Рассуждения об общей и дифференциальной топологии, а также о дифференциальной геометрии

Магазенков Е. Н.
Попов А.М.

Санкт-Петербург
2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1
Общая топология

> Невозможна реальность, которая была бы полностью независима от ума, постигающего её.
>
> *Анри Пуанкаре*
> *французский математик,*
> *один из основоположников*
> *топологии*

Данная глава посвящена некоторому введению в раздел математики, называющийся топологией. Говоря простыми словами, можно описать вопросы, на которые отвечают топологи, как некий анализ объектов на основе лишь их формы и свойств, без опоры на такие характеристики как длины, углы, площади и т.д. При этом оказывается, что такой взгляд на пространства (будем честны – именно вокруг понятия топологического пространства будут крутиться дальнейшие рассуждения) появляется повсеместно в кардинально различных сферах математики, в том числе и в курсах математического анализа, с которыми читатель уже наверняка знаком.

При этом в названии главы также есть слово *общая*. В понятие общей топологии мы будем включать то, что часто еще называют элементарной топологией; ту часть всей науки, которая практически стала большой частью общематематического языка; ту часть, которая является некоторой базой в изучении всей топологии и построена, в большинстве, на введении понятий и рассмотрении некоторых свойств. Можно сказать, что мы представляем здесь свод некоторых правил (состоящий из определений и связывающих их лемм, теорем, утверждений), регулирующих поведение внутри данных пространств. А такими пространствами является практически любое, известное вам пространство.

§ 1. Основные определения

1 Топология и топологическое пространство

Определение (Топология)
Рассмотрим произвольное множество X. Множество его подмножеств Ω называется топологией, если выполнен следующий набор свойств:

1. $\varnothing \in \Omega$, $X \in \Omega$;
2. $\forall U, V \in \Omega \implies U \cap V \in \Omega$;
3. $\forall \alpha \in \mathcal{A}\, U_\alpha \in \Omega \implies \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \Omega$.

Расшифровывая данное определение, можно просто запомнить, что пустое и всё множество лежат в топологии (1-ое свойство), конечное пересечение множеств топологии лежит в топологии (2-ое свойство) и любое объединение множеств топологии лежит в топологии (3-ье свойство).

Замечание
Такое определение появилось неслучайно. Дело в том, что топология как наука создавалась достаточно поздно (в истории развития математики). Поэтому в других частях математики (особенно в матанализе) уже были построены некоторые идеи, которые при развитии топологии хотелось оставить действующими и в ней ради целостности математики.

Скорее всего, именно поэтому лишь конечное пересечение лежит в топологии. Ведь в матанализе нетрудно найти пример, в котором достаточно хороший набор подможеств – интервалы – не содержит в себе какое-то бесконечное пересечение.

Упражнение
Попробуйте самостоятельно подобрать такой бесконечный набор интервалов, пересечение которого не будет являться интервалом.

Понятно, что топология Ω не существует отдельно от множества $\mathbf{X}$. Поэтому правильнее будет рассматривать именно пару множество–топология, которая образует пространство.

Определение (Топологическое пространство)
Пара (X, Ω_X)множества X с введенной топологией Ω_X называется топологическое пространство.

Замечание
Так как большая часть последующих размышлений посвящена топологическим пространствам, то часто в дальнейшем мы будем опускать пару множество-топология и ограничимся лишь чуть более жирным написанием исходного множества – $\mathbf{X}$.

То есть под $\mathbf{X}$ стоит понимать как само множества, так и топологическое пространство (X, Ω_X).

Пример
Приведем пример самых наивных топологий:

1. $(X, \{\varnothing, X\})$ - антидискретная топология, состоящая из двух элементов
2. $(X, 2^X)$ - дискретная топология, из всех подмножества множества X

Пример
Рассмотрим пример, так называемой, стандартной топологии, постоянно использующейся в одномерном математическом анализе. Пусть в качестве множества X будет числовая прямая $\mathbb{R}$, а в качестве топологии Ω_{st} будет пустое множество и всевозможные объединения интервалов. Коротко это можно записать

$$(\mathbb{R},\ \{\cup(a, b)\ :\ a, b \in \mathbb{R}\})$$

.

Упражнение
Проверьте свойства топологии из определения для предложенных примеров.

На самом деле стандартную топологию можно также задать и для $\mathbb{R}^n$. Об этом поговорим позже в пункте про индуцированные метрикой топологии.

Следующие определения просто вводят новые названия уже существующим объектам. Тем не менее, это необходимо из-за постоянного обращения к этим объектам в будущем.

Определение (Открытые и замкнутые множества)
Пусть дано некоторое топологическое пространство $(X,\ \Omega_X)$.

1. Элементы топологии Ω_X будем называть открытыми множествами,
2. Множества $X \setminus U$, где $U \in \Omega_X$, будем называть замкнутыми множествами.

Замечание
Заметьте, что открытые и замкнутые множества (как и в русском языке слова открытое и замкнутое) вовсе не являются противоположными. Так, множество может быть

- *и открытым, и замкнутым*, как пустое и X (но не всегда только они),
- *открытым, но не замкнутым*, как интервал в $(\mathbb{R}, \Omega_{st})$,
- *замкнутым, но не открытым*, как отрезок в $(\mathbb{R}, \Omega_{st})$,
- *ни замкнутым, ни открытым*, как полуинтервал в $(\mathbb{R}, \Omega_{st})$.

Замечание
На самом деле открытые и замкнутые множества являются даже весьма схожими объектами. Так, топологию можно определять через замкнутые множества. Для этого нужно немного модернизировать определение:

Рассмотрим совокупность $\tilde{\Omega}$ подмножеств множества X, для которой

1. $\varnothing \in \tilde{\Omega}$, $X \in \tilde{\Omega}$ — эти условия никак не меняются (ведь мы знаем, что эти множества одновременно открыты и замкнуты),
2. $\forall\, F, G \in \tilde{\Omega} \implies F \cup G \in \tilde{\Omega}$,
3. $\forall\, \alpha \in \mathcal{A}\ F_\alpha \in \tilde{\Omega} \implies \bigcap\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} F_\alpha \in \tilde{\Omega}$.

Тогда $\tilde{\Omega}$ описывает всевозможные замкнутые множества X, а топологией можно назвать $\Omega = \left\{A \subset X \ :\ X \setminus A \in \tilde{\Omega}\right\}$.

Замечание
В дальнейшем, мы будем использовать пару значков, чтобы сделать записи в доказательствах более удобными. Договоримся:

- $U \underset{\circ}{\subset} X$ будет означать, что U открыто в $\mathbf{X}$,
- $F \underset{\lrcorner}{\subset} X$ будет означать, что F замкнуто в $\mathbf{X}$

(2) База топологии

Мы примерно разобрались с тем, что такое топология. Однако у нас до сих пор нет никакого способа описания топологического пространства, не описывая всевозможные открытые множества. По этой причине предлагается следующий объект, позволяющий описать некоторую часть топологии, которой будет достаточно для восстановления всей структуры.

Определение (База топологии)
Назовем совокупность $\mathbb{B}$ открытых множеств $\mathbf{X}$ базой топологии $(X,\, \Omega_X)$, если всякое непустое открытое множество этой топологии можно представить в виде объединения элементов этой совокупности.

Пример
Так в качестве базы стандартной топологии можно рассмотреть множество всевозможных интервалов с вещественными концами.

$$\mathbb{B}_{st} = \{(a, b) \ :\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Аналогично, можно рассмотреть только интервалы с рациональными концами. Такое множество тоже будет базой.

Упражнение
Подумайте, могут ли различные топологические структуры иметь базу?

Можно заметить, что какие-то базы могут порождать одни и те же топологии. Для различия баз определим, когда можно говорить про базы, как про одинаковые объекты.

Определение (Эквивалентные базы)
Базы называются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

③ Метрика и ее связь с топологией

Наверняка вы уже встречались ранее с понятием метрики на различных курсах по математике (а может и не только). Однако для строгости изложения и в целях напоминания приведем некоторые отрывки из теории метрических пространств.

Определение (Метрика)
Функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой, если выполнено

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\forall\, x, y\ \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\forall\, x, y, z\ \rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$.

Определение (Метрическое пространство)
Множество X и метрика ρ на нём образуют метрическое пространство (X, ρ).

Определение (Шары и сферы)
В метрическом пространстве (X, ρ) для точки $a \in X$ и произвольного положительного вещественного числа $r \in \mathbb{R}_+$ вводятся понятия:

1. Открытого шара $B_r(a)$
$$B_r(a) = \{x \in X\ :\ \rho(a, x) < r\}\,,$$
2. Замкнутого шара $\overline{B}_r(a)$
$$\overline{B}_r(a) = \{x \in X\ :\ \rho(a, x) \leqslant r\}\,,$$
3. Сферы $S_r(a)$
$$S_r(a) = \{x \in X\ :\ \rho(a, x) = r\}\,.$$

Замечание
Важно понимать, что термины «шар», «сфера» не всегда передают реальную форму шаров и сфер.

Так, как бы странно это не звучало, при разных введенных метриках в $\mathbb{R}^2$ шар может оказаться квадратом, ромбом (при этом в самом привычном нам случае он в действительности окажется шаром, только двумерным, то есть кругом).

Упражнение
Найдите примеры метрик в $\mathbb{R}^2$ с разными формами шаров.

Оказывается, что в метрическом пространстве всегда есть одна понятная топология, которую мы будем называть метрической топологией.

Определение (Метрическая топология)
Множество всевозможных шаров некоторого метрического пространства является базой некоторой топологии. Такая топология называется порожденной метрикой топологией или просто метрической топологией.

Пример
Простейшим примером такой топологии является стандартная топология. Только теперь мы можем описать ее не только для одномерного случая.

Стандартной топологией для $\mathbb{R}^n$ будем называть топологию, индуцированную евклидовой метрикой.

В метрической топологии можно немного по-другому рассматривать открытость множества. Именно таким образом обычно обходят страшную *топологию* в курсах математического анализа.

Предложение
В порожденной метрикой топологии множество является открытым тогда и только тогда, когда оно содержит каждую свою точку вместе с некоторым шаром, центром которого она является.

Доказательство
$\Rightarrow$ Пусть множество A открыто. Тогда оно является объединением некоторых шаров $A = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} B_{r_\alpha}(y_\alpha)$.

Для произвольной точки $x \in A$ найдем тот из этих шаров, которому она принадлежит. Пусть это просто $B_r(y)$. Тогда шар $B_{r-\rho(x,y)}(x)$, где ρ – метрика, является искомым.

$\Leftarrow$ Рассмотрим для каждой точки x шар $B_r(x)$ из условия. Тогда $\bigcup\limits_{x \in A} B_r(x) = A$ и при этом, так как все шары открыты, то это объединение открытых множеств — а значит открытое.

Упражнение
Проверьте, что замкнутые шары являются замкнутыми множествами, а открытые шары – открытыми множествами.

Некоторые топологические пространства могут быть порождены метрикой, даже если мы этого не подозреваем (или просто определяем без отсылок к ней). Однако такие топологии образуют группу, которая имеет свои преимущества и упрощения перед остальными топологиями.

Определение (Метризуемые пространства)
Топологическое пространство называется метризуемым, если его топологическая структура порождается некоторой метрикой.

Замечание
Отметим, что далеко не все топологии являются метризуемыми. Простейшим (но не самым показательным) примером неметризуемого пространства является антидискретная топология, состоящая из более чем одной точки.

④ Топология на подпространстве

Можно пробовать строить топологию на основе уже имеющихся. Простейшие варианты мы рассмотрим в ближайших двух пунктах, а более конструктивные способы будут представлены в 7 и 8 параграфах.

Определение (Индуцированная топология)
Рассмотрим некоторое подмножество $A \subset X$ пространства (X, Ω_X). Совокупность $\Omega_A = \{A \cap U \ : \ U \in \Omega_X\}$ является топологией в множестве A. Такую топологию называют индуцированной в A топологией.

Упражнение
Проверьте, что индуцированная топология действительно является топологией по определению.

Предложение
Множество F является замкнутым в подпространстве $A \subset X$ тогда и только тогда, когда $F = A \cap E$, где E – замкнуто в X.

Доказательство
$\Rightarrow$ Пусть $F \subsetneq A$. Тогда $A \setminus F \subsetneq A$ и это множество представимо в виде $A \setminus F = A \cap U = A \cap (X \setminus E) = (A \cap X) \setminus (A \cap E) = A \setminus (A \cap E)$, где $U \subsetneq X$, $E \subsetneq X$. Избавляясь с двух сторон от A, получаем искомое.

$\Leftarrow$ Пусть $F = A \cap E$. Положим $U = X \setminus E \subsetneq X$. Тогда $A \cap U = A \cap (X \setminus E) = (A \cap X) \setminus (A \cap E) = A \setminus F$. Но $A \cap U \subsetneq A$, а значит и $A \setminus F$. А тогда $F \subsetneq A$.

Замечание
Заметим, что множества, являющиеся открытыми в подпространстве вовсе не всегда открыты в объемлющем пространстве.

Так, рассмотрим стандартную топологию на $\mathbb{R}$ как индуцированную из топологии на $\mathbb{R}^2$. Единственным открытым множеством из $\mathbb{R}$, которое открыто в $\mathbb{R}^2$ будет пустое множество.

Такое свойство часто называют относительностью открытости.

Однако иногда все же открытость в подпространстве равносильна открытости в объемлющем пространстве. Рассмотрим это в следующем предложении.

Предложение
Открытые множества открытого подпространства являются открытыми и во всем пространстве.

$$A \subsetneq \mathbf{X} \implies \forall U \subsetneq A \implies U \subsetneq \mathbf{X}.$$

или еще проще

$$A \subsetneq \mathbf{X} \implies \Omega_A \subset \Omega_X.$$

Доказательство
Пусть $U \underset{\circ}{\subset} A$. Тогда по определению $U = A \cap V$, где $V \underset{\circ}{\subset} X$. И получается, что, так как $A \underset{\circ}{\subset} X$, то U есть объединение двух открытых в X. А значит оно само открыто и $U \in \Omega_X$.

5 Топология произведения

Вспомните идею при построении декартова произведения множеств. Фактически мы предъявляем упорядоченную пару. Аналогично можно построить топологическое пространство по двум (или нескольким) топологиям.

Определение (Топология произведения)
Рассмотрим два топологических пространства (X, Ω_X)и (Y, Ω_Y). Тогда на декартовом произведении $X \times Y$ можно рассмотреть топологию, порожденную базой

$$\mathbb{B} = \{U \times V \ : \ U \underset{\circ}{\subset} X, \ V \underset{\circ}{\subset} Y\}$$

Пример
Заметим, что стандартная топология на $\mathbb{R}^2$, к примеру, совпадает с топологией произведения стандартных топологий на $\mathbb{R}$.

6 Расположение точек относительно множества

Пока у нас нет никакого способа определять открытые множества без разложения в объединение других открытых. Как один из таких вариантов, можно рассматривать различные точки и окрестности вокруг них. На основе этих окрестностей можно определить разные классы точек пространства.

Определение
Пусть (X, Ω_X)— топологическое пространство, $A \subset X$. Точка $b \in A$ называется:

1. внутренней для множества A, если есть окрестность этой точки, полностью лежащая в A
$$b \text{ – внутренняя, если } \exists\, U \ni b \ : \ U \subset A.$$
2. внешней для множества A, если есть окрестность этой точки, не пересекающаяся с A
$$b \text{ – внешняя, если } \exists\, U \ni b \ : \ U \cap A = \emptyset.$$
3. граничной для множества A, если любая окрестность этой точки, пересекается с A и с $X \setminus A$
$$b \text{ – граничная, если } \forall\, U \ni b \implies U \cap A \neq \varnothing \text{ и } U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing.$$

Понятно, что все внутренние точки образуют некоторое множество. Интересно, что это множество можно задавать и другим способом.

Определение
Пусть (X, Ω_X)— топологическое пространство, $A \subset X$. Внутренностью $\mathrm{Int}(A)$

множества A называется:

1. множество его внутренних точек,
2. объединение всех открытых множеств, лежащих в A.

Предложение
Определения внутренности эквивалентны.

Доказательство
$\Rightarrow$ Если точка лежит вместе с некоторой окрестностью, а окрестность в свою очередь лежит в A, то она лежит и в объединении всех открытых множеств, лежащих в A

$\Leftarrow$ Предположим, что точка x лежит в A с некоторой окрестностью, но не входит в объединение всех открытых множеств лежащих в A. Получаем явное противоречие.

Так как мы увидели, что внутренность является открытым множеством, то появляется способ определения открытых множеств.

Предложение
$A \subsetneq X$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int}(A) = A$.

Доказательство
$\Rightarrow$ Обозначим $\mathcal{U} = \{U \in \Omega_X \ : \ U \subset A\}$. Так как множество открыто, то $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U = A$, так как A само одно из этих множеств в объединении.

$\Leftarrow$ Очевидно, так как $\mathrm{Int}(A)$ открыто как объединение открытых.

Аналогично можно ввести понятие внешности.

Говоря про классификацию точек, можно рассмотреть немного другой подход.

Определение
Пусть (X, Ω_X)— топологическое пространство, $A \subset X$. Точка $b \in A$ называется:

1. точкой прикосновения для A, если любая окрестность пересекается с A
$$\forall U \ni b \implies U \cap A \neq \emptyset.$$
2. предельной точкой, если любая проколотая окрестность пересекается с A
$$\forall U \ni b \implies U \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

С такими точками тоже можно ввести некие множества.

Определение
Замыканием $\mathrm{Cl}(A)$ множества $A \subset X$ называется множество его точек прикосновения.

Предложение
Замыкание равно пересечению всех замкнутых множеств, содержащих A.

Предложение
$A \subsetneq X$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Cl}(A) = A$.

Упражнение
Докажите данные утверждения аналогично утверждению про внутренность.

Мы знаем из курса матанализа, что множество рациональных чисел всюду плотно в множестве вещественных. Там это выражалось в смысле: между любыми двумя вещественными числами можно найти рациональное. Однако плотность можно вводить, используя замыкание, для любых пространств.

Определение
Пусть $A, B \subset X$. Говорят, что

1. A плотно в B, если $B \subset \mathrm{Cl}(A)$
2. A всюду плотно в X, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Пример
Как уже говорилось, $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$. Также $\mathbb{I}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

7 Последовательности

Как и в матанализе, можно рассматривать последовательности из точек пространства. Определение последовательности и предела совершенно не отличается от привычного. Однако оказывается, что, в отличие от стандартной топологии, не всегда предел единственный.

Определение (Последовательность)
Последовательностью в пространстве X назовем отображение $q : \mathbb{N} \to X$.

Определение (Сходящаяся последовательность)
Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $a \in X$, если

$$\forall\, U(a) \subsetneq X \implies \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall n > N \implies x_n \in U(a).$$

Пример
Рассмотрим антидискретную топологию на $\mathbb{R}$ и последовательность $\{1\}_{n=1}^{\infty}$. Любое натуральное число является пределом такой последовательности.

Данный пример показывает, что не всегда предел единственный. Мы еще увидим далее, какого свойства будет достаточно для единственности предела.

§ 2. Непрерывные отображения

① Непрерывность

Замечание
Ниже приведены 4 определения непрерывности отображения. На самом деле наплодить определений можно еще много, тут приведены наиболее распространенные. Более того, отдельной задачей будет показать, что все определения эквиваленты, то есть определяют одно и то же понятие.

Определение
Пусть даны два топологических пространства $(X,\, \Omega_X)$и $(Y,\, \Omega_Y)$, а также теоретико-множественное отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$.

1. f называется непрерывным в точке $x \in \mathbf{X}$, если
$$\forall\, U(f(x)) \subsetneq \mathbf{Y} \implies \exists\, V(x) \subsetneq \mathbf{X} \;:\; f(V(x)) \subset U(f(x)).$$
Будем говорить, что f непрерывное, если оно непрерывно в каждой точке $\mathbf{X}$.
2. Будем говорить, что f непрерывное, если прообраз любого открытого открыт, то есть
$$\forall\, U \subsetneq \mathbf{Y} \implies f^{-1}(U) \subsetneq \mathbf{X}.$$
3. Будем говорить, что f непрерывное, если прообраз любого замкнутого замкнут, то есть
$$\forall\, F \subsetneq \mathbf{Y} \implies f^{-1}(U) \subsetneq \mathbf{X}.$$
4. Будем говорить, что f непрерывное, если образ замыкания лежит в замыкании образа, то есть
$$\forall\, A \subset \mathbf{X} \implies f(\mathrm{Cl}\,(A)) \subset \mathrm{Cl}\,(f(A))\,.$$

Соответственно, ниже приведено обещанное утверждение, показывающее, что данные определения определяют одно и то же.

Лемма 1
Определения непрерывности 1-4 эквивалентны.

Доказательство
Докажем в порядке $1 \implies 4 \implies 3 \implies 2 \implies 1$.
$1 \Rightarrow 4$ Пояснительный рисунок к доказательству смотри на Рис. 1.
Рассмотрим произвольную точку $x \in \mathrm{Cl}\,(A)$ и произвольную $U(f(x))$.
Тогда из 1: $\exists\, V(x) \;:\; f(V(x)) \subset U(f(x))$.
Так как x лежит в замыкании A, то $\exists\, a \in A \cap V(x)$.
А значит $f(a) \in f(A) \cap f(V(x)) \subset f(A) \cap U(f(x))$.
Учётом произвольности выбора окрестности $U(f(x))$ для любой точки $f(x) \in f(\mathrm{Cl}\,(A))$ верно, что $f(x) \in \mathrm{Cl}\,(f)\,(A)$.

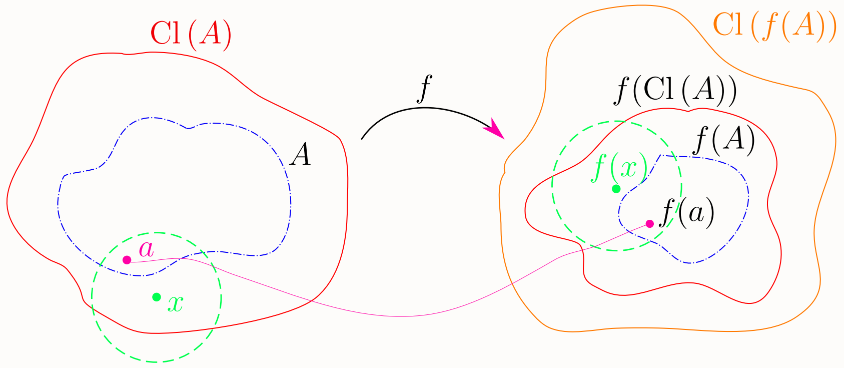

Рис. 1. Пояснительная картинка к переходу $1 \implies 4$

$4 \Rightarrow 3$
Пусть $F \subsetneq Y$, но $f^{-1}(F)$ не замкнуто.
Рассмотрим точку $d \in \mathrm{Cl}\,(f^{-1}(F)) \setminus f^{-1}(F)$.
Тогда $f(d) \in f(\mathrm{Cl}\,(f^{-1}(F))) \underset{\text{по 4}}{\subset} \mathrm{Cl}\,(f(f^{-1}(F))) = \mathrm{Cl}\,(F) = F$.
Однако получается, что $d \in f^{-1}(f(d))) \subset f^{-1}(F)$, что противоречит предположению $d \in \mathrm{Cl}\,(f^{-1}(F)) \setminus f^{-1}(F)$.
А значит исходное предположение было неверно и $f^{-1}(F) \subsetneq X$.
$3 \Rightarrow 2$
Пусть $F \subsetneq Y$. Тогда по 3: $f^{-1}(F) \subsetneq X$.
Рассмотрим $U = Y \setminus F \underset{\circ}{\subset} Y$.
При этом $f^{-1}(U) = f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F) \underset{\circ}{\subset} X$.
То есть $f^{-1}(U) \underset{\circ}{\subset} X$.
$2 \Rightarrow 1$
Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и соответствующую ей окрестность $U(f(x)) \underset{\circ}{\subset} Y$.
По 2 $f^{-1}(U(f(x))) \underset{\circ}{\subset} X$.
Так как $x \in f^{-1}(U(f(x)))$, то можем рассмотреть $V(x) = f^{-1}(U(f(x)))$.

Лемма 2
Пусть $f \,:\, \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ и $g \,:\, \mathbf{Y} \to \mathbf{Z}$ — непрерывные отображения.
Тогда отображение $g \circ f \,:\, \mathbf{X} \to \mathbf{Z}$ также является непрерывным.

Доказательство
Рассмотрим $U \underset{\circ}{\subset} \mathbf{Z}$.
Так как g – непрерывное отображение, то $V = g^{-1}(U) \underset{\circ}{\subset} \mathbf{Y}$.
Так как f – непрерывное отображение, то $O = f^{-1}(V) \underset{\circ}{\subset} \mathbf{X}$.
При этом получаем, что $O = f^{-1}(g^{-1}(U)) = f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1} \underset{\circ}{\subset} \mathbf{X}$.
А значит по 2 определению $g \circ f$ непрерывное.

Пример
Отображение $\mathrm{id} \,:\, X \to X$, что $\forall\, x \quad \mathrm{id}(x) = x$, является непрерывным.

Пример
Константное отображение $\mathrm{const}_c : X \to Y$ $\mathrm{const}_c(x) = c$ является непрерывным.

Упражнение
Рассмотрим отображение $f : [0,2] \to [0,2]$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 3-x, & x \in [1,2] \end{cases}$. Найдите открытое множество, прообраз которого не является открытым.

Таким образом, данное отображение не является непрерывным.

Непрерывность – это хорошее свойство, однако оказывается, что, чтобы сравнивать между собой пространства, необходимо более сильное свойство, на которое мы и посмотрим в следующем пункте.

(2) Гомеоморфизм

Определение
Пусть даны два топологических пространства (X, Ω_X)и (Y, Ω_Y).

1. Отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называется гомеоморфизмом (*homeomorphism*), если оно биективное, а также f и f^{-1} – непрерывные.
2. Если между пространствами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ можно построить гомеоморфизм, то такие пространства называют гомеоморфными.

Замечание
Будем обозначать гомеоморфные пространства символом $\overset{\text{homeo}}{\cong}$.

Замечание
Интуитивно, можно воспринимать гомеоморфность двух пространств как возможность деформировать сжатием или растяжением одно пространство в другое (ну и, соответственно, обратно). Важно, что эта деформация происходит без разрезов и склеиваний.

Лемма 3
Отношение $\overset{\text{homeo}}{\cong}$ является отношением эквивалентности.

Доказательство
Рассмотрим произвольные топологические пространства (X, Ω_X), (Y, Ω_Y)и (Z, Ω_Z).

- Рефлексивность: $\mathbf{X} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbf{X}$ – следует из того, что тождественное отображение непрерывно.
- Симметричность: $\mathbf{X} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbf{Y} \implies \mathbf{Y} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbf{X}$ – следует из того, что гомеоморфизм биективен.
- Транзитивность: $\mathbf{X} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbf{Z} \implies \mathbf{X} \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbf{Z}$ – следует из непрерывности композиции.

Таким образом, топологические классы разбиваются на классы эквивалентности.

Во многом, именно интерес в определении гомеоморфности двух пространств и развивал науку топологию.

А так как определение негомеоморфности двух пространств требует доказательства несуществования гомеоморфизма, что является задачей, которую непонятно как решать, то начали рассматривать некоторые свойства, которые сохраняются при пропускании через любой гомеоморфизм. Это давало возможность находить различия в этих инвариантах и утверждать о негомеоморфности пространств.

Однако интереснейшим вопросом оказалась задача нахождения набора свойств, которым должны удовлетворять два множества, чтобы можно было утверждать, что пространства являются гомеоморфными. И, к сожалению (или, может, к счастью), оказалось, что такого набора инвариантов не существует.

На самые используемые инварианты мы посмотрим в следующих главах, а пока давайте рассмотрим несколько примеров гомеоморфизмов.

3 Примеры гомеоморфизмов

Пример

$[0,1] \overset{\text{homeo}}{\cong} [a,b]$.

Построим гомеоморфизм, который легко показать на рисунке (см. Рис. 2) и не менее просто записать явно.

Рис. 2. Пояснительная картинка к построению гомеоморфизма между отрезками

Так, прямое отображение

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [a,b] \\ x &\mapsto (b-a)x + a. \end{aligned}$$

И обратное

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to [0,1] \\ y &\mapsto \frac{y-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Пример

Диск $\mathcal{D}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$ гомеоморфен полусфере $\mathcal{S}_+^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \ \wedge \ x_{n+1} \geqslant 0\right\}$.

Построим гомеоморфизм, который можно показать на рисунке (см. Рис. 3), легко понять: нужно просто натянуть диск на полусферу, как кусок резины на поверхность шарика, и не менее просто записать явно.

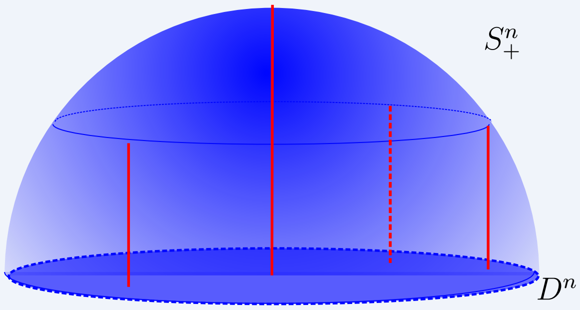

Рис. 3. Пояснительная картинка к построению гомеоморфизма между диском и полусферой

Так, прямое отображение

$$f : D^n \to S_+^n$$
$$(x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_{n-1}, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}\right).$$

И обратное

$$g : S_+^n \to D^n$$
$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Пример

Диск $\mathcal{D}^n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\right\}$ гомеоморфен $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим сначала простой случай $(-1, 1) \overset{\text{homeo}}{\cong} \mathbb{R}$. Заметим, что функция $f = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)$ является гомеоморфизмом.

Тогда для общего случая можем использовать $f = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right)\frac{x}{\|x\|}$. Эта идея показана на Рис. 4.

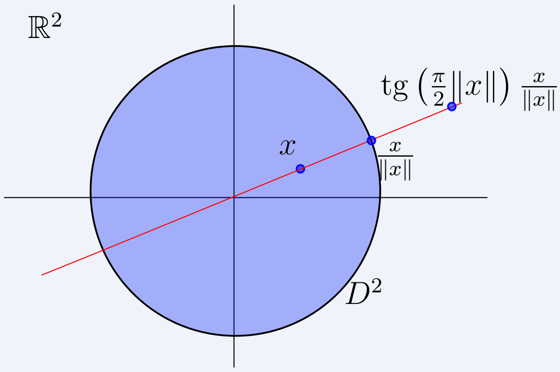

Рис. 4. Пояснительная картинка к построению гомеоморфизма между диском и полусферой

Пример

Сфера без точки $\mathcal{S}^n \setminus \{\text{pt}\}$ гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^n$.

Построим гомеоморфизм, который можно показать на рисунке (см. Рис. 5). Такое отображение в литературе называют стереографической проекцией и задается как

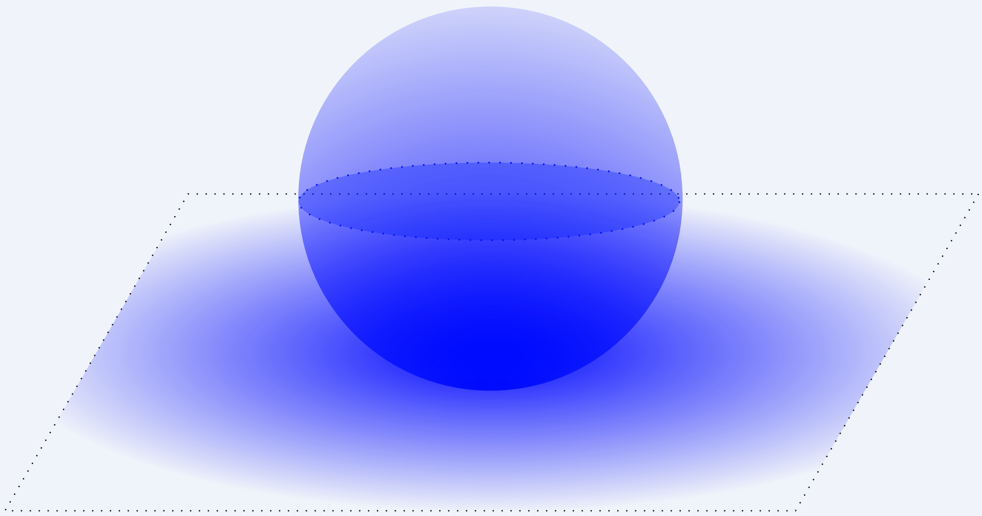

Рис. 5

Прямое отображение

$$\begin{gathered} f : \mathcal{S}^n \setminus \{\text{pt}\} \to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right) \end{gathered}$$

И обратное

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}^n \setminus \{\mathrm{pt}\}$$

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \frac{-1 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2} \right)$$

Замечание

На самом деле, мы нигде явно не показали, что предложенные отображения непрерывны. На самом деле, так как все эти примеры построены в привычном нам пространстве $\mathbb{R}^n$, то можно ссылаться на непрерывности там. Где-то также могут понадобиться непрерывности нормы и проекции, что предлагается рассмотреть в качестве упражнения.

Упражнение

Докажите следующие утверждения (топология стандартная):

1. Любая норма $\|\cdot\|$, введенная на $\mathbb{R}^n$, является непрерывным отображением.
2. Проекция $\pi\ :\ \mathbb{R}^n \supset A \to B \subset \mathbb{R}^k$ является непрерывным отображением.

§ 3. Аксиомы отделимости

О чем это?
В данном параграфе речь пойдет о первом (для нас) топологическом инварианте, связанном с тем, как мы можем отделить какие-то множества (в простейших случаях точки) друг от друга.

На самом деле, за время существования науки свойств, связанных с отделимостью, придумали достаточно много. Мы ограничимся наиболее важными для нас, но посмотреть их (возможно, неполный список) можно, к примеру, на википедии.

Забавно, что стандартные аксиомы называются «Т аксиомы». На самом деле корни у этого идут их специально придуманного немецкого слова Trennungsaxiom (разделение + аксиома).

1 Аксиома T_0, Колмогорова

Определение (Аксиома T_0, Колмогорова)
Топологическое пространство (X, Ω_X)удовлетворяет нулевой аксиоме отделимости (аксиоме Колмогорова или, проще говоря, является T_0 пространством), если для любых двух точек можно найти окрестность, содержащую одну точку и не содержащую другую.

Переписывать данное определение символьно не очень удобно, но тоже можно

$$\forall x, y \in \mathbf{X} \implies \exists U \subsetneq \mathbf{X} \,:\, (x \in U \wedge y \notin U) \vee (y \in U \wedge x \notin U).$$

Пример
Практически любое привычное пространство является T_0.

При этом все-таки не совсем все пространства удовлетворяют аксиоме Колмогорова. В частности, в следующем примере показано, почему антидискретная топология не является таковой.

Пример
Антидискретная топология не является T_0 пространством.

Действительно, в антидискретной топологии открытыми являются только пустое множество и само множество X. А значит это единственные окрестности, которые можно рассматривать. Но они всегда либо содержат обе точки (в случае всего множества), либо не содержат ни одной (в случае пустого множества). А значит определение не выполняется и такая топология не удовлетворяет аксиоме T_0.

2 Аксиома T_1, Фреше

Определение (Аксиома T_1, Фреше)
Топологическое пространство (X, Ω_X)удовлетворяет первой аксиоме отделимости (аксиоме Фреше или, проще говоря, является T_1 пространством), если для

каждой точки можно найти окрестность, не содержащую любую другую точку.

Символьно можно записать это как

$$\forall x \in \mathbf{X}\, \forall y \in \mathbf{X} \implies \exists\, U_x \subsetneq \mathbf{X} \;:\; y \notin U.$$

Аксиомы отделимости постепенно будут добавлять какие-то свойства на пространство. Первым оказывается привычное нам свойство замкнутости точки.

Лемма 4

Пространство является T_1-пространством тогда и только тогда, когда любое одноточечное множество является замкнутым.

Доказательство

$\implies$ Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Для каждой точки $y_i \neq x$ найдем окрестность U_{y_i} из определения T_1 пространства (то есть содержащую y_i и не содержащую x).

Объединяя все такие окрестности, мы фактически пройдем по всем точкам кроме самой x, а значит

$$\bigcup_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} U_y = X \setminus \{x\} \subsetneq \mathbf{X}.$$

А тогда $\{x\} \subsetneq \mathbf{X}$ как дополнение к открытому.

$\impliedby$ Для любой точки пространства x можем рассмотреть окрестность $U = X \setminus \{x\} \subsetneq \mathbf{X}$. Понятно, что эта окрестность отделяет любую другую точку от x.

Пример

Практически любое привычное пространство является T_1.

Пример

Так называемое связное двоеточие $(\{a, b\}, (\{\emptyset, a, \{a, b\}\})$ не является T_1 пространством.

Нетрудно проверить, что дополнение к множеству $\{a\}$, равное $\{b\}$ не является открытым. А значит точка $\{a\}$ не является замкнутым множеством и все пространство не может быть T_1.

Следующая лемма (как и аналогичные ей далее) приведется без доказательства во многом, потому что она очевидна. Однако эта лемма показывает основную идею при построении новых аксиом отделимости. Грубо говоря, «следующая по номеру аксиома наследует свойства предыдущего». Это как бы позволяет на практике перебирать их последовательно.

Лемма 5

$$T_0 \subset T_1$$

3 Аксиома T_2, Хаусдорфа

Определение (Аксиома T_2, Хаусдорфа)
Топологическое пространство $(X,\,\Omega_X)$удовлетворяет второй аксиоме отделимости (аксиоме Хаусдорфа или, проще говоря, является T_2 пространством), если для любых двух точек можно найти непересекающиеся окрестности.

Символьно можно записать это как

$$\forall\, x, y \in \mathbf{X} \implies \exists\, U_x, V_y \subsetneq \mathbf{X}\ :\ U_x \cap V_y = \emptyset.$$

Пример
Метрическое пространство является Хаусдорфовым.

Это нетрудно заметить, построив соответствующие окрестности радиусами, равными половине расстояния между точками.

Пример
Прямая Зариского $(\mathbb{R}, \{\mathbb{R} \setminus F\ :\ F$ – конечное$\})$ не является T_2 пространством.

Понятно, что в такой топологии пересечение любых двух открытых множеств $U_x = \mathbb{R} \setminus F_1$ и $U_y = \mathbb{R} \setminus F_2$ (где F_i – конечные множества) есть

$$U_x \cap U_y = (\mathbb{R} \setminus F_1) \cap (\mathbb{R} \setminus F_2) = \mathbb{R} \setminus (F_1 \cup F_2) \subsetneq \mathbb{R}.$$

При этом $F_1 \cup F_2$ конечно, как объединение конечных, а значит $\mathbb{R} \setminus (F_1 \cup F_2)$ непусто. То есть нарушается условие Хаусдорфовости.

Лемма 6
Пусть $f\ :\ \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ – непрерывное отображение, причем $\mathbf{Y}$ – хаусдорфово. Тогда график этой функции $\Gamma_f = \{(x, f(x)\ :\ x \in \mathbf{X}\}$ замкнут в произведении $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Доказательство
Рассмотрим произвольные точки $x \in X$ и $Y \ni y \neq f(x)$.

В силу Хаусдорфовости Y найдутся непересекающиеся окрестности U, V точек y и $f(x)$ соответственно. Но тогда из непрерывности отображения $f^{-1}(V) \subsetneq \mathbf{X}$. Отсюда $(f^{-1}(V) \times V) \cap (f^{-1}(V) \times U) = \emptyset$. А значит точка y не является точкой прикосновения и множество $\Gamma_f = \mathrm{Cl}(\Gamma_f)$, то есть Γ_f замкнуто.

Следствие
$(X,\,\Omega_X)$– Хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta_x = \{(x, x)\ :\ x \in \mathbf{X}\}$ замкнута в $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Доказательство
$\implies$ Возьмем в предыдущей лемме $f(x) = x$.

$\impliedby$ Пусть X не хаусдорфово. Рассмотрим $H = X \times X \setminus \Delta_x$. Так как $\Delta_x \subsetneq X \times X$, то $H \subsetneq X \times X$. Для любой точки $(x, y) \in H$ можно выбрать окрестность, полностью лежащую в H, как элемент базы (ведь открытое должно раскладываться в объединение элементов базы). А в базе топологии произведения элементы имеют вид $U \times V$. То есть $U \times V \subset H$ и $U \times V \cap \Delta_x = \emptyset$. А тогда и $U \cap V = \emptyset$. То есть для точек $x, y \in X$ нашли непересекающиеся окрестности, отделяющие их. Иначе говоря, X – хаусдорфово.

Более того, в хаусдорфовых пространствах уже предел последовательности оказывается единственным.

Предложение

Если $(X,\, \Omega_X)$является хаусдорфовым, то любая последовательность имеет ровно один предел.

Доказательство

Пусть есть два различных предела a_1, a_2 последовательности $\{x_n\}$. Найдем из хаусдорфовости отделяющие их окрестности $U_{a_1} \cap U_{a_2} = \emptyset$.

Так как a_1 – предел, то $\exists\, N_1 \in \mathbb{N} \;:\; \forall n > N_1 \implies x_n \in U_{a_1}$. Аналогично $\exists N_2 \in \mathbb{N} \;:\; \forall n > N_2 \implies x_n \in U_{a_2}$. Но тогда для $n > \max(N_1, N_2) \quad x_n \in U_{a_1} \cap U_{a_2}$, что противоречит предположению о непересечении окрестностей.

Цепочка включений аксиом отделимости, очевидно, продолжается.

Лемма 7

$T_1 \subset T_2$.

4 Аксиома T_3

Определение (Регулярное пространство R)

Топологическое пространство $(X,\, \Omega_X)$называется регулярным, если произвольное замкнутое множество можно отделить от не содержащейся в ней точки.

$$\forall\, A \subsetneq \mathbf{X} \forall\, x \notin A \quad \exists\, U_A, U_x \subsetneq \mathbf{X} \;:\; U_a \cap U_X = \emptyset.$$

Недочетом регулярности является ее несоответствие логике выполнения включений последующих аксиом в предыдущие. Один из таких случаев показан в следующем примере.

Пример

Тривиальная топология является регулярной, но не Хаусдорфовой.

Как мы знаем, тривиальная топология вообще не является даже T_0, а значит и T_2. Однако в ней есть ровно два замкнутых множества: пустое и все множество, которые легко отделяются от несодержащихся в них точках (в одном вообще нет точек, второе просто содержит все точки).

Замечание

Получается, что желаемую нами цепочку $T_0 \subset T_1 \subset T_2$ нельзя продолжить регулярностью. Именно поэтому ее не принято называть T_3.

Для выполнения соотношения $T_2 \subset T_3$ добавляют (на самом деле в разной литературе по-разному) дополнительные условия.

Определение (Аксиома T_3)
Топологическое пространство $(X,\,\Omega_X)$удовлетворяет третьей аксиоме отделимости (является T_3 пространством), если оно является регулярным и также удовлетворяет условию T_1.

Теперь, когда все точки замкнуты, их легко отделить непересекающимися окрестностями, что дает хаусдорфовость. Более строгое утверждение, продолжающее нашу цепочку, записано в лемме.

Лемма 8

$$T_2 \subset T_3$$

(5) Аксиома T_4, нормальность

Определение (Нормальность)
Топологическое пространство $(X,\,\Omega_X)$является нормальным, если можно отделить любые два непересекающихся замкнутых множества.

$$\forall\, F_1, F_2 \subsetneq \mathbf{X}\ \exists\, U_{F_1}, U_{F_2} \subsetneq \mathbf{X}\ :\ U_{F_1} \cap U_{F_2} = \emptyset.$$

Пример
Любое метрическое пространство является нормальным.

Действительно, давайте для произвольных замкнутых множеств F_1, F_2 рассмотрим такую функцию $f\ :\ X \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)},$$

где под $\rho(x, A)$ понимается расстояние от точки до множества, которое задается как $\inf\limits_{a \in A} \rho(x, a)$.

Тогда, в силу непрерывности метрики и арифметических операций, f – непрерывна. А значит можем рассмотреть в качестве окрестностей, отделяющих F_1 от F_2

$$U_{F_1} = f^{-1}((-\infty, \tfrac{1}{2})), \quad U_{F_2} = f^{-1}((\tfrac{1}{2}, \infty)).$$

(они открыты, как прообразы открытых; а непересекаемость можно проверить, посмотрев на то, какие значения выдает функция при разных x)

И снова оказывается, что нормальность не продолжает цепочку включений $T_{i-1} \subset T_i$. Поэтому, аналогично предыдущему, можно добавить первую аксиому. Оказывается, что этого достаточно.

Определение (Аксиома T_4)
Топологическое пространство $(X,\,\Omega_X)$удовлетворяет четвертой аксиоме отделимости (является T_4 пространством), если оно является нормальным и также удовлетворяет условию T_1.

Оказывается, что T_4 пространства позволяют не только отделить замкнутые друг от друга, но также ввести функциональную отделимость. Это примерно то, что было представлено для доказательства нормальности метризуемых пространств. Только теперь верно для любых T_4 пространств.

Лемма 9 (Урысона)
В T_4 пространствах для любых непересекающихся замкнутых множеств F_1, F_2 существует отображение $f : X \to I$, что $f(F_1) = \{0\}$ и $f(F_2) = \{1\}$.

$$\forall F_1, F_2 \subsetneq X \; : \; F_1 \cap F_2 = \emptyset \implies \exists f \; : \; X \to I \; : \; f(F_1) = \{0\} \text{ и } f(F_2) = \{1\}.$$

Доказательство данной леммы оказывается не столь очевидным и требующим неких матанализных выкладок, поэтому не будем его приводить.

Как уже говорилось, для введенного таким образом T_4 пространства включения аксиом продолжаются.

Лемма 10

$$T_3 \subset T_4$$

§ 4. Аксиомы счетности

О чем это?
В данном параграфе мы рассмотрим следующий набор свойств топологических пространств, которые позволяют их отличать. Это, так называемые, аксиомы счетности. Их основой является желание ответить на вопрос, можем ли мы чем-то ограничить какую-то топологическую структуру сверху. То есть требуется понять, будет ли нечто счетным. А вот что стоит за этим *нечто*, мы и посмотрим. Всего мы рассмотрим три ограничения. Два из них пронумерованы, а вот третье — как бы немного обособленное и без номера.

1 1 аксиома счетности

Определение (1 аксиома счетности)
Говорят, что топологическое пространство (X, Ω_X)удовлетворяет первой аксиоме счетности, если для любой точки $x \in X$ есть не более чем счетная база $\mathcal{B} = \{V_i\}_{i \in I}$ окрестностей точки x, то есть в каждой окрестности U_x содержится некоторая окрестность из базы.

Предложение
Любое метризуемое пространство удовлетворяет 1 аксиоме счетности.

Доказательство
Рассмотрим в качестве счетной базы окрестностей точки x семейство шаров с центром в точке x радиусов $\frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Пример
Топология Зариского не удовлетворяет 1 аксиоме счетности.

Действительно, если существует база $\mathcal{B} = \{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ окрестностей точки x, то рассмотрим точку y из множества $\mathbb{R} \setminus \left(\{x\} \cup \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus U_k)\right)$.

Так как одноточечное множество замкнуто, то $\mathbb{R} \setminus \{y\} \subsetneq X$. Но эта окрестность не содержит в себе ни одной из окрестностей $\mathcal{B}$, так как ровно их мы и вычитаем. А значит $\mathcal{B}$ не является базой. То есть пришли к противоречию, а значит никакой счетной базы окрестностей точки быть не может.

2 2 аксиома счетности

Определение (2 аксиома счетности)
Говорят, что топологическое пространство (X, Ω_X)удовлетворяет второй аксиоме счетности, если у него есть не более чем счетная база.

Лемма 11
Из 2 аксиомы счетности следует 1 аксиома счетности.

Доказательство
Если есть некоторая счетная база у всего пространства, то можно ее же рассматривать как счетную базу окрестностей точки.

Теорема 1 (Линделефа)
Если пространство (X, Ω_X)удовлетворяет 2 аксиоме счетности, то из любого покрытия X можно выбрать не более чем счетное его подпокрытие.

Доказательство
Пусть $\mathcal{B} = \{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – счетная база из 2 аксиомы счетности, и $\{U_i\}_{i\in I}$ – некоторое покрытие X.

Для каждого V_k выберем такое множество $U_{i(k)}$ из покрытия, что $V_k \subset U_{i(k)}$.

Тогда $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} V_k \subset \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} U_{i(k)}$. При этом также $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} U_{i(k)} \subset X$. А значит на самом деле они просто равны, то есть $\{U_{i(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ – необходимое подпокрытие.

Пример
Прямая Зоргенфрея не удовлетворяет 2 аксиоме счетности.

Действительно, открытое множество $[x, x+1)$ для каждой точки должно содержать некоторый элемент базы. Однако для различных точек $x \neq y$ эти элементы базы отличаются, так как для $x < y \quad x \notin [y, y+1)$. То есть элементов базы по крайней мере столько же, сколько и точек на прямой, а это точно не счетно.

③ Сепарабельность

Определение (Сепарабельное пространство)
Говорят, что топологическое пространство (X, Ω_X)сепарабельно, если у него есть не более чем счетное всюду плотное подмножество.

Лемма 12
Из 2 аксиомы счетности следует сепарабельность.

При этом, если пространство метризуемо, то верно и обратное.

Доказательство
Рассмотрим некоторую счетную базу $\mathbb{B} = \{B_i\}_{n=1}^{\infty}$ и выберем из каждого элемента этой базы по одной точке. Полученное множество назовем H (то есть $H = \{x_i \ : \ x_i \in B_i\}$).

Во-первых, заметим, что H счетно. А во-вторых, оно всюду плотно, так как любая другая окрестность точно содержит в себе элемент базы, а значит и соответствующую точку x_i.

В случае же метризуемого пространства, для всюду плотного $A \subset X$ рассмотрим множество $\{B_r(x) \ : \ x \in A, \ r \in \mathbb{Q}\}$. Оно счетное, как счетное объединение счетных множеств. Утверждается, что это множество является базой. Для доказательства этого достаточно лишь показать, что для любой точки x открытого множества U (в данном случае достаточно сказать лишь про шары) есть элемент этого множества, лежащий в U и содержащий x.

Рассмотрим точку $p \in X$ и некоторый шар $B_\varepsilon(p)$. В силу плотности A можно найти точку $q \in A$, что $\rho(p, q) < \frac{\varepsilon}{3}$. В силу плотность рациональных чисел между $\frac{\varepsilon}{3}$ и $\frac{2\varepsilon}{3}$ можно найти рациональное число δ. А тогда шар $B_\delta(q)$ содержится в $B_\varepsilon(p)$ и содержит p, что и требовалось.

Заметим, что данная лемма позволяет нам сказать о неметризуемости прямой Зоргенфрея. Так как в обратном случае сепарабельность с метризуемостью дали бы 2 аксиому счетности. А мы ранее убедились, что она не удовлетворяет 2 аксиоме счетности.

§ 5. Компактность

О чем это?
Понятие компактности является одним из основных в топологии и используется повсеместно в ее приложениях. На самом деле это некоторое подобие конечности в множествах. Также появляется более мягкое понятие паракомпактности, которое весьма понадобится при изучении многообразий.

1 Компактное пространство

Понятие компакта тесно завязано на покрытиях. Интуитивно понятно, что это такой набор, который *покрывает* полностью исходное множество. Рассмотрим более строгие определения.

Определение (Покрытие)
Множество $\{S_i\}_{i\in I}$ открытых подмножеств пространства $(X,\, \Omega_X)$называется покрытием этого пространства, если $\mathbf{X} \subset \bigcup\limits_{i\in\mathcal{I}} S_i$.

Определение (Подпокрытие)
Множество $\tilde{S}$ называется подпокрытием для покрытия S пространства $(X,\, \Omega_X)$, если $\tilde{S}$ – покрытие для $\mathbf{X}$, и $\tilde{S} \subset S$.

Определение (Компактное пространство)
Пространство $(X,\, \Omega_X)$называется компактным, если из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие этого пространства.

Замечание
Заметим, что скорее всего Вы уже встречались с понятием компакта в математическом анализе. Там появлялась следующая лемма, показывающая какие множества являются компактными в $\mathbb{R}^n$. Ее мы приведем здесь без доказательства.

Лемма 13
Пространство $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ является компактным тогда и только тогда, когда $\mathbf{X}$ замкнуто и ограничено.

Иногда вывод о компактности какого-то множества можно сделать не по определению, а пользуясь набором следующих свойств.

Лемма 14 (Свойства компакта)
Пусть $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ – компакты, $f\ :\ \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ – непрерывное.
Тогда

1. $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ – компакт,
2. Образ функции $f(X)$ – компакт,

3. Произвольная функция $g : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ достигает своего максимума и минимума,
4. Замкнутое подмножество $A \subsetneq \mathbf{X}$ является компактом,
5. Компактное подмножество A Хаусдорфового пространства $\mathbf{X}$ является замкнутым $A \subsetneq \mathbf{X}$.

Доказательство

1. Рассмотрим некоторый слой $H_x = \{x\} \times Y$. Так как Y — компакт, то и H_x — компакт, ведь можем выбрать окрестности, содержащие точку $\{x\}$, соответствующие конечному числу множеств, покрывающих Y: $H_x = \cup_{i=1}^n (U_x^i \times V_x^i)$.
В то же время для покрытия $X = \bigcup\limits_{x \in X} \underbrace{\cup_{i=1}^n U_x^i}_{\mathcal{U}_x}$ в силу компактности X можно выбрать конечное подпокрытие $\cup_{j=1}^m \mathcal{U}_x^j = \cup_{j=1}^m (\cup_{i=1}^n U_x^i)^j$.
А значит $X \times Y = \cup_{j=1}^m (\cup_{i=1}^n (U_x^i \times V_x^i))^j$ — конечное подпокрытие.
2. Рассмотрим некоторое покрытие $f(X) = \cup_{i=1}^\infty U_i$. В силу непрерывности $\cup_{i=1}^\infty f^{-1}(U_i) = X$. При этом X – компакт, а значит можно выбрать его конечное подпокрытие $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=1}^N$.
А $f(\mathcal{U})$ покрывает образ отображения, что нам и требовалось.
3. По предыдущему пункту $f(X)$ – компакт. Однако единственный компакт в $\mathbb{R}$ – отрезок. А на нем достигается и минимум и максимум.
4. Рассмотрим некоторое покрытие $A = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Тогда $X = A \cup (X \setminus A) = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \cup (X \setminus A)$ — покрытие X. Из него в силу компактности можно выделить конечное подпокрытие $X = \cup_{i=1}^n U_i \cup (X \setminus A)$, где $\cup_{i=1}^n U_i$ — искомое конечное покрытие A.
5. Рассмотрим произвольную точку $x \in X \setminus A$. Тогда для каждой точки $y \in A$ в силу хаусдорфовости есть непересекающиеся окрестности $U_x^y \ni x$ и $V_y \ni y$. Из покрытия $A = \bigcup\limits_{y \in A} V_y$ в силу компактности A можно выбрать конечное подпокрытие $A = \cup_{i=1}^n V_y^i$. Вместе с соответствующими окрестностями U_x^y получим $\underbrace{\cup_{i=1}^n U_x^y}_{x \in} \cap \underbrace{\cup_{i=1}^n V_y^i}_{=A} = \cup_{i=1}^n \underbrace{(U_x^y \cap V_y^i)}_{=\emptyset} = \emptyset$.
То есть нашли окрестность точки x, которая не пересекается с множеством A. А значит $\mathrm{Cl}(A) = A$ и A – замкнуто.

Очень важной является следующая теорема, позволяющая делать выводы о гомеоморфизме некоторой функции (собственно о том, что мы глобально и хотим исследовать).

Теорема 2
Непрерывная биекция $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ из компакта в Хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

Доказательство

Понятно, что нам достаточно доказать непрерывность обратного f^{-1}, то есть

$$\forall\, Z \subsetneq X \implies (f^{-1})^{-1}(Z) = f(Z) \subsetneq Y.$$

Из 4-ого свойства такое Z является компактом. А тогда из 2-ого свойства и $f(Z)$ — компакт. И, таким образом, из 5-ого свойства получаем замкнутость $f(Z) \subsetneq Y$.

② Секвенциальный компакт

В некоторых случаях оказывается удобнее оперировать последовательностями, а не покрытиями. Тогда можно говорить о секвенциальном компакте. Как мы увидим, в привычных нам пространствах это понятие равносильно обычной компактности.

Определение (Секвенциальный компакт)
Пространство (X, Ω_X)является секвенциально компактным, если из любой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 3
Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то секвенциальная компактность равносильна компактности.

③ Паракомпактность

К сожалению, далеко не все пространства компактны. Но хочется иметь какую-то более слабую альтернативу. Одной из таких важных альтернатив является паракомпактность, с которой связано часто применяющееся понятие разбиения единицы.

Определение (Локальная компактность)
Пространство (X, Ω_X)называется локально компактным, если около любой точки можно найти компактную окрестность.

Определение (Локально конечное покрытие)
Покрытие называется локально конечным, если вокруг любой точки можно найти окрестность, пересекающую конечное число множеств из этого покрытия.

Определение (Паракомпактное пространство)
Пространство (X, Ω_X)называется паракомпактным, если в любое покрытие можно вписать локально конечное покрытие.

Пример
Стандартная топология над $\mathbb{R}^n$ является паракомпактной.

Предложение
Из компактности следует паракомпактность.

Доказательство
Очевидно, что конечное подпокрытие, выбранное в силу компактности, удовлетворяет локальной конечности.

§ 6. Разбиение единицы

Для формулирования понятия разбиения единицы нам понадобится носитель функции — что-то близкое к множеству, на котором функция не обнуляется.

Определение (Носитель функции)
Носителем $\operatorname{supp} f$ функции $f : X \to \mathbb{R}$ называется множество $\mathrm{Cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Определение (Разбиение единицы)
Семейство неотрицательных функций $f_\alpha : X \to \mathbb{R}_+$ называется разбиением единицы, если

1. $\operatorname{supp} f_\alpha$ составляют локально конечное покрытие X,
2. $\sum\limits_{\alpha} f_\alpha(x) = 1$.

§ 7. Связность

О чем это?
Само слово связность наверняка говорит за себя. Это означает, что пространство не состоит из каких-то кусков. И это также вполне логично вписывается в идеологию инвариантов относительно гомеоморфизмов: множество, состоящее из кусков, точно не одинаковое с цельным множеством (проблема возникает именно в связи с этим разрывом, где портится непрерывность отображения). Однако на самом деле, интуитивное представление о связном пространстве как о том, в котором все точки связаны нитями, на самом деле оказывается даже очень сильным и называется линейной связностью. В этом пункте мы увидим, что можно ввести *более мягкую* связность и она тоже будет инвариантом.

1 Связность

Определение (Связность)
Топологическое пространство (X, Ω_X)называется связным, если его нельзя представить как объединение двух открытых непересекающихся собственных подмножеств.

$$\forall U, V \subsetneq \mathbf{X} \ : \ U \cap V = \emptyset \implies X \neq U \cup V.$$

Говоря о связности мы всегда будем употреблять слова *разбить множество*, подразумевая именно представление в объединение собственных непересекающихся открытых подмножеств.

Замечание
Также можно построить определение через замкнутые множества

$$\forall F, H \subsetneq \mathbf{X} \ : \ F \cap H = \emptyset \implies X \neq F \cup H.$$

Так как мы предполагаем, что связность является инвариантом для гомеоморфизма, то естественным является следующее предложение.

Предложение
Образ непрерывного отображения связного множества является связным.

$$f \ : \ \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \text{ – непрерывное, } \mathbf{X} \text{ – связное } \implies f(\mathbf{X}) \text{ – связное.}$$

Доказательство
Если образ оказался несвязен $f(X) = U \cup V$, то рассмотрим $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$, которые разбивают исходное множество на собственные (в силу собственности в образе) открытые (в силу непрерывности) непересекающиеся (в силу $U \cap V = \emptyset$) подмножества. Но этого не может быть в силу связности X. Значит и $f(X)$ на самом деле связен.

Как обычно, все приличные пространства оказываются связными, что мы не раз наблюдали в обычной геометрии.

Пример
Любое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ является связным.

Интересное свойство добавляется для связных пространств. Оно упрощает обращение с открытыми и замкнутыми множествами, как бы, разделяя их на несовместимые понятия.

Лемма 15
Топологическое пространство (X, Ω_X)связное тогда и только тогда, когда подмножествами, открытыми и замкнутыми одновременно, являются только $\emptyset$ и $\mathbf{X}$.

Доказательство
$\Longrightarrow$ Пусть пространство связно и $U \subset X$ – открыто и замкнуто одновременно (при этом $U \neq X$, $U \neq \emptyset$).

Тогда рассмотрим $U \cup (X \setminus U) = X$ — разбиение множества X, причем $X \setminus U \subsetneq X$ как дополнение замкнутого, а $U \subsetneq X$ по условию. А значит мы представили пространство в виде объединения открытых непересекающихся собственных подмножеств, что противоречит условию связности.

$\Longleftarrow$ Пусть X несвязно, то есть $X = U \cup V$, где $U, V \subsetneq X$ — непересекающиеся собственные подмножества. Однако тогда $V = X \setminus U \subsetneq X$ как дополнение открытого. То есть V открыто и замкнуто, чего не может быть из условия.

Заметим, что эта лемма не утверждает, что любое подмножество либо открыто, либо замкнуто. По-прежнему существует подмножества, не являющиеся ни замкнутыми, ни открытыми.

В качестве простейшего примера несвязного пространства можно рассмотреть следующий пример.

Пример
$[1, 2] \cup [3, 4]$ несвязное.

Замечание
Заметим, что в этом примере множество состояло из двух связных множеств: $[1, 2]$ и $[3, 4]$ – но само не являлось связным. Это подводит к идее рассматривать отдельно связные части всего множества. Такие множества будем называть компонентами связности.

2 Компоненты связности

Определение (Компоненты связности)
Компонентой связности назовем наибольшее по включению связное подмножество $\mathbf{X}$.

Замечание
В связи с введенным определением возникает небольшой вопрос об его полезности. Интуитивно хочется, чтобы всегда можно рассматривать пространство как набор компонент связности. А уже с каждой из них работать по отдельности.

Этот вопрос закрывает следующее утверждение. Однако для него нам понадобится небольшая очевидная лемма.

Лемма 16
Объединение попарно пересекающихся связных множеств является связным.

$$\forall \{U_i \text{ – связное}\}_{i \in I} \ : \ U_i \cap U_j \neq \emptyset \implies \bigcup_{i \in I} U_i \text{ – связное.}$$

Доказательство
Если оно не связно, то есть $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = V \cup W \ : \ V \cap W = \emptyset$, то каждое из U_i либо лежит внутри V, либо внутри W. При этом так как $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то на самом деле они все лежат только в одном из V и W, а значит другое пустое и никакого разбиения на самом деле нет.

Предложение
Любое пространство можно разбить на связные компоненты связности, то есть

1. каждая точка содержится ровно в одной компоненте связности,
2. различные компоненты связности не пересекаются.

Доказательство

1. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и все связные множества U_i, содержащие x. Тогда, в силу последней леммы, $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ — связное и при этом содержит x.
   Таким образом, нашли множество, которое связно и содержит любое другое связное, содержащее x. То есть компоненту связности по определению.
2. Если есть две компоненты связности $A \cap B \neq \emptyset$, то $A \cup B$ тоже связное по лемме. Но тогда нарушается условие максимальности по включению из определения.

Лемма 17
Замыкание связного множества является связным.

$$A \text{ – связное} \implies \mathrm{Cl}(A) \text{ – связное.}$$

Доказательство
Пусть замыкание не связно, то есть $\mathrm{Cl}(A) = U \cup V$. Рассмотрим $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) = A \cap \mathrm{A} = A$. Так как A – связное, то это не может быть разбиением и хотя бы одно из $A \cap U$ и $A \cap V$ пусто. Но в замыкании $\mathrm{Cl}(A)$ содержатся лишь те точки, которые для любой окрестности имеют пересечение с A, то есть $A \cap U \neq \emptyset$.

Следствие
Компоненты связности замкнуты.

Доказательство

Для любой компоненты связности K ее замыкание тоже связно. Но в силу того, что K содержит все связные, содержащие точки K, то оно содержит и $\mathrm{Cl}(K)$. То есть оба вложения нашлись и $K = \mathrm{Cl}((K)$.

3 Линейная связность

Более понятной для нас оказывается линейная связность, то есть возможность соединить две точки пространства некой кривой, которую мы будем называть путем.

Определение (Путь)
Путем, начинающимся в точке x и заканчивающемся в точке y пространства $\mathbf{X}$, назовем непрерывное отображение $\alpha : [0,1] \to \mathbf{X}$, что $\alpha(0) = x$ и $\alpha(1) = y$.

Определение (Линейная связность)
Пространство (X, Ω_X)называется линейно связным, если между двумя любыми точками существует путь.

$$\forall\, x, y \in \mathbf{X} \implies \exists\, \alpha : [0,1] \to \mathbf{X} - \text{непрерывное} : \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y.$$

По-прежнему остается инвариантность относительно непрерывного отображения.

Предложение
Образ непрерывного отображения линейно связного множества является линейно связным.

Доказательство
Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное, причем X — линейно связное. Тогда для любых $x, y \in X$ есть путь γ. И в качестве пути между $f(x)$ и $f(y)$ рассмотрим отображение $f \circ \gamma$, которое непрерывно как композиция непрерывных и для которого $f \circ \gamma(0) = f(x)$, $f \circ \gamma(1) = f(y)$.

Как уже говорилось в вступлении, линейная связность является более сильной относительно связности. А значит стоит доказать следующее утверждение.

Предложение
Любое линейно связное пространство является связным.

Доказательство
Пусть X линейно связно, но не связно. То есть $X = U \cup V$, где $U, V \subsetneq X$ — непересекающиеся собственные подмножества.

Рассмотрим произвольные точки $x \in U$, $y \in V$. Тогда в силу линейной связности $\exists\, \gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ — непрерывное отображение.

$\gamma^{-1}(U) \subsetneq [0,1]$ как прообраз открытого. Аналогично $\gamma^{-1}(V) \subsetneq [0,1]$.

Но тогда $\gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(\underbrace{U \cup V}_{X}) = [0,1]$. А значит мы получили разбиение отрезка $[0,1]$ на открытые подмножества, причем, так как $U \cap V = \emptyset$, то $\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \gamma^{-1}(U \cap V) = \gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ и, так как U, V — собственные подмножества, то и их прообразы собственные подмножества уже $[0,1]$. Но известно, что отрезок связен, а значит пришли к противоречию.

Замечание

Заметим, что обратное неверно! В качестве примера рассмотрим, так называемую, топологическую синусоиду.

$$\mathcal{S} = \left\{\sin\tfrac{1}{x} \ : \ x \in (0,1]\right\} \cup \left\{(0,0)\right\}.$$

Предложение

Топологическая синусоида является связной, но не является линейно связной.

Доказательство

Покажем связность $\mathcal{S}$. $H = \mathcal{S} \setminus \{(0,0)\}$ является линейно связной, а значит и связной. То есть проблема может возникнуть лишь при добавлении нуля. Однако если где $(0,0) \in U \subsetneq X$, например, то U также содержит и некоторый кусок H. И для этого куска, как уже упоминалось, в силу связности H нельзя найти непустое непересекающееся подмножество (которое уже точно не содержит $(0,0)$), которое добавит U до H. А значит и все $\mathcal{S}$ нельзя разбить, то есть оно связно.

Покажем, что $\mathcal{S}$ не линейно связное от противного. Пусть оно линейно связно, тогда $\forall\,(x,y) \in \mathcal{S} \quad \exists\,\gamma$ — путь из $(0,0)$ в (x,y).

Так как γ непрерывна, то и $\pi_2 \circ \gamma$ непрерывно (где π_2 — проекция на вторую координату), то есть по определению при $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\exists\,\delta > 0 \ : \ \forall\, t < \delta \implies |\pi_2(\gamma(t))| < \frac{1}{2}.$$

Если $\forall\,\tilde{\delta} \leqslant \delta \implies \gamma(\tilde{\delta}) = (0,0)$, то рассмотрим аналогично непрерывность в точке δ и найдем $\delta_1 \ : \ \forall\,\delta < t < \delta_1 \implies |\pi_2(\gamma(t))| < \frac{1}{2}$. Так будем делать, пока не найдем такую δ_i, что $\exists\,\tilde{\delta} < \delta_i \ : \ \gamma(\tilde{\delta}) \neq (0,0)$. На каком-то этапе она точно найдется, иначе мы получим, что γ просто константный нуль, что невозможно, ведь это путь в (x,y). Тогда переобозначим $\delta = \tilde{\delta}$.

Рассмотрим точки $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ и найдем такое n_0, что $x_{n_0} < \pi_1(\gamma(\delta)) \neq 0$, где π_1 — проекция на первую координату. Это можно сделать в силу ограниченности первой координаты $\mathcal{S}$ и явного решения неравенства $n_0 > \frac{\frac{1}{\pi_1(\gamma(\delta))} - \frac{\pi}{2}}{2\pi}$.

Так как $\pi_1 \circ \gamma$ тоже непрерывна, то по теореме о промежуточном значении

$$\text{Для } x_{n_0} \in (\underbrace{\pi_1(\gamma(0))}_{0}, \pi_1(\gamma(\delta))) \quad \exists\,\tau \in (0,\delta) \ : \ \pi_1(\tau) = x_{n_0}.$$

Но $\pi_2(\gamma(\tau)) = \sin\frac{1}{x_{n_0}} = 1$, что противоречит условию $|\pi_2(\gamma(t))| < \frac{1}{2}$. А значит $\mathcal{S}$ — не линейно связное.

Естественно, по аналогии с обычной связностью для линейно связных пространств тоже можно рассматривать компоненты связности (только теперь уже линейные компоненты связности).

И на основе линейной связности и компонент можно сформулировать отношение эквивалентности.

Предложение
Отношение соединения путем двух элементов является отношением эквивалентности.

В частности, классами эквивалентности являются линейные компоненты связности и они тоже замкнуты.

4 Локальная линейная связность

ПОКА НЕ ЗНАЮ, НАСКОЛЬКО НУЖНО.

§ 8. Некоторые топологические конструкции

О чем это?
В данном параграфе мы поговорим про способы создания новых топологических пространств на основе уже имеющихся. Два таких примера уже были разобраны, когда мы говорили про топологию подпространства и топологию произведения. Однако совершенно новую идею дает понятие фактортопологии, которое позволяет описать операции склеивания и стягивания двух пространств. Конструкция, рассматриваемая во втором пункте позволяет из любого пространства сделать компактное добавлением одной точки. А третий пункт приводит интересный пример пространства, которое активно используется физиками и заложено в головы большинству фотографов. В общем, получается очень красивый параграф с огромным количеством примеров, некоторые из которых даже можно будет пощупать в физическом смысле.

① Конструкции на основе факторпространства

Определение (Фактортопология)
Пусть есть топологическое пространство (X, Ω_X)и на множестве $\mathbf{X}$ введено отношение эквивалентности $\sim$. Тогда на множестве (или, как его еще называют, фактормножестве) $\mathbf{X}/\sim$ можно построить топологию:

$$U \subsetneq_{\circ} \mathbf{X}/{\sim} \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subsetneq_{\circ} \mathbf{X},$$

где $\pi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}/\sim$

Упражнение
В том, что определение дано корректно, Вам предлагается убедиться самим.

Предложение
Фактортопология является тончайшей среди всех топологий с непрерывным отображением π. То есть $\Omega_{\text{остальные}} \subset \Omega_{\mathbf{X}/\sim}$

Лемма 18
Фактортопология наследует свойства исходной топологии (компактность, связности, счетности...).

Лемма 19
Пусть дано отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, что $f(x) = f(y)$ для $x \sim y$.
Тогда существует единственное отображение $\bar{f} : \mathbf{X}/\sim \to \mathbf{Y}$, причем непрерывность f равносильна непрерывности $\bar{f}$.

Определение (Экстраполяция)
Пусть $f : \mathbf{X} \twoheadrightarrow \mathbf{Y}$ – сюръекция, причем $\mathbf{X}$ – компакт, а $\mathbf{Y}$ – Хаусдорфово.
Тогда $\bar{f} : \mathbf{X}/\sim \to \mathbf{Y}$ – гомеоморфизм. Это свойство называется экстраполя-

цией.

Пример

Рассмотрим отображение $f : [0,1] \to \mathcal{S}^1$, заданное как $x \overset{f}{\mapsto} (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$.

Понятно, что оно сюръективно, но не биективно. А значит не может быть и гомеоморфизма.

Однако, рассматривая фактор $[0,1]/\{0,1\}$ (стягиваем точки 0 и 1 в одну), получим, пользуясь экстраполяцией,

$$[0,1] \xrightarrow{\pi} [0,1]/\{0,1\} \xrightarrow{\bar{f}} \mathcal{S}^1.$$

И при этом $\bar{f}$ – гомеоморфизм.

Определение (Стягивание)

Стягиванием $\mathbf{X}/A$ пространства $\mathbf{X}$ по множеству $A \subset \mathbf{X}$ назовем факторпространство, получаемое из отношения $x \sim y \Leftrightarrow (x = y$ или $(x \in A$ и $y \in A))$.

Пример

Стянем сферу по какой-нибудь из окружностей, секущих ее. Получим две сферы, касающиеся в точке.

Определение (Приклеивание)

Пусть $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Приклеиванием $\mathbf{X} \underset{f}{\sqcup} \mathbf{Y}$ назовем пространство $\mathbf{X} \times [0,1] \sqcup \mathbf{Y}/(x,1) \sim f(x)$.

Пример

Представим себе сферу, в которой мы спилили кусок напильником, получив дырку. А также тор, в котором таким же образом выпилена другая дырка. А теперь приклеим одну дырку к другой предложенным выше образом.

Получим сферу с ручкой, которая, конечно, является тем же тором.

Однако, приклеивая аналогично к тору другой тор, получим уже сферу с двумя ручками, которая раньше не появлялась. Таким образом можно получать сферы с любым количеством ручек.

Пример

Аналогичным образом можно приклеивать ленты Мебиуса к сфере. Получившиеся фигуры называют сферой с пленками.

Определение (Конус)

Конусом $C\mathbf{X}$ над пространством $\mathbf{X}$ назовем $\mathbf{X} \times [0,1]/(x,1) \sim \{\mathrm{pt}\}$.

Пример

Конус над окружностью — это привычный нам конус.

Определение (Надстройка)
Надстройкой $\Sigma\mathbf{X}$ над пространством $\mathbf{X}$ назовем пространство $C\mathbf{X}/\mathbf{X} \times \{0\}$.

Пример
Надстройка над окружностью дает «двусторонний конус».

2 Одноточечная компактификация

3 Проективное пространство

§ 9. Гомотопии

О чем это?
В этом параграфе мы будем пытаться перенести конструкции из топологии в элементы линейной алгебры. Оказывается, в топологическом пространстве есть (в основном) группы, которые к тому же сохраняются при гомеоморфизме. Первыми представителями таких групп являются гомотопические группы. Однако для их построения нам необходимо погрузиться в понятие гомотопии, позволяющее разделять отображения на (в каком-то смысле) одинаковые и различные. Описывая интуитивно, можно говорить о непрерывных деформациях отображений. Прочувствовать эту идею легко на двух путях между двумя точками: они будут одинаковыми, если мы сможем постепенно, сантиметр за сантиметром, сдвигать один путь в направлении другого. Но если между этими путями будет болото, то мы не сможем так сделать.

Вообще, теория гомотопий и гомотопических групп отделяется в целую отдельную науку. Мы лишь коснемся самых основ и плавно подойдем к простейшей из них — фундаментальной группе, рассматриваемой в следующем параграфе.

1 Пространства непрерывных отображений

Однако для начала нужно понять, над каким пространством мы будем издеваться и кого будем деформировать.

Будем рассматривать теперь всевозможные непрерывные отображения между топологическими пространствами X и Y. Такое множество будем называть $\mathcal{C}(X, Y)$. Возникает вопрос: можно ли ввести какую-то топологию на этом множестве?

Конечно, всегда существуют дискретная и антидискретная топологии. Но они не несут большого практического применения.

В качестве первого варианта рассмотрим метрическую топологию, которую можно получить, если Y является метризуемым.

Определение (Топология равномерной сходимости)
Топология на $\mathcal{C}(X, Y)$, индуцированная метрикой $\mu(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X}\{\rho(f_1(x), f_2(x))\}$, где ρ — метрика в топологии Y, называется топологией равномерной сходимости.

Другим, отчасти противоположным, примером топологии на непрерывных отображениях, является топология поточечной сходимости.

Определение (Топология поточечной сходимости)
Топология на $\mathcal{C}(X, Y)$, базой которой является множество из всевозможных пересечений множеств $\{f \in \mathcal{C}(X, Y) \ : \ f(x_i) \in U_i\}$, где $x_1, \ldots, x_k \in X$, $U_1, \ldots U_k \subsetneq_{\circ} Y$.

Данные названия топологий говорят о свойствах внутри них. Но анализом различных сходимостей все-таки занимается функциональный анализ. Поэтому построим топологию таким образом, чтобы воспользоваться топологическими свойствами.

Определение (Компактно-открытая топология)
Топология на $\mathcal{C}(X, Y)$, базой которой является множество из всевозможных пересечений множеств $\{f \in \mathcal{C}(X, Y) \ : \ f(K) \subset U\}$, где $K \subset X$ – компакт, $U \subsetneq_{\circ} Y$.

Замечание
В таким образом введенной топологии, в частности, можно брать отрезки в качестве компакта. И получившиеся отображения будут являться путями в пространстве Y. Нам практически понадобится именно эта составляющая в ближайших параграфах.

(2) Определение гомотопии и примеры

Слово гомотопия берет свои корни от греческих слов: homós – одинаковые, tópos – место. То есть гомотопия пытается описать одинаковые куски пространства. Вспоминая, что речь в данном параграфе идет про пространство $\mathcal{C}(X, Y)$, можно интуитивно переформулировать это понятие в одинаковость каких-то мест, связанных с образами отображений. Чуть более точно, сформулируем в следующем определении.

Определение (Гомотопия)
Гомотопией между двумя отображениями $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ назовем такое непрерывное отображение $H : X \times I \to Y$, для которого $\forall x \in X \quad H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$.

Данное определение можно воспринимать как некоторая деформация между двумя отображениями: в начальный момент времени мы имеем функцию f, а в конце — g. Все, что между, нас не очень интересует, кроме того, что там деформация непрерывна.

Пример
Простейшим примером является гомотопия для отображений $f_1, f_2 \in C(\{\text{pt}\}, Y)$. На самом деле каждое из таких отображений лишь выбирает точку в пространстве Y, а гомотопия — это путь между выбранными точками.

Замечание
В частности, можно увидеть, что является гомотопией двух путей, закрепленных между двумя точками x_0 и x_1.

По определению, для путей $\alpha, \beta : I \to Y$ это $H : I \times I \to Y$, для которого $H(x, 0) = \alpha(x), H(x, 1) = \beta(x)$. При этом в силу непрерывности $H(0, t) = x_0, H(1, t) = x_1$, то есть все деформации имеют одно начало и конец.

Из этого можно легко представить случаи гомотопных путей (Рис. **??**) и негомотопным (Рис. **??**). Понятно, что во втором случае непрерывной деформации мешает вырезанный кусок между этими двумя путями.

Понятно, что можно говорить вместо $F : X \times I \to Y$ о параметризованном отображении $F_t : X \to Y \quad t \in I$. Иногда таким образом оказывается удобнее описывать гомотопии.

Пример
В каком-то смысле *удачным* пространством является выпуклое пространство (то есть то, в котором вместе с двумя точками содержится отрезок между ними). В нем любые два отображения можно соединить, так называемой, линейной гомо-

топией:

$$H(x,t) = f(x) \cdot t + g(x) \cdot (1-t).$$

Нетрудно убедиться, что это действительно гомотопия.

Так как в самом слове гомотопия есть корень homós, означающий одинаковый, то появляется идея, что все гомотопные отображения в каком-то смысле одинаковые. А негомотопные — отличающиеся. Конечно, как и всегда, строго это формулируется в утверждении про отношение эквивалентности.

Предложение
Гомотопия является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{C}(X,Y)$.

Классы эквивалентности называют гомотопическими классами и обозначают $\pi(X,Y)$.

Упражнение
Проверьте выполнение рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Пример
Как мы уже выяснили, в выпуклом пространстве все отображения гомотопны друг другу. А значит там есть ровно один гомотопический класс.

Говоря о главной теме всей главы — гомеоморфизмах, можно снова вспомнить, что вообще-то это очень грубое определение. Для него обратное отображение должно давать вместе с прямым ровно тождественное отображение. Однако если предположить, что для пути с одинаковыми началом и концом (петли) обратным является просто проход в обратную сторону, то даже в таком тривиальном случае композиция с обратным не будет равна тождественному. Однако она точно будет гомотопна ему. Отсюда появляется идея ослабления требований гомеоморфизма.

Определение (Гомотопическая эквивалентность)
$f \in \mathcal{C}(X,Y)$ называется гомотопической эквивалентностью между X и Y, если существует $g \in C(Y,X)$ такое, что $f \circ g \sim 1_Y$ и $f \circ f \sim 1_X$.

Пространства, между которыми можно построить гомотопическую эквивалентность будем называть гомотопически эквивалентными.

Гомотопическая эквивалентность чем-то отдаленно напоминает гомеоморфизм: есть непрерывное туда и обратно отображение. Однако в гомеоморфизме обратное отображение — привычное нам, дающее в композиции с прямым тождественное; а в гомотопическом случае под обратным понимается более общее: такое, что их композиция с прямым лишь гомотопична тождественному.

Нетрудно понять, что гомотопическая эквивалентность является обобщением гомеоморфизма. Ведь гомотопичность включает в себя равенство. Обратное же, очевидно, неверно, что легко увидеть в случае с путями с началом и концом в одной точке (так называемыми петлями). Складывая петлю с такой же, только пройденной в обратном направлении, мы, конечно, не получим тождественное отображение. Но полученное отображение точно гомотопично тождественному.

Некоторым простейшим частным случаем пространств являются стягиваемые пространства.

Определение (Стягиваемые пространства)
Пространство X называется стягиваемым, если $\exists\, x_0 \in X \quad 1_X \sim \mathrm{const}_{x_0}$ (то есть константное отображение совпадает с тождественным).

На самом деле, по-настоящему, название стягиваемое раскрывается в следующей лемме.

Лемма 20
X — стягиваемое тогда и только тогда, когда $\exists\, x_0 \in X \;:\; X \sim \{x_0\}$.

Доказательство
$\Longrightarrow$ Пространства гомотопически эквивалентны, если есть эквивалентность между ними. В нашем случае подойдет const_{x_0}, так как $\mathrm{const}_{x_0} \circ 1_X \sim 1_X$ и $1_X \circ \mathrm{const}_{x_0} \sim 1_X$ из определения стягиваемого пространства.

$\Longleftarrow$ Рассмотрим гомотопическую эквивалентность $f : X \to \{x_0\}$ (которая есть в силу гомотопичности $X \sim \{x_0\}$). Понятно, что это может быть только константное отображение, просто потому что других вариантов отображения в одноточечное пространство нет. То есть $\exists\, g \in C(\{x_0\} \to X) \;:\; \mathrm{const}_{x_0} \circ g \sim 1_{\{x_0\}}$ и $g \circ \mathrm{const}_{x_0} \sim 1_X$. На самом деле же g просто выбирает точку в X. Мы положим $g(x_0) = x_0$. Тогда $g \circ \mathrm{const}_{x_0} = x_0 = \mathrm{const}_{x_0}$ и получаем, что $\mathrm{const}_{x_0} \sim 1_X$.

То есть стягиваемость надо понимать именно в смысле этого слова: пространство можно стянуть (сжать, сдавить) в точку.

Пример
Очевидным примером стягиваемого пространства является любое выпуклое евклидово пространство. В нем есть линейная гомотопия.

В частности, легко представить себе стягивание шара в его центр.

③ Ретракции

Вообще, мы уже много произносим слово «деформация», всегда представляя произвольные действия над объектом (пространством). Намного логичнее может казаться оставлять уже стоящую в нужном положении часть на месте. Ну или хотя бы «гомотопно на месте». Эти идеи проявляются в различных понятиях ретрактов.

Определение (Ретракт, Ретракция)
Подпространство $A \subset X$ — ретракт пространства $\mathbf{X}$, если существует такое непрерывное отображение $r : X \to X$ (называемое ретракцией $\mathbf{X}$), что

- $r(X) = A$,
- $r|_A = \mathrm{id}$.

Замечание
Иначе говоря, мы "сжимаем"пространство $\mathbf{X}$ до A, требуя, чтобы все точки A оставались на своих местах.

Ретракцию можно удобно изобразить на коммутативной диаграмме TODO ??.

Оказывается, что такое определение хоть и весьма полезно (что мы увидим дальше в одном из предложений), но может быть усилено почти до аналогии на гомотопические эквивалентности.

Определение (Деформационный ретракт)
Подпространство $A \subset X$ — деформационный ретракт пространства $\mathbf{X}$, если существует ретракция r, гомотопная тождественному отображению на X ($r \sim \mathrm{id}_X$).

Если к тому же в точках $a \in A$ отображение совпадает с id_X (то есть a под действием гомотопии остаются неподвижны), то A называется строгим деформационным ретрактом.

Пример
Понятно, что всякое одноточечное подмножество $\{x_0\} \subset X$ является ретрактом. Достаточно лишь задать отображение $r : x \mapsto x_0$, которое, как известно, является непрерывным и при этом удовлетворяет условию $r(x_0) = x_0$.

Однако это отчасти и является очень широким свойством, ведь ничего не говорится о том, каким образом будут происходить эти отображения.

Деформационный ретракт же четко задает простоту и адекватность этих деформаций пространства условием гомотопности id.

К примеру, нетрудно построить сильный деформационный ретракт точки n-мерного диска $r : \overline{D^n} \to \{\mathrm{pt}\}$. Для этого необходимо предложить гомотопию между $r : x \mapsto \mathrm{pt}$ и $\mathrm{id} : \mathrm{pt} \mapsto \mathrm{pt} \in \overline{D^n}$. А это ровно гомотопия, предложенная при исследовании стягиваемости пространств.

Следующее предложение предлагает некоторую роль ретракта в науке.

Предложение
Пусть подмножество $A \subset X$ является ретрактом. Тогда всякое непрерывное отображение $A \to Y$ в произвольное пространство Y можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$.

Доказательство
Если есть ретракт $r : X \to A$, то для произвольного отображения $f : A \to Y$ можно предложить отображение $g = f \circ r : X \to Y$. Оно будет непрерывным как композиция двух непрерывных.

А вот деформационный ретракт, как и было обещано, дает сразу гомотопическую эквивалентность.

Предложение
Если $A \subset X$ — деформационный ретракт X, то пространства A и X гомотопически эквивалентны.

Доказательство
Фактически в самом определении деформационного ретракта явно указана гомотопия, которая является необходимой для $i_A \circ r \sim \mathrm{id}_X$ (где i_A— вложение, r — ретракт), а $r \circ i_A = \mathrm{id}_A$.

§ 10. Фундаментальные группы

О чем это?
На самом деле гомотопические классы $\pi(X, Y)$ — это очень широкое понятие. С ним тяжело работать, так как не всегда понятно, что это за пространства. Одним из стандартных сужений является идея рассматривать гомотопические классы только отображений $C\left((I^n, \partial I^n), (X, x_0)\right)$ (или то же самое в виде $C\left((S^n, \{\mathrm{pt}\}), (X, x_0)\right)$) и соответствующие гомотопические классы, называемые гомотопическими группами $\pi_n(X, x_0)$ — они действительно группы и именно это делает их крутыми. Но вместе с высокими размерностями приходят большие сложности, поэтому мы лишь остановимся на простом случае π_1.

(1) Определение и свойства

Замечание
Кстати, также можно оценить симпатичность $\pi_0(X, x_0)$.

Как мы видели, это просто классы отображений $C((S^0, \{\mathrm{pt}\}), (X, x_0))$, то есть отображений из двух точек с выделенной одной точкой. Нетрудно понять, что это просто то же самое, что разделение на линейные компоненты связности.

Введем тогда еще раз строго определение для первой гомотопической группы, которую приличные люди еще называют фундаментальной группы.

Определение
Фундаментальной группой пространства (X, x_0) с выделенной точкой назовем

$$\pi_1(X, x_0) = \pi((S^1, \{\mathrm{pt}\}), (X, x_0)).$$

Для того, чтобы понять это определение не только на уровне страшной формулы, введем достаточно очевидные определения (одно из них мы на самом деле уже формулировали для линейной связности).

Определение (Путь, петля)

- Путем, начинающимся в точке x и заканчивающемся в точке y пространства $\mathbf{X}$, назовем непрерывное отображение $\gamma : I = [0, 1] \to \mathbf{X}$, что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.
- Петлей в точке x_0 назовем путь, начинающийся и заканчивающийся в одной точке x_0.
- Сложением петель γ_1 и γ_2 в одной точке назовем последовательное прохождение этих петель, то есть

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Упражнение

Ради аккуратности изложения стоит что-то сказать об адекватности введенной операции над петлями. В действительности, оставляем в качестве маленького упражнения убедиться, что сумма двух петель (или, как модно говорить, конкатенация) является петлей.

Теперь можно что-то сказать про то, что же такое страшное было дано в определении фундаментальной группы.

Замечание

Заметим, что в определении $\pi_1(X, x_0) = \pi((S^1, \{\text{pt}\}), (X, x_0))$ вся суть содержится в пространстве отображений из окружности S^1 с выделенной точкой в наше пространство. Иначе говоря, это как раз всевозможные петли в точке x_0.

И оказывается, что в π_1 лежат гомотопические классы петель в точке x_0.

А как мы помним, гомотопические классы интуитивно можно понимать как наличие путей между отображениями. То есть мы просто рассматриваем петли с точностью до возможности непрерывно перевести одну из них в другую.

Очень грубо и в то же время элегантно это можно показать, взяв в руки лассо — которое удивительным образом является петлей — и набрасывать его на наше пространство. Путем затягивания лассо мы сможем перейти от одного состояния лассо (одной петли) к другому (другой петли) — это гомотопия. Но может так оказаться, что одну петлю в другую не стянуть. Это легко увидеть на торе: рассмотрим петлю, которая делает оборот вокруг всего тора, и любую простую небольшую петлю (Рис. **??**). Можно заметить, что эти две петли разные. Более того, первой петлей лассо после затягивания поймает наш тор, а вторая петля-лассо просто затянется в узелочек.

Именно из такого соображения ловли чего-то после затягивания лассо часто говорят, что фундаментальная группа отображает количество дырок, которые есть в пространстве (где под дырками и понимается то, что ловится в наше лассо).

Вообще название этого понятия "фундаментальная группа"несет в себе очевидную теорему, которую нужно проверить.

Теорема 4

$\pi_1(X, x_0)$ вместе с операцией сложения петель является группой.

Доказательство

Необходимо доказать, что

1. операция сложения переносится на классы адекватно,
2. есть ассоциативность сложения,
3. есть нейтральная по сложению петля (подсказка: эта та, в которой мы никуда не уходили из x_0),
4. есть обратная петля (подсказка: просто пройти обратно по той же петле).

И мне лень сейчас это писать TODO

Вообще нахождение фундаментальной группы оказывается совершенно непростой задачей и вокруг этого строится огромное количество теорем. Пока приведем простой пример фундаментальной группы, который даже сейчас можем решить.

Пример
В выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^n$ фундаментальная группа для любой точки есть $\{e\}$, где e — петля, никуда не выходящая из точки.

Нетрудно это показать, построив

2 Функториальность π_1

3 Односвязность

§ 11. Накрытия

1. **Определение и свойства**
2. **Поднятие отображений и лемма о поднятии**
3. **Фундаментальная группа окружности**
4. **Связь числа листов и фундаментальной группы**
5. **Универсальное накрытие**

§ 12. Теорема ван Кампена

1. **Свободное произведение групп**
2. **Теорема ван Кампена**
3. **Примеры применения теоремы**