ПРОИЗВОДНАЯ

$$f'(x0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0+\Delta x) - f(x0)}{\Delta x}$$

ГДЕ X0 – НЕКОТОРАЯ ТОЧКА; F(X) – ФУНКЦИЯ, ОПРЕДЕЛЁННАЯ В НЕКОТОРОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ; ΔX – ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА; ΔY – ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ НАЗЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ ФУНКЦИИ.

Основные правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(u * v)' = u'v + uv'$

3.$(c * u)' = c * u'$

4.$(u/v)' = (u'v+uv')/u^2$

5. $u = h(x)$ – имеет производную в точке **x0**

$y = f(u)$ – имеет производную в точке **u0= h(x0)**

Тогда сложная функция **$y=f(h(x))$** также имеет производную в точке **x0: $y'(x0) = y'(u0) * u'(x0)$**

Геометрический смысл производной

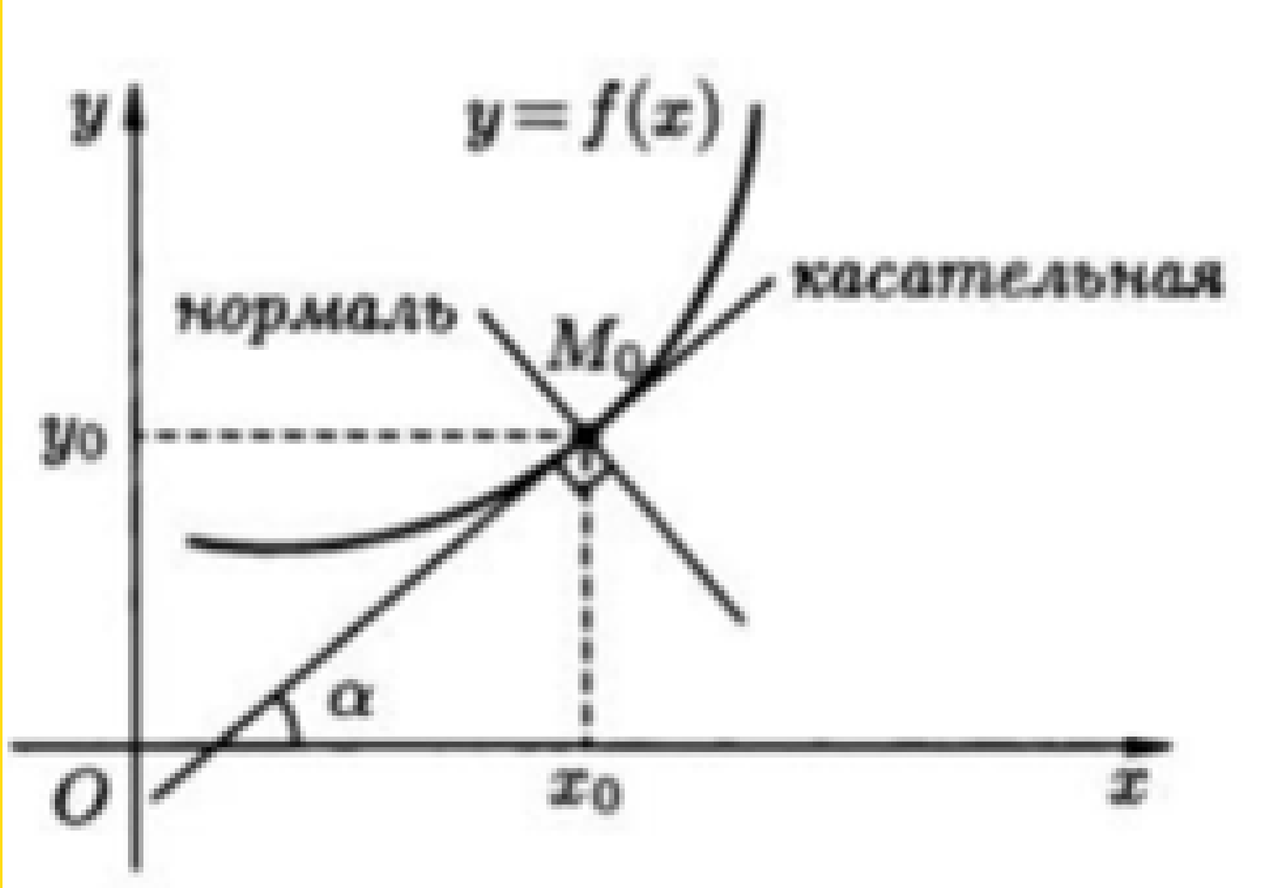
Пусть функция **$y = f(x)$** имеет производную в точке **x0.**

Тогда существует касательная к графику этой функции в точке **x0.** Тогда существует касательная к графику функции в точке **M0 (x0; y0),** уравнение которой имеет вид

$y-y0=f'(x0)(x-x0)$

При этом **$f'(x0)=tg\ a$,**

где **a –** угол наклона этой касательной к оси Ox



Уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Пусть даны **2**
пересекающиеся в точке **M(x0,y0)** кривые **y = f1(x)** и **y = f2(x),** причём обе функции имеют производные в точке **x0.** Тогда углом между этими кривыми называется угол между касательными к ним, приведёнными в точке **M0.**

Этот угол φ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

Логарифмическая производная

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

Производные высших порядков

$$f''(x)=(f'(x))'$$

$$f'''(x)=(f''(x))'$$

$$f(4)(x)=f''''(x)$$

Производная функции, заданных параметрически

$$y'(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Дифференциал

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращение Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т. е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a; b)$, то

$$dy = f'(x)\,dx, \quad x \in (a; b).$$

Отсюда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, т. е. производная функции $y = f(x)$ в точке x равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

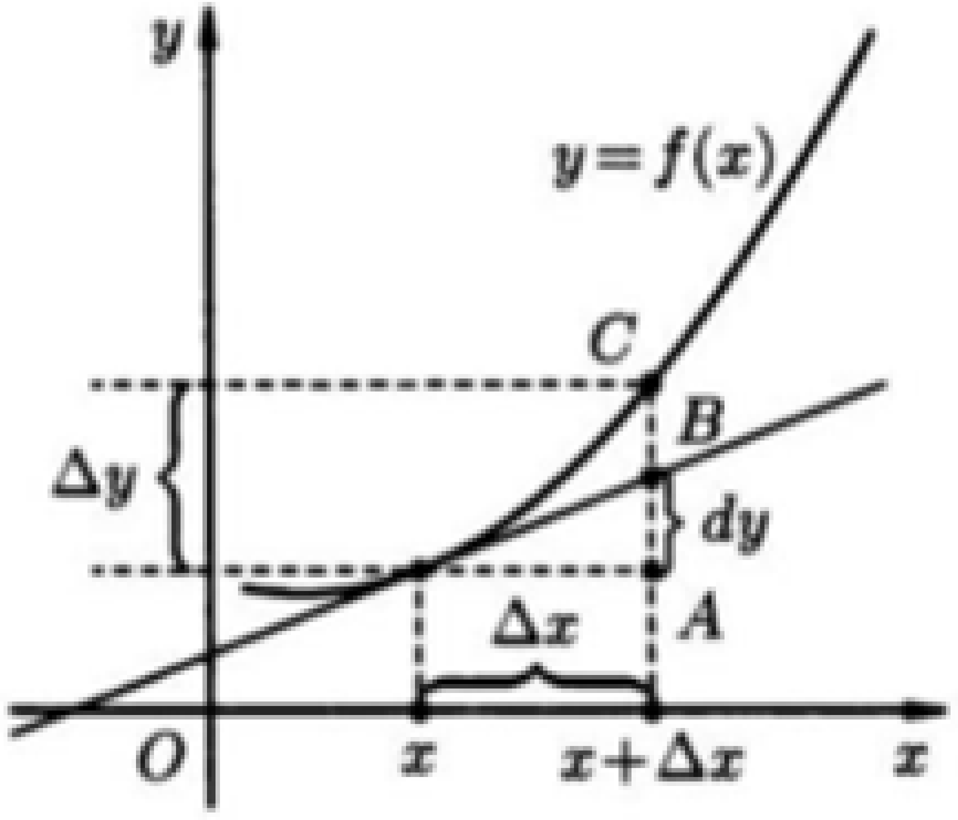
Дифференциал

Если приращение Δx аргумента x близко к нулю (т. е. достаточно мало), то приращение Δy функции приближенно равно ее дифференциалу, т. е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}.$$

Геометрический смысл и свойства дифференциала

Геометрически (рис. 82) приращение Δy функции $f(x)$ в точке x — есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал dy функции в этой точке — приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).



Дифференциал

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке x. Тогда:

1. $dC = 0$, где C — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где α — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.
6. *Инвариантность формы дифференциала.* Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

т. е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается y как функция независимой переменной x или зависимой переменной u.

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается d^2y или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)\,dx$, где dx — не зависящая от x константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y), \ldots$ В общем случае, *дифференциалом n-го порядка* от функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$$d^ny = d(d^{n-1}y),$$

Теоремы о среднем

Теорема 7.1 (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т. е. $f(a)=f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a;b)$, для которой $f'(c)=0$.

Теорема 7.2 (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда на интервале $(a;b)$ найдется такая точка c, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Теорема 7.3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $g'(x)\neq 0$ для всех $x\in(a;b)$. Тогда найдется такая точка c на этом интервале, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Правила Лопиталя

1)Если существует предел отношения нулей в точке **k** функций**,** то в целях устранения неопределённости можно взять две производные **–** ОТДЕЛЬНО от числителя и ОТДЕЛЬНО от знаменателя**.** При дифференцировании числителя и знаменателя значение предела не меняется**.**

2) Если существует предел отношения бесконечно больших в точке **k** функций**,** то в целях устранения неопределённости можно взять две производные **–** ОТДЕЛЬНО от числителя и ОТДЕЛЬНО от знаменателя**.** При дифференцировании числителя и знаменателя значение предела не меняется**.**

Формула Тейлора

Если функция **f(x)** имеет непрерывные производные вплоть до **(n+1)-**го порядка**,** то ее можно разложить в степенной ряд по формуле Тейлора**:**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n;$$

Формула Маклорена

$$P(x)=P(0)+\frac{P'(0)}{1!}x+\frac{P''(0)}{2!}x^2+\frac{P'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Полученное выражение называется **формулой Маклорена** для многочлена $P(x)$ степени n.

Частные производные

Частными приращениями функции $z = f(x; y)$ по независимым переменным x и y называются разности $\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y)$, $\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Полным приращением функции $z = f(x; y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy, называется разность $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$