§ 2. Дифференциал

2.1. Теория

Пусть функц. $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности (·) x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в (·) x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в (·) x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. $A \cdot \Delta x$, называется дифференциалом функции в (·) x_0 и обознач. dy или $df(x_0$

$dx = \Delta x$

~~Теор~~

Функция $f(x)$ дифференцируема в (·) x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df = f'(x_0) \cdot dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a;b)$, то

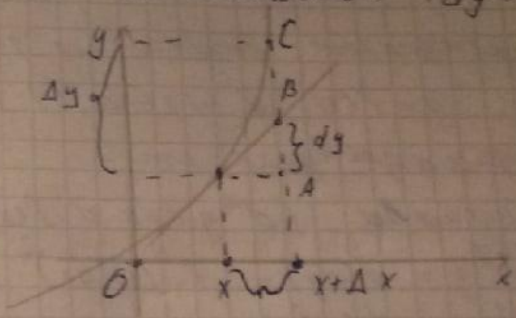
$$dy = f'(x)\,dx; \quad x \in (a;b).$$

Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т.е. произв. функции $y = f(x)$ в (·) x = отнош. дифф. этой f в этой (·) к дифф. незав. переменной

Если Δx близко к 0, то $\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}$

Геометрический смысл и св-ва

Приращ Δy функции $f(x)$ в · x — приращение ординаты (·) на кривой ($\Delta y = AC$), а dy в этой (·) — приращение ординаты соотв (·) на касательной ($dy = AB$)



Пусть $U(x)$ и $V(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в (·) x. Тогда

1.) $dC = 0$, где C — константа.

2) $d(\alpha U) = \alpha \cdot dU$, где α — константа

3.) $d(U \pm V) = dU \pm dV$

4.) $d(U \cdot V) = UdV \cdot VdU$.

5) $d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}$, где $V(x) \neq 0$

6. Инвариантность формы дифференциала. Если $y=f(u(x))$

$$d\,f(u)=f'(u)\,du, \text{ или } dy=y'_u\cdot du$$

Дифференциалы высших порядков

Дифференциалом второго порядка от ф. $y=f(x)$ в (·) $x\in(a,b)$ называется дифференциал от дифференциала (d^2y или $d^2f(x)$)

$$d^2y=d(dy)=f''(x)(dx)^2$$

$$d^3y=d(d^2y)$$

и т. д.

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=f^{(n)}(x)(dx)^n$$

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$$