Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1 "Интеграл Римана" по дисциплине "Математический анализ"

Вариант 14
$f(x) = x^3, \quad [0,\, 2]$

Выполнил: студент гр. **R3138**

Магазенков Е. Н.

Преподаватели: Бойцев А. А.,
доцент фак. СУиР
Попов А. ,
хороший человек фак. СУиР

Санкт-Петербург, 2022

1 Теоретическое вычисление интеграла

1.1 Существование интеграла Римана

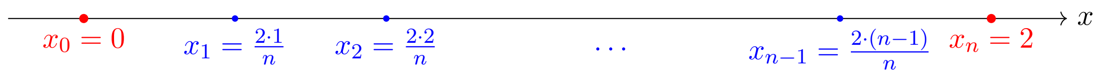
Функция $f(x) = x^3$ является непрерывной на отрезке $[0, 2]$, а значит, согласно теореме об интегрируемости непрерывной функции, интегрируема.
Тогда для нахождения значения интеграла можем выбрать любое разбиение.

1.2 Вычисление интеграла по определению

1.2.1 Нахождение интегральной суммы

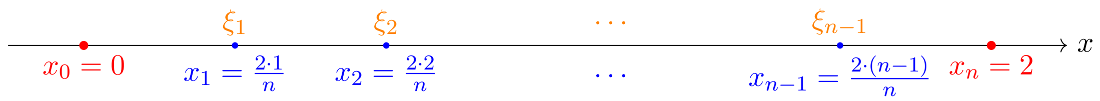
Рассмотрим равномерное разбиение τ отрезка $[0, 2]$:

$$x_i = \frac{2i}{n} \tag{1}$$



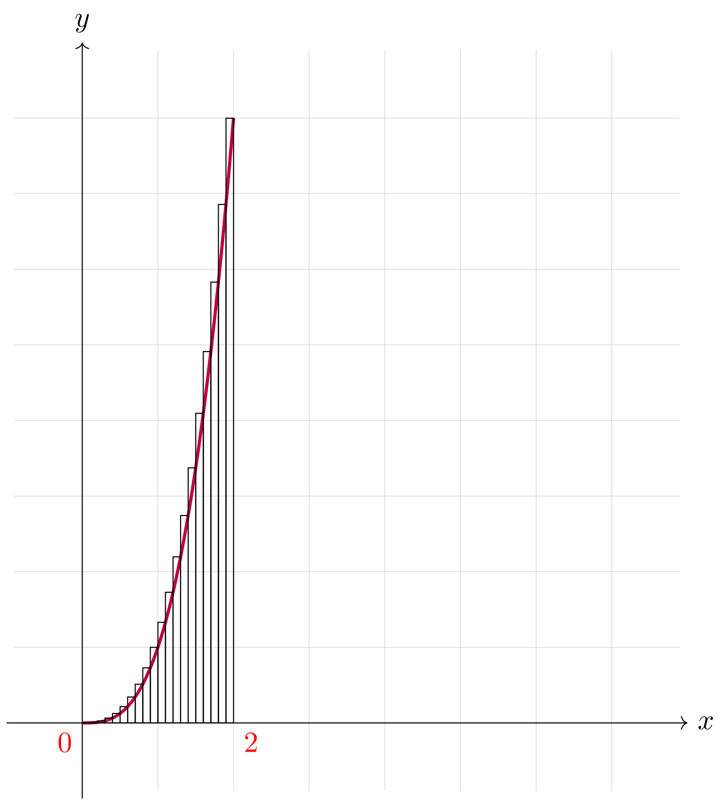
Возьмём в качестве оснащения ξ правые границы отрезков:

$$\xi_i = x_i = \frac{2i}{n} \tag{2}$$



Тогда согласно определению $\sigma_\tau(f, \xi) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_i$

$$\sigma_\tau(x^3, \xi) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^3 \cdot \frac{2}{n} \tag{3}$$



Вычисляя эту сумму, получаем

$$\sigma_\tau(x^3,\,\xi) = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^3 = \frac{2}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sigma_\tau(x^3,\,\xi) = \frac{4(n+1)^2}{n^2} \qquad (4)$$

1.2.2 Переход к интегралу Римана

Тогда определённый интеграл Римана можно найти используя определение

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sigma_\tau(x^3,\,\xi) \qquad (5)$$

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{4(n+1)^2}{n^2} = 4 \qquad (6)$$

1.3 Вычисление интеграла по формуле Ньютона-Лейбница

Согласно формуле Ньтона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(a) - F(b)$, где $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$ Применяя данную формулу к нашей функции, получаем

$$\int\limits_0^2 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4 \qquad (7)$$

1.4 Анализ результатов

Таким образом, мы вычислили интеграл $\int\limits_0^2 x^3\,dx$ двумя способами: по определению и с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
Сравнив результаты вычислений 6 и 7, понимаем, что они совпадают.

2 Оценка погрешностей вычислений

2.1 Вывод формулы теоретической погрешности интеграла и его приближения

Найдём значение погрешности вычисления интеграла методом прямоугольников

$$|R_n| = \left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \sigma_\tau(f, \xi) \right| \qquad (8)$$

Воспользуемся свойством аддитивности интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \qquad (9)$$

2.2 Случай оснащения правыми границами отрезков

Интегральную сумму при оснащении правыми границами отрезков можно расписать как

$$\sigma_\tau(f,\xi) = \sum_{i=0}^{n} f(x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})\,dx \tag{10}$$

Тогда можем переписать погрешность интеграла

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_{i+1})\,dx \right| = \left| \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f(x_{i+1})\right)\,dx \right| \tag{11}$$

Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,\,b]$. Распишем функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точках x_i

$$f(x) = f(x_i) + f'(\eta_i) \cdot (x - x_i), \quad \eta_i \in [x, x_i] \tag{12}$$

Тогда остаток равен

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\eta_i) \cdot (x - x_i)\,dx \right| \tag{13}$$

Оценим его неравенством треугольника, а затем самым простым способом: $|f'(\eta_i)| \leqslant \max\limits_{[a,\,b]} |f'(x)|$

$$|R_n| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f'(\eta_i)\right| \cdot (x_{i+1} - x_i)\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{n} \max_{[a,\,b]} \left|f'(x)\right| \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \tag{14}$$

Каждую из разностей заменим длиной отрезка $(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n}$

$$|R_n| \leqslant \max_{[a,\,b]} \left|f'(x)\right| \cdot n \cdot \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2}{2} \tag{15}$$

Таким образом,

$$|R_n| \leqslant \max_{[a,\,b]} \left|f'(x)\right| \frac{(b-a)^2}{2n} \tag{16}$$

2.3 Случай оснащения центральными точками отрезков

Аналогично можно оценить для оснащения центральными точками отрезков $\xi_i = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$ Подставляя в 11, получаем

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(x) - f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right)\right)\,dx \right| \tag{17}$$

Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,\,b]$. Распишем функцию $f(x)$ по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа в точке $\frac{x_{i+1}-x_i}{2}$.

$$f(x) = f\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + f'\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + \frac{f''(\eta_i) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2}{2} \tag{18}$$

Тогда остаток

$$|R_n| = \left| \sum_{i=0}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f'\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right) + \frac{f''(\eta_i) \cdot \left(x - \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2}{2} \right)\,dx \right| \tag{19}$$

Вычисляя интеграл, получаем

$$|R_n| = \left|\sum_{i=0}^{n} f'\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\cdot\frac{\left(x-\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2}{2}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{f''(\eta_i)\cdot\left(x-\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^3}{6}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}}\right| \tag{20}$$

$$|R_n| = \left|0 + \frac{f''(\eta_i)\cdot\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^3}{3}\right| \tag{21}$$

Проводя далее оценку, аналогичную 14 и 15, получаем

$$|R_n| \leqslant \max_{[a,\,b]}\left|f''(x)\right|\frac{(b-a)^3}{24n^2} \tag{22}$$

2.4 Применительно к интегралу $\int\limits_0^2 x^3\,dx$

Оценим вычисления при использовании центральной точки отрезков разбиения по формуле 22

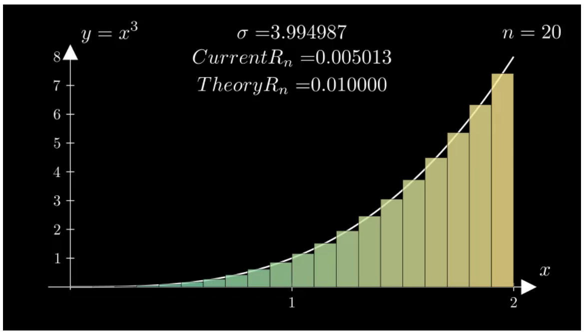
$$|R_n| \leqslant \max_{[0,\,2]}\left|(x^3)''\right|\frac{(2-0)^3}{24n^2} = \max_{[0,\,2]}|6x|\,\frac{8}{24n^2} = \frac{12\cdot 8}{24n^2} = \frac{4}{n^2} \tag{23}$$

При использовании крайних точек отрезков оценим по формуле 16

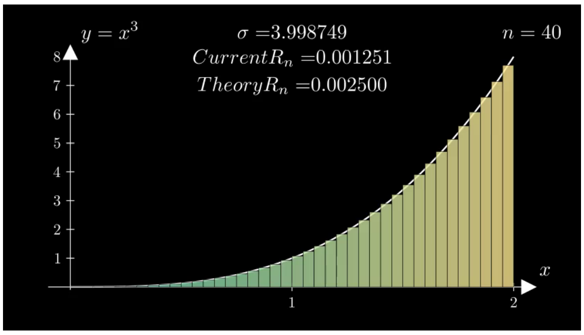
$$|R_n| \leqslant \max_{[0,\,2]}\left|(x^3)'\right|\frac{(2-0)^2}{2n} = \max_{[0,\,2]}\left|3x^2\right|\frac{4}{2n} = \frac{12\cdot 4}{2n} = \frac{24}{n} \tag{24}$$

3 Работа программы

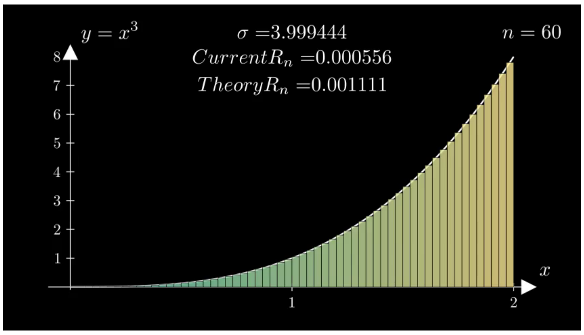
Программа для вычисления интеграла, используя метод прямоугольников, написана на языке *Python3 с использованием библиотеки manim*
Результат работы программы можно увидеть на Рис.1, а также по ссылке



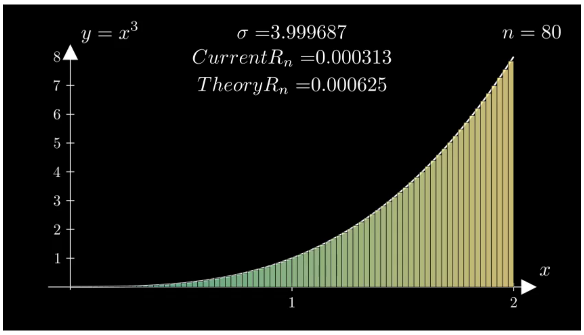
(a) при $n = 20$



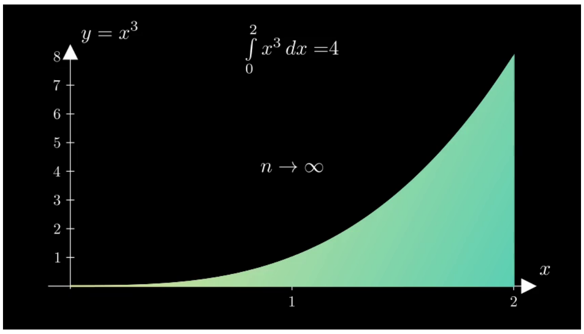
(b) при $n = 40$



(c) при $n = 60$



(d) при $n = 80$



(e) при $n \to \infty$

Рис. 1: Результаты работы программы при различных n