqslant n^3 \cdot |T| \cdot \left|e^{Jt}\right| \cdot \left|T^{-1}\right| \cdot |r_0| = K \cdot \left|e^{Jt} \cdot |r_0|\right|.$$

Так как любая компонента матрицы $e^{Jt}$ имеет вид $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}$, то можем оценить его

$$\left|\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}\right| = \frac{t^k}{k!}\left|e^{\operatorname{Re}\lambda t}\right| \left|\cancel{e^{i \operatorname{Im}\lambda t}}\right|^{1} = \frac{t^k}{k!}e^{\overbrace{\operatorname{Re}\lambda}^{<0} t} \underset{t\to\infty}{\to} 0.$$

А тогда эти компоненты ограничены, а значит и норма всей матрицы будет ограничена, пусть числом $C$.

Таким образом,

$$|r(t)| \leqslant K \cdot C \cdot |r_0|.$$

И тогда при $\delta = \frac{\varepsilon}{K \cdot C}$ получаем $|r(t)| < \varepsilon$, то есть $|r(t)| \to 0$.

2. В случаях, когда $\operatorname{Re}\lambda < 0$ полностью повторяется предыдущее.

   При $\operatorname{Re}\lambda = 0$ все Жордановы клетки не содержат 1 и имеют вид $\left[e^{\lambda t}\right]$. А тогда $\left|e^{\lambda t}\right| = \left|e^{i\operatorname{Im}\lambda t}\right| = 1$ и снова можем ограничить матричную экспоненту каким-то числом $C$, а значит получили устойчивость решения $r = 0$.

   Покажем, почему устойчивость не асимптотическая.

   Мы знаем, что решение системы имеет вид $\varphi(t) = e^{\lambda t}h$, где $h$ – собственный вектор.
   $$|\varphi(t)| = \left|e^{\lambda t}\right||h| = |h| \not\to 0.$$
   Таким образом, либо $\operatorname{Im}\varphi(t)$, либо $\operatorname{Re}\varphi(t)$ не стремится к нулю.

   Пусть $\operatorname{Re}\varphi(t) \not\to 0$. Тогда возьмем такое $C$, чтобы $C \cdot \operatorname{Re}\varphi(t_0)$ лежало в шаре, радиуса $\varepsilon$. И тогда $r(t, C \cdot \operatorname{Re}\varphi(t_0)) \not\to 0$, что и требовалось.

3. При $\operatorname{Re}\lambda > 0$ возьмем также $C \cdot \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}h\right) \to \infty$.

   При $\operatorname{Re}\lambda = 0$, но алгебраической кратности большей, чем геометрической, рассмотрим $\varphi(t) = e^{\lambda t}(th_1 + h_2) \to \infty$, а значит либо $\operatorname{Re}\varphi(t)$, либо $\operatorname{Im}\varphi(t)$ стремится к бесконечности. Снова выберем достаточно малое $C$, чтобы $C \cdot \operatorname{Re}\varphi(t_0)$ стартовало в шаре, радиуса $\delta$, но $r(t, C \cdot \operatorname{Re}\varphi(t_0)) \to \infty$

# 23 Теорема Четаева

**Теорема 22** (Четаев)**.** *Пусть $f(0) = 0$, $f(Lip_{loc}\Omega)$.*

*Функция $C \in C^1(\Omega \to \mathbb{R})$, обладающая свойствами:*

$\boxed{1}$ $C(0) = 0$,

$\boxed{2}$ $\forall\, \rho > 0 \implies B_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\} \neq 0$,

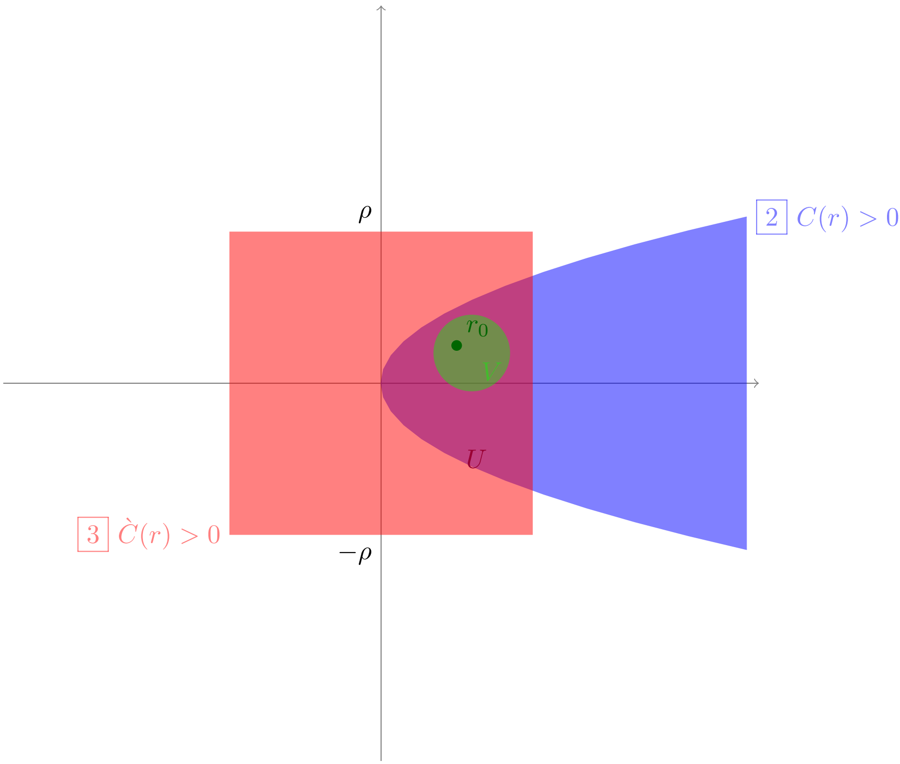
$\boxed{3}$ $\exists\, \rho > 0 : \quad \forall\, r \in \bar{B}_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\} \implies \grave{C}(r) = C' \cdot f > 0$,

*называется функцией Четаева.*

*Если для системы $r' = f(r)$ существует функция Четаева, то $r = 0$ является неустойчивым положением равновесия.*

*Доказательство.* Пусть $r = 0$ – устойчивое положение равновесия, то есть
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, r_0 \in B_\delta(0) \quad \forall\, t \geqslant 0 \implies |r(t, r_0)| < \varepsilon.$$
Положим $\varepsilon = \rho$. Так как при уменьшении $\delta$ не теряется справедливость утверждения из определения устойчивости, то можем рассматривать $\delta < \varepsilon$.

Выберем $r_0 \in B_\delta(0) \cap \operatorname{Int} U$.




$$C(r(t,r_0)) = C(r_0) + \int\limits_0^t \frac{d}{d\tau} C(r(\tau,r_0))d\tau =$$

$$= C(r_0) + \int\limits_0^t C'(r(\tau,r_0)) \cdot r'(\tau,r_0)d\tau =$$

$$= C(r_0) + \int\limits_0^t \grave{C}(r(\tau,r_0))d\tau$$

Пусть $\gamma = \min\limits_V \grave{C}(r)$, где $V = \{r \in U \mid C(r) \geqslant C(r_0)\}$.

Покажем, что $V$ – компакт.
Так как $V \subset U \subset \bar{B}_\rho(0)$, то $V$ – ограничено.

Рассмотрим последовательность $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$, сходящуюся к $\bar{r}$.

$$\forall\, n, r_n \in V \quad C(r_n) \geqslant (r_0) \qquad \text{из определения } V,$$

$$\lim_{n\to\infty} C(r_n) \geqslant C(r_0),$$

$$C(\lim_{n\to\infty} r_n) \geqslant C(r_0),$$

$$C(\bar{r}) \geqslant C(r_0) \implies \bar{r} \in V \implies V \text{ – замкнуто.}$$

Таким образом $V$ ограничено и замкнуто, а значит оно компактно.

Тогда по теореме Вейерштрасса на $V$ достигается минимум непрерывной функции $\grave{C}(r)$, то есть $\exists\, r_\gamma :\ \gamma = \grave{C}(r_\gamma)$. При этом, так как $r_\gamma \in V \subset U$, то $\grave{C}(r_\gamma) > 0$.

Тогда $\forall\, t \geqslant 0\ \grave{C}(r(t, r_0)) \geqslant \gamma$, а значит

$$C(r(t,r_0)) = C(r_0) + \int\limits_0^t \grave{C}(r(\tau, r_0))d\tau \geqslant C(r_0) + \int\limits_0^t \gamma d\tau = C(r_0) + \gamma t \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty.$$

А значит получили неограниченность, что противоречит тому, что мы рассматриваем все в шаре.

Таким образом, на самом деле, $r = 0$ — неустойчивое положение равновесия.

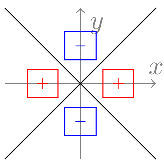
**Пример 17.**

$$\begin{cases} x' = x + y^2, \\ y' = -y + x^2. \end{cases}$$

*Рассмотреть положение равновесия* $(0, 0)$.

*Решение.* Рассмотрим функцию $C(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$. Проверим, является ли она функцией Четаева.

1. $C(0, 0) = 0$,
2. Рассмотрим на графике, где функция положительна Таким образом,




в любой окрестности нуля есть точки, где функция неотрицательна.

3. Пусть $r \in \bar{B}_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\}$.

$$\grave{C}(r) = \begin{pmatrix} x & -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + y^2 \\ -y + x^2 \end{pmatrix} = x^2 + xy^2 + y^2 - yx^2 = \\ = x^2(1-y) + y^2(1+x).$$

При достаточно маленьких $x, y$ (например, $|x|, |y| < 1$) $\grave{C}(r) > 0$.

# 24 Предельные циклы

**Определение 46.** Пусть есть некоторое решение $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ линейной автономной системы $r' = f(r)$.

Если существует такое $T > 0$, что $\varphi(t+T) \equiv \varphi(t)$, но $x, y \neq const$, то траектория этого решения есть цикл.

**Пример 18.**

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

*Решая такую систему, можно получить $x^2 + y^2 = C$. То есть каждая траектория есть цикл, кроме точки $(0, 0)$.*

**Определение 47.** Предельный цикл – это такой цикл, что все близкие траектории неограниченно приближаются к нему при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

**Пример 19.**

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

*Переходя к полярным координатам, мы получим систему*

$$\begin{cases} r' = r - r^3, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

*Тогда $r = 1$ будет циклом, а остальные траектории приближаются к нему при $t \to +\infty$. А значит $r = 1$ – предельный цикл. При этом отходя от этого цикла на немного, мы будем стремиться вернуться обратно на цикл. А значит этот цикл устойчивый.*

**Пример 20.** *Рассмотрим в полярных координатах*

$$\begin{cases} r' = r^3 - r, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

*Отойдя от $r = 1$ на немного, мы улетим от него, но при $t \to -\infty$ мы будем приближаться обратно к циклу. Такой цикл называется неустойчивым.*

**Пример 21.**

$$\begin{cases} r' = r|r^2 - 1|, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

*Теперь внутри мы будем приближаться к $r = 1$, а снаружи – отдаляться. Такой цикл называется полуустойчивым.*

**Теорема 23** (Необходимое условие цикла)**.** *Пусть $f \in Lip_{loc}D$, где $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. Пусть также существует цикл в $D$.*

*Тогда внутри этого цикла существует точка покоя.*

**Теорема 24** (Достаточное условие цикла: теорема Пуанкаре-Бендиксона)**.** *Пусть $c_o, c_i \subset \mathbb{R}^2$ – простые (без самопересечений) замкнутые кривые, $R$ – область между ними, на которой нет точек покоя, и существует траектория $T$ решения автономной системы, которая не покидает $cl(R)$ при всех $t \geqslant 0$.*

*Тогда либо $T$ является циклом, либо $T$ приближается при $t \to +\infty$ к предельному циклу, лежащему в $cl(R)$.*

**Пример 22.**

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

*Рассмотрим функцию $V(x, y) = x^2 + y^2$.*

$$\grave{V}(x, y) = v' \cdot f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ x + y(1 - x^2 - y^2) \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2).$$

*Рассмотрим в качестве $c_o$ окружность радиуса 2, в качестве $c_i$ – радиуса $\frac{1}{2}$.*

*Так как $\grave{V}|_{c_o} < 0$, то любая траектория, начинающаяся в $R$, не выйдет на кривую $c_o$. Так как $\grave{V}|_{c_i} > 0$, то любая траектория, начинающаяся в $R$, не выйдет на кривую $c_i$.*

*А значит, любая траектория, начинающаяся в $R$ не выйдет из этой области. При этом точка покоя лишь $(0,0)$, и она не внутри $R$.*

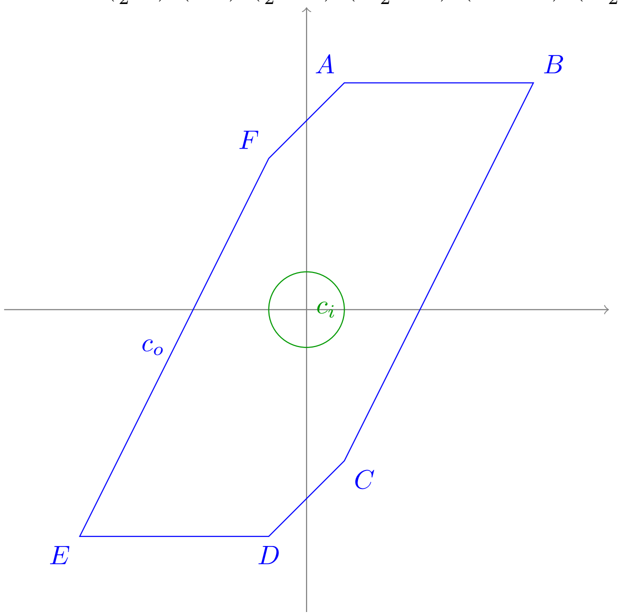
*А значит, попадаем в условия теоремы Пуанкаре-Бендиксона. То есть в замыкании $cl(R)$ есть цикл.*

*Заметим, что если мы будем брать в качестве $c_i$ окружности радиуса $\frac{n}{n+1}$, а в качестве $c_o$ – радиуса $\frac{n+1}{n}$, то все те же рассуждения будут работать, и мы увидим, что только лишь $x^2+y^2=1$ является циклом.*

**Пример 23** (Ванд дер Поль)**.**

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x, \\ y' = -x. \end{cases}$$

*Рассмотрим в качестве $c_i$ окружность радиуса $\frac{1}{2}$, а в качестве $c_o$ – многоугольник $(\frac{1}{2},3),(3,3),(\frac{1}{2},-2),(-\frac{1}{2},-3),(-3,-3),(-\frac{1}{2},2)$.*




*Рассмотрим ребро $AB$. У него нормаль $(0,1)$.*

$$f \cdot (0,1) = -x < 0.$$

*А значит $f$ направлена внутрь $R$ и мы не выйдем через ребро $AB$.*

*Рассмотрим ребро $BC$. У него нормаль $(5, -\frac{5}{2})$.*

$$f \cdot (5, -\frac{5}{2}) = -5x^3 + 5y + \frac{15}{2}x.$$

*Так как мы на ребре $BC$, то $y = 2x - 3$.*

$$f \cdot (5, -\frac{5}{2}) = 17.5x - 5x^3 - 15.$$

*При $x \in (\frac{1}{2}, 3)$ $17.5x - 5x^3 - 15 \in \left[-\frac{195}{2}, \underbrace{\frac{35\sqrt{7}}{3\sqrt{6}} - 15}_{<0}\right]$ А значит $f$ направлена внутрь $R$ и мы не выйдем через ребро $BC$.*

*Аналогично можно рассмотреть для всех ребер.*

*Для контура $c_i$ рассмотрим параметризацию $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos t, \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$. Тогда нормаль будет задаваться $n(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2}\cos t \\ y(t) = \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix}$.*

$$n \cdot f = \frac{\cos^2 t}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\cos^2 t\right) \geqslant 0.$$

*А значит мы не можем выйти через $c_i$.*

*Точка покоя единственна и это $(0, 0)$ — не лежит в $R$.*

*А значит по теореме внутри $R$ есть цикл.*

**Теорема 25** (Достаточное условие отсутствия цикла)**.** *Пусть $f, g \in C^1(\Omega)$, $R \subset \Omega$ – прямоугольник.*

*Если на $R$: $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0$ или $< 0$, то система $\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$ не имеет циклов в $R$.*

*Доказательство.* Вспомним формулу Грина

$$\int\limits_{\partial G} u dx + v dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx dy.$$

Положим $u = -g$, $v = f$.

$$\int\limits_{\partial G} -g dx + f dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dx dy.$$

Пусть в $R$ существует цикл.

Тогда для него применим формулу Грина. По условию теоремы правая часть либо всегда $> 0$, либо $< 0$, то есть

$$\int\limits_{\partial G} f dx - g dy > 0.$$

Так как траектория является решением системы уравнений, то $\int\limits_{\partial G} f dx - g dy = 0$. Противоречие! А значит в $R$ нет циклов.

# Часть VII
# Преобразование Фурье

## 25 Предварительные сведения

**Определение 48.** Функция $f$ называется принадлежащей пространству $L_p(\mathbb{R})$, где $1 \leqslant p < \infty$, если $f$ – измеримая на $\mathbb{R}$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^p < \infty$.

**Пример 24.**

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha}, & x > 1; \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f_\alpha|^p = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha p}} = \left. \frac{x^{-\alpha p + 1}}{-\alpha p + 1} \right|_1^{+\infty} < \infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}.$$

*Таким образом, при $\alpha > \frac{1}{p}$ функция принадлежит $L_p$ пространству.*

**Определение 49.** $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, если она бесконечно дифференцируема.

**Определение 50.** $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – финитные функции, если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} f = cl\,\{x \in \operatorname{dom} f | f(x) \neq 0\}$ – ограничен.

**Пример 25.**

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| \leqslant \varepsilon; \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

*где константа $C_\varepsilon$ такова, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$.*

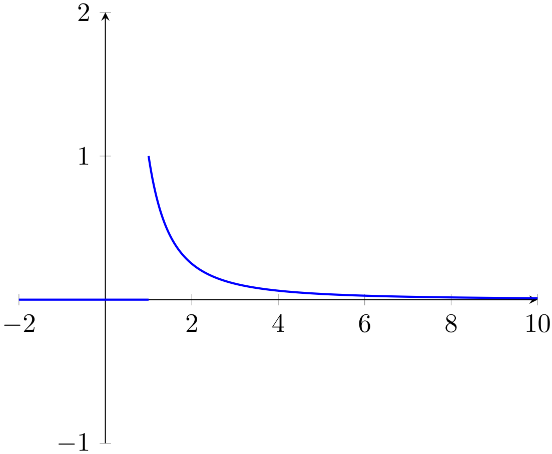



*Рис. 4.* $f_{\alpha(x)}$

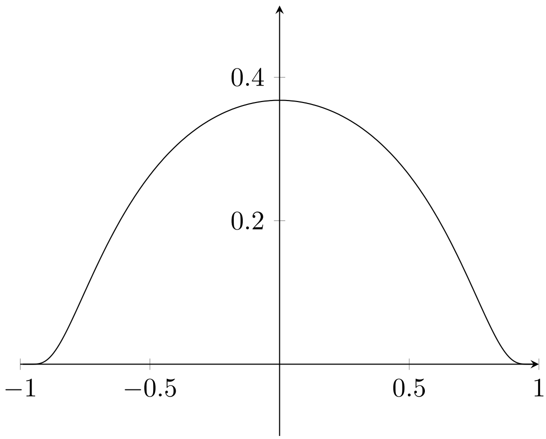



*Рис. 5.* $\omega_\varepsilon(x)$

**Определение 51.** Сверткой функций $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) \cdot g(x-y)dy.$$

**Пример 26.** $f = \chi_{[0,2]}$, $g = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$.

*Найти свертку $f * g$.*

*Решение.*

$$f * g = \int\limits_0^2 \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x-y)dy = \int\limits_{x-2}^{x} \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(t)dt = \begin{cases} x+\frac{1}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \\ \frac{5}{2}-x, & x \in \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right] \\ 0, & else \end{cases}$$

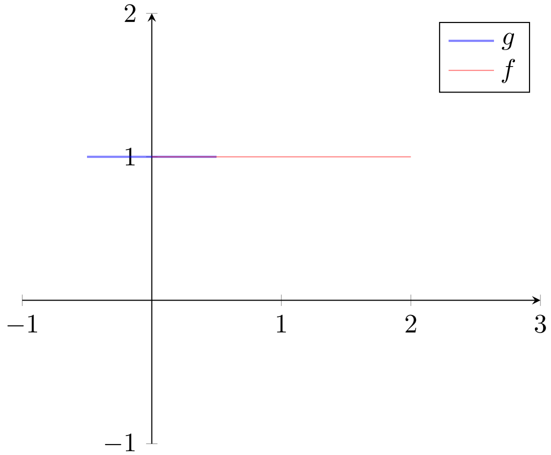



*Рис. 6. Графики исходных функций $f$ и $g$*

**Пример 27.** *Рассмотрим свертку характеристической функции отрезка и $\omega_\varepsilon$. Оказывается, что это финитная функция.*

$$\chi_{[a,b]} * \omega_\varepsilon \in C_0^\infty$$

**Теорема 26** (Лебега о мажорированной сходимости)**.** *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f$ – измеримые на $\mathbb{R}$ функции, $f_n \to f$ почти всюду и существует мажоранта $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$, что $|f_n(x)| \leqslant \Phi(x)$ почти всюду.*

*Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

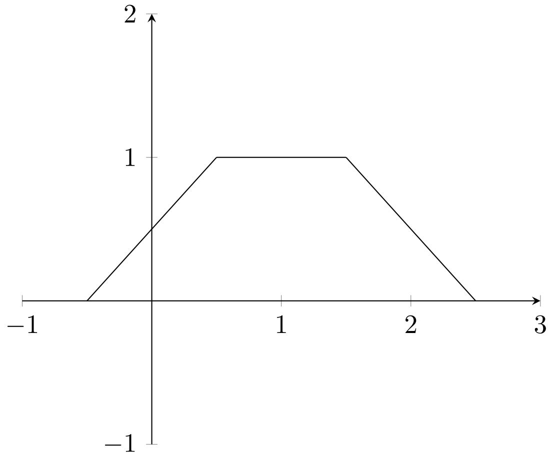



*Рис. 7. График итоговой свертки*

**Следствие 7** (Предельный переход в интеграле с параметром)**.** *Пусть $y_0$ – предельная точка для множества $Y$, $f_y \in L_1(\mathbb{R})$ $\forall y \in Y$, $f_y \to f(x)$ почти всюду и существует мажоранта $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$, что существует окрестность $U$ точки $y_0$ такая, что для почти всех $x$ и для любого $y \in U^\circ \cap Y$ $|f_y(x)| \leqslant \Phi(x)$.*

*Тогда $f \in L_1(\mathbb{R})$ и*

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_{\mathbb{R}} f_y(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{y \to y_0} f_y(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

# 26 Пространство Шварца

**Определение 52.** $f$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, если $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha f^{(\beta)}(x) \right| < \infty$.

**Определение 53.** $\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha f^{(\beta)}(x) \right|$ называются полунормами Шварца.

**Определение 54.** Пусть $f_n, f \in \mathcal{S}$.

Будем говорить, что $f_n \to f$ в пространстве Шварца $\mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{\alpha,\beta} \rho_{\alpha,\beta}\left(f - f_n\right) \to 0$.

**Пример 28.**

$$f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

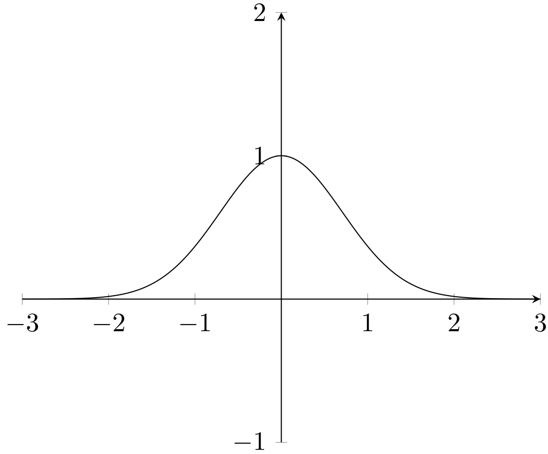



*Рис. 8. Пример функции из пространства Шварца*

*Замечание.*

$$C_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда ее носитель ограничен, а носитель любой производной может стать лишь меньше, то есть тоже ограничен.

При этом $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|x^\alpha f^{(\beta)}(x)\right| < \infty$, так как под супремумом гладкая функция, а она достигает максимума и минимума на отрезке.

**Пример 29.** $f(x) = e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *так как в точке 0 она не дифференцируема.*

**Пример 30.** $f(x) = \frac{1}{1+x^4} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *так как, например,* $\rho_{5,0} = +\infty$.

*Замечание.* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+ \quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|(x^\beta f(x))^{(\alpha)}\right| < \infty. \end{cases}$

*Замечание.* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+, \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, C_{\alpha,N} : \quad \left|f^{(\alpha)}(x)\right| \leqslant \frac{C_{\alpha,N}}{(1+|x|)^N}. \end{cases}$

**Предложение** (Замкнутость $\mathcal{S}$ относительно некоторых операций)**.** *Пусть* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Тогда*

1. $\forall\, \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
2. $f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
3. $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
4. $f^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
5. $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$\star$ $(f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}$.

*Доказательство.* 1.

2.

3.

4.

5. Проверим дифференцируемость

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x) dx.$$

Зафиксируем $t \in \mathbb{R}$ и покажем, что свертка дифференцируема в этой точке.

$$\frac{(f * g)(t + \Delta t) - (f * g)(t)}{\Delta t} =$$
$$= \frac{1}{\Delta t} \left( \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t + \Delta t - x) dx - \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x) dx \right) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} dx.$$

Так как производная есть предел, то нам надо проверить существование предела данного интеграла. Хочется применить теорему Лебега о предельном переходе в интеграле с параметром, чтобы работать не с интегралом, а с подынтегральной функцией. Проверим условие теоремы:

$$\forall\, \Delta t \in U^{\circ}(0)\ \forall\, x \left| f(x) \cdot \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} \right| \leqslant \Phi(x)$$

Так как $g$ – бесконечное число раз дифференцируемая функция, то расписывая Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$\frac{g(t+\Delta t-x)-g(t-x)}{\Delta t}=\frac{g'(t-x)\Delta t+g''(t-x+\theta(t,x)\Delta t)\Delta t^2}{\Delta t}= \\ =g'(t-x)+g''(t-x+\theta(t,x)\Delta t)\Delta t,$$

что дает существование $M$, при котором для любого $t\in U(\Delta t)$ выполнено

$$\left|\frac{g(t+\Delta t-x)-g(t-x)}{\Delta t}\right|\leqslant M.$$

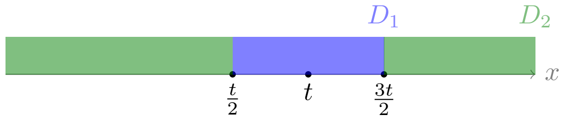
А значит можно рассмотреть в качестве мажоранты $\Phi(x)=M\cdot|f(x)|$. Тогда по теореме Лебега $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\frac{g(t+\Delta t-x)-g(t-x)}{\Delta t}dx$ существует, а значит функция $(f*g)(t)$ – дифференцируема и $(f*g)'=(f*g')$.
Покажем, что $f*g=g*f$.

$$f*g=\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot g(t-x)dx=\begin{vmatrix} y=t-x \\ dx=-dy\end{vmatrix}=\int\limits_{\mathbb{R}} f(t-y)\cdot g(y)dy=g*f.$$

А значит, используя полученную коммутативность $f*g'=(f*g)'=(g*f)'=g*f'=f'*g$.
При этом, так как $f,g'$ получились из класса Шварца, то $f*g'$ тоже дифференцируема. То есть получили, что $f*g\in C^\infty$.
Покажем теперь выполнение неравенства

$$\forall\, N\in\mathbb{N}\,\exists\, C_N:\quad |(f*g)(t)|\leqslant\frac{C_N}{(1+|t|)^N}.$$

$$|(f*g)(t)|=\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot g(t-x)dx\right|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x)|\cdot|g(t-x)|\,dx\leqslant \\ |\text{ т.к. } f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\ |\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{A_N}{(1+|x|)^N}\cdot\frac{B_N}{(1+|t-x|)^N}dx= \\ =A_N\cdot B_N\cdot\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+|x|)^N}\cdot\frac{1}{(1+|t-x|)^N}dx.$$




Заметим, что на $D_1$ выполнено $|x| \geqslant \frac{|t|}{2}$, а на $D_2$ – $|t-x| \geqslant \frac{|t|}{2}$. Тогда можем разбить интеграл на два:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^N} \cdot \frac{1}{(1+|t-x|)^N} dx =$$

$$= \int\limits_{D_1} \frac{1}{(1+|x|)^N} \cdot \frac{1}{(1+|t-x|)^N} dx + \int\limits_{D_2} \frac{1}{(1+|x|)^N} \cdot \frac{1}{(1+|t-x|)^N} dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+\frac{|t|}{2})^N} \cdot \int\limits_{D_1} \frac{1}{(1+|t-x|)^N} dx + \frac{1}{(1+\frac{|t|}{2})^N} \int\limits_{D_2} \frac{1}{(1+|x|)^N} dx =$$

$$= -\frac{1}{(1+\frac{|t|}{2})^N} \cdot \int\limits_{(-\frac{t}{2},\frac{t}{2}) \subset D_2} \frac{1}{(1+|y|)^N} dy + \frac{1}{(1+\frac{|t|}{2})^N} \int\limits_{D_2} \frac{1}{(1+|x|)^N} dx =$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{|t|}{2})^N} \int\limits_{D_2 \setminus (\frac{t}{2},\frac{t}{2})} \frac{1}{(1+|x|)^N} dx \leqslant$$

|т.к. при $N \geqslant 2$ интеграл сходится |

$$\leqslant \frac{1}{(1+|t|)^N} \frac{(1+|t|)^N}{(1+\frac{|t|}{2})^N} \tilde{C}_N \leqslant \frac{C_N}{(1+|t|)^N}.$$

При этом при $N = 1$ можем рассмотреть ту же константу, что и при $N = 2$, и неравенство останется верным.

Таким образом, мы показали выполнение неравенства $|(f * g)(t)| \leqslant \frac{C_N}{(1+|t|)^N}$ и попали в равносильное определение пространства Шварца.

# 27 Преобразование Фурье

**Определение 55.** Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Тогда преобразованием Фурье функции $f$ назовем оператор $\mathcal{F}$, возвра-

щающий функцию
$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx.$$

*Замечание.* Часто говорят просто «преобразование Фурье функции – это функция $\hat{f}(\xi)$».

**Пример 31.** *Найти преобразование Фурье функции* $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

*Решение.*

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi\left(x^2+2ix\xi\right)} dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x+i\xi)^2-\pi\xi^2} dx = e^{-\pi\xi^2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{\pi}x+\sqrt{\pi}i\xi\right)^2} dx = \cancel{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} = e^{-\pi\xi^2}.$$

На самом деле при вычислении интеграла мы меняем область на комплекснозначную, что требует более строгого объяснения. Но мы можем показать, что этот интеграл вне зависимости от $\xi$ будет равен $\sqrt{\pi}$. Для этого можно рассмотреть производную по $\xi$ этого интеграла и убедиться, что после перестановки предела и интеграла, используя формулу Лебега, получается 0. А значит значение интеграла равно его значению при $\xi = 0$, что дает интегралл Пуассона, равный $\sqrt{\pi}$.

Мы получили интересный результат: исходная функция совпадает с полученной после преобразования Фурье. А значит $f(x) = e^{-\pi x}$ является неподвижной точкой для преобразования Фурье.

Введем несколько вспомогательных операторов.

**Определение 56.** 1. $\tau^\alpha$ – оператор сдвига.
$$\tau^\alpha f(x) = f(x-\alpha).$$

2. $\delta^\alpha$ – оператор сжатия.
$$\delta^\alpha f(x0 = f(\alpha x).$$

3. $\tilde{\cdot}$ – оператор отражения.
$$\tilde{f}(x) = f(-x).$$

**Предложение** (Свойства преобразования Фурье). *Пусть* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

*Тогда имеют место следующие свойства:*

*1.*

$$(f+g)^\wedge = \hat{f} + \hat{g},$$

*2.*

$$(bf)^\wedge = b\hat{f},$$

*3.*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

*4.*

$$\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}},$$

*5.*

$$\hat{\overline{f}} = \overline{\tilde{\hat{f}}},$$

*6.*

$$(\tau^a f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i a\xi}\hat{f}(\xi),$$

*7.*

$$\left(e^{2\pi i a \star} f\right)^\wedge = \tau^a f,$$

*8.*

$$(\delta^a f)^\wedge = \frac{1}{a}\delta^{\frac{1}{a}}\hat{f},$$

*9.*

$$\left(f^{(\alpha)}\right)^\wedge(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$$

*10.*

$$\hat{f}^{(\alpha)} = \left((-2\pi i\star)^\alpha f\right)^\wedge,$$

*11.*

$$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

*12.*

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\cdot\hat{g}.$$

*Доказательство.* 1. Очевидно из-за свойств интеграла

2. Очевидно из-за свойств интеграла
3. Вспомнив, что $\|f\|_{L_1} = \int\limits_{\mathbb{R}} f$, получается очевидно
4.
5. Так как сопряжение проносится под интеграл, то поменяется знак у экспоненты, а отражение поменяет его обратно

6.

$$(\tau^a f)^\wedge(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-a)\cdot e^{-2\pi i x\xi}dx = e^{-2\pi i a\xi}\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot e^{-2\pi i x\xi}dx}_{\hat{f}}.$$

7.

$$\left(e^{2\pi i a x} f\right)^\wedge = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i a x} f(x)\cdot e^{-2\pi i x\xi}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x(\xi-a)}dx = \tau^a \hat{f}.$$

8.

$$(\delta^a f)^\wedge = \int\limits_{\mathbb{R}} f(ax)\cdot e^{-2\pi i x\xi}dx = \frac{1}{a}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot e^{-2\pi i \frac{x}{a}\xi}dx = \frac{1}{a}\delta^{\frac{1}{a}}\hat{f}.$$

9. Покажем при $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}(f')^\wedge(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f'(x)\cdot e^{-2\pi i x\xi}dx = \\ &\left|\begin{aligned} u = e^{-2\pi i x\xi} &\implies u' = -2\pi i\xi e^{-2\pi i x\xi}, \\ v' = f' &\implies v = f \end{aligned}\right| \\ &= f\cdot e^{-2\pi i x\xi}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i\xi\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\cdot e^{-2\pi i x\xi}dx = 2\pi i\xi\hat{f}.\end{aligned}$$

Тогда для высших производных индуктивно имеем такие же рассуждения, так как $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

10. Снова покажем для $\alpha = 1$:

$$\hat{f}' = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx\right)' =$$

$$= \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x(\xi + \Delta\xi)} dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx}{\Delta\xi} =$$

|по теореме Лебега можем поменять знаки интеграла и предела|

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \lim_{\Delta\xi \to 0} \frac{e^{-2\pi i x(\xi+\Delta\xi)} - e^{-2\pi i x\xi}}{\Delta\xi} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(e^{-2\pi i x\xi}\right)'_{\xi} dx =$$

$$= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot x \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx = -2\pi i \xi \hat{f}.$$

Опять таки, строго говоря, надо находить мажоранту для применения теоремы Лебега. Для этого стоит рассмотреть вещественную и мнимую часть и ограничить их по Тейлору с остатком в форме Лагранжа. Тогда мажоранта $\Phi(x) = 2\,|f(x)|$ подойдет.

11. Понятно, что $\hat{f} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, так как по предыдущему свойству любая производная есть преобразование Фурье от произведения функции на многочлен.

    Воспользуемся эквивалентным определением принадлежности пространству Шварца:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+ \quad \sup_{\xi} \left| \left(\xi^{\beta} \hat{f}(\xi)\right)^{(\alpha)} \right| < \infty.$$

Из 9-ого свойства:

$$\xi^{\beta} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^{\beta}} (f^{(\beta)})^{\wedge}(\xi).$$

Взяв производную с двух сторон и применив 10-ое свойство, получаем

$$\left(\xi^{\beta} \hat{f}(\xi)\right)^{(\alpha)} = \frac{1}{(2\pi i)^{\beta}} \left((-2\pi i \star)^{\alpha} f^{(\beta)}\right)^{\wedge}(\xi) = \frac{(-2\pi i)^{\alpha}}{(2\pi i)^{\beta}} \left(\star^{\alpha} f^{(\beta)}\right)^{\wedge}(\xi).$$

Тогда, переходя к нормам, по 3-ему свойству

$$\| \left(\xi^{\beta} \hat{f}(\xi)\right)^{(\alpha)} \| \leqslant \frac{(2\pi)^{\alpha}}{(2\pi)^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \left| x^{\alpha} f^{(\beta)}(x) \right| dx.$$

Так как сама $f^{(\beta)}$ лежит в пространстве Шварца, то по одному из определений $f^{(\beta)}(x) \leqslant \frac{C_{N,\alpha}}{(1+|x|)^N}$. Возьмем, например, $N = \alpha + 2$.

$$\frac{(2\pi i)^\alpha}{(2\pi i)^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}} \left| x^\alpha f^{(\beta)}(x) \right| dx \leqslant \frac{(2\pi)^\alpha}{(2\pi)^\beta} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|x|^\alpha C}{(1+|x|)^{\alpha+2}} dx < \infty.$$

12.

$$\begin{aligned}
(f*g)^\wedge(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} (f*g)(x) \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(x-t) dt \right) \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(x-t) \cdot e^{-2\pi i x\xi} dx \right) dt = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \left( \int\limits_{\mathbb{R}} g(u) \cdot e^{-2\pi i (t+u)\xi} du \right) dt = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cdot e^{-2\pi i t\xi} \cdot \left( \int\limits_{\mathbb{R}} g(u) \cdot e^{-2\pi i u\xi} du \right) dt = \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t) \cdot e^{-2\pi i t\xi} \cdot \hat{g}(\xi) dt = \\
&= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

# Часть VIII
# Уравнения в частных производных 1-ого порядка

## 28 Линейные уравнения в частных производных

## 29 Квазилинейные уравнения

**Определение 57.** Квазилинейным уравнением называется уравнение вида

$$a \cdot u' = b,$$

где $a = \begin{pmatrix} a_1(x_1, \ldots, x_n, u) \\ \vdots \\ a_n(x_1, \ldots, x_n, u) \end{pmatrix}$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $b = b(x_1, \ldots, x_n, u)$.

**Определение 58.** Характеристической системой для квазилинейного уравнения $a \cdot u' = b$ называется система вида

$$\begin{cases} x_1' = a_1, \\ \vdots \\ x_n' = a_n, \\ u' = b. \end{cases}$$

(все производные берутся по времени $t$)

Решения характеристической системы называются характеристиками квазилинейного уравнения.

**Теорема 27.** *Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\sigma : u = f(x_1, \ldots, x_n)$, $\quad (x_1, \ldots, x_n) \in D_0$ – поверхность, $f \in C^1(D_0)$.*

*Тогда $\sigma$ – интегральная поверхность квазилинейного уравнения тогда и только тогда, когда $\sigma$ составлена из характеристик этого уравнения, то есть через каждую точку поверхности проходит характеристика, целиком лежащая в $\sigma$.*

*Доказательство.* $\Leftarrow$ Пусть $\gamma \subset \sigma$ – кривая и $l(t_0) = \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \\ u'(t_0) \end{pmatrix}$ – касательный вектор к $\gamma$ в точке $M$. Нормаль к нашей поверхности задается вектором $m = \big(f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}, -1\big)$.

Тогда касательный вектор перпендикулярен к нормали, то есть $m \cdot l = 0$. Иначе говоря, в точке M:

$$f'_{x_1} \cdot x_1'(t_0) + \dots + f'_{x_n} \cdot x_n'(t_0) + (-1) \cdot u'(t_0) = 0,$$

$$a_1(M) \cdot f'_{x_1} + \dots + a_n(M) \cdot f'_{x_n} = b.$$

А это и есть наше исходное квазилинейное уравнение (с подставленной интегральной поверхностью).

$\Rightarrow$ Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1' = a_1(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)), \\ \vdots \\ x_n' = a_n(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)). \end{cases}$$

Пусть $M_0$ – проекция точки $M$ на $\mathbb{R}^n_{x_1,\dots,x_n}$.

Рассмотрим кривую $\lambda : x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t), u = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$, где $(x_1, \dots, x_n)$ – решение этой системы. Понятно, что она проходит через поверхность $\sigma$.

Проверим, что она является характеристикой, то есть обращает характеристическую систему в тождество. Первые уравнения не вызывают сомнения, а для получения последнего рассмотрим

$$u' = f_t'(x_1(t), \dots, x_n(t)) = f'_{x_1} \cdot x_1'(t_0) + \dots + f'_{x_n} \cdot x_n'(t_0) = a \cdot f' = b.$$

Таким образом, действительно данная кривая является характеристикой, а мы выбирали кривую $\lambda$ по произвольной точке, то есть следствие в теореме выполняется.

**Теорема 28.** *Пусть $v_1, \dots, v_n$ – функционально независимые первые интегралы характеристической системы квазилинейного уравнения.*

*Функция $u(x_1, \dots, x_n)$ – решение квазилинейного уравнения в окрестности некоторой точки тогда и только тогда, когда и неявно задана уравнением*

$$F(v_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0,$$

*где $F \in C^1$.*

**Пример 32.**

$$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=y-x.$$

*Найти общее решение, а также решение, проходящее через прямую* $x = 1, y = z$.

*Решение.* Характеристическая система данного уравнения:

$$\begin{cases} x' = z-y, \\ y' = x-z, \\ z' = y-x. \end{cases}$$

Сложив все уравнения, получаем $u_1 = x+y+z$.

А, рассмотрев $xx'+yy'+zz' = (x^2+y^2+z^2)'$, заметим, что он обнуляется. То есть $u_2 = x^2+y^2+z^2$.

Так как $rk(u_1', u_2') = rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = 2$, при $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, то общее решение имеет вид $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$.

Решим задачу Коши.

$$F|_{x=1,y=z} = F(1+2y, 1+2y^2) = 0 \begin{cases} r_1 = 1+2y, \\ r_2 = 1+2y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \left(\frac{r_1-1}{2}\right)^2, \\ y^2 = \frac{r_2-1}{2}. \end{cases}$$

**Пример 33.**

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

*Найти поверхность, проходящую через кривую* $x = \tau, y = \tau^2, z = 0$.

*Решение.* Характеристическая система

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

$u_1 = \frac{x}{y}$.

$$(x^2+y^2+z^2)'/2 = xx'+yy'+zz' = x^2+y^2+z^2-z\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\begin{cases} k'/2 = k-z\sqrt{k}, \\ z' = z-\sqrt{k} \end{cases}$$

$$k'/2 = k - (z' + \sqrt{k})\sqrt{k} = -z'\sqrt{k},$$

$$\sqrt{k}' + z' = 0$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z)' = 0$$

$$u_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z.$$

Таким образом, $F(\frac{x}{y}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z) = 0$ – общее решение.
$F(\frac{1}{\tau}, \sqrt{\tau^2 + \tau^4}) = 0$
$F = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1^4} - r_2^2$
$F = (\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x})^4 - (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z)^2$