Интегралы и дифференциальные уравнения

Отчёт по домашней работе от 09.11.2020

Автор: Чалапко Егор Витальевич, 1 подгруппа

Домашняя работа

№ 11.434

$z'_x z =$

$$x+y+z = e^{-(x+y+z)}$$

1) z'_x: $1 + z'_x = e^{-(x+y+z)}(-1 - z'_x)$

z'_y: $1 + z'_y = e^{-(x+y+z)}(-1 - z'_y)$

2) Заменим $e^{-(x+y+z)} \Rightarrow x+y+z$

$$1 + z'_x = (x+y+z)(-1 - z'_x)$$

$$1 + z'_y = (x+y+z)(-1 - z'_y)$$

3) $z'_x = \dfrac{-(x+y+z)-1}{x+y+z+1} = -1$

$z'_y = -1$

Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если задана функция $z = f(x;y)$ и вычислены её частные пр-ые $\frac{\partial f}{\partial x}(x;y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y)$, то они, вообще говоря, могут быть также дифференцируемыми функциями 2 незав. переменных x и y.

Приняты обзначения:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ – 2-ая частная производная по x

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ – смешанные частные пр-ные 2-ого порядка

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – 2ая частная пр-ная по y

Теорема Шварца

Если смешанные частные производные 2-ого порядка непрерывны, то они равны между собой.

Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

→ Дифференциал 2-ого порядка

$$d^2 z = d(dz) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

→ Производные и дифференциалы высших порядков

По аналогии можно определить частные и смешанные производные высших порядков, часть которых, согласно т. Шварца, равны между собой.

Т.о. 3 разл. ' 2ого порядка

4 разл. ' 3-го порядка

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)$$

Число разных ' порядка n от функции 2 переменных $n+1$

~~Док~~

Выражение для $d^n z$ формально можно записать в виде

$$d^n z \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n (z).$$

Практика

№ 11.5.1

$z = x^3 - x^2 y - y^3$

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -x^2 - 3y^2$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2xy) = 6x - 2y$

$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2xy) = -2x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 - 3y^2) = -2x\end{aligned}\right\}$ равны ; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6x - 2y) = 6$

3) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x-2y) = 6$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6x-2y) = -2$

$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(-2x) = 0$

$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6$

Очевидно, что все послед. частные производные 4-го порядка $= 0$

№ 11.5.2

$z = e^{xy^3}$. Найти $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}$; $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$; $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = y^3 e^{xy^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^6 e^{xy^3}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y^9 e^{xy^3}$;

$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = y^{12} e^{xy^3}$

2) $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y^9 e^{xy^3}) = 9y^8 e^{xy^3} + 3y^{11} x e^{xy^3}$

3) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y^6 e^{xy^3}) = 3y^5 e^{xy^3}(2+y^3x)$

$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right) = 3y^4 e^{xy^3}[10+14xy^3+3x^2y^6]$

№ 11.5.3

$d^2 z$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

1) $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$d^2 z = \frac{2[xy\,dx^2 + (y^2-x^2)dx\,dy - xy\,dy^2]}{(x^2+y^2)^2}$

11.5.4

$d^2 z = ?$

$z = \frac{xy}{x-y}$

$z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = \frac{2}{x-y}$

$z'_x = -\frac{y^2}{(x-y)^2}, \; z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$

$z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2}$

$z''_{x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}, \; z''_{xy} = -\frac{2xy}{(x-y)^3}, \; z''_{y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}.$

$d^2\left(\frac{xy}{x-y}\right) = \frac{2(y^2 dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2 dy^2)}{(x-y)^3}$

$z''_{x^2} + 2z''_{xy} + z''_{y^2} = \frac{2y^2 - 4xy + 2x^2}{(x-y)^3} = \frac{2}{x-y}$

№ 11.5.5

$d^3 z = ?, \; z = \frac{xy}{x+y}$

$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}; \; \left(\frac{1}{f^2}\right)' = -\frac{2f'}{f^3}$

1) $z'_x = \frac{y^2}{(x+y)^2}$

$z'_y = \frac{x^2}{(x+y)^2}$

2) $z''_{x^2} = -\frac{2y^2}{(x+y)^3}; \; z''_{xy} = \frac{2xy}{(x+y)^3}; \; z''_{y^2} = -\frac{2x^2}{(x+y)^3};$

3) $d^2 z = -2\frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{(x+y)^3}$

$d^3 z = z'''_{x^3} dx^3 + 3z'''_{x^2 y} dx^2 dy + 3z'''_{xy^2} dx\,dy^2 + z'''_{y^3} dy^3 =$

$= \frac{6}{(x+y)^4}\left(y^2 dx^3 - (2xy - y^2)dx^2 dy - (2xy - x^2)dx\,dy^2 + x^2 dy^3\right)$

№ 11.5.6

$d^2 z - ?$

$z = \ln(x^2 + y^2)$

1) $dz = 2\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$

$d^2_z = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}\right)dx + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}\right)dy =$

$$= 2\,\frac{(x^2+y^2)\,dx - 2x(x\,dx + y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}\,dx + 2\,\frac{(x^2+y^2)\,dy - 2y(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^2}\cdot$$

$$\cdot\, dy = 2\,\frac{(y^2-x^2)\,dx^2 - 4xy\,dx\,dy + (x^2-y^2)\,dy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

№ 11.5.23

$$x^3y^2 - xy^5 + 5x - y = 0$$

$$y''(0)$$

(1) $3x^2y^2 + 2x^3yy' - y^5 - 5xy^4y' + 5 - y' = 0$

(2) $6xy^2 + 6x^2y\cdot y' + 6x^2yy' + 2x^3(y')^2 + 2x^3y\cdot y'' - 5y^4y' -$

$- 5y^4y' - 20xy^3(y')^2 - 5xy^4y'' - y'' = 0$

(3) $6y^2 + 12xyy' + 24xyy' + 12x^2(y')^2 + 12x^2yy'' +$

$+ 6x^2(y')^2 + 4x^3y'y'' + 6x^2yy'' + 2x^3y'y'' + 2x^3yy''' - 40y^3(y')^2 -$

$- 10y^4y'' - 20y^3(y')^2 - 60xy^2(y')^3 - 40xy^3y'y'' - 5y^4y'' -$

$- 20xy^3y'y'' - 5xy^4y''' - y''' = 0$

Подставим в данное ур-е $x=0$ и получим $y=0$

В (1) $x=0;\ y=0 \rightarrow y'=5$

В (2) $x=0;\ y=0;\ y'=5 \rightarrow y''=0$

В (3) $x=0;\ y=0;\ y'=5;\ y''=0 \rightarrow y'''=0$

№ 1.5.24

$$ye^x + e^y = 0$$

y'' – ?

$$y'e^x + e^xy + e^yy' = 0$$

$$y''e^x + e^xy' + e^xy + e^xy' + e^y(y')^2 + e^yy'' = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y'' = -\frac{2e^xy' + e^xy + e^y(y')^2}{e^x+e^y}$$

$$y' = -\frac{ye^x}{e^x+e^y}$$

$$y'' = -\frac{-2e^{2x}y(e^x+e^y) + e^xy(e^x+e^y)^2 + y^2e^ye^{2x}}{(e^x+e^y)^3}$$

11.5.31

$$y^2-3x^2+2x+3y-9=0$$

y' – ?

y'' – ?

Краткое решения:

(Заметка: Уравнение имеет решение $(x_0;y_0)=(1;2)$.)

$$y'=2\,\frac{3x-1}{2y+3}$$

$$y''=2\,\frac{3(2y+3)-2y'(3x-1)}{(2y+3)^2}$$

$$y''=2\cdot\frac{3(2y+3)^2-4(3x-1)^2}{(2y+3)^3}$$

Для получения послед. производных можно продифф. последнее равенство, а затем подставить значение y'

2 Способ

$$2yy'-6x+2+3y'=0$$

можно продифф. многократно

$$2(y')^2+2yy''-6+3y''=0$$

$$4y'y''+2y'y''+2yy'''+3y'''=0 \quad \text{и т.д.}$$

Из 1 формулы вывести y' → во второе, найти y'' → в третье и т.д.

№ 11.5.35 $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – ?

$$z(x;y):\ x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$$

Высшие производные для функций, заданных неявно как функции 2 или более переменных, находят практически по тем же правилам, что и первые произв. Данное ур-ие дифф. по x (y – пост)

1) $2x+6zz'_x+y-z'_x=0$

$$z'_x=\frac{2x+y}{1-6z}$$

дифф. по x

2) $2+6(z'_x)^2+6zz''_{x^2}-z''_{x^2}=0$

$$z''_{x^2}=2\cdot\frac{1+3(z'_x)^2}{1-6z}$$

3) $6z'_yz'_x+6zz''_{xy}+1-z''_{xy}=0$

$$z''_{xy} = \frac{1+6z'_x z'_y}{1-6z}$$

4) Дифф $z(x,y)$ по y

$$4y + 6zz' + x - z'_y = 0$$

$$z'_y = \frac{x+4y}{1-6z}$$

Дифф. по y

5) $4 + 6(z'_y)^2 + 6zz''_{y^2} - z''_{y^2} = 0$

$$\Downarrow$$

$$z''_{y^2} = \frac{4+6(z'_y)^2}{1-6z}$$

Для полученных искомых ' необх. в правых частях соотв. выражений. и заменить z'_x и z'_y