

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»



**Исследование методов планирования движения  
робототехнических систем на основе  
геометрического подхода**

**Магазенков Егор Николаевич**  
Научный руководитель: Ведяков А. А., доцент, к.т.н.

Санкт-Петербург, 10 июня 2025 г.

# Цель и задачи

## Цель

Определение состояния области геометрического управления в решении задач планирования движения, а также применимости геометрических методов в ряде соответствующих прикладных задач

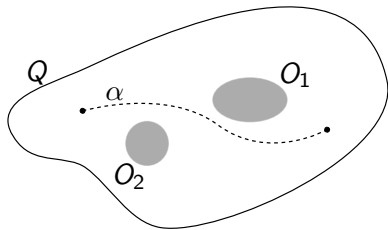
## Задачи

- Провести аналитический обзор литературных источников
- Рассмотреть прикладные задачи для робототехнических систем, которые требуют планирования движения в среде с препятствиями.
- Описать методы и эксперименты для анализа работы методов в выбранных задачах
- Провести сравнительные эксперименты для методов согласно методике
- Сформулировать выводы об особенностях применения, предоставить методические рекомендации.

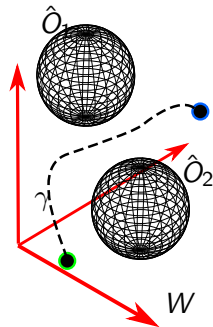
# Постановка задачи

Найти политику движения  $\pi(\sigma, \dot{\sigma})$ ,  $\sigma \in \mathcal{Q}$ , дающую путь в конфигурационном пространстве из начальной точки в целевую, обходя препятствия, лежащие в операционном пространстве

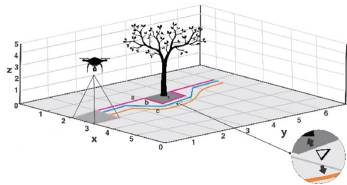
Путь  $\alpha : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{Q}$  в конфигурационном пространстве.



Путь  $\gamma = f_{kin} \circ \alpha$  в операционном пространстве.



# Методы планирования движения



(a) Полет квадрокоптера <sup>1</sup>



(b) Манипуляторная задача <sup>2</sup>



(c) Движение машины <sup>3</sup>

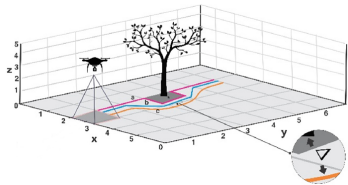
---

<sup>1</sup>Maaji, S. UAV Path Planning for Area Coverage and Energy Consumption in Oil and Gas Exploration Environment

<sup>2</sup>MIT Computer Science & Artificial Intelligence Lab

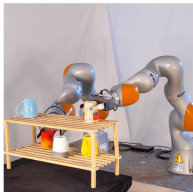
<sup>3</sup>Лаборатория интеллектуального транспорта, МФТИ

# Методы планирования движения



(a) Полет квадрокоптера <sup>1</sup>

$$\mathbb{R}^n \rightarrow SE(3)$$



(b) Манипуляторная задача <sup>2</sup>

$$\mathbb{T}^7 \text{ (или } \mathbb{R}^7) \rightarrow SE(3)$$



(c) Движение машины <sup>3</sup>

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \textit{Surface} \text{ (или } \mathbb{R}^3)$$

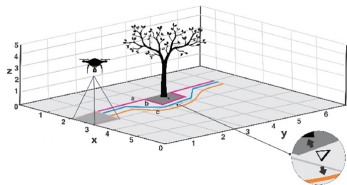
---

<sup>1</sup>Maaji, S. UAV Path Planning for Area Coverage and Energy Consumption in Oil and Gas Exploration Environment

<sup>2</sup>MIT Computer Science & Artificial Intelligence Lab

<sup>3</sup>Лаборатория интеллектуального транспорта, МФТИ

# Методы планирования движения



(a) Полет квадрокоптера <sup>1</sup>

$$\mathbb{R}^n \rightarrow SE(3)$$



(b) Манипуляторная задача <sup>2</sup>

$$\mathbb{T}^7 \text{ (или } \mathbb{R}^7) \rightarrow SE(3)$$



(c) Движение машины <sup>3</sup>

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \textit{Surface} \text{ (или } \mathbb{R}^3)$$

**Пространства представляют из себя многообразия**

---

<sup>1</sup>Maaji, S. UAV Path Planning for Area Coverage and Energy Consumption in Oil and Gas Exploration Environment

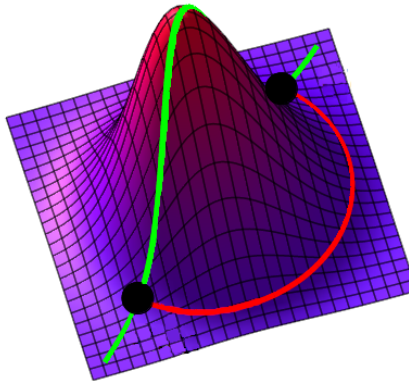
<sup>2</sup>MIT Computer Science & Artificial Intelligence Lab

<sup>3</sup>Лаборатория интеллектуального транспорта, МФТИ

# Геометрический подход

## Основные идеи

1. Искривление пространства с помощью Римановой метрики около препятствий



## Основные идеи

1. Искривление пространства с помощью Римановой метрики около препятствий
2. Динамическая система на многообразии для кривой  $\sigma$  под действием результирующей силы  $\mathcal{F}$



# Геометрический подход

## Основные идеи

1. Искривление пространства с помощью Римановой метрики около препятствий
2. Динамическая система на многообразии для кривой  $\sigma$  под действием результирующей силы  $\mathcal{F}$

ускорение вдоль кривой

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathcal{F}, \\ \dot{\sigma}(0) = \underbrace{(p_0, v_0)}_{\text{начальное состояние}}, \end{cases}$$

начальное состояние

$$\implies \ddot{\sigma}^k + \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\text{символ Кристоффеля}} \dot{\sigma}^i \dot{\sigma}^j = \mathcal{F}^k \quad \forall k = 1 \dots \dim(W),$$

# Геометрический подход

## Основные идеи

1. Искривление пространства с помощью Римановой метрики около препятствий
2. Динамическая система на многообразии для кривой  $\sigma$  под действием результирующей силы  $\mathcal{F}$

ускорение вдоль кривой

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathcal{F}, \\ \dot{\sigma}(0) = \underbrace{(p_0, v_0)}_{\text{начальное состояние}}, \end{cases}$$

начальное состояние

$$\implies \ddot{\sigma}^k + \underbrace{\Gamma_{ij}^k}_{\text{символ Кристоффеля}} \dot{\sigma}^i \dot{\sigma}^j = \mathcal{F}^k \quad \forall k = 1 \dots \dim(W),$$

3. Использование пулбека  $f^*$  для возврата в конфигурационное пространство

$$\begin{array}{ccccc} TQ & \xrightarrow{f^* df} & f^* TW & \xrightarrow{f^* \text{Id}_W} & TW \\ (q, \dot{q}) & & (q, \dot{x}) & & (x, \dot{x}) \\ & \searrow \pi_Q & \downarrow f^* \pi_W & & \downarrow \pi_W \\ & & Q & \xrightarrow{f} & W \\ & & q & & x \end{array}$$

# Геометрический подход

## Основные идеи

1. Искривление пространства с помощью Римановой метрики около препятствий
2. Динамическая система на многообразии для кривой  $\sigma$  под действием результирующей силы  $\mathcal{F}$

ускорение вдоль кривой

$$\begin{cases} f^* \nabla_{\dot{\sigma}} \gamma = f^* \mathcal{F}, \\ \gamma = f^* df(\dot{\sigma}) \\ \dot{\sigma}(0) = \underbrace{(p_0, v_0)}_{\text{начальное состояние}}, \end{cases} \implies \ddot{\gamma}^k + \underbrace{f^* \Gamma_{ij}^k}_{\text{символ Кристоффеля}} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = f^* \mathcal{F}^k \quad \forall k = 1 \dots \dim(W),$$

начальное состояние

3. Использование пулбека  $f^*$  для возврата в конфигурационное пространство

$$\begin{array}{ccccc} TQ & \xrightarrow{f^* df} & f^* TW & \xrightarrow{f^* \text{Id}_W} & TW \\ (q, \dot{q}) & & (q, \dot{x}) & & (x, \dot{x}) \\ & \searrow \pi_Q & \downarrow f^* \pi_W & & \downarrow \pi_W \\ & & Q & \xrightarrow{f} & W \\ & & q & & x \end{array}$$

# Геометрический подход

## Pullback bundle dynamical systems<sup>1</sup> (PBDS)

- Метрика зависит только от координаты

## Riemannian motion policies<sup>2</sup> (RMPFlow)

- Метрика может зависеть от скорости

---

<sup>1</sup>Bylard, A. Composable Geometric Motion Policies using Multi-Task Pullback Bundle Dynamical Systems. 2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)

<sup>2</sup>Cheng, C.-A. RMPflow: A Geometric Framework for Generation of Multitask Motion Policies. 2021 IEEE Transactions on Automation Science and Engineering

# Геометрический подход

## Pullback bundle dynamical systems<sup>1</sup> (PBDS)

- Метрика зависит только от координаты

## Riemannian motion policies<sup>2</sup> (RMPflow)

- Метрика может зависеть от скорости

Компоненты, необходимые для достижения цели  $f_i : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{N}_i$

### Притяжение

- движение к целевой точке
- потенциальные поля

### Дэмпинг

- снижение колебаний
- гладкие пути

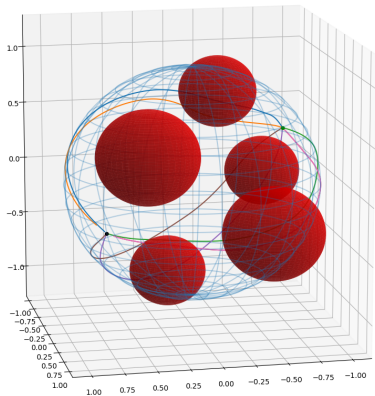
### Обход препятствий

- искривление метрикой
- расстояние до объектов

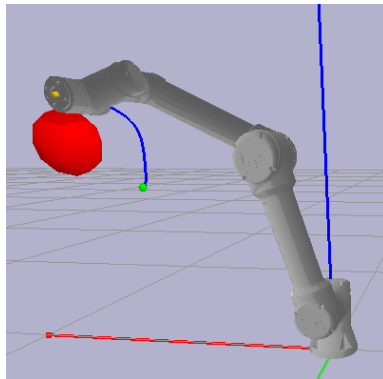
Оптимизационная задача  $\implies$  ускорение  $\ddot{q} \in \mathcal{Q}$

<sup>1</sup>Bylard, A. Composable Geometric Motion Policies using Multi-Task Pullback Bundle Dynamical Systems. 2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)

<sup>2</sup>Cheng, C.-A. RMPflow: A Geometric Framework for Generation of Multitask Motion Policies. 2021 IEEE Transactions on Automation Science and Engineering



Пути, полученные RMPFlow при движении по сфере

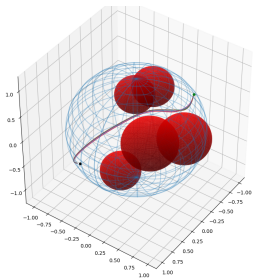


Путь, полученный PBDs при движении манипулятора

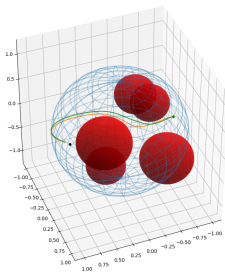
# Результаты

## Свойства методов

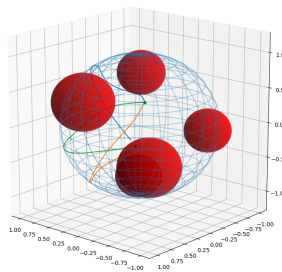
Свойство	PBDS	RMPFlow
Достижимость	оба метода сходятся в точку, заданную потенциальным полем в задаче аттрактора	
Устойчивость путей	оба метода при одинаковых по направлению начальных скоростях сохраняются одинаковый путь	
Геометрическая устойчивость	не меняет путь при смене карт	меняет путь при смене карт



(a) Устойчивость путей



(b) RMPFlow: разные карты

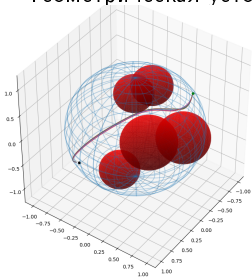


(c) PBDS: разные карты 8/11

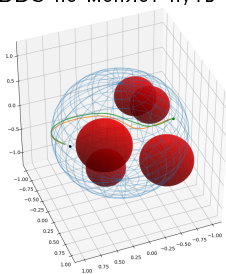
# Результаты

## Свойства методов

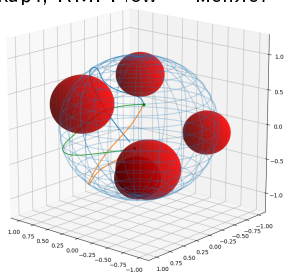
- Достижимость: оба метода сойдутся в точку, заданную потенциальным полем в задаче аттрактора, при выполнении условий:
  - PBDS: дифференциал произведения отображений задания  $d\left(\prod_{i=1}^k f_i\right)$  инъективен, выбранные псевдометрики  $\omega_i$  положительно полуопределены
  - RMPFlow: матрица инерции  $M$  с учетом кривизны несингулярна
- Устойчивость путей: методы при одинаковых по направлению скоростях сохраняют путь
- Геометрическая устойчивость: PBDS не меняет путь при смене карт, RMPFlow — меняет



(a) Устойчивость путей



(b) RMPFlow: разные карты



(c) PBDS: разные карты 8/11



# Результаты

## Качественные показатели (20 экспериментов)

- Среднее время симуляции в 2-4 раза меньше времени вычислений

Метод	Время симуляции, с	Время вычисления, с
PBDS	9.78	21.49
RMPFlow	9.91	24.77

- Изменение расстояние до препятствий за счет выбора метрики

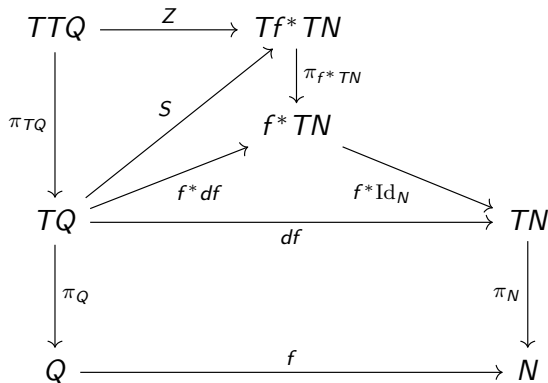
Метрика	Метод	Минимальное расстояние до препятствий, м
$g = \exp\left(\frac{0.1}{x^2}\right)$	PBDS	0.011
	RMPFlow	0.010
$g = \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)$	PBDS	0.019
	RMPFlow	0.023
$g = \exp\left(\frac{10}{x^2}\right)$	PBDS	0.040
	RMPFlow	0.041

# Выводы и методические рекомендации

- Явное решение задач оптимизации  $\implies$  возможность real-time режима и планирования на горизонте.
- Ограничения на сочленения: репараметризация пути для достижения реализуемой динамики.
- Можно выбрать любые удобные карты в PBDS, рекомендуется выбор глобальной (или близкой к глобальной) карты для RMPFlow.
- Эмпирический подбор параметра метрики для обхода препятствий, не блокирующего проход робота.
- Учетывание тела робота при обходе препятствий.

- Параллелизация вычислений
- Аппробация метода на реальной робототехнической системе
- Финслерова метрика
- Контактные задачи

$$\ddot{q} = \operatorname{argmin}_{\ddot{q} \in D} \|Z(\ddot{q}) - S((q, \dot{q}))\|^2, \quad \text{где } D \subset TTQ.$$



### PBDS

$$\ddot{q} = \operatorname{argmin}_{\ddot{q} \in D} \|Jf\ddot{q} + \dot{J}f\dot{q} - \dot{\gamma}(0)\|_{\omega(f)}^2,$$

где  $\dot{\gamma}(0) = g^{kj}(f)F^j - \dot{q}^l Jf_{jh}\dot{q}^h Jf_{rl}\Gamma_{rj}^k$ .

$$\ddot{q} = (Jf^T \omega Jf)^\dagger \left( Jf^T \omega \left( g^{-1}F - (\dot{J}f - \Xi)\dot{q} \right) \right),$$

где  $\Xi_{kj} = Jf_{lj}\Gamma_{lh}^k Jf_{hr}\dot{q}^r$ .

### RMPFlow

$$\ddot{q} = \operatorname{argmin}_{\ddot{q} \in D} \|Jf\ddot{q} + \dot{J}f\dot{q} - M^\dagger F\|_M^2.$$

$$\ddot{q} = (Jf^T M Jf)^\dagger \left( Jf^T M \left( M^\dagger (F - \xi_G) - \dot{J}f\dot{q} \right) \right),$$

где  $\xi_G$  — отвечающая за кривизну компонента.