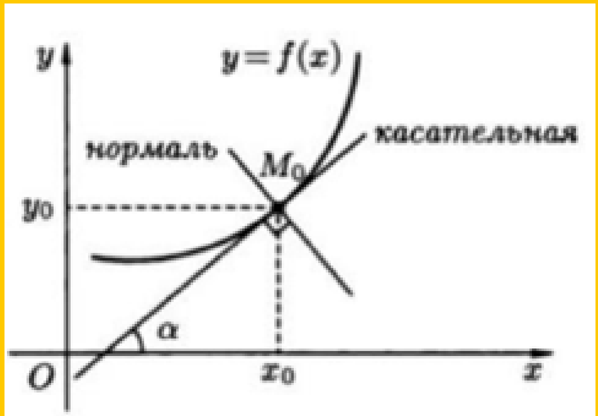
## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

ПУСТЬ ФУНКЦИЯ Y = F(X) ИМЕЕТ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ $X_0$.
ТОГДА СУЩЕСТВУЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ЭТОЙ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ $X_0$. ТОГДА СУЩЕСТВУЕТ КАСАТЕЛЬНАЯ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ $M_0$ ($X_0$; $Y_0$), УРАВНЕНИЕ КОТОРОЙ ИМЕЕТ ВИД

$Y-Y_0=F'(X_0)(X-X_0)$

ПРИ ЭТОМ $F'(X_0)=\operatorname{TG} A$, ГДЕ A – УГОЛ НАКЛОНА ЭТОЙ КАСАТЕЛЬНОЙ К ОСИ OX




УРАВНЕНИЕ НОРМАЛИ ИМЕЕТ ВИД:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

ПУСТЬ ДАНЫ 2 ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ В ТОЧКЕ M($X_0$,$Y_0$) КРИВЫЕ $Y = F_1(X)$ И $Y = F_2(X)$, ПРИЧЁМ ОБЕ ФУНКЦИИ ИМЕЮТ ПРОИЗВОДНЫЕ В ТОЧКЕ $X_0$. ТОГДА УГЛОМ МЕЖДУ ЭТИМИ КРИВЫМИ НАЗЫВАЕТСЯ УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНЫМИ К НИМ, ПРИВЕДЁННЫМИ В ТОЧКЕ $M_0$.

Этот угол $\varphi$ можно найти из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

## АВТОР


Чалапко Егор Витальевич
Почта: egorchalapko@gmail.com


# ПРОИЗВОДНАЯ

$$f'(x0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x0+\Delta x) - f(x0)}{\Delta x}$$

ГДЕ $X_0$ – НЕКОТОРАЯ ТОЧКА; F(X)– ФУНКЦИЯ, ОПРЕДЕЛЁННАЯ В НЕКОТОРОЙ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ; ΔX – ПРИРАЩЕНИЕ АРГУМЕНТА; ΔY – ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ НАЗЫВАЕТСЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ ФУНКЦИИ.

## ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1. (U±V)’ = U’±V’
2. (U*V)’ = U’V+UV’
3. (C*U)’=C*U’
4. (U/V)’=(U'V+UV')/U^2
5. U = H(X) – ИМЕЕТ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ $X_0$

Y = F(U) – ИМЕЕТ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ $U_0 = H(X_0)$ ТОГДА СЛОЖНАЯ ФУНКЦИЯ Y=F(H(X)) ТАКЖЕ ИМЕЕТ ПРОИЗВОДНУЮ В ТОЧКЕ $X_0$:

$Y'(X_0) = Y'(U_0) * U'(X_0)$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда если существует такое число $A$, что приращение $\Delta y$ этой функции в точке $x_0$, соответствующее приращению $\Delta x$ аргумента, представимо в виде:

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* $x_0$. При этом главная, линейная относительно $\Delta x$, часть этого приращения, т.е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом функции* в точке $x_0$ и обозначается $dy$ или $df(x_0)$.

Нетрудно показать (положив $y = x$ в формуле (2.1)), что $dx = \Delta x$.

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$; при этом $A = f'(x_0)$. Поэтому $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$, или, если $f'(x)$ существует на данном интервале $(a; b)$, то

$$dy = f'(x)\,dx, \quad x \in (a; b).$$

Отсюда $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, т.е. производная функции $y = f(x)$ в точке $x$ равна отношению дифференциала этой функции в данной точке к дифференциалу независимой переменной.

Если приращение $\Delta x$ аргумента $x$ близко к нулю (т.е. достаточно мало), то приращение $\Delta y$ функции приближенно равно ее дифференциалу, т.е. $\Delta y \approx dy$, откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{df(x_0)}.$$

## ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v.$$

## ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

F ”(X)=(F ’(X))’

F ’”(X)=(F ”(X))’

F(4)(X)= F ’”(X)

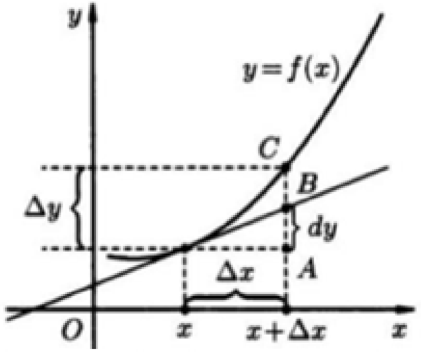
## ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

**Геометрический смысл и свойства дифференциала**

Геометрически (рис. 82) приращение $\Delta y$ функции $f(x)$ в точке $x$ — есть приращение ординаты точки на кривой ($\Delta y = AC$), а дифференциал $dy$ функции в этой точке — приращение ординаты соответствующей точки на касательной ($dy = AB$).




Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точке $x$. Тогда:

1. $dC = 0$, где $C$ — константа.
2. $d(\alpha u) = \alpha \cdot du$, где $\alpha$ — константа.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(u \cdot v) = udv + vdu$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v(x) \neq 0$.
6. ***Инвариантность формы дифференциала.*** Если $y = f(u(x))$ — сложная функция, то

$$df(u) = f'(u)\,du, \quad \text{или} \quad dy = y'_u \cdot du,$$

т. е. форма дифференциала не меняется (инвариантна) независимо от того, рассматривается $y$ как функция независимой переменной $x$ или зависимой переменной $u$.

***Дифференциалом второго порядка*** (или вторым дифференциалом) от функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка функции $f(x)$ в этой точке.

Дифференциал второго порядка обозначается $d^2y$ или $d^2f(x)$. Таким образом, $d^2y = d(dy)$. Учитывая, что $dy = f'(x)\,dx$, где $dx$ — не зависящая от $x$ константа, получим

$$d^2y = f''(x)(dx)^2, \text{ или, более кратко, } d^2y = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего и более высоких порядков: $d^3y = d(d^2y)$, $d^4y = d(d^3y), \ldots$ В общем случае, ***дифференциалом $n$-го порядка*** от функции $f(x)$ в точке $x$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $f(x)$ в этой точке:

$$d^n y = d(d^{n-1}y),$$

# ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

**Теорема 7.1 (Ролля).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и принимает на концах отрезка равные значения (т. е. $f(a) = f(b)$). Тогда существует по крайней мере одна точка $c$ на интервале $(a;b)$, для которой $f'(c) = 0$.

**Теорема 7.2 (Лагранжа).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$. Тогда на интервале $(a;b)$ найдется такая точка $c$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

**Теорема 7.3 (Коши).** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$. Тогда найдется такая точка $c$ на этом интервале, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

# ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

*Частными приращениями* функции $z = f(x;y)$ по независимым переменным $x$ и $y$ называются разности $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x;y)$, $\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x;y)$.

*Полным приращением* функции $z = f(x;y)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x$ и $\Delta y$, называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x;y)$.

*Частной производной* функции $z = f(x;y)$ по переменным $x$ и $y$ называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ или $\Delta_y z$ к приращению данной переменной, при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

# ПРАВИЛА ЛОПИТАЛЯ

1)ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ НУЛЕЙ В ТОЧКЕ К ФУНКЦИЙ, ТО В ЦЕЛЯХ УСТРАНЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ МОЖНО ВЗЯТЬ ДВЕ ПРОИЗВОДНЫЕ – ОТДЕЛЬНО ОТ ЧИСЛИТЕЛЯ И ОТДЕЛЬНО ОТ ЗНАМЕНАТЕЛЯ. ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ЧИСЛИТЕЛЯ И ЗНАМЕНАТЕЛЯ ЗНАЧЕНИЕ ПРЕДЕЛА НЕ МЕНЯЕТСЯ.

2) ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ПРЕДЕЛ ОТНОШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ В ТОЧКЕ К ФУНКЦИЙ, ТО В ЦЕЛЯХ УСТРАНЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ МОЖНО ВЗЯТЬ ДВЕ ПРОИЗВОДНЫЕ – ОТДЕЛЬНО ОТ ЧИСЛИТЕЛЯ И ОТДЕЛЬНО ОТ ЗНАМЕНАТЕЛЯ. ПРИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ЧИСЛИТЕЛЯ И ЗНАМЕНАТЕЛЯ ЗНАЧЕНИЕ ПРЕДЕЛА НЕ МЕНЯЕТСЯ.

## ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n$$

## ФОРМУЛА МАКЛОРЕНА

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Полученное выражение называется **формулой Маклорена** для многочлена $P(x)$ степени $n$.