Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

# Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

**Магазенков Е. Н.**

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

# Часть I

## 1 Линейные уравнения 1-ого порядка

**Определение 1.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1}$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛНУ или просто ЛУ).

**Определение 2.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y \tag{2}$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОУ).

*Замечание.* Вообще, мы уже неоднократно сталкивались и решали уравнения такого вида. Однако для строгого обоснования наших решений рассмотрим следующую лемму.

**Лемма 1** (Общее решение ЛОУ)**.** *Пусть в линейном однородном уравнении $y' = p(x)y$ функция $p(x) \in C\,(a, b)$.*

*Тогда его общее решение имеет вид*

$$y = c \cdot e^{\int p}, \tag{3}$$

*где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int p$ понимается какая-то производная функции $p(x)$.*

*Доказательство.* Воспользуемся эквивалентным преобразованием

$$y' = p(x)y \Leftrightarrow dy = p(x)ydx.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

1. $y = 0$ – очевидно решение,
2. при $y > 0$: разделим на $y$ с обеих сторон

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx,$$

$$\ln y = \int p(x)dx,$$

$$y = A \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } A > 0.$$

3. при $y < 0$: аналогично, но появляется минус, который можно засунуть в константу.

$$y = B \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } B < 0.$$

4. Осталось разобрать случай, когда интегральная кривая проходит через границу $y = 0$. Однако, рассматривая все кривые, видно, что они заданы строго в одной полуплоскости относительно $y = 0$:

$$y = A \cdot e^{\int p} > 0, \quad \text{где } A > 0, \quad y = B \cdot e^{\int p} < 0, \quad \text{где } B < 0.$$

Таким образом, действительно, общее решение ЛОУ можно записать в виде $y = c \cdot e^{\int p}$.

*Замечание.* Теперь мы строго доказали, ранее использовавшиеся факты. Как вывод из этого, мы получаем, что теперь можно каждый раз не решать ЛОУ, а просто пользоваться формулой. Или хотя бы всегда проверять, похоже ли решение на полученное в общем виде.

*Замечание.* Далее мы будем рассматривать общее решение неоднородного уравнения. Мы используем достаточно интересный метод доказательства: так, мы предоставим какое-то решение, которое мы назовем общим, а далее докажем, что любое другое решение на самом деле задается именно нашим выражением.

Оказывается, что такой метод можно применять и для решения любых уравнений. Достаточно лишь показать, что представленное выражение является решением, а также, что любое другое произвольное решение задается этим выражением.

**Лемма 2** (Общее решение ЛНУ)**.** *Пусть в линейном уравнении* $y' = p(x)y + q(x)$ *функции* $p(x)$, $q(x) \in C\,(a, b)$.

*Тогда его общее решение имеет вид*

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}, \tag{4}$$

*где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int f$ понимается какая-то производная функции $f(x)$.*

*Доказательство.* • Докажем, что данное данное множество решений включено в общее множество решений исходного уравнения. Проще говоря, проверим, правда ли, что представленное выражение является решением.

Найдем $y'(x)$:

$$y' = q \cdot e^{-\int p} \cdot e^{\int p} + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot pe^{\int p} = q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot pe^{\int p}.$$

Тогда, подставляя в исходное уравнение:

$$q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot pe^{\int p} \equiv p \cdot \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p} + q,$$

получаем верное тождество.

• Докажем, что произвольное решение задается формулой $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$.

Пусть $\varphi \in (\alpha, \beta)$ – решение, не задающееся этой формулой.

Рассмотрим $x_0 \in (\alpha, \beta) : \ \varphi(x_0) = y_0$.

Найдем такое $c \in \mathbb{R}$, что наше решение проходит через точку $(x_0, y_0)$.

$$\left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}\Big|_{x=x_0} = y_0,$$

$$c = \left(y_0 \cdot e^{-\int p} - \int q \cdot e^{-\int p}\right)\Big|_{x=x_0}.$$

Пусть решение с этим $c$ – решение $\psi$. Тогда мы получили два решения задачи Коши $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ на интервале $(\alpha, \beta)$. Так как $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C\left(()\, a, b\right)$, то по теореме об единственности решения задачи Коши $\varphi = \psi$, что противоречит предположению о том, что $\varphi$ не задается решением вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$.

Таким образом, действительно любое решение можно представить в виде $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$.

Объединяя эти два факта, мы получаем, что показанное нами решение действительно является общим решением линейного дифференциального уравнения.

*Замечание.* В итоге мы имеем формулу для решения ЛУ, в которую можно подставить нужные значения. Однако достаточно тяжело помнить ее наизусть, поэтому нужно иметь какой-то метод, который сможет нас привести к этому решению. Напомним, что любой метод, который будет давать решение вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$ окажется верным, так как мы уже доказали, что это общее решение.

**Предложение** (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной)**.** *Пусть стоит задача решить линейное уравнение $y' = p(x)y+q(x)$.*

*Рассмотрим соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение $y' = p(x)y$. Его общее решение мы знаем (либо можем найти): $y = c \cdot e^{\int p}$.*

*Рассмотрим теперь $c$ не как константу, а как функцию $c(x)$.*

*Подставляя $y = c(x) \cdot e^{\int p}$ в исходное линейное уравнение, получаем:*

$$c'(x) \cdot e^{\int p} + \cancel{c(x) \cdot pe^{\int p}} = \cancel{pc(x) \cdot e^{\int p}} + q,$$

$$c'(x) = q \cdot e^{-\int p}.$$

*Это уравнение мы снова можем решить:*

$$c(x) = \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}.$$

*Тогда, возвращаясь к решению однородного уравнения и подставляя $c$ туда, получаем*

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}\right) \cdot e^{\int p},$$

*то есть общее решение линейного уравнения.*

# 2 Уравнения Бернулли и Рикатти

*Замечание.* Существует огромное количество уравнений первого порядка, которые можно свести к линейному какой-либо заменой. В этом пункте будут разобраны такие уравнения, представленные в XVII веке Якобом Бернулли [1] и Рикатти [2].

[1] Якоб Бернулли (1655–1705, Швейцария)

[2] Рикќати Якопо Франческо (1676–1754, Италия)

**Определение 3.** Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \tag{5}$$

где $\alpha \neq \{0, 1\}$, называется дифференциальным уравнением Бернулли.

**Лемма 3.** *Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$ при $y \neq 0$ заменой $t = y^{1-\alpha}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению.*

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}.$$

Поделим обе части уравнения на $y^{\alpha}$:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Сделаем замену $t = y^{1-\alpha}$, тогда $t' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$:

$$\frac{1}{1-\alpha}t' = p(x)t + q(x),$$

$$t' = (1-\alpha)\left(p(x)t + q(x)\right).$$

Получили линейное дифференциальное уравнение.

**Определение 4.** Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{6}$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

*Замечание.* Уравнение Бернулли является частным случаем уравнения Рикатти при $r(x) \equiv 0$. Рикатти был знаком с семьей Бернулли, поэтому связь между этими уравнениями неслучайна.

**Лемма 4.** *Пусть $\varphi$ – какое-то решение уравнения Рикатти $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Подстановка $y = z + \varphi$ сводит это уравнение к уравнению Бернулли.*

*Доказательство.* Найдем $y'$:

$$y' = z' + \varphi'.$$

Так как $\varphi$ – решение уравнения Рикатти, то

$$\varphi' = p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x).$$

Тогда $y' = z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x)$.

Подставим замену в уравнение Рикатти

$$z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + \cancel{r(x)} = p(x)(z+\varphi)^2 + q(x)(z+\varphi) + \cancel{r(x)},$$

$$z' = z\,\underbrace{(2p(x)\varphi + q(x))}_{P(x)} + \underbrace{p(x)}_{Q(x)}\,z^2,$$

$$z' = P(x)z + Q(x)z^2.$$

Получили уравнение Бернулли для $\alpha = 2$.

# 3 Уравнение в полных дифференциалах

**Определение 5.** Пусть существует функция $u$ такая, что $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (то есть $u'_x = P$, $u'_y = Q$). Тогда уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

**Теорема 1** (Общее решение УПД)**.** *Пусть $u \in C^1(G)$, причем $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $\varphi(x)$ является общим решением уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ на интервале $(\alpha,\beta)$ в том и только том случае, когда $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и $\varphi$ неявно задается уравнением $u(x,y) = c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Необходимость:
Так как $\varphi$ – решение, то $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и

$$P(x,\varphi(x))dx + Q(x,\varphi(x))d(\varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Заметим, что левая часть есть полная производная функции $u(x,\varphi(x))$.

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) \equiv 0,$$

$$u(x,\varphi(x)) \equiv c.$$

Таким образом, получаем, что $\varphi$ действительно неявно задана уравнением $u(x,y)=c$.

Достаточность:
Так как $\varphi$ неявно задана уравнением $u(x,y)=c$, то

$$u(x,\varphi(x))\equiv c.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x))\equiv 0,$$

то есть

$$P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\equiv 0.$$

Так как $\varphi\in C^1(\alpha,\beta)$, то $\varphi$ является решением уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ по определению решения дифференциального уравнения.

*Замечание.* Назревает хороший вопрос: откуда эту функцию $u$ взять и почему вообще она существует?

Пусть есть функция $u: u'_x=P,\ u'_y=Q,\ u\in C^2(G)$. Рассмотрим вторые производные:

$$\left.\begin{aligned} u_xy''=P'_y,\\ u_yx''=Q'_x\end{aligned}\right\}\implies P'_y=Q'_x.$$

На основе этого утверждения появляется следующая теорема.

**Теорема 2** (Признак УПД)**.** *Пусть $P,Q\in C^1(G)$, причем $P'_y=Q'_x$, где $G$ – односвязная область. Тогда существует функция $u: u'_x=P, u'_y=Q$. Кроме того, все такие функции имеют вид*

$$u(\tilde{x},\tilde{y})=\int\limits_{\gamma(\tilde{x},\tilde{y})}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+c,$$

*где $c\in\mathbb{R}$, $\gamma(\tilde{x},\tilde{y})$ – кривая в области $G$, соединяющая точки $(x_0,y_0)$ и $(\tilde{x},\tilde{y})$.*

*Замечание.* Таким образом, при определенных условиях мы поняли, как можно найти эту функцию $u$. И далее, решая уравнение $u=c$, можем найти общее решение УПД.

Однако вычисление данного криволинейного интеграла зачастую является непростой задачей, поэтому рассмотрим другие методы.

**Определение 6.** Функция $u$ при условии $u'_x=P$, $u'_y=Q$ называется потенциалом поля $(P,Q)$, а поле $(P,Q)$ – потенциальным полем.

**Пример 1.**
$$e^{-y}dx - \big(xe^{-y} + 2y\big)\,dy = 0.$$

*Решение.* Область определения уравнения есть $\mathbb{R}^2$ – односвязное множество.

Рассмотрим производные коэффициентов $P = e^{-y}$ и $Q = (xe^{-y} + 2y)$:
$$P'_y = -e^{-y} = Q'_x.$$

Таким образом, по признаку – это уравнение в полных дифференциалах.

Не будем вычислять криволинейный интеграл. Но рассмотрим систему
$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -xe^{-y} - 2y \end{cases}.$$

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой $y_0$:
$$u'_x(x, y_0) = e^{-y_0} \implies u(x, y_0) = \int e^{-y_0}dx = xe^{-y_0} + c(y_0).$$

Подставляя во второе уравнение системы, получаем
$$\big(xe^{-y} + c(y)\big)'_y = -xe^{-y} - 2y,$$
$$\cancel{-xe^{-y}} + c'(y) = \cancel{-xe^{-y}} - 2y,$$
$$c' = -2y,$$
$$c(y) = -y^2 + A.$$

Таким образом, $u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$, а значит уравнение $xe^{-y} - y^2 = C$ задает решение УПД.

*Замечание.* В примере был показан другой способ решения УПД, избегающий криволинейное интегрирование. Однако данный способ далеко не всегда оказывается возможен. По крайней мере, не всегда можно взять интеграл, чтобы найти $u(x, y_0)$ (при плохой области интеграл по прямой будет достаточно сложен).

**Определение 7.** Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если при домножении этого уравнения на $\mu$ получается уравнение в полных дифференциалах.
$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \text{ — УПД}.$$

*Замечание.* Если $\mu$ – интегрирующий множитель уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, причем $\mu, P, Q \in C^1(G)$. Тогда $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$. Расписывая производную получаем уравнение в частных производных

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x.$$

Решать его оказывается совсем непросто, однако чисто теоретически это является способом нахождения интегрирующего множества.

Однако стоит помнить, что нам не требуется находить общее решение. Нам достаточно лишь какое-то частное решение. Иногда его можно найти, как в следующем примере.

**Пример 2.** *Рассмотрим линейное уравнение*

$$y' = p(x)y + q(x),$$

*где $p \neq 0$. Попробуем найти его интегрирующий множитель.*

*Решение.* Перепишем исходное уравнение

$$(p(x)y + q(x))\, dx - dy = 0.$$

Заметим, что это уравнение не является уравнением в полным дифференциалах.

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя.

$$\mu'_y\, (p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = -\mu'_x.$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда первое слагаемое слева обнулится

$$\mu p(x) = -\mu'_x,$$

$$\mu = Ce^{-\int p}.$$

Так как нам нужно лишь какое-то решение, то рассмотрим любое $C$, например $C = 1$.

Таким образом, $\mu = e^{-\int p}$ – интегрирующий множитель.

Умножим на $\mu$ исходное уравнение

$$y'e^{-\int p} = p(x)ye^{-\int p} + q(x)e^{-\int p},$$

$$y'e^{-\int p} - p(x)ye^{-\int p} = q(x)e^{-\int p}.$$

Заметим, что в левой части стоит производная произведения $\left(ye^{-\int p}\right)$

$$\left(ye^{-\int p}\right) = q(x)e^{-\int p},$$

$$ye^{-\int p} = \int q(x)e^{-\int p} + A,$$

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p} + A\right)e^{\int p}.$$

Таким образом, получили общее решение линейного уравнения, а значит решение привело к верному ответу.

*Замечание.* Таким образом, мы получили еще один способ нахождения решения линейного уравнения, которым можно пользоваться на практике. Нужно запомнить интегрирующий множитель $\mu = e^{-\int p}$, а также свертывание в производную произведения.

# Часть II
# Уравнения, не разрешимые относительно произодной

## 4 Уравнение, разрешимое относительно производной

**Пример 3.** *Уравнение* $(y')^3 - 2yx = 0$ *очевидно является разрешимым относительно производной:* $y' = \sqrt[3]{2yx}$.

**Пример 4.** *Рассмотрим уравнение* $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$.

*Рассмотрим отдельно решения уравнений* $y' = 2x$ *и* $y' = -2x$. *Хочется сказать, что вместе эти решения дадут общее решение исходного. Однако это не так! Очевидно, что решениями являются параболы с ветвями вниз и вверх соответственно. Тогда можно посмотреть на кривую, содержащую левую ветвь одной из парабол и правую другой (Рис. 1). Это также интегральная кривая, так как она очевидно гладкая. Оказывается, что только в точке с абсциссой* $x = 0$ *возможны такие интегральные кривые, так как иначе гладкость не соблюдается.*

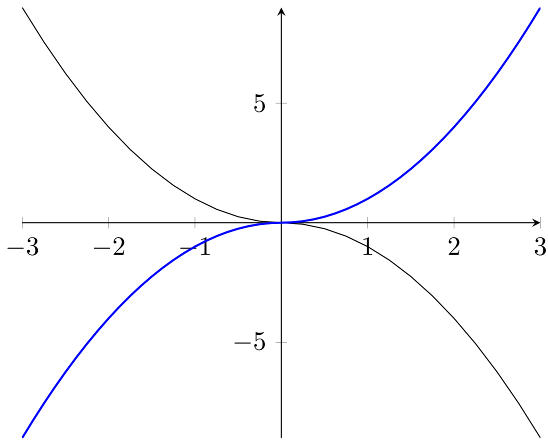


*Рис. 1*

# 5 Метод введения параметра

**Определение 8.** Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и $\forall t \in I\ f(\varphi(t)) = \psi(t)$.

*Замечание.* Заметим, что определение можно переписать немного по-другому. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и множество $[(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I]$ является графиком функции $f$.

Нетрудно понять, что эти определения эквивалентны.

**Пример 5.** *Зададим функцию $f(x) = 1, x \in [-1, 1]$ параметрически.*

*Например,* $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. *Очевидно, что это задание удовлетворяет определению.*

**Предложение.** *Рассмотрим уравнение $F(x, y') = 0$ от двух переменных $x$ и $y'$. Пусть оно задает некоторую кривую $\gamma = \{(x, y)\,|F(x, y') = 0\}$ плоскости $xOy'$.*

*Возьмем функцию $\varphi$ такую, что эта кривая является графиком функции $\varphi'$.*

*Тогда $F(x, \varphi'(x)) \equiv 0$.*

*Идея нахождения решения такого уравнения (в котором нельзя выразить $y'$) заключается в том, чтобы задать функцию $\gamma$ параметрически* *и найти $y$ также параметрически.*

*Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, $\varphi' \neq 0$, $\psi \in C(\alpha, \beta)$, причем эти функции задают параметрически наше уравнение $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$.*

*Тогда функция, задаваемая параметрически*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

*является решением уравнения $F(x, y') = 0$.*

*Замечание.* Проверим, что функция действительно является решением.

Во-первых, проверим, что такое задание действительно является функцией, то есть каждому $x$ соответствует ровно один $y$. Так как $\varphi' \neq 0$, то $\varphi$ строго возрастает и тогда $\varphi$ – биекция. Рассматривая обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, получаем $y = g \circ \varphi^{-1}$.

Во-вторых, проверим непрерывность и дифференцируемость решения. Так как $g \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, то их композиция также непрерывно дифференцируема.

В-третьих, проверим, что функция обращает наше уравнение в тождество.

$$F(x, y')|_{y = g\circ\varphi^{-1}(x)} = F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right).$$

Так как $\left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x) = g'(\varphi^{-1}(x))\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = (\psi(t)\varphi'(t))_{t=\varphi'(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$, то получаем

$$F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right) = F\left(x, \psi(\varphi^{-1}(x))\right) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, наша функция действительно действительно обращает выражение в нуль. А значит, эта функция является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

**Пример 6.**

$$e^{y'} + y' = x.$$

*Решение.* Параметризуем множество, задаваемое этим уравнением

$$\left\{(x, y') : \ e^{y'} + y' = x\right\}.$$

Пусть $y' = t$. Тогда $x = e^t + t$.

*Замечание* (Основное соотношение метода введение параметра).

$$dy = y'_x dx.$$

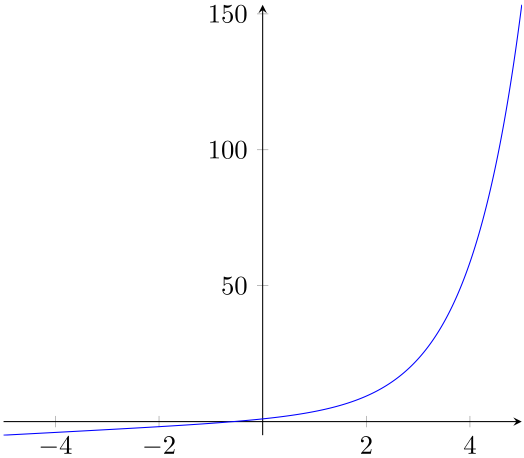


*Рис. 2*

Подставляя наши функции получаем

$$dy = t \cdot d(e^t + t),$$

$$dy = t \cdot \left(e^t + 1\right),$$

$$y = \int t \cdot \left(e^t + 1\right) dt + c.$$

В итоге мы пришли к той же самой формуле, что и доказали ранее. А значит подстановки подходят.

Тогда следующая функция является решением

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

**Предложение** (Общий случай метода введения параметра)**.** *Пусть есть уравнение* $F(x, y, y') = 0$, *задающее какую-то поверхность* $\sigma = ((x, y, y')\,|F\,(x, y, y') =$

*Пусть* $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ *– параметризация* $\sigma$*.*

*Подставим эту параметризацию в основное соотношение* $dy = y'_x dx$*.*

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(u, v) \left(\varphi'_u du + \varphi'_v dv\right).$$

*Пусть $v = g(u, C)$ – решение этого уравнения.*

*Тогда получаем* $\begin{cases} x = \varphi(u, v = g(u, C)), \\ y = \psi(u, v = g(u, C)) \end{cases}$ *– параметризация решений исходного уравнения.*

**Пример 7.**

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0.$$

*Решение.* Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln v. \end{cases}$$

Тогда подставляя в основное соотношение, получаем

$$\cancel{vdu} + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = \cancel{vdu},$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = 0,$$

При $\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$, получаем $v = 2e^{2u-1}$. Тогда $y = e^{2x-1}$.

При $dv = 0$, получаем $y = cx - \frac{c}{2} \ln \frac{c}{2}$.

*Замечание.* Важно помнить, что это могут быть не все решения уравнения!!! Такой случай уже был рассмотрен в примере 4.