

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И  
ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

## Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

**Магазенков Е. Н.**

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

## Часть I

# Уравнения первого порядка

## 1 Основные определения

**Определение 1.** Обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0.$$

**Определение 2.** Функция  $\varphi$  является решением уравнения  $F(x, y, y') = 0$  на промежутке  $\langle a, b \rangle$ , если

$$\varphi \in C \langle a, b \rangle,$$

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \text{ на } \langle a, b \rangle.$$

**Определение 3.** Интегральной кривой уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называется график его решения.

**Определение 4.** Общим решением уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называется множество всех его решений.

Частным же решением называют какое-то конкретное решение.

**Определение 5.** Общим интегралом уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называют соотношение вида  $\Phi(x, y, C) = 0$ , где  $C$  — константа, перебирающая некоторые значения и задающая решения.

*Замечание.* Общий интеграл не всегда описывает общее решение.

## 2 Уравнение в нормальной форме

**Определение 6.** Уравнение  $y' = f(x, y)$ , разрешённое относительно производной, называют нормальным уравнением или уравнением в нормальной форме.

При этом областью задания уравнения называется область определения его правой части  $\text{dom } f$ .

### 3 Линейные уравнения 1-ого порядка

**Определение 7.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x), \quad (1)$$

называют линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛНУ или просто ЛУ).

**Определение 8.** Дифференциальное уравнение вида

$$y' = p(x)y \quad (2)$$

называют линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛОУ).

*Замечание.* Вообще, мы уже неоднократно сталкивались и решали уравнения такого вида. Однако для строгого обоснования наших решений рассмотрим следующую лемму.

**Лемма 1** (Общее решение ЛОУ). Пусть в линейном однородном уравнении  $y' = p(x)y$  функция  $p(x) \in C(a, b)$ .

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = c \cdot e^{\int p}, \quad (3)$$

где  $c \in \mathbb{R}$  – произвольная константа и под  $\int p$  понимается какая-то производная функции  $p(x)$ .

*Доказательство.* Воспользуемся эквивалентным преобразованием

$$y' = p(x)y \Leftrightarrow dy = p(x)y dx.$$

Рассмотрим несколько возможных случаев:

1.  $y = 0$  – очевидно решение,
2. при  $y > 0$ : разделим на  $y$  с обеих сторон

$$\frac{dy}{y} = p(x) dx.$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int p(x) dx,$$

$$\ln y = \int p(x) dx,$$

$$y = A \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } A > 0.$$

3. при  $y < 0$ : аналогично, но появляется минус, который можно засунуть в константу.

$$y = B \cdot e^{\int p}, \quad \text{где } B < 0.$$

4. Осталось разобрать случай, когда интегральная кривая проходит через границу  $y = 0$ . Однако, рассматривая все кривые, видно, что они заданы строго в одной полуплоскости относительно  $y = 0$ :

$$y = A \cdot e^{\int p} > 0, \quad \text{где } A > 0, \quad y = B \cdot e^{\int p} < 0, \quad \text{где } B < 0.$$

Таким образом, действительно, общее решение ЛОУ можно записать в виде  $y = c \cdot e^{\int p}$ .

*Замечание.* Теперь мы строго доказали, ранее использовавшиеся факты. Как вывод из этого, мы получаем, что теперь можно каждый раз не решать ЛОУ, а просто пользоваться формулой. Или хотя бы всегда проверять, похоже ли решение на полученное в общем виде.

*Замечание.* Далее мы будем рассматривать общее решение неоднородного уравнения. Мы используем достаточно интересный метод доказательства: так, мы предоставим какое-то решение, которое мы назовем общим, а далее докажем, что любое другое решение на самом деле задается именно нашим выражением.

Оказывается, что такой метод можно применять и для решения любых уравнений. Достаточно лишь показать, что представленное выражение является решением, а также, что любое другое произвольное решение задается этим выражением.

**Лемма 2** (Общее решение ЛНУ). Пусть в линейном уравнении  $y' = p(x)y + q(x)$  функции  $p(x), q(x) \in C(a, b)$ .

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}, \quad (4)$$

где  $c \in \mathbb{R}$  – произвольная константа и под  $\int f$  понимается какая-то производная функции  $f(x)$ .

*Доказательство.* • Докажем, что данное данное множество решений включено в общее множество решений исходного уравнения. Проще говоря, проверим, правда ли, что представленное выражение является решением.

Найдем  $y'(x)$ :

$$y' = q \cdot e^{-\int p} \cdot e^{\int p} + \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p} = q + \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p}.$$

Тогда, подставляя в исходное уравнение:

$$q + \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot p e^{\int p} \equiv p \cdot \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p} + q,$$

получаем верное тождество.

- Докажем, что произвольное решение задается формулой  $y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$ .

Пусть  $\varphi \in (\alpha, \beta)$  – решение, не задающееся этой формулой.

Рассмотрим  $x_0 \in (\alpha, \beta) : \varphi(x_0) = y_0$ .

Найдем такое  $c \in \mathbb{R}$ , что наше решение проходит через точку  $(x_0, y_0)$ .

$$\left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p} \Big|_{x=x_0} = y_0,$$

$$c = \left( y_0 \cdot e^{-\int p} - \int q \cdot e^{-\int p} \right) \Big|_{x=x_0}.$$

Пусть решение с этим  $c$  – решение  $\psi$ . Тогда мы получили два решения задачи Коши  $y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$  с начальными условиями  $y(x_0) = y_0$  на интервале  $(\alpha, \beta)$ . Так как  $f(x, y) = p(x)y + q(x) \in C((\alpha, \beta) \times \mathbb{R})$ , то по теореме об единственности решения задачи Коши  $\varphi = \psi$ , что противоречит предположению о том, что  $\varphi$  не задается решением вида  $y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$ .

Таким образом, действительно любое решение можно представить в виде  $y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$ .

Объединяя эти два факта, мы получаем, что показанное нами решение действительно является общим решением линейного дифференциального уравнения.

*Замечание.* В итоге мы имеем формулу для решения ЛУ, в которую можно подставить нужные значения. Однако достаточно тяжело помнить ее наизусть, поэтому нужно иметь какой-то метод, который сможет нас привести к этому решению. Напомним, что любой метод, который будет давать решение вида  $y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + c \right) \cdot e^{\int p}$  окажется верным, так как мы уже доказали, что это общее решение.

**Предложение** (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной). Пусть стоит задача решить линейное уравнение  $y' = p(x)y + q(x)$ .

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение, то есть уравнение  $y' = p(x)y$ . Его общее решение мы знаем (либо можем найти):  $y = c \cdot e^{\int p}$ .

Рассмотрим теперь  $c$  не как константу, а как функцию  $c(x)$ .

Подставляя  $y = c(x) \cdot e^{\int p}$  в исходное линейное уравнение, получаем:

$$c'(x) \cdot e^{\int p} + \cancel{c(x) \cdot p e^{\int p}} = \cancel{p c(x) \cdot e^{\int p}} + q,$$

$$c'(x) = q \cdot e^{-\int p}.$$

Это уравнение мы снова можем решить:

$$c(x) = \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c}.$$

Тогда, возвращаясь к решению однородного уравнения и подставляя  $c$  туда, получаем

$$y = \left( \int q \cdot e^{-\int p} + \tilde{c} \right) \cdot e^{\int p},$$

то есть общее решение линейного уравнения.

## 4 Уравнения Бернулли и Рикатти

*Замечание.* Существует огромное количество уравнений первого порядка, которые можно свести к линейному какой-либо заменой. В этом пункте будут разобраны такие уравнения, представленные в XVII веке Якобом Бернулли<sup>1</sup> и Рикатти<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Якоб Бернулли (1655–1705, Швейцария)

<sup>2</sup> Риккати Якопо Франческо (1676–1754, Италия)

**Определение 9.** Уравнение вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad (5)$$

где  $\alpha \neq \{0, 1\}$ , называется дифференциальным уравнением Бернулли.

**Лемма 3.** Уравнение Бернулли  $y' = p(x)y + q(x)y^\alpha$  при  $y \neq 0$  заменой  $t = y^{1-\alpha}$  сводится к линейному дифференциальному уравнению.

*Доказательство.* Рассмотрим уравнение Бернулли

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha.$$

Поделим обе части уравнения на  $y^\alpha$ :

$$\frac{y'}{y^\alpha} = p(x)y^{1-\alpha} + q(x).$$

Сделаем замену  $t = y^{1-\alpha}$ , тогда  $t' = (1 - \alpha) \frac{y'}{y^\alpha}$ :

$$\frac{1}{1 - \alpha} t' = p(x)t + q(x),$$

$$t' = (1 - \alpha) (p(x)t + q(x)).$$

Получили линейное дифференциальное уравнение.

**Определение 10.** Уравнение вида

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (6)$$

называется дифференциальным уравнением Бернулли.

*Замечание.* Уравнение Бернулли является частным случаем уравнения Рикатти при  $r(x) \equiv 0$ . Рикатти был знаком с семьей Бернулли, поэтому связь между этими уравнениями неслучайна.

**Лемма 4.** Пусть  $\varphi$  – какое-то решение уравнения Рикатти  $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ . Подстановка  $y = z + \varphi$  сводит это уравнение к уравнению Бернулли.

*Доказательство.* Найдем  $y'$ :

$$y' = z' + \varphi'.$$

Так как  $\varphi$  – решение уравнения Рикатти, то

$$\varphi' = p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x).$$

Тогда  $y' = z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + r(x)$ .

Подставим замену в уравнение Рикатти

$$z' + p(x)\varphi^2 + q(x)\varphi + \cancel{r(x)} = p(x)(z + \varphi)^2 + q(x)(z + \varphi) + \cancel{r(x)},$$

$$z' = z \underbrace{(2p(x)\varphi + q(x))}_{P(x)} + \underbrace{p(x)}_{Q(x)} z^2,$$

$$z' = P(x)z + Q(x)z^2.$$

Получили уравнение Бернулли для  $\alpha = 2$ .

## 5 Уравнение в полных дифференциалах

**Определение 11.** Пусть существует функция  $u$  такая, что  $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  (то есть  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$ ). Тогда уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (7)$$

называется уравнением в полных дифференциалах (УПД).

**Теорема 1** (Общее решение УПД). Пусть  $u \in C^1(G)$ , причем  $u'_x = P$ ,  $u'_y = Q$ . Тогда функция  $\varphi(x)$  является общим решением уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  на интервале  $(\alpha, \beta)$  в том и только том случае, когда  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$  и  $\varphi$  неявно задается уравнением  $u(x, y) = c$  при некотором  $c \in \mathbb{R}$ .

Доказательство. Необходимость:

Так как  $\varphi$  – решение, то  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$  и

$$P(x, \varphi(x))dx + Q(x, \varphi(x))d(\varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Заметим, что левая часть есть полная производная функции  $u(x, \varphi(x))$ .

$$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) \equiv 0,$$

$$u(x, \varphi(x)) \equiv c.$$



Таким образом, получаем, что  $\varphi$  действительно неявно задана уравнением  $u(x, y) = c$ .

Достаточность:

Так как  $\varphi$  неявно задана уравнением  $u(x, y) = c$ , то

$$u(x, \varphi(x)) \equiv c.$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}u(x, \varphi(x)) \equiv 0,$$

то есть

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0.$$

Так как  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ , то  $\varphi$  является решением уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  по определению решения дифференциального уравнения.

*Замечание.* Назревает хороший вопрос: откуда эту функцию  $u$  взять и почему вообще она существует?

Пусть есть функция  $u : u'_x = P, u'_y = Q, u \in C^2(G)$ . Рассмотрим вторые производные:

$$\left. \begin{aligned} u_{xy}'' &= P'_y, \\ u_{yx}'' &= Q'_x \end{aligned} \right\} \implies P'_y = Q'_x.$$

На основе этого утверждения появляется следующая теорема.

**Теорема 2** (Признак УПД). Пусть  $P, Q \in C^1(G)$ , причем  $P'_y = Q'_x$ , где  $G$  – односвязная область. Тогда существует функция  $u : u'_x = P, u'_y = Q$ . Кроме того, все такие функции имеют вид

$$u(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + c,$$

где  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})$  – кривая в области  $G$ , соединяющая точки  $(x_0, y_0)$  и  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

*Замечание.* Таким образом, при определенных условиях мы поняли, как можно найти эту функцию  $u$ . И далее, решая уравнение  $u = c$ , можем найти общее решение УПД.

Однако вычисление данного криволинейного интеграла зачастую является непростой задачей, поэтому рассмотрим другие методы.

**Определение 12.** Функция  $u$  при условии  $u'_x = P, u'_y = Q$  называется потенциалом поля  $(P, Q)$ , а поле  $(P, Q)$  – потенциальным полем.

**Пример 1.**

$$e^{-y}dx - (xe^{-y} + 2y)dy = 0.$$

*Решение.* Область определения уравнения есть  $\mathbb{R}^2$  — односвязное множество.

Рассмотрим производные коэффициентов  $P = e^{-y}$  и  $Q = (xe^{-y} + 2y)$ :

$$P'_y = -e^{-y} = Q'_x.$$

Таким образом, по признаку — это уравнение в полных дифференциалах.

Не будем вычислять криволинейный интеграл. Но рассмотрим систему

$$\begin{cases} u'_x = e^{-y}, \\ u'_y = -xe^{-y} - 2y. \end{cases}$$

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой  $y_0$ :

$$u'_x(x, y_0) = e^{-y_0} \implies u(x, y_0) = \int e^{-y_0} dx = xe^{-y_0} + c(y_0).$$

Подставляя во второе уравнение системы, получаем

$$(xe^{-y} + c(y))'_y = -xe^{-y} - 2y,$$

$$\cancel{xe^{-y}} + c'(y) = \cancel{-xe^{-y}} - 2y,$$

$$c' = -2y,$$

$$c(y) = -y^2 + A.$$

Таким образом,  $u(x, y) = xe^{-y} - y^2 + A$ , а значит уравнение  $xe^{-y} - y^2 = C$  задает решение УПД.

*Замечание.* В примере был показан другой способ решения УПД, избегающий криволинейное интегрирование. Однако данный способ далеко не всегда оказывается возможен. По крайней мере, не всегда можно взять интеграл, чтобы найти  $u(x, y_0)$  (при плохой области интеграл по прямой будет достаточно сложен).

**Определение 13.** Функция  $\mu(x, y) \neq 0$  называется интегрирующим множителем уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , если при домножении этого уравнения на  $\mu$  получается уравнение в полных дифференциалах.

$$\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0 - \text{УПД.}$$

*Замечание.* Если  $\mu$  – интегрирующий множитель уравнения  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , причем  $\mu, P, Q \in C^1(G)$ . Тогда  $(\mu P)'_y = (\mu Q)'_x$ . Расписывая производную получаем уравнение в частных производных

$$\mu'_y P + \mu P'_y = \mu'_x Q + \mu Q'_x.$$

Решать его оказывается совсем непросто, однако чисто теоретически это является способом нахождения интегрирующего множества.

Однако стоит помнить, что нам не требуется находить общее решение. Нам достаточно лишь какое-то частное решение. Иногда его можно найти, как в следующем примере.

**Пример 2.** Рассмотрим линейное уравнение

$$y' = p(x)y + q(x),$$

где  $p \neq 0$ . Попробуем найти его интегрирующий множитель.

*Решение.* Перепишем исходное уравнение

$$(p(x)y + q(x)) dx - dy = 0.$$

Заметим, что это уравнение не является уравнением в полным дифференциалах.

Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя.

$$\mu'_y (p(x)y + q(x)) + \mu p(x) = -\mu'_x.$$

Будем искать интегрирующий множитель в виде  $\mu = \mu(x)$ . Тогда первое слагаемое слева обнулится

$$\mu p(x) = -\mu'_x,$$

$$\mu = C e^{-\int p}.$$

Так как нам нужно лишь какое-то решение, то рассмотрим любое  $C$ , например  $C = 1$ .

Таким образом,  $\mu = e^{-\int p}$  – интегрирующий множитель.

Умножим на  $\mu$  исходное уравнение

$$y' e^{-\int p} = p(x) y e^{-\int p} + q(x) e^{-\int p},$$

$$y' e^{-\int p} - p(x) y e^{-\int p} = q(x) e^{-\int p}.$$

Заметим, что в левой части стоит производная произведения  $(ye^{-\int p})$

$$(ye^{-\int p})' = q(x)e^{-\int p},$$

$$ye^{-\int p} = \int q(x)e^{-\int p} + A,$$

$$y = \left( \int q(x)e^{-\int p} + A \right) e^{\int p}.$$

Таким образом, получили общее решение линейного уравнения, а значит решение привело к верному ответу.

*Замечание.* Таким образом, мы получили еще один способ нахождения решения линейного уравнения, которым можно пользоваться на практике. Нужно запомнить интегрирующий множитель  $\mu = e^{-\int p}$ , а также свертывание в производную произведения.

## Часть II

# Уравнения, не разрешимые относительно производной

## 6 Уравнение, разрешимое относительно производной

**Пример 3.** Уравнение  $(y')^3 - 2yx = 0$  очевидно является разрешимым относительно производной:  $y' = \sqrt[3]{2yx}$ .

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение  $(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$ .

Рассмотрим отдельно решения уравнений  $y' = 2x$  и  $y' = -2x$ . Хочется сказать, что вместе эти решения дадут общее решение исходного. Однако это не так! Очевидно, что решениями являются параболы с ветвями вниз и вверх соответственно. Тогда можно посмотреть на кривую, содержащую левую ветвь одной из парабол и правую другой (Рис. 1). Это также интегральная кривая, так как она очевидно гладкая. Оказывается, что только в точке с абсциссой  $x = 0$  возможны такие интегральные кривые, так как иначе гладкость не соблюдается.

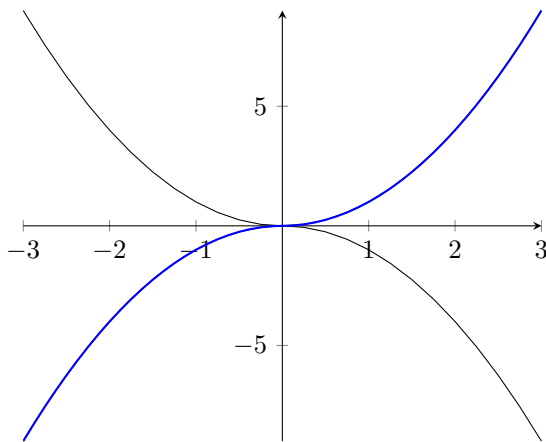


Рис. 1

## 7 Метод введения параметра

**Определение 14.** Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрически соотношениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t \in I$ , если  $\varphi(I) = D$  и  $\forall t \in I \ f(\varphi(t)) = \psi(t)$ .

*Замечание.* Заметим, что определение можно переписать немного по-другому. Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрически соотношениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , где  $t \in I$ , если  $\varphi(I) = D$  и множество  $\{(\varphi(t), \psi(t)) : t \in I\}$  является графиком функции  $f$ .

Нетрудно понять, что эти определения эквивалентны.

**Пример 5.** Зададим функцию  $f(x) = 1$ ,  $x \in [-1, 1]$  параметрически.

Например,  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ . Очевидно, что это задание удовлетворяет определению.

**Предложение.** Рассмотрим уравнение  $F(x, y') = 0$  от двух переменных  $x$  и  $y'$ . Пусть оно задает некоторую кривую  $\gamma = \{(x, y') \mid F(x, y') = 0\}$  плоскости  $xOy'$ .

Возьмем функцию  $\varphi$  такую, что эта кривая является графиком функции  $\varphi'$ .

Тогда  $F(x, \varphi'(x)) \equiv 0$ .

Идея нахождения решения такого уравнения (в котором нельзя выразить  $y'$ ) заключается в том, чтобы задать функцию  $\gamma$  параметрически

и найти  $y$  также параметрически.

Пусть  $\varphi \in C^1(\alpha, \beta)$ ,  $\varphi' \neq 0$ ,  $\psi \in C(\alpha, \beta)$ , причем эти функции задают параметрически наше уравнение  $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$ .

Тогда функция, задаваемая параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = g(t) = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c, \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta)$$

является решением уравнения  $F(x, y') = 0$ .

*Замечание.* Проверим, что функция действительно является решением.

Во-первых, проверим, что такое задание действительно является функцией, то есть каждому  $x$  соответствует ровно один  $y$ . Так как  $\varphi' \neq 0$ , то  $\varphi$  строго возрастает и тогда  $\varphi$  – биекция. Рассматривая обратную  $t = \varphi^{-1}(x)$ , получаем  $y = g \circ \varphi^{-1}$ .

Во-вторых, проверим непрерывность и дифференцируемость решения. Так как  $g \in C^1(\alpha, \beta)$  и  $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$ , то их композиция также непрерывно дифференцируема.

В-третьих, проверим, что функция обращает наше уравнение в тождество.

$$F(x, y')|_{y=g \circ \varphi^{-1}(x)} = F\left(x, (g \circ \varphi^{-1})'(x)\right).$$

Так как  $(g \circ \varphi^{-1})'(x) = g'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = (\psi(t)\varphi'(t))_{t=\varphi^{-1}(x)} \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \psi(\varphi^{-1}(x))$ , то получаем

$$F\left(x, (g \circ \varphi^{-1})'(x)\right) = F(x, \psi(\varphi^{-1}(x))) = F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0.$$

Таким образом, наша функция действительно действительно обращает выражение в нуль. А значит, эта функция является решением уравнения  $F(x, y') = 0$ .

### Пример 6.

$$e^{y'} + y' = x.$$

*Решение.* Параметризуем множество, задаваемое этим уравнением

$$\{(x, y') : e^{y'} + y' = x\}.$$

Пусть  $y' = t$ . Тогда  $x = e^t + t$ .

*Замечание* (Основное соотношение метода введения параметра).

$$dy = y'_x dx.$$

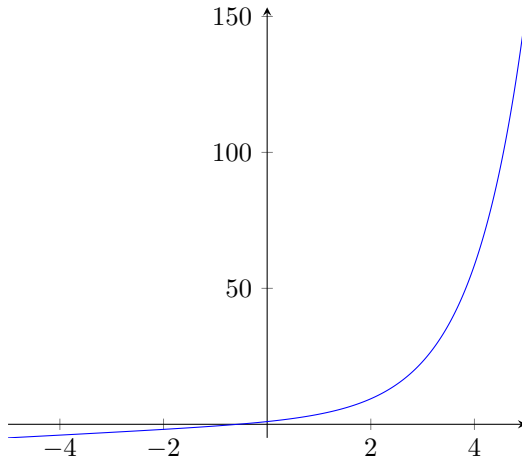


Рис. 2

Подставляя наши функции получаем

$$dy = t \cdot d(e^t + t),$$

$$dy = t \cdot (e^t + 1) dt,$$

$$y = \int t \cdot (e^t + 1) dt + c.$$

В итоге мы пришли к той же самой формуле, что и доказали ранее. А значит подстановки подходят.

Тогда следующая функция является решением

$$\begin{cases} x = e^t + t, \\ y = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 + c \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$$

**Предложение** (Общий случай метода введения параметра). Пусть есть уравнение  $F(x, y, y') = 0$ , задающее какую-то поверхность  $\sigma = ((x, y, y') | F(x, y, y') = 0)$ .

Пусть  $\begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v), \\ y' = \chi(u, v) \end{cases}$  — параметризация  $\sigma$ .

Подставим эту параметризацию в основное соотношение  $dy = y'_x dx$ .

$$\psi'_u du + \psi'_v dv = \chi(u, v) (\varphi'_u du + \varphi'_v dv).$$

Пусть  $v = g(u, C)$  – решение этого уравнения.

Тогда получаем  $\begin{cases} x = \varphi(u, v = g(u, C)), \\ y = \psi(u, v = g(u, C)) \end{cases}$  – параметризация решений исходного уравнения.

**Пример 7.**

$$xy' - y - \frac{y'}{2} \ln \frac{y'}{2} = 0.$$

*Решение.* Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = uv - \frac{v}{2} \ln v. \end{cases}$$

Тогда подставляя в основное соотношение, получаем

$$vdu + \left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = vdu,$$

$$\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) dv = 0,$$

При  $\left(u - \frac{1}{2} \ln \frac{v}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$ , получаем  $v = 2e^{2u-1}$ . Тогда  $y = e^{2x-1}$ .

При  $dv = 0$ , получаем  $y = cx - \frac{c}{2} \ln \frac{c}{2}$ .

*Замечание.* Важно помнить, что это могут быть не все решения уравнения!!! Такой случай уже был рассмотрен в примере 4.

## 8 Задача Коши для уравнения, не разрешенного относительно производной

*Замечание.* Мы уже говорили о решении задачи Коши для нормального уравнения. Однако в силу того, что уравнение  $F(x, y, y') = 0$  задает не одно поле направлений, а целую совокупность, оказывается, что через одну точку могут проходить несколько интегральных кривых, однако под разными углами. Именно поэтому постановка задачи Коши для уравнения, не разрешенного относительно  $y'$ , требует дополнительного начального условия на  $y'$ .



**Определение 15.** Задачей Коши для уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называется задача нахождения его решения, удовлетворяющего условиям  $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$  (Под  $y'_0$  понимается какое-то числовое значение, а не производная. Такое обозначение используется для визуального соответствия.)

**Предложение.** Чтобы задача Коши могла иметь решение, начальные данные должны быть согласованы, то есть  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ .

**Теорема 3** (Существование и единственность решения ЗК для уравнения, не разрешенного относительно производной). Пусть  $F \in C^1(G)$ , где  $G \subset \mathbb{R}^3_{x,y,y'}$  – область. Пусть также точка  $(x_0, y_0, y'_0) \in G$  такая, что  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$ ,  $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $x_0$  существует единственное решение задачи  $F(x, y, y') = 0$  при условиях  $\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases}$

*Доказательство.* TODO: PROOF

**Определение 16.** Решение  $\varphi$  уравнения  $F(x, y, y') = 0$  на  $\langle a, b \rangle$  называется особым, если для любой точки  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  найдется решение  $\psi$  такое, что

## Часть III

# Системы дифференциальных уравнений

## 9

## 10 Вспомогательные

**Определение 17.** Под нормой вектора  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  будем понимать  $|x| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$ .

**Определение 18.** Нормой матрицы  $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  будем называть  $|A| = \max_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} |a_{ij}|$ .

**Лемма 5.** Пусть  $f \in C([a, b])$ . Тогда

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt \right| &= \max_{i=1, \dots, n} \left| \int_a^b f_i(t) dt \right| \leq \max_{i=1, \dots, n} \int_a^b |f_i(t)| dt \leq \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

**Лемма 6.** Пусть  $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$  и  $B \in \text{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ . Тогда  $|A \cdot B| \leq n \cdot |A| \cdot |B|$ .

*Доказательство.* Вспомним, как вводилось определение произведения матриц:  $[A \cdot B]_{i,j} = \sum_{l=1}^n [A]_{i,l} \cdot [B]_{l,j}$ . Тогда перейдем к нормам

$$|[A \cdot B]_{i,j}| = \left| \sum_{l=1}^n [A]_{i,l} \cdot [B]_{l,j} \right| \leq \sum_{l=1}^n |[A]_{i,l}| \cdot |[B]_{l,j}| \leq \sum_{l=1}^n |A| \cdot |B| = n \cdot |A| \cdot |B|.$$

**Определение 19.** Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условию Липшица на множестве  $D$ , если  $\exists L : \forall r_1, r_2 \in D \implies |f(r_2) - f(r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$ . И пишут  $f \in \text{Lip}(D)$ .

**Пример 8.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{x}$  на отрезке  $D = [\frac{1}{2}, 1]$ .

$$|f(r_2) - f(r_1)| = |f'(\xi)| |r_2 - r_1| \leq \underbrace{\left| \max_{[\frac{1}{2}, 1]} f'(\xi) \right|}_L |r_2 - r_1|.$$

Таким образом, функция  $f(x) = \sqrt{x}$  удовлетворяет условию Липшица на отрезке  $D = [\frac{1}{2}, 1]$ .

**Предложение.** Этот пример наводит на идею того, что всегда, когда производная ограничена, мы можем найти константу Липшица как

$$L = \left| \max_{[\frac{1}{2}, 1]} f'(\xi) \right|.$$

**Предложение.** На самом деле можно показать, что  $C^1[a, b] \subset Lip[a, b] \subset C[a, b]$ .

**Пример 9.** Рассмотрим все ту же функцию  $f(x) = \sqrt{x}$ , но на множестве  $D = [0, 1]$ . Покажем, что она не Липшицева.

*Доказательство.* Пусть  $f \in Lip D$ , то есть нашлось такое  $L$ , что

$$|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leq L|r_2 - r_1|.$$

Возьмем в качестве точки  $x_1$  точку 0, а точку  $x_2$  устремим к нулю

$$\sqrt{x_2} \leq L|x_2| \implies \infty \xleftarrow{x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_2}} \leq L \xrightarrow{x_2 \rightarrow 0} L,$$

что невозможно, а значит исходное предположение неверно и функция не Липшицева.

*Замечание.* Однако понятно, что, отступив на чуть-чуть от нуля в множестве  $D$ , функция сразу станет Липшицевой. Именно поэтому появляется понятие локальной Липшицевости.

**Определение 20.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условию Липшица локально на множестве  $D$ , если  $\forall r \in D \implies \exists U(r) : f \in Lip(D \cap U)$ . И пишут  $f \in Lip_{loc} D$ .

**Пример 10.** Несложно показать, что  $f(x) = \sqrt{x}$  на множестве  $D = (0, 1]$  удовлетворяет условию локальной Липшицевости, но не глобальной.

**Определение 21.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}_{t,r}^n$  удовлетворяет условию Липшица по  $r$  на множестве  $D$ , если  $\exists L : \forall (t, r_1), (t, r_2) \in D \implies |f(t, r_2) - f(t, r_1)| \leq L|r_2 - r_1|$ . И пишут  $f \in Lip_r D$ .

**Определение 22.**  $f : D \rightarrow \mathbb{R}_{t,r}^n$  удовлетворяет условию Липшица по  $r$  локально на множестве  $D$ , если  $\forall (t, r) \in D \implies \exists U((t, r)) : f \in Lip_r(D \cap U)$ . И пишут  $f \in Lip_{r,loc} D$ .

**Пример 11.** Рассмотрим  $f(t, r) = \frac{1}{t} + \frac{1}{r}$  на множестве  $D = (0, +\infty) \times [\frac{1}{2}, 1]$ .

Посмотрим на разность значений в разных точках  $(t_1, r_1), (t_2, r_2)$ :

$$|f(t_2, r_2) - f(t_1, r_1)| = \left| \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right|$$

Понятно, что при очень маленьких  $t_1, t_2$  разность оказывается очень большой, а значит мы ничем не ограничим сверху. То есть глобальное условие Липшица не выполнено.

Однако локально

$$\left| \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right| \leq \left| \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2} \right| + \left| \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1} \right| \leq \mu_1 |t_2 - t_1| + \mu_2 |r_2 - r_1| \leq \underbrace{\max \langle \mu_1, \mu_2 \rangle \cdot 2}_L |(t_1, r_1) - (t_2, r_2)|$$

она удовлетворяет условию Липшица.

**Пример 12.** Рассмотрим  $f(t, r) = \sqrt{t}\sqrt{r}$  на множестве  $[0, +\infty) \times (0, 1)$ .

Локальному условию Липшица она не удовлетворяет, рассматривая точку 0.

Однако по  $r$  она локально Липшицева:

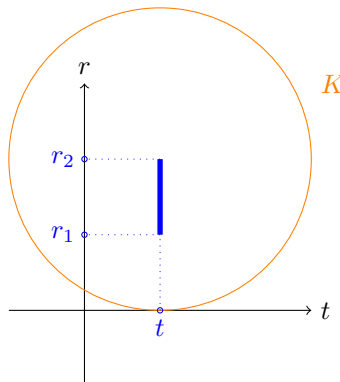
$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| = |\sqrt{r_2} - \sqrt{r_1}| \leq L |r_2 - r_1|,$$

где в качестве  $L$  возьмем максимум производной корня.

**Лемма 7** (Достаточное условие для локальной Липшицевости по  $r$ ). Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ . А также  $f'_r \in \text{Mat}_{m,n}(C(G))$ . Тогда  $f \in \text{Lip}_{r, \text{loc}}(G)$ .

Кроме того, если  $K$  – выпуклый компакт, а  $M = \max_K |f'_r|$ , то  $f \in \text{Lip}_r K$  с константой Липшица  $L = nM$ .

*Доказательство.* Пусть  $K$  – выпуклый компакт.



Рассмотрим разность значений:

$$|f(t, r_2) - f(t, r_1)| = \Delta.$$

Так как  $K$  – выпуклое, то отрезок тоже принадлежит  $K$ .

Рассмотрим функцию  $g(s) = f(t, r_1 + s(r_2 - r_1))$ , определенную на  $[0, 1]$ . Заметим, что  $g$  непрерывная, как композиция сужения  $f$  на  $r$  ( $h(r) = f(t, r)$ ) и линейной там же ( $r_1 + s(r_2 - r_1)$ ).

Тогда по интегральной теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \Delta = |g(1) - g(0)| &= \left| \int_0^1 g'(s) ds \right| = \left| \int_0^1 h'(r_1 + s(r_2 - r_1)) \cdot (r_1 + s(r_2 - r_1))' ds \right| = \\ &= \left| \int_0^1 f'_r(r_1 + s(r_2 - r_1)) \cdot (r_2 - r_1) ds \right| \leq \int_0^1 n \cdot |f'_r| \cdot |r_2 - r_1| ds \leq \\ &\leq n \cdot \underbrace{\max_K |f'_r|}_M \cdot |r_2 - r_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, Лишицева константа равна  $n \cdot M$ .

Рассмотрим область  $G$ . Вокруг каждой точки можем рассмотреть брус  $\Pi$ , который является компактом, а значит на нем у нас есть глобальная Липшицевость. То есть мы для каждой точки нашли окрестность, в которой есть глобальная Липшицевость, а значит по определению получили локальную Липшицевость на  $G$ .

**Лемма 8** (Достаточное условие для Липшицевости по  $r$ ). Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f \in Lip_{r,loc} K$ , где  $K \in G$  – компакт.

Тогда  $f$  глобально Липшицева на  $K$ .

*Доказательство.* Пусть  $f \notin Lip_r K$ , то есть

$$\forall L \quad \exists (t, r_2), (t, r_1) \in K : |f(t, r_2) - f(t, r_1)| > L |r_2 - r_1|.$$

Найдем для каждого натурального числа  $L$  пару таких точек  $(t_n, r_n), (t_n, \tilde{r}_n)$ . Так как  $K$  компакт в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , то оно секвенциальный компакт, а значит можно выделить сходящиеся подпоследовательности.

Пусть для первой последовательности есть  $\{(t_{k_s}, r_{k_s})\}_{s=1}^{\infty} : (t_{k_s}, r_{k_s}) \rightarrow (t, r)$ . Выберем во второй последовательности с теми же номерами сходящуюся подпоследовательность  $\{(t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}})\}_{l=1}^{\infty} : (t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}}) \rightarrow (t, \tilde{r})$ .

1. Пусть  $r = \tilde{r}$ .

Так как  $f \in Lip_{r,loc}K$ , то есть на окрестности  $U(t, r)$   $f \in Lip_r U$ . Пусть условие Липшица выполнено с константой  $L$ , то есть

$$\forall (\tau, \rho_1), (\tau, \rho_2) \in D \implies |f(\tau, \rho_2) - f(\tau, \rho_1)| \leq L|\rho_2 - \rho_1|.$$

Так как начиная с какого-то номера все элементы наших последовательностей лежат в окрестности  $U(t, r)$ , то, выбирая  $l$  так, чтобы  $L_{s_l} > L$ , получаем противоречие нелипшицовости  $K$ , но липшицовости на  $U$ .

2. Пусть  $r \neq \tilde{r}$ .

$$\left| f(t_{k_{s_l}}, r_{k_{s_l}}) - f(t_{k_{s_l}}, \tilde{r}_{k_{s_l}}) \right| > L_{s_l} \left| r_{k_{s_l}} - \tilde{r}_{k_{s_l}} \right|.$$

Переходя к пределу при  $l \rightarrow \infty$ , получаем

$$|f(t, r) - f(t, \tilde{r})| \geq \infty,$$

что невозможно. Снова пришли к противоречию.

А значит исходное предположение было неверным и на самом деле  $f \in Lip_r K$ .

## 11 Теоремы о существовании и единственности

**Определение 23.** Функция  $\varphi : E = \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  — решение интегрального уравнения  $r(t) = r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, r(\tau))d\tau$ , если

1. Она непрерывна:  $\varphi \in C(E)$ ,
2. Она обращает уравнение в тождество  $\varphi(t) \equiv r_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$ .

**Лемма 9** (О равносильном интегральном уравнении). Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Тогда  $\varphi$  — решение задачи Коши  $r' = f(t, r)$ ,  $r(t_0) = r_0$  на  $E = \langle a, b \rangle$  тогда и только тогда, когда  $\varphi$  — решение интегрального уравнения.

*Доказательство.* "Необходимость":

Так как  $\varphi$  — решение задачи Коши, то  $\varphi \in C^1(E)$ , а значит первый пункт

определения решения интегрального уравнения выполнен. Второй же получаем просто проинтегрировав дифференциальное уравнение. "Достаточность":

Так как интеграл от непрерывной функции – непрерывно дифференцируем, то первый пункт определения решения задачи Коши получили. А второй получается дифференцируемостью второго пункта определения решения интегрального уравнения.

**Лемма 10.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Пусть также  $\varphi_+, \varphi_-$  – решения задачи Коши  $r' = f(t, r)$ ,  $r(t_0) = r_0$  на  $[t_0, b)$  и  $(a, t_0]$  соответственно.

Тогда  $\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_-(t), & t \in (a, t_0] \\ \varphi_+(t), & t \in [t_0, b) \end{cases}$  – решение этой же задачи Коши на

интервале  $(a, b)$ .

*Доказательство.* Очевидно, что функция остается непрерывно дифференцируемой и обращает уравнение в тождество.

**Лемма 11** (Gronwall). Пусть  $\varphi \in C(E)$ , где  $E = \langle a, b \rangle$ . Пусть также

$$\lambda, \mu \geq 0 \text{ и } \forall t \in E \quad 0 \leq \varphi(t) \leq \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|.$$

Тогда  $\varphi(t) \leq \lambda e^{\mu|t-t_0|}$ .

*Доказательство.* Заметим, что в правой части цепочки неравенств на самом деле стоит решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения.

Пусть  $t \geq t_0$ .

$$1. \text{ Пусть } \lambda > 0. \text{ Обозначим } v(t) = \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau \right|.$$

Тогда  $v'(t) = \mu \varphi(t) \leq \mu \cdot v(t)$ .

Так как  $\lambda > 0$ , то и  $v > 0$ . Значит можем поделить на  $v$ .

$$\frac{v'(t)}{v(t)} \leq \mu,$$

$$\int_{t_0}^t \frac{v'(\tau)}{v(\tau)} d\tau \leq \int_{t_0}^t \mu d\tau,$$

$$\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \leq \mu(t - t_0),$$

$$v(t) \leq \underbrace{v(t_0)}_{\lambda} e^{\mu(t-t_0)}.$$

Таким образом,  $\varphi(t) \leq v(t) \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)}$ .

2. Пусть  $\lambda = 0$ .

$$\varphi(t) \leq \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau < \underbrace{\delta}_{>0} + \mu \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Устремим  $\delta$  к нулю для каждого  $t$ :  $\varphi(t) \leq 0$ , что и хотелось доказать.

При  $t < t_0$  сделаем замену  $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t)$ .

$$\psi(2t_0 - t) \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^{2t_0-t} \psi(s) ds$$

По доказанному (так как  $2t_0 - t > t_0$ ) получаем  $\varphi(t) = \psi(2t_0 - t) \leq \lambda e^{\mu(2t_0-t-t_0)}$ .

**Определение 24.** Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ . Пусть  $\Pi = \{|t - t_0| \leq a, |r - r_0| \leq b\}$  — брус с центром в точке  $(t_0, r_0)$ , вписанный в данную область (такой есть в силу открытости области).

Пусть  $\|f\| = \max_{\Pi} |f|$ . Тогда отрезок  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , где  $h = \min \left\{ a, \frac{b}{\|f\|} \right\}$  — называется отрезком Пеано, соответствующим  $t_0, r_0$ .

*Замечание.* Рассмотрим, что имеется в виду, на простом двумерном примере  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  бруса. Для простоты рассмотрим случай бруса с центром в начале координат. Пусть есть какое-то решение  $\varphi$ , проходящее внутри бруса. Тогда

$$|\varphi(t)| = \left| \int_0^t \varphi'(t) dt \right| \leq \int_0^t |\varphi'(t)| dt \leq \int_0^t \|f\| dt = \|f\| t.$$

То есть мы получили, что наше решение ограничено внутри бруса двумя лучами. Кардинально появляется два случая: лучи пересекают горизонтальное ребро бруса или вертикальное (см. Рис. 3). В первом случае мы можем уверенно утверждать, что наше решение лежит внутри бруса на отрезке до пересечения луча с брусом. А во втором — на всем отрезке бруса. Вот эти отрезки и называются отрезками Пеано  $[0, h]$ , где в первом случае  $h = \frac{b}{\|f\|}$ , а во втором —  $h = a$ .



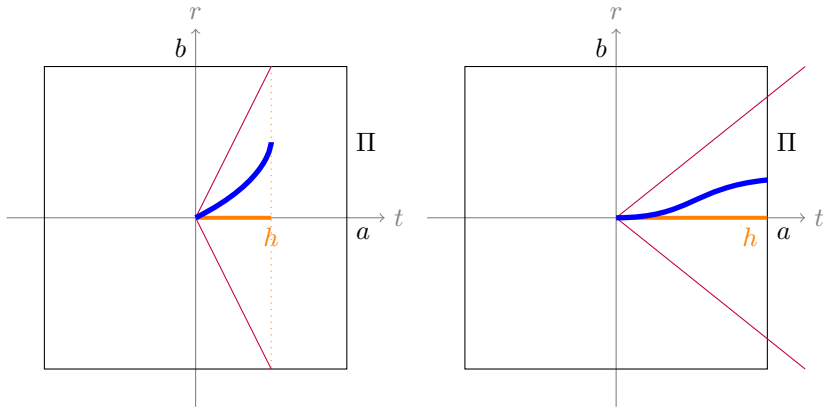


Рис. 3. Иллюстрация к определению отрезка Пеано

**Теорема 4** (Пеано о существовании решения). Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ .

Тогда задача Коши имеет решение на отрезке Пеано.

*Замечание.* Без доказательства.

**Теорема 5** (Пикара о существовании и единственности решения). Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$ ,  $(t_0, r_0) \in G$ .

Тогда

1. На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,
2. На любом интервале  $(a, b)$  решение задачи Коши единственно.

*Доказательство.* Не умоляя общности, рассмотрим в качестве  $(t_0, r_0)$  точку начала координат. Будем искать решение при  $t \in [0, h]$ , где  $h = \min \left\{ a, \frac{b}{\|f\|} \right\}$  из определения отрезка Пеано.

Рассмотрим последовательность, заданную рекуррентно

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 0, \\ \varphi_m(t) &= \int_0^t f(\tau, \varphi_{m-1}(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

*Замечание.* Укажем план нашего доказательства:

1. Докажем, что последовательность определена корректно, то есть  $\varphi_m \in C[0, h]$  и  $|\varphi_m(t)| \leq \|f\|t$ ,

2. Докажем равномерную сходимость последовательности, то есть  $\exists \varphi : \varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi$ ,
3. Докажем, что полученное  $\varphi$  является решением интегрального уравнения, связанного с задачей Коши,
4. Докажем единственность.

•

1. Докажем методом математической индукции:

При  $m = 0$ :  $\varphi_0$  определена на  $[0, h]$ .

Пусть  $\varphi_m \in C([0, h])$  и  $|\varphi_m(t)| \leq \|f\|t$ .

Рассмотрим  $\varphi_{m+1}(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau$ . Так как  $t \leq h \leq \frac{b}{\|f\|}$ , то  $|\varphi_m| \leq b$ . Тогда  $f(\tau, \varphi_m(\tau))$  есть композиция непрерывных функций, а значит она интегрируема и функция  $\varphi_{m+1}$  задана корректно на  $[0, h]$ , причем к тому же она непрерывна.

$$|\varphi_{m+1}| \leq \left| \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau))d\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau))| d\tau \leq \|f\| \int_0^t d\tau = \|f\|t.$$

Таким образом, индукционный переход выполняется, а значит наша последовательность задана корректно для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Докажем, что  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  — фундаментальная, то есть

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 : \quad \forall m \geq n_0, k \in \mathbb{N} \implies \|\varphi_m - \varphi_{m+k}\| < \varepsilon.$$

На самом деле будем доказывать более сильное утверждение, а именно

$$\forall t \in [0, h] \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{N} \quad \exists L : \quad |\varphi_m(t) - \varphi_{m+k}(t)| \leq \frac{\|f\|L^m \cdot t^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Воспользуемся методом математической индукции по  $m$ .

При  $m = 0$ :

$$|\varphi_0(t) - \varphi_k(t)| = \left| \int_0^t f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau))d\tau \right| \leq t \cdot \|f\|.$$

Пусть при некотором  $m$  утверждение верно, докажем для  $m + 1$

$$\begin{aligned} |\varphi_{m+1}(t) - \varphi_{m+1+k}(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau)) d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi_{m+k}(\tau))| d\tau \quad \boxed{\leq} \end{aligned}$$

Так как у нас есть локальная Липшицевость, то можем найти на компакте, а именно на нашем брусе,  $L$ , что

$$\begin{aligned} \boxed{\leq} \int_0^t L \cdot |\varphi_m(\tau) - \varphi_{m+k}(\tau)| d\tau &\leq \frac{\|f\| L^{m+1}}{(m+1)!} \int_0^t \tau^{m+1} d\tau = \\ &= \frac{\|f\| L^{m+1}}{(m+2)!} t^{m+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, по Критерию Коши, есть  $\varphi \in C([0, h])$ , что  $\varphi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \varphi$ .

3. Рассмотрим интегральное уравнение, равносильное задаче Коши.

$$\varphi_{m+1} = \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau.$$

при  $m \rightarrow \infty$

$$\varphi(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t f(\tau, \varphi_m(\tau)) d\tau - \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right| &\leq \int_0^t |f(\tau, \varphi_m(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq L \int_0^t |\varphi_m(\tau) - \varphi(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq L \cdot \|\varphi_m - \varphi\| \cdot h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$ , а значит  $\varphi$  – решение интегрального уравнения, а тогда и задачи Коши.

4. Пусть есть два разных решения  $\psi_1, \psi_2$  задачи Коши на отрезке  $[a, b]$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} |\psi_1(t) - \psi_2(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau, \psi_1(\tau))d\tau - \int_0^t f(\tau, \psi_2(\tau))d\tau \right| \leq \\ &\leq \int_0^t |f(\tau, \psi_1(\tau)) - f(\tau, \psi_2(\tau))| d\tau \leq \end{aligned}$$

Рассмотрим графики  $\gamma_1 = \psi_1|_{[\alpha, \beta]}$  и  $\gamma_2 = \psi_2|_{[\alpha, \beta]}$ . Тогда  $\gamma_1 \cap \gamma_2$  – компакт. А значит из локальной Липшицевости на компакте можем найти константу  $\mu$ , для которой

$$\leq \int_0^t \mu |\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)| d\tau.$$

А значит получили по лемме Gronwall  $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \leq 0$ , то есть на самом деле  $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \equiv 0$  на  $[\alpha, \beta]$ . Так как это утверждение выполнено для любых  $\alpha, \beta$  из интервала  $(a, b)$ , то на самом деле  $|\psi_1(t) - \psi_2(t)| \equiv 0$  на  $(a, b)$ .

Таким образом, два решения совпали.

**Следствие 1** (Теорема Пикара с простыми условиями). Пусть  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $(t_0, r_0) \in G$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ , причем  $f'_r \in \text{Mat}_n(C(G))$ . Тогда

1. На отрезке Пеано существует решение задачи Коши,
2. На любом интервале  $(a, b)$  решение задачи Коши единственно.

А также

$$\|\varphi - \varphi_m\| \leq \frac{\|f\| \cdot (n\|f\|)^n \cdot h^{n+1}}{(n+1)!}$$

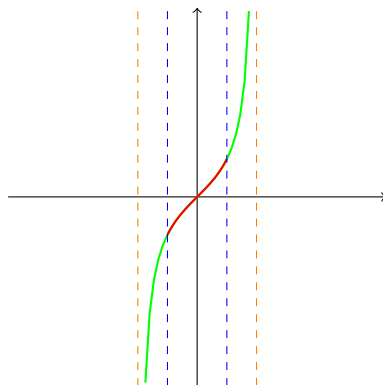
*Доказательство.* Из достаточного условия локальной Липшицевости прилетают все ограничения. А вторая часть из доказательства, устремляя  $k$  к бесконечности.

## 12 Продолжение решений

*Замечание.* Теорема Пикара дает представление только о решении на отрезке Пеано, однако этот отрезок может оказаться очень маленьким и не давать необходимого понимания о дифференциальном уравнении. Поэтому хочется расширять решение за границы отрезка Пеано, причем понимая до куда мы это действительно можем сделать.

**Пример 13.**

$$x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 0.$$



*Решение.* Очевидно, что решение уравнения — это  $x = \operatorname{tg} t$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Однако вполне очевидно, что решение можно продолжить до интервала  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Причем дальше продолжать уже не получится, то есть это максимальное решение.

**Определение 25.** Решение  $\varphi$  называется максимальным решением системы, если не существует другого решения  $\psi$  такого, что  $\varphi$  является сужением  $\psi$ .

**Теорема 6** (критерий продолжимости). Пусть  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  — область, а  $\varphi$  — решение на  $(a, b)$ . Тогда  $\varphi$  продолжимо на  $(a, c)$ , где  $c > b$  тогда и только тогда, когда  $(b, \varphi(b-0)) \in G$ .

*Доказательство.* Так как  $\varphi$  непрерывно, то  $\varphi(b-0) = \varphi(d)$ . Тогда, так как каждая интегральная кривая должна лежать в  $G$ , то и точка  $(d, \varphi(b))$  лежит в  $G$ .

Обратно. Решим задачу Коши с той же системой, но с начальным условием, что в точке  $b$  значение равно  $\varphi(b-0)$ . Тогда по теореме Пеано, есть

отрезок  $[b, b + h]$  (на самом деле и левая часть отрезка тоже есть, но нам она неважна), на котором существует решение. Тогда по лемме о стыковке решений получим решение исходной задачи Коши на  $(a, b + h]$ , что является продолжением.

**Следствие 2.** Пусть  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область, а  $\varphi$  – максимальное решение задачи Коши. Тогда область решения – обязательно интервал.

*Доказательство.* Пусть решение – не интервал, а, например,  $(a, b]$ . Тогда точка  $b$  лежит в  $G$ , а значит по критерию можем продолжить решение.

**Теорема 7** (О существовании единственного максимального решения). Пусть  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область. Тогда

1. Существует максимальное решение  $\varphi$  задачи Коши

$$r' = f(t, r), \quad r(t_0) = r_0.$$

2. Любое другое решение этой задачи Коши является сужением  $\varphi$ .

*Доказательство.* Рассмотрим множество  $s$  всех решений этой задачи Коши (заданных на любых промежутках). Пусть  $a = \inf_{\psi \in s} \inf \text{dom } \psi$ ,  $b = \sup_{\psi \in s} \sup \text{dom } \psi$ , то есть это максимальные из левых и правых границ.

Рассмотрим точку  $t \in [t_0, b)$ . Из определения супремума найдется  $\psi : \sup \text{dom } \psi > t$ . Тогда определим в этой точке  $\varphi(t) = \psi(t)$ . Таким образом, в каждой точке  $t \in [t_0, b)$  мы задали какое-то значение функции  $\varphi(t)$ .

*Замечание.* Однако может оказаться, что таких функций  $\psi$  несколько. Тогда непонятно, каким образом выбирать значение для  $\varphi$ . Однако по второму пункту теоремы Пикара мы знаем, что на пересечении областей определения этих решений они совпадают. А точка  $t$  точно лежит на этом пересечении, а значит все значения этих  $\psi_i$  в точке  $t$  одинаковы.

Аналогично задаем  $\varphi$  на  $(a, t_0]$ .

Тогда, так как в точке  $t \in (a, b)$  и ее какой-то окрестности  $\varphi \equiv \psi$ , то в силу того, что  $\psi$  – решение, оказывается, что  $\varphi$  – непрерывно дифференцируема в точке  $t$  и при этом обращает уравнение в тождество. А значит  $\varphi$  – решение.

Почему максимальное решение? Очевидно, что все решения из  $s$  являются сужением  $\varphi$ , так как по второму пункту теоремы Пикара два решения  $\varphi$  и  $\psi$  совпадают на пересечении областей определения, которое на самом деле есть область  $\psi$ , а это пересечение есть  $A$  значит, по определению,  $\varphi$  – максимальное решение.

**Теорема 8** (О выходе интегральной кривой за пределы любого компакта). Пусть  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{r,loc}$ ,  $G \subset \mathbb{R}_{t,r}^{n+1}$  – область,  $\varphi$  – максимальное решение, заданное на  $(a, b)$ ,  $K \subset G$  – компакт. Тогда существует  $\Delta$ , что  $\forall t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b)$   $(t, \varphi(t)) \notin K$  (то есть фактически любое решение точно выходит из компакта).

*Доказательство.* Введем расстояние  $\rho = \rho(K, \partial G) > 0$ .

Рассмотрим брусы  $\Pi(t', r') = \{(t, r) \in G \mid \|(t', r') - (t, r)\| \leq \frac{\rho}{2}\}$  и множество таких брусков вокруг каждой точки компакта  $K_\rho = \bigcup_{(t', r') \in K} \Pi(t', r')$ .

Тогда  $K_\rho$  – компакт, причем  $K_\rho \subset G$ .

Рассмотрим произвольную точку  $(t_0, r_0) \in K$ . Посмотрим на величину  $h$  из отрезка Пеано

$$h = \min \left\{ \frac{\rho}{2}, \frac{\frac{\rho}{2}}{\|f\|_{\Pi(r_0, t_0)}} \right\} \geq \min \left\{ \frac{\rho}{2}, \frac{\frac{\rho}{2}}{\|f\|_{K_\rho}} \right\} = \delta.$$

По теореме Пеано существует решение задачи Коши на отрезке  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ .

Предположим, что утверждение теоремы неверно, то есть

$$\forall \Delta \quad \exists t \in (a, a + \Delta) \cup (b - \Delta, b) : \quad (t, \varphi(t)) \in K.$$

Не теряя общности, будем рассматривать случай, в котором  $t \in (b - \Delta, b)$ .

Положим  $t_0 = b - \frac{\delta}{2}$ . Тогда существует решение  $\psi$  задачи Коши на отрезке  $[b - \frac{\delta}{2} - \delta, b - \frac{\delta}{2} + \delta] = [b - \frac{3\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}]$ .

Рассмотрим функцию

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (a, b), \\ \psi(t), & t \in [b - \frac{3\delta}{2}, b + \frac{\delta}{2}]. \end{cases}$$

При этом  $\chi(t)$  тоже оказывается решением, однако уже на промежутке  $(a, b + \frac{\delta}{2}]$ . Но  $\varphi$  – максимальное решение по условию, а значит такого быть не может.

Таким образом, предположение неверно, и решение выходит за границы компакта.

**Теорема 9** (о системе, сравнимой с линейной). Пусть  $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_{loc,r}$ , а также

$$\exists u, v \in C(a, b) : \quad |f(t, r)| \leq v(t) + u(t)|r| \quad \forall t \in (a, b).$$

Тогда максимальное решение уравнения  $r' = f(t, r)$  задано на интервале  $(a, b)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\varphi$  – максимальное решение на интервале  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ .

Рассмотрим  $t_0 \in (\alpha, \beta)$ . Запишем равносильное задаче Коши интегральное уравнение

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \\ |\varphi(t)| &\leq |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(\tau, \varphi(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t v(\tau) + u(\tau) |r| d\tau = \\ &= |\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t u(\tau) |r| d\tau.\end{aligned}$$

Так как  $u, v$  непрерывны, то они ограничены на  $(\alpha, \beta)$ . Пусть  $|\varphi(t_0)| + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \leq \lambda$ ,  $u(t) \leq \mu$ .

$$|\varphi(t)| \leq \lambda + \mu \int_{t_0}^t |\varphi(\tau)| d\tau.$$

По лемме Гронуолла

$$|\varphi(t)| \leq \lambda e^{\mu(t-t_0)} \leq \lambda e^{\mu(\beta-t_0)} = C.$$

Рассмотрим компакт  $K = [t_0, \beta] \times [-C, C]^n$ . Заметим, что интегральная кривая  $\varphi$  не выходит из этого компакта, что невозможно по предыдущей теореме. Получили противоречие, а значит на самом деле  $\varphi$  – решение на  $(a, b)$ .

**Следствие 3.** Пусть  $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(G \rightarrow \mathbb{R}^n) \cap Lip_r$ .

Тогда максимальное решение задано на  $(a, b)$ .



## Часть IV

# Линейные системы дифференциальных уравнений

## 13 Линейная система и ее решения

**Определение 26.** Система уравнений  $r' = P(t) \cdot r + q(t)$ , где  $P \in \text{Mat}_n(C(a, b) \rightarrow \mathbb{C})$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n)$ , называется линейной системой дифференциальных уравнений.

## 14

**Теорема 10.** Пусть  $P \in \text{Mat}_n(C(a, b))$ . Тогда общее решение линейной однородной системы  $r' = P(t)r$  есть  $n$ -мерное линейное пространство.

*Доказательство.* Линейность этого пространства очевидна: сумма лежит в нем, умножение на скаляр – тоже.

Решим  $n$  задач Коши для этой систем с условиями:

$$r(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, r(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, r(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

По теореме о существовании решения, существуют  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  – решения этих задач Коши.

Рассмотрим их Вронскиан:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, он не равен нулю, а значит эти решения линейно независимы.

Пусть теперь  $\varphi$  – общее решение исходной системы уравнений, причем

$$\varphi(t_0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим функцию  $\phi(t) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t)$ . Заметим, что она также является решением системы. Рассмотрим его значение в точке  $t_0$

$$\phi(t_0) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t_0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \varphi(t_0).$$

А значит по теореме о совпадении решений получаем, что из совпадения в одной точке решений системы следует совпадение этих решений. А значит решение разложилось в линейную комбинацию  $\varphi_i$ . То есть  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  – базис размерности  $n$ .

**Определение 27.** Фундаментальная система решения (ФСР) есть базис в пространстве решений.

**Определение 28.** Матрица  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  для фундаментальной системы решений  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  называется фундаментальной матрицей.

**Лемма 12** (о множестве фундаментальных матриц). Пусть  $\Phi$  – фундаментальная матрица для линейной однородной системы.

Тогда  $\{\Phi \cdot M \mid M \in M_n(\mathbb{C}) \& \det M \neq 0\}$  – множество всех фундаментальных матриц для этой системы.

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{A}$  – множество фундаментальных решений, а  $\mathcal{B} = \{\Phi \cdot M \mid M \in M_n(\mathbb{C}) \& \det M \neq 0\}$ .

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  Пусть  $\Psi \in \mathcal{A}$ .

$$\Psi_{\psi_i - \text{решение}} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \left( \sum_{k=1}^n c_{1k} \phi_k, \sum_{k=1}^n c_{2k} \phi_k, \dots, \sum_{k=1}^n c_{nk} \phi_k \right).$$

Тогда, обозначая  $M = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$ , получаем

$$\Psi = \Phi \cdot M.$$

При этом осталось показать, что определитель  $M$  не обнуляется.

$$\underbrace{\det \Psi}_{\neq 0} = \det \Phi \cdot M = \underbrace{\det \Phi}_{\neq 0} \cdot \det M \implies \det M \neq 0.$$

$\boxed{\mathcal{B} \subset \mathcal{A}}$  Пусть  $\det M \neq 0$ . Рассмотрим  $\Psi = \Phi \cdot M \in \mathcal{B}$ . Так как  $\psi_i$  есть линейная комбинация  $\phi_k$ , то  $\psi_i$  – решения.

$$W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) = \det \Psi = \det \Phi \cdot \det M \neq 0.$$

Таким образом эти решения линейно независимы, а значит являются фундаментальной системой решений.

Таким образом, получаем вложения  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  и  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ . А значит  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

**Лемма 13** (об овеществлении). Пусть  $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$  – фундаментальная система решений в комплексном варианте, причем  $\varphi_1 = \overline{\varphi_2}$ .

Тогда  $\{\operatorname{Re} \varphi_1\}, \{\operatorname{Im} \varphi_1\}, \varphi_3, \dots, \varphi_n$  тоже фундаментальная система решений.

*Доказательство.* Выразим вещественную и мнимую части через  $\varphi_{i=1}^n$ :

$$\operatorname{Re} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 + \overline{\varphi_1}}{2} = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2,$$

$$\operatorname{Im} \varphi_1 = \frac{\varphi_1 - \overline{\varphi_1}}{2i} = \frac{1}{2i}\varphi_1 - \frac{1}{2i}\varphi_2.$$

Тогда можно записать  $(\operatorname{Re} \varphi_1), \{\operatorname{Im} \varphi_1\}, \varphi_3, \dots, \varphi_n = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n) \cdot$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{bmatrix}.$$

При этом определитель матрицы равен  $-\frac{1}{2i} \neq 0$ , а значит это тоже ФСР по предыдущей лемме.

## 15 Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами

**Определение 29.** Систему  $r' = Ar$ , где  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , будем называть линейной однородной системой с постоянными коэффициентами.

**Лемма 14.** Пусть  $\lambda \in \text{spec} A$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_s$  – Жорданова цепочка, соответствующая  $\lambda$ .

Тогда  $e^{\lambda t} h_1, e^{\lambda t} (th_1 + h_2), \dots, e^{\lambda t} \left( \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} h_1 + \dots + h_{s-1} + h_s \right)$  – решения линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

*Доказательство.*

*Замечание.* Вспомним, что такое Жорданова цепочка. Набор  $h_1, h_2, \dots, h_s$  такой, что

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, \\ (A - \lambda E) h_2 &= h_1 \\ (A - \lambda E) h_3 &= h_2 \\ &\dots \\ (A - \lambda E) h_s &= h_{s-1} \end{aligned}$$

называется Жордановой цепочкой.

Проверим честной подстановкой Пусть  $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} h_j$ .

$$\begin{aligned} \varphi'_k(t) &= \lambda e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} h_j + e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(k-j)t^{k-j-1}}{(k-j)!} h_j = \\ &= \lambda e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} h_j + e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!} h_j, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cdot \varphi_k(t) &= e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} Ah_j = e^{\lambda t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \lambda h_1 + e^{\lambda t} \sum_{j=2}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (\lambda h_j + h_{j-1}) = \\ &= e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} \lambda h_j + e^{\lambda t} \sum_{j=2}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} h_{j-1} = \\ &= \lambda e^{\lambda t} \sum_{j=1}^k \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} h_j + e^{\lambda t} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{t^{k-j-1}}{(k-j-1)!} h_j. \end{aligned}$$

Таким образом, видно, что  $\varphi'_k(t) = A \cdot \varphi_k(t)$ , а значит это решение.

**Лемма 15** (ФСР ЛОС с постоянными коэффициентами). *Фундаментальная система решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами в для Жорданова базиса*

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 \leftrightarrow h_1, \dots, h_s & & \\ \dots & & \text{есть} \\ \lambda_d \leftrightarrow u_1, \dots, u_m & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} & e^{\lambda_1 t} h_1, e^{\lambda_1 t} (t h_1 + h_2), \dots, e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} h_1 + \dots + h_{s-1} + h_s \right) \\ & \dots \\ & e^{\lambda_d t} u_1, e^{\lambda_d t} (t u_1 + u_2), \dots, e^{\lambda_d t} \left( \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} h_1 + \dots + h_{m-1} + h_m \right) \end{aligned}$$

*Доказательство.* Проверим определитель Вронского для этих решений

$$W(\{\phi_i\}, 0) = \det(h_1, h_2, \dots, h_s, \dots, u_1, u_2, \dots, u_m) \neq 0.$$

(отличие от нуля есть из-за того, что матрица под детерминантом есть просто базис в  $\mathbb{C}^n$ ). Значит это действительно фундаментальная система решений.

**Теорема 11** (Формула Остроградского-Лиувилля). *Пусть есть линейная однородная система  $R' = P(t)r$ , где  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $r_1, \dots, r_n$  – решения этой системы.*

Тогда

$$W(r_1, \dots, r_n, t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{tr } P(\tau) d\tau}.$$

*Доказательство.* Заметим, что написанное выражение очень похоже на решение линейного однородного дифференциального уравнения 1 порядка  $y = y_0 \cdot e^{\int P}$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение  $W' = \text{tr } P(t)W$ , то есть то, которое дает написанное выражение в качестве решения. Тогда, если Вронскиан удовлетворяет этому уравнению, то он удовлетворяет и написанному выражению.

Рассмотрим, что из себя представляет производная Вронскиана. Запишем определитель по определению

$$W(t) = \det(r_1, \dots, r_n) = \begin{vmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \dots & r_n^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^n & r_2^n & \dots & r_n^n \end{vmatrix} = \sum_{\pi} (-1)^{[\pi]} r_{\pi(1)}^1 r_{\pi(2)}^2 \dots r_{\pi(n)}^n.$$

Тогда производная

$$\begin{aligned}
 W'(t) &= \sum_{\pi} (-1)^{[\pi]} \left( \left( \left( r_{\pi(1)}^1 \right)' r_{\pi(2)}^2 \dots r_{\pi(n)}^n \right) + \dots + \left( r_{\pi(1)}^1 r_{\pi(2)}^2 \dots \left( r_{\pi(n)}^n \right)' \right) \right) = \\
 &= \det \begin{bmatrix} (r_1^1)' & (r_2^1)' & \dots & (r_n^1)' \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^n & r_2^n & \dots & r_n^n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \dots & r_n^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & \dots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (r_1^n)' & (r_2^n)' & \dots & (r_n^n)' \end{bmatrix} = \\
 &= \det \begin{bmatrix} R_1' \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2' \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n' \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Из того, что  $r_1, r_2, \dots, r_n$  – решения, получаем, что

$$(r_1', r_2', \dots, r_n') = P \cdot (r_1, r_2, \dots, r_n).$$

А тогда

$$R_k' = \sum_{j=1}^n [P]_{k,j} R_j.$$

Таким образом,

$$W'(t) = \det \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n [P]_{1,j} R_j \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ \sum_{j=1}^n [P]_{2,j} R_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n [P]_{n,j} R_j \end{bmatrix} =$$

По свойству определителя вычтем строки, умноженные на необходимые коэффициенты в каждой матрице

$$= \det \begin{bmatrix} [P]_{1,1} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ [P]_{2,2} R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} + \dots + \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ [P]_{n,n} R_n \end{bmatrix} =$$

Вынесем коэффициенты из под определителя

$$= \left( \sum_{j=1}^n [P]_{j,j} \right) \cdot \det \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \operatorname{tr} P \cdot W.$$

## 16 Неоднородные линейные системы

**Теорема 12** (общее решение линейной неоднородной системы). Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n)$ ,  $\Phi$  – фундаментальная матрица соответствующей линейной однородной системы,  $\varphi$  – частное решение линейной системы  $r' = P(t)r + q(t)$ .

Тогда общее решение линейной системы есть

$$r = \Phi \cdot C + \varphi, \quad C \in \mathbb{C}^n.$$

*Доказательство.* Необходимо доказать равенство множеств  $A = \{r = \Phi \cdot C + \varphi\}$  и  $B = \{\text{множество всех решений}\}$ .

$A \subset B$  Очевидно подстановкой в уравнение.

$$\begin{aligned} \Phi' \cdot C + \varphi' &= P(t) \cdot (\Phi \cdot C + \varphi) + q(t), \\ \Phi' \cdot C + \varphi' &= P(t) \cdot \Phi \cdot C + P(t) \cdot \varphi + q(t), \\ \underbrace{(\Phi' - P(t) \cdot \Phi)}_{\substack{=0, \text{ т.к.} \\ \Phi - \text{фундаментальная}}} \cdot C &= \underbrace{-(\varphi' - P(t)\varphi - q(t))}_{\substack{=0, \text{ т.к.} \\ \varphi - \text{решение}}}. \end{aligned}$$

$B \subset A$  Пусть  $r$  – некоторое решение линейной системы. Тогда  $r' = P(t)r + q$  и  $\varphi' = P(t)\varphi + q$ , а значит, вычитая, получаем

$$r' - \varphi' = P(t)(r - \varphi),$$

$$(r - \varphi)' = P(t)(r - \varphi),$$

По теореме для однородной линейной системы найдется  $C \in \mathbb{C}^n$ , что

$$r - \varphi = \Phi \cdot C,$$

$$r = \Phi \cdot C + \varphi.$$

**Теорема 13** (метод вариации постоянных). Пусть  $P \in M_n(C(a, b))$ ,  $q \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n)$ ,  $\Phi$  – фундаментальная матрица соответствующей линейной однородной системы.

Тогда решение линейной системы имеет вид

$$r = \Phi \cdot C, \quad \text{где } C - \text{решение уравнения } \Phi \cdot C' = q.$$

*Доказательство.* Найдем решение уравнения  $\Phi \cdot C' = q$ .

$$C' = \Phi^{-1}q,$$

Так как  $\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \tilde{\Phi}^T$ , то правая часть непрерывна, а тогда есть первообразная.

$$C = \int \Phi^{-1}q + A.$$

Покажем, что тогда  $r = \Phi \left( \int \Phi^{-1}q + A \right)$  является общим решением.

$$r = \Phi \left( \int \Phi^{-1}q + A \right) = \Phi \cdot A + \Phi \int \Phi^{-1}q.$$

Заметим, что оно имеет вид общего решения из предыдущей теоремы, при условии, что  $\Phi \int \Phi^{-1}q$  является частным решением. Для проверки этого подставим в исходную линейную систему

$$\left( \Phi \left( \int \Phi^{-1}q \right) \right)' = P\Phi \left( \int \Phi^{-1}q \right) + q,$$

$$\Phi' \int \Phi^{-1}q + \cancel{(\Phi\Phi')q} = P\Phi \int \Phi^{-1}q + q,$$

$$(\Phi' - P\Phi) \int \Phi^{-1}q = 0.$$

А это уже верное равенство, так как  $\Phi$  – фундаментальная матрица однородной системы.

Таким образом, получили, что  $r = \Phi \cdot C = \Phi \left( \int \Phi^{-1}q + A \right)$  имеет вид общего решения системы.

## 17 Матричная экспонента

**Определение 30.** Матричной экспонентой матрицы  $A$  называется ряд

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$



**Теорема 14** (Свойства матричной экспоненты).

1. Для любой матрицы  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ряд  $e^A$  сходится.
2. Если для матриц  $A, B$  выполнено  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$ .
3.  $(e^{At})'_t = Ae^{At}$ .
4. Если матрица  $A$  представима в виде  $A = TJT^{-1}$ , то  $e^A = Te^JT^{-1}$ .
5. Если матрица  $A$  – диагональная  $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_d)$ , то  $e^A = \text{diag}(e^{A_1}, \dots, e^{A_d})$ .

6. Если есть некоторая Жорданова клетка размера  $s$   $J_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \dots \\ & \lambda & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \dots & & \lambda \end{bmatrix}$ ,

$$\text{то } e^{J_s(\lambda)t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$$

*Доказательство.* TODO

1.

**Следствие 4.** Пусть  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $r_0 \in \mathbb{C}^n$ .

Тогда  $r = e^{A(t-t_0)}r_0$  является решением задачи Коши  $\begin{cases} r' = Ar, \\ r(t_0) = r_0. \end{cases}$

*Доказательство.* Рассмотрим по третьему свойству

$$\left( e^{A(t-t_0)} \right)'_t = Ae^{A(t-t_0)}.$$

Тогда, подставляя в уравнение, получаем

$$\left( e^{A(t-t_0)}r_0 \right)'_t = Ae^{A(t-t_0)}r_0,$$

при этом  $r(t_0) = e^{A(t_0-t_0)}r_0 = r_0$  и  $\det e^{A(t_0-t_0)} = 1$ .

А значит  $e^{A(t-t_0)}$  является фундаментальной матрицей для системы.

*Замечание.* Заметим, что раскладывая в Жорданову форму, получим

$$e^{A(t-t_0)}r_0 = e^{At} \cdot e^{-At_0}r_0 = Te^{Jt}T^{-1}e^{-At_0}r_0 = Te^{Jt} \underbrace{(T^{-1}e^{-At_0}r_0)}_C = Te^{Jt}C.$$

Таким образом, между  $C$  и  $r_0$  устанавливается биекция.

Тогда, вспоминая, что  $T = (h_1, \dots, h_s, \dots, v_1, \dots, v_d)$ , придем к решению линейной однородной системы с постоянными коэффициентами 15

$$Te^{Jt} = \left( e^{\lambda t} h_1, e^{\lambda t} (th_1 + h_2), \dots, e^{\lambda t} \left( \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} h_1 + \dots + h_{s-1} + h_s \right), \dots \right).$$

## Часть V

# Линейные уравнения

## 18 title

**Определение 31.** Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t)$$

называется линейным уравнением  $n$ -ого порядка.

**Определение 32.** В случае, если в уравнении

$$y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t)$$

$q(t) \equiv 0$ , будем называть уравнение однородным. Иначе — неоднородным.

*Замечание.* Можно говорить о дифференциальном линейном операторе

$$Ly = y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_1(t)y' + p_0(t)y.$$

**Лемма 16** (о равносильной линейной системе). Если  $\varphi$  — решение линей-

ного уравнения на интервале  $(a, b)$ , то  $\Lambda\varphi =$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

является решением

$$\text{системы } r' = P(t)r + q(t) \text{ на } (a, b), \text{ где } P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

А также наоборот, если  $\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$  – решение линейной системы на  $(a, b)$ ,

то  $\varphi_1$  – решение линейного уравнения, и, кроме того,  $\varphi_2 = \varphi_1'$ ,  $\varphi_3 = \varphi_1''$ , ...,  $\varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}$ .

*Доказательство.* TODO

**Теорема 15** (о существовании и единственности максимального решения).  
TOFO

*Замечание.* Заметим, что в силу линейности дифференциального оператора  $Ly$ , сумма двух решений однородного линейного уравнения остается решением, а также умножение на скаляр остается решением. Таким образом, появляется мысль, что множество решений образует линейное пространство. На самом деле, все оказывается даже более удобным.

**Теорема 16** (об изоморфизме). Множество решений линейных однородных уравнений есть линейное пространство, изоморфное пространству

$$\text{решений системы } r' = P(t)r, \text{ где } P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$\text{При этом } \Lambda\varphi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ устанавливает этот изоморфизм.}$$

*Доказательство.* TODO

*Замечание.* Таким образом, у нас есть изоморфизм, в силу которого получаем равенство размерностей.

**Следствие 5.** Множество решений линейного однородного уравнения есть  $n$ -мерное линейное пространство.

**Определение 33.** Базис в пространстве решений линейного однородного уравнения будем называть фундаментальной системой решений (ФСР).

**Определение 34.** Вронскианом скалярных функций  $y_1, \dots, y_n$  будем называть соответствующий вронскиан вектор функций

$$W(y_1, \dots, y_n, t) = W(\Lambda y_1, \dots, \Lambda y_n, t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

*Замечание* (свойства Вронскиана решений линейных однородных уравнений). Пусть  $y_1, \dots, y_n$  – решения линейного однородного уравнения. Тогда

1. Если  $\exists t_0 \in (a, b) : W(t_0) = 0$ , то  $y_1, \dots, y_n$  – линейно зависимы,
2. Если  $\exists t_0 \in (a, b) : W(t_0) \neq 0$ , то  $y_1, \dots, y_n$  – линейно независимы.

Достаточно интересно, что эти свойства говорят также о том, что не может найтись точек, в которых Вронскиан равен нулю, и точек, в которых не равен, на одном наборе решений.

**Теорема 17** (формула Остроградского-Лиувилля).

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t p_{n-1}(\tau) d\tau}.$$

TODO

**Теорема 18** (общее решение линейного уравнения). Пусть  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  – ФСР для линейного однородного уравнения,  $\psi_k$  – частное решение линейного уравнения.

Тогда  $y = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k + \psi_k$  является общим решением линейного уравнения.

*Доказательство.* Заметим, что в силу изоморфизма  $\Lambda$ ,  $\{\Lambda \varphi_k\}_{k=1}^n$  является ФСР соответствующей линейной однородной системы, а  $\Lambda \psi_k$  является частным решением соответствующей линейной системы.

Тогда по теореме об общем решении линейной системы получаем, что  $r = \sum_{k=1}^n C_k \Lambda \varphi_k + \Lambda \psi_k$  является общим решением линейной системы. В силу биективности  $\Lambda$  найдем обратное от обеих частей

$$\Lambda^{-1} r = \Lambda^{-1} \left( \sum_{k=1}^n C_k \Lambda \varphi_k + \Lambda \psi_k \right) = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k + \psi_k.$$

Тогда, взяв первую координату  $r$ , как раз и получим решение линейного уравнения.

**Теорема 19** (метод вариации постоянных). Пусть  $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$  – ФСР для линейного однородного уравнения.

Тогда общее решение линейного уравнения имеет вид

$$y = \sum_{k=1}^n C_k(t) y_k,$$

где функции  $C_k$  удовлетворяют системе

$$[\Lambda y_1, \Lambda y_2, \dots, \Lambda y_n] \begin{bmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ \vdots \\ C'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q \end{bmatrix}.$$

*Доказательство.* Решим соответствующую линейному уравнению систему:

Общее решение, согласно методу вариации постоянных для линейных систем, имеет вид

$$r = \Phi \cdot C,$$

где  $C$  удовлетворяет уравнению  $\Phi \cdot C' = Q$ .

Так как  $\Phi = [\Lambda y_1 \quad \Lambda y_2 \quad \dots \quad \Lambda y_n]$  из изоморфизма, то

$$\Lambda^{-1} r = \Lambda^{-1} \left( \sum_{k=1}^n C_k \Lambda y_k \right) = \sum_{k=1}^n C_k y_k.$$

## 19 Линейное уравнение с постоянными коэффициентами

**Определение 35.** Уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + p_0y = q(t)$$

называется линейным с постоянными коэффициентами.

*Замечание.* Рассмотрим линейное однородное уравнение и подставим в него  $y = e^{\lambda t}$ :

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0) e^{\lambda t}.$$

Выражение  $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$  называется характеристическим многочленом данного уравнения.

Заметим, что если  $\lambda$  является корнем характеристического уравнения, то  $e^{\lambda t}$  оказывается решением линейного однородного уравнения.

**Лемма 17.** Если  $\lambda \in \mathbb{C}$  – корень характеристического многочлена кратности  $m$ , то  $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$  являются решениями соответствующего линейного однородного уравнения.

*Доказательство.* TODO

**Лемма 18.** Пусть  $\{(k_j, \lambda_j)\}_{j=1}^n$  – различные пары чисел  $k_j \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ .

Тогда  $\{t^{k_j}e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^n$  – линейно независимый набор.

**Пример 14.**

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

*Решение.* Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$  есть  $\lambda \in \{-2, -1\}$ .

Таким образом, решение исходного уравнения есть  $y = C_1e^{-2t} + C_2e^{-t}$ .

*Замечание.* В случае комплексных корней характеристического многочлена стоит овеществлять решение, заменяя сопряженные корни на вещественную и мнимую часть таких корней. Тогда коэффициенты  $C_1, C_2$  тоже становятся вещественными.

## Часть VI

# Теория устойчивости

## 20 Автономные системы

**Определение 36.** Автономной системой назовем систему

$$r' = f(r).$$

*Замечание.* Фактическое отличие от рассматриваемых ранее систем заключается в независимости правой части от  $t$ .

**Определение 37.** Фазовым пространством назовем область определения  $f$

$$\text{dom } f \subset \mathbb{R}^n.$$

**Определение 38.** Расширенным фазовым пространством назовем

$$\mathbb{R} \times \text{dom } f.$$

*Замечание.* То есть в расширенном фазовом пространстве добавляется временная часть.

**Пример 15.**

$$x' = x.$$

$\mathbb{R}^2$  – расширенное фазовое пространство,  $\mathbb{R}$  – фазовое пространство.

**Определение 39.** Фазовая траектория есть проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

**Определение 40.** Фазовая скорость в точке  $r \in \text{dom } f$  есть значение  $f(r)$ .

**Определение 41.** Фазовая скорость касается фазовой траектории и указывает направление движения.

**Определение 42.** Точка покоя (положение равновесия, стационарная точка) – точка, в которой фазовая скорость равна нулю.

**Теорема 20** ("о понижении размерности автономной системы"). Пусть  $u, v \in C(\Sigma)$ ,  $G_0 = \{(x, y) \in G | u(x, y) = v(x, y) = 0\}$  – множество точек покоя. Тогда на множестве  $G \setminus G_0$  фазовое пространство для  $\begin{cases} x' = u(x, y), \\ y' = v(x, y) \end{cases}$  совпадает с интегральными кривыми уравнения  $vdx = udy$ .

**Пример 16.** Рассмотрим математический маятник

$$\begin{cases} x'_1 = x_2, \\ x'_2 = -\omega_0^2 x_1. \end{cases}$$

Согласно теореме, фазовое пространство совпадает с интегральными кривыми уравнения

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 x_1 dx_1 &= x_2 dx_2, \\ \frac{x_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x_1^2}{2} &= C, \\ \frac{x_1^2}{\left(\frac{\sqrt{2C}}{\omega_0}\right)^2} + \frac{x_2^2}{(\sqrt{2C})^2} &= 1. \end{aligned}$$

А это эллипс, как мы изначально и предполагали.





## 22 Устойчивость линейной системы

*Замечание.* Линейная система имеет вид

$$r' = P(t)r + q(t).$$

Согласно последней лемме предыдущего пункта, характер устойчивости решения линейной системы такой же, как у решения  $s = 0$  системы  $s' = P(t)(s + \cancel{x}) + q(t) - \cancel{P(t)x} - q(t) = P(t)s$ .

**Теорема 21** (Устойчивость ЛЮС с постоянными коэффициентами). Пусть  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  – матрица системы ( $r' = Ar$ ).

Тогда:

1. система асимптотически устойчива, если  $\forall \lambda \in \text{spec} A \quad \text{Re} \lambda < 0$ ,
2. система устойчива, но не асимптотически, если  $\forall \lambda \in \text{spec} A \quad \text{Re} \lambda \leq 0$ , но  $\exists \lambda \in \text{spec} A : \text{Re} \lambda = 0$ , для которых геометрическая кратность совпадает с алгебраической,
3. система неустойчива, если  $\exists \lambda \in \text{spec} A : \text{Re} \lambda > 0$  или  $\text{Re} \lambda = 0$ , но геометрическая разность меньше алгебраической.

*Доказательство.* 1. Решение задачи Коши для этой системы с началь-

ным условием  $r_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$  есть  $r(t) = e^{At}r_0$ .

Рассмотрим

$$|r(t)| = |T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1} \cdot r_0| \leq n^3 \cdot |T| \cdot |e^{Jt}| \cdot |T^{-1}| \cdot |r_0| = K \cdot |e^{Jt}| \cdot |r_0|.$$

Так как любая компонента матрицы  $e^{Jt}$  имеет вид  $\frac{t^k}{k!} e^{\lambda t}$ , то можем оценить его

$$\left| \frac{t^k}{k!} e^{\lambda t} \right| = \frac{t^k}{k!} |e^{\text{Re} \lambda t}| \left| e^{i \text{Im} \lambda t} \right| = \frac{t^k}{k!} e^{\overbrace{\text{Re} \lambda t}^{<0}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

А тогда эти компоненты ограничены, а значит и норма всей матрицы будет ограничена, пусть числом  $C$ .

Таким образом,

$$|r(t)| \leq K \cdot C \cdot |r_0|.$$

И тогда при  $\delta = \frac{\varepsilon}{K \cdot C}$  получаем  $|r(t)| < \varepsilon$ , то есть  $|r(t)| \rightarrow 0$ .

2. В случаях, когда  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  полностью повторяется предыдущее.

При  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  все Жордановы клетки не содержат 1 и имеют вид  $[e^{\lambda t}]$ . А тогда  $|e^{\lambda t}| = |e^{i \operatorname{Im} \lambda t}| = 1$  и снова можем ограничить матричную экспоненту каким-то числом  $C$ , а значит получили устойчивость решения  $r = 0$ .

Покажем, почему устойчивость не асимптотическая.

Мы знаем, что решение системы имеет вид  $\varphi(t) = e^{\lambda t} h$ , где  $h$  – собственный вектор.

$$|\varphi(t)| = |e^{\lambda t}| |h| = |h| \not\rightarrow 0.$$

Таким образом, либо  $\operatorname{Im} \varphi(t)$ , либо  $\operatorname{Re} \varphi(t)$  не стремится к нулю.

Пусть  $\operatorname{Re} \varphi(t) \not\rightarrow 0$ . Тогда возьмем такое  $C$ , чтобы  $C \cdot \operatorname{Re} \varphi(t_0)$  лежало в шаре, радиуса  $\varepsilon$ . И тогда  $r(t, C \cdot \operatorname{Re} \varphi(t_0)) \not\rightarrow 0$ , что и требовалось.

3. При  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  возьмем также  $C \cdot \operatorname{Re} (e^{\lambda t} h) \rightarrow \infty$ .

При  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ , но алгебраической кратности большей, чем геометрической, рассмотрим  $\varphi(t) = e^{\lambda t} (th_1 + h_2) \rightarrow \infty$ , а значит либо  $\operatorname{Re} \varphi(t)$ , либо  $\operatorname{Im} \varphi(t)$  стремится к бесконечности. Снова выберем достаточно малое  $C$ , чтобы  $C \cdot \operatorname{Re} \varphi(t_0)$  стартовало в шаре, радиуса  $\delta$ , но  $r(t, C \cdot \operatorname{Re} \varphi(t_0)) \rightarrow \infty$

## 23 Теорема Четаева

**Теорема 22** (Четаев). Пусть  $f(0) = 0$ ,  $f(\operatorname{Lip}_{\text{loc}} \Omega)$ .

Функция  $C \in C^1(\Omega \rightarrow \mathbb{R})$ , обладающая свойствами:

$$\boxed{1} \quad C(0) = 0,$$

$$\boxed{2} \quad \forall \rho > 0 \implies B_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\} \neq \emptyset,$$

$$\boxed{3} \quad \exists \rho > 0 : \quad \forall r \in \bar{B}_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\} \implies \dot{C}(r) = C' \cdot f > 0,$$

называется функцией Четаева.

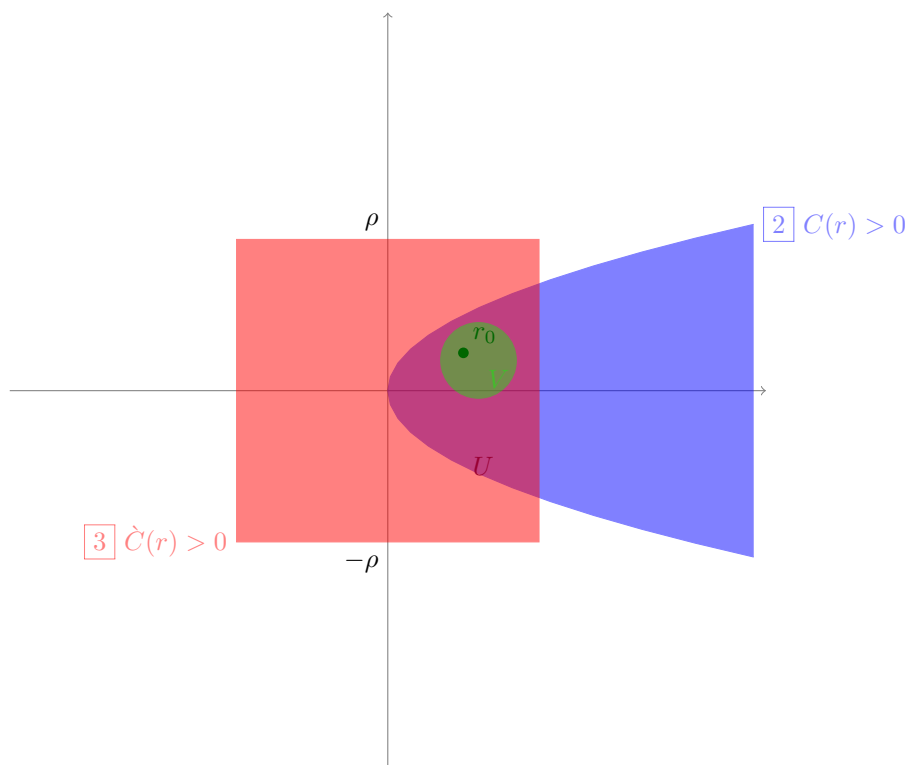
Если для системы  $r' = f(r)$  существует функция Четаева, то  $r = 0$  является неустойчивым положением равновесия.

*Доказательство.* Пусть  $r = 0$  – устойчивое положение равновесия, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall r_0 \in B_\delta(0) \quad \forall t \geq 0 \implies |r(t, r_0)| < \varepsilon.$$

Положим  $\varepsilon = \rho$ . Так как при уменьшении  $\delta$  не теряется справедливость утверждения из определения устойчивости, то можем рассматривать  $\delta < \varepsilon$ .

Выберем  $r_0 \in B_\delta(0) \cap \operatorname{Int} U$ .



$$\begin{aligned}
 C(r(t, r_0)) &= C(r_0) + \int_0^t \frac{d}{d\tau} C(r(\tau, r_0)) d\tau = \\
 &= C(r_0) + \int_0^t C'(r(\tau, r_0)) \cdot r'(\tau, r_0) d\tau = \\
 &= C(r_0) + \int_0^t \dot{C}(r(\tau, r_0)) d\tau
 \end{aligned}$$

Пусть  $\gamma = \min_V \dot{C}(r)$ , где  $V = \{r \in U \mid C(r) \geq C(r_0)\}$ .

Покажем, что  $V$  – компакт.

Так как  $V \subset U \subset \bar{B}_\rho(0)$ , то  $V$  – ограничено.

Рассмотрим последовательность  $\{r_n\}_{n \geq 1}$ , сходящуюся к  $\bar{r}$ .

$$\forall n, r_n \in V \quad C(r_n) \geq (r_0) \quad \text{из определения } V,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(r_n) \geq C(r_0),$$

$$C(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) \geq C(r_0),$$

$$C(\bar{r}) \geq C(r_0) \implies \bar{r} \in V \implies V - \text{замкнуто.}$$

Таким образом  $V$  ограничено и замкнуто, а значит оно компактно.

Тогда по теореме Вейерштрасса на  $V$  достигается минимум непрерывной функции  $\dot{C}(r)$ , то есть  $\exists r_\gamma : \gamma = \dot{C}(r_\gamma)$ . При этом, так как  $r_\gamma \in V \subset U$ , то  $\dot{C}(r_\gamma) > 0$ .

Тогда  $\forall t \geq 0 \quad \dot{C}(r(t, r_0)) \geq \gamma$ , а значит

$$C(r(t, r_0)) = C(r_0) + \int_0^t \dot{C}(r(\tau, r_0)) d\tau \geq C(r_0) + \int_0^t \gamma d\tau = C(r_0) + \gamma t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

А значит получили неограниченность, что противоречит тому, что мы рассматриваем все в шаре.

Таким образом, на самом деле,  $r = 0$  — неустойчивое положение равновесия.

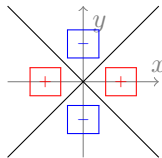
### Пример 17.

$$\begin{cases} x' = x + y^2, \\ y' = -y + x^2. \end{cases}$$

Рассмотреть положение равновесия  $(0, 0)$ .

*Решение.* Рассмотрим функцию  $C(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2}$ . Проверим, является ли она функцией Четаева.

1.  $C(0, 0) = 0$ ,
2. Рассмотрим на графике, где функция положительна. Таким образом,



в любой окрестности нуля есть точки, где функция неотрицательна.

3. Пусть  $r \in \bar{B}_\rho(0) \cap \{r | C(r) > 0\}$ .

$$\begin{aligned}\dot{C}(r) &= (x \quad -y) \cdot \begin{pmatrix} x+y^2 \\ -y+x^2 \end{pmatrix} = x^2 + xy^2 + y^2 - yx^2 = \\ &= x^2(1-y) + y^2(1+x).\end{aligned}$$

При достаточно маленьких  $x, y$  (например,  $|x|, |y| < 1$ )  $\dot{C}(r) > 0$ .

## 24 Предельные циклы

**Определение 46.** Пусть есть некоторое решение  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  линейной автономной системы  $r' = f(r)$ .

Если существует такое  $T > 0$ , что  $\varphi(t+T) \equiv \varphi(t)$ , но  $x, y \neq const$ , то траектория этого решения есть цикл.

**Пример 18.**

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Решая такую систему, можно получить  $x^2 + y^2 = C$ . То есть каждая траектория есть цикл, кроме точки  $(0, 0)$ .

**Определение 47.** Предельный цикл — это такой цикл, что все близкие траектории неограниченно приближаются к нему при  $t \rightarrow +\infty$  или  $t \rightarrow -\infty$ .

**Пример 19.**

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Переходя к полярным координатам, мы получим систему

$$\begin{cases} r' = r - r^3, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

Тогда  $r = 1$  будет циклом, а остальные траектории приближаются к нему при  $t \rightarrow +\infty$ . А значит  $r = 1$  — предельный цикл. При этом отходя от этого цикла на немного, мы будем стремиться вернуться обратно на цикл. А значит этот цикл устойчивый.

**Пример 20.** Рассмотрим в полярных координатах

$$\begin{cases} r' = r^3 - r, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

Отойдя от  $r = 1$  на немного, мы улетим от него, но при  $t \rightarrow -\infty$  мы будем приближаться обратно к циклу. Такой цикл называется неустойчивым.

**Пример 21.**

$$\begin{cases} r' = r|r^2 - 1|, \\ \varphi' = 1. \end{cases}$$

Теперь внутри мы будем приближаться к  $r = 1$ , а снаружи – отдаляться. Такой цикл называется полустойчивым.

**Теорема 23** (Необходимое условие цикла). Пусть  $f \in Lip_{loc} D$ , где  $D \subset \mathbb{R}^2$  – область. Пусть также существует цикл в  $D$ .

Тогда внутри этого цикла существует точка покоя.

**Теорема 24** (Достаточное условие цикла: теорема Пуанкаре-Бендиксона). Пусть  $c_o, c_i \subset \mathbb{R}^2$  – простые (без самопересечений) замкнутые кривые,  $R$  – область между ними, на которой нет точек покоя, и существует траектория  $T$  решения автономной системы, которая не покидает  $cl(R)$  при всех  $t \geq 0$ .

Тогда либо  $T$  является циклом, либо  $T$  приближается при  $t \rightarrow +\infty$  к предельному циклу, лежащему в  $cl(R)$ .

**Пример 22.**

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

Рассмотрим функцию  $V(x, y) = x^2 + y^2$ .

$$\dot{V}(x, y) = v' \cdot f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ x + y(1 - x^2 - y^2) \end{pmatrix} = 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2).$$

Рассмотрим в качестве  $c_o$  окружность радиуса 2, в качестве  $c_i$  – радиуса  $\frac{1}{2}$ .

Так как  $\dot{V}|_{c_o} < 0$ , то любая траектория, начинающаяся в  $R$ , не выйдет на кривую  $c_o$ . Так как  $\dot{V}|_{c_i} > 0$ , то любая траектория, начинающаяся в  $R$ , не выйдет на кривую  $c_i$ .

А значит, любая траектория, начинающаяся в  $R$  не выйдет из этой области. При этом точка покоя лишь  $(0, 0)$ , и она не внутри  $R$ .

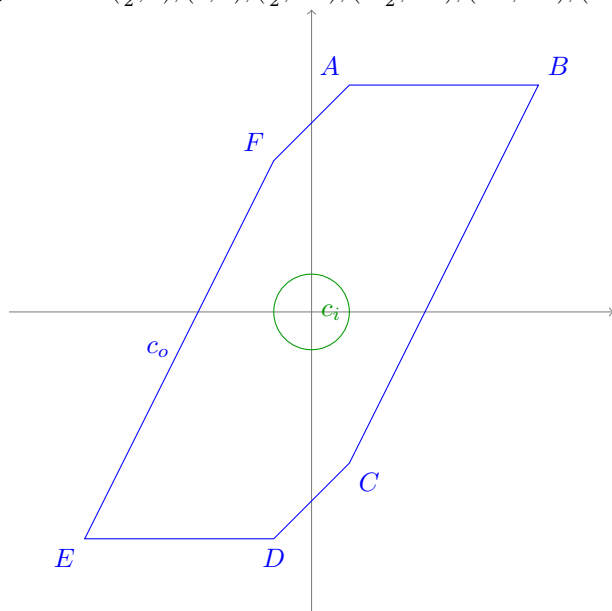
А значит, попадаем в условия теоремы Пуанкаре-Бендиксона. То есть в замыкании  $cl(R)$  есть цикл.

Заметим, что если мы будем брать в качестве  $c_i$  окружности радиуса  $\frac{n}{n+1}$ , а в качестве  $c_o$  — радиуса  $\frac{n+1}{n}$ , то все те же рассуждения будут работать, и мы увидим, что только лишь  $x^2 + y^2 = 1$  является циклом.

**Пример 23** (Ванд дер Поль).

$$\begin{cases} x' = y - x^3 + x, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве  $c_i$  окружность радиуса  $\frac{1}{2}$ , а в качестве  $c_o$  — многоугольник  $(\frac{1}{2}, 3), (3, 3), (\frac{1}{2}, -2), (-\frac{1}{2}, -3), (-3, -3), (-\frac{1}{2}, 2)$ .



Рассмотрим ребро  $AB$ . У него нормаль  $(0, 1)$ .

$$f \cdot (0, 1) = -x < 0.$$

А значит  $f$  направлена внутрь  $R$  и мы не выйдем через ребро  $AB$ .

Рассмотрим ребро  $BC$ . У него нормаль  $(5, -\frac{5}{2})$ .

$$f \cdot (5, -\frac{5}{2}) = -5x^3 + 5y + \frac{15}{2}x.$$

Так как мы на ребре  $BC$ , то  $y = 2x - 3$ .

$$f \cdot (5, -\frac{5}{2}) = 17.5x - 5x^3 - 15.$$

При  $x \in (\frac{1}{2}, 3)$   $17.5x - 5x^3 - 15 \in \left[ -\frac{195}{2}, \underbrace{\frac{35\sqrt{7}}{3\sqrt{6}} - 15}_{<0} \right]$  А значит  $f$  направлена  
внутрь  $R$  и мы не выйдем через ребро  $BC$ .

Аналогично можно рассмотреть для всех ребер.

Для контура  $c_i$  рассмотрим параметризацию  $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cos t, \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t \end{cases}$ . Тогда

нормаль будет задаваться  $n(t) = \begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2} \cos t \\ y(t) = \frac{1}{2} \sin t \end{pmatrix}$ .

$$n \cdot f = \frac{\cos^2 t}{4} \left( 1 - \frac{1}{4} \cos^2 t \right) \geq 0.$$

А значит мы не можем выйти через  $c_i$ .

Точка покоя единственна и это  $(0, 0)$  — не лежит в  $R$ .

А значит по теореме внутри  $R$  есть цикл.

**Теорема 25** (Достаточное условие отсутствия цикла). Пусть  $f, g \in C^1(\Omega)$ ,  $R \subset \Omega$  — прямоугольник.

Если на  $R$ :  $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0$  или  $< 0$ , то система  $\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$  не имеет

циклов в  $R$ .

*Доказательство.* Вспомним формулу Грина

$$\int_{\partial G} u dx + v dy = \iint_G \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

Положим  $u = -g$ ,  $v = f$ .

$$\int_{\partial G} -g dx + f dy = \iint_G \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy.$$



Пусть в  $R$  существует цикл.

Тогда для него применим формулу Грина. По условию теоремы правая часть либо всегда  $> 0$ , либо  $< 0$ , то есть

$$\int_{\partial G} f dx - g dy > 0.$$

Так как траектория является решением системы уравнений, то  $\int_{\partial G} f dx - g dy = 0$ . Противоречие! А значит в  $R$  нет циклов.

## Часть VII

# Преобразование Фурье

## 25 Предварительные сведения

**Определение 48.** Функция  $f$  называется принадлежащей пространству  $L_p(\mathbb{R})$ , где  $1 \leq p < \infty$ , если  $f$  — измеримая на  $\mathbb{R}$  и  $\int_{\mathbb{R}} |f|^p < \infty$ .

**Пример 24.**

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha}, & x > 1; \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\alpha|^p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha p}} = \frac{x^{-\alpha p + 1}}{-\alpha p + 1} \Big|_1^{+\infty} < \infty \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}.$$

Таким образом, при  $\alpha > \frac{1}{p}$  функция принадлежит  $L_p$  пространству.

**Определение 49.**  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , если она бесконечно дифференцируема.

**Определение 50.**  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  — финитные функции, если  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  и  $\text{supp } f = \text{cl } \{x \in \text{dom } f | f(x) \neq 0\}$  — ограничен.

**Пример 25.**

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, & |x| \leq \varepsilon; \\ 0, & |x| > \varepsilon, \end{cases}$$

где константа  $C_\varepsilon$  такова, что  $\int_{\mathbb{R}} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$ .

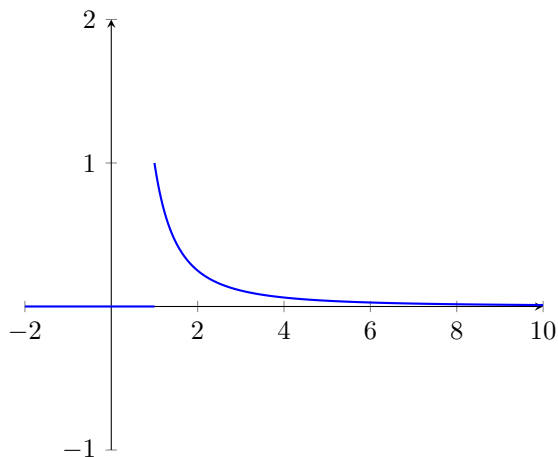


Рис. 4.  $f_{\alpha}(x)$

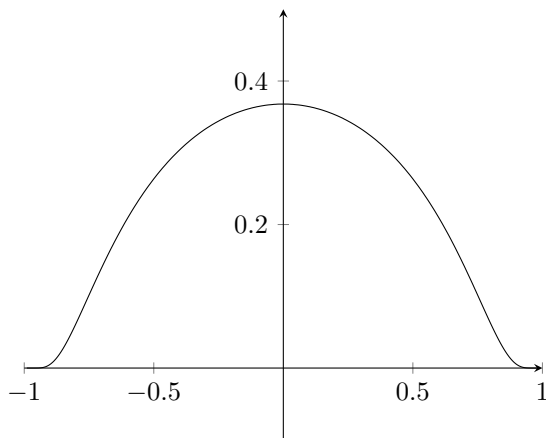


Рис. 5.  $\omega_{\varepsilon}(x)$

**Определение 51.** Сверткой функций  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  называется

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \cdot g(x - y) dy.$$

**Пример 26.**  $f = \chi_{[0,2]}$ ,  $g = \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ .

Найти свертку  $f * g$ .

Решение.

$$f * g = \int_0^2 \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x-y) dy = \int_{x-2}^x \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(t) dt = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \\ \frac{5}{2} - x, & x \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

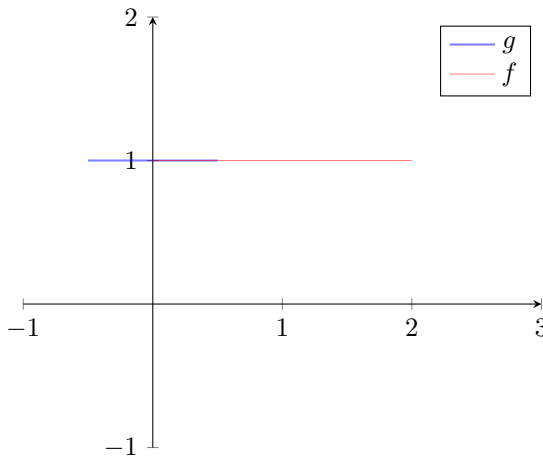


Рис. 6. Графики исходных функций  $f$  и  $g$

**Пример 27.** Рассмотрим свертку характеристической функции отрезка и  $\omega_\varepsilon$ . Оказывается, что это финитная функция.

$$\chi_{[a,b]} * \omega_\varepsilon \in C_0^\infty$$

**Теорема 26** (Лебега о мажорированной сходимости). Пусть  $\{f_n\}_{n=1}^\infty, f$  — измеримые на  $\mathbb{R}$  функции,  $f_n \rightarrow f$  почти всюду и существует мажоранта  $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ , что  $|f_n(x)| \leq \Phi(x)$  почти всюду.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

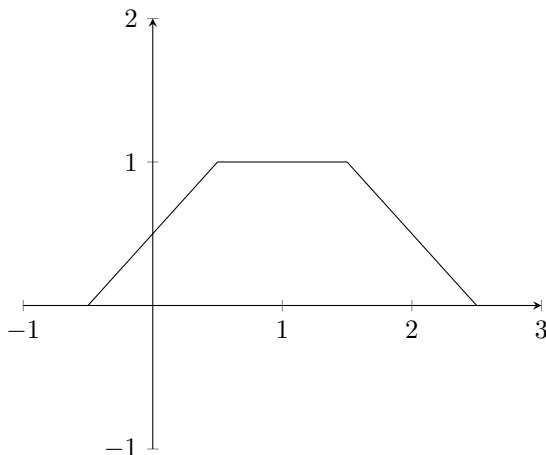


Рис. 7. График итоговой свертки

**Следствие 7** (Предельный переход в интеграле с параметром). Пусть  $y_0$  – предельная точка для множества  $Y$ ,  $f_y \in L_1(\mathbb{R}) \quad \forall y \in Y$ ,  $f_y \rightarrow f(x)$  почти всюду и существует мажоранта  $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ , что существует окрестность  $U$  точки  $y_0$  такая, что для почти всех  $x$  и для любого  $y \in U^\circ \cap Y$   $|f_y(x)| \leq \Phi(x)$ .

Тогда  $f \in L_1(\mathbb{R})$  и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_{\mathbb{R}} f_y(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{y \rightarrow y_0} f_y(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

## 26 Пространство Шварца

**Определение 52.**  $f$  принадлежит пространству Шварца  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , если  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  и  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+ \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty$ .

**Определение 53.**  $\rho_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)|$  называются полунормами Шварца.

**Определение 54.** Пусть  $f_n, f \in \mathcal{S}$ .

Будем говорить, что  $f_n \rightarrow f$  в пространстве Шварца  $\mathcal{S}$ , тогда и только тогда, когда  $\sup_{\alpha, \beta} \rho_{\alpha, \beta}(f - f_n) \rightarrow 0$ .

**Пример 28.**

$$f(x) = e^{-x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

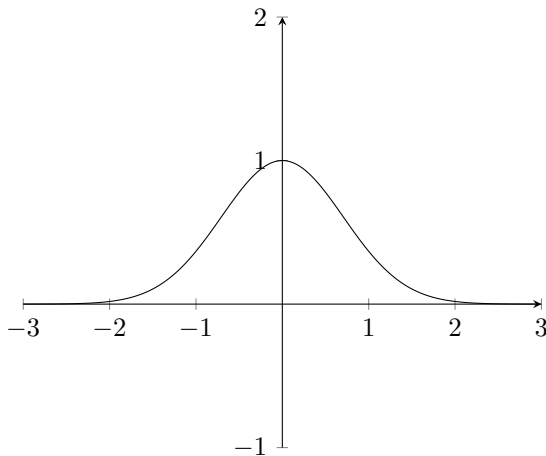


Рис. 8. Пример функции из пространства Шварца

*Замечание.*

$$C_0^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Пусть  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Тогда ее носитель ограничен, а носитель любой производной может стать лишь меньше, то есть тоже ограничен.

При этом  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| < \infty$ , так как под супремумом гладкая функция, а она достигает максимума и минимума на отрезке.

**Пример 29.**  $f(x) = e^{-|x|} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , так как в точке 0 она не дифференцируема.

**Пример 30.**  $f(x) = \frac{1}{1+x^4} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , так как, например,  $\rho_{5,0} = +\infty$ .

$$\text{Замечание. } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+ \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |(x^\beta f(x))^{(\alpha)}| < \infty. \end{cases}$$

$$\text{Замечание. } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} f \in C^\infty(\mathbb{R}), \\ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+, \forall N \in \mathbb{N} \exists C_{\alpha,N} : |f^{(\alpha)}(x)| \leq \frac{C_{\alpha,N}}{(1+|x|)^N}. \end{cases}$$

**Предложение** (Замкнутость  $\mathcal{S}$  относительно некоторых операций). Пусть  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Тогда

1.  $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
2.  $f + g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
3.  $f \cdot g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
4.  $f^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
5.  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,
- $\star (f * g)^{(k)} = f^{(k)} * g = f * g^{(k)}$ .

*Доказательство.* 1.

2.

3.

4.

5. Проверим дифференцируемость

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x) dx.$$

Зафиксируем  $t \in \mathbb{R}$  и покажем, что свертка дифференцируема в этой точке.

$$\begin{aligned} & \frac{(f * g)(t + \Delta t) - (f * g)(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t + \Delta t - x) dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x) dx \right) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} dx. \end{aligned}$$

Так как производная есть предел, то нам надо проверить существование предела данного интеграла. Хочется применить теорему Лебега о предельном переходе в интеграле с параметром, чтобы работать не с интегралом, а с подынтегральной функцией. Проверим условие теоремы:

$$\forall \Delta t \in U^\circ(0) \forall x \left| f(x) \cdot \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} \right| \leq \Phi(x)$$

Так как  $g$  – бесконечное число раз дифференцируемая функция, то расписывая Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} &= \frac{g'(t - x)\Delta t + g''(t - x + \theta(t, x)\Delta t)\Delta t^2}{\Delta t} = \\ &= g'(t - x) + g''(t - x + \theta(t, x)\Delta t)\Delta t, \end{aligned}$$

что дает существование  $M$ , при котором для любого  $t \in U(\Delta t)$  выполнено

$$\left| \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} \right| \leq M.$$

А значит можно рассмотреть в качестве мажоранты  $\Phi(x) = M \cdot |f(x)|$ . Тогда по теореме Лебега  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \frac{g(t + \Delta t - x) - g(t - x)}{\Delta t} dx$  существует, а значит функция  $(f * g)(t)$  – дифференцируема и  $(f * g)' = (f * g')$ . Покажем, что  $f * g = g * f$ .

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x) dx = \left| \begin{array}{l} y = t - x \\ dx = -dy \end{array} \right| = \int_{\mathbb{R}} f(t - y) \cdot g(y) dy = g * f.$$

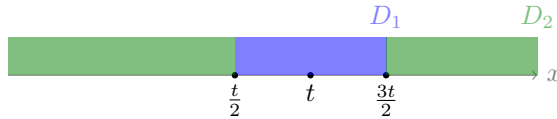
А значит, используя полученную коммутативность  $f * g' = (f * g)' = (g * f)' = g * f' = f' * g$ .

При этом, так как  $f, g'$  получились из класса Шварца, то  $f * g'$  тоже дифференцируема. То есть получили, что  $f * g \in C^\infty$ .

Покажем теперь выполнение неравенства

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists C_N : \quad |(f * g)(t)| \leq \frac{C_N}{(1 + |t|)^N}.$$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(t - x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot |g(t - x)| dx \leq \\ &| \text{т.к. } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) | \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{A_N}{(1 + |x|)^N} \cdot \frac{B_N}{(1 + |t - x|)^N} dx = \\ &= A_N \cdot B_N \cdot \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^N} \cdot \frac{1}{(1 + |t - x|)^N} dx. \end{aligned}$$



Заметим, что на  $D_1$  выполнено  $|x| \geq \frac{|t|}{2}$ , а на  $D_2$  —  $|t - x| \geq \frac{|t|}{2}$ . Тогда можем разбить интеграл на два:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |x|)^N} \cdot \frac{1}{(1 + |t - x|)^N} dx = \\
 &= \int_{D_1} \frac{1}{(1 + |x|)^N} \cdot \frac{1}{(1 + |t - x|)^N} dx + \int_{D_2} \frac{1}{(1 + |x|)^N} \cdot \frac{1}{(1 + |t - x|)^N} dx \leq \\
 &\leq \frac{1}{(1 + \frac{|t|}{2})^N} \cdot \int_{D_1} \frac{1}{(1 + |t - x|)^N} dx + \frac{1}{(1 + \frac{|t|}{2})^N} \int_{D_2} \frac{1}{(1 + |x|)^N} dx = \\
 &= -\frac{1}{(1 + \frac{|t|}{2})^N} \cdot \int_{(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}) \subset D_2} \frac{1}{(1 + |y|)^N} dy + \frac{1}{(1 + \frac{|t|}{2})^N} \int_{D_2} \frac{1}{(1 + |x|)^N} dx = \\
 &= \frac{1}{(1 + \frac{|t|}{2})^N} \int_{D_2 \setminus (-\frac{t}{2}, \frac{t}{2})} \frac{1}{(1 + |x|)^N} dx \leq \\
 &\quad \text{[т.к. при } N \geq 2 \text{ интеграл сходится]} \\
 &\leq \frac{1}{(1 + |t|)^N} \frac{(1 + |t|)^N}{(1 + \frac{|t|}{2})^N} \tilde{C}_N \leq \frac{C_N}{(1 + |t|)^N}.
 \end{aligned}$$

При этом при  $N = 1$  можем рассмотреть ту же константу, что и при  $N = 2$ , и неравенство останется верным.

Таким образом, мы показали выполнение неравенства  $|(f * g)(t)| \leq \frac{C_N}{(1 + |t|)^N}$  и попали в равносильное определение пространства Шварца.

## 27 Преобразование Фурье

**Определение 55.** Пусть  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Тогда преобразованием Фурье функции  $f$  назовем оператор  $\mathcal{F}$ , возвра-



шающий функцию

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

*Замечание.* Часто говорят просто «преобразование Фурье функции – это функция  $\hat{f}(\xi)$ ».

**Пример 31.** Найти преобразование Фурье функции  $f(x) = e^{-\pi x^2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2 + 2ix\xi)} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x + i\xi)^2 - \pi\xi^2} dx = e^{-\pi\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(\sqrt{\pi}x + \sqrt{\pi}i\xi)^2} dx = \cancel{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-\pi\xi^2}}{\cancel{\sqrt{\pi}}} = e^{-\pi\xi^2}. \end{aligned}$$

На самом деле при вычислении интеграла мы меняем область на комплекснозначную, что требует более строгого объяснения. Но мы можем показать, что этот интеграл вне зависимости от  $\xi$  будет равен  $\sqrt{\pi}$ . Для этого можно рассмотреть производную по  $\xi$  этого интеграла и убедиться, что после перестановки предела и интеграла, используя формулу Лебега, получается 0. А значит значение интеграла равно его значению при  $\xi = 0$ , что дает интеграл Пуассона, равный  $\sqrt{\pi}$ .

Мы получили интересный результат: исходная функция совпадает с полученной после преобразования Фурье. А значит  $f(x) = e^{-\pi x^2}$  является неподвижной точкой для преобразования Фурье.

Введем несколько вспомогательных операторов.

**Определение 56.** 1.  $\tau^\alpha$  – оператор сдвига.

$$\tau^\alpha f(x) = f(x - \alpha).$$

2.  $\delta^\alpha$  – оператор сжатия.

$$\delta^\alpha f(x) = f(\alpha x).$$

3.  $\tilde{\cdot}$  – оператор отражения.

$$\tilde{f}(x) = f(-x).$$

**Предложение** (Свойства преобразования Фурье). Пусть  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $b \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ .

Тогда имеют место следующие свойства:

1.

$$(f + g)^\wedge = \hat{f} + \hat{g},$$

2.

$$(bf)^\wedge = b\hat{f},$$

3.

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L_1(\mathbb{R})},$$

4.

$$\hat{\hat{f}} = \tilde{\tilde{f}},$$

5.

$$\hat{\bar{f}} = \overline{\hat{f}},$$

6.

$$(\tau^a f)^\wedge(\xi) = e^{-2\pi i a \xi} \hat{f}(\xi),$$

7.

$$(e^{2\pi i a \star} f)^\wedge = \tau^a \hat{f},$$

8.

$$(\delta^a f)^\wedge = \frac{1}{a} \delta^{\frac{1}{a}} \hat{f},$$

9.

$$\left(f^{(\alpha)}\right)^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi),$$

10.

$$\hat{f}^{(\alpha)} = ((-2\pi i \star)^\alpha f)^\wedge,$$

11.

$$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

12.

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

*Доказательство.* 1. Очевидно из-за свойств интеграла

2. Очевидно из-за свойств интеграла

3. Вспомнив, что  $\|f\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}} f$ , получается очевидно

4.

5. Так как сопряжение проносится под интеграл, то поменяется знак у экспоненты, а отражение поменяет его обратно

6.

$$(\tau^a f)^\wedge(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x-a) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = e^{-2\pi i a \xi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx}_{\hat{f}}.$$

7.

$$(e^{2\pi i a x} f)^\wedge = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i a x} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x (\xi-a)} dx = \tau^a \hat{f}.$$

8.

$$(\delta^a f)^\wedge = \int_{\mathbb{R}} f(ax) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i \frac{x}{a} \xi} dx = \frac{1}{a} \delta^{\frac{1}{a}} \hat{f}.$$

9. Покажем при  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} (f')^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^{-2\pi i x \xi} \implies u' = -2\pi i \xi e^{-2\pi i x \xi}, \\ v' = f' \implies v = f \end{array} \right| \\ &= f \cdot e^{-2\pi i x \xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \hat{f}. \end{aligned}$$

Тогда для высших производных индуктивно имеем такие же рассуждения, так как  $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

10. Снова покажем для  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{f}' &= \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx \right)' = \\
 &= \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x (\xi + \Delta \xi)} dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx}{\Delta \xi} = \\
 &| \text{по теореме Лебега можем поменять знаки интеграла и предела} | \\
 &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i x (\xi + \Delta \xi)} - e^{-2\pi i x \xi}}{\Delta \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) (e^{-2\pi i x \xi})'_{\xi} dx = \\
 &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot x \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = -2\pi i \xi \hat{f}.
 \end{aligned}$$

Опять таки, строго говоря, надо находить мажоранту для применения теоремы Лебега. Для этого стоит рассмотреть вещественную и мнимую часть и ограничить их по Тейлору с остатком в форме Лагранжа. Тогда мажоранта  $\Phi(x) = 2|f(x)|$  подойдет.

11. Понятно, что  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ , так как по предыдущему свойству любая производная есть преобразование Фурье от произведения функции на многочлен.

Воспользуемся эквивалентным определением принадлежности пространству Шварца:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+ \quad \sup_{\xi} \left| \left( \xi^\beta \hat{f}(\xi) \right)^{(\alpha)} \right| < \infty.$$

Из 9-ого свойства:

$$\xi^\beta \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^\beta} (f^{(\beta)})^\wedge(\xi).$$

Взяв производную с двух сторон и применив 10-ое свойство, получаем

$$\left( \xi^\beta \hat{f}(\xi) \right)^{(\alpha)} = \frac{1}{(2\pi i)^\beta} \left( (-2\pi i \star)^\alpha f^{(\beta)} \right)^\wedge(\xi) = \frac{(-2\pi i)^\alpha}{(2\pi i)^\beta} \left( \star^\alpha f^{(\beta)} \right)^\wedge(\xi).$$

Тогда, переходя к нормам, по 3-ему свойству

$$\left\| \left( \xi^\beta \hat{f}(\xi) \right)^{(\alpha)} \right\| \leq \frac{(2\pi)^\alpha}{(2\pi)^\beta} \int_{\mathbb{R}} \left| x^\alpha f^{(\beta)}(x) \right| dx.$$

Так как сама  $f^{(\beta)}$  лежит в пространстве Шварца, то по одному из определений  $f^{(\beta)}(x) \leq \frac{C_{N,\alpha}}{(1+|x|)^N}$ . Возьмем, например,  $N = \alpha + 2$ .

$$\frac{(2\pi i)^\alpha}{(2\pi i)^\beta} \int_{\mathbb{R}} |x^\alpha f^{(\beta)}(x)| dx \leq \frac{(2\pi)^\alpha}{(2\pi)^\beta} \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|^\alpha C}{(1+|x|)^{\alpha+2}} dx < \infty.$$

12.

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(x-t) dt \right) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot g(x-t) \cdot e^{-2\pi i x \xi} dx \right) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} g(u) \cdot e^{-2\pi i (t+u) \xi} du \right) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot e^{-2\pi i t \xi} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} g(u) \cdot e^{-2\pi i u \xi} du \right) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot e^{-2\pi i t \xi} \cdot \hat{g}(\xi) dt = \\ &= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$