Министерство образования и науки Российской Федерации

Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра численного и функционального анализа

Отчёт о лабораторных работах по численным методам

«Построение кубического сплайна»

Выполнил: студент 4 курса

Группы 8309 Новиков Е.А.

Проверил: преподаватель, к.ф.-м.н.

Федоткин А.М.

Содержание

|  |  |
| --- | --- |
| Введение ……………………………………………………………………………………………. | 3 стр. |
| Метод построения кубического сплайна …………………………………………………………. | 4 стр. |
| Руководство пользователя ...………...……………………………...……………………………... | 8 стр. |

# Введение

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по значениям функции f(x) нескольких точках отрезка восстановить её значения в остальных точках этого значения. Разумеется, такая задача допускает сколь угодно много решений. Задача интерполирования возникает, например, в том случае, когда известны результаты измерения yk = f(xk) некоторой физической величины f(x) в точках xk, k=0…n, и требуется определить её значения в других точках.

Известные методы интерполирования многочленом Лагранжа и многочленом Ньютона на всем отрезке [a, b] с использованием большого числа узлов интерполяции часто приводят к плохому приближению, что объясняется сильным накоплением погрешностей в процессе вычислений. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение количества узлов не обязано приводить к повышению точности. Для того, чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок [a, b] разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближённо заменяют функцию f(x) многочленом невысокой степени.

Одним из способов интерполирования на всём отрезке является интерполирование с помощью сплайн-функций. Сплайн-функцией называют кусочно-полиномиальную функцию, определённую на отрезке [a, b] и имеющую на этом отрезке некоторое число непрерывных производных.

Преимуществом сплайнов перед обычной интерполяцией является их сходимость, а также устойчивость процесса вычислений.

# Метод построения кубического сплайна

Пусть на [a, b] задана непрерывная функция f(x). Введём сетку

И обозначим fi = f(xi), i = 0…n.

Сплайном, соответствующим данной функции f(x) и данным узлам называется функция s(x), удовлетворяющая следующим условиям.

1. На каждом сегменте [xi-1, xi], i=1…n, функция s(x) является многочленом третьей степени.
2. функция s(x), а также её первая и вторая производные непрерывны на [a,b].
3. S(xi) = f(xi), i=0…n

Последнее условие называется условием интерполирования, а сплайн, определяемый условиями a), b) и c), называется также интерполяционным кубическим сплайном.

На каждом из отрезков [xi-1, xi], i=1…n будем искать функцию s(x) = si(x) в виде многочлена третьей степени:

,

xi-1 ≤ x ≤ xi, i = 1…n

где ai, bi, ci, di – коэффициенты, подлежащие определению. Поясним смысл введённых коэффициентов. Имеем

Поэтому ai = si(xi), bi = si’(xi), ci = si’’(xi), di = si’’’(xi)

Из условий интерполирования s(xi) = f(xi), i = 1…n получаем, что

Доопределим кроме того:

Далее, требование непрерывности функции s(x) приводит к условиям

Отсюда, учитывая выражения для функций s(x), получаем при уравнения

Обозначим . Тогда уравнение перепишется в виде

Условия непрерывности первой производной

Приводят к уравнениям

Из условия непрерывности второй производной получаем уравнения

Объединяя (2) - (4), получим систему (3n-2) уравнений относительно 3n неизвестных bi, ci, di, i = 1…n

Два недостающих уравнения получаем, задавая те или иные пограничные условия для s(x). Предположим, например, что функция f(x) удовлетворяет условиям . Тогда естественно требовать, чтобы . Отсюда получаем то есть , .

Условие совпадает с уравнением (4) при i=1, если положить . Таким образом, приходим к замкнутой системе уравнений для определения коэффициентов кубического сплайна:

Убедимся, что эта система имеет единственное решение. Исключим из (5) – (7) переменные bi, di, i = 1…n-1, и получим систему, содержащую только ci, i = 1…n-1. Для этого рассмотрим два соседних уравнения (7):

И вычтем второе уравнение из первого. Тогда получим

Подставляя найденное выражение для в правую часть уравнение (6), получим

(8)

Далее из уравнения (5) получаем

И подставляя эти выражения в (8), приходим к уравнению

Окончательно для определения коэффициентов получаем систему уравнений

(9)

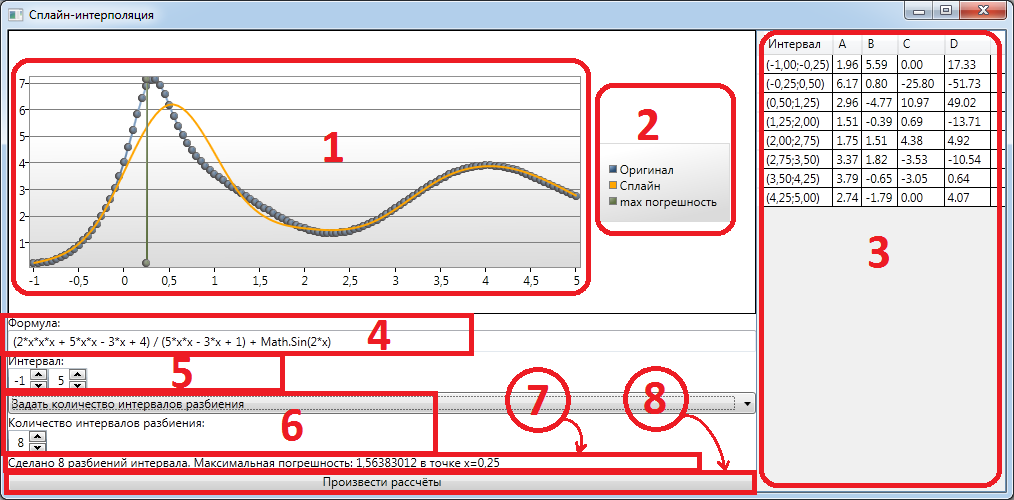
В силу диагонального преобладания система (9) имеет единственное решение. Так как матрица трёхдиагональная, решение легко найти методом прогонки. По найденным коэффициентам коэффициенты и определяются с помощью явных формул

(10)

Таким образом, доказано, что существует единственный кубический сплайн, определяемый условиями a), b) и c) и граничными условиями .

# Руководство пользователя

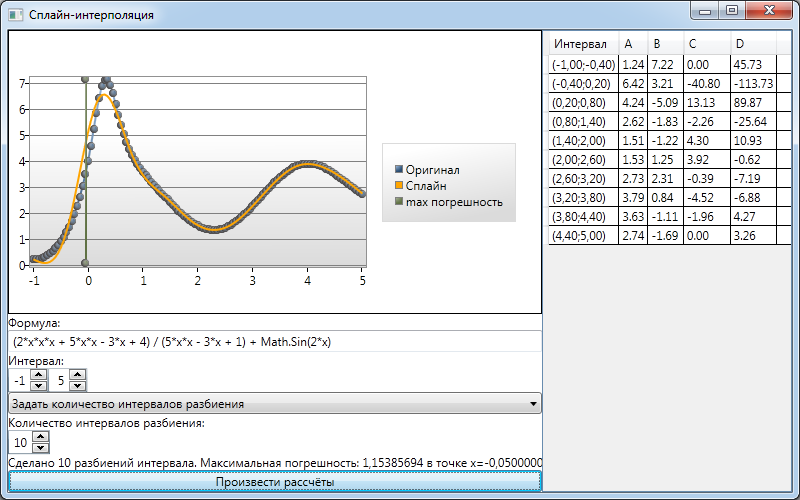
Интерфейс программы состоит из следующих частей:



1. График
2. Легенда
3. Таблица коэффициентов
4. Поле для ввода формулы
5. Поле для ввода интервала
6. Выбор типа эксперимента
7. Поле результатов и ошибок построения сплайна
8. Кнопка «Произвести расчёты»

Программа имеет два режима построения кубического сплайна:

1. По заданному количеству интервалов разбиения



1. По заданной допустимой погрешности

