Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

Часть I

1 Линейные уравнения 1-ого порядка

Определение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{1}$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛНУ или просто ЛУ).

Определение 2. Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y \tag{2}$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОУ).

Замечание. Вообще, мы уже неоднократно сталкивались и решали уравнения такого вида. Однако для строгого обоснования наших решений рассмотрим следующую лемму.

Лемма 1 (Общее решение ЛОУ)**.** *Пусть в линейном однородном уравнении $y' = p(x)y$ функция $p(x) \in C\,(a, b)$.*

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = c \cdot e^{\int p}, \tag{3}$$

где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int p$ понимается какая-то производная функции $p(x)$.

Доказательство. Воспользуемся эквивалентным преобразованием

$$y' = p(x)y \Leftrightarrow dy = p(x)ydx.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

1. $y = 0$ – очевидно решение,
2. при $y > 0$: разделим на y с обеих сторон

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x)dx,$$

$$\ln y = \int p(x)dx,$$

$$y = A \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } A > 0.$$

3. при $y < 0$: аналогично, но появляется минус, который можно засунуть в константу.

$$y = B \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } B < 0.$$

4. Осталось разобрать случай, когда интегральная кривая проходит через границу $y = 0$. Однако, рассматривая все кривые, видно, что они заданы строго в одной полуплоскости относительно $y = 0$:

$$y = A \cdot e^{\int p} > 0, \quad \text{где } A > 0, \quad y = B \cdot e^{\int p} < 0, \quad \text{где } B < 0.$$

Таким образом, действительно, общее решение ЛОУ можно записать в виде $y = c \cdot e^{\int p}$.

Замечание. Теперь мы строго доказали, ранее использовавшиеся факты. Как вывод из этого, мы получаем, что теперь можно каждый раз не решать ЛОУ, а просто пользоваться формулой. Или хотя бы всегда проверять, похоже ли решение на полученное в общем виде.

Замечание. Далее мы будем рассматривать общее решение неоднородного уравнения. Мы используем достаточно интересный метод доказательства: так, мы предоставим какое-то решение, которое мы назовем общим, а далее докажем, что любое другое решение на самом деле задается именно нашим выражением.

Оказывается, что такой метод можно применять и для решения любых уравнений. Достаточно лишь показать, что представленное выражение является решением, а также, что любое другое произвольное решение задается этим выражением.

Лемма 2 (Общее решение ЛНУ)**.** *Пусть в линейном уравнении $y' = p(x)y + q(x)$ функции $p(x)$, $q(x) \in C\,(a, b)$.*

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}, \tag{4}$$

где $c \in \mathbb{R}$ – произвольная константа и под $\int f$ понимается какая-то производная функции $f(x)$.

Доказательство. • Докажем, что данное данное множество решений включено в общее множество решений исходного уравнения. Проще говоря, проверим, правда ли, что представленное выражение является решением.

Найдем $y'(x)$:

$$y' = q \cdot e^{-\int p} \cdot e^{\int p} + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p} = q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p}.$$

Тогда, подставляя в исходное уравнение:

$$q + \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p} \equiv p \cdot \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p} + q,$$

получаем верное тождество.

• Докажем, что произвольное решение задается формулой $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$.

Пусть $\varphi \in (\alpha, \beta)$ – решение, не задающееся этой формулой.

Рассмотрим $x_0 \in (\alpha, \beta): \ \varphi(x_0) = y_0$.

Найдем такое $c \in \mathbb{R}$, что наше решение проходит через точку (x_0, y_0).

$$\left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p} \bigg|_{x = x_0} = y_0,$$

$$c = \left(y_0 \cdot e^{-\int p} - \int q \cdot e^{-\int p} \right) \bigg|_{x = x_0}.$$

Пусть решение с этим c – решение ψ. Тогда мы получили два решения задачи Коши $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ на интервале (α, β). Так как $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C\left(()\, a, b\right)$, то по теореме об единственности решения задачи Коши $\varphi = \psi$, что противоречит предположению о том, что φ не задается решением вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$.

Таким образом, действительно любое решение можно представить в виде $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$.

Объединяя эти два факта, мы получаем, что показанное нами решение действительно является общим решением линейного дифференциального уравнения.

Замечание. В итоге мы имеем формулу для решения ЛУ, в которую можно подставить нужные значения. Однако достаточно тяжело помнить ее наизусть, поэтому нужно иметь какой-то метод, который сможет нас привести к этому решению. Напомним, что любой метод, который будет давать решение вида $y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + c\right) \cdot e^{\int p}$ окажется верным, так как мы уже доказали, что это общее решение.

Предложение (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной)**.** *Пусть стоит задача решить линейное уравнение* $y' = p(x)y + q(x)$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение $y' = p(x)y$. *Его общее решение мы знаем (либо можем найти):* $y = c \cdot e^{\int p}$.

Рассмотрим теперь c не как константу, а как функцию $c(x)$.

Подставляя $y = c(x) \cdot e^{\int p}$ *в исходное линейное уравнение, получаем:*

$$c'(x) \cdot e^{\int p} + \cancel{c(x) \cdot pe^{\int p}} = \cancel{pc(x) \cdot e^{\int p}} + q,$$

$$c'(x) = q \cdot e^{-\int p}.$$

Это уравнение мы снова можем решить:

$$c(x) = \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}.$$

Тогда, возвращаясь к решению однородного уравнения и подставляя c туда, получаем

$$y = \left(\int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}\right) \cdot e^{\int p},$$

то есть общее решение линейного уравнения.

2 Уравнения Бернулли и Рикатти

Замечание. Существует огромное количество уравнений первого порядка, которые можно свести к линейному какой-либо заменой. В этом пункте будут разобраны такие уравнения, представленные в XVII веке Якобом Бернулли [1] и Рикатти [2].

[1] Якоб Бернулли (1655–1705, Швейцария)

[2] Рикка́ти Якопо Франческо (1676–1754, Италия)

Определение 3. Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \tag{5}$$

где $\alpha \neq \{0, 1\}$, называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Лемма 3. *Уравнение Бернулли $y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}$ при $y \neq 0$ заменой $t = y^{1-\alpha}$ сводится к линейному дифференциальному уравнению.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}.$$

Поделим обе части уравнения на y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Сделаем замену $t = y^{1-\alpha}$, тогда $t' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$:

$$\frac{1}{1-\alpha}t' = p(x)t + q(x),$$

$$t' = (1-\alpha)\left(p(x)t + q(x)\right).$$

Получили линейное дифференциальное уравнение.

Определение 4. Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{6}$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

Замечание. Уравнение Бернулли является частным случаем уравнения Рикатти при $r(x) \equiv 0$. Рикатти был знаком с семьей Бернулли, поэтому связь между этими уравнениями неслучайна.

Лемма 4. *Пусть φ – какое-то решение уравнения Рикатти $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$. Подстановка $y = z + \varphi$ сводит это уравнение к уравнению Бернулли.*

Доказательство. Найдем y':

$$y' = z' + \varphi'.$$

Так как φ – решение уравнения Рикатти, то

$$\varphi' = p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x).$$

Тогда $y' = z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x)$.

Подставим замену в уравнение Рикатти

$$z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + \cancel{r(x)} = p(x)(z+\varphi)^2 + q(x)(z+\varphi) + \cancel{r(x)},$$

$$z' = z\underbrace{\left(2p(x)\varphi + q(x)\right)}_{P(x)} + \underbrace{p(x)}_{Q(x)}z^2,$$

$$z' = P(x)z + Q(x)z^2.$$

Получили уравнение Бернулли для $\alpha = 2$.

3 Уравнение в полных дифференциалах

Определение 5. Пусть существует функция u такая, что $du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (то есть $u'_x = P$, $u'_y = Q$). Тогда уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{7}$$

называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

Теорема 1 (Общее решение УПД). *Пусть $u \in C^1(G)$, причем $u'_x = P$, $u'_y = Q$. Тогда функция $\varphi(x)$ является общим решением уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ на интервале (α,β) в том и только том случае, когда $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и φ неявно задается уравнением $u(x,y) = c$ при некотором $c \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Необходимость:
Так как φ – решение, то $\varphi \in C^1(\alpha,\beta)$ и

$$P(x,\varphi(x))dx + Q(x,\varphi(x))d(\varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Заметим, что левая часть есть полная производная функции $u(x,\varphi(x))$.

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x)) \equiv 0,$$

$$u(x,\varphi(x)) \equiv c.$$

Таким образом, получаем, что φ действительно неявно задана уравнением $u(x,y)=c$.

Достаточность:

Так как φ неявно задана уравнением $u(x,y)=c$, то

$$u(x,\varphi(x))\equiv c.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}u(x,\varphi(x))\equiv 0,$$

то есть

$$P(x,\varphi(x))+Q(x,\varphi(x))\varphi'(x)\equiv 0.$$

Так как $\varphi\in C^1(\alpha,\beta)$, то φ является решением уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ по определению решения дифференциального уравнения.

Замечание. Назревает хороший вопрос: откуда эту функцию u взять и почему вообще она существует?

Пусть есть функция $u: u'_x=P,\ u'_y=Q,\ u\in C^2(G)$. Рассмотрим вторые производные:

$$\left.\begin{aligned} u_x y'' &= P'_y,\\ u_y x'' &= Q'_x \end{aligned}\right\} \implies P'_y=Q'_x.$$

На основе этого утверждения появляется следующая теорема.

Теорема 2 (Признак УПД). *Пусть $P,Q\in C^1(G)$, причем $P'_y=Q'_x$, где G – односвязная область. Тогда существует функция $u: u'_x=P, u'_y=Q$. Кроме того, все такие функции имеют вид*

$$u(\tilde{x},\tilde{y})=\int\limits_{\gamma(\tilde{x},\tilde{y})}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+c,$$

где $c\in\mathbb{R}$, $\gamma(\tilde{x},\tilde{y})$ – кривая в области G, соединяющая точки (x_0,y_0) и $(\tilde{x},\tilde{y})$.

Замечание. Таким образом, при определенных условиях мы поняли, как можно найти эту функцию u. И далее, решая уравнение $u=c$, можем найти общее решение УПД.

Однако вычисление данного криволинейного интеграла зачастую является непростой задачей, поэтому рассмотрим другие методы.

Определение 6. Функция u при условии $u'_x=P$, $u'_y=Q$ называется потенциалом поля (P,Q), а поле (P,Q) – потенциальным полем.

Пример 1.

$$e^{-y}dx - \big(xe^{-y} + 2y\big)\, dy = 0.$$

Решение. Область определения уравнения есть $\mathbb{R}^2$ – односвязное множество.

Рассмотрим производные коэффициентов $P = e^{-y}$ и $Q = (xe^{-y} + 2y)$:

$$P'_y = -e^{-y} = Q'_x.$$

Таким образом, по признаку – это уравнение в полных дифференциалах.

Не будем вычислять криволинейный интеграл. Но рассмотрим систему

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -xe^{-y} - 2y \end{cases}.$$

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0:

$$u'_x(x, y_0) = e^{-y_0} \implies u(x, y_0) = \int e^{-y_0} dx = xe^{-y_0} + c(y_0).$$

Подставляя во второе уравнение системы, получаем

$$\big(xe^{-y} + c(y)\big)'_y = -xe^{-y} - 2y,$$

$$\cancel{-xe^{-y}} + c'(y) = \cancel{-xe^{-y}} - 2y,$$

$$c' = -2y,$$

$$c(y) = -y^2 + A.$$

Таким образом, $u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$, а значит уравнение $xe^{-y} - y^2 = C$ задает решение УПД.

Замечание. В примере был показан другой способ решения УПД, избегающий криволинейное интегрирование. Однако данный способ далеко не всегда оказывается возможен. По крайней мере, не всегда можно взять интеграл, чтобы найти $u(x, y_0)$ (при плохой области интеграл по прямой будет достаточно сложен).

Определение 7. Функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, если при домножении этого уравнения на μ получается уравнение в полных дифференциалах.

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 \text{ — УПД}.$$

Замечание. Если μ – интегрирующий множитель уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, причем $\mu, P, Q \in C^1(G)$. Тогда $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$. Расписывая производную получаем уравнение в частных производных

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x.$$

Решать его оказывается совсем непросто, однако чисто теоретически это является способом нахождения интегрирующего множества.

Однако стоит помнить, что нам не требуется находить общее решение. Нам достаточно лишь какое-то частное решение. Иногда его можно найти, как в следующем примере.

Пример 2. *Рассмотрим линейное уравнение*

$$y' = p(x)y + q(x),$$

где $p \neq 0$. *Попробуем найти его интегрирующий множитель.*

Решение. Перепишем исходное уравнение

$$(p(x)y + q(x))\, dx - dy = 0.$$

Заметим, что это уравнение не является уравнением в полным дифференциалах.

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя.

$$\mu'_y\,(p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = -\mu'_x.$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде $\mu = \mu(x)$. Тогда первое слагаемое слева обнулится

$$\mu p(x) = -\mu'_x,$$

$$\mu = Ce^{-\int p}.$$

Так как нам нужно лишь какое-то решение, то рассмотрим любое C, например $C = 1$.

Таким образом, $\mu = e^{-\int p}$ – интегрирующий множитель.

Умножим на μ исходное уравнение

$$y'e^{-\int p} = p(x)ye^{-\int p} + q(x)e^{-\int p},$$

$$y'e^{-\int p} - p(x)ye^{-\int p} = q(x)e^{-\int p}.$$

Заметим, что в левой части стоит производная произведения $\left(ye^{-\int p}\right)$

$$\left(ye^{-\int p}\right) = q(x)e^{-\int p},$$

$$ye^{-\int p} = \int q(x)e^{-\int p} + A,$$

$$y = \left(\int q(x)e^{-\int p} + A\right)e^{\int p}.$$

Таким образом, получили общее решение линейного уравнения, а значит решение привело к верному ответу.

Замечание. Таким образом, мы получили еще один способ нахождения решения линейного уравнения, которым можно пользоваться на практике. Нужно запомнить интегрирующий множитель $\mu = e^{-\int p}$, а также свертывание в производную произведения.

Часть II
Уравнения, не разрешимые относительно произодной

4 Уравнение, разрешимое относительно производной

Пример 3. *Уравнение $(y')^3 - 2yx = 0$ очевидно является разрешимым относительно производной: $y' = \sqrt[3]{2yx}$.*

Пример 4. *Рассмотрим уравнение $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$.*

Рассмотрим отдельно решения уравнений $y' = 2x$ и $y' = -2x$. Хочется сказать, что вместе эти решения дадут общее решение исходного. Однако это не так! Очевидно, что решениями являются параболы с ветвями вниз и вверх соответственно. Тогда можно посмотреть на кривую, содержащую левую ветвь одной из парабол и правую другой (Рис. 1). Это также интегральная кривая, так как она очевидно гладкая. Оказывается, что только в точке с абсциссой $x = 0$ возможны такие интегральные кривые, так как иначе гладкость не соблюдается.

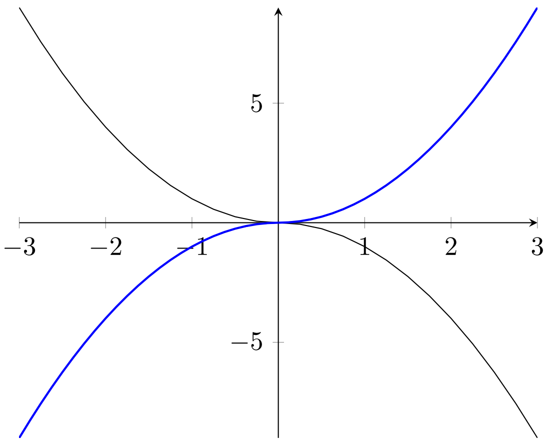


Рис. 1

5 Метод введения параметра

Определение 8. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и $\forall t \in I \; f(\varphi(t)) = \psi(t)$.

Замечание. Заметим, что определение можно переписать немного по-другому. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ задана параметрически соотношениями $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где $t \in I$, если $\varphi(I) = D$ и множество $[(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I]$ является графиком функции f.

Нетрудно понять, что эти определения эквивалентны.

Пример 5. *Зададим функцию $f(x) = 1, x \in [-1, 1]$ параметрически.*

Например, $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$. *Очевидно, что это задание удовлетворяет определению.*

Предложение. *Рассмотрим уравнение $F(x, y') = 0$ от двух переменных x и y'. Пусть оно задает некоторую кривую $\gamma = \{(x, y) \,|F(x, y') = 0\}$ плоскости xOy'.*

Возьмем функцию φ такую, что эта кривая является графиком функции φ'.

Тогда $F(x, \varphi'(x)) \equiv 0$.

Идея нахождения решения такого уравнения (в котором нельзя выразить y') заключается в том, чтобы задать функцию γ параметрически *и найти y также параметрически.*

Пусть $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$, $\varphi' \neq 0$, $\psi \in C(\alpha, \beta)$, причем эти функции задают параметрически наше уравнение $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$.

Тогда функция, задаваемая параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases} \qquad t \in (\alpha, \beta)$$

является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

Замечание. Проверим, что функция действительно является решением.

Во-первых, проверим, что такое задание действительно является функцией, то есть каждому x соответствует ровно один y. Так как $\varphi' \neq 0$, то φ строго возрастает и тогда φ – биекция. Рассматривая обратную $t = \varphi^{-1}(x)$, получаем $y = g \circ \varphi^{-1}$.

Во-вторых, проверим непрерывность и дифференцируемость решения. Так как $g \in C^1(\alpha, \beta)$ и $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$, то их композиция также непрерывно дифференцируема.

В-третьих, проверим, что функция обращает наше уравнение в тождество.

$$F(x, y')|_{y = g\circ\varphi^{-1}(x)} = F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right).$$

Так как $\left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x) = g'(\varphi^{-1}(x))\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = (\psi(t)\varphi'(t))_{t=\varphi'(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$, то получаем

$$F\left(x, \left(g \circ \varphi^{-1}\right)'(x)\right) = F\left(x, \psi(\varphi^{-1}(x))\right) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, наша функция действительно действительно обращает выражение в нуль. А значит, эта функция является решением уравнения $F(x, y') = 0$.

Пример 6.

$$e^{y'} + y' = x.$$

Решение. Параметризуем множество, задаваемое этим уравнением

$$\left\{(x, y') : \ e^{y'} + y' = x\right\}.$$

Пусть $y' = t$. Тогда $x = e^t + t$.

Замечание (Основное соотношение метода введение параметра).

$$dy = y'_x dx.$$

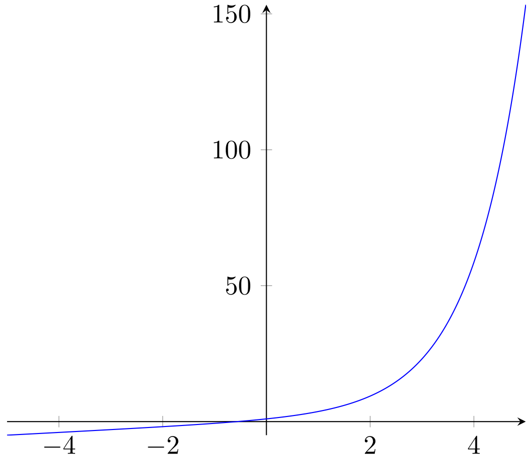


Рис. 2

Подставляя наши функции получаем

$$dy = t \cdot d(e^t + t),$$

$$dy = t \cdot \left(e^t + 1\right),$$

$$y = \int t \cdot \left(e^t + 1\right) dt + c.$$

В итоге мы пришли к той же самой формуле, что и доказали ранее. А значит подстановки подходят.

Тогда следующая функция является решением

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

Предложение (Общий случай метода введения параметра)**.** *Пусть есть уравнение $F(x, y, y') = 0$, задающее какую-то поверхность $\sigma = ((x, y, y') \,|F\,(x, y, y') =$*

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$ *– параметризация σ.*

Подставим эту параметризацию в основное соотношение $dy = y'_x dx$.

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(u, v) \left(\varphi'_u du + \varphi'_v dv\right).$$

Пусть $v = g(u, C)$ – решение этого уравнения.

Тогда получаем $\begin{cases} x = \varphi(u, v = g(u, C)), \\ y = \psi(u, v = g(u, C)) \end{cases}$ *– параметризация решений исходного уравнения.*

Пример 7.

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln v. \end{cases}$$

Тогда подставляя в основное соотношение, получаем

$$\cancel{vdu} + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \right) dv = \cancel{vdu},$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2} \right) dv = 0,$$

При $\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$, получаем $v = 2e^{2u-1}$. Тогда $y = e^{2x-1}$.

При $dv = 0$, получаем $y = cx - \frac{c}{2} \ln \frac{c}{2}$.

Замечание. Важно помнить, что это могут быть не все решения уравнения!!! Такой случай уже был рассмотрен в примере 4.

6 Задача Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной

Замечание. Мы уже говорили о решении задачи Коши для нормального уравнения. Однако в силу того, что уравнение $F(x, y, y') = 0$ задает не одно поле направлений, а целую совокупность, оказывается, что через одну точку могут проходить несколько интегральных кривых, однако под разными углами. Именно поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно y', требует дополнительного начального условия на y'.

Определение 9. Задачей Коши для уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$. (Под y'_0 понимается какое-то числовое значение, а не производная. Такое обозначение используется для визуального соответствия.)

Предложение. *Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы, то есть $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$.*

Теорема 3 (Существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешенного относительно производной)**.** *Пусть $F \in C^1(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$ – область. Пусть также точка $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ такая, что $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует единственное решение задачи $F(x, y, y') = 0$ при условиях* $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$

Доказательство. TODO: PROOF

Определение 10. Решение φ уравнения $F(x, y, y') = 0$ на $\langle a, b\rangle$ называется особым, если для любой точки $x_0 \in \langle a, b\rangle$ найдется решение ψ такое, что

Часть III
Системы дифференциальных уравнений

7

8 Вспомогательные

Определение 11. Под нормой вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ будем понимать $|x| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$.

Определение 12. Нормой матрицы $A = \left\|a_{ij}\right\|_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ будем называть $|A| = \max\limits_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} |a_{ij}|$.

Лемма 5. *Пусть* $f \in C([a,b])$. *Тогда*

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Доказательство.

$$\left|\int\limits_a^b f(t)dt\right| = \max_{i=1,\ldots,n}\left|\int\limits_a^b f_i(t)dt\right| \leqslant \max_{i=1,\ldots,n}\int\limits_a^b |f_i(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=1,\ldots,n}\int\limits_a^b |f(t)|\,dt = \int\limits_a^b |f(t)|\,dt.$$

Лемма 6. *Пусть* $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ *и* $B \in Mat_{n\times k}(\mathbb{R})$. *Тогда* $|A\cdot B| \leqslant n\cdot |A|\cdot|B|$.

Доказательство. Вспомним, как вводилось определение произведения матриц: $[A\cdot B]_{i,j} = \sum\limits_{l=1}^{n}[A]_{i,l}\cdot[B]_{l,j}$. Тогда перейдем к нормам

$$\left|[A\cdot B]_{i,j}\right| = \left|\sum_{l=1}^{n}[A]_{i,l}\cdot[B]_{l,j}\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n}\left|[A]_{i,l}\right|\cdot\left|[B]_{l,j}\right| \leqslant \sum_{l=1}^{n}|A|\cdot|B| = n\cdot|A|\cdot|B|.$$

Определение 13. Функция $f : D \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица на множестве D, если $\exists L : \quad \forall r_1, r_2 \in D \implies |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant L|r_2 - r_1|$. И пишут $f \in Lip(D)$.

Пример 8. *Рассмотрим функцию* $f(x) = \sqrt{x}$ *на отрезке* $D = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$|f(r_2) - f(r_1)| = |f'(\xi)|\,|r_2 - r_1| \leqslant \underbrace{\left|\max_{\left[\frac{1}{2},1\right]} f'(\xi)\right|}_{L}|r_2 - r_1|\,.$$

Таким образом, функция $f(x) = \sqrt{x}$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке* $D = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Предложение. *Этот пример наводит на идею того, что всегда, когда производная ограничена, мы можем найти константу Липшица как* $L = \left|\max\limits_{\left[\frac{1}{2},1\right]} f'(\xi)\right|$.

Предложение. *На самом деле можно показать, что* $C^1[a,b] \subset Lip[a,b] \subset C[a,b]$.

Пример 9. *Рассмотрим все ту же функцию* $f(x) = \sqrt{x}$*, но на множестве* $D = [0,1]$*. Покажем, что она не Липшицива.*

Доказательство. Пусть $f \in LipD$, то есть нашлось такое L, что

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leqslant L|r_2 - r_1|.$$

Возьмем в качестве точки x_1 точку 0, а точку x_2 устремим к нулю

$$\sqrt{x_2} \leqslant L\,|x_2| \implies \infty \underset{x_2 \to 0}{\leftarrow} \frac{1}{\sqrt{x_2}} \leqslant L \underset{x_2 \to 0}{\rightarrow} L,$$

что невозможно, а значит исходное предположение неверно и функция не Липшицива.

Замечание. Однако понятно, что, отступив на чуть-чуть от нуля в множестве D, функция сразу станет Липшицевой. Именно поэтому появляется понятие локальной Липшицевости.

Определение 14. $f : D \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица локально на множестве D, если $\forall r \in D \implies \exists U(r) : \quad f \in Lip(D \cap U)$. И пишут $f \in Lip_{loc}D$.

Пример 10. *Несложно показать, что* $f(x) = \sqrt{x}$ *на множестве* $D = (0,1]$ *удовлетворяет условию локальной Липшицевости, но не глобальной.*

Определение 15. $f : D \to \mathbb{R}^n_{t,r}$ удовлетворяет условию Липшица по r на множестве D, если $\exists L : \quad \forall (t, r_1), (t, r_2) \in D \implies |f(t,x_2) - f(t,x_1)| \leqslant L|r_2 - r_1|$. И пишут $f \in Lip_r D$.

Определение 16. $f : D \to \mathbb{R}^n_{t,r}$ удовлетворяет условию Липшица по r локально на множестве D, если $\forall (t,r) \in D \implies \exists U((t,r)) : \quad f \in Lip_r(D \cap U)$. И пишут $f \in Lip_{r,loc}D$.

Пример 11. *Рассмотрим* $f(t,r) = \frac{1}{t} + \frac{1}{r}$ *на множестве* $D = (0, +\infty) \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Посмотрим на разность значений в разных точках (t_1, r_1), (t_2, r_2)*:*

$$|f(t_2, r_2) - f(t_1, r_1)| = \left|\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right|$$

Понятно, что при очень маленьких t_1, t_2 разность оказывается очень большой, а значит мы ничем не ограничим сверху. То есть глобальное условие Липшица не выполнено.

Однако локально

$$\left|\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right| \leqslant \left|\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| + \left|\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mu_1 |t_2 - t_1| + \mu_2 |r_2 - r_1| \leqslant \underbrace{\max\langle \mu_1, \mu_2\rangle \cdot 2}_{L} |(t_1, r_1) - (t_2, r_2)|$$

она удовлетворяет условию Липшица.

Пример 12. *Рассмотрим $f(t,r) = \sqrt{t}\sqrt{r}$ на множестве $[0, +\infty) \times (0, 1)$.*

Локальному условию Липшица она не удовлетворяет, рассматривая точку 0.

Однако по r она локально Липшицева:

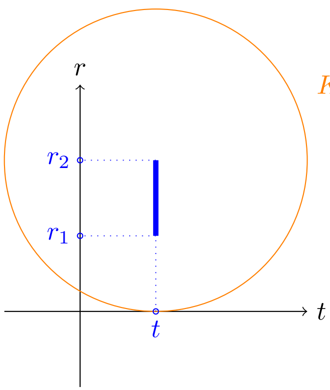
$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| = |\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}| \leqslant L |r_2 - r_1|,$$

где в качестве L возьмем максимум производной корня.

Лемма 7 (Достаточное условие для локальной Липшицевости по r)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f : G \to \mathbb{R}^m$. А также $f'_r \in Mat_{m,n}(C(G))$. Тогда $f \in Lip_{r,loc}(G)$.*

Кроме того, если K – выпуклый компакт, а $M = \max\limits_K |f'_r|$, то $f \in Lip_r K$ с константой Липшица $L = nM$.

Доказательство. Пусть K – выпуклый компакт.



Рассмотрим разность значений:

$$|f(t,r_2)-f(t,r_1)|=\Delta.$$

Так как K – выпуклое, то отрезок тоже принадлежит K.
Рассмотрим функцию $g(s)=f(t,r_1+s(r_2-r_1))$, определенную на $[0,1]$. Заметим, что g непрерывная, как композиция сужения f на r ($h(r)=f(t,r)$) и линейной там же ($r_1+s(r_2-r_1)$).
Тогда по интегральной теореме Лагранжа

$$\Delta=|g(1)-g(0)|=\left|\int\limits_0^1 g'(s)ds\right|=\left|\int\limits_0^1 h'(r_1+s(r_2-r_1))\cdot(r_1+s(r_2-r_1))'ds\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^1 f'_r(r_1+s(r_2-r_1))\cdot(r_2-r_1)ds\right|\leqslant\int\limits_0^1 n\cdot|f'_r|\cdot|r_2-r_1|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant n\cdot\underbrace{\max_K|f'_r|}_{M}\cdot|r_2-r_1|\,.$$

Таким образом, Лишицива константа равна $n\cdot M$.

Рассмотрим область G. Вокруг каждой точки можем рассмотреть брус Π, который является компактом, а значит на нем у нас есть глобальная Липшицивость. То есть мы для каждой точки нашли окрестность, в которой есть глобальная Липшицивость, а значит по определению получили локальную Липшицивость на G.

Лемма 8 (Достаточное условие для Липшицивости по r)**.** *Пусть $G\subset\mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f:\ G\to\mathbb{R}^m$, $f\in Lip_{r,loc}K$, где $K\in G$ – компакт.*

Тогда f глобально Липшицива на K.

Доказательство. Пусть $f\notin Lip_rK$, то есть

$$\forall L\quad\exists(t,r_2),(t,r_1)\in K:\ |f(t,r_2)-f(t,r_1)|>L\,|r_2-r_1|\,.$$

Найдем для каждого натурального числа L пару таких точек $(t_n,r_n),(t_n,\tilde{r_n})$. Так как K компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, то оно секвенциальный компакт, а значит можно выделить сходящиеся подпоследовательности.

Пусть для первой последовательности есть $\{(t_{k_s},r_{k_s})\}_{s=1}^{\infty}:\quad(t_{k_s},r_{k_s})\to(t,r)$. Выберем во второй последовательности с теми же номерами сходящуюся подпоследовательность $\left\{(t_{k_{s_l}},\tilde{r}_{k_{s_l}})\right\}_{l=1}^{\infty}:\quad(t_{k_{s_l}},\tilde{r}_{k_{s_l}})\to(t,\tilde{r})$.

1. Пусть $r = \tilde{r}$.
   Так как $f \in Lip_{r,loc}K$, то есть на окрестности $U(t, r)$ $f \in Lip_r U$. Пусть условие Липшица выполнено с константой L, то есть
   $$\forall(\tau, \rho_1), (\tau, \rho_2) \in D \implies |f(\tau, \rho_2) - f(\tau, \rho_1)| \leqslant L|\rho_2 - \rho_1|.$$
   Так как начиная с какого-то номера все элементы наших последовательностей лежат в окрестности $U(t, r)$, то, выбирая l так, чтобы $L_{s_l} > L$, получаем противоречие нелипшицивости K, но липшицивости на U.

2. Пусть $r \neq \tilde{r}$.
   $$\left|f(t_{k_{s_l}}, r_{k_{s_l}}) - f(t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}})\right| > L_{s_l}\left|r_{k_{s_l}} - \tilde{r}_{k_{s_l}}\right|.$$
   Переходя к пределу при $l \to \infty$, получаем
   $$|f(t, r) - f(t, \tilde{r})| \geqslant \infty,$$
   что невозможно. Снова пришли к противоречию.

А значит исходное предположение было неверным и на самом деле $f \in Lip_r K$.

9 Теоремы о существовании и единственности

Определение 17. Функция $\varphi : E = \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$ — решение интегрального уравнения $r(t) = r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, r(\tau))d\tau$, если

1. Она непрерывна: $\varphi \in C(E)$,
2. Она обращает уравнение в тождество $\varphi(t) \equiv r_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$.

Лемма 9 (О равносильном интегральном уравнении). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Тогда φ – решение задачи Коши $r' = f(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ на $E = \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда φ – решение интегрального уравнения.*

Доказательство. "Необходимость":
Так как φ – решение задачи Коши, то $\varphi \in C^1(E)$, а значит первый пункт определения решения интегрального уравнения выполнен. Второй же получаем просто проинтегрировав дифференциальное уравнение. "Достаточность":

Так как интеграл от непрерывной функции – непрерывно дифференцируем, то первый пункт определения решения задачи Коши получили. А второй получается дифференцируемостью второго пункта определения решения интегрального уравнения.

Лемма 10. *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Пусть также φ_+, φ_- – решения задачи Коши $r' = f(t,r)$, $r(t_0) = r_0$ на $[t_0, b)$ и $(a, t_0]$ соответственно.*

Тогда $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & t \in (a, t_0] \\ \varphi_+(t), & t \in [t_0, b) \end{cases}$ – решение этой же задачи Коши на интервале (a, b).

Доказательство. Очевидно, что функция остается непрерывно дифференцируемой и обращает уравнение в тождество.

Лемма 11 (Gronwall)**.** *Пусть $\varphi \in C(E)$, где $E = \langle a, b \rangle$. Пусть также $\lambda, \mu \geqslant 0$ и $\forall t \in E \quad 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \right|$.*

Тогда $\varphi(t) \leqslant \lambda e^{\mu|t-t_0|}$.

Доказательство. Заметим, что в правой части цепочки неравенств на самом деле стоит решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения.

Пусть $t \geqslant t_0$.

1. Пусть $\lambda > 0$. Обозначим $v(t) = \lambda + \mu \left| \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau) d\tau \right|$.

   Тогда $v'(t) = \mu\varphi(t) \leqslant \mu \cdot v(t)$.
   Так как $\lambda > 0$, то и $v > 0$. Значит можем поделить на v.

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leqslant \mu,$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \mu d\tau,$$

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \leqslant \mu \left(t - t_0\right),$$

$$v(t) \leqslant \underbrace{v(t_0)}_{\lambda} e^{\mu(t-t_0)}.$$

   Таким образом, $\varphi(t) \leqslant v(t) \leqslant \lambda e^{\mu(t-t_0)}$.

2. Пусть $\lambda = 0$.

$$\varphi(t) \leqslant \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau < \underbrace{\delta}_{>0} + \mu \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(\tau)d\tau.$$

Устремим δ к нулю для каждого t: $\varphi(t) \leqslant 0$, что и хотелось доказать. При $t < t_0$ сделаем замену $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t)$.

$$\psi(2t_0 - t) \leqslant \lambda + \mu \int\limits_{t_0}^{2t_0 - t} \psi(s)ds$$

По доказанному (так как $2t_0 - t > t_0$) получаем $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t) \leqslant \lambda e^{\mu(2t_0 - t - t_0)}$.

Определение 18. Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$. Пусть $\Pi = \{|t - t_0| \leqslant a, |r - r_0| \leqslant b\}$ – брус с центром в точке (t_0, r_0), вписанный в данную область (такой есть в силу открытости области).

Пусть $\|f\| = \max\limits_{\Pi} |f|$. Тогда отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$, где $h = \min\left\{a, \frac{b}{\|f\|}\right\}$ – называется отрезком Пеано, соответствующим t_0, r_0.

Замечание. Рассмотрим, что имеется в виду, на простом двумерном примере $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ бруса. Для простоты рассмотрим случай бруса с центром в начале координат. Пусть есть какое-то решение φ, проходящее внутри бруса. Тогда

$$|\varphi(t)| = \left|\int_0^t \varphi'(t)dt\right| \leqslant \int_0^t |\varphi'(t)|dt \leqslant \int_0^t \|f\|dt = \|f\|t.$$

То есть мы получили, что наше решение ограничено внутри бруса двумя лучами. Кардинально появляется два случая: лучи пересекают горизонтальное ребро бруса или вертикальное (см. Рис. 3). В первом случае мы можем уверенно утверждать, что наше решение лежит внутри бруса на отрезке до пересечения луча с брусом. А во втором — на всем отрезке бруса. Вот эти отрезки и называются отрезками Пеано $[0, h]$, где в первом случае $h = \frac{b}{\|f\|}$, а во втором – $h = a$.

Теорема 4 (Пеано о существовании решения). *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$, $(t_0, r_0) \in G$.*

Тогда задача Коши имеет решение на отрезке Пеано.

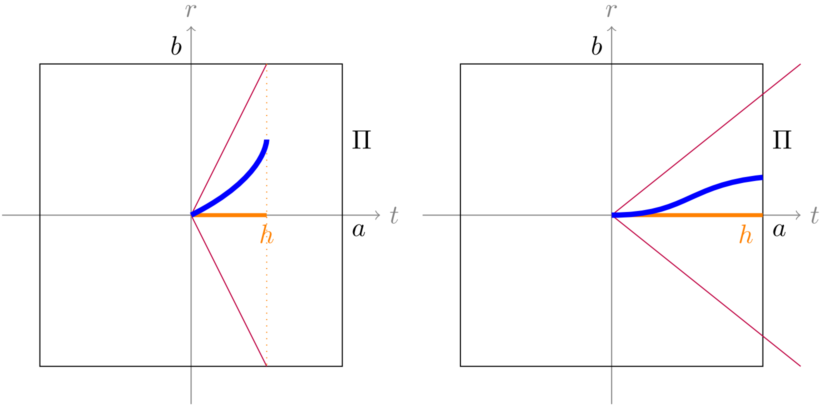


Рис. 3. Иллюстрация к определению отрезка Пеано

Замечание. Без доказательства.

Теорема 5 (Пикара о существовании и единственности решения)**.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, $f \in C(G \to \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$, $(t_0, r_0) \in G$.*

Тогда

1. *На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,*
2. *На любом интервале (a, b) решение задачи Коши единственно.*

Доказательство. Не умоляя общности, рассмотрим в качестве (t_0, r_0) точку начала координат. Будем искать решение при $t \in [0, h]$, где $h = \min\left\{a, \frac{b}{\|f\|}\right\}$ из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность, заданную реккурентно

$$\varphi_0(t) = 0,$$
$$\varphi_m(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_{m-1}(\tau))d\tau.$$

Замечание. Укажем план нашего доказательства:

1. Докажем, что последовательность определена корректна, то есть $\varphi_m \in C\,[0, h]$ и $|\varphi_m(t)| \leqslant \|f\|t$,
2. Докажем равномерную сходимость последовательности, то есть $\exists \varphi$: $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi$,

3. Докажем, что полученное φ является решением интегрального уравнения, связанного с задачей Коши,

4. Докажем единственность.

-

1. Докажем методом математической индукции:
При $m = 0$: φ_0 определена на $[0, h]$.
Пусть $\varphi_m \in C([0, h])$ и $|\varphi_m(t)| \leqslant \|f\|t$.
Рассмотрим $\varphi_{m+1}(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau$. Так как $t \leqslant h \leqslant \frac{b}{\|f\|}$, то $|\varphi_m| \leqslant b$. Тогда $f(\tau, \varphi_m(\tau))$ есть композиция непрерывных функций, а значит она интегрируема и функция φ_{m+1} задана корректно на $[0, h]$, причем к тому же она непрерывна.
$$|\varphi_{m+1}| \leqslant \left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau\right| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau))|\, d\tau \leqslant \|f\| \int\limits_0^t d\tau = \|f\|t.$$
Таким образом, индукционный переход выполняется, а значит наша последовательность задана корректно для любого $n \in \mathbb{N}$.

2. Докажем, что $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – фундаментальная, то есть
$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 : \quad \forall m \geqslant n_0, k \in \mathbb{N} \implies \|\varphi_m - \varphi_{m+k}\| < \varepsilon.$$
На самом деле будем доказывать более сильное утверждение, а именно
$$\forall t \in [0, h] \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N} \quad \exists L : \quad |\varphi_m(t) - \varphi_{m+k}(t)| \leqslant \frac{\|f\|L^m \cdot t^{m+1}}{(m+1)!}.$$
Воспользуемся методом математической индукции по m.
При $m = 0$:
$$|\varphi_0(t) - \varphi_k(t)| = \left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_{k-1}(t))d\tau\right| \leqslant t \cdot \|f\|.$$
Пусть при некотором m утверждение верно, докажем для $m + 1$
$$|\varphi_{m+1}(t) - \varphi_{m+1+k}(t)| = \left|\int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(t))d\tau - \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau))d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_m(t))d\tau - f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau))d\tau| \boxed{\leqslant}$$

Так как у нас есть локальная Липшицевость, то можем найти на компакте, а именно на нашем брусе, L, что

$$\boxed{\leqslant} \int\limits_0^t L \cdot |\varphi_m(\tau) - \varphi_{m+k}(\tau)|\, d\tau \leqslant \frac{\|f\| L^{m+1}}{(m+1)!} \int\limits_0^t \tau^{m+1} d\tau =$$
$$= \frac{\|f\| L^{m+1}}{(m+2)!} t^{m+2}.$$

Таким образом, по Критерию Коши, есть $\varphi \in C([0,h])$, что $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi$.

3. Рассмотрим интегральное уравнение, равносильное задаче Коши.

$$\varphi_{m+1} = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau.$$

при $m \to \infty$

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau.$$

Рассмотрим

$$\left| \int\limits_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau 0 \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| \leqslant \int\limits_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L \int\limits_0^t |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L \cdot \|\varphi_m - \varphi\| \cdot h \to 0.$$

Таким образом, $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$, а значит φ – решение интегрального уравнения, а тогда и задачи Коши.

4. Пусть есть два разных решения ψ_1, ψ_2 задачи Коши на отрезке $[a,b]$.

Рассмотрим

$$|\psi_1(t)-\psi_2(t)| = \left|\int\limits_0^t f(\tau,\psi_1(\tau))d\tau - \int\limits_0^t f(\tau,\psi_2(\tau))d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t |f(\tau,\psi_1(\tau))d\tau - f(\tau,\psi_2(\tau))|\, d\tau \boxed{\leqslant}$$

Рассмотрим графики $\gamma_1 = \psi_1|)[\alpha,\beta]$ и $\gamma_2 = \psi_2|)[\alpha,\beta]$. Тогда $\gamma_1 \cap \gamma_2$ – компакт. А значит из локальной Липшицевости на компакте можем найти константу μ, для которой

$$\boxed{\leqslant} \int\limits_0^t \mu\, |\psi_1(\tau)-\psi_2(\tau)|\, d\tau.$$

А значит получили по лемме Gronwall $|\psi_1(t)-\psi_2(t)| \leqslant 0$, то есть на самом деле $|\psi_1(t)-\psi_2(t)| \equiv 0$ на $[\alpha,\beta]$. Так как это утверждение выполнено для любых α,β из интервала (a,b), то на самом деле $|\psi_1(t)-\psi_2(t)| \equiv 0$ на (a,b).
Таким образом, два решения совпали.

Следствие 1 (Теорема Пикара с простыми условиями)**.** *Пусть* $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ *– область,* $(t_0,r_0) \in G$*,* $f \in C(G \to \mathbb{R}^n)$*, причем* $f'_r \in Mat_n\,(C(G))$*. Тогда*

1. *На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,*
2. *На любом интервале* (a,b) *решение задачи Коши единственно.*

А также

$$\|\varphi-\varphi_m\| \leqslant \frac{\|f\|\cdot(n\|f\|)^n\cdot h^{n+1}}{(n+1)!}$$

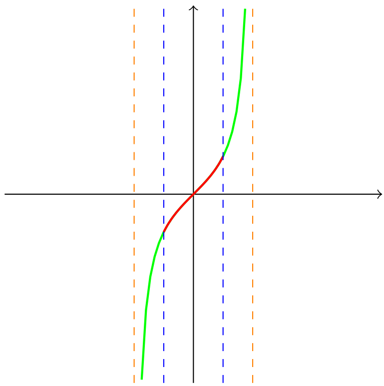
Доказательство. Из достаточного условия локальной Липшицевости прилетают все ограничения. А вторая часть из доказательства, устремляя k к бесконечности.

10 Продолжение решений

Замечание. Теорема Пикара дает представление только о решении на отрезке Пеано, однако этот отрезок может оказаться очень маленьким и не давать необходимого понимания о дифференциальном уравнении. Поэтому хочется расширять решение за границы отрезка Пеано, причем понимая до куда мы это действительно можем сделать.

Пример 13.

$$x' = 1 + x^2, \qquad x(0) = 0.$$



Решение. Очевидно, что решение уравнения – это $x = \operatorname{tg} t$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Однако вполне очевидно, что решение можно продолжить до интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Причем дальше продолжать уже не получится, то есть это максимальное решение.

Определение 19. Решение φ называется максимальным решением системы, если не существует другого решения ψ такого, что φ является сужением ψ.

Теорема 6 (критерий продолжимости)**.** *Пусть $f \in C\,(G \to \mathbb{R}^n)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, а φ – решение на (a, b). Тогда φ продлолжимо на (a, c), где $c > b$ тогда и только тогда, когда $(b, \varphi(b-0)) \in G$.*

Доказательство. Так как φ непрерывно, то $\varphi(b-0) = \varphi(d)$. Тогда, так как каждая интегральная кривая должна лежать в G, то и точка $(d, \varphi(b))$ лежит в G.

Обратно. Решим задачу Коши с той же системой, но с начальным условием, что в точке b значение равно $\varphi(b-0)$. Тогда по теореме Пеано, есть отрезок $[b, b+h]$ (на самом деле и левая часть отрезка тоже есть, но нам она неважна), на котором существует решение. Тогда по лемме о стыковке решений получим решение исходной задачи Коши на $(a, b+h]$, что является продолжением.

Следствие 2. *Пусть $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right)$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, а φ – максимальное решение задачи Коши. Тогда область решения – обязательно интервал.*

Доказательство. Пусть решение – не интервал, а, например, $(a, b]$. Тогда точка b лежит в G, а значит по критерию можем продолжить решение.

Теорема 7 (О существовании единственного максимального решения)**.** *Пусть $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap Lip_{r,loc}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область. Тогда*

1. *Существует максимальное решение φ задачи Коши*

$$r' = f(t, r), \qquad r(t_0) = r_0.$$

2. *Любое другое решение этой задаче Коши является сужением φ.*

Доказательство. Рассмотрим множество s всех решений этой задачи Коши (заданных на любых промежутках). Пусть $a = \inf\limits_{\psi \in s} \inf \operatorname{dom} \psi$, $b = \sup\limits_{\psi \in s} \sup \operatorname{dom} \psi$, то есть это максимальные из левых и правых границ.

Рассмотрим точку $t \in [t_0, b)$. Из опрделения супремума найдется ψ : $\sup \operatorname{dom} \psi > t$. Тогда определим в этой точке $\varphi(t) = \psi(t)$. Таким образом, в каждой точке $t \in [t_0, b)$ мы задали какое-то значение функции $\varphi(t)$.

Замечание. Однако может оказаться, что таких функций ψ несколько. Тогда непонятно, каким образом выбирать значение для φ. Однако по второму пункту теоремы Пикара мы знаем, что на пересечении областей определения этих решений они совпадают. А точка t точно лежит на этом пересечении, а значит все значения этих ψ_i в точке t одинаковы.

Аналогично задаем φ на $(a, t_0]$.

Тогда, так как в точке $t \in (a, b)$ и ее какой-то окрестности $\varphi \equiv \psi$, то в силу того, что ψ – решение, оказывается, что φ – непрерывно дифференцируема в точке t и при этом обращает уравнение в тождество. А значит φ – решение.

Почему максимальное решение? Очевидно, что все решения из s являются сужением φ, так как по второму пункту теоремы Пикара два решения φ и ψ совпадают на пересечении областей определения, которое на самом деле есть область ψ, а это пересечение есть А значит, по определению, φ – максимальное решение.

Теорема 8 (О выходе интегральной кривой за пределы любого компакта)**.** *Пусть $f \in C\left(G \to \mathbb{R}^n\right) \cap Lip_{r,loc}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,r}$ – область, φ – максимальное решение, заданное на (a, b), $K \subset G$ – компакт. Тогда существует Δ, что $\forall t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b) \quad (t, \varphi(t)) \notin K$ (то есть фактически любое решение точно выходит из компакта).*

Доказательство.

Предложение. *Расстояние* $\rho = \rho(K, \partial G) > 0$.

Предложение. *Пусть* $\Pi(t', r') = \left\{(t, r) \in G \| \| (t', r') - (t, r) \| \leqslant \frac{\rho}{2}\right\}$ *и* $K_\rho = \bigcup\limits_{(t', r') \in K} \Pi(t', r')$. *Тогда* K_ρ *– компакт, причем* $K_\rho \subset G$.

Часть IV
Линейные системы дифференциальных уравнений

11

12

Теорема 9. *Пусть* $P \in Mat_n\left(C\left(a, b\right)\right)$. *Тогда общее решение линейной однородной системы* $r' = P(t)r$ *есть* n*-мерное линейное пространство.*

Доказательство. Линейность этого пространства очевидна: сумма лежит в нем, умножение на скаляр – тоже.

Решим n задач Коши для этой систем с условиями:

$$r(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, r(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots r(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

По теореме о существовании решения, существуют $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – решения этих задач Коши.

Рассмотрим их Вронскиан:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, он не равен нулю, а значит эти решения линейно независимы.

Пусть теперь φ – общее решение исходной системы уравнений, причем $\varphi(t_0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Рассмотрим функцию $\phi(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$. Заметим, что она также является решением системы. Рассмотрим его значение в точке t_0

$$\phi(t_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t_0) = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} = \varphi(t_0).$$

А значит по теореме о совпадении решений получаем, что из совпадения в одной точке решений системы следует совпадение этих решений. А значит решение разложилось в линейную комбинацию φ_i. То есть $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ – базис размерности n.

Определение 20. Фундаментальная система решения (ФСР) есть базис в пространстве решений.

Определение 21. Матрица $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ для фундаментальной системы решений $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ называется фундаментальной матрицей.

Лемма 12 (о множестве фундаментальных матриц)**.** *Пусть Φ – фундаментальная матрица для линейной однородной системы.*

Тогда $\{\Phi \cdot M \mid M \in M_n(\mathbb{C}) \& \det M \neq 0\}$ – множество всех фундаментальных матриц для этой системы.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ – множество фундаментальных решений, а $\mathcal{B} = \{\Phi \cdot M \mid M \in M_n(\mathbb{C}) \& \det M \neq 0\}$.

$\boxed{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}}$ Пусть $\Psi \in \mathcal{A}$.

$$\Psi \underset{\psi_i \text{ – решение}}{=} (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{1k}\phi_k, \sum_{k=1}^{n} c_{2k}\phi_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} c_{nk}\phi_k \right).$$

Тогда, обозначая $M = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$, получаем

$$\Psi = \Phi \cdot M.$$

При этом осталось показать, что определитель M не обнуляется.

$$\underbrace{\det \Psi}_{\neq 0} = \det \Phi \cdot M = \underbrace{\det \Phi}_{\neq 0} \cdot \det M \implies \det M \neq 0.$$

$\boxed{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}}$ Пусть $\det M \neq 0$. Рассмотрим $\Psi = \Phi \cdot M \in \mathcal{B}$. Так как ψ_i есть линейная комбинация ϕ_k, то ψ_i – решения.

$$W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \det \Psi = \det \Phi \cdot \det M \neq 0.$$

Таким образом эти решения линейно независимы, а значит являются фундаментальной системой решений.

Таким образом, получаем вложения $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. А значит $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Лемма 13 (об овеществлении)**.** *Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – фундаментальная система решений в комплексном варианте, причем $\varphi_1 = \overline{\varphi_2}$.*

Тогда $\{\operatorname{Re} \varphi_1\}, \{\operatorname{Im} \varphi_1\}, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ тоже фундаментальная система решений.

Доказательство. Выразим вещественную и мнимую части через ${\varphi_i}_{i=1}^n$:

$$\operatorname{Re} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \overline{\varphi_1}}{2} = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2,$$

$$\operatorname{Re} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \overline{\varphi_1}}{2} = \frac{1}{2i}\varphi_1 - \frac{1}{2i}\varphi_2.$$

Тогда можно записать $(\operatorname{Re} \varphi_1), \{\operatorname{Im} \varphi_1\}, \varphi_3, \dots, \varphi_n = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{bmatrix}$. При этом определитель матрицы равен $-\frac{1}{2i} \neq 0$, а значит это тоже ФСР по предыдущей лемме.

13 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

Определение 22. Систему $r' = Ar$, где $A \in Mat_n(\mathbb{C})$, будем называть линейной однородной системой с постоянными коэффициентами.

Лемма 14. *Пусть $\lambda \in specA$, $h_1, h_2, \ldots, h_s$ – Жорданова цепочка, соответствуюшая λ.*

Тогда $e^{\lambda t}h_1, e^{\lambda t}(th_1 + h_2), \ldots, e^{\lambda t}\left(\frac{t^{s-1}}{(s-1)!}h_1 + \cdots + h_{s-1} + h_s\right)$ – решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Доказательство.

Замечание. Вспомним, что такое Жорданова цепочка. Набор $h_1, h_2, \ldots, h_s$ такой, что

$$
\begin{aligned}
Ah_1 &= \lambda h_1,\\
(A-\lambda E)\,h_2 &= h_1\\
(A-\lambda E)\,h_3 &= h_2\\
&\cdots\\
(A-\lambda E)\,h_s &= h_{s-1}
\end{aligned}
$$

называется Жордановой цепочкой.

Проверим честной подстановкой Пусть $\varphi_k(t) = e^{\lambda t}\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j$.

$$
\begin{aligned}
\varphi_k'(t) &= \lambda e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(k-j)t^{k-j-1}}{(k-j)!}h_j =\\
&= \lambda e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!}h_j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A\cdot\varphi_k(t) = e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}Ah_j &= e^{\lambda t}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\lambda h_1 + e^{\lambda t}\sum_{j=2}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}\left(\lambda h_j + h_{j-1}\right) =\\
&= e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}\lambda h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=2}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_{j-1} =\\
&= \lambda e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k}\frac{t^{k-j}}{(k-j)!}h_j + e^{\lambda t}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!}h_j.
\end{aligned}
$$

Таким образом, видно, что $\varphi_k'(t) = A \cdot \varphi_k(t)$, а значит это решение.

Лемма 15 (ФСР ЛОС с постоянными коэффициентами)**.** *Фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами в для Жорданова базиса* $\begin{matrix} \lambda_1 \leftrightarrow h_1, \dots, h_s \\ \dots \\ \lambda_d \leftrightarrow u_1, \dots, u_m \end{matrix}$ *есть*

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t} h_1, e^{\lambda_1 t}(th_1 + h_2), \dots, e^{\lambda_1 t}\left(\tfrac{t^{s-1}}{(s-1)!} h_1 + \dots + h_{s-1} + h_s\right) \\ \dots \\ e^{\lambda_d t} u_1, e^{\lambda_d t}(tu_1 + u_2), \dots, e^{\lambda_d t}\left(\tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} h_1 + \dots + h_{m-1} + h_m\right) \end{gathered}$$

Доказательство. Проверим определитель Вронского для этих решений

$$W(\{\phi_i\}, 0) = \det(h_1, h_2, \dots, h_s, \dots, u_1, u_2, \dots, u_m) \neq 0.$$

(отличие от нуля есть из-за того, что матрица под детерминантом есть просто базис в $\mathbb{C}^n$). Значит это действительно фундаментальная система решений.