06.02.21 Интегралы и дифф.ур.

Интегриров. рацион. дробей (№5)

I

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены

def $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – мн чл. → рациональная дробь

def Если степень мн чл $P(x)$ < ст. мн чл $Q(x)$ → то дробь - правильная, else неправильная

Примечание:

Если дробь неправ → можно разделить $P(x)$ на $Q(x)$ и получить выраж:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_0(x) + P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $P_0(x)$ – целая ч при делении, а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ – прав. дробь

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ – многочлены

$P_k \,\big|\, \frac{Q(x)}{P_1(x)}$

$P(x)$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_k(x)\,dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx$$

II разложение правильной дроби на простейшие

Типы прав. дроб / простейш (элементарн) дроби

I) $\frac{A}{x-a}$; II) $\frac{A}{(x-a)^k}$

A, a – числа

$k = 2, 3, 4 \ldots$

$\int \frac{A}{x-a}\,dx$, $\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx$ –

простые (таблица нет/по табл.)

III) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $A, B, p, q \in R$

$x^2+px+q=0$ $D<0$ $(p^2-4q<0)$

$x_1, x_2 \notin R$

Алгоритм решения

1) $Ax+B = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)$

где $(x^2+px+q)' = 2x+p$

2) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\ldots}{x^2+px+q}\,dx =$

$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\cdot\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$

$t = x^2+px+q$; $y = x + \frac{p}{2} \to dy = dx$

$dt = (2x+p)\,dx$; $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \frac{1}{a}\cdot \operatorname{arctg}\frac{y}{a} + C =$

$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$

$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+px+q| + C$

$x_1, x_2 \notin R$

перед x^2 стоит +

+ е ветви параболы $\Rightarrow x^2+px+q>0$

// 1) $x^2+px+q = \ldots = y^2+a^2$

$x^2+px+q = \underbrace{x^2+2x\frac{1}{2}p+\left(\frac{1}{2}p\right)^2}_{(x+\frac{1}{2}p)^2} \underbrace{-\left(\frac{1}{2}p\right)^2+q}_{q-\left(\frac{1}{2}p\right)^2 =}$

y $=\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2 = a$

// 2) $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{\sqrt{4}}} =$

$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}$

IV) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $A, B, p, q \in R$

$n = 2, 3, 4, \ldots$

$x^2+px+q=0$ $D<0$ $(p^2-4q<0)$

$x_1, x_2 \notin R$

Алгоритм решения

1) $Ax+B = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)$

$(x^2+px+q)' = 2x+p$

2) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx =$

$= \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + (B-\frac{Ap}{2})\cdot\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$

2-й

$t = x^2+px+q$

$dt = (2x+p)dx$

$\int \frac{dt}{t^n} = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{(1-n)\cdot t^{n-1}} + C \ ...$

4) $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$

$y = x + \frac{p}{2} \rightarrow dy = dx$

$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$

$\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^n} = [\text{рекурр. формула}] = \frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{y}{(y^2+a^2)^{n-1}} +$

$+ \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}$

Сводим по рекурр. формуле, до тех пор, пока не

получим $n-1=1$ (т.е. $\int\frac{dy}{y^2+a^2}$)

Решение задач

№ 8.3.1

$\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} = \left[\begin{array}{l} A=6;\ B=-7 \\ p=4;\ q=13 \\ x^2+4x+13=0;\ D=4^2-4\cdot1\cdot13=16-52=-36<0 \end{array} \right. \Rightarrow$

$\rightarrow 6x-7 = \frac{6}{2}(2x+4) + (-7-\frac{6\cdot4}{2}) = 3(2x+4)+(-19) =$

$= 3\cdot\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+13} - 19\int\frac{dx}{x^2+4x+13} = \left[\begin{array}{l} 1)\ t = x^2+4x+13 \rightarrow dt=(2x+4)dx \\ 2)\ y = x+\frac{p}{2} = x+2 \rightarrow dy = dx \end{array} \right.$

$a = [\sqrt{q-\frac{p^2}{4}} = \sqrt{13-4} = \sqrt{9} = 3]$

$x^2+4x+13 = y^2+3^2 \ \Big] =$

$= 3\int\frac{dt}{t} - 19\int\frac{dy}{y^2+3^2} = 3\ln|t| - 19\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + C =$

$= 3\ln|x^2+4x+13| - 19\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C =$

$= 3\ln(x^2+4x+13) - 19\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$

№ 8.3.8

$\int\frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx = \left[\begin{array}{l} A=8;\ B=5;\ p=-2;\ q=17;\ n=2 \\ x^2-2x+17=0 \\ D=(-2)^2-4\cdot1\cdot17=-64<0 \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow 8x+5 = 4(2x-2) + (5+\frac{8\cdot2}{2}) = 4(2x-2)+13 \ \Big] = 4\cdot\int\frac{(2x-2)dx}{(x^2-2x+17)^2} +$

$+13\cdot\int\frac{dx}{(x^2-2x+17)^2} = \left[\begin{array}{l} 1)\ t = x^2-2x+17 \rightarrow dt = (x^2-2x+17)'dx = (2x-2)dx \\ 2)\ y = [x+\frac{p}{2}] = x-1 \rightarrow dy = (x-1)'dx = dx \end{array} \right.$

$a = [\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\ ] = 4\int\frac{dt}{t^2} + 13\cdot\int\frac{dy}{(y^2+4^2)^2} =$

№8.3.8

$$\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}\,dx = \begin{bmatrix} A=8;\ B=5;\ p=-2;\ q=17;\ n=2 \\ 4-4\cdot 17=-64<0 \end{bmatrix} =$$

$$= 4\int \frac{(2x-2)}{(x^2-2x+17)^2}\,dx + (5+8)\cdot \int \frac{dx}{(x^2-2x+17)^2} =$$

$$= \begin{bmatrix} t=x^2-2x+17;\ dt=(2x-2)dx \\ y=x-1;\ dy=dx;\ a=\sqrt{17-1}=4 \end{bmatrix} = 4\int \frac{dt}{t^2} + 13\int \frac{dy}{(y^2+a^2)^2} =$$

$$= 4\left(\frac{t^{-1}}{-1}\right) + 13\left(\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{y}{(y^2+a^2)} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dy}{(y^2+a^2)}\right) + C =$$

$$= -4\frac{1}{t} + 13\left(\frac{1}{32}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{32}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{13}{32}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4}\right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + C$$

№8.3.2

$$\int \frac{4dx}{x+3} = \begin{bmatrix} A=4;\ a=-3 \end{bmatrix} = A\cdot\ln|x-a| + C = 4\ln|x+3| + C$$

№8.3.3

$$\int \frac{dx}{(x-1)^5} = \begin{bmatrix} A=1;\ a=1;\ k=5 \end{bmatrix} = \frac{1}{-4}\cdot\frac{1}{(x-1)^4} + C$$

№8.3.4

$$\int \frac{11\,dx}{(x+2)^3} = \begin{bmatrix} A=11;\ a=-2;\ k=3 \end{bmatrix} = \frac{11}{-2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2} + C = -5\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2} + C$$

№ 8.3.5

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+29} = \left[\begin{matrix} p=10;\ q=29; \\ y = x+\frac{10}{2} \to dy=dx;\ a=\sqrt{29-\frac{100}{4}} \end{matrix}\right] =$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+a^2} = \frac{2}{\sqrt{116-100}}\, \mathrm{arctg}\, \frac{2x+10}{\sqrt{116-100}} + C = \frac{1}{2}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x+5}{2} + C$$

№ 8.3.6

$$\int \frac{(x+6)dx}{x^2-2x+17} = \left[\begin{matrix} A=1;\ B=6;\ p=-2;\ q=17 \\ 4-68=-64<0 \end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)}{x^2-2x+17}dx + (6+1)\cdot \int \frac{dx}{x^2-2x+17} =$$

$$= \left[\begin{matrix} t=x^2-2x+17;\ dt=(2x-2)dx \\ y=x+\frac{(-2)}{2}=x-1 \to dy=dx \\ a=\sqrt{17-1}=4 \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + 7\int \frac{dy}{y^2+16} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + 7\left(\frac{2}{\sqrt{68-4}}\, \mathrm{arctg}\, \frac{2x-2}{\sqrt{68-4}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+17| + \frac{14}{8}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x-1}{4} + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+17| + 1\frac{3}{4}\, \mathrm{arctg}\, \frac{x-1}{4} + C$$

№ 8.3.7

$$\int \frac{(4x-1)dx}{x^2+x+1} = \left[\begin{matrix} A=4;\ B=-1;\ p=1;\ q=1 \\ 1-4=-3<0 \end{matrix}\right] = 2\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} + (-1-2)\cdot$$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \left[\begin{matrix} t=x^2+x+1;\ dt=(2x+1)dx \\ y=x+1/2;\ dy=dx;\ a=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}\right] =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t} - 3\cdot \int \frac{dy}{y^2+3/4} = 2\ln|t| - 3\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot \mathrm{arctg}\, \frac{2y}{\sqrt{3}}\right) + C =$$

$$= 2\ln|x^2+x+1| - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt{3}\cdot(x+\frac{1}{2})}{3} + C =$$

$$= 2\ln|x^2+x+1| - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} + C$$