M1. Сигналы

L03. Оценивание спектра сигнала. Фурье-преобразования: FT, DTFT, DFT, FFT

Корнилова Дарья

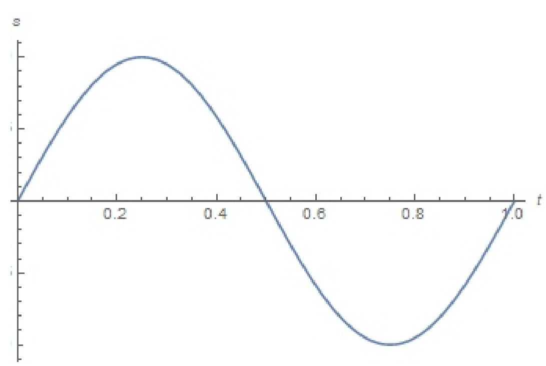
17 сентября 2019

1 Сигналы и гармонические колебания

Дано : непрерывный сигнал
Найти : гармоничесие колебания
Дргуими словами, мы хотим непрерывный сигнал представить в виде:

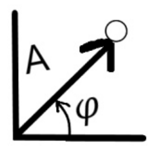
$$\sum_n A_n \cos\left(2\pi w_n t + \phi_n\right) + ...$$

Гармонические колебания характеризуются следуйщими величинами $\{A, w, \phi\}$, где A - амплитуда колебаний, w - частота колебаний, ϕ - фаза колебания. Они полностью определяют гармонические колебания.



АЧХ - амплитудно-частотная характеристика
ФЧХ - фазочастотная характеристика
АФЧХ - амплитудно-фазочастотная характеристика

з A и ϕ можно получить одно комплексное значение



$$A \cos{(2\pi w t + \phi)}$$

$$C \cos{(2\pi w t)} + S \sin{(2\pi w t)}$$

$$A(e^{2\pi i w t} + e^{-2\pi i w t})/2$$

Вспоминая, что $\forall$ непрерывную фунуцию можно разложить в ряд Фурье, получаем:

$$S(t) = a_0/2 + \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Чем это плохо?

Тем, что в качестве частот берутся целые числа $w = 1, 2, ..., n$. А у нас и не только целые числа могут встречаться.

$5 \cos t + \cos 2\pi t$ и получаем, что $w = 1/(2\pi) \approx 0.16$

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Найти c_n легко, если он нормальный, в нашем случае он нормальный так как разные $e \perp$

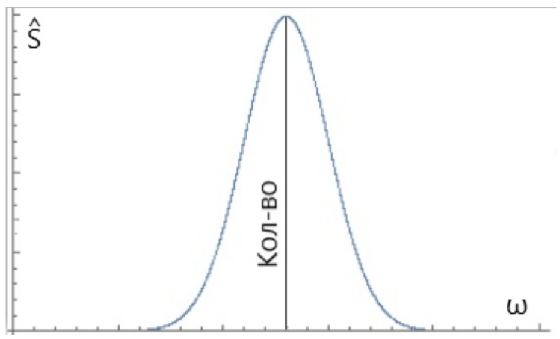
$$\Rightarrow c_n = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{int} * dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-int} dt \to \{c_n\}_n^\infty$$

Печально то, что (c_5, c_{-5}) характеризуют одну и ту же частоту 5

$$c_n = \int S(t) e^{iwt} dt$$

$$c_n \to S^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-2piiwt} dt$$

$S(t) \to S^*(w) \in \mathbb{C}$ что можно записать в виде $Ae^{i\phi}$



2 Дельта фунция

В лабораторной работе был сигнал состоящий из 3 гармоник $S_L + S_M + S_H$, но такой функции не бывает (точнее они плохие, почти везде кроме 3 точек).

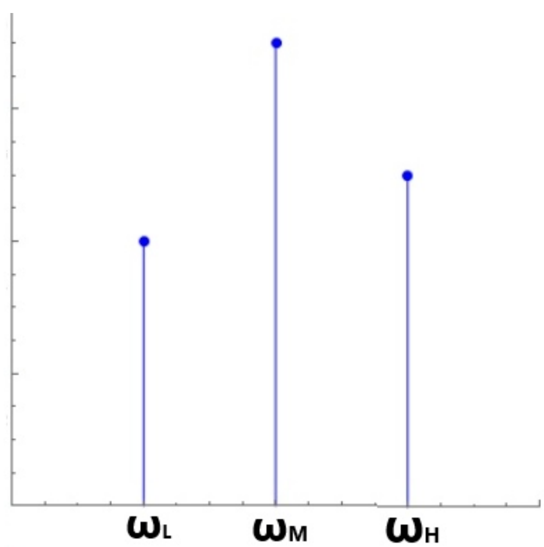


Figure 1: Множество объектов.

Что же тогда делать?
Надо придумать обощенную функцию. Пусть $\mathbb{H}$ - множество "хороших" функций.$\mathbb{H} = \{f, g\}$ можно определить скалярное произведение $\int f(T)g(t)dt$.
Если значения будут комплексными, то скалярный квадрат получится отрицательным $\Rightarrow \int f(T)\overline{g(t)}dt$. Пусть есть ϕ, тогда $\int \#\overline{\phi(t)}dt$, где вместо # нужно подставить $f(t)$
Как это относится к дельта функции?
Пусть есть $f(t)$ и $g(t)$, а я хочу научится их считать, значит надо определить

операции $f(t) * g(t) \rightarrow \mathbb{R}$, но нам надо $f(t) * g(t) \rightarrow \mathbb{H}$, но это плохо. Тогда давайте придумаем умнажение, которое будет лучше. На помощь нам придет свертка.

$$f(t) \star g(t) = \int f(t)g(t-\tau)d\tau$$

Нам безразницы какую функцию сдвигать так как получится одно и тоже.
Есть ли функция, которая может свернуть функцию с ней?
Да, такой функцией является дельта фунция

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{t} = 0 \\ 0 & \text{t} \neq 0 \end{cases}$$

$\int \delta(t)dt = 0$ так как везде 0, кроме одной точки $\Rightarrow$.
0, t=0, t=0.$\int \delta(t)dt = 1 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\tau)dt = f(0)0, \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(t)\delta(t)dt\epsilon \rightarrow 0$ получим $f(0)$
Дельта функция из фенкций выбивает ее значение в 0
Как найти значение в точке а? Надо ее перевернуть $f(a) = \int f(t)\delta(t-a)$

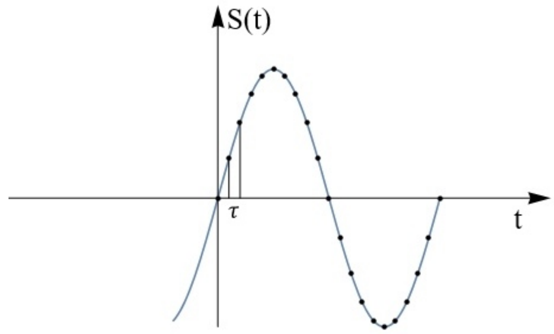
3 Преобразование Фурье

$S(t) \rightarrow S^*(w) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-2\pi iwt}dt$

Свойства

1. *линейность*
2. *сохраняет форму* $||S * (t)|| = ||S(t)||$
3. $S(t-a) \rightarrow e^{-2\pi ia}S^*(w)$
4. $S(at) = S^*(w/a)/|a|$
5. $S_1(t)S_2(t) \rightarrow S_1^*(w) \star S_2^*(w)$
6. $S_1(t) \star S_2(t) \rightarrow S_1^*(w)S_2^*(w)$
7. $\overline{S(t)} \rightarrow S^*(-w)$

Пусть $S(t) \rightarrow S^*(w)$. *Надо прнобразовать сигнал в гармоники, но трудность заключается в том, что наш сигнал аналоговый и компьютер его кушать не горит желанием. Надо изучить* $S(t)$, *а дано* $\{S_n\}$. *Сигнал бесконечен, а мы имеем только какие-то кго точки и то на определенном отрезке* $\Rightarrow$.



Как законно это исправить?(а точнее бесконечный сигнал запихнуть в коробку) Нужно воспользоваться $x = \sin x/x$

Как получить точки?

Гребенка Дирака $\delta(t-1) + \delta(t-2) + ...$

$$DiraceComb(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

$$S(t)\Pi(t) \amalg (t) \to T\tau S^*(w) \star Tw) \star \amalg(Tw)$$