Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

Часть I

1 Линейные уравнения 1-ого порядка

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1}$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛНУ или просто ЛУ).

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y \tag{2}$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОУ).

Замечание. Вообще, мы уже неоднократно сталкивались и решали уравнения такого вида. Однако для строгого обоснования наших решений рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1 (Общее решение ЛОУ)**.** *Пусть в линейном однородном уравнении $y' = p(x)y$ функция $p(x) \in C\,(a, b)$.*

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = c \cdot e^{\int p}, \tag{3}$$

где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int p$ понимается какая-то производная функции $p(x)$.

Доказательство. Воспользуемся эквивалентным преобразованием

$$y' = p(x)y \Leftrightarrow dy = p(x)ydx.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

1. $y = 0$ – очевидно решение,
2. при $y > 0$: разделим на y с обеих сторон

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx,$$

$$\ln y = \int p(x)dx,$$

$$y = A \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } A > 0.$$

3. при $y < 0$: аналогично, но появляется минус, который можно засунуть в константу.
$$y = B \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } B < 0.$$
4. Осталось разобрать случай, когда интегральная кривая проходит через границу $y = 0$. Однако, рассматривая все кривые, видно, что они заданы строго в одной полуплоскости относительно $y = 0$:
$$y = A \cdot e^{\int p} > 0, \quad \text{где } A > 0, \quad y = B \cdot e^{\int p} < 0, \quad \text{где } B < 0.$$

Таким образом, действительно, общее решение ЛОУ можно записать в виде $y = c \cdot e^{\int p}$.

Замечание. Теперь мы строго доказали, ранее использовавшиеся факты. Как вывод из этого, мы получаем, что теперь можно каждый раз не решать ЛОУ, а просто пользоваться формулой. Или хотя бы всегда проверять, похоже ли решение на полученное в общем виде.

Замечание. Далее мы будем рассматривать общее решение неоднородного уравнения. Мы используем достаточно интересный метод доказательства: так, мы предоставим какое-то решение, которое мы назовем общим, а далее докажем, что любое другое решение на самом деле задается именно нашим выражением.

Оказывается, что такой метод можно применять и для решения любых уравнений. Достаточно лишь показать, что представленное выражение является решением, а также, что любое другое произвольное решение задается этим выражением.

Лемма 2 (Общее решение ЛНУ)**.** *Пусть в линейном уравнении* $y' = p(x)y + q(x)$ *функции* $p(x)$, $q(x) \in C\,(a, b)$.

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}, \tag{4}$$

где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int f$ понимается какая-то производная функции $f(x)$.

Доказательство. • Докажем, что данное данное множество решений включено в общее множество решений исходного уравнения. Проще говоря, проверим, правда ли, что представленное выражение является решением.

Найдем $y'(x)$:

$$y' = q \cdot e^{-\int p} \cdot e^{\int p} + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot pe^{\int p} = q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot pe^{\int p}.$$

Тогда, подставляя в исходное уравнение:

$$q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot pe^{\int p} \equiv p \cdot \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p} + q,$$

получаем верное тождество.

• Докажем, что произвольное решение задается формулой $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$.

Пусть $\varphi \in (\alpha, \beta)$ – решение, не задающееся этой формулой.

Рассмотрим $x_0 \in (\alpha, \beta) :\ \varphi(x_0) = y_0$.

Найдем такое $c \in \mathbb{R}$, что наше решение проходит через точку (x_0, y_0).

$$\left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}\bigg|_{x=x_0} = y_0,$$

$$c = \left(y_0 \cdot e^{-\int p} - \int q \cdot e^{-\int p}\right)\bigg|_{x=x_0}.$$

Пусть решение с этим c – решение ψ. Тогда мы получили два решения задачи Коши $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ на интервале (α, β). Так как $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C\left(()\, a, b\right)$, то по теореме об единственности решения задачи Коши $\varphi = \psi$, что противоречит предположению о том, что φ не задается решением вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$.

Таким образом, действительно любое решение можно представить в виде $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$.

Объединяя эти два факта, мы получаем, что показанное нами решение действительно является общим решением линейного дифференциального уравнения.

Замечание. В итоге мы имеем формулу для решения ЛУ, в которую можно подставить нужные значения. Однако достаточно тяжело помнить ее наизусть, поэтому нужно иметь какой-то метод, который сможет нас привести к этому решению. Напомним, что любой метод, который будет давать решение вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$ окажется верным, так как мы уже доказали, что это общее решение.

Предложение (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной)**.** *Пусть стоит задача решить линейное уравнение $y' = p(x)y+q(x)$.*

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение $y' = p(x)y$. Его общее решение мы знаем (либо можем найти): $y = c \cdot e^{\int p}$.

Рассмотрим теперь c не как константу, а как функцию $c(x)$.

Подставляя $y = c(x) \cdot e^{\int p}$ в исходное линейное уравнение, получаем:

$$c'(x) \cdot e^{\int p} + \cancel{c(x) \cdot pe^{\int p}} = \cancel{pc(x) \cdot e^{\int p}} + q,$$

$$c'(x) = q \cdot e^{-\int p}.$$

Это уравнение мы снова можем решить:

$$c(x) = \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}.$$

Тогда, возвращаясь к решению однородного уравнения и подставляя c туда, получаем

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}\right) \cdot e^{\int p},$$

то есть общее решение линейного уравнения.

2 Уравнения Бернулли и Рикатти

Замечание. Существует огромное количество уравнений первого порядка, которые можно свести к линейному какой-либо заменой. В этом пункте будут разобраны такие уравнения, представленные в XVII веке Якобом Бернулли [1] и Рикатти [2].

[1] Якоб Бернулли (1655–1705, Швейцария)

[2] Рикка́ти Якопо Франческо (1676–1754, Италия)

Определение 3. Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \tag{5}$$

где $\alpha \neq \{0, 1\}$, называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Лемма 3. *Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$ при $y \neq 0$ заменой $t = y^{1-\alpha}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}.$$

Поделим обе части уравнения на y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Сделаем замену $t = y^{1-\alpha}$, тогда $t' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$:

$$\frac{1}{1-\alpha}t' = p(x)t + q(x),$$

$$t' = (1-\alpha)\left(p(x)t + q(x)\right).$$

Получили линейное дифференциальное уравнение.

Определение 4. Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{6}$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Замечание. Уравнение Бернулли является частным случаем уравнения Рикатти при $r(x) \equiv 0$. Рикатти был знаком с семьей Бернулли, поэтому связь между этими уравнениями неслучайна.

Лемма 4. *Пусть φ – какое-то решение уравнения Рикатти $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Подстановка $y = z + \varphi$ сводит это уравнение к уравнению Бернулли.*

Доказательство. Найдем y':

$$y' = z' + \varphi'.$$

Так как φ – решение уравнения Рикатти, то

$$\varphi' = p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x).$$

Тогда $y' = z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x)$.

Подставим замену в уравнение Рикатти

$$z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + \cancel{r(x)} = p(x)(z+\varphi)^2 + q(x)(z+\varphi) + \cancel{r(x)},$$

$$z' = z\,\underbrace{(2p(x)\varphi + q(x))}_{P(x)} + \underbrace{p(x)}_{Q(x)}\,z^2,$$

$$z' = P(x)z + Q(x)z^2.$$

Получили уравнение Бернулли для $\alpha = 2$.

3 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 5. Пусть существует функция u такая, что $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (то есть $u'_x = P$, $u'_y = Q$). Тогда уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Теорема 1 (Общее решение УПД)**.** *Пусть $u \in C^1(G)$, причем $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $\varphi(x)$ является общим решением уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ на интервале (α,β) в том и только том случае, когда $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и φ неявно задается уравнением $u(x,y) = c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Необходимость:

Так как φ – решение, то $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и

$$P(x,\varphi(x))dx + Q(x,\varphi(x))d(\varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Заметим, что левая часть есть полная производная функции $u(x,\varphi(x))$.

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) \equiv 0,$$

$$u(x,\varphi(x)) \equiv c.$$

Таким образом, получаем, что φ действительно неявно задана уравнением $u(x, y) = c$.

Достаточность:
Так как φ неявно задана уравнением $u(x, y) = c$, то

$$u(x, \varphi(x)) \equiv c.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx} u(x, \varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Так как $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, то φ является решением уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ по определению решения дифференциального уравнения.

Замечание. Назревает хороший вопрос: откуда эту функцию u взять и почему вообще она существует?

Пусть есть функция $u : u'_x = P,\ u'_y = Q,\ u \in C^2(G)$. Рассмотрим вторые производные:

$$\left.\begin{aligned} u_x y'' = P'_y, \\ u_y x'' = Q'_x \end{aligned}\right\} \implies P'_y = Q'_x.$$

На основе этого утверждения появляется следующая теорема.

Теорема 2 (Признак УПД). *Пусть $P, Q \in C^1(G)$, причем $P'_y = Q'_x$, где G – односвязная область. Тогда существует функция $u : u'_x = P, u'_y = Q$. Кроме того, все такие функции имеют вид*

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int\limits_{\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + c,$$

где $c \in \mathbb{R}$, $\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})$ – кривая в области G, соединяющая точки (x_0, y_0) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Замечание. Таким образом, при определенных условиях мы поняли, как можно найти эту функцию u. И далее, решая уравнение $u = c$, можем найти общее решение УПД.

Однако вычисление данного криволинейного интеграла зачастую является непростой задачей, поэтому рассмотрим другие методы.

Определение 6. Функция u при условии $u'_x = P$, $u'_y = Q$ называется потенциалом поля (P, Q), а поле (P, Q) – потенциальным полем.

Пример 1.
$$e^{-y}dx - \big(xe^{-y} + 2y\big)\,dy = 0.$$

Решение. Область определения уравнения есть $\mathbb{R}^2$ – односвязное множество.

Рассмотрим производные коэффициентов $P = e^{-y}$ и $Q = (xe^{-y} + 2y)$:

$$P'_y = -e^{-y} = Q'_x.$$

Таким образом, по признаку – это уравнение в полных дифференциалах.

Не будем вычислять криволинейный интеграл. Но рассмотрим систему

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -xe^{-y} - 2y \end{cases}.$$

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0:

$$u'_x(x, y_0) = e^{-y_0} \implies u(x, y_0) = \int e^{-y_0}dx = xe^{-y_0} + c(y_0).$$

Подставляя во второе уравнение системы, получаем

$$\big(xe^{-y} + c(y)\big)'_y = -xe^{-y} - 2y,$$
$$\cancel{-xe^{-y}} + c'(y) = \cancel{-xe^{-y}} - 2y,$$
$$c' = -2y,$$
$$c(y) = -y^2 + A.$$

Таким образом, $u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$, а значит уравнение $xe^{-y} - y^2 = C$ задает решение УПД.

Замечание. В примере был показан другой способ решения УПД, избегающий криволинейное интегрирование. Однако данный способ далеко не всегда оказывается возможен. По крайней мере, не всегда можно взять интеграл, чтобы найти $u(x, y_0)$ (при плохой области интеграл по прямой будет достаточно сложен).

Определение 7. Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если при домножении этого уравнения на μ получается уравнение в полных дифференциалах.

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 — \text{УПД}.$$

Замечание. Если μ – интегрирующий множитель уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, причем $\mu, P, Q \in C^1(G)$. Тогда $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$. Расписывая производную получаем уравнение в частных производных

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x.$$

Решать его оказывается совсем непросто, однако чисто теоретически это является способом нахождения интегрирующего множества.

Однако стоит помнить, что нам не требуется находить общее решение. Нам достаточно лишь какое-то частное решение. Иногда его можно найти, как в следующем примере.

Пример 2. *Рассмотрим линейное уравнение*

$$y' = p(x)y + q(x),$$

где $p \neq 0$. *Попробуем найти его интегрирующий множитель.*

Решение. Перепишем исходное уравнение

$$(p(x)y + q(x))\,dx - dy = 0.$$

Заметим, что это уравнение не является уравнением в полным дифференциалах.

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя.

$$\mu'_y\,(p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = -\mu'_x.$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда первое слагаемое слева обнулится

$$\mu p(x) = -\mu'_x,$$

$$\mu = Ce^{-\int p}.$$

Так как нам нужно лишь какое-то решение, то рассмотрим любое C, например $C = 1$.

Таким образом, $\mu = e^{-\int p}$ – интегрирующий множитель.

Умножим на μ исходное уравнение

$$y'e^{-\int p} = p(x)ye^{-\int p} + q(x)e^{-\int p},$$

$$y'e^{-\int p} - p(x)ye^{-\int p} = q(x)e^{-\int p}.$$

Заметим, что в левой части стоит производная произведения $\left(ye^{-\int p}\right)$

$$\left(ye^{-\int p}\right) = q(x)e^{-\int p},$$

$$ye^{-\int p} = \int q(x)e^{-\int p} + A,$$

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p} + A\right)e^{\int p}.$$

Таким образом, получили общее решение линейного уравнения, а значит решение привело к верному ответу.

Замечание. Таким образом, мы получили еще один способ нахождения решения линейного уравнения, которым можно пользоваться на практике. Нужно запомнить интегрирующий множитель $\mu = e^{-\int p}$, а также свертывание в производную произведения.

Часть II
Уравнения, не разрешимые относительно произодной

4 Уравнение, разрешимое относительно производной

Пример 3. *Уравнение* $(y')^3 - 2yx = 0$ *очевидно является разрешимым относительно производной:* $y' = \sqrt[3]{2yx}$.

Пример 4. *Рассмотрим уравнение* $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$.

Рассмотрим отдельно решения уравнений $y' = 2x$ *и* $y' = -2x$. *Хочется сказать, что вместе эти решения дадут общее решение исходного. Однако это не так! Очевидно, что решениями являются параболы с ветвями вниз и вверх соответственно. Тогда можно посмотреть на кривую, содержащую левую ветвь одной из парабол и правую другой (Рис. 1). Это также интегральная кривая, так как она очевидно гладкая. Оказывается, что только в точке с абсциссой* $x = 0$ *возможны такие интегральные кривые, так как иначе гладкость не соблюдается.*

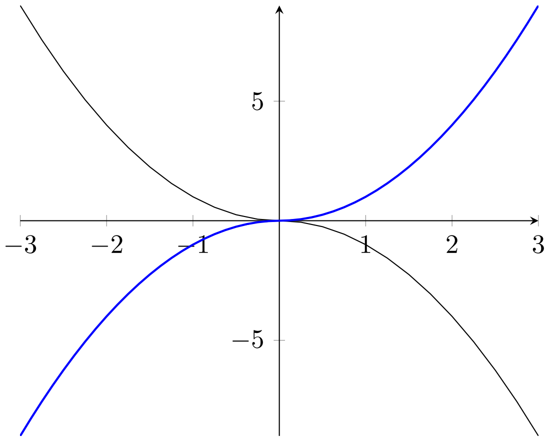

Рис. 1

5 Метод введения параметра

Определение 8. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и $\forall t \in I\ f(\varphi(t)) = \psi(t)$.

Замечание. Заметим, что определение можно переписать немного по-другому. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и множество $[(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I]$ является графиком функции f.

Нетрудно понять, что эти определения эквивалентны.

Пример 5. *Зададим функцию $f(x) = 1, x \in [-1, 1]$ параметрически.*

Например, $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. *Очевидно, что это задание удовлетворяет определению.*

Предложение. *Рассмотрим уравнение $F(x, y') = 0$ от двух переменных x и y'. Пусть оно задает некоторую кривую $\gamma = \{(x, y)\,|F(x, y') = 0\}$ плоскости xOy'.*

Возьмем функцию φ такую, что эта кривая является графиком функции φ'.

Тогда $F(x, \varphi'(x)) \equiv 0$.

Идея нахождения решения такого уравнения (в котором нельзя выразить y') заключается в том, чтобы задать функцию γ параметрически *и найти y также параметрически.*

Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, $\varphi' \neq 0$, $\psi \in C(\alpha, \beta)$, причем эти функции задают параметрически наше уравнение $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$.

Тогда функция, задаваемая параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

Замечание. Проверим, что функция действительно является решением.

Во-первых, проверим, что такое задание действительно является функцией, то есть каждому x соответствует ровно один y. Так как $\varphi' \neq 0$, то φ строго возрастает и тогда φ – биекция. Рассматривая обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, получаем $y = g \circ \varphi^{-1}$.

Во-вторых, проверим непрерывность и дифференцируемость решения. Так как $g \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, то их композиция также непрерывно дифференцируема.

В-третьих, проверим, что функция обращает наше уравнение в тождество.

$$F(x, y')|_{y=g\circ\varphi^{-1}(x)} = F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right).$$

Так как $\left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x) = g'(\varphi^{-1}(x))\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = (\psi(t)\varphi'(t))_{t=\varphi'(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$, то получаем

$$F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right) = F\left(x, \psi(\varphi^{-1}(x))\right) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, наша функция действительно действительно обращает выражение в нуль. А значит, эта функция является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

Пример 6.

$$e^{y'} + y' = x.$$

Решение. Параметризуем множество, задаваемое этим уравнением

$$\left\{(x, y') : \; e^{y'} + y' = x\right\}.$$

Пусть $y' = t$. Тогда $x = e^t + t$.

Замечание (Основное соотношение метода введение параметра).

$$dy = y'_x dx.$$

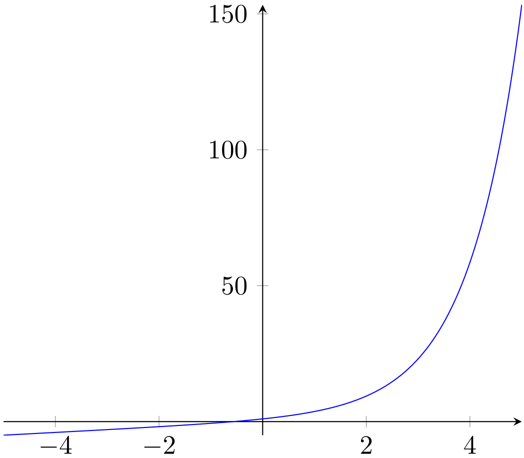

Рис. 2

Подставляя наши функции получаем

$$dy = t \cdot d(e^t + t),$$

$$dy = t \cdot \left(e^t + 1\right),$$

$$y = \int t \cdot \left(e^t + 1\right) dt + c.$$

В итоге мы пришли к той же самой формуле, что и доказали ранее. А значит подстановки подходят.

Тогда следующая функция является решением

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Предложение (Общий случай метода введения параметра)**.** *Пусть есть уравнение* $F(x, y, y') = 0$*, задающее какую-то поверхность* $\sigma = ((x, y, y') \,|\, F\,(x, y, y') =$

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ *– параметризация* σ*.*

Подставим эту параметризацию в основное соотношение $dy = y'_x dx$*.*

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(u, v)\left(\varphi'_u du + \varphi'_v dv\right).$$

Пусть $v = g(u, C)$ – решение этого уравнения.

Тогда получаем $\begin{cases} x = \varphi(u, v = g(u, C)), \\ y = \psi(u, v = g(u, C)) \end{cases}$ *– параметризация решений исходного уравнения.*

Пример 7.

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln v. \end{cases}$$

Тогда подставляя в основное соотношение, получаем

$$\cancel{vdu} + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = \cancel{vdu},$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = 0,$$

При $\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$, получаем $v = 2e^{2u-1}$. Тогда $y = e^{2x-1}$.

При $dv = 0$, получаем $y = cx - \frac{c}{2} \ln \frac{c}{2}$.

Замечание. Важно помнить, что это могут быть не все решения уравнения!!! Такой случай уже был рассмотрен в примере 4.

6 Задача Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной

Замечание. Мы уже говорили о решении задачи Коши для нормального уравнения. Однако в силу того, что уравнение $F(x, y, y') = 0$ задает не одно поле направлений, а целую совокупность, оказывается, что через одну точку могут проходить несколько интегральных кривых, однако под разными углами. Именно поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно y', требует дополнительного начального условия на y'.

Определение 9. Задачей Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$.
(Под y_0' понимается какое-то числовое значение, а не производная. Такое обозначение используется для визуального соответствия.)

Предложение. *Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы, то есть $F(x_0, y_0, y_0') = 0$.*

Теорема 3 (Существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешенного относительно производной)**.** *Пусть $F \in C^1(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область. Пусть также точка $(x_0, y_0, y_0') \in G$ такая, что $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, $F'_y(x_0, y_0, y_0') \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение задачи $F(x, y, y') = 0$ при условиях* $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$

Доказательство. TODO: PROOF

Определение 10. Решение φ уравнения $F(x, y, y') = 0$ на $\langle a, b \rangle$ называется особым, если для любой точки $x_0 \in \langle a, b \rangle$ найдется решение ψ такое, что

g