§ Производная функции

Теория

~ Производная ~

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности x_0. Предел отношения приращения Δy функции в этой (•) (если он существ.) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной $f(x)$ в (•) x_0

$$f'(x_0) \text{ или } y'(x_0) \text{ или } \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{ или } f'\big|_{x=x_0}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Вычисление функции – дифференцирование

~ Таблица произв. ~

1. $(c)' = 0$; c – const;
2. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ (где $a \in R$);
3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $a > 0$; $a \neq 1$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

7. $(\cos x)' = -\sin x$

8. $(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

12. $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

13. $(sh\, x)' = ch\, x$

14. $(ch\, x)' = sh\, x$

15. $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$

16. $(cth\, x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

~ Основные правила дифференцирования ~

C – const

$\left.\begin{matrix} V(x) \\ U(x) \end{matrix}\right\}$ имеют $'$ в (·) x

$\Downarrow$

Функции

$\frac{u(x)}{v(x)}$,

в это

$\Downarrow$

функции $u(x) \pm (v(x))$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\frac{u(x)}{v(x)}$, где $v(x) \neq 0$ тоже имеют $'$

в этой (·), причём

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\quad ((c \cdot v)' = c \cdot v')$
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Пусть $u = \varphi(x)$ имеет $'$ в (·) x_0, а $y = f(u)$ – в (·) $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда сложн. функция ~~$y = f(u)$ – в (·) x_0~~

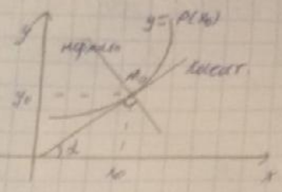
$y = f(\varphi(x))$ также имеет $'$ в x_0, причём

$y'(x_0) = g'(u_0) \cdot u'(x_0)$

~ Геометрический смысл ~

Пусть функция $y = f(x)$ имеет $'$ в (·) x_0. Тогда существ. касат. к графику этой функции в (·) $M_0(x_0; y_0)$, уравнение касат – $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

При этом $f'(x_0) = tg\,\alpha$, α – ∠ наклона касат. к Ox



Прямая, проходящая через (·) касания, ⊥ касательной, называется нормалью

уравн. нормали

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Если $f'(x_0) = 0$ (касат – горизонт), то нормаль вертикальна и имеет уравнение ($x = x_0$)

Пусть даны 2 пересекающиеся в (·) $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причём обе функции имеют ′ в (·) x_0.

Тогда ∠ между ними – ∠ между касат. к ним в (·) $M_0(x_0; y_0)$

$$tg\,\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}$$

~ Логарифмическая ′ ~

При нахожд ′ от функции $u(x)^{v(x)}$, а также от других громоздк. выраж ′, допускающ. логарифмиров. (·; /; √) удобно прим. логарифмич. произв.

Логарифмич. произв от $y = f(x)$ – произв. от логарифма этой ф

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \quad \text{отсюда}$$

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

Π, Π – не монотонная, огранич. ($M = 1$; 4)

~ Производная неявной функции ~

Пусть $y = y(x)$, обладающая производной в (·) x, задана неявно уравн.

$$F(x, y) = 0$$

Тогда $y'(x)$ можно найти, продифф. уравнение $F(x, y)$ и разрешая полученное уравнение относительно y'

~ Производные высших порядков ~

$f'(x)$ – произв. 1 порядка

$(f'(x))' = f''(x)$ – произв. 2 порядка

$(f''(x))'$ $f'''(x)$ – произв. 3 порядка

$f^{n}(x)$ – произв. n-ого порядка

~ Произв. функций, заданных параметрич. ~

$$y = f(x) \text{ при } \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Если $x(t)$ и $y(t)$ имеют ' в (·) t_0, причём $x'(t_0) \neq 0$, а $y = f(x)$ имеет ' в (·) $x_0 = x(t_0)$, то эта '

1) а) $$y'_{(x_0)} = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

или

б) $$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2) $$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$$