

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1
"Интеграл Римана"
по дисциплине "Математический анализ"

Вариант 14
$$f(x) = x^3, \quad [0, 2]$$

Выполнил: студент гр. **R3138**

Магазенков Е. Н.

Преподаватели: Бойцев А. А.,
доцент фак. СУиР

Попов А.,
хороший человек фак. СУиР

1 Теоретическое вычисление интеграла

1.1 Существование интеграла Римана

Функция $f(x) = x^3$ является непрерывной на отрезке $[0, 2]$, а значит, согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции, интегрируема.

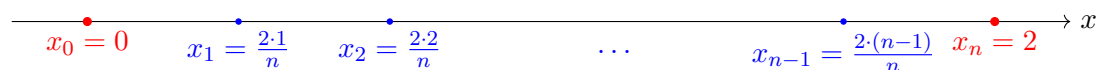
Тогда для нахождения значения интеграла можем выбрать любое разбиение.

1.2 Вычисление интеграла по определению

1.2.1 Нахождение интегральной суммы

Рассмотрим равномерное разбиение τ отрезка $[0, 2]$:

$$x_i = \frac{2i}{n} \quad (1)$$



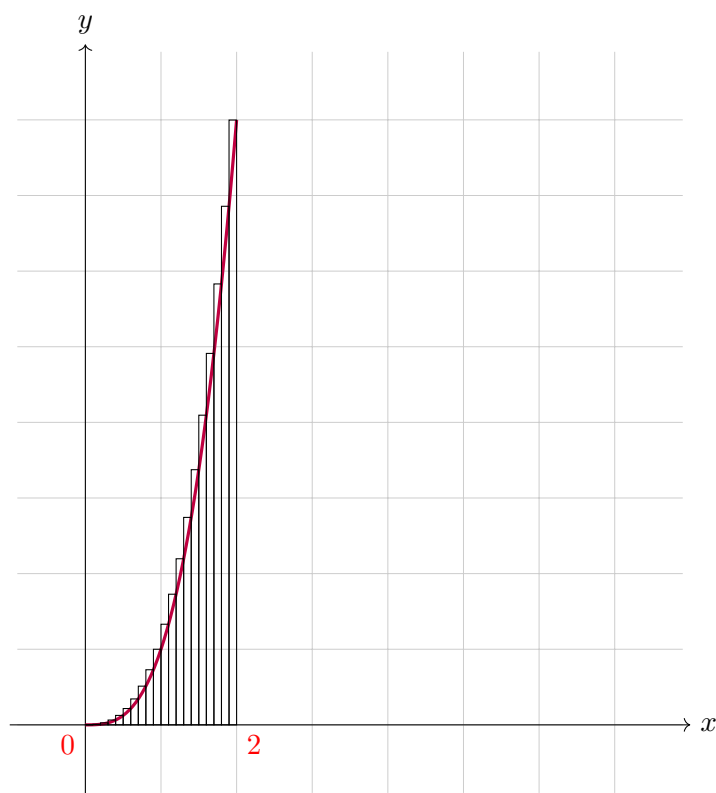
Возьмём в качестве оснащения ξ правые границы отрезков:

$$\xi_i = x_i = \frac{2i}{n} \quad (2)$$



Тогда согласно определению $\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=0}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i$

$$\sigma_\tau(x^3, \xi) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^3 \cdot \frac{2}{n} \quad (3)$$



Вычисляя эту сумму, получаем

$$\begin{aligned}\sigma_\tau(x^3, \xi) &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^n \left(\frac{2i}{n}\right)^3 = \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 \\ \sigma_\tau(x^3, \xi) &= \frac{4(n+1)^2}{n^2}\end{aligned}\quad (4)$$

1.2.2 Переход к интегралу Римана

Тогда определённый интеграл Римана можно найти используя определение

$$\int_0^2 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_\tau(x^3, \xi) \quad (5)$$

$$\int_0^2 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4(n+1)^2}{n^2} = 4 \quad (6)$$

1.3 Вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Согласно формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$. Применяя данную формулу к нашей функции, получаем

$$\int_0^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4 \quad (7)$$

1.4 Анализ результатов

Таким образом, мы вычислили интеграл $\int_0^2 x^3 dx$ двумя способами: по определению и с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Сравнив результаты вычислений 6 и 7, понимаем, что они совпадают.

2 Оценка погрешностей вычислений

2.1 Вывод формулы теоретической погрешности интеграла и его приближения

Найдём значение погрешности вычисления интеграла методом прямоугольников

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x) dx - \sigma_\tau(f, \xi) \right| \quad (8)$$

Воспользуемся свойством аддитивности интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (9)$$

2.2 Случай оснащения правыми границами отрезков

Интегральную сумму при оснащении правыми границами отрезков можно расписать как

$$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=0}^n f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1}) dx \quad (10)$$

Тогда можем переписать погрешность интеграла

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1}) dx \right| = \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_{i+1})) dx \right| \quad (11)$$

Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Распишем функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точках x_i

$$f(x) = f(x_i) + f'(\eta_i) \cdot (x - x_i), \quad \eta_i \in [x, x_i] \quad (12)$$

Тогда остаток равен

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\eta_i) \cdot (x - x_i) dx \right| \quad (13)$$

Оценим его неравенством треугольника, а затем самым простым способом: $|f'(\eta_i)| \leq \max_{[a, b]} |f'(x)|$

$$|R_n| \leq \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(\eta_i)| \cdot (x_{i+1} - x_i) dx \leq \sum_{i=0}^n \max_{[a, b]} |f'(x)| \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \quad (14)$$

Каждую из разностей заменим длиной отрезка $(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}$

$$|R_n| \leq \max_{[a, b]} |f'(x)| \cdot n \cdot \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2}{2} \quad (15)$$

Таким образом,

$$|R_n| \leq \max_{[a, b]} |f'(x)| \frac{(b-a)^2}{2n} \quad (16)$$

2.3 Случай оснащения центральными точками отрезков

Аналогично можно оценить для оснащения центральными точками отрезков $\xi_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$. Подставляя в 11, получаем

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \right) dx \right| \quad (17)$$

Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$. Распишем функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точке $\frac{x_{i+1} + x_i}{2}$.

$$f(x) = f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + \frac{f''(\eta_i) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)^2}{2} \quad (18)$$

Тогда остаток

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f'\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) + \frac{f''(\eta_i) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)^2}{2} \right) dx \right| \quad (19)$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^n f' \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \cdot \frac{\left(x - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^2}{2} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{f''(\eta_i) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^3}{6} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \quad (20)$$

$$|R_n| = \left| 0 + \frac{f''(\eta_i) \cdot \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)^3}{3} \right| \quad (21)$$

Проводя далее оценку, аналогичную 14 и 15, получаем

$$|R_n| \leq \max_{[a, b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (22)$$

2.4 Применительно к интегралу $\int_0^2 x^3 dx$

Оценим вычисления при использовании центральной точки отрезков разбиения по формуле 22

$$|R_n| \leq \max_{[0, 2]} |(x^3)''| \frac{(2-0)^3}{24n^2} = \max_{[0, 2]} |6x| \frac{8}{24n^2} = \frac{12 \cdot 8}{24n^2} = \frac{4}{n^2} \quad (23)$$

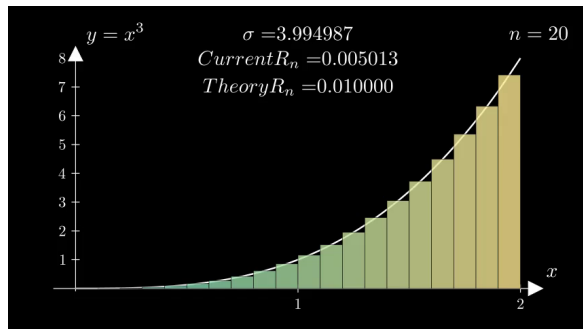
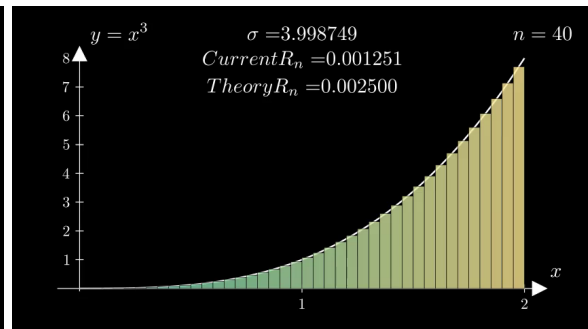
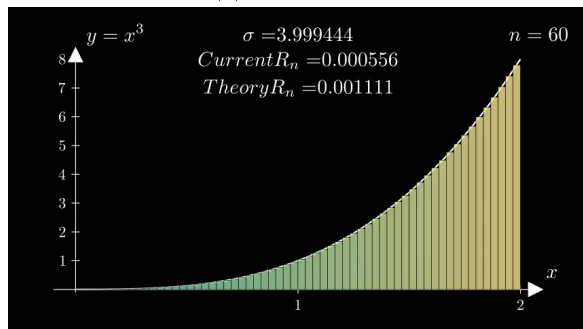
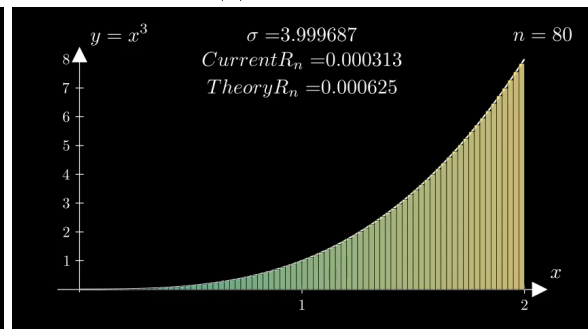
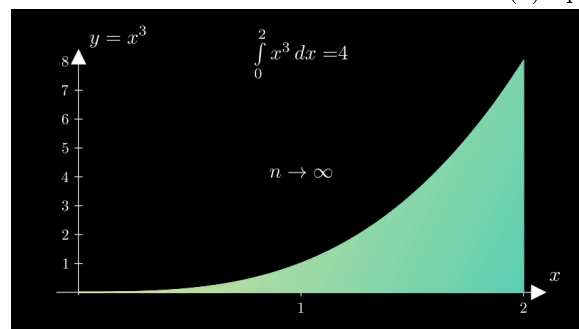
При использовании крайних точек отрезков оценим по формуле 16

$$|R_n| \leq \max_{[0, 2]} |(x^3)'| \frac{(2-0)^2}{2n} = \max_{[0, 2]} |3x^2| \frac{4}{2n} = \frac{12 \cdot 4}{2n} = \frac{24}{n} \quad (24)$$

3 Работа программы

Программа для вычисления интеграла, используя метод прямоугольников, написана на языке *Python3* с использованием библиотеки *matplotlib*

Результат работы программы можно увидеть на Рис.1, а также

(a) при $n = 20$ (b) при $n = 40$ (c) при $n = 60$ (d) при $n = 80$ (e) при $n \rightarrow \infty$ Рис. 1: Результаты работы программы при различных n