Линейная комбинация

Линейной комбинацией (ЛК) строк s1,s2,...,sm матрицы называется выражение ʎ1*s1+ʎ2*s2+...+ʎm*sm

ЛК называется **тривиальной**, если все коэффициенты ʎi равны нулю одновременно. (Тривиальная ЛК равна нулевой строке.)

ЛК называется **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Линейно зависимые и независимые строки

Система строк называется **линейно зависимой** (ЛЗ), если существует их нетривиальная ЛК, равная нулевой строке.

Система строк называется **линейно независимой** (ЛНЗ), если только тривиальная ЛК равна нулевой строке.

Ранг системы строк и столбцов матрицы

Рангом системы строк называется максимальное количество линейно независимых строк этой системы.

В каждой матрице можно связать два ранга: **строчный ранг** (ранг системы строк) и **столбцовый ранг** (ранг системы столбцов).

Теорема: Строчный ранг матрицы равен её столбцовому рангу.

Ранг матрицы

Рангом матрицы называется ранг её системы строк или столбцов. Обозначается: **r(A), rang(A)**

Метод элементарных преобразований

для нахождения ранга матрицы используют следующее утверждение: ранг матрицы равен количеству ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду.

Элементарными преобразованиями строк называют:

перестановку местами любых двух строк матрицы;

умножение любой строки матрицы на константу k, k≠0, при этом определитель матрицы увеличивается в k раз;

прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на некоторую константу.

Пример:

Произведем последовательные элементарные преобразования строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{4\cdot I-II \\ 7\cdot I-III \\ 10\cdot I-IV}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 9 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2\cdot II-III \\ 3\cdot II-IV}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

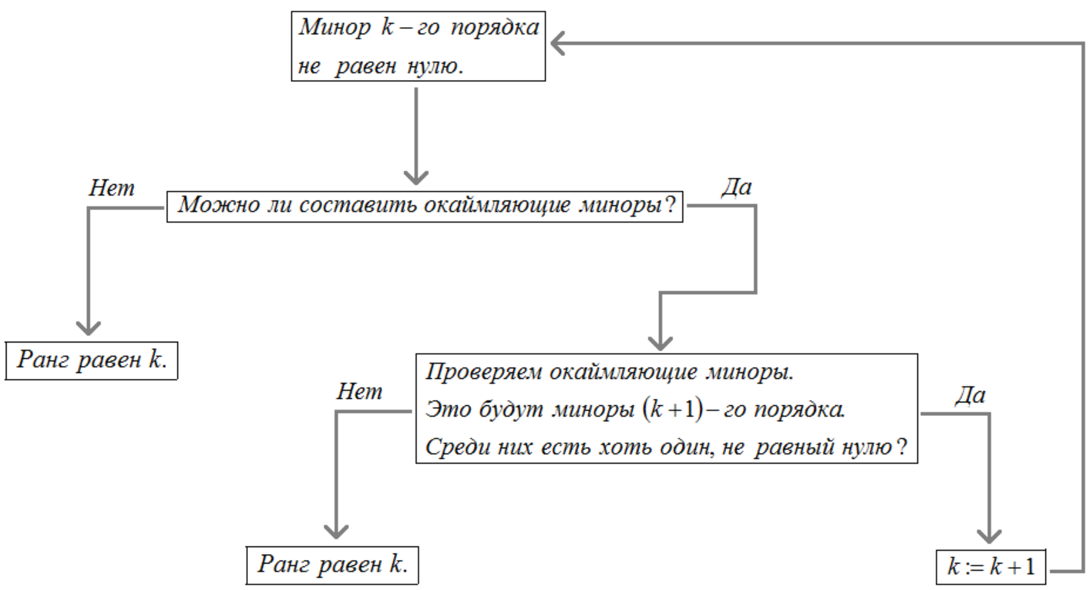
Следовательно, $rgA = 2$.

Метод окаймления миноров

Суть метода окаймляющих миноров выражается парой пунктов простого алгоритма:

1) Пусть некий минор M k-го порядка не равен нулю.

2) Если окаймляющие миноры для минора M (это уже будут миноры (k+1)-го порядка), составить невозможно (т.е. матрица содержит k строк или k столбцов), то ранг равен k. Если окаймляющие миноры существуют и все равны нулю, то ранг равен k. Если среди окаймляющих миноров есть хотя бы один, отличный от нуля, то повторяем для него пункт №1, приняв k+1 вместо k.



Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель данного минора.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

Определить данного минора равен **-2**. Значит ранг матрицы **≥ 2**.

Продолжим поиска ранга матрицы. Составим минор **3-го** порядка.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель этого минора.

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -4$$

Минор получился не нулевой. значит ранг матрицы **≥ 3**.

Продолжим поиска ранга матрицы. Составим минор **4-го** порядка.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель этого минора.

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель минора получился равный **0**. Построим другой минор.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель этого минора.

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Минор получился равным **0**.

Так как все миноры 4-ого порядка, окаймляющие минор 3-ого, равны 0, то ранг матрицы <4. Т.к. ранг матрицы ≥3 и <4 то ранг = 3.