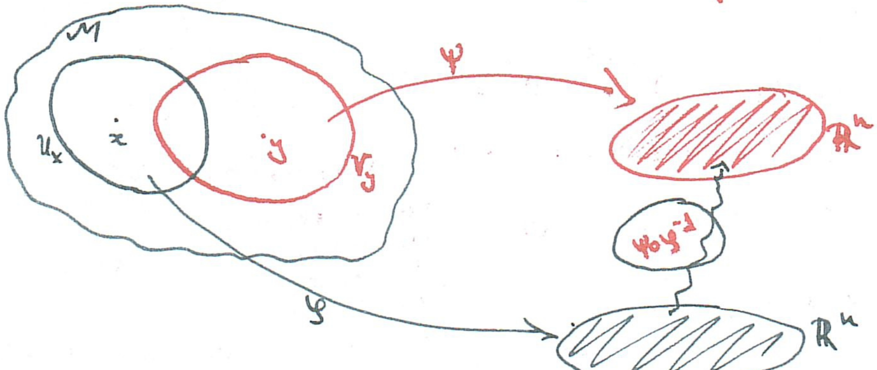
① Определение (гладкого) многообразия, примеры (векторные пространства, сфера, $Gr(k,n)$). Гладкое отображение. Основные конструкции (структура многообразия на открытом подпространстве и на произведении).

def. M — топологическое многообразие размерности n, если это хаусдорфово пространство со счётной базой, которое локально евклидово, то есть для любой точки $x \in M$ существует окрестность $U_x \ni x$, что $U_x \underset{\text{гомео}}{\overset{\varphi}{\cong}} \mathbb{R}^n$.

def. Пара $(U_x; \varphi)$ называется картой в окрестности точки $x \in M$.

def. Карты $(U_x; \varphi)$ и $(V_y; \psi)$ называются C^r согласованными, если $\psi \circ \varphi^{-1} \in C^r(\varphi(U_x \cap V_y))$. (где $\psi \circ \varphi^{-1} : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\varphi(U_x \cap V_y)} \to \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\psi(U_x \cap V_y)}$)



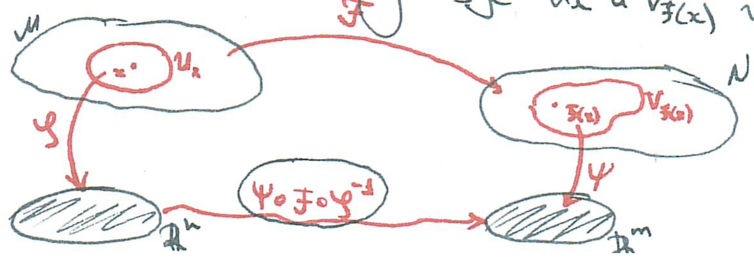
def. Атласом называется множество карт $\{(U_\alpha; \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ такое, что $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ и $\forall \alpha, \beta \in A$ карты $(U_\alpha; \varphi_\alpha)$ и $(U_\beta; \varphi_\beta)$ согласованы.

def. Многообразие с фиксированным C^∞ атласом называется гладким.

NB. Атласы A и A' называются эквивалентными, если и только если $A \cup A'$ является атласом.

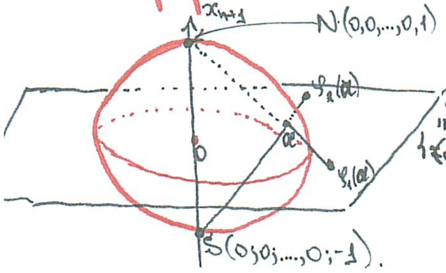
NB. Задать гладкое многообразие означает задать многообразие и атлас, состоящий из C^∞ согласованных карт.

def. Пусть M и N — гладкие многообразия. Отображение $F : M \to N$ называется гладким в точке $x \in M$, если $\exists U_x \subset M$ и $V_{F(x)} \subset N$: $F(U_x) \subset V_{F(x)}$ и $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, где φ и ψ — соответствующие U_x и $V_{F(x)}$ гомеоморфизмы в $\mathbb{R}^n$.



def. Отображение $F: M \to N$ называется диффеоморфизмом, если F - гладкая биекция и F^{-1} - гладкое.

Ex. [Сфера]



Рассмотрим сферу $S^n = \{a \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Рассмотрим карты:

1) $S^n \setminus N$ с отображением φ_1 - стереограф. проекцией, $(a_1,\dots,a_{n+1}) \mapsto (\dots; \frac{a_i}{1-a_{n+1}}; \dots; 0)$

2) $S^n \setminus S$ с отображением φ_2 - стереограф. проекцией. $(a_1,\dots,a_{n+1}) \mapsto (\dots; \frac{a_i}{1+a_{n+1}}; \dots; 0)$.

$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\underbrace{x \mapsto x/\|x\|^2}_{\text{гладкое}}$ (т.к. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{(1+a_{n+1})^2} = \frac{1-a_{n+1}^2}{(1+a_{n+1})^2} = \frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}$)

$\Downarrow$

φ_1 и φ_2 согласованные

Т.о., $\mathcal{A} = \{(S^n \setminus \{N\}; \varphi_1); (S^n \setminus \{S\}; \varphi_2)\}$ - атлас и $(S^n; \mathcal{A})$ - гладкое многообразие.

Ex. [Грассманиан]

Рассмотрим $Gr(k,n) = \{V^k \subset \mathbb{R}^n\}$ - k-мерные векторные подпространства $\mathbb{R}^n$.

Каждому V^k сопоставим базис $\langle e_1,\dots,e_k \rangle$.

Получим матрицу $A = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{k1} \\ e_{12} & \dots & e_{k2} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{1n} & \dots & e_{kn} \end{pmatrix}$ ранга k.

При этом, если рассматривать другие базисы $\langle f_1,\dots,f_k \rangle$ и соответствующую матрицу B, то есть матрица перехода $C \in Gl_{k\times k}$: $A = B\cdot C$.

Зададим топологическое многообразие:

$Gr(k,n) = M_{n\times k} / A\sim B \Leftrightarrow \exists C \in Gl_{k\times k} : A = B\cdot C$.

(это многообразие, т.к. $M_{n\times k} \underset{\text{гомео}}{\cong} \mathbb{R}^{n\cdot k}$).

Зададим карты:

Рассмотрим упорядоченный набор $D = \{D_1 < \dots < D_k\} \subset \{1,\dots,n\}$.

$U_D = \{A \in M_{n\times k} : \mathrm{Minor}_D \neq 0\}$.

det матрицы из строк с номерами из D.

$\varphi_D : U_D \to \mathbb{R}^{k\cdot(n-k)}$

$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I \\ Y \end{pmatrix} \mapsto (y_{11},\dots,y_{k(n-k)})$

$k\times(n-k)$

приведем к такому виду, т.к. не 0

Тогда $\varphi_D \circ \varphi_\mu^{-1}$ - гладкое, а значит карты согласованные.

Prop. Открытое подпространство гладкого многообразия тоже гладкое многообразие.

Prop. Пусть $(M^m; \{(U_\alpha;\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A})$ и $(N^n; \{(V_\beta;\psi_\beta)_{\beta\in B}\})$ - гладкие многообразия, тогда $(M\times N; \{(U_\alpha\times V_\beta; \varphi_\alpha\times\psi_\beta)\})$ - гладкое многообразие размерности m+n.

② Паракомпактность многообразий. Разбиение единицы.

def. Пусть $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ — покрытие многообразия M.
Набор гладких отображений $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ называется разбиением единицы, подчинённым покрытию $\mathcal{U}$, если:

1) $\operatorname{supp}(\lambda_i)=\overline{\{x\in M : \lambda_i(x)\neq 0\}}\subset U_i$;

нужно, чтобы сумма λ_i-ых была конечна.

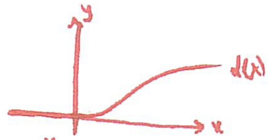
2) $\{\operatorname{supp}(\lambda_i)\}_{i\in I}$ локально конечно, т.е. $\forall x\in M\ \exists U_x\ni x$: U_x пересекается с конечным числом носителей;

3) $0\le\lambda_i(x)\le 1$; $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i(x)=1$ $\forall x\in M$.

Lem. Существует гладкая функция $\mu:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, что

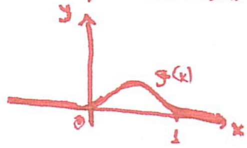
$$\mu(x)=\begin{cases}1, & \|x\|\le 1;\\ 0, & \|x\|\ge 2;\\ \text{между } 0 \text{ и } 1, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Proof. Рассмотрим: $\alpha(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$;



$\beta(x)=\alpha(x)\cdot\alpha(1-x)$;

Заметим, что $\beta(x)\big|_{\mathbb{R}\setminus(0;1)}\equiv 0$.



$$\gamma(x)=\frac{\int_0^x\beta(t)\,dt}{\int_0^1\beta(t)\,dt};$$

Заметим, что $\gamma(x)\big|_{[1;+\infty)}\equiv 1$, и $\gamma\in[0;1]$, и $\gamma(x)\big|_{(-\infty;0)}\equiv 0$.

$\delta(x)=\gamma(x+2)\cdot\gamma(x-2)$;

Заметим, что $\delta(x)\big|_{\mathbb{R}\setminus[-2;2]}\equiv 0$; $\delta(x)\big|_{[-1;1]}\equiv 1$; $\delta\in[0;1]$.

Тогда, рассматривая $\mu(x)=\delta(\|x\|)$, получим необходимое.

def. Покрытие $\mathcal{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ вписано в $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, если

$$\exists\beta,\alpha:\ V_\beta\subset U_\alpha.$$

Lem. Пусть $\mathcal{V}$ вписано в $\mathcal{U}$.
Если существует разбиение единицы для $\mathcal{V}$, то и для $\mathcal{U}$ тоже существует.

Proof. Пусть $\{\lambda_\beta\}_{\beta\in B}$ — разбиение единицы для $\mathcal{V}$.
Рассмотрим $\tau: B\to A$ — отображение, сопоставляющее каждому β свою α при вписывании.
Тогда $\mu_\alpha(x)=\sum\limits_{\tau^{-1}(\alpha)}\lambda_{\tau^{-1}(\alpha)}(x)$ является разбиением единицы для $\mathcal{U}$.

def. 1) Топологическое пространство X называется локально компактным, если $\forall x \in X$ существует компактная окрестность;

2) $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ называется локальным покрытием, если $\forall x \in X \; \exists U_x : U_x$ пересекает конечное число U_i;

3) X называется паракомпактным, если в любое покрытие можно вписать локально конечное.

Th. Любое хаусдорфово, локально компактное топологическое пространство со счётной базой является паракомпактным.

Proof.

Lem. ~~У~~ У пространства из условия существует счётная база $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $Cl(U_j)$ — компакт.

Proof. Рассмотрим счётную базу $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ — есть из условия

Выберем в ней элементы с компактным замыканием $U_j = V_{i_k}$.

Рассмотрим $U \subseteq X$ и $x \in U$.

Т.к. X — локально компактна, то $\exists K_x \ni x$ — компактная.

Выберем элемент базы $V_{i(x)} \ni x$.

Тогда $V_{i(x)} \subset K_x \cap U$, а тогда и замыкания:

$$Cl(V_{i(x)}) \subset Cl(K_x \cap U) \subset K_x$$

т.к. K_x — компакт, а X — хаусдорфово, то $K_x \subseteq X$ и $Cl(K_x) = K_x$.

А значит $Cl(V_{i(x)})$ — компакт, как замкнутое подмножество компакта.

Т.о., $V_{i(x)}$ обладает компактным замыканием, а значит $U_{j(x)} = V_{i(x)}$.

Тогда для каждого $x \in U$ найдём такие $U_{j(x)}$ и получим, что $U = \bigcup_{x \in U} U_{j(x)}$ — объединение не более, чем счётного т.к. V_i не более чем счётно.

Т.к. U_j будут счётной базой с необходимым условием.

Lem. Для пространства из условия существует набор исчерпывающих компактов $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$, т.е. $X = \bigcup_{i \in I}^{\infty} G_i$; $Cl(G_i)$ — компакт и $Cl(G_i) \subset G_{i+1}$.

Proof Приведём пример построения такого набора:

Рассмотрим $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базу из предыдущей леммы.

Пусть $G_1 = U_1$ и мы уже построили $G_i = U_{j_1} \cup U_{j_2} \cup \ldots \cup U_{j_i}$.

Рассмотрим $j_{i+1} > j_i$ — число, что $Cl(G_i) \subset \bigcup_{j=1}^{j_{i+1}} U_j$

Тогда $G_{i+1} = \bigcup_{j_1}^{j_{i+1}} U_k$.

Пусть $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — покрытие X.

Рассмотрим $\underbrace{Cl(G_i)\setminus G_{i-1}}_{\text{замкнутое подмножество компакта, } Cl(G_i) \text{ - компакт.}} \subset \underbrace{G_{i+1}\setminus Cl(G_{i-2})}_{\text{открытое.}}$.

Понятно, что $\forall i\geq 3$:

$\mathcal{U}\cap(Cl(G_i)\setminus G_{i-1})$ — покрытие для $Cl(G_i)\setminus G_{i-1}$.

Т.к. компакт, то выберем конечное подпокрытие $\{V_{i,k}\}_{k=1}^{n_i}$.

Для $i=2$: $Cl(G_2)\setminus G_1$ выберем конечное покрытие в $G_3\cap\mathcal{U}$.

Тогда $\mathcal{V}=\{V_{i,k}\}_{i=1}^{\infty}$ — искомое локально конечное измельчение $\mathcal{U}$.

Conseq. Для любого n-мерного гладкого многообразия M существует лок. конечный атлас $\{(V_i;\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что:

1) $\varphi_i(V_i)\subset D_2^n$;

2) $W_i=\varphi_i^{-1}(D_1^n)$ покрывают M.

VI. Для любого покрытия $\mathcal{U}$ многообразия M существует подчинённое ему разбиение единицы.

Proof. Измельчим $\mathcal{U}$ до покрытия из следствия $\{(V_i;\varphi_i)\}_{i=1}^{\infty}$.

Положим $\mu_i(x)=\begin{cases}\mu(\varphi_i(x)) & ,x\in V_i\\ 0 & ,\text{иначе.}\end{cases}$ (1) 1°. это шапочка

Понятно, что $supp(\mu_i)\subset V_i$;

Рассмотрим $\lambda_i(x)=\dfrac{\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(x)}$. Тогда $supp(\lambda_i)\subset V_i$; $supp(\lambda_i)$ лок. конечен

$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x)=\dfrac{\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(x)}=1.$; $0\leq\lambda_i\leq 1$.

А значит $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — разбиение единицы.

Conseq. Для любых замкнутых в многообразии множеств A и B, что $A\cap B=\emptyset$ существует гладкая функция $\mu: M\to\mathbb{R}$ такая, что

$\mu|_A=1$; $\mu|_B=0$; $0\leq\mu\leq 1$ $\forall x\in M$.

Proof. Т.к. $\{M\setminus A; M\setminus B\}$ — покрытие, то по нему можно построить разбиение единицы $\{\lambda_1,\lambda_2\}$.

Тогда $\mu=\lambda_2$ удовлетворяет условию.

③ Касательный вектор как дифференцирование в точке алгебры гладких функций. Лемма Адамара. Размерность касательного пространства.

def. Дифференцированием $v: C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ в точке $p \in M$ называется отображение, что:

1) $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$;
2) $v(fg) = f(p)\cdot v(g) + g(p)\cdot v(f)$.

def. Касательным пространством в точке $p \in M$ назовем множество

$$T_pM = \{ v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ — дифференцирование в точке } p \}.$$

NB. $v(\mathrm{const}) = 0$

Proof. $v(1) = v(1\cdot 1) = 2\cdot v(1) \Rightarrow v(1) = 0$;

$v(\mathrm{const}) = v(\mathrm{const}\cdot 1) = \mathrm{const}\cdot v(1) = 0$.

Lem. [о локализации]. Пусть $f|_U = g|_U$ для некоторого $U \subset M$. Тогда $v(f) = v(g)$ для любой точки $p \in U$.

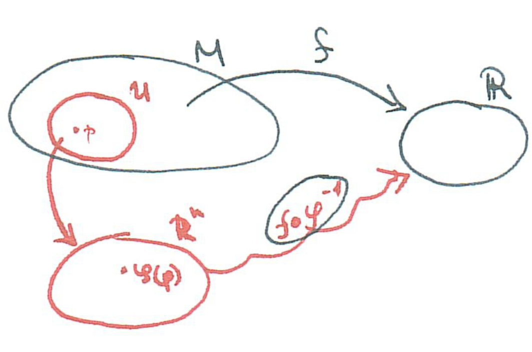
Proof. Рассмотрим $h = f - g$. Очевидно, что $h|_U = 0$.
Рассмотрим открытое множество V: $Cl(V) \subset U$.
Из следствия о разбиении единицы существует $\mu: M \to \mathbb{R}$, что
$\mu|_{M\setminus U} = 1$; $\mu|_{Cl(V)} = 0$, $0 \le \mu \le 1$.
Тогда $h = \mu \cdot h$,
Рассмотрим $v(h) = v(\mu\cdot h) = \underbrace{\mu(p)}_{0\text{, ибо } p\in U}\cdot v(h) + \underbrace{h(p)}_{0}\cdot v(\mu) = 0$,

а значит $v(h) = 0 \Leftrightarrow v(f-g) = 0 \Leftrightarrow v(f) = v(g)$.

NB. Пусть (U, φ) — карта, содержащая $p \in M$.

$$D_i|_p(f) = \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

T_pM?



Lem. [Адамара]

Пусть f-гладкая, $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in U$.

Тогда $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\cdot g_i(x)$, где $g_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ~~гладкая~~.

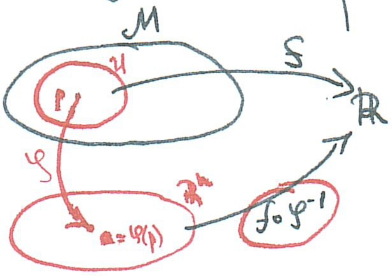
Proof.

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big(f(tx+(1-t)a)\big)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx+(1-t)a)\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\cdot\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx+(1-t)a)\,dt}_{g_i(x)} = \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)\, g_i(x)$$

Th. $T_pM = \langle \partial_1|_p, \partial_2|_p, \dots, \partial_n|_p\rangle_{\mathbb{R}}$, где $n = \dim M$.

Proof. Рассмотрим некоторую карту $(U;\varphi)$. Пусть $p\in U$; $a = \varphi(p)$.



$$(f\circ\varphi^{-1})(x) = (f\circ\varphi^{-1})(a) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\cdot g_i(x),$$ причём

по лемме Адамара

$$\underbrace{\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(a)}_{\partial_i|_p} = g_i(a).$$

Тогда $f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i\circ\varphi - a_i)\cdot(g_i\circ\varphi) =$

$= f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i\circ\varphi - a_i)\cdot h_i$, причём $h_i(p) = (\partial_i|_p)(f)$.

Пусть $v\in T_pM$.

$$v(f) = v\Big(f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x_i\circ\varphi - a_i)\cdot h_i\Big) =$$

$$= \underbrace{v(f(p))}_{0} + \sum_{i=1}^{n} v\big((x_i\circ\varphi - a_i)h_i\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big(\underbrace{(x_i\circ\varphi - a_i)(p)}_{0}\cdot v(h_i) + h_i(p)\cdot \underbrace{v(x_i\circ\varphi - a_i)}_{v(x_i\circ\varphi)}\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{h_i(p)}_{(\partial_i|_p)(f)}\cdot v(x_i\circ\varphi) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v(x_i\circ\varphi)\,\partial_i|_p(f)}_{\text{линейная комбинация}}.$$

Рассмотрим $(\partial_i|_p)(\underset{x_j\circ\varphi}{f_j}) = \frac{\partial(f_j\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \frac{\partial(x_j)}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \delta_{ij}$

Т.о., матрица $\|(\partial_i|_p)(f_j)\|_{i,j=1}^{n}$ — не вырождена $\Rightarrow$

$\Rightarrow \{\partial_i|_p\}$ — ЛНЗ.

Т.о., $\langle\partial_i|_p\rangle$ — базис.

NB. $\dim T_pM = \dim M$.

④ Алгебра ростков гладких функций. Эквивалентность трех определений касательного пространства.

def. Кольцом ростков $C^\infty(M)_p$ называется множество

$$\{f: M \to \mathbb{R}\} \Big/ f \sim g \Leftrightarrow f|_U = g|_U \ \forall U \underset{p\in}{\subseteq} M.$$

prop. Множество $m_p = \{f \in C^\infty(M)_p : f(p) = 0\}$ является идеалом $C^\infty(M)_p$,
то есть $\forall g \in m_p \ \forall f \in C^\infty(M)_p \Rightarrow f \cdot g \in m_p$.

cor. Множество $m_p^2 = \{\sum_{i=1}^n f_i g_i : f_i, g_i \in m_p\}$ является идеалом m_p.

Stat. $T_pM \underset{iso}{\cong} \left(m_p / m_p^2\right)^*$

Proof. Рассмотрим $v \in T_pM$. ~~…~~ Т.к. $v(\underbrace{\sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i}_{\in m_p^2}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n (f_i(p) \cdot v(g_i) + g_i(p) \cdot v(f_i))}_{0}$, $f_i(p) = 0$, т.к. $f_i \in m_p$; $g_i(p) = 0$, т.к. $g_i \in m_p$,

то факторизуем по m_p^2.

Рассмотрим $l \in \left(m_p / m_p^2\right)^*$ и $v_l(f) = l([f - f(p)])$.

Докажем, что такое отображение – дифференцирование в точке p.

Очевидно, что оно линейное.

$$v_l(f \cdot g) = l([fg - fg(p)]) =$$

$$= l(\underbrace{[(f-f(p))(g-g(p))]}_{\in m_p^2} \to 0) + l([(f-f(p)) \cdot g(p)]) + l([(g-g(p)) \cdot f(p)]) =$$

$$= g(p) \cdot v_l[f - f(p)] + f(p) \cdot v_l[g - g(p)].$$

Т.о., это действительно дифференцирование.

Prop. Пусть $\widetilde{T_pM} = \{\tilde\gamma : (-1;1) \to M \mid \tilde\gamma(0) = p\} \Big/ \tilde\gamma_1 \sim \tilde\gamma_2 \Leftrightarrow \frac{d(\varphi \circ \tilde\gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ \tilde\gamma_2)}{dt}\Big|_{t=0}$ (отображение у карты)

Тогда $\widetilde{T_pM} \underset{iso}{\overset{\Sigma}{\cong}} T_pM$. $([\tilde\gamma] \overset{\Sigma}{\mapsto} \tilde\gamma'(0))$.

Proof. Проверим корректность отношения эквивалентности:
(то есть, что оно не зависит от выбора карты)

Пусть $(V; \psi)$ – другая карта, что $p \in V$.

$$\frac{d(\psi \circ \tilde\gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \tilde\gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \cdot \frac{d(\varphi \circ \tilde\gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0}$$

определяется лишь связью между картами и не зависит от $\tilde\gamma_1$.

Проверим корректность отображения Σ:
(то есть, что элементы у одного класса отобразятся в одно значение).

$\tilde\gamma'(0)(f) = (f \circ \tilde\gamma)'(0)$; в координатах: $\tilde\gamma'(0) = \sum_i \frac{d\tilde\gamma_i}{dt} \partial_i$.

Пусть $[\tilde\gamma_1] = [\tilde\gamma_2]$, тогда $\frac{d(\varphi \circ \tilde\gamma_1)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(\varphi \circ \tilde\gamma_2)}{dt}\Big|_{t=0}$.

Рассматривая в качестве $\varphi := x_i$ для всех $i = 1 \ldots n$, получаем

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{d(x_i \circ \tilde\gamma_1)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{d\tilde\gamma_{1i}}{dt} \partial_i = \tilde\gamma_1'(0) \\ \sum_{i=1}^n \frac{d(x_i \circ \tilde\gamma_2)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{d\tilde\gamma_{2i}}{dt} \partial_i = \tilde\gamma_2'(0) \end{aligned}\right\} \to \tilde\gamma_1'(0) = \tilde\gamma_2'(0).$$

Для изоморфизма докажем биективность:

а) Инъективность: $\tilde{\gamma}_1'(0) = \tilde{\gamma}_2'(0) \Rightarrow \frac{d\tilde{\gamma}_{1i}}{dt} = \frac{d\tilde{\gamma}_{2i}}{dt} \Rightarrow [\tilde{\gamma}_1] = [\tilde{\gamma}_2]$.

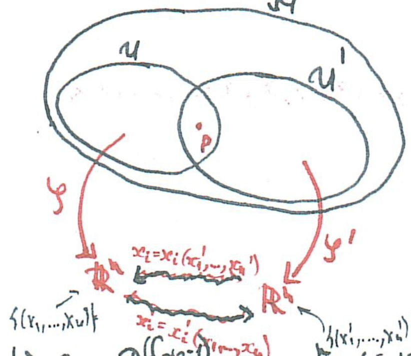
б) Сюръективность:] $v = \sum_i v_i \partial_i|_p$; $\tilde{\gamma}(t) = \varphi^{-1}(tv_1, \dots, tv_n)$.

Тогда $\tilde{\gamma}'(0) = \sum_i \frac{d\tilde{\gamma}_i}{dt} \partial_i|_p = \sum_i v_i \partial_i|_p = v$.

⑤ Координатное описание касательных векторов. Дифференциал отображения, основные его свойства.

Prop. $\underset{\in T_pM}{v} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \partial_i|_p$.

NB. [преобразование координат касательного вектора].
Рассмотрим две карты (U,φ) и $(U';\varphi')$. Пусть $p\in U\cap U'$.
Пусть координаты в карте $(U;\varphi)$ преобразуются к координатам в карте $(U';\varphi')$ как $x'_i = x'_i(x_1,\dots,x_n)$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, а обратно — $x_i = x_i(x'_1,\dots,x'_n)$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.



~~$(\partial_i|_p)(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x'_i}\cdot\frac{\partial x'_i}{\partial x_i}(p) = \sum_{i=1}^n\left(\partial'_i|_p\cdot\frac{\partial x'_i}{\partial x_i}(p)\right)(f) \Rightarrow$ Если $v=\sum_{i=1}^n v_i\partial_i|_p$, а $v'=\sum_{i=1}^n v'_i\partial'_i|_p$, то $v_i=\sum_{i=1}^n\frac{\partial x'}{\partial x}(p)\cdot v'_i$~~

$$(\partial_i|_p)(f) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi'^{-1}\circ x'_j)}{\partial x_i}(\varphi(p)) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial(f\circ\varphi'^{-1})}{\partial(x'_j)}(\varphi(p))}_{(\partial'_j|_p)(f)}\cdot\frac{\partial(x'_j)}{\partial(x_i)}(\varphi(p)) = \sum_{j=1}^n (\partial'_j|_p)(f)\cdot\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(\varphi(p)).$$

Т.о. $v = \sum_{i=1}^n v_i\partial_i|_p = \sum_{i=1}^n v_i\cdot\sum_{j=1}^n(\partial'_j|_p)\cdot\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(\varphi(p)) = \sum_{j=1}^n\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}(\varphi(p))}_{v'_j}\Big)(\partial'_j|_p) =$
$= \sum_{j=1}^n v'_j\partial'_j|_p \Rightarrow \boxed{v'_j = \sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}}$

def. Пусть $F: M\to N$ — гладкое отображение. Дифференциалом в точке $p\in M$ назовем отображение

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N,\quad dF_p(v)(f) = v(f\circ F).$$

NB. Дифференциал произведения:

$$dF_p(v)(f\cdot g) = v((f\cdot g)\circ F) = v((f\circ F)\cdot(g\circ F)) =$$
$$= (g\circ F)(p)\cdot v(f\circ F) + (f\circ F)(p)\cdot v(g\circ F) =$$
$$= (g\circ F)(p)\cdot dF_p(v)(f) + (f\circ F)(p)\cdot dF_p(v)(g).$$

Lem. [Основные свойства].
1) dF_p — линейное;
2) Дифференциал композиции: $d(G\circ F)_p = dG_{F(p)}\circ dF_p$;
3) $d(\mathrm{Id}_M)_p = \mathrm{Id}_{T_pM}$;
4) F — диффеоморфизм $\Rightarrow$ dF_p обратим $\forall p\in M$, причём $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Proof. 1) Линейность касательного вектора;
2) $d(G\circ F)_p(v)(f) = v(f\circ G\circ F) = v((f\circ G)\circ F) = dF_p(v)(f\circ G)$
3) $d(\mathrm{Id}_M)_p(v)(f) = v(f\circ \mathrm{Id}_M) = v(f) = \mathrm{Id}_{T_pM}$;
4) $\mathrm{Id}_{T_pM} = d(\mathrm{Id}_M)_p = d(F\circ F^{-1})_p = dF_p\circ d(F^{-1})_{F(p)} \Rightarrow (dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Conseq. Многообразия разных размерностей не диффеоморфны.

Proof. Если есть диффеоморфизм F, то dF_p - изоморфизм, но это возможно только при равных размерностях.

Prop. Пусть $M_1, \dots, M_s$ – гладкие многообразия.

Тогда $T_p(M_1 \times \dots \times M_s) \overset{\alpha}{\underset{iso}{\rightarrow}} T_{p_1}M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_s}M_s$. ($\oplus$ есть прямая сумма, т.е. $v_1 \oplus \dots \oplus v_s = \{(v_1, \dots, v_s)\}$; $(v_1, \dots; v_s) + (v_1', \dots; v_s') = (v_1 + v_1'; \dots; v_s + v_s')$)

$v \overset{\alpha}{\longmapsto} (d\pi_{1\,p_1}(v), \dots, d\pi_{s\,p_s}(v))$

проекции на M_i

Proof. Рассмотрим $\beta: T_{p_1}M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_s}M_s \longrightarrow T_p(M_1 \times \dots \times M_s)$.

Пусть $M_i \overset{b_i}{\longrightarrow} M_1 \times \dots \times M_s$ – вложения

$x \overset{b_i}{\longmapsto} (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_s)$.

Зададим $\beta((v_1, \dots, v_s)) = \sum_{i=1}^{s} (db_i)_{p_i}(v_i)$.

Заметим, что $\alpha \circ \beta = Id_{T_{p_1}M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_s}M_s}$, а значит α - сюръективно.

Т.к. $\dim(T_p(M_1 \times \dots \times M_s)) = \dim(T_{p_1}M_1 \oplus \dots \oplus T_{p_s}M_s)$, то в силу сюръективности α, оно также и биективно.

Отсюда и изоморфизм.

Prop. Пусть $F: M^m \longrightarrow N^n$ – гладкое, причём M-связное.

Если $dF_p \equiv 0 \quad \forall p \in M$, то $F \equiv const$.

Proof. Пусть $y \in F(M^m)$. Рассмотрим прообраз $F^{-1}(y)$.

Т.к. это прообраз замкнутого, то он замкнут.

Рассмотрим $q \in F^{-1}(y)$. Пусть $q \in \underbrace{U \rightsquigarrow \varphi}_{\text{карта в } M}$, $F(q) \in \underbrace{V \rightsquigarrow \psi}_{\text{карта в } N}$

Пусть координаты: для $\varphi = (x_1, \dots, x_m)$; $\psi = (y_1, \dots, y_n)$ - проекции

Рассмотрим $\underbrace{dF_q(\partial_i|_q)}_{0 \text{ по условию}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i}(q)\, \partial_i|_{F(q)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow y_j \circ F = const$ ↳ а это просто проекция.

Т.о. $F \equiv const$.

⑥ Касательное и кокасательное расслоение.

Prop. $TM = \bigsqcup_{p\in M} T_pM$ является гладким многообразием размерности $2n$, где $n = \dim M$.

Причём проекция $TM \xrightarrow{\pi} M$ является гладким отображением.

$(p;v) \xrightarrow{\pi} p$

Proof. Пусть $(U;\varphi)$ — некоторая карта M такая, что $p \in U$.

Рассмотрим все касательные векторы к точкам из U: $\pi^{-1}(U)$.

Положим $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \partial_i|_p \xmapsto{\tilde{\varphi}} (x_1(p), \dots, x_n(p), v_1, \dots, v_n).$$

Очевидно, что $\tilde{\varphi}$ — биективный гомеоморфизм между касательными векторами в U: $\pi^{-1}(U)$ и $\mathbb{R}^{2n}$.

Покажем, что $(\pi^{-1}(U); \tilde{\varphi})$ являются согласованными картами в TM;

Пусть для карты $(V;\psi)$ есть $(\pi^{-1}(V); \tilde{\psi})$

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = \left(x'_1, \dots, x'_n, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_j}{\partial x_1} v_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'_j}{\partial x_n} v_j\right)$$

просто якобиан, поэтому отображение непрерывное C^∞

А значит карты согласованы,

отсюда, рассматривая атлас на M $\{(U_\alpha;\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$,

можно задать атлас на TM $\{(\pi^{-1}(U_\alpha); \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$.

То есть TM действительно гладкое многообразие.

А π оказывается проекцией на первые n координат, что, очевидно, гладкое.

def. TM называется касательным расслоением.

def. $T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^*M$ называется кокасательным расслоением.

⑦ Векторные расслоения, их морфизмы и сечения. Примеры. Тривиальность расслоений в терминах сечений. Функции перехода, условие коцикла для них.

def. Гладкое отображение $\pi: E \to M$ называется гладким векторным расслоением ранга r, если:

1) $E_p = \pi^{-1}(p)$ — векторное пространство размерности r;
2) $\forall p \in M \ \exists U_p \subset M$ и $\exists h: \pi^{-1}(U_p) \xrightarrow[\text{diffeo}]{\sim} U_p \times \mathbb{R}^r$ такое, что

$$\underbrace{E_p \xrightarrow{h|_p} \{p\}\times\mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r}_{\text{изоморфизм векторных пространств}}$$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_p) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\pi|_{U_p}"'] & U_p\times\mathbb{R}^r \arrow[d, "pr_1"] \\ & U_p \end{tikzcd}$$

NB. E называется тотальным пространством расслоения; M называется базой расслоения.

Ex.
1) Тривиальное расслоение $M\times\mathbb{R}^r \xrightarrow{\pi} M$,
2) $TM \xrightarrow{\pi} M$;
3) $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi_{r,n}} Gr(r,n)$ — универсальное расслоение ранга r.

Prop. Рассмотрим векторное расслоение $\pi: E\to M$ ранга r и пару открытых окрестностей $U_\alpha; U_\beta \subset M$ с соответствующими диффеоморфизмами:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "h_\alpha"', "\text{diffeo}"] \arrow[dr] & U_\alpha\times\mathbb{R}^r \arrow[d] \\ & U_\alpha \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_\beta) \arrow[r, "h_\beta"', "\text{diffeo}"] \arrow[dr] & U_\beta\times\mathbb{R}^r \arrow[d] \\ & U_\beta \end{tikzcd}$$

Пусть $U_\alpha\cap U_\beta \neq \varnothing$. Тогда можно рассмотреть окрестность $U_\alpha\cap U_\beta$:

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^r \arrow[dr] & \pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta) \arrow[l, "h_\alpha"'] \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[d] & (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^r \arrow[dl] \\ & U_\alpha\cap U_\beta & \end{tikzcd}$$

Рассмотрим отображение $h_\beta\circ h_\alpha^{-1}: (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^r \to (U_\alpha\cap U_\beta)\times\mathbb{R}^r$.

$$(p, v) \xmapsto{h_\beta\circ h_\alpha^{-1}} (p; g_{\alpha\beta}(p)\cdot v).$$

зависящая от точки p матрица ранга r
$g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to GL(r)$
гладкая

def. Такие функции $g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to GL(r)$ называются функциями перехода.

Stat. Набору $\{g_{\alpha\beta}: U_\alpha\cap U_\beta \to GL(r)$ — гладкие$\}_{\alpha,\beta}$ соответствует тривиализация некоторого расслоения $E\xrightarrow{\pi} M$ тогда и только тогда, когда

$$g_{\alpha\alpha} = 1 \ ; \quad g_{\alpha\beta}\cdot g_{\beta\gamma}\cdot g_{\gamma\alpha} = 1$$

← условие коцикла для функций перехода.

Proof. „⇒" Из предложения $h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : (p; v) \mapsto (p; g_{\alpha\beta}(p) v)$.

Рассмотрим случай „α, α"

$h_\alpha \circ h_\alpha^{-1} = Id. \Rightarrow g_{\alpha\alpha} = 1$.

? Рассмотрим случай коцикла:

~~[illegible]~~

„⇐": Подставим в условие цикла $\gamma = \alpha$:

$g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} \cdot g_{\alpha\alpha} = 1 \Rightarrow g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} = 1 \Rightarrow g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$.

Рассмотрим $E' = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $E = E' /_{(p; v) \sim (p; w) \Leftrightarrow w = g_{\alpha\beta} v}$.

Тогда для отображения $E \xrightarrow{\pi} M$ $g_{\alpha\beta}$ — функция перехода, а π — расслоение.

def. Отображение $M \supset U \to E$ называется сечением расслоения π, если $\pi \circ s = 1|_U$.

def. $\{s_1, \dots, s_r\}$ — базисный набор сечений над U, если $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$ есть базис $E_p = \pi^{-1}(p)$ $\forall p \in U$.

Ex. Базисный набор над тривиальным расслоением $M \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\pi} M$:

$s_i(p) = \{p\} \times e_i$. Для него, очевидно, $\pi \circ s = 1$.

(e_i — базисный вектор в $\mathbb{R}^r$)

Причём это базисный набор над всем M.

Stat. 1) По тривиализации можем построить базисный набор сечений:

$$\pi^{-1}(p) \underset{\text{diffeo}}{\xrightarrow{h_\alpha}} U_\alpha \times \mathbb{R}^r \longleftarrow \tilde{e}_i \text{ — базисный набор тут}$$

$$\searrow U_\alpha \swarrow$$

Тогда $s_i = h^{-1}(\tilde{e}_i)$ — базисный набор сечений в $\pi^{-1}(p)$.

2) По базисному набору сечений можно построить тривиализацию:

$\{s_1, \dots, s_r\}$ — базисный набор сечений.

Тогда $h: \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot s_i(p) \mapsto (p; \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i(p))$ — тривиализация.

Prop. $\mathcal{F}_\pi(U) = \{ s: U \to E : s \text{ — сечение } \pi \}$ является модулем над $C^\infty(U)$,

то есть: 1) $(s_1 + s_2)(p) = s_1(p) + s_2(p)$;

2) $\forall f \in C^\infty(U)$: $(f \circ s)(p) = f(p) \cdot s(p)$.

⑧ Операции над расслоениями. Конструкция универсального расслоения, основная теорема.

I. Двойственное расслоение:

Пусть $E \xrightarrow{\pi} M$ — расслоение.

Рассмотрим в каждом слое двойственное пространство.

$$E^* \xrightarrow{\pi_*} M \quad \text{, где } E^* = \bigcup_{p\in M} E_p^*$$

II. Тензорное произведение расслоений:

Пусть $\forall i \le t$: $\pi_i : E_i \to M$ — расслоения;

$E_1 \otimes \ldots \otimes E_t \xrightarrow{\pi^{\otimes}} M$ — тензорное произведение расслоения.

То есть если $\{s^i_{i_1}, \ldots, s^i_{i_{k_i}}\}$ — базисный набор сечений для π_i,

то $\{s^1_{i_j} \otimes \ldots \otimes s^t_{i_j}\}_j$ — базисный набор сечений для $\pi^{\otimes}$

III. Внешнее произведение расслоений:

Пусть $\pi_i : E_i \to M$ — расслоения $\forall i \le t$.

Тогда $E^{\wedge t} \xrightarrow{\pi^{\wedge t}} M$ является подрасслоением в $\pi^{\otimes}$;

def. Пусть $E \xrightarrow{\pi} M$ и $\tilde{E} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{M}$ — расслоения.

Отображением между расслоениями π и $\tilde{\pi}$ называется пара гладких отображений $(\varphi_E; \varphi_M)$:

$\varphi_E : E \to \tilde{E}$, а $\varphi_M : M \to \tilde{M}$ таких, что

$\tilde{\pi} \circ \varphi_E = \varphi_M \circ \pi$ и $\varphi_E(\pi^{-1}(p)) = \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_M(p))$.

То есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi_E"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

def. Пусть $\tilde{E} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{M}$ — расслоение, а также $\varphi_M : M \to \tilde{M}$.

~~Тогда если существует $\varphi_E : \pi^{-1}(p) \xrightarrow{iso} \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_M(p))$~~,

Тройка (то тройка) $(E; \pi; \varphi_E)$ называется pullback, если

$\forall p \in M$: $\varphi_E : \pi^{-1}(p) \xrightarrow{iso} \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_M(p))$. То есть достраиваем диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi_E"] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ M \arrow[r, "\varphi_M"] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

NB. Рассматривая в качестве $E_J = \bigsqcup_{p \in M} \tilde{E}_{\varphi(p)}$, получим E_J, а также $\pi(E_p) = p$, а φ_E просто сопоставляет одинаковые слои.

def. $\mathcal{F} \xrightarrow{\pi_{r,n}} Gr(r,n)$ называется универсальным расслоением.

$\pi^{-1}_{r,n}(p) = p$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности r.

Th. Пусть $E \xrightarrow{\pi} M$ — расслоение ранга r, причём M — компакт. Тогда существует гладкое отображение $\Phi : M \to Gr(r;N)$, что E является pullback универсального расслоения

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\pi_{r,N}"] \\ M \arrow[r, "\Phi"'] & Gr(r;N) \end{tikzcd}$$

Proof. Рассмотрим базисный набор $\langle l_1, \dots, l_r \rangle$ для $(\mathbb{R}^r)^*$.

Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — конечное покрытие M, с соответствующими диффеоморфизмами $\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow[\text{diffeo}]{h_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^r$

Тогда можем выбрать базисный набор сечений над каждым U_α: $\langle l_1^\alpha, \dots, l_r^\alpha \rangle$.

Рассмотрим набор замкнутых подмножеств U_α: $\{V_\alpha\}$ и сузим базисные сечения до них: $\langle l_1^\alpha ; \dots ; l_r^\alpha \rangle$.

По т. о разбиении единицы для замкнутых множеств можем найти функции $(\tilde{l}_1^\alpha; \dots; \tilde{l}_r^\alpha)$, что

$$\tilde{l}_i^\alpha\big|_{V_\alpha} \equiv 1 \ ; \ \tilde{l}_i^\alpha\big|_{M \setminus U_\alpha} \equiv 0 \ ; \quad 0 \le \tilde{l}_i^\alpha \le 1 .$$

Тогда набор $(l_1, \dots, l_N) = \bigcup_{\alpha\in A} (\tilde{l}_1^\alpha; \dots; \tilde{l}_r^\alpha)$ будет в любой точке иметь ранг r.

Пусть $\forall p \in M$: $E_p = \langle e_1, \dots, e_r \rangle$.

Зададим $\varphi_E : E \to \mathcal{F}$: $\varphi_E(E_p) = W_p := \| l_j(e_i) \|_{\substack{1\le i\le r \\ 1 \le j \le N}}$ матрица $r\times N$ ранга r.

А $\Phi(p) := \{ r \text{ строк } W_p \} \in Gr(r;N)$.

И получим pullback.

9. Теорема об обратной функции, локальные диффеоморфизмы. Следствия.

Th. Пусть $f: M^n \to N^n$ — гладкое отображение и df_p невырожден для какой-то точки $p \in M$.
Тогда f — локальный диффеоморфизм, т.е.
$$\exists U_p \subset M : \; U_p \xrightarrow[\text{diffeo}]{\sim} f(U_p).$$

Proof.

NB. Также можно не фиксировать размерность многообразий. Однако тогда необходимо требовать обратимость df_p.

Ex. Рассмотрим вложение $\mathbb{R}^k \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$. Очевидно, что di_p обратим.
$\{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)\}$

⑩ „Классическая теорема о неявной функции, подмногообразия. Погружения и вложения, свойства и примеры. Подмногообразия, как образ некоторого вложения.

def. $A \subset M$ — подмногообразие размерности k, если
$\forall p \in A \quad \exists (\mathcal{U}, \varphi)_{p\in} : \quad \varphi(\mathcal{U} \cap A) = \varphi(\mathcal{U}) \cap \mathbb{R}^k$.

т.е. в локальных координатах A задаётся, как $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$.

def. Окрестности $(\mathcal{U}; \varphi)$ из определения называются нормальными.

def. Пусть $\{(\mathcal{U}_i; \varphi_i)\}_{i \in I}$ — набор нормальных карт, тогда
$\{(\mathcal{U}_i \cap A;\ \varphi_i|_{A \cap \mathcal{U}_i})\}_{i \in I}$ — атлас на подмногообразии A.

def. Отображение $f: M \to N$ называется погружением (immersion), если $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ — инъективен.

def. Погружение f называется вложением, если $M \underset{homeo}{\simeq} f(M)$.

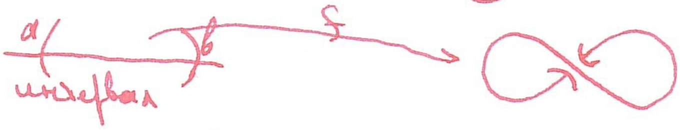
NB. Понятно, что вложение возможно только при $\dim M \leq \dim N$.

Ex. 1) S^1 — окружность

$S^1 \vee S^1$

— погружение, но не вложение.

2)



— инъективное погружение, но всё еще не вложение.

Stat. Пусть $f: M \to N$ — инъективное погружение, причём M — компактное. Тогда f — вложение.

Proof. ?

Prop. $A \subset N$ — подмногообразие тогда и только тогда, когда A есть образ некоторого вложения $f: M \to N$.

Proof.

11) Критические и регулярные точки и значения. Слабая теорема о неявной функции.

def. Пусть $f: M \to N$ — гладкое отображение.
$p \in M$ называется регулярной точкой для f, если df_p сюръективен.
Иначе p называется критической.

def. $q \in N$ называется регулярным значением функции f, если $f^{-1}(q)$ состоит из регулярных точек.
Иначе q называется критическим значением.

NB. Для $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ p — критическая тогда и только тогда, когда $df_p \equiv 0$.

NB. Если $\dim M < \dim N$, то все точки — критические, т.к. df_p не сюръективен.

Th. [слабая теорема о неявной функции].
Пусть $f: M^m \to N^n$ — гладкое отображение ($m \geq n$) и $q \in N$ — регулярное значение f.
Тогда $f^{-1}(q)$ — подмногообразие размерности $m-n$.

Proof. Покажем, что $\underset{\subseteq M}{U_i} \cap f^{-1}(q) \subset U_i$ — подмногообразие размерности $m-n$.
Пусть $f(U_i) \subset V_i$. Рассмотрим соответствующий V_i диффеоморфизм ψ_i. Т.к. $d(f \circ \varphi_i^{-1})_p = df_p \cdot d\varphi^{-1}_p$ — сюръективен, то $\varphi_i(p)$ — регулярное ~~регулярная точка~~.
А значит можем рассматривать локально для отображения $\underbrace{\psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}}_{\text{обозначим теперь это } f: U_{\subseteq M} \to \mathbb{R}^n}$ и точки $\psi_i(q)$.

Для конкретики возьмём $q = 0$.

Пусть $p = f^{-1}(0) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_m) = 0. \end{cases}$ Не теряя общности, $p = 0$.

Т.к. p — регулярная, то ранг матрицы Якоби равен n.
Тогда ~~как~~ есть минор, отличный от 0.
По классической теореме о неявной функции есть разрешающие эту систему функции $x_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_m)$ $\forall i \leq n$.
Тогда $f^{-1}(0) = \Gamma_{\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ — подмногообразие размерности $m-n$.

⑫ Трансверсальность. Сильная теорема о неявной функции.

Def. Гладкое отображение $f: M \to N$ трансверсально к подмногообразию A многообразия N ($f \pitchfork A$), если $\forall p \in f^{-1}(A)$ $df_p(T_pM) + T_{f(p)}A = T_{f(p)}N$.

NB. По факту это обратное к понятию касательного — привычное пересечение.

Th. [Сильная теорема о неявной функции].

Пусть $f: M^m \to N^n$ — гладкое отображение; A — подмногообразие N размерности k, $f \pitchfork A$.

Тогда $f^{-1}(A) \subset M$ — подмногообразие M, причем:

$$\underbrace{\dim M - \dim f^{-1}(A)}_{\text{так называемая коразмерность } \operatorname{codim}(f^{-1}(A))\ f^{-1}(A)} = \underbrace{\dim N - \dim A}_{\operatorname{codim} A}.$$

Д-во. Аналогично слабой теореме будем рассматривать вместо $A \subset N$ некую карту $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, то есть $f: M \to \mathbb{R}^n$; $f \pitchfork \mathbb{R}^k$.

Рассмотрим $g = \underset{\uparrow}{\pi} \circ f : M \to \mathbb{R}^{n-k}$. $g^{-1}(0) = f^{-1}(\pi^{-1}(0)) = f^{-1}(\mathbb{R}^k)$.

проекция на $n-k$ последних координат $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{n-k}$

Покажем, что 0 — регулярное значение для g:

Т.к. $f \pitchfork A$, то $df_p(T_pM) + \underset{\mathbb{R}^k}{T_p\mathbb{R}^k} = \underset{\mathbb{R}^n}{T_p\mathbb{R}^n}$.

Применим π с обеих сторон:

$\pi(df_p(T_pM)) + \underset{0}{\pi(\mathbb{R}^k)} = \underset{\mathbb{R}^{n-k}}{\pi(\mathbb{R}^n)}$

В силу линейности π: $d\pi_f = \pi$;

Отсюда $\underbrace{(d\pi_{f(p)} \circ df_p)}_{\text{дифф. композиции}}(T_pM) = \mathbb{R}^{n-k}$;

$d(\underset{g}{\pi \circ f})_p(T_pM) = \mathbb{R}^{n-k}$;

А значит $(dg)_p$ — сюръективен, и p — регулярное значение g.

Тогда $g^{-1}(0) = f^{-1}(\mathbb{R}^k)$ — подмногообразие по слабой теореме о неявной функции, причем размерности $m-(n-k)$.

$m-(n-k)$

⑬ Теорема Сарда. Следствия из теоремы.

def. Говорят, что $A \subset \mathbb{R}^k$ имеет n-мерную меру 0: $\mu_n(A)=0$,
если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{I_i^n\}_{i=1}^{\infty} : \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i^n = A \ \& \ \sum_{i=1}^{\infty} Vol(I_i^n) < \varepsilon$.

набор n-мерных брусов

Lem. Пусть $A \subset \mathbb{R}^k$, причем $\mu_n(A) = 0$. $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — гладкое.
Тогда $\mu_n(f(A)) = 0$.

Proof.

def. Пусть M — n-мерное многообразие.
Говорим, что $A \subset M$ имеет меру 0, если
$\forall (U, \varphi)$ — карты M : $\varphi(A \cap U)$ имеет меру 0.

Th. [Сард]

$f: M \to N$ — гладкое.

Мн-во критич. значений имеет меру 0.

Proof

Лем. $A \in \mathbb{R}^n$ и $\mu_{n-1}(A \cap (\{c\} \times \mathbb{R}^{n-1})) = 0$. $\Rightarrow$ $\mu_n(A) = 0$.

C — критич. точки f.

Пусть $f: U \to \mathbb{R}^n$. Пусть $C_i = \{x \in U \mid$ все частные произв. порядка $\leq i$ обнуляются в $(\cdot)\, x\}$.

$C \supset C_1 \supset \ldots$

1) Докажем, что $\mu(f(C \setminus C_1)) = 0$.

Пусть $x^0 \in C \setminus C_1$ — критич. с ≥ 1 частн. произв. $\neq 0$. $\Rightarrow \exists \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_i^0) \neq 0$

Пусть $h: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$(x_1, \ldots, x_m) \xmapsto{h} (f(x_1); x_2, \ldots, x_m)$.

$dh = \left(\underbrace{\frac{\partial f_1(x^1)}{\partial x_1}}_{\neq 0}, 1, \ldots, 1\right)$ обратимо.

Тогда по т. об обратном отобр.

$\exists V \ni x^0,\ V' \in \mathbb{R}^m: V \underset{\text{diffeo}}{\overset{h}{\cong}} V'$

Пусть $g = f \circ h^{-1}: V' \to \mathbb{R}^n$. C' — критич. для g.

$g(C') = (f \circ h^{-1})(C') = f(h^{-1}(C')) =$
$= f(V \cap C)$

$g^t: (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$

$$J(g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & J(g^t) \end{vmatrix} = J(g^t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ критич. точки совпадают у g и g^t

М.М.И. по m.

$m = 0$: ok!

Пусть $\mu(\text{крит. знач. } g^t) = 0$ в $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

По Фубини $\mu(\text{крит. знач. } g) = 0$ в $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mu(g(C')) = \mu(f(V \cap C)) = 0$.

Покроем $C \setminus C_1$ такими V. Мера объединения 0

2) Докажем, что $\mu\left(f(C_i \setminus C_{i+1})\right)=0$.

$\exists\, x^0 \in C_i \setminus C_{i+1}$, $\measuredangle\ \omega(x) = \dfrac{\partial^? f}{\partial x_{1}\dots\partial x_{s_i}}$

$\exists\, \omega(x^0)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1}(x^0)\neq 0$

$\measuredangle\ h(x_1,\dots,x_m) = (\omega(x_1), x_2,\dots,x_m) : V \xrightarrow[\exists,\ \mathcal{J}\neq 0]{h} V'$.

$g = f\circ h^{-1}$.

$g(C_i\cap V) = \{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$.

$\measuredangle\ \tilde g : C_i\cap V \to \{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$.

$\tilde g\circ h^{-1}(C_i\cap V) = f(C_i\cap V)$

Накроем $C_i\setminus C_{i+1}$ такими V.

3) Найдём $k>>0 : \mu(f(C_k))=0$.

$\measuredangle\ I^m(\delta)$ и $x\in C_k\cap I^m(\delta)$

$$f(x+h) = f(x) + 0+0+\dots+0+R(x,h).$$

Разобьём I^m кубиками с ребром $\frac{\delta}{r}$.

$\exists\, x\in I_1^m$, где $I_1 = \{x+h \mid \|h\|\le \sqrt{m}\,\frac{\delta}{r}\}$

$$f(I_1^m)\subset I^n\left(\le 2c\left(\sqrt{m}\,\frac{\delta}{r}\right)^{k+1}\right)$$

$$Vol(f(I(\delta)))\le r^m\cdot(2c)^n\cdot\left(\frac{\sqrt{m}\cdot\delta}{r}\right)^{n\cdot(k+1)} = const\cdot r^{m-n(k+1)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

при $k>\frac{m}{n}-1$

Следств. 1) $\dim M<\dim N \Rightarrow \mu(f(M))=0$

2) $A\subseteq M$, $\dim A<\dim M \Rightarrow \mu(A)=0$.

3) Мн-во регулярных значений всюду плотно.

(14) Теорема Уитни о вложении.

Росл. Любое гладкое компактное многообразие M^n можно вложить в $\mathbb{R}^N$, где $N >> 0$.

Proof. Из следствия о разбиении единицы можно найти атлас $\{(U_i; \varphi_i)\}_{i=1}^m$, что $M = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i^{-1}(D_1^n)$;

$\varphi_i(U_i) \subset D_2^n$.

Также есть функция $\mu: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$\mu|_{\overline{D_1^n}} \equiv 1$; $\mu|_{\mathbb{R}^n \setminus D_2^n} \equiv 0$; $0 \le \mu \le 1$.

Рассмотрим $\mu_i = \begin{cases} \mu \circ \varphi_i & \text{на } U_i; \\ 0 & \text{на } M \setminus U_i. \end{cases}$

Тогда $\bigcup_{i=1}^m \mu_i^{-1}(1) = M$.

Рассмотрим $f_i(x) = \begin{cases} \mu_i(x) \cdot \varphi_i(x), & x \in U_i; \\ 0, & x \in M \setminus U_i. \end{cases}$

Утверждается, что ~~Тогда~~ $g = ((f_1; \mu_1), \ldots, (f_m; \mu_m))$, $g: M \to \mathbb{R}^{m \cdot (n+1)}$ — вложение.

$d(f_i; \mu_i)_x$ — инъективно, значит и dg_x.

Пусть $x \in \mu_i^{-1}(1)$; $y \neq x$.

1) Если $y \in \mu_i^{-1}(1)$, то $x, y \in U_i$ и в силу биективности φ_i получаем, что $\mu_i(x) \neq \mu_i(y)$.

2) Если $y \notin \mu_i^{-1}(1)$, то $\mu_i(y) = 0$, а $\mu_i(x) = \mu \circ \varphi_i \neq 0$.

Значит g — инъективно.

А тогда g — инъективное погружение компакта, а значит вложение.

Зам. Т.о., мы показали, что любое компактное многообразие можно вложить в $\mathbb{R}^{m \cdot (n+1)}$.

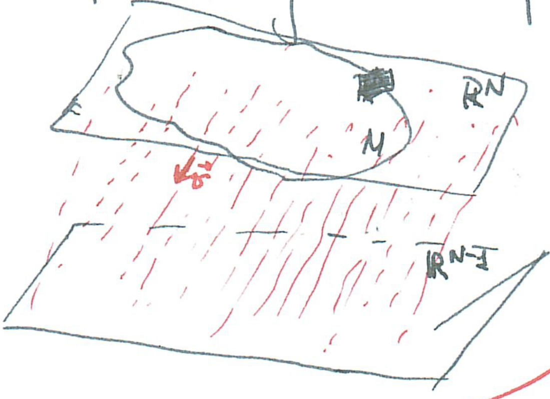
Th. [Уитни о вложении]

Любое гладкое компактное многообразие размерности n можно погрузить в $\mathbb{R}^{2n}$ и вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Proof. Пусть $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, где $N > 2n+1$ — число из предыдущего предложения.

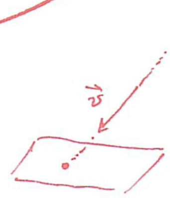
Покажем, что существует вложение в $\mathbb{R}^{N-1}$.

Рассмотрим вложение $\mathbb{R}^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, заданное, как проекция вдоль вектора π_v.



Покажем, что на самом деле существует вектор $v \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^{N-1}$ такой, что $\pi_v|_M$ — вложение.

Заметим, что, если $v \uparrow\uparrow \frac{x-y}{\|x-y\|}$, $x, y \in M$, то $\pi_v|_M$ — не инъективен.



точки x, y перейдут в одну, значит инъективности нет.

А также $d(\pi_v|_M)_p$ инъективен, когда $v \not\uparrow\uparrow \frac{x}{\|x\|}$.

Рассмотрим отображение $\sigma : (M \times M) \setminus \Delta_M \to S^{N-1}$

$(x, y) \xmapsto{\sigma} \frac{x-y}{\|x-y\|}$.

$\pi_v|_M$ инъективен, когда $v \notin \operatorname{Im}\sigma$.

По следствию из теоремы Сарда, т.к. $\underbrace{\dim((M\times M)\setminus\Delta_M)}_{2n} < N-1$, то можно найти всюду плотное открытое множество A векторов $v \notin \operatorname{Im}\sigma$.

Рассмотрим $T_1M = \{X \in TM : \|X\| = 1\}$ и отображение

$$\begin{tikzcd} T_1M \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, hook] & S^{n-1} \\ M \times S^{n-1} \arrow[ur, "pr_2"'] & \end{tikzcd}$$

Дифференциал $(d\pi_v|_M)_p$ инъективен, когда $v \notin \operatorname{Im}\tau$.

Снова по Сарду найдём всюду плотное открытое множество B таких векторов (т.к. $\dim T_1M = 2n-1 < N-1$)

Причём A и B имеют пересечения, т.к. они всюду плотные.

По итогу, мы смогли вложить в $\mathbb{R}^{N-1}$.

Продолжая эту манипуляцию, пока можно применять т. Сарда, т.е. $\dim((M\times M)\setminus\Delta_M) = \underbrace{2n < N-1}_{N > 2n+1}$ для инъективности $\pi_v|_M$ — вложение

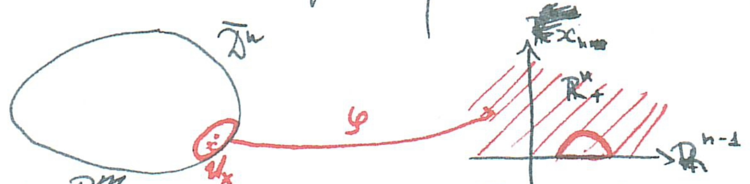
и $\dim T_1M = \underbrace{2n-1 < N-1}_{N > 2n}$ для инъективности $(d\pi_v|_M)_p$ — погружение

15 Многообразия с краем, хорошие подмногообразия. Примеры. Лемма об инвариантности края. Теорема о неявной функции для многообразий с краем.

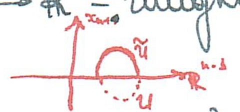
def. Хаусдорфово топологическое пространство M со счётной базой такое, что $\forall x \in M\ \exists \varphi: U_x \xrightarrow[\text{гомео}]{} \mathbb{R}^n_+$, называется многообразием с краем.

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$.

Ex. Самым простым примером является замкнутый диск $\overline{D}^n$.



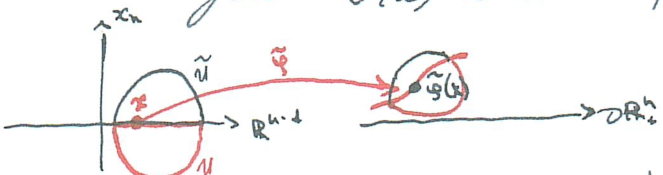
def. $\tilde{\varphi}: \tilde{U}_{\subset \mathbb{R}^n_+} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое, если $\exists U \subset \mathbb{R}^n$; $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ — гладкое, что $\varphi|_{U \cap \tilde{U}} = \tilde{\varphi}|_{U \cap \tilde{U}}$.



def. ∂M — край многообразия; $\partial M = \{x \in M \mid \varphi(x) \in \partial \mathbb{R}^n_+\}$, $\partial \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$.

Lem. [Инвариантность края] Пусть $x \in \partial M$, а $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гладкое. Тогда $\tilde{\varphi}(x)$ — точка края.

Proof. Найдем отображение $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ из определения гладкости. Пусть $\tilde{\varphi}(x)$ не точка края, то есть $\tilde{\varphi}(x) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \partial \mathbb{R}^n_+$.



def. 1) $S \subset M^n$ называется хорошим n-мерным подмногообразием, если:

а) S является образом некоторого вложения n-мерного пространства,

б) $\partial S \cap \partial M \neq \varnothing$.

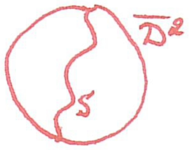
2) $S \subset M^n$ называется k-мерным хорошим подмногообразием, если:

а) S является образом гладкого вложения k-мерного пространства;

б) $\partial S = \partial M \cap S$;

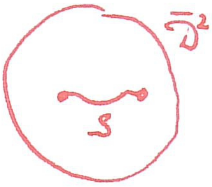
в) $\forall x \in \partial S$ $T_x S \not\subset T_x(\partial M)$ ← так называемая трансверсальность многообразий.

Ex.



— хорошее подмногообразие.

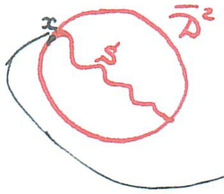
Ex.



— не хорошее подмногообразие

$\partial S \neq \partial M \cap S$.

Ex.



— не хорошее подмногообразие.

$T_x S \subset T_x(\partial M)$

Th. Пусть M — гладкое многообразие без края, $f: M \to \mathbb{R}$ — гладкое, $a \in \mathbb{R}$ — регулярное значение.

Тогда $\{x \in M : f(x) \leq a\}$ — хорошее подмногообразие размерности $\dim M$.

Proof. Прямое следствие из т. о неявной функции.

Th. Пусть M^m и N^n — многообразия с краем, $f: M \to N$ — гладкое, $q \in N$ — регулярное значение для f и для $f|_{\partial M}$.

Тогда $f^{-1}(q)$ — хорошее подмногообразие размерности $m-n$.

Proof.

⑯ Теорема Брауэра о неподвижной точке.

Prop. Не существует гладкой ретракции $r: M \to \partial M$, если M — компакт.

Proof. Пусть гладкая ретракция есть.
Рассмотрим регулярное значение $q \in \partial M$ для отображения r. (такие точки есть, т.к. множество критических точек имеет меру 0 по т. Сарда).
Заметим, что оно также регулярно для $r|_{\partial M} = Id|_{\partial M}$.
Однако тогда по т. о прообразе функции $r^{-1}(q) \subset M$ — хорошее подмногообразие размерности $1 = n-(n-1)$.
Однако в определении хорошего подмногообразия тогда $\partial(r^{-1}(q)) = \partial M \cap r^{-1}(q) = \{q\}$.
~~Тогда~~ С другой стороны, $r^{-1}(q)$ — компактное многообразие размерности 1, поэтому оно есть некоторое дизъюнктное объединение отрезков и окружностей, в которых количество точек края чётное.
Однако у нас получилось 1. Противоречие.

Conseq. $\forall g: \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ — гладкого отображения существует неподвижная точка.

Proof. Пусть неподвижных точек нет.
Рассмотрим $r: \overline{D}^n \to S^{n-1}$, находящее пересечение луча $[g(x); x)$ с краем $\overline{D}^n$.
Тогда $r|_{S^{n-1}} = Id_{S^{n-1}}$, то есть r — ретракт, что невозможно по утверждению.

Th. [Брауэра о неподвижной точке]
$\forall f: \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ — непрерывного отображения существует неподвижная точка.

Proof. Воспользуемся теоремой Вейерштрасса об аппроксимации, которая утверждает, что $\forall \varphi: K \to \mathbb{R}$ непрерывной (K компакт) $\forall \varepsilon > 0\ \exists P: K \to \mathbb{R}$ — многочлен: $|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon$.
Аппроксимируем покоординатно и назовём многочлены $\tilde{g}: \overline{D}^n \to \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \overline{D}^n$ $\|f(x) - \tilde{g}(x)\| < \varepsilon$.
Рассмотрим $g(x) = \frac{\tilde{g}(x)}{1+\varepsilon}$ ← манипуляция проделывается, чтобы попасть в шар: $g: \overline{D}^n \to \overline{D}^n$.
Пусть у f нет неподвижных. Рассмотрим $h(x) = \|f(x) - x\|$ — непрерывную на $\overline{D}^n$.
В силу непрерывности достигается минимум $m = \min h > 0$ (т.к. $f(x) \neq x$).
$\forall x$ $\|g(x) - x\| = \|g(x) - f(x) + f(x) - x\| \geq -\|g(x) - f(x)\| + \|f(x) - x\| \geq$
$\geq \|f(x) - x\| \geq m > 0$. Однако g — гладкая и у нее неподвижная есть по следствию.

(17) Ориентация многообразий, примеры. Степень отображения в точке, её гомотопическая инвариантность.

def. ~~Ориентирует~~ Ориентировать многообразие M значит непрерывно ориентировать все T_xM, то есть

$\forall x\in M \quad T_xM \xrightarrow[\text{diffeo}]{d\varphi_x} \mathbb{R}^n$ и все $d\varphi_x$ сохраняют ориентацию.

NB. Выбрать ориентацию векторного пространства значит для фиксированного базиса $(e_1,\dots,e_n)$ знак определителя матрицы перехода к другому базису сохраняется.

def. Многообразие M ориентируемо, если существует атлас $\{(U_\alpha;\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ такой, что $\mathrm{Jac}(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})>0$.

Stat. Определения эквивалентны.

Proof. ?

def. Пусть M^m, N^n — компактные ориентируемые многообразия без края, $f: M\to N$, $y\in N$ — регулярное значение f. Тогда степенью отображения назовём

$$\deg(f;y)=\sum_{x\in f^{-1}(y)} \mathrm{sign}(\mathrm{Jac}_x(f)).$$

NB. Важно, что эта сумма конечна. Почему?

- Пусть она бесконечна. Т.к. $f^{-1}(y)$ — компакт, то он и секвенциальный компакт, а тогда из всех $x\in f^{-1}(y)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность

  $x_i \to x_0$, $x_i\in f^{-1}(y)$, $x_0\in f^{-1}(y)$

  По т. о неявной функции есть окрестность и диффеоморфизм

  $U_{x_0} \xrightarrow[\text{diffeo}]{f} V_y$.

  Тогда $U_{x_0}\setminus x_0$ содержит x_i, которое отобразится в y. Т.к. f — биекция, но такого быть не может.

Prop. Пусть $f, g: M^m\to N^n$, причём $f \underset{htp}{\overset{F}{\sim}} g$, а M и N — компактные ориентируемые многообразия без края. Тогда $\deg(f;y)=\deg(g;y)$, если y — общее регулярное значение для f и g.

(19) Степень центральной симметрии и отражения сферы. Теорема о причесывании ежа.

Prop. Пусть $r_i : S^n \to S^n$ — отражение относительно i-ой плоскости. Тогда $\deg r_i = -1$.

Proof. Понятно, что прообраз у любой точки 1, поэтому
$$\deg(r_i; y) = \operatorname{sign}(J_{r_i(y)}(f)) = \operatorname{sign}\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = -1.$$

Prop. Пусть $\gamma : S^n \to S^n$ — центральная симметрия: $x \xmapsto{\gamma} -x$.
Тогда $\deg \gamma = (-1)^{n+1}$.

Proof.
$$\gamma = r_1 \circ \dots \circ r_{n+1} \Rightarrow \deg \gamma = \deg r_1 \cdot \ldots \cdot \deg r_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Th. [о причесывании ежа]
На S^n существует нигде не обнуляющееся касательное векторное поле тогда и только тогда, когда n — нечетное.

Proof. Рассмотрим центральную симметрию $\gamma : S^n \to S^n$; ее степень по доказанному равно $(-1)^{n+1}$.
Рассмотрим $F : S^n \times I_{[0;\pi]} \to S^n$;
$$F(x;\alpha) = x\cos\alpha + v(x)\cdot\sin\alpha,$$
где $v : S^n \to S^n : x \cdot v(x) = 0$.
Т.к. $F(x;0) = x = Id\,x$;
$F(x;\pi) = -x = \gamma$, то F — гомотопия между γ и Id.
Тогда $\deg\gamma = \deg Id = 1$, что возможно только при n — нечетном.
При этом для нечетномерных можно взять
$v(x) = (x_2; -x_1; \dots; x_{2n}; -x_{2n-1})$ — подходящее поле.

20. Векторные поля, структура модуля над кольцом гладких функций. Примеры. Критерий гладкости векторного поля. Векторные поля как дифференцирования алгебры гладких функций.

Def. Векторное поле на многообразии M есть сечение S касательного расслоения π:

$$TM \underset{S}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} M$$

$$(x;v) \overset{\pi}{\longmapsto} x$$

$$\pi \circ S = \mathrm{Id}.$$

Def. Гладкое векторное поле есть гладкое сечение TM.

Prop. Пусть X — векторное поле на M. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) X — гладкое векторное поле;
2) Пусть $(U, x_1, \dots, x_n)$ — локальные координаты, тогда в разложении $X = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ a_i — гладкие функции.
3) $\forall f \in C^\infty(V) \quad (Xf) \in C^\infty(U)$

$$(Xf)(p) = \underbrace{X_p f}_{\text{касательный вектор в т. } p}$$

Proof.

NB. Будем обозначать гладкие векторные поля $\mathfrak{X}(M)$.

Prop. $\mathfrak{X}(M)$ – модуль над гладкими функциями.

Proof. $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad X + Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$\forall f \in C^\infty(M)$ $\quad (fX) : M \to TM$.

$p \mapsto f(p) \cdot X_p \in \mathfrak{X}(M)$.

Prop. Рассмотрим $X \in \mathfrak{X}(M)$, как $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. $\quad f \mapsto Xf$

Очевидно, что 1) X – $\mathbb{R}$-линейное;

2) $X(fg) = fX(g) + gX(f)$.

def. Такие X называются глобальными дифференцированием $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$.

Prop. Пусть $D \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$, тогда $\exists X \in \mathfrak{X}(M) : Df = Xf \quad \forall f \in C^\infty(M)$.

Proof.

21) Связанные векторные поля (эквивалентные определения). Существование связанного с данным векторного поля на диффеоморфном многообразии (push forward).

NB. Хочется понять, когда $Y_{F(p)} = (dF)_p(X_p)$ является касательным вектором.

1) Если F – не инъективен, то не является,

2) Если F – не ~~...~~ сюръективен, то тоже.

def. Пусть $F: M \to N$, $X \in \mathfrak{X}(M)$; $Y \in \mathfrak{X}(N)$.

Векторные поля X, Y называются F-связанными, если $(dF)_p(X_p) = Y_{F(p)}$ $\forall p \in M$.

Prop. Векторные поля X, Y – F-связанные, ~~если~~ тогда и только тогда, когда $X(f \circ F) = (Yf) \circ F$ $\forall f \in C^\infty(N)$.

Proof. $X(f \circ F)(p) = X_p(f \circ F) = (dF)_p(X_p)(f)$;

$((Yf) \circ F)(p) = \cancel{(dF)_p(X_p)} = (Yf)(F(p)) = Y_{F(p)} f$.

Тогда левые части равны тогда и только тогда, когда равны правые.

Prop. Пусть $F: M \to N$ – диффеоморфизм, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Тогда $\exists! \, Y \in \mathfrak{X}(N)$: X и Y – F-связанные.

Proof. Рассмотрим $\forall q \in N$ $Y_q = (dF)_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)})$.

Понятно, что это дает F-связанность X и Y.

Т.к. $Y = dF \circ X \circ F^{-1}$ – гладкое, то $Y \in \mathfrak{X}(N)$.

def. Такое Y называется прямым образом X и обозначается $F_* X$.
"pushforward"

Conseq. Переформулировка F-связанности ~~...~~ через pushforward:

Пусть $F: M \xrightarrow[\text{diffeo}]{\sim} N$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, ~~...~~ $f \in C^\infty(N)$.

Тогда $((\underbrace{F_* X}_{\text{достаточно, это просто } Y \text{ у нас}}) f) \circ F = X(f \circ F)$.

22 Векторные поля на подмногообразиях, ограничение векторного поля.

def. Пусть S — подмногообразие M, $p \in S$ и $X \in \mathfrak{X}(M)$.

1) Будем говорить, что X касательное к S в точке p, если $X_p \in T_pS \subset T_pM$.

2) X — касательное к S, если оно касательное к S в каждой точке $p \in S$.

NB. На самом деле это просто требование, чтобы вектор, касательный к S являлся касательным и к M.

Prop. Пусть $X \in \mathfrak{X}(M)$, $S \subseteq M$.
Тогда X — касательный к S тогда и только тогда, когда $(Xf)|_S \equiv 0$ $\forall f \in C^\infty(M): f|_S = 0$.

Proof. **Lem.** Пусть $S \subseteq M$, $p \in S$.
Тогда $T_pS = \{\underbrace{v \in T_pM \mid v_p(f) = 0 \ \forall f \in C^\infty(M): f|_S = 0}_{A}\}$.

Proof Lem.
Докажем включение $T_pS \subset A$:
Пусть $v \in T_pS \overset{di}{\subset} T_pM$.
Тогда есть у вложения $\omega \in T_pS: v = (di)_p(\omega)$.
Рассмотрим произвольную $f \in C^\infty(M): f|_S = 0$.
$v_p(f) = (di)_p(\omega)(f) = \omega_p(\underbrace{f \circ i}_{\text{даст 0, т.к. после } i \text{ мы лежим в } S, \text{ где } f|_S = 0.}) = 0$

Т.о., для любого $v \in T_pS$ $v(f) = 0$, если $f|_S = 0$,
то есть $T_pS \subset A$.

Докажем включение $T_pS \supset A$:

Df. Пусть $S \subset_i M$, $Y \in \mathfrak{X}(S)$.

? Если $\exists X \in \mathfrak{X}(M)$, то X - i-связано с Y.

И значит Y - касательное к S гладкое векторное поле.

Prop. Пусть $S \subset_i M$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ - касательное к S векторное поле

Тогда $\exists! \, Y|_S \in \mathfrak{X}(S)$: $Y|_S$ - i-связанное с Y.

Proof.

23) Алгебра Ли векторных полей. Вычисление скобки Ли в координатах. Свойства скобки Ли при отображении многообразий.

def. Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$[X;Y] = XY - YX$ называется скобкой Ли векторных полей.

Prop. $[X,Y]$ гладкое векторное поле.

Proof.
$$[X,Y](fg) = XY(fg) - YX(fg) =$$
$$= X(fY_g + gY_f) - Y(fX_g + gX_f) =$$
$$= fXY_g + \cancel{(Y_g)(X_f)} + gXY_f + \cancel{(Y_f)(X_g)} - fYX_g - \cancel{(X_g)(Y_f)} - gYX_f - \cancel{(X_f)(Y_g)} =$$
$$= fXY_g - fYX_g + gXY_f - gYX_f =$$
$$= f[X;Y]g + g[X,Y]f.$$

Линейность очевидна,

а значит скобка Ли — глобальное дифференцирование,

а тогда и гладкое векторное поле.

Prop. Пусть $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$; $Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Тогда
$$[X;Y] = XY - YX = \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \left(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n X_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n Y_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} =$$
заменим индексы $i=j$, $j=i$.
$$= \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{i,j}\left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

НВ $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}; \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$.

Th. Пусть $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Тогда:

1) Линейность над $\mathbb{R}$: $[aX + bY; Z] = a[X;Z] + b[Y;Z]$,
$[X; aY + bZ] = a[X;Y] + b[X;Z]$.

2) Антисимметричность: $[X;Y] = -[Y;X]$.

3) Тождество Якоби: $[X;[Y;Z]] + [Y;[Z;X]] + [Z;[X;Y]] = 0$.

4) Пусть $f, g \in C^\infty(M)$. Тогда $[fX, gY] = fg[X,Y] + (fX_g)Y - (gY_f)X$.

def. $(\mathfrak{X}; M)$ называется Алгеброй Ли векторных полей.

Prop. Пусть $F: M \to N$; $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$,

при этом X_i и Y_i — F-связанные.

Тогда $[X_1; X_2]$ и $[Y_1, Y_2]$ тоже F-связанные.

Proof. Рассмотрим

$$X_1X_2(f\circ F) \underset{\text{т.к. } X_2 \text{ и } Y_2 \text{ связанные}}{=} X_1((Y_2 f)\circ F) \underset{\text{т.к. } X_1 \text{ и } Y_1 \text{ связанные.}}{=} (Y_1Y_2 f)\circ F.$$

Аналогично $X_2X_1(f\circ F) = (Y_2Y_1 f)\circ F$.

Тогда

$$[X_1; X_2](f\circ F) = X_1X_2(f\circ F) - X_2X_1(f\circ F) =$$

$$= (Y_1Y_2 f)\circ F - (Y_2Y_1 f)\circ F =$$

$$= ([Y_1; Y_2](f))\circ F.$$ — F-связанность $[X_1, X_2]$ и $[Y_1; Y_2]$.

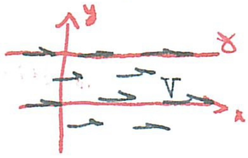
24. Интегральные кривые. Примеры. Лемма о сдвиге. Лемма о сжатии и растяжении. Связанность векторных полей в терминах интегральных кривых.

Def. Интегральной кривой для гладкого векторного поля $V \in \mathfrak{X}(M)$ называется кривая $\gamma: I \to M$ такая, что

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}.$$

Ex. $V = \frac{\partial}{\partial x}$ на $\mathbb{R}^2$.

$\gamma(t) = (a+t; b)$



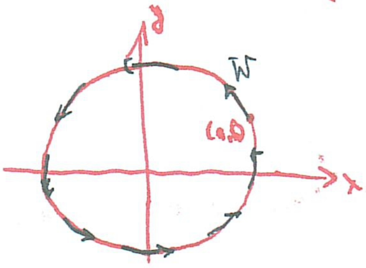
Ex. $W = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Пусть $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (x(t); y(t))$.

$$\gamma'(t) = x'(t)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\gamma(t)} + y'(t)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\gamma(t)}.$$

Чтобы она была интегральная, нужно:

$$\gamma'(t) = x\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{\gamma(t)} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{\gamma(t)},$$

т.е.
$$\begin{cases} y'(t) = x; \\ +x'(t) = -y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(t) = a\sin t + b\cos t; \\ x(t) = a\cos t - b\sin t. \end{cases}$$



D. Как мы заметили, если $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ в локальных координатах $(U, (x_1, \ldots, x_n))$, тогда $\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}$ записывается в виде системы:

$$\begin{cases} \gamma_1'(t) = V_1(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)); \\ \gamma_2'(t) = V_2(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)); \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) = V_n(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)); \end{cases}$$

где V_i - компоненты из разложения $V|_U = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Тогда при задании начальных условий по теореме Коши данная система будет иметь единственное решение на U.

Более строго об этом говорит следующее утверждение.

Prop. $\forall p \in M \ \exists \varepsilon > 0 : \exists \gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \to M$,
$\underbrace{\gamma(0) = p}_{\text{нач. условие}}$, $\underbrace{\gamma'(t) = V_{\gamma(t)}}_{\text{условие, что кривая интегральная.}}$ $\forall t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$.

Lem. [о сжатии и растяжении] Пусть $I \subset \mathbb{R}$; $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\gamma : I \to M$ - интегральная кривая для V.
Тогда $\forall a \in \mathbb{R}$ кривая $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to M$, $\tilde{I} = \{t : at \in I\}$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$
также является интегральной.

Lem. [о сдвиге] Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $V \in \mathfrak{X}(M)$, $\gamma : I \to M$ - интегральная кривая для V.
Тогда $\forall b \in \mathbb{R}$ кривая $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to M$, $\tilde{I} = \{t : b + t \in I\}$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t+b)$
также является интегральной.

Prop. Пусть $F : M \to N$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$.
X и Y - F-связанные $\iff$ F(инт. кривой) = интегральная кривая.

Proof.
"$\Rightarrow$" Пусть $\gamma : I \to M$ - инт. кривая для X.
Рассмотрим $\sigma = F \circ \gamma : I \to N$.
$$\sigma'(t) = (F \circ \gamma)'(t) = (dF)_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = (dF)_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}) \overset{\text{т.к. } X \text{ и } Y \text{ - } F\text{-связанные}}{=} Y_{F(\gamma(t))} = Y_{\sigma(t)}.$$
т.о. $\sigma'(t) = Y_{\sigma(t)}$, а значит σ - инт. кривая для Y.

"$\Leftarrow$" Пусть $p \in M$, $\gamma : (-\varepsilon; \varepsilon) \to M$ - интегральная кривая, полученная из системы ДУ с нач. условием $\gamma(0) = p$.
Тогда $(F \circ \gamma)$ - интегральная кривая из условия.
$$\underbrace{Y_{F(p)}}_{(F\circ\gamma)'(0)} = (dF)_{\underset{\gamma(0)}{p}}(\gamma'(0)) = (dF)_p(X_p) \Rightarrow X \text{ и } Y \text{ - } F\text{-связанные}.$$

(25) Потоки на многообразиях.
Существование и гладкость векторного поля, ассоциированного с глобальным потоком. Примеры.

def. (Гладкий) глобальный поток есть отображение Fl (гладкое)
$Fl: \mathbb{R}\times M \to M$ такое, что $\forall s,t\in\mathbb{R}$ и $p\in M$

$$Fl(0;p)=p;$$
$$Fl(s;Fl(t;p)) = Fl(s+t;p).$$

NB. Иначе можно говорить об отображении $Fl_t : M \to M$ $\forall t\in\mathbb{R}$, $p \longmapsto Fl(t;s)$
для которого $Fl_t \circ Fl_s = Fl_{t+s}$.

NB. Видно, что Fl_t — диффеоморфизм, поэтому также говорят, что $\mathbb{R}$ действует на M ($\mathbb{R} \curvearrowright M$).

Prop. Рассмотрим производную потока в точке 0 для всех $p\in M$:
$$Fl^{(p)\prime}(0) : p \mapsto V_p.$$
Тогда $V = \{V_p\}_{p\in M} \in \mathfrak{X}(M)$ — гладкое векторное поле;
а $Fl^{(p)}$ — его интегральные кривые.

Proof.
То, что это поле — очевидно.
Почему оно гладкое?
$$V_p f = Fl^{(p)\prime}(0)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Fl^{(p)}(t)) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f(Fl(t;p)) \text{ — гладкое.}$$
Тогда получили, что $\forall f\in C^\infty(M)$ $Vf\in C^\infty(M)$,
а значит $V\in\mathfrak{X}(M)$ по критерию.
Рассмотрим $Fl^{(p)}(t_0)$ $\forall t_0\in\mathbb{R}$. Покажем, что это интегральная кривая для V:
$$V_{Fl^{(p)}(t_0)}(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(Fl^{Fl^{(p)}(t_0)}(t)\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(Fl^{(p)}(t+t_0)\right) =$$
$$= Fl^{(p)\prime}(t_0)(f).$$
Т.о., получили, что $V_{Fl^{(p)}(t_0)}(f) = Fl^{(p)\prime}(t_0)(f)$,
то есть $Fl^{(p)}(t_0)$ — интегральная кривая для V.

Ex. $V = \frac{\partial}{\partial x}$.

$\mathcal{H}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(t, (x, y)) \longmapsto (x + t; y)$ – глобальный поток

Ex. $V = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$.

Интегральная кривая $\gamma = \left(\frac{1}{1-t}; 0\right)$ не задает
в т. $(1; 0)$
глобальный поток, т.к. при $t = 1$ не определена

$\triangleright$. Таким образом, даже на таком несложном поле глобальный поток не ~~определен~~ существует.
Эта идея ведет к рассмотрению локальных потоков.

26 Примеры неполных потоков.
Область потока, максимальные интегральные кривые и потоки.
Основная теорема о потоках.

Ex. Неполный поток был рассмотрен ранее на $V = x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ и т.ч. (1;0)

def. Область определения потока — это открытое множество $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ такое, что $\forall p \in M$ $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} : (t,p) \in \mathcal{D}\}$ — открытый интервал, содержащий 0.

def. (Гладкий) поток — это (гладкое) отображение $Fl: \mathcal{D} \to M$, что

$Fl(0;p) = p$;

$Fl(t; Fl(s;p)) = Fl(t+s;p)$ $\forall p \in M; \forall t, s : s+t, s \in \mathcal{D}^{(p)}$ и $t \in \mathcal{D}^{Fl(s;p)}$

Prop. Рассмотрим отображение $p \mapsto Fl^{(p)\prime}(0) = V_p$.
Тогда $V = \{V_p\}_{p \in M}$ — векторное гладкое поле, причём $Fl^{(p)}$ — его интегральные кривые.

Proof. Также как глобальные потоки

def. Максимальная интегральная кривая — это та интегральная кривая, которую нельзя продолжить на большую область определения.

def. Максимальный поток — поток, который нельзя продолжить на большую область определения потока.

Th. Существует единственный максимальный поток, что $V \in \mathfrak{X}(M)$ — векторное поле для него.
Причём для этого потока:

1) $\forall p \in M$ $Fl^{(p)}: \mathcal{D}^{(p)} \to M$ — единственная интегральная кривая с началом в т. p,

2) $\forall s \in \mathcal{D}^{(p)}$ $\mathcal{D}^{(Fl(s;p))} = \mathcal{D}^{(p)} - s = \{t - s \mid t \in \mathcal{D}^{(p)}\}$.

3) $\forall t \in \mathbb{R}$ $M_t \hookrightarrow M$ и $M_t \xrightarrow[\text{diffeo}]{Fl_t} M_{-t}$.

Proof. Пусть γ - инт. кривая с началом в (.) p.

Рассмотрим $\tilde{\gamma}$ - инт. кривую такую, что

$$\gamma, \tilde{\gamma} : J \to M$$

$$\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0) \quad \text{и} \quad S = \{t \in J : \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\}.$$

точка совпадения — множество, на котором совпадают.

Заметим, что $S \neq \varnothing$.

Пусть $t_1 \in S$.

Рассмотрим окрестность $U(\gamma(t_1)) \subset M$.

В ней γ и $\tilde{\gamma}$ - решения одного ДУ с одним нач. условием $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1)$

А значит по т. Коши γ совпадает с $\tilde{\gamma}$ в этой окрестности.

Т.о., любая точка из S входит в S с некой окрестностью, то есть $S \subset J$

А тогда S и замкнуто, и открыто, то есть $S = J$. - совпали по всему J - общей обл. опр.

Тогда $\mathcal{D}^{(p)} = \bigcup J$, и

$$Fl^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \to M \text{ - максимальная.}$$

$$t \to \gamma(t)$$

(то есть кривые либо полностью совпадают, либо вообще не пересекаются)

А максимальный поток построим, как

$$Fl : \mathcal{D} = \{(t;p) \in \mathbb{R} \times M : t \in \mathcal{D}^{(p)}\} \to M.$$

$$Fl(t;p) = Fl^{(p)}(t)$$. - максимален и единственен.

остаюсь док-ть, что это поток.

Рассмотрим $p \in M$ и $s \in \mathcal{D}^{(p)}$.

Пусть $q = Fl(s;p)$.

Рассмотрим инт. кривую $\gamma : \mathcal{D}^{(p)} - s \to M$, что

$$\gamma(t) = Fl^{(p)}(t+s).$$

Т.к $\gamma(0) = q$, то γ совпадает с $Fl^{(q)}$ на общей ~~точке~~ области определения.

$$Fl^{(Fl(s;p))} = Fl^{(q)}(t) = \gamma(t) = Fl^{(p)}(t+s) \text{ - групповой закон}$$

Т.о., действительно Fl - поток.

А гладкость?

2) Т.к. $Fl^{(q)}$ – максимальный поток, то по определению

$$D^{(p)} - s \subset D^{(q)}, \qquad 0 \in D^{(p)} \Rightarrow (-s) \in D^{(q)}$$

Тогда $Fl^{(q)}(-s) = Fl^{(p)}(0) = p$.

и $D^{(q)} + s \subset D^{(p)}$;

$D^{(q)} \subset D^{(p)} - s$.

Т.о., показали оба включения, а значит

$$D^{(p)} - s = D^{(q)}.$$

Рассмотрим $W \subset D$, $W = \{(t;p) \in D \mid Fl$ определен и гладок в окр-сти (t,p) вида $J \times U$, $J \subset \mathbb{R}$, $U \subset M \}$.

Пусть $D \neq W$, тогда $\exists (\tau; p_0) \in D \setminus W$.

Рассмотрим $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R} : (t; p_0) \notin W\}$.

Т.к. $(0; p_0) \in W$, то Fl гладок в окрестности $(0; p_0)$.

Т.к. $t_0 = \inf$, то $t_0 \le \tau$.

Т.к. $D^{(p_0)}$ – открытый, содержит 0, то $t_0 \in D^{(p_0)}$.

Рассмотрим $q_0 = Fl^{(p_0)}(t_0)$

$\exists \varepsilon > 0 : U_0 \ni q_0 : (-\varepsilon; \varepsilon) \times U_0 \subset W$.

Рассмотрим $t_1 < t_0 : t_1 + \varepsilon > t_0$.

Тогда $Fl^{(p_0)}(t_1) \in U_0$, причем $(t_1; p_0) \in W$, а значит Fl гладкий на $(t_1 - \delta; t_1 + \delta) \times U_1 \subset W$

Возьмём U_1 такую маленькую, что $Fl(t_1 \times U_1) \in U_0$.

Определим $\widetilde{Fl} : [0; t_1 + \varepsilon) \times U_1 \to M$

$$\widetilde{Fl}(t,p) = \begin{cases} Fl_t(p), & p \in U_1;\ 0 \le t < t_1 \\ Fl_{t-t_1} \circ Fl_{t_1}(p), & p \in U_1;\ t_1 \le t < t_1 + \varepsilon \end{cases}$$

По лемме о склейке Fl – инт. кривая, но уже на расширенном $[0; t_1 + \varepsilon)$.

Но $t_1 + \varepsilon > t_0$, а $t_1 < t_0$ значит t_0 – не inf,

~~Но у нас максимальная кривая~~,

значит противоречие ~~а t_0 не inf~~.

А тогда $W = D$ на самом деле, то есть Fl гладок на D.

3) Рассмотрим $p \in M_t$, то есть $t \in \mathcal{D}^{(p)}$.

по 2): $\mathcal{D}^{(Fl_t(p))} = \mathcal{D}^{(p)} - t$.

т.к. $0 \in \mathcal{D}^{(p)} - t$, то $-t \in \mathcal{D}^{(Fl_t(p))}$ и $Fl_t(p) \in M_{(-t)}$.

т.е., $Fl_t(M_t) \subset M_{(-t)}$

т.к. $Fl_t \circ Fl_{(-t)} = Fl_0 = Fl_{(-t)} \circ Fl_t$, то

$$M_{(t)} \xrightarrow[\text{diffeo}]{Fl_t} M_{(-t)}$$

27. Ассоциированные со связанными векторными полями потоки. Полное векторное поле. Полнота гладкого векторного поля с компактным носителем.

Prop. Пусть $F: M \to N$; $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$,

X и Y — F-связанные, Fl — поток, ассоциированный с X,

$\widetilde{Fl}$ — поток, ассоциированный с Y.

Тогда $\forall t \in \mathbb{R}$ $F(M_t) \subset N_t$, причём

$$\begin{tikzcd} M_t \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Fl_t"'] & N_t \arrow[d, "\widetilde{Fl}_t"] \\ M_{(-t)} \arrow[r, "F"] & N_{(-t)} \end{tikzcd}$$

Proof. Пусть $p \in M$, тогда $F(Fl^{(p)}(t))$ — инт. кривая для Y с началом в $F(p)$.

Т.к. $\widetilde{Fl}^{(F(p))}(t)$ — максимальная инт. кривая с началом в $F(p)$, то по единственности $\widetilde{Fl}^{(F(p))}(t) = F(Fl^{(p)}(t))$ на общей области определения.

Пусть $p \in M_t$, то есть $t \in \mathcal{D}^{(p)}$. Тогда $t \in \mathcal{D}^{(F(p))}$, а значит $F(p) \in N_t$.

Т.о., $F(M_t) \subset N_t$.

Conseq. Пусть $F: M \xrightarrow{\text{diffeo}} N$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, Fl — поток, порождённый X.

Тогда $\widetilde{Fl}_t = F \circ Fl_t \circ F^{-1}$ — поток для $F_* X \in \mathfrak{X}(N)$.

def. Гладкое векторное поле называется полным, если оно порождает глобальный поток.

R. Это определение эквивалентно: Область определения всех максимальных интегральных кривых есть $\mathbb{R}$.

Lem. Пусть $V \in \mathfrak{X}(M)$, Fl — порождённый V поток.
Пусть есть $\varepsilon > 0$: $\forall p \in M$ $(-\varepsilon; \varepsilon) \subset$ области определения $Fl^{(p)}$.
Тогда V — полное.

Proof. Предположим, что V — не полное, то есть
$\exists p \in M$: $\mathcal{D}^{(p)}$ ограничено сверху.
Рассмотрим $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$ и t_0 : $b - \varepsilon < t_0 < b$.
Пусть $q = Fl^{(p)}(t_0)$.
Рассмотрим $Fl^{(q)}(t)$. Из условия он определен хотя бы на $(-\varepsilon; \varepsilon)$.
Зададим

$$\gamma = \begin{cases} Fl^{(p)}(t), & -\varepsilon < t < b \\ Fl^{(q)}(t - t_0), & t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

Т.к. $\gamma(0) = p$, то по лемме о сдвиге γ — инт. кривая.
Т.о., получили инт. кривую, определенную на $(-\varepsilon; t_0 + \varepsilon > b)$, что является расширением, но у нас ~~[illegible]~~ $b = \sup \mathcal{D}^{(p)}$.
Противоречие, значит V — полное.

Th. Пусть $V \in \mathfrak{X}(M)$ и $\operatorname{supp}(V) = K$ — компакт.
Тогда V — полное.

Proof. $\forall p \in K$ $\exists U_p, \varepsilon_p$: $Fl^{(p)}$ определен на $(-\varepsilon_p; \varepsilon_p) \times U_p$.
Выберем конечное подпокрытие $K = \bigcup_{i=1}^{n} U_{p_i}$ и соответствующие ε_{p_i}.
Пусть $\varepsilon = \min_{i=1}^{n} \varepsilon_{p_i}$.
По лемме все кривые с началом в K определены на $\mathbb{R}$.
Доопределим на $M \setminus K$ инт. кривые константой.
(можем, т.к. $V|_{M \setminus K} = 0$).
Тогда V — полное.

Следств. M — компакт. Тогда любое векторное гладкое поле является полным.

(28) Производная Ли функций и векторных полей, её выражение через скобку Ли. Следствие.

def. Пусть $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, Fl - ассоциированный с X поток, $p \in M$. Производной Ли векторного поля Y вдоль поля X называется векторное поле:

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{dFl_{(-t)}(Y_{Fl_t(p)}) - Y_p}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(dFl_{-t}(Y_{Fl_t(p)})\right).$$

Def. Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ определим также:

$$\mathcal{L}_X f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ Fl_t).$$

Rem. Можно определить и аксиоматически, задав набор условий и свойств, но мы постарались задать в привычном нам виде производной.

Prop.

1. $\mathcal{L}_X f = X f \ \forall f \in C^\infty(M)$.
2. $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Proof.

1. Вспомним, как мы задавали ассоциированный поток: $X_p f = Fl^{(p)\prime}(0)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(Fl^{(p)}(t)) = (\mathcal{L}_X f)_p$

2. $$(\mathcal{L}_X Y)_p(f) = \left(\lim_{t\to 0}\frac{dFl_{-t}(Y_{Fl_t(p)}) - Y_p}{t}\right)(f) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(dFl_{-t}(Y_{Fl_t(p)})(f)\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(Y_{Fl_t(p)}(f\circ Fl_{-t})\right).$$

Пусть $\tilde{Fl}$ - поток, ассоциированный с Y.

Зададим $H(t;u) = f(Fl_{-t}(\tilde{Fl}_u(Fl_t(p))))$.

$$\frac{d}{du}\Big|_{u=0} H(t;u) = \underbrace{\frac{d}{du}\Big|_{u=0}(f\circ Fl_{-t})(\tilde{Fl}_u(Fl_t(p)))}_{(\mathcal{L}_Y(f\circ Fl_{-t}))_{Fl_t(p)}} =$$

$$= Y_{Fl_t(p)}(f\circ Fl_{-t}).$$

Тогда $$\underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y_{Fl_t(p)}(f\circ Fl_{-t})}_{(\mathcal{L}_X Y)(f)} = \underbrace{\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\frac{d}{du}\Big|_{u=0} H(t;u)\right)}_{\frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial u}\big|_{(0,0)}}$$

Найдём, чему равна эта производная:

Положим $K(t;u,s)=f(\mathcal{F}l_s(\widetilde{\mathcal{F}l}_u(\mathcal{F}l_t(p))))$.

Заметим, что $K(t;u;-t)=H(t;u)$.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial u}\Big|_{(0;0)}=\frac{\partial^2 K}{\partial t\partial u}\Big|_{(0;0;0)}-\frac{\partial^2 K}{\partial s\partial u}\Big|_{(0;0;0)}.$$

Т.к. $K(t;u;0)=f(\widetilde{\mathcal{F}l}_u(\mathcal{F}l_t(p)))$, то $\frac{\partial K}{\partial u}\Big|_{(t;0;0)}=Y_{\mathcal{F}l_t(p)}(f)$,

тогда $\frac{\partial K}{\partial t\partial u}\Big|_{(0;0;0)}=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}Y_{\mathcal{F}l_t(p)}(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(Yf)(\mathcal{F}l_t(p))=$
$=X_p(Yf)$

Т.к. $K(0;u;s)=f(\mathcal{F}l_s(\widetilde{\mathcal{F}l}_u(p)))$, то $\frac{\partial K}{\partial s}\Big|_{(0;u;0)}=X_{\widetilde{\mathcal{F}l}_u(p)}(f)$,

тогда $\frac{\partial K}{\partial u\partial s}\Big|_{(0;0;0)}=\frac{d}{du}\Big|_{u=0}X_{\widetilde{\mathcal{F}l}_u(p)}f=\frac{d}{du}\Big|_{u=0}(Xf)(\widetilde{\mathcal{F}l}_u(p))=$
$=Y_p(Xf)$.

Т.о., $\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial u}\Big|_{(0;0)}=X_p(Yf)-Y_p(Xf)=[X;Y]$.

<u>Следств</u> Пусть $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$. Тогда:

1. $\mathcal{L}_X Y=-\mathcal{L}_Y X$,
2. $\mathcal{L}_X[Y,Z]=[\mathcal{L}_X Y;Z]+[Y;\mathcal{L}_X Z]$,
3. $\mathcal{L}_{[X;Y]}Z=\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y Z-\mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X Z$,
4. $\forall f\in C^\infty(M):\mathcal{L}_X(fY)=(Xf)Y+f\mathcal{L}_X Y$,
5. $F_*(\mathcal{L}_X Y)=\mathcal{L}_{F_*X}F_*Y$.

(29) Распределения, инволютивность, интегральные многообразия. Теорема Фробениуса.

def. Гладкое распределение D ранга c на многообразии — это гладкое подрасслоение ранга c в TM.

def. Распределение D называется инволютивным, если оно замкнуто относительно скобки Ли:

$$\forall X, Y \in D \quad [X;Y] \in D.$$

def. Интегральное многообразие распределения D на M — это подмногообразие $N \overset{\alpha}{\hookrightarrow} M$ такое, что

$$(d\alpha)(T_n N) = D_{\alpha(n)} \quad \forall n \in N$$

под D_p будем понимать подпространство $T_p M$ размерности c, что вокруг точки p для любой точки $q \in U_p$ $\exists v_1, \dots, v_c \in \mathfrak{X}(M)$: $D_q = \langle (v_1)_q, \dots, (v_c)_q \rangle$

Ex. Рассмотрим $X \in \mathfrak{X}(M)$ такое, что $X_m \neq 0$ $\forall m \in M$.
Это распределение ранга 1.
Его интегральным многообразием является множество всех интегральных кривых.

Ex. В $\mathbb{R}^n$ распределение ранга c есть $D = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_c} \rangle$.
Его интегральное многообразие — такое подмножество M, что
$x_{c+1} = const_1,\ x_{c+2} = const_2, \dots, x_n = const_n$.

Prop. Пусть через любую точку $m \in M$ проходит интегральное многообразие распределения D.
Тогда D — инволютивное.

Proof. Пусть $N \overset{\alpha}{\hookrightarrow} M$ — инт. многообразие, причём $\alpha(n_0) = m$,
т.е. $(d\alpha)(T_{n_0} N) = D_{\alpha(n_0)}$, тогда $\forall X, Y \in D$ $\exists \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$:
$\tilde{X}, X$ — α-связанные
$\tilde{Y}, Y$ — α-связанные. Тогда $[\tilde{X};\tilde{Y}]$ и $[X,Y]$ — α-связанные,
то есть $[X,Y]_{\alpha(n_0)} = (d\alpha)_{n_0}(\underbrace{[\tilde{X};\tilde{Y}]_{n_0}}_{\in T_{n_0}N}) \subset D_{\alpha(n_0)}$ —

а значит, замкнуты относительно скобки Ли, что даёт инволютивность.

Th. [Фробениуса]

Пусть $\mathcal{D}$ — инволютивное распределение на M ранга c.

Тогда через любую точку проходит интегральное многообразие для $\mathcal{D}$.

Более того, если $\dim M = d$, то существует карта $(U;\varphi)$ с локальными координатами $(x_1,\dots,x_d)$ такая, что интегральные многообразия задаются просто как срез $x_{c+1}=const_{c+1},\dots,x_d=const_d$.

Если $(N;\alpha)$ — связное интегральное многообразие такое, что $\alpha(N)\subset U$, то $\alpha(N)$ лежит в каком-то срезе.

Proof.

Lem. Пусть $X\in\mathfrak{X}(M)$, причём $X_m\neq 0$ $\forall m\in M$.

Тогда существует карта $(U;\varphi)$ такая, что $X|_U=\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_U$, где $(x_1,\dots,x_d)$ — лок. координаты.

Proof. Пусть $X_m=\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_m$ в карте (V,ψ).

Рассмотрим отображение $\sigma:(-\varepsilon;\varepsilon)\times W_{\mathbb{R}^{d-1}}\to M$:

$$\sigma(t;a_2,\dots,a_d)=Fl(t;\psi^{-1}(0;a_2,\dots,a_d)).$$

$$\left.\begin{aligned}(d\sigma)_m(\partial_1|_0)&=X_m=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_m;\\ (d\sigma)_m(\partial_i|_0)&=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_m\end{aligned}\right\}\Rightarrow d\sigma \text{ — невырожден и обратим, откуда } \sigma \text{ лок. диффеоморфизм.}$$

Тогда при $\varphi=\sigma^{-1}$, получаем

$$X|_{\sigma(t,a_2,\dots,a_d)}=\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{(t,a_2,\dots,a_d)}.$$

Докажем по индукции по рангу:

База: $c=1$ — лемма.

Переход: Пусть выполнено для $c-1$, докажем для c:

Пусть $(V;\psi)$ — карта, $(y_1,\dots,y_d)$ — лок. координаты, $X_1,\dots,X_c\in\mathfrak{X}(M)$ определяют распределение.

Пусть $X_1=\frac{\partial}{\partial y_1}\big|_V$.

Рассмотрим $Y_1=X_1$; $Y_i=X_i-X_i(y_1)X_1$.

Заметим, что $\forall i\geq 2$ $Y_i(y_1)=0$.

Рассмотрим $S = \{s_1 = 0\}$, $z_i = y_i|_S \in \mathcal{X}(S)$.

Т.к. D-инволютивно, то $[y_i; y_j] = \sum_{k=2}^{c} e_{ik} y_k$, где $e_{ik} \in C^\infty(M)$.

Тогда $[z_i; z_j] = \sum_{k=2}^{c} e_{ik} z_k$, то есть $\langle z_2, \dots, z_c \rangle$ - инволютивное распределение ранга $c-1$.

По предположению $\exists \omega_2, \dots, \omega_d$ такие, что инт. многообразия $\langle z_2, \dots, z_c \rangle$ есть суть $\omega_{c+1} = const_{c+1}, \dots, \omega_d = const_d$.

Рассмотрим $x_1 = y_1$; $x_j = \omega_j \circ \pi$, где $\pi: V \to S$, $(y_1, \dots, y_d) \xrightarrow{\pi} (y_2, \dots, y_d)$

Покажем, что $Y_i(x_{c+r}) = 0$ $\forall 1 \le i \le c$, $1 \le r \le d-c$.

$i=1$: $Y_1(x_{c+r}) = X_1(x_{c+r}) = \frac{\partial}{\partial y_1}(x_{c+r}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_{c+r}) = 0$,

$\forall i \ge 2$: $\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{c+r})) = Y_1(Y_i(x_{c+r})) = [Y_1; Y_i](x_{c+r}) = \left(\sum_{k=1}^{c} e_{ik} Y_k\right)(x_{c+r})$.

система ДОУ $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{c+r})) = \sum_{k=2}^{c} e_{ik} Y_k (x_{c+r})\right\}$

в этой системе есть хотя бы одно решение (точно есть нулевое)

Рассмотрим суть $W = \{x_{c+1} = const_{c+1}, \dots, x_d = const_d\}$.

на $W \cap S$ $\forall i \ge 2$ $Y_i(x_{c+r}) = Z_i(x_{c+r}) = 0$

по предположению, т.к. $\dim Z_i = c-1$.

Ч.т.д., $Y_i(x_{c+r}) = 0$ $\forall i$,

то есть $Y_i = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_c} \rangle$.

Пусть $\varphi: N \hookrightarrow M$ - связное инт. многообразие, причём $\varphi(N) \subset U \subset M$.

Рассмотрим карту $(U; \psi)$:

$d(\pi \circ \psi)|_D = 0 \Rightarrow d(\pi \circ \psi \circ \varphi)|_N = 0 \Rightarrow \pi \circ \psi \circ \varphi = const$ на $N \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} \varphi$ лежит в сути.

30) Поднятие гладкого отображения до вложения интегрального многообразия инволютивного распределения. Максимальные интегральные многообразия. Формулировка теоремы существования и единственности для них.

Lem. Пусть $\psi: N \to M$, $\varphi: P \to M$ — гладкие отображения, а φ к тому же инъективное погружение.

Тогда существует единственное $\psi_0: N \to P$, причём, если ψ_0 — непрерывное, то оно гладкое.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\exists!\psi_0"'] & M \\ & P \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Proof. Пусть $(U; \tau)$ — карта на P.

Докажем, что $\tau \circ \psi_0|_{\psi_0^{-1}(U)}$ — гладкое.

Выберем $(V; \delta)$ на M, $V \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^d$.

Тогда найдём проекцию $\pi: \mathbb{R}^d \to$ подпространство такую, что $\tau = \pi \circ \delta \circ \varphi$.

Тогда $\tau \circ \psi_0|_{\psi_0^{-1}(U)} = (\pi \circ \delta \circ \varphi \circ \psi_0)|_{\psi_0^{-1}(U)} = (\pi \circ \delta \circ \psi)|_{\psi_0^{-1}(U)}$ — гладкое.

Prop. Пусть $\psi: N \to M$, $\varphi: P \to M$ — гладкие отображения, причём φ — инъективное погружение, а P — интегральное многообразие инволютивного распределения D на M.

Тогда существует единственное $\psi_0: N \to P$ — гладкое.

Proof. По лемме достаточно доказать, что ψ_0 — непрерывное.

Рассмотрим $p \in P$ и окрестность $\tilde{U} \ni p$.

По т. Фробениуса есть (V, τ) на M такие, что $\{x_{c+1} = const_{c+1}, \ldots, x_d = const_d\}$ — инт. многообразие.

Пусть $\varphi(\tilde{U}) = \{x_1 = \ldots = x_d = 0\}$.

Рассмотрим $W \subseteq N$ — связную компоненту $\psi_0^{-1}(\tilde{U})$, содержащую $n \in \psi_0^{-1}(p)$.

Покажем, что $\varphi_0(W) \subset \tilde{\Pi}$. Иначе говоря, что

$\varphi_0(W)$ лежит в связной компоненте слоя $\mathcal{G}(P) \cap V$.

Т.к. P — многообразие, то есть счетная база, тогда P — объединение слоёв.

Пусть C — связная компонента $\mathcal{G}(P) \cap V$.

Рассмотрим $\pi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-c}$

$(x_1, \dots, x_d) \overset{\pi}{\longmapsto} (x_{c+1}, \dots, x_d)$.

Тогда $\pi(C)$ также связное, счетное в $\mathbb{R}^{d-c}$, а значит только точка.

Ч.т.д., $\pi \circ \varphi_0$ лежит в слое, а значит φ_0 — непрерывно.

def. Максимальное интегральное многообразие — это связное интегральное многообразие $(N; \alpha)$, не лежащее ни в каком другом интегральном многообразии.

$(\forall (K; \beta)$ — инт. мн-е $\Rightarrow \alpha(N) \not\subset \beta(K))$.

Th. $\mathcal{D}$ — инволютивное распределение на M. Тогда через любую точку $m \in M$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие. Более того, любое другое инт. многообразие, проходящее через m, содержится в максимальном.