Лабораторная работа №2

Алгоритмы операций над графиками и их реализация

Цель: научиться составлять алгоритм выполнения операций над графиками.

Задача: Выполнить все операции над графиками.

Краткие теоретические сведения:

График — это множество пар, т.е. множество, каждый элемент которого является парой или кортежем длины 2. Множество P называется графиком, если каждый элемент его пара.

Пример. Множество P = {<a, b>, <a, 1>, <c, d>} является графиком.

Если M — произвольное множество, то M^2, а также любое множество $C \subseteq M^2$ является графиком. В частности, графиком является множество D^2 действительных чисел. Пусть заданы множества A и B, тогда $A \times B$, $C \subseteq A \times B$ являются графиками.

Понятие графика является обобщенным. В принципе оно происходит от понятия графика функции.

Областью определения графика P называется множество $пр_1P$ (проекция на первую ось (ось абсцисс) данного графика).

Областью значения графика называется множество проекций на вторую ось (ось ординат) ($пр_2P$).

Легко видеть, что если P — график, тогда если $P = \varnothing$, то $пр_1P = \varnothing$ & $пр_2P = \varnothing$.

Рассмотрим основные операции над графиками:

1. *Инверсия* (определяется через инверсию кортежа)

Инверсией графика P называют множество инверсий пар из P.

Пример. P = {<c, d>, <a, b>}, P-1 = {<d, c>, <b, a>}.

График Q называется инверсией графика P, если ∃α∈Q тогда и только тогда, когда α-1∈P, где α - произвольный кортеж.

В теоретико-множественном виде запишем:

$\alpha^{-1} \in P \rightarrow \alpha \in P^{-1}$

$\alpha \in P \rightarrow \alpha^{-1} \in P^{-1}$

График P называется *симметричным*, если он наряду с любой своей парой содержит ее инверсию. Например, P = {<a, b>, <b, a>}

Пусть M — произвольное множество. Тогда считают ΔM — множество всех пар вида <x, x>, где x присутствует во всем множестве M. Таким образом, если M = {a, b}, то ΔM = {<a, a>, <b, b>}— является симметричным графиком и называется *диагональю*.

2. *Композиция*

График R называется композицией двух графиков P и Q, а также $\langle x, y\rangle \in R$, тогда и только тогда, когда $\exists z$ такое, что $\langle x, z\rangle \in P \,\&\langle z, y\rangle \in Q$.

Переход от графиков P и Q к их композиции $(P\cdot Q)$ называется *компонированием* графиков P и Q.

Пример. Пусть $P = \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle\}$, а $Q = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$, тогда $P \cdot Q = \{\langle a, b\rangle\}$.

Композиция графика P и Ø равна Ø, то есть $P\cdot\varnothing = \varnothing\cdot P = \varnothing$.

Если M — произвольное множество и $P\subseteq M2$, тогда $P\cdot\Delta M= \Delta M\cdot P=P$.

Если операцию композиции графиков сопоставить с умножением чисел, то роль нуля будет играть пустое множество, а роль единицы диагональ (Δ).

Пусть $\langle x, z\rangle$- произвольная пара из $A\cdot B$. Тогда для нее справедливо высказывание:

$$\langle x, z\rangle \in A \cdot B \Rightarrow (\exists y \in (Y\cap W))(\langle x, y\rangle\in A\&\langle y, z\rangle\in B).$$

Если некоторая пара $\langle x, z\rangle$ не принадлежит $A\cdot B$, то истинно высказывание:

$$\langle x, z\rangle\notin A \cdot B \Rightarrow(\exists y \in (Y\cap W))(\langle x, y\rangle\notin A\&\langle y, z\rangle\notin B).$$

В операции композиции элемент y называется компонирующим элементом для пар $\langle x, y\rangle\in A$ и $\langle y, z\rangle \in B$. Если множество компонирующих элементов пусто, то и результат композиции является пустым множеством:

$$A \cdot B = \varnothing \Rightarrow пр2A\cap пр1B = \varnothing \Rightarrow A\cdot\varnothing = \varnothing\cdot A = \varnothing.$$

Свойства операции композиции:

- $A \cdot B \neq B \cdot A$ – некоммутативность;
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ – ассоциативность;
- $A \cdot (B\cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$ – дистрибутивность по объединению;
- $A \cdot (B\cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$ – дистрибутивность по пересечению;
- $(A \cdot B)-1 = B-1 \cdot A-1$.

Некоторые тождества следуют из определения композиции, остальные тождества доказываются уже известными методами.

Задание для выполнения:

В рамках данной лабораторной работы необходимо сделать следующее:

- Чётко сформулировать задачу, в которой отразить цель выполнения работы;
- Записать уточнение постановки задачи, в которой отразить способ задания множеств, мощность множества, числовые ограничения и т.д.;

- Записать определения и понятия, которые использовались в ходе выполнения лабораторной работы;
- Составить и записать логически правильный алгоритм выполнения лабораторной работы;
- Максимально подробно перенести полученный алгоритм на любой процедурный язык программирования (C/C++, Python, Java и т.д.);
- Защитить лабораторную работу.

Материалы для ознакомления:

1. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов: учебник для вузов. 3-е изд. СПб.: Питер, 2009.
2. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера, 2009.
3. Горбатов, В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика, 1999.