

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Дифференциальные уравнения

Выполнил: студент гр. **R32353**

Магазенков Е. Н.

Преподаватель: *Бабушкин М. В.*

Санкт-Петербург, 2022-2023

1 Линейные уравнения 1-ого порядка (23.10)

Пример 1.

$$y' = y + x.$$

Решение. Решим однородное уравнение

$$y' = y.$$

$$y = C \cdot e^x$$

Пусть C – функция, подставим решение в исходное уравнение

$$C'(x) \cdot e^x + \cancel{C(x) \cdot e^x} = \cancel{C(x) \cdot e^x} + x$$

$$C'(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$C(x) = \int x e^{-x} dx$$

$$u = x \implies u' = 1, v' = e^{-x} \implies v = -e^{-x}$$

$$C(x) = -x e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x}(x + 1) + c$$

So

$$y = (-e^{-x}(x + 1) + c)e^x$$

$$y = -(x + 1) + c e^x$$

Пример 2.

$$y' + 2y = y^2 e^x$$

Решение. Разделим на y^2

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{2}{y} + e^x$$

Выполним замену $z = \frac{1}{y}$, тогда $z' = -\frac{y'}{y^2}$ Тогда, подставляя в исходное уравнение, получаем

$$z' = 2z - e^x$$

Решением данного линейного уравнения является функция

$$z = (e^{-x} + c) \cdot e^{2x}$$

Тогда, возвращаясь к исходной переменной

$$y = \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + c}$$

Пример 3.

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

Решение. Уравнение имеет вид уравнения Рикатти.

Очевидно, что $y = -e^x$ — одно из решений. Тогда сделаем замену $z = y - e^x$.

$$z' + e^x = (z + e^x)^2 - 2e^x(z + e^x) + e^{2x} + e^x,$$

$$z' + e^x = z^2 + 2e^x z + e^{2x} - 2e^x z - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x,$$

$$z' = z^2,$$

$$-\frac{1}{z} = x + c,$$

$$z = \frac{-1}{x + c}.$$

Тогда, возвращаясь к исходным переменным, получаем $y = e^x - \frac{1}{x+c}$.

2 Уравнения в полных дифференциалах

Пример 4.

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

Решение. Рассмотрим производные коэффициентов

$$(2 - 9xy^2)x'_y = -18x^2y,$$

$$(4y^2 - 6x^3)y'_x = -18x^2y.$$

Так как они совпадают, то по признаку это уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Рассмотрим потенциал в какой-то точке с фиксированной ординатой y_0 :

$$u'_x(x, y_0) = 2x - 9x^2 y_0^2 \implies u(x, y_0) = x^2 - 3x^3 y_0^2 + c(y_0).$$

Подставляя в уравнение $u'_y = (4y^2 - 6x^3)y$, получаем

$$(x^2 - 3x^3 y^2 + c(y_0))'_y = (4y^2 - 6x^3)y,$$

$$-6x^3 y + c'(y) = (4y^2 - 6x^3)y,$$

$$c'(y) = 4y^3,$$

$$c(y) = y^4 + c.$$

Таким образом, получаем функцию $u = x^2 - 3x^3 y^2 + y^4 + c$. Тогда уравнение $x^2 - 3x^3 y^2 + y^4 = c$ неявно задает решение нашего уравнения.

Замечание (Свойства дифференциала).

1. $d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv$,
2. $du = d_x u + d_y u$,
3. $d_x u = d_x (u + \varphi(y))$,
4. $\varphi(x, y) dx = d_x \left(\int \varphi(x, y) dx \right)$.

Замечание. Можно решать УПД, используя свойства дифференциала. Рассмотрим пример из лекции и попробуем решить его, упрощая выражение по свойствам.

Пример 5.

$$e^{-y} dx - (xe^{-y} + 2y) dy = 0.$$

Решение. Раскроем скобки

$$e^{-y} dx - xe^{-y} dy - 2y dy = 0.$$

Пользуясь четвертым свойством, перейдем к

$$d_x(xe^{-y}) + d_y(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

Используя второе свойство, получим

$$d(xe^{-y}) - dy^2 = 0.$$

По первому свойству

$$d(xe^{-y} - y^2) = 0.$$

Тогда общее решение будем неявно задаваться уравнением

$$xe^{-y} - y^2 = c.$$

Пример 6.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Решение.

$$2xydx + x^2dy - y^2dy = 0,$$

$$d_x(x^2y) + d_y(x^2y) - \frac{1}{3}dy^3 = 0,$$

$$d\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) = 0.$$

Тогда $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ неявно задает решение.

Пример 7.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$$

Решение.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}dx - dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0,$$

$$d_x\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) - dx + d_y\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) = 0,$$

$$d\sqrt{x^2 - y^2} - dx = 0,$$

$$d\left(\sqrt{x^2 - y^2} - x\right) = 0.$$

Тогда $\sqrt{x^2 - y^2} - x = c$ неявно задает решение.

Пример 8. Найти интегральный множитель

$$(1 - x^2y) dx + x^2(y - x)dy = 0.$$

Решение. Запишем уравнение для нахождения интегрирующего множителя

$$\mu'_y (1 - x^2y) - \mu x^2 = \mu'_x x^2(y - x) + \mu (2xy - 3x^2).$$

Будем искать частное решение в виде $\mu = \mu(x)$.

$$\mu'_x x^2(x - y) = 2\mu (xy - x^2),$$

$$\mu'_x x = -2\mu,$$

$$\mu = -\frac{1}{x^2}.$$

3 Метод введения параметра

Пример 9.

$$y = (y')^2 e^{y'}.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} y' = v, \\ y = v^2 e^v. \end{cases}$$

Подставим в основное соотношение $dy = y'_x dx$

$$(2ve^v + v^2 e^v)dv = vdx,$$

$$(2 + v)e^v dv = dx,$$

$$x = e^v + ve^v + c.$$

Таким образом, ответом является $\begin{cases} x = e^v + ve^v + c, \\ y = v^2 e^v. \end{cases}$

Пример 10.

$$x^3 - (y')^3 = xy'.$$

Решение.

Замечание. Если кривая имеет уравнения вида $P(x, y) + Q(x, y) = 0$, где P, Q – однородные функции разной степени, то положив $y = xt$, получаем $x^\alpha P(1, t) + x^\beta Q(1, t) = 0$, откуда можно выразить x .

Используя предложенное в замечании, введем параметризацию $y' = xt$.

$$x^3 - (xt)^3 = x \cdot xt,$$

$$x = \frac{t}{1 - t^3},$$

$$y' = \frac{t^2}{1 - t^3}.$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$dy = \frac{t^2}{1 - t^3} \frac{1 - t^3 + 3t^3}{(1 - t^3)^2} dt,$$

$$dy = \frac{t^2(1 + 2t^3)}{(1 - t^3)^3} dt,$$

$$u = 1 + 2t^3 \implies u' = 6t^2$$

$$v' = \frac{t^2}{(1 - t^3)^3} \implies v = \frac{1}{6(1 - t^3)^2}$$

$$y = \frac{1 + 2t^3}{6(1 - t^3)^2} - \frac{1}{3(1 - t^3)} + c,$$

$$y = \frac{4t^3 - 1}{6(1 - t^3)^2} + c.$$

Пример 11.

$$y = 2xy' - (y')^2.$$

Решение. Введем параметризацию

$$\begin{cases} x = u, \\ y' = v, \\ y = 2uv - v^2. \end{cases}$$

Отсюда, используя основное соотношение $dy = y'_x dx$, получаем

$$2vdu + 2udv - 2v dv = v du,$$

$$v du = 2(v - u) dv,$$

$$u' = 2 - \frac{2u}{v},$$

$$u = \left(\frac{2v^3}{3} + c \right) v^{-2},$$

Тогда решением является

$$\begin{cases} x = \left(\frac{2v^3}{3} + c \right) v^{-2}, \\ y = 2 \left(\frac{2v^3}{3} + c \right) v^{-1} - v^2. \end{cases}$$

4 Решение уравнений, не разрешенных относительно производной

Пример 12.

$$y'^2 + 2x^3 y' - 4x^2 y = 0.$$

Решение. Разложим левую часть на множители

$$\left(y' + x^3 + x\sqrt{x^4 + 4y} \right) \left(y' + x^3 - x\sqrt{x^4 + 4y} \right) = 0.$$

Рассмотрим варианты:

1. $y' + x^3 + x\sqrt{x^4 + 4y} = 0$. Заменой $z = x^4 + 4y \implies z' = 4x^3 + 4y'$ сведем это уравнение к уравнению

$$\frac{z' - 4x^3}{4} + x^3 + x\sqrt{z} = 0,$$

$$\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -2xdx,$$

$$\sqrt{z} = -x^2 + c,$$

$$z = (-x^2 + c)^2, \quad \text{где } x^2 \leq c.$$

$$\text{Тогда } y = \frac{(-x^2 + c)^2 - x^4}{4} = \frac{-2cx^2 + c^2}{4} \text{ при } x^2 \leq c.$$

2. $y' + x^3 - x\sqrt{x^4 + 4y} = 0$.

$$\text{Аналогично } y = \frac{2cx^2 + c^2}{4} \text{ при } x^2 \geq -c.$$

Попробуем объединить эти решения, переопределив константы. В первом случае возьмем $A = -\frac{c}{2}$, а во втором $-A = \frac{c}{2}$.

1. $y = Ax^2 + A^2$ при $A < 0$ и $x \in [-\sqrt{-2A}, \sqrt{-2A}]$,

2. $y = Ax^2 + A^2$ при $A \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}$ и при $A < 0$ и $x \in (-\infty, -\sqrt{-2A}] \cup [\sqrt{-2A}, +\infty)$.

Видно, что эти решения объединяются в одно:

$$y = Ax^2 + A^2, \text{ при } A \in \mathbb{R} \text{ и } x \in \mathbb{R}.$$

Также стоит не забывать случай $z = 0$, который образуется при решении уравнений (мы делим на \sqrt{z}). В этом случае $y = -\frac{x^4}{4}$.

Найдем дискриминантную кривую для данного уравнения.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ F'_{y'}(x, y, y') = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0, \\ 2y' + 2x^3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 2x^6 - 4x^2y = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^4 + 4y) = 0, \\ y' = -x^3. \end{cases}$$

Таким образом, кривая $\mathcal{D} = \{(x, y) : x(x^4 + 4y) = 0\}$ является дискриминантной.

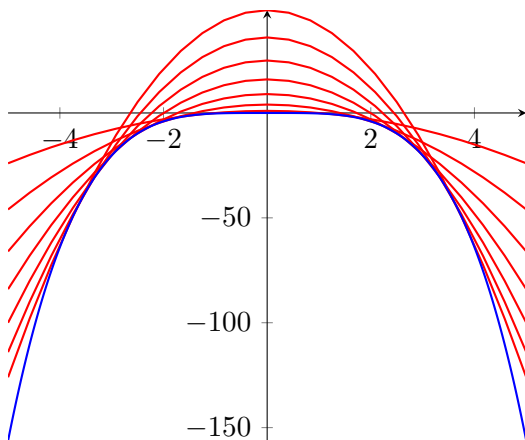
Очевидно, что только решение $y = -\frac{1}{4}x^4$ проходит через \mathcal{D} . То есть это решение подозрительное на особое.

Проверим по определению особого решения. Попробуем найти константу A такую, что $\psi(x) = Ax^2 + A^2$ удовлетворяет следующим условиям для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \psi(x_0) = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ \psi'(x_0) = -x_0^3, \\ \psi(x) \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall x \in U(x_0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax_0^2 + A^2 = -\frac{1}{4}x_0^4, \\ 2Ax_0 = -x_0^3, \\ Ax^2 + A^2 \not\equiv -\frac{1}{4}x^4, \quad \forall x \in U(x_0). \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}x_0^2.$$

Понятно, что при этом A все условия выполняются, а значит кривая $y = -\frac{1}{4}x^4$ является особым решением исходного уравнения.



5 Системы дифференциальных уравнений

5.1 Метод последовательного интегрирования

Пример 13.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что каждое из уравнений содержит только одну функцию, поэтому можно решить их по отдельности

$$x = C_1 e^t, \quad y = C_2 e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Пример 14.

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + x. \end{cases}$$

Решение. Первое уравнение содержит только одну функцию и мы можем его решить и подставить решение во второе.

$$\begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y' = y + C_1 e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 e^t, \\ y = C_2 e^t + C_1 t e^t. \end{cases}$$

Пример 15. *Считая $t > 0$, решить систему*

$$\begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x, \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t, \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x' = \frac{2t}{1+t^2} x, \\ y' = -\frac{1}{t} y + x + t, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y' = -\frac{1}{t} y + C_1(1+t^2) + t, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = (C_2 + \int (C_1(1+t^2) + t) t dt) \frac{1}{t}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = (C_2 + C_1(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4}) + \frac{t^3}{3}) \frac{1}{t}, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1(1+t^2), \\ y = C_2 \frac{1}{t} + C_1(\frac{t}{2} + \frac{t^3}{4}) + \frac{t^2}{3}, \end{cases} \end{aligned}$$

5.2 Метод исключения

Замечание. Под исключением понимается избавление от всех функций кроме одной.

Идея заключается в дифференцировании нескольких из уравнений системы.

Пусть есть система

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y), \\ y' = g(t, x, y). \end{cases}$$

При условии, что f непрерывно дифференцируемая, у x существует вторая производная. Дифференцируя первое уравнение, получаем

$$x'' = \frac{df}{dt} = f'_t + f'_x \cdot x' + f'_y \cdot y' = f'_t + f'_x \cdot f(t, x, y) + f'_y \cdot g(t, x, y).$$

При условии, что y выражается из первого уравнения — $y = \beta(t, x, x')$, подставим в нашу вторую производную

$$x'' = \gamma(x, t, t').$$

Тогда если найдется решение $x(t)$, то можно подставить обратно и получить $y = \beta(t, x, x')$

Пример 16.

$$\begin{cases} x' = 1 - \frac{1}{y}, \\ y' = \frac{1}{x-t}. \end{cases}$$

Решение. Так как $\frac{1}{x-t}$ — непрерывно дифференцируема, то из первого уравнения системы, получим

$$y'' = -\frac{x' - 1}{(x - t)^2} = \frac{-\frac{1}{y}}{(x - t)^2}$$

И подставим второе

$$y'' = -\frac{y'^2}{y},$$

Однородное, решается заменой

$$y = C_2 \sqrt{C_1 + 2x},$$

Тогда

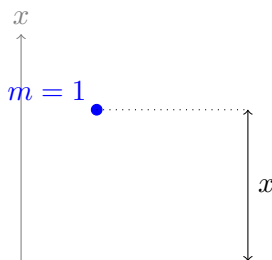
$$x = \frac{1}{y'} + t = \frac{1}{-\frac{1}{C_1+t}} + t = -C_1 + 1 + t$$

5.3 Первый интеграл

Определение 1. Функция $u : \Sigma \subset \mathbb{R}_r^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы $r' = f(r)$, если для любого решения φ этой системы $u(\varphi(t)) \equiv \text{const}$.

Замечание. Важно, что в правой части системы явно нет t (такие системы называются автономными).

Замечание. Рассмотрим задачу движения тела над поверхностью земли. По второму закону Ньютона



$$x'' = -g.$$

Запишем эквивалентную систему данному уравнению:

$$\begin{cases} x' = v, \\ v' = -g. \end{cases}$$

Ее решение есть
$$\begin{cases} x = -\frac{gt^2}{2} + c_1 t + c_2, \\ v = -gt + c_1, \end{cases}$$

Рассмотрим функцию полной механической энергии системы:

$$u(x, v) = \frac{v^2}{2} + gx.$$

Докажем, что это первый интеграл системы. Подставим решение в эту функцию

$$\begin{aligned} u\left(-\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2, -gt + c_1\right) &= \frac{(-gt + c_1)^2}{2} + g\left(-\frac{gt^2}{2} + c_1t + c_2\right) = \\ &= \cancel{\frac{g^2t^2}{2}} - \cancel{gtc_1} + \frac{c_1^2}{2} - \cancel{\frac{g^2t^2}{2}} + \cancel{gtc_1} + c_2g = \frac{c_1^2}{2} + c_2g. \end{aligned}$$

Таким образом, получили константу при каждом конкретном решении, а значит это первый интеграл по определению.

Замечание. Можно было по-другому проверить. Например логично, что если это первый интеграл, то $u'(\varphi(t)) = 0$.

Предложение. *С другой стороны, нелогично находить первый интеграл, уже зная решение системы. Хочется применять его в обратную сторону: используя первый интеграл, находить решение системы уравнения.*

Попробуем это сделать в нашем примере.

Так как $u(x, v) = \frac{v^2}{2} + gx = \text{const}$, то можно выразить какую-нибудь из переменных через вторую. Тогда, подставляя в уравнение системы, мы получим уже дифференциальное уравнение относительно только одной переменной, которое решать уже легче.

Например, попробуем выразить $x = \frac{1}{g} \left(\text{const} - \frac{v^2}{2} \right)$ и подставим в первое уравнение системы

$$x' = v \Leftrightarrow -\frac{1}{g}vv' = v \Leftrightarrow v' = -g.$$

Предложение (Поиск первого интеграла для системы 2-ого порядка). *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y). \end{cases}$$

Пусть (x, y) – какое-то решение этой системы, тогда

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \implies g(x, y)dx = f(x, y)dy.$$

То есть (x, y) – параметрическое решение уравнения $g(x, y)dx = f(x, y)dy$. Иначе говоря, (x, y) – параметрическое задание интегральной кривой.

Пусть общее решение этого уравнения определено формулой $u(x, y) = c$. А тогда, подставляя исходное решение в это решение, получаем тождество $u(x(t), y(t)) \equiv c$. Таким образом, u – первый интеграл.

Пример 17. Решить систему уравнений при $x, y > 0$

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ y' = \frac{y}{(x+y)^2}. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y}{(x+y)^2}, \end{cases} \implies \frac{y}{(x+y)^2}dx = \frac{x}{(x+y)^2}dy \implies ydx = xdy \implies y = cx.$$

Таким образом, $u = \frac{y}{x}$ – первый интеграл ($u = c$).

Подставим во второе уравнение системы

$$\begin{aligned} y' = \cancel{cx}' &= \frac{\cancel{cx}}{(c+1)^2 x^2} \Leftrightarrow xdx = \frac{dt}{(c+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \\ &= \frac{t}{(c+1)^2} + C \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2t}{(c+1)^2} + C}. \\ y = cx &= c \cdot \sqrt{\frac{2t}{(c+1)^2} + C}. \end{aligned}$$

Пример 18. Решить систему уравнений при $x > z > 0$ и $y > 0$

$$\begin{cases} x' = x^2 + z^2, \\ y' = y(x - z), \\ z' = 2xz. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что первое и третье уравнения системы не зависят от y . Решим их, как систему двух уравнений, используя первый интеграл

$$2xzdx = (x^2 + z^2)dz \implies \frac{dx}{dz} = \frac{x^2 + z^2}{2xz} = \frac{1}{2z}x + \frac{z}{2}x^{-1},$$

Это уравнение Бернулли, замена $t = \frac{x^2}{2}$.

$$xx' = \frac{1}{2z}x^2 + \frac{z}{2} \implies t' = \frac{1}{z}t + \frac{z}{2} \implies t = \left(C + \int \frac{z}{2} \cdot e^{-\ln z} \right) \cdot e^{\ln z}$$