04.05.

Теоремы о среднем

Правила Лопиталя

Формула Тейлора

Th Ролля

$f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$

$f(x)$ - дифференцируема на $(a;b)$

$f(a)=f(b)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (\cdot)$ „c" : $c\in(a;b)$, $f'(c)=0$

Th Лагранжа

$f(x)$ - непрерывна на $[a;b]$

$f(x)$ - диффер. на $(a;b)$ $\Rightarrow$

$\exists (\cdot)\, c$: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

Th Коши

$f(x)$, $g(x)$ - непрерывны на $[a;b]$

$f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемы на $(a;b)$

$(g'(x)\neq 0;\ \forall x\in(a;b))$

$\Rightarrow \exists c$: $c\in(a;b)$ $\quad \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Rule Лапиталя

1. Правило

1) $f(x)$, $g(x)$ - дифференцируемы в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 кроме может быть самой x_0 ($x_0\pm\Delta x$, $\Delta x=0{,}00001$ (очень мал.))

$-\Delta x \quad x_0 \quad +\Delta x$

2) $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in U(x_0)$, $x\neq x_0$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

(т.е. $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=[0/0]$)

4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2. Правило

1) $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемые в $U(x)$ (·) x_0, кроме м.б. самой точки x_0

2) $g'(x) \neq 0$ для $\forall x \in U(x_0)$ и $x \neq x_0$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

(т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$)

4) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Формула Тейлора

$f(x)$: $\exists f', f'', \dots, f^{(n)}$ в $U_\delta(x_0)$, тогда $\forall x \in (U(x_0))$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \text{ при } x \to x_0$$

Это - формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Прим:

$\exists f^{(n+1)}(x)$, тогда зап.

$$o((x - x_0)^n) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

c - какая-то (·)

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n + o((x - 0)^n) =$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$$

при $x \to 0$

Формула Маклорена

Полезно помнить

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$,

3) $\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{n} + o(x^n)$

5) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \cancel{\frac{a \cdot (a-1)}{3!} x^3} + \frac{a(a-1)\ldots(a-(n-1))}{n!} \cdot x^n + o(x^n)$

Прим: Правило Лапиталя можно, если $x_0 \to \begin{matrix} 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

$x \to +\infty$

$y = \frac{1}{x} \to 0$

$x = \frac{1}{y}$

$\lim\limits_{y \to 0} \frac{\ln \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

№ 7.3.11

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \sin(3x)}{\ln(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{(\ln \sin(3x))'}{(\ln(x))'} =$

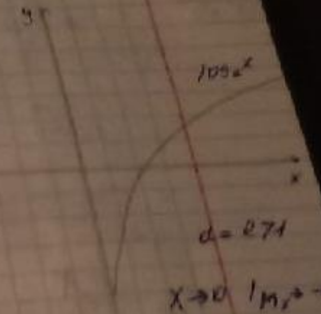
$= (\lim\limits_{x \to 0} (\frac{1}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot 3) / (\frac{1}{x})) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} = \ldots =$

$= 1 \cdot \lim (\frac{1}{\sin 3x} : \frac{1}{3x}) = \lim\limits_{x \to 0} = \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x}} =$

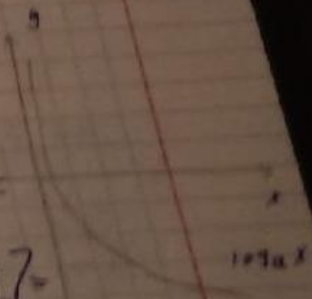
$= \left[\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ (замечат. предел)}\right] =$

$= \frac{1}{1} = 1$



$a = 2.71$

$x \to 0 \quad \ln x \to -\infty$



$0 < a < 1$