Задача 1

Вычислить количество разбиений, необходимых для вычисления интеграла

$$\int_{0.6}^{1.0} \frac{\cos(0{,}6x^2+0{,}4)\,dx}{1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)}$$

, с точностью до 0,1.

Решение

Абсолютная погрешность при вычислении определённого интеграла по методу прямоугольников определяется по формуле

$$|R_n(f)| \le \frac{(b-a)^2}{2n} M$$

где M = $max|f'(x)|$, $a \le x \le b$.

По условию $|R_n(f)| \le \varepsilon$, $\varepsilon = 0.1$, отсюда следует формула:

$$\frac{(b-a)^2}{2n} M \le \varepsilon$$

Преобразуем:

$$n \ge \frac{(b-a)^2 \mathrm{M}}{2\varepsilon}$$

По условию a=0.6, b=1.0, ε=0.1, из чего следует

$$n \ge \frac{(1.0-0.6)^2}{2*0.1} M \approx \frac{0.16}{0.2} M \approx 0.8M$$

Для нахождения M необходимо вычислить производную первого порядка на интервале интегрирования, а потом найти максимальное значение функции в этом интервале.

$$f(x) = \frac{\cos(0{,}6x^2 + 0{,}4)}{1{,}4 + \sin^2(x+0{,}7)}$$

$$f'(x) = \frac{(\cos(0{,}6x^2+0{,}4))' \cdot (1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)) - (\cos(0{,}6x^2+0{,}4)) \cdot (1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))'}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2} =$$

$$= \frac{((1{,}2x+0)\cdot(-\sin(0{,}6x^2+0{,}4)) \cdot (1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)) - \cos(0{,}6x^2+0{,}4) \cdot (0 + 1 \cdot 2\sin(x+0{,}7)\cdot\cos(x+0{,}7))}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2} =$$

$$= \frac{-1{,}2x \cdot \sin(0{,}6x^2+0{,}4) \cdot (1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)) - 2\sin(x+0{,}7)\cos(x+0{,}7)\cdot\cos(0{,}6x^2+0{,}4)}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2} =$$

$$\cancel{= -1{,}68x \cdot \sin}$$

$$= \frac{-1{,}2x \cdot \sin(0{,}6x^2+0{,}4)\cdot(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)) - \sin(2x+1{,}4)\cdot\cos(0{,}6x^2+0{,}4)}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2}$$

M = $max|f'(x)| = 0.4,\ \ 0.6 \le x \le 1.0$ из чего следует

$$n \ge 0.8 * 0.4 \approx 0.32$$

Поскольку n – целое, можно принять значение n = 1;

Задача 2

Вычислить количество разбиений, необходимых для вычисления интеграла

$$\int_{0.6}^{1.0} \frac{\cos(0{,}6x^2+0{,}4)\,dx}{1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)}$$

, с точностью до 0,01.

Решение

Для определения числа n отрезков, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, воспользуемся формулой:

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$$

Где M = $max\,|\,f''(x)|$, $a \leq x \leq b$. Неравенство $|R_n| \leq \varepsilon$ будет выполнено, если

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M \leq \varepsilon$$

откуда

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}$$

По условию, a=0.6, b=1.0, ε=0.01, отсюда следует

$$n \geq \sqrt{\frac{(1.0-0.6)^3}{12*0.01} M} \approx \sqrt{\frac{0.064}{0.12} M}$$

Найдём вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(-1{,}2\cdot x\cdot \sin(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)\cdot(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)) -}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{-\sin(2\cdot x+1{,}4)\cdot\cos(0{,}6\cdot x^2+0{,}4))'\cdot((1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2)-}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{-(-1{,}2\cdot x\cdot\sin(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)\cdot(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))-}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$-\frac{\sin(2x+1{,}4)\cdot\cos(0{,}6\cdot x^2+0{,}4))\cdot((1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2)'}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}=$$

$$=\frac{(-1{,}44\cdot x^2\cdot(\sin(x+0{,}7)^2+1{,}4)\cdot\cos(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)-2{,}4\cdot x\cdot}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{\cdot\sin(x+0{,}7)\cdot\sin(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)\cdot\cos(x+0{,}7)+1{,}2\cdot x\cdot}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{\cdot\sin(2x+1{,}4)\cdot\sin(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)+(-1{,}2\cdot\sin(x+0{,}7)^2-}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{-1{,}68)\cdot\sin(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)-2\cdot\cos(2x+1{,}4)\cdot}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{\cdot\cos(0{,}6\cdot x^2+0{,}4))\cdot(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^2\ -}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{-(-1{,}2\cdot x\cdot\sin(0{,}6\cdot x^2+0{,}4)\cdot(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))-}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$-\frac{\sin(2x+1{,}4)\cdot\cos(0{,}6\cdot x^2+0{,}4))\cdot(2(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))\cdot}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$\frac{\cdot(2+2\sin(x+0{,}7)\cdot\cos(x+0{,}7))}{(1{,}4+\sin^2(x+0{,}7))^4}$$

$$M = max|f''(x)| = 8.9,\ \ 0.6 \le x \le 1.0 \text{ из чего следует}$$

$$n \ge \sqrt{\frac{0.064}{0.12} * 8{,}9} \approx 2.18$$

Поскольку n – целое, можно принять значение n = 3;