25.09.20 № 7.3.27

$P(x)=x^4-x^3+5x^2-4x+1$, $x-1$, Тейлор

$P(x)=P(x_0)+\frac{P'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{P''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$

$+\dots+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

1) По усл., $x-1 \Rightarrow x_0=1$ (теор $x-x_0$)

2) $P(1)=1^4-1^3+5\cdot1^2-4\cdot1+1=1-1+5-4+1=$
$=2$

3) $P'(x)=4x^3-3x^2+10x-4$

$P'(1)=4-3+10=7$

4) $P''(x)=12x^2-6x+10$

$P''(1)=12-6+10=16$

5) $P'''(x)=24x-6$

$P'''(1)=24-6=18$

6) $P^{(4)}(x)=24$

$P^{(4)}(1)=24$

7) $P^{(5)}(x)=0$

$\Rightarrow$ не будет отдельно написанного остаточн. члена

8) $P(x)=P(1)+\frac{P'(1)}{1!}\cdot(x-1)+\frac{P''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2+$
$+\frac{P'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{P^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4=2+\frac{7}{1}\cdot(x-1)+$
$+\frac{16}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{18}{6}\cdot(x-1)^3+\frac{24}{24}\cdot(x-1)^4=$
$=2+7(x-1)+8(x-1)^2+3(x-1)^3+1(x-1)^4$

№ 7.3.29

$P(x)=x^3+4x^2-6x-8$, $x_0=-1$

1) $x_0=-1$

2) $P(-1)=-1+4+6-8=1$;

3) $P'(x)=3x^2+8x-6$

$P'(-1)=3-8-6=-11$

4) $P'(x) = 6x + 8$

$P'(-1) = -6 + 8 = 2$;

5) $P''(x) = 6$;

$P''(-1) = 6$;

6) $P'''(x) = 0$; $\Rightarrow$ не нужно дальше отделывать

7) $P(x) = 1 + \frac{(-1)}{1!}(x+1) + \frac{2}{2!}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3 =$

$= 1 - 11(x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3$

7330

$P(x) = x^5 - 3x^4 + 7x + 2$; $x_0 = 2$

1) $x_0 = 2$

2) $P(2) = 32 - 48 + 14 + 2 = 0$

3) $P'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 7$.

$P'(2) = 5 \cdot 16 - 12 \cdot 8 + 7 = -9$

4) $P''(x) = 20x^3 - 36x^2$

$P''(2) = 160 - 144 = 16$

5) $P'''(x) = 60x^2 - 72x$

$P'''(2) = 240 - 144 = 96$

6) $P^{(4)}(x) = 120x - 72$

$P^{(4)}(2) = 240 - 72 = 168$

7) $P^{(5)}(x) = 120$

$P^{(5)}(2) = 120$

8) $P^{(6)}(x) = 0 \rightarrow$ не нужно доп. разлож

9) $P(x) = \frac{(-9)}{1} \cdot (x-2) + \frac{16}{2} \cdot (x-2)^2 + \frac{96}{6}(x-2)^3 + \frac{168}{24}(x-2)^4 +$

$+ \frac{120}{120} \cdot (x-2)^5 = (x-2)^5 + 7(x-2)^4 + 16(x-2)^3 + 8(x-2)^2 - 9(x-2)$

№331

① $f(x)=\frac{1}{x}, x_0=1$, Тейлор

1) $x_0=1$;

2) $f(1)=\frac{1}{1}=1$;

3) $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

$f'(1)=-\frac{1}{1}=-1$

4) $f''(x)=+\frac{2}{x^3}$

$f''(1)=2$

5) $f'''(x)=-\frac{6}{x^4}=-2\cdot3\cdot x^{-3-1}$

$f'''(1)=-6=-1\cdot2\cdot3$

6) $f^{(4)}(x)=-2\cdot3\cdot(-4)\cdot x^{-4-1}=2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{x^5}$

$f^{(4)}(1)=2\cdot3\cdot4\cdot\frac{1}{1}=24$

7) $f^{(5)}(x)=(2\cdot3\cdot4\cdot x^{-5})'=2\cdot3\cdot4\cdot(-5)\cdot x^{-5-1}=$

$=-2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{x^6}$

$f^{(5)}=-2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\frac{1}{16}=-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$

Закономерность:

$\to(-1)^x\cdot x!$

8) $f'(1)=-1$

$f''(1)=1\cdot2$

$f'''(1)=-1\cdot2\cdot3$

$f^{(4)}(1)=1\cdot2\cdot3\cdot4$

$f^{(5)}(1)=-1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$

$(-1)^n\cdot n!$

1 3 5 → −

2 4 → + } можно будет степ. n

9) $f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1}\cdot(x-1)+\frac{f''(1)}{2}\cdot(x-1)^2+$

$+\frac{f'''(1)}{6}\cdot(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4+\ldots+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}\cdot(x-1)^n+$

$+o((x-1)^n)=$

$=1+(-1)(x-1)+1(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\ldots+$

$+(-1)^n\cdot(x-1)^n+o((x-1)^n),\ x\to1$

② $f(x) = \operatorname{arctg} x$, Маклорен до $o(x^3)$

1) $x_0 = 0$

2) По условию надо разлож. до $o(x^3)$

$\Rightarrow$ найдём $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$

3) $f(0) = (\operatorname{arctg} 0) = 0$

4) $f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(0) = \frac{1}{1} = 1$

5) $f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = ((1+x^2)^{-1})' = -1\cdot(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)' =$

$= -\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot(0+2x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$f''(0) = -\frac{0}{(1+0)^2} = -\frac{0}{1} = 0$

6) $f'''(x) = \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{(-2x)'\cdot(1+x^2)^2 - (-2x)((1+x^2)^2)'}{((1+x^2)^2)^2} =$

$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x\cdot 2(1+x^2)\cdot(2x)}{(1+x^2)^4} =$

$= \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{(1+x^2)(-2\cdot(1+x^2)+8x^2)}{(1+x^2)^4} =$

$= \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$

$f'''(0) = \frac{0-2}{(1+0)^3} = -2$

7) $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 +$

$+ o(x^3) = 0 + x + \frac{(-2)}{6}x^3 + o(x^3) =$

$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Д/З.

– Заполнить ветки форума

– № 7.3.32 – ~~7.3.33~~ – 7.3.36

– Дополнить отчёт

№ 7.3.32

$f(x) = 2^x$; $x_0 = \log_2 3$

1) $f(x_0) = 2^{\log_2 3} = 3$;

2) $f'(x) = 2$;

$f'(x_0) = 2$;

3) $f''(x) = 0$; $\Rightarrow$ ост. член не требуется

4) $f(x_0) = 3 + \frac{2}{1}(x-\log_2 3) + \frac{2}{2}(x-\log_2 3)^2 =$

$= (x-\log_2 3)^2 + 2(x-\log_2 3) + 3$