Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

1 Линейные уравнения 1-ого порядка (23.10)

Пример 1.

$$y' = y + x.$$

Решение. Решим однородное уравнение

$$y' = y.$$

$$y = C \cdot e^x$$

Пусть C – функция, подставим решение в исходное уравнение

$$C'(x) \cdot e^x + \cancel{C(x) \cdot e^x} = \cancel{C(x) \cdot e^x} + x$$

$$C'(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx$$

$$u = x \implies u' = 1, v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x}$$

$$C(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x+1) + c$$

So

$$y = (-e^{-x}(x+1) + c)e^x$$

$$y = -(x+1) + ce^x$$

Пример 2.

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

Решение. Разделим на y^2

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{y} + e^x$$

Выполним замену $z = \frac{1}{y}$, тогда $z' = -\frac{y'}{y^2}$ Тогда, подставляя в исходное уравнение, получаем

$$z' = 2z - e^x$$

Решением данного линейного уравнения является функция

$$z = (e^{-x} + c) \cdot e^{2x}$$

Тогда, возвращаясь к исходной переменной

$$y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + c}$$

Пример 3.

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

Решение. Уравнение имеет вид уравнения Рикатти.

Очевидно, что $y = -e^x$ – одно из решений. Тогда сделаем замену $z = y - e^x$.

$$z' + e^x = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x} + e^x,$$

$$z' + e^x = z^2 + 2e^x z + e^{2x} - 2e^x z - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x,$$

$$z' = z^2,$$

$$-\frac{1}{z} = x + c,$$

$$z = \frac{-1}{x + c}.$$

Тогда, возвращаясь к исходным переменным, получаем $y = e^x - \frac{1}{x+c}$.

2 Уравнения в полных дифференциалах

Пример 4.

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

Решение. Рассмотрим производные коэффициентов

$$(2 - 9xy^2)x'_y = -18x^2 y,$$

$$(4y^2 - 6x^3)y'_x = -18x^2 y.$$

Так как они совпадают, то по признаку это уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0:

$$u'_x(x, y_0) = 2x - 9x^2y_0^2 \implies u(x, y_0) = x^2 - 3x^3y_0^2 + c(y_0).$$

Подставляя в уравнение $u'_y = (4y^2 - 6x^3)y$, получаем

$$\left(x^2 - 3x^3y^2 + c(y_0)\right)'_y = (4y^2 - 6x^3)y,$$

$$-6x^3y + c'(y) = (4y^2 - 6x^3)y,$$
$$c'(y) = 4y^3,$$
$$c(y) = y^4 + c.$$

Таким образом, получаем функцию $u = x^2 - 3x^3y_0^2 + y^4 + c$. Тогда уравнение $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$ неявно задает решение нашего уравнения.

Замечание (Свойства дифференциала).

1. $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du_\beta dv$,
2. $du = d_x u + d_y u$,
3. $d_x u = d_x \left(u + \varphi(y)\right)$,
4. $\varphi(x, y)dx = d_x \left(\int \varphi(x, y)dx\right)$.

Замечание. Можно решать УПД, используя свойства дифференциала. Рассмотрим пример из лекции и попробуем решить его, упращая выражение по свойствам.

Пример 5.

$$e^{-y}dx - \left(xe^{-y} + 2y\right)dy = 0.$$

Решение. Раскроем скобки

$$e^{-y}dx - xe^{-y}dy - 2ydy = 0.$$

Пользуясь четвертым свойством, перейдем к

$$d_x(xe^{-y}) + d_y(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

Используя второе свойство, получим

$$d(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

По первому свойству

$$d(xe^{-y} - y^2) = 0.$$

Тогда общее решение будем неявно задаваться уравнением

$$xe^{-y} - y^2 = c.$$

Пример 6.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение.

$$2xydx + x^2dy - y^2dy = 0,$$

$$d_x\left(x^2y\right) + d_y\left(x^2y\right) - \frac{1}{3}dy^3 = 0,$$

$$d\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) = 0.$$

Тогда $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ неявно задает решение.

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

Решение.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}dx - dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0,$$

$$d_x\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) - dx + d_y\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) = 0,$$

$$d\sqrt{x^2 - y^2} - dx = 0,$$

$$d\left(\sqrt{x^2 - y^2} - x\right) = 0.$$

Тогда $\sqrt{x^2 - y^2} - x = c$ неявно задает решение.

Пример 8. *Найти интегральный множитель*

$$\left(1-x^2y\right)dx+x^2(y-x)dy=0.$$

Решение. Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y\left(1-x^2y\right)-\mu x^2=\mu'_x x^2(y-x)+\mu\left(2xy-3x^2\right).$$

Будем искать частное решение в виде $\mu=\mu(x)$.

$$\mu'_x x^2(x-y)=2\mu\left(xy-x^2\right),$$

$$\mu'_x x=-2\mu,$$

$$\mu=-\frac{1}{x^2}.$$

3 Метод введения параметра

Пример 9.

$$y=\left(y'\right)^2e^{y'}.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases}y'=v,\\ y=v^2e^v.\end{cases}$$

Подставим в основное соотношение $dy=y'_xdx$

$$(2ve^v+v^2e^v)dv=vdx,$$

$$(2+v)e^vdv=dx,$$

$$x=e^v+ve^v+c.$$

Таким образом, ответом является $\begin{cases}x=e^v+ve^v+c,\\ y=v^2e^v.\end{cases}$

Пример 10.

$$x^3 - (y')^3 = xy'.$$

Решение.

Замечание. Если кривая имеет уравнения вида $P(x,y) + Q(x,y) = 0$, где P, Q – однородные функции разной степени, то положив $y = xt$, получаем $x^\alpha P(1,t) + x^\beta Q(1,t) = 0$, откуда можно выразить x.

Используя предложенное в замечании, введем параметризацию $y' = xt$.

$$x^3 - (xt)^3 = x \cdot xt,$$

$$x = \frac{t}{1-t^3},$$

$$y' = \frac{t^2}{1-t^3}.$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$dy = \frac{t^2}{1-t^3}\frac{1-t^3+3t^3}{(1-t^3)^2}dt,$$

$$dy = \frac{t^2(1+2t^3)}{(1-t^3)^3}dt,$$

$$u = 1 + 2t^3 \implies u' = 6t^2$$

$$v' = \frac{t^2}{(1-t^3)^3} \implies v = \frac{1}{6(1-t^3)^2}$$

$$y = \frac{1+2t^3}{6(1-t^3)^2} - \frac{1}{3(1-t^3)} + c,$$

$$y = \frac{4t^3-1}{6(1-t^3)^2} + c.$$

Пример 11.

$$y = 2xy' - (y')^2.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = 2uv - v^2. \end{cases}$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$2vdu + 2udv - 2vdv = vdu,$$

$$vdu = 2(v-u)dv,$$

$$u' = 2 - \frac{2u}{v},$$

$$u = \left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-2},$$

Тогда решением является

$$\begin{cases} x = \left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-2}, \\ y = 2\left(\frac{2v^3}{3} + c\right) v^{-1} - v^2. \end{cases}$$

4 Решение уравнений, не разрешенных относительно производной

Пример 12.

$$y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0.$$

Решение. Разложим левую часть на множители

$$\left(y' + x^3 + x\sqrt{x^4+4y}\right)\left(y' + x^3 - x\sqrt{x^4+4y}\right) = 0.$$

Рассмотрим варианты:

1. $y' + x^3 + x\sqrt{x^4+4y} = 0$. Заменой $z = x^4 + 4y \implies z' = 4x^3 + 4y'$ сведем это уравнение к уравнению

$$\frac{z' - 4x^3}{4} + x^3 + x\sqrt{z} = 0,$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -2xdx,$$

$$\sqrt{z} = -x^2 + c,$$

$$z = (-x^2+c)^2, \quad \text{где } x^2 \leqslant c.$$

Тогда $y = \frac{(-x^2+c)^2 - x^4}{4} = \frac{-2cx^2+c^2}{4}$ при $x^2 \leqslant c$.

2. $y' + x^3 - x\sqrt{x^4+4y} = 0$.
Аналогично $y = \frac{2cx^2+c^2}{4}$ при $x^2 \geqslant -c$.

Попробуем объединить эти решения, переопределив константы. В первом случае возьмем $A = -\frac{c}{2}$, а во втором – $A = \frac{c}{2}$.

1. $y = Ax^2 + A^2$ при $A < 0$ и $x \in \left[-\sqrt{-2A}, \sqrt{-2A}\right]$,
2. $y = Ax^2 + A^2$ при $A \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$ и при $A < 0$ и $x \in \left(-\infty, -\sqrt{-2A}\right] \cup \left[\sqrt{-2A}, +\infty\right)$.

Видно, что эти решения объединяются в одно:

$$y = Ax^2 + A^2, \text{ при } A \in \mathbb{R} \text{ и } x \in \mathbb{R}.$$

Также стоит не забывать случай $z = 0$, который образуется при решении уравнений (мы делим на $\sqrt{z}$). В этом случае $y = -\frac{x^4}{4}$.

Найдем дискриминантную кривую для данного уравнения.

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ F'_{y'}(x,y,y') = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0, \\ 2y' + 2x^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 2x^6 - 4x^2y = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(x^4 + 4y\right) = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases}$$

Таким образом, кривая $\mathcal{D} = \left\{(x,y) : \; x\left(x^4+4y\right) = 0\right\}$ является дискриминантной.

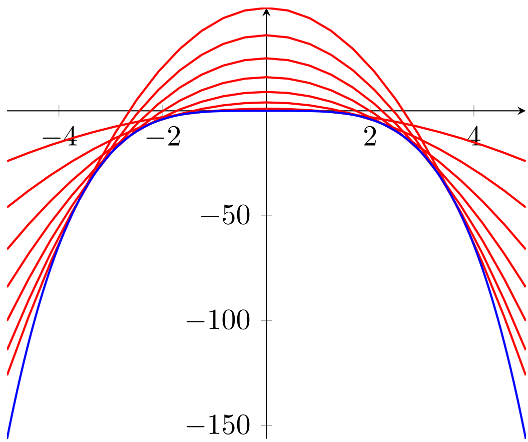
Очевидно, что только решение $y = -\frac{1}{4}x^4$ проходит через $\mathcal{D}$. То есть это решение подозрительное на особое.

Проверим по определению особого решения. Попробуем найти константу A такую, что $\psi(x) = Ax^2 + A^2$ удовлетворяет следующим условиям для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \psi(x_0) = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ \psi'(x_0) = -x_0^3, \\ \psi(x) \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall\, x \in U(x_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax_0^2 + A^2 = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ 2Ax_0 = -x_0^3, \\ Ax^2 + A^2 \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall\, x \in U(x_0). \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}x_0^2.$$

Понятно, что при этом A все условия выполняются, а значит кривая $y = -\frac{1}{4}x^4$ является особым решением исходного уравнения.



5 Системы дифференциальных уравнений

5.1 Метод последовательного интегрирования

Пример 13.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что каждое из уравнений содержит только одну функцию, поэтому можно решить их по отдельности

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Пример 14.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + x. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение содержит только одну функцию и мы можем его решить и подставить решение во второе.

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y' = y + C_1 e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t + C_1 t e^t. \end{cases}$$

Пример 15. *Считая $t > 0$, решить систему*

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x, \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t, \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x, \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y' = -\frac{1}{t} y + C_1(1+t^2) + t, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = (C_2 + \int (C_1(1+t^2) + t) t dt) \frac{1}{t}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = (C_2 + C_1(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}) + \frac{t^3}{3}) \frac{1}{t}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = C_2 \frac{1}{t} + C_1(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{4}) + \frac{t^2}{3}, \end{cases}$$

5.2 Метод исключения

Замечание. Под исключением понимается избавление от всех функций кроме одной.

Идея заключается в дифференцировании нескольких из уравнений системы.

Пусть есть система

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \\ y' = g(t, x, y). \end{cases}$$

При условии, что f непрерывно дифференцируемая, у x существует вторая производная. Дифференцируя первое уравнение, получаем

$$x'' = \frac{df}{dt} = f'_t + f'x \cdot x' + f'_y \cdot y' = f'_t + f'_x \cdot f(t, x, y) + f'_y \cdot g(t, x, y).$$

При условии, что y выражается из первого уравнения — $y = \beta(t, x, x')$, подставим в нашу вторую производную

$$x'' = \gamma(x, t, t').$$

Тогда если найдется решение $x(t)$, то можно подставить обратно и получить $y = \beta(t, x, x')$

Пример 16.

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{y}, \\ y' = \frac{1}{x-t}. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{1}{x-t}$ – непрерывно дифференцируема, то из первого уравнения системы, получим

$$y'' = -\frac{x' - 1}{(x-t)^2} = \frac{-\frac{1}{y}}{(x-t)^2}$$

И подставим второе

$$y'' = -\frac{y'^2}{y},$$

Однородное, решается заменой

$$y = C_2\sqrt{C_1 + 2x},$$

Тогда

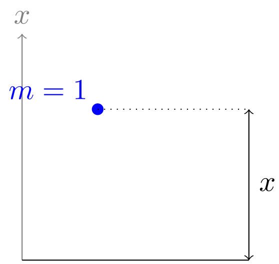
$$x = \frac{1}{y'} + t = \frac{1}{-\frac{1}{C_1+t}} + t = -C_1 + 1 + t$$

5.3 Первый интеграл

Определение 1. Функция $u : \Sigma \subset \mathbb{R}^n_r \to \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы $r' = f(r)$, если для любого решения φ этой системы $u(\varphi(t)) \equiv const$.

Замечание. Важно, что в правой части системы явно нет t (такие системы называются автономными).

Замечание. Рассмотрим задачу движения тела над поверхностью земли. По второму закону Ньютона



$$x'' = -g.$$

Запишем эквивалентную систему данному уравнению:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -g. \end{cases}$$

Ее решение есть $\begin{cases} x = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2, \\ v = -gt + c_1, \end{cases}$

Рассмотрим функцию полной механической энергии системы:

$$u(x, v) = \frac{v^2}{2} + gx.$$

Докажем, что это первый интеграл системы. Подставим решение в эту функцию

$$u(-\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2, -gt + c_1) = \frac{(-gt + c_1)^2}{2} + g\left(-\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2\right) =$$
$$= \cancel{\frac{g^2t^2}{2}} - \cancel{gtc_1} + \frac{c_1^2}{2} - \cancel{\frac{g^2t^2}{2}} + \cancel{gtc_1} + c_2g = \frac{c_1^2}{2} + c_2g.$$

Таким образом, получили константу при каждом конкретном решении, а значит это первый интеграл по определению.

Замечание. Можно было по-другому проверить. Например логично, что если это первый интеграл, то $u'(\varphi(t)) = 0$.

Предложение. *С другой стороны, нелогично находить первый интеграл, уже зная решение системы. Хочется применять его в обратную сторону: используя первый интеграл, находить решение системы уравнения.*

Попробуем это сделать в нашем примере.

Так как $u(x, v) = \frac{v^2}{2} + gx = const$, то можно выразить какую-нибудь из переменных через вторую. Тогда, подставляя в уравнение системы, мы получим уже дифференциальное уравнение относительно только одной переменной, которое решать уже легче.

Например, попробуем выразить $x = \frac{1}{g}\left(const - \frac{v^2}{2}\right)$ и подставим в первое уравнение системы

$$x' = v \Leftrightarrow -\frac{1}{g}vv' = v \Leftrightarrow v' = -g.$$

Предложение (Поиск первого интеграла для системы 2-ого порядка)**.** *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Пусть (x, y) – какое-то решение этой системы, тогда

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \implies g(x,y)dx = f(x,y)dy.$$

То есть (x, y) – параметрическое решение уравнения $g(x, y)dx = f(x, y)dy$. Иначе говоря, (x, y) – параметрическое задание интегральной кривой.

Пусть общее решение этого уравнения определено формулой $u(x, y) = c$. А тогда, подставляя исходное решение в это решение, получаем тождество $u(x(t), y(t)) \equiv c$. Таким образом, u – первый интеграл.

Пример 17. *Решить систему уравнений при $x, y > 0$*

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ y' = \frac{y}{(x+y)^2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{(x+y)^2}, \end{cases} \implies \frac{y}{(x+y)^2}dx = \frac{x}{(x+y)^2}dy \implies ydx = xdy \implies y = cx.$$

Таким образом, $u = \frac{y}{x}$ – первый интеграл ($u = c$).

Подставим во второе уравнение системы

$$y' = \cancel{c}x' = \frac{\cancel{cx}}{(c+1)^2x^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow xdx = \frac{dt}{(c+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} =$$
$$= \frac{t}{(c+1)^2} + C \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2t}{(c+1)^2} + C}.$$

$$y = cx = c \cdot \sqrt{\frac{2t}{(c+1)^2} + C}.$$

Пример 18. *Решить систему уравнений при $x > z > 0$ и $y > 0$*

$$\begin{cases} x' = x^2 + z^2, \\ y' = y(x - z), \\ z' = 2xz. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что первое и третье уравнения системы не зависят от y. Решим их, как систему двух уравнений, используя первый интеграл

$$2xzdx = (x^2 + z^2)dz \implies \frac{dx}{dz} = \frac{x^2 + z^2}{2xz} = \frac{1}{2z}x + \frac{z}{2}x^{-1},$$

Это уравнение Бернулли, замена $t = \frac{x^2}{2}$.

$$xx' = \frac{1}{2z}x^2 + \frac{z}{2} \implies t' = \frac{1}{z}t + \frac{z}{2} \implies t = \left(C + \int \frac{z}{2} \cdot e^{-\ln z}\right) \cdot e^{\ln z}$$

6 Использование теоремы Пикара для нахождения приближенного решения задачи Коши

Пример 19. *Укажите какой-нибудь промежуток, на котором существует единственное решение при* $|t| < 1$, $|x| < 1$.

$$x' = t^2 + x^2, \qquad x(0) = 0.$$

Доказательство. Понятно, что заданное множество $G : |t| < 1, |x| < 1$ – это квадрат, который является областью. А также $f(t, x) = t^2 + x^2 \in C(G)$.

Рассмотрим производную функции f по всем переменным кроме t

$$f'_x = 2x \in C(G).$$

Таким образом область и функция удовлетворяют теореме Пикара с простым условием.

Рассмотрим прямоугольник П со сторонами $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{2}$.

Замечание. На самом деле не всегда следует искать $\|f\|$. Достаточно просто ограничить его каким-то M: $\|f\| \leqslant M$. Тогда очевидно, что $h \geqslant \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. А значит, если на отрезке $[0, h]$ существует единственное решение, то на $\left[0, \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}\right]$ тоже.

Тогда, так как $\|f\| \leqslant |t|^2 + |x|^2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$, то на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ по теореме Пикара существует единственное решение.

Пример 20. *Укажите какой-нибудь промежуток, на котором существует единственное решение при* $|t| < 1$

$$x' = t + \sin(t^2 + x), \qquad x(0) = 0.$$

Решение. Заданное условием $|t| < 1$ множество G является областью, при этом $f(t,x) = t + \sin(t^2 + x) \in C(G)$. Рассмотрим $f'_x(t,x) = \cos(t^2 + x) \in C(G)$.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Тогда $\|f\| = |t + \sin(t^2 + x)| \leqslant |t| + |\sin(t^2 + x)| \leqslant \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

А значит по теореме Пикара с простым условием, получаем, что для $h = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{1}{2}$ на отрезке $[-h, h]$ существует единственное решение задачи Коши.

Замечание. На самом деле, взяв $a = 1 - \varepsilon$, $b = (2-\varepsilon)(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$, получим, что на отрезке вида $[-(1-\varepsilon), 1-\varepsilon]$ существует единственное решение.

Предложение. *В общем случае последовательность из доказательства теоремы Пикара образуется*

$$\varphi_0(t) = r_0,$$
$$\varphi_m(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_{m-1}(\tau))d\tau.$$

Пример 21. *Построить третье приближение Пикара* x_3

$$x' = t - x^2, \qquad x(0) = 0.$$

Решение.

$$\varphi_0(t) = 0,$$
$$\varphi_1(t) = \int\limits_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2},$$

$$\varphi_2(t) = \int\limits_0^t (\tau - \left(\frac{\tau^2}{2}\right)^2) d\tau = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20},$$

$$\varphi_3(t) = \int\limits_0^t \left(\tau - \left(\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^5}{20}\right)^2\right) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{20} + \frac{t^8}{160} - \frac{t^{11}}{4400}.$$

Замечание.

$$\int \varphi(t)dt = \begin{bmatrix} \int \varphi_1(t)dt, \\ \int \varphi_2(t)dt \end{bmatrix}.$$

Замечание. Для применения теоремы Пикара к уравнениям высшего порядка, необходимо переходить к эквивалентной системе уравнений первого порядка.

Пример 22. *Построить второе приближение Пикара*

$$y'' + (y')^2 - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Доказательство. Запишем эквивалентную систему дифференциальных уравнений: пусть $y_1 = y, y_2 = y'$

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_2^2 + 2y_1. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot 1 - 0^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} 2\tau \\ 2 \cdot 1 - 4\tau^2 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t - \frac{4}{3}t^3 \end{pmatrix}.$$

Тогда приближение Пикара для исходного уравнения есть $y = y_1 = t^2 + 1$.

7 Продолжение решений

Пример 23. *Доказать, что решение задачи Коши*

$$y' = x^3 - y^3, \qquad y(x_0) = y_0$$

продолжимо на $(x_0, +\infty]$.

Доказательство. Доказательство основывается на рассмотрении всевозможных квадратов - компактов с центром в начале, и утверждении, что интегральная кривая выходит по правой границе квадрата. из области $x \geqslant y$ возрастающая $(y' = (x-y)(x^2+xy+y^2) \geqslant 0)$ кривая не может попасть в область $y \geqslant x$ (интересное доказательство через определение дифференцируемости и сравнение со значением y). а из $y \geqslant x$ она точно перейдет в $x \geqslant y$. тогда получается мы точно выйдем по правой границе.

8 Линейные однородные системы

Пример 24.

$$\begin{cases} x' = -x - 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $r' = Ar$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа

$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(4-\lambda) + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{1, 2\right\}.$$

Найдем собственные векторы

$\boxed{\lambda = 1}$

$$\left(A - E\right) h_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha. \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$(A - 2E)\, u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ -\frac{3}{2}\beta \end{bmatrix}.$$

Тогда фундаментальным решением будет

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ -3e^{2t} \end{bmatrix}$$

Пример 25.

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$$

Решение. В матричном виде

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Найдем собственные числа

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i.$$

Найдем собственные векторы

$\boxed{\lambda = 2 + i}$

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ -i\lambda \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2 - i}$

$$\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \beta \\ i\beta \end{bmatrix}$$

Тогда овеществленным решением будет

$$\operatorname{Re} e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \operatorname{Im} e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},$$

то есть

$$e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}.$$

Пример 26.

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z, \\ y' = 6x - y - 6z, \\ z' = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$$

Решение. Собственные числа: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Найдем собственные и присоединенные векторы

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} h_1 = 0 \Leftrightarrow h_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\lambda \\ -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Найдем присоединенный к нему

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & -6 \\ -8 & 3 & 8 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} \gamma + 1 \\ 3 \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Тогда фундаментальное решение есть

$$r = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + C_3 t e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9 Линейные неоднородные системы

Пример 27. *Решить систему методом вариации постоянных*

$$\begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим соответствующую однородную систему

$$r' = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} r.$$

Найдем собственные числа матрицы

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

Собственные числа $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$.

Найдем собственные векторы

$\lambda_1 = -3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

То есть $h_1 = (4\alpha, \alpha)^T$. Возьмем $h_1 = (4, 1)^T$.

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

То есть $h_2 = (\alpha, -\alpha)^T$. Возьмем $h_2 = (1, -1)^T$.

Тогда фундаментальная матрица получается

$$\Phi = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} & e^{2t} \\ e^{-3t} & -e^{2t} \end{bmatrix}.$$

А тогда общее решение исходной системы имеет вид

$$r = \Phi \cdot C, \quad \text{где } \Phi \cdot C' = \begin{bmatrix} 1 + 4t \\ \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix}.$$

Найдем C

$$\begin{cases} 4e^{-3t}C_1' + e^{2t}C_2' = 1 + 4t, \\ e^{-3t}C_1' - e^{2t}C_2' = \frac{3}{2}t^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{1}{5}e^{3t}(1 + 4t + \frac{3}{2}t^2), \\ C_2' = \frac{1}{5}e^{-2t}(1 + 4t - 6t^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{10}e^{3t}t^2 + \frac{1}{5}e^{3t}t + A_1, \\ C_2 = \frac{3}{5}e^{-2t}t^2 + \frac{1}{5}e^{-2t}t + A_2 \end{cases}$$

Таким образом, получаем общее решение исходной системы

$$\begin{aligned} r = \Phi \cdot C &= \begin{bmatrix} 4e^{-3t} & e^{2t} \\ e^{-3t} & -e^{2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}e^{3t}t^2 + \frac{1}{5}e^{3t}t + A_1 \\ \frac{3}{5}e^{-2t}t^2 + \frac{1}{5}e^{-2t}t + A_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{5}t^2 + \frac{4}{5}t + 4e^{-3t}A_1 + \frac{3}{5}t^2 + \frac{1}{5}t + e^{2t}A_2 \\ \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{5}t + e^{-3t}A_1 - \frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{5}t - e^{-2t}A_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} t^2 + t + 4e^{-3t}A_1 + e^{2t}A_2 \\ -\frac{1}{2}t^2 + e^{-3t}A_1 - e^{-2t}A_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Пример 28. *Решить задачу Коши, используя матричную экспоненту*

$$\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = -x + 5y, \end{cases} \qquad r(0) = (1\ 1)^T.$$

Решение. Знаем, что $r = e^{A\cdot(t-0)}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ является решением системы.

Разложим в Жорданову форму матрицу A. Собственное число $\lambda_{1,2} = 3$.

$$h_1 = (2, 1)^T$$

$$h_2 = (1, 1)^T$$

То есть матрица перехода $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, Жорданова матрица $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Найдем обратную к матрице перехода

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно записать по формуле для матричной экспоненты

$$e^{At} = T\cdot e^{3t}\cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} -2t+1 & 4t \\ -t & 2t+1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Тогда решением системы является

$$r = \begin{bmatrix} -2t+1 & 4t \\ -t & 2t+1 \end{bmatrix} e^{3t} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t+1 \\ t+1 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Пример 29. *Вычислить матричную экспоненту для матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение. Заметим, что $A^n = 2^n \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Тогда по определению

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}}_{e^2-1-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

Пример 30. *Найти определитель матричной экспоненты, не вычисляя саму матричную экспоненту*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Заметим, что $\det e^{At} = W(t)$.

По формуле Остроградского-Лиувилля

$$\det e^{At} = \det e^{A\cdot 0} e^{\int_0^t \operatorname{tr} A d\tau} = e^{2t}.$$

А тогда, подставляя $t = 1$, получаем искомое.

$$\det e^A = e^2.$$

10 Линейные уравнения

Пример 31.

$$4y'' - 8y' + 5y = 0.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $\lambda = 1 \pm \frac{1}{2}i$.

Тогда решения есть $e^{\left(1+\frac{1}{2}i\right)t}, e^{\left(1-\frac{1}{2}i\right)t}$. Овеществляя их, рассматривая вещественную и мнимую часть, получаем

$$e^t \cos\frac{t}{2}, e^t \sin\frac{t}{2}.$$

Тогда общее решение есть $y = C_1 e^t \cos\frac{t}{2} + C_2 e^t \sin\frac{t}{2}$.

Пример 32.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}, \quad t > 0.$$

Решение. Решение однородного есть $y = C_1 e^t + C_2 t e^t$.

Тогда найдем C_i из системы

$$\left[\Lambda e^t, \Lambda t e^t\right] \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{t} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} C_1' e^t + C_2' t e^t = 0, \\ C_1' e^t + C_2' \left(e^t + t e^t\right) = \frac{e^t}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = -1, \\ C_2' = \frac{1}{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = -t + C_3 \\ C_2 = \ln t + C_4 \end{cases}$$

Таким образом, общее решение есть

$$y = \left(-t + C_3\right) e^t + \left(\ln t + C_4\right) t e^t$$

Определение 2. $t^k e^{\lambda t}$ называется квазиодночленом. Соответственно, $\sum\limits_{j=1}^{n} t^{k_j} e^{\lambda_j t}$ называется квазимногочленом.

Лемма 1. *Если* $q(t) = e^{\gamma t} p_k(t)$, *где* p_k *– многочлен степени* R, *то уравнение* $Ly = q(t)$ *имеет решение*

$$y = t^m e^{\gamma t} r_k(t),$$

где r_k *– многочлены степени* r *(с неопределенными коэффициентами),* $m = 0$, *если* γ *– не характеристическое число,* m *– кратность* γ, *если* γ *– характеристическое число.*

Пример 33.

$$y'' - y = t^2 - t + 1.$$

Решение.

$$q(t) = t^2 - t + 1 = e^{\gamma t} p_k(t), \text{ где } \gamma = 0, k = 2.$$

Так как характеристические корни $\lambda = \pm 1$, не равны $\gamma = 0$, то $m = 0$.

Тогда $y = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$ – частное решение.

Подставляя в исходное, получаем

$$2A_2 - \left(A_2 t^2 + A_1 t + A_0\right) = t^2 - t + 1,$$

По неопределенным коэффициентам находим

$$\begin{cases} A_2 = -1, \\ A_1 = 1, \\ A_0 = -3. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что общее решение исходного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^t - t^2 + t - 3$$

Пример 34.

$$y'' + y = 2e^t + 1.$$

Решение. Решим уравнение $y'' + y = 2e^t$

$$q(t) = 2e^t \implies k = 0, \gamma = 1.$$

Характеристические корни есть $y = \pm i$. Тогда $m = 0$.

Таким образом, частное решение есть

$$y = A_0 e^t.$$

Подставляя в исходное, получаем

$$A_0 e^t + A_0 e^t = 2e^t,$$

$$A_0 = 1.$$

Решим уравнение $y'' + y = 1$

$$q(t) = 1 \implies \gamma = 0, k = 0.$$

Тогда частное решение имеет вид

$$y = A = 1.$$

А значит частное решение исходного есть сумма частных решений предыдущих

$$y = e^t + 1,$$

Тогда общее решение, как сумма общего решение однородного и частного решения

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t + 1$$

11 Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Пример 35.

$$y'' - ty = 0.$$

Оказывается, что решения в виде элементарных функций у такого уравнения не существует. Однако по теореме Коши решения все-таки есть и выражается формулой Тейлора.

Пусть φ – решение и имеет вид $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. Найдем значения коэффициентов.

Для этого подставим в исходное уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k - t \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \equiv 0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k t^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} \equiv 0,$$

Сведем к одному ряду от нуля до бесконечности заменой индексов

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} t^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} t^k \equiv 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((k+2)(k+1) a_{k+2} - a_{k-1}\right) t^k + 2a_2 \equiv 0,$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} a_2 = 0, \\ (k+2)(k+1) a_{k+2} - a_{k-1} = 0, \quad k \geqslant 1. \end{cases}$$

Второе равенство на самом деле есть реккурентное задание

$$a_m = \frac{a_{m-3}}{m(m-1)} \quad m \geqslant 3 = \frac{a_{m-6}}{m(m-1)(m-3)(m-6)} = \cdots = \frac{a_{m \, mod \, 3}}{m!!!(m-1)!!!}.$$

Таким образом,

- *если $m \, mod \, 3 = 2$, то $a_m = 0$,*
- *если $m \, mod \, 3 = 1$, то $a_m = \frac{a_1}{m!!!(m-1)!!!}$,*
- *если $m \, mod \, 3 = 0$, то $a_m = \frac{a_0}{m!!!(m-1)!!!}$.*

И тогда

$$\varphi(t) = a_0 \sum_{\substack{m=0 \\ m \, mod \, 3 = 0}}^{\infty} \frac{t^m}{m!!!(m-1)!!!} + a_1 \sum_{\substack{m=0 \\ m \, mod \, 3 = 1}}^{\infty} \frac{t^m}{m!!!(m-1)!!!}.$$

При этом слагаемые оказываются действительно линейно независимыми решениями, так как вронскиан в нуле равен 1, а значит это действительно общее решение.

Пример 36.

$$xy'' + 2y' + xy = 0.$$

Решение. Пусть φ – решение и имеет вид $\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Найдем значения коэффициентов.

Для этого подставим в исходное уравнение

$$x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \equiv 0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-1} \equiv 0,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k(k-1)a_k + 2k a_k + a_{k-2}) + 2a_1 \equiv 0,$$

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ k(k-1)a_k + 2k a_k + a_{k-2} = 0, \quad k \geqslant 2 \end{cases}$$

Второе уравнение задает

$$a_k = \frac{-a_{k-2}}{k^2+k} = \frac{a_{k-4}}{(k^2+k)((k-2)^2+(k-2))} = \cdots = \frac{(-1)^{[\frac{k}{2}]} a_{k\, mod\, 2}}{(k+1)!}$$

Таким образом, $a_{2m+1} = 0$, $a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}$

И решение есть

$$\varphi(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m} = \frac{a_0}{x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \frac{a_0}{x} \sin x.$$

Однако видно, что это решение не задает линейное пространство нужной размерности, а значит не является общим.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Лиувилля уже для приведенного уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{2}{x}dx},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin x}{x} & \varphi_2 \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \varphi_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{2}{x}dx},$$

$$\frac{\sin x}{x}\varphi_2' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\varphi_2 + \frac{1}{x^2},$$

$$\varphi_2' = \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)\varphi_2 + \frac{1}{x\sin x},$$

$$\varphi_2 = \left(C + \int \frac{1}{x\sin x}e^{-\int\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)dx}\right)e^{\int\left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)dx},$$

$$\varphi_2 = \left(C + \int \frac{1}{x\sin x}e^{-\ln(\sin x) + \ln x}\right)e^{\ln(\sin x) - \ln x},$$

$$\varphi_2 = \left(C + \int \frac{1}{x\sin x}\frac{x}{\sin x}\right)\frac{\sin x}{x},$$

$$\varphi_2 = (C - \operatorname{ctg} x)\frac{\sin x}{x},$$

Рассмотрим какое-нибудь решение, например, при $C = 0$ (при любом C это решение будет линейно независимо с полученным через ряд).

Таким образом, получается, что общее решение есть

$$\varphi = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$$

12 Устойчивости

Пример 37. *Исследовать на устойчивость решение $\varphi(t) = t$ уравнения $x' = 1 + t - x$.*

Решение. Рассмотрим

$$s' = 1 + t - (s + \varphi) - 1 - t + \varphi = -s.$$

Так как решение $s = 0$ является асимптотически устойчивым для этого уравнения, то любое решение также будет асимптотически устойчивым.

Пример 38. *Исследовать на устойчивость решение $x = 0$ уравнения $x' = \sin^2 x$.*

Решение. **1 способ**

Решим данное дифференциальное уравнение:

$$x = \operatorname{arcctg}(-t + C), \quad x \in (0, \pi),$$
$$x = -\pi + \operatorname{arcctg}(-t + C), \quad x \in (-\pi, 0),$$

Причем C определяется из начального условия $x(0) = x_0$ как $C = \operatorname{ctg} x_0$.

Рассмотрим на положительной части. Так как арктангенс в любом случае стремится к π, то появляется предположение, что устойчивости нет.

Вспомним отрицание определения устойчивости

$$\exists \varepsilon : \ \forall \delta \ \exists x_0 \in B_\delta(0) \ \exists t \in [0, +\infty) : \quad |x(t, x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Тогда рассматривая $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$,

$$|\operatorname{arcctg}(-t + \operatorname{ctg} x_0)| \geqslant \frac{\pi}{2},$$

так как arcctg стремится к π.

2 способ

Рассмотрим фазовое пространство в окрестности точки 0. Так как фазовые скорости всегда неотрицательны, то, выйдя из точки в окрестности 0, мы никогда не вернемся туда, то есть решение неустойчивое.

Пример 39. *Исследовать на устойчивость решение $x = 0$ уравнения $x' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$.*

Решение. Рассмотрим фазовое пространство в окрестности точки 0. Так как фазовые скорости всегда в этой окрестности неположительные, то, выйдя из точки в окрестности 0, мы всегда вернемся в нуль, то есть решение асимптотически устойчивое.

Пример 40. *Найдите точки покоя уравнения*

$$x' = x^3 - 7x^2 + 36$$

и исследуйте их на устойчивость.

Решение. Точки покоя найдем из уравнения

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 3, 6\}.$$

При $x = -2$ в его окрестности фазовая скорость в сторону 0 оказывается положительной, а значит точка неустойчивая.

При $x = -2$ в его окрестности фазовая скорость в сторону 0 оказывается положительной, а значит точка неустойчивая.

При $x = -2$ в его окрестности фазовая скорость в сторону 0 оказывается положительной, а значит точка неустойчивая.

13 Функция Четаева

Пример 41. *Рассмотрим одномерный случай, в котором $f(x) > 0$. Тогда функция $C(x) = x$ является функцией Четаева:*

1. $C(0) = 0$,
2. $\forall\, \rho > 0 \quad B_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\} = (0, \rho) \neq 0$,
3. $\forall\, r \in \bar{B}_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\} \quad \grave{C}(r) = f(x) > 0$.

Таким образом, функция действительно является функцией Четаева. И значит точка 0 является точкой неустойчивого положения равновесия.

Пример 42.

$$\begin{cases} x' = -y + x^3, \\ y' = x + y^3. \end{cases}$$

Доказать, что положение равновесия $(0,0)$ *неустойчиво.*

Решение. Будем искать функцию Четаева в виде $C(x,y) = ax^{2\alpha} + by^{2\beta}$.

1. $C(0,0) = 0$,
2. $C(x,y) > 0$ при $a, b > 0$,
3. $$\forall\ r \in \bar{B}_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\}$$
   $$\grave{C}(r) = \begin{pmatrix} 2a\alpha x^{2\alpha-1} & 2b\beta y^{2\beta-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y + x^3 \\ x + y^3 \end{pmatrix} =$$
   $$= 2a\alpha x^{2\alpha+2} - 2a\alpha x^{2\alpha-1}y + 2b\beta y^{2\beta+2} + 2b\beta y^{2\beta-1}x =$$
   $$= \underbrace{2a\alpha x^{2\alpha+2} + 2b\beta y^{2\beta+2}}_{>0} + 2xy\left(b\beta y^{2\beta-2} + a\alpha x^{2\alpha-2}\right)$$

   . Выберем теперь коэффициенты так, чтобы $b\beta y^{2\beta-2} + a\alpha x^{2\alpha-2} = 0$. Например, $\alpha = \beta = 2$, $a = -b$. Тогда получаем, что $\grave{C}(r) > 0$.

Замечание. Вспомним теорему о том, что фазовые траектории системы $\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y) \end{cases}$ можно построить как интегральные кривые уравнения $g(x,y)dx - f(x,y)dy = 0$ в области $\{(x,y)\,|f(x,y) \neq 0 \vee g(x,y) \neq 0\}$.

Пример 43.

$$\begin{cases} x' = -y - 2xy, \\ y' = x + 2x^2. \end{cases}$$

Исследовать точку $(0,0)$ *на устойчивость.*

Решение. Воспользуемся теоремой, о которой только что вспомнили и рассмотрим уравнение

$$\left(x + 2x^2\right) dx - (-y - 2xy)\, dy = 0.$$

Будем искать интегрирующий множитель $\mu = \mu(y)$

$$\mu(-2y) = \mu'_y(x + 2x^2),$$

$$\mu'_y = -\mu\frac{2y}{x + 2x^2},$$

$$\mu = \frac{e^{-y^2}}{x + 2x^2}.$$

$$e^{-y^2}dx + \frac{e^{-y^2}}{x + 2x^2}(y + 2xy)dy = 0,$$

$$dx + \frac{y}{x}dy = 0,$$

$$y^2 = -x^2 + C,$$

$$y^2 + x^2 = C.$$

То есть интегральные кривые данного уравнения есть окружности, а значит и фазовые траектории выглядят, как окружности. Таким образом, попав в любую точку, мы будем оставаться на окружности, то есть положение устойчиво.

Замечание. Также часто для анализа может помочь переход в полярные координаты.

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} r' = u(r, \varphi), \\ \varphi' = v(r, \varphi). \end{cases}$$

Однако в лоб очень легко u, v не получить. Поэтому воспользуемся хитростями:

Вспомним, что $r^2 = x^2 + y^2$. Тогда

$$\frac{dr^2}{dt} = \frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt},$$

$$2rr' = 2xx' + 2yy' \implies r' = \frac{xx' + yy'}{r} = \frac{xf(x, y) + yg(x, y)}{r} =$$
$$= f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi.$$

Также знаем, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$. Тогда

$$\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{dt} = \frac{d\frac{y}{x}}{dt},$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\varphi' = \frac{y'x - x'y}{x^2},$$

$$\varphi' = \frac{y'x - x'y}{\left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)^2} = \frac{y'x - x'y}{r^2} =$$

$$= \frac{g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi - f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi}{r}.$$

Пример 44.

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2 + y^2), \\ y' = x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Исследовать на устойчивость точку $(0, 0)$.

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$r' = \frac{x(-y - x(x^2 + y^2)) + y(x - y(x^2 + y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = (-x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = -r^3,$$

$$\varphi' = \frac{-y(-y - x(x^2 + y^2)) + x(x - y(x^2 + y^2))}{x^2 + y^2} = 1.$$

Заметим, что фазовое пространство данной системы (Рис. 1) есть спирали, закручивающиеся к точке $(0, 0)$. То есть для любой точки пространства мы придем к началу координат. А значит есть асимптотическая устойчивость.

Пример 45.

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$r' = \frac{x(-y + x(1 - x^2 - y^2)) + y(x + y(1 - x^2 - y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = r - r^3,$$

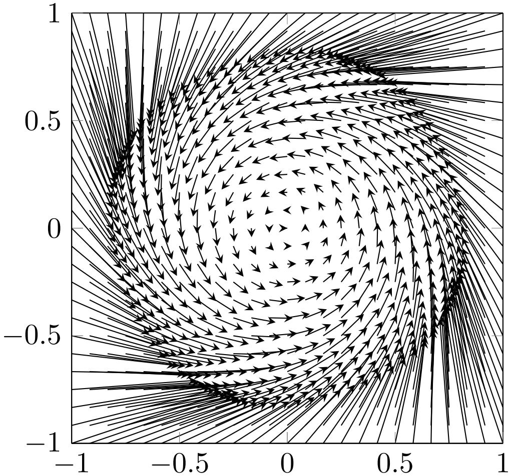
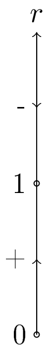


Рис. 1. Фазовое пространство

$$\varphi' = \frac{-y(-y + x(1 - x^2 - y^2)) + x(x + y(1 - x^2 - y^2))}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$



14 Циклы

Пример 46.

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - 2x^2 - 3y^2), \\ y' = x + y(1 - 2x^2 - 3y^2). \end{cases}$$

Доказать, что существуют циклы между $x^2 + y^2 = 1$ *и* $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

Решение. Рассмотрим окружность $x^2 + y^2 = 1$ в параметрическом виде $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$. Тогда ее нормаль есть $n(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

$$n(t) \cdot f = -1 - \sin^2 t < 0.$$

А значит любая траектория не выйдет за окружность.

Аналогично для меньшей окружности: $n = (\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t)^T$, $n \cdot f = \frac{1}{4}(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 t) > 0$.

Пример 47.

$$\begin{cases} x' = 2x + y - xe^{x^2+y^2}, \\ y' = -x + 2y - ye^{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Доказать существование цикла (найти c_o*,* c_i *в виде окружностей).*

Решение.

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\ln 2}\cos t, \\ y(t) = -\sqrt{\ln 2}\sin t. \end{cases}$$

Пример 48.

$$x'' + p(x)x' + q(x) = 0, \quad p(x) > 0, p, q \in C^1(\mathbb{R}).$$

Доказать, что уравнение не имеет периодических решений.

Решение. Перейдем к системе уравнений, равносильной уравнению