

Домашнее задание по ЕМ-алгоритму

Курс: Байесовские методы анализа данных, 2020

Рассмотрим упрощенную модель вероятностного метода главных компонент. Дана выборка $X = \{x_1, \dots, x_N\}_{i=1}^N$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, N$. Введем одномерные скрытые переменные $Z = \{z_1, \dots, z_N\}_{i=1}^N$, $z_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ и следующую вероятностную модель:

$$p(x|z, v, \sigma) = \mathcal{N}(x|vz, \sigma^2 I); \quad p(z) = \mathcal{N}(z|0, 1).$$

Выведите формулы Е- и М-шагов для настройки параметров $v \in \mathbb{R}^d$ и $\sigma \in \mathbb{R}$.

Подсказки: на Е-шаге найдите апостериорное распределение $q(z_i) = p(z_i|x_i, v, \sigma)$, используя сопряженность двух нормальных распределений. На М-шаге оптимизируйте $\sum_{i=1}^N \mathbb{E}_{q(z_i)} \log(p(x_i|z_i, v, \sigma)p(z_i)) \rightarrow \max_{v, \sigma}$. Пронесите мат. ожидания $\mathbb{E}_{q(z_i)}$ внутрь логарифма плотностей и воспользуйтесь формулами моментов нормального распределения. Также вам понадобятся формулы векторного дифференцирования $\nabla_v c^T v = c$, $\nabla_v v^T v = 2v$.