С. Д. Шапорев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

- *Алгебра и исчисление высказываний*
- *Логика и исчисление предикатов*
- *Рекурсивные функции и машины Тьюринга*
- *400 задач с решениями и ответами*

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

bhv

С. Д. Шапорев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Допущено научно-методическим советом по математике вузов Северо-Запада в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям 220200 "Автоматизированные системы обработки информации и управления", 071900 "Информационные системы в технике и технологиях"

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2005

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73
Ш24

Шапорев С. Д.

Ш24 Математическая логика. Курс лекций и практических занятий. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 416 с.: ил.

ISBN 5-94157-702-8

В учебном пособии представлены разделы, традиционно изучаемые в курсе математической логики: алгебра логики и исчисление высказываний, логика и исчисление предикатов, рассмотрены вопросы содержательного и формального определения логики высказываний и логики предикатов. Дается введение в теорию алгоритмов и вычислимых функций. Содержание разделов книги взаимно связано друг с другом и снабжено большим количеством примеров и решенных задач, помогающих усвоить и закрепить излагаемый материал.

Для студентов, аспирантов и преподавателей технических вузов

УДК 681.3.06+519.6(075.8)
ББК 32.973я73

Рецензенты:
Попов М. С. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Балтийского государственного технического университета "Военмех" (БГТУ)
Дегтярев В. Г. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Петербургского государственного университета путей сообщения (ПГУПС)

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. гл. редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Наталья Довгулевич*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 27.09.05.
Формат 70×100$^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 33,54.
Тираж 3000 экз. Заказ № 4306
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-702-8

Оглавление

ЧАСТЬ I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ... 1

Глава 1. Алгебра логики (алгебра высказываний) ... 3

1.1. Введение ... 3
1.2. Операции над высказываниями ... 5
1.3. Формулы алгебры логики ... 9
1.4. Равносильные группы формул и равносильные преобразования ... 11
1.5. Практическое занятие № 1. Алгебра высказываний ... 16
1.6. Алгебра Буля ... 20
1.7. Функции алгебры логики ... 23
1.8. Разложение булевых функций по переменным ... 25
1.9. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы ... 28
1.10. Закон двойственности ... 32
1.11. Практическое занятие № 2. Функции алгебры логики. Закон двойственности ... 34
1.12. Минимизация булевых функций в классе ДНФ ... 37
Карты Карно ... 37
1.13. Проблема разрешимости ... 42
1.14. Полиномы Жегалкина ... 45
1.15. Полнота и замкнутость функций алгебры логики ... 48
1.16. Производные от булевых функций ... 53
1.17. k-значные логики ... 59
1.18. Практическое занятие № 3. Минимизация в классе дизъюнктивных нормальных форм. Замкнутые классы и полнота систем функций алгебры логики. k-значные логики ... 68
1.19. Схемы из функциональных элементов. Релейно-контактные схемы, оценка сложности схем ... 71
1.20. Решение логических задач ... 83
1.21. Практическое занятие № 4. Реализация булевых функций схемами и формулами. Решение логических задач ... 87

Глава 2. Исчисление высказываний 93

2.1. Язык, система аксиом и правила вывода исчисления высказываний 93
2.2. Некоторые дополнительные производные правила вывода 98
2.3. Теорема дедукции и другие законы исчисления высказываний 106
Теорема дедукции 106
Обобщение теоремы дедукции 108
Закон перестановки посылок 108
Закон соединения посылок 109
Закон разъединения посылок 110
2.4. Практическое занятие № 5. Исчисление высказываний: правила вывода и доказуемость формул 117
2.5. Монотонность и эквивалентность формул исчисления высказываний 120
2.6. Связь между формулами алгебры высказываний и исчисления высказываний 122
2.7. Некоторые алгоритмы проверки выводимости формул в исчислении высказываний 128
Алгоритм Квайна 129
Алгоритм метода редукций 131
Метод резолюций 131
2.8. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний 134
2.9. Практическое занятие № 6. Эквивалентность формул исчисления высказываний и теорема о выводимости. Алгоритмы Квайна, редукций и резолюций 137

Глава 3. Логика предикатов 141

3.1. Определение предикатов и логические операции над ними 141
3.2. Кванторные операции 146
3.3. Формулы логики предикатов 149
3.4. Практическое занятие № 7. Логические и кванторные операции над предикатами 153
3.5. Равносильные формулы логики предикатов 156
3.6. Предваренная нормальная форма. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов 159
Случай конечных областей 163
Проблема разрешимости для формул, содержащих в предваренной нормальной форме кванторы одного типа 164
3.7. Практическое занятие № 8. Выполнимость формул логики предикатов 166
3.8. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений 168

Запись математических определений 168
Формулировка математических теорем 170
Построение противоположных утверждений и доказательство методом от противного 171
Формулировка обратных и противоположных теорем 173
Формулировка необходимых и достаточных условий 175
3.9. Практическое занятие № 9. Применение языка логики предикатов в математике 176

Глава 4. Исчисление предикатов 181

4.1. Синтаксис языка исчисления предикатов 181
4.2. Аксиомы и основные правила вывода 183
4.3. Производные правила вывода в исчислении предикатов 187
4.4. Некоторые теоремы исчисления предикатов 188
4.5. Эквивалентные формулы 193
4.6. Дедуктивная эквивалентность 196
4.7. Получение $\forall$ -формул. Скулемовские функции 197
4.8. Унификация формул исчисления предикатов 200
4.9. Метод резолюций в исчислении предикатов 204
4.10. Практическое занятие № 10. Унификация формул. Метод резолюций в исчислении предикатов 210
4.11. Некоторые проблемы аксиоматического исчисления предикатов 212
Разрешимость 212
Непротиворечивость и независимость 212
Полнота в узком смысле 213
Полнота в широком смысле 214

Глава 5. Теория алгоритмов 215

5.1. Характерные черты алгоритма 215
5.2. Вычислимые, частично рекурсивные и общерекурсивные функции 218
Примитивная рекурсия 219
Операция минимизации 229
5.3. Примитивная рекурсивность некоторых арифметических функций 232
5.4. Практическое занятие № 11. Рекурсивность функций 236
5.5. Словарные множества и функции 239
5.6. Машины Тьюринга 244
5.7. Неразрешимые алгоритмические проблемы 257
5.8. Практическое занятие № 12. Словарные функции. Построение программ для машин Тьюринга 259

ЧАСТЬ II. ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ 261

Глава 6. Алгебра высказываний 263

6.1. Ответы и решения задач 263
практического занятия № 1 263
6.2. Ответы и решения практического занятия №2 273
6.3. Ответы и решения практического занятия №3 284
6.4. Ответы и решения практического занятия №4 307

Глава 7. Исчисление высказываний 319

7.1. Ответы и решения практического занятия № 5 319
7.2. Ответы и решения практического занятия №6 329

Глава 8. Логика предикатов 345

8.1. Ответы и решения практического занятия № 7 345
8.2. Ответы и решения практического занятия № 8 351
8.3. Ответы и решения практического занятия № 9 357

Глава 9. Исчисление предикатов 367

9.1. Ответы и решения практического занятия № 10 367

Глава 10. Теория алгоритмов 383

10.1. Ответы и решения практического занятия № 11 383
10.2. Ответы и решения практического занятия № 12 395

Список литературы 405

Предметный указатель 406

Часть I

Математическая логика

Глава 1. Алгебра логики (алгебра высказываний)

Глава 2. Исчисление высказываний

Глава 3. Логика предикатов

Глава 4. Исчисление предикатов

Глава 5. Теория алгоритмов

Глава 1

Алгебра логики (алгебра высказываний)

1.1. Введение

Формальная логика существует уже более двух тысячелетий. Зачатки логики явно прослеживаются в работах Аристотеля[*]. Идеи о построении логики на математической основе, т. е. по сути математической логики, были высказаны Лейбницем[**] в начале 18-го века.

Впервые идеи Лейбница реализовал Д. Буль[***] в 40-х гг. девятнадцатого столетия. Он создал алгебру, в которой буквами обозначены высказывания, и это привело к появлению алгебры высказываний. Применение математики к логике позволило представить логические теории в новой удобной форме и применить вычислительный аппарат к решению задач, малодоступных человеческому мышлению из-за особенностей человеческой психики.

Современная математическая логика определяется как раздел математики, посвященный изучению математических доказательств и вопросов основания математики. Одна из главных причин широкого распространения математической логики — применение аксиоматического метода в построении различных математических теорий. В нем сначала выбираются некоторые понятия, которые не определяются, а лишь поясняются. Затем без доказательства принимается некоторый набор аксиом, а уже потом из этих аксиом логически строго выводятся и доказываются все оставшиеся положения теории. Самым ранним примером аксиоматической теории являются "Начала" Евклида[****]. Однако система аксиом, положенная Евклидом в основу теории, не является единственной и содержит небесспорный пятый постулат (аксиому о параллель-

---

[*] Аристотель (384–322 до н.э.) — древнегреческий математик.

[**] Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716) — немецкий математик.

[***] Джордж Буль (1815–1864) — английский математик и логик.

[****] Евклид Александрийский (около 325 — около 265 до н. э.) — древний математик.

ных прямых). Это не означает, что построенная затем теория (классическая геометрия) была неверной, но указывает на возможность построения иных геометрий (геометрии Лобачевского*, например).

Отличительная черта математической логики — использование доказательств, а не наблюдений. Однако ясно, что невозможно доказать все математические законы, т. к. самые первые из них не могут быть доказаны: нет более ранних законов, из которых они могут быть выведены. Поэтому необходимо выбрать некоторые начальные законы, называемые *аксиомами*, которые принимаются без доказательств, остальные законы — теоремы — могут быть доказаны исходя из аксиом.

К системе аксиом предъявляется одно непременное требование — она должна быть непротиворечивой. Это значит, что из данной системы аксиом (непротиворечивой) нельзя логическим путем вывести два противоречащих друг другу утверждения. Основным методом доказательства непротиворечивости является метод моделирования, или метод интерпретаций, который строится для математических теорий на базе теории множеств.

С математическими понятиями происходит процесс сведения сложных понятий к простым. Многие из них можно определить в терминах других понятий. Но опять же самые первые понятия не могут быть определены, т. к. нет более ранних понятий, в термннах которых их можно было бы определить. Поэтому нужно выбрать некоторые понятия, называемые *основными*, которые будут лишь поясняться, оставаясь формально неопределенными. Остальные понятия, называемые *производными*, определяются в терминах основных.

Совокупность основных и производных понятий, аксиом и теорем называется *аксиоматической системой*. Все составляющие аксиоматической системы могут рассматриваться с двух точек зрения: в виде объекта, имеющего собственную внутреннюю структуру, или в виде предложения, выражающего определенный факт. Изучение внутренней структуры аксиом и теорем называется *синтаксическим изучением аксиоматических систем*, изучение их смысла — *семантическим изучением*.

Современная теория множеств — база математической логики — не содержит "парадоксов" (типа парадокса Рассела о "нормальном" множестве), однако средства этой аксиоматической теории не позволяют доказать ее непротиворечивость.

---

*Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) — русский математик.

1.2. Операции над высказываниями

Учение о высказываниях — алгебра высказываний, или алгебра логики, — является простейшей логической теорией. Она рассматривает конечные конфигурации символов и взаимоотношения между ними. Знакомство с законами алгебры высказываний облегчает изучение более сложных логических исчислений.

Высказывание — это всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, при этом непременно истинное или ложное. Логическими значениями высказываний являются "истина" и "ложь", обозначаемые 1 и 0. Высказывание — это те первичные понятия теории, которые не определяются строго, а лишь поясняются.

Высказывания, представляющие собой одно утверждение, называются *простыми* или *элементарными*; высказывания, получающиеся из элементарных с помощью грамматических связок "не", "и", "или", "если..., то...", называются *сложными*. Эти названия не носят абсолютного характера, высказывания, которые в одной ситуации можно считать простыми, в другой ситуации будут сложными. В алгебре высказываний исследуется вопрос об истинности сложного высказывания в зависимости от истинности входящих в него простых высказываний. При этом необходимо иметь в виду, что высказывание может быть истинно в определенной ситуации. Эта ситуация бывает определена или не определена в самом высказывании. Существуют высказывания истинные (или ложные) во всех возможных ситуациях. Такие высказывания называются *абсолютно истинными* (соответственно *абсолютно ложными*). Абсолютно истинные и абсолютно ложные высказывания называются *логическими константами*. В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, житейское содержание игнорируется. Каждое высказывание может быть либо истинным, либо ложным, ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Элементарные высказывания обозначаются строчными буквами латинского алфавита: a, b, c. Из высказываний с помощью логических связок образуются новые высказывания. Рассмотрим теперь несколько логических связок.

Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если x истинно. Обозначается $\bar{x}$, читается "не x" или "неверно, что x". Все логические значения высказывания $\bar{x}$ можно описать с помощью табл. 1.2.1. Если x — высказывание, то $\bar{x}$ — противоположное высказывание. Тогда можно образовать $\bar{\bar{x}}$, которое называется *двойным отрицанием высказывания*. Логические значения $\bar{\bar{\delta}}$, очевидно, совпадают со значениями x. Эта операция одноместная в том смысле, что из одного данного простого высказывания x строится новое высказывание $\bar{x}$.

Конъюнкцией (*логическом умножением*) двух высказываний x и y называется новое высказывание z, которое истинно только тогда, когда оба высказывания x и y истинны, и ложно, когда хотя бы одно из x и y ложно. Обозначается $x \& y$ или $x \wedge y$, читается "x и y". Таблица истинности коиъюнкции дана в табл. 1.2.2.

Таблица 1.2.1

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

Таблица 1.2.2

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Из определения операции конъюнкции видно, что союз "и" в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Однако в алгебре логики этой связкой можно связывать любые, сколь угодно далекие по смыслу высказывания.

Конъюикцию часто называют *логическим умножением*. В современной математике слово "умножение" часто обозначает различные математические операции, обладающие свойствами, более или менее похожими на свойства арифметического умножения. При построении таблицы истинности использовался союз "и". Однако результат был бы тот же самый, если бы были взяты союзы "а", "но", "однако", "хотя" и т. п. Таким образом, хотя соответствующие этим союзам логические связки имеют различные смысловые оттенки, с точки зрения алгебры высказываний они неразличимы.

Дизъюнкцией (*логическим сложением*) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x и y истинно, и ложным, если они оба ложны. Обозначается $x \vee y$, читается "x или y". Логические значения дизъюнкции описываются в табл. 1.2.3.

Таблица 1.2.3

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Таблица 1.2.4

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

В повседневной речи союз "или" употребляется в различном смысле: исключающем и неисключающем. В алгебре же логики связка "или" употребляется всегда в неисключающем смысле (объединяющем смысле). Аналогично в латинском языке имеется союз "vel" для включительной дизъюнкции и "aut" для разделительной. Символ $\vee$ происходит от первой буквы союза "vel".

Импликацией (*логическим следованием*) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое считается ложным, когда x истинно, а y ложно, и истинным во всех остальных случаях. Обозначается $x \to y$, читается "если x, то y" или "из x следует y". Высказывание x называется *условием*, *посылкой* или *антецедентом*, высказывание y — *следствием*, *заключением* или *консеквентом*. Таблица истинности этой операции приведена в табл. 1.2.4. Из таблицы истинности видно, что если условие x истинно и истинна импликация $x \to y$, то верно и заключение y. Это классическое правило вывода, которое постоянно используется в математике при переходе от одних высказываний к другим с помощью доказываемых теорем, которые, как правило, имеют форму импликаций. Распространенная ошибка в математических рассуждениях состоит в том, что к высказыванию x, истинность которого не установлена, применяется правильная теорема $x \to y$ и из истинности предложения y делается вывод об истинности x.

В обыденной речи высказывание типа "если x, то y" носит объясняющий характер. Оно как бы разъясняет, почему имеет место событие y — потому, что имело место событие x. Объясняющий характер импликации тесно связан с причинно-следственным отношением, при котором x выступает в роли причины, а y — следствия.

Употребление союзов "если..., то..." в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где по обыкновению считают, что если x ложно, то y вообще не имеет смысла. Кроме того, в обыденной речи подразумевается, что из предложения x всегда вытекает y. В математической логике последнего не требуется, т. к. смысл высказываний игнорируется, кроме их свойств быть истинными или ложиыми. В случае импликации несоответствие между обычным пониманием истиниости сложного высказывания и идеализированной точкой зрения алгебры высказываний еще заметнее, чем для других логических операций. Здесь истинность импликации в некоторой ситуации означает лишь, что если в этой ситуации истинна посылка, то истинно и заключение.

Эквиваленцией (*эквивалентностью, логической эквивалентностью*) двух высказываний x и y называется новое высказывание, которое истинно, когда оба высказывания x и y либо одновременно истинны, либо одновременно ложиы, и ложно во всех остальных случаях. Обозначается $x \leftrightarrow y$, читается "для того чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y" или "x тогда и только тогда, когда y". Эквивалентность играет значительную роль в математических доказательствах. Известно, что большое число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий. Это теоремы существования. Например, "для того, чтобы два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны". Логические значения операции эквиваленции описываются в табл. 1.2.5.

Символы $\overline{}, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$ называются *пропозициональными связками* или *связками исчисления высказываний*. Вместо употребляемого нами зиака $\leftrightarrow$ часто пишут $\sim$ или $\equiv$, вместо $\to$ пишут $\supset$, вместо & или $\wedge$ часто употребляют точку, причем точку иногда опускают, вместо $\overline{}$ употребляют знак $\neg$ перед высказыванием.

Таблица 1.2.5

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Таблица 1.2.6

x	y	$x \mid y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Логическим связкам приписываются ранги в следующем порядке убывания старшинства: $\overline{}, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Таким образом, связка более высокого раига имеет бóльшую область действия.

Не следует думать, что этим набором исчерпываются все логические связки. Например, существует такая операция, как штрих Шеффера*. Она обозначается символом $x \mid y$ и определяется следующей таблицей истинности (табл. 1.2.6).

Как мы покажем в дальнейшем, всякую формулу алгебры логики путем эквивалентных преобразований можно заменить формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание. Дальнейшее исключение логических операций невозможно. Операция же штрих Шеффера характерна тем, что с ее помощью может быть выражена любая из пяти операций. Например, $\bar{x} = x \mid x$. Таблица истинности для этой формулы приведена в табл. 1.2.7.

Для операции конъюнкции, например, выражение через штрих Шеффера имеет вид $x \wedge y = (x \mid y) \mid (x \mid y)$. Его таблица истинности дана в табл. 1.2.8.

Таблица 1.2.7

x	x	$x \mid x$	$\bar{x}$
1	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	1

Таблица 1.2.8

x	y	$(x \mid y)$	$(x \mid y)$	$(x \mid y) \mid (x \mid y)$	$x \wedge y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0

1.3. Формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями можно строить различные новые, более сложные высказывания. Обычно при этом порядок операций указывается скобками. Определим понятие формулы логики высказы-

* Генри Мориц Шеффер (1882–1964) — английский математик и логик.

ваний. Первой частью любой формальной системы является ее язык. Чтобы определить язык, нужно прежде всего определить алфавит и его символы.

Алфавитом будем называть любое непустое множество. Элементы этого множества называются *символами* данного алфавита. Любая конечная последовательность символов алфавита называется *словом*, или *выражением*, данного языка. Алфавит логики высказываний содержит такие символы: высказывания — буквы латинского алфавита с индексом или без него, логические связки $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \bar{\ }$, разделители (,).

Слово в алфавите логики высказываний называется *формулой*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Любое высказывание (высказывательное переменное) — формула.
2. Если A и B формулы, то $\bar{A}, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ — тоже формулы.

Подформулой формулы A называется любое подслово A, само являющееся формулой. Таким образом, из приведенного формального определения формулы как определенной конструкции языка алгебры логики можно определить более простое понятие формулы.

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний с помощью логических связок, называется *формулой алгебры логики*.

Формулы алгебры логики обозначаются большими буквами латинского алфавита $A, B, C, \ldots$ При этом скобки можно опускать, придерживаясь следующих правил: конъюнкция выполняется прежде всего, дизъюнкция выполняется второй, импликация и эквиваленция равноправны и выполняются последними. Каждая формула алгебры логики принимает свое логическое значение, которое определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, составим таблицу истинности для формулы $(x \rightarrow y) \rightarrow (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \rightarrow \bar{y})$. Получим табл. 1.3.1.

Таблица 1.3.1

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \wedge \bar{y}$	$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x}$	$x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \rightarrow \bar{y}$	$x \vee y$	Итог
1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1

Если формула состоит из n элементов, то ее таблица истинности состоит из 2^n строк.

Приписывание значений истинности или ложности высказываниям, входящим в формулу, называется *интерпретацией* этих высказываний. Под интерпретацией формулы понимается приписывание значений истинности высказываниям, входящим в эту формулу.

1.4. Равносильные группы формул и равносильные преобразования

Две формулы алгебры логики A и B называются *равносильными*, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний. Равносильность обозначается знаком $\equiv$. Очевидно, например, $\overline{\overline{x}} \equiv x$, $x \vee x \equiv x$ и т. д.

Между понятием равносильности и знаком эквивалентности $\leftrightarrow$ существует следующая связь: если формулы A и B равносильны, то формула $A \leftrightarrow B$ принимает значение 1 при всех значениях переменных, и обратно: если формула $A \leftrightarrow B$ принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее высказываний, то формулы A и B равносильны. т. е. $A \equiv B$. При этом следует помнить, что знак $\leftrightarrow$ является символом формального языка, с помощью которого строятся формулы, а символ $\equiv$ заменяет слово "равносильно".

Для любых формул A, B, C справедливы следующие равносильности.

1. Основные равносильности:

   1.1. $A \wedge A \equiv A$ — закон идемпотентности конъюнкции.

   1.2. $A \vee A \equiv A$ — закон идемпотентности дизъюнкции.

   1.3. $A \wedge 1 \equiv A$, 1 — истина.

   1.4. $A \vee 1 \equiv 1$.

   1.5. $A \wedge 0 \equiv 0$, 0 — ложь.

   1.6. $A \vee 0 \equiv A$.

   1.7. $A \wedge \overline{A} \equiv 0$ — закон противоречия. (1.4.1)

   1.8. $A \vee \overline{A} \equiv 1$ — закон исключенного третьего.

   1.9. $\overline{\overline{A}} \equiv A$ — закон снятия двойного отрицания.

1.10. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$ — первый закон поглощения.

1.11. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$ — второй закон поглощения.

1.12. $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ — первая формула расщепления.

1.13. $A \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$ — вторая формула расщепления.

Все эти соотношения легко проверяются по таблицам истинности.

2. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие.

2.1. $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) \equiv (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A)$ — основная формула доказательств теорем существования.

2.2. $A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B \equiv \overline{(A \wedge \overline{B})}$.

2.3. $A \vee B \equiv \overline{A} \rightarrow B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$.

2.4. $A \wedge B \equiv \overline{(A \rightarrow \overline{B})} \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$. (1.4.2)

2.5. $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ — первый закон де Моргана*.

2.6. $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$ — второй закон де Моргана.

2.7. $A \wedge B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.

2.8. $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$.

Именно из равносильностей этой группы формул следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицаиие или дизъюнкцию и отрицание.

3. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики.

3.1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ — коммутативный закон конъюнкции.

3.2. $A \vee B \equiv B \vee A$ — коммутативный закон дизъюнкции.

3.3. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ — ассоциативность конъюнкции. (1.4.3)

3.4. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ — ассоциативность дизъюнкции.

3.5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.

3.6. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

* Огастес Морган (де Морган)(1806–1875) — шотландский математик и логик.

Любая из равносильностей легко может быть доказана с помощью таблиц истинности. Часто равносильность произвольной формулы логики высказываний экономнее доказывать без составления таблицы, с помощью логического рассуждения и упрощения формулы с использованием приведенных равносильностей. При этом обычно операции эквивалентности и импликации заменяют операциями конъюнкции и дизъюнкции, а отрицание относят к элементарным высказываниям.

Можно еще упростить запись формул, опуская некоторые скобки и используя старшинство логических связок. Кроме того, знак отрицания, стоящий над формулой, делает излишними скобки, в которые она заключена.

Отношение равносильности есть отношение эквивалентности. Оно рефлексивно, т. к. для любой формулы A: $A \equiv A$; симметрично, т. к. для любых формул A и B: если $A \equiv B$, то $B \equiv A$; транзитивно, т. к. для любых формул A, B, C: если $A \equiv B$ и $B \equiv C$, то $A \equiv C$.

Рассмотрим несколько примеров.

1.
$$(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z) \to (\bar{z} \vee x) \equiv$$
$$\equiv \overline{(\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee z)} \vee (\bar{z} \vee x) \equiv \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee \overline{(\bar{y} \vee z)} \vee (\bar{z} \vee x) \equiv$$
$$\equiv \left(\bar{\bar{x}} \wedge \bar{y}\right) \vee \left(\bar{\bar{y}} \wedge \bar{z}\right) \vee (\bar{z} \vee x) \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{z} \vee x) \equiv$$
$$\equiv \underbrace{x \vee (x \wedge \bar{y})}_{x} \vee \underbrace{\bar{z} \vee (y \wedge \bar{z})}_{\bar{z}} \equiv x \vee \bar{z}.$$

2.
$$\left(x \wedge \overline{x \wedge \bar{x} \to y \wedge \bar{\bar{y}}} \to z\right) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z) \equiv$$
$$\equiv \left(x \wedge \overline{0 \to 0} \to z\right) \vee x \vee (y \wedge z) \vee (y \wedge z) \equiv \left(x \wedge \overline{0 \to 0} \to z\right) \vee x \vee (y \wedge z) \equiv$$
$$\equiv (x \wedge 0 \to z) \vee x \vee (y \wedge z) \equiv \bar{0} \vee z \vee x \vee (y \wedge z) \equiv$$
$$\equiv 1 \vee x \vee (y \wedge z) \equiv 1 \vee (y \wedge z) \equiv 1.$$

3. Доказать равносильность $(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x$.

$$(x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv x \wedge x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \vee y \wedge \bar{y} \equiv$$
$$\equiv x \vee y \wedge x \vee x \wedge \bar{y} \equiv x \wedge (1 \vee y \vee \bar{y}) \equiv x(1 \vee 1) \equiv x.$$

Приведем теперь несколько правил, с помощью которых можно переходить от одних равносильностей к другим.

Теорема 1.1. **Пусть $A \equiv B$ и C — произвольная формула. Тогда** $\overline{A} \equiv \overline{B}$, $A \wedge C \equiv B \wedge C$, $C \wedge A \equiv C \wedge B$, $A \vee C \equiv B \vee C$, $C \vee A \equiv C \vee B$, $A \to C \equiv B \to C$, $C \to A \equiv C \to B$, $A \leftrightarrow C \equiv B \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow A \equiv C \leftrightarrow B$.

Докажем, например, формулу $A \vee C \equiv B \vee C$. Так как $A \equiv B$, то при одинаковом наборе входящих в них простых высказываний A и B принимают одинаковые логические значения. Пусть, например, это будет 1. Пусть при том же наборе значение C равно 0. Тогда обе части рассматриваемой равносильности принимают одно и то же значение $1 \vee 0 \equiv 1 \vee 0$.

Теорема 1.2. **Пусть $A \equiv B$ и C — формула, в которой выделено одно вхождение переменной x_i. Пусть $C(A)$ получается из C заменой этого вхождения x_i на A, а $C(B)$ — из C заменой того же вхождения x_i на B. Тогда $C(A) \equiv C(B)$.**

Оставим данную теорему без доказательства, отметим только, что любой символ алфавита может несколько раз появиться в данной формуле. Каждое такое появление называется *вхождением* этого символа в формулу.

Теорема 1.3. **Пусть $C(A)$ — формула, содержащая A в качестве своей подформулы. Пусть $C(B)$ получается из $C(A)$ заменой A в этом вхождении на B. Тогда, если $A \equiv B$, то $C(A) \equiv C(B)$.**

Формула A называется *тавтологией* (тождественно истинной), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных. Формула A называется *тождественно ложной* или *противоречивой*, если она равна 0 при всех значениях входящих в нее переменных.

Формула A называется *выполнимой*, если при каком-то наборе входящих в нее переменных она принимает значение 1.

Формула A называется *опровержимой*, если при каком-то наборе входящих в нее переменных она принимает значение 0.

С точки зрения логики тавтологии это логические законы, т. к. они принимают истинные значения при любом наборе переменных. В практических вычислениях часто используют следующие тавтологии (A, B, C — произвольные формулы).

1. $A \vee \overline{A}$ — tertium nondatur — закон исключенного третьего.
2. $A \to A$.
3. $A \to (B \to A)$.
4. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ — цепное рассуждение.

5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$. (1.4.4)

6. $(A \wedge B) \to A$, $(A \wedge B) \to B$.

7. $A \to (B \to A \wedge B)$.

8. $A \to (A \vee B)$, $B \to (A \vee B)$.

9. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$.

10. $((A \to B) \to A) \to A$ — закон Пирса*.

Эти формулы тоже можно легко проверить по таблицам при произвольных значениях A, B, C. При доказательстве утверждений различных математических теорий обычно используют рассуждения, которые на языке логики можно выразить формулами. При этом рассуждение называется *правильным*, если из конъюнкции посылок следует заключение, т. е. всякий раз, когда все посылки истинны, заключение тоже истинно. Правило вывода заключения в этом случае можно записать в виде $\frac{P_1, P_2, \ldots, P_n}{P}$, где $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — посылки, причем запись $P_1, P_2, \ldots, P_n$ понимается как $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$, P — заключение.

Распространенные схемы правильных рассуждений: $\frac{A \to B, A}{B}$, $\frac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}$.

Легко проверить, что формулы $((A \to B) \wedge A) \to B$ и $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$ являются тождественно истинными. Например, логические значения последней при всех наборах аргументов приведены в табл. 1.4.1.

Таблица 1.4.1

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \to B$	$(A \to B) \wedge \overline{B}$	$((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

* Чарлз Пирс (1839–1914) — американский математик и логик.

Один из способов доказательства математических предложений — метод доказательства от противного. Предположим, что некоторое утверждение в форме импликации $A \to B$ ложно. Тогда необходимо прийти к противоречию, т. е. доказать, что другое утверждение C одновременно выполняется и не выполняется.

Доказательство выполняется по следующей схеме:

$$A \to B \equiv \overline{(A \to B)} \to \left(C \wedge \overline{C}\right) \equiv \left(A \wedge \overline{B}\right) \to \left(C \wedge \overline{C}\right). \qquad (1.4.5)$$

Приведем в заключение еще две более простые схемы доказательства от противного:

$$\begin{cases} A \to B \equiv \left(A \wedge \overline{B} \to \overline{A}\right), \\ A \to B \equiv \left(A \wedge \overline{B} \to B\right). \end{cases} \qquad (1.4.6)$$

1.5. Практическое занятие № 1. Алгебра высказываний

1.5.1. Среди следующих предложений выделить те, которые являются высказываниями, и установить, если это возможно, истинны они или ложны.

1) Для произвольных множеств A и B верно включение $A \subset A \cup B$.
2) Сумма углов в треугольнике равна 180°.
3) $\sqrt{2} \in N$.
4) Солнечная система насчитывает девять больших планет.
5) На улице светит солнце.
6) Летайте самолетами Аэрофлота!
7) Всякое подмножество конечного множества конечно.

1.5.2. Даны два высказывания:

1) $p = \{$ число 3 является делителем числа 174 $\}$, $q = \{$ идет дождь $\}$.

   В чем заключаются высказывания

   $\overline{p},\ p \vee q,\ p \wedge q,\ p \to q,\ \overline{p} \to q,\ p \leftrightarrow \overline{q}$?

2) $p = \{$ конъюнкция коммутативна $\}$, $q = \{$ если число простое, то оно нечетное $\}$.

В чем заключаются высказывания $\overline{q}$, $\overline{q \to p}$, $(p \wedge \overline{q}) \to p$, $(q \vee p) \to \overline{q}$? Какие из этих высказываний истинны, а какие ложны?

1.5.3. Какие из следующих утверждений являются высказываниями и какие из высказываний истинны и какие ложны?

1) Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену.

2) Сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену.

3) Существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену.

1.5.4. В каких случаях приведенные ниже данные противоречивы?

1) $a = 1$, $a \wedge b = 1$;

2) $a = 0$, $a \wedge b = 1$;

3) $a = 1$, $a \vee b = 0$;

4) $a = 0$, $a \vee b = 1$.

1.5.5. Определить, является ли данная последовательность формулой:

1) $(A_0 \wedge A_1)A_2\overline{A_3}$;

2) $((A_3 \to A_0) \wedge \overline{A_0})$;

3) $(\overline{A_0} \to A_1) \to \overline{A_1 \vee A_3}$;

4) $A_1 \wedge A_2 \to A_3 A_1$;

5) $(A_1 \to A_2) \vee (A_1 \to A_2 \wedge A_1)$.

1.5.6. Выписать все подформулы следующих формул:

1) $((A_0 \to A_1) \wedge (A_1 \to A_2)) \to \overline{A_0} \vee A_2$;

2) $(\overline{A_1} \to \overline{A_2}) \leftrightarrow (A_2 \leftrightarrow A_3)$;

3) $A_1 \wedge (A_2 \vee A_3 \wedge (B \vee C))$.

1.5.7. Проверить, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными:

1) $\overline{p \to \overline{\overline{p}}}$;

2) $p \to p \wedge \left(\overline{p} \to p \wedge p\right)$;

3) $(p \vee p) \to p$.

1.5.8. Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$, $\overline{x \to y} \to y$, $(x \to y) \to z$?

1.5.9. Составить таблицы истинности для формул:

1) $\left(A_1 \to \overline{A_2}\right) \wedge \left(\overline{A_1} \vee A_2\right)$;

2) $(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))$;

3) $(P \leftrightarrow Q) \to (P \wedge Q)$;

4) $(P \wedge (Q \to P)) \vee \overline{P}$;

5) $\left(P \wedge \left(Q \vee \overline{P}\right)\right) \wedge \left(\overline{Q} \to P\right) \vee Q$;

6) $\overline{P \to \overline{Q \wedge P}} \to P \vee R$;

7) $\left(P \wedge \left(Q \vee \overline{P}\right)\right) \wedge \left(\left(\overline{Q} \to P\right) \vee Q\right)$;

8) $(P \to Q) \vee (P \to (Q \wedge P))$.

1.5.10. Доказать выполнимость формул:

1) $\overline{P \to \overline{\overline{P}}}$;

2) $(Q \to P \wedge R) \wedge \overline{P \vee R \to Q}$;

3) $(P \to Q) \to (Q \to P)$.

1.5.11. Какие из высказываний P, Q, R должны быть истинны, а какие ложны, чтобы формула $\left(\overline{\overline{P} \vee P \wedge Q}\right) \to R$ была истинной?

1.5.12. Доказать тождественную истинность формул:

1) $P \to (Q \to P \wedge Q)$;

2) $(P \to Q) \to \left(\left(P \to \overline{Q}\right) \to \overline{P}\right)$;

3) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \vee Q \to R))$;

4) $(Q \to R) \to (P \vee Q \to P \vee R)$;

5) $\left(\overline{Q} \to \overline{P}\right) \to \left(\left(\overline{Q} \to P\right) \to Q\right)$;

6) $\overline{P} \to (P \to Q)$;

7) $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$;

8) $P \to \overline{\overline{P}}$.

1.5.13. При каких значениях переменных P, Q, R следующие формулы ложны?

1) $((P \to Q \wedge R) \to (\overline{Q} \to \overline{P})) \to \overline{Q}$;

2) $((P \vee Q) \vee R) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$;

3) $(P \vee Q) \to ((\overline{P} \wedge Q) \vee (P \wedge Q))$.

1.5.14. Доказать, что:

1) Если формулы $P \vee Q$ и $\overline{P} \vee R$ тождественно истинны, то формула $Q \vee R$ тождественно истинна.

2) Если формулы $\overline{P} \vee Q$ и $\overline{R} \vee \overline{Q}$ тождественно истинны, то формула $P \to \overline{R}$ тождественно истинна.

3) Если формулы $P \vee Q$, $P \to R$, $Q \to W$ тождественно истинны, то формула $R \vee W$ тождественно истинна.

1.5.15. Сколько имеется различных (т. е. отличающихся истинностными таблицами) двуместных логических операций?

1.5.16. Выразить все основные операции через конъюнкцию и отрицание, через дизъюнкцию и отрицание.

1.5.17. Пусть имеется некоторая логическая операция $\oplus$ над простыми высказываниями $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Операция $\oplus$ с точностью до равносильности характеризуется истинностной таблицей. Например, возьмем (табл. 1.5.1) некоторую конкретную операцию над тремя простыми высказываниями:

Таблица 1.5.1

A_1	A_2	A_3	$\oplus$	A_1	A_2	A_3	$\oplus$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1

Тогда операцию, имеющую данную истинностную таблицу, можно получить, перечисляя ситуации, в которых высказывание $\oplus$ истинно, т. е. $(A_1 \wedge A_2 \wedge \overline{A_3}) \vee (A_1 \wedge \overline{A_3} \wedge A_3) \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge A_3) \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \overline{A_3})$. Обобщить приведенную конструкцию на случай произвольных логических операций $\oplus$.

1.5.18. Доказать следующие равносильности:

1) $\overline{A \to B} \equiv A \wedge \overline{B}$;

2) $A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

3) $A \wedge A \equiv A$;

4) $A \vee (B \wedge A) \equiv A$;

5) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

6) $(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})) \equiv A \vee B$;

7) $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$.

1.5.19. Доказать, что для любой формулы существует эквивалентная ей формула с тесными отрицаниями, т. е. формула, в которой нет символа $\to$ и отрицаиия относятся только к пропозициональным переменным.

1.6. Алгебра Буля

Равносильности (1.4.3) говорят о том, что алгебра логики обладает коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным законами точно так же, как алгебра чисел. Это значит, что над формулами алгебры логики можно производить те же преобразования, что и в алгебре чисел (раскрывать скобки, выносить общие множители и т. д.).

Однако здесь есть и дополнительные возможности, основанные, например, на формулах (1.4.1) и (1.4.2), типа $x \vee 1 = 1$, $\left.\begin{matrix} x \wedge (y \vee x) \equiv x \\ x \vee (y \wedge x) \equiv x \end{matrix}\right\}$ — законы поглощения, законы де Моргана и др. Эти новые возможности позволяют сделать несколько обобщений в виде интерпретаций формул алгебры логики.

Представим непустое множество M элементов любой природы $M = \{\breve{o}, \acute{o}, z, ..\}$, на котором определены две двуместные операции: $x, y \Rightarrow x \cdot y$ — умножение и $x, y \Rightarrow x + y$ — сложение и одна одноместная операция $x \Rightarrow \bar{x}$ — отрицания и выделены два элемента 0 и $1 \in M$, причем для этих операций и элементов выполняются следующие аксиомы.

1. $$\left.\begin{aligned} \tilde{o} + \acute{o} &= \acute{o} + \tilde{o} \\ \tilde{o} \cdot \acute{o} &= \acute{o} \cdot \tilde{o} \end{aligned}\right\}$$ — коммутативный закон.

2. $$\left.\begin{aligned} \tilde{o} + (\acute{o} + z) &= (\tilde{o} + \acute{o}) + z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}\right\}$$ — ассоциативный закон.

3. $$\left.\begin{aligned} (\tilde{o} + \acute{o}) \cdot z &= (\tilde{o} \cdot z) + (\acute{o} \cdot z) \\ (\tilde{o} \cdot \acute{o}) + z &= (\tilde{o} + z) \cdot (\acute{o} + z) \end{aligned}\right\}$$ — дистрибутивный закон.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{o} + \tilde{o} &= \tilde{o} \\ \tilde{o} \cdot \tilde{o} &= \tilde{o} \end{aligned}\right\}$$ — законы идемпотентности. (1.6.1)

$$\left.\begin{aligned} \overline{\tilde{o} + \acute{o}} &= \overline{\tilde{o}} \cdot \overline{\acute{o}} \\ \overline{\tilde{o} \cdot \acute{o}} &= \overline{\tilde{o}} + \overline{\acute{o}} \end{aligned}\right\}$$ — законы де Моргана.

4. $\bar{\bar{x}} = x$ — закон двойного отрицания.

$$\left.\begin{aligned} \tilde{o} + (\acute{o} \cdot \tilde{o}) &= \tilde{o} \\ \tilde{o} \cdot (\acute{o} + \tilde{o}) &= \tilde{o} \end{aligned}\right\}$$ — законы поглощения.

Тогда такое множество M называется *булевой алгеброй*. Если под основными операциями "+", "·", " $\bar{\ }$ ", "=" понимать дизъюнкцию, конъюнкцию, отрицание и равносильность, то из формул (1.4.1)–(1.4.3) видно, что все аксиомы булевой алгебры выполняются. В таких случаях говорят, что имеется *интерпретация* (модель) данной системы аксиом. Итак, алгебра логики — интерпретация алгебры Буля.

Можно было бы при определении булевой алгебры исходить из одной двуместной операции, например умножения, доопределив другую при помощи законов де Моргана.

Булевы алгебры являются примерами аксиоматически заданного алгебраического объекта. Эти объекты представляют собой множества, в которых выделены некоторые элементы (например 0 и 1) и определены некоторые операции. Эти элементы и операции должны удовлетворять конечному набору аксиом.

Существуют и иные нелогические множества, также образующие алгебру Буля. Например, известная интерпретация — теория множеств, а "+", "·", " $\bar{\ }$ " — объединение, пересечение и дополнение в теории множеств.

Укажем еще одну систему, удовлетворяющую (1.6.1). Пусть M — ограниченное множество действительных чисел x таких, что $0 \leq x \leq A,\ A \neq 0$. Положим $\bar{x} = A - x,\ x + y = \max(x, y),\ x \cdot y = \min(x, y)$. Роль нулевого элемента будет играть нижняя грань данного числового множества, т. е. число 0, роль единичного элемента — верхняя грань — число A. Закон противоречия и закон исключенного третьего из (1.4.1) будут иметь вид $x \cdot \bar{x} = 0,\ x + \bar{x} = A$. Тогда множество M с так определенными операциями и так определенными элементами 0, 1 является *булевой алгеброй*.

В том случае, когда множество M состоит из двух чисел 0 и 1, эта система представляет собой алгебру высказываиий, в которой истина заменяется выделенной единицей, а ложь — нулем.

Пусть M и N — две булевы алгебры. Отображение $x \Rightarrow \tilde{x}$, ставящее каждому $x \in M$ в соответствие элемент $\tilde{x} \in N$, называется *гомоморфизмом* булевой алгебры M в булеву алгебру N, если

$$\begin{cases} \tilde{0}_M = 0_N, \\ \tilde{1}_M = 1_N, \\ \tilde{\bar{x}} = \bar{\tilde{x}}, \\ \tilde{x} \vee \tilde{y} = \widetilde{x \vee y}, \\ \tilde{x} \wedge \tilde{y} = \widetilde{x \wedge y} \end{cases} \tag{1.6.2}$$

для всех $x, y \in M$. Нижние индексы у 0 и 1 указывают, в какой алгебре они являются выделенными элементами.

Если гомоморфизм $x \Rightarrow \tilde{x}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между M и N, то он называется *изоморфизмом* булевых алгебр M и N, а сами булевы алгебры в этом случае называются *изоморфными*. Примеров изоморфизма булевых алгебр очень много. Первый пример — алгебра высказываний и алгебра множеств. Другой важный пример изоморфизма относится к самой алгебре высказываний. Аксиомы (1.6.1) булевой алгебры таковы, что если всюду поменять местами 0 и 1, дизъюнкцию и конъюнкцию, то получится та же аксиоматика.

Пусть M — булева алгебра. Построим новую булеву алгебру M^+, которая будет состоять из тех же элементов, что и M, но с другими операциями. Элементы $x, y, \ldots$ из M, рассматриваемые как элементы M^+, будем обозначать $x^+, y^+, \ldots$; элементы 0, 1 для M^+ — через $0_+, 1_+$. Тогда положим

1. $0_+ = 1^+$ (0 в M^+ — это 1 в M);

2. $1_+ = 0^+$ (1 в M^+ — это 0 в M);
3. $x_+ \vee y_+ = (x \wedge y)^+$ (дизъюнкция элементов в M^+ соответствует конъюнкции этих элементов в M);
4. $x_+ \wedge y_+ = (x \vee y)^+$ (конъюнкция элементов в M^+ совпадает с их дизъюнкцией в M).

Булева алгебра M^+ называется *двойственной* к M. Очевидно, что $(M^+)^+ = M$.

1.7. Функции алгебры логики

Формула алгебры логики является функцией входящих в нее элементарных высказываний, ее аргументы принимают два значения: 0 и 1, при этом значение формулы может быть равно 0 или 1.

Функцией алгебры логики n переменных (или *функцией Буля*) называется функция n логических переменных, т. е. функцией алгебры логики $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется функция, принимающая значения 0, 1, аргументы которой также принимают значения 0, 1.

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задается своей истинностной таблицей (табл. 1.7.1).

Таблица 1.7.1

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, ..., 0, 0)$
1	0	...	0	0	$f(1, 0, ..., 0, 0)$
...	...	...	...	...	...
1	1	1	1	0	$f(1, 1, ..., 1, 0)$
1	1	1	1	1	$f(1, 1, ..., 1, 1)$

Из этой таблицы видно, что число различных двоичных наборов длины n $x_1, x_2, ..., x_n$ конечно и равно 2^n.

Ясно, что тавтологии и тождественно ложные функции алгебры логики представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию. Каждая функция определяется таблицей истинности, состоящей из 2^n строк, т. е. принимает 2^n значений (каждое 0 или 1). Общее число наборов из 0 и 1 длины 2^n равно 2^{2^n}. Это число равно числу различных функций алгебры логики n переменных.

Функция алгебры логики $f(x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n)$ зависит существенным образом от аргумента x_i, если существуют такие значения $\alpha_1,...\alpha_{i-1},\alpha_i,\alpha_{i+1},...\alpha_n$ переменных $x_1,...,x_{i-1},x_i,x_{i+1},...,x_n$, что $f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\neq f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$. В этом случае переменная x_i называется *существенной*, в противном случае — *несущественной*, или *фиктивной*. Очевидно, что постоянные функции не имеют существенных переменных.

- **Пример.** $f(x)$ — функция одной переменной. Ее возможные значения приведены в табл. 1.7.2.

Таблица 1.7.2

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

$f_1(x)=1$ (постоянная, не зависит от x, x — фиктивная переменная),

$f_4(x)=0$ (постоянная, не зависит от x, x — фиктивная переменная),

$f_2(x)=x$, $f_3(x)=\overline{x}$, в f_2 и f_3 x — существенная переменная.

Если $n=2$, то $2^{2^2}=16$. Именно столько существует различных функций двух переменных. Перечислим их в таблице истинности (табл. 1.7.3).

Таблица 1.7.3

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0

Выразим теперь все эти функции через значения аргументов x и y: $f_1 \equiv 1$, $f_2 \equiv x \vee y$, $f_3 \equiv x$, $f_4 \equiv x \wedge y$, $f_5 \equiv \overline{x \to y}$, $f_6 \equiv \overline{y \to x}$, $f_7 \equiv \overline{x \vee y}$, $f_8 \equiv \overline{x \leftrightarrow y}$, $f_9 \equiv \bar{x}$, $f_{10} \equiv x \leftrightarrow y$, $f_{11} \equiv \bar{y}$, $f_{12} \equiv y$, $f_{13} \equiv \overline{x \wedge y}$, $f_{14} \equiv x \to y$, $f_{15} \equiv y \to x$, $f_{16} \equiv 0$.

Определим теперь операцию суперпозиции функций. Интуитивный смысл этой операции состоит в том, что в аргументы функции подставляются другие функции, некоторые переменные могут отождествляться. Пусть

$G = \left\{\varphi_1\left(x_{1,1}, x_{1,2},\dots,x_{1,k_1}\right), \varphi_2\left(x_{2,1}, x_{2,2},\dots,x_{2,k_2}\right),\dots,\varphi_m\left(x_{m,1}, x_{m,2},\dots,x_{m,k_m}\right)\right\}$ — конечная система функций алгебры логики. Функция ψ называется *суперпозицией первого ранга*, или *элементарной суперпозицией* $\psi \in G^{(1)}$, если она может быть получена одним из следующих способов:

1. Из какой-то функции $\varphi_j \in G$ переименованием какой-то ее переменной x_{ji}, например $\psi = \varphi\left(_j x_{j,1}, x_{j,2},\dots,x_{j,i-1}, y, x_{j,i+1},\dots,x_{j,k_j}\right)$.
2. Подстановкой некоторой функции $\varphi_l \in G$ вместо какого-нибудь аргумента x_{ji} в функции $\varphi_j \in G$, т. е.

$$\psi = \varphi_j\left(x_{j,1}, x_{j,2},\dots,x_{j,i-1}, \varphi_l\left(x_{l,1}, x_{l,2},\dots,x_{l,k_l}\right), x_{j,i+1},\dots,x_{j,k_j}\right).$$

Суперпозиции $r+1$-го ранга являются элементарными суперпозициями функций из суперпозиции r-го ранга, т. е. $G^{(r+1)} = \left(G^{(r)}\right)^{(1)}$.

Каждой формуле алгебры логики соответствует своя функция. Если формулы A и B эквивалентны, то соответствующие им функции равны: $f_A(x_1, x_2,\dots,x_n) = f_B(x_1, x_2,\dots,x_n)$. Это значит, что при всех значениях переменных $x_1, x_2,\dots,x_n$ значения f_A и f_B совпадают.

1.8. Разложение булевых функций по переменным

Рассмотрим вопрос представления n-местной булевой функции $f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ какой-нибудь формулой алгебры высказываний.

Введем обозначение: $x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}$, где σ — параметр, равный 0 или 1. Очевидно, что $x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \sigma = 0, \\ x, & \sigma = 1. \end{cases}$

Теорема 1.4. **Каждую функцию алгебры логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при любом m $(1 \le m \le n)$ можно представить в следующей форме:**

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots x_m^{\sigma_m} \wedge \wedge f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \qquad \textbf{(1.8.1)}$$

где дизъюнкция берется по всевозможным наборам значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Доказательство. Указанное в теореме представление функции $f(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ называется *разложением функции* по m переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Рассмотрим произвольный набор $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ значений всех переменных данной функции. Покажем, что на этом наборе левая и правая часть формулы (1.8.1) принимают одно и то же значение. Левая часть равна $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, правая

$$\bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m} \alpha_1^{\sigma_1} \wedge \alpha_2^{\sigma_2} \wedge \dots \alpha_m^{\sigma_m} \wedge f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha_1} \wedge \alpha_2^{\alpha_2} \wedge \dots \alpha_m^{\alpha_m} \wedge \wedge f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n),$$

т. к. $\alpha_i^{\sigma_i} = 1$, если только $\alpha = \sigma$, если же $\alpha \ne \sigma$, то $\alpha_i^{\sigma_i} = 0$ и соответствующее логическое слагаемое можно отбросить.

Следствие 1 (разложение по одной переменной).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = x_n \wedge f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \vee \vee \overline{x_n} \wedge f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \qquad (1.8.2)$$

В этом случае функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$ называются *компонентами разложения.*

Следствие 2 (разложение по всем переменным).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots x_n^{\sigma_n} \wedge \wedge f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n) \qquad (1.8.3)$$

Очевидно, что если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ne 0$, то

$$\bigvee_{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots x_n^{\sigma_n} \qquad (1.8.4)$$

Итак, если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не является тождественно ложной функцией, то она может быть выражена равносильной формулой, представляющей собой логическую сумму различных произведений вида $x_i^{\sigma_i}$, причем такое представление единственно.

Формула (1.8.3) называется *дизъюнктивной нормальной формой*. Ее вид может быть значительно упрощен. Известно, что всякая формула алгебры логики может быть путем эквивалентных преобразований по формулам (1.4.1)–(1.4.3) сведена к формуле, содержащей только конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание. В результате проведения эквивалентных преобразований могут получиться несколько формул, однако только одна из них будет обладать следующими свойствами:

1. Каждое логическое слагаемое содержит все переменные, входящие в формулу $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Ни одно логическое слагаемое не содержит одновременно переменную и ее отрицание.
3. Все логические слагаемые в формуле различны.
4. Ни одно логическое слагаемое не содержит одну и ту же переменную дважды.

Эти четыре свойства называются *свойствами совершенства*.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана таблицей истинности, то соответствующая формула алгебры логики восстанавливается довольно просто. Для всех значений аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых f принимает значение 1, нужно записать конъюнкцию элементарных переменных высказываний, взяв за член конъюнкции x_i, если $x_i = 1$, и $\overline{x_i}$, если $x_i = 0$. Дизъюнкция всех записанных конъюнкций и будет необходимой формулой. О значениях $f = 0$ можно не беспокоиться, т. к. соответствующее слагаемое в формуле будет равно 0 и его можно отбросить в силу условия $f \vee 0 \equiv f$.

- **Пример.** Задана таблица истинности (табл. 1.8.1) функции $F(x, y, z)$.

Таблица 1.8.1

x	y	z	$F(x, y, z)$	x	y	z	$F(x, y, z)$
1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1

Отсюда $f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \overline{xy}z \vee \overline{xyz}$. Упростим эту формулу.

$$f(x,y,z) \equiv yz(x \vee \bar{x}) \vee \overline{xz}(y \vee \bar{y}) \vee \overline{xy}z \equiv yz \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv$$

$$\equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y}z) \equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y})(\bar{z} \vee z) \equiv yz \vee \bar{x}(\bar{z} \vee \bar{y}) \equiv$$

$$\equiv (yz \vee \bar{x}) \wedge (yz \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \equiv \big((y \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{x})\big) \wedge (y \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \wedge (z \vee \bar{z} \vee \bar{y}) \equiv$$

$$\equiv (y \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{x}) \wedge (\bar{z} \vee 1) \wedge (\bar{y} \vee 1) \equiv (y \vee \bar{x}) \wedge (z \vee \bar{x}) \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \equiv$$

$$\equiv \bar{x} \vee (y \wedge z) \equiv x \rightarrow yz.$$

1.9. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Формула $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ — какой-нибудь двоичный набор, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется *элементарной конъюнкцией*, или *конъюнктом*.

Всякая дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ). О ней уже упоминалось в следствии 2 теоремы 1.4.

Элементарная конъюнкция называется *правильной*, если каждая переменная входит в нее не более одного раза, включая вхождения под знаком отрицания. Правильная элементарная конъюнкция называется *полной* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждая из переменных входит в нее один и только один раз. Например, $x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$ — полная правильная элементарная конъюнкция, а $x_1 \overline{x_1 x_2}$ — неправильная элементарная конъюнкция.

Для любой формулы алгебры логики путем элементарных преобразований можно получить ее ДНФ, причем не единственную (не все формулы в цепочке преобразований будут ДНФ, но многие: именно те, которые содержат лишь операции $\bar{\ }$, $\vee$ и $\wedge$). Однако среди многих ДНФ лишь одна будет удовлетворять всем условиям совершенства.

ДНФ формулы алгебры логики, удовлетворяющей всем четырем условиям совершенства, называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой*.

Условиями совершенства называются следующие:

1. Все логические слагаемые в ДНФ различны.
2. Каждое логическое слагаемое содержит все переменные.

3. Ни одно логическое слагаемое не содержит x_i и $\bar{x}_i$ одновременно.

4. Ни одно логическое слагаемое не содержит x_i дважды.

Таким образом, *совершенной дизъюнктивной формой* (СДНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такая ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции правильны и полны относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Итак, для всякой функции алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не равной тождественно нулю, справедливо ее следующее представление в виде СДНФ:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}, \qquad (1.9.1)$$

где символ $\vee$ означает, что берутся дизъюнкции по тем наборам переменных, которые указаны под ним.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задана не истинностной таблицей, а формулой, то ее СДНФ можно получить путем равносильных преобразований. Заметим, что формулы, являющиеся ДНФ, можно охарактеризовать как формулы, содержащие только дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, в которых отрицания стоят только над аргументами, и вначале выполняются все конъюнкции, а потом дизъюнкции.

Итак, алгоритм получения СДНФ таков:

1. Для формулы A получаем любую ДНФ.
2. Если в ДНФ есть слагаемое B, не содержащее x_i, то заменяем $B \equiv B \wedge (x_i \vee \bar{x}_i) \equiv (B \wedge x_i) \vee (B \wedge \bar{x}_i)$.
3. Если в ДНФ встретится два одинаковых слагаемых B, то лишнее можно отбросить, т. к. $B \vee B \equiv B$.
4. Если в некоторое слагаемое B в ДНФ A x_i входит дважды, то лишнюю x_i можно отбросить, так как $x_i \wedge x_i \equiv x_i$.
5. Если слагаемое B в ДНФ A содержит конъюнкцию $x_i \wedge \bar{x}_i$, то $x_i \wedge \bar{x}_i \equiv 0$ и $B \equiv 0$, и это слагаемое можно отбросить.

Формула вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ называется *элементарной дизъюнкцией* или *дизъюнктом*. *Пустым дизъюнктом* называется константа 0. Дизъюнкт невыполним в том и только в том случае, если он пустой.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций. Если КНФ не содержит ни одного дизъюнкта, т. е. пуста, то она эквивалентна 1.

Элементарная дизъюнкция называется *правильной*, если в нее каждая переменная входит не более одного раза, включая и вхождения под знаком отрицания. Правильная элементарная дизъюнкция называется *полной* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждая из этих переменных входит в нее один и только один раз.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — набор логических переменных, а $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ — произвольный двоичный набор этих переменных. *Конституентой единицы набора* σ называется конъюнкт $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$. *Конституентой нуля набора* σ называется дизъюнкт $x_1^{1-\sigma_1} \vee x_2^{1-\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{1-\sigma_n}$. Очевидно, что $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} = 1$ и $x_1^{1-\sigma_1} \vee x_2^{1-\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{1-\sigma_n} = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = \sigma_1$, $x_2 = \sigma_2, \ldots$, $x_n = \sigma_n$.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется конъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все элементарные дизъюнкции правильны и полны относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Всякую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, отличающуюся от тождественно истинной, можно представить в виде СКНФ следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{f(\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \ldots, \overline{\sigma_n}) = 0} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}, \qquad (1.9.2)$$

где символ $\prod$ означает, что конъюнкции берутся по тем наборам переменных, которые указаны под ним.

Здесь ситуация та же, что и для ДНФ. Для любой формулы A существует несколько КНФ, среди них есть только одна, удовлетворяющая условиям совершенства. Эта КНФ называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой.*

Свойства совершенства для КНФ:

1. Все сомножители (дизъюнкции) различны.
2. Каждый сомножитель содержит все переменные.

3. Ни один из сомножителей не содержит x_i и $\overline{x_i}$ одновременно.

4. Ни один из сомножителей не содержит двух одинаковых переменных.

СКНФ, так же как и СДНФ, может быть получена двумя способами: из таблицы истинности для формулы $\overline{A}$ и путем эквивалентных преобразований. Действительно, найдем связь между СДНФ и СКНФ. При этом надо помнить следующие факты: полная правильная элементарная дизъюнкция $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ равна нулю лишь на наборе $\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \ldots, \overline{\sigma_n}$; аналогично полная правильная элементарная конъюнкция $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ равна единице на одном наборе $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Тогда если

$$\text{СДНФ } f = \bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n},$$

$$\text{то СДНФ } \overline{f} = \bigvee_{f(\overline{\sigma_1},\overline{\sigma_2},\ldots,\overline{\sigma_n})=0} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$$

$$\text{и } \overline{\text{СДНФ } \overline{f}} = \overline{\bigvee_{f(\overline{\sigma_1},\overline{\sigma_2},\ldots,\overline{\sigma_n})=0} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}} =$$

$$= \prod_{f(\overline{\sigma_1},\overline{\sigma_2},\ldots,\overline{\sigma_n})=0} \overline{x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}} = \prod_{f(\overline{\sigma_1},\overline{\sigma_2},\ldots,\overline{\sigma_n})=0} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}.$$

Таким образом,

$$\text{СКНФ } f = \overline{\text{СДНФ } \overline{f}}. \tag{1.9.3}$$

Алгоритм получения СКНФ путем эквивалентных преобразований похож на алгоритм получения СДНФ:

1. Для формулы A получаем любую КНФ.
2. Если элементарная дизъюнкция B, входящая в КНФ, не содержит x_i, то $B \equiv B \vee (x_i \wedge \overline{x_i}) \equiv (B \vee x_i) \wedge (B \vee \overline{x_i})$.
3. Если в некоторую элементарную дизъюнкцию B x_i входит дважды, то лишнюю переменную x_i можно отбросить, т. к. $x_i \vee x_i \equiv x_i$.
4. Если КНФ содержит два одинаковых сомножителя B, то лишнюю элементарную дизъюнкцию можно отбросить, т. к. $B \wedge B \equiv B$.
5. Если в элементарную дизъюнкцию B входит пара $x_i \vee \overline{x_i}$, то ее можно отбросить, т. к. $x_i \vee \overline{x_i} \equiv 1$, а $B_i \wedge 1 \equiv B_i$.

Совершенные нормальные формы позволяют дать критерий равносильности двух произвольных формул A и B. В самом деле, каковы бы ни были формулы A и B, в том случае если они содержат одни и те же переменные, их можно заменить равносильными им формулами, которые необходимо привести к совершенным дизъюнктивным или конъюнктивным нормальным формам. Если A и B — равносильные формулы, то в силу единственности совершенных нормальных форм как конъюнктивные, так и дизъюнктивные нормальные формы этих формул должны полностью совпадать. Таким образом, сравнение совершенных нормальных форм формул A и B решает вопрос об их равносильности.

При упрощении ДНФ или КНФ удобно пользоваться следующими равносильностями:

$$\begin{cases} x \vee xy \equiv x, \\ x(x \vee y) \equiv x, \\ x \vee \bar{x}y \equiv x \vee y, \\ \bar{x} \vee xy \equiv \bar{x} \vee y, \\ x(\bar{x} \vee y) \equiv xy, \\ \bar{x}(x \vee y) \equiv \bar{x}y. \end{cases} \tag{1.9.4}$$

1.10. Закон двойственности

Операция конъюнкции называется *двойственной* операции дизъюнкции и наоборот, операция дизъюнкции называется *двойственной* операции конъюнкции.

Функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функция, равносильная своей двойственной, т. е. такая, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$, называется *самодвойственной*. Очевидно, что самодвойственная функция принимает на противоположных наборах $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$ противоположные значения.

Среди элементарных функций алгебры логики 0, 1, x, $\bar{x}$, $x_1 \wedge x_2$, $x_1 \vee x_2$ 0 двойственна 1; 1 двойственна 0; x двойственна x; $\bar{x}$ двойственна $\bar{x}$; $x_1 \wedge x_2$ двойственна $x_1 \vee x_2$; $x_1 \vee x_2$ двойственна $x_1 \wedge x_2$.

Из определения двойственности следует, что $f^{**} = (f^*)^* = f$, т. е. функция f является двойственной к f^* (*свойство взаимности*).

Формулы алгебры логики A и A^* называются *двойственными*, если A^* получается из A путем замены каждой операции на двойственную ей операцию.

Рассмотрим формулу $A \equiv \overline{\overline{x \wedge y}} \vee (x \to y) \wedge x \equiv \overline{\overline{x \wedge y}} \vee (\bar{x} \vee y) \wedge x$. Двойственная ей формула будет иметь вид $A^* \equiv \overline{\overline{x \vee y}} \wedge ((\bar{x} \wedge y) \vee x) = xy(\bar{x}y \vee x)$.

Пусть теперь $f(x, y) = \overline{\overline{x \wedge y}} \vee (x \to y) \wedge x$. По определению двойственной функции $f^*(x,y) = \overline{f(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\overline{\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}} \vee (\bar{x} \to \bar{y}) \wedge \bar{x}} \equiv \overline{\overline{\bar{x} \wedge \bar{y}}} \wedge \overline{(\bar{x} \to \bar{y}) \wedge \bar{x}} \equiv$

$\equiv xy \wedge \overline{(\bar{\bar{x}} \vee \bar{y}) \wedge \bar{x}} \equiv xy \wedge (\overline{x \vee \bar{y}} \vee x) \equiv xy(\bar{x}y \vee x)$.

Теорема 1.5. **Функция, двойственная суперпозиции некоторых функций, равносильна соответствующей суперпозиции двойственных функций, т. е. если**

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1}), \varphi_2(x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2}), \ldots, \varphi_m(x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k_m}), \ldots),$$ **то**

$$\psi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(\varphi_1^*(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1}), \varphi_2^*(x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2}), \ldots, \varphi_m^*(x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k_m}), \ldots),$$

где через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **обозначены все различные символы переменных, встречающиеся в наборах** $(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1})$, $(x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2})$, …, $(x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k_m})$.

Доказательство. По определению двойственной функции

$$\psi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{\psi}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) =$$

$$= \overline{f}(\varphi_1(\overline{x_{1,1}}, \overline{x_{1,2}}, \ldots, \overline{x_{1,k_1}}), \varphi_2(\overline{x_{2,1}}, \overline{x_{2,2}}, \ldots, \overline{x_{2,k_2}}), \ldots, \varphi_m(\overline{x_{m,1}}, \overline{x_{m,2}}, \ldots, \overline{x_{m,k_m}}), \ldots) =$$

$$= \overline{f}(\overline{\overline{\varphi_1}}(\overline{x_{1,1}}, \overline{x_{1,2}}, \ldots, \overline{x_{1,k_1}}), \overline{\overline{\varphi_2}}(\overline{x_{2,1}}, \overline{x_{2,2}}, \ldots, \overline{x_{2,k_2}}), \ldots, \overline{\overline{\varphi_m}}(\overline{x_{m,1}}, \overline{x_{m,2}}, \ldots, \overline{x_{m,k_m}}), \ldots) =$$

$$= \overline{f}(\overline{\varphi_1^*}(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1}), \overline{\varphi_2^*}(x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2}), \ldots, \overline{\varphi_m^*}(x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k_m}), \ldots) =$$

$$= f^*(\varphi_1^*(x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1}), \varphi_2^*(x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2}), \ldots, \varphi_m^*(x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k_m}), \ldots).$$

В заключение приведем без доказательства еще две теоремы о двойственных функциях.

Теорема 1.6. **Если для функции** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ **двойственной является** $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, **то справедлива равносильность** $\overline{f(x_1, x_2, ..., x_n)} \equiv \equiv f^*(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$. Эта формула доказывается методом математической индукции.

На основании теоремы 1.6 легко доказывается следующая.

Теорема 1.7. **Если формулы** A **и** B **равносильны, то равносильны и двойственные им формулы, т. е.** $A \equiv B \to A^* \equiv B^*$.

1.11. Практическое занятие № 2. Функции алгебры логики. Закон двойственности

1.11.1. Показать, что каждой формуле A алгебры высказываний можно сопоставить функцию $f(A)$ алгебры логики так, что если $A_1 \equiv A_2$, то $f(A_1) = f(A_2)$.

1.11.2. Сколько имеется различных функций алгебры логики от n переменных?

1.11.3. По таблице истинности, приведенной в табл. 1.11.1, найти формулы, определяющие функции $f_1(x_1, x_2, x_3)$, $f_2(x_1, x_2, x_3)$, $f_3(x_1, x_2, x_3)$, $f_4(x_1, x_2, x_3)$, и придать им более простой вид.

Таблица 1.11.1

x_1	x_2	x_3	$f_1(x_1, x_2, x_3)$	$f_2(x_1, x_2, x_3)$	$f_3(x_1, x_2, x_3)$	$f_4(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0

1.11.4. Найти все существенные переменные следующих функций:

1) $(x \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge z)$;

2) $(x \wedge y) \vee x$;

3) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

1.11.5. Выразить с помощью суперпозиций:

1) $\wedge$ и $\to$ через $\vee$ и $\bar{\ }$.

2) $\wedge$ и $\vee$ через $\to$ и $\bar{\ }$.

3) $\bar{\ }$ через $\to$ и 0.

4) $\vee$ через $\to$.

1.11.6. Привести к дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме:

1) $((A \to B) \to (C \to A)) \to (\bar{B} \to \bar{C})$.

2) $(((A \to B) \to \bar{A}) \to \bar{B}) \to \bar{C})$.

3) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to \bar{C}) \to (A \to \bar{B}))$.

1.11.7. По данному набору значений переменных построить элементарную конъюнкцию, истинную для данного набора значений переменных.

1.11.8. Для следующих формул найти СДНФ, при этом для формул 1, 2, 3 и 5 использовать два способа.

1) $((\bar{A} \to \bar{B}) \to ((B \wedge C) \to (A \wedge C)))$;

2) $((A \to B) \to \bar{A}) \to (A \to (A \wedge B))$;

3) $\overline{(A \wedge B) \to \bar{A}} \wedge \overline{(A \wedge B) \to \bar{B}}$;

4) $A_1 \to (A_2 \to (\ldots \to (A_{n-1} \to A_n)\ldots))$;

5) $(\bar{A} \to C) \to \overline{\bar{B} \to \bar{A}}$.

1.11.9. Следующие формулы привести к совершенной конъюнктивной нормальной форме:

1) $(C \to A) \to (\overline{B \vee C} \to A)$;

2) $\overline{(A \wedge B) \to A} \vee (A \wedge (B \vee C))$;

3) $\overline{A \wedge (B \vee C)} \to (A \wedge B) \vee C$;

4) $\left(A \vee \overline{B} \to A \wedge C\right) \to \overline{A \to \overline{A}} \vee B \wedge \overline{C}$;

5) $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \to B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$.

1.11.10. Найти СДНФ для всякой тождественно истинной формулы, содержащей:

1) Одну перемеиную.

2) Две переменных.

3) Три переменных.

1.11.11. Найти СКНФ для всякой тождественно ложной формулы, содержащей:

1) Одну переменную.

2) Две переменных.

3) Три переменных.

1.11.12. Построить формулу от трех переменных, которая истинна в том и только том случае, когда ровно две переменные ложны.

1.11.13. Построить формулу от трех переменных, которая принимает такое же значение, как и большинство (меньшинство) переменных.

1.11.14. Построить формулу f от переменных x, y, z так, чтобы

$$\begin{cases} x \wedge f \equiv x \wedge y, \\ x \vee f \equiv x \vee z. \end{cases}$$

1.11.15. По данным СДНФ A и СДНФ B построить: СДНФ$(A \vee B)$ и СКНФ$(A \vee B)$.

1.11.16. По СКНФ A построить СДНФ A^*, где A^* — формула, двойственная к A.

1.11.17. Построить функции, двойственные следующим функциям:

1) Основным логическим операциям и констаитам 0, 1.

2) Функции от трех переменных, равной 1, если четное число переменных равно единице.

1.11.18. Показать, что функция $xy \vee xz \vee yz$ является самодвойственной.

1.11.19. Сколько имеется самодвойственных функций от n переменных?

1.11.20. Дана произвольная несамодвойственная функция. Отождествить у нее переменные так, чтобы получилась несамодвойственная функция от возможно меньшего числа переменных. Каким может быть это число?

1.12. Минимизация булевых функций в классе ДНФ

Карты Карно*

Как было ранее показано, произвольная булева функция может быть представлена в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме. Очевидно, что среди этих форм будут такие, какие содержат меньшее число переменных, чем исходная.

Дизъюнктивная нормальная форма называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число вхождений переменных по сравнению со всеми равносильными ей ДНФ.

Формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *импликантой* формулы $B(x_1, x_2, ..., x_n)$, если A — правильная элементарная конъюнкция и $A \wedge B \equiv B$. Импликанта $A(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_k}^{\sigma_k}$ формулы B называется *простой*, если после отбрасывания любой переменной из A не получается формула, являющаяся импликантой формулы B.

- **Пример.** Пусть $A = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$. Найдем все импликанты и простые импликанты этой формулы по табл. 1.12.1.

Таблица 1.12.1

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	xy	xz	yz	$\bar{x}y$
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

* Лазар Никола Карно (Carnot)(1753–1823) — французский математик.

Таблица 1.12.1 (продолжение)

$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\overline{xy}$	$x\bar{y}$	$\overline{xz}$	$x\bar{z}$	$\bar{z}y$	$\overline{yz}$	xyz	$\bar{x}yz$
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0

Таблица 1.12.1 (окончание)

$xy\bar{z}$	$\overline{xy}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\overline{yz}$	$\overline{xyz}$	$\bar{x}yz$	$xy\bar{z}\vee\bar{x}yz$	$\overline{xy}z\vee x\overline{yz}$	A
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	0	0	0

Правильных элементарных конъюнкций у этой формулы 26, оии все приведены в табл. 1.12.1. Импликанты по таблице находятся очень легко; импликант всего семь: $\bar{y}z$, $x\bar{y}$, $x\bar{z}$, $\bar{x}yz$, $xy\bar{z}$, $\overline{xy}z$ и $x\overline{yz}$. Каждую из них можно проверить аналитически, например, $A\wedge\bar{y}z=\left(xy\bar{z}\vee\bar{x}yz\vee x\overline{yz}\vee\overline{xy}z\right)\wedge\bar{y}z\equiv$ $\equiv xy\bar{z}\bar{y}z\vee\bar{x}yz\bar{y}z\vee x\overline{yz}\bar{y}z\vee\overline{xy}z\bar{y}z\equiv x\bar{y}z\vee\overline{xy}z\equiv\bar{y}z\left(x\vee\bar{x}\right)\equiv\bar{y}z$. Простыми импликантами являются формулы $\bar{y}z$, $x\bar{y}$ и $x\bar{z}$. Таким образом, сокращенная ДНФ формулы A будет дизъюнкцией этих простых импликант: сокращенная ДНФ$A = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}z$.

Очевидно, что всякая булева функция, не равная нулю, представима в виде сокращенной ДНФ. Сокращенная ДНФ может содержать лишние импликанты, удаление которых не меняет таблицы истинности. Если удалить эти лишние импликанты, то получается ДНФ, называемая *тупиковой*.

Тупиковая ДНФ, содержащая наименьшее число вхождений переменных высказываний, называется *минимальной ДНФ* (МДНФ).

Сокращенную ДНФ можно получить и с помощью аналитических преобразований без таблицы истинности. Для этого используются три операции:

1. Полное склеивание $Ax \vee A\bar{x} \equiv A(x \vee \bar{x}) \equiv A$.
2. Неполное склеивание $Ax \vee A\bar{x} \equiv A(x \vee \bar{x}) \vee Ax \vee A\bar{x} \equiv A \vee Ax \vee A\bar{x}$.
3. Элементарное поглощение $Ax^{\sigma} \vee A \equiv A(x^{\sigma} \vee 1) \equiv A,\ \sigma \in \{0,1\}$.

Теорема 1.8 (Теорема Квайна). **Если в СДНФ формулы A произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем операции элементарного поглощения, то получится сокращенная ДНФ, т. е. дизъюнкция всех простых импликант.**

Рассмотрим формулу A из предыдущего примера. Произведем в ней все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения. Тогда

$$A = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv$$

$$\equiv x\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}z(x \vee \bar{x}) \vee x\bar{y}(z \vee \bar{z}) \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv x\bar{z} \vee \bar{y}z \vee$$

$$\vee x\bar{y} \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv x\bar{z}(1 \vee y) \vee \bar{y}z(1 \vee x) \vee x\bar{y}(1 \vee \bar{z}) \vee \bar{x}\bar{y}z \equiv$$

$$\equiv x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z(1 \vee \bar{x}) \equiv x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}z.$$

Для получения минимальной ДНФ из сокращенной используется матрица Квайна, имеющая следующую структуру: в заголовки столбцов матрицы записываются конституенты единицы СДНФ, а в заголовки строк — простые импликанты сокращенной ДНФ. В матрице звездочками отмечаются те пересечения строк и столбцов, для которых элементарная конъюнкция, стоящая в заголовке строки, входит в конституенту единицы, стоящую в заголовке столбца.

Составим матрицу Квайна для формулы A в табл. 1.12.2. Поскольку формула A дана в виде СДНФ (см. табл. 1.12.1), матрица будет иметь следующий вид.

Таблица 1.12.2

Простые импликанты	**Конституенты единицы СДНФ**			
	$xy\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$
$x\bar{y}$	-	*	*	-
$x\bar{z}$	*	-	*	-
$\bar{y}z$	-	*	-	*

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все конституенты единицы СДНФ, т. е. каждый столбец матрицы Квайна содержит по крайней мере одну звездочку, стоящую на пересечении со строкой, соответствующей одной из выбранных импликант. Затем из тупиковой выбирается минимальная ДНФ. В нашем случае тупиковая ДНФ равна $x\bar{z} \vee \bar{y}z$, она же будет равна МДНФ.

Еще один, на наш взгляд, более громоздкий способ получения минимальной ДНФ дает использование карт Карно. Карта Карно содержит 2^n клеток, каждая из которых соответствует одной из 2^n возможных комбинаций значений n логических переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обычно карта строится в виде матрицы размером 2^k на 2^{n-k} так, что ее столбцы соответствуют значениям переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, строки — значениям переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, а соседние клетки отличаются только значением одной переменной как по вертикали, так и по горизонтали. Для каждой функции может быть построено несколько различных карт Карно.

Для формулы A, содержащей три переменных, карта Карно может иметь вид, показанный на рис. 1.1 и 1.2. В этих картах все клетки, отмеченные скобкой, представляют комбинации соответствующей переменной со значением "единица", неотмеченные клетки соответствуют переменной со значением "нуль".

В карте Карно каждая клетка может иметь не более четырех соседних клеток (по горизонтали и по вертикали), поэтому для представления точек, отличающихся только на одну координату, часто бывает необходимо использовать более удаленные клетки.

Булева функция может быть представлена на карте Карно выделением клеток, в которых она принимает значение, равное единице. Для построения простых импликант берутся всевозможные наборы клеток, образующих вершины некоторого k-куба, т. е. 2^k точек таких, что пары соседних отличаются ровно одной координатой. Совпадающие координаты образуют набор $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-k})$, и нужная импликация имеет вид $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_{n-k}}^{\sigma_{n-k}}$, где x_j — переменная, соответствующая σ_j.

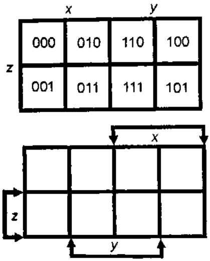


Рис. 1.1

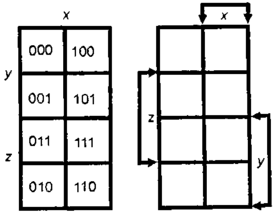


Рис. 1.2

После просмотра всех пар точек, образующих 1-кубы, нужно перебрать четверки точек, входящих в 2-кубы и т. д. Следует отметить, что простые импликанты находятся только в k-кубах, не содержащихся в кубах более высокого порядка.

Для формулы $A(x,y,z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$ карта Карно представлена на рис. 1.3. Здесь $A(0,0,0) = A(0,1,0) = A(0,1,1) = A(1,1,1) = 0$, а $A(1,1,0) = A(1,0,0) = A(0,0,1) = A(1,0,1) = 1$.

На этой карте для формулы A можно выделить только 1-кубы, 2-кубов здесь нет. Имеется три пары точек (1,1,0)–(1,0,0), (1,0,0)–(1,0,1) и (1,0,1)–(0,0,1), отличающихся значением ровно одной координаты. Соответствующие простые импликанты имеют вид для первой пары: $x\bar{z}$ (или $xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \equiv x\bar{z}$), для второй $x\bar{y}$ и для третьей пары $\bar{y}z$. Таким образом, сокращенная ДНФ будет равна $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{y}z$.

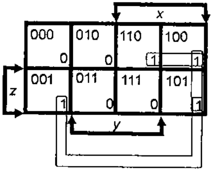


Рис. 1.3

После нахождения простых импликант построение МДНФ сводится к изучению матрицы Квайна. На картах Карно простой структуры удается непосредственно находить МДНФ, выбирая те простые импликанты, которые покрывают все единицы и имеют наименьшее возможное число вхождений переменных. В случае нашего примера это две пары точек: (1,1,0)–(1,0,0) и (0,0,1)–(1,0,1), т. е. МДНФ $= x\bar{z} \vee \bar{y}z$.

В силу принципа двойственности все приведенные рассуждения могут быть применены после необходимого преобразования для нахождения минимальных конъюнктивных нормальных форм (МКНФ).

1.13. Проблема разрешимости

Все формулы алгебры логики делятся на три класса:

1. Тавтологии.
2. Тождественно ложные.
3. Выполнимые.

Формулу A называют *выполнимой*, если она принимает значение единицы хотя бы на одном наборе входящих в нее переменных и не является тождественно истинной.

Вопрос, к какому классу формул относится текущая формула A, и называется *проблемой разрешимости*, которая элементарно решается с помощью таблицы истинности, однако для больших формул таблицы очень громоздки и их использование затруднительно.

Другой способ основан на приведении формулы A к КНФ или ДНФ и использовании специального алгоритма, который позволяет определить, является ли данная формула тождественно истинной или нет. Одновременно с этим решается проблема разрешимости.

Вышеназванный алгоритм таков. Сначала рассматривается формула A. Если $A \equiv 1$, то задача решена. Если это не так, то рассматривается формула $\bar{A}$. Если $\bar{A} \equiv 1$, то $A \equiv 0$ и задача решена. Если это не так. то A — выполнимая формула. Установлсние тождественной истинности формулы A основано на следующих теоремах.

Теорема 1.9. **Для того чтобы элементарная дизъюнкция была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.**

Например, $x_i \vee \bar{x}_i \equiv 1$.

Теорема 1.10. **Для того чтобы элементарная конъюнкция была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась переменная и ее отрицание.**

Здесь то же самое: для одной переменной это очевидно $x \wedge \bar{x}_i \equiv 0$, для набора n переменных это утверждение легко доказывается.

Теорема 1.11. **Для того чтобы формула алгебры логики A была тождественно истинна, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержала переменную и ее отрицание.**

Доказательство.

1. *Необходимость.* Пусть $A \equiv 1$. Тогда КНФ $\grave{A} \equiv 1$ и КНФ$A \equiv A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \ldots \wedge A_n \equiv 1$ и $\forall i \; A_i \equiv 1$. Так как A_i — элементарная дизъюнкция, то по теореме 1.7 A_i содержит переменную и ее отрицание.
2. *Достаточность.* Пусть A_i содержит переменную и ее отрицание. Тогда по теореме 1.7 $A_i \equiv 1$, $i = \overline{1,n}$. Но КНФ$A = \prod_{i=1}^{n} A_i \equiv 1$. Следовательно A — тождественно истинная формула.

Теорема 1.12. **Для того чтобы формула алгебры логики A была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы любая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ A, содержала переменную и ее отрицание.**

- **Пример.** $A = (\overline{xy} \to \bar{x}) \wedge (\overline{xy \to \bar{y}})$. Получить СДНФ и СКНФ с помощью таблицы истинности (табл. 1.13.1) и путем элементарных преобразований.

Таблица 1.13.1

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{xy}$	$\overline{xy} \to \bar{x}$	xy	$xy \to \bar{y}$	$\overline{xy \to \bar{y}}$	A	$\bar{A}$
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1

Из табл. 1.13.1 сразу получаем СДНФ $A \equiv x \wedge y$. Из этой же таблицы видно, что формула A — выполнимая формула. Найдем теперь СКНФ по формуле

$$\text{СКНФ } A = \overline{\text{СДНФ } \bar{A}},\ \text{СДНФ}\bar{A} \equiv (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

$$\text{СКНФ}A \equiv \overline{(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})} \equiv \overline{(x \wedge \bar{y})} \wedge$$

$$\wedge \overline{(\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})} \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge \overline{(\bar{x} \wedge y)} \wedge \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})} \equiv (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y).$$

Элементарными преобразованиями исходной формулы получить СДНФ и СКНФ часто бывает значительно сложней, чем из таблицы истинности

$$A \equiv (\overline{xy} \to \bar{x}) \wedge \overline{(xy \to \bar{y})} \equiv (\overline{\overline{xy}} \vee \bar{x}) \wedge \overline{(\overline{xy} \vee \bar{y})} \equiv$$

$$\equiv (xy \vee \bar{x}) \wedge (\overline{\overline{xy}} \wedge \bar{\bar{y}}) \equiv (xy \vee \bar{x}) \wedge (xy \wedge y) \equiv (xy \vee \bar{x}) \wedge (xy) \equiv xy(\bar{x} \vee 1) \equiv$$

$\equiv xy \equiv x \wedge y$ — сразу ДНФ и СДНФ. СДНФ — дизъюнкция элементарных конъюнкций. В ней только одно слагаемое xy, других нет. Найдем теперь СКНФ, для этого нужна хоть какая-то КНФ. Например, xy — КНФ, т. к. x и y можно считать элементарными дизъюнкциями.

$$xy \equiv (x \vee (y \wedge \bar{y})) \wedge (y \vee (x \wedge \bar{x})) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee x) \wedge (y \vee \bar{x}) \equiv$$

$$\equiv (x \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y).$$

Полученная СДНФ A не является тождественно ложной, т. к. входящая в нее элементарная конъюнкция не содержит переменную и ее отрицание. Следовательно, формула A или тождественно истинна или выполнима.

СКНФ A не является тождественно истинной, т. к. все элементарные дизъюнкции не содержат какую-то переменную и ее отрицание. Таким образом, A — выполнимая формула.

1.14. Полиномы Жегалкина*

Конъюнкция xy в булевой алгебре $\{0,1\}$ совпадает с арифметической операцией умножения над числами. Обычное арифметическое сложение выводит за пределы множества $\{0,1\}$, но можно использовать сложение по модулю 2.

Рассмотрим логическую связь, определяемую в табл. 1.14.1.

Таблица 1.14.1

x	y	$x \oplus y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

В результате возникает новая логическая операция, которую мы будем обозначать $x \oplus y$. Жегалкин И. И. предложил эту логическую связь называть суммой x и y и обозначать $x \oplus y$. Сумма истинна тогда и только тогда, когда истинно одно и только одно составляющее высказывание, т. е. знак $\oplus$ здесь означает союз "или", употребленный в строго разделительном смысле.

Сравнивая таблицы истинности основных логических связок, заметим, что $x \oplus y \equiv \overline{x \leftrightarrow y}$. Подобным же образом могут быть арифметизированы все 16 операций, ранее рассматривавшихся для функций двух переменных.

Для двух введенных операций: введенного сложения по модулю 2 и умножения (конъюнкции) имеют место все основные логические законы: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность умножения относительно сложения.

Операция сложения по модулю 2 используется в логических функциях, называемых *полиномами* (*многочленами*) *Жегалкина*.

Многочленом Жегалкина называется многочлен, являющийся суммой константы 0 или 1 и различных одночленов, в которых все переменные входят не выше, чем в первой степени:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}\,, \qquad (1.14.1)$$

* Жегалкин Иван Иванович (1869–1947) — советский математик.

причем на каждом наборе $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ все i_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ различны, а $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} \in \{0, 1\}$.

Подсчитаем число полиномов Жегалкина от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. число выражений вида (1.14.1). Число членов $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$ равно количеству подмножеств вида $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ множества из n чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$, т. е. 2^n. Поскольку $a_{i_1 i_2 \ldots i_k} = 0$ или 1, то общее число многочленов 2^{2^n}. Так как число булевых функций от n переменных также равно 2^{2^n}, то каждая булева функция может быть представлена многочленом Жегалкина. Заметим, что какова бы ни была булева функция от двух переменных $f(x_1, x_2)$, ее логическое значение $f(\alpha_1, \alpha_2)$ при любом наборе (α_1, α_2) выражается формулой

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = f(1,1)\alpha_1\alpha_2 \oplus f(1,0)\alpha_1(1 \oplus \alpha_2) \oplus f(0,1)(1 \oplus \alpha_1)\alpha_2 \oplus$$
$$\oplus f(0,0)(1 \oplus \alpha_1)(1 \oplus \alpha_2), \qquad (1.14.2)$$

в справедливости которой легко убедиться.

Рассмотрим несколько примеров. Сначала с помощью таблицы истинности 1.14.2 найдем, как выражается многочлен Жегалкина для $\bar{x}$.

Таблица 1.14.2

x	$\bar{x}$	$x \oplus 1$
1	0	0
0	1	1

1. Таким образом, $\bar{x} = x \oplus 1$.

$x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 =$
$= x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$. То же самое получается по формуле (1.14.1): $x_1 \vee x_2 = a x_1 x_2 \oplus b x_1 \oplus c x_2 \oplus d$, при $x_1 = x_2 = 0$ имеем $d = 0$; при $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ c = 1$; при $x_1 = 1, x_2 = 0, b = 1$; при $x_1 = x_2 = 1$, $a = 1$, тогда $x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.

2. $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \equiv \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 =$

$= x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus 1 \oplus 1 = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus$

$\oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

В заключение приведем вновь таблицу всех булевых функций (табл. 1.14.3) от двух переменных и их представление многочленами Жегалкина.

Таблица 1 14.3

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1
f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	0

$f_1 \equiv 1 = 1$, $\quad f_2 \equiv x \vee y = xy \oplus x \oplus y$,

$f_3 \equiv x = x$, $\quad f_4 \equiv x \wedge y = xy$,

$f_5 \equiv \overline{x \to y} = xy \oplus x$, $\quad f_6 \equiv \overline{y \to x} = xy \oplus y$,

$f_7 \equiv \overline{x \vee y} = xy \oplus x \oplus y \oplus 1$, $\quad f_8 \equiv \overline{x \leftrightarrow y} = x \oplus y$,

$f_9 \equiv \bar{x} = x \oplus 1$, $\quad f_{10} \equiv x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$,

$f_{11} \equiv \bar{y} = y \oplus 1$, $\quad f_{12} \equiv y = y$,

$f_{13} \equiv \overline{x \wedge y} = xy \oplus 1$, $\quad f_{14} \equiv x \to y = xy \oplus x \oplus 1$,

$f_{15} \equiv y \to x = xy \oplus y \oplus 1$. $\quad f_{16} \equiv 0 = 0$.

1.15. Полнота и замкнутость функций алгебры логики

Система булевых функций $G = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ называется *полной*, если любая булева функция может быть выражена через функции из G с помощью суперпозиций. Система P_2 — множество всех булевых функций — является полной системой.

Теорема 1.13. **Пусть даны две системы функций $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ и $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, относительно которых известно, что первая система полна и любая из ее функций может быть выражена с помощью суперпозиции через функции $g_1, g_2, ..., g_k$. Тогда система $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$ также является полной системой.**

Доказательство.

Пусть φ — произвольная функция из P_2. Так как система функций $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ полна, то $\varphi = \varphi(f_1, f_2, ..., f_m)$, причем переменных в φ может быть любое конечное число от 1 до m.

По условию теоремы
$$\begin{aligned} f_1 &= \varphi_1(g_1, g_2, ..., g_k),\\ f_2 &= \varphi_2(g_1, g_2, ..., g_k),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_m &= \varphi_m(g_1, g_2, ..., g_k). \end{aligned}$$
Теперь функция φ может быть выражена через систему функций $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$ с помощью суперпозиции $\varphi = \varphi(\varphi_1(g_1, g_2, ..., g_k), \varphi_2(g_1, g_2, ..., g_k), ...$

$..., \varphi_m(g_1, g_2, ..., g_k)) = \tilde{\varphi}(g_1, g_2, ..., g_k)$. Таким образом, произвольная функция из P_2 выражена через функции системы $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, т. е. эта система функций полна.

Рассмотрим несколько примеров и докажем полноту следующих систем функций:

1. $\{\bar{\ }, \wedge, \vee\}$. Полнота этой системы непосредственно следует из формул (1.9.1) и (1.9.2).

   $\{\bar{\ }, \vee\}$ и $\{\bar{\ }, \wedge\}$. Для доказательства полноты системы $\{\bar{\ }, \vee\}$ воспользуемся теоремой 1.8. Здесь роль системы $\{f_1, f_2, f_3\}$ играют функции $\{\bar{\ }, \wedge, \vee\}$.

а роль системы $\{g_1, g_2\}$ — функции $\{\bar{\ }, \vee\}$. Тогда $f_1 = g_1$, $f_3 = g_2$, $f_2 = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = \varphi_2(g_1, g_2)$.

Полнота системы $\{\bar{\ }, \wedge\}$ доказывается аналогично с использованием равносильности $x_1 \vee x_2 \equiv \overline{\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}}$.

$\{\cdot, \oplus, 1\}$ — система, связанная с полиномами Жегалкина. Доказательство ее полноты проводится аналогично: возьмем $\{f_1, f_2\} = \{\bar{\ }, \wedge\}$, а $\{g_1, g_2, g_3\} = \{\cdot, \oplus, 1\}$. Тогда поскольку $\bar{x} = x \oplus 1$, то $f_1 = \varphi_1(g_2, g_3)$, $f_2 = g_1$, т. е. система функций $\{\cdot, \oplus, 1\}$ полна.

Таким образом, мы получили результат, который можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1.14. **Каждая функция из P_2 может быть выражена при помощи полинома по модулю 2 (полинома Жегалкина).**

Класс функций G называется *функционально замкнутым*, если вместе с функциями из этого класса он содержит и все их суперпозиции. Функционально замкнутыми классами являются класс всех булевых функций P_2, класс, содержащий только тождественные функции вида $f(x) = x$, класс функций от одной переменной, т. к. все суперпозиции над функциями из этих классов не выводят результат из соответствующих классов.

Функционально замкнутые классы, отличные от пустого класса и от совокупности всех функций алгебры логики, называются *собственными функционально замкнутыми классами*. Рассмотрим некоторые важнейшие замкнутые классы функций из P_2.

1. Обозначим через P_0 класс всех булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сохраняющих нуль, т. е. функций, для которых $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Очевидно, что в этот класс входят функции $0, x, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2$, а функции 1 и $\bar{x}$ не входят в него.

Для обоснования замкнутости P_0 достаточно показать, что функция $\varphi = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in P_0$, если $f_1, f_2, \ldots, f_m \in P_0$. Но $\varphi(0, 0, \ldots, 0) = \varphi(f_1(0, 0, \ldots, 0), f_2(0, 0, \ldots, 0), \ldots, f_m(0, 0, \ldots, 0)) = 0$. Следовательно, $\varphi \in P_0$.

2. Через P_1 обозначим класс булевых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, сохраняющих единицу, т. е. функций, для которых $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$. К этому классу

принадлежат функции 1, $x, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2$, напротив, функции 0 и $\bar{x}$ не входят в P_1. Доказательство замкнутости этого класса аналогично предыдущему.

3. Обозначим через S класс всех самодвойственных функций, т. е. функций $f \in P_2$, для которых $f^* = f$. Докажем, что класс S замкнут. Для самодвойственной функции имеет место тождество $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для доказательства замкнутости покажем, что $\varphi = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in S$, если $f_1, f_2, \ldots, f_m \in S$. Найдем $\varphi^* = \varphi^*(f_1^*, f_2^*, \ldots, f_m^*) = \overline{\varphi}(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_m}) = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in S$. Этот же результат следует и из теоремы 1.5.

4. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *линейной*, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$,

   где $a_i \in \{0, 1\}$. Класс линейных функций обозначается через L. Он, очевидно, содержит константы 0 и 1, тождественную функцию x, функции $\bar{x}, x_1 \oplus x_2$. Функции $x_1 \wedge x_2$ и $x_1 \vee x_2 \notin L$.

   Класс линейных функций L функционально замкнут. Если $f_1 = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_{n_1}x_{n_1} \in L$ и $f_2 = b_0 \oplus b_1x_1 \oplus \ldots \oplus b_{n_2}x_{n_2} \in L$, то $a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_i(b_0 \oplus b_1x_1 \oplus \ldots \oplus b_{n_2}x_{n_2}) \oplus a_{i+1}x_{i+1} \oplus \ldots \oplus a_{n_1}x_{n_1} \in L$.

   Это очевидно, если вспомнить, что $x \oplus x = 0$, $x \cdot x = x$, $0 \oplus x = x$. Переименование переменных также не выводит из L.

5. Последний класс наиболее важных замкнутых булевых функций — монотонные.

Введем отношения частичного порядка на наборах переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для двух наборов $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\bar{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ выполнено отношение предшествования $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$, если $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, \ldots, \alpha_n \le \beta_n$. Например, $(0, 1, 0, 1) \preccurlyeq (1, 1, 0, 1)$. Оценки $(0, 1, 0, 1)$ и $(1, 1, 0, 1)$ называются *сравнимыми*, а оценки $(0, 1, 0, 1)$ и $(1, 0, 1, 1)$ — *несравнимыми*. Введенное отношение $\prec$ или $\preccurlyeq$ есть отношение частичного порядка.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ таких, что $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$, имеет место неравенство $f(\bar{\alpha}) \le f(\bar{\beta})$. Класс монотонных функций обозначается через M. Очевидно, что монотонными функциями будут 0, 1, x, $x_1 \wedge x_2$ и $x_1 \vee x_2$. Функция $x_1 \to x_2$ не монотонна, т. к. $(0,0) \prec (1,0)$, но $f(0,0) = f(1,0) = 0$.

Покажем, что класс монотонных функций замкнут. Для установления замкнутости класса M достаточно показать, что функция $\tilde{\varphi} = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in M$, если $\varphi, f_1, f_2, \ldots, f_m \in M$. Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{x}^{(1)} = (x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,k_1})$, $\bar{x}^{(2)} = (x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,k_2}), \ldots, \bar{x}^{(m)} = (x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,k_m})$ — наборы переменных функций $\varphi, f_1, f_2, \ldots, f_m$ соответственно, причем множество переменных функции φ состоит из тех и только тех переменных, которые встречаются у функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Пусть $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — два набора переменных $\bar{x}$, причем $\bar{\alpha} \preccurlyeq \bar{\beta}$. Эти два набора определяют наборы $\bar{\alpha}^{(1)}, \bar{\beta}^{(1)}, \bar{\alpha}^{(2)}, \bar{\beta}^{(2)}, \ldots, \bar{\alpha}^{(m)}, \bar{\beta}^{(m)}$ переменных $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \ldots, \bar{x}^{(m)}$, причем такие, что $\bar{\alpha}^{(1)} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(1)}$, $\bar{\alpha}^{(2)} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(2)}, \ldots, \bar{\alpha}^{(m)} \preccurlyeq \bar{\beta}^{(m)}$.

Функции $\varphi, f_1, f_2, \ldots, f_m \in M$, т. е. $f_1\left(\bar{\alpha}^{(1)}\right) \le f_1\left(\bar{\beta}^{(1)}\right)$, $f_2\left(\bar{\alpha}^{(2)}\right) \le f_2\left(\bar{\beta}^{(2)}\right), \ldots, f_m\left(\bar{\alpha}^{(m)}\right) \le f_m\left(\bar{\beta}^{(m)}\right)$,

поэтому $\left(f_1\left(\bar{\alpha}^{(1)}\right), f_2\left(\bar{\alpha}^{(2)}\right), \ldots, f_m\left(\bar{\alpha}^{(m)}\right)\right) \preccurlyeq \left(f_1\left(\bar{\beta}^{(1)}\right), f_2\left(\bar{\beta}^{(2)}\right), \ldots, f_m\left(\bar{\beta}^{(m)}\right)\right)$. В силу монотонности (по условию) функции φ получим: $\varphi\left(f_1\left(\bar{\alpha}^{(1)}\right), f_2\left(\bar{\alpha}^{(2)}\right), \ldots, f_m\left(\bar{\alpha}^{(m)}\right)\right) \le \varphi\left(f_1\left(\bar{\beta}^{(1)}\right), f_2\left(\bar{\beta}^{(2)}\right), \ldots, f_m\left(\bar{\beta}^{(m)}\right)\right)$, т. е. $\tilde{\varphi} = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m) \in M$.

Классы P_0, P_1, S, L и M неполные и попарно различные, т. к. можно привести примеры булевых функций, не принадлежащих ни одному из этих классов, и примеры функций, принадлежащих одному из любых двух классов, но не принадлежащих другому. Но оказывается, что для проверки полноты системы булевых функций можно ограничиться рассмотренными пятью функционально замкнутыми классами.

Теорема 1.15 (*теорема Поста*[*] *о функциональной полноте*). **Для того чтобы система булевых функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ была полной, необходимо**

[*] Эмиль Леон Пост (1897–1954) — американский математик и логик.

и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов P_0, P_1, S, L и M.

Для проверки, выполняются ли для некоторой системы функций $\{f_1, f_2, ..., f_m\}$ условия теоремы Поста, можно составлять таблицы, которые называются *таблицами Поста*. Рассмотрим следующий пример: доказать полноту системы функций $x \oplus y \oplus z, xy, 0, 1$. Таблица Поста будет иметь следующий вид (табл. 1.15.1).

Таблица 1.15.1

Функция	P_0	P_1	S	L	M
$x \oplus y \oplus z$	+	+	+	+	–
xy	+	+	–	–	+
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+

В клетках этой таблицы пишется знак "+" или "–" в зависимости от того, принадлежит рассматриваемая функция заданному функционально замкнутому классу или нет. Для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце был хотя бы один минус.

1. $f_1(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$. f_1 — функция, сохраняющая нуль, ибо $0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$, аналогично она сохраняет единицу $1 \oplus 1 \oplus 1 = 1$. Найдем двойственную ей функцию $f_1^* = \overline{f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = (x \oplus 1) \oplus (y \oplus 1) \oplus (z \oplus 1) \oplus 1 = = x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = x \oplus y \oplus z$, т. е. $f_1 \in S$. Очевидно, что f_1 — линейная функция. Осталось проверить ее на монотонность. Выберем два набора значений переменных $(0, 1, 0) \prec (0, 1, 1)$, $f_1(0, 1, 0) = 1 > f_1(0, 1, 1) = 0$. Итак, $f_1 \notin M$.
2. $f_2(x, y) = xy$. Проверим принадлежность f_2 к каждому из пяти классов функций. $0 \cdot 0 = 0$, $f_2 \in P_0$, $1 \cdot 1 = 1$, $f_2 \in P_1$, $f_2^* = \overline{f_2(\bar{x}, \bar{y})} = \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \equiv x \vee y$, т. е. f_2 — несамодвойственная функция. f_2 не линейна, т. к. содержит произведение переменных xy. Наконец, $f_2 \in M$, потому что имеется семь сравнимых наборов значений переменных: $(0, 0) \preccurlyeq (0, 0)$,

$(0,0)\prec(1,0)$, $(0,0)\prec(0,1)$, $(1,0)\prec(1,1)$, $(0,1)\prec(1,1)$, $(0,0)\prec(1,1)$ и $(1,1)\preccurlyeq(1,1)$. Очевидно, что для любого из них $f_2(\tilde{\alpha})\le f_2(\tilde{\beta})$.

3. $f_3=0$ и $f_4=1$ проверяются элементарно.

Собственный функционально замкнутый класс называется *предполным*, если он не содержится ни в каком функционально замкнутом классе, отличном от самого себя и от класса всех функций алгебры логики. Итак, какой-то класс функций K называется *предполным* (или *максимальным*), если K — неполный, а для любой $f\in P_2$ и $f\notin K$, класс $K\cup\{f\}$ — полный. Из определения следует, что предполный класс является замкнутым. В алгебре логики существуют только пять предполных классов, а именно: P_0, P_1, S, L и M.

Система функций $G=\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$ называется *независимой*, если никакая функция f_i системы G не представима суперпозициями функций из $G\setminus\{f_i\}$.

Независимая система функций G называется *базисом* замкнутого класса K, если всякая функция из K есть суперпозиция функций из G. Таким образом, система функций G из замкнутого класса K называется его *базисом*, если она полна в K, а всякая ее собственная подсистема не является полной в K.

Теорема 1.16. **Каждый замкнутый класс из P_2 имеет конечный базис.**

1.16. Производные от булевых функций

В дискретной математике и математической логике отсутствует понятие предела, однако используется термин *производная*. Это связано с разложением булевой функции в ряд, аналогичный ряду Маклорена* в точке (на наборе) $(0,0,\ldots,0)$ или ряд Тейлора** в произвольной точке (на произвольном наборе).

Производной первого порядка $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ от булевой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ по переменной x_i называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)\oplus f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n), \quad (1.16.1)$$

---

* Колин Маклорен (1698–1746) — шотландский математик.

** Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик.

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — единичная остаточная функция, $f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — нулевая остаточная функция, $\oplus$ — операция суммирования по модулю два.

Производная первого порядка $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ от булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определяет условия, при которых эта функция изменяет значение при переключении переменной x_i.

Смешанной производной $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}$ от булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется выражение вида

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_{k-1}}} \right). \qquad (1.16.2)$$

Эту производную вычисляют, применяя соотношение (1.16.1) k раз при фиксации переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ по порядку (порядок фиксации переменных не существенен).

Производной k-го порядка от булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ называется выражение, равное сумме по модулю числа 2 всех производных первого порядка, вторых, третьих,..., k-х смешанных производных при фиксации переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \sum_{i,j,i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \oplus \sum_{\substack{i,j,l \\ i \neq j, i \neq l, j \neq l}} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \oplus$$

$$\ldots \oplus \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}, \qquad (1.16.3)$$

где суммирование под знаком суммы в этой и последующих формулах, посвященных производным от булевых функций, производится также по модулю два.

Производная k-го порядка определяет условия, при которых функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ изменяет значение при одновременном изменении значений переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x,y)=\left(\overline{xy}\to\bar{x}\right)\wedge\overline{\left(xy\to\bar{y}\right)}$. Очевидно, что

$$f(x,y)=\left(xy\vee\bar{x}\right)\wedge\left(\overline{\overline{xy}}\wedge\bar{\bar{y}}\right)\equiv\left(xy\vee\bar{x}\right)\wedge xy\equiv\left(\bar{x}\vee y\right)\wedge xy\equiv$$

$$\equiv\bar{x}xy\vee xyy\equiv xy.$$

Тогда $$\frac{\partial f}{\partial x}=1\cdot y\oplus 0\cdot y=y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\cdot 1\oplus x\cdot 0=x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=1\oplus 0=1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial(x,y)}=\frac{\partial f}{\partial x}\oplus\frac{\partial f}{\partial y}\oplus\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=y\oplus x\oplus 1=$$

$$=y\oplus\bar{x}=\left(y\wedge\bar{\bar{x}}\right)\vee\left(\bar{y}\wedge\bar{x}\right)\equiv xy\vee\bar{x}\bar{y},\ \text{т. к.}\ x\oplus y=\overline{x\leftrightarrow y}\equiv$$

$$\equiv\left(x\wedge\bar{y}\right)\vee\left(\bar{x}\wedge y\right),\ \text{а}\ \bar{x}=x\oplus 1.$$

Практическое использование введенные понятия производных от булевых функций находят при проектировании и расчете логических схем переключательных устройств, а именно: условия переключения различных каналов таких схем зависят от значений производных от булевых функций.

Выражение (1.14.1) для многочлена Жегалкина (частный случай (1.14.2)) можно более подробно расписать в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_k}a_{i_1i_2\dots i_k}x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}=f_0\oplus\sum_{i_1=1}^{n}f_{i_1}x_{i_1}\oplus\sum_{\substack{i_1,i_2=1\\ i_1\neq i_2}}^{n}f_{i_1i_2}x_{i_1}x_{i_2}\oplus\dots\oplus$$

$$\oplus\sum_{\substack{i_1,i_2,\dots,i_k=1\\ i_1\neq i_2,i_1\neq i_3,\dots,i_{k-1}\neq i_k}}^{n}f_{i_1i_2\dots i_k}x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k}\oplus\dots\oplus f_{12\dots n}x_1x_2\dots x_n, \qquad (1.16.4)$$

где $a_0=f_0$, $a_{i_1}=f_{i_1}$ и т. д., $f_0, f_{i_1}, f_{i_1i_2},\dots,f_{12\dots n}\in\{0,1\}$.

Последовательно продифференцируем полином Жегалкина от функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ по переменным $x_1,x_2,\dots,x_n$ и найдем значения всех производных в точке $(0,0,\dots,0)$. При этом поскольку полиномы Жегалкина состоят из одночленов, в которые все переменные входят не выше, чем в первой степени, то $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\bigwedge_{j=1}^{n}x_j\right)=\bigwedge_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}x_j$. Кроме того, по свойству производной

$\frac{\partial(f \oplus g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \oplus \frac{\partial g}{\partial x}$. Тогда после дифференцирования получаем $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(0,0,\ldots,0)} = f$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(0,0,\ldots,0)} = f_{ij}$, $\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k}\right|_{(0,0,\ldots,0)} = f_{12\ldots k}$.

Действительно, после дифференцирования по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_k$ все члены в разложении (1.16.4) до $f_{12\ldots k}$ обращаются в нуль, а в результате подстановки $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$ остальные члены этого разложения, кроме $f_{12\ldots k}$, также будут равны нулю. Тогда из (1.16.4) после несложных преобразований получаем следующую теорему.

Теорема 1.17. **Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима своим значением на наборе $(0,0,\ldots,0)$ и значениями всех производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, $i \neq j$ на этом наборе в виде**

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(0,0,\ldots,0) \oplus \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(0,0,\ldots,0)} \wedge x_i \oplus \sum_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(0,0,\ldots,0)} \wedge$$

$$\wedge x_i x_j \oplus \ldots \oplus \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_k=1,\\ i_1\neq i_2, i_1 \neq i_3,\ldots,i_{k-1}\neq i_k}}^{n} \left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}\right|_{(0,0,\ldots,0)} \wedge x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus \ldots$$

$$\ldots \oplus \left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right|_{(0,0,\ldots,0)} \wedge x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{1.16.5}$$

Это разложение аналогично разложению в ряд Маклорена для функции n переменных. Для получения разложения булевой функции в ряд, аналогичный ряду Тейлора на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, воспользуемся параллельным переносом начала координат.

Пусть $x_1' = x_1 \oplus \sigma_1$, $x_2' = x_2 \oplus \sigma_2, \ldots$, $x_n' = x_n \oplus \sigma_n$. Тогда точка $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ в системе координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будет соответствовать точке $(0, 0, \ldots, 0)$ в системе $x_1', x_2', \ldots, x_n'$.

Разложим булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по формуле (1.16.5) в точке $(0, 0, \ldots, 0)$ и заменим каждую переменную x_i^j на $x_i \oplus \sigma_i$; получим формулу и теорему о разложении булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на произвольном наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Теорема 1.18. **Любая булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представима своим значением на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ и значениями всех своих производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, $i \neq j$, на этом наборе в виде**

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \oplus \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} \wedge (x_i \oplus \sigma_i) \oplus \\ & \oplus \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^{n} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} \wedge (x_i \oplus \sigma_i)(x_j \oplus \sigma_j) \oplus \ldots \\ & \ldots \oplus \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, \\ i_1 \neq i_2, i_1 \neq i_3, \ldots, i_{k-1} \neq i_k}}^{n} \left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}}\right|_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} \bigwedge_{j=1}^{k} (x_{i_j} \oplus \sigma_{i_j}) \oplus \ldots \\ & \ldots \oplus \left.\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}\right|_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)} \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i \oplus \sigma_i). \end{aligned} \qquad (1.16.6)$$

Рассмотрим все этапы получения разложения по формуле (1.16.5) для конкретной булевой функции $f(x, y, z) = (x y \to yz) \to ((x \to y) \to (z \to y))$. Упростим эту формулу:

$$f(x, y, z) = \overline{\overline{xy} \vee yz} \vee \left(\overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{z} \vee y\right) \equiv \left(xy \wedge \overline{yz}\right) \vee \left(\left(x \wedge \overline{y}\right) \vee \overline{z} \vee y\right) \equiv$$

$$\equiv \left(xy \wedge \left(\overline{y} \vee \overline{z}\right)\right) \vee \left(x \vee y \vee \overline{z}\right) \equiv xy\overline{y} \vee xy\overline{z} \vee x \vee y \vee \overline{z} \equiv x \vee y \vee \overline{z}.$$

Получим вначале представление этой функции полиномом Жегалкина

$$f(x, y, z) = x \vee y \vee \overline{z} \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z} = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus 1 =$$

$$= (xy \oplus y \oplus x \oplus 1)z \oplus 1 = xyz \oplus yz \oplus xz \oplus z \oplus 1.$$

Найдем теперь все необходимые производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \vee y \vee \bar{z} \oplus 0 \vee y \vee \bar{z} = 1 \oplus y \vee \bar{z} = \overline{y \vee \bar{z}} = \bar{y}z.$$

То же самое получается из дифференцирования самого полинома Жегалкина

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz \oplus 0 \oplus z \oplus 0 \oplus 0 = yz \oplus z = z(y \oplus 1) = z\bar{y}$. Далее аналогично:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \vee 1 \vee \bar{z} \oplus x \vee 0 \vee \bar{z} = 1 \oplus x \vee \bar{z} = \overline{x \vee \bar{z}} = \bar{x}z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x \vee y \vee \bar{1} \oplus x \vee y \vee \bar{0} =$$

$$= x \vee y \oplus 1 = \overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \bar{1} \cdot z \oplus \bar{0} \cdot z = z;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1 \cdot \bar{y} \oplus 0 \cdot \bar{y} = \bar{y}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 1 \cdot \bar{x} \oplus 0 \cdot \bar{x} = \bar{x};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = 1 \oplus 0 = 1.$$

Тогда формула (1.16.5) для данной булевой функции от трех переменных будет иметь вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(0,0,0) \oplus \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{(0,0,0)} \wedge x_i \oplus \sum_{\substack{i,j=1,\\ i \neq j}}^{3} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{(0,0,0)} \wedge x_i x_j \oplus$$

$$\oplus \left.\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right|_{(0,0,0)} \wedge x_1 x_2 x_3, \text{ т. е.}$$

$$f(x, y, z) = x \vee y \vee \bar{z} = 1 \oplus (\bar{y}z)\big|_{(0,0,0)} \wedge x \oplus (\bar{x}z)\big|_{(0,0,0)} \wedge y \oplus (\bar{x}\bar{y})\big|_{(0,0,0)} \wedge$$

$$\wedge z \oplus (z)\big|_{(0,0,0)} \wedge xy \oplus (\bar{y})\big|_{(0,0,0)} \wedge xz \oplus (\bar{x})\big|_{(0,0,0)} \wedge yz \oplus 1\big|_{(0,0,0)} \wedge xyz =$$

$$= 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \cdot z \oplus 0 \oplus 1 \cdot xz \oplus 1 \cdot yz \oplus 1 \cdot xyz =$$

$$= 1 \oplus z \oplus xz \oplus yz \oplus xyz.$$

1.17. k-значные логики

Рассмотренная в предыдущих разделах двузначная логика допускает обобщение на k-значный случай. При этом хотя в k-значных логиках сохраняются многие свойства и результаты двузначной логики, часто наблюдаемые факты и явления обнаруживают принципиальное отличие от рассмотренной алгебры логики. Многие решенные задачи двузначной логики не имеют такого исчерпывающего решения в k-значной логике, а иные и вовсе не решены.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *функцией k-значной логики*, если ее аргументы определены на множестве $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, состоящем из k элементов, а сама функция принимает значения из того же множества.

Множество всех функций k-значной логики обозначается через P_k. Очевидно, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ полностью определена, если задана ее истинностная таблица (табл. 1.17.1).

Таблица 1.17.1

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0,0,\dots,0,0)$
0	0	...	0	1	$f(0,0,\dots,0,1)$
0	0	...	0	2	$f(0,0,\dots,0,2)$
...	...	...	...	...	...
0	0	...	0	$k-1$	$f(0,0,\dots,0,k-1)$
0	0	...	1	0	$f(0,0,\dots,1,0)$
0	0	...	1	1	$f(0,0,\dots,1,1)$
...	...	...	...	...	...
0	0	...	1	$k-1$	$f(0,0,\dots,1,k-1)$
...	...	...	...	...	...
$k-1$	$k-1$	...	$k-1$	$k-1$	$f(k-1,k-1,\dots,k-1,k-1)$

Так как число k-значных наборов длины n равно k^n, то число функций от n переменных в k-значной логике P_k равно k^{k^n}.

Из сказанного ясно, что в P_k в значительной степени возрастают трудности по сравнению с P_2, даже в возможности перебора функций. Например, если функций от двух переменных в P_2 всего 16, то уже в P_3 их $3^{3^2} = 3^9 = 19683$. Число строк в истинностной таблице, равное k^n, тоже растет очень быстро. Например, при $k = n = 3$ таблица имеет следующий вид (табл. 1.17.2).

Таблица 1.17.2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	$f(0,0,0)$	1	1	2	$f(1,1,2)$
0	0	1	$f(0,0,1)$	1	2	0	$f(1,2,0)$
0	0	2	$f(0,0,2)$	1	2	1	$f(1,2,1)$
0	1	0	$f(0,1,0)$	1	2	2	$f(1,2,2)$
0	1	1	$f(0,1,1)$	2	0	0	$f(2,0,0)$
0	1	2	$f(0,1,2)$	2	0	1	$f(2,0,1)$
0	2	0	$f(0,2,0)$	2	0	2	$f(2,0,2)$
0	2	1	$f(0,2,1)$	2	1	0	$f(2,1,0)$
0	2	2	$f(0,2,2)$	2	1	1	$f(2,1,1)$
1	0	0	$f(1,0,0)$	2	1	2	$f(2,1,2)$
1	0	1	$f(1,0,1)$	2	2	0	$f(2,2,0)$
1	0	2	$f(1,0,2)$	2	2	1	$f(2,2,1)$
1	1	0	$f(1,1,0)$	2	2	2	$f(2,2,2)$
1	1	1	$f(1,1,1)$				

В P_k, как и в P_2, вводятся понятия существенной и несущественной (фиктивной) перемениой, понятие равенства и суперпозиции функций.

Рассмотрим примеры некоторых конкретных функций из P_k, которые можно считать элементарными.

1. $\bar{x} = (x+1) \bmod k$ — отрицание Поста. (1.17.1)

   $\bar{x}$ в этой функции представляет собой обобщение отрицания в смысле "циклического" сдвига значений. Например, при $k = 3$ для $\bar{x} = (x+1) \bmod 3$ будем иметь следующую таблицу истинности (табл. 1.17.3).

Таблица 1.17.3

x	$\bar{x} = (x+1) \bmod 3$
0	1
1	2
2	0

Таблица 1.17.4

x	$Nx = k-1-x$
0	2
1	1
2	0

2. $\tilde{x} = Nx = k-1-x$. (1.17.2)

   Это другое обобщение отрицания в смысле "зеркального" отображения значений. Эта функция носит название *отрицания Лукасевича**. Для $k = 3$ таблица истинности этой функции приведена в табл. 1.17.4.

3. $$J_i(x) = \begin{cases} k-1, x = i, \\ 0, x \neq i, (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1). \end{cases} \quad (1.17.3)$$

   Эта функция называется *характеристической функцией второго рода* числа i и обобщает некоторые свойства отрицания. Если $k = 3$, то $J_i(x) = \begin{cases} 2, x = i, \\ 0, x \neq i, (i = 0,1,2) \end{cases}$, а таблица истинности представлена в табл. 1.17.5.

Таблица 1.17.5

i	x	$J_i(x)$	i	x	$J_i(x)$	i	x	$J_i(x)$
0	0	2	0	1	0	0	2	0
1	0	0	1	1	2	1	2	0
2	0	0	2	1	0	2	2	2

* Ян Лукасевич (1878–1956) — польский математик и логик.

4. $j_i(x)=\begin{cases} 1, x=i, \\ 0, x \neq i, (i=0,1,2,\dots,k-1) \end{cases}$ (1.17.4)

(характеристическая функция первого рода значения i).

$$\min(x_1,x_2), \tag{1.17.5}$$

(первое обобщение конъюнкции).

5. $(x_1 \cdot x_2)\mathrm{mod}k$ (1.17.6)

(произведение по модулю k и второе обобщение конъюнкции).

Таблицы истинности для этих функций приведены в табл. 1.17.6 и 1.17.7 ($k=3$)

Таблица 1.17.6

x_1	x_2	$\min(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	0
1	1	1
1	2	1
2	0	0
2	1	1
2	2	2

Таблица 1.17.7

x_1	x_2	$(x_1 \cdot x_2)\mathrm{mod}3$
0	0	0
0	1	0
0	2	0
1	0	0
1	1	1
1	2	2
2	0	0
2	1	2
2	2	1

6. $\max(x_1,x_2)$ (1.17.7)

(обобщение дизъюнкции) (см. табл. 1.17.8).

7. $(x_1+x_2)\mathrm{mod}k$ (1.17.8)

(сумма по модулю k) (см. табл. 1.17.9).

8. Усеченная разность $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & 0 \le x < y \le k-1, \\ x-y, & 0 \le y \le x \le k-1. \end{cases}$

9. Импликация $x \to y = \begin{cases} k-1, \ 0 \le x < y \le k-1, \\ (k-1)-x+y, \ 0 \le y \le x \le k-1. \end{cases}$

При $k = 3$ операция импликации имеет вид $x \to y = \begin{cases} 2, \ 0 \le x < y \le 2, \\ 2-x+y, \ 0 \le y \le x \le 2 \end{cases}$, а ее таблица истинности дана в табл. 1.17.10.

Таблица 1.17.8

x_1	x_2	$\max(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	0	1
1	1	1
1	2	2
2	0	2
2	1	2
2	2	2

Таблица 1.17.9

x_1	x_2	$(x_1 + x_2)\mathrm{mod}3$
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	0	1
1	1	2
1	2	0
2	0	2
2	1	0
2	2	1

Таблица 1.17.10

x	y	$x \to y$	x	y	$x \to y$	x	y	$x \to y$
0	0	2	1	0	1	2	0	0
0	1	2	1	1	2	2	1	1
0	2	2	1	2	2	2	2	2

10. Функция Вебба: $(\max(x, y)+1)\mathrm{mod}\,k$.

11. Разность по модулю k: $x - y = \begin{cases} x-y, \ 0 \le y \le x \le k-1, \\ k-(y-x), \ 0 \le x < y \le k-1. \end{cases}$

При $k=3$ получим $x-y=\begin{cases} x-y, & 0\le y\le x\le 2,\\ 3-(y-x), & 0\le x<y\le 2.\end{cases}$ Таблица истинности этой операции приведена в табл. 1.17.11.

Таблица 1.17.11

x	y	$(x-y)\bmod 3$	x	y	$(x-y)\bmod 3$	x	y	$(x-y)\bmod 3$
0	0	0	1	0	1	2	0	2
0	1	2	1	1	0	2	1	1
0	2	1	1	2	2	2	2	0

Из этого списка функций видно, что элементарные функции алгебры логики имеют при $k\ge 3$ по несколько аналогов, каждый из которых обобщает соответствующее свойство функции.

Функции $\min$, $\max$, $+$, $\cdot$ (или $\cdot$) обладают свойствами коммутативности и ассоциативности:

1. $x_1\cdot x_2=x_2\cdot x_1$;
   $x_1+x_2=x_2+x_1$;
2. $(x_1\cdot x_2)\cdot x_3=x_1\cdot(x_2\cdot x_3)$;
   $(x_1+x_2)+x_3=x_1+(x_2+x_3)$.

Кроме того, справедливы следующие соотношения:

1. $(x_1+x_2)\cdot x_3=(x_1\cdot x_3)+(x_2\cdot x_3)$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.
2. $\max(\min(x_1,x_2),x_3)=\min(\max(x_1,x_3),\max(x_2,x_3))$ — дистрибутивность операции $\max$ относительно операции $\min$.
3. $\min(\max(x_1,x_2),x_3)=\max(\min(x_1,x_3),\min(x_2,x_3))$ — дистрибутивность операции $\min$ относительно операции $\max$.
4. $\max(x,x)=x$, $\min(x,x)=x$ — идемпотентность операций $\min$ и $\max$.
5. $\min(\tilde{}x_1,\tilde{}x_2)=\tilde{}\max(x_1,x_2)$,
   $\max(\tilde{}x_1,\tilde{}x_2)=\tilde{}\min(x_1,x_2)$ — аналоги правил де Моргана.

6. $-x = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ k - x, & x \neq 0. \end{cases}$

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n) \in P_k$ называется *существенной*, если она существенно зависит не менее чем от двух переменных и принимает все k значений из множества $\{0, 1, 2, ..., k-1\}$.

Обобщим теперь понятие совершенной дизъюнктивной нормальной формы на k-значный случай. Это можно сделать не единственным образом. Будем обозначать функции $\min(x_1, x_2)$ и $\max(x_1, x_2)$ соответственно через $(x_1 \wedge x_2)$ и $(x_1 \vee x_2)$.

Функция $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *конъюнкцией на k-значной логике*. Тогда элементарная конъюнкция будет иметь вид $J_{\sigma_1}(x_1) \wedge J_{\sigma_2}(x_2) \wedge ... \wedge J_{\sigma_n}(x_n)$. Она отлична от нуля лишь на наборе $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ и равна $k-1$ на этом наборе.

Для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ СДНФ при $k = 2$ имеет вид (1.8.3) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee\limits_{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \wedge x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}$, где дизъюнкция берется по всем двоичным наборам.

Функция от n переменных k-значной логики единственным образом представляется в виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee\limits_{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) \wedge J_{\sigma_1}(x_1) \wedge J_{\sigma_2}(x_2) \wedge ... \wedge J_{\sigma_n}(x_n) =$$
$$= \max\limits_{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n} \{\min(f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n), J_{\sigma_1}(x_1), J_{\sigma_2}(x_2), ..., J_{\sigma_n}(x_n))\} \quad (1.17.9)$$

Эта формула — аналог СДНФ для функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в k-значной логике. В литературе данное разложение называется *первой формой*. Доказывается формула прямой проверкой.

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в формуле (1.17.9) разложена по системе функций $\{0, 1, 2, ..., k-1, J_0(x), J_1(x), ..., J_n(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$. Поскольку это разложение справедливо для любой произвольной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то данная система функций полна. С этой полной системой связано несколько групп тождеств, которые позволяют перейти от любой формулы над данным множеством функций к другой эквивалентной ей формуле.

k-значная логика, определяемая полной системой функций $\{0, 1, 2, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_n(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$, называется в литературе *алгеброй Россера*[*]*-Тьюкета*[**]. Другими часто встречающимися k-значными логиками являются логики, определяемые следующими полными системами функций:

- алгебра Поста $\{0, 1, \ldots, k-1, \max(x_1, x_2), \sim\}$, где $\sim x = (x+1) \bmod k$;
- алгебра Вебба $\{0, 1, \ldots, k-1, \circ\}$, где $x_1 \circ x_2 = (\max(x_1, x_2) + 1) \bmod k$.

- **Пример.** Пусть $f(x, y) = \sim(\sim x \vee y) \vee (\sim y \vee x)$. Представим эту формулу при $k = 3$ аналогом СДНФ в форме (1.17.9). Метод равносильных преобразований, которым мы пользовались в P_2, здесь применить значительно труднее. Для этого необходимо иметь все тождества в P_3, связанные с системой функций $\{0, 1, 2, J_0(x), J_1(x), J_2(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$. Воспользуемся истинностной таблицей для $f(x, y)$ (табл. 1.17.12).

Таблица 1.17.12

x	y	$\sim x$	$\sim y$	$\sim x \vee y$	$\sim y \vee x$	$\sim(\sim x \vee y)$	$f(x, y)$
0	0	2	2	2	2	0	2
0	1	2	1	2	1	0	1
0	2	2	0	2	0	0	0
1	0	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	1	0	2	1	0	1
2	0	0	2	0	2	2	2
2	1	0	1	1	2	1	2
2	2	0	0	2	2	0	2

[*] Джон Барклей Россер (1907–1989) — американский математик.
[**] Этвел Руфус Тьюкет (р.1914) — американский математик.

$$\text{СДНФ } f(x,y)=\underset{\sigma_1,\sigma_2}{\vee} f(\sigma_1,\sigma_2)\wedge J_{\sigma_1}(x)\wedge J_{\sigma_2}(y)=(f(0,0)\wedge J_0(x)\wedge J_0(y))\vee$$
$$\vee(f(0,1)\wedge J_0(x)\wedge J_1(y))\vee(f(0,2)\wedge J_0(x)\wedge J_2(y))\vee(f(1,0)\wedge J_1(x)\wedge$$
$$\wedge J_0(y))\vee(f(1,1)\wedge J_1(x)\wedge J_1(y))\vee(f(1,2)\wedge J_1(x)\wedge J_2(y))\vee(f(2,0)\wedge J_2(x)\wedge$$
$$\wedge J_0(y))\vee(f(2,1)\wedge J_2(x)\wedge J_1(y))\vee(f(2,2)\wedge J_2(x)\wedge J_2(y))=(2\wedge J_0(x)\wedge$$
$$\wedge J_0(y))\vee(1\wedge J_0(x)\wedge J_1(y))\vee(0\wedge J_0(x)\wedge J_2(y))\vee(2\wedge J_1(x)\wedge J_0(y))\vee$$
$$\vee(1\wedge J_1(x)\wedge J_1(y))\vee(1\wedge J_1(x)\wedge J_2(y))\vee(2\wedge J_2(x)\wedge J_0(y))\vee(2\wedge J_2(x)\wedge$$
$$\wedge J_1(y))\vee(2\wedge J_2(x)\wedge J_2(y)).$$

Проверим, например, значение функции на наборе $(1,2)$:

$$f(1,2)=1=(2\wedge J_0(1)\wedge J_0(2))\vee(1\wedge J_0(1)\wedge J_1(2))\vee(0\wedge J_1(1)\wedge J_0(2))\vee$$
$$\vee(2\wedge J_1(1)\wedge J_0(2))\vee(1\wedge J_1(1)\wedge J_1(2))\vee(1\wedge J_1(1)\wedge J_2(2))\vee(2\wedge J_2(1)\wedge$$
$$\wedge J_0(2))\vee(2\wedge J_2(1)\wedge J_1(2))\vee(2\wedge J_2(1)\wedge J_2(2))=(2\wedge 0\wedge 0)\vee(1\wedge 0\wedge 0)\vee$$
$$\vee(0\wedge 0\wedge 2)\vee(2\wedge 2\wedge 0)\vee(1\wedge 2\wedge 0)\vee(1\wedge 2\wedge 2)\vee(2\wedge 0\wedge 0)\vee(2\wedge 0\wedge 0)\vee$$
$$\vee(2\wedge 0\wedge 2)=0\vee 0\vee 0\vee 0\vee 0\vee 1\vee 0\vee 0=1.$$

При использовании формулы (1.17.9) особо отметим необходимость присутствия констант $0,1,2,\ldots,k-1$, чего не было в P_2, т. к. там можно было в СДНФ опустить коэффициенты, перейдя к дизъюнкции по наборам, на которых $f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1$.

Если в разложении $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ использовать характеристические функции первого рода, то для любой функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ из P_k имеет место представление, называемое *второй формой*:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n}\left(j_{\sigma_1}(x_1)j_{\sigma_2}(x_2)\ldots j_{\sigma_n}(x_n)f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)\right)\operatorname{mod}k. \quad (1.17.10)$$

Эта формула по структуре аналогична формуле (1.9.1).

В k-значной логике можно рассмотреть вопрос о представимости функций полиномами (аналоги полиномов Жегалкина). При этом оказывается, что такое представление возможно только для простых k.

Теорема 1.19. **Система полиномов по $\operatorname{mod} k$ полна в P_k тогда и только тогда, когда $k=p$, где p — простое число.**

В теории k-значных логик в последнее время получены значительные результаты. Они показывают существенное отличие k-значных логик от двузначного случая, кроме того, многие результаты зависят от значения числа k.

1.18. Практическое занятие № 3. Минимизация в классе дизъюнктивных нормальных форм. Замкнутые классы и полнота систем функций алгебры логики. *k*-значные логики

1.18.1. Найти сокращенную, все тупиковые и минимальные ДНФ булевой функции $f(x,y,z)$ двумя способами: а) методом Квайна и б) с помощью карт Карно. Каким классам Поста принадлежит эта функция?

1) $f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$;

2) $f(0,0,0)=f(1,1,1)=f(1,1,0)=0$;

3) $f(1,0,0)=f(0,1,1)=f(0,1,0)=0$;

4) $f(0,1,1)=f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1$;

5) $f(0,1,1)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=1$.

1.18.2. Представить $x\oplus y$ в виде СДНФ и СКНФ, найти $(x\oplus y)^*$.

1.18.3. Представить полиномами Жегалкина:

1) Основные логические операции.

2) $x\vee y\vee z$.

3) $xy\vee yz\vee xz$.

4) $xy\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee \bar{x}yz\vee \overline{xyz}$.

1.18.4. Доказать, что функция, представленная полиномом Жегалкина, существенно зависит от всех входящих в него переменных.

1.18.5. Представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной:

1) $f=\overline{(x\to y)}\oplus \bar{x}y$;

2) $f=xy\vee \overline{x\bar{y}}\vee z$;

3) $f = x\overline{y}(x \leftrightarrow y)$;

4) $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz$.

1.18.6. Найти число всех линейных функций от n переменных.

1.18.7. Найти число линейных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что $f(0, 0, \ldots, 0) = f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

1.18.8. Выяснить, принадлежит ли функция f множеству $P_1 \setminus P_0$:

1) $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$;

2) $f = m(x_1, x_2, x_3)$;

3) $f = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}$;

4) $f = (x_1 \vee \overline{x_2})\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}$.

1.18.9. Какие из указанных функций являются монотонными?

1) $xy \vee xz \vee \overline{x}z$;

2) $x \to (x \to y)$;

3) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$;

4) $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \overline{xy}$;

5) $xy \vee x \vee \overline{x}z$.

1.18.10. Перечислить все монотонные функции от двух переменных.

1.18.11. Можно ли из функции $f = x\overline{yz} \vee t(xy \to z)$ получить:

1) функцию $\overline{x}$ отождествлением переменных;

2) функцию $\overline{x}$ подстановкой констант 0, 1;

3) функцию z отождествлением переменных?

1.18.12. Доказать полноту следующих систем функций:

1) xy, $\overline{x}$;

2) $x \vee y$, $\overline{x}$;

3) $\overline{x \vee y}$;

4) $x \oplus y$, $x \vee y$, 1;

5) $x \to y$, 0.

1.18.13. Показать, что полные системы из задачи 1.18.12 являются базисами.

1.18.14. Доказать, что базис не может содержать:

1. Более пяти функций.

2) Более четырех функций.

1.18.15. Из полной в P_2 системы функций G выделить всевозможные базисы:

1) $G = \{0, x \oplus y, x \to y, xy \leftrightarrow xz\}$;

2) $G = \{x \oplus y, xy \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus 1, xy \oplus yz \oplus xz\}$;

3) $G = \{xy \vee \bar{x}z, \bar{x}, x \to y, 0, x \oplus yz\}$.

1.18.16. Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_3}$ найти все ее производные (в том числе смешанные) до третьего порядка включительно.

1.18.17. Представить следующие булевы функции значениями в точке $(0, 0,..., 0)$ и значением всех производных в этой же точке:

1) $f(x, y, z) = x \vee y \to z$;

2) $f(x, y) = x \vee y \to (x \leftrightarrow y)$;

3) $f(x, y, z) = (x \to z)(y \to z) \to (x \to y)$.

1.18.18. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $-(\bar{x}) = {\sim}x$;

2) ${\sim}(\bar{x} + y) = ({\sim}x) + ({\sim}y)$;

3) $\overline{\min(x, y)} + J_0(y \div x) - j_{k-1}(x) \cdot y = \min(\bar{x}, y)$.

1.18.19. Для заданного k представить функцию f в первой и второй формах (полученные выражения упростить):

1) $f = \bar{x}, k = 3$;

2) $f = {\sim}x, k = 4$;

3) $f = x \div y^2, k = 3$.

1.18.20. Разложить в полином по модулю k функцию f из P_k:

1) $f = x^2 \div x, k = 5$;

2) $f = \max(2x \div y, x \cdot y), k = 3$.

1.19. Схемы из функциональных элементов. Релейно-контактные схемы, оценка сложности схем

Схемой из функциональных элементов (СФЭ) называется ориентированная бесконтактная сеть с помеченными вершинами. Пусть имеется некоторое устройство с n упорядоченными входами и одним выходом (рис. 1.4). На каждый из входов может подаваться два сигнала, которые можно обозначить символами 0 и 1. Очевидно, что набор сигналов на входах однозначно определяет сигнал на выходе. Такое устройство называется *функциональным элементом*. Ясно, что каждому функциональному элементу отвечает функция алгебры логики $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Схема из функциональных элементов получается путем проведения следующих операций:

1. Один из входов какого-то функционального элемента соединяется с выходом другого функционального элемента.
2. Некоторые входы функционального элемента отождествляются, т. е. на эти входы подается один и тот же сигнал. На рис. 1.5 изображена допустимая схема из функциональных элементов.

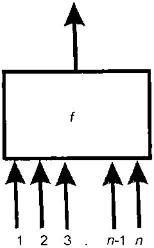


Рис. 1.4

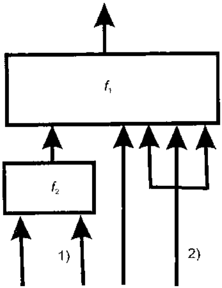


Рис. 1.5

Ясно, что функция, которая реализуется этой схемой, является суперпозицией функций, реализуемых теми функциональными элементами, из которых эта схема построена. Схемы, полученные с помощью операций 1–2, называются *допустимыми*.

Вход x функционального элемента f называется *фиктивным*, если при любом наборе сигналов на остальных входах сигнал на выходе не зависит от сигнала на входе x. Функциональные элементы называются *эквивалентными*, если они отличаются лишь нумерацией входов и фиктивными входами.

Очевидно, что язык схем из функциональных элементов в целом эквивалентен языку суперпозиции функций алгебры логики. Однако при построении схем возникают некоторые ограничения:

1. Не могут соединяться выходы.
2. У схемы должен быть лишь один выход.
3. Нельзя соединять какой-то вход элемента схемы с выходом, т. е. не допускаются циклы.

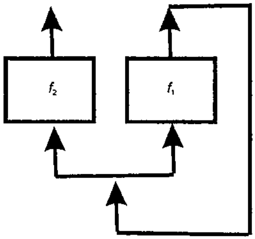


Рис. 1.6

Совокупность элементов $f_1, f_2, ..., f_k$ называется *циклом* (рис. 1.6), если выход элемента f_1 соединен с каким-то входом элемента f_2, выход элемента f_2 с каким-то входом f_3 и т. д., выход f_{k-1} — с каким- то входом f_k, а выход f_k с каким-то входом f_1. В таком случае говорят, что в соединении элементов существует *обратная связь*. Работа схем из функциональных элементов может происходить двумя способами. Первый состоит в предположении, что элементы схемы срабатывают мгновенно. Другое предположение заключается в том, что для получения выходного сигнала каждого функционального элемента требуется некоторое время. Тогда на входы внутренних элементов схемы сигналы могут приходить не одновременно, т. к. им необходимо пройти разное число элементов, да и время, требующееся различным функциональным элементам для обработки сигналов, может быть различным. Однако можно предположить, что сигналы подаются на входы схемы сколь угодно долго до тех пор, пока на выходе не появится сигнал, соответствующий тем сигналам, что подаются на вход схемы. Второе предположение более соответствует реальной ситуации, однако оно требует введения времени задержки функционального элемента — времени t, которое проходит между подачей входных сигналов и появлением выходного.

Кроме того, вводится понятие такта. Время работы функциональных элементов изменяется дискретно и принимает натуральные значения $1, 2, \ldots, k, \ldots$. Единица времени называется *тактом*. Состояния входов и выходов элементов исследуются лишь в моменты времени, кратные такту.

Обычно при рассмотрении схем из функциональных элементов вводят упрощающие предположения, например, все схемы рассматриваются как однотактные, т. е. между сигналами на входе и результирующим сигналом на выходе происходит один такт, сигналы также можно подавать через один такт.

Схема из функциональных элементов реализует некоторую функцию алгебры логики f с задержкой t, если ее входы можно отождествить с аргументами f так, что при подаче в любой момент времени на входы схемы некоторого набора сигналов на выходе через t тактов возникает сигнал, соответствующий значению функции f при значениях аргументов, отвечающих поданным сигналам. Схема, реализующая какую-либо функцию алгебры логики, называется *правильной*.

Схемы из функциональных элементов, работающие мгновенно, называются *нультактными*; схемы из однотактных функциональных элементов — *многотактными*.

В общем случае при рассмотрении схем из однотактных элементов учитываются обратные связи (рис. 1.6). Оказывается, во многих случаях можно непротиворечивым образом описать работу СФЭ с обратными связями. Дальнейшее исследование этого вопроса приводит к понятию конечного автомата.

Рассмотрим еще один способ реализации функций алгебры логики — *релейно-контактные схемы* (РКС), широко используемые в электронно-вычислительной технике. Описание и конструирование таких схем в силу их громоздкости весьма затруднительно. Однако оказалось, что при конструировании РКС можно использовать аппарат булевых функций.

Исходное замечание состоит в том, что если логической переменной x поставить в соответствие проводник, по которому идет или нет ток в зависимости от того, $x = 1$ или $x = 0$, то последовательному соединению проводников отвечает конъюнкция переменных, а параллельному — дизъюнкция. Часто проводники на схемах заменяют обозначением специальных устройств — переключателей, которые могут быть механическими и электронными. Многократно используя параллельно-последовательные соединения, можно строить сложные схемы. Очевидно, что при этом можно реализовать лишь монотонные функции.

Для реализации произвольных функций необходимо уметь реализовать отрицание. Это можно сделать при помощи устройства, называемого *реле с размыкающим контактом* (рис. 1.7). Если по обмотке катушки A ток не идет($x = 0$), то пружина оттягивает контакт B вверх, и цепь замыкается. В результате на клемме C будет ток ($x = 1$). Если же по обмотке A идет ток ($x = 1$), то контакт B притягивается вниз и на выходе C нет тока ($x = 0$).

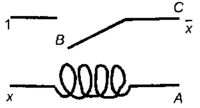


Рис. 1.7

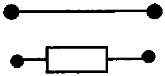


Рис. 1.8

Для РКС также существует проблема задержки сигналов на элементах схемы. Мы не будем рассматривать эту проблему, а ограничимся только схемами, в которых соединяются лишь контакты. Контакт или переключатель будем изображать отрезком или прямоугольником, концы контакта называть полюсами. Конструкция, изображенная на рис. 1.8, называется *двухполюсником*. Двухполюсник будем снабжать символом переменной x, если контакт замыкающий, и $\bar{x}$, если размыкающий. Двухполюсники соединяются полюсами. В результате схема будет представлять из себя граф.

Граф Γ с k полюсами, в котором каждое ребро помечено буквой из алфавита $X^n = \{x_1, x_2, ..., x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n\}$, называется *$k$-полюсной контактной схемой*, реализующей булевы функции переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, или $\langle k, n \rangle$-схемой. Контактная схема называется *связной* (*сильно связной*, *параллельно-последовательной*), если таковым является ее граф. Параллельно-последовательная схема называется *π-схемой*. Две схемы называются *изоморфными*, если их графы изоморфны и при этом соответствующие ребра и полюса помечены одинаково. В графе выделяются две вершины: *вход* и *выход*. Часто вход изображает полюс в виде светлого кружка, остальные полюса изображаются темными кружками.

Релейно-контактные схемы отличаются от схем из функциональных элементов тем, что в СФЭ каждый имеющийся сигнал можно было размножить без дополнительных устройств (выход элемента можно соединять с любым числом входов), в то время как для размножения сигнала в РКС его нужно подать на обмотку катушки с нужным числом положительных контактов. Второе различие заключается в том, что в РКС дизъюнкция реализуется путем параллельного соединения проводников, в СФЭ для этого необходим специальный элемент.

Какую же функцию алгебры логики реализует контактная схема? Эта функция равна единице при тех значениях аргументов, при которых в схеме есть проводимость, и нулю, если проводимости нет. Пусть a и b — два полюса контактной схемы Σ, $[a,b]$ — некоторая цепь, соединяющая a и b и $K_{[a,b]}$ — конъюнкция букв, приписанных ребрам цепи $[a,b]$. Функция $f_{a,b}(\tilde{x}^n)$, определяемая формулой

$$f_{a,b}(\tilde{x}^n) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]}, \qquad (1.19.1)$$

в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюса a и b, называется *функцией проводимости* между полюсами a и b схемы Σ. На самом деле для получения функции проводимости достаточно брать дизъюнкцию не по всем цепям, а лишь по некоторым.

Цепь Γ_1 называется *существенной*, если она ни через какую вершину графа не проходит дважды. Оказывается, что дизъюнкция конъюнкций, соответствующих существенным цепям, равносильна функции проводимости. Действительно, пусть имеется некоторая цепь, в которой некоторая вершина встречается дважды. Отбросим все контакты, которые встречаются между двумя прохождениями через эту вершину. Ясно, что при этом мы вновь получим цепь, причем если все контакты исходной цепи были замкнуты, то будут замкнуты и все контакты вновь полученной цепи. Таким образом, последовательно сокращая цепь, можно получить существенную цепь, в которой будет проводимость, если была проводимость в исходной цепи.

Посмотрим теперь, как обстоит дело с обратной задачей: построением по функции реализующей ее схемы. Представим функцию в виде ДНФ. Каждой входящей в ДНФ элементарной конъюнкции $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_k^{\sigma_k}$ поставим в соответствие схему (рис. 1.9), состоящую из последовательно соединенных контактов $x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_k^{\sigma_k}$.

Это схема элементарной конъюнкции. На рис. 1.9 и 1.10 величины $x_i^{\sigma_i}$ обозначены через y_i. После отождествления между собой с одной стороны входов всех этих схем, с другой стороны — выходов, получим функцию, соответствующую заданной схеме. Естественно, можно реализовать функцию по схемам также исходя из КНФ. Каждой элементарной дизъюнкции

$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_k^{\sigma_k}$ поставим в соответствие схему, изображенную на рис. 1.10. Затем последовательно соединим все эти схемы для всех элементарных дизъюнкций, входящих в КНФ, так, чтобы вход последующей схемы совпадал с выходом предыдущей.

Рис. 1.9

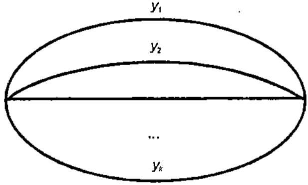


Рис. 1.10

Схему, состоящую из одного контакта, называют *элементарной*. Ясно, что любая π-схема может быть получена из элементарных за некоторое число шагов при помощи параллельных и последовательных соединений. Каждому способу построения π-схемы из элементарных схем отвечает представление функции проводимости в виде формулы, содержащей только дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

Если контактная схема является π-схемой, то ее можно разбить на несколько схем, соединенных либо последовательно, либо параллельно. Обратное тоже верно. Если схема не допускает разбиения на две схемы, соединенные либо последовательно, либо параллельно, она не является π-схемой. Для примера рассмотрим схему "мостик" (рис. 1.11), которая не является элементарной. Если две схемы соединены последовательно, то у полученной общей схемы все полюсы, кроме соединяющего, либо не имеют общих контактов ни с входом, ни с выходом всей схемы, либо имеют общий контакт или только с входом, или только с выходом. Очевидно, что какой бы из внутренних полюсов на рис. 1.11 мы не приняли за соединяющий подсхемы, оставшийся полюс будет иметь общий контакт как с входом, так и с выходом схемы. Поэтому схему "мостик" нельзя получить последовательным соединением двух схем.

Если общая схема — результат параллельного соединения двух схем, то ее контакты и полюсы можно разбить на две части так, чтобы либо в одной части содержались контакты, непосредственно соединяющие вход и выход, либо полюсы, входящие в рассматриваемые различные две части схемы и отличные от входа и выхода, не будут иметь общих контактов. Ни первая, ни вторая возможность на схеме рис. 1.11 не может реализоваться. Следовательно, эта схема не является π-схемой.

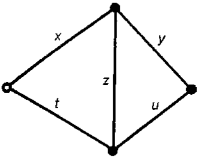


Рис. 1.11

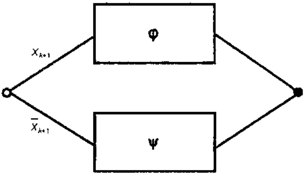


Рис. 1.12

Две контактные схемы называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию или одну и ту же систему функций. Схема называется *минимальной*, если она содержит наименьшее возможное число контактов среди всех схем, имеющих ту же функцию проводимости.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция n переменных. Обозначим через $L(f)$ число контактов в реализующей ее минимальной схеме, а через $L_\pi(f)$ — число контактов в минимальной π-схеме этой функции, тогда

$$L(f) \le L_\pi(f). \qquad (1.19.2)$$

Наибольшее значение $L(f)$ для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *функцией Шеннона** $L(n)$. Величина $L(f)$ или $L_\pi(f)$ называется *сложностью булевой функции* f в классе контактных схем или в классе π-схем. *Сложностью булевой функции* f в классе формул (над множеством связок $\{\vee, \wedge, \bar{\ }\}$) называется число вхождений символов переменных. Сложность функции f в этом классе формул обозначается через $L_\Phi(f)$.

Оценим $L(n)$ сверху, используя индуктивный способ реализации функции. Разложим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по переменной x_{k+1}: $f = x_{k+1}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) \vee \overline{x_{k+1}}\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Если функции φ и ψ уже реализованы, то функция f реализуется, как показано на рис. 1.12. Если для реализации функций от k переменных требуется не более c_k контактов, то для реализации f их нужно не более $2c_k + 2$, т. е. $c_{k+1} \le 2c_k + 2$. Так как $c_1 = 1$, то $c_k \le 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-3} + \ldots + 2^2 + 2 = 3 \cdot 2^{k-1} - 2$. Итак,

$$L(n) \le 3 \cdot 2^{n-1} - 2. \qquad (1.19.3)$$

* Клод Элвуд Шеннон (1916–2001) — американский математик.

Рассмотрим теперь способ реализации функций, не приводящий к π-схемам. При построении схемы с помощью СДНФ нужно отдельно реализовать каждую элементарную конъюнкцию, а потом параллельно соединить все полученные схемы. Можно, однако, реализовать все элементарные конъюнкции одновременно. Это делается с помощью многополюсников следующим образом. Схема с $k+1$ полюсами называется $(1,k)$-*полюсником* с одним входом и k выходами. На выходах $(1,k)$-полюсника реализуется одновременно k функций алгебры логики. Универсальным $(1,2^n)$-полюсником называется $(1,2^n)$-*полюсник* (рис. 1.13), на выходах которого реализуются все полные правильные элементарные конъюнкции от n переменных.

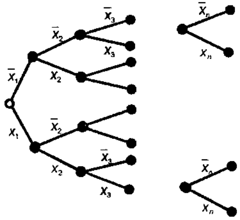


Рис. 1.13

Он получается при отождествлении входов элементарных конъюнкций (рис. 1.9) или методом, изображенным на рис. 1.13. Укажем способ построения схемы для функции алгебры логики, использующий универсальный многополюсник. Пусть нужно реализовать функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Представим ее в виде СДНФ. Отождествим у универсального $(1,2^n)$-полюсника выходы, на которых реализуются элементарные конъюнкции, входящие в СДНФ. Объявим получившийся в результате полюс выходом схемы. Эта схема, очевидно, реализует $f(x_1,x_2,...,x_n)$.

Можно похожим образом описать схему, реализующую любую булеву функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$, разложенную в СДНФ по последним $n-k$ переменным:

$$f(x_1,...,x_k;x_{k+1},...,x_n)=\bigvee_{(\sigma_{k+1},...,\sigma_n)}\varphi_{\sigma_{k+1},...,\sigma_n}(x_1,...,x_k)x_{k+1}^{\sigma_{k+1}}\wedge...\wedge x_n^{\sigma_n}. \quad (1.19.4)$$

Схема для формулы 1.19.4 состоит из двух частей (рис. 1.14): первая часть M_1 представляет собой универсальный $\left(1, 2^{n-k}\right)$-полюсник для переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$. Каждый выход схемы M_1 соответствует некоторой элементарной конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \wedge x_{k+2}^{\sigma_{k+2}} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ в формуле (1.19.4). Вторая часть M_2 представляет собой совокупность схем для всех 2^{2^k} функций φ от k переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, у которых отождествлены выходы. 2^{n-k} из этих функций — коэффициенты при элементарных конъюнкциях в (1.19.4).

Схема для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ конструируется следующим образом: отождествляется вход M_2, соответствующий функции φ, стоящей коэффициентом при конъюнкции $x_{k+1}^{\sigma_{k+1}} \wedge x_{k+2}^{\sigma_{k+2}} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$ с выходом M_1, отвечающим этой конъюнкции. Если провести отождествление всех выходов M_1, получим схему для функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

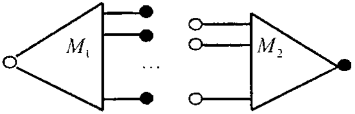


Рис. 1.14

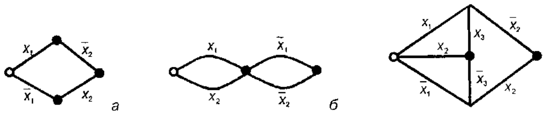


Рис. 1.15

- **Пример 1.** Найти функции, реализуемые схемами на рис. 1.15.

Первые две функции представлены π-схемами, поэтому их восстановление довольно просто:

$$\Diamond \quad f(x_1, x_2) = x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2 \equiv \overline{\overline{x_1\overline{x_2}} \wedge \overline{\overline{x_1}x_2}} = (x_1(x_2 \oplus 1) \oplus 1)((x_1 \oplus 1)x_2 \oplus 1) \oplus 1 =$$

$$= (x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1) \cdot (x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1) = x_1 \oplus x_2;$$

$$\Diamond \quad f(x_1,x_2)=(x_1\vee x_2)\wedge(\overline{x_1}\vee\overline{x_2})\equiv\overline{(\overline{x_1}\wedge\overline{x_2})}\,\overline{(x_1\wedge x_2)}=$$
$$=((x_1\oplus 1)(x_2\oplus 1)\oplus 1)(x_1x_2\oplus 1)=(x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2)(x_1x_2\oplus 1)=x_1\oplus x_2.$$

Для последнего пункта составим по формуле (1.19.1) функцию проводимости. Для этого необходимо перечислить все цепи, соединяющие начальный a и конечный b полюсы схемы: $f_{a,b}(\tilde{x}^2)=f(x_1,x_2)=\bigvee\limits_{[a,b]}K_{[a,b]}=x_1\overline{x_2}\vee\overline{x_1}x_2\vee x_2x_3\overline{x_2}\vee x_2\overline{x_3}x_2\vee\overline{x_1x_3}x_3\overline{x_2}\vee$

$$\vee\, x_1x_3\overline{x_2}x_2\equiv x_1\overline{x_2}\vee\overline{x_1}x_2\vee x_2\overline{x_3}\equiv\overline{\overline{x_1\overline{x_2}}\wedge\overline{\overline{x_1}x_2}\wedge\overline{\overline{x_3}x_2}}=(x_1(x_2\oplus 1)\oplus 1)\cdot$$
$$\cdot((x_1\oplus 1)x_2\oplus 1)((x_3\oplus 1)x_2\oplus 1)\oplus 1=(x_1\oplus x_2\oplus 1)(x_2x_3\oplus x_2\oplus 1)\oplus 1=$$
$$=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\oplus x_2=x_1x_2\overline{x_3}\oplus x_1\oplus x_2.$$

- **Пример 2.** Построить контактную схему сложности, не превышающей l, реализующую функцию $f(\tilde{x}^3)=x_1\overline{x_2}\oplus\overline{x_2}x_3\oplus x_1x_3\oplus 1,\ l=5$.

Представим функцию f в базисе $\{\vee,\wedge,\bar{\ }\}$. Если число букв окажется равным l, то построим соответствующую схему. Если же число букв будет больше l, то реализуем отдельные подформулы схемами и попытаемся совместить куски схем так, чтобы не возникло "ложных" цепей.

Так как $x\oplus y=x\overline{y}\vee\overline{x}y$, то $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{x_2}\oplus\overline{x_2}x_3\oplus x_1x_3\oplus 1=$

$$=\overline{x_2}(x_1\oplus x_3)\oplus\overline{x_1x_3}=\overline{x_2}(x_1\overline{x_3}\vee x_3\overline{x_1})\oplus\overline{x_1x_3}=x_1\overline{x_2x_3}\vee\overline{x_1x_2}x_3\oplus\overline{x_1x_3}=$$
$$=(x_1\overline{x_2x_3}\vee\overline{x_1x_2}x_3)x_1x_3\vee\overline{x_1x_3}\wedge\overline{x_1\overline{x_2x_3}\vee\overline{x_1x_2}x_3}=x_1\overline{x_2x_3}x_3\vee\overline{x_1x_2}x_3x_1\vee$$
$$\vee(\overline{x_1}\vee\overline{x_3})(\overline{x_1}\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee\overline{x_3})=\overline{x_1}x_1\vee x_1x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1}x_2\vee x_2\overline{x_3}\vee$$
$$\vee\,\overline{x_1x_3}\vee x_2\overline{x_3}=\overline{x_1}x_2\vee x_2\overline{x_3}\vee\overline{x_1x_3}=x_2(\overline{x_1}\vee\overline{x_3})\vee\overline{x_1x_3}.$$

Итак, число вхождений символов переменных равно пяти. Построим теперь схему (рис. 1.16) для функции $f(x)=x_1\overline{x_2}\oplus\overline{x_2}x_3\oplus x_1x_3\oplus 1$.

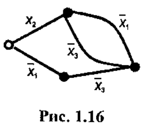


Рис. 1.16

Рассмотрим в заключение метод каскадов, применяемый для построения контактных схем. Пусть требуется построить схему для булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$. Обозначим через U_i, $i = 1,2,\ldots,n$, совокупность всех подфункций $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\sigma_j \in \{0,1\}$ $j = \overline{1,i}$, функции f и пусть U_i^* - множество, составленное из попарно различных функций из U_i. Каждому множеству U_i^*, $i = \overline{1, n-1}$ взаимно однозначно сопоставим множество V_i точек плоскости, называемых *вершинами i-го ранга*. К ним добавляется еще три полюса: входной полюс a и выходные полюса b и c. Полюс a является вершиной нулевого ранга, полюса b и c — вершинами n-го ранга. Полюсу a сопоставим функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, полюсам b и c — константы 1 и 0. Рассмотрим множество $V = \{a, b, c\} \cup \bigcup\limits_{i=1} V_i$ и разобьем его на классы эквивалентности, отнеся к одному классу вершины разных рангов только тогда, когда они соответствуют равным функциям.

Пусть v — произвольная вершина i-го ранга, а $\varphi_v(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ — соответствующая ей функция. Если $\varphi_v(1, x_{i+2}, \ldots, x_n) \neq \varphi_v(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, соединим вершину v ранга i контактом x_{i+1} с вершиной u ранга $i+1$, которая соответствует подфункции $\varphi_v(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, и контактом $\overline{x_{i+1}}$ с вершиной w, соответствующей подфункции $\varphi_v(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. Если же $\varphi_v(1, x_{i+2}, \ldots, x_n) \equiv \varphi_v(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, то обе подфункции тождественно равны функции $\varphi_v(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ и контакты между соответствующими вершинами не проводятся. Все вершины из одного класса эквивалентности отождествляются. В результате будет получена схема Σ такая, что $f_{a,b}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$, а $f_{a,c}(\tilde{x}^n) = \overline{f}(\tilde{x}^n)$. Вершина c может быть удалена вместе с инцидентными ей контактами.

Построим с использованием метода каскадов контактную схему для функции $f(\tilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1$. Выразим функцию в базисе $\{\vee, \wedge, \overline{\ }\}$ и выясним, можно ли для нее построить π-схему.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 (x_1 \oplus 1) \oplus \overline{x_3} = \overline{x_1} x_2 x_3 \oplus \overline{x_3} = \overline{\overline{x_1} x_2 x_3} \, \overline{x_3} \vee \overline{\overline{x_1} x_2 x_3 \, \overline{x_3}} \equiv$$

$$\equiv \overline{x_1} x_2 x_3 \vee (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \overline{x_3} \equiv \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_3} \equiv \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_3},$$ т. к. $x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x} y$. π-схема этой функции изображена на рис. 1.17.

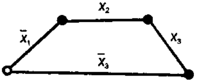


Рис. 1.17

Построим теперь схему методом каскадов:

$$n = 3,\ i = 1,2,3;\quad i = 1,\ U_1 : f(\sigma_1, x_2, x_3),\ f(1, x_2, x_3) = x_3 \oplus 1,$$

$$f(0, x_2, x_3) = x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1.$$

$$i = 2,\ U_2 : f(\sigma_1, \sigma_2, x_3),\ f(1,1,x_3) = x_3 \oplus 1,\ f(1,0,x_3) = x_3 \oplus 1,$$

$$f(0,1,x_3) = 1,\ f(0,0,x_3) = x_3 \oplus 1.$$

$$i = 3,\ U_3 : f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),\ f(1,1,1) = 0,\ f(1,1,0) = 1,\ f(1,0,1) = 0,$$

$$f(1,0,0) = 1,\ f(0,1,1) = 1,\ f(0,1,0) = 0,\ f(0,0,1) = 0,\ f(0,0,0) = 1.$$

$$U_1^* = \left\{ \overset{1}{x_3 \oplus 1},\ \overset{2}{x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1} \right\},$$

$$U_2^* = \left\{ \overset{3}{x_3 \oplus 1}, \overset{4}{1} \right\},\ U_3^* = \left\{ \overset{5}{0}, \overset{6}{1} \right\}.$$

1. a — вершина нулевого ранга. $\varphi_a(1, x_2, x_3) = x_3 \oplus 1 \neq \varphi_a(0, x_2, x_3) =$ $= x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1$, следовательно, полюс a соединяется контактом x_1 с вершиной 1, соответствующей функции $\varphi_a(1, x_2, x_3) = x_3 \oplus 1$, а контактом $\bar{x}_1$ с вершиной 2, соответствующей функции $\varphi_a(0, x_2, x_3) = x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus 1$ (рис. 1.18).
2. 1 и 2 — вершины первого ранга $\varphi_1(1, x_3) = x_3 \oplus 1$, $\varphi_1(0, x_3) = x_3 \oplus 1$, т. е. $\varphi_\nu(1, x_{i+2}, \ldots, x_n) \equiv \varphi_\nu(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, и вершина 1 ни с какой другой вершиной контактами не соединяется. $\varphi_2(1, x_3) = 1$, $\varphi_2(0, x_3) = x_3 \oplus 1$, $\varphi_\nu(1, x_{i+2}, \ldots, x_n) \neq \varphi_\nu(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. Полюс 2 соединяется контактом x_2 с вершиной 4, т. к. $\varphi_2(1, x_3) = 1$, и контактом $\bar{x}_2$ с вершиной 3, соответствующей функции $x_3 \oplus 1$.
3. 3 и 4 — вершины второго ранга. $\varphi_3(1) = 0$, $\varphi_3(0) = 1$, т. е. $\varphi_\nu(1, x_{i+2}, \ldots, x_n) \neq \varphi_\nu(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. Соединим полюс 3 с вершиной c.

соответствующей функции $\varphi_3(1)=0$, контактом x_3. и с вершиной b, соответствующей функции $\varphi_3(0)=1$, контактом $\overline{x_3}$. $\varphi_4 \equiv 1$, т. е. эту вершину соединять контактами с какой-либо другой вершиной не нужно.

Отождествим теперь вершины 1 и 3, 4 и b, т. к. они соответствуют равным функциям, и удалим вершину c вместе с инцидентным контактом x_3.

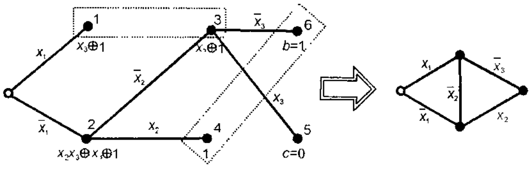


Рис. 1.18

В результате получим контактную схему для функции $f = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3 \oplus 1$, изображенную в правой части рис. 1.18, которая эквивалентна схеме рис. 1.17, хотя и не совпадает с ней. Действительно, из рис. 1.18 и формулы 1.19.1 следует:

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}x_2 \vee \overline{x_1x_2x_3} \equiv x_1\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2 \vee \overline{x_1x_2x_3} \equiv$$

$$\equiv x_1(x_2 \vee \overline{x_2})\overline{x_3} \vee \overline{x_1}x_2(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee \overline{x_1x_2x_3} \equiv x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2x_3} \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee$$

$$\vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1x_2x_3} \equiv \overline{x_2x_3}(x_1 \vee \overline{x_1}) \vee x_2\overline{x_3}(x_1 \vee \overline{x_1}) \vee \overline{x_1}x_2x_3 \equiv \overline{x_2x_3} \vee x_2\overline{x_3} \vee$$

$$\vee \overline{x_1}x_2x_3 \equiv \overline{x_3}(x_2 \vee \overline{x_2}) \vee \overline{x_1}x_2x_3 \equiv \overline{x_1}x_2x_3 \vee \overline{x_3}.$$

1.20. Решение логических задач

Правильно составленные логические задачи легко решаются методами алгебры логики. Для этого необходимо конкретные условия задачи записать в виде формулы алгебры логики, а затем упростить эту формулу путем равносильных преобразований. Простейший вид формулы, как правило, дает ответы на все вопросы. К одной формуле алгебры логики условия задачи сводятся разными способами, чаще всего истинные высказывания соединяются знаком конъюнкции для получения истинной формулы, упрощение которой и приводит к цели.

В логике высказываний все доказательства строятся на отношении порядка, т. е. на отношении, которое существует между причиной и следствием.

Рассмотрим несколько примеров.

- **Пример 1.** Четыре студентки, имена которых начинаются на буквы A, E, C, P, посещают институт по очереди и ведут общий конспект лекций. Необходимо составить график посещения на ближайшую неделю, учитывая, что:

  1. Понедельник — день самостоятельной работы на курсе, и в институт не ходит никто, а в субботу необходимо быть всем.
  2. C и P не смогут пойти на занятия во вторник в связи с большой загруженностью в понедельник.
  3. Если C выйдет в среду или P — в четверг, то E согласится побывать на занятиях в пятницу.
  4. Если A не пойдет в институт в четверг, то E позволит себе сходить туда в среду.
  5. Если A или P будут в институте в среду, то C сможет пойти в пятницу.
  6. Если P в пятницу вместо института пойдет на свадьбу подруги, то A придется сходить на занятия во вторник, а C в среду.

Решение.

Обозначим все возможные комбинации распределения студенток по оставшимся дням недели именем с индексом дня недели, например, $A_B, A_C, A_\times, A_{\ddot{I}}$, и запишем все условия задачи в виде истинных формул алгебры логики.

1. $\overline{A_{\ddot{I}\ddot{I}}} \equiv 1$, $\overline{E_{\ddot{I}\ddot{I}}} \equiv 1$, $\overline{C_{\ddot{I}\ddot{I}}} \equiv 1$, $\overline{P_{\ddot{I}\ddot{I}}} \equiv 1$, т. е. $A_{ПН} \equiv 0$, $E_{ПН} \equiv 0$, $C_{ПН} \equiv 0$, $P_{ПН} \equiv 0$.
2. $C_B \equiv 0$, $P_B \equiv 0$, т. е. $\overline{C_B} \equiv 1$, $\overline{P_B} \equiv 1$.
3. $C_C \vee P_Ч \rightarrow E_П \equiv 1$.
4. $\overline{A_Ч} \rightarrow E_C \equiv 1$.
5. $A_C \vee P_C \rightarrow C_П \equiv 1$.
6. $\overline{P_П} \rightarrow A_B \wedge C_Ч \equiv 1$.

Совокупность этих условий очень быстро дает требуемый результат. Высказывания 3–6 — истинны, следовательно, истинной будет и конъюнкция этих высказываний:

$$\left(\overline{C_C} \wedge \overline{P_\times} \vee E_I\right) \wedge \left(A_\times \vee E_C\right) \wedge \left(\overline{A_C} \wedge \overline{P_C} \vee C_I\right) \wedge \left(P_I \vee A_B \wedge C_\times\right) \equiv 1.$$

Раскроем скобки и упростим полученную формулу:

$$\left(\overline{C_C}\,\overline{P_\times} \vee E_I\right)\left(A_\times \vee E_C\right)\left(\overline{A_C}\,\overline{P_C} \vee C_I\right)\left(P_I \vee A_B C_\times\right) \equiv \left(\overline{C_C}\,\overline{P_\times}\,A_\times \vee\right.$$

$$\left.\vee E_I\,A_\times \vee \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}\,E_C \vee E_I\,E_C\right)\left(\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee \tilde{N}_I\,P_I \vee \overline{A_C}\,\overline{P_C}A_B C_\times \vee \tilde{N}_I\,A_B C_\times\right).$$

Очевидно, что логическое слагаемое, содержащее одно имя с разными индексами (днями недели), равно нулю, т. к. студентки по условию задачи ходят в институт один раз в оставшиеся пять дней недели.

$$\left(\overline{C_C}\,\overline{P_\times}A_\times \vee E_I\,A_\times \vee \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}E_C\right)\left(\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee \overline{A_C}\,\overline{P_C}A_B C_\times\right) \equiv \overline{C_C}\,\overline{P_\times}A_\times\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee$$

$$\vee E_I\,A_\times\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}E_C\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee \overline{C_C}\,\overline{P_\times}A_\times\overline{A_C}\,\overline{P_C}A_B C_\times \vee E_I\,A_\times\overline{A_C}\,\overline{P_C}A_B C_\times \vee$$

$$\vee \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}E_C\overline{A_C}\,\overline{P_C}A_B C_\times \equiv \overline{C_C}\,\overline{P_\times}A_\times\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}E_C\overline{A_C}\,\overline{P_C}P_I \vee$$

$$\vee \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}E_C\overline{A_C}\,\overline{P_C}A_B C_\times \equiv \overline{C_C}\,\overline{P_\times}\,\overline{A_C}\,\overline{P_C}\left(A_\times P_I \vee E_C P_I \vee E_C A_B C_\times\right) \equiv 1.$$

Итак, имеем следующую систему тождеств:

$$\begin{cases} \overline{\tilde{N}_{\tilde{N}}}\,\overline{P_\times}\,\overline{A_C}\,\overline{P_C} \equiv 1, \\ A_\times P_I \vee E_C P_I \vee E_C A_B C_\times \equiv 1, \\ C_B \equiv 0, \; P_B \equiv 0. \end{cases}$$

Для быстрого решения этой системы составим вспомогательную таблицу (табл. 1.20.1).

Таблица 1.20.1

Вторник	Среда	Четверг	Пятница
$A_В$	$A_С$	$A_\times$	$A_П$
$E_В$	$E_С$	$E_Ч$	$E_П$
$C_В$	$C_С$	$C_Ч$	$C_П$
$P_В$	$P_С$	$P_Ч$	$P_П$

$C_В \equiv 0$, $P_В \equiv 0$ из третьего условия. Из первого условия $\overline{C_С P_Ч A_С P_С} \equiv 1$ следует, что $\overline{C_С} \equiv 1$, $\overline{P_Ч} \equiv 1$, $\overline{A_С} \equiv 1$, $\overline{P_С} \equiv 1$, т. е. $C_С \equiv 0$, $P_Ч \equiv 0$, $A_С \equiv 0$, $P_С \equiv 0$. Тогда из второго столбца таблицы очевидно, что $E_С \equiv 1$, но тогда $E_В \equiv E_Ч \equiv E_П \equiv 0$.

Далее первый столбец дает $A_В \equiv 1$, т. е. $A_Ч \equiv A_П \equiv 0$, аналогично из третьего столбца получаем $C_Ч \equiv 1$, следовательно, $C_П \equiv 0$ и, наконец, $P_П \equiv 1$. Таким образом, $A_В \equiv E_С \equiv C_Ч \equiv P_П \equiv 1$, расписание составлено. Второе условие системы тождеств также выполняется, у дизъюнкции два истинных логических слагаемых: $E_С P_П \equiv E_С A_В C_Ч \equiv 1$.

- **Пример 2.** Однажды следователю пришлось одновременно допрашивать трех свидетелей: Клода, Жака и Дика. Их показания противоречили друг другу, и каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи.

1. Клод утверждал, что Жак лжет.
2. Жак обвинял во лжи Дика.
3. Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку.

Но следователь быстро вывел их на чистую воду, не задав им ни одного вопроса. Кто из свидетелей говорил правду?

Решение.

Обозначим буквами $К$ — Клода, $Ж$ — Жака и $Д$ — Дика и запишем условия задачи.

$(К \wedge \overline{Ж}) \vee (\overline{К} \wedge Ж) \equiv 1.$

$(Ж \wedge \overline{Д}) \vee (Д \wedge \overline{Ж}) \equiv 1.$

$(Д \wedge (\overline{К} \wedge \overline{Ж})) \vee (\overline{Д} \wedge (К \vee Ж)) \equiv 1.$

Как и в предыдущей задаче, результат находится путем равносильных преобразований. Сначала упростим условия задачи:

$$(К \wedge \overline{Ж}) \vee (\overline{К} \wedge Ж) \equiv (К \vee \overline{К})(\overline{Ж} \vee \overline{К})(К \vee Ж)(Ж \vee \overline{Ж}) \equiv (К \vee Ж)(\overline{Ж} \vee \overline{К}) \equiv$$
$$\equiv К\overline{К} \vee \overline{К}Ж \vee К\overline{Ж} \vee Ж\overline{Ж} \equiv \overline{К}Ж \vee К\overline{Ж} \equiv 1;$$

$$(Ж \wedge \overline{Д}) \vee (Д \vee \overline{Ж}) \equiv (Ж \vee Д)(Д \vee \overline{Д})(Ж \vee \overline{Ж})(\overline{Д} \vee \overline{Ж}) \equiv (Ж \vee Д)(\overline{Д} \vee \overline{Ж}) \equiv$$
$$\equiv Ж\overline{Д} \vee Д\overline{Д} \vee Ж\overline{Ж} \vee Д\overline{Ж} \equiv Ж\overline{Д} \vee Д\overline{Ж} \equiv 1;$$

$$(Д \wedge (\overline{К} \wedge \overline{Ж})) \vee (\overline{Д} \wedge (К \vee Ж)) \equiv Д\overline{К}\,\overline{Ж} \vee \overline{Д}К \vee \overline{Д}Ж.$$

Коньюнкция этих трех формул тоже будет истинна.

$$(\overline{К}Ж \vee К\overline{Ж})(Ж\overline{Д} \vee Д\overline{Ж})(Д\overline{К}\,\overline{Ж} \vee \overline{Д}К \vee \overline{Д}Ж) \equiv$$

$$\equiv (\overline{К}ЖЖ\overline{Д} \vee К\overline{Ж}Ж\overline{Д} \vee \overline{К}ЖД\overline{Ж} \vee К\overline{Ж}Д\overline{Ж})(Д\overline{К}\,\overline{Ж} \vee \overline{Д}К \vee \overline{Д}Ж) \equiv$$

$$\equiv \overline{К}Ж\overline{Д}Д\overline{К}\,\overline{Ж} \vee К\overline{Ж}ДД\overline{К}\,\overline{Ж} \vee \overline{К}Ж\overline{Д}\,\overline{Д}К \vee К\overline{Ж}Д\overline{Д}К \vee \overline{К}Ж\overline{Д}\,\overline{Д}Ж \vee$$

$$\vee К\overline{Ж}Д\overline{Д}Ж \equiv \overline{К}Ж\overline{Д} \equiv 1.$$

Итак, Жак говорит правду, Клод и Дик лгут.

1.21. Практическое занятие № 4. Реализация булевых функций схемами и формулами. Решение логических задач

1.21.1. Пусть система функциональных элементов Ф состоит из элемента задержки φ_1, реализующего x, и элемента Шеффера φ_2, реализующего $x|y = \overline{xy}$. Построить схемы, реализующие: а) $\overline{x}$; б) xy; в) $x \vee y$; г) 1; д) 0; с) $x \oplus y$. Указать величину задержки.

1.21.2. Найти функции проводимости для схем, изображенных на рис. 1.19.

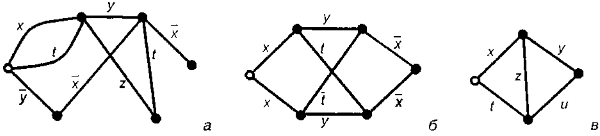


Рис. 1.19

1.21.3. Какие из указанных на рис. 1.20 соединений являются схемами?

1.21.4. Реализовать релейно-контактными схемами функции: а) $xy \vee \overline{z}$; б) $\overline{xy} \vee zt$; в) $xy \vee yz \vee xz$.

1.21.5. Реализовать контактными схемами следующие функции: а) $(y \vee z) \rightarrow x\overline{y}$; б) $x\overline{y} \leftrightarrow yx$; в) $x \oplus y \oplus z$.

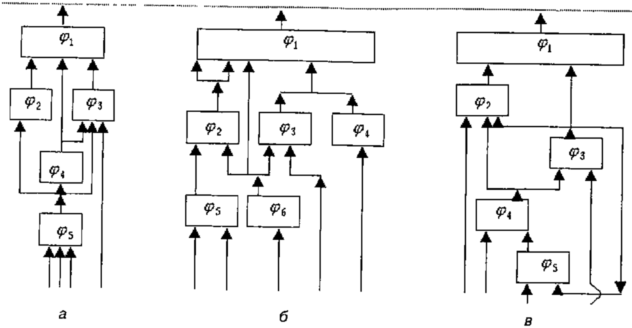


Рис. 1.20

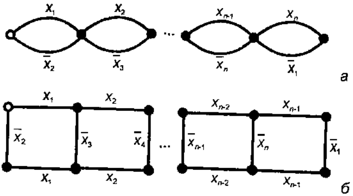


Рис. 1.21

1.21.6. Построить π-схемы для формул: а) $(x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$;

б) $(\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$.

1.21.7. Найти функции, реализуемые контактными схемами, изображенными на рис. 1.21.

1.21.8. Составить π-схемы для формул: а) $x(yz \vee \overline{yz}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z})$;

б) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$;

в) штрих Лукасевича $x \downarrow y$ (читается "ни x, ни y"), которое истинно в том и только том случае, когда оба высказывания ложны.

1.21.9. Упростить следующие релейно-контактные схемы (рис. 1.22).

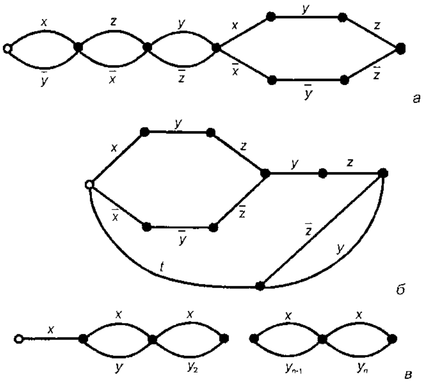


Рис. 1.22

1.21.10. С использованием метода каскадов построить контактную схему для функции f: а) $f\left(\tilde{x}^3\right) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;

б) $f\left(\tilde{x}^3\right) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_3 x_1$.

1.21.11. Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем "Бьюике", Джонс сказал, что это был черный "Крайслер", а Смит утверждал, что был "Форд" и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

1.21.12. На вопрос, кто из трех студентов изучал логику, был получен ответ: если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий. Кто изучал логику?

1.21.13. Определить, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно, что:

1) Если первый сдал, то и второй сдал.

2) Если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал.

3) Если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал.

4) Если четвертый сдал, то и первый сдал.

1.21.14. Для полярной экспедиции из восьми претендентов A, B, C, D, E, F, G и H надо отобрать шесть специалистов: биолога, гидролога, синоптика, радиста, механика и врача. Обязанности биолога могут выполнять E и G, гидролога B и F, синоптика F и G, радиста C и D, механика C и H, врача A и D. Хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями, в экспедиции каждый сможет выполнять только одну обязанность. Кого и кем следует взять в экспедицию, если F не может ехать без B, D — без H и без C, C не может ехать одновременно с G, а A не может ехать вместе с B?

1.21.15. Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1) Сергей — первый, Роман — второй.

2) Сергей — второй, Виктор — третий.

3) Юрий — второй, Виктор — четвертый.

Как распределились места, если в каждом из ответов только одно утверждение истинно?

1.21.16. Известно следующее: если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду; если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице, и Коля сказал правду; если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Выясните, ходил ли Коля в кино?

1.21.17. Четыре друга Антонов (А), Вехов (В), Сомов (С) и Деев (Д) решили провести каникулы в четырех разных городах — Москве, Одессе, Киеве и Ташкенте. Определить, в какой город должен поехать каждый из них, если имеются следующие ограничения:

1) Если А не едет в Москву, то С не едет в Одессу.

2) Если В не едет ни в Москву, ни в Ташкент, то А едет в Москву.

3) Если С не едет в Ташкент, то В едет в Киев.

4) Если Д не едет в Москву, то В не едет в Москву.

5) Если Д не едет в Одессу, то В не едет в Москву.

1.21.18. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать

7-й, 8-й, 9-й и 10-й классы. При проверке оказалось, что 10-й класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

1) Андреев: "Я убирал 9-й класс, а Савельев — 7-й".

2) Костин: "Я убирал 9-й класс, а Андреев — 8-й".

3) Савельев: "Я убирал 8-й класс, а Костин — 10-й".

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

Глава 2

Исчисление высказываний*

2.1. Язык, система аксиом и правила вывода исчисления высказываний

Исчисление высказываний как формальную теорию можно определить с помощью аксиоматического метода, который характеризуется следующими тремя частями:

1. Явная формулировка исходных аксиом той или иной теории.
2. Явная формулировка правил вывода, используемых для последовательного построения этой теории.
3. Использование искусственно построенных формальных языков для изложения всех теорем рассматриваемой теории.

В понятие исчисления входят такие компоненты, как формальный язык исчисления, аксиомы исчисления и правила вывода. Они позволяют дать строгое математическое определение понятия доказательства и получить точные утверждения о возможности или невозможности доказательства тех или иных предложений теории.

В любом исчислении различают синтаксические и семантические вопросы исчисления. В синтаксической части изучают понятие доказательства (теория доказательств), в семантической — структуру формальных языков (теория моделей).

Исчисления позволяют формализовать многие разделы математики и других наук. Исчисление высказываний — это аксиоматическая логическая система, описывающая тождественно истинные схемы, а ее интерпретация — алгебра высказываний.

---

* Излагаемое исчисление называется в литературе исчислением П. С. Новикова. Петр Сергеевич Новиков (1901–1975) — советский математик.

Описание всякого исчисления включает в себя описание его алфавита, формул, являющихся конечными конфигурациями символов, аксиом и правил вывода.

Множество абстрактных букв называется *алфавитом*. Конечный ряд написанных друг за другом букв алфавита называется *словом* в этом алфавите. Слово, не содержащее ни одной буквы, называется *пустым* и обозначается символом Λ. Два конкретных слова $a_1a_2..a_n$ и $b_1b_2..b_n$ алфавита A равны, если $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Если $a_1a_2..a_n$ — слово алфавита A, состоящее из n букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то число n называется *длиной* этого слова.

Два слова α и β определяют слово $\alpha\beta$, которое получается приписыванием к слову α слова β. Слово $\alpha\beta$ называется *соединением слов* α и β. Очевидно, что для любых слов α и β имеем $\Lambda\alpha = \alpha\Lambda = \alpha$, $\alpha\Lambda\beta = \alpha\beta$. Слово α алфавита A называется *подсловом* слова β этого же алфавита, если $\beta = \gamma\alpha\delta$ для некоторых слов γ и δ. Может оказаться, что $\beta = \gamma\alpha\delta = \gamma_1\alpha\delta_1$ и $\gamma \neq \gamma_1$. В этом случае говорят о различных вхождениях подслова α в β.

Алфавит исчисления высказываний состоит из объединения четырех множеств $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4$, где $\sigma_1 = \{a, b, \ldots, z, A_1, B_2, \ldots, Z_n\}$, $\sigma_2 = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \bar{\ }\}$, $\sigma_3 = \{(,),,\}$, $\sigma_4 = \{|-\}$. Других символов в алфавите исчисление высказываний не содержит. Буквы множества σ_1 называются *пропозициональными переменными*. Символ $|-$ называется *символом следования*.

Формулой исчисления высказываний называется слово алфавита исчисления высказываний, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Пропозициональная переменная является формулой, которая называется *элементарной*, или *атомарной*.
2. Если A и B формулы, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ и $\overline{A}$ — тоже формулы.

Никакое другое слово формулой исчисления высказываний не является. Из этого определения следует, что $(A \vee B) \wedge C$ — не формула, т. к. она не имеет внешних скобок. Однако в целях сокращения записи очень часто внешние скобки опускают.

Подформулой A формулы B исчисления высказываний называется подслово B, являющееся формулой.

Теорема 2.1. **Всякая неатомарная формула A исчисления высказываний представима в одном и только в одном из следующих видов: $(B \wedge C)$, $(B \vee C)$, $(B \to C)$ или $\overline{B}$ для однозначно определенных формул B и C.**

Секвенциями называются выражения следующего вида:

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$, где $n > 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A$ — любые формулы. Читается "из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ следует A".
2. $\vdash B$. Читается "B доказуема".
3. $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash$, $n > 0$. Читается "система $A_1, A_2, \ldots, A_n$ противоречива".

Если формулы исчисления высказываний можно рассматривать как формы сложных высказываний, то секвенции являются формами утверждений и теорем, в которых можно отчетливо выделить условия (посылки) и заключения.

Правилом вывода называется выражение вида $\dfrac{\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k}{\Sigma}$, где $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k, \Sigma$ — произвольные секвенции. Выражение Σ называется *непосредственным следствием секвенций* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ по данному правилу вывода.

Исчисление высказываний определяется своей схемой аксиом и правилами вывода. Схема аксиом состоит из одиннадцати формул, поделенных на четыре группы.

I. 1. $x \to (y \to x)$;

2. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

II. 3. $x \wedge y \to x$;

4. $x \wedge y \to y$;

5. $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$.

III. 6. $x \to x \vee y$; (2.1.1)

7. $y \to x \vee y$;

8. $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

IV. 9. $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;

10. $x \to \overline{\overline{x}}$;

11. $\overline{\overline{x}} \to x$.

Все правила схемы проверяются непосредственно.

Правил вывода в исчислении высказываний довольно много. Среди них выделяются основные и производные правила. Перечислим некоторые из них, которые впоследствии будем использовать без доказательства. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma$ — конечные последовательности формул, возможно пустые, A, B, C — любые формулы. Тогда справедливы следующие правила вывода исчисления высказываний:

1. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (A \wedge B)}$ — правило введения конъюнкции; здесь и далее $\Gamma_1, \Gamma_2 \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — объединение последовательностей формул.
2. $\dfrac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash A}$, $\dfrac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash B}$ — удаление конъюнкции.
3. $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$, $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vee B)}$ — введение дизъюнкции.
4. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash (A \vee B); \Gamma_2, A \vdash C; \Gamma_3, B \vdash C}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash C}$ — удаление дизъюнкции.
5. $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to B)}$ — введение импликации (теорема дедукции).
6. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash (A \to B); \Gamma_2 \vdash A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}$ — удаление импликации (правило заключения).
7. $\dfrac{\Gamma, A \vdash}{\Gamma \vdash \overline{A}}$ — введение отрицания. (2.1.2)
8. $\dfrac{\Gamma, \overline{A} \vdash}{\Gamma \vdash A}$ — удаление отрицания.
9. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash \overline{A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$ — сведение к противоречию.
10. $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash A}$ — правило утончения.

11. $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$ — правило расширения.

12. $\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash C}$ — правило перестановки.

13. $\dfrac{\Gamma_1, A, A, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \vdash C}$ — правило сокращения.

Правила вывода исчисления высказываний формализуют определенные стандартные логические способы рассуждений. Правило вывода называется *допустимым* в исчислении высказываний, если его добавление в исчисление не расширяет множество доказуемых секвенций.

Основных правил вывода в исчислении высказываний два: правило подстановки и правило простого заключения. Если формула A доказуема в исчислении высказываний, x — переменная, B — произвольная формула исчисления высказываний, то формула, получающаяся в результате замены в формуле A переменной x всюду, где она входит в формулу A, формулой B, является также доказуемой формулой. Это *правило подстановки*. Символически оно записывается так $\int_x^B (A)$, т.е. если $A(x)$ выводимая формула, то замена x на B тоже дает выводимую формулу, или $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}$, если $A(x)$ доказуема, то $A(B)$ тоже доказуема. Частные случаи формулы $\int_x^B (A)$ могут быть, например, такие $\int_x^B (x) \equiv B$, $\int_x^B (y) \equiv y$, $\int_x^B (A) \equiv A$, $\int_x^B (A_1 * A_2) \equiv \int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$, $\int_x^B (\overline{A}) \equiv \overline{\int_x^B (A)}$, где под знаком $*$ понимается любой из символов $\wedge, \vee, \rightarrow$. Эти подстановки очевидны.

Второе основное правило вывода в исчислении высказываний называется *правилом простого заключения* (ППЗ). Оно имеет вид $\dfrac{\vdash A; \vdash A \rightarrow B}{\vdash B}$ и читается "если формулы A и $A \rightarrow B$ доказуемы, то формула B тоже доказуема". Правило широко распространено и известно очень давно, на латыни оно называется modus ponens.

Аксиомой называется всякое выражение, полученное из схемы аксиом I–IV подстановкой вместо переменных x, y, z конкретной формулы.

Линейным доказательством (*выводом*) в исчислении высказываний называется конечная последовательность секвенций $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, такая, что для каждого i, $1 \le i \le k$, Σ_i есть либо аксиома, либо непосредственное следствие предыдущих секвенций по применяемым в исчислении правилам вывода. Секвенция Σ называется *доказуемой* в исчислении высказываний или теоремой исчисления, если существует доказательство $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, у которого $\Sigma_k = \Sigma$. Формула A называется *доказуемой*, если доказуема секвенция $\vdash A$.

Очевидно, что всякая секвенция является деревом; если $D_1, D_2, \ldots, D_k$ — деревья и Σ — секвенция, то $\dfrac{D_1, D_2, \ldots, D_k}{\Sigma}$ — также дерево. Одна и та же секвенция может входить в дерево несколько раз. Дерево может иметь много начальных секвенций, но заключительная секвенция только одна.

Дерево D называется *доказательством* в исчислении высказываний в виде дерева, если все его начальные секвенции — аксиомы, а переходы — применения допустимых правил вывода. Если Σ является заключительной секвенцией доказательства D в виде дерева, то D называется *доказательством* Σ ***в виде дерева*** или *деревом* ***вывода*** Σ в исчислении высказываний.

Схема секвенций называется доказуемой в исчислении высказываний, если ее добавление к исчислению в качестве схемы аксиом не расширяет множество доказуемых секвенций. Это эквивалентно тому, что все частные случаи этой схемы будут доказуемы в исчислении высказываний.

2.2. Некоторые дополнительные производные правила вывода

Из списка перечисленных тринадцати правил вывода (2.1.2) некоторые практически всегда применяются при доказательстве теорем. Рассмотрим доказательство еще нескольких правил вывода. Они получаются с помощью правил подстановки и простого заключения и поэтому являются производными от них.

1. Правило одновременной подстановки.

Пусть A — доказуемая формула; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные, а $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — любые формулы исчисления высказываний. Тогда результат одновременной подстановки в A вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$ является доказуемой формулой, т. е. $\dfrac{\vdash A}{\vdash \int\limits_{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{B_1, B_2, \ldots, B_n} (A)}$. Способ доказательства очевиден. Формула выводится применением правила простой подстановки последовательно ко всем переменным по порядку.

2. Правило сложного заключения.

Если формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to B)\ldots)))$ доказуемы, то и формула B доказуема. т. е.

$$\frac{\vdash A_1; \vdash A_2; \ldots, \vdash A_n; \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to B)\ldots)))}{\vdash B}.$$

Действительно, если по условию доказуемы формулы A_1 и $A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to B)\ldots)))$, то по правилу простого заключения будет выводима формула $A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to B)\ldots))$. Далее, аналогично рассуждая, заключаем, что если выводимы A_2 и $A_2 \to (A_3 \to (\ldots(A_n \to B)\ldots))$, то выводима и формула $A_3 \to (\ldots(A_n \to B)\ldots)$. Продолжая такие рассуждения n раз, получим, что формула B доказуема.

3. Правило силлогизма.

Если доказуемы формулы $A \to B$ и $B \to C$, то доказуема и формула $A \to C$, т. е. $\dfrac{\vdash A \to B; \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$.

Для доказательства возьмем две первые аксиомы и сделаем в них соответствующие замены. К первой аксиоме применим следующую подстановку: $\vdash \int\limits_{x, y}^{B \to C, A} (x \to (y \to x)) \equiv \vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C))$.

Вторую аксиому преобразуем так

$$\left|-\int_{x,y,z}^{A,B,C}(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \equiv \right|-(A \to (B \to C)) \to$$

$$\to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

По правилу простого заключения:

$$\frac{\vdash B \to C; \vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C))}{\vdash A \to (B \to C)},$$

аналогично

$$\frac{\vdash A \to (B \to C); \vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}{\vdash (A \to B) \to (A \to C)}.$$

Наконец, применяя еще раз правило простого заключения, находим $\frac{\vdash A \to B; \vdash (A \to B) \to (A \to C)}{\vdash A \to C}$. Итак, формула $A \to C$ выводима при данных предположениях.

4. Правило контрпозиции.

Если доказуема формула $A \to B$, то доказуема и формула $\overline{B} \to \overline{A}$, т. е.

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}.$$

Правило доказывается очень просто с использованием только одной формулы из списка аксиом исчисления высказываний, а именно девятой аксиомы $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$. Сделаем в ней следующую замену переменных:

$$\left|-\int_{x,y}^{A,B}((x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \equiv \right|-(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}).$$

По правилу простого заключеиия

$$\frac{\vdash A \to B; \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}},$$

т. е. исходиая формула доказана.

5. Правило сиятия двойного отрицания.

Если доказуема формула $A \to \overline{\overline{B}}$, то доказуема формула $A \to B$, наоборот, если доказуема $\overline{\overline{A}} \to B$, то доказуема формула $A \to B$, т. е. $\dfrac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B}$ и $\dfrac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B}$.

Воспользуемся десятой и одиннадцатой аксиомами и проведем в них аналогичные подстановки $\left| - \int_x^A \left(x \to \overline{\overline{x}}\right) \right. \equiv \left| - A \to \overline{\overline{A}} \right.$, $\left| - \int_x^B \left(\overline{\overline{x}} \to x\right) \right. \equiv \left| - \overline{\overline{B}} \to B \right.$.

Тогда по условию и по правилу силлогизма $\dfrac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}; \vdash \overline{\overline{B}} \to B}{\vdash A \to B}$ и $\dfrac{\vdash A \to \overline{\overline{A}}; \vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B}$.

Доказательства для пяти приведенных правил могут быть записаны в виде деревьев:

1. $$\begin{array}{c} \Gamma \vdash A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \hline \Gamma \vdash A(B_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \Gamma \vdash A(B_1, B_2, \ldots, B_n). \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c} \Gamma \vdash A_1, \Gamma \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots(A_n \to B)\ldots)) \\ \hline \Gamma \vdash A_2 \to (A_3 \to \ldots(A_n \to B)\ldots), \Gamma \vdash A_2 \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \Gamma \vdash A_n \to B, \Gamma \vdash A_n . \end{array}$$

3. $$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash B \to C, \Gamma \vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C))}{\Gamma \vdash A \to (B \to C)}, \Gamma \vdash \Phi_1}{\dfrac{\Gamma \vdash (A \to B) \to (A \to C), \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash A \to C}},$$

где $\Phi_1 = (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

4. $\dfrac{\Gamma \vdash A \to B, \Gamma \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}{\Gamma \vdash \overline{B} \to \overline{A}}$.

5. $\dfrac{\Gamma \vdash A \to \overline{\overline{B}}, \Gamma \vdash \overline{\overline{B}} \to B}{\Gamma \vdash A \to B}$ или $\dfrac{\Gamma \vdash \overline{\overline{A}} \to B, \Gamma \vdash A \to \overline{\overline{A}}}{\Gamma \vdash A \to B}$.

Приемы доказательств, подобные уже приведенным, применяются для получения правил вывода из совокупности формул.

Пусть Γ — произвольная конечная совокупность формул, т. е. $\Gamma = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. *Выводом из совокупности формул* называется всякая конечная последовательность формул, любой член которой удовлетворяет следующим условиям.

1. Всякая формула $A_i \in \Gamma$ выводима из Γ, т. е. $\Gamma \vdash A_i$ $(A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n \vdash A_i)$.

2. Всякая доказуемая формула выводима из Γ, т. е. $\dfrac{\vdash B}{A_1, A_2, ..., A_n \vdash B}$ или $\dfrac{\vdash B}{\Gamma \vdash B}$.

3. Если C и $C \to B$ выводимы из совокупности формул Γ, то B также выводима из Γ, т. е. $\dfrac{\Gamma \vdash C; \Gamma \vdash C \to B}{\Gamma \vdash B}$ — формула, аналогичная правилу простого заключения.

Очевидно, что класс формул, выводимых из Γ, совпадает с классом доказуемых формул *(см. разд. 2.1)*, если Γ содержит только доказуемые формулы. Если же Γ содержит хотя бы одну недоказуемую формулу, то класс формул, выводимых из Γ, шире класса доказуемых формул.

Из определения выводимой формулы и вывода из совокупности формул следуют очевидные свойства вывода:

1. Всякий начальный отрезок вывода из Γ есть вывод из Γ.
2. Между двумя соседними членами вывода из Γ можно вставить любой вывод из Γ.
3. Всякий член вывода из Γ является формулой из Γ.

4. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma$, то всякий вывод из Γ_1 является выводом из Γ.
5. Для того чтобы формула A была выводима из Γ, необходимо и достаточно, чтобы существовал вывод A из Γ.

Рассмотрим еще несколько правил, при доказательстве которых используются свойства вывода.

1. Правило расширения.

   $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, W \vdash A}$, т. е. если A выводима из Γ, то она выводима и из $\Gamma \cup W$, где Γ и W — некоторые конечные совокупности формул.

   Пусть $\Gamma_1 = \Gamma \cup W$, тогда $\Gamma \subset \Gamma_1$ и вывод из Γ есть вывод из Γ_1, т. е. если $\Gamma \vdash A$, то и $\Gamma_1 \vdash A$, что доказывает данное правило вывода.

2. Правило удаления выводимой гипотезы $\dfrac{\Gamma, C \vdash A;\ \Gamma \vdash C}{\Gamma \vdash A}$.

   Это правило доказывается включением в вывод из Γ вывода из C. Пусть совокупность формул $\Gamma, C = \{B_1, B_2, ..., B_{n-1}, A\}$, а $\Gamma = \{C_1, C_2, ...C_m, C\}$. Если в первом выводе нет C, то он является только выводом из Γ и $\Gamma \vdash A$. Если же в $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, A$ присутствует C, то вместо C в $B_1, B_2, ..., B_{n-1}, A$ вставим $C_1, C_2, ...C_m, C$. Это можно сделать в соответствии с определением вывода, тогда получим вывод только из Γ и $\Gamma \vdash A$.

3. Правило удаления импликации.

   Это правило обратное теореме дедукции $\dfrac{\Gamma \vdash C \to A}{\Gamma, C \vdash A}$. Здесь дано $\Gamma \vdash C \to A$, т. е. существует вывод из Γ такого типа $\Gamma : A_1, A_2, ..., A_{n-1}, C \to A$. Перейдем теперь к объединению формул $\Gamma, C = \Gamma \cup C$. Тогда к предыдущему выводу можно присоединить формулу C, т. е. $\Gamma, C : A_1, A_2, ..., A_{n-1}, C \to A, C$. Но тогда по правилу простого заключения $\dfrac{\vdash C; \vdash C \to A}{\vdash A}$, т. е. $\Gamma, C : A_1, A_2, ..., A_{n-1}, C \to A, C, A$. Это доказывает исходное правило удаления импликации.

Рассмотрим теперь несколько примеров на выводимость формул.

- **Пример 1.** Показать выводимость формулы $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B}$.

Воспользуемся сначала восьмой аксиомой $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$, сделав в ней следующую замену: $\int\limits_{x,y,z}^{\overline{A},\overline{B},\overline{A \wedge B}} ((x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)))$.

Получим доказуемую формулу

$$\vdash (\overline{A} \to \overline{A \wedge B}) \to ((\overline{B} \to \overline{A \wedge B}) \to (\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B})).$$

Аналогичные операции проведем с третьей и четвертой аксиомами

$$\vdash \int\limits_{x,y}^{A,B} (x \wedge y \to x) \equiv \vdash A \wedge B \to A, \quad \vdash \int\limits_{x,y}^{A,B} (x \wedge y \to y) \equiv \vdash A \wedge B \to B$$

и применим к двум последним формулам правило контрпозиции:

$$\frac{\vdash A \wedge B \to A}{\vdash \overline{A} \to \overline{A \wedge B}} \text{ и } \frac{\vdash A \wedge B \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A \wedge B}}.$$

Теперь по правилу сложного заключения имеем $\dfrac{\vdash \Phi_1; \vdash \Phi_2; \vdash \Phi_3}{\vdash \overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B}}$,

где $\Phi_1 = \overline{A} \to \overline{A \wedge B}$, $\Phi_2 = \overline{B} \to \overline{A \wedge B}$,

$\Phi_3 = (\overline{A} \to \overline{A \wedge B}) \to ((\overline{B} \to \overline{A \wedge B})) \to (\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B})$

Итак, формула $\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \wedge B}$ доказуема. Она является одной из форм закона двойственности в алгебре логики.

- **Пример 2.** Доказать, что $\Gamma = \{A\} \vdash B \to A$ — секвенция.

Имеем $\Gamma : \Gamma \vdash A$. Возьмем первую аксиому $x \to (y \to x)$ и сделаем в ней подстановку $\int\limits_{x,y}^{A,B} (x \to (y \to x))$, получим доказуемую формулу $A \to (B \to C)$. Теперь по правилу простого заключения сразу получаем конечный результат $\dfrac{\vdash A; \vdash A \to (B \to A)}{\vdash B \to A}$.

- **Пример 3.** Доказать, что $\Gamma = \{A \to B, \overline{B}\} \vdash \overline{A}$ — секвенция.

Дано $\Gamma \vdash A \to B$, $\Gamma \vdash \overline{B}$. Возьмем девятую аксиому $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$ и проведем следующую замену переменных: $\vdash \int_{x,y}^{A,B} ((x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})) \equiv \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$. Для достижения конечного результата необходимо дважды применить правило простого заключения $\dfrac{\vdash A \to B; \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}$ и $\dfrac{\vdash \overline{B}; \vdash \overline{B} \to \overline{A}}{\vdash \overline{A}}$.

- **Пример 4.** Доказать, что $\Gamma = \{A \to B\} \vdash (C \to A) \to (C \to B)$.

Дано $\Gamma \vdash A \to B$. Используем первую аксиому $x \to (y \to x)$. Подстановка $\vdash \int_{x,y}^{A \to B, C} (x \to (y \to x)) \equiv \vdash (A \to B) \to (C \to (A \to B))$. По правилу простого заключения

$$\frac{\vdash A \to B; \vdash (A \to B) \to (C \to (A \to B))}{\vdash C \to (A \to B)}.$$

Воспользуемся теперь второй аксиомой, проведя в ней следующую замену переменных: $\vdash \int_{x,y,z}^{C,A,B} ((x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))) \equiv$
$\equiv \vdash (C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))$.

Еще один раз modus ponens

$$\frac{\vdash C \to (A \to B); \vdash (C \to (A \to B)) \to ((C \to A) \to (C \to B))}{\vdash (C \to A) \to (C \to B)}.$$

- **Пример 5.** Доказать следующее правило вывода: $\dfrac{\vdash \overline{A}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$. Сначала $\vdash \int_{x,y}^{A,B} (x \wedge y \to x) \equiv \vdash A \wedge B \to A$. Теперь по правилу контрпозиции

$\dfrac{\vdash A \wedge B \to A}{\vdash \overline{A} \to \overline{A \wedge B}}$, наконец, по правилу простого заключения $\dfrac{\vdash \overline{A};\ \vdash \overline{A} \to \overline{A \wedge B}}{\vdash \overline{A \wedge B}}$.

2.3. Теорема дедукции и другие законы исчисления высказываний

Теорема дедукции

Правило введения импликации носит название *теоремы дедукции* и имеет следующий вид: $\dfrac{\Gamma, C \vdash A}{\Gamma \vdash C \to A}$.

Докажем эту теорему подробно методом математической индукции по длине вывода. Пусть $\Gamma, C = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ — вывод из исходной совокупности формул. Сначала покажем, что для любого подобного вывода справедливо $\Gamma \vdash C \to A_n$. В дальнейшем в роли A_n, которая может быть получена при выводе из Γ, C любым дозволенным методом, может выступать A.

При $n = 1$ вывод формулы A из Γ, C имеет вид $\Gamma, C \vdash A_1$, т. е. формула A совпадает с A_1. Согласно определению вывода возможны три случая:

1. $A_1 \in \Gamma$.
2. A_1 — доказуемая формула из множества Γ.
3. $A_1 \equiv C$.

В первых двух случаях имеем $\Gamma \vdash A_1$. Тогда вывод из Γ можно написать в виде $\Gamma : A_1,\ \underset{\substack{I_1 \vdash x \to (y \to x), \\ \vdash \int_{x,y}^{A_1,C} (I_1) \equiv \vdash A_1 \to (C \to A_1)}}{A_1 \to (C \to A_1)},\ \underset{\substack{\text{по простому заключению} \\ \frac{\vdash A_1;\ \vdash A_1 \to (C \to A_1)}{\vdash C \to A_1}}}{C \to A_1}$. Таким образом, $\Gamma \vdash C \to A_1$. В третьем случае имеем $A_1 \equiv C$, и надо доказать, что $\Gamma \vdash C \to C$, но формула $C \to C$ доказуема в любой совокупности формул.

Действительно, $\vdash C, \vdash x \to (y \to x), \vdash C \to (C \to C)$,

$$\frac{\vdash C; \vdash C \to (C \to C)}{\vdash C \to C}.$$

Пусть теперь теорема справедлива при $i \le n-1$; докажем, что она справедлива и при $i = n$. Здесь вывод из исходного множества формул имеет вид $\Gamma, C = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Однако теперь для формулы A_n появились дополнительные возможности, а именно. она может определяться как:

1. $A_n \in \Gamma$;
2. A_n — доказуемая формула;
3. $A_n \equiv C$;
4. A_n получается по правилу простого заключения из любых двух предшествующих ей формул, т. е. $\dfrac{\vdash A_i; \vdash A_i \to A_n}{\vdash A_n}$, причем вторая формула в правиле простого заключения (обозначим ее A_j) должна иметь вид $A_j = A_i \to A_n$. Для первых трех случаев доказательство полностью аналогично уже рассмотренному, только индекс "единица" надо заменить на n. В четвертом случае A_n получено по правилу простого заключения из A_i и $A_j = A_i \to A_n$. При этом вывод из Γ может быть таким

$$\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}: A_1, A_2, \ldots, A_n,\ \underset{\substack{I_1: x \to (y \to x). \\ \vdash \int_{x,y}^{A_i, C} (I_1) \equiv \vdash A_i \to (C \to A_i)}}{A_i \to (C \to A_i)},\ \underset{\substack{\text{по простому заключению} \\ \frac{\vdash A_i;\ \vdash A_i \to (C \to A_i)}{\vdash C \to A_i}}}{C \to A_i},$$

$$\underset{\substack{\text{аналогично} \\ \text{предыдущему}}}{C \to A_j}, C \to (A_i \to A_n).$$

Последняя формула в выводе имеет такой вид в силу допущений пункта 4, т. к. $\vdash C \to A_j$, а $A_j = A_i \to A_n$.

Возьмем теперь вторую аксиому $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ и сделаем в ней подстановку $\int_{x,y,z}^{C, A_i, A_n} ((x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)))$.

Получим доказуемую формулу

$$\vdash (C \to (A_i \to A_n)) \to ((C \to A_i) \to (C \to A_n)).$$

Тогда по правилу сложного заключения

$$\frac{\vdash C \to A_i; \vdash C \to (A_i \to A_n); \vdash (C \to (A_i \to A_n)) \to ((C \to A_i) \to (C \to A_n))}{\vdash C \to A_n}.$$

Итак, доказано, что $\Gamma \vdash C \to A_n$, причем A_n может определяться четырьмя указанными способами.

Вернемся теперь к началу теоремы. Пусть $\Gamma, C \vdash A$. Тогда $\Gamma, C: A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A$, т. е. роль A_n играет A. Тогда по предыдущему доказательству $\Gamma \vdash C \to A$ и теорема дедукции доказана.

Обобщение теоремы дедукции

Справедлива формула $\dfrac{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \vdash A}{\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots (A_n \to A) \ldots))}$. Докажем ее.

Итак, $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\Gamma \vdash A$. Но $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\} \cup \{A_n\} = \Gamma_{n-1}, A_n$ и $\Gamma_{n-1}, A_n \vdash A$. Тогда по теореме дедукции справедливо $\Gamma_{n-1} \vdash A_n \to A$. Аналогично множество Γ_{n-1} можно представить в виде $\Gamma_{n-1} = \Gamma_{n-2}, A_{n-1}$, тогда $\Gamma_{n-2} \vdash A_{n-1} \to (A_n \to A)$ и т. д. Применив эту процедуру n раз, получим $\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots (A_n \to A) \ldots))$.

В частном случае при $n = 1$ получим $\dfrac{A_1 \vdash A}{\vdash A_1 \to A}$. Эта же формула получается и из простой теоремы дедукции, если $\Gamma, C = \{A_1\}$.

Закон перестановки посылок

$$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C)).$$

Рассмотрим множество формул $\Gamma = \{A \to (B \to C), A, B\}$. Из этой совокупности формул после применения дважды правила простого заключения находим: $\Gamma: A \to (B \to C), A, B, \underset{\substack{\text{по простому заключению} \\ \frac{\vdash A,\ \vdash A \to (B \to C)}{\vdash B \to C}}}{B \to C}, \underset{\substack{\text{по простому заключению} \\ \frac{\vdash B,\ \vdash B \to C}{\vdash C}}}{C}$. Теперь применим обобщенную теорему дедукции:

$$\frac{\overbrace{A \to (B \to C)}^{A_1}, \overbrace{B}^{A_2}, \overbrace{A}^{A_3} \vdash \overbrace{C}^{A}}{\vdash \underbrace{(A \to (B \to C))}_{A_1} \to \left(\underbrace{B}_{A_2} \to \left(\underbrace{A}_{A_3} \to \underbrace{C}_{A}\right)\right)}.$$

Из закона перестановки посылок следует правило перестановки посылок в доказуемых формулах $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash B \to (A \to C)}$, которое получается по правилу простого заключения из формул $\vdash A \to (B \to C)$ и $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.

Закон соединения посылок

$\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$.

Пусть множество исходных формул $\Gamma = \{A \to (B \to C), A \wedge B\}$. Получим вывод всех необходимых нам формул из этого множества

$$\Gamma: A \to (B \to C), A \wedge B, \underset{\substack{\text{по третьей} \\ \text{аксиоме}}}{A \wedge B \to A}, \underset{\substack{\text{по четвертой} \\ \text{аксиоме}}}{A \wedge B \to B}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \wedge B;\ \vdash A \wedge B \to B}{\vdash B}}}{B},$$

$$\underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \wedge B;\ \vdash A \wedge B \to A}{\vdash A}}}{A}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A;\ \vdash A \to (B \to C)}{\vdash B \to C}}}{B \to C}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash B;\ \vdash B \to C}{\vdash C}}}{C}.$$

Отсюда на основании обобщенной теоремы дедукции получим:

$$\frac{\overbrace{A \to (B \to C)}^{A_1}, \overbrace{A \wedge B}^{A_2} \vdash \overbrace{C}^{A}}{\vdash \underbrace{(A \to (B \to C))}_{A_1} \to \left(\underbrace{A \wedge B}_{A_2} \to \underbrace{C}_{A}\right)}.$$

Из этого закона при условии, что

$\vdash A \to (B \to C)$, по правилу простого заключения немедленно получается правило соединения посылок: $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash A \wedge B \to C}$.

Закон разъединения посылок

$\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$.

Рассмотрим систему формул $\Gamma = \{A \wedge B \to C, A, B\}$ и сначала покажем, что из нее выводима формула $A \wedge B$. Пусть R — любая выводимая формула, тогда $\Gamma: A \to (B \to C), A, B, R,$

$$R,\ \underset{\substack{I_1 \vdash x \to (y \to x) \\ \int_{x,y}^{A,R} (I_1) \equiv \vdash A \to (R \to A)}}{A \to (R \to A)},\quad \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A;\ \vdash A \to (R \to A)}{\vdash R \to A}}}{R \to A},\ \underset{\substack{II_3 \vdash (z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y)) \\ \int_{z,x,y}^{R,A,B} (II_3) \equiv \vdash (R \to A) \to ((R \to B) \to (R \to A \wedge B))}}{(R \to A) \to ((R \to B) \to (R \to A \wedge B))},$$

$$\underset{\text{аналогично предыдущему}}{B \to (R \to B)},\ R \to B,\quad \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash R \to A,\ \vdash (R \to A) \to ((R \to B) \to (R \to A \wedge B))}{\vdash (R \to B) \to (R \to A \wedge B)}}}{(R \to B) \to (R \to A \wedge B)},$$

$$\underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash R \to B,\ \vdash (R \to B) \to (R \to A \wedge B)}{\vdash R \to A \wedge B}}}{R \to A \wedge B},\quad \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash R,\ \vdash R \to A \wedge B}{\vdash A \wedge B}}}{A \wedge B}.$$

Итак, формула $A \wedge B$ выводима из формул $A \wedge B \to C, A, B$. Продолжим вывод до применения теоремы дедукции: $\Gamma: A \wedge B,\ \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \wedge B,\ \vdash A \wedge B \to C}{\vdash C}}}{C},\ \underset{\substack{\text{по обобщенной теореме дедукции} \\ \frac{A \wedge B \to C, A, B \vdash C}{(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))}}}{(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))}$. Отсюда следует и правило разъединения посылок $\dfrac{\vdash A \wedge B \to C}{\vdash A \to (B \to C)}$, ибо

$$\frac{\vdash A \wedge B \to C,\ \vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))}{\vdash A \to (B \to C)}.$$

Рассмотрим теперь несколько примеров на доказательство формул исчисления высказываний с использованием всех ранее рассмотренных теорем.

- **Пример 1.** Доказать допустимость следующего правила вывода: $\dfrac{\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{A}}{\Gamma, A \vdash B}$ — правило для доказательства теорем от противного.

При доказательстве новых правил, естественно, могут использоваться уже известные правила вывода. Пусть $A = \{A\}$, тогда очевидно, что $A \vdash A$. Воспользуемся уже рассмотренным правилом расширения $\dfrac{A \vdash A}{\Gamma, A \vdash A}$. По условию $\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{A}$, по правилу сведения к противоречию $\dfrac{\Gamma_1 \vdash A; \Gamma_2 \vdash \overline{A}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$ в нашем случае получим $\dfrac{\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{A}; \Gamma, A \vdash A}{\Gamma, \overline{B}, A \vdash}$, ибо $\Gamma_1, \Gamma_2 = \Gamma, \overline{B}, A = \Gamma \cup \overline{B} \cup A$. Последнее необходимое правило удаления отрицания $\dfrac{\Gamma, \overline{A} \vdash}{\Gamma \vdash A}$. В нашем случае $\dfrac{\Gamma, A, \overline{B} \vdash}{\Gamma, A \vdash B}$. Итак, доказано исходное правило вывода $\dfrac{\Gamma, \overline{B} \vdash \overline{A}}{\Gamma, A \vdash B}$.

- **Пример 2.** Вывести следующую секвенцию $\{A \to B, B \to C\} \vdash A \to C$.

Итак, $\Gamma = \{A \to B, B \to C\}$, следовательно, $\Gamma \vdash A \to B, \Gamma \vdash B \to C$. Тогда по правилу силлогизма $\dfrac{\vdash A \to B; \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$.

- **Пример 3.** Вывести следующую секвенцию $(A \to (B \to C)) \vdash B \to (A \to C)$.

Из исходного множества результат следует немедленно, если воспользоваться правилом перестановки посылок $\dfrac{\vdash A \to (B \to C)}{\vdash B \to (A \to C)}$.

- **Пример 4.** Вывести следующую секвенцию $\vdash A \vee \overline{A}$ — закон исключенного третьего.

Исходное множество не задано, следовательно, оно может быть произвольным. Выведем сначала две вспомогательные формулы

$x\to(\bar{x}\to y)$ и $\overline{x\vee y}\to\bar{x}\wedge\bar{y}$. Воспользуемся пятой, девятой и шестой аксиомами. Итак, замена в пятой аксиоме

$$\vdash \int_{x,y,z}^{\bar{x},\bar{y},\overline{x\vee y}}((z\to x)\to((z\to y)\to(z\to x\wedge y)))\equiv\vdash((\overline{x\vee y}\to\bar{x})\to$$

$$\to((\overline{x\vee y}\to\bar{y})\to(\overline{x\vee y}\to\bar{x}\wedge\bar{y}))),$$ теперь в девятой

$$\vdash\int_{y}^{x\vee y}((x\to y)\to(\bar{y}\to\bar{x}))\equiv\vdash(x\to x\vee y)\to(\overline{x\vee y}\to\bar{x}).$$

Применим правило простого заключения и шестую аксиому в качестве посылки $\dfrac{\vdash x\to x\vee y;\ \vdash(x\to x\vee y)\to(\overline{x\vee y}\to\bar{x})}{\vdash\overline{x\vee y}\to\bar{x}}$, теперь сделаем подстановку в доказанной формуле $\vdash\int_{x,y}^{y,x}(\overline{x\vee y}\to\bar{x})\equiv\vdash\overline{x\vee y}\to\bar{y}$, наконец, применим правило сложного заключения, получим:

$$\frac{\vdash\overline{x\vee y}\to\bar{x};\ \vdash\overline{x\vee y}\to\bar{y};\ \vdash(\overline{x\vee y}\to\bar{x})\to((\overline{x\vee y}\to\bar{y})\to(\overline{x\vee y}\to\bar{x}\wedge\bar{y}))}{\vdash\overline{x\vee y}\to\bar{x}\wedge\bar{y}}.$$

Таким образом, доказана одна из двух вспомогательных формул. Докажем теперь вторую из них. Для этого используем первую и девятую аксиомы, сделав в них следующие замены переменных:

$$\vdash\int_{y}^{\bar{y}}(x\to(y\to x))\equiv\vdash x\to(\bar{y}\to x)$$

и $$\vdash\int_{x,y}^{\bar{y},x}((x\to y)\to(\bar{y}\to\bar{x}))\equiv\vdash(\bar{y}\to x)\to(\bar{x}\to\bar{\bar{y}}).$$

Теперь применим несколько известных правил вывода. По правилу силлогизма $\dfrac{\vdash A\to B;B\to C}{\vdash A\to C}$ получим $\dfrac{\vdash x\to(\bar{y}\to x);\vdash(\bar{y}\to x)\to(\bar{x}\to\bar{\bar{y}})}{\vdash x\to(\bar{x}\to\bar{\bar{y}})}$;

по правилу соединения посылок $\dfrac{\vdash A\to(B\to C)}{\vdash A\wedge B\to C}$ в нашем случае $\dfrac{\vdash x\to(\bar{x}\to\bar{\bar{y}})}{\vdash x\wedge\bar{x}\to\bar{\bar{y}}}$; по правилу снятия двойного отрицания $\dfrac{\vdash A\to\bar{\bar{B}}}{\vdash A\to B}$ будем иметь $\vdash x\wedge\bar{x}\to y$; наконец, по правилу разъединения посылок $\dfrac{\vdash A\wedge B\to C}{\vdash A\to(B\to C)}$ получим доказуемость второй вспомогательной формулы $\dfrac{\vdash x\wedge\bar{x}\to y}{\vdash x\to(\bar{x}\to y)}$.

В дальнейшем доказательстве используются две полученные выводимые формулы. Сначала сделаем в них подстановки $\vdash\int_{y}^{\bar{x}}\left(\overline{x\vee y}\to(\bar{x}\wedge\bar{y})\right)\equiv\vdash\overline{x\vee\bar{\bar{x}}}\to\bar{x}\wedge\bar{\bar{x}}$ и

$$\vdash\int_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}\left(x\to(\bar{x}\to y)\right)\equiv\vdash\bar{x}\to(\bar{\bar{x}}\to\bar{y}).$$

Затем применим закон соединения посылок $\dfrac{\vdash A\to(B\to C)}{\vdash A\wedge B\to C}$, тогда $\dfrac{\vdash\bar{x}\to(\bar{\bar{x}}\to\bar{y})}{\vdash\bar{x}\wedge\bar{\bar{x}}\to\bar{y}}$. По правилу силлогизма $\dfrac{\vdash A\to B;\,B\to C}{\vdash A\to C}$ получим $\dfrac{\vdash\overline{x\vee\bar{\bar{x}}}\to\bar{x}\wedge\bar{\bar{x}};\,\bar{x}\wedge\bar{\bar{x}}\to\bar{y}}{\vdash\overline{x\vee\bar{\bar{x}}}\to\bar{y}}$; правило контрпозиции $\dfrac{\vdash A\to B}{\vdash\bar{B}\to\bar{A}}$ дает $\dfrac{\vdash\overline{x\vee\bar{\bar{x}}}\to\bar{y}}{\vdash\bar{\bar{y}}\to\overline{\overline{x\vee\bar{\bar{x}}}}}$. Правило снятия двойного отрицания $\dfrac{\vdash A\to\bar{\bar{B}}}{\vdash A\to B}$

позволяет получить доказуемую формулу $\dfrac{\vdash \bar{\bar{y}} \to \overline{\overline{x \vee \bar{x}}}}{\vdash y \to x \vee \bar{x}}$.

Воспользуемся теперь правилом удаления импликации $\dfrac{\Gamma_1 \vdash A \to B;\ \Gamma_2 \vdash A}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}$. Пусть $\Gamma_2 = \{R\}$, где R — любая доказуемая формула. Тогда $\vdash \int_y^R \left(y \to \left(x \vee \bar{x}\right)\right) \equiv \vdash R \to \left(x \vee \bar{x}\right)$. Правило удаления импликации применительно к этой формуле будет иметь вид $\dfrac{\vdash R \to x \vee \bar{x};\ \vdash R}{\vdash x \vee \bar{x}}$. Наконец, сделаем последнюю подстановку $\vdash \int_x^A \left(x \vee \bar{x}\right) \equiv \vdash A \vee \bar{A}$. Итак, исходная формула доказана.

- **Пример 5.** Доказать выводимость $\dfrac{\vdash A \to B;\ \vdash A \to \bar{B}}{\vdash \bar{A}}$.

В этом примере исходное множество формул имеет вид $\Gamma = \{A \to B, A \to \bar{B}\}$. Воспользуемся выводимой формулой, полученной на основе девятой аксиомы $\vdash (A \to B) \to \left(\bar{B} \to \bar{A}\right)$. По правилу простого заключения имеем $\dfrac{\vdash A \to B;\ \vdash (A \to B) \to \left(\bar{B} \to \bar{A}\right)}{\vdash \bar{B} \to \bar{A}}$, тогда по правилу силлогизма получается вспомогательная формула $\dfrac{\vdash A \to \bar{B};\ \vdash \bar{B} \to \bar{A}}{\vdash A \to \bar{A}}$. Пусть теперь A — любая доказуемая формула. По правилу удаления импликации $\dfrac{\vdash A;\ \vdash A \to \bar{A}}{\vdash \bar{A}}$.

- **Пример 6.** Доказать $\Gamma=\{A\to B\}\vdash A\wedge C\to B\wedge C$.

  $\Gamma: A\to B$. В множестве Γ нет формулы C. Введем ее дополнительно, положив $\Gamma_1=\{A\to B, A\wedge C\}$, $\Gamma\subset\Gamma_1$. Тогда $\Gamma_1: A\to B, A\wedge C, \underset{\substack{\text{по третьей аксиоме}\\ x\wedge y\to x}}{A\wedge C\to A}, \underset{\substack{\text{по четвертой аксиоме}\\ x\wedge y\to y}}{A\wedge C\to C}, \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash A\wedge C;\ \vdash A\wedge C\to A}{\vdash A}}}{A},$

  $\underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash A\wedge C;\ \vdash A\wedge C\to C}{\vdash C}}}{C}, \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash A;\ \vdash A\to B}{\vdash B}}}{B}$. По правилу введения конъюнкции

  $\dfrac{\Gamma_1\vdash A;\ \Gamma_2\vdash B}{\Gamma_1,\Gamma_2\vdash A\wedge B}$. Здесь $\Gamma_1=\Gamma_2$ и $\Gamma_1,\Gamma_2=\Gamma_1$. Воспользуемся теперь теоремой дедукции $\dfrac{\Gamma,C\vdash A}{\Gamma\vdash C\to A}$. В данном случае получим

  $$\frac{\left\{\overbrace{A\to B, A\wedge C}^{\Gamma,C}\right\}\vdash \overbrace{B\wedge C}^{A}}{\left\{\underbrace{A\to B}_{\Gamma}\right\}\vdash \underbrace{A\wedge C}_{C}\to\underbrace{B\wedge C}_{A}}.$$

  Итак, формула $A\wedge C\to B\wedge C$ выводима только из Γ, введение Γ_1 с формулой $A\wedge C$ было лишь вспомогательным действием.

- **Пример 7.** Докажем более сложное, чем указаио в списке правил исчисления высказываиий, правило введения дизъюнкции $\dfrac{\Gamma,A\vdash C;\ \Gamma,B\vdash C}{\Gamma,A\vee B\vdash C}$.

  По условию $\Gamma,A\vdash C$, $\Gamma,B\vdash C$. По теореме дедукции $\dfrac{\Gamma,C\vdash A}{\Gamma\vdash C\to A}$ имеем $\dfrac{\Gamma,A\vdash C}{\Gamma\vdash A\to C}$ и $\dfrac{\Gamma,B\vdash C}{\Gamma\vdash B\to C}$. Сделаем в восьмой аксиоме следующую замену переменных:

  $$\vdash \int_{x,y,z}^{A,B,C}\big((x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))\big)\equiv$$

$\equiv \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ и применим правило сложного заключения

$$\frac{\vdash A \to C; \vdash B \to C; \vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))}{\vdash A \vee B \to C}.$$

Для доказательства требуемой формулы воспользуемся правилом удаления импликации $\dfrac{\Gamma \vdash C \to A}{\Gamma, C \vdash A}$. В нашем случае $\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \to C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$.

Следовательно, правило введения дизъюнкции доказано.

- **Пример 8.** Докажем правило введения конъюнкции $\dfrac{\Gamma \vdash A; \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$.

По условию $\Gamma \vdash A$, $\Gamma \vdash B$. Докажем сначала, что $\{A, B\} \vdash A \wedge B$. Для этого сделаем подстановки в пятой и первой аксиоме:

$$\vdash \int_{x,y,z}^{A,B,A} ((z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))) \equiv \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to$$

$$\to (A \to A \wedge B)), \quad \vdash \int_{x,y}^{B,A} (x \to (y \to x)) \equiv \vdash B \to (A \to B).$$ Ранее уже показывалось, что формула $A \to A$ выводима из любой совокупности формул, в том числе и $\{A, B\} \vdash A \to A$. Применим несколько раз правило простого заключения

$$\frac{\vdash A \to A; \vdash (A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B))}{\vdash (A \to B) \to (A \to A \wedge B)},$$

$$\frac{\vdash B; \vdash B \to (A \to B)}{\vdash A \to B}, \quad \frac{\vdash A \to B; (A \to B) \to (A \to A \wedge B)}{\vdash A \to A \wedge B},$$

$$\frac{\vdash A; \vdash A \to A \wedge B}{\vdash A \wedge B}.$$

2.4. Практическое занятие № 5. Исчисление высказываний: правила вывода и доказуемость формул

2.4.1. Выписать все подформулы формул:

а) $\overline{A \to B} \vee A \wedge B$;

б) $A \to \left(\overline{B} \to \overline{(A \to B)}\right)$;

в) $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (\overline{A} \vee C)$;

г) $(A_1 \to A_2 \vee A_3) \to A_3$.

2.4.2. Применяя только правило подстановки, доказать, что выводимы следующие формулы:

а) $A \wedge B \to A \wedge B \vee C$;

б) $(A \to A) \to ((A \to B \wedge C) \to (A \to A \wedge B \wedge C))$;

в) $(A \wedge B \to (C \to B \wedge C)) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C))$;

г) $(A \vee \overline{B} \to C) \to (\overline{C} \to \overline{A} \wedge B)$.

2.4.3. Являются ли выводами в исчислении высказываний следующие последовательности формул:

а) $A \to (A \vee B)$;

б) $A \to (A \vee B)$, $(A \to (A \vee B)) \to (B \to (A \to (A \vee B)))$, $B \to (A \to (A \vee B))$;

в) $A \to (B \to A)$, $(A \to (B \to A)) \to B$, B.

2.4.4. Выводами из каких множеств формул Г является следующая последовательность формул:

а) $A \to (B \to C)$, A, $B \to C$, B, C;

б) $(A \to \overline{\overline{B}}) \to (\overline{B} \to \overline{A})$, $A \to \overline{\overline{B}}$, $\overline{B} \to \overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}$;

в) $A \to B$, A, B, $B \to B \vee C$, $B \vee C$, $(A \to B) \to (A \to B \vee C)$.

2.4.5. Доказать допустимость следующих правил вывода:

а) $\dfrac{\Gamma, B, B \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$ — правило сокращения;

б) $\dfrac{\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2, A \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash B}$;

в) $\dfrac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash C}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash C}$ — правило перестановки.

2.4.6. Применяя производные правила вывода, показать выводимость формул:

а) $\vdash A \wedge \overline{A} \to F$;

б) $\vdash (A \to B) \wedge \overline{B} \to \overline{A}$;

в) $\vdash A \vee A \to A$;

г) $\vdash \overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A \vee B}$;

д) $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$;

е) $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$.

2.4.7. Вывести следующие секвенции:

а) $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$;

б) $A \to B \vdash (A \wedge C) \to (B \wedge C)$;

в) $\overline{A} \vdash A \to B$;

г) $\overline{A} \to B \vdash \overline{B} \to A$;

д) $A \to B, B \to C \vdash A \to C$;

е) $A \to B \vdash (C \to A) \to (C \to B)$;

ж) $A \to B \vdash A \vee C \to B \vee C$;

з) $A, \overline{\overline{A}} \to B \vdash B$;

и) $A \to B, \overline{B} \vdash \overline{A}$;

к) $A \vdash B \to A$.

2.4.8. Доказать производные правила вывода:

а) $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B}{\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B}$;

б) $\dfrac{\vdash A \to B, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash B}$;

в) $\dfrac{\vdash A, \vdash \overline{B}}{\vdash \overline{A \to B}}$;

г) $\dfrac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}$;

д) $\dfrac{\vdash A \to \overline{A}}{\vdash \overline{A}}$.

2.4.9. Используя обобщенную теорему дедукции, доказать следующие формулы:

а) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

б) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$;

в) $\overline{A} \to (B \to A) \to \overline{B}$.

2.4.10. Введем следующее исчисление (исчисление Лукасевича): множество предметных переменных и констант состоит из бесконечного числа букв и знаков $\overline{}, \to$. Все буквы есть формулы, если φ — формула, то $\overline{\varphi}$ также формула; если φ и ψ — формулы, то $\varphi \to \psi$ тоже формула. Система аксиом следующая:

а) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

б) $(\overline{A} \to A) \to A$;

в) $A \to (\overline{A} \to B)$.

Справедливы правило подстановки и правило заключения. Доказать, что в исчислении Лукасевича выводима формула $A \to A$.

2.5. Монотонность и эквивалентность формул исчисления высказываний

Формула $B(A)$, содержащая переменное высказывание A, называется *монотонно возрастающей* (*убывающей*) по A, если из выводимости $A_1 \to A_2$ следует выводимость $B(A_1) \to B(A_2)$ $(B(A_2) \to B(A_1))$.

Говорят, что формула B сильнее формулы D, если $\vdash B \to D$. Эти два понятия позволяют упрощать доказательства, в которых производится замена части какой-нибудь формулы более слабой или более сильной формулой.

Из определения монотонности следует, что если формула $B(A_1)$ монотонно возрастает по A_1 и $\vdash B(A_1)$, то, заменив A_1 более слабой формулой A_2, получим также выводимую формулу. Действительно, пусть $\vdash A_1 \to A_2$ и $\vdash B(A_1)$. Из определения монотонности $\vdash B(A_1) \to B(A_2)$. Тогда по правилу простого заключения $\dfrac{\vdash B(A_1), \vdash B(A_1) \to B(A_2)}{\vdash B(A_2)}$.

Наоборот, если $B(A_1)$ убывает по A_1, то $B(A_1)$ остается выводимой при замене A_1 более сильной формулой.

Теорема 2.2. **Все основные логические операции монотонны по всем участвующим в них переменным высказываниям: формулы $A \wedge B$ и $A \vee B$ монотонно возрастают по A и B, $\overline{A}$ убывает по A, $A \to B$ убывает по A и возрастает по B.**

Доказательство.

Докажем только, что $A \vee B$ монотонно возрастает по A. Пусть $\vdash A_1 \to A_2$. Из аксиомы III$_2$ (см. формулы (2.1.1)) подстановкой получим $\int_{y,x}^{B,A_2}(y \to x \vee y) \equiv \vdash B \to A_2 \vee B$. Подстановка в III$_1$ дает $\int_{x,y}^{A_2,B}(x \to x \vee y) \equiv \vdash A_2 \to A_2 \vee B$, отсюда по правилу силлогизма $\dfrac{\vdash A_1 \to A_2, \vdash A_2 \to A_2 \vee B}{\vdash A_1 \to A_2 \vee B}$. Наконец, сделаем подстановку в аксиому III$_3$, тогда $\int\limits_{x,y,z}^{A_1, B, A_2 \vee B} (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \equiv$

$$\equiv \vdash (A_1 \to A_2 \vee B) \to ((B \to A_2 \vee B) \to (A_1 \vee B \to A_2 \vee B)).$$

Теперь, применяя дважды правило простого заключения, получим

$$\frac{\vdash A_1 \to A_2 \vee B, \vdash (A_1 \to A_2 \vee B) \to ((B \to A_2 \vee B) \to (A_1 \vee B \to A_2 \vee B))}{\vdash (B \to A_2 \vee B) \to (A_1 \vee B \to A_2 \vee B)},$$

$$\frac{\vdash B \to A_2 \vee B, \vdash (B \to A_2 \vee B) \to (A_1 \vee B \to A_2 \vee B)}{\vdash A_1 \vee B \to A_2 \vee B}.$$

Итак, $\vdash A_1 \vee B \to A_2 \vee B$, т. е. формула $A \vee B$ монотонно возрастает.

Прочие положения теоремы 2.2. доказываются аналогично.

Из алгебры высказываний имеем $(A \to B) \wedge (B \to A) \equiv A \leftrightarrow B$. Знак $\leftrightarrow$ не является символом исчисления высказываний и может употребляться лишь для сокращения выражений. Этот знак — символ языка, на котором доказываются утверждения об исчислении. Иногда этот язык называют *метаязыком*.

Две формулы A и B называются *эквивалентными*, если $\vdash A \leftrightarrow B$. Очевидно, что всякие две выводимые формулы исчисления высказываний эквивалентны. Действительно,

$$\Gamma : A, B, \underset{\substack{I_1 : x \to (y \to x) \\ \int\limits_{x,y}^{A,B} (I_1) \equiv \vdash A \to (B \to A)}}{A \to (B \to A)}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A, \vdash A \to (B \to A)}{\vdash B \to A}}}{B \to A}, \underset{\text{аналогично предыдущему}}{B \to (A \to B)}, A \to B, \underset{\substack{\text{по правилу введения} \\ \text{конъюнкции}}}{(A \to B) \wedge (B \to A)}.$$

Таким образом, если $\vdash A$ и $\vdash B$, то $\vdash A \leftrightarrow B$. Можно продолжить вывод, воспользовавшись правилом удаления импликации $\frac{\Gamma \vdash B \to A}{\Gamma, B \vdash A}$. Тогда справедливы формулы $\frac{\vdash B \to A}{B \vdash A}$ и $\frac{\vdash A \to B}{A \vdash B}$. Следовательно, если две формулы эквивалентны, т. е. $\vdash A \leftrightarrow B$, то $A \vdash B$ и $B \vdash A$.

Соотношение эквивалентности рефлексивно: $A \leftrightarrow A$, симметрично, т. е. если $A \leftrightarrow B$, то $B \leftrightarrow A$; транзитивно: если $A \leftrightarrow B$ и $B \leftrightarrow C$, то $A \leftrightarrow C$.

Теорема 2.3. **Пусть A — формула исчисления высказываний, а B — ее подформула. Пусть A' получается из A путем замены некоторого вхождения B на формулу B'. Тогда если $B \leftrightarrow B'$, то $A \leftrightarrow A'$, т. е. $\vdash (B \leftrightarrow B') \to (A(B) \leftrightarrow A(B'))$.**

Понятие эквивалентности имеет большое практическое значение, т. к. основные свойства формул исчисления высказываний сохраняются при переходе к эквивалентным формулам. Поэтому важно уметь находить для каждой формулы эквивалентную ей формулу, но устроенную по возможности более просто.

2.6. Связь между формулами алгебры высказываний и исчисления высказываний

Как уже упоминалось, алгебру высказываний можно представить в качестве интерпретации исчисления высказываний. Исчисление высказываний построено как аксиоматическая теория путем формализации алгебры высказываний. Покажем, как множество теорем исчисления совпадает со множеством тождественно истинных формул алгебры высказываний.

Введем понятие значения формулы исчисления высказываний. Пусть A — формула исчисления высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — ее переменные, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — набор значений этих переменных. Так как $\alpha_i \in \{0,1\}$ $i = \overline{1,n}$, вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}}$ имеет 2^n значений.

Теорема 2.4. **Всякая формула, доказуемая в исчислении высказываний, является тождественно истинной формулой в алгебре высказываний.**

Доказательство.

Необходимо рассмотреть и доказать три случая:

а) тождественную истинность аксиом исчисления высказываний;

б) тождественную истинность формул, полученных применением к тавтологиям правила подстановки;

в) тождественную истинность формул, полученных из тавтологий по правилу простого заключения.

Тождественная истинность аксиом исчисления проверяется непосредственно перебором всех значений их переменных по таблицам истинности. Проверим по табл. 2.6.1, например, аксиомы, содержащие три переменные.

Таблица 2.6.1

x	y	z	$(x \to (y \to z)) \to$ $\to ((x \to y) \to (x \to z))$	$(z \to x) \to$ $\to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$	$(x \to z) \to$ $\to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Прочие аксиомы проверяются аналогично.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, x$ — перечень всех переменных, входящих в формулы A и B, например, $A(x_1, x_2, \dots, x_n, x)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $k \le n$. Тогда значения формул A и B на наборе $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha$ будут равны $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha) = \tilde{\alpha}$, $B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \beta$. Рассмотрим значения формул при различных подстановках: $\int\limits_x^B (x_i) = x_i$, $x_i\big|_{\alpha_i} = \alpha_i$,

$$\int\limits_x^B (A) = A(x_1, x_2, \dots, x_n, B),\quad A(x_1, x_2, \dots, x_n, B)\Big|_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha)} =$$

$$= A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) = \tilde{\alpha}_1.$$

Если A — тавтология, то $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha) = A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta) \equiv 1$,

т. е. если $A(x_1, x_2, \dots, x_n, x) = 1$, то $\int\limits_x^B (A) = A(x_1, x_2, \dots, x_n, B) \equiv 1$.

5 Зак. 4306

Пусть A и $A \to B$ — тождественно истинные формулы. Тогда из свойств импликации при любом наборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha$ $1 \to B = 1$. Отсюда $B \equiv 1$. Следовательно, любая выводимая формула тождественно истинна.

Теорема 2.5 (теорема о выводимости). **Пусть A — некоторая формула исчисления высказываний; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — набор всех переменных, входящих в формулу A; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольный фиксированный набор значений этих переменных. Пусть конечная совокупность формул $\Gamma = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\}$, где $x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i, \text{если } \alpha_i = 1, \\ \overline{x_i}, \text{если } \alpha_i = 0. \end{cases}$ Тогда, если значение формулы A при наборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1, то $\Gamma \vdash A$, если же значение формулы A при наборе $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равно 0, то $\Gamma \vdash \overline{A}$.**

Доказательство.

Докажем теорему методом математической индукции по длине рассматриваемой формулы.

Пусть формула A есть переменная x_i. Тогда, если $x_i|_{\alpha_i} = 1$, то $x_i \vdash x_i$ и $x_i^{\alpha_i} \vdash x_i$, т. е. $x_i^{\alpha_i} \vdash A$. Но $\Gamma = \{x_i^{\alpha_i}\}$, следовательно $\Gamma \vdash A$. Если же $x_i|_{\alpha_i} = 0$, то $x_i^{\alpha_i} = \overline{x_i}$ и $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{x_i}$, т. е. $x_i^{\alpha_i} \vdash \overline{A}$. Аналогично, $\Gamma = \{x_i^{\alpha_i}\}$ и $\Gamma \vdash \overline{A}$.

Увеличим теперь длину формулы A.

Очевидно, что A может иметь один из следующих четырех видов: а) $\overline{B_1}$, б) $B_1 \wedge B_2$, в) $B_1 \vee B_2$, г) $B_1 \to B_2$, причем по только что доказанному для B_1 и B_2 теорема 2.5 справедлива.

Рассмотрим лишь случаи а) и г).

а) Пусть A имеет вид $\overline{B_1}$. Если $\overline{B_1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$, то $B_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ и, следовательно, $\Gamma \vdash \overline{B_1}$, т. е. $\Gamma \vdash A$. Если же $\overline{B_1}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$, то

$B_1(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=1$ и $\Gamma\vdash B_1$. Продолжим теперь вывод по правилам исчисления высказываний

$$\Gamma: B_1,\quad \underset{\displaystyle\int_x^B (IV_2)\vDash\ \vdash B_1\to\overline{\overline{B_1}}}{\underset{IV_2:x\to x}{B_1\to\overline{\overline{B_1}}}}\ ,\quad \underset{\displaystyle\frac{\vdash B_1,\ \vdash B_1\to\overline{\overline{B_1}}}{\vdash\overline{\overline{B_1}}}}{\underset{\text{по ППЗ}}{\overline{\overline{B_1}}}}$$

. Но $\overline{\overline{B_1}}=\bar{A}$, тогда $\Gamma\vdash\bar{A}$.

г) Пусть $A=B_1\to B_2$. Если $A(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=1$, то по свойству импликации либо $B_1(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=0$, либо $B_2(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=1$. Если $B_1(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=0$, то $\Gamma\vdash\overline{B_1}$. Запишем вывод из Γ.

$$\Gamma:\overline{B_1},\quad \underset{\displaystyle\int_{x,y}^{B_1,\overline{B_2}}(I_1)\vDash\ \vdash B_1\to(\overline{B_2}\to B_1)}{\underset{I_1:x\to(y\to x)}{B_1\to(\overline{B_2}\to B_1)}}\ ,\quad \underset{\displaystyle\int_{x,y}^{\overline{B_2},B_1}(IV_1)\vDash\ \vdash(\overline{B_2}\to B_1)\to(\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}})}{\underset{IV_1:(x\to y)\to(\bar{y}\to\bar{x})}{(\overline{B_2}\to B_1)\to(\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}})}}\ ,$$

$$\underset{\displaystyle\frac{\vdash B_1\to(\overline{B_2}\to B_1)\ \ \vdash(\overline{B_2}\to B_1)\to(\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}})}{\vdash B_1\to(\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}})}}{\underset{\text{силлогизм}}{B_1\to(\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}})}}\ ,\quad \underset{\displaystyle\frac{\vdash B_1\to(\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}})}{\vdash B_1\wedge\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}}}}{\underset{\text{соединение посылок}}{B_1\wedge\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}}}}\ ,\quad \underset{\displaystyle\frac{\vdash B_1\wedge\overline{B_1}\to\overline{\overline{B_2}}}{\vdash B_1\wedge\overline{B_1}\to B_2}}{\underset{\text{снятие двойного отрицания}}{B_1\wedge\overline{B_1}\to B_2}}\ ,$$

$$\underset{\displaystyle\frac{\vdash B_1\wedge\overline{B_1}\to B_2}{\vdash B_1\to(\overline{B_1}\to B_2)}}{\underset{\text{разъединение посылок}}{B_1\to(\overline{B_1}\to B_2)}},\ \underset{\displaystyle\frac{\vdash B_1\to(\overline{B_1}\to B_2)}{\vdash\overline{B_1}\to(B_1\to B_2)}}{\underset{\text{перестановка посылок}}{\overline{B_1}\to(B_1\to B_2)}},\quad \underset{\displaystyle\frac{\vdash\overline{B_1},\ \vdash\overline{B_1}\to(B_1\to B_2)}{\vdash B_1\to B_2}}{\underset{\text{по ППЗ}}{B_1\to B_2}}$$

. Таким образом, $\Gamma\vdash B_1\to B_2$.

Если же $B_2(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=1$, $\Gamma\vdash B_2$. Тогда вывод из Γ имеет следующий вид:

$$\Gamma: B_2,\quad \underset{\displaystyle\int_{x,y}^{B_2,B_1}(I_1)\vDash\ \vdash B_2\to(B_1\to B_2)}{\underset{I_1:x\to(y\to x)}{B_2\to(B_1\to B_2)}}\ ,\quad \underset{\displaystyle\frac{\vdash B_2,\ \vdash B_2\to(B_1\to B_2)}{\vdash B_1\to B_2}}{\underset{\text{по ППЗ}}{B_1\to B_2}}$$

. Итак, и в этом случае $\Gamma\vdash B_1\to B_2$.

Пункты б) и в) этой теоремы доказываются аналогично. Предоставляем читателям сделать это самостоятельно.

Теорему 2.5 часто применяют для добавления в вывод из множества Γ какой-нибудь сложной формулы, включающей в себя предыдущие члены вывода в качестве составных частей.

- **Пример.** Дана формула $A=(x\vee\bar y)\to(\bar x\wedge\bar z)$ и наборы значений переменных: а) $(1,0,0)$ и б) $(0,1,1)$. Записать вывод формул A или $\bar A$ из соответствующей совокупности формул.

а) $A(1,0,0)=(1\vee\bar 0)\to(\bar 1\wedge\bar 0)\equiv(1\vee 1)\to(0\wedge 1)\equiv 1\to 0=0$.

Следовательно, из множества $\Gamma=\{x,\bar y,\bar z\}\vdash\bar A$, т. е.

$\{x,\bar y,\bar z\}\vdash\overline{(x\vee\bar y)\to(\bar x\wedge\bar z)}$. Действительно,

$$\Gamma: x,\bar y,\bar z, x\to x, \underset{\int_x^A (x\to x)\equiv\ \vdash(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)}{(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)},$$

$$\underset{\text{перестановка посылок}\ \frac{\vdash(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)}{\vdash x\vee\bar y\to(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to\bar x\wedge\bar z}}{x\vee\bar y\to(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to\bar x\wedge\bar z},\quad \underset{III_1: x\to x\vee y;\ \int_y^{\bar y}(III_1)\equiv\ \vdash x\to x\vee\bar y}{x\to x\vee\bar y},\quad \underset{\text{по ППЗ}\ \frac{\vdash x,\ \vdash x\to x\vee\bar y}{\vdash x\vee\bar y}}{x\vee\bar y},$$

$$\underset{\text{по ППЗ}\ \frac{\vdash x\vee\bar y,\ \vdash x\vee\bar y\to(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to\bar x\wedge\bar z}{\vdash(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to\bar x\wedge\bar z}}{(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to\bar x\wedge\bar z},\ \underset{\text{контрпозиция}\ \frac{\vdash(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)\to\bar x\wedge\bar z}{\vdash\overline{\bar x\wedge\bar z}\to\overline{(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)}}}{\overline{\bar x\wedge\bar z}\to\overline{(x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z)}},\ \underset{II_1: x\wedge y\to x;\ \int_{x,y}^{\bar x,\bar z}(II_1)\equiv\ \vdash\bar x\wedge\bar z\to\bar x}{\bar x\wedge\bar z\to\bar x},\ \underset{\text{контрпозиция}\ \frac{\vdash\bar x\wedge\bar z\to\bar x}{\vdash\bar{\bar x}\to\overline{\bar x\wedge\bar z}}}{\bar{\bar x}\to\overline{\bar x\wedge\bar z}},$$

$$\underset{\text{снятие двойного отрицания}\ \frac{\vdash\bar{\bar x}\to\overline{\bar x\wedge\bar z}}{\vdash x\to\overline{\bar x\wedge\bar z}}}{x\to\overline{\bar x\wedge\bar z}},\quad \underset{\text{по ППЗ}\ \frac{\vdash x,\ \vdash x\to\overline{\bar x\wedge\bar x}}{\vdash\overline{\bar x\wedge\bar x}}}{\overline{\bar x\wedge\bar x}},\quad \underset{\text{по ППЗ}\ \frac{\vdash\overline{\bar x\wedge\bar x},\ \vdash\overline{\bar x\wedge\bar x}\to\overline{x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z}}{\vdash\overline{x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z}}}{\overline{x\vee\bar y\to\bar x\wedge\bar z}}\equiv\bar A.$$

Каждую из формул этого вывода можно было непосредственно поставить в вывод, проверив ее значение на наборе $(1,0,0)$, например, $\overline{\bar x\wedge\bar z}\Big|_{(1,0,0)}=\overline{\bar 1\wedge\bar 0}=\overline{0\wedge 1}=\bar 0=1$.

б) $A(0,1,1)=(0\vee\bar 1)\to(\bar 0\wedge\bar 1)=(0\vee 0)\to(1\wedge 0)=0\to 0=1$.

Значит, $\Gamma=\{x,y,z\}\vdash A$.

Проверим это.

$$\Gamma: \bar{x}, y, z,\ x \to (\bar{y} \to x),\ (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}),\ x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}),$$

$I_1 : x \to (y \to x)$, $\int\limits_{y}^{\bar{y}} (I_1) \equiv\ \vdash x \to (\bar{y} \to x)$;

$IV_1 : (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$, $\int\limits_{x,y}^{\bar{y},x} (IV_1) \equiv\ \vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})$;

силлогизм $\dfrac{\vdash x \to (\bar{y} \to x),\ \vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})}{\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})}$

$$x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}},\quad x \wedge \bar{x} \to y,\quad x \to (\bar{x} \to y),\quad \bar{x} \to (x \to y),$$

соединение посылок $\dfrac{\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})}{\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}}$; снятие двойного отрицания $\dfrac{\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}}{\vdash x \wedge \bar{x} \to y}$; разъединение посылок $\dfrac{\vdash x \wedge \bar{x} \to y}{\vdash x \to (\bar{x} \to y)}$; перестановка посылок $\dfrac{\vdash x \to (\bar{x} \to y)}{\vdash \bar{x} \to (x \to y)}$

$$x \to y,\quad \overline{x \vee \bar{y}} \to (x \vee \bar{y} \to \bar{x} \wedge \bar{z}),\quad \bar{x} \wedge y,$$

по ППЗ $\dfrac{\vdash \bar{x},\ \vdash \bar{x} \to (x \to y)}{\vdash x \to y}$; $\int\limits_{x,y}^{\overline{x \vee \bar{y}},A} (x \to y) \equiv\ \vdash \overline{x \vee \bar{y}} \to (x \vee \bar{y} \to \bar{x} \wedge \bar{z})$; правило введения конъюнкции $\dfrac{\vdash \bar{x},\ \vdash y}{\vdash \bar{x} \wedge y}$

$$\bar{x} \wedge y \to \overline{x \vee \bar{y}},\quad \overline{x \vee \bar{y}},\quad x \vee \bar{y} \to \bar{x} \wedge \bar{z} \equiv A.$$

$\int\limits_{x,y}^{\bar{x} \wedge y,\overline{x \vee \bar{y}}} (x \to y) \equiv\ \vdash \bar{x} \wedge y \to \overline{x \vee \bar{y}}$; по ППЗ $\dfrac{\vdash \bar{x} \wedge y,\ \vdash \bar{x} \wedge y \to \overline{x \vee \bar{y}}}{\vdash \overline{x \vee \bar{y}}}$; по ППЗ $\dfrac{\vdash \overline{x \vee \bar{y}},\ \vdash \overline{x \vee \bar{y}} \to (x \vee \bar{y} \to \bar{x} \wedge \bar{z})}{\vdash x \vee \bar{y} \to \bar{x} \wedge \bar{z}}$

Проверка по теореме 2.5 для каждого члена приведенного вывода дает аналогичный результат. Например, $x \to y\big|_{(0,1,1)} = 0 \to 1 = 1$, $\bar{x} \to (x \to y)\big|_{(0,1,1)} = \bar{0} \to (0 \to 1) = 1 \to 1 = 1$ и т. д.

Теорема 2.6. **Каждая тождественно истинная формула алгебры высказываний доказуема в исчислении высказываний.**

Доказательство.

Пусть A — тождественно истинная формула алгебры высказываний, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — список всех ее переменных. Рассмотрим произвольный набор этих переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big|_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} = 1$, следовательно, по теореме 2.5 $\Gamma_n \vdash A$, где $\Gamma_n = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}\}$, причем $\Gamma_n \vdash A$ на всех 2^n различных n-ках чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Пусть $\Gamma_{n-1} = \left\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\right\}$, тогда если $\alpha_n = 1$, имеем $\Gamma_{n-1}, x_n \vdash A$, а в случае $\alpha_n = 0$ $\Gamma_{n-1}, \overline{x_n} \vdash A$. По теореме дедукции $\dfrac{\Gamma_{n-1}, x_n \vdash A}{\Gamma_{n-1} \vdash x_n \to A}$, $\dfrac{\Gamma_{n-1}, \overline{x_n} \vdash A}{\Gamma_{n-1} \vdash \overline{x_n} \to A}$. Запишем теперь вывод из Γ_{n-1}.

$$\Gamma_{n-1} : x_n \to A, \overline{x_n} \to A, \quad \underset{\substack{C=(A\to B)\to((\overline{A}\to B)\to B)\equiv 1 \text{ на любом наборе} \\ \text{переменных, формула выводима по теореме 2.5} \\ \int_{A,B}^{x_n,A}(C)\equiv\vdash(x_n\to A)\to((\overline{x_n}\to A)\to A)}}{(x_n \to A) \to \left(\left(\overline{x_n} \to A\right) \to A\right)},$$

$$\underset{\dfrac{\vdash x_n\to A,\ \vdash(x_n\to A)\to((\overline{x_n}\to A)\to A)}{\vdash(\overline{x_n}\to A)\to A}}{\overset{}{\left(\overline{x_n} \to A\right) \to A}}_{\text{по ППЗ}}, \quad \underset{\dfrac{\vdash \overline{x_n}\to A,\ \vdash(\overline{x_n}\to A)\to A}{\vdash A}}{A}_{\text{по ППЗ}}.$$

Итак, $\Gamma_{n-1} \vdash A$. Точно так же, обозначая через $\Gamma_{n-2} = \left\{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_{n-2}^{\alpha_{n-2}}\right\}$, получим $\Gamma_{n-2} \vdash A$. Тогда и $\Gamma_1 = \left\{x_1^{\alpha_1}\right\} \vdash A$. Если $\alpha_1 = 1$, то $\{x_1\} \vdash A$, если же $\alpha_1 = 0$, то $\left\{\overline{x_1}\right\} \vdash A$. По теореме дедукции $\dfrac{x_1 \vdash A}{\vdash x_1 \to A}$, $\dfrac{\overline{x_1} \vdash A}{\vdash \overline{x_1} \to A}$.

Аналогичный вывод дает $\vdash A$, т. е. формула A доказуема в любой совокупности формул, если она тождественно истинна.

2.7. Некоторые алгоритмы проверки выводимости формул в исчислении высказываний

Выявление того, что из некоторого множества формул исчисления логически следует другая формула, является по существу одной из основных задач исчисления высказываний. Для доказательства выводимости часто используется теорема 2.6.

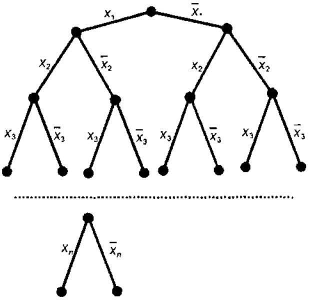


Рис. 2.1

Алгоритм Квайна

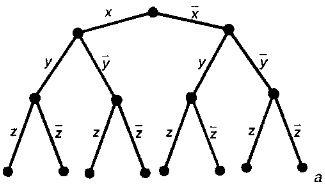
Для проверки тождественной истинности формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ используется так называемое семантическое дерево, представляющее собой бинарное однокорневое дерево (рис. 2.1), удовлетворяющее следующим условиям:

- каждое ребро помечено $x_i^{\sigma_i}$;
- ребра, выходящие из одной вершины, соответствуют противоположным переменным x_i и $\bar{x}_i$;
- ребра соответствуют одной и той же переменной тогда и только тогда, когда они находятся на одинаковом расстоянии от корня. Граф, изображенный на рис. 2.1, имеет 2^n висячих вершин, т. е. вершин последнего ряда, и для проверки тождественной истинности в общем случае нужно исследовать 2^n маршрутов от корня до каждой текущей вершины.

Алгоритм Квайна позволяет проходить лишь часть дерева и заключается в последовательном переборе переменных x_i и придании им значений 0, 1. Для каждого такого набора анализируется таблица истинности формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$, причем эта таблица из-за фиксированного значения x_i содержит меньшее число переменных.

- **Пример 1.** $A(x,y,z)=(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))$.

  Пусть $x=1$. Тогда формула A преобразуется следующим образом: $A(1,y,z)=(1\to z)\to((y\to z)\to(1\vee y\to z))\equiv(1\to z)\to((y\to z)\to$ $\to(1\to z))$. О значении полученной формулы определенный вывод сделать еще нельзя. Придадим значение $y=1$, получим $A(1,1,z)=(1\to z)\to((1\to z)\to(1\to z))\equiv(1\to z)\to 1\equiv 1$. Если же $y=0$, то $A(1,0,z)=(1\to z)\to((0\to z)\to(1\to z))\equiv(1\to z)\to(1\to(1\to z))$. Продолжим процесс последовательного перебора значений переменных: $z=1$, $A(1,1,1)=(1\to 1)\to(1\to(1\to 1))\equiv 1$, $A(1,1,0)=(1\to 0)\to(1\to(1\to 0))\equiv 0\to(1\to 0)\equiv 0\to 0\equiv 1$.



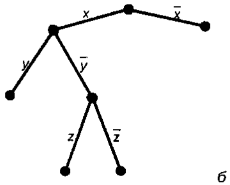


Рис. 2.2

Рассмотрим теперь случай $x=0$. Получим

$$A(0,y,z)=(0\to z)\to((y\to z)\to(0\vee y\to z))\equiv$$
$$\equiv 1\to((y\to z)\to(y\to z))\equiv 1\to 1\equiv 1.$$

Таким образом, все рассмотренные случаи приводят к тождественно истинным формулам, и формула A тождественно истинна, а значит доказуема. На рис. 2.2, *а* изображен граф, соответствующий формуле, а на рис. 2.2, *б* его подграф, использованный для проверки выводимости.

- **Пример 2.** $A(x,y)=x\wedge(x\to y)\wedge(x\to\bar{y})$. Придадим значение $x=1$. $A(1,y)=1\wedge(1\to y)\wedge(1\to\bar{y})\equiv(1\to y)\wedge(1\to\bar{y})$; $y=1$, $A(1,1)=(1\to 1)\to(1\to 0)\equiv 1\to 0\equiv 0$.

  Формула A выполнима и не выводима из произвольного (может быть пустого) множества формул (рис. 2.3).

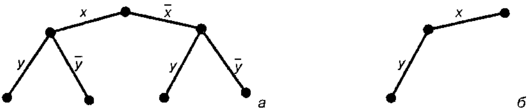


Рис. 2.3

Алгоритм метода редукций

Алгоритм метода редукций похож на алгоритм только что рассмотренного метода Квайна. При переборе наборов значений переменных исследуемой формулы используется свойство импликации быть ложной только тогда, когда посылка истинна, а следствие ложно. Метод эффективен для формул, содержащих много импликаций.

Рассмотрим ту же функцию $A(x,y,z)=(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))$. Предположим, что формула A ложна при некотором наборе переменных $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$. Тогда по свойству импликации $x\to z=1$, а $(y\to z)\to(x\vee y\to z)=0$, т. е. $y\to z=1$ и $x\vee y\to z=0$, $x\vee y=1$, $z=\sigma_3=0$. Но если $z=0$, то $x\to z=0$ и $y\to z=0$, а не 1, как было получено раньше. Данное противоречие говорит о том, что исходное предположение о ложности формулы A неверно. Таким образом, формула A тождественно истинна.

Метод резолюций

Рассуждения, являющиеся основой метода логического вывода, называемого *методом резолюций*, заключаются в следующем. Чтобы доказать, что $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}\vdash A$ необходимо показать, что $A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_n\to A$ — тавтология.

Действительно, пусть $\Gamma=\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$. Так как $A_i\in\Gamma, i=\overline{1,n}$, то $\Gamma\vdash A_i$.

По правилу введения конъюнкции $\dfrac{\Gamma\vdash A,\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\wedge B}$, т. е. если $\Gamma\vdash A_1,A_2,\dots,A_n$, то $\Gamma\vdash A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_n$. Следовательно, формулу $A_1\wedge A_2\wedge\dots\wedge A_n$ можно добавить в Γ. Тогда по теореме дедукции $\dfrac{\Gamma,A\vdash B}{\Gamma\vdash A\to B}$, т. е.

$\dfrac{\Gamma, A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \vdash A}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A}$. Таким образом, если $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$, то формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A \equiv 1$ (тавтология).

Введем еще несколько определений. Пусть $A_1 = A_1' \vee B$, $A_2 = A_2' \vee \overline{B}$. Дизъюнкт $A_1' \vee A_2'$ называется *резольвентой* дизъюнктов A_1 и A_2 по переменной B и обозначается через $res_B(A_1, A_2)$. Резольвентой дизъюнктов A_1 и A_2 называется резольвента по некоторой переменной и обозначается $res(A_1, A_2)$. Если дизъюнкты A_1 и A_2 не содержат противоположных переменных, то резольвент у них не существует. Очевидно, что $res\left(A, \overline{A}\right) = 0$.

Если $res(A_1, A_2)$ существует, то $\{A_1, A_2\} \vdash res(A_1, A_2)$. Действительно, пусть $A_1 = A_1' \vee B$, $A_2 = A_2' \vee \overline{B}$, $res_B(A_1, A_2) = A_1' \vee A_2'$. Очевидно, что $\left\{A_1' \vee B, A_2' \vee \overline{B}\right\} \vdash A_1' \vee A_2'$. Для доказательства достаточно воспользоваться правилами удаления и введения дизъюнкции.

Пусть $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ — множество дизъюнктов. Последовательность формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$ называется *резолютивным выводом* из Γ, если для каждой формулы $B_i, i = \overline{1, n}$, выполняется одно из условий:

1. $B_i \in \Gamma$;
2. $\exists j, k < i$, такие, что $B_i = res\left(B_j, B_k\right)$.

Теорема 2.7 (теорема о полноте метода резолюций). **Множество дизъюнктов Γ противоречиво в том и только в том случае, когда существует резолютивный вывод из Γ, заканчивающий нулем.**

Применим эту теорему для проверки выводимости формулы A из данного множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Условие $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash A$ равносильно условию $\left\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \overline{A}\right\} \vdash$. Действительно, если $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash A$, то $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A \equiv 1$, тогда, $\overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n} \vee A \equiv 0$, $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \overline{A} = 0$, т. е. $\Gamma_1 = \left\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \overline{A}\right\} \vdash$. Это равносильно условию, что $B \vdash$, где $B = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \overline{A}$.

Приведем формулу B к КНФ, т. е. к виду $B = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$. Тогда если $B \mid -$, то $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m \mid -$. Таким образом, задача проверки выводимости $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \mid - A$ сводится к проверке противоречивости множества дизъюнктов $\Gamma_1 = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$, а это равносильно существованию резолютивного вывода нуля из Γ_1.

- **Пример 3.** Проверим методом резолюций выводимость $\Gamma = \{A \to B \wedge C, B \to D, C \to E, \overline{A} \to F\} \mid - (D \wedge E) \vee F$. Выводимость данной формулы из Γ по этому методу следует из противоречивости множества $\Gamma_1 = \{A \to B \wedge C, B \to D, C \to E, \overline{A} \to F, \overline{DE \vee F}\}$. Приведем все формулы из Γ_1 к КНФ: $\Gamma_1 = \{\overline{A} \vee BC, \overline{B} \vee D, \overline{C} \vee E, A \vee F, \overline{F} \wedge (\overline{D} \vee \overline{E})\} = \{(\overline{A} \vee B)(\overline{A} \vee C), \overline{B} \vee D, \overline{C} \vee E, A \vee F, \overline{F}(\overline{D} \vee \overline{E})\}$.

  Таким образом, множество дизъюнктов
  $\Gamma_1' = \{\overline{A} \vee B, \overline{A} \vee C, \overline{B} \vee D, \overline{C} \vee E, A \vee F, \overline{F}, \overline{D} \vee \overline{E}\}$.

  Построим возможный резолютивный вывод нуля из Γ_1':

  1. $res_A(\overline{A} \vee B, A \vee F) = B \vee F$;
  2. $res_A(\overline{A} \vee C, A \vee F) = C \vee F$;
  3. $res_B(\overline{B} \vee D, B \vee F) = D \vee F$;
  4. $res_C(C \vee F, \overline{C} \vee E) = E \vee F$;
  5. $res_E(E \vee F, \overline{D} \vee \overline{E}) = \overline{D} \vee F$;
  6. $res_D(D \vee F, \overline{D} \vee F) = F \vee F = F$;
  7. $res(F, \overline{F}) = 0$.

На практике в общем случае метод резолюций не эффективен, т. к. число переборов резольвент может быть очень большим, оно экспоненциально зависит от числа дизъюнктов и содержащихся в них переменных. Метод успешно применяется к одному классу дизъюнктов — хорновским дизъюнктам.

Дизъюнкт A называется *хорновским*, если он содержит не более одной позитивной переменной, например $\overline{A} \vee \overline{B} \vee C$, $\overline{A} \vee C$, A, $\overline{B}$. В общем случае хорновские дизъюнкты имеют вид $\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_n}$ или $\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_n} \vee B$. Хорновский дизъюнкт вида $\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_n}$ называется *негативным*, а дизъюнкт $\overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_n} \vee B$ — *точным*. Дизъюнкт A называется *унитарным позитивным дизъюнктом*.

Если Γ — множество хорновских дизъюнктов, то его проверка на противоречивость происходит следующим образом. В Γ выбирается унитарный позитивный дизъюнкт B и дизъюнкт $C \in \Gamma$, содержащий $\overline{B}$.

Далее Γ заменяется на $\Gamma \setminus \{C\} \cup \{res(C,B)\}$. Этот процесс продолжается до тех пор, пока либо Γ не будет содержать 0, либо не найдется дизъюнктов B и C указанного вида. В первом случае исходное множество Γ противоречиво, во втором непротиворечиво.

- **Пример 4.** Проверим на противоречивость множество

$$\Gamma = \{A \to B, C \to D, B \to E, D \to F, \overline{EF}, A \to C, A\} =$$
$$= \{\overline{A} \vee B, \overline{C} \vee D, \overline{B} \vee E, \overline{D} \vee F, \overline{E} \vee \overline{F}, \overline{A} \vee C, A\}.$$

Множество содержит только хорновские дизъюнкты. Применим к нему описанный алгоритм по шагам:

1. $res_A(A, \overline{A} \vee B) = B$, $\{A, B, \overline{C} \vee D, \overline{B} \vee E, \overline{D} \vee F, \overline{E} \vee \overline{F}, \overline{A} \vee C\}$;
2. $res_B(B, \overline{B} \vee E) = E$, $\{A, B, E, \overline{C} \vee D, \overline{D} \vee F, \overline{E} \vee \overline{F}, \overline{A} \vee C\}$;
3. $res_E(E, \overline{E} \vee \overline{F}) = \overline{F}$, $\{A, B, E, \overline{F}, \overline{C} \vee D, \overline{D} \vee F, \overline{A} \vee C\}$;
4. $res_F(\overline{F}, \overline{D} \vee F) = \overline{D}$, $\{A, B, \overline{D}, E, \overline{F}, \overline{C} \vee D, \overline{A} \vee C\}$;
5. $res_A(A, \overline{A} \vee C) = C$, $\{A, B, C, \overline{D}, E, \overline{F}, \overline{C} \vee D\}$;
6. $res_C(C, \overline{C} \vee D) = D$, $\{A, B, C, D, \overline{D}, E, \overline{F}\}$;
7. $res(D, \overline{D}) = 0$. Множество Γ противоречиво.

2.8. Проблемы аксиоматического исчисления высказываний

Исчисление высказываний как всякая аксиоматическая теория для своего обоснования требует решения четырех проблем: разрешимости, непротиворечивости, полноты, независимости. Рассмотрим их все кратко.

Первая проблема — проблема разрешимости — заключается в том, что должен существовать алгоритм, позволяющий для любой заданной формулы исчисления высказываний определять, является ли она доказуемой или нет. Такой алгоритм существует. Действительно, любая формула исчисления высказываний может рассматриваться как формула алгебры высказываний, для которой эта проблема решается с помощью теорем 1.9–1.12 *(см. разд. 1.13)*.

Вторая проблема — непротиворечивость исчисления высказываний. Формальную аксиоматическую теорию называют *непротиворечивой*, если не существует формулы A такой, что в исчислении одновременно выводимы A и $\overline{A}$.

Теорема 2.8. **Исчисление высказываний непротиворечиво.**

Действительно, по теореме 2.4 всякая выводимая формула тождественно истинна. Отрицание этой формулы не является тождественно истинной формулой. Следовательно, ни для какой формулы A невозможно, чтобы одновременно $\vdash A$ и $\vdash \overline{A}$.

Третья проблема — это проблема полноты. Она имеет два аспекта: полноту в узком и в широком смысле.

Аксиоматическое исчисление называется *полным в узком смысле*, если добавление к списку его аксиом любой недоказуемой в исчислении формулы в качестве новой аксиомы приводит к противоречивому исчислению.

Теорема 2.9. **Исчисление высказываний полно в узком смысле.**

Доказательство.

Пусть A — произвольная невыводимая формула (по теореме 2.7 в качестве A можно взять любую нетождественно истинную формулу), а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — список ее переменных. Так как A — невыводимая формула, то существует набор значений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ переменных такой, что $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big|_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = 0$.

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ — любые тождественно истинные формулы, зависящие от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим следующий набор формул: $B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}$, где $B_i^{\alpha_i} = \begin{cases} B_i, \alpha_i = 1 \\ \overline{B_i}, \alpha_i = 0 \end{cases}$, и осуществим их подстановку в формулу A: $\int_{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}} A = A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}) \equiv 0$. Действительно, для любого набора $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ значений переменных $B_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} \equiv 1$, т. к. B_i — тождественно истинная формула. Тогда $B_i^{\alpha_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n} \equiv \alpha_i$ и $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}) = A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Таким образом, если $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}) \equiv 0$, то $\overline{A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n})} \equiv 1$, т. е. тождественно истинная формула и, следовательно, по теореме 2.6 выводима в исчислении высказываний.

С другой стороны, если формулу $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ добавить к списку аксиом исчисления, то она станет выводимой в новом исчислении как аксиома. В новом исчислении формула $A(B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}) = \int_{x_1, x_2, \ldots, x_n}^{B_1^{\alpha_1}, B_2^{\alpha_2}, \ldots, B_n^{\alpha_n}} A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получается в результате одновременной подстановки, т. е. также будет выводимой. Следовательно, новое исчисление высказываний будет противоречивым, т. к. в нем $\vdash A$ и $\vdash \overline{A}$.

Аксиоматическое исчисление называется *полным в широком смысле*, если любая тождественно истинная формула в нем доказуема. Проблема полноты в широком смысле решается также положительно. Справедливость этого факта следует из теоремы 2.6.

Наконец, последняя проблема — проблема независимости — заключается в независимости системы ее аксиом, т. е. в невыводимости любой из них из остальных аксиом по правилам вывода данной системы. Оказывается, что система аксиом исчислеиия высказываний независима. Этот факт довольно легко проверяется непосредственно, если явным образом определить множество, из которого принимают значения переменные x, y, z.

Теорема 2.10. **Система аксиом исчислеиия высказываний независима.**

Доказательство независимости всех одиннадцати аксиом исчисления высказываний довольио громоздко и основано на некоторых интерпретациях переменных и логических операций исчисления. Независимость самых простых аксиом можно доказать по следующей схеме. Допускается, что переменные в аксиомах могут принимать только два значеиия: 1 и 0. Все логические операции $\bar{\ }, \wedge, \vee, \rightarrow$, кроме одной, определяются так же, как и в алгебре высказываний, причем 1 играет роль истины, а 0 — лжи. Одну же из логических операций специально определяют так, чтобы та аксиома, в которую эта операция входит и независимость которой доказывается, не являлась тождественно равной 1.

При такой интерпретации все аксиомы, кроме исследуемой, принимают значение 1. Все формулы, выводимые из совокупности аксиом, кроме исследуемой, также будут принимать значений 1 при всех значениях входящих в них параметров.

Ясно, что если такая интерпретация возможна, то исследуемая аксиома не зависит от остальных, т. к. если бы она была выводима из остальных, то она, как и все формулы, выводимые из совокупности аксиом, кроме исследуемой, принимала бы только значение, равное 1.

2.9. Практическое занятие № 6. Эквивалентность формул исчисления высказываний и теорема о выводимости. Алгоритмы Квайна, редукций и резолюций

2.9.1. Вывести следующие секвенции:

а) $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$;

б) $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$.

2.9.2. Доказать, что в исчислении высказываний выводимы секвенции:

а) $\vdash A \leftrightarrow A$;

б) $\{A \leftrightarrow B\} \vdash (C \to A) \leftrightarrow (C \to B)$.

2.9.3. Доказать, что следующие формулы выводимы в исчислении высказываний:

а) $\vdash \overline{A \vee B} \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$;

б) $\overline{\overline{\overline{A}}} \leftrightarrow \overline{A}$.

2.9.4. Используя свойство монотонного возрастания или убывания функций, доказать выводимость следующих формул:

а) $A = \overline{x} \to (x \to (x \to y \wedge x))$;

б) $A = \overline{x \wedge y \to y} \to y$.

2.9.5. Используя свойство монотонного возрастания дизъюнкции по обеим переменным, доказать выводимость формулы

$$A = \left(x \wedge \overline{\left(x \wedge \overline{x} \to y \wedge \overline{y}\right)} \to \overline{z}\right) \vee x \vee z .$$

2.9.6. Дана формула $A=\overline{\overline{x}\wedge\overline{y}}\vee(x\to y)\wedge x$ и наборы значеиий переменных а) $(1,1)$, б) $(0,0)$. Записать вывод формул A или $\overline{A}$ из соответствующей совокупности формул.

2.9.7. Формула $A=x_1\vee x_2\to x_3$ задана на наборах а) $(0,0,1)$ и б) $(1,0,0)$. Вывести A или $\overline{A}$ из соответствующей совокупности формул.

2.9.8. Формула $A=(x\to y)\wedge(y\to z)\to(z\to x)$ задана на иаборах а) $(0,0,1)$ и б) $(1,1,1)$. Записать вывод формулы A или ее отрицания из множеств $\Gamma_1=\{\overline{x},\overline{y},z\}$ и $\Gamma_2=\{x,y,z\}$.

2.9.9. Дана формула $A=\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}$ и наборы значений переменных а) $(1,1,1)$, б) $(1,0,1)$, в) $(0,1,0)$. Записать вывод A или $\overline{A}$ из соответствующей совокупности формул.

2.9.10. Формула $A=x\to(x\to y)$ задана на наборах а) $(1,0)$ и б) $(0,1)$. Вывести формулу A или ее отрицания из соответствующих множеств $\Gamma_1=\{x,\overline{y}\}$ и $\Gamma_2=\{\overline{x},y\}$.

2.9.11. С помощью алгоритма Квайна проверить тождественную истинность следующих формул:

а) $(A\to B)\to(B\to A)$;

б) $(A\vee B)\to((\overline{A}\wedge B)\vee(\overline{B}\wedge A))$;

в) $\overline{(A\vee B)\to(\overline{C}\leftrightarrow B)}$;

г) $A\vee\overline{B}\to(\overline{C\leftrightarrow\overline{A}})$.

2.9.12. Используя алгоритм редукции, проверить тождественную истинность следующих формул:

а) $(A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C))$;

б) $A_1\to(A_2\to\ldots\to(A_{n-1}\to(A_n\to B\vee\overline{B}))\ldots)$;

в) $(A\to B)\wedge(A\to\overline{B})\to\overline{A}$.

2.9.13. С помощью алгоритма Квайна и алгоритма редукции доказать тождественную истинность аксиом исчисления высказываний.

2.9.14. Методом резолюций проверить следующие соотношения:

а) $\{\overline{A}\vee C, C\to B, B\to A\}\vdash A\to(B\to C)$;

б) $\{A \vee C \to B, C \to A \vee B, BC \to A \vee \overline{B}\} \vdash B \to C$;

в) $\{\overline{C}, A \vee B\} \vdash (B \to C) \to A$.

2.9.15. Проверить на противоречивость множество хорновских дизъюнктов:

а) $\{A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}, B, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}, C, \overline{B} \vee D\}$;

б) $\{A \wedge B \to C, A, B, \overline{C}\}$;

в) $\{\overline{C} \vee \overline{D} \vee E, \overline{E} \vee F, C, D, \overline{A}, \overline{F}\}$.

Глава 3

Логика предикатов

3.1. Определение предикатов и логические операции над ними

В исчислении высказываний изучались логические отношения, составленные из простых высказываний и принимающие только два значения 0 или 1 с помощью операций $\wedge, \vee, \overline{}, \rightarrow, \leftrightarrow$. Однако для задания более сложных логических рассуждений исчисления высказываний недостаточно. В любой k-значной логике можно определить наличие того или иного свойства на конечном множестве элементов, в случае же бесконечных множеств необходимо введение функций, аргументы которых пробегают бесконечное число значений на множестве M.

Все высказывания, используемые до сих пор, рассматривались как неразделньые целые и только с точки зрения их истинности или ложности. Структура высказываний и их содержание игнорировались. Однако, очевидно, что на практике используются заключения, зависящие как от структуры, так и от содержания используемых в них высказываний.

Не всякие высказывания и не любые логические рассуждения могут быть описаны на языке исчисления высказываний. В некоторых случаях высказывания касаются свойств объектов или отношений между объектами. Кроме того, необходимо иметь возможность утверждать, что любые или какие-то объекты обладают определениыми свойствами или находятся в некоторых отношениях.

Поэтому следует расширять логику высказываний и построить такую логическую систему, в рамках которой можно было бы исследовать структуру и содержание тех высказываний, которые в рамках алгебры высказываний считались бы элементарными.

Такой логической системой является *логика предикатов*, а алгебра высказываиий — ее составной частью. Помимо элементарных высказываний в логике предикатов рассматриваются высказывания, отнесенные к предмету, т. е. высказывания расчленяются на субъект и предикат. *Субъект* — это то, о чем что-то утверждается, *предикат* — это то, что утверждается о субъекте. Логика предикатов — это расширение логики высказываний за счет использования предикатов в роли логических функций.

Одноместным предикатом $P(x)$ называется произвольная функция переменного x, определенная на множестве M и принимающая значения из множества $\{0,1\}$.

Множество M, на котором определен предикат $P(x)$, называется *предметной областью* или *областью определения предиката*. Множество всех $x \in M$, при которых $P(x)=1$, называется *множеством истинности предиката* $P(x)$: $I_P = \{x/x \in M, P(x)=1\}$.

Предикат $P(x)$, определенный на множестве M, называется *тождественно истинным*, если $I_P = M$, и *тождественно ложным*, если $I_P = \varnothing$. Булева функция однородна в том смысле, что для нее область значений функции и область изменений аргумента по типу одна и та же — логическая (либо истина, либо ложь). Для предикатов же область значений функции — логическая, а область изменения аргументов — предметная. Обобщение понятия одноместный предикат — понятие многоместного предиката, с помощью которого выражаются отиошеиия между предметами.

n-местным предикатом называется всякая функция n переменных $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная на множестве $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ (декартово произведение) и принимающая на этом множестве одно из двух значений: "истина" или "ложь", т. е. n-местный предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ есть функция $Q : M \to B$, где M — произвольное множество, а $B = \{0,1\}$.

Высказывания можно считать нульместными предикатами.

Говорят, что предикат $P(x)$ является следствием предиката $Q(x)$ $(Q(x) \to P(x))$, если $I_Q \subset I_P$, и предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ равносильны $(P(x) \leftrightarrow Q(x))$, если $I_Q = I_P$.

Так как предикаты принимают два значения 0 и 1, то к ним применимы все операции логики высказываний.

Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$, который принимает значение "истина" при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение "истина", и принимает значение "ложь" во всех остальных случаях. Очевидно, что областью истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является $I_Q \cap I_P$.

Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение "ложь" при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение "ложь", и принимает значение "истина" во всех остальных случаях. Ясно, что $I_Q \cup I_P$.

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P}(x)$, который принимает значение "истина" при всех значения $x \in M$, при которых $P(x)$ принимает значение "ложь" и наоборот. Здесь очевидно, $I_{\overline{P}} = M \setminus I_P$.

Импликацией $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \to Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение "истина", а $Q(x)$ — значение "ложь", и принимает истинное значение во всех остальных случаях.

- **Пример 1.** а) Луна есть спутник Венеры — ложное высказывание, не являющееся предикатом, т. к. в нем нет аргумента — переменного x;

  б) $5+\sqrt[5]{70}-\sqrt[6]{10} > 150$ — то же самое;

  в) $x^2+3x+2=0$ — предикат. Здесь $x \in M = R$, $I_P = \{-2,-1\}$

- **Пример 2.** На множестве $M = \{3,4,5,6,7,8\}$ заданы два предиката $P(x)$: "x — простое число", $Q(x)$: "x — нечетное число". Составить их таблицы истинности (см. табл. 3.1.1). Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множествах $L = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $K = \{3,4,5,6,7,8,9\}$?

Таблица 3.1.1

x	3	4	5	6	7	8
$P(x)$	1	0	1	0	1	0
$Q(x)$	1	0	1	0	1	0

Очевидно, что $I_P = \{3,5,7\}$, $I_Q = \{3,5,7\}$. Таким образом, на множестве M $P(x) = Q(x)$. На L и K предикаты не равносильны, ибо на L, например, 2 — простое число и четное, а на K 9 — нечетное, но составное число.

- **Пример 3.** Исследовать, является ли один из двух данных предикатов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ следствием другого, если

$$P(x, y) = \left\{\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15\right\},\ Q(x, y) = \left\{\sqrt{xy} = 15\right\}.$$

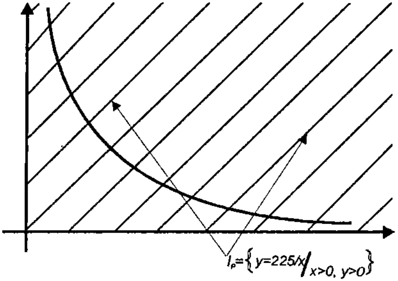


Рис. 3.1

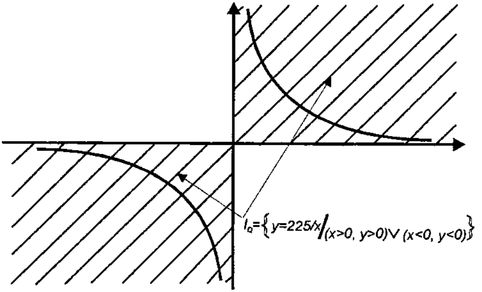


Рис. 3.2

Найдем области определения обоих предикатов и изобразим их на рис. 3.1 и 3.2.

$$M_P = \left\{(x, y) \in R^2 \big/ x > 0, y > 0\right\},$$

$$M_Q = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle/ (x > 0, y > 0) \vee (x < 0, y < 0) \right\}.$$

Области определения обоих предикатов на рисунках заштрихованы. Следовательно, $I_P \subset I_Q$, т. е. $P(x, y) \to Q(x, y)$ и предикат $Q(x, y)$ является следствием предиката $P(x, y)$.

- **Пример 4.** Найти область истинности предиката $x - y^2 \geq 0$ и изобразить на плоскости.

Неравенство, составляющее исходный предикат, ограничивает часть плоскости, заключенной между ветвями параболы $x = y^2$ (рис. 3.3).

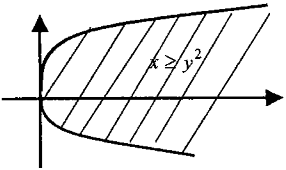


Рис. 3.3

- **Пример 5.** На множестве $M = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ заданы предикаты $A(x)$: "x не делится на 5", $B(x)$: "x — четное число", $C(x)$: "x — число простое", $D(x)$: "x кратно трем". Найти множества истинности предикатов $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$, $A(x) \vee B(x)$, $D(x) \to \overline{C}(x)$.

1. $A(x) \wedge B(x) \wedge D(x)$={ x не делится на 5 и x — четное число и x кратно трем}={ x не делится на 5 и x делится на 6}. Действительно, $I_P = \{6,12,18\}$.
2. $A(x) \vee B(x)$={ x не делится на 5 или x — четное число}. $I_P = M \setminus \{5,15\}$.
3. $D(x) \to \overline{C}(x) = \overline{D}(x) \vee \overline{C}(x)$ = { x не кратно трем или x — непростое число}. Здесь рассуждения сложнее, однако, если перебрать все элементы множества M , то легко установить, что $I_P = M \setminus \{3\}$.

3.2. Кванторные операции

Функциональная природа предиката влечет за собой введение еще одного понятия — *квантора*. Кванторные операции можно рассматривать как обобщение операций конъюнкции и дизъюнкции в случае бесконечных областей. Рассмотрим это подробнее. Пусть дан $P(x)$ — одноместный предикат. Если $a \in M$, то $P(a)$ — высказывание. Здесь как в обычной функции одного переменного при фиксации аргумента функция превращается в число. В логике предикатов существуют еще две особые операции, которые превращают одноместный предикат в высказывание, т. е. связывают аргумент предиката.

- *Квантор всеобщности* $\forall$.

Пусть $P(x)$ — предикат, $x \in M$. Под выражением $\forall x P(x)$ понимают высказывание, истинное, если $P(x)$ истинно для каждого элемента $x \in M$, и ложное в противном случае.

Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности* (all — всякий). Соответствующее ему словесное выражение звучит так: "для всякого x $P(x)$ истинно". Переменная x в предикате $P(x)$ называется *свободной* (x любое из M), в высказывании $\forall x P(x)$ переменную x называют *связанной* переменной.

Рассмотрим предикат $P(x)$, определенный на множестве $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, содержащем конечное число элементов. Если $P(x)$ является тождественно истинным, то истинными будут высказывания $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)$. При этом истинными будут высказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$. Если же хотя бы для одного элемента $a_k \in M$ $P(a_k) = 0$, то ложными будут высказывание $\forall x P(x)$ и конъюнкция $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$. Следовательно, справедлива равносильность $\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

- *Квантор существования* $\exists$.

Пусть $P(x)$ — предикат, $x \in M$. Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, истинное, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложное в противном случае. Символ $\exists$ называется *квантором существования* (exist — существовать). Словесное выражение звучит так:

"существует x, при котором $P(x)$ истинно". Высказывание $\exists x P(x)$ уже не зависит от x, переменная x связана квантором $\exists$.

Аналогичные рассуждения, как и в предыдущем случае, позволяют установить равносильность $\exists x P(x) \equiv P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$. Ясно, что высказывание $\forall x P(x)$ истинно только в том единственном случае, когда $P(x)$ — тождественно истинный предикат, а высказывание $\exists x P(x)$ ложно только тогда, когда $P(x)$ — тождественно ложный предикат.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Применение кванторной операции к предикату $P(x, y)$ по переменной x ставит в соответствие двухместному предикату $P(x, y)$ одноместный предикат $\forall x P(x, y)$ или $\exists x P(x, y)$, зависящий от y и не зависящий от x.

К двухместному предикату можно применить кванторные операции по обеим переменным. Тогда получим восемь высказываний:

1. $\forall x \forall y P(x, y)$;
2. $\exists x \forall y P(x, y)$;
3. $\forall x \exists y P(x, y)$;
4. $\exists x \exists y P(x, y)$;
5. $\forall y \forall x P(x, y)$;
6. $\exists y \forall x P(x, y)$;
7. $\forall y \exists x P(x, y)$;
8. $\exists y \exists x P(x, y)$.

В общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания и его логическое значение, т. е. например, высказывания $\forall x \forall y P(x, y)$ и $\forall y \forall x P(x, y)$ различны.

Пусть предикат $M(x, y)$ означает, что x является матерью для y, тогда $\forall y \exists x M(x, y)$ означает, что у каждого человека есть мать — истинное утверждение. $\exists x \forall y M(x, y)$ означает, что существует мать всех людей. Истинность этого утверждения зависит от множества значений, которые могут принимать y: если это множество братьев и сестер, то оно истинно, в противном случае оно ложно. Таким образом, перестановка кванторов всеобщности и существования может изменить сам смысл и значение выражения.

Квантор существования $\exists$ можно выразить через квантор всеобщности применительно к предикату $A(x)$, $\exists xA(x)=\overline{\forall x\overline{A(x)}}$ (*см. разд. 3.5*).

Полезно выяснить теоретико-множественный смысл кванторов. Оказывается, кванторы связаны с геометрической операцией проектирования. Рассмотрим одноместный предикат $F(x)=\exists yP(x,y)$. Пусть множество истинности предиката $F(x)$ — I_F. Однако выражение $\exists yP(x,y)$ истинно для данного конкретного x_0 только тогда, когда существует такое y, что $P(x_0,y)$ истинно. Таким образом, функции $P(x,y)$ отвечает часть I_P множества $M_1\times M_1=M^2$. Тогда I_F состоит из всех тех элементов x области M_1, для которых найдена пара $(x,y)\in I_P$.

Если считать x_0 проекцией пары (x_0,y), тогда I_F есть проекция I_P. Множество истинности $I_P\subset M^2$ двумерного предиката $P(x,y)$ можно рассматривать как плоскость, а M_1 — как ось Ox этой плоскости. Таким образом, множество I_F, являющееся областью истинности предиката $F(x)$, совпадает с ортогональной проекцией множества I_P на ось Ox, т. е.

$$I_F=\text{пр}_x I_P. \qquad (3.2.1)$$

Квантор всеобщности можно выразить с помощью квантора существования (*см. разд. 3.5*). Пусть $F_1(x)=\forall yP(x,y)$, тогда $\forall yP(x,y)=\overline{\exists y\overline{P(x,y)}}$. Операции отрицания соответствует теоретико-множественная операция дополнения. Следовательно,

$$I_{F_1}=U\setminus\text{пр}_x(U\setminus I_P), \qquad (3.2.2)$$

т. е. множество, отвечающее функции $\forall yP(x,y)$, есть дополнение к проекции на M_1 — дополнения к I_P.

- **Пример 1.** Установить истиниость или ложность высказывания $\exists x(x\in\{2,5\}\to(x^2-6x+8=0))$.

$$x^2-6x+8=0,\ x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1,\ x_1=2,\ x_2=4.$$

Исходное высказывание преобразуем к виду:

$$\exists x(x\in\{2,5\}\to(x^2-6x+8=0))\equiv\exists x(\overline{x\in\{2,5\}}\vee(x^2-6x+8=0))\equiv$$

$$\equiv \exists x(x \notin \{2,5\} \vee x \in \{2,4\}) \equiv \exists x(x \in \{2,4\}).$$

Исходное высказывание истинно.

- **Пример 2.** Установить истинность или ложность высказывания $\forall x(x^2 - 5x + 6 = 0)$.

Действуем аналогично:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}, x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Но $(x^2 - 5x + 6 = 0) \equiv (x < 2 \vee x > 3)$, поэтому любым x не может быть, исходное высказывание ложно.

3.3. Формулы логики предикатов

В логике предикатов пользуются следующей символикой:

1. Символы $p_0, q_1, r_2, \ldots$ — переменные высказывания.
2. Предметные переменные и предметные константы $x_0, y_1, x_2, \ldots$ $x_0, y_1, z_2 \in M$.
3. $P_i^{n_i}, n_i \in N$ — предикатные символы, $P_i^{n_i}$ — n_i-местный предикатный символ.
4. $f_j^{n_j}, n_j \in N$ — функциональные символы, $f_i^{n_j}$ — n_j-местный функциональный символ.
5. Символы логических операций $\wedge, \vee, \rightarrow, \bar{\ }, \leftrightarrow$.
6. Символы кванторных операций $\forall, \exists$.
7. Вспомогательные символы: скобки, запятые.

Множество предикатных букв вместе с множеством функциональных букв и констант называются *сигнатурой* языка данной теории. *Термом* сигнатуры языка логики предикатов являются:

1. Предметные переменные и предметные константы.
2. Если f^n — n-местный функциональный символ и $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — термы, то $f^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — терм.

Атомной (или *атомарной*) *формулой сигнатуры* называется выражение $P^n(t_1,t_2,...,t_n)$, где P^n — n-местный предикатный символ, а $t_1,t_2,...,t_n$ — термы.

Формулой логики предикатов называется всякое выражение, содержащее символику 1–7 и удовлетворяющее следующим требованиям:

- атомарная формула есть формула;
- если A и B — формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$ — тоже формулы при условии, что одна и та же предметная переменная не является в A свободной, а в B связанной или наоборот;
- если A — формула, то и $\overline{A}$ — тоже формула;
- если $A(x)$ — формула, то $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ являются формулами, причем если в $A(x)$ x — свободная переменная, то в $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ будет уже связанной переменной.

Все предметные переменные атомарных формул свободные, связанных переменных нет. *Литеральными* называются формулы A или $\overline{A}$, где A — атомарная формула.

Из этого определения ясно, что всякая формула алгебры высказываний является формулой логики предикатов. Если F — символ предиката, а $x_1,x_2,...,x_n$ — символы предметных переменных, не обязательно различные, то $F(x_1,x_2,...,x_n)$ — формула.

Пусть A — формула, содержащая свободную переменную x. Тогда $\forall x A$ и $\exists x A$ тоже формулы. В $\forall x A$ формула A называется *областью действия квантора* $\forall$, в $\exists x A$ областью *действия квантора* $\exists$. Формула A называется *замкнутой формулой*, если всякое вхождение переменной в A является связанным.

Подслово формулы A, которое само является формулой, называется *подформулой* формулы A.

Значение формулы определено лишь тогда, когда задана какая-нибудь интерпретация входящих в нее символов. Под интерпретацией понимается система $M = \{M, f\}$, состоящая из непустого множества M (область определения) и соответствия (функции) f, сопоставляющего каждому предикатному символу P определенный n-местный предикат $P(\cdot,\cdot,...,\cdot)$. При заданной интерпретации считают, что предметные переменные пробегают множество M, а символы $\wedge, \vee, \to, \overline{\ }, \leftrightarrow$, $\forall, \exists$ имеют свой обычный смысл.

Для данной интерпретации каждая формула без свободных переменных представляет собой высказывание, которое истинно или ложно, а всякая формула со свободными переменными выражает некоторый предикат на множестве M, который истинен при одних значениях переменных из этого множества и ложен при других.

О логическом значении формулы логики предикатов можно говорить лишь тогда, когда задано множество M, на котором определены входящие в эту формулу предикаты. Логическое значение формулы логики предикатов зависит от значений трех видов переменных: значений переменных высказываний, входящих в формулу, значений свободных предметных переменных из множества M, т. е. $x, y, \ldots$, и значений предикатных переменных $P(\cdot), Q(\cdot,\cdot,\ldots,\cdot)$. Если фиксировать значения каждого из этих трех видов переменных, формула алгебры логики предикатов становится высказыванием, имеющим истинное или ложное значение.

Истинность или ложность формул логики предикатов может быть проверена путем приписывания смысла языковым конструкциям, т. е. их интерпретации. Формула в зависимости от интерпретации может быть истинной или ложной, но может от нее и не зависеть. Для того чтобы определить интерпретацию, необходимо задать множество значений, которые могут принимать свободные переменные, операции, приписываемые функциональным символам, отношения для предикатных символов.

- **Пример 1.** Является ли данное выражение формулой логики преди-катов?

  а) $(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \vee \exists y (\forall y R(y))$ не является формулой, т. к. квантор существования употреблен для уже связанной квантором всеобщности переменной y;

  б) $P \to \forall x Q(x, y)$ — формула алгебры предикатов, x — связанная переменная, y — свободная;

  в) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$ не является формулой, ибо в первом логическом слагаемом x — связанная переменная, а во втором слагаемом свободная.

- **Пример 2.** Даны утверждения $A(n)$: "число n делится на 3", $B(n)$: "число n делится на 2", $C(n)$: "число n делится на 4", $D(n)$: "число n делится на 6", $E(n)$: "число n делится на 12". Указать, какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны.

  1. $\forall n(A(n) \wedge B(n) \to E(n))$. Рассмотрим составляющие части этой формулы. $A(n) \wedge B(n)$: "число n делится на 6", $A(n) \wedge B(n) \to E(n)$:

"если число n делится на 6, то оно делится на 12". При $n=6$ импликация ложна, следовательно, исходная формула в общем ложна.

2. $\exists n\left(B(n)\wedge C(n)\rightarrow \overline{D}(n)\right)$. Поступаем аналогично $B(n)\wedge C(n)$: "число делится на 4", $B(n)\wedge C(n)\rightarrow \overline{D}(n)$: "если число делится на 4, то оно не делится на 6". Такое может быть, например, при $n=16$. Следовательно, $B(n)\wedge C(n)\rightarrow \overline{D}(n)$ — не тождественно ложная формула, а тогда $\exists n\left(B(n)\wedge C(n)\rightarrow \overline{D}(n)\right)$ — истинная формула алгебры предикатов.

- **Пример 3.** Большая теорема Ферма* утверждает, что для любого целого $n>2$ не существует натуральных чисел x,y,z, удовлетворяющих равенству $x^n+y^n=z^n$. Если этому равенству поставить в соответствие предикат $P(x,y,z,n)$, истинный тогда и только тогда, когда оно выполняется, а через $N(x)$ обозначить предикат $\{x$ — натуральное число $\}$, то теорема Ферма формулируется так:

$$\forall x\forall y\forall z\forall n\left(N(x)\wedge N(y)\wedge N(z)\wedge N(n)\wedge (n>2)\rightarrow \overline{P}(x,y,z,n)\right).$$

- **Пример 4.** $\exists xP(x,y)\rightarrow \forall xP(x,y)$ — формула, содержащая свободную переменную y. Пусть $P(x,y)$ интерпретируется как $x\geq y$ на $M=[a,b]$. Если $b>y>a$, то посылка истинна, а заключение ложно и формула ложна. Если взять $y=a$, то и левая, и правая части истинны и вся формула истинна, следовательно, формула выполнима в данной интерпретации. Если $P(x,y)$ интерпретируется как $x>y$, $M=(a,b)$, то левая часть будет всегда истинна (при любом y), а правая — всегда ложна, следовательно, формула тождественно ложна в данной интерпретации.

- **Пример 5.** Формула $\forall x\left(P(x)\vee \overline{P}(x)\right)$ содержит только связанную переменную x. Эта формула является тождественно истинным высказыванием в любой интерпретации. Напротив, формула $\exists x\left(P(x)\wedge \overline{P}(x)\right)$ — тождественно ложная формула в любой интерпретации.

* Пьер Ферма (1601–1665) — французский математик.

3.4. Практическое занятие № 7. Логические и кванторные операции над предикатами

3.4.1. Найти области истинности следующих предикатов:

а) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0;$

б) $\begin{cases} x^2-13x+40\geq 0 \\ 2x^2+x+30<0; \end{cases}$

в) $\sin x=\sin y;$

г) $\lg x=\lg y.$

3.4.2. Изобразить на диаграммах Эйлера–Венна области истинности для следующих предикатов:

а) $\overline{P(x)}\leftrightarrow\overline{Q(x)};$

б) $P(x)\to\left(Q(x)\vee\overline{Q(x)}\right);$

в) $P(x)\wedge Q(x)\to\overline{R(x)}.$

3.4.3. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, области истинности которых заштрихованы на рис. 3.4–3.7.

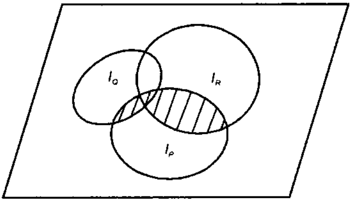


Рис. 3.4

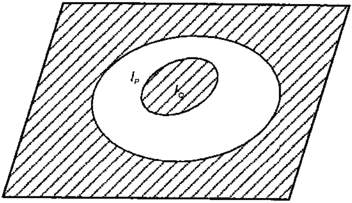


Рис. 3.5

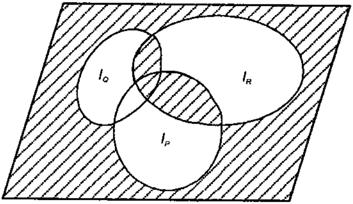


Рис. 3.6

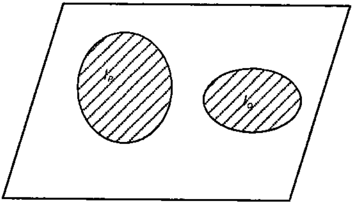


Рис. 3.7

3.4.4. Установить, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны, при условии, что область определения предикатов M совпадает с R:

а) $\forall x\left(\left(x^2 - 6x + 8 \geq 0\right) \vee \left(x^2 - 6x + 8 < 0\right)\right)$;

б) $\exists x\left(x^2 + x + 0.5 = 0\right)$;

в) $\forall x\left(x^2-5x+6\geq 0\right)$;

г) $\exists x\left(\left(x\in\{2,5\}\right)\rightarrow\left(x^2-6x+8=0\right)\right)$.

3.4.5. Пусть f^1 — одноместный, g^2 — двухместный, h^3 — трехместный функциональные символы. Являются ли термами следующие выражения?

а) $f^1\left(g^2\left(x_0,x_1\right)\right)$;

б) $g^2\left(f^1\left(x_2\right),h^3\left(x_1,x_0,x_2\right)\right)$;

в) $f^1\left(g^2\left(x_0\right),h^3\left(x_0,x_1,x_2\right)\right)$.

3.4.6. Пусть f^1, g^2, h^3 те же, что и в предыдущей задаче, P^1 — одноместный, Q^3 — трехместный предикатные символы. Являются ли формулами следующие выражения?

а) $P^1\left(x_0\right)\rightarrow\forall x_1\left(Q^3\left(x_0,x_1,x_2\right)\wedge P^1\left(g^2\left(x_0,x_1\right)\right)\right)$;

б) $Q^3\left(P^1\left(x_0\right),f^1\left(x_1\right),f^1\left(x_2\right)\right)$;

в) $Q^3\left(x_0,f^1\left(x_1\right),h^3\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)$.

3.4.7. Какие вхождения переменных являются свободными, а какие связанными в следующих формулах:

а) $\forall x_0\left(P\left(x_0,x_1\right)\rightarrow\forall x_1 Q\left(x_1\right)\right)$;

б) $\overline{\exists x_2 Q\left(x_2,x_2\right)}\wedge R\left(f\left(x_1,x_3\right)\right)$.

3.4.8. Пусть $S^3(x,y,z)=(x+y=z)$, $P^3(x,y,z)=(x\cdot y=z)$, $x,y,z\in N$. Записать формулу с одной свободной переменной x, истинную тогда и только тогда, когда:

а) $x=0$;

б) $x=2$;

в) x — четно.

3.4.9. При исходных данных задачи 3.4.8 записать формулу, выражающую:

а) коммутативность сложения;

б) ассоциативность сложения;

в) бесконечность множества простых чисел.

3.4.10. Привести примеры таких значений a, для которых данное высказывание:

1. Истинно
2. Ложно $(M = R)$.

а) $\exists x < 0(x^2 + ax + a = 0)$;

б) $\exists x \in [a, a+1](x^2 - x - 2 < 0)$.

Записать, введя необходимые предикаты, в виде формулы логики предикатов следующие рассуждения.

3.4.11. Если всякий разумный философ — циник, и только женщины являются разумными философами, то тогда, если существуют разумные философы, некоторые из женщин — циники.

3.4.12. Все политики — лицедеи. Некоторые лицедеи — лицемеры. Значит, иекоторые политики — лицемеры.

3.4.13. Глупец был бы способен на это. Я на это не способен. Значит я не глупец.

3.4.14. Друг моего друга — мой друг.

3.4.15. Каждый любит сам себя. Значит, кого-то кто-нибудь любит.

3.5. Равносильные формулы логики предикатов

Две формулы логики предикатов A и B *равносильны в данной интерпретации*, если на любом наборе значений свободиых переменных они принимают одинаковые значения, т. е. формулы выражают в данной интерпретации один и тот же предикат.

Две формулы логики предикатов A и B называются *равносильными на области* M, если они принимают одинаковые логические значения при всех входящих в них переменных, отнесенных к области M.

Две формулы логики предикатов называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Все равносильности алгебры высказываний будут верны, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы алгебры предикатов. Кроме того, имеются равносильности самой логики предикатов, связанные с кванторами. Пусть $A(x), B(x)$ — переменные предикаты, а C — переменное высказывание. Тогда имеют место следующие формулы:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$, читается: "высказывание "не верно, что для любого x $A(x)$ истинно" эквивалентно высказыванию "найдется x, для которого $A(x)$ ложно"".
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \wedge B(x))$, т. е. квантор всеобщности можно вносить и выносить за скобки в конъюнкции.
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (C \wedge B(x))$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x (C \vee B(x))$.
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x (C \to B(x))$.
9. $\forall x (B(x) \to C) \equiv \forall x B(x) \to C$.

Для формул 6–9 справедливо утверждение: постоянное высказывание можно вносить под знак квантора всеобщности и выносить из-под знака этого квантора в конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

10. $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x))$ — квантор существования можно вносить и выносить за скобки в дизъюнкции.
11. $C \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x (C \wedge B(x))$.
12. $C \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (C \vee B(x))$.
13. $C \to \exists x B(x) \equiv \exists x (C \to B(x))$.
14. $\exists x (B(x) \to C) \equiv \exists x B(x) \to C$.

Для формул 11–14 справедливо утверждение: постоянное высказывание можно выносить и вносить под знак квантора существования и выносить из-под этого квантора в конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

15. $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$.
16. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x \forall y (A(x) \vee B(y))$.

Все приведенные равносильности могут быть доказаны. Первые две формулы называются *правилами переноса кванторов через отрицание*. Докажем, например, первую из них.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — множество (может и пустое) всех свободных переменных формулы A, отличных от x. Пусть $M = \{M, f\}$ — произвольная интерпретация. Рассмотрим произвольный набор значений свободных переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ и исследуем, какие логические значения при этом наборе примут формулы $\overline{\forall x A(x)}$ и $\exists x \overline{A(x)}$. Здесь возможны два случая:

1. Для любого элемента $a \in M$ $A(x)\big|_{a, a_1, a_2, \ldots, a_n} = 1$.
2. Для некоторого элемента $a_0 \in M$ $A(x)\big|_{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n} = 0$.

В первом случае для любого элемента $a \in M$ $\overline{A(x)}\big|_{a, a_1, a_2, \ldots, a_n} = 0$. Отсюда по определению $\exists x \overline{A(x)}\big|_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = 0$. Но с другой стороны, $\forall x A(x)\big|_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = 1$, т. к. $\forall a \in M$ $A(x)\big|_{a, a_1, a_2, \ldots, a_n} = 1$, отсюда $\overline{\forall x A(x)}\big|_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = 0$, т. е. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.

Во втором случае для $a_0 \in M$ $\overline{A(x)}\big|_{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n} = 1$, отсюда $\exists x \overline{A(x)}\big|_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = 1$. С другой стороны, в этом случае $\forall x A(x)\big|_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = 0$. Следовательно, $\overline{\forall x A(x)}\big|_{a_1, a_2, \ldots, a_n} = 1$. Таким образом, исходная равносильность полностью доказана.

Обратим внимание на формулы 5, 10, 15 и 16. Видно, что, например, $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \neq \exists x (A(x) \wedge B(x))$. Для квантора всеобщности такая формула имеется. Здесь же $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv$ $\equiv \exists x (A(x) \wedge \exists y B(y)) \equiv \exists x \exists y (A(x) \wedge B(y))$ — формула 13. Аналогично, $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \neq \forall x (A(x) \vee B(x))$. Так же получим $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv$ $\equiv \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv \forall x (A(x) \vee \forall y B(y)) \equiv \forall x \exists y (A(x) \vee B(y))$.

В заключение упомянем правило переименования связанных переменных. Очевидно, заменяя связанную переменную формулы A другой переменной, не входящей в эту формулу, в кванторе и всюду в области действия квантора получаем формулу, равносильную A.

3.6. Предваренная нормальная форма. Общезначимость и выполнимость формул логики предикатов

Формула логики предикатов имеет *нормальную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Используя равносильности алгебры высказываний и логики предикатов, каждую формулу логики предикатов можно привести к нормальной форме.

Теорема 3.1. **Для любой формулы существует равносильная ей нормальная форма, причем множества свободных и связанных переменных этих формул совпадают.**

Среди нормальных форм особое значение имеют предваренные (или пренексные) нормальные формы. *Предваренной нормальной формой* формулы логики предикатов называется такая нормальная форма, в которой либо полностью отсутствуют кванторные операции, либо они используются после всех операций алгебры логики. Эта форма имеет вид $(\sigma x_1)(\sigma x_2)...(\sigma x_n)A(x_1,x_2,...,x_m)$, $n \le m$, где под символом σx_i понимается один из кванторов $\forall x_i$ или $\exists x_i$, а формула A кванторов не содержит.

Если все σ_i равны $\forall$, то эта форма называется $\forall$-формулой (или *универсальной формулой*); если же все σ_i равны $\exists$, то такая форма называется $\exists$-формулой. Если существует $i(0 \le i \le n)$, такое, что $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_i$ суть $\exists$, а $\sigma_{i+1},...,\sigma_n$ суть $\forall$, то такая форма называется *скулемовской** *нормальной формой* (или $\exists\forall$-формулой).

Теорема 3.2. **Всякая формула логики предикатов может быть приведена к равносильной ей предваренной нормальной форме.**

Обратим внимание только на некоторые особенности доказательства, имеющие практическое значение. Если формула имеет вид $\overline{A}$, то с помощью равносильностей $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$ и $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$ отрицание вводится под знак кванторов. Если формула имеет вид $A_1 \vee A_2$ или $A_1 \wedge A_2$, тогда последовательность действий может быть такова. Сначала переименовываются

* Альберг Торальф Скулем (1887–1963) — норвежский математик.

в A_2 связанные предметные переменные так, чтобы в A_1 и A_2 все связанные переменные были различны. Получаем

$$A_1 = (\sigma x_1)(\sigma x_2)...(\sigma x_m)\alpha_1(x_1, x_2, ..., x_n),\ m \le n,$$
$$A_2 = (\sigma y_1)(\sigma y_2)...(\sigma y_p)\alpha_2(y_1, y_2, ..., y_n),\ p \le n.$$

Далее воспользуемся равносильностями $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x (C \wedge B(x))$, $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x (C \vee B(x))$, $C \wedge \exists x B(x) \equiv \exists x (C \wedge B(x))$ и $C \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (C \vee B(x))$. Перепишем, например, формулу $A_1 \vee A_2$ следующим образом:

$$A_1 \vee A_2 = (\sigma x_1)(\sigma x_2)...(\sigma x_m)[\alpha_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee (\sigma y_1)(\sigma y_2)...$$
$$...(\sigma y_p)\alpha_2(y_1, y_2, ..., y_n)] = (\sigma x_1)(\sigma x_2)...(\sigma x_m)(\sigma y_1)(\sigma y_2)...(\sigma y_p)\cdot$$
$$\cdot[\alpha_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \alpha_2(y_1, y_2, ..., y_n)],\ m, p \le n.$$

Формула A логики предикатов называется *выполнимой* в области M (в данной интерпретации), если существуют значения переменных, входящих в эту формулу из области M, при которых формула A принимает истинные значения. Формула A называется выполнимой, если существует область, на которой эта формула выполнима.

Формула A называется *тождественно истинной* в области M, если она принимает истинные значения для всех значений переменных из M, входящих в эту формулу.

Формула A называется *общезначимой*, если она тождественно истинна на всякой области. Общезначимую формулу называют *логическим законом*.

Формула A общезначима тогда и только тогда, когда формула $\overline{A}$ не является выполнимой, и формула A выполнима тогда и только тогда, когда формула $\overline{A}$ не является общезначимой. Очевидно, что если F и G — равносильные в логике предикатов формулы, то $F \leftrightarrow G$ — общезначимая формула.

Теорема 3.3. **Формула $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$, где переменная y не входит в формулу $A(x)$, общезначима.**

Доказательство.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — все свободные переменные формулы $A(x)$, тогда $y, x_1, x_2, ..., x_n$ — перечень свободных переменных формулы $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$. Рассмотрим произвольную интерпретацию с множеством M. Пусть

$b, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b \in M$, $a_i \in M$, $i = \overline{1,n}$ — произвольный набор значений свободных переменных доказываемой формулы. Покажем, что $\forall x A(x) \to A(y)\big|_{b,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 1$.

Для формулы $A(x)$ либо существует $a_0 \in M$ такой, что $A(x)\big|_{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 0$, либо для любого $a \in M$ (в том числе и для $a = b$) $A(x)\big|_{a,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 1$. В первом случае если $A(x)\big|_{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 0$, то $\forall x A(x)\big|_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = 0$ и тогда $\forall x A(x) \to A(y)\big|_{b,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 1$, т. к. для импликации $\begin{cases} 0 \to 1 \equiv 1, \\ 0 \to 0 \equiv 1. \end{cases}$ Во втором случае $\forall x A(x)\big|_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = 1$, $A(y)\big|_{b,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 1$, тогда $\forall x A(x) \to A(y) \equiv 1$, т. к. $1 \to 1 \equiv 1$.

Теорема 3.4. **Формула $A(y) \to \exists x A(x)$, где переменная y не входит в формулу $A(x)$, общезначима.**

Докажем эту теорему, опираясь на предыдущую. Имеем $\forall x \overline{A(x)} \to \overline{A(y)} \equiv 1$. Тогда $\forall x \overline{A(x)} \to \overline{A(y)} \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}} \vee \overline{A(y)} \equiv$

$\equiv \exists x \overline{\overline{A(x)}} \vee \overline{A(y)} \equiv \exists x A(x) \vee \overline{A(y)} \equiv \overline{A(y)} \vee \exists x A(x) \equiv A(y) \to \exists x A(x) \equiv 1$.

Следовательно, формула $A(y) \to \exists x A(x)$ общезначима.

Теорема 3.5. **Пусть A — тождественно истинная формула алгебры высказываний, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — список ее переменных. Подставив вместо каждой переменной x_i формулу логики предикатов B_i так, чтобы при этом не нарушались пункты определения формулы логики предикатов, получим общезначимую формулу логики предикатов.**

Доказательство равносильностей формул логики предикатов требует либо детального рассмотрения значений формул, либо использования известных равносильностей.

- **Пример 1.** Доказать $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$. Этот пример легко решается. Воспользуемся первой формулой из списка равносильных формул логики предикатов $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$. Если от нее взять отрицание, получим искомый результат $\overline{\overline{\forall x A(x)}} \equiv \forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.

- **Пример 2.** Пусть $A(x)$ и $B(x)$ два одноместных предиката, определенных на множестве M и таких, что высказывание $\exists x\left(A(x)\to\left(\overline{A(x)}\vee\left(\overline{B(x)\to A(x)}\right)\right)\right)\equiv 1$. Доказать, что высказывание $\forall xA(x)\equiv 0$.

  Упростим исходное высказывание.

$$\exists x\left(A(x)\to\left(\overline{A(x)}\vee\left(\overline{\overline{B(x)}\to A(x)}\right)\right)\right)\equiv\exists x\left(A(x)\to\left(\overline{A(x)}\vee\left(\overline{B(x)\vee A(x)}\right)\right)\right)\equiv$$

$$\equiv\exists x\left(A(x)\to\underbrace{\left(\overline{A(x)}\vee\left(\overline{B(x)}\wedge\overline{A(x)}\right)\right)}_{\overline{A(x)}\text{ по закону поглощения}}\right)\equiv\exists x\left(A(x)\to\overline{A(x)}\right)\equiv\exists x\left(\overline{A(x)}\vee\overline{A(x)}\right)\equiv$$

$$\equiv\exists x\overline{A(x)}\equiv\overline{\forall xA(x)}\equiv 1.\text{ Тогда }\overline{\overline{\forall xA(x)}}\equiv\forall xA(x)\equiv 0.$$

- **Пример 3.** Привести к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:

  1. $B\equiv\overline{p\to\exists xR(x)}$.

  $$\overline{p\to\exists xR(x)}\equiv\overline{\overline{p}\vee\exists xR(x)}\equiv p\wedge\overline{\exists xR(x)}\equiv p\wedge\forall x\overline{R(x)}\equiv\forall x\left(p\wedge\overline{R(x)}\right).$$

  2. $B\equiv\overline{\forall x\exists y(A(x)\leftrightarrow A(y))}\equiv\exists x\overline{\exists y(A(x)\leftrightarrow A(y))}\equiv\exists x\forall y\overline{(A(x)\leftrightarrow A(y))}\equiv$

  $$\equiv\exists x\forall y\overline{(A(x)\to A(y))\wedge(A(y)\to A(x))}\equiv\exists x\forall y\left(\overline{(A(x)\to A(y))}\vee\right.$$

  $$\left.\vee\overline{(A(y)\to A(x))}\right)\equiv\exists x\forall y\left(\overline{\left(\overline{A(x)}\vee A(y)\right)}\vee\overline{\left(\overline{A(y)}\vee A(x)\right)}\right)\equiv\exists x\forall y(A(x)\wedge$$

  $$\wedge\overline{A(y)}\vee A(y)\wedge\overline{A(x)}).$$

Для определения общезначимости формулы логики предикатов иногда бывает достаточно равносильных преобразований. Чаще всего этого недостаточно. Поэтому связь между общезначимостью и выполнимостью устанавливают теоремами.

Теорема 3.6. **Для того чтобы формула A была общезначима, необходимо и достаточно, чтобы ее отрицание было не выполнимо.** (Невыполнимость означает, что формула тождественно ложна на всякой области.)

Доказательство.

1. Необходимость. Пусть формула A общезначима. Тогда $\overline{A}$ — тождественно ложная формула на всякой области и, следовательно, не выполнима.

2. Достаточность. Пусть $\overline{A}$ не выполнима на всякой области M. Тогда она там тождественно ложна по определению невыполнимой формулы. Следовательно, A — тождественно истинная формула в любой области M, т. е. она общезначима.

Теорема 3.7. **Для того чтобы формула A была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы формула $\overline{A}$ была необщезначимой.**

Доказательство этой теоремы очень просто и аналогично доказательству теоремы 3.6. Поясним смысл последней теоремы. Выполнимость формулы A означает, что для этой формулы существуют две области M и M', причем в одной из них, например, M, она истинна, а в другой M' — ложна.

Задача распознавания общезначимости формул логики предикатов существенно сложнее, чем формул алгебры высказываний. Она также называется проблемой разрешимости, но решается гораздо труднее. Метод перебора всех вариантов в общем случае здесь не применим, т. к. вариаитов может быть бесконечно много. В 1936 г. американский математик А. Черч доказал, что в общем виде проблема разрешимости логики предикатов не имеет алгоритмического решения.

Теорема 3.8 (теорема Черча).* **Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.**

Задача распознавания общезначимости может быть решена в некоторых частных случаях.

Случай конечных областей

Например, если в формулах логики предикатов рассматривать только одноместные предикатные символы, то такой алгоритм существует. Логика, в которой употребляются только одноместные предикаты, соответствует логике, описанной еще Аристотелем. Здесь кванторные операции можно заменить операциями конъюнкции и дизъюнкции и тем самым свести формулу логики предикатов к формуле алгебры логики, для которой проблема разрешимости может быть решена. Алгоритм проверки общезначимости формул, содержащих только одноместные предикатные символы, основан на следующей теореме.

Теорема 3.9. **Пусть A — формула, содержащая ровно n одноместных предикатных символов. Для того чтобы формула A была выполнимой, необходимо и достаточно, чтобы она была выполнима во всех интерпретациях $\{M, f\}$ с множеством M, содержащим не более 2^n элементов.**

* Алонзо Черч (1903–1995) — американский математик и логик.

- **Пример 4.** Является ли приведенная формула общезначимой?

$$\exists x(P_1(x)\wedge P_2(x))\to(\exists xP_1(x)\wedge\exists xP_2(x))\equiv\overline{\exists x(P_1(x)\wedge P_2(x))}\vee(\exists xP_1(x)\wedge$$
$$\wedge\exists xP_2(x))\equiv\forall x(\overline{P_1(x)}\vee\overline{P_2(x)})\vee\exists x\exists y(P_1(x)\wedge P_2(y))\equiv\exists y(\forall x(\overline{P_1(x)}\vee\overline{P_2(x)})\vee$$
$$\vee\exists x(P_1(x)\wedge P_2(y)))\equiv\exists y(\forall z(\overline{P_1(z)}\vee\overline{P_2(z)})\vee\exists x(P_1(x)\wedge P_2(y)))\equiv$$
$$\equiv\exists y\forall z\exists x((P_1(x)\wedge P_2(y))\vee(\overline{P_1(z)}\vee\overline{P_2(z)}))$$

Исходная формула приведена к предваренной нормальной форме. Получено высказывание, т. к. все переменные связаны кванторами. Проанализируем его на истинность. Пусть $P_1(x)\equiv P_2(x)\equiv 1$ (для $\forall x\in M$ или $\exists x\in M$). Тогда $(P_1(x)\wedge P_2(y)\vee\overline{P_1(z)}\vee\overline{P_2(z)})\equiv((1\wedge 1)\vee(\bar{0}\vee\bar{0}))\equiv(1\vee\bar{0})\equiv 1$. Пусть, наоборот, $P_1(x)\equiv P_2(x)\equiv 0$ (для $\forall x\in M$ или $\exists x\in M$). Тогда $(0\wedge 0)\vee(1\vee 1)\equiv 0\vee 1\equiv 1$. Наконец, $P_1(x)\equiv 0$, $P_2(x)\equiv 1$ (для $\forall x\in M$ или $\exists x\in M$). Тогда $(1\wedge 0)\vee(0\vee 1)\equiv 0\vee 1\equiv 1$. Итак, искомая формула общезиачима.

Проблема разрешимости для формул, содержащих в предваренной нормальной форме кванторы одного типа

Если формула логики предикатов A содержит свободные переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$, то формула $B=\forall x_1\forall x_2\ldots\forall x_nA(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называется *замыканием общности формулы* A, формула $C=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_nA(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называется *замыканием существования формулы* A.

Проблема общезначимости формул логики предикатов с предваренной нормальной формой с кванторами одного типа решается с помощью следующих теорем.

Теорема 3.10. **Если замкнутая формула логики предикатов в предваренной нормальной форме содержит только кванторы существования, число которых равно n, и тождественно истинна в любой области, состоящей из одного элемента, то она общезначима.**

Доказательство.

Теорема доказывается методом от противного. Пусть формула A в предваренной нормальной форме имеет вид $\exists$-формулы, т. е. $A=\exists x_1\exists x_2\ldots\exists x_nB(q_1,q_2,\ldots,P_1^1,P_2^1,\ldots,Q_1^2,Q_2^2,\ldots)$, где B — бескванторная формула, q_i — логические переменные, P_i^1 — одноместные предикаты, Q_i^2 — двухместные предикаты и т. д.

По условию теоремы на любой области $M = \{a\}$, содержащей один элемент, $A \equiv 1$, но тогда будет тождественно истинной и формула $B(q_1, q_2, ..., P_1^1(a), P_2^1(a), ..., Q_1^2(a,a), Q_2^2(a,a), ...)$. Эта формула является формулой алгебры логики.

Предположим, что формула A не является общезначимой. Это значит, что существует такая область M_1 и такой набор значений переменных $q_1, q_2, ..., P_1^1(x_i), P_2^1(x_j), ..., Q_1^2(x_i, x_j), Q_2^2(x_i, x_j), ...$, $x_i, x_j \in M_1$, на котором формула A принимает значение 0, т. е.

$$\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n B(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^1(x_i), P_2^1(x_j), ..., Q_1^2(x_i, x_j), Q_2^2(x_i, x_j), ...) = 0.$$

Тогда $\overline{\exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n B(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^1(x_i), P_2^1(x_j), ..., Q_1^2(x_i, x_j), Q_2^2(x_i, x_j), ...)} \equiv$

$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \overline{B(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^1(x_i) P_2^1(x_j), ..., Q_1^2(x_i, x_j), Q_2^2(x_i, x_j), ...)} \equiv 1.$$

Следовательно, формула

$$\overline{B(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^1(x_i), P_2^1(x_j), ..., Q_1^2(x_i, x_j), Q_2^2(x_i, x_j), ...)}$$

тождественно истинна независимо от выбора предметных переменных из области M_1. Выберем одно значение $x_0 \in M_1$ и поставим его в последнюю формулу вместо всех предметных переменных.

Тогда $\overline{B(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^1(x_0), P_2^1(x_0), ..., Q_1^2(x_0, x_0), Q_2^2(x_0, x_0), ...)} = 1$,

т. е. $B(q_1^0, q_2^0, ..., P_1^1(x_0), P_2^1(x_0), ..., Q_1^2(x_0, x_0), Q_2^2(x_0, x_0), ...) = 0$,

что противоречит тождественной истинности формулы

$$B(q_1, q_2, ..., P_1^1(a), P_2^1(a), ..., Q_1^2(a,a), Q_2^2(a,a), ...).$$

Таким образом, предположение, что формула A не является общезначимой, неверно. A — общезначимая формула.

Теорема 3.11. **Если замкнутая формула логики предикатов в предваренной нормальной форме содержит только кванторы общности, число которых равно n, и тождественно истинна на всяком множестве, содержащем не более чем n элементов, то она общезначима.**

Теорема доказывается способом, аналогичным способу, примененному для теоремы 3.10.

- **Пример 5.** Доказать тождественную ложность формулы

$$\exists x\exists y\big((F(x)\to F(y))\wedge(F(x)\to \overline{F}(y))\wedge F(x)\big)\equiv \exists x\exists y\big((\overline{F}(x)\vee F(y))\wedge$$
$$\wedge(\overline{F}(x)\vee\overline{F}(y))\wedge F(x)\big)\equiv \exists x\exists y\big((\overline{F}(x)\vee F(y))\wedge(\overline{F}(x)\wedge F(x)\vee\overline{F}(y)\wedge$$
$$\wedge F(x))\big)\equiv \exists x\exists y\big((\overline{F}(x)\vee F(y))\wedge\overline{F}(y)\wedge F(x)\big)\equiv \exists x\exists y\big((\overline{F}(x)\wedge\overline{F}(y)\wedge$$
$$\wedge F(x))\vee(F(y)\wedge\overline{F}(y)\wedge F(x))\big)\equiv \exists x\exists y(0\vee 0)\equiv 0.$$

- **Пример 6.** Привести к предваренной нормальной форме следующую формулу логики предикатов:

$$B\equiv\overline{\forall xR(x)}\vee\exists xQ(x,y)\equiv\exists x\overline{R}(x)\vee\exists xQ(x,y)\equiv\exists x\big(\overline{R}(x)\vee Q(x,y)\big)$$

Требуемая форма получена. В данном случае формула содержит только один квантор существования, следовательно, ее всеобщность зависит от вида предикатов $R(x)$ и $Q(x,y)$. Если $\exists x!\in M$, что $B\equiv 1$, то она общезначима.

3.7. Практическое занятие №8. Выполнимость формул логики предикатов

3.7.1. На множестве M определены одноместные предикаты $F(x)$ и $G(x)$. Каким условиям удовлетворяют области их истинности, если истинны:

а) $\forall x(F(x)\to G(x))\wedge\exists x\big(\overline{F(x)}\wedge G(x)\big)$;

б) $\overline{\exists x(F(x)\wedge G(x))}\wedge\exists x(F(x)\to G(x))$.

3.7.2. Выполнимы ли следующие формулы:

а) $\exists xP(x)$;

б) $\exists x\forall y\big(Q(x,x)\wedge\overline{Q(x,y)}\big)$;

в) $\exists x\forall y(Q(x,y)\to\forall zR(x,y,z))$.

3.7.3. Являются ли тождественно истинными следующие формулы:

а) $\exists xP(x)\to\forall xP(x)$;

б) $\forall xP(x)\to\exists xP(x)$;

в) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$;

г) $\exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \forall y \exists x Q(x,y)$;

д) $P(x) \rightarrow \forall y P(y)$;

е) $\exists x(P(x) \wedge (r \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \bar{r})$.

3.7.4. Доказать тождественную истинность следующих формул:

а) $\overline{\exists x P(x)} \rightarrow \overline{\forall x P(x)}$;

б) $\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{(\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x))}$;

в) $\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow \overline{(\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x))}$.

3.7.5. Доказать, что если C не содержит свободных вхождений x, то:

а) $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$;

б) $\forall x P(x) \wedge C \equiv \forall x(P(x) \wedge C)$.

3.7.6. Привести к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов, считая P и Q бескванторными формулами:

а) $\overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x,y,z,u)}$;

б) $\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y)$;

в) $\exists x \forall y P(x,y) \vee \exists x \forall y Q(x,y)$;

г) $\exists x \forall y P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)$;

д) $\overline{\forall x \exists y (P(x) \leftrightarrow Q(y))}$;

е) $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(y))$.

3.7.7. Привести к скулемовской нормальной форме:

а) $\forall x \exists y Q(x,y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)$;

б) $\exists x(P(x) \rightarrow (\forall y Q(x,y) \rightarrow \forall z R(x,z)))$.

3.7.8. Доказать общезначимость следующих формул:

а) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x))$;

б) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$;

в) $\forall x(q \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (q \rightarrow \forall x P(x))$.

3.7.9. Доказать тождественную ложность формулы
$\exists x \exists y ((P(x) \to P(y)) \wedge (P(x) \to \overline{P(y)}) \wedge P(x))$.

3.7.10. Пусть $\sigma = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$, где $P_1, P_2, ..., P_n$ — одноместные предикатные символы. Доказать, что для любой формулы A сигнатуры σ существует формула B, эквивалентная A, построенная с помощью $\wedge, \vee$ и $\bar{\ }$ из $\exists$-составляющих, т. е. формул вида $\exists x(B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_s)$, где $s \geq 1$ и B_i $(1 \leq i \leq n)$ имеют вид $P(x)$ или $\overline{P(x)}$ для некоторого P из σ.

3.8. Применение языка логики предикатов для записи математических предложений

При переводе словесных выражений в логическую символику надо иметь четкое представление об интерпретации этой символики. Поэтому необходимо четко очертить множество M, содержащее все высказывания, к которым применяются логические методы и приемы. Затем надо выбрать перечень предикатов, которые будут служить основными независимыми предикатами, участвующими в формулировках. Каждый из этих предикатов становится высказыванием, когда все его переменные будут элементами из множества M, называемого *предметной областью*.

Полностью решить логические проблемы, возникающие в "словесных" языках, можно было бы только переведя все фразы в символику используемого исчисления, а затем пользоваться только формальным аппаратом этого исчисления.

Кванторы сочетаются друг с другом и логическими связками многими способами, поэтому переводы выражений, содержащих кванторы, обычно неоднозначны. Однако в некоторых областях знания, в частиости математике, этот перевод наиболее естественен. Сам язык логики предикатов очень удобен для записи математических предложений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства. Выбор перечня необходимых предикатов, описывающих заданные свойства или условия, также сравнительно прост. Рассмотрим несколько примеров.

Запись математических определений

- *Определение бесконечно малой функции.* Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Это классическое определение, представляющее, по сути дела, определение предела функции, равного нулю. Перепишем это определение на языке $\varepsilon - \delta$:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall x \in M_{\alpha(x)} P(x, \varepsilon, \delta),$$

где $P(x,\varepsilon,\delta) = (0 < |x-a| < \delta \to |\alpha(x)| < \varepsilon)$ — трехместный предикат, определяющий условия предельного перехода.

- *Определение экстремума функции* (минимума в точке x_0, рис. 3.8).

$$\exists x_0 \in M \; \forall x_1 \in M \; \forall x_2 \in M \; P(x_0, x_1, x_2),$$

где

$$P(x_0, x_1, x_2) = ((x_1 < x_0) \to (f(x_1) > f(x_0))) \wedge ((x_2 > x_0) \to (f(x_2) > f(x_0))).$$

Здесь использован трехместный предикат $P(x_0, x_1, x_2)$.

- *Определение выпуклости (вогнутости) функции* $f(x)$ (рис. 3.9).

Если во всех точках интервала (a,b) вторая производная $f''(x) < 0$, то $f(x)$ на (a,b) выпукла. Это можно выразить совсем просто с помощью следующего выражения: $\forall x \in (a,b)(\exists f''(x) \wedge f''(x) < 0)$. Использован одноместный предикат $P(x)$.

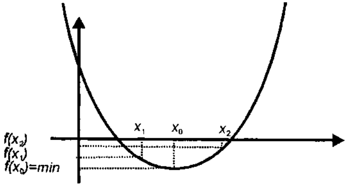


Рис. 3.8

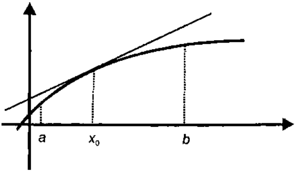


Рис. 3.9

- *Определение четной функции.*

Функция $f(x)$ называется *четной*, если область ее определения симметрична относительно начала координат и для каждого x из области определения выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. Тогда $\forall x \in M((-x \in M) \wedge (f(x) = f(-x)))$.

Формулировка математических теорем

Теоремы математики допускают формулировки в виде условных предложений. Говоря о строении многих теорем, можно выделить в них три части: *условие теоремы* — предикат $P(x)$, заданный на множестве R^2; *заключение теоремы* — предикат $Q(x)$, заданный на множестве R^2; *разъяснительная часть*, описывающая множество объектов, о которых идет речь в теореме.

Например, строение теоремы может быть таким: "Если любой элемент x из множества M обладает свойством $P(x)$, то он обладает свойством $Q(x)$". Таким образом, теорема формулируется так: $\forall x \in M(P(x) \to Q(x))$.

Вспомним, например, теорему о конечных приращениях (теорему Лагранжа). **Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то найдется на (a,b) такая точка c, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.**

Пусть предикат $P(a,b,x)$ выражает свойство функции $y=f(x)$ быть непрерывной на $[a,b]$ и дифференцируемой на (a,b), а $Q(a,b,c)= =(f(b)-f(a)=f'(c)(b-a))$. Тогда сама теорема Лагранжа может быть сформулирована так: $\exists c \in (a,b)(P(a,b,x) \to Q(a,b,c))$.

В свою очередь, предикат $P(a,b,x)$ может быть расшифрован более подробно:

- $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$ или $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in \in M(0<|x-x_0|<\delta \to |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$, где M — область определения $f(x)$;
- $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ или $\forall y \in [a,b](\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M(0<|x-y|<\delta \to |f(x)-f(y)|<\varepsilon))$.

Аналогично с помощью языка $\varepsilon-\delta$ может быть выражено свойство дифференцированности на (a,b). Напомним, что если существует производная $f(x)$ в точке x_0, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Излишняя детализация условий часто не нужна, т. е. можно ограничиться формулой $\exists c \in (a,b)(P \to Q)$.

Форма теоремы может быть иной. Рассмотрим следующую теорему из линейной алгебры.

Любые четыре вектора в R^3 линейно зависимы. Эта теорема может быть сформулирована в виде $\forall x \in R\, P(x)$, где $P(x)$ — доказываемое свойство (предикат, выражающий это свойство). Действительно, пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{d}$ — векторы из R^3, а α, β, γ и δ — ненулевые действительные числа. Тогда

$$\forall \bar{a} \in R^3 \forall \bar{b} \in R^3 \forall \bar{c} \in R^3 \forall \bar{d} \in R^3 \exists \alpha \in R \setminus \{0\} \exists \beta \in R \setminus \{0\} \exists \gamma \in R \setminus \{0\} \exists \delta \in R \setminus \{0\} (\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{d} = 0).$$

Построение противоположных утверждений и доказательство методом от противного

Это задача, легко сводящаяся к формальным преобразованиям. Если есть утверждение A, то построить $\overline{A}$ можно с помощью равносильных преобразований. Иногда это, правда, приводит к тому, что $\overline{A}$ дает негативное (неконструктивное) определение. Чаще и здесь получаются положительные (конструктивные) определения.

Например, возьмем определение бесконечно малой и найдем его отрицание

$$\overline{\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) > 0\, \forall x \in M (0 < |x - a| < \delta \to |\alpha(x)| < \varepsilon)} \equiv \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta(\varepsilon) > 0\, \exists x \in M\, \overline{(\overline{0 < |x - a| < \delta} \vee |\alpha(x)| < \varepsilon)} \equiv \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta(\varepsilon) > 0\, \exists x \in M (0 < |x - a| < \delta \wedge |\alpha(x)| \geq \varepsilon).$$

Это негативное определение. Оно подойдет для формирования контрпримера для того, чтобы доказать, что $\alpha(x)$ — не бесконечно малая величина в точке a. Позитивное определение бесконечно большой такое: $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \infty$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in M (0 < |x - a| < \delta \to |\alpha(x)| > \varepsilon)$.

Особый интерес представляет построение утверждения, отрицающего справедливость некоторой теоремы: $\forall x \in M (P(x) \to Q(x))$.

$\overline{\forall x \in M (P(x) \to Q(x))} \equiv \exists x \in M (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$. Следовательно, чтобы доказать, что теорема $\forall x \in M (P(x) \to Q(x))$ неверна, достаточно указать такой элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, а $Q(x)$ ложно, т. е. привести контрпример. Продемонстрируем это на следующем примере. Рассмотрим утверждение "если функция непрерывна в точке x_0, то она и дифференцируема в этой точке". Конечно, это не так. Из курса математического анализа известно, что дифференцируемость более строгое требование. Из дифференцируемости следует непрерывность, из непрерывности дифференцируемость не следует. Сформулируем основное утверждение.

Пусть M — множество всех функций, определенных в точке x_0, $P(f)$ — предикат, выражающий свойство функции быть непрерывной, а $Q(f)$ — свойство быть дифференцируемой в точке x_0. Тогда основная теорема имеет стандартный вид $\forall f \in M(P(f) \to Q(f))$.

Противоположное утверждение имеет вид $\exists f \in M\left(P(f) \wedge \overline{Q(f)}\right)$, т. е. найдется функция, определенная в точке x_0, которая непрерывна, но не имеет производной в x_0.

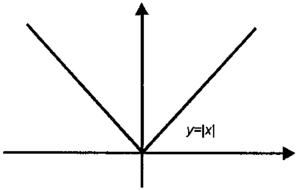


Рис. 3.10

Таких функций множество, это все функции, содержащие точку излома или точку возврата. Простейшая из них $y = |x|$ (рис. 3.10). В точке $x = 0$ она непрерывна, но не дифференцируема. Следовательно, основная теорема неверна. Аналогично обстоит дело и с формой $\forall x P(x)$. Рассмотрим уже разобранный пример из линейной алгебры и найдем к нему противоположное высказывание.

$$\overline{\forall \bar{a} \in R^3 \forall \bar{b} \in R^3 \forall \bar{c} \in R^3 \forall \bar{d} \in R^3 \exists \alpha \in R \setminus \{0\} \exists \beta \in R \setminus \{0\} \exists \gamma \in R \setminus \{0\} \exists \delta \in R \setminus \{0\} (\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{d} = 0)} \equiv \exists \bar{a} \in R^3 \exists \bar{b} \in R^3 \exists \bar{c} \in R^3 \exists \bar{d} \in R^3 \forall \alpha \in R \setminus \{0\} \forall \beta \in R \setminus \{0\} \forall \gamma \in R \setminus \{0\} \forall \delta \in R \setminus \{0\} \overline{(\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{d} = 0)} \equiv \exists \bar{a} \in R^3 \exists \bar{b} \in R^3 \exists \bar{c} \in R^3 \exists \bar{d} \in R^3 \forall \alpha \in R \setminus \{0\} \forall \beta \in R \setminus \{0\} \forall \gamma \in R \setminus \{0\} \forall \delta \in R \setminus \{0\} (\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} + \delta\bar{d} \neq 0).$$

Схема доказательства от противного очень похожа на только что рассмотренный случай и такова: предполагается, что теорема $\forall x \in M(P(x) \to Q(x))$ неверна, т. е. истинно противоположное утверждение $\overline{\forall x \in M(P(x) \to Q(x))} \equiv$ $\equiv \exists x \in M\left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right)$ Если из последней формулы путем логических рассуждений приходят к неверному утверждению, то делается вывод о том, что исходная теорема верна. По этой схеме противоположное высказывание надо свести к ложному, т. е. доказать истинность формулы $\overline{\forall x \in M(P(x) \to Q(x))} \to c \wedge \bar{c}$, где c — некоторое высказывание. Действительно, $\overline{\forall x \in M(P(x) \to Q(x))} \to c \wedge \bar{c} \equiv \overline{\overline{\forall x \in M(P(x) \to Q(x))}} \vee (c \wedge \bar{c}) \equiv$ $\equiv \forall x \in M(P(x) \to Q(x))$.

Формулировка обратных и противоположных теорем

Рассмотрим четыре схемы теорем:

1. $\forall x \in M(P(x) \to Q(x))$;
2. $\forall x \in M(Q(x) \to P(x))$;
3. $\forall x \in M\left(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}\right)$;
4. $\forall x \in M\left(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}\right)$.

Две теоремы, у которых условие одной является заключением другой, а условия второй заключением первой, называются *взаимно обратными*, т. е. $\forall x \in M(P(x) \to Q(x))$ и $\forall x \in M(Q(x) \to P(x))$ взаимно обратны и $\forall x \in M\left(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}\right)$ и $\forall x \in M\left(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}\right)$ также взаимно обратны. Первая теорема обычно называется *прямой теоремой*, а вторая — *обратной*.

Две теоремы, у которых условие и заключение одной являются отрицанием условия и заключения другой, называются *взаимно противоположными*.

В нашей схеме $\forall x \in M(P(x) \to Q(x))$ и $\forall x \in M\left(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)}\right)$ — взаимно противоположны и $\forall x \in M(Q(x) \to P(x))$ и $\forall x \in M\left(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}\right)$ также взаимно противоположны. Прямая и обратная теоремы в общем случае не равносильны, т. е. одна из них может быть истинной, а другая ложной. Но теоремы 1 и 4 и 2 и 3 всегда равносильны, и это легко доказывается:

$$\forall x \in M(P(x) \to Q(x)) \equiv \forall x \in M\left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right) \equiv \forall x \in M\left(\overline{P(x)} \vee \overline{\overline{Q(x)}}\right) \equiv$$
$$\equiv \forall x \in M\left(\overline{\overline{Q(x)}} \vee \overline{P(x)}\right) \equiv \forall x \in M\left(Q(x) \vee \overline{P(x)}\right) \equiv \forall x \in M\left(\overline{Q(x)} \to \overline{P(x)}\right).$$

Аналогично $\forall x \in M(Q(x) \to P(x)) \equiv \forall x \in M(\overline{P(x)} \to \overline{Q(x)})$.

- **Пример 1.** Возьмем простую теорему из теории дифференциальных уравнений. Пусть $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ — линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два частных решения этого уравнения из множества M всех частных решений. $P(y_1, y_2)$ — предикат, выражающий тот факт, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, а $Q(\Sigma) = y_1(x) + y_2(x)$ — также частное решение этого уравнения.

  Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два любых частных решения уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $y_1(x) + y_2(x)$ есть также решение этого уравнения.

  Итак, основная теорема $\forall y_1 \forall y_2 \in M(P(y_1, y_2) \to Q(\Sigma))$ верна. Тогда обратная теорема $\forall y_1 \forall y_2 \in M(Q(\Sigma) \to P(y_1, y_2))$ неверна. Действительно, она звучит следующим образом: "если $y_1(x) + y_2(x)$ решение уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $y_1(x)$ и $y_2(x)$ тоже решения этого уравнения". Противоположная теорема $\forall y_1 \forall y_2 \in M(\overline{P(y_1, y_2)} \to \overline{Q(\Sigma)})$ также неверна, ибо утверждает, что "если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не являются частными решениями уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $y_1(x) + y_2(x)$ также не частное решение этого уравнения". Наконец, теорема, противоположная обратной $\forall y_1 \forall y_2 \in M(\overline{Q(\Sigma)} \to \overline{P(y_1, y_2)})$, верна: "если $y_1(x) + y_2(x)$ не является частным решением уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, то $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — также не частные решения данного дифференциального уравнения". Проверим все сделанные утверждения на простейшем примере.

  $$y'' + y' - 2y = 0,\ k^2 + k - 2 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -2,\ y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-2x}.$$

  Истинность основной теоремы проверяется подстановкой

  $$y_1 + y_2 = e^x + e^{-2x},\quad y_1' + y_2' = e^x - 2e^{-2x},\quad y_1'' + y_2'' = e^x + 4e^{-2x},$$
  $$y'' + y' - 2y = e^x + 4e^{-2x} + e^x - 2e^{-2x} - 2e^x - 2e^{-2x} = 0.$$

  Проверим истинность обратной теоремы. Пусть

  $$y_1 + y_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 = \frac{\left(e^x + e^{-2x}\right)^2}{e^x + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}}{e^x + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} + 2e^{-x}}{e^x + e^{-2x}} + \frac{e^{-4x}}{e^x + e^{-2x}},$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{e^{2x} + 2e^{-x}}{e^x + e^{-2x}}, \quad \tilde{y}_2 = \frac{e^{-4x}}{e^x + e^{-2x}},$$

тогда, например, $\tilde{y}_2'' + \tilde{y}_2' - 2\tilde{y}_2 \neq 0$, т. е. обратная теорема неверна. Точно также проверяется истинность всех остальных ранее высказанных предложений.

Формулировка необходимых и достаточных условий

Некоторые теоремы математики, в частности теоремы существования, сформулированы в виде "... для того чтобы..., необходимо и достаточно, что...", или " ... тогда и только тогда, когда...". Эта конструкция приводит к эквиваленции, т. е. имеет вид $\forall x \in M(P(x) \leftrightarrow Q(x))$. Если вернуться к уже рассмотренной форме $\forall x \in M(P(x) \rightarrow Q(x))$, то можно вспомнить, что в импликации предикат $Q(x)$ логически следует из предиката $P(x)$, поэтому $P(x)$ называют *достаточным условием* для $Q(x)$, а $Q(x)$ называют *необходимым условием* для $P(x)$: $\forall x \in M\left(\overset{\text{д}}{P(x)} \rightarrow \overset{\text{н}}{Q(x)}\right)$.

Если теорема имеет форму $\forall x \in M(P(x) \leftrightarrow Q(x))$, то $\forall x \in M(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x \in M((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow P(x))) \equiv$ $\equiv \forall x \in M(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in M(Q(x) \rightarrow P(x))$. Таким образом, $P(x)$ является необходимым и достаточным условием для $Q(x)$, а $Q(x)$ необходимо и достаточно для $P(x)$.

- **Пример 2.** В следующих предложениях поставить слова "необходимо, но недостаточно", "достаточно, но не необходимо", "не необходимо и недостаточно" или "необходимо и достаточно".

  Для того чтобы $x^2 - 5x + 6 = 0$ ..., чтобы $x = 3$.

  Пусть $P(x) = (x^2 - 5x + 6 = 0)$, $Q(x) = (x = 3)$. Корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ равны $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Рассмотрим $\forall x \in \{2,3\}\left(\overset{\text{д}}{P(x)} \rightarrow \overset{\text{н}}{Q(x)}\right)$. При $x = 2$, $P(2) = 1$, $Q(2) = 0$, $1 \rightarrow 0 = 0$, т. е. $\overset{\text{д}}{P(x)} \nrightarrow \overset{\text{н}}{Q(x)}$. Следовательно, для $P(x)$ $Q(x)$ не является необходимым. Теперь рассмотрим противоположную импликацию

$\forall x \in \{2,3\}\left(\overset{\text{Д}}{Q(x)} \to \overset{\text{Н}}{P(x)}\right)$. Здесь при $x = 2$, $P(2) = 1$, $Q(2) = 0$, $0 \to 1 = 1$ и при $x = 3$, $P(3) = 1$, $Q(3) = 1$, $1 \to 1 = 1$, вторая импликация верна. Значит, для $P(x)$ $Q(x)$ является достаточным условием. Итак, первоначальное предложение должно быть сформулировано следующим образом: "Для того, чтобы $x^2 - 5x + 6 = 0$ достаточно, но не необходимо, чтобы $x = 3$".

- **Пример 3.** Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, ..., чтобы $f(x)$ была ограничена.

Пусть $P(x)$ — предикат, выражающий свойство функции $f(x)$ быть интегрируемой на $[a,b]$, а предикат $Q(x)$ выражает свойство ограниченности этой функции на отрезке $[a,b]$. Из курса математического анализа известно, что если функция интегрируема по Риману на $[a,b]$, то она и ограничена; если же функция ограничена, то из этого не следует ее интегрируемость по Риману. Как пример можно привести *функцию Дирихле* $d(x) = \begin{cases} 1, x \text{ — рациональное,} \\ 0, \tilde{o} \text{ — иррациональное.} \end{cases}$ Таким образом, $\forall x \in [a,b]\left(\overset{\text{Д}}{P(x)} \to \overset{\text{Н}}{Q(x)}\right)$ и $\forall x[a,b]\left(\overset{\text{Д}}{Q(x)} \nrightarrow \overset{\text{Н}}{P(x)}\right)$, т. е. для $P(x)$ $Q(x)$ является необходимым, но не достаточным условием. Итак, для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a,b]$, необходимо, но не достаточно, чтобы $f(x)$ была ограничена.

3.9. Практическое занятие №9. Применение языка логики предикатов в математике

3.9.1. Записать на языке логики предикатов следующие определения:

1. Двух равных вещественных чисел (Два вещественных числа x и y называются равными $x = y$, если не выполнено ни одно из соотношений $x > y$ или $y > x$).

2. Ограниченного сверху (снизу) числового множества A (Множество $A \subset R$ называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует

такое вещественное число x_m, что для всех чисел $a \in A$ выполнено условие $a \le x_m$ $(a \ge x_m)$).

3. Линейно независимых векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_k}$ (Векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_k}$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, что $\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + \ldots + \alpha_k \overline{x_k} = 0$. В противном случае векторы $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_k}$ называются линейно независимыми).
4. Определение двух перпендикулярных векторов из R^3 (Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из R^3 перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю).
5. Предела числовой последовательности $\{x_n\}$. (Последовательность $\{x_n\}$ называется *сходящейся к числу* x, если существует такое число x, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ имеет место неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$. x называется пределом последовательности $\{x_n\}$.)
6. Строго монотонной последовательности. (Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если при $n = 1,2,\ldots$ $x_{n+1} > x_n$ $(x_{n+1} < x_n)$. Возрастающие и убывающие последовательности называются строго монотонными.)
7. Фундаментальной последовательности $\{x_n\}$. (Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n, l > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - x_l| < \varepsilon$.)
8. Периодической функции. (Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \ne 0$, что при любом x из области определения функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется условие $f(x \pm T) = f(x)$.)
9. Монотонно возрастающей функции. (Функция $f(x)$ называется монотонно возрастающей, если из неравенства $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in M$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.)

10. Предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. (Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in M$, удовлетворяющих условию $x > N$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.)

3.9.2. Сформулировать на языке логики предикатов следующие теоремы из математического анализа:

1. Признак Лейбница. (Пусть $x_n \ge x_{n+1} \ge 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Тогда знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} x_n$ сходится.)
2. Теорему Вейерштрасса* (Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ ограничена на этом отрезке.).
3. Теорему Ролля**. (Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$, тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.)
4. Теорему о среднем для определенного интеграла. (Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда существует такая точка $c \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.)
5. Критерий Коши*** для последовательностей. (Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.)

3.9.3. Доказать несправедливость утверждений:

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она монотонна на этом отрезке.
2. Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 вторую производную, равную нулю $(f''(x_0) = 0)$, то точка x_0 — точка экстремума функции.

---

* Карл Вейерштрасс (1815–1897) — немецкий математик.

** Мишель Ролль (1652–1715) — французский математик.

*** Августин Луи Коши (1789–1857) — французский математик.

3. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема (по Риману*) на этом отрезке.
4. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она имеет в этой точке локальный экстремум.
5. Если функция $f(x)$ представима рядом Тейлора на отрезке $[a,b]$, то этот ряд сходится к $f(x)$ во всех точках этого отрезка.
6. Если формула логики предикатов выполнима, то она общезначима.

3.9.4. Используя приведенную основную теорему, сформулировать к ней обратную, противоположную и обратную к противоположной теореме, и проверить их истинность, приведя необходимые примеры.

1. Если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот четырехугольник — ромб.
2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между точками a и b найдется по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$, в которой функция обращается в нуль: $f(c)=0$.
3. Если функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она в этой точке непрерывна.
4. Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум или минимум, то ее производная обращается в нуль в этой точке.
5. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его n-й член стремится к нулю при $n \to +\infty$.

3.9.5. Дополнить следующие предложения словами "необходимо и достаточно", "необходимо и недостаточно", "достаточно, но не необходимо" или "не необходимо и недостаточно", сформулировав необходимые и достаточные условия.

1. Для того чтобы два треугольника были равны,..., чтобы все углы одного треугольника были равны соответствующим углам другого.

---

* Бернгард Риман (1826–1866) — немецкий математик.

2. Для того чтобы все стороны многоугольника были равны,..., чтобы этот миогоугольник был правильным.

3. Для того чтобы два вектора в R^2 были лииейно зависимы,..., чтобы они были коллинеарны.

4. Для того чтобы функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ — произвольные постоянные, была общим решением дифференциального уравнения $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y_n = 0$,..., чтобы функции $y_1, y_2, ..., y_n$ были линейно независимыми решениями этого уравнения.

5. Для того чтобы функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ были двумя первообразными от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$,..., чтобы разность между ними была равна постоянному числу.

Глава 4

Исчисление предикатов

4.1. Синтаксис языка исчисления предикатов

Исчисление высказываний — очень узкая логическая система. Есть такие типы логических рассуждений, которые не могут быть осуществлены в рамках исчисления высказываний, например, "простое число два — четное, следовательно, существуют простые четные числа". Корректность этого умозаключения основана на внутренней структуре самого предложения и на смысле слова "существует". Поэтому возникает потребность расширения исчисления путем введения в него дополнительных понятий и символов. Дополнительными понятиями являются предикаты, а символами — символы кванторов.

Для того чтобы формально описать язык исчисления предикатов как язык формальной теории, необходимо задать множество его символов и правила построения формул языка, т. е. синтаксис.

В алфавит исчисления предикатов входят:

- строчные латинские буквы с индексами и без них $a, b, c,...x, y, z,..a_1,...x_1$ — предметные переменные;
- прописные латинские буквы с индексами внизу и без них $A, B,..., A_1, A_2,...$ — переменные высказывания;
- прописные латинские буквы с индексами вверху $F^p, G^p,...,S^p, T^p$ и эти же символы с индексами внизу $F_1^p, F_2^p, G_1^p, G_2^p,..., S_1^p, S_2^p$ — переменные предикаты от p переменных;
- символы логических операций $\wedge, \vee, \to, \bar{\ }$;
- скобки и запятые (,), , ;
- символы кванторов $\forall$, $\exists$.

Так же как в исчислении высказываний, в исчислении предикатов определяется формула и подформула. Формулой считаются следующие последовательности символов алфавита:

- каждое переменное высказывание;
- $F^p(a_1, a_2, ..., a_p)$ — формула, если F^p — символ переменного предиката, а $a_1, a_2, ... a_p$ — символы предметных переменных;
- если A — формула, содержащая переменную x, то слова $\forall x A$ и $\exists x A$ также формулы, причем переменная x в $\forall x A$ и $\exists x A$ называется связанной;
- если A и B формулы, то $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\overline{A}$ тоже формулы.

Примеры формул:

1. $\exists x F^1(x) \rightarrow \forall y G^2(y, z)$. Это формула, т. к. $G^2(y, z)$ — предметный предикат, содержащий две свободные переменные, т. е. элементарная формула, $\forall y G^2(y, z)$ — также формула, содержащая свободную переменную z и переменную y, связанную квантором всеобщности. В формулах $F^1(x)$ и $G^2(y, z)$ нет переменных, связанных в одной формуле и свободных в другой.
2. $\exists x F^1(x) \wedge \exists y G^2(x, y)$ — не формула, т. к. в $F^1(x)$ переменная x связана, а $G^2(x, y)$ свободна.

Подформулой элементарной формулы A является, во-первых, она сама. Если $\forall x A$ или $\exists x A$ — формулы, то A — подформула, и всякая ее часть — подформула. Если $A * B$ формула, где $* = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \overline{\ }\}$, то ее подформулами являются A и B и все их подформулы.

Вводится понятие области действия квантора. Пусть формула имеет вид $\forall x A$ или $\exists x A$. Тогда областью действия квантора $\forall x$ (соответственно $\exists x$) называется формула A. При этом необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1. В формуле свободные и связанные переменные обозначаются разными буквами.
2. Если какой-либо квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими кванторами, обозначаются разными буквами.

Нарушение этих двух условий в исчислении предикатов называется *коллизией переменных*. Например, выражение $\forall x(F(x) \to \exists xG(x, y))$ не является формулой, т. к. не удовлетворяет второму условию.

Теорема 4.1. **Если в формуле A изменить обозначения как свободных, так и связанных переменных, меняя букву на другую всюду, где она входит, так, чтобы при этом удовлетворялись первое и второе условия, то полученное таким образом новое выражение будет формулой.**

4.2. Аксиомы и основные правила вывода

Аксиомы входят в конечное число некоторых заданных формул, которые заранее считаются выводимыми. Аксиомы делятся на пять групп, причем первые четыре группы представляют собой не что иное, как аксиомы исчисления высказываний.

I. 1. $A \to (B \to A)$;

2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

II. 3. $A \wedge B \to A$;

4. $A \wedge B \to B$;

5. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$;

III. 6. $A \to A \vee B$;

7. $B \to A \vee B$;

8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$; (4.2.1)

9. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$;

VI. 10. $A \to \overline{\overline{A}}$;

11. $\overline{\overline{A}} \to A$;

V. 12. $\forall xF(x) \to F(y)$;

13. $F(y) \to \exists xF(x)$.

Рассмотрим теперь несколько правил образования выводимых формул. Заметим, что секвенции в исчислении предикатов определяются так же, как в исчислении высказываний.

1. *Правило заключения* (*простого заключения*). Оно такое же, как в исчислении высказываний, только объем формул, к которым применяется это правило, шире.

$$\frac{\vdash A\,;\vdash A \rightarrow B}{\vdash B}.$$

2. *Правило подстановки.* В исчислении высказываний заменялись только переменные высказывания в выводимой формуле на любую формулу. В исчислении предикатов можно заменять переменные высказывания и переменные предикаты. Это требует учета некоторых дополнительных условий, чтобы в результате подстановки получилась формула исчисления предикатов.

   а) *Замена переменного высказывания.* Пусть формула $A(B)$ содержит переменное высказывание B. Тогда можно заменить B любой формулой G, удовлетворяющей следующим условиям:

   - свободные переменные в G обозначены буквами, отличными от связанных переменных в A, и связанные переменные в G — буквами, отличными от свободных переменных в A;
   - если B в A находится в области действия квантора, обозначенного какой-то буквой, то эта буква не входит в G. Тогда

$$\int_B^G (A(B)) \vdash A(G).$$

- **Пример 1.** Пусть $A(B) = \forall x \forall y\left(C \vee \forall z H(z,x) \wedge \left(\overline{C} \vee F(x,y)\right)\right)$. Здесь C нельзя заменить, например, формулой $\forall x G(x)$ или $\exists x P(x)$, т. к. не будет соблюдаться второе условие коллизии переменных. Замена же высказывания C формулой $\forall z \forall t(C \wedge H(z,t) \vee L \wedge F(z,t))$ возможна, т. к. оба условия будут выполнены. В результате получим выражение, являющееся формулой

$$\forall x \forall y(\forall z \forall t(C \wedge H(z,t) \vee L \wedge F(z,t)) \vee \forall z H(z,x) \wedge$$
$$\wedge\, \overline{\forall z \forall t(C \wedge H(z,t) \vee L \wedge F(z,t))} \vee F(x,y)).$$

   б) *Замена переменного предиката.* Пусть формула $A(F)$ содержит переменный предикат F от n переменных и пусть имеется формула $G(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, содержащая n свободных переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Если свободные переменные в G обозначены буквами, отличными от связанных переменных в F, т. е. выполняется первое правило замены переменных и следующее правило: если F в A находится в области действия квантора, связывающего какую-либо букву, то эта буква не входит в G; тогда возможна подстановка формулы F в A вместо предиката F.

При подстановке нужно следить (указывать), какой из переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в G соответствует каждое пустое место в $F(\ldots)$. Например, пусть $A = \exists x \exists y \exists z (F(x, y) \vee \overline{F}(x, z))$. Требуется заменить F формулой $\forall u \exists v (H(u, t_1) \vee H(v, t_2))$. Здесь выполнено первое и третье условие. следовательно, подстановка возможна. Лучше отдельно выписать, чему равно F в каждом месте формулы A, и возвратить старые переменные. Тогда $F(x, y) = \forall u \exists v (H(u, x) \vee H(v, y))$ и $F(x, z) = \forall u \exists v (H(u, x) \vee H(v, z))$, формула A будет иметь вид

$$A = \exists x \exists y \exists z (\forall u \exists v (H(u, x) \vee H(v, y)) \vee \overline{\forall u \exists v (H(u, x) \vee H(v, z))}).$$

Если же первое и третье условия не выполняются, то могут получиться выражения, не являющиеся формулами. Например, пусть $A = B \vee \forall x F(x)$ и необходимо подставить $U(x)$ вместо B. Получится выражение $U(x) \vee \forall x F(x)$, которое не является формулой, т. к. нарушено первое условие. Аналогично, пусть $A = \forall x (B \to F(x))$ и надо подставить вместо B $\forall x U(x)$. Получим $\forall x (\forall x U(x) \to F(x))$. Это не формула исчисления предикатов, ибо при подстановке нарушено третье условие.

Операция подстановки переменного предиката в общем случае выражается следующим образом: $\int\limits_{F(\ldots)}^{G(t_1, t_2, \ldots, t_n)} (A)$. Это правило можно выразить так. Если формула A содержит переменный предикат F, то подстановка применяется, если для формул $G(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ и A выполняются первое и третье условия и, кроме того, следующее: отмеченные переменные $t_1, t_2, \ldots, t_n$ не должны входить в формулу A. При этом справедливы следующие формулы:

$$\text{а)} \begin{cases} \int\limits_{B}^{G} (\forall x A(x)) \text{ есть } \forall x \int\limits_{B}^{G} (A(x)) \\ \int\limits_{F(\ldots)}^{G(t_1, t_2, \ldots, t_n)} (\forall x A(x)) \text{ есть } \forall x \int\limits_{F(\ldots)}^{G(t_1, t_2, \ldots, t_n)} (A(x)) \end{cases};$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} \int\limits_{B}^{G}(\exists x A(x)) \text{ есть } \exists x \int\limits_{B}^{G}(A(x)) \\ \int\limits_{F(\ldots)}^{G(t_1,t_2,\ldots,t_n)}(\exists x A(x)) \text{ есть } \exists x \int\limits_{F(\ldots)}^{G(t_1,t_2,\ldots,t_n)}(A(x)) \end{cases}.$$

в) *Замена свободной предметной переменной.* Пусть формула A является выводимой формулой в исчислении предикатов, а формула A' получена из A заменой любой свободной предметной переменной другой свободной предметной переменной так, что заменяемая переменная заменяется одинаковым образом всюду, где она входит в A, тогда A' является выводимой формулой в исчислении предикатов. Например, $\forall x(F(x) \to G(y)) \wedge (\overline{F}(y) \to \exists x G(x))$. Заменим y на z, получим $\forall x(F(x) \to G(z)) \wedge (\overline{F}(z) \to \exists x G(x))$. Здесь нельзя заменить переменную y переменной x, т. к. свободная переменная должна заменяться только свободной переменной.

г) *Правило переименования связанных предметных переменных.* Если $\vdash A$ в исчислении предикатов, то A', полученная заменой в A связанных переменных другими связанными переменными, отличными от всех свободных переменных формулы A, также выводима в исчислении предикатов. При этом заменяемая связанная переменная в формуле A должна заменяться одинаковым образом всюду в области действия квантора, связывающего данную переменную, и в самом кванторе. Например, если $\exists x F(x) \to \forall x G(x)$, то возможны следующие варианты переименования: $\exists y F(y) \to \forall z G(z)$ или $\exists x F(x) \to \forall z G(z)$ или $\exists y F(y) \to \forall x G(x)$.

Приведем теперь два правила связывания квантором:

1. Если $G \to A(x)$ — выводимая формула в исчислении предикатов и G не содержит переменной x, то формула $G \to \forall x A(x)$ тоже выводима в исчислении предикатов, т. е. $\dfrac{\vdash G \to A(x)}{\vdash G \to \forall x A(x)}$.

2. Если $A(x) \to G$ — выводимая формула в исчислении предикатов и G не содержит переменной x, то формула $\exists x A(x) \to G$ тоже выводима в исчислении предикатов, т. е. $\dfrac{\vdash A(x) \to G}{\vdash \exists x A(x) \to G}$.

Другие правила вывода рассмотрим по мере необходимости. Их, как и в исчислении высказываний, довольно много.

4.3. Производные правила вывода в исчислении предикатов

Пусть G, F, Φ — произвольные формулы, $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — конечные последовательности формул, возможно пустые, а $G(t)$ получается из $G(x)$ заменой всех свободных вхождений x на t, Γ_4 — конечная последовательность формул, не содержащая x свободно. Тогда в исчислении предикатов верны следующие правила вывода:

1. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash G; \Gamma_2 \vdash F}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash G \wedge F}$ — правило введения конъюнкции.

2. $\begin{cases} \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge F}{\Gamma \vdash G} \\ \dfrac{\Gamma \vdash G \wedge F}{\Gamma \vdash F} \end{cases}$ — правило удаления конъюнкции.

3. $\begin{cases} \dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee F} \\ \dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash G \vee F} \end{cases}$ — правило введения дизъюнкции.

4. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash G \vee F; \Gamma_2, G \vdash \Phi; \Gamma_2, F \vdash \Phi}{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \Phi}$ — правило удаления дизъюнкции.

5. $\dfrac{\Gamma, G \vdash F}{\Gamma \vdash G \to F}$ — правило введения импликации. (4.3.1)

6. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash G \to F; \Gamma_2 \vdash G}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash F}$ — правило удаления импликации.

7. $\dfrac{\Gamma, G \vdash}{\Gamma \vdash \overline{G}}$ — правило введения отрицания.

8. $\dfrac{\Gamma, \overline{G} \vdash}{\Gamma \vdash G}$ — правило удаления отрицания.

9. $\dfrac{\Gamma_1 \vdash G; \Gamma_2 \vdash \overline{G}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash}$ — правило сведения к противоречию.

10. $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash G}$ — правило утончения.

11. $\dfrac{\Gamma \vdash G}{\Gamma, F \vdash G}$ — правило расширения.

12. $\dfrac{\Gamma_1, G, F, \Gamma_2 \vdash \Phi}{\Gamma_1, F, G, \Gamma_2 \vdash \Phi}$ — правило перестановки.

13. $\dfrac{\Gamma_1, G, G, \Gamma_2 \vdash \Phi}{\Gamma_1, G, \Gamma_2 \vdash \Phi}$ — правило сокращения.

14. $\dfrac{\Gamma_4 \vdash G(x)}{\Gamma_4 \vdash \forall x G(x)}$ — правило введения квантора всеобщности.

15. $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x G(x)}{\Gamma \vdash G(t)}$ — правило удаления квантора всеобщности.

16. $\dfrac{\Gamma \vdash G(t)}{\Gamma \vdash \exists x G(x)}$ — правило введения квантора существования.

17. $\dfrac{\Gamma_4, G(x) \vdash H}{\Gamma_4, \exists x G(x) \vdash H}$ — правило удаления квантора существования.

4.4. Некоторые теоремы исчисления предикатов

Так как все формулы, выводимые в исчислении высказываний, являются также выводимыми в исчислении предикатов, то, совершая подстановки в выводимые формулы исчисления высказываний, можно получить новые выводимые формулы исчисления предикатов. Обнаружить выводимость формулы в исчислении высказываний не представляет особого труда. Для этого нет необходимости проводить ее формальный вывод, достаточно установить, что формула является тождественно истинной в смысле алгебры высказываний.

Например, $\vdash A \vee \overline{A}$. $\int_{A}^{F(x)} \left(A \vee \overline{A}\right) \equiv \vdash F(x) \vee \overline{F}(x)$. Можно взять и более длинную формулу $\vdash A \to (B \wedge C \to B) \wedge A = I$, тогда

$$\int_{B,C}^{\exists x F(x), \forall y H(y)} (I) \equiv \vdash A \to (\exists x F(x) \wedge \forall y H(y) \to \exists x F(x)) \wedge A.$$

Все производные правила, выведенные для исчисления высказываний, остаются в силе в исчислении предикатов, например правило сложной подстановки и сложного заключения, правило силлогизма и др.

Выведем последнее упомянутое правило — правило силлогизма $\dfrac{\vdash G \to F; \vdash F \to D}{\vdash G \to D}$. В исчислении предикатов это правило выводится из доказуемой формулы $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$. Поскольку правило подстановки в исчислении предикатов имеет место, то $\vdash (G \to F) \to ((F \to D) \to (G \to D))$. Коллизии переменных здесь не может возникнуть, т. к. иначе имела бы место коллизия в какой-нибудь из формул G, F или D либо между переменными какой-нибудь пары этих формул. Однако каждая пара представляет импликацию $G \to F, F \to D$ или $G \to D$, поэтому коллизия имела бы место по крайней мере в одной из этих пар, чего по предположению нет, т. к. все эти пары входят в правило силлогизма.

Тогда по правилу сложного заключения

$$\frac{\vdash G \to F; \vdash F \to D; \vdash (G \to F) \to ((F \to D) \to (G \to D))}{\vdash G \to D}.$$

Выведем еще одно производное правило вывода исчисления предикатов — правило связывания квантором $\dfrac{\vdash G(x)}{\vdash \forall x G(x)}$.

Пусть дано $\vdash G(x)$. В исчислении предикатов выводима формула $A \to B$.

Тогда применим подстановку $\int\limits_{B}^{G(x)}(A \to B) \equiv \vdash A \to G(x)$. Осталось воспользоваться первым основным правилом связывания квантором $\dfrac{\vdash G \to A(x)}{\vdash G \to \forall x A(x)}$, где G не содержит переменной x. Итак, $\dfrac{\vdash A \to G(x)}{\vdash A \to \forall x G(x)}$.

Можно предположить, что A не входит в $G(x)$, т. к. ее всегда можно так выбрать.

Далее, пусть Φ — произвольная выводимая формула. Тогда $\int\limits_{A}^{\Phi}(A \to \forall x G(x)) \equiv \vdash \Phi \to \forall x G(x)$. Наконец, по правилу простого заключения $\dfrac{\vdash \Phi; \vdash \Phi \to \forall x G(x)}{\vdash \forall x G(x)}$.

- **Пример 1.** Доказать выводимость формулы $\vdash \forall x \forall y (F(x) \to (G(y) \to F(x)))$.

  Воспользуемся первой аксиомой $A \to (B \to A)$ и сделаем в ней следующую подстановку $\int\limits_{A,B}^{F(x),G(y)}(A \to (B \to A)) \equiv \vdash F(x) \to (G(y) \to F(x))$.

  По только что доказанному правилу связывания квантором имеем $\forall x (F(x) \to (G(y) \to F(x)))$. Применяя еще раз это же правило, получаем $\vdash \forall x \forall y (F(x) \to (G(y) \to F(x)))$.

  Определение относительно вывода из совокупности формул аналогично определениям исчисления высказываний.

  Выводом в исчислении предикатов называется конечная последовательность формул $G_1, G_2, \ldots, G_n$ такая, что для каждого i $(1 \le i \le n)$ G_i есть либо аксиома, либо непосредственное следствие одной или двух предыдущих формул.

  Для исчисления предикатов справедливы те же логические законы и правила, которые были доказаны ранее в исчислении высказываний. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема дедукции. В исчислении высказываний $\dfrac{\Gamma, C \vdash A}{\Gamma \vdash C \to A}$. В исчислении предикатов эта теорема имеет ту же форму: если формула G выводима из формулы F, то формула $F \to G$ выводима в исчислении предикатов, т. е. $\dfrac{F \vdash G}{\vdash F \to G}$. При этом предполагается, что G и F таковы, что $F \to G$ является формулой, т. е. между G и F не возникает коллизии переменных.

- **Пример 2.** $\vdash \forall x F(x) \to \exists x F(x)$. Воспользуемся двумя последними аксиомами $\forall x F(x) \to F(y)$ и $F(y) \to \exists x F(x)$ исчисления предикатов и применим к ним правило силлогизма $\dfrac{\vdash A \to B; \vdash B \to C}{\vdash A \to C}$. Получим $\dfrac{\vdash \forall x F(x) \to F(y); \vdash F(y) \to \exists x F(x)}{\vdash \forall x F(x) \to \exists x F(x)}$.

- **Пример 3.** $\vdash \forall x \forall y F(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)$. Воспользуемся опять двенадцатой аксиомой $\forall x F(x) \to F(y)$. Применяя ее первый раз к переменной x в кванторе $F(x, y)$, получаем $\forall x F(x, y) \to F(u, y)$; после второго применения к переменной y будем иметь $\forall x \forall y F(x, y) \to F(u, v)$. Используем теперь первое правило связывания квантором $\dfrac{G \to A(x)}{G \to \forall x A(x)}$, например для формулы $A(v) = \forall x \forall y F(x, y) \to F(u, v)$. Тогда получим выводимую формулу $\vdash \forall x \forall y F(x, y) \to \forall v F(u, v)$. Применив это же правило еще раз, придем к формуле $\vdash \forall x \forall y F(x, y) \to \forall v \forall u F(u, v)$. Сделаем теперь замену связанных переменных, получим $\vdash \forall x \forall y F(x, y) \to \forall y \forall x F(x, y)$.

  Точно таким же образом можно доказать и обратное следование $\vdash \forall y \forall x F(x, y) \to \forall x \forall y F(x, y)$. Для доказательства исходной формулы осталось применить правило введения конъюнкции $\dfrac{\vdash G; \vdash F}{\vdash G \wedge F}$. Тогда $\dfrac{\vdash \forall x \forall y F(x, y) \to \forall y \forall x F(x, y); \vdash \forall y \forall x F(x, y) \to \forall x \forall y F(x, y)}{\vdash \forall x \forall y F(x, y) \leftrightarrow \forall y \forall x F(x, y)}$.

- **Пример 4.** $\vdash \exists x \forall y F(x, y) \to \forall y \exists x F(x, y)$. Воспользуемся опять двенадцатой аксиомой и применим ее к переменной y в предикате $F(x, y)$.

Получим $\vdash \forall y F(x,y) \to F(x,v)$. Проделаем то же самое с тринадцатой аксиомой применительно к переменной y: $\vdash F(x,v) \to \exists w F(w,v)$. По правилу силлогизма найдем $\dfrac{\vdash \forall y F(x,y) \to F(x,v); \vdash F(x,v) \to \exists w F(w,v)}{\vdash \forall y F(x,y) \to \exists w F(w,v)}$. К полученной формуле применим сначала второе правило связывания квантором $\dfrac{\vdash A(x) \to G}{\vdash \exists x A(x) \to G}$, получим выводимую формулу $\vdash \exists x \forall y F(x,y) \to \exists w F(w,v)$;

затем первое правило связывания квантором $\dfrac{G \to A(x)}{G \to \forall x A(x)}$, тогда $\vdash \exists x \forall y F(x,y) \to \forall v \exists w F(w,v)$. Наконец, применив правило переименования связанных переменных, окончательно найдем $\vdash \exists x \forall y F(x,y) \to \forall y \exists x F(x,y)$.

К сожалению, обратное следование $\forall x \exists y F(x,y) \to \exists y \forall x F(x,y)$ не является выводимым. Формальное доказательство этого довольно громоздко, но сама секвенция легко проверяется, если ее применить, например, к натуральному ряду чисел.

Пусть $F(x,y) = \{$для всякого натурального числа x существует большее натуральное число $y\}$. Тогда $\forall x \exists y F(x,y) = \{$для всякого натурального числа x существует большее натуральное $y\}$. Это утверждение верно. $\exists y \forall x F(x,y) = \{$существует такое натуральное y, что каждое натуральное x меньше числа $y\}$. Это утверждение, очевидно, неверно.

- **Пример 5.** $\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x))$. Возьмем двенадцатую аксиому $\forall x F(x) \to F(y)$ и сделаем в ней следующую подстановку:

$$\int_{\forall x F(x), F(y)}^{\forall x(F(x)\to G(x)), F(y)\to G(y)} (\forall x F(x) \to F(y)) \equiv \vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (F(y) \to G(y)).$$

Исходная формула имеет вид импликации. Это значит, что посылка формулы должна быть выводимой, т. е. $\vdash \forall x(F(x) \to G(x))$, тогда по выведенному ранее правилу связывания квантором $\dfrac{\vdash G(x)}{\vdash \forall x G(x)}$ должна быть выводима и формула $\vdash F(x) \to G(x)$. Это обстоятельство оправдывает только что выполненную подстановку.

Далее по правилу простого заключения находим $\dfrac{\vdash \forall x(F(x) \to G(x)); \vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (F(y) \to G(y))}{\vdash F(y) \to G(y)}$. Воспользуемся теперь второй аксиомой исчисления предикатов $I_2 = (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ и сделаем в ней такую подстановку

$$\int_{A,B,C}^{\forall xF(x),F(y),G(y)} (I_2) \equiv \vdash (\forall xF(x) \to F(y)) \to ((F(y) \to G(y)) \to (\forall xF(x) \to G(y))).$$

Из полученной формулы по правилу простого заключения, примененного дважды, немедленно следует

$$\frac{\vdash \forall xF(x) \to F(y); \vdash (\forall xF(x) \to F(y)) \to ((F(y) \to G(y)) \to (\forall xF(x) \to G(y)))}{\vdash (F(y) \to G(y)) \to (\forall xF(x) \to G(y))},$$

$$\frac{\vdash F(y) \to G(y); \vdash (F(y) \to G(y)) \to (\forall xF(x) \to G(y))}{\vdash \forall xF(x) \to G(y)}.$$

Применим к последней выведенной формуле первое правило связывания квантором $\dfrac{G \to A(x)}{G \to \forall xA(x)}$, получим $\vdash \forall xF(x) \to \forall yG(y)$. Переименуем связанные переменные, тогда $\vdash \forall xF(x) \to \forall xG(x)$. Наконец, по теореме дедукции $\dfrac{F \vdash G}{\vdash F \to G}$ получим, что

$$\frac{\forall x(F(x) \to G(x)) \vdash \forall xF(x) \to \forall xG(x)}{\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall xF(x) \to \forall xG(x))}.$$

4.5. Эквивалентные формулы

Две формулы G и F называются *эквивалентными*, если $\vdash G \leftrightarrow F$.

Теорема 4.2. **Если в формуле исчисления предикатов G заменить любую часть эквивалентной формулой и если полученное вследствие этой**

замены выражение G' также является формулой и содержит все свободные предметные переменные формулы G, то G и G' эквивалентны.

Формулы, не содержащие знака импликации, и такие, что знак отрицания относится только к элементарным частям, называются *нормальными формами* исходной формулы. Например,

$$\overline{\exists x(A(x)\to B(x))}\equiv\overline{\exists x\left(\overline{A(x)}\vee B(x)\right)}\equiv\forall x\overline{\left(\overline{A(x)}\vee B(x)\right)}\equiv\forall x\left(\overline{\overline{A(x)}}\wedge\overline{B(x)}\right)\equiv$$
$$\equiv\forall x\left(A(x)\wedge\overline{B(x)}\right).$$

Знаки логических операций конъюнкции и дизъюнкции и кванторы существования и всеобщности называются *двойственными* друг другу. Формула G двойственна формуле F, если она может быть получена из F изменением каждого из символов $\wedge, \vee, \exists x, \forall x$ на двойственный. Например, формуле $\forall x\left(A\vee B(x)\wedge\left(B(y)\vee\overline{B(x)}\right)\right)$ двойственна следующая формула: $\exists x\left(A\wedge\left(B(x)\vee B(y)\wedge\overline{B(x)}\right)\right)$. Обратим внимание, что расстановка скобок в формуле изменилась в соответствии со старшинством логических операций; порядок же действий должен быть прежним. Еще для примера возьмем формулу $\forall x\exists y\left(A(x,y)\vee\forall zA(x,z)\wedge\exists z\overline{A(y,z)}\right)$. Для нее двойственной будет формула $\exists x\forall y\left(A(x,y)\wedge\left(\exists zA(x,z)\vee\forall z\overline{A(y,z)}\right)\right)$. Здесь появились новые скобки для сохранения прежнего порядка действий.

Порядок двойственности:

1. Для элементарной формулы двойственной является она сама.
2. Если G' двойственна G, а F' двойственна F, то для формулы $G\wedge F$ двойственной является формула $G'\wedge F'$, а для формулы $G\vee F$ двойственна $G'\vee F'$.
3. Если G' двойственна G, то для $\overline{G}$ двойственной формулой является $\overline{G}'$.
4. Если G' двойственна G, то для $\forall xG(x)$ (или $\exists xG(x)$) двойственной формулой будет $\exists xG'(x)$ (соответственно $\forall xG'(x)$).

Теорема 4.3. **Если формулы G и F эквивалентны, то двойственные им формулы тоже эквивалентны.**

Теорема 4.4. **Если переставить стоящие непосредственно друг за другом однородные кванторы, то формула при этом превратится в эквивалентную.**

Например, $\exists x\exists yF(x,y)\leftrightarrow\exists y\exists xF(x,y)$.

Нормальная форма формулы G называется *предваренной* (*приведенной*) *нормальной формой*, если в последовательности символов, образующих формулу, кванторы предшествуют всем остальным символам. В исчислении предикатов можно доказать те же теоремы, что и в исчислении высказываний. Эти теоремы (правила) позволяют производить преобразования эквивалентности предваренных формул, состоящие, например, в вынесении за скобки и внесении в скобки кванторов всеобщности и существования.

$$
\begin{aligned}
&1.\ \frac{\vdash \forall x(G \vee F(x))}{\vdash G \vee \forall x F(x)}; \\
&2.\ \frac{\vdash G \vee \forall x F(x)}{\vdash \forall x(G \vee F(x))}; \\
&3.\ \frac{\vdash \forall x(G \wedge F(x))}{\vdash G \wedge \forall x F(x)}; \\
&4.\ \frac{\vdash G \wedge \forall x F(x)}{\vdash \forall x(G \wedge F(x))}; \\
&5.\ \frac{\vdash \exists x(G \vee F(x))}{\vdash G \vee \exists x F(x)}; \\
&6.\ \frac{\vdash G \vee \exists x F(x)}{\vdash \exists x(G \vee F(x))}; \\
&7.\ \frac{\vdash \exists x(G \wedge F(x))}{\vdash G \wedge \exists x F(x)}; \\
&8.\ \frac{\vdash G \wedge \exists x F(x)}{\vdash \exists x(G \wedge F(x))}.
\end{aligned}
\qquad (4.5.1)
$$

В алгебре предикатов установлены преобразования равносильности. С их помощью доказывалось, что для каждой формулы алгебры предикатов существует равносильная ей нормальная формула. В исчислении предикатов можно аналогичным образом установить, что для всякой предваренной формулы (а следовательно, и для произвольной формулы) существует эквивалентная ей нормальная формула.

4.6. Дедуктивная эквивалентность

В исчислении предикатов существует еще одно понятие эквивалентности среди формул.

Две формулы G и F называются *дедуктивно эквивалентными* в исчислении, если из аксиом этого исчисления и формулы G посредством правил исчисления можно вывести формулу F и, обратно, из аксиом исчисления и формулы F выводима формула G. Для исчисления предикатов понятие эквивалентности формул и их дедуктивной эквивалентности не равнозначно.

Теорема 4.5. **Если G и F эквивалентны в исчислении предикатов, то они и дедуктивно эквивалентны.**

Доказательство.

Пусть G эквивалентно F, т. е. $\vdash G \leftrightarrow F$. Тогда $G \leftrightarrow F \equiv (G \to F) \wedge (F \to G)$ и по правилу удаления конъюнкции $\dfrac{\vdash A \wedge B}{\vdash A}$ получим $\dfrac{\vdash (G \to F) \wedge (F \to G)}{\vdash G \to F}$. Если к аксиомам исчисления присоединить формулу G, то по правилу простого заключения $\dfrac{\vdash G; G \to F}{\vdash F}$. Присоединив к аксиомам формулу F, таким же образом можно вывести формулу G. Отсюда следует, что эквивалентные формулы F и G являются также дедуктивно эквивалентными.

Обратное утверждение, однако, неверно. Рассмотрим две элементарные формулы A и B. Они будут дедуктивно эквивалентными. Действительно, если присоединить к аксиомам исчисления предикатов формулу A, то любая формула, в частности B, станет выводимой посредством подстановки в формулу A. То же самое будет, если мы присоединим к аксиомам формулу B. Отсюда следует, что формулы A и B дедуктивно эквивалентны в исчислении предикатов. Однако эти формулы, очевидно, не эквивалентны, т. к. формула $A \leftrightarrow B$ не является выводимой в исчислении высказываний и, следовательно, в исчислении предикатов.

Теорема 4.6. **Если две формулы дедуктивно эквивалентны, то из того, что одна из них тождественно истинна, следует, что и другая также тождественно истинна.**

Понятие дедуктивной эквивалентности полезно именно для исчисления предикатов. Исчисление высказываний, например, полно в узком смысле (теорема 2.9), поэтому либо формула исчисления высказываний выводима, либо ее присоединение к аксиомам исчисления ведет к противоречию. Если две формулы исчисления высказываний выводимы, то оии просто эквивалентны. Если же одна выводима, а другая нет, то оии не могут быть дедуктивно эквивалентными, т. к. присоединение выводимых формул к аксиомам исчисления новых выводимых формул не дает, поэтому другая невыводимая формула останется невыводимой.

В заключение без доказвтельства приведем две практически важные теоремы исчисления.

Теорема 4.7. **Любая выводимая в исчислении предикатов формула общезначима.**

Теорема 4.8 (теорема Геделя).* **Всякая тождествеиио ястинная формула логики предикатов иввяется выводимой в исчислении предикатов.**

4.7. Получение $\forall$-формул. Скулемовские функции

Как уже упоминалось в *разделе 3.6*, существуют $\forall$-формулы, $\exists$-формулы и скулемовские нормальные формы ($\forall\exists$-формулы). $\forall$-формулы и скулемовские нормальные формы используются в методе резолюций исчисления предикатов.

Пусть формула сигнатуры Σ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \exists y_1 \exists y_2 ... \exists y_m A(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ... y_m), \qquad (4.7.1)$$

где $A(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ... y_m)$ — бескванторная формула. Покажем, что существуют $f_1, f_2, ..., f_m$ — n-местные функциональные символы, не входящие в сигнатуру Σ, такие, что для сигнатуры $\Sigma' = \Sigma \cup \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ справедливо

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n \exists y_1 \exists y_2 ... \exists y_m A(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ... y_m) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow A(x_1, x_2, ..., x_n, f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_m(x_1, x_2, ..., x_n)).$$

Действительно, рассмотрим некоторый набор $(a_1, a_2, ..., a_n) \in M$, где M — область определеиия предиката A. Если для этого набора $\vdash \exists y_1 \exists y_2 ... \exists y_m A(a_1, a_2, ..., a_n, y_1, y_2, ... y_m)$, то в качестве $f_i(a_1, a_2, ..., a_n)$

* Курт Фридрих Гедель (1906–1978) — немецкий математик и логик.

возьмем такие значения b_i, что $\vdash A(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_m)$. Если же $\nvdash \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_m A(a_1, a_2, \ldots, a_n, y_1, y_2, \ldots y_m)$, то в качестве $f_i(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можно взять произвольные значения.

Рассмотрим теперь более общий случай

$$\exists x_1 \ldots \exists x_{n_1} \forall y_1 \ldots \forall y_{n_2} \exists z_1 \ldots \exists z_{n_3} \forall u_1 \ldots \forall u_{n_4} \exists v_1 \ldots$$
$$\ldots \exists v_{n_5} A(x_1, \ldots, y_1, \ldots, z_1, \ldots, u_1, \ldots, v_1, \ldots). \tag{4.7.2}$$

Поставим в соответствие каждой переменной, связанной квантором существования, какую-нибудь функцию, определенную на M, принимающую значения из M и зависящую только от переменных, связанных квантором всеобщности и предшествующих данному квантору существования. Если квантор существования стоит первым, то поставим ему в соответствие какое-нибудь значение переменной из области M. Для рассматриваемой формулы (4.7.2) переменным x_i будут поставлены в соответствие константы x_i^0, переменным z_i — функции $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$ и т. д., переменным v_i — функции $\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}, u_1, u_2, \ldots, u_{n_4})$. Если эти константы и функции таковы, что в результате замены ими соответствующих переменных в предикате $A(x_1, \ldots, y_1, \ldots, z_1, \ldots, u_1, \ldots, v_1, \ldots)$ полученный предикат

$$\vdash A\big(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1, \ldots, y_{n_2}, f_1(y_1, \ldots, y_{n_2}), \ldots, f_{n_3}(y_1, \ldots, y_{n_2}), u_1, \ldots, u_{n_4},$$
$$\varphi_1(y_1, \ldots, y_{n_2}, u_1, \ldots, u_{n_4}), \ldots, \varphi_{n_5}(y_1, \ldots, y_{n_2}, u_1, \ldots, u_{n_4})\big),$$

то используемые констаиты и функции

$$x_1^0, \ldots, x_n^0, f_1(y_1, \ldots, y_{n_2}), \ldots, f_{n_3}(y_1, \ldots, y_{n_2}), \varphi_1(y_1, \ldots, y_{n_2}, u_1, \ldots, u_{n_4}), \ldots,$$
$$\varphi_{n_5}(y_1, \ldots, y_{n_2}, u_1, \ldots, u_{n_4})$$

называются *разрешающими функциями* или *функциями Скулема* для формулы (4.7.2). Приведем несколько примеров.

- **Пример 1.** Рассмотрим следующую замкнутую предварениую форму $B = \exists x \forall y \exists z \forall u \exists v \forall w A(x, y, z, u, v, w)$. Обозначим значение x, которое существует в соответствии с первым квантором, константой a, отбросив при этом квантор существования: $B = \forall y \exists z \forall u \exists v \forall w A(a, y, z, u, v, w)$. Факт, что для всякого y может быть найдено значение для z, может быть выражен некоторой функцией $z = f(y)$. Тогда

  $$B = \forall y \forall u \exists v \forall w A(a, y, f(y), u, v, w).$$

Аналогично, тот факт, что для любых y, u найдется v, можно выразить скулемовской функцией $v = \varphi(y,u)$, которая подставляется вместо v: $B = \forall y \forall u \forall w A(a, y, f(y), u, \varphi(y,u), w)$.

Так как все переменные в исходной формуле должны быть связаны, кванторы существования исключены, а порядок кванторов всеобщности не влияет на значение формулы, то кванторы всеобщности отбрасываются в предположении, что все оставшиеся переменные ими связаны. Тогда $B = A(a, y, f(y), u, \varphi(y,u), w)$, где $a, f(y)$ и $\varphi(y,u)$ — скулемовские функции.

- **Пример 2.** Для формулы $\forall x \exists z \forall y \exists u((y > z \to y > x) \wedge (u < z) \wedge \overline{(u < x)})$ построить $\forall$-формулу. Здесь формула дана в конкретном виде и разрешающие функции тоже могут быть выражены конкретно. Конкретизируем лишь область определения основного предиката. Пусть $M = N$. Положим $z = f_1(x)$, тогда

$$\forall x \forall y \exists u((y > f_1(x) \to y > x) \wedge (u < f_1(x)) \wedge \overline{(u < x)}).$$

Аналогично $u = f_2(x, y)$ и

$$\forall x \forall y((y > f_1(x) \to y > x) \wedge (f_2(x, y) < f_1(x)) \wedge \overline{(f_2(x, y) < x)}).$$

Осталось подобрать вид функций f_1 и f_2 таким образом, чтобы формула $(y > f_1(x) \to y > x) \wedge (f_2(x, y) < f_1(x)) \wedge \overline{(f_2(x, y) < x)}$ была бы истинной при любых $x, y \in N$. Например, можно взять $f_1(x) = x + 1$, а $f_2(x) = x$. Тогда $(y > x + 1 \to y > x) \wedge (x < x + 1) \wedge \overline{(x < x)} \equiv 1 \wedge 1 \wedge 1 \equiv 1$.

- **Пример 3.** Для формулы $\forall x \forall y \exists z \exists t(P(x,t) \wedge \overline{P}(y, z))$ построить $\forall$-формулу.

Пусть $M = \{0,1\}$. $z = f_1(x, y)$, $\forall x \forall y \exists t(P(x,t) \wedge \overline{P}(y, f_1(x, y)))$; $t = f_2(x, y)$, $\forall x \forall y(P(x, f_2(x, y)) \wedge \overline{P}(y, f_1(x, y)))$. Здесь P — любой двухместный предикат, поэтому функции f_1 и f_2 необходимо выбрать так, чтобы формула $P(x, f_2(x, y)) \wedge \overline{P}(y, f_1(x, y))$ была тождественно истинной. Положим $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 1$, причем пусть $P(x,0) = 1$ и $P(x,1) = 1$. Тогда

$$P(x, f_2(x, y)) \wedge \overline{P}(y, f_1(x, y)) = P(x,1) \wedge \overline{P}(y,1) \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1.$$

- **Пример 4.** $\forall x\forall y\exists z\exists v\forall t\left(\overline{S}(x,y,y)\to\left(S(z,v,x)\wedge P(v,t,t)\right)\right)$, $M=N$, $S(x,y,z)=(x+y=z)$, $P(x,y,z)=(x\cdot y=z)$.

  Пусть $z=f_1(x,y)$, $v=f_2(x,y)$, тогда

  $$\forall x\forall y\forall t\left(\overline{S}(x,y,y)\to\left(S(f_1(x,y),f_2(x,y),x)\wedge P(f_2(x,y),t,t)\right)\right).$$

  Выберем $z=f_1(x,y)=\begin{cases}x-1, x>0,\\ 0, x=0,\end{cases}$ а $v=f_2(x,y)=1$. Тогда

  $$\overline{S}(x,y,y)\to\left(S(f_1(x,y),f_2(x,y),x)\wedge P(f_2(x,y),t,t)\right)\equiv\overline{(x+y=y)}\to$$
  $$\to\left((x-1+1=x)\wedge(1\cdot t=t)\right)\equiv\overline{(x+y=y)}\to 1\wedge 1\equiv 1.$$

4.8. Унификация формул исчисления предикатов

Для получения подходящих резольвент в методе резолюций исчисления предикатов применяются подстановки в формулы исчисления. Процесс этих подстановок называется *унификацией.*

Подстановкой сигнатуры Σ называется конечное множество вида $\{t_1|x_1,t_2|x_2,\ldots,t_n|x_n\}$ или $\{(t_1,x_1),(t_2,x_2),\ldots,(t_n,x_n)\}$, где t_i — терм сигнатуры Σ, отличный от x_i $(1\le i\le n)$, а все переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ различны. Подстановка, которая не содержит элементов, называется *пустой* и обозначается ε.

Если дана подстановка $\theta=\{g(z)|x,a|y\}$, то $g(z)|x$ означает, что повсюду переменная x заменяется функцией $g(z)$, а переменная y — предметной константой a. Пусть имеется атомарная формула (литерал) $P(x,y,z)$. Будем обозначать через $P\theta$ частный случай литерала P, получающийся при использовании подстановки θ. Результат применения подстановки θ к каждому из литералов множества литералов обозначим $\{P_i\}\theta$.

Определим композицию двух или нескольких подстановок. Пусть $\theta=\{t_1|x_1,t_2|x_2,\ldots,t_n|x_n\}$, $\lambda=\{q_1|y_1,q_2|y_2,\ldots,q_m|y_m\}$ — подстановки сигнатуры Σ. Тогда композиция $\theta\lambda$ получается из множества $\{t_1\lambda|x_1,t_2\lambda|x_2,\ldots,t_n\lambda|x_n,q_1|y_1,q_2|y_2,\ldots,q_m|y_m\}$ вычеркиванием всех элементов $t_j\lambda|x_j$, для которых $t_j\lambda=x_j$, и всех элементов $q_i|y_i$ таких, что

$y_i \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Например, пусть $\theta = \{f(y,z)|x, z|y\} = \{t_1|x_1, t_2|x_2\}$, $\lambda = \{a|x, b|y, c|z, d|w\} = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3, q_4|y_4\}$. Тогда

$$\{t_1\lambda|x_1, t_2\lambda|x_2, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3, q_4|y_4\} = \{f(b,c)|x, c|y, a|x, b|y, c|z, d|w\}.$$

Здесь $t_1\lambda = f(b,c) \neq x = x_1$, $t_2\lambda = c \neq y = x_2$, $y_1 = x \in \{x, y\}$, $y_2 = y \in \{x, y\}$, $y_3 = z \notin \{x, y\}$, $y_4 = w \notin \{x, y\}$. Следовательно, вычеркнуть надо $a|x$ и $b|y$, тогда композиция двух подстановок $\theta\lambda$ будет иметь вид $\{f(b,c)|x, c|y, c|z, d|w\}$.

Для подстановок справедливо следующее:

1. $(P\theta)\lambda = P\theta\lambda$, т. е. последовательное применение подстановки θ, а затем постановка λ приводит к тому же результату, что и применение композиции подстановок.
2. $(\theta\lambda)\delta = \theta(\lambda\delta)$, т. е. композиция подстановок ассоциативна.

Подстановка θ сигнатуры Σ называется *унификатором* для множества $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ формул сигнатуры, если $A_1\theta = A_2\theta = ... = A_n\theta$. Множество формул $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ сигнатуры Σ называется *унифицируемым*, если для него существует унификатор.

Наиболее общим или *простейшим унификатором* (НОУ) для множества формул $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ называется унификатор θ_P, если для любого другого унификатора θ существует подстановка θ_1 такая, что $\theta = \theta_P\theta_1$. Существует алгоритм, изываемый *алгоритмом унификации*, который приводит к наиболее общему унификатору для унифицируемого множества $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ или сообщает о невозможности это сделать, если множество формул не уиифицируемо.

Пусть $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ — непустое множество атомарных формул сигнатуры Σ. *Множеством рассогласований* в $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ называется множество отличающихся термов в первой слева позиции. Например, для множества $\{P(x, f(y, \underline{g(a)}), h(x)), P(x, f(y, \underline{x}), y)\}$ множеством рассогласований является $\{g(a), x\}$: в первой слева позиции первого литерала стоит терм $g(a)$, который отличается от соответствующей (первой слева) позиции второго литерала x.

Для множества $\{P(x,\underline{f(y,z)}),P(x,\underline{c}),P(x,\underline{f(y,f_1(z))})\}$ множество рассогласований — $\{f(y,z),c,f(y,f_1(z))\}$ (подчеркнуты в основном множестве формул).

Рассмотрим алгоритм унификации для двух литералов. На каждом шаге алгоритма подстановка применяется к каждому из литералов. Пусть P_0 — исходное непустое множество атомарных формул, $\theta_0=\varepsilon$ — пустая подстановка. Обозначим на k-м шаге: P_k — множество атомарных формул (литералов), D_k — множество рассогласований, θ_{P_k} — осуществляемая подстановка.

Приведем шаги алгоритма унификации для двух литералов. Шаг 1. $k=0$, $P_k=P_0$, $\theta_{P_k}=\varepsilon$. Шаг 2. Если P_k — одноэлементное множество, то конец алгоритма, НОУ$=\theta_{P_k}$. В противном случае находим множество рассогласований D_k. Шаг 3. Если D_k не содержит переменных, то конец алгоритма, множество исходных формул не унифицируемо. Если D_k содержит переменную x_k и терм t_k и если x_k входит в t_k, то конец алгоритма, множество литералов не унифицируемо. Шаг 4. Если существует $x_k,t_k\in T$ такие, что x_k — переменная, не входящая в t_k, то $\theta=\{t_k|x_k\}$, $\theta_{P_{k+1}}=\theta_{P_k}\theta=\theta_{P_k}\{t_k|x_k\}$ и $P_{k+1}=P_k\{t_k|x_k\}=P_k\theta$ или $P_{k+1}=P_0\theta_{P_{k+1}}$. Шаг 5. $k=k+1$, переход на начало второго шага.

Если количество литералов больше двух, то последовательно уиифицируется первый со вторым литералом, затем результат уиификации унифицируется с третьим литералом и так далее до тех пор, пока либо все множество литералов не будет унифицировано, либо получен ответ о том, что это множество не унифицируемо.

Теорема 4.9. **Если P_0 — конечное непустое унифицируемое множество атомарных формул, то алгоритм унификации всегда заканчивает работу на втором шаге и последняя подстановка θ_{P_k} будет НОУ для P_0.**

- **Пример 1.** $P_0=\{P(x,f(y,\underline{g(a)}),h(x)),P(x,f(y,\underline{x}),y)\}$.

  Шаг 1. $k=0$, P_0 — исходное множество, $\theta_{P_0}=\varepsilon$.

  Шаг 2. P_0 — неодноэлементное множество, $D_0=\{g(a),x\}$.

Шаг 3. $x \notin g(a)$.

Шаг 4. x — переменная, $g(a)$ — терм, x не входит в $g(a)$,

$\theta = \{g(a)|x\}, \theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{g(a)|x\}$.

$P_1 = P_0\theta_1 = \{P(g(a), f(y, g(a)), \underline{h(g(a))}), P(g(a), f(y, g(a)), \underline{y})\}$.

Шаг 5. $k = 1$, переход на второй шаг.

Шаг 2. P_1 — неодноэлементное множество, $D_1 = \{h(g(a)), y\}$.

Шаг 3. $y \notin h(g(a))$.

Шаг 4. $\theta = \{h(g(a))|y\}, \theta_2 = \theta_1\theta = \{g(a)|x, h(g(a))|y\}$,

$P_2 = P_1\theta_2 = \{P(g(a), f(h(g(a)), g(a)), h(g(a))), P(g(a), f(h(g(a)), g(a)),$
$h(g(a)))\} = \{P(g(a), f(h(g(a)), g(a)), h(g(a)))\}$.

Шаг 5. $k = 2$, переход на второй шаг.

Шаг 2. P_2 — одноэлементное множество, конец алгоритма

НОУ = $\theta_2 = \{g(a)|x, h(g(a))|y\}$.

- **Пример 2.** $P_0 = \{P(x, f(a, \underline{g(z)}, h(u))), P(x, f(a, \underline{u}, z))\}$.

Шаг 1. $k = 0$, P_0 — исходное множество, $\theta_{P_0} = \varepsilon$.

Шаг 2. P_0 — неодноэлементное множество, $D_0 = \{g(z), u\}$.

Шаг 3. $u \notin g(z)$.

Шаг 4. $\theta = \{g(z)|u\}, \theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{g(z)|u\}$,

$P_1 = P_0\theta_1 = \{P(x, f(a, g(z), \underline{h(g(z))})), P(x, f(a, g(z)), \underline{z})\}$.

Шаг 5. $k = 1$, переход на второй шаг.

Шаг 2. P_1 — неодноэлементное множество, $D_1 = \{h(g(z)), z\}$.

Шаг 3. $z \in h(g(z))$, конец алгоритма, множество P_0 не унифицируемо.

4.9. Метод резолюций в исчислении предикатов

Метод резолюций уже рассматривался нами в *разделе 2.7*. Его практическое использование в исчислении предикатов значительно сложнее, чем в исчислении высказываний. Теоретическая основа метода не изменилась. Для того чтобы доказать, что из некоторого множества формул исчисления предикатов логически следует данная формула, берут отрицание этой формулы и добавляют ее к исходному множеству. После чего доказывают противоречивость формулы, являющейся конъюнкцией формул исходиого множества и данной. По существу, это не что иное, как метод доказательства от противного.

В отличие от исчисления высказываний в исчислении предикатов в методе резолюций есть особенности. Для исключения кванторов исходное миожество формул необходимо приводить к $\forall$-форме и унифицировать. После того как получено множество дизъюнктов, осуществляется процесс опровержения, аналогичный исчислению высказываний: на каждом элементарном шаге доказательства используется правило, называемое *резолюцией*.

Основная идея метода состоит в следующем. Для того чтобы доказать, что формула A логически следует из некоторого множества формул $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, нужно доказать, что множество формул $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\overline{A}\}$ противоречиво, т. е. не существует интерпретации, в которой бы оио удовлетворялось. Множество Γ_1 противоречиво тогда и только тогда, когда формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$ является общезначимой, т. е. истинной в любой интерпретации.

Для того чтобы определить интерпретацию множества формул, необходимо задать область иитерпретации. Однако таких областей для формул исчисления предикатов может быть бесконечно много. Чаще всего в качестве области интерпретации берут множество H_Γ, называемое *универсумом Эрбрана**.

Теорема 4.10. **Если множество формул Γ неудовлетворимо иа H_Γ, то оно неудовлетворимо иа любой другой области интернретации.**

Универсум Эрбрана рекурсивно строится следующим образом.

1. Множество всех предметных констант из Γ принадлежит H_Γ. Если Γ не содержит ни одной предметной константы, то в H_Γ входит произвольная предметная константа, называемая любым именем.

* Жак Эрбран (1908–1931) — французский математик.

2. Если термы $t_i \in H_\Gamma, i = \overline{1,n}$ и f_j — какой-нибудь функциональный символ, зависящий от n переменных, и $f_j \in \Gamma$, то $f_j(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in H_\Gamma$. Например.

$$\Gamma = \{P(x) \vee Q(x,y), P(f(x), \overline{P}(f(x)) \vee \overline{R}(g(a)))\},$$

$$H_\Gamma = \{a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), g(g(a)), \ldots\};$$

$$\Gamma = \{P_1(c_1, f(c_2), f(c_3)), P_2(c_1), P_1(x, x, f(x)), \overline{P_1}(x, y, z) \vee P_3(x, z), \overline{P_2}(x) \vee$$

$$\vee P_1(y, z, u) \vee \overline{P_3}(x, u) \vee P_3(x, z), \overline{P_3}(c_1, c_3)\},$$

$$H_\Gamma = \{c_1, c_2, c_3, f(c_1), f(c_2), f(c_3), f(f(c_1)), \ldots\}.$$

Метод резолюций основывается на теореме Эрбрана.

Теорема 4.11 (теорема Эрбрана). **Множество дизъюнктов Γ невыполнимо тогда и только тогда, когда имеется конечное невыполнимое множество Γ_C константных частных случаев этих дизъюнктов на H_Γ.**

Таким образом, множество Γ невыполнимо, если можно найти такие подстановки констант из H_Γ вместо предметных переменных, при которых полученное множество дизъюнктов будет противоречивым.

Пусть B — дизъюнкт сигнатуры Σ вида $B = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \vee C$ или $B = \overline{A_1} \vee \overline{A_2} \vee \ldots \vee \overline{A_n} \vee C$, где A_i — атомарные формулы. Предположим, что множество $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ имеет НОУ θ_P. Тогда $A_1\theta_P \vee C\theta_P$ или $\overline{A_1}\theta_P \vee C\theta_P$ называется *склейкой* B.

Пусть B_1 и B_2 — два дизъюнкта, не имеющие общих переменных, A_1 и A_2 — атомарные формулы или отрицания атомарных формул в B_1 и B_2. Если A_1 и $\overline{A_2}$ имеют НОУ θ_P, то дизъюнкт, получаемый из формулы $B_1\theta_P \vee B_2\theta_P$ вычеркиванием $A_1\theta_P$ и $A_2\theta_P$, называется *бинарной резольвентой* B_1 и B_2, а формулы A_1 и A_2 — *отрезаемыми*. Если $B_1\theta_P = A_1$ и $B_2\theta_P = A_2$, то бинарная резольвента B_1 и B_2 равна нулю. Если формулы B_1 и B_2 имеют общие переменные, то перед нахождением их бинарной резольвенты в одной из формул общие переменные надо переименовать.

- **Пример 1.** $B_1 = \overline{P_1}(x) \vee P_2(x, c_1)$, $B_2 = P_1(c_2) \vee P_2(c_2, c_1)$. Формулы B_1 и B_2 общих переменных не имеют. Пусть

$$A_1 = \overline{P_1}(x),\ A_2 = P_1(c_2),\ \overline{A_2} = \overline{P_1}(c_2),\ \theta = \{c_2 | x\},$$

$$B_1\theta \vee B_2\theta = \overline{P_1}(c_2) \vee P_2(c_2, c_1) \vee P_1(c_2) \vee P_2(c_2, c_1).$$

Так как $A_1\theta = \overline{P_1}(c_2)$, $A_2\theta = P_1(c_2)$ вычеркнем их. Тогда бинарная резольвента B_1 и B_2 равна $P_2(c_2, c_1)$.

Резольвентой дизъюнктов B_1 и B_2 $res(B_1, B_2)$ называется одна из следующих:

1. Бинарная резольвента B_1 и B_2.
2. Бинарная резольвента склейки B_1 и B_2.
3. Бинарная резольвента B_1 и склейки B_2.
4. Бинарная резольвента склейки B_1 и склейки B_2.

- **Пример 2.** Найти все возможные резольвенты следующего множества формул

$$\left\{\overline{P_1}(x,z) \vee P_2(x), \overline{P_1}(x,z) \vee P_3(c), P_4(c), \overline{P_4}(x) \vee \overline{P_3}(x), P_1(x, f(x))\right\}.$$

Пусть $B_1 = \overline{P_1}(x,z) \vee P_3(c)$, $B_2 = P_1(x, f(x))$, $A_1 = \overline{P_1}(x,z)$,

$A_2 = P_1(x, f(x))$, $\overline{A_2} = \overline{P_1}(x, f(x))$, $\theta = \{f(x)|z\}$,

$B_1\theta \vee B_2\theta = \overline{P_1}(x, f(x)) \vee P_3(c) \vee P_1(x, f(x))$.

Бинарная резольвента B_1 и B_2 равна $P_3(c)$, $res(B_1, B_2) = P_3(c)$.

Аналогично, пусть $B_1 = \overline{P_1}(x,z) \vee P_3(c)$, $B_2 = P_4(x) \vee \overline{P_3}(x)$,

$A_1 = P_3(c)$, $A_2 = \overline{P_3}(x)$, $\overline{A_2} = P_3(x)$, $\theta = \{c|x\}$,

$B_1\theta \vee B_2\theta = \overline{P_1}(c,z) \vee P_3(c) \vee \overline{P_4}(c) \vee \overline{P_3}(c)$,

$res(B_1, B_2) = \overline{P_1}(c,z) \vee \overline{P_4}(c)$.

Пусть Γ — множество дизъюнктов. Резолютивный вывод C из Γ есть такая последовательность $C_1, C_2, \ldots, C_n$ дизъюнктов, что $C = C_n$ и каждый дизъюнкт C_i или принадлежит Γ, или является резольвентой дизъюнктов, предшествующих C_i.

Как уже упоминалось, для доказательства выводимости C из Γ можно показать, что множество $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\overline{C}\}$ является противоречивым. Этот способ доказательства основывается иа следующей теореме.

Теорема 4.12 (о полноте метода резолюций). **Если Γ — множество дизъюнктов, то множество замыканий всеобщности формул из Γ невыполнимо тогда и только тогда, когда существует резолютивный вывод нуля из Γ.**

- **Пример 3.** Проверить на противоречивость следующее множество формул: $\Gamma = \{P_1(c_1), \overline{P_2}(y) \vee P_3(c_1,y), \overline{P_1}(x) \vee \overline{P_4}(y) \vee \overline{P_3}(x,y), P_2(c_2), P_4(c_2)\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}$.

  $B_1 = F_1$, $B_2 = F_3$, $A_1 = P_1(c_1)$, $A_2 = \overline{P_1}(x)$, $\theta = \{c_1|x\}$,

  $B_1\theta \vee B_2\theta = P_1(c_1) \vee \overline{P_1}(c_1) \vee \overline{P_4}(y) \vee \overline{P_3}(c_1,y)$,

  $F_6 = res(F_1, F_3) = \overline{P_4}(y) \vee \overline{P_3}(c_1,y)$;

  $B_1 = F_2$, $B_2 = F_6$, $A_1 = P_3(c_1,y)$, $A_2 = \overline{P_3}(c_1,y)$, $\theta = \varepsilon$,

  $B_1\theta \vee B_2\theta = P_3(c_1,y) \vee \overline{P_2}(y) \vee \overline{P_4}(y) \vee \overline{P_3}(c_1,y)$,

  $F_7 = res(F_2, F_6) = \overline{P_2}(y) \vee \overline{P_4}(y)$;

  $B_1 = F_4$, $B_2 = F_7$, $A_1 = P_2(c_2)$, $A_2 = \overline{P_2}(y)$, $\theta = \{c_2|y\}$,

  $B_1\theta \vee B_2\theta = P_2(c_2) \vee \overline{P_2}(c_2) \vee \overline{P_4}(c_2)$, $F_8 = res(F_4, F_7) = \overline{P_4}(c_2)$;

  $res(F_5, F_8) = res(P_4(c_2), \overline{P_4}(c_2)) = 0$. Исходное множество дизъюнктов противоречиво.

- **Пример 4.**

  $\Gamma_1 = \{\forall x((P_1(x) \wedge \overline{P_2}(x)) \rightarrow \exists y(P_3(x,y) \wedge P_4(y))), \forall x(P_5(x) \rightarrow \overline{P_2}(x)),$ $\exists x(P_5(x) \wedge P_1(x) \wedge \forall y(P_3(x,y) \rightarrow P_5(y)))\}$. Проверим на противоречивость это множество, предварительно приведя все формулы к $\forall$-форме.

  $F_1 = \forall x((P_1(x) \wedge \overline{P_2}(x)) \rightarrow \exists y(P_3(x,y) \wedge P_4(y))) \equiv \forall x(\overline{(P_1(x) \wedge \overline{P_2}(x))} \vee$ $\vee \exists y(P_3(x,y) \wedge P_4(y))) \equiv \forall x \exists y((\overline{P_1}(x) \vee P_2(x) \vee P_3(x,y)) \wedge (\overline{P_1}(x) \vee P_2(x) \vee$ $\vee P_4(y)))$. Квантор существования опустим, введя скулемовскую функцию $y = f(x)$, которая по всякому x найдет для него значение y. Тогда получим $\forall$-формулу

  $\forall x((\overline{P_1}(x) \vee P_2(x) \vee P_3(x, f(x))) \wedge (\overline{P_1}(x) \vee P_2(x) \vee P_4(f(x))))$.

Теперь опустим знак квантора всеобщности, предполагая, что доказательство будет проведено для всякого фиксированного x. Аналогично,
$F_3 = \exists x(P_5(x) \wedge P_1(x) \wedge \forall y(P_3(x,y) \to P_5(y))) \equiv$
$\equiv \exists x \forall y(P_5(x) \wedge P_1(x) \wedge (\overline{P_3}(x,y) \vee P_5(y)))$. Опустим знак квантора существования, стоящий перед всей формулой, предположив, что доказательство будет проведено для некоторого фиксированного $x = a$, но т. к. x — любое значение, то оно будет справедливо для всех случаев. Тогда $\forall y(P_5(a) \wedge P_1(a) \wedge (\overline{P_3}(a,y) \vee P_5(y)))$. Отбросим теперь квантор всеобщности, рассуждая как в предыдущем случае.

$F_2 = \forall x(P_5(x) \to \overline{P_2}(x)) \equiv \forall x(\overline{P_5}(x) \vee \overline{P_2}(x))$.

Таким образом, множество дизъюнктов имеет вид
$\Gamma = \{\overline{P_1}(x) \vee P_2(x) \vee P_3(x, f(x)), \overline{P_1}(x) \vee P_2(x) \vee P_4(x), P_5(a), P_1(a), \overline{P_3}(a,y) \vee$
$\vee P_5(y), \overline{P_5}(x) \vee \overline{P_2}(x)\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\}$. Исследуем это множество на выполнимость с помощью метода резолюций.

Найдем $res(F_1, F_4)$. $A_1 = \overline{P_1}(x)$, $A_2 = P_1(x)$, $\theta = \{a|x\}$,

$F_1\theta \vee F_4\theta = \overline{P_1}(a) \vee P_2(a) \vee P_3(a, f(a)) \vee P_1(a)$,
$F_7 = res(F_1, F_4) = P_2(a) \vee P_3(a, f(a))$;

$res(F_5, F_7) = ?$ $A_1 = \overline{P_3}(a,y)$, $A_2 = P_3(a, f(a))$, $\theta = \{f(a)|y\}$,

$F_5\theta \vee F_7\theta = \overline{P_3}(a, f(a)) \vee P_5(f(a)) \vee P_2(a) \vee P_3(a, f(a))$,
$F_8 = res(F_5, F_7) = P_2(a) \vee P_5(f(a))$;

$res(F_6, F_8) = ?$ $A_2 = \overline{P_2}(x)$, $A_1 = P_2(a)$, $\theta = \{a|x\}$,

$F_6\theta \vee F_8\theta = P_2(a) \vee P_5(f(a)) \vee \overline{P_5}(a) \vee \overline{P_2}(a)$,
$F_9 = res(F_6, F_8) = \overline{P_5}(a) \vee P_5(f(a))$;

$res(F_2, F_4) = ?$ $A_1 = \overline{P_1}(x)$, $A_2 = P_1(a)$, $\theta = \{a|x\}$,

$F_2\theta \vee F_4\theta = \overline{P_1}(a) \vee P_2(a) \vee P_4(f(a)) \vee P_1(a)$,
$F_{10} = res(F_2, F_4) = P_2(a) \vee P_4(f(a))$;

$res(F_6, F_8) = ?$ $A_2 = \overline{P_2}(x)$, $A_1 = P_2(a)$, $\theta = \{a|x\}$,

$$F_6\theta \vee F_8\theta = \overline{P_5}(a) \vee \overline{P_2}(a) \vee P_2(a) \vee P_5(f(a)),$$

$$F_{11} = res(F_6, F_8) = \overline{P_5}(a) \vee P_5(f(a));$$

$$res(F_5, F_6) = ?\ A_2 = \overline{P_5}(x),\ A_1 = P_5(y),\ \theta = \{x|y\},$$

$$F_5\theta \vee F_6\theta = \overline{P_3}(a,x) \vee P_5(x) \vee \overline{P_5}(x) \vee \overline{P_2}(x),$$

$$F_{12} = res(F_5, F_6) = \overline{P_2}(x) \vee \overline{P_3}(a,x);$$

$$res(F_7, F_{12}) = ?\ A_2 = \overline{P_2}(x),\ A_1 = P_2(a),\ \theta = \{a|x\},$$

$$F_7\theta \vee F_{12}\theta = P_2(a) \vee P_3(a, f(a)) \vee \overline{P_2}(x) \vee \overline{P_3}(a,a),$$

$$F_{13} = res(F_7, F_{12}) = \overline{P_3}(a,a) \vee P_3(f, f(a)).$$

Нахождение других резольвент также не дает вывод нуля, следовательно, исходное множество выполнимо, т. е. в сигнатуре $\Sigma = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, f, a\}$ формулы из множества Γ_1 истинны.

- **Пример 5.** Докажем правильность рассуждения 3.4.11.

$$(\forall x(P(x) \to R(x)) \wedge \forall x(P(x) \to Q(x))) \to (\exists x P(x) \to \exists x(Q(x) \wedge R(x))).$$

По методу резолюций, чтобы $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A \equiv 1$, необходимо, чтобы $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \overline{A}\} \vdash$.

Преобразуем посылку и следствие основной формулы:

$$(\forall x(\overline{P(x)} \vee R(x)) \wedge \forall x(\overline{P(x)} \vee Q(x))) \equiv (\forall x(\overline{P(x)} \vee R(x)) \wedge (\overline{P(x)} \vee Q(x))).$$

$$\overline{\exists x P(x)} \vee \exists x(Q(x) \wedge R(x)) \equiv \forall x \overline{P(x)} \vee \exists x(Q(x) \wedge R(x)) \equiv \forall x \overline{P(x)} \vee$$

$$\vee \exists y(Q(y) \wedge R(y)) \equiv \forall x \exists y(\overline{P(x)} \vee (Q(y) \wedge R(y))).$$

Найдем теперь отрицание следствия импликации

$$\overline{\forall x \exists y(\overline{P(x)} \vee (Q(y) \wedge R(y)))} \equiv \exists x \forall y(P(x) \wedge (\overline{Q(y)} \vee \overline{R(y)})).$$

Квантор существования отбросим, подставив вместо предметной переменной x константу a. Отбросив теперь в посылке и следствии кванторы всеобщности и предположив, что доказательство проводится для любых значений предметных переменных, получим множество дизъюнктов

$$\Gamma_1 = \{\overline{P}(x) \vee R(x), \overline{P}(x) \vee Q(x), P(a), \overline{Q}(y) \vee \overline{R}(y)\} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}.$$

Для того чтобы доказать, что исходное рассуждение правильно, необходимо из Γ_1 получить резолютивный вывод нуля:

$F_5 = res(F_1, F_3) = R(a)$,

$F_6 = res(F_4, F_5) = \overline{Q(a)}$,

$F_7 = res(F_2, F_6) = \overline{P(a)}$,

$res(F_3, F_7) = 0$.

4.10. Практическое занятие № 10. Унификация формул. Метод резолюций в исчислении предикатов

4.10.1. Построить все попарные композиции $\theta_i\theta_j$ подстановок $\theta_1 = \{F_1(y)|x, F_2(x,z)|y, c_1|z\}$, $\theta_2 = \{F_2(F_1(x), y)|x, F_1(c_1)|y, F_1(z)|z\}$, $\theta_3 = \{F_2(c_1)|x, c_2|y, x|z\}$ и $\theta_4 = \{y|x, z|y, x|z\}$ сигнатуры $\Sigma = \{c_1, c_2, F_1, F_2\}$.

4.10.2. Определить, унифицируемо ли множество Γ. В случае унифицируемости найти наиболее общий унификатор:

а) $\Gamma = \{P(c, x, F_2(F_1(y))), P(z, F_2(z), F_2(u))\}$;

б) $\Gamma = \{P(F_1(c), F_2(x)), P(y, y)\}$;

в) $\Gamma = \{P(c, x), P(c, c)\}$;

г) $\Gamma = \{P(c, x, F(x)), P(c, y, y)\}$;

д) $\Gamma = \{F(u, F_1(x, y)), F(y, z), F(u, F_1(c, z))\}$.

4.10.3. Определить, имеют ли склейки следующие дизъюнкты. Если склейки имеются, найти их:

а) $P(x) \vee P(F(y)) \vee \overline{P_2}(x)$;

б) $P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_1(F(x))$;

в) $F_1(x) \vee F_2(y) \vee F_1(F_2(c)) \vee F_1(z) \vee F_2(z)$.

4.10.4. Найти все возможные резольвенты следующих пар дизъюнктов:

а) $P_1(x) \vee P_2(x), \overline{P_1}(c) \vee P_3(x)$;

б) $\overline{P_1}(x) \vee P_2(x,x), \overline{P_2}(c, F(c))$;

в) $P(a) \vee Q(x,b), \overline{P}(x) \vee Q(b,y)$.

4.10.5. Проверить, выполнимо ли множество формул:

а) $\begin{cases} F_1 = \forall x \forall y (P_1(x,y) \to P_2(x,y)) \\ F_2 = \forall x \forall y (P_2(x,y) \to P_3(x,y)) \\ F_3 = \exists x \exists y P_1(x,y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} F_1 = P_1(c_1, f(c_2), f(c_3)) \\ F_2 = P_2(c_1) \\ F_3 = P_1(x, x, f(x)) \\ F_4 = \overline{P_1}(x,y,z) \vee P_3(x,z) \\ F_5 = \overline{P_2}(x) \vee \overline{P_1}(y,z,u) \vee \overline{P_3}(x,u) \vee P_3(x,y) \vee P_3(x,z) \\ F_6 = \overline{P_3}(c_1, c_3); \end{cases}$

в) $F_1 = \overline{\forall x(P(x) \to \forall y(P(y) \to ((Q(x) \to \overline{Q}(y)) \vee \forall z P(z))))}$.

4.10.6. Проверить истинность следующих формул методом резолюций:

а) $((\forall z B(b,z,z) \vee \exists v \overline{A}(b,v,b)) \wedge (\forall u B(u,u,u) \vee \forall y \forall z A(y,y,z))) \to$
$\to ((\exists w B(w,c,w) \wedge \exists u A(u,u,u)) \vee (\exists w \forall u B(b,u,w) \wedge \exists z \forall x B(x,c,z)))$;

б) $((\forall u \exists w A(b,u,w) \vee B(c,c,c) \vee \exists w \forall u A(u,c,w) \vee \forall w B(b,w,w)) \wedge$
$\wedge (\forall w \exists u B(w,u,a))) \to (\exists u \overline{A}(u,c,a) \wedge \exists v \exists w B(w,v,w)) \vee$
$\vee ((\exists v \exists w B(b,v,w) \wedge \exists z A(z,c,z) \wedge \exists x \forall y B(y,x,a)))$;

в) $(\exists u A(u,b,c) \to (\exists v \exists w B(v,v,w) \to \exists v A(b,v,v))) \wedge (\exists y B(a,y,a) \vee$
$\vee \forall x A(b,x,x) \vee \forall x \forall u B(x,u,b)) \to ((\forall x A(x,x,c) \to \exists y \exists z A(b,y,z)) \vee$
$\vee B(a,a,b))$;

г) $(\exists x \forall y \exists z B(x,y,z)) \wedge (\exists u \forall y \forall x A(u,x,y) \vee \forall x \exists z B(x,a,z)) \wedge$
$\wedge (\forall z \exists x B(z,a,x) \to \forall u \exists v \forall w \overline{B}(u,v,w)) \to \exists u \exists v \forall w A(u,v,w) \wedge$
$\wedge \exists v \exists w \forall u A(w,v,u)$;

д) $(\forall u\forall v\forall wA(u,v,w)\vee\forall x\exists yB(x,b,y)\vee\forall u\forall vC(u,v,b))\wedge$

$\wedge(\exists x\overline{A}(x,a,b)\vee\forall y\exists zB(a,y,z)\vee\forall v\forall uC(v,u,a))\wedge$

$\wedge(\forall w\overline{B}(a,b,w))\to(\forall u\exists v\exists wC(u,v,w)\wedge\exists x\forall y\exists zC(x,y,z))$;

е) $(\exists y\forall zB(y,a,z)\to\forall u\forall vA(b,v,u))\wedge$

$\wedge(\forall u\forall vA(v,u,a)\vee\forall y\exists u\forall zB(u,y,z))\wedge(\forall zB(z,z,z))\to$

$\to(\exists yB(a,y,b)\wedge\exists x\forall y\exists zA(x,y,z))\vee\exists u\forall v\exists wA(u,v,w)$.

4.11. Некоторые проблемы аксиоматического исчисления предикатов

Разрешимость

Проблема, заключающаяся в отыскании алгоритма, решающего ту или иную серию однотипных задач, называется *алгоритмической проблемой разрешимости*. Неразрешимость алгоритмической проблемы означает, что такой алгоритм невозможен. Простейший пример проблемы разрешимости — проблема разрешимости алгебры логики, которая состоит в отыскании алгоритма, позволяющего для любой формулы алгебры логики установить, является ли она тождественно истинной, тождественно ложной или выполнимой. Для алгебры логики эта проблема решена.

Проблема разрешимости для исчисления предикатов, в отличие от исчисления высказываний, оказалась связанной с серьезными трудностями, зависящими от точного определения понятия алгоритма. После появления точного определения алгоритма появилась возможность доказать, что проблема разрешимости для исчисления предикатов неразрешима, т. е. необходимый в этой проблеме алгоритм невозможен (*см. теорему 3.8*).

Непротиворечивость и независимость

Противоречивым называется такое исчисление, в котором какая-либо формула доказуема вместе со своим отрицанием. Эта проблема для исчисления предикатов решается в положительном смысле. Для доказательства непротиворечивости достаточно обнаружить какую-нибудь невыводимую формулу в исчислеиии предикатов.

Можно показать, что всякой выводимой формуле исчисления предикатов соответствует выводимая формула исчнсления высказываний, для которого проблема непротиворечивости решена. Отсюда немедленно следует непротиворечивость исчисления предикатов. В самом деле, если бы исчисление предикатов было противоречиво, то в нем всякая формула была бы выводимой. В частности, была бы выводима формула A, состоящая из одной буквы. Но тогда A была бы выводима и в исчислении высказываний, что не верно.

Помимо непротиворечивости возникает вопрос о выводимости каждой аксиомы из остальных. Это вопрос независимости системы аксиом. Система аксиом исчислеиия предикатов — независимая система. Независимость аксиом говорит о том, что в системе нет лишних аксиом. Эту независимость можно установить посредством интерпретации. Метод интерпретаций, однако, приложим к вопросам независимости только в известных границах.

В *разделе 2.8* обсуждался вопрос независимости аксиом исчисления высказываний. Вопрос о независимости аксиом обычно ставится для непротиворечивых систем. В этом случае ограничиваются сведением независимости к вопросу о непротиворечивости данной системы аксиом.

Полнота в узком смысле

Логическая система называется полной в узком смысле, если нельзя без противоречия присоединить к ее аксиомам в качестве новой аксиомы никакую не выводимую в ней формулу так, чтобы полученная при этом система была бы непротиворечивой.

В отличие от исчисления высказываний, исчисление предикатов оказывается неполным в узком смысле. К его аксиомам можно присоединить без противоречия недоказуемую в нем формулу $\exists xF(x) \to \forall xF(x)$. Все предметы тождественны — таков содержательный смысл этой формулы.

Приведем для доказательства лишь соображения, носящие общий характер. Каждая выводимая формула исчислеиия высказываний имеет выводимый аналог в исчислеиии предикатов и может быть присоединена к аксиомам этого исчисления. Например, такая: $A \to A$. Она выводима в исчислении высказываний. Если область определения M предиката $F(x)$ состоит из одного элемента x, то $A \to A$ превращается в исчислении предикатов в формулу $\exists xF(x) \to \forall xF(x)$, которая будет истинной. Она не будет истинной, если M содержит больше, чем один элемент. Однако из общелогических положений иельзя заключить, что область M содержит более одного элемента. Таким образом, исчисление предикатов неполно в узком смысле.

Полнота в широком смысле

Логическая система полна в широком смысле, если любая тождественно истинная формула в нем доказуема. На основании теоремы Геделя проблема полноты в широком смысле решается для исчисления предикатов положительным образом.

Все выводимые формулы исчисления предикатов представляют собой тождественно истинные высказывания. Обратно, каждая тождественно истинная формула выводима в исчислении предикатов. Из этого ясно, что в исчислении предикатов нельзя вывести сколько-нибудь содержательное по существу высказывание, в частности, математическое. Однако если к аксиомам исчисления предикатов присоединить какие-либо невыводимые формулы в качестве новых аксиом, то получится другое исчисление, в котором выводимы, помимо тождественно истинных формул, и другие формулы. Средствами этого исчисления могут быть описаны различные математические дисциплины, например арифметика, теория чисел, геометрия, теория множеств. Любая дедуктивная система может быть выражена указанными средствами. При этом любая выбранная система аксиом должна быть внутренне непротиворечива и независима, т. е. каждая из аксиом должна быть не выводима из остальных.

Глава 5

Теория алгоритмов

5.1. Характерные черты алгоритма

Понятие алгоритма в математике прошло большой путь развития. Общее определение алгоритма, имеющее интуитивный характер, следующее.

Алгоритм — это общий, единообразный, точно установленный способ решения любой задачи из данной массовой проблемы. Таким образом, алгоритм всегда связан с решением массовой проблемы. Задачи такого класса отличаются друг от друга значениями входящих в них параметров. Примеры алгоритмов: извлечение квадратного корня, предельный переход, нахождение производной и т. п. Приведенное понятие алгоритма нестрогое. В нем встречаются слова, точный смысл которых не установлен, например "способ". Тем не менее даже при таком определении можно выделить некоторые характерные черты алгоритма:

1. *Дискретность*. Каждая последующая величина получается из значений предыдущих по определенному закону. Все величины получаются последовательно друг за другом.
2. *Детерминированность*. Между всеми величинами, получаемыми алгоритмом, существует жесткая причинная связь. Последующие значения зависят от предыдущих.
3. *Элементарность шагов алгоритма*. Закон получения последующей системы величин из предшествующей должен быть простым.
4. *Массовость*. Начальная система величин выбирается из некоторого множества. Начальные условия могут варьироваться в бесконечных пределах.
5. *Результативность*. Конечный результат всегда должен быть получен.

Слово "алгоритм" происходит от имени математика аль Хорезми[*] (ал Горезми — алгоритм). Интуитивное понятие алгоритма работает, когда речь идет

---

[*] Абу Джафар Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми (ок. 783–ок. 850) — арабский математик.

о найденном алгоритме решения конкретной задачи. Положение существенно меняется, если возникает алгоритмическая проблема, решение которой не найдено, и требуется установить, имеет ли она решение. В этом случае надо доказать либо существование алгоритма, либо его отсутствие. Первое можно сделать путем фактического описания процесса, решающего задачу. В этом случае достаточно и интуитивного понятия алгоритма, чтобы удостовериться в том, что описанный процесс есть алгоритм. Доказать несуществование алгоритма таким путем невозможно. Для этого необходимо точное формальное определение.

В уточнении понятия алгоритма выделяются три направления:

1. Уточнение понятия эффективно вычислимой функции. Этим занимались А. Черч и К. Гедель. В результате был выделен класс частично рекурсивных функций, имеющих строгое математическое определение.
2. Машинная арифметика. Здесь сущность понятия алгоритма раскрывается путем рассмотрения процессов, осуществляемых в вычислительной машине.
3. Направление, связанное с понятием нормальных алгоритмов из работ А. Маркова*.

Существование различных определений понятия алгоритма имеет и свои преимущества, т. к. для решения различных задач удобно использовать различные наиболее подходящие для этого случая определения.

Первое направление — уточнение понятия алгоритма — связано с точным описанием специального класса функций, называемых *рекурсивными*. Числовые функции, значения которых можно вычислить посредством алгоритма, называются *вычислимыми функциями*. Понятие алгоритма здесь не определено формально точно, поэтому понятие вычислимой функции оказывается интуитивным. Однако совокупность вычислимых функций, соответствующих условиям 1–5, т. е. удовлетворяющих характерным чертам алгоритма для многих процессов, оказалась одной и той же, легко описываемой в математических терминах. Эта точно описанная совокупность числовых функций, совпадающая с совокупностью всех вычислимых функций в самом широком понимании алгоритма, называется *совокупностью рекурсивных функций*.

Рекурсивные функции впервые описаны Геделем, затем в 1936 г. Черч пришел к такому же классу функций. Анализ идей, лежащих в основе определения рекурсивных функций, позволил Черчу высказать гипотезу о том, что класс рекурсивных функций тождественен классу всюду определенных вы-

---

* Андрей Андреевич Марков (1903–1979) — советский математик.

числимых функций. Эта гипотеза известна под именем *тезиса Черча*; доказать ее нельзя, т. к. понятие вычислимой функции точно не определено. В силу тезиса Черча вопрос о вычислимости функции равносилен вопросу о ее рекурсивности. Понятие рекурсивной функции строгое. Поскольку в алгоритмических проблемах речь обычно идет не об алгоритмах, а о вычислимости некоторых специальным образом подобранных, решающих проблему функциях, то можно строго доказать, что решающая конкретную задачу функция не может быть рекурсивной, а следовательно, не существует и алгоритма решения этой задачи. Именно этим путем Черч доказал неразрешимость алгоритмической проблемы логики предикатов.

Если первое направление уточняет понятие алгоритма через класс рекурсивных функций, то второе, связанное с машинной арифметикой, сначала уточняет понятие алгоритма, а затем определяет класс вычислимых функций. Это направление развито Постом и Тьюрингом*. Основная идея этого направления заключается в том, что алгоритмические процессы — это процессы, которые могут имитироваться на подходяще построенных машинах, которые описываются в точных математических терминах. В результате оказывается, что сложные процессы можно моделировать на простых устройствах. Всякий алгоритм может быть задан некоторой функциональной схемой и реализован в соответствующей машине Тьюринга. Эта гипотеза называется *тезисом Тьюринга*. Его также нельзя доказать по той же причине, что и тезис Черча. Все известные до сих пор алгоритмы могут быть заданы посредством тьюринговых функциональных схем.

Третье направление — *теория нормальных алгоритмов Маркова*.

Будем называть *алфавитом* $\mathbf{A}$ всякое непустое конечное множество символов; сами символы называются *буквами*. *Словом* в алфавите $\mathbf{A}$ называется всякая конечная последовательность букв этого алфавита. Простейшими действиями в нормальных алгоритмах Маркова являются последовательные замены вхождений подслов специального вида на другие слова. Нормальный алгоритм может переводить слово α в слово β, причем на множестве слов используемого алфавита слово β однозначно определяется этим алфавитом и словом α. Нормальный алгоритм может быть и не применим к слову α, если он не преобразует α ни в какое слово.

Основное положение об "универсальности" нормальных алгоритмов — *принцип нормализации*: любой алгоритм над конечным алфавитом $\mathbf{A}$ эквивалентен относительно $\mathbf{A}$ некоторому нормальному алгоритму над $\mathbf{A}$. Этот принцип подобен тезисам Черча и Тьюринга и недоказуем из-за неопреде-

* Алан Матисон Тьюринг (1912–1954) — английский математик.

ленности формального понятия алгоритма. На практике достаточно ограничиться алгоритмами, действующими на последовательностях натуральных чисел и выдающих в качестве значений также последовательности натуральных чисел. Действия нормальных алгоритмов Маркова похожи на действия машин Тьюринга.

В последующих разделах более подробно изучим класс рекурсивных функций и процессы, происходящие в машинах Тьюринга. Нормальные алгоритмы Маркова не будут рассматриваться.

5.2. Вычислимые, частично рекурсивные и общерекурсивные функции

Пусть функция y зависит от целочисленных аргументов $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ называется *эффективно вычислимой*, если существует алгоритм, позволяющий вычислять ее значения. Простейшие эффективно вычислимые функции:

1. $\lambda(x) = x + 1$ — оператор сдвига.
2. $O(x) = 0$ — оператор аннулирования.
3. $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$, $1 \le m \le n$ — оператор проектирования.

Рассмотрим функции $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и функцию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, а функцию $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определим равенством $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Ясно, что функция $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получена суперпозицией функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Очевидно, что если все функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ и φ всюду определены, то ψ — всюду определена. Функция ψ будет не всюду определена, если хотя бы одна из функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$ не всюду определена или если $f_1, f_2, \ldots, f_m$ всюду определены, но $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ где-то не определена и т. п.

Могут быть случаи, когда не все функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ зависят от всех n аргументов $x_1, x_2, \ldots x_n$. В этих случаях для получения суперпозиции используются фиктивные аргументы и функции $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Например,

$\psi(x,y,z)=\varphi(f_1(x),f_2(x,y,z),y,x)\Rightarrow\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$,

$f_1(x)=F_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z)=F_2(x,y,z)$,

$F_3(x,y,z)=I_3^2(x,y,z),\ F_4(x,y,z)=I_3^1(x,y,z)$, причем используется суперпозиция φ,F_1,F_2,F_3,F_4.

Примитивная рекурсия

Пусть имеются две функции $\varphi(x_2,x_3,\dots,x_n)$ и $\psi(x_1,x_2,\dots,x_{n+1}),n>1$. Определим новую функцию

$$\begin{cases} f(0,x_2,x_3,\dots,x_n)=\varphi(x_2,x_3,\dots,x_n),\\ f(y+1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\psi(y,f(y,x_2,x_3,\dots,x_n),x_2,x_3,\dots,x_n), \end{cases} \tag{5.2.1}$$

f зависит от n аргументов, φ от $n-1$, а ψ от $n+1$ аргумента.

Говорят, что функция f получена из φ и ψ по *схеме примитивной рекурсии*. Очевидно, что f интуитивно вычислима, если φ и ψ — интуитивно вычислимые функции. Действительно, пусть $x_1=a_1,x_2=a_2,\dots,x_n=a_n$. Тогда

$$f(0,a_2,a_3,\dots,a_n)=\varphi(a_2,a_3,\dots,a_n)=b_0,$$

$$f(1,a_2,a_3,\dots,a_n)=\psi(0,f(0,a_2,\dots,a_n),a_2,\dots,a_n)=\psi(0,b_0,a_2,\dots,a_n)=b_1,$$

$$f(2,a_2,a_3,\dots,a_n)=\psi(1,f(1,a_2,\dots,a_n),a_2,\dots,a_n)=\psi(1,b_1,a_2,\dots,a_n)=b_2 \text{ и т. д.}$$

В частности, для функции двух переменных $f(y,x)$ будем иметь

$\begin{cases} f(0,x)=\varphi(x)\\ f(y+1,x)=\psi(y,f(y,x),x)\end{cases}$. Если же аргумент у f всего один, то

$\begin{cases} f(0)=a\\ f(y+1)=\psi(y,f(y))\end{cases}$, где a — постоянная.

Говорят, что функция $f(y,x_2,x_3,\dots,x_n)$ получается из $\varphi(x_2,x_3,\dots,x_n)$ и $\psi(y,y_1,y_2,\dots,y_s,x_2,x_3,\dots,x_n)$ *возвратной рекурсией*, если она может быть задана схемой

$$\begin{cases} f(0,x_2,x_3,\dots,x_n)=\varphi(x_2,x_3,\dots,x_n),\\ f(y+1,x_2,x_3,\dots,x_n)=\psi\begin{pmatrix} y,f(\alpha_1(y+1),x_2,x_3,\dots,x_n),\dots\\ \dots,f(\alpha_s(y+1),x_2,x_3,\dots,x_n),x_2,x_3,\dots,x_n\end{pmatrix}, \end{cases}$$

где $\alpha_1(y+1)\le y,\ \alpha_2(y+1)\le y,\dots,\alpha_s(y+1)\le y$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ получается из функции $g(x)$ с помощью итерации, и обозначать $f(x) = ig(x)$, если $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x+1) = g(f(x)). \end{cases}$

Встает вопрос: для каждых ли частичных функций φ, ψ от $n-1$ и $n+1$ переменных существует функция f от n переменных, удовлетворяющая условиям примитивной рекурсии и будет ли такая функция единственной? Так как область определения функций есть множество всех натуральных чисел, то ответ на этот вопрос, очевидно, положителен. Формулы примитивной рекурсии символически изображают так: $f = R(\varphi, \psi)$ и рассматривают R как символ двухместной операции, определенной на множестве F функций.

Функция f называется просто *примитивно рекурсивной*, если ее можно получить конечным числом операций подстановки и примитивной рекурсии исходя лишь из простейших функций λ, O, I_m^n. Операции подстановки (суперпозиции) и примитивной рекурсии, будучи применены ко всюду определенным функциям, дают в результате снова всюду определенные функции. Поэтому все примитивно рекурсивные фуикции всюду определены.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена за конечное число шагов из простейших функций λ, O, I_m^n при помощи операции суперпозиции, схем примитивной рекурсии и операции минимизации.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *общерекурсивной*, если она частично рекурсивна и всюду определена.

- **Пример 1.** $\begin{cases} f(0, x) = x, \\ f(y+1, x) = f(y, x) + 1 \end{cases}$. При таком задании сразу видна $\varphi(x) = x$, ио $\psi(x, y, z)$ надо устанавливать. По определению примитивиой рекурсии

$$f(y+1, x) = \psi(y, f(y, x), x) = \left\langle \begin{matrix} x = z, \\ \psi(y, f(y, x), x) = \psi(y, f(y, z), z) \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= \psi(y, f(y, z), z) = \left\langle \begin{matrix} y = x, \\ \psi(y, f(y, z), z) = \psi(x, f(x, z), z) \end{matrix} \right\rangle = \psi(x, f(x, z), z) =$$

$$= \langle f(x, z) = y \rangle = \psi(x, y, z).$$

Но $f(y+1, x) = f(y, x) + 1 = \langle \text{так как } f(y, x) = y \rangle = y + 1$.

Итак, $\psi(x,y,z)=y+1$. Тогда числовые значения также легко находятся:

$f(0,0)=0,\ f(0,1)=1,\ f(0,2)=2,$

$f(1,0)=\psi(0,f(0,0),0)=\psi(0,0,0)=0+1=1,$

$f(2,0)=\psi(1,f(1,0),0)=\psi(1,1,0)=1+1=2,$

$f(3,0)=\psi(2,f(2,0),0)=\psi(2,2,0)=2+1=3,$

$f(1,1)=\psi(0,f(0,1),1)=\psi(0,1,1)=1+1=2,$

$f(2,1)=\psi(1,f(1,1),1)=\psi(1,2,1)=2+1=3,$

$f(3,1)=\psi(2,f(2,1),1)=\psi(2,3,1)=3+1=4,$

$f(1,2)=\psi(0,f(0,2),2)=\psi(0,\varphi(2),2)=\psi(0,2,2)=f(0,2)+1=2+1=3,$

$f(2,2)=\psi(1,f(1,2),2)=f(1,2)+1=\psi(1,3,2)=3+1=4,$

$f(3,2)=\psi(2,f(2,2),2)=f(2,2)+1=\psi(2,4,2)=4+1=5$ и т. д. Поместим эти значения в табл. 5.2.1. Интересно выяснить, как аналитически выглядит функция $f(y,x)$ в этом примере. Имеем $f(y+1,x)=f(y,x)+1$, следовательно, $f(y+z,x)=f(y,x)+z$. Положим $y=0$, тогда $f(z,x)=f(0,x)+z=x+z$, т. е. поскольку имя аргумента может быть любым, важно лишь его место в функции $f(y,x)=y+x$.

Таблица 5.2.1

Y	X		
	0	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5

Особенно отчетливо это видно из способа вычисления фуикции $f(y,x)$, а именно:

$$\left.\begin{aligned} f(0,x)&=x,\\ f(1,x)&=1+f(0,x)=1+x,\\ f(2,x)&=1+f(1,x)=1+(1+x)=2+x,\\ f(3,x)&=1+f(2,x)=1+(2+x)=3+x,\end{aligned}\right\} y+x.$$

- **Пример 2.** $\begin{cases} f(0,x)=0,\\ f(y+1,x)=f(y,x)+x\end{cases}$. Вычисляем функцию ψ по той же схеме $f(y+1,x)=\psi(y,f(y,x),x)=\left\langle \begin{aligned} x&=z,\\ y&=x,\\ f(x,z)&=y\end{aligned}\right\rangle=\psi(x,y,z)$.

Аналогично, т. к. $f(y+1,x)=f(y,x)+x$, то $f(y+1,x)=\psi(x,y,z)=y+z$. Числовые значения вычисляются таким же образом. Например, $f(0,0)=0,\ f(0,1)=0,\ f(0,2)=0$,

$f(1,0)=\psi(0,f(0,0),0)=\psi(0,0,0)=0+0=0$,

$f(2,0)=\psi(1,f(1,0),0)=\psi(1,0,0)=0+0=0$,

$f(3,0)=\psi(2,f(2,0),0)=\psi(2,0,0)=0+0=0$,

$f(1,1)=\psi(0,f(0,1),1)=\psi(0,0,1)=0+1=1$,

$f(2,1)=\psi(1,f(1,1),1)=\psi(1,1,1)=1+1=2$,

$f(3,1)=\psi(2,f(2,1),1)=\psi(2,2,1)=2+1=3$,

$f(1,2)=\psi(0,f(0,2),2)=\psi(0,0,2)=0+2=2$,

$f(2,2)=\psi(1,f(1,2),2)=\psi(1,2,2)=2+2=4$,

$f(3,2)=\psi(2,f(2,2),2)=\psi(1,4,2)=4+2=6$ (см. табл. 5.2.2).

Таблица 5.2.2

Y	X		
	0	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4
3	0	3	6

Значения функции f при других значениях аргументов x и y могут быть вычислены аналогично. Определим аналитический вид $f(x, y)$. В этом случае $f(y+1, x) = f(y, x) + x$, тогда $f(y+z, x) = f(y, x) + z \cdot x$. Опять полагая $y = 0$, получим $f(z, x) = f(0, x) + z \cdot x = 0 + z \cdot x = z \cdot x$, т. е. $f(y, x) = y \cdot x$. Таким же образом из способа вычисления $f(y, x)$ видна ее аналитическая структура

$$\begin{aligned} f(0,x) &= 0, \\ \left.\begin{aligned} f(1,x) &= x + f(0,x) = x + 0, \\ f(2,x) &= x + f(1,x) = x + x \cdot 1 = 2 \cdot x, \\ f(3,x) &= x + f(2,x) = x + x \cdot 2 = 3 \cdot x, \end{aligned}\right\} & \; y \cdot x. \end{aligned}$$

- **Пример 3.** Рассмотрим ту же самую функцию, что и в первом примере, только заданную несколько иначе. Пусть $S(x, y) = x + y$ и по схеме примитивной рекурсии она задана следующим образом:

  $$\begin{cases} x + 0 = x, \\ x + (y+1) = (x+y) + 1 \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{cases} S(x,0) = x \\ S(x, y+1) = S(x, y) + 1 \end{cases},$$

  где $S(x,0) = I_1^1(x)$, $S(x, y+1) = \lambda(S(x, y)) = \psi(x, y, z)$. Таким образом, функция двух переменных $S(x, y)$ получается по схеме примитивной рекурсии из функции одной переменной $\varphi(x) = I_1^1(x)$ и функции трех переменных $\psi(x, y, z) = \lambda(S(x, y))$ — оператора сдвига. Итак, вспомним еще раз определение примитивной рекурсии для функции двух аргументов (перевычисляемый рекурсивно аргумент стоит на втором месте): $\begin{cases} f(x,0) = \varphi(x) \\ f(x, y+1) = \psi(x, y, f(x, y)) \end{cases}$. В нашем случае

  $$\begin{cases} 0 + x = x = I_1^1(x) \\ f(x, y+1) = x + (y+1) = 1 + (x+y) = 1 + z \end{cases},$$

  ибо $f(x, y) = S(x, y) = x + y$, а третий аргумент функции ψ есть z, т. е. $\psi(x, y, z) = 1 + z$. Это то же самое, что и в первом примере; там при замене переменных формула $f(y, x)$ стояла на втором месте в списке аргументов формулы $\psi(y, f(y, x), x)$, поэтому ранее мы получили $\psi(x, y, z) = 1 + y$. При вычислении значений функции $f(x, y)$ это не должно сказываться. Вычислим опять несколько значений функции по формуле примитивиой рекурсии:

$f(0,0)=0,\ f(1,0)=1,\ f(2,0)=2,\ f(3,0)=3,$

$f(0,1)=f(0,0+1)=1+f(0,0)=\psi(x,y,z)=\psi(0,0,0)=1+0=1,$

$f(0,2)=f(0,1+1)=1+f(0,1)=\psi(0,1,1)=1+1=2,$

$f(0,3)=f(0,2+1)=1+f(0,2)=\psi(0,2,2)=1+2=3,$

$f(1,1)=f(1,0+1)=1+f(1,0)=\psi(x,y,z)=\psi(1,0,1)=1+1=2,$

$f(1,2)=f(1,1+1)=1+f(1,1)=\psi(1,1,2)=1+2=3,$

$f(1,3)=f(1,2+1)=1+f(1,2)=\psi(1,2,3)=1+3=4,$

$f(2,1)=f(2,0+1)=1+f(2,0)=\psi(2,0,2)=1+2=3$ и т. д. (табл. 5.2.3).

Таблица 5.2.3

Y	X			
	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Получена та же таблица, что и в первом примере, только повернутая на 90° по отношению к первоначальной.

- **Пример 4.** Доказать общерекурсивность функции $P(x,y)=x\cdot y$.

Зададим эту функцию следующей схемой примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} P(x,0)=0\cdot x=0=O(x) \\ P(x,y+1)=x\cdot(y+1)=x\cdot y+x=x+P(x,y)=S(x,P(x,y)), \end{cases}$$

т. е. $P(x,y)$ получается по схеме примитивной рекурсии из функций $O(x)$ и $S(x,y)=x+y$, которые общерекурсивны и, следовательно, функция $P(x,y)$ также общерекурсивна. Так как используемое здесь определение примитивной рекурсии имеет вид $\begin{cases} f(x,0)=O(x)=0 \\ f(x,y+1)=\psi(x,y,f(x,y)) \end{cases}$, а $P(x, y)$ определена как $\begin{cases} x \cdot 0 = O(x) \\ x \cdot (y+1) = x \cdot y + x \end{cases}$, то вид функции ψ будет следующий: $f(x, y+1) = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = x + z = \psi(x, y, z)$. Расчет ее значений даст такие же результаты, что во втором примере.

- **Пример 5.** Доказать общерекурсивность функции $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Функцию $\operatorname{sgn}(x)$ можно определить с помощью простейшей рекурсии таким образом:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(0) = 0, \\ \operatorname{sgn}(y+1) = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \operatorname{sgn}(0) = O(x), \\ \operatorname{sgn}(y+1) = C_1(y) \end{cases}, \text{ где } C_1(y) \equiv 1.$$

Тогда по определению $\operatorname{sgn}(x)$ общерекурсивна.

- **Пример 6.** Пусть дана функция $G(x, y) = x^y$. Определим ее по схеме примитивной рекурсии $\begin{cases} x^0 = 1, \\ x^{y+1} = x^y \cdot x \end{cases}$ или $\begin{cases} G(x, 0) = C_1(x), \\ G(x, y+1) = P(x, G(x, y)) \end{cases}$.

Таким образом, функция $G(x, y)$ может быть получена по схеме примитивной рекурсии из общерекурсивных функций P и C_1, следовательно, она сама является общерекурсивной. Определим функцию ψ. Так как

$$\begin{cases} f(x, 0) = C_1(x) = 1, \\ f(x, y+1) = \psi(x, y, f(x, y)) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^0 = 1, \\ x^{y+1} = x^y \cdot x, \end{cases}$$

то $f(x, y+1) = x^{y+1} = x^y \cdot x = x \cdot x^y = x \cdot z = x \cdot f(x, y) = \psi(x, y, z)$.

Вычислим таблицу значений этой функции для $x = 0, 1, 2,\ y = 0, 1, 2, 3$.

$f(0,0) = 0^0 = 1,\ f(1,0) = 1^0 = 1,\ f(2,0) = 2^0 = 1,$

$f(1,1) = f(1,0+1) = \psi(1,0,1) = 1 \cdot 1 = 1,$

$f(1,2) = f(1,1+1) = \psi(1,1,1) = 1 \cdot 1 = 1,$

$f(1,3) = f(1,2+1) = \psi(1,2,1) = 1 \cdot 1 = 1,$

$f(2,1) = f(2,0+1) = \psi(2,0,1) = 2 \cdot 1 = 2,$

$f(2,2) = f(2,1+1) = \psi(2,1,2) = 2 \cdot 2 = 4,$

$f(2,3) = f(2,2+1) = \psi(2,2,4) = 2 \cdot 4 = 8$ и т. д.

- **Пример 7.** Функция $x!$ удовлетворяет равенствам $\begin{cases} 0! = 1, \\ (y+1)! = y!(y+1) \end{cases}$ или $\begin{cases} 0! = C_1(x) = 1, \\ (y+1)! = I_3^1(P(y!, \lambda(y)), x, y) \end{cases}$, т. е. функция $x!$ может быть получена по схеме примитивной рекурсии из общерекурсивных функций C_1 и $I_3^1(P(y!, y+1), x, y)$, следовательно, $x!$ общерекурсивна. Определим аналитический вид функции ψ. Как и в предыдущем случае,

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(y+1) = \psi(y, f(y)) \end{cases} \to \begin{cases} 0! = 1, \\ (y+1)! = y!(y+1), \end{cases}$$

т. е. $f(y+1) = y!(y+1) = (y+1)y! = (y+1)\cdot f(y) = (y+1)\cdot z = \psi(x, y, z)$.

Вычислим теперь несколько последовательных значений $f(0) = 1$,

$f(1) = f(0+1) = \psi(y, z) = \psi(0, f(0)) = \psi(0,1) = (0+1)\cdot 1 = 1$,

$f(2) = f(1+1) = \psi(y, z) = \psi(1, f(1)) = \psi(1,1) = (1+1)\cdot 1 = 2$,

$f(3) = f(2+1) = \psi(y, z) = \psi(2, f(2)) = \psi(2,2) = (2+1)\cdot 2 = 6$ и т. д.

- **Пример 8.** Какая функция получается из φ и ψ с помощью схемы примитивной рекурсии, если $\varphi(x) = x$, $\psi(x, y, z) = z^x$? По определению $\begin{cases} f(x,0) = x, \\ f(x, y+1) = z^x. \end{cases}$

Итак, искомая функция $f(x, y)$ задана схемой примитивной рекурсии. Вычислим по этой схеме последовательно несколько значений данной функции $\begin{cases} f(x,0) = x, \\ f(x,1) = f(x,0+1) = \psi(x,0, f(x,0)) = \psi(x,0,x) = x^x \end{cases}$, далее первую строку можно опустить.

$$f(x,2) = f(x,1+1) = \psi(x,1, f(x,1)) = \psi(x,1,x^x) = (x^x)^x = x^{x^2},$$

$$f(x,3) = f(x,2+1) = \psi(x,2, f(x,2)) = \psi\left(x,1,x^{x^2}\right) = \left(x^{x^2}\right)^x = x^{x^2 \times x} = x^{x^3}$$

и т. д. Ясно, что $f(x, y) = x^{x^y}$. Вычислим некоторые числовые значения. $f(2,0) = 2$, тогда

$f(2,1) = f(2,0+1) = \psi(2,0, f(2,0)) = \psi(2,0,2) = z^x = 2^2 = 4$,

$$f(2,2)=f(2,1+1)=\psi(2,1,f(2,1))=\psi(2,1,4)=z^x=4^2=16,$$
$$f(2,3)=f(2,2+1)=\psi(2,2,f(2,2))=\psi(2,1,16)=z^x=16^2=256.$$

- **Пример 9.** Какая функция получается из φ и ψ с помощью схемы примитивной рекурсии, если $\varphi(x)=x$, $\psi(x,y,z)=x^z$?

Задача решается аналогично предыдущей. Распишем схему примитивной рекурсии по форме $\begin{cases} f(x,0)=x, \\ f(x,y+1)=\psi(x,y,f(x,y))=x^z \end{cases}$. Тогда

$$\begin{cases} f(x,0)=x, \\ f(x,1)=f(x,0+1)=\psi(x,0,f(x,0))=\psi(x,0,x)=x^x. \end{cases}$$

Аналогичные вычисления дают

$$f(x,2)=f(x,1+1)=\psi(x,1,f(x,1))=\psi\left(x,1,x^x\right)=x^z=(x)^{x^x},$$
$$f(x,3)=f(x,2+1)=\psi(x,1,f(x,2))=\psi\left(x,1,(x)^{x^x}\right)=x^z=(x)^{(x)^{x^x}}$$

и т. д. Очевидно, что $f(x,y)=x^{\underbrace{x^{x^{\dots x}}}_{y\text{ раз}}}$.

- **Пример 10.** В области натуральных чисел разность $x-y$ естественно считать двухместной функцией от x и y, определенной лишь для $x>y$, т. к. отрицательные числа не входят в рассматриваемую область. Но примитивно рекурсивные функции должны быть всюду определены. Поэтому в теории примитивно рекурсивных функций вместо обычной вводят усеченную разность, обозначаемую символом $\dot{-}$ и определяемую так: $x\dot{-}y=\begin{cases} x-y, & x\ge y, \\ 0, & x<y. \end{cases}$ Например, $5\dot{-}3=2$, $3\dot{-}5=0$, $\left(x\dot{-}y\right)\dot{-}z=x\dot{-}(y+z)$ и т. д. Функция $x\dot{-}1$ удовлетворяет примитивно рекурсивной схеме $\begin{cases} 0\dot{-}1=0=O(x), \\ (x+1)\dot{-}1=x=I_2^1(x,y). \end{cases}$ То же

наблюдается при любых x и y $\begin{cases} x \dot{-} 0 = x = I_2^1(x, y), \\ x \dot{-} (y+1) = \left(x \dot{-} y \right) \dot{-} 1. \end{cases}$ По определению

$$\begin{cases} f(x,0) = x, \\ f(x, y+1) = x \dot{-} (y+1) = \left(x \dot{-} y \right) \dot{-} 1 = \\ = f(x,y) \dot{-} 1 = \psi(x, y, f(x,y)) = z \dot{-} 1 \end{cases}$$

. Итак, $\psi(x, y, z) = z \dot{-} 1$.

Вычислим несколько значений этой функции. $f(0,0) = 0 \dot{-} 0 = 0$,

$f(1,0) = 1 \dot{-} 0 = 1$, $f(2,0) = 2 \dot{-} 0 = 2$,

$f(0,1) = 0 \dot{-} (0+1) = \left(0 \dot{-} 0 \right) \dot{-} 1 = 0 \dot{-} 1 = 0$ и т. д. Например,

$$f(1,1) = 1 \dot{-} (0+1) = \left(1 \dot{-} 0 \right) \dot{-} 1 = \psi(1,0, f(1,0)) = \psi(1,0,1) = z \dot{-} 1 = 1 \dot{-} 1 = 0,$$

$$f(1,2) = 1 \dot{-} (1+1) = \left(1 \dot{-} 1 \right) \dot{-} 1 = \psi(1,1, f(1,1)) = \psi(1,1,0) = z \dot{-} 1 = 0 \dot{-} 1 = 0,$$

$$f(1,3) = 1 \dot{-} (2+1) = \left(1 \dot{-} 2 \right) \dot{-} 1 = \psi(1,2, f(1,2)) = \psi(1,2,0) = z \dot{-} 1 = 0 \dot{-} 1 = 0,$$

$$f(2,1) = 2 \dot{-} (0+1) = \left(2 \dot{-} 0 \right) \dot{-} 1 = \psi(2,0, f(2,0)) = \psi(2,0,2) = z \dot{-} 1 = 2 \dot{-} 1 = 1,$$

$$f(3,1) = 3 \dot{-} (0+1) = \left(3 \dot{-} 0 \right) \dot{-} 1 = \psi(3,0, f(3,0)) = \psi(3,0,3) = z \dot{-} 1 = 3 \dot{-} 1 = 2,$$

$$f(2,2) = 2 \dot{-} (1+1) = \left(2 \dot{-} 1 \right) \dot{-} 1 = \psi(2,1, f(2,1)) = \psi(2,1,1) = z \dot{-} 1 = 1 \dot{-} 1 = 0.$$

Операция минимизации

Пусть дана функция $f(x, y)$, причем x, y, f принимают лишь натуральные значения. Решим задачу отыскания для данной функции и фиксированного x наименьшего из тех y, при которых $f(x, y) = b$. Результат — функция от x, т. е. $\varphi(x) = \mu_y[f(x, y) = b]$. Читается: "наименьшее y такое, что $f(x, y) = b$". Для функции n переменных μ-оператор определяется аналогично $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_y[f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = b]$. Переход от $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ к $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ и называется μ-оператором. Функция $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ легко считается по следующей схеме.

1. Полагаем $y = 0$, находим $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = b$, то $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, если нет, то переход к следующему шагу.
2. Вычисляем $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n, 1) = b$, то $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$, иначе переход на второй шаг и т. д.

Функция $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ считается *неопределенной*, если окажется, что для всех y $f(x_1, x_2, ..., x_n, y) \neq b$ или для какого-то y $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ не определено.

Описанный процесс нахождения значения выражения $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_y[f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = b]$ будет продолжаться бесконечно в следующих случаях:

- значение $f(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$ не определено;
- значения $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ для $y = 0, 1, ..., a-1$ определены и отличны от b, а значение $f(x_1, x_2, ..., x_n, a)$ не определено;
- значения $f(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ определены для всех $y = 0, 1, 2, ...$ и отличны от b.

Во всех этих случаях значение выражения $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_y[f(x_1, x_2, ..., x_n, y) = b]$ считается неопределенным. В остальных случаях описанный процесс обрывается и дает наименьшее решение $y = a$ уравнения минимизации. Например, вернемся к уже рассмотренной функции

$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ Тогда $\mu_x[\operatorname{sgn}(x)=1]=1$, т. к. если $x=0$, $\operatorname{sgn}(0)=0\neq 1$, то необходим переход на следующий шаг. Далее $x=1$, $\operatorname{sgn}(1)=1$, следовательно, $\mu_x[\operatorname{sgn}(x)=1]=1$.

Рассмотрим еще один пример. Очевидно, что $\mu_y\left[y\dot{-}x=0\right]=0$, т. к. первым решением уравнения $y\dot{-}x=0$ по переменной y является значение $y=0$, ибо $0\dot{-}x=0$. Итак, на первом шаге задача решена, и $\mu_y\left[y\dot{-}x=0\right]=0$.

Значение выражения $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mu_y[f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=b]$ есть функция от аргументов $x_1,x_2,\ldots,x_n,b$. Эту функцию символически обозначают M_f. Если заданная фуикция одноместная, то функцию M_f часто обозначают через f^{-1} и называют обращением функции f или обратной фуикцией.

Итак, $f^{-1}(x)=\mu_y[f(y)=x]$. Например, пусть опять $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Тогда $f^{-1}(x)=\operatorname{sgn}^{-1}(x)=\mu_y[\operatorname{sgn}(y)=x]$ или $f^{-1}(0)=\operatorname{sgn}^{-1}(0)=\mu_y[\operatorname{sgn}(y)=0]=0$, $f^{-1}(1)=\operatorname{sgn}^{-1}(1)=\mu_y[\operatorname{sgn}(y)=1]=1$, $f^{-1}(2)=\operatorname{sgn}^{-1}(2)=\mu_y[\operatorname{sgn}(y)=2]$ не определено, т. е. $\operatorname{sgn}^{-1}(x)=\begin{cases}x, & x=0{,}1,\\ \text{не определено, если } x>1.\end{cases}$ Следует помнить, что половина графика функции $\operatorname{sgn}(x)$ для $x<0$ отброшена, т. к. рассматривается лишь функция целочисленного аргумента при $x\geq 0$.

С учетом определения операции минимизации очевидно, что все примитивно рекурсивные функции частично рекурсивны, а класс частично рекурсивных функций шире класса примитивно рекурсивных функций, т. к. все примитивно рекурсивные функции всюду определены, а среди частично рекурсивных встречаются и не всюду определенные фуикции, например $\operatorname{sgn}^{-1}(x)$, кроме того, есть и нигде не определенные функции.

Уже из разобранных примеров видно, что многие числовые функции примитивно рекурсивны. Понятие же частично рекурсивной функции — одно из главных понятий теории алгоритмов. Каждая частично рекурсивная функция вычислима путем определенной процедуры механического характера, которая несомненно отвечает нашему интуитивному представлению об алгоритмах. С другой стороны, какие бы классы точно "очерченных алгоритмов" до сих пор фактически ни строились, во всех случаях неизменно оказывалось, что числовые функции, вычислимые посредством алгоритмов этих классов, были частично рекурсивными. Поэтому ныне общепринятой является следующая естественнонаучная гипотеза, обычно формулируемая как тезис Черча.

Тезис Черча. **Каждая интуитивно вычислимая функция является частично рекурсивной.**

Эту гипотезу нельзя доказать, но можно опровергнуть, построив хотя бы один контрпример. Пока таких примеров построено не было.

Как мы уже видели, операции подстановки (суперпозиции) и примитивной рекурсии, произведенные над примитивно рекурсивными функциями, дают в качестве результата снова примитивно рекурсивные функции. Эти свойства сохраняются и при следующих операциях.

Теорема 5.1. **Пусть n-местная функция $\tilde{\varphi}$ примитивно рекурсивна. Тогда n-местная функция f, определяемая равенством $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{x_n} \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, i)$, также примитивно рекурсивна.**

Так как все переменные в f и $\tilde{\varphi}$ пробегают целочисленные значения, то из последнего равенства вытекает следующее:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y+1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) + \tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y+1). \end{cases}$$

Эта схема определения функции f похожа на схему примитивной рекурсии при $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Действительно, схема по определению имела вид

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y+1) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)). \end{cases}$$

Тогда предыдущую схему можно формально свести к последней, если положить $\tilde{\varphi} = \varphi$, $\psi(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, y, z) = z + \tilde{\varphi}(x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}, y+1)$.

Теорема 5.2. **Если n-местная функция φ примитивно рекурсивна, то n-местная функция, определенная формулой** $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \prod_{i=0}^{x_n} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, i)$, **также примитивно рекурсивна.**

Это определение приводит к следующей схеме:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y+1) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y) \cdot \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y+1). \end{cases}$$

В этом случае говорят, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ получается из функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ операцией мультиплицирования.

Теорема 5.3 (о мажорируемых неявных функциях). **Пусть** $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$, $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **— такие примитивно рекурсивные функции, что уравнение** $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ **для каждых значений** $x_1, x_2, \dots, x_n$ **имеет по крайней мере одно решение и** $\mu_y[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0] \le \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **для любых** $x_1, x_2, \dots, x_n$. **Тогда функция** $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_y[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0]$ **также примитивно рекурсивна.**

5.3. Примитивная рекурсивность некоторых арифметических функций

Проверим, что некоторые обычные арифметические функции, связанные с отношениями делимости и простоты натуральных чисел, являются примитивно рекурсивными.

1. Возьмем $\left[\frac{x}{y}\right]$ — частное от деления x на y и определим функцию $\mathrm{rest}(x, y)$ — остаток от деления x на y. Чтобы иметь дело с всюду определенными функциями, дополнительно положим, что $\left[\frac{x}{0}\right] = x$, $\mathrm{rest}(x, 0) = x$ для $\forall x \in N$.

   Если функции так определены, то $\mathrm{rest}(x, y) = x \dot{-} \left(y \cdot \left[\frac{x}{y}\right]\right)$. Действительно, пусть, например, $x = 5$, $y = 3$, тогда $\left[\frac{x}{y}\right] = \left[\frac{5}{3}\right] = 1$,

$y\cdot\left[\frac{x}{y}\right]=3\cdot 1=3$, $x\dot{-}\left(y\cdot\left[\frac{x}{y}\right]\right)=5\dot{-}3=2$. По теоремам 5.1–5.3 из примитивной рекурсивности функции $\left[\frac{x}{y}\right]$ будет вытекать и примитивная рекурсивность функции $\mathrm{rest}(x,y)$.

При $y>0$ $\left[\frac{x}{y}\right]=n$ удовлетворяет соотношению $ny\le x<(n+1)y$. Можно проверить, что n равно числу нулей в последовательности $1\cdot y\dot{-}x$, $2\cdot y\dot{-}x$, $3\cdot y\dot{-}x,\ldots$, $x\cdot y\dot{-}x$. Например, прн $x=5$, $y=3$,

$n=1$ и $3\dot{-}5=0$, $6\dot{-}5=1$, $9\dot{-}5=4$, $12\dot{-}5=7$, $15\dot{-}5=10$.

Введем функцию $\overline{\mathrm{sgn}}(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x>0\end{cases}$, дополнительную к функции $\mathrm{sgn}(x)$ (дополнительная к "половинке" функции, определенной для целых положительных аргументов). Тогда для $y>0$ $\left[\frac{x}{y}\right]=\sum\limits_{i=1}^{x}\overline{\mathrm{sgn}}\left(iy\dot{-}x\right)$. В нашем примере $\left[\frac{x}{y}\right]=1+0+0+0+0=1$. Так как функция $\overline{\mathrm{sgn}}\left(iy\dot{-}x\right)$, стоящая под знаком суммы, примитивно рекурсивна, то на основании первой теоремы заключаем, что функция $\left[\frac{x}{y}\right]$, а вместе с ней и функция $\mathrm{rest}(x,y)$ примитивно рекурсивны.

2. Говорят, что число x делится без остатка на число y, если $\mathrm{rest}(x,y)=0$. Введем двухместную функцию $\mathrm{div}(x,y)$ — признак деления x на y, таким образом, $\mathrm{div}(x,y)=\begin{cases}1, & \mathrm{rest}(x,y)=0,\\ 0, & \mathrm{rest}(x,y)\ne 0.\end{cases}$ Очевидно соотношение $\mathrm{div}(x,y)=\overline{\mathrm{sgn}}(\mathrm{rest}(x,y))$. Так как функция $\mathrm{div}(x,y)$ получена суперпозицией примитивно рекурсивных функций, она также примитивно рекурсивна.

3. Введем функцию, определяющую число делителей натуральных чисел $\mathrm{nd}(x)=\sum_{i=0}^{x}\mathrm{div}(x,i)$. Рассмотрим пример. Пусть $x=5$. Тогда, очевидно, $\mathrm{nd}(5)=2$. Проверим это, подробно расписав выражение для $\mathrm{nd}(5)$:

$$\mathrm{nd}(5)=\sum_{i=0}^{5}\mathrm{div}(5,i)=\left\langle \underset{\substack{\text{rest}=5\neq0,\\ \text{div}=0}}{\overset{i=0}{\left[\frac{5}{0}\right]=5}}\quad \underset{\substack{\text{rest}=0,\\ \text{div}=1}}{\overset{i=1}{\left[\frac{5}{1}\right]=5}}\quad \underset{\substack{\text{rest}\neq0,\\ \text{div}=0}}{\overset{i=2}{\left[\frac{5}{2}\right]=2}}\quad \underset{\substack{\text{rest}\neq0,\\ \text{div}=0}}{\overset{i=3}{\left[\frac{5}{3}\right]=1}}\right.$$

$$\left. \underset{\substack{\text{rest}\neq0,\\ \text{div}=0}}{\overset{i=4}{\left[\frac{5}{4}\right]=1}}\quad \underset{\substack{\text{rest}=0,\\ \text{div}=1}}{\overset{i=5}{\left[\frac{5}{5}\right]=1}}\right\rangle=1+1=2.$$

4. Рассмотрим функцию $q(x)$, называемую *квадратичным остатком* числа x: $q(x)=x\dot{-}\left[\sqrt{x}\right]^2$, где $[z]$ — целая часть действительного числа z, равная наибольшему целому числу, не превосходящему z. Функция $q(x)$ равна расстоянию от x до ближайшего слева точного квадрата.

Равенство $n=\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ равносильно отношению $n^2\le x<(n+1)^2$, где n — натуральное число. Таким образом, $\left[\sqrt{x}\right]=\mu_t\left[\mathrm{sgn}\left((t+1)^2\dot{-}x\right)=1\right]$ и $\lfloor\sqrt{x}\rfloor\le x$. Проверим это для нескольких значений x. Пусть $x=5$, $\sqrt{x}=2{,}14\ldots$, $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=2$. Тогда поскольку $\left[\sqrt{x}\right]=\mu_t\left[\mathrm{sgn}\left((t+1)^2\dot{-}5\right)=1\right]$, то для $t=0$, $(t+1)^2\dot{-}5=1\dot{-}5=0$, $\mathrm{sgn}(0)=0\neq1$. Далее для $t=1$, $(t+1)^2\dot{-}5=4\dot{-}5=0$, $\mathrm{sgn}(0)=0\neq1$, $t=2$, $(t+1)^2\dot{-}5=9\dot{-}5=4$, $\mathrm{sgn}(4)=1$. Итак, $t=2$ — ответ при минимизации. По определению μ-оператора процесс немедленно заканчивается, если найдено первое значение, удовлетворяющее минимизации.

По теореме 5.3 о мажорируемой неявной функции следует, что $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ примитивно рекурсивна. Вместе с нею примитивно рекурсивной является и функция $q(x)=x\dot{-}\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$. Аналогичным образом доказывается примитивная рекурсивность и многих других арифметических функций.

Рассмотрим одноместные примитивно рекурсивные функции и следующие операции над ними:

1. Двухместная операция сложения одноместных функций
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$
2. Двухместная операция композиции одноместных функций
$$(f*g)(x)=f(g(x)).$$
3. Одноместная операция итерирования одноместной функции, определяемая следующим образом: $\begin{cases} f(0)=0, \\ f(n+1)=g(f(n)) \end{cases}$ или $f=i\cdot g$.

В последнем пункте функция f возникает операцией итерирования функции g.

Теорема 5.4 (теорема Р. Робинсона).* **Все одноместные примитивно рекурсивные функции и только они могут быть получены из функций $\lambda(x)=x+1$ и $q(x)=x\dot{-}\lfloor\sqrt{x}\rfloor^2$ конечным числом операций сложения, композиции и итерирования функций.**

При рассмотрении общерекурсивных функций, класс которых шире класса примитивно рекурсивных функций, привлекают специальные виды рекурсии, например, рекурсии второй ступени для двухместных функций.

- **Пример 1.** Доказать, что функции $\max(x,y)$ и $\min(x,y)$ примитивно рекурсивны. Вспомним несколько вспомогательных функций: $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$, $x\dot{-}y=\begin{cases}x-y, & x\geq y,\\ 0, & x<y\end{cases}$, $\overline{\operatorname{sgn}}(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$ Рассмотрим первую из заданных функций $\max(x,y)=\begin{cases}x, & x>y,\\ y, & x<y\end{cases}$. Тогда

---
* Рафаэль Митчелл Робинсон (1911–1995) — американский математик.

$\max(x,y)=x\cdot\mathrm{sgn}\left(x\dot{-}y\right)+y\cdot\overline{\mathrm{sgn}}\left(x\dot{-}y\right)$. Пусть $x>y$, тогда $x\dot{-}y=1$,

$\mathrm{sgn}\left(x\dot{-}y\right)=1$, $\overline{\mathrm{sgn}}\left(x\dot{-}y\right)=0$, $\max(x,y)=x\cdot 1+y\cdot 0=x$.

Наоборот, если $x<y$,

то $x\dot{-}y=0$, $\mathrm{sgn}\left(x\dot{-}y\right)=0$, $\overline{\mathrm{sgn}}\left(x\dot{-}y\right)=1$,

$\max(x,y)=x\cdot 0+y\cdot 1=y$. Так как функция $\max(x,y)$ была составлена из примитивно рекурсивных функций с помощью операций суммирования и суперпозиции, следовательно, она примитивно рекурсивна.

Совершенно аналогично доказывается, что $\min(x,y)=x\cdot\mathrm{sgn}\left(y\dot{-}x\right)+y\cdot\overline{\mathrm{sgn}}\left(y\dot{-}x\right)$.

- **Пример 2.** Рассмотреть и доказать примитивную рекурсивность функции $\sigma(x)$ — суммы делителей числа x, причем $\sigma(0)=0$. Запишем аналитический вид этой функции и проверим его правильность на примере: $\sigma(x)=\sum\limits_{i=1}^{x} i\cdot\overline{\mathrm{sgn}}(\mathrm{rest}(x,i))$.

Пусть $x=9$. У этого числа три делителя 1, 3 и 9, их сумма равна $1+3+9=13$.

$$\sigma(9)=$$

$$=\left(\underset{\mathrm{div}(9,1)=1}{\overset{i=1}{1\cdot 1}}\;\underset{\mathrm{div}(9,2)=0}{\overset{i=2}{2\cdot 0}}\;\underset{\mathrm{div}(9,3)=1}{\overset{i=3}{3\cdot 1}}\;\underset{\mathrm{div}(9,4)=0}{\overset{i=4}{4\cdot 0}}\;\underset{\mathrm{div}(9,5)=0}{\overset{i=5}{5\cdot 0}}\;\underset{\mathrm{div}(9,6)=0}{\overset{i=6}{6\cdot 0}}\;\underset{\mathrm{div}(9,7)=0}{\overset{i=7}{7\cdot 0}}\;\underset{\mathrm{div}(9,8)=0}{\overset{i=8}{8\cdot 0}}\;\underset{\mathrm{div}(9,9)=1}{\overset{i=9}{9\cdot 1}}\right)=$$

$$=1+3+9=13.$$

5.4. Практическое занятие № 11. Рекурсивность функций

5.4.1. Доказать, что если функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ примитивно рекурсивна, то следующие функции также примитивно рекурсивны:

а) $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f(x_2,x_3,\ldots,x_n,x_1)$ — циклическая перестановка аргументов;

б) $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2 ..., x_{n-1})$ — отождествление аргументов.

5.4.2. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $f(x) = x + n$;

б) $f(x) = n$;

в) $f(x, y) = x + y$.

5.4.3. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций:

а) $|x - y|$;

б) $\tau(x)$ — число делителей числа x, где $\tau(0) = 0$;

в) $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x;

г) $lh(x)$ — число простых делителей числа x, где $lh(0) = 0$;

д) $p(x)$ — x-е простое число p_x,

причем $p(0) = 2,\ p(1) = 3,\ p(2) = 5, ...$;

е) $\lfloor x\sqrt{2} \rfloor$;

ж) C_x^y $\left(C_x^y = 1 \text{ при } y \geq x\right)$.

5.4.4. Доказать, что из $O(x)$ и $I_m^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ с помощью суперпозиций и схем примитивной рекурсии нельзя получить функции $x + 1$ и $2x$.

5.4.5. Доказать, что функция $c(x, y) = \dfrac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}$ (канторовская* нумерующая функция) осуществляет взаимно однозначное соответствие между N^2 и N (нумерует пары натуральных чисел). Пусть $l(x)$ и $r(x)$ таковы, что $c(l(x), r(x)) = x$. Доказать, что $l(x)$ и $r(x)$ примитивно рекурсивны и $l(c(x, y)) = x$, $r(c(x, y)) = y$.

5.4.6. Доказать, что функция, перечисляющая по порядку числа Фибоначчи**:

$\begin{cases} f(0) = 0,\ f(1) = 1, \\ f(n + 2) = f(n) + f(n + 1) \end{cases}$ примитивно рекурсивна.

---

* Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик.

** Леонардо Фибоначчи Пизанский (1180–1240) — итальянский математик.

5.4.7. Доказать, что следующие функции частично рекурсивны:

а) нигде не определенная функция ω, т. е. функция ω с пустой областью определения;

б) $f(x,y)=\begin{cases} x-y, \text{ если } x \geq y, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

в) $f(x,y)=\begin{cases} z, \text{ еслн } z^y = x, \\ \text{не определена в остальных случаях.} \end{cases}$

5.4.8. Доказать, что функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$, возникающая из функций $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$ с помощью оператора примитивной рекурсии, может быть получена с помощью специальной рекурсии вида $\begin{cases} F(x,0)=0, \\ F(x,y+1)=\Phi(F(x,y)) \end{cases}$ и суперпозиции из функций $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\psi(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2})$, $O(x)$, $\lambda(x)$, $I_n^m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $c(x,y)$, $r(x)$, $l(x)$ из задачи 5.4.5.

5.4.9. Доказать:

а) $i\left(1+\left[\frac{x}{2}\right]\right)=\operatorname{sgn}(x)$;

б) $i\left(x+1+\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x}{2}\right]\right)=2x\dot{-}1$;

в) $i\left(x+1+\left[\sqrt{4x+1}\right]\right)=x^2+x$, где $f(x)=ig(x)$ — операция итерирования функций.

5.4.10. Показать, что следующие функции могут быть получены из функций $\lambda(x)=x+1$ и $q(x)=x\dot{-}\left[\sqrt{x}\right]^2$ с помощью операций подстаиовки, итерации и сложения двух функций:

а) $\operatorname{sgn}(x)$;

б) $\overline{\operatorname{sgn}}(x)$;

в) $I_n^m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$;

г) $ax+by+c$;

д) x^2.

5.5. Словарные множества и функции

Важнейшие классы алгоритмов можно описать в терминах теории слов в некотором алфавите.

Как уже отмечалось, произвольная конечная совокупность букв называется *алфавитом*. Последовательность из нескольких букв называется *словом*. Например, если алфавит состоит из букв A, B, C, то последовательности $A, BAA, CA, CC, ACBAB$ будут словами в этом алфавите. *Длиной слова* называется число входящих в него букв.

Пусть символы α и β обозначают слова, записанные в алфавите, не содержащем самих символов α и β. Тогда через $\alpha\beta$ обозначается слово, получающееся, если сначала выписать слово α, а затем приписать к нему слово β. Слово $\alpha\beta$ называется *композицией* (иногда *произведением*) слов α и β. Операция композиции слов, очевидно, ассоциативна, но не коммутативна.

Слово α называется *подсловом* слова β, если β можно представить в виде $\beta = \gamma\alpha\delta$, где γ, δ — подходящие (возможно пустые) слова. Пусть $\mathbf{A} = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ — какой-нибудь конечный набор символов. Обозначим через σ_A совокупность всех слов в алфавите $\mathbf{A}$, включая пустое слово Λ.

Всевозможные подмножества совокупности σ_A, в том числе пустые, будут называться *словарными множествами* в алфавите $\mathbf{A}$.

Для нумерации словарных множеств вводится понятие *алфавитных номеров* следующим образом. Номер пустого слова Λ полагается равным нулю. Далее в каком-нибудь порядке числами $1,2,3,...p$ нумеруются символы алфавита. Пусть a_i — символ с номером i. Тогда *номером слова* $\alpha = a_{i_s} ... a_{i_1} a_{i_0}$ называется число $c(\alpha) = i_0 + i_1 \cdot p + i_2 \cdot p^2 + ... + i_s \cdot p^s$.

Рассмотрим предыдущий пример. Из данного определения номера следует, что каждое слово совокупности σ_A будет иметь единственный и отличный от других алфавитный номер. Пусть $\sigma_A = \{\underset{1}{A}, \underset{2}{B}, \underset{3}{C}\}$, а слово $\alpha = \underset{1}{A}\underset{3}{C}\underset{2}{B}\underset{1}{A}\underset{2}{B}$, тогда $c(\alpha) = 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^4$. По своему составу и методу получения это обычное число в троичной системе счисления.

Множество слов $\mathbf{M}$ в алфавите $\mathbf{A}$ называется *примитивно рекурсивным*, если соответственно примитивно рекурсивна совокупность алфавитных номеров всех слов из $\mathbf{M}$.

Говорят, что в алфавите **А** задана n-местная словарная функция F, если некоторым n-кам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ слов из σ_A поставлены в соответствие однозначно определенные слова $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в **А**. Числовая n-местная функция f называется функцией, представляющей словарную функцию F в нумерации **К**, если $F(Kx_1, Kx_2, \ldots, Kx_n) = Kf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для всех натуральных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, следовательно, $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = Kf(c\alpha_1, c\alpha_2, \ldots, c\alpha_n)$ или $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c(F(Kx_1, Kx_2, \ldots, Kx_n))$, где **К** — первоначальная нумерация алфавитных символов. Здесь $c(\alpha)$ — алфавитный номер слова α, **К**x_i — слово, имеющее номер x_i в нумерации **К**.

Рассмотрим предыдущий пример. Пусть $\sigma_A = \left\{\underset{a_1}{A}, \underset{a_2}{B}, \underset{a_3}{C}\right\}$ и $F_1(\alpha) = \alpha \cdot a_1 = \alpha \cdot A$. Тогда $f_1(x) = c(F_1(Kx)) = c(Kx \cdot A)$, т. к. по определению представляющей функции изменяется только аргумент, а не прочие символы, входящие в ее состав. $c(F_1(\alpha)) = c(Kx \cdot A) = c(\alpha \cdot A) = 1 + p \cdot c(\alpha)$. Действительно,

$$\alpha = \underset{1}{A}\underset{3}{C}\underset{2}{B}\underset{1}{A}\underset{2}{B},\ \alpha \cdot A = \underset{1}{A}\underset{3}{C}\underset{2}{B}\underset{1}{A}\underset{2}{B} \cdot \underset{1}{A},$$

$$c(\alpha \cdot A) = 1 \cdot p^0 + 2 \cdot p^1 + 1 \cdot p^2 + 2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^4 +$$

$$+ 1 \cdot p^5 = 1 + p(2 + 1 \cdot p + 2 \cdot p^2 + 3 \cdot p^3 + 1 \cdot p^4) = 1 + c(\alpha),\ p = 3$$

— основание системы счисления при нумерации символов алфавита. Тогда $f_1(x) = 1 + px = 1 + 3x$ — числовая функция, представляющая словарную функцию $F_1(\alpha) = \alpha \cdot A$. Если же

$$F_2(\alpha) = a_1 \cdot \alpha = A \cdot \alpha, \text{ то } f_2(x) = c(F_2(Kx)) = c(A \cdot Kx),$$

$$c(F_2(\alpha)) = c(a_1 \cdot \alpha) = c(A \cdot \alpha) = c(A \cdot ACBAB) = c(\alpha) + 1 \cdot p^{s+1} = c(\alpha) + 1 \cdot p^5.$$

Тогда $f_2(x) = x + 3^5$ — числовая функция, представляющая словарную функцию $F_2(\alpha) = A \cdot \alpha$.

Итак, свойство словарных функций быть рекурсивными связано с рекурсивностью совокупности алфавитных номеров всех слов. Ясно, и определение словарной фуикции это подтверждает, что свойство быть рекурсивным множеством слов не зависит ни от нумерации **К** символов алфавита, ни от того, в каком алфавите это множество рассматривается.

По аналогии с осиовными вычислимыми операциями над числовыми функциями можно определить операции подстановки (суперпозиции), рекурсии и минимизации, производимые над словарными функциями. При помощи этих "словарных операторов" легко и без каких-либо вычислений показывается примитивная рекурсивность всех наиболее употребительных словарных функций. Например, так же вводятся основные элементарные операторы сдвига, аннулирования и проектирования.

Пусть алфавит $\mathbf{A}$ состоит из букв $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Словарные функции S_i, O и I_m^n $(m = 1,2\ldots, i = 1,2,\ldots,p,\ m \le n)$, определенные в алфавите $\mathbf{A}$ равенствами $S_i(\alpha) = \alpha \cdot a_i$, $O(\alpha) = \Lambda$, $I_m^n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_m$, называются *простейшими*.

Рассмотрим теперь какие-нибудь частичные словарные функции G и $H_1, H_2, \ldots, H_p$ соответственно от n и $n+2$ переменных, заданных в алфавите $\mathbf{A}$, состоящего из букв $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Результатом операции словарной примитивной рекурсии над функциями G, $H_1, H_2, \ldots, H_p$ называется $(n+1)$-местная словарная функция F, которая для любых слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ в алфавите $\mathbf{A}$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \Lambda) = G(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \cdot a_1) = H_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta, F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta)), \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \cdot a_2) = H_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta, F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \cdot a_p) = H_p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta, F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta)). \end{cases} \quad (5.5.1)$$

Это определение, если перейти от словарных функций к представляющим их числовым функциям, выглядит так

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_n, py+i) = h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)),\ i = 1,2,\ldots,p. \end{cases} \quad (5.5.2)$$

Представляющая функция f расписывается следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) =$$

$$= \begin{cases} h_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \left[\dfrac{z}{p}\right], f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \left[\dfrac{z}{p}\right]\right)\right), & z \dot{-} p\left[\dfrac{z}{p}\right] = i = 1,2,\ldots,p-1, \\ h_p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \left[\dfrac{z}{p}\right] \dot{-} 1, f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \left[\dfrac{z}{p}\right] \dot{-} 1\right)\right), & z \dot{-} p\left[\dfrac{z}{p}\right] = 0, \end{cases}$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n,z)=$$

или
$$=\sum_{j=1}^{p-1} h_j\left(x_1,x_2,...,x_n,\left[\frac{z}{p}\right],f\left(x_1,x_2,...,x_n,\left[\frac{z}{p}\right]\right)\right)\cdot\overline{\mathrm{sgn}}\left(\left|j-\left(z\dot{-}p\left[\frac{z}{p}\right]\right)\right|\right)+$$
$$+h_p\left(x_1,x_2,...,x_n,\left[\frac{z}{p}\right]\dot{-}1,f\left(x_1,x_2,...,x_n,\left[\frac{z}{p}\right]\dot{-}1\right)\right)\cdot\overline{\mathrm{sgn}}\left(\left|z\dot{-}p\left[\frac{z}{p}\right]\right|\right). \quad (5.5.3)$$

Операция словарной минимизации проводится аналогично, хотя и более сложным способом: вместо одной операции минимизации рассматривается минимизация по каждой букве алфавита a_i.

Теорема 5.5. **Для того чтобы заданная в алфавите А словарная функция $F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ была частично рекурсивной, необходимо и достаточно, чтобы она могла быть получена из простейших словарных функций S,O,I_m^s конечным числом операций суперпозиции, словарной рекурсии и словарной минимизации.**

- **Пример 1.** В алфавите $A=\{\underset{1}{A},\underset{2}{B},\underset{3}{C},\underset{4}{D}\}$ рассмотрим словарную функцию $F(\alpha_1,\alpha_2)$ и определим рекурсивно второй аргумент α_2. Пусть функция определяется следующим образом:

$$\begin{cases} F(\alpha_1,\Lambda)=G(\alpha_1), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot A)=H_1(\alpha_1,\beta,F(\alpha_1,\beta)), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot B)=H_2(\alpha_1,\beta,F(\alpha_1,\beta)), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot C)=H_3(\alpha_1,\beta,F(\alpha_1,\beta)), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot D)=H_4(\alpha_1,\beta,F(\alpha_1,\beta)). \end{cases}$$

Пусть, кроме того, $G(\alpha)=\alpha B$ и $\begin{cases} H_1(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\beta\gamma, \\ H_2(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\alpha\beta\gamma, \\ H_3(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\beta\beta\gamma, \\ H_4(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\beta\gamma\gamma. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} F(\alpha_1,\Lambda)=\alpha_1 B, \\ F(\alpha_1,\beta\cdot A)=\alpha_1\beta F(\alpha_1,\beta), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot B)=\alpha_1\alpha_1\beta F(\alpha_1,\beta), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot C)=\alpha_1\beta\beta F(\alpha_1,\beta), \\ F(\alpha_1,\beta\cdot D)=\alpha_1\beta F(\alpha_1,\beta)F(\alpha_1,\beta). \end{cases}$

При таком определении может сложиться впечатление, что количества функций H_i недостаточно для построения функции $F(\alpha_1,\alpha_2)$ при любом β, ведь $F(\alpha_1,\beta\cdot A_i)=H_i(\alpha_1,\beta,F(\alpha_1,\beta))$ и $F(\alpha_1,\beta)$ неизвестно. Однако если $\beta=\Lambda$, то можно найти $F(\alpha_1,A_i)$ для всех букв алфавита $\mathbf{A}$, т. к. $F(\alpha_1,A_i)=H_i(\alpha_1,\Lambda,F(\alpha_1,\Lambda))=H_i(\alpha_1,\Lambda,G(\alpha_1))$.

Затем взяв за $\beta=A_i$, мы можем определить функцию F для $\beta=A_iA_j$ и т. д. для всех слов произвольной длины. Пусть, например, $\alpha_1=DAC$, $\beta=BC$. Вычислим только $F(\alpha_1,\beta\cdot D)=F(DAC,BCD)$. Для этого необходимо определить несколько промежуточных значений этой функции $F(\alpha_1,\Lambda)=DACB$,
$F(\alpha_1,B)=F(\alpha_1,\Lambda B)=H_2(\alpha_1,\Lambda,F(\alpha_1,\Lambda))=DACDACDACB$,
$F(\alpha_1,BC)=H_3(\alpha_1,B,F(\alpha_1,B))=DACBBDACDACDACB$, $F(\alpha_1,BCD)=$
$=H_4(\alpha_1,BC,F(\alpha_1,BC))=DACBCDACBBDACDACDACBDACBBDACD\cdot$
$ACDACB$ и т. д.

Найдем все представляющие функции. $G(\alpha)=\alpha B$, $g(x)=c(G(\mathbf{K}x))$, где $\mathbf{K}$ — первоначальная нумерация алфавитных символов $\mathbf{A}=\left\{\begin{matrix} & A, & B, & C, & D\\ \mathbf{K}: & 1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}\right\}$, $p=4$;
$g(x)=c(\alpha B)=2\cdot p^0+c(\alpha)\cdot p^1=2+c(\alpha)\cdot p=2+4x$.

Итак, $g(x)=2+4x$ — функция, представляющая словарную функцию $G(\alpha)$. $H_1(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\beta\gamma$, $h_1(x,y,z)=c(H_1(\mathbf{K}x,\mathbf{K}y,\mathbf{K}z))=$
$=c(\alpha\beta\gamma)=c(\gamma)+pc(\beta)+p^2c(\alpha)=p^2x+py+z=16x+4y+z$;
$H_2(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\alpha\beta\gamma$, $h_2(x,y,z)=c(H_2(\mathbf{K}x,\mathbf{K}y,\mathbf{K}z))=c(\alpha\alpha\beta\gamma)=c(\gamma)+pc(\beta)+$
$+p^2c(\alpha)+p^3c(\alpha)=(p^2+p^3)x+py+z=80x+4y+z$; $H_3(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\beta\beta\gamma$,
$h_3(x,y,z)=c(\alpha\beta\beta\gamma)=c(\gamma)+pc(\beta)+p^2c(\beta)+p^3c(\alpha)=p^3x+(p+p^2)y+$
$+z=64x+20y+z$; $H_4(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha\beta\gamma\gamma$, $h_4(x,y,z)=c(\alpha\beta\gamma\gamma)=c(\gamma)+$
$+pc(\gamma)+p^2c(\beta)+p^3c(\alpha)=p^3x+p^2y+(1+p)z=64x+16y+5z$.

Перейдем теперь от формул (5.5.1) к формулам (5.5.2) для представляющих функций

$$\begin{cases} f(x,0)=g(x),\\ f(x,4y+i)=h_i(x,y,f(x,y)),\ i=1,2,3,4.\end{cases}$$

Вычислим несколько значений представляющих функций:

$f(0,0)=g(0)=2+4\cdot 0=2$, $f(1,0)=6$, $f(2,0)=10$.

$$y=0,\ \begin{cases} i=1, f(1,4\cdot 0+1)=f(1,1)=h_1(1,0,f(1,0))=h_1(1,0,6)=22,\\ i=2, f(1,4\cdot 0+2)=f(1,2)=h_2(1,0,f(1,0))=h_2(1,0,6)=86,\\ i=3, f(1,4\cdot 0+3)=f(1,3)=h_3(1,0,f(1,0))=h_3(1,0,6)=70,\\ i=4, f(1,4\cdot 0+4)=f(1,4)=h_4(1,0,f(1,0))=h_4(1,0,6)=94, \end{cases}$$

$$y=1,\ \begin{cases} i=1, f(1,4\cdot 1+1)=f(1,5)=h_1(1,1,f(1,1))=h_1(1,1,22)=40,\\ i=2, f(1,4\cdot 1+2)=f(1,6)=h_2(1,1,f(1,1))=h_2(1,1,22)=106,\\ i=3, f(1,4\cdot 1+3)=f(1,7)=h_3(1,1,f(1,1))=h_3(1,1,22)=106,\\ i=4, f(1,4\cdot 1+4)=f(1,8)=h_4(1,1,f(1,1))=h_4(1,1,22)=190 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

Проверим совпадение номеров слов и значений представляющих функций. Пусть $\alpha=A$, $G(A)=AB$, $c(AB)=2+1\cdot 4=6$, $c(A)=1$, $g(1)=2+4\cdot 1=6$. То же наблюдается, например, для функции

$H_1 : H_1(\alpha,\beta,\gamma)=H_1(A,\Lambda,AB)=AAB$, $c(AAB)=2\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 16=22$,

$c(A)=1$, $c(\Lambda)=0$, $c(AB)=6$, $h_1(1,0,6)=22$ и т. д.

5.6. Машины Тьюринга

Тезис Черча нельзя доказать, т. к. он связывает нестрогое математическое понятие интуитивно вычислимой функции со строгим математическим понятием частично рекурсивной функции. Но в поддержку этого тезиса впоследствии другими авторами были приведены очень веские доводы.

В 1936 г. Тьюрингом был определен еще один класс интуитивно вычислимых функций и сформулирован тезис Тьюринга, эквивалентный тезису Черча. В результате попыток разложить интуитивно известные нам вычислительные процедуры на элементарные операции построена математическая модель, называемая *машиной Тьюринга*. Повторения элементарных операций, определенных в этой машине, достаточно для проведения любого возможного вычисления. От человека-вычислителя эта машина отличается двумя особенностями:

- она не ошибается, т. е. она без всяких отклонений выполняет правила, установленные для ее работы;
- она снабжена потенциально бесконечной памятью. Это значит, что хотя в каждый момент количество накопленной ею информации конечно, для

этого нет никакой верхней грани. В качестве накопителя рассматривается бесконечная лента.

Машина Тьюринга включает:

1. Внешний алфавит $A = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$, т. е. конечное множество символов.

   В этом алфавите (в символах этого алфавита) информация вводится в машину. Машина перерабатывает введенную информацию в новую.

2. Внутренний алфавит $Q = \left\{ q_0, q_1, ..., q_m, \underset{\text{направо}}{R}, \underset{\text{налево}}{L}, \underset{\text{на месте}}{C}, \underset{\text{печать}}{P}, \underset{\text{стереть}}{E} \right\}$. Иногда символы C, P, E отсутствуют. Символы $q_0, q_1, ..., q_m$ выражают конечное число состояиий машины, причем q_1 — начальное состояние, q_0 — стоп-состояние.

3. Бесконечную в обе стороны ленту, представляющую память машины. Эта память разбита на клетки. В каждую клетку может быть записана только одна буква. a_0 — пустая клетка, она всегда может появиться при движеиии вправо или влево, если закончится слово исходной информации $a_0 a_1 a_2 ... a_n$.

4. Управляющую головку. Она передвигается вдоль ленты и может останавливаться напротив какой-либо клетки и воспринимать записанный там символ исходного слова. В одном такте работы машины управляющая головка может сдвигаться только на одну клетку или оставаться на месте.

Работа машины складывается из тактов, по ходу которых происходит преобразование начальной информации в промежуточную. В качестве начальной информации на ленту можно подать любую конечную систему знаков внешнего алфавита, расставленную произвольным образом по ячейкам. При этом работа машины Тьюринга может заканчиваться так:

- после конечиого числа тактов машина останавливается в q_0 состоянии. При этом на ленте оказывается переработанная информация. В этом случае говорят, что машина применима к начальной информации I_1 и перерабатывает ее в результирующую информацию I_2;
- машина никогда не останавливается (не переходит в q_0 состояние). В этом случае машина не применима к начальной информации I_1.

В каждом такте работы машина Тьюринга действует по единой функциональной схеме, которая имеет вид $a_i q_j \Rightarrow a_l \begin{Bmatrix} R \\ L \\ C \\ P \\ E \end{Bmatrix} q_s$, где $a_i, a_l \in A$, $q_j, q_s \in Q$ и a_i — буква на ленте, обозреваемая управляющей головкой на данном такте, q_j — текущее состояние машины на данном (в общем случае не i-м и не j-м) такте.

На каждом такте функциональной схемой вырабатывается команда, состоящая из трех элементов (правая часть формулы):

1. Буква внешнего алфавита a_l, на которую заменяется обозреваемая буква a_i.
2. Адрес внешней памяти и дополнительные действия для выполнения на следующем такте R, L, C, P или E.
3. Следующее состояние машины.

Формирование правой части функциональной схемы происходит по командам, совокупность которых образует программу машины Тьюринга. Программа представляется в виде двумерной таблицы (табл. 5.6.1), называемой *тьюринговой функциональной схемой*, в каждой клетке которой записываются отдельные команды.

Таблица 5.6.1

Состояния	**Символы внешнего алфавита**			
	a_0	a_1	...	a_n
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	...	a_2Lq_1
q_2	a_1Cq_0	a_2Cq_1	...	a_1Cq_2
...	...	...	...	...
q_m	a_1Pq_3	a_0Rq_{m-1}	...	$a_{n-1}Rq_1$

Работа машины Тьюринга полностью определяется ее программой. Две машины Тьюринга с общей функциональной схемой идентичны, разные машины имеют разные программы, т. е. различные функциональные схемы.

В качестве символов алфавита могут быть не только буквы, часто используется, например, символ |. Говорят, что непустое слово α в алфавите A воспринимается машиной в стандартном положении, если оно записано в последовательных клетках ленты, все другие клетки пусты, и машина обозревает крайнюю клетку справа из тех, в которых записано слово α.

Рассмотрим сначала несколько примеров с полным алфавитом. Пусть начальная конфигурация имеет вид $a_0a_1a_2\underset{q_1}{a_2}a_0$, а машина Тьюринга управляется функциональной схемой, представленной в табл. 5.6.2.

Таблица 5.6.2

	a_0	a_1	a_2
q_1	a_2Lq_3	a_1Rq_2	a_2Lq_1
q_2	a_1Cq_0	a_2Cq_1	a_1Cq_2
q_3	a_0Rq_0	a_1Rq_4	a_2Cq_1
q_4	a_1Cq_3	a_0Rq_4	a_2Rq_4

Так как управляющей головкой обозревается буква a_2, а машина находится в состоянии q_1, при этом пусть вырабатывается команда a_2Lq_1, т. е. головка сдвигается влево, a_2 заменяется на a_2, состояние q_1 меняется на q_1, т. е. получается конфигурация $a_0a_1\underset{q_1}{a_2}a_2a_0$. Следующая конфигурация будет такой — $a_0\underset{q_1}{a_1}a_2a_2a_0$, третья — $a_0a_1\underset{q_2}{a_2}a_2a_0$, четвертая — $a_0a_1\underset{q_2}{a_1}a_2a_0$, пятая — $a_0a_1\underset{q_1}{a_2}a_2a_0$. Таким образом, мы пришли в начальное состояние. Процесс работы машины начал повторяться, и, следовательно, конечный результат не может быть получен, т. е. данная машина Тьюринга не применима к исходной информации.

Пусть теперь для той же машины начальная информация имеет вид $a_0 \underset{q_1}{a_1} a_0$.

Тогда, действуя аналогично, придем к следующим конфигурациям: $a_0 a_1 \underset{q_2}{a_0}$, $a_0 a_1 \underset{q_0}{a_1} a_0$. Так как машина перешла в начальное состояние, то слово $a_1 a_1$ — результат ее работы, и машина применима к исходной информации.

Видно, что понятие машины Тьюринга возникает в результате прямой попытки разложить интуитивно известные нам вычислительные процедуры на элементарные операции. Тьюринг привел ряд доводов в пользу того, что повторения его элементарных операций было бы достаточно для проведения любого возможного вычисления.

Если данное состояние описывается машинным словом $\mathbf{M}$, то машинное слово, описывающее следующее состояние машины, будет обозначаться через $\mathbf{M}^{(1)}$. Далее аналогично $\mathbf{M}^{(i+1)} = (\mathbf{M}^{(i)})^{(1)}$, $i = 0,1,2\ldots$ Переход машины Тьюринга из начального в последующие состояния изображается в виде цепочки слов $\mathbf{M} \vdash \mathbf{M}^{(1)} \vdash \mathbf{M}^{(2)} \vdash \ldots$.

Чтобы описывать работу машины Тьюринга более удобным образом, текущие состояния машины пишут не внизу алфавита, а перед обозреваемой ячейкой. Например, пусть $A = \{0,1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, q_0 — символ остановки, а программа состоит из команд $q_1 0 \to q_2 R$, $q_2 0 \to q_0 1$, $q_1 1 \to q_1 R$, $q_2 1 \to q_2 R$ и начальная конфигурация $q_1 11$. Тогда $q_1 11 \vdash 1 q_1 1 \vdash 11 q_1 0 \vdash 110 q_2 0 \vdash 110 q_0 1$, где 0 — символ пустой ячейки ленты машины. Если же начальная конфигурация $q_2 101$, то $q_2 101 \vdash 1 q_2 01 \vdash 1 q_0 11$.

Таким образом, каждая машина Тьюринга с произвольными алфавитами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{Q}$ и заданной программой перерабатывает s-ку слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, записанных в алфавите $\mathbf{A}$, в слово β, если машина применима к начальной информации, и машина не применима к s-ке слов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, если выражение (слово) после ее работы имеет неопределенное значение.

Словарная функция называется вычислимой по Тьюрингу, если она вычислима на подходящей машине Тьюринга.

Теорема 5.6. **Все словарные функции, вычислимые по Тьюрингу, являются частично рекурсивными.**

Тезис Тьюринга. **Любая вычислимая функция вычислима по Тьюрингу.**

Теорема 5.7. **Для каждой частично рекурсивной словарной функции $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$, определенной на совокупности слов какого-нибудь алфавита $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, существует машина Тьюринга с символами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и подходящими внутренними состояниями, которая правильно вычисляет функцию F.**

Рассмотрим несколько машин Тьюринга, преобразующих машинные слова одного заданного вида в машинные слова другого заданного вида. Программы машины будем писать в столбец.

- **Пример 1.** Пусть на ленту подается два числа, заданных набором палочек, например 2 и 3. Нужно сложить эти числа. Обозначим символ сложения "+". Итак, $\mathbf{A} = \{a_0 \equiv 0, |, +\}$, a_0 — начальное состояние. Найти программу, которая будучи примененной к слову $\alpha_1 = 0|\,|\,+|\,|\,|\,0$, давала бы в результате сумму чисел 2 и 3, т. е. слово $\alpha_2 = 0|\,|\,|\,|\,|\,0$.

Программы для одного примера могут быть разными, т. е. могут реализовываться на разных машинах Тьюринга. Опишем процесс работы машины для решения этой задачи. Пусть в начальный момент обозревается самая левая палочка. Ее нужно сдвинуть вправо, минуя все палочки и знак + до тех пор, пока не будет достигнута пустая клетка. В эту пустую клетку вписывается первая палочка. Затем нужно вернуться за второй палочкой и ее перенести вправо аналогичным образом. После этой процедуры нужно вернуться к знаку +, стереть его и остановиться. Изобразим все такты машины в виде соответствующих конфигураций.

1. $\underline{0q_1|\,|\,+|\,|\,|\,0}$;	8. $\underline{0|\,+|\,|\,|\,q_3|\,0}$;
2. $\underline{00q_2|\,+|\,|\,|\,0}$;	9. $0|\,+|\,|\,q_3|\,|\,0$;
3. $\underline{0|\,q_2+|\,|\,|\,0}$;	10. $0|\,+|\,q_3|\,|\,|\,0$;
4. $0|\,+q_2|\,|\,|\,0$;	11. $0|\,+q_3|\,|\,|\,|\,0$;
5. $0|\,+|\,q_2|\,|\,0$;	12. $\underline{0|\,q_3+|\,|\,|\,|\,0}$;
6. $0|\,+|\,|\,q_2|\,0$;	13. $0q_3|\,+|\,|\,|\,|\,0$;
7. $\underline{0|\,+|\,|\,|\,q_2 0}$;	14. $\underline{q_3 0|\,+|\,|\,|\,|\,0}$;

15. $0q_1| +||||0$;

16. $00q_2+||||0$;

17. $0+q_2||||0$;

18. $0+|q_2|||0$;

19. $0+||q_2||0$;

20. $0+|||q_2|0$;

21. $0+||||q_20$;

<u>22.</u> $0+||||q_3|0$;

23. $0+|||q_3||0$;

24. $0+||q_3|||0$;

25. $0+|q_3||||0$;

26. $0+q_3|||||0$;

27. $0q_3+|||||0$;

28. $q_30+|||||0$;

29. $\underline{0q_1+|||||0}$;

<u>30.</u> $00|||||0$.

Подчеркнуты состояния, получаемые новой командой. Этот процесс позволяет записать алгоритм в виде следующей цепочки команд: $q_1| \to 0Rq_2$, $q_2| \to |Rq_2$, $q_2+ \to +Rq_2$, $q_20 \to |Cq_3$, $q_3| \to |Lq_3$, $q_3+ \to +Lq_3$, $q_30 \to 0Rq_1$, $q_1+ \to 0Cq_0$ или еще более компактно в виде двумерной таблицы (табл. 5.6.3).

Таблица 5.6.3

	0	+	|
q_1	—	$0Cq_0$	$0Rq_2$
q_2	$\|Cq_3$	$+Rq_2$	$\|Rq_2$
q_3	$0Rq_1$	$+Lq_3$	$\|Lq_3$

- **Пример 2.** Введем следующие обозначения: $1^x = \underbrace{11\ldots1}_{x\ \text{раз}}$, $0^x = \underbrace{00\ldots0}_{x\ \text{раз}}$ и $0^0 = 1^0 = \Lambda$. Составим программу "перенос нуля": $q_1001^x0 \Rightarrow q_001^x00$. В левой колоике табл. 5.6.4 будем располагать программу, в правой — результат ее преобразования исходного слова. Исходное слово пусть будет q_1001^x0.

Таблица 5.6.4

Команда	Результат
$q_1 0 \to q_2 R$	$0q_2 01^x 0$
$q_2 0 \to q_3 1$	$01q_3 1^x 0$
$q_3 1 \to q_3 R$ *x раз*	$011^x q_3 0$
$q_3 0 \to q_4 L$	$01^x q_4 10$
$q_4 1 \to q_5 0$	$01^x q_5 00$
$q_5 0 \to q_6 L$	$01^{x-1} q_6 100$
$q_6 1 \to q_6 L$ $x-1$ *раз*	$q_6 01^x 00$
$q_6 0 \to q_0 0$	$q_0 01^x 00$

- **Пример 3.** Левый сдвиг: $01^x q_1 0 \Rightarrow q_0 01^x 0$. Программа этого примера очень короткая и абсолютно очевидная (табл. 5.6.5).

Таблица 5.6.5

Команда	Результат
$q_1 0 \to q_2 L$	$01^{x-1} q_2 10$
$q_2 1 \to q_2 L$ $x-1$ *раз*	$q_2 01^x 0$
$q_2 0 \to q_0 0$	$q_0 01^x 0$

Во втором и третьем примерах в текстах программ опущен символ C.

- **Пример 4.** Правый сдвиг: $q_1 01^x 0 \Rightarrow 01^x q_0 0$. Программа этой машины получается из предыдущей программы заменой символа L на R.
- **Пример 5.** Транспозиция: $01^x q_1 01^y 0 \Rightarrow 01^y q_0 01^x 0$.

Сначала переведем слово $01^x q_1 01^y 0$ в слово $01^x q 1^y 00$. При $y > 0$ это достигается очевидной программой, записанной в табл. 5.6.6. А именно сначала по программе правого сдвига из исходного слова $01^x q_1 01^y 0$ получаем слово $01^x 01^y q_3 0$. Затем выполняем следующие команды.

9 Зак 4306

Таблица 5.6.6

Команда	Результат
$q_3 0 \to q_4 L$	$01^x 01^{y-1} q_4 10$
$q_4 1 \to q_5 0$	$01^x 01^{y-1} q_5 10$
$q_5 0 \to q_6 L$	$01^x 01^{y-2} q_6 100$
$q_6 1 \to q_6 L$ $y-2$ *раз*	$01^x q_6 01^{y-1} 00$
$q_6 0 \to q_7 1$	$01^x q_7 1^y 00$

Чтобы получить слово $01^x q_7 01^y 00$ и при $y = 0$, добавим команду

Таблица 5.6.6 (продолжение 1)

$q_4 0 \to q_7 0$	$01^x q_7 1^y 00 \, (y \geq 0)$

Теперь из подслова 1^x перебрасываем один символ 1 в промежуток между двумя последними нулями. Это достигается следующей программой:

Таблица 5.6.6 (продолжение 2)

$q_7 1 \to q_8 L$	$01^{x-1} q_8 1 1^y 00$
$q_8 1 \to q_9 0$	$01^{x-1} q_9 01^y 00$
$q_9 0 \to q_{10} R$	$01^{x-1} 0 q_{10} 1^y 00$
$q_{10} 1 \to q_{10} R$ y *раз*	$01^{x-1} 01^y q_{10} 00$
$q_{10} 0 \to q_{11} 1$	$01^{x-1} 01^y q_{11} 10$
$q_{11} 1 \to q_{12} L$	$01^{x-1} 01^{y-1} q_{12} 110$
$q_{12} 1 \to q_{13} 0$	$01^{x-1} 01^{y-1} q_{13} 010$
$q_{13} 0 \to q_{14} L$	$01^{x-1} 01^{y-2} q_{14} 1010$
$q_{13} 1 \to q_{14} L$ $y-2$ *раз*	$01^{x-1} q_{14} 01^{y-1} 010$
$q_{14} 0 \to q_{15} 1$	$01^{x-1} q_{15} 1^y 010$

Этот кусок программы работает при $x > 0$, $y > 0$. Чтобы тот же результат получился и при $y = 0$, добавляем к записанной программе еще приказы:

Таблица 5.6.6 (продолжение 3)

$q_7 0 \to q_{16} 1$	$01^x q_{16} 100$
$q_{16} 1 \to q_{17} L$	$01^{x-1} q_{17} 1100$
$q_{17} 1 \to q_{15} 0$	$01^{x-1} q_{15} 1^{y=0} 010$

Теперь зацикливаем программу приказами:

Таблица 5.6.6 (продолжение 4)

$q_{15} 1 \to q_7 1$	$01^{x-1} q_7 1^y 010 \left(y > 0\right)$
$q_{15} 0 \to q_7 0$	$01^{x-1} q_7 1^y 010 \left(y = 0\right)$

Если $x - 1 > 0$, то слово $01^{x-1} q_7 1^y 010$ переработается в слово $01^{x-2} q_7 1^y 0110$. Если же $x - 2 > 0$, то процесс дальнейшей переработки даст слово $01^{x-3} q_7 1^y 01110$ и т. д. Через x циклов получим слово $0 q_7 1^y 01^x 0$.

Таблица 5.6.6 (продолжение 5)

$q_7 1 \to q_8 L$	$q_8 01^y 01^x 0$
$q_8 0 \to q_{18} R$	$0 q_{18} 1^y 01^x 0$
$q_{18} 1 \to q_{18} R$ *y раз*	$01^y q_{18} 01^x 0$
$q_{18} 0 \to q_0 0$	$01^y q_0 01^x 0$

- **Пример 6.** Комбинируя между собой примеры 2, 3, 4 и 5, легко получать машины, выполняющие более сложные преобразования слов. Так, например, применяя дважды подряд программу правого сдвига (см. пример 4), получаем машину, выполняющую двойной перенос: $q_1 01^x 01^y 0 \Rightarrow 01^x 01^y q_0 0$.

- **Пример 7.** Программа циклического сдвига получается применением друг за другом программы транспозиции, левого сдвига и опять транспозиции (примеры 5 и 3): $01^x01^y q_1 01^z0 \Rightarrow 01^z q_0 01^x01^y0$.

Достаточно научиться строить машины, правильно вычисляющие простейшие функции и функции, возникающие из правильно вычислимых функций с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

- **Пример 8.** Вычислить функцию $O(x)=0$, т. е. $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 00^{x+1}$ (табл. 5.6.7).

Таблица 5.6.7

Команда	Результат
$q_1 0 \to q_2 R$	$0q_2 1^x 0$
$q_2 1 \to q_2 R$ *x раз*	$01^x q_2 0$
$q_2 0 \to q_3 L$	$01^{x-1} q_3 10$
$\left.\begin{array}{l} q_3 1 \to q_4 0 \\ q_4 0 \to q_3 L \end{array}\right\} x-2$ *раз*	$\left.\begin{array}{l} 01^{x-1} q_4 00 \\ 01^{x-2} q_3 100 \end{array}\right\}$
$q_3 0 \to q_0 0$	$q_0 00^{x+1}$

- **Пример 9.** Вычислить оператор сдвига $\lambda(x)=x+1$, т. е. $q_1 01^x \Rightarrow q_0 01^{x+1}$ (табл. 5.6.8).

Таблица 5.6.8

Команда	Результат
$q_1 0 \to q_2 R$	$0q_2 1^x 0$
$q_2 1 \to q_2 R$ *x раз*	$01^x q_2 0$
$q_2 0 \to q_3 1$	$01^x q_3 10$
$q_3 1 \to q_3 L$ $x-1$ *раз*	$01^{x-1} q_3 110$
$q_3 0 \to q_0 0$	$q_0 01^{x+1}$

- **Пример 10.** Составим программу функции усеченной разности $x \dot{-} 1$ в табл. 5.6.9, если начальное и конечное слово заданы следующим образом: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 01^{x-1} 00$.

Таблица 5.6.9

Команда	**Результат**
$q_1 0 \to q_2 R$	$0 q_2 1^x 0$
$q_2 1 \to q_2 R$ *x раз*	$01^x q_2 0$
$q_2 0 \to q_3 L$	$01^{x-1} q_3 10$
$q_3 1 \to q_4 0$	$01^{x-1} q_4 00$
$q_4 0 \to q_5 L$	$01^{x-2} q_5 100$
$q_5 1 \to q_5 L$ $x-2$ *раза*	$q_5 01^{x-1} 00$
$q_5 0 \to q_0 0$	$q_0 01^{x-1} 00$
$q_3 0 \to q_0 0$	*для* $x=0$

- **Пример 11.** Построить машину Тьюринга, реализующую алгоритм вычисления функции $f(n) = n + 2$ в десятичной системе счисления.

В этом примере за внешний алфавит необходимо взять $A = \{a_0, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Нужно, чтобы машина, находясь в стандартном состоянии, заменяла последнюю цифру числа n (если эта цифра меньше 8) цифрой, на две единицы большей, и переходила в стоп-состояние. Если последняя цифра числа n равна 8, то ее нужно заменить на 0 и перейти влево в новое состояние q_2, которое добавило бы к следующему разряду единицу. Аналогично, если последняя цифра числа равна 9, то ее нужно заменить на единицу и перейти влево в состояние q_2.

Например, пусть $f(59)$, тогда начальная конфигурация $a_0 5 q_1 9 a_0$ (ввиду того, что символ 0 входит в алфавит A в качестве рабочего символа в этом примере, в отличие от всех предыдущих, содержимое пустой ячейки машины Тьюринга обозначено через a_0), а сама программа имеет вид, представленный в табл. 5.6.10.

Таблица 5.6.10

Команда	Результат
$q_1 9 \to q_2 1L$	$a_0 q_2 51 a_0$
$q_2 5 \to q_0 6C$	$a_0 q_0 61 a_0$

Для всех возможных цифр программа выглядит следующим образом (табл. 5.6.11).

Таблица 5.6.11

		a_0	**0**	**1**	**2**	**3**
q_1		—	$q_0 2$	$q_0 3$	$q_0 4$	$q_0 5$
q_2		$q_0 1$	$q_0 1$	$q_0 2$	$q_0 3$	$q_0 4$
	4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
q_1	$q_0 6$	$q_0 7$	$q_0 8$	$q_0 9$	$q_2 0L$	$q_2 1L$
q_2	$q_0 5$	$q_0 6$	$q_0 7$	$q_0 8$	$q_0 9$	$q_2 0L$

- **Пример 12.** Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пусть исходное состояние $q_1 01110$. Тогда программа может быть такой (табл. 5.6.12).

Таблица 5.6.12

Команда	Результат
$q_1 0 \to q_2 R$	$0 q_2 1110$
$\begin{cases} q_2 0 \to q_0 L \text{ если } 0 \\ q_2 1 \to q_3 R \end{cases}$	$01 q_3 110$
$q_3 1 \to q_3 0R$	$010 q_3 10$
$q_3 1 \to q_3 0R$	$0100 q_3 0$
$q_3 0 \to q_4 L$	$010 q_4 00$
$q_4 0 \to q_4 L$ *2 раза*	$0 q_4 1000$
$q_4 1 \to q_0 1$	$0 q_0 10$

5.7. Неразрешимые алгоритмические проблемы

Введение понятия машины Тьюринга уточняет понятие алгоритма и указывает путь решения какой-то массовой проблемы. Однако машина Тьюринга бывает неприменима к начальной информации (исходному слову алфавита). Та же ситуация повторяется относительно некоторых задач, для решения которых не удается создать машины Тьюринга. Один из первых результатов такого типа получен Черчем в 1936 г. Он касается проблемы распознавания выводимости в математической логике.

1. Аксиоматический метод в математике заключается в том, что все теоремы данной теории получаются посредством формально-логического вывода из нескольких аксиом, принимаемых в данной теории без доказательств. Например, в математической логике описывается специальный язык формул, позволяющий любое предложение математической теории записать в виде вполне определенной формулы, а процесс логического вывода из посылки A следствия B может быть представлен в виде процесса формальных преобразований исходной формулы. Это достигается путем использования логического исчисления, в котором указана система допустимых преобразований, изображающих элементарные акты логического умозаключения, из которых складывается любой, сколь угодно сложный формально-логический вывод.

   Вопрос о логической выводимости следствия B из посылки A является вопросом о существовании дедуктивной цепочки, ведущей от формулы A к формуле B. В связи с этим возникает проблема распознавания выводимости: существует ли для двух формул A и B дедуктивная цепочка, ведущая от A к B или нет. Решение этой проблемы понимается в смысле вопроса о существовании алгоритма, дающего ответ при любых A и B. Черчем эта проблема была решена отрицательно.

   Теорема 5.8 (теорема Черча). **Проблема распознавания выводимости алгоритмически неразрешима.**

2. Проблема распознавания самоприменимости — вторая проблема, положительное решение которой не найдено до сих пор. Ее суть заключается в следующем. Программу машины Тьюринга можно закодировать какимлибо определенным шифром. На ленте машины можно изобразить ее же собственный шифр, записанный в алфавите машины. Здесь как и в случае обычной программы возможны два случая:

   * машина применима к своему шифру, т. е. она перерабатывает этот шифр и после конечного числа тактов останавливается;

* машина неприменима к своему шифру, т. е. машина никогда не переходит в стоп-состояние.

Таким образом, сами машины (или их шифры) разбиваются на два класса: самоприменимых и несамоприменимых тьюринговых машин. Проблема заключается в следующем: как по любому заданному шифру установить, к какому классу относится машина, зашифрованная им, к классу самоприменимых или несамоприменимых.

Теорема 5.9. **Проблема распознавания самоприменимости алгоритмически неразрешима.**

3. Проблема эквивалентности слов для ассоциативных исчислений.

Рассмотрим некоторый алфавит $A = \{a, b, c, ...\}$ и множество слов в этом алфавите. Будем рассматривать преобразования одних слов в другие с помощью некоторых допустимых подстановок $\alpha \to \beta$, где α и β — два слова в том же алфавите A. Если слово γ содержит α как подслово, например $\alpha_1\alpha\alpha_2\alpha_3\alpha$, то возможны следующие подстановки: $\alpha_1\beta\alpha_2\alpha_3\alpha$, $\alpha_1\alpha\alpha_2\alpha_3\beta$, $\alpha_1\beta\alpha_2\alpha_3\beta$.

Ассоциативным исчислением называется совокупность всех слов в некотором алфавите вместе с какой-нибудь конечной системой допустимых подстановок. Для задания ассоциативного исчисления достаточно задать соответствующий алфавит и систему подстановок.

Если слово R может быть преобразовано в слово S путем однократного применения определенной подстановки, то R и S называются смежными словами. Последовательность слов $R_1, R_2, ..., R_{n-1}, R_n$ таких, что все пары слов $R_i, R_{i+1}, i = 1,2,...,n-1$ являются смежными, называется *дедуктивной цепочкой*, ведущей от слова R_1 к слову R_n. Если существует цепочка, ведущая от слова R к слову S, то R и S называются эквивалентными: $R \sim S$.

Для каждого ассоциативного исчисления возникает своя специальная проблема эквивалентности слов: для любых двух слов в данном исчислении требуется узнать, эквивалентны они или нет.

Теорема 5.10. **Проблема эквивалентности слов в любом ассоциативном исчислении алгоритмически неразрешима.**

Эта проблема решена лишь в некоторых ассоциативных исчислениях специального вида.

5.8. Практическое занятие № 12. Словарные функции. Построение программ для машин Тьюринга

5.8.1. Пусть словарная функция $F(\alpha)$ в алфавите $\mathrm{A}=\{A,B,C\}$ определена следующим образом:

$$\begin{cases} F(\Lambda)=BC, \\ F(\beta A)=H_1(\beta,F(\beta))=\text{последней букве слова } \beta, \\ F(\beta B)=H_2(\beta,F(\beta))=S_3(\beta)=\beta C, \\ F(\beta C)=H_3(\beta,F(\beta))=I_2^1(\beta,F(\beta))=\beta. \end{cases}$$

Найти значение $F(CBA)$ и определить все представляющие функции.

5.8.2. В алфавите $A=\{\underset{1}{A},\underset{2}{B},\underset{3}{C},\underset{4}{D},\underset{5}{E}\}$ задана словарная функция $F(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\begin{cases} F(\Lambda,\beta,\gamma)=G(\beta,\gamma)=\gamma, \\ F(\alpha A,\beta,\gamma)=H_1(\alpha,F(\alpha,\beta,\gamma),\beta,\gamma)=\alpha\beta\gamma, \\ F(\alpha B,\beta,\gamma)=H_2(\alpha,F(\alpha,\beta,\gamma),\beta,\gamma)=\Lambda, \\ F(\alpha C,\beta,\gamma)=H_3(\alpha,F(\alpha,\beta,\gamma),\beta,\gamma)=S_5(\alpha)=\alpha E, \\ F(\alpha D,\beta,\gamma)=H_4(\alpha,F(\alpha,\beta,\gamma),\beta,\gamma)=\gamma\beta\alpha, \\ F(\alpha E,\beta,\gamma)=H_5(\alpha,F(\alpha,\beta,\gamma),\beta,\gamma)=BCD. \end{cases}$$

Определить значение $F(CD,A,E)$ и найти соответствующее значение представляющей функции.

5.8.3. Построить машину Тьюринга для вычисления функции $\overline{\mathrm{sgn}}x=\begin{cases}1, x=0,\\ 0, x\neq 0.\end{cases}$ Исходное состояние $q_1 01110$ или $q_1 00000$.

5.8.4. Какую функцию вычисляет машина Тьюринга со следующей системой команд: $q_1 0\to q_2 0R$, $q_1 1\to q_0 1$, $q_2 0\to q_0 1$, $q_2 1\to q_2 R$?

5.8.5. Решить задачу 5.8.3. в алфавите $\mathrm{A}=\{a_0, |\}$, если начальное слово $a_0|||a_0$.

5.8.6. Построить машину Тьюринга для правильного вычисления функции $x+y$.

5.8.7. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $1 \le m \le n$.

5.8.8. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ правильно вычислимы. Показать, что функция $h(x) = f(g(x))$ правильно вычислима.

5.8.9. Построить машины Тьюринга для правильного вычисления функций:

а) $x \dot{-} y$;

б) $\left[\frac{x}{2}\right]$.

5.8.10. Показать, что если функция $g(x, y)$ правильно вычислима, то и функция $f(x) = \mu_y(g(x, y) = 0)$ правильно вычислима.

Часть II

Ответы, решения, указания

Глава 6. Алгебра высказываний

Глава 7. Исчисление высказываний

Глава 8. Логика предикатов

Глава 9. Исчисление предикатов

Глава 10. Теория алгоритмов

Глава 6

Алгебра высказываний

6.1. Ответы и решения задач практического занятия № 1

1.5.1. Все предложения, кроме предложения 6, являются высказываниями. Высказывание 2 считается истинным в геометрии Евклида и ложным в геометрии Лобачевского. Вcказывание 3 ложно. Высказывания 1, 4 и 7 истинны. В текущее время неизвестно, истинно или ложно высказывание 5.

1.5.2.

1) $\overline{p} = \{$ число 174 не делится на 3 $\}$ ложно; $p \vee q = \{$ число 174 делится на 3 или идет дождь $\}$ истинно; $p \wedge q = \{$ число 174 делится на 3 и идет дождь $\}$ ложно; $p \to q = \{$ если 174 делится на 3, то идет дождь $\}$ ложно; $\overline{p} \to q = \{$ если 174 не делится на 3, то идет дождь $\}$ истинно; $p \leftrightarrow \overline{q} = \{$ 174 делится на 3 тогда и только тогда, когда не идет дождь $\}$ истинно.

2) $\overline{q} = \{$ неверно, что если число простое, то оно нечетное $\}$, если число равно двум, высказывание истинно, во всех остальных случаях оно ложно; $\overline{q \to p} = \{$ неверно, что если истинно, что если число простое, то оно нечетное, тогда конъюнкция коммутативна $\equiv$ если число простое, то оно нечетное и конъюнкция некоммутативна $\}$ ложно; $\left(p \wedge \overline{q}\right) \to p$ — истинное высказывание; $\left(q \vee p\right) \to \overline{q} \equiv \overline{q}$ — смотрите первый случай.

1.5.3. Высказываниями являются второе и третье утверждения, причем второе ложно, а третье истинно.

1.5.4. Противоречивы данные 2 и 3.

1.5.5. Не формулами являются последовательности 1 и 4.

1.5.6. 1) $A_0, A_1, A_2, \overline{A_0}, A_0 \to A_1, A_1 \to A_2, \overline{A_0} \vee A_2, (A_0 \to A_1) \vee (A_1 \to A_2)$;

2) $A_1, A_2, A_3, \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_1} \to \overline{A_2}, A_2 \leftrightarrow A_3$;

3) $A_1, A_2, A_3, B, C, B \vee C, A_3 \wedge (B \vee C), A_2 \vee A_3 \wedge (B \vee C)$.

1.5.7. Тождественно истинными являются формулы 2 и 3.

1.5.8. $x \to y = 1,\ z \to (x \to y) \equiv z \to 1 = 1$ всегда;

$\overline{x \to y} \to y \equiv \bar{1} \to y \equiv 0 \to y = 1$ всегда;

$$(x \to y) \to z \equiv 1 \to z = \begin{cases} 1, & z = 1, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

1.5.9. Таблнцы истинности всех требуемых формул представлеиы в табл. 6.1–6.8.

Таблица 6.1

A_1	A_2	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_1} \vee A_2$	$A_1 \to \overline{A_2}$	1)
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Таблица 6.2

A_1	A_2	A_3	$A_1 \to A_2$	$A_1 \to A_3$	$A_2 \to A_3$	$A_1 \to (A_2 \to A_3)$	$(A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3)$	2)
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Таблица 6.3

P	Q	$P \wedge Q$	$P \leftrightarrow Q$	3)
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	1	0

Таблица 6.4

P	Q	$\overline{P}$	$Q \to P$	$P \wedge (Q \to P)$	4)
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

Таблица 6.5

P	Q	$\overline{P}$	$Q \vee \overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q} \to P$	$P \wedge (Q \vee \overline{P})$	$(P \wedge (Q \vee \overline{P})) \wedge$ $\wedge (\overline{Q} \to P)$	5)
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	0	0

Таблица 6.6

P	Q	R	$Q \wedge P$	$\overline{Q \wedge P}$	$P \to \overline{Q \wedge P}$	$\overline{P \to \overline{Q \wedge P}}$	$P \vee R$	6)
1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1

Таблица 6.6 (окончание)

P	Q	R	$Q\wedge P$	$\overline{Q\wedge P}$	$P\to\overline{Q\wedge P}$	$\overline{P\to\overline{Q\wedge P}}$	$P\vee R$	6)
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0	1

Таблица 6.7

P	Q	$\overline{P}$	$Q\vee\overline{P}$	$\overline{Q}$	$\overline{Q}\to P$	$P\wedge\left(Q\vee\overline{P}\right)$	$\left(\overline{Q}\to P\right)\vee Q$	7)
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0

Таблица 6.8

P	Q	$P\to Q$	$Q\wedge P$	$P\to(Q\wedge P)$	8)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1

1.5.10. Упростим формулы путем равносильных преобразований. Тогда будет очевиден набор переменных, при которых формула может принимать логическое значение 1.

1) $\overline{P\to\overline{P}}\equiv\overline{\overline{P}\vee\overline{P}}\equiv\overline{\overline{P}}\wedge\overline{\overline{P}}\equiv P$, $P=1$.

2) $\left(Q\to(P\wedge R)\right)\wedge\overline{\left((P\vee R)\to Q\right)}\equiv\left(\overline{Q}\vee(P\wedge R)\right)\wedge\overline{\left(\overline{(P\vee R)}\vee Q\right)}\equiv$

$\equiv\left(\overline{Q}\vee(P\wedge R)\right)\wedge\left((P\vee R)\wedge\overline{Q}\right)\equiv$

$\equiv\left(\left(\overline{Q}\vee P\right)\wedge\left(\overline{Q}\vee R\right)\right)\wedge\left(\left(P\wedge\overline{Q}\right)\vee\left(R\wedge\overline{Q}\right)\right)\equiv$

$$\equiv \left(\overline{Q} \vee P\overline{Q} \vee R\overline{Q} \vee PR\right) \wedge \left(P\overline{Q} \vee R\overline{Q}\right) \equiv$$

$$\equiv P\overline{Q} \vee P\overline{Q} \vee P\overline{Q}R \vee P\overline{Q}R \vee \overline{Q}R \vee P\overline{Q}R \vee \overline{Q}R \vee P\overline{Q}R \equiv$$

$$\equiv P\overline{Q}R \vee \overline{Q}R \vee P\overline{Q} \equiv \overline{Q}R(P \vee 1) \vee P\overline{Q} \equiv \overline{Q}R \vee P\overline{Q} \equiv \overline{Q}(P \vee R).$$

$Q = 0,\ P = R = 1$

3) $(P \to Q) \to (Q \to P) \equiv \overline{\overline{P} \vee Q} \vee \left(\overline{Q} \vee P\right) \equiv \left(P \vee \overline{Q}\right) \vee \overline{Q} \vee P \equiv$

$$\equiv \overline{Q}(P \vee 1) \vee P \equiv P \vee \overline{Q}.$$

$P = 1,\ Q = 1$.

1.5.11. $\left(\overline{\overline{P} \vee P} \wedge Q\right) \to R \equiv (0 \wedge Q) \to R \equiv 0 \to R \equiv 1 \vee R \equiv 1$. Таким образом, данное высказывание является тождественно истинным и не зависит от того, истинны или ложны высказывания P, Q и R.

1.5.12. Тождественная истинность формул доказывается либо непосредственно по таблицам истинности, либо путем равносильных преобразований. Для формул 1 и 8 приведены таблицы истинности (табл. 6.9 и 6.10).

1)

Таблица 6.9

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \to (P \wedge Q)$	$P \to (Q \to (P \wedge Q))$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1

2) $(P \to Q) \to \left(\left(P \to \overline{Q}\right) \to \overline{P}\right) \equiv \overline{\overline{P} \vee Q} \vee \left(\overline{\overline{P} \vee \overline{Q}} \vee \overline{P}\right) \equiv \left(P \wedge \overline{Q}\right) \vee$

$$\vee (P \wedge Q) \vee \overline{P} \equiv P\overline{Q} \vee PQ \vee \overline{P} \equiv P\left(\overline{Q} \vee Q\right) \vee P \equiv P \vee \overline{P} \equiv 1$$

3) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R)) \equiv \overline{\overline{P} \vee R} \vee \left(\overline{\overline{Q} \vee R} \vee \right.$

$$\left. \vee\, \overline{P \vee Q} \vee R\right) \equiv \left(P \wedge \overline{R}\right) \vee \left(\left(Q \wedge \overline{R}\right) \vee \left(\left(\overline{P} \wedge \overline{Q}\right) \vee R\right)\right) \equiv P\overline{R} \vee Q\overline{R} \vee$$

$$\vee\, \overline{P}\,\overline{Q} \vee R \equiv P\overline{R} \wedge \left(Q \vee \overline{Q}\right) \vee Q\overline{R}\left(P \vee \overline{P}\right) \vee \overline{P}\,\overline{Q}\left(R \vee \overline{R}\right) \vee P \wedge$$

$$\wedge \left(R \vee \overline{R}\right) \wedge \left(Q \vee \overline{Q}\right) \equiv PQ\overline{R} \vee P\overline{Q}\,\overline{R} \vee \overline{P}Q\overline{R} \vee \overline{P}\,\overline{Q}R \vee \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} \vee$$

$$\vee PQR \vee P\bar{Q}R \vee \bar{P}QR \equiv PQ(R \vee \bar{R}) \vee P\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \vee \bar{P}Q(R \vee \bar{R}) \vee$$

$$\vee \bar{P}\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \equiv P(Q \vee \bar{Q}) \vee \bar{P}(Q \vee \bar{Q}) \equiv P \vee \bar{P} \equiv 1$$

4) $(Q \to R) \to ((P \vee Q) \to (P \vee R)) \equiv \overline{\bar{Q} \vee R} \vee \overline{P \vee Q} \vee (P \vee R) \equiv$

$$\equiv (Q \vee \bar{R}) \vee (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \vee (P \vee R) \equiv Q\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q} \vee P \vee R \equiv Q\bar{R}(P \vee \bar{P}) \vee$$

$$\vee \bar{P}\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \vee P(Q \vee \bar{Q})(R \vee \bar{R}) \vee R(P \vee \bar{P})(Q \vee \bar{Q}) \equiv PQ\bar{R} \vee$$

$$\vee \bar{P}Q\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}R \vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R} \vee PQR \vee P\bar{Q}R \vee PQ\bar{R} \vee$$

$$\vee P\bar{Q}\bar{R} \vee PQR \vee \bar{P}QR \vee P\bar{Q}R \vee \bar{P}\bar{Q}R \equiv PQ\bar{R} \vee \bar{P}Q\bar{R} \vee \bar{P}\bar{Q}R \vee$$

$$\vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R} \vee PQR \vee P\bar{Q}R \vee \vee P\bar{Q}\bar{R} \vee \bar{P}QR \equiv PQ(R \vee \bar{R}) \vee \bar{P}Q(R \vee \bar{R}) \vee$$

$$\vee \bar{P}\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \vee P\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \equiv Q(P \vee \bar{P}) \vee \bar{Q}(P \vee \bar{P}) \equiv Q \vee \bar{Q} \equiv 1$$

5) $(\bar{Q} \to \bar{P}) \to ((\bar{Q} \to P) \to Q) \equiv \overline{Q \vee \bar{P}} \vee (\overline{Q \vee P} \vee Q) \equiv \bar{Q}P \vee \bar{Q}\bar{P} \vee$

$$\vee Q \equiv \bar{Q}(P \vee \bar{P}) \vee Q \equiv \bar{Q} \vee Q \equiv 1$$

6) $\bar{P} \to (P \to Q) \equiv P \vee \bar{P} \vee Q \equiv 1 \vee Q \equiv 1$

7) $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R)) \equiv \overline{\bar{P} \vee Q} \vee (\overline{\bar{Q} \vee R} \vee (\bar{P} \vee R)) \equiv$

$$\equiv P\bar{Q} \vee Q\bar{R} \vee \bar{P} \vee R \equiv P\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \vee Q\bar{R}(P \vee \bar{P}) \vee \bar{P}(Q \vee \bar{Q})(R \vee \bar{R}) \vee$$

$$\vee R(P \vee \bar{P})(Q \vee \bar{Q}) \equiv P\bar{Q}R \vee P\bar{Q}\bar{R} \vee PQ\bar{R} \vee \bar{P}Q\bar{R} \vee \bar{P}QR \vee \bar{P}\bar{Q}R \vee$$

$$\wedge \bar{P}\bar{Q}R \vee \bar{P}\bar{Q}\bar{R} \vee PQR \vee \bar{P}QR \vee P\bar{Q}R \vee \bar{P}\bar{Q}R \equiv P\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \vee$$

$$\vee PQ(R \vee \bar{R}) \vee \bar{P}Q(R \vee \bar{R}) \vee \bar{P}\bar{Q}(R \vee \bar{R}) \equiv P(Q \vee \bar{Q}) \vee$$

$$\vee \bar{P}(Q \vee \bar{Q}) \equiv P \vee \bar{P} \equiv 1$$

8)

Таблица 6.10

P	$\bar{P}$	$\bar{\bar{P}}$	$P \to \bar{\bar{P}}$
1	0	1	1
0	1	0	1

1.5.13.

$$1)\ \left(\left(P \to (Q \wedge R)\right) \to \left(\overline{Q} \to \overline{P}\right)\right) \to \overline{Q} \equiv \overline{\overline{\overline{P} \vee QR} \vee \left(Q \vee \overline{P}\right)} \vee \overline{Q} \equiv$$

$$\equiv \overline{P \wedge \overline{QR} \vee Q \vee \overline{\overline{P}}} \vee \overline{Q} \equiv \overline{P \wedge (Q \vee R) \vee Q \vee \overline{\overline{P}}} \vee \overline{Q} \equiv$$

$$\equiv \overline{PQ \vee PR \vee Q \vee \overline{\overline{P}}} \vee \overline{Q} \equiv \overline{Q} \vee P\overline{Q}R \equiv \overline{Q}(1 \vee PR) \equiv \overline{Q}.$$

Тогда, например, если P и R — любые, а $Q = 1$, то исходная формула ложна.

$$2)\ ((P \vee Q) \vee R) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \equiv \overline{P \vee Q \vee R} \vee$$

$$\vee (P \vee PQ \vee PR \vee QR) \equiv \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} \vee (P \vee QR) \equiv \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} \vee P \vee QR.$$

Тогда $P = Q = 0,\ R = 1$.

3) Для формулы 3 таблица истинности такова (табл. 6.11).

Таблица 6.11

P	Q	$P \vee Q$	$\overline{P}$	$\overline{P} \wedge Q$	$P \wedge Q$	$(\overline{P} \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$	3)
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1

Из табл. 6.11 видно, что $P = 1,\ Q = 0$.

1.5.14.

1) Пусть, например, $Q \vee R = 0$, тогда $Q = 0$ и $R = 0$ и $\begin{cases} \overline{P} \vee 0 = 1 \\ P \vee 0 = 1 \end{cases}$,

т. е. $\begin{cases} P = 0 \\ P = 1 \end{cases}$, что невозможно.

2) Предположим, что $P \to \overline{R} = 0$. Тогда, очевидно, $P = 1$ и $R = 1$, т. е. $\overline{R} = 0$. Следовательно, $\overline{P} \vee Q = \overline{1} \vee Q = 0 \vee Q = 1$ и $\overline{R} \vee \overline{Q} = 0 \vee \overline{Q} = 1$, т. е. $Q = 1$ и $\overline{Q} = 1$ одновременно, что невозможно. Таким образом, всегда $P \to \overline{R} \neq 0$, т. е. $P \to \overline{R} = 1$.

3) Пусть $R \vee W = 0$. Отсюда по таблице истинности $R = 0$, $W = 0$.

Но $P \to R = 1$ и $Q \to W = 1$, т. е. $\begin{cases} P \to 0 = 1, \\ Q \to 0 = 1. \end{cases}$ Тогда $Q = 0$ и $P = 0$, $P \vee Q = 0 \neq 1$. Получено противоречие, т. е. $R \vee W = 1$.

1.5.15. Таблицы истинности (табл. 6.12) для двухместных операций имеют следующий вид.

Таблица 6.12

P	Q	**Операция**
1	1	*
1	0	*
0	1	*
0	0	*

Все эти таблицы различаются только последним столбцом, элементы которого заменены значком *. Вместо * может стоять 1 или 0, причем возможны любые комбинации. Различных комбинаций будет $2^4 = 16$ (это размещения с повторениями из двух элементов по четыре).

1.5.16. $A \vee B \equiv \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$, $A \wedge B \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$.

1.5.17. Составим таблицу истинности для операции $\oplus$, начиная с тех строк, для которых $\oplus$ истинна. Каждой такой строке поставим в соответствие конъюнкцию тех простых высказываний, которые в этой строке истинны, и отрицание остальных. Затем найдем дизъюнкцию этих конъюнкций. Каждая из построенных конъюнкций будет истинна только при тех значениях истинности простых высказываний, которые стоят в соответствующей ей строке. Ясно, что логическая операция $\oplus$ определяется множеством наборов, на которых полученное сложное высказывание истинно и только на них, на остальных оно ложно. Например, для эквиваленции: $A_1 \leftrightarrow A_2 \equiv (A_1 \to A_2) \wedge (A_2 \to A_1)$.

Таблица 6.13

A_1	A_2	$A_1 \leftrightarrow A_2$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Из табл. 6.13 видно, что

$$(A_1 \wedge A_2) \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2}) \equiv (A_1 \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2})) \wedge (A_2 \vee (\overline{A_1} \wedge \overline{A_2})) \equiv$$

$$\equiv ((A_1 \vee \overline{A_1}) \wedge (A_1 \vee \overline{A_2})) \wedge ((A_2 \vee \overline{A_1}) \wedge (A_2 \vee \overline{A_2})) \equiv (A_1 \vee \overline{A_2}) \wedge$$

$$\wedge (A_2 \vee \overline{A_1}) \equiv (A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_1) \equiv A_1 \leftrightarrow A_2.$$

1.5.18.

1) $\overline{A \rightarrow B} \equiv \overline{\overline{A} \vee B} \equiv \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} \equiv A \wedge \overline{B}$;

2) $A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C) \equiv$

$$\equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \wedge (A \vee C) \equiv ((A \wedge B) \wedge (A \vee C)) \vee$$

$$\vee ((A \wedge C) \wedge (A \vee C)) \equiv (A \wedge (A \wedge B) \vee C \wedge (A \wedge B)) \vee$$

$$\vee (A \wedge (A \wedge C) \vee C \wedge (A \wedge C)) \equiv (AB \vee ABC) \vee (A \vee AC) \equiv$$

$$\equiv AB(1 \vee C) \vee AC \equiv AB \vee AC \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

3) $(A \wedge A) \equiv AA \equiv A$;

4) $(A \vee (B \wedge A)) \equiv A$ или по табл. 6.14.

Таблица 6.14

A	B	$B \wedge A$	$A \vee (B \wedge A)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

5) Логические значения левой и правой частей формулы 5 приведены в табл. 6.15.

Таблица 6.15

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1

Таблица 6.15 (окончание)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

6) $(A \wedge B) \vee \left((A \vee B) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)\right) \equiv \left((A \wedge B) \vee (A \vee B)\right) \wedge \left((A \wedge B) \vee \right.$
$\left. \vee \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)\right) \equiv \left(((A \vee B) \vee A) \wedge ((A \vee B) \vee B)\right) \wedge \left(\left(\left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \vee A\right) \wedge \right.$
$\left. \wedge \left(\left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \vee B\right)\right) \equiv \left((A \vee B) \wedge (A \vee B)\right) \wedge (1 \wedge 1) \equiv A \vee B.$

7) Логические значения левой и правой частей формулы 7 приведены в табл. 6.16.

Таблица 6.16

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

1.5.19. Пусть дана исходная формула A. Если она содержит импликацию, то эту логическую связку можно убрать, используя эквивалентность $A_1 \to B_1 \equiv \overline{A_1} \vee B_1$, где A_1 и B_1 — подформулы формулы A. Отрицание всегда можно отнести к простым высказываниям по формулам $\overline{A_1 \wedge B_1} \equiv \overline{A_1} \vee \overline{B_1}$ и $\overline{A_1 \vee B_1} \equiv \overline{A_1} \wedge \overline{B_1}$ и используя следующую эквивалентность: если $C \equiv D$, то $L(C) \equiv L(D)$.

6.2. Ответы и решения практического занятия №2

1.11.1. Пусть формуле A_1 соответствует функция $f(A_1)$, формуле A_2 соответствует булева функция $f(A_2)$. Если $A_i = \begin{cases} \text{истина}, \\ \text{ложь}, \end{cases}$ то $f(A_i) = \begin{cases} 1, \\ 0. \end{cases}$

Тогда $f(\overline{A}) = \overline{f}(A)$, $f(A_1 \wedge A_2) = f(A_1) \wedge f(A_2)$,

$f(A_1 \vee A_2) = f(A_1) \vee f(A_2)$, $f(A_1 \to A_2) = f(A_1) \to f(A_2)$.

Видно, что значению истина всегда соответствует значение 1, значению ложь соответствует 0.

1.11.2. Это число равно числу двоичных наборов длины 2^n. Действительно, в истинностной таблице функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ фиксируем каким-либо способом порядок строчек, т. е. порядок наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ однозначно определяется своим последним столбцом, т. е. набором из 2^n нулей и единиц. Различных функций столько, сколько имеется различных наборов длины 2^n из двух элементов 0 и 1, т. е. 2^{2^n}.

1.11.3. $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \equiv$

$\equiv x_2 \overline{x_3}(x_1 \vee \overline{x_1}) \vee \overline{x_2} x_3 (x_1 \vee \overline{x_1}) \equiv x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_2} x_3;$

$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \equiv$

$\equiv \overline{x_2}\,\overline{x_3}(x_1 \vee \overline{x_1}) \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \equiv x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee$

$\vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3} \equiv \overline{x_1}(x_2 \vee \overline{x_2} x_3) \vee \overline{x_2}(\overline{x_3} \vee x_1 x_3) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \equiv$

$\equiv \overline{x_1}(x_2 \vee x_3) \vee \overline{x_2}(x_1 \vee \overline{x_3}) \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \equiv \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_2} x_1 \vee \overline{x_2} x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \equiv$

$\equiv x_2(\overline{x_1} \vee x_1 \overline{x_3}) \vee \overline{x_1} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2} x_3 \equiv \overline{x_1} x_2 \vee x_2 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_2} x_3 \equiv$

$\equiv \overline{x_1}(x_2 \vee x_3) \vee \overline{x_2}(x_1 \vee x_3) \vee x_2 \overline{x_3};$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \equiv \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3 \vee \overline{x_3}) \equiv \overline{x_1}\,\overline{x_2};$

$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \equiv x_1 x_3 (x_2 \vee \overline{x_2}) \vee$

$\vee \overline{x_2}(x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_3) \equiv x_1 x_3 \vee \overline{x_2}(x_1 \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_3).$

1.11.4.

1) $f(0,y,z)=(0\wedge y)\vee(\bar y\wedge z)\equiv\bar y z$,

$f(1,y,z)=(1\wedge y)\vee(\bar y\wedge z)\equiv y\vee\bar y z\equiv(y\vee\bar y)\wedge(y\vee z)\equiv y\vee z$,

$f(0,y,z)\neq f(1,y,z)$; $f(x,0,z)=(x\wedge 0)\vee(1\wedge z)\equiv z$,

$f(x,1,z)=(x\wedge 1)\vee(0\wedge z)\equiv x$, $f(x,0,z)\neq f(x,1,z)$;

$f(x,y,0)=(x\wedge y)\vee(\bar y\wedge 0)\equiv xy$,

$f(x,y,1)=(x\wedge y)\vee(\bar y\wedge 1)\equiv\bar y(x\wedge y)\equiv(x\vee\bar y)\wedge(y\vee\bar y)\equiv x\vee\bar y$,

$f(x,y,0)\neq f(x,y,1)$. Все переменные существенны.

2) $f(0,y)=(0\wedge y)\vee 0\equiv 0$, $f(1,y)=(1\wedge y)\vee 1\equiv 1$,

$f(0,y)\neq f(1,y)$, $f(x,0)=(x\wedge 0)\vee x\equiv 0\vee x\equiv x$,

$f(x,1)=(x\wedge 1)\vee x\equiv x\vee x\equiv x$, $f(x,0)=f(x,1)$. x — существенная переменная, y — фиктивная.

3) $f(x,y,z)=(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))\equiv$

$$\equiv\overline{\bar x\vee(\bar y\vee z)}\vee\left(\overline{\bar x\vee y}\vee(\bar x\vee z)\right)\equiv x\wedge\overline{\bar y\vee z}\vee((x\wedge\bar y)\vee(\bar x\vee z))\equiv$$

$$\equiv x\wedge(y\wedge\bar z)\vee((x\vee\bar x)\wedge(\bar x\vee\bar y)\vee z)\equiv xy\bar z\vee(\bar x\vee\bar y\vee z)\equiv(\bar x\vee xy\bar z)\vee$$

$$\vee\bar y\vee z\equiv\bar x\vee(y\bar z\vee\bar y)\vee z\equiv\bar x\vee\bar y\vee\bar z\vee z\equiv\bar x\vee\bar y\vee 1\equiv 1.$$

Все три переменные в формуле — фиктивные, формула тождественно истинная.

1.11.5.

1) $x\wedge y\equiv\overline{\bar x\vee\bar y}$, $x\to y\equiv\bar x\vee y$;

2) $x\wedge y\equiv\bar{\bar x}\wedge\bar{\bar y}\equiv\overline{\bar x\vee\bar y}\equiv\overline{x\to\bar y}$, $x\vee y\equiv\bar{\bar x}\vee y\equiv\bar x\to y$;

3) $\bar x\equiv\bar x\vee 0\equiv x\to 0$;

4) $x\vee y\equiv(x\vee y)\wedge(y\vee\bar y)\equiv(x\wedge\bar y)\vee y\equiv\left(\bar{\bar x}\wedge\bar y\right)\vee y\equiv$

$\equiv\overline{\bar x\vee y}\vee y\equiv(x\to y)\to y$.

1.11.6.

1) $((A \to B) \to (C \to A)) \to (\overline{B} \to \overline{C}) \equiv \overline{\overline{\overline{A} \vee B} \vee (\overline{C} \vee A)} \vee (\overline{\overline{B}} \vee \overline{C}) \equiv$

$\equiv \overline{\overline{\overline{A} \vee B}} \wedge \overline{\overline{C} \vee A} \vee B \vee \overline{C} \equiv ((\overline{A} \vee B) \wedge (C \wedge \overline{A})) \vee B \vee \overline{C} \equiv$

$\equiv ((\overline{A} \vee B) \wedge C \wedge \overline{A}) \vee B \vee \overline{C} \equiv (((\overline{A} \wedge \overline{A}) \vee (\overline{A} \wedge B)) \wedge C) \vee B \vee \overline{C} \equiv$

$\equiv \overline{A}C \vee \overline{A}BC \vee B \vee \overline{C} \equiv \overline{A}C \vee B \vee \overline{C}$ — ДНФ, получим теперь КНФ.

$\overline{A}C \vee B \vee \overline{C} \equiv ((\overline{A} \vee B) \wedge (C \vee B)) \vee \overline{C} \equiv$

$\equiv ((\overline{A} \vee B \vee \overline{C}) \wedge (C \vee B \vee \overline{C})) \equiv \overline{A} \vee B \vee \overline{C}$ — КНФ;

2) $(((A \to B) \to \overline{A}) \to \overline{B}) \to \overline{C}) \to C \equiv \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{A}} \vee \overline{B}} \vee \overline{C}} \vee C \equiv$

$\equiv \overline{\overline{\overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{A}} \vee \overline{B}} \wedge C \vee C \equiv (((\overline{A} \vee B) \wedge A) \vee \overline{B}) \wedge C) \vee C \equiv$

$\equiv (((\overline{A} \wedge A) \vee (A \wedge B) \vee \overline{B}) \wedge C) \vee C \equiv (((A \vee \overline{B}) \wedge (B \vee \overline{B})) \wedge C) \vee C \equiv$

$\equiv ((A \vee \overline{B}) \wedge C) \vee C \equiv ((A \wedge C) \vee (\overline{B} \wedge C)) \vee C \equiv$ — ДНФ,

$\equiv AC \vee \overline{B}C \vee C \equiv \overline{B}C \vee C$

$\overline{B}C \vee C \equiv (\overline{B} \wedge C) \vee C \equiv (\overline{B} \vee C) \wedge (C \vee C) \equiv (\overline{B} \vee C) \wedge C$ — КНФ;

3) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to \overline{C}) \to (A \to \overline{B}))) \equiv$

$\equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee C} \vee \overline{\overline{A} \vee \overline{C}} \vee \overline{A} \vee \overline{B} \equiv (A \wedge (B \wedge \overline{C})) \vee (A \wedge C) \vee (\overline{A} \vee \overline{B}) \equiv$

$\equiv AB\overline{C} \vee AC \vee \overline{A} \vee \overline{B}$ — ДНФ,

$AB\overline{C} \vee AC \vee \overline{A} \vee \overline{B} \equiv AB\overline{C} \vee \overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$ — КНФ.

1.11.7. Пусть переменные $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принимают значение 1, а переменные $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — значение 0. Требуемой элементарной конъюнкцией будет выражение $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \overline{B_1} \wedge \overline{B_2} \wedge \ldots \wedge \overline{B_m}$.

1.11.8.

1) Табличный способ реализован для формулы 1. Результаты приведены в табл. 6.17.

Таблица 6.17

A	B	C	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$BC \to AC$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \to \bar{B}$	1)
1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

СДНФ $= ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

Способ эквивалентных преобразований:

$$\left(\left(\bar{A} \to \bar{B}\right) \to \left(\left(B \wedge C\right) \to \left(A \wedge C\right)\right)\right) \equiv \overline{\bar{\bar{A}} \vee \bar{B}} \vee \left(\overline{B \wedge C} \vee \left(A \wedge C\right)\right) \equiv \left(\bar{A} \wedge B\right) \vee$$
$$\vee \left(\left(\bar{B} \vee \bar{C}\right) \vee AC\right) \equiv \bar{A}B \vee \left(\bar{B} \vee \left(\bar{C} \vee A\right) \wedge \left(\bar{C} \vee C\right)\right) \equiv \bar{A}B \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee A \equiv$$
$$\equiv \bar{A}B\left(C \vee \bar{C}\right) \vee \bar{B}\left(A \vee \bar{A}\right)\left(C \vee \bar{C}\right) \vee \bar{C}\left(A \vee \bar{A}\right)\left(B \vee \bar{B}\right) \vee A\left(B \vee \bar{B}\right)\left(C \vee \bar{C}\right) \equiv$$
$$\equiv \bar{A}BC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}C \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee AB\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee$$
$$\vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee ABC \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \equiv ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee$$
$$\vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}BC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Надо заметить, что способ эквивалентных преобразований заметно лучше табличного. При малом числе переменных это не ощутимо, но, если, например, рассмотреть функцию $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{20}\right) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{20}$, то будет видно, что формула в правой части содержит 39 символов (20 символов переменных и 19 символов дизъюнкции), таблица же для $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{20}\right)$ содержит $2^{20} > 10^6$, т. е. более миллиона строк.

2) $\left(\left(A \to B\right) \to \bar{A}\right) \to \left(A \to \left(B \wedge A\right)\right) \equiv \overline{\overline{\bar{A} \vee B} \vee \bar{A}} \vee \left(\bar{A} \vee AB\right) \equiv$
$\equiv \left(\left(\bar{A} \vee B\right) \wedge A\right) \vee \left(\bar{A} \vee AB\right) \equiv \left(\bar{A} \wedge A\right) \vee \left(A \wedge B\right) \vee \left(\bar{A} \vee AB\right) \equiv$
$\equiv AB \vee AB \vee \bar{A} \equiv AB \vee \bar{A} \equiv AB \vee \bar{A}\left(B \vee \bar{B}\right) \equiv AB \vee \bar{A}B \vee \overline{AB}$;

3) $\overline{A\wedge B\to\overline{A}}\wedge\overline{A\wedge B\to\overline{B}}\equiv\overline{\overline{A\wedge B}\vee\overline{A}}\wedge\overline{\overline{A\wedge B}\vee\overline{B}}\equiv$
$\equiv(AB\wedge A)\wedge(AB\wedge B)\equiv A\wedge B$;

4) $A_1\to(A_2\to(\ldots\to(A_{n-1}\to A_n)\ldots))\equiv\overline{A_1}\vee(\overline{A_2}\vee(\ldots\vee$
$\vee(\overline{A_{n-1}}\vee A_n)\ldots))\equiv\overline{A_1}\vee\overline{A_2}\vee\ldots\vee\overline{A_{n-1}}\vee A_n\equiv$
$\equiv\overline{A_1}(A_2\vee\overline{A_2})(A_3\vee\overline{A_3})..(A_n\vee\overline{A_n})\vee$
$\vee\overline{A_2}(A_1\vee\overline{A_1})(A_3\vee\overline{A_3})..(A_n\vee\overline{A_n})\vee\ldots$
$\ldots\vee\overline{A_{n-1}}(A_1\vee\overline{A_1})(A_2\vee\overline{A_2})..(A_{n-2}\vee\overline{A_{n-2}})\cdot$
$\cdot(A_n\vee\overline{A_n})\vee A_n(A_1\vee\overline{A_1})(A_2\vee\overline{A_2})..(A_{n-1}\vee\overline{A_{n-1}})$

Все записанные конъюнкции раскрываются одинаково. Например,
$\overline{A_1}(A_2\vee\overline{A_2})..(A_{n-1}\vee\overline{A_{n-1}})(A_n\vee\overline{A_n})\equiv$
$\equiv(\overline{A_1}A_2\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2})..(A_{n-1}\vee\overline{A_{n-1}})(A_n\vee\overline{A_n})\equiv$
$\equiv(\overline{A_1}A_2A_{n-1}\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_{n-1}\vee\ldots\vee\overline{A_1}A_2\overline{A_{n-1}}\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_{n-1}})(A_n\vee\overline{A_n})\equiv$
$\equiv\overline{A_1}A_2A_{n-1}A_n\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_{n-1}A_n\vee\ldots\vee\overline{A_1}A_2\overline{A_{n-1}}A_n\vee$
$\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_{n-1}}A_n\vee\overline{A_1}A_2A_{n-1}\overline{A_n}\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_{n-1}\overline{A_n}\vee\ldots$
$\vee\overline{A_1}A_2\overline{A_{n-1}}\,\overline{A_n}\vee\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_{n-1}}\,\overline{A_n}$

и т. д. После слияний членов по закону идемпотентности в итоговой СДНФ всей формулы будут содержаться все логические слагаемые вида $A_1^{\sigma_1}\wedge A_2^{\sigma_2}\wedge\ldots\wedge A_n^{\sigma_n}$, кроме одного $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_{n-1}\overline{A_n}$.

5) $(\overline{A}\to C)\to\overline{\overline{\overline{B}}\to\overline{A}}\equiv\overline{\overline{\overline{A}}\vee C}\vee\overline{\overline{\overline{B}}\vee\overline{A}}\equiv(\overline{A}\wedge\overline{C})\vee(\overline{B}\wedge A)\equiv$
$\equiv\overline{A}\overline{C}\vee AB\equiv\overline{A}\,\overline{C}(B\vee\overline{B})\vee AB(C\vee\overline{C})\equiv$
$\equiv\overline{A}\overline{C}B\vee\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{B}\vee ABC\vee AB\overline{C}.$

1.11.9.

1) Табличный способ для формулы 1 (табл. 6.18).

Таблица 6.18

A	B	C	$\overline{B \vee C}$	$\overline{B \vee C} \to A$	$C \to A$	1)	$\overline{1)}$
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	1

СДНФ $\overline{1)} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$. СКНФ $1) = \overline{\text{СДНФ}\,\overline{1)}} = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}} \equiv A \vee B \vee C$.

Метод эквивалентных преобразований:

$$(C \to A) \to \left(\overline{B \vee C} \to A\right) \equiv \overline{\overline{C} \vee A} \vee \overline{\overline{B \vee C}} \vee A \equiv$$
$$\equiv \left(C \wedge \overline{A}\right) \vee (B \vee C \vee A) \equiv A \vee B \vee C \vee C\overline{A} \equiv A \vee B \vee C;$$

2) $$\overline{A \wedge B \to A} \vee (A \wedge (B \vee C)) \equiv \overline{\overline{A \wedge B} \vee A} \vee (AB \vee AC) \equiv$$
$$\equiv \left(AB \wedge \overline{A}\right) \vee (AB \vee AC) \equiv AB \vee AC \equiv A(B \vee C) \equiv$$
$$\equiv \left(A \vee \left(B \wedge \overline{B}\right)\right) \wedge \left((B \vee C) \vee \left(A \wedge \overline{A}\right)\right) \equiv$$
$$\equiv (A \vee B) \wedge \left(A \vee \overline{B}\right) \wedge (B \vee C \vee A) \wedge \left(B \vee C \vee \overline{A}\right) \equiv$$
$$\equiv \left((A \vee B) \vee \left(C \wedge \overline{C}\right)\right) \wedge \left(\left(A \vee \overline{B}\right) \vee \left(C \wedge \overline{C}\right)\right) \wedge$$
$$\wedge (A \vee B \vee C) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee C\right) \equiv (A \vee B \vee C) \wedge \left(A \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge$$
$$\wedge \left(A \vee \overline{B} \vee C\right) \wedge \left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee C\right) \equiv$$
$$\equiv (A \vee B \vee C)\left(A \vee B \vee \overline{C}\right)\left(A \vee \overline{B} \vee C\right)\left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)\left(\overline{A} \vee B \vee C\right);$$

3) $$\overline{A \wedge (B \vee C)} \to (A \wedge B) \vee C \equiv \overline{\overline{A \wedge (B \vee C)}} \vee ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \equiv$$
$$\equiv AB \vee AC \vee (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv$$

$$\equiv AB \vee AC \vee A(B \vee C) \vee C(B \vee C) \equiv$$

$$\equiv AB \vee AC \vee AB \vee AC \vee BC \vee C \equiv$$

$$\equiv AB \vee AC \vee BC \vee C \equiv AB \vee C \equiv$$

$$\equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv$$

$$\equiv \left((A \vee C) \vee (B \wedge \bar{B})\right) \wedge \left((B \vee C) \vee (A \wedge \bar{A})\right) \equiv$$

$$\equiv (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \bar{B} \vee C) \wedge (A \vee B \vee C) \wedge (\bar{A} \vee B \vee C) \equiv$$

$$\equiv (A \vee B \vee C)(A \vee \bar{B} \vee C)(\bar{A} \vee B \vee C);$$

4) $(A \vee \bar{B} \to A \wedge C) \to \overline{A \to \bar{A}} \vee B \wedge \bar{C} \equiv \overline{\overline{A \vee \bar{B}} \vee (A \wedge C)} \vee$

$$\vee \overline{\bar{A} \vee \bar{A}} \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv (A \vee \bar{B}) \wedge (\overline{A \wedge C}) \vee A \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv$$

$$\equiv (A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C}) \vee A \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv$$

$$\equiv (A \vee \bar{B}) \wedge \bar{A} \vee (A \vee \bar{B}) \wedge \bar{C} \vee (A \vee B) \wedge (A \vee \bar{C}) \equiv$$

$$\equiv A\bar{A} \vee \bar{A}\bar{B} \vee A\bar{C} \vee \bar{B}\bar{C} \vee (A \vee B) \wedge A \vee (A \vee B) \wedge \bar{C} \equiv$$

$$\equiv \bar{A}\bar{B} \vee A\bar{C} \vee \bar{B}\bar{C} \vee A \vee AB \vee A\bar{C} \vee B\bar{C} \equiv$$

$$\equiv A \vee \bar{A}\bar{B} \vee \bar{B}\bar{C} \vee B\bar{C} \equiv A \vee \bar{A}\bar{B} \vee \bar{C} \equiv A \vee \bar{B} \vee \bar{C};$$

5) $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \to B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \equiv$

$$\equiv \left((\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_n}) \vee B_1\right) \wedge \left((\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \wedge \overline{A_n}) \vee B_2\right) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge \left((\overline{A_1} \wedge \overline{A_2} \wedge \ldots \overline{A_n}) \vee B_n\right) \equiv (\overline{A_1} \vee B_1) \wedge (\overline{A_2} \vee B_1) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge (\overline{A_n} \vee B_1) \wedge (\overline{A_1} \vee B_2) \wedge (\overline{A_2} \vee B_2) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge (\overline{A_n} \vee B_2) \wedge \ldots \wedge (\overline{A_1} \vee B_n) \wedge (\overline{A_2} \vee B_1) \wedge \ldots \wedge (\overline{A_n} \vee B_n).$$

1.11.10. Поскольку исходная формула абсолютно истинна, ее СДНФ должна содержать все различные элементарные конъюнкции, каждая из которых обладает свойствами совершенства. Число элементарных конъюнкций для функции n переменных должно быть равно числу строк истинностной таблицы, т. е. 2^n. Тогда:

1) СДНФ $f(x) = x \vee \bar{x}$;

2) СДНФ $f(x, y) = xy \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}$;

3) СДНФ $f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

1.11.11. Исходные соображения аналогичны соображениям предыдущей задачи.

1) СКНФ $f(x) = x \wedge \bar{x}$;

2) СКНФ $f(x, y) = (x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$;

3) СКНФ $f(x, y, z) =$

$= (x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge$

$\wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge$

$\wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

1.11.12. Так как $f(x, y, z) \equiv 1$, то формулу удобно представить в виде ДНФ, тогда достаточно, чтобы хотя бы одна конъюнкция была истинной. Это можно обеспечить перечислением переменных в конъюнкциях, причем достаточно трех конъюнкций, и при этом одна из переменных должна входить в конъюнкцию сама, а две других в виде отрицаний. Таким образом,

$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z).$$

1.11.13. Представим опять формулу в виде ДНФ. Для функции $f(x, y, z)$ существует только три пары значений переменных, в которых большинство переменных принимает одно и то же значение: $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(0, 1, 1)$ или $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ и $(1, 0, 0)$. Тогда функция, принимающая то же значение, что и большинство переменных, имеет вид $f(x, y, z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$. Для меньшинства переменных справедливы аналогичные рассуждения и

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}.$$

1.11.14. Рассмотрим первое уравнение $x \wedge f \equiv x \wedge y$. Для его осуществления переменная z в $f(x, y, z)$ должиа быть фиктивной, т. е. $x \wedge y \equiv xy(z \vee \bar{z}) \equiv xyz \vee xy\bar{z}$. Рассмотрим теперь второе условие $x \vee z \equiv$ $\equiv x \vee \bar{x}z \equiv xy \vee x \vee \bar{x}z \equiv (xy \vee \bar{x}z) \vee x \equiv (xy(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}z(y \vee \bar{y})) \vee x$, т. е. $f(x,y,z)$ должна содержать следующие слагаемые:

$$f(x,y,z)=xyz\vee xy\overline{z}\vee\overline{x}yz\vee\overline{x}\,\overline{y}z.$$

1.11.15. Заметим, что $x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_k\equiv(x_1\vee x_2\vee\ldots\vee x_k)\wedge$ $\wedge(y\vee\overline{y})\equiv(x_1\wedge y)\vee\vee(x_1\wedge\overline{y})\vee\ldots\vee(x_k\wedge y)\vee(x_k\wedge\overline{y})$, аналогично $x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_k\equiv(x_1\wedge x_2\wedge\ldots\wedge x_k)\vee(y\wedge\overline{y})\equiv(x_1\vee y)\wedge(x_1\vee\overline{y})\wedge\ldots$ $\ldots\wedge(x_k\vee y)\wedge(x_k\vee\overline{y})$. Используя это, мы всегда можем считать, что у любых формул A и B заданные нормальные формы содержат одни и те же переменные.

СДНФ$(A\vee B)$ получится, если взять дизъюнкции всех элементарных конъюнкций СДНФ A и СДНФ B. СКНФ$(A\vee B)$ находится по формуле СКНФ$(A\vee B)=\overline{\text{СДНФ}\,\overline{(A\vee B)}}$. Для этого необходимо:

1) Выписать дизъюнкции элементарных конъюнкций переменных, не входящих в СДНФ$(A\vee B)$;
2) Заменить $\vee$ на $\wedge$, а $\wedge$ на $\vee$, x_i на $\overline{x_i}$, а $\overline{x_i}$ на x_i. Полученная формула будет СКНФ$(A\vee B)$.

1.11.16. В СКНФ A заменить $\vee$ на $\wedge$ и $\wedge$ на $\vee$. Действительно, переменные у формулы $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ превратились в $\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}$ у формулы A^*, что соответствует изменению переменных при переходе от СКНФ к СДНФ. Необходимо теперь только поменять местами двойственные операции, тогда окончательно вместо A получим $\overline{A}=A^*$, эта же операция необходима при преобразовании СКНФ в СДНФ.

Например, $A=x\to y$, $A^*=\overline{y\to x}$ (см. задачу 1.11.17).

$x\to y\equiv\overline{x}\vee y$ — СКНФ. По описанной процедуре

СДНФ$(x\to y)^*=\overline{x}\wedge y$. На самом деле $\overline{y\to x}\equiv\overline{x\vee\overline{y}}\equiv\overline{x}\wedge y$ — СДНФ A^*.

1.11.17.

1) $0^*=1$, $1^*=0$ поскольку функция ни от каких аргументов не зависит существенно, надо поставить отрицание лишь на значение функции; $x^*\equiv\overline{\overline{x}}\equiv x$, $\overline{x}^*\equiv\overline{\overline{\overline{x}}}\equiv\overline{x}$, т. е. x и $\overline{x}$ самодвойственны;

$$(x \wedge y)^* \equiv \overline{\bar{x} \wedge \bar{y}} \equiv \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} \equiv x \vee y,$$

$$(x \vee y)^* \equiv \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \equiv \bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}} \equiv x \wedge y,$$

$$(x \to y)^* \equiv \overline{\bar{x} \to \bar{y}} \equiv \overline{x \vee \bar{y}} \equiv \overline{y \to x},$$

$$(x \leftrightarrow y)^* \equiv \overline{\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}} \equiv \overline{(\bar{x} \to \bar{y}) \wedge (\bar{y} \to \bar{x})} \equiv \overline{(x \vee \bar{y}) \wedge (y \vee \bar{x})} \equiv$$

$$\equiv \overline{(\bar{y} \vee x) \wedge (\bar{x} \vee y)} \equiv \overline{(y \to x) \wedge (x \to y)} \equiv \overline{y \leftrightarrow x};$$

2) Решим задачу двумя способами. Условия означают, что $\begin{cases} f(1,1,0)=1, \\ f(1,0,1)=1, \\ f(0,1,1)=1. \end{cases}$ Двойственная функция получается из исходной при замене значений всех переменных на противоположные, т. е. всюду в истинностной таблице (табл. 6.19) нужно заменить 0 на 1 и 1 на 0.

Таблица 6.19

x	y	z	$f(x,y,z)$	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$f^* = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1

Из табл. 6.19 получаем: $f(x,y,z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz$,

$f^*(x,y,z) = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

Второй способ: $f^*(x,y,z) = \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \overline{\bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z}} \equiv$

$\equiv \overline{\bar{x}\bar{y}z} \wedge \overline{\bar{x}y\bar{z}} \wedge \overline{x\bar{y}\bar{z}} \equiv (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z) \equiv$

$$\equiv \left(x \vee xy \vee x\bar{z} \vee x\bar{y} \vee y\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xz \vee yz \vee z\bar{z}\right)\left(\bar{x} \vee y \vee z\right) \equiv$$

$$\equiv \left(x \vee \bar{y}\bar{z} \vee yz\right)\left(\bar{x} \vee y \vee z\right) \equiv x\bar{x} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee$$

$$\vee\, xyz \vee xy \vee y\bar{y}\bar{z} \vee yz \vee xz \vee \bar{y}\bar{z}z \vee yz \equiv$$

$$\equiv xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy \vee yz \vee xz \equiv xyz \vee$$

$$\vee\, \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z \equiv$$

$$\equiv xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z.$$

1.11.18. По определению самодвойственной функции, $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = f^*\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \overline{f}\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\right)$. В нашем случае

$$\left(xy \vee yz \vee xz\right)^* = \overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}} \equiv$$

$$\equiv \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}}\right) \wedge \left(\bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}}\right) \wedge \left(\bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{z}}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(x \vee y\right)\left(y \vee z\right)\left(x \vee z\right) \equiv \left(xy \vee y \vee xz \vee yz\right)\left(x \vee z\right) \equiv$$

$$\equiv xy \vee xy \vee xz \vee xyz \vee xyz \vee yz \vee xz \vee yz \equiv$$

$$\equiv xy \vee xyz \vee yz \vee xz \equiv xy \vee yz \vee xz.$$

1.11.19. $2^{2^{n-1}}$. Множество наборов, значения на которых определяют самодвойственную функцию, содержат 2^{n-1} элементов (половина всех наборов, т. к. самодвойственная функция принимает на противоположных наборах противоположные значения). Общее число функций равно числу двоичных наборов длины 2^{n-1}, т. е. $2^{2^{n-1}}$ (см. задачу 1.11.2).

1.11.20. Функция является несамодвойственной, если существует такой набор $\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$, что $f\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right) = f\left(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_n}\right)$. Разобьем переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на две группы. В первую включим те переменные x_i, для которых $\alpha_i = 1$, в другую те, для которых $\alpha_i = 0$. Отождествим между собой все переменные первой группы, переименовав их в y_1, а также все переменные второй группы, переименовав их в y_2.

Получим функцию от двух переменных $\varphi\left(y_1, y_2\right)$, которая может оказаться и функцией от одной переменной, если $\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$ — единичный или нулевой набор. Очевидно, что $\varphi(1,0) = f\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right)$,

$\varphi(0,1) = f\left(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \ldots, \overline{\alpha_n}\right)$, поэтому $\varphi(0,1) = \varphi(1,0)$, т. к. f несамодвойственна по условию.

Может оказаться, что дальнейшее отождествление переменных с сохранением несамодвойственности невозможно.

6.3. Ответы и решения практического занятия №3

1.18.1.

1) СДНФ $f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee xyz$. Выполним в этой формуле все операции неполного склеивания и поглощения $f = xz(\overline{y} \vee y) \vee \overline{y}z(\overline{x} \vee x) \vee \overline{x}\,\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee$
$\vee\, xyz \equiv xz \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee xyz \equiv xz(1 \vee y) \vee \overline{y}z(1 \vee x) \vee$
$\vee\, \overline{x}\,\overline{y}(1 \vee z \vee \overline{z}) \equiv xz \vee \overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}$.

Итак, методом Квайна найдена сокращенная ДНФ. Составим теперь матрицу Квайна (табл. 6.20).

Таблица 6.20

Простые импликанты	Конституенты единицы СДНФ			
	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}z$	$x\overline{y}z$	xyz
xz	—	—	*	*
$\overline{y}z$	—	*	*	—
$\overline{x}\,\overline{y}$	*	*	—	—

Тупиковая ДНФ равна $\overline{x}\,\overline{y} \vee xz$, она же будет равна минимальной ДНФ. Итак, МДНФ $f = \overline{x}\,\overline{y} \vee xz$. Составим теперь карту Карно для исходной функции. На карте выделяются три пары точек (отмечены на рис. 6.1), образующие 1-кубы. Простые импликанты имеют вид: $\overline{x}\,\overline{y}$, xz и $\overline{y}z$. Сокращенная ДНФ равна $\overline{x}\,\overline{y} \vee xz \vee \overline{y}z$. Из карты Карно видно, что пару точек (0,0,1)–(1,0,1) и соответствующую ей простую импликанту $\overline{y}z$ можно отбросить. Тогда МДНФ $= \overline{x}\,\overline{y} \vee xz$.

Проверим теперь функцию на принадлежность к каждому из пяти классов Поста.

$f(0,0,0)=\bar{0}\wedge\bar{0}\vee 0\wedge 0=1\neq 0$,

$f\notin P_0$; $f(1,1,1)=\bar{1}\wedge\bar{1}\vee 1\wedge 1=1$, $f\in P_1$;

$\overline{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\overline{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}}\vee\bar{x}\bar{z}}\equiv\overline{xy}\wedge\overline{\bar{x}\bar{z}}\equiv(\bar{x}\vee\bar{y})\wedge(x\vee z)\equiv\bar{x}\vee\bar{y}x\vee\bar{y}z\neq$

$\neq f=\bar{x}\bar{y}\vee xz$, $f\notin S$; $f\notin L$, т. к. содержит произведение xz;

$f\notin M$, поскольку $(0,0,1)\prec(0,1,1)$, а $f(0,0,1)=1>f(0,1,1)=0$;

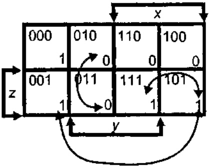


Рис. 6.1

2) СДНФ $f=\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}z$. Тогда

$f=\bar{x}y(\bar{z}\vee z)\vee x\bar{y}(\bar{z}\vee z)\vee\bar{x}z(\bar{y}\vee y)\vee\bar{y}z(\bar{x}\vee x)\vee\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}\bar{z}\vee$

$\vee\bar{x}\bar{y}z\vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}z\equiv\bar{x}y(1\vee\bar{z}\vee z)\vee$

$\vee x\bar{y}(1\vee\bar{z}\vee z)\vee\bar{x}z(1\vee\bar{y})\vee\bar{y}z\equiv\bar{x}y\vee x\bar{y}\vee$

$\vee\bar{x}z\vee\bar{y}z$ — сокращенная ДНФ. Матрица Квайна приведена в табл. 6.21.

Таблица 6.21

Простые импликанты	Конституенты единицы СДНФ				
	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}yz$	$x\bar{y}z$
$\bar{x}y$	*	—	—	*	—
$x\bar{y}$	—	*	—	—	*
$\bar{x}z$	—	—	*	*	—
$\bar{y}z$	—	—	*	—	*

Тупиковых ДНФ здесь две: $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}z$ и $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$. Минимальных ДНФ тоже две, они совпадают с тупиковыми. Карта Карно для данной функции имеет вид, показанный на рис. 6.2. Имеется четыре пары точек, образующих 1–кубы: (0,0,1)–(0,1,1), (0,1,0)–(0,1,1), (1,0,0)–(1,0,1) и (0,0,1)–(1,0,1), им соответствуют следующие импликанты: $\bar{x}z$, $\bar{y}z$, $x\bar{y}$ и $\bar{y}z$. Таким образом, сокращенная ДНФ равна $\bar{x}z \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$, а минимальных ДНФ две: $\text{МДНФ}_1 = \bar{x}z \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$, $\text{МДНФ}_2 = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$.

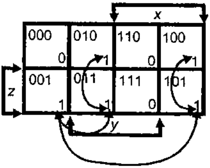


Рис. 6.2

Для проверки принадлежности функции к классам Поста воспользуемся одной из минимальных дизъюнктивных форм, например,

$f = \bar{x}z \vee \bar{x}y \vee x\bar{y}$. $f(0,0,0) = \bar{0} \wedge 0 \vee \bar{0} \wedge 0 \vee 0 \wedge \bar{0} = 0$, $f \in P_0$;

$f(1,1,1) = \bar{1} \wedge 1 \vee \bar{1} \wedge 1 \vee 1 \wedge \bar{1} = 0 \neq 1$, $f \notin P_1$;

$\overline{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \overline{\bar{\bar{x}}\bar{z} \vee \bar{\bar{x}}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{\bar{y}}} \equiv \overline{\bar{x}z} \wedge \overline{\bar{x}y} \wedge \overline{x\bar{y}} \equiv (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv$

$\equiv (\bar{x} \vee \bar{x}z \vee \bar{x}y \vee yz) \wedge (x \vee \bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee yz)(x \vee \bar{y}) \equiv x\bar{x} \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y} \vee$

$\vee yz\bar{y} \equiv xyz \vee \bar{x}\bar{y} \neq f$, следовательно $f \notin S$;

$\bar{x}z \vee \bar{x}y \vee x\bar{y} \equiv \overline{\overline{\bar{x}z} \wedge \overline{\bar{x}y} \wedge \overline{x\bar{y}}} = ((x \oplus 1)z \oplus 1)((x \oplus 1)y \oplus 1)(x(y \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1 =$

$= (xz \oplus z \oplus 1)(xy \oplus y \oplus 1)(xy \oplus x \oplus 1) \oplus 1 =$

$= (xyz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus yz \oplus y \oplus xz \oplus z \oplus 1)(xy \oplus x \oplus 1) \oplus 1 =$

$= xy \oplus xyz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus xyz \oplus$

$\oplus xy \oplus xy \oplus xyz \oplus xyz \oplus xy \oplus xz \oplus xz \oplus x \oplus xy \oplus xyz \oplus yz \oplus$

$\oplus\, y \oplus xz \oplus z \oplus 1 \oplus 1 = xyz \oplus xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z \notin L$; $f \notin M$,

т. к. $(1,0,0) \prec (1,1,0)$, но $f(1,0,0) = 1 > f(1,1,0) = 0$;

3) СДНФ $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee x\bar{y}z$.

$f = xy(\bar{z} \vee z) \vee xz(y \vee \bar{y}) \vee \bar{y}z(\bar{x} \vee x) \vee \bar{x}\bar{y}(\bar{z} \vee z) \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee$

$\vee\, xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee x\bar{y}z \equiv$

$\equiv xy(1 \vee \bar{z} \vee z) \vee xz(1 \vee \bar{y}) \vee \bar{y}z(1 \vee \bar{x}) \vee \bar{x}\bar{y}(1 \vee \bar{z}) \equiv$

$\equiv xy \vee xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}$ — сокращенная ДНФ.

Таблица 6.22

Простые импликанты	**Конституенты единицы СДНФ**				
	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	$xy\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	xyz	$x\bar{y}z$
xy	—	*	—	*	—
xz	—	—	—	*	*
$\bar{y}z$	—	—	*	—	*
$\bar{x}\bar{y}$	*	—	*	—	—

Тупиковых ДНФ две: $xy \vee xz \vee \bar{x}\bar{y}$, $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee xy$ (табл. 6.22); минимальных ДНФ также две: $\text{МДНФ}_1 = xy \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}$ и $\text{МДНФ}_2 = xy \vee xz \vee \bar{x}\bar{y}$. Карта Карно для исходной функции трех переменных приведена на рис. 6.3.

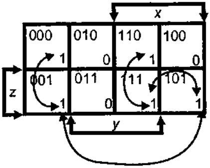


Рис. 6.3

Четыре пары точек образуют четыре 1–куба: (0,0,0)–(0,0,1), (1,1,0)–(1,1,1), (1,1,1)–(1,0,1) и (0,0,1)–(1,0,1). Сокращеиная ДНФ из карты Карно равна $xy \vee xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}$, $\text{МДНФ}_1 = \bar{x}\bar{y} \vee xy \vee xz$, $\text{МДНФ}_2 = \bar{x}\bar{y} \vee xy \vee \bar{y}z$. Возьмем вторую миниимальную дизъюнктивную форму и проверим, к какому классу Поста принадлежит наша функция. $f(0,0,0) = \bar{0} \wedge \bar{0} \vee 0 \wedge 0 \vee \bar{0} \wedge 0 = 1$, $f \notin P_0$;

$f(1,110) = \bar{1} \wedge \bar{1} \vee 1 \wedge 1 \vee \bar{1} \wedge 1 = 1$, $f \in P_1$;

$\overline{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \overline{\bar{\bar{x}}\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{\bar{y}}\bar{z}} \equiv$

$\equiv \overline{xy} \wedge \overline{\bar{x}\bar{y}} \wedge \overline{y\bar{x}} \equiv (\bar{x} \vee \bar{y})(x \vee y)(\bar{y} \vee z) \equiv$

$\equiv (x\bar{x} \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee y\bar{y})(\bar{y} \vee z) \equiv$

$\equiv x\bar{y} \vee \bar{x}y\bar{y} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \equiv x\bar{y}(1 \vee z) \vee \bar{x}yz \equiv x\bar{y} \vee \bar{x}yz \neq f$,

$f \notin S$; $f \notin L$, т. к. содержит произведение xy; $f \notin M$, поскольку $(0,0,0) \prec (1,0,0)$, а $f(0,0,0) = 1 > f(1,0,0) = 0$;

4) СДНФ $f = \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$.

$f = xz(\bar{y} \vee y) \vee yz(\bar{x} \vee x) \vee \bar{x}y(z \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz \equiv$
$\equiv xz(1 \vee y \vee \bar{y}) \vee yz(1 \vee \bar{x}) \vee \bar{x}y(1 \vee \bar{z}) \equiv xz \vee yz \vee \bar{x}y$ — сокращеиная ДНФ. Тупиковая ДНФ одна $xz \vee \bar{x}y$, она же равна минимальной, т. е. $\text{МДНФ} = xz \vee \bar{x}y$ (табл. 6.23). Составим теперь карту Карно. Простые импликанты для этой карты Карно равны: $\bar{x}y$, yz и xz, минимальная ДНФ получается по двум парам точек: (0,1,0)–(0,1,1) и (1,1,1)–(1,0,1) (рис 6.4), $\text{МДНФ} = xz \vee \bar{x}y$. $f(0,0,0) = 0 \wedge 0 \vee \bar{0} \wedge 0 = 0$, $f \in P_0$;

Таблица 6.23

Простые имплнкаиты	Конституенты еднннцы СДНФ			
	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$x\bar{y}z$	xyz
xz	—	—	*	*
yz	*	—	—	*
$\bar{x}y$	*	*	—	—

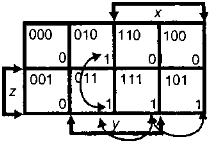


Рис. 6.4

$f(1,1,1)=1\wedge 1\vee\bar{1}\wedge 1=1$, $f\in P_1$; $\overline{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\overline{\bar{x}\bar{z}\vee\bar{\bar{x}}\bar{y}}\equiv\overline{\bar{x}\bar{z}}\wedge\overline{\bar{\bar{x}}\bar{y}}\equiv$
$\equiv(x\vee z)(\bar{x}\vee y)\equiv x\bar{x}\vee\bar{x}z\vee xy\vee yz\neq f$, $f\notin S$; $f\notin L$, т. к. содержит xz. Составим таблицу истинности для МДНФ (табл. 6.24). Из нее видно, что для всех сравнимых наборов переменных выполняется условие $\bar{\alpha}\prec\bar{\beta}\rightarrow f(\bar{\alpha})\leq f(\bar{\beta})$. Следовательно, $f\in M$;

Таблица 6.24

x	y	z	xz	$\bar{x}y$	МДНФ
1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

5) СДНФ $f=\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}z$.

$f=\bar{y}x(\bar{z}\vee z)\vee\bar{x}yz\vee x\bar{y}\bar{z}\vee x\bar{y}z\equiv$

$\bar{y}x(1\vee\bar{z}\vee z)\vee\bar{x}yz\equiv\bar{y}x\vee\bar{x}yz$ — сокращенная ДНФ. Матрица Квайна для этой функции очень проста и приведена ниже. Карта Карно изображена на рис. 6.5. Одна точка на этой карте Карно принадлежит 0–кубу, это точка (0,1,1). Еще пара точек (1,0,0)–(1,0,1) образует 1–куб. Простые импликанты равны $\overline{x}yz$, $x\overline{y}$. Тупиковая ДНФ равна $\overline{x}yz \vee x\overline{y}$, она же равна единственной минимальной дизъюнктивной нормальной форме (табл. 6.25).

Таблица 6.25

Простые импликанты	Конституенты единицы СДНФ		
	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}\,\overline{z}$	$x\overline{y}z$
$\overline{y}x$	-	*	*
$\overline{x}yz$	*	-	-

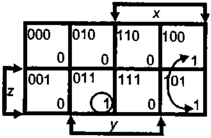


Рис. 6.5

$f(0,0,0)=0\wedge\overline{0}\vee\overline{0}\wedge 0\wedge 0=0$, $f\in P_0$;

$f(1,1,1)=1\wedge\overline{1}\vee\overline{1}\wedge 1\wedge 1=0$, $f\notin P_0$;

$\overline{f}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\overline{\overline{x}\,\overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{x}}\,\overline{y}\,\overline{z}} \equiv \overline{\overline{x}y} \wedge \overline{x\overline{y}\,\overline{z}} \equiv (x\vee\overline{y})\wedge(\overline{x}\vee y\vee z)\equiv$

$\equiv x\overline{x}\vee\overline{x}\,\overline{y}\vee xy\vee y\overline{y}\vee xz\vee\overline{y}z\equiv xy\vee\overline{x}\,\overline{y}\vee xz\vee\overline{y}z\neq f$, $f\notin S$;

$x\overline{y}\vee\overline{x}yz\equiv\overline{\overline{x\overline{y}}\wedge\overline{\overline{x}yz}}=(x(y\oplus 1)\oplus 1)\cdot((x\oplus 1)yz\oplus 1)\oplus 1=$
$=(xy\oplus x\oplus 1)\cdot(xyz\oplus yz\oplus 1)\oplus 1=$

$=xyz\oplus xyz\oplus xyz\oplus xyz\oplus xyz\oplus yz\oplus xy\oplus x\oplus 1\oplus 1=$

$=xyz\oplus yz\oplus xy\oplus x\notin L$;

$f\notin M$, т. к. $(0,1,1)\prec(1,1,1)$, но $f(0,1,1)=1>f(1,1,1)=0$.

1.18.2. Так как $x\oplus y=\overline{x\leftrightarrow y}\equiv(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge y)$,

то $x\oplus y=\overline{x\leftrightarrow y}\equiv(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge y)\equiv x\overline{y}\vee\overline{x}y$ — СДНФ;

$$x\oplus y=\left(x\wedge\bar{y}\right)\vee\left(\bar{x}\wedge y\right)\equiv\left(x\vee\left(\bar{x}\wedge y\right)\right)\wedge\left(\bar{y}\vee\left(\bar{x}\wedge y\right)\right)\equiv$$

$$=\left(\left(x\vee\bar{x}\right)\wedge\left(x\vee y\right)\right)\wedge\left(\left(\bar{y}\vee\bar{x}\right)\wedge\left(y\vee\bar{y}\right)\right)\equiv\left(x\vee y\right)\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)$$ — СКНФ.

По определению двойственной функции

$(x\oplus y)^*=\overline{\left(\bar{x}\oplus\bar{y}\right)}=\left(\left(x\oplus1\right)\oplus\left(y\oplus1\right)\right)\oplus1=x\oplus y\oplus1$; то же самое можно получить другим способом: $(x\oplus y)^*=\overline{\left(\bar{x}\wedge\bar{\bar{y}}\right)\vee\left(\bar{\bar{x}}\wedge\bar{y}\right)}\equiv$

$$\equiv\overline{\left(\bar{x}\wedge y\right)}\wedge\overline{\left(x\wedge\bar{y}\right)}=\left(\left(x\oplus1\right)y\oplus1\right)\left(x\left(y\oplus1\right)\oplus1\right)=$$

$$=\left(xy\oplus y\oplus1\right)\left(xy\oplus x\oplus1\right)=$$

$=xy\oplus xy\oplus xy\oplus xy\oplus xy\oplus x\oplus xy\oplus y\oplus1=x\oplus y\oplus1$, т. к. операция сложения по модулю два обладает следующими свойствами: $x\oplus x=0$, $x\oplus1=\bar{x}$, $x\oplus0=x$, $x\oplus\bar{x}=1$.

1.18.3.

1) Конъюнкция: $xy=x\cdot y$; дизъюнкция: $x\vee y\equiv\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}=$ $=\left(x\oplus1\right)\left(y\oplus1\right)\oplus1=xy\oplus x\oplus y$; отрицание: $\bar{x}=x\oplus1$; импликация: $x\to y\equiv\bar{x}\vee y\equiv\overline{\bar{\bar{x}}\wedge\bar{y}}\equiv\overline{x\wedge\bar{y}}=x\left(y\oplus1\right)\oplus1=xy\oplus x\oplus1$; эквиваленция:

$$x\leftrightarrow y\equiv\left(x\to y\right)\wedge\left(y\to x\right)\equiv\left(\bar{x}\vee y\right)\wedge\left(\bar{y}\vee x\right)\equiv\overline{\bar{\bar{x}}\wedge\bar{y}}\wedge\overline{\bar{\bar{y}}\wedge\bar{x}}\equiv$$

$$\equiv\overline{x\wedge\bar{y}}\wedge\overline{y\wedge\bar{x}}=\left(x\left(y\oplus1\right)\oplus1\right)\left(y\left(x\oplus1\right)\oplus1\right)=$$

$$=\left(xy\oplus x\oplus1\right)\left(xy\oplus y\oplus1\right)=$$

$$=xy\oplus xy\oplus xy\oplus xy\oplus xy\oplus y\oplus xy\oplus x\oplus1=x\oplus y\oplus1;$$

2) $x\vee y\vee z\equiv\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}\wedge\bar{z}}=\left(x\oplus1\right)\left(y\oplus1\right)\left(z\oplus1\right)\oplus1=$

$$=\left(xy\oplus y\oplus x\oplus1\right)\left(z\oplus1\right)\oplus1=$$

$$=xyz\oplus yz\oplus xz\oplus z\oplus xy\oplus y\oplus x\oplus1\oplus1=$$

$$=xyz\oplus xy\oplus xz\oplus yz\oplus x\oplus y\oplus z;$$

3) $xy\vee yz\vee xz\equiv\overline{\overline{xy}\wedge\overline{yz}\wedge\overline{xz}}=\left(xy\oplus1\right)\left(yz\oplus1\right)\left(xz\oplus1\right)\oplus1=$

$$=\left(xyz\oplus yz\oplus xy\oplus1\right)\left(xz\oplus1\right)\oplus1=$$

$= xyz \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus yz \oplus$

$\oplus\, xy \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus xz \oplus yz$;

4) $xy\bar z \vee x\bar y z \vee \bar x yz \vee \bar x\bar y\bar z \equiv z(x\bar y \vee \bar x y) \vee \bar z(xy \vee \bar x\bar y)$,

$x\bar y \vee \bar x y \equiv \overline{\overline{x\bar y} \wedge \overline{\bar x y}} = (x(y \oplus 1) \oplus 1)((x \oplus 1)y \oplus 1) \oplus 1 = (xy \oplus x \oplus 1)\cdot$

$\cdot(xy \oplus y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y$;

$xy \vee \bar x\bar y \equiv \overline{\overline{xy} \wedge \overline{\bar x\bar y}} = ((xy \oplus 1)((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1) \oplus$

$\oplus 1) = (xy \oplus 1)(xy \oplus y \oplus x) \oplus 1 =$

$= xy \oplus xy \oplus xy \oplus y \oplus xy \oplus x \oplus 1 = x \oplus y \oplus 1 = \overline{x \oplus y}$;

$xy\bar z \vee x\bar y z \vee \bar x yz \vee \bar x\bar y\bar z = z(x \oplus y) \vee \bar z\,\overline{x \oplus y} = \overline{\overline{z(x \oplus y)} \wedge \overline{\bar z\,\overline{(x \oplus y)}}} =$

$= (xz \oplus yz \oplus 1)((z \oplus 1)(x \oplus y \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1 =$

$= (xz \oplus yz \oplus 1)(xz \oplus x \oplus yz \oplus y \oplus z) \oplus 1 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$.

1.18.4. Пусть x_1 — такая переменная. Сгруппируем члены, в которые входит x_1, и вынесем x_1. Получим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\varphi(x_2, \ldots, x_n) + \psi(x_2, \ldots, x_n)$. Это разложение можно рассматривать как полином Жегалкина по переменной x_1 с коэффициентами, зависящими от остальных переменных. В разложении $\varphi \neq 0$, т. к. в противном случае в силу единственности полинома Жегалкина x_1 не входила бы в полином для f. Возьмем значения переменных $x_2, x_3, \ldots, x_n$, на которых $\varphi = 1$. Тогда значение f будет зависеть от значения x_1, т. е. x_1 — существенная переменная.

1.18.5. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется линейной, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени, т. е. если существуют такие константы $a_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{0,n}$, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n.$$

1) $f = \overline{x \to y} \oplus \bar x y = x \oplus y \oplus (x \oplus 1)y =$

$= x \oplus y \oplus xy \oplus y = xy \oplus x \notin L$;

2) $f = xy \vee \overline{x}\overline{y} \vee z \equiv \overline{xy} \wedge \overline{\overline{x}\overline{y}} \wedge \overline{z} = (xy \oplus 1)((x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1) \cdot$
$\cdot (z \oplus 1) \oplus 1 = (xy \oplus 1)(z \oplus 1)\,(xy \oplus y \oplus x) \oplus 1 = xz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1$.
Очевидно, что $f \notin L$. Подобный метод представления функции полиномом Жегалкина называется методом, базирующимся на преобразовании формул над множеством связок $\{\wedge, \overline{\ }\}$.

Восстановим теперь полином, представляющий данную функцию, методом неопределенных коэффициентов.

$$f = xy \vee \overline{x}\overline{y} \vee z = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y \oplus a_3 z \oplus a_4 xy \oplus a_5 xz \oplus a_6 yz \oplus a_7 xyz.$$

$$f(0,0,0) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(0,0,1) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(0,1,0) = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(0,1,1) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 1 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(1,0,0) = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(1,0,1) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 0 \oplus a_5 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(1,1,0) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 0 \oplus a_4 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 0 \oplus a_6 \cdot 0 \oplus a_7 \cdot 0,$$

$$f(1,1,1) = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 \oplus a_3 \cdot 1 \oplus a_4 \cdot 1 \oplus a_5 \cdot 1 \oplus a_6 \cdot 1 \oplus a_7 \cdot 1.$$

Подобная система всегда имеет решение, причем все $a_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{0,n}$.
Здесь $a_0 = a_1 = a_2 = a_5 = a_6 = 1$, $a_3 = a_4 = a_7 = 0$;

3) $f = x\overline{y}(x \leftrightarrow y) = x(y \oplus 1)(x \oplus y \oplus 1) = (xy \oplus 1)(x \oplus y \oplus 1) =$
$= xy \oplus xy \oplus xy \oplus x \oplus xy \oplus x = 0 \in L$;

4) $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{yz}} \oplus \overline{x}yz =$
$= ((x \oplus 1)(yz \oplus 1) \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz =$
$= (xyz \oplus yz) \oplus (xyz \oplus yz \oplus x \oplus 1 \oplus 1) =$
$= xyz \oplus yz \oplus x \oplus xyz \oplus yz = x \in L$.

1.18.6. Так как $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$, то множество всех линейных функций равно числу различных наборов вида $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Поскольку $\forall i\, a_i \in \{0,1\}$, то число наборов равно 2^{n+1}.

1.18.7. Выясним, при каком составе существенных переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Рассмотрим в качестве примера функцию двух переменных. Она линейна, т. е. $f(x, y) = a_0 \oplus a_1 x \oplus a_2 y$. Тогда $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $f_3 = 1 \oplus x$, $f_4 = 1 \oplus y$, $f_5 = 1 \oplus x \oplus y$,

$f_6 = x \oplus y$, $f_7 = x$, $f_8 = y$. Только f_2 и f_5 удовлетворяют условию задачи. У f_2 все переменные фиктивны и $a_0 = 1$, у f_5 число существенных переменных четно и $a_0 = 1$. Та же картина наблюдается для функции трех переменных $f(x, y, z)$: $f_1 = 0$, $f_2 = 1$, $f_3 = x$, $f_4 = 1 \oplus x$, $f_5 = y$, $f_6 = 1 \oplus y$, $f_7 = x \oplus y$, $f_8 = 1 \oplus x \oplus y$, $f_9 = z$, $f_{10} = 1 \oplus z$, $f_{11} = x \oplus z$, $f_{12} = 1 \oplus x \oplus z$,

$f_{13} = y \oplus z$, $f_{14} = 1 \oplus y \oplus z$, $f_{15} = x \oplus y \oplus z$, $f_{16} = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$. Число всех линейиых функций n переменных, у которых $a_0 = 1$ и все переменные фиктивны или с $a_0 = 1$ и с четным числом существенных переменных, равно 2^{n-1}.

1.18.8. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сохраняет константу 0 (константу 1), если $f(0,0,\ldots,0) = 0$ (соответственно $f(1,1,\ldots,1) = 1$).

1) $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$,
$f(0,0,\ldots,0) = (0 \to 0)(0 \to 0)(0 \to 0) = 1$,
$f(1,1,\ldots,1) = (1 \to 1)(1 \to 1)(1 \to 1) = 1$. Таким образом, $f \in P_1 \setminus P_0$;

2) f — функция от трех переменных и может содержать суперпозиции всех логических связок. Рассмотрим, например,
$f_1 = x_1 \vee x_2 \to x_3$, тогда $f_1(0,0,0) = 0 \vee 0 \to 0 = 1$ и
$f_1(1,1,1) = 1 \vee 1 \to 1 = 1$. Однако $f_2 = (x_1 \to x_2) \wedge x_3$ дает
$f_2(0,0,0) = (0 \to 0) \wedge 0 = 0$ и $f_2(1,1,1) = (1 \to 1) \wedge 1 = 1$.
Следовательно, произвольная $f \notin P_1 \setminus P_0$;

3) $f = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}$: $f(0,0,0) = 0 \cdot 0 \cdot 0 \vee 1 \cdot 0 \vee 1 = 1$,
$f(1,1,1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 = 1$, т. е. $f \in P_1 \setminus P_0$;

4) $f = (x_1 \vee \overline{x_2})\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}$: $f(0,0,0) = (0 \vee 1) \cdot 1 \vee 1 \cdot 0 \vee 1 = 1$,
$f(1,1,1) = (1 \vee 0) \cdot 0 \vee 0 \cdot 1 \vee 0 = 0$, $f \notin P_1 \setminus P_0$.

1.18.9.

1) $f = xy \vee xz \vee \bar{z} = xy \vee z$. Эта функция равна нулю на наборах $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$. Все оставшиеся наборы, исключая $(0,0,1)$, содержат не менее двух единиц, а значит, либо не сравнимы с $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, либо могут быть только больше. Для наборов $(0,0,0) \prec (0,0,1)$ набор $(0,0,1)$ не сравним с $(0,1,0)$ и с $(1,0,0)$, но $f(0,0,0) = 0 < f(0,0,1) = 1$. Следовательно, рассматриваемая функция монотонна;
2) $f = x \to (x \to y)$. Всего четыре набора переменных. Сравним $(0,0) \prec (1,0)$, но $f(0,0) = 1 > f(1,0) = 0$. Функция немонотонна;
3) $f = \overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$. $(0,0) \prec (1,0)$, $f(0,0) = 1 > f(1,0) = 0$. Функция немонотонна;
4) $f = \overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} \equiv \bar{x}\bar{y} \leftrightarrow \bar{x}\bar{y} \equiv 1$ для всех наборов, следовательно, функция монотонна;
5) $f = xy \vee x \vee \bar{x}z \equiv x(y \vee 1) \vee \bar{x}z \equiv x \vee \bar{x}z \equiv x \vee z$, y — фиктивная переменная; функция $x \vee z$ монотонна, т. к. она равна 0 лишь на наборе $(0,0)$, который предшествует всем остальным наборам.

1.18.10. Вопрос о числе монотонных функций от n переменных оказывается очень трудным. Окончательно он не решен до сих пор; это число сосчитано лишь для конкретных небольших n. Монотонная $f(x,y)$ (не константа) равна 0 на нулевом наборе и 1 на единичном. Два других набора $(0,1)$ и $(1,0)$ следуют за нулевым, предшествуют единичному, а между собой не сравнимы. Поэтому на них можно задавать любые значения функции, не нарушая монотонности. Всего задать эти значения можно четырьмя способами, так что можно задать четыре монотонные функции от двух переменных, не являющихся константами: x, y, xy и $x \vee y$.

1.18.11.

1) Нельзя, т. к. $f \in P_0$, а $\bar{x} \notin P_0$;
2) Можно, $f(x,0,1,0) = \bar{x} \cdot 1 \cdot 1 \vee 0 \cdot (x \cdot 1 \to 1) = \bar{x}$;
3) Можно, $f(x,z,z,z) = \bar{x}\bar{z}z \vee z(xz \to z) \equiv z(\overline{xz} \vee \bar{x} \vee \bar{z} \vee z) \equiv z$.

1.18.12.

1, 2) *См. разд. 1.14*;

3) Пусть $\{f_1, f_2\} = \{\bar{\ }, \wedge\}$, $\{g_1\} = \{\overline{x \vee y}\}$. Тогда $\bar{x} = \overline{x \vee x} = \bar{x}$, т. е. $f_1 = \varphi_1(g_1)$, $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}}$, т. е. $f_2 = \varphi_2(g_1)$. Таким образом, система $\{\overline{x \vee y}\}$ полна;

4) *См. разд. 1.14*;

5) Пусть $\{f_1, f_2\} = \{\bar{\ }, \wedge\}$ — полная система, а $\{g_1, g_2\} = \{\rightarrow, 0\}$.
Тогда $f_1 = \bar{x} = \bar{x} \vee 0 = x \rightarrow 0 = \varphi_1(g_1, g_2)$,
$f_2 = x \vee y = \bar{x} \rightarrow y = \varphi_2(g_1, g_2)$, т. е. $\{\rightarrow, 0\}$ полна.

Решим эту же задачу с помощью теоремы Поста. При заполнении таблицы Поста (табл. 6.26) следует помнить некоторые свойства функций из классов P_0, P_1, S, L и M. Случаи P_0 и P_1 тривиальны. Среди линейных функций монотонны лишь 0, 1 и x; самодвойственны функции с нечетным числом переменных; сохраняют нуль функции, у которых свободный член — нуль; сохраняют единицу функции от четного числа переменных, если их свободный член — нуль, и функции от нечетного числа переменных, если их свободный член единица.

Таблица 6.26

$\{g_1, g_2, \ldots\}$	P_0	P_1	S	L	M
xy	+	+	–	–	+
$\bar{x}$	–	–	+	+	–
$x \vee y$	+	+	–	–	+
$\bar{x}$	–	–	+	+	–
$\overline{x \vee y}$	–	–	–	–	–
$x \oplus y$	+	–	–	+	–
$x \vee y$	+	+	–	–	+
1	–	+	–	+	+
$x \rightarrow y$	–	+	–	–	–
0	+	–	–	+	+

1.18.13.

1) Система функций G в классе K называется его *базисом*, если она полна в K, а всякая ее собственная подсистема не полна. Система функций $\{xy, \bar{x}\}$ полна в P_2. Она состоит из двух подсистем: функций xy и $\bar{x}$. xy — монотонная функция (см. таблицу Поста предыдущей задачи), $\bar{x}$ — линейная и самодвойственная функция. Таким образом, системы $\{xy\}$ и $\{\bar{x}\}$ неполны, т. к. эти функции и представляемые ими системы целиком содержатся в каком-то из пяти классов P_0, P_1, S, L и M. Следовательно, $\{xy, \bar{x}\}$ — базис в P_2;

2, 3) Рассуждения аналогичны п. 1;

4) Система $\{x \oplus y, x \vee y, 1\}$ имеет шесть подсистем: $\{x \oplus y\}$, $\{x \vee y\}$, $\{1\}$, $\{x \oplus y, x \vee y\}$, $\{x \oplus y, 1\}$, $\{x \vee y, 1\}$. Все они неполны (см. таблицу Поста), т. е. целиком содержатся в каком-то из пяти классов;

5) Рассуждения аналогичны п. 1.

1.18.14.

1) Из всякой полной системы можно выбрать не более пяти функций, удовлетворяющих теореме Поста. Следовательно, базис не может содержать более пяти функций;

2) sВозьмем функцию, не сохраняющую нуль. Эта функция илн монотонна, и тогда она тождественно равна единице, или немонотонна. Если $f \equiv 1$, то это несамодвойственная функция. Итак, $f \notin P_0$ и $f \equiv 1 \Rightarrow f \notin S$ или $f \notin P_0$ и $f \notin M$. Таким образом, в полной системе обязательно найдется функция, не приинадлежащая сразу двум предполным классам. Тогда к этой функции можно присоединить не более трех функций из рассматриваемой системы функций так, чтобы удовлетворялись условия теоремы Поста. Следовательно, в базисе не может быть более четырех функций.

1.18.15.

1) Составим таблицу Поста для этой системы функций (табл. 6.27).

Таблица 6.27

Функция	P_0	P_1	S	L	M
0	+	-	-	+	+
$x\oplus y$	+	-	-	+	-
$x\to y$	-	+	-	-	-
$xy\leftrightarrow xz$	-	+	-	-	-

Первые три функции из системы G уже встречались ранее (см. задачу 1.18.12). Рассмотрим $f_4 = xy\leftrightarrow xz$. $f_4(0,0,0)=0\leftrightarrow 0=1$, т. е. $f_4\notin P_0$, $f_4(1,1,1)=1$, $f_4\in P_1$. Упростим $f_4 = xy\leftrightarrow xz\equiv \bar{x}\vee yz\vee \overline{yz}$. Двойственная к ней $f_4^* = \bar{\bar{x}}\vee \overline{\bar{y}\bar{z}}\vee \overline{\overline{\bar{y}\bar{z}}}\equiv \bar{x}\bar{z}$, т. е. $f_4\notin S$. Далее $f_4 = \bar{x}\vee yz\vee \overline{yz}\equiv$ $\equiv \overline{x\wedge \overline{yz}\wedge \overline{\overline{yz}}} = x(yz\oplus 1)((y\oplus 1)(z\oplus 1)\oplus 1)\oplus 1 = xz\oplus yz\oplus 1$, т. е. $f_4\notin L$. Функция равна нулю на двух наборах: $(1,0,1)$ и $(1,1,0)$, на всех остальных $f_4=1$. Тогда $(0,0,0)\prec(1,0,1)$, но $f(0,0,0)=1>f(1,0,1)=0$. Таким образом, $f_4\notin M$.

По заполненной таблице составим КНФ системы G, в которой элементарные дизъюнкции соответствуют столбцам таблицы и включают в качестве слагаемых символы тех функций, которые не входят в класс, соответствующий столбцу. В данном случае КНФ$G=$ $=(f_3\vee f_4)(f_1\vee f_2)(f_1\vee f_2\vee f_3\vee f_4)(f_3\vee f_4)(f_2\vee f_3\vee f_4)$.

Упростим эту КНФ и преобразуем ее в ДНФ. КНФ$G=$

$=(f_1f_3\vee f_1f_4\vee f_2f_3\vee f_2f_4)(f_1\vee f_2\vee f_3\vee f_4)(f_2f_3\vee f_2f_4\vee$

$\vee f_3\vee f_3f_4\vee f_4)=(f_1f_3\vee f_1f_4\vee f_2f_3\vee f_2f_4)(f_3\vee f_4)=$

$=f_1f_3\vee f_2f_3\vee f_1f_4\vee f_2f_4=$ДНФ$G$.

Из полученной ДНФG выпишем подмножества функций, соответствующие слагаемым ДНФ. Это и будут искомые базисы G. В нашем случае имеются четыре базиса: $Б_1=\{0, x\to y\}$, $Б_2=\{x\oplus y, x\to y\}$, $Б_3=\{0, xy\leftrightarrow xz\}$, $Б_4=\{x\oplus y, xy\leftrightarrow xz\}$;

2) $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \{x \oplus y, xy \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus 1, xy \oplus yz \oplus xz\}$. Аналогичные действия дают следующие результаты (табл. 6.28).

Таблица 6.28

Функция	P_0	P_1	S	L	M
f_1	+	−	+	−	−
f_2	+	−	−	−	−
f_3	−	−	+	+	−
f_4	+	+	−	+	+

КНФ$G = f_3(f_1 \vee f_2 \vee f_3)(f_2 \vee f_4)(f_1 \vee f_2)(f_1 \vee f_2 \vee f_3) = f_2 f_3 \vee$ $\vee f_1 f_3 f_4 =$ ДНФG. Таким образом:

$Б_1 = \{xy \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$,

$Б_2 = \{x \oplus y, x \oplus y \oplus z \oplus 1, xy \oplus yz \oplus xz\}$.

3). $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\} = \{xy \vee \overline{x}\overline{z}, \overline{x}, x \to y, 0, x \oplus zy\}$. Таблица Поста приведена в табл. 6.29.

Таблица 6.29

Функция	P_0	P_1	S	L	M
f_1	+	+	−	−	−
f_2	−	−	+	+	−
f_3	−	+	−	−	−
f_4	+	−	−	+	+
f_5	+	−	−	−	−

КНФ$G = (f_2 \vee f_3)(f_2 \vee f_4 \vee f_5)(f_1 \vee f_3 \vee f_4 \vee f_5)(f_1 \vee f_3 \vee f_5) \cdot$ $\cdot (f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee f_5) =$

$= f_1f_2 \vee f_2f_3 \vee f_2f_5 \vee f_3f_4 \vee f_3f_5 =$ ДНФ G.

$Б_1 = \{xy \vee \bar{x}z, \bar{x}\}$,

$Б_2 = \{\bar{x}, x \to y\}$, $Б_3 = \{\bar{x}, x \oplus zy\}$, $Б_4 = \{x \to y, 0\}$,

$Б_5 = \{x \to y, x \oplus zy\}$.

1.18.16. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \vee \overline{x_3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = x_1x_3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = x_1\overline{x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial(x_1, x_2)} = \overline{x_3} \vee x_1x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \overline{x_2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial(x_1, x_3)} = x_1\overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = x_1$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial(x_2, x_3)} = x_1\left(x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_3\right)$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = 1$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3.$$

1.18.17.

1) $f(x, y, z) = x \vee y \to z \equiv \overline{xy} \vee z$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \bar{y}\bar{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \bar{x}\bar{z}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = x \vee y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \bar{z}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \bar{y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \bar{x}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 1$.

Тогда $f(x, y, x) = 1 \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot y \oplus 0 \cdot z \oplus 1 \cdot xy \oplus 1 \cdot xz \oplus 1 \cdot yz \oplus$ $\oplus 1 \cdot xyz = 1 \oplus x \oplus y \oplus xy \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$;

2) $f(x, y) = x \vee y \to (x \leftrightarrow y) \equiv xy \vee \overline{xy}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $f(x, y) = 1 \oplus 1 \cdot x \oplus 1 \cdot y \oplus 0 \cdot xy = 1 \oplus x \oplus y$;

3) $f(x, y, z) = (x \to z)(y \to z) \to (x \to y) \equiv \bar{x} \vee y \vee \bar{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \bar{y}z$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = xz$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = x\bar{y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \bar{y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 1$,

$$f(x,y,z)=1\oplus 0\cdot x\oplus 0\cdot y\oplus 0\cdot z\oplus 0\cdot xy\oplus 1\cdot xz\oplus$$
$$\oplus\, 0\cdot yz\oplus 1\cdot xyz=1\oplus xz\oplus xyz.$$

1.18.18.

1) Рассмотрим два случая: $x=k-1$ и $x\neq k-1$. В первом случае $\overline{x}=0$ и $(-x)=(-0)=0$ по определению. Правая часть формулы ${}^{\sim}x=k-1-x=k-1-k+1=0$. Таким образом, равенство выполняется. Во втором случае левая часть равна $-(\overline{x})=k-x=k-(x+1)\mathrm{mod}k=k-x-1$. По определению ${}^{\sim}x=k-1-x$, следовательно $k-1-x=k-1-x$;

2) Пусть $x=k-1$, тогда $\overline{x}=0$, ${}^{\sim}x=k-1-x=k-1-k+1=0$. ${}^{\sim}(\overline{x}+y)={}^{\sim}y$, $({}^{\sim}x)+({}^{\sim}y)=0+({}^{\sim}y)={}^{\sim}y$. Пусть теперь $x\neq k-1$. $\overline{x}=x+1$, ${}^{\sim}(\overline{x}+y)={}^{\sim}(x+1+y)=k-1-x-1-y=k-2-x-y$, ${}^{\sim}x=k-1-x$, ${}^{\sim}y=k-1-y$,
$({}^{\sim}x)+({}^{\sim}y)=k-1-x+k-1-y=k-2-x-y$;

3) Рассмотрим три случая. Пусть сначала $x=k-1$. Тогда по определению элементарных операций $\overline{x}=0$, $\min(\overline{x},y)=0$,
$\min(x,y)=\min(k-1,y)=y$, $\overline{y}=y+1$, $y\div x=0$,
$J_0(0)=k-1$, $j_{k-1}(x)=j_{k-1}(k-1)=1$,
$\overline{\min(x,y)}+J_0(y\div x)-j_{k-1}(x)\cdot y=$
$=y+1+k-1-y=k=0$. $\min(\overline{x},y)=\min(0,y)=0$.

Пусть теперь $x\neq k-1$, но $x\geq y$. Тогда $\min(x,y)=y$,
$\overline{\min(x,y)}=y+1$, $y\div x=0$, $J_0(y\div x)=k-1$, $j_{k-1}(x)=0$;
$y+1+k-1-0\cdot y=k+y=y$, $\min(\overline{x},y)=\min(x+1,y)=y$.

Наконец, пусть $x\neq k-1$, но $x<y$. Тогда аналогично
$\min(x,y)=x$, $\overline{\min(x,y)}=x+1$, $\overline{x}=x+1$, $y\div x=y-x$,
$J_0(y-x)=0$, $j_{k-1}(x)=0$; $x+1+0-0\cdot y=x+1$,
$\min(\overline{x},y)=x+1$.

1.18.19.

1) Таблица истинности этой операции очень короткая (табл. 6.30).

Разложение по формуле (1.16.9) или (1.16.10) имеет следующий вид: $f(x)=(f(0)\wedge J_0(x))\vee(f(1)\wedge J_1(x))\vee(f(2)\wedge J_2(x))=$
$=(1\wedge J_0(x))\vee(2\wedge J_1(x))\vee(0\wedge J_2(x))=J_0(x)\vee 2J_1(x)$.

Если воспользоваться другим обозначением для операций конъюнкции и дизъюнкции, то получим $f(x)=\max\{\min(1,J_0(x)),\min(2,J_1(x)),(0,J_2(x))\}=$
$=\max\{\min(1,J_0(x)),J_1(x)\}$, т. к. $\min(2,J_1(x))=J_1(x)$, а $\min(0,J_2(x))=0$.

Аналогично, вторая форма разложения имеет вид

$$f(x)=(f(0)\cdot j_0(x)+f(1)\cdot j_1(x)+f(2)\cdot j_2(x))\mathrm{mod}3=$$

$$=(j_0(x)+2\cdot j_1(x))\mathrm{mod}3;$$

2). $f(x)=(3\wedge J_0(x))\vee(2\wedge J_1(x))\vee(1\wedge J_2(x))\vee(0\wedge J_3(x))=$

$=3\cdot J_0(x)\vee 2\cdot J_1(x)\vee J_2(x)=$

$=\max\{J_0(x),\min(2,J_1(x)),\min(1,J_2(x))\}$.

$f(x)=(3\cdot j_0(x)+2\cdot j_1(x)+1\cdot j_2(x)+0\cdot j_3(x))\mathrm{mod}4=$

$=(3\cdot j_0(x)+2\cdot j_1(x)+j_2(x))\mathrm{mod}4$. Таблица истинности этой функции приведена в табл. 6.31.

Таблица 6.30

x	$f=\bar{x}$
0	1
1	2
2	0

Таблица 6.31

x	0	1	2	3
$f(x)=\tilde{}x$	3	2	1	0

3) $f=x\div y^2=x\div y\cdot y$. Таблица истинности приведена в табл. 6.32.

Таблица 6.32

x	y	$y\cdot y$	$f=x\div y\cdot y$
0	0	0	0
0	1	1	0
0	2	1	0

Таблица 6.32 (окончание)

x	y	$y \cdot y$	$f = x \div y \cdot y$
1	0	0	1
1	1	1	0
1	2	1	0
2	0	0	2
2	1	1	1
2	2	1	1

$$f(x, y) = (1 \wedge J_1(x) \wedge J_0(y)) \vee (2 \wedge J_2(x) \wedge J_0(y)) \vee$$
$$\vee (1 \wedge J_2(x) \wedge J_1(y)) \vee (1 \wedge J_2(x) \wedge J_2(y)) = \max\{\min(1, J_1(x), J_0(y)),$$
$$\min(J_2(x), J_0(y)), \min(1, J_2(x), J_1(y)), \min(1, J_2(x), J_2(y))\},$$
$$f(x, y) = (j_1(x) \cdot j_0(y) + 2 \cdot j_2(x) \cdot j_0(y) + j_2(x) \cdot j_1(y) + j_2(x) \cdot j_2(y)) \bmod 3.$$

Таблица 6.33

x	$x \cdot x$	$f = x^2 \div x$
0	0	0
1	1	0
2	4	2
3	4	1
4	1	0

1.18.20.

1) Сначала представим функцию $f(x) = x^2 \div x$ (при $k = 5$) во второй форме. Таблица истинности $f(x)$ приведена в табл. 6.33.

$$f(x) = f(0) \cdot j_0(x) + f(1) \cdot j_1(x) + f(2) \cdot j_2(x) + f(3) \cdot j_3(x) +$$
$$+ f(4) \cdot j_4(x) = 0 \cdot j_0(x) + 0 \cdot j_1(x) + 2 \cdot j_2(x) + 1 \cdot j_3(x) + 0 \cdot j_4(x) =$$
$$= 2 \cdot j_2(x) + j_3(x).$$

Составим таблицу истинности (табл. 6.34) нескольких вспомогательных функций, из которой можно получить несколько соотношений: $j_0(x)=1-x^{k-1}$, $j_i(x)=j_0(x-i)$, $i=1,2,\ldots,k-1$ (последнее соотношение очевидно по определению).

Таблица 6.34

i	x	$x-i$	$j_i(x)$	x^{k-1}	$1-x^{k-1}$	$j_0(x-i)$
0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0	0
0	2	2	0	1	0	0
1	2	1	0	1	0	1
2	2	0	1	1	0	0
3	2	0	0	1	0	0
4	2	0	0	1	0	0
0	3	3	0	1	0	0
1	3	2	0	1	0	0
2	3	1	0	1	0	0
3	3	0	1	1	0	0
4	3	0	0	1	0	0
0	4	4	0	1	0	0
1	4	3	0	1	0	0
2	4	2	0	1	0	1
3	4	1	0	1	0	0
4	4	0	1	1	0	0

Тогда $j_2(x) = j_0(x-2) = 1-(x-2)^{k-1} = 1-(x-2)^4 =$
$= 1-(x^4+2x^3-x^2-2x+1) = -x^4-2x^3+x^2+2x$,
$j_3(x) = j_0(x-3) = 1-(x-3)^4 = 1-(x^4-2x^3-x^2+2x+1) =$
$= -x^4+2x^3+x^2-2x$,
$f(x) = 2\cdot j_2(x)+j_3(x) = 2x^4-2x^3-2x^2+2x$. Все умножения и сложения производятся по модулю пять.

Применим к этой же задаче более понятный здесь метод неопределенных коэффициентов: $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$. Более высоких показателей степени не будет, ибо $x^{4+i} = x^i \bmod 5$. Составим систему уравнений:

$$a_0 = f(0) = 0,$$
$$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4 = f(1) = 0,$$
$$a_0+2a_1+4a_2+3a_3+a_4 = f(2) = 2,$$
$$a_0+3a_1+4a_2+2a_3+a_4 = f(3) = 1,$$
$$a_0+4a_1+a_2+4a_3+a_4 = f(4) = 0.$$

Из решения системы находим $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, т. е.

$$f(x) = 2x+3x^2+3x^3+2x^4 = 2x^4-2x^3-2x^2+2x;$$

2) $f(x,y) = \max(2x \div y, x\cdot y)$, $k=3$. В табл. 6.35 приведена таблица истинности $f(x,y)$.

Таблица 6.35

x	$2\cdot x$	y	$x\cdot y$	$2x \div y$	$f(x,y)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	2	0	0	0
1	2	0	0	2	2
1	2	1	1	1	1
1	2	2	2	0	2
2	1	0	0	1	1
2	1	1	2	0	2
2	1	2	1	0	1

Найдем сначала полином методом неопределенных коэффициентов. Здесь $x^{3+i} = x^i \bmod 3$, т. е. в разложении у x и y не будет степеней выше второй. Сам многочлен будет иметь вид

$$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6xy^2 + a_7yx^2 + a_8x^2y^2.$$

Составим систему уравнений для его коэффициентов:

$f(0,0) = 0 = a_0$,

$f(0,1) = 0 = a_2 + a_5$,

$f(0,2) = 0 = 2a_2 + a_5$,

$f(1,0) = 2 = a_1 + a_4$,

$f(1,1) = 1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$,

$f(1,2) = 2 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 2a_7 + a_8$,

$f(2,0) = 1 = 2a_1 + a_4$,

$f(2,1) = 2 = 2a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 + a_5 + 2a_6 + a_7 + a_8$,

$f(2,2) = 1 = 2a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 2a_6 + 2a_7 + a_8$.

Система легко решается методом исключения: $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $a_4 = a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = a_8 = 0$. Таким образом, $f(x,y) = 2x + xy + xy^2$.

Представим теперь функцию $f(x,y)$ в первой и второй форме:

$f(x,y) = (2 \wedge J_1(x) \wedge J_0(y)) \vee (1 \wedge J_1(x) \wedge J_1(y)) \vee (2 \wedge J_1(x) \wedge J_2(y)) \vee$
$\vee (1 \wedge J_2(x) \wedge J_0(y)) \vee (2 \wedge J_2(x) \wedge J_1(y)) \vee (1 \wedge J_2(x) \wedge J_2(y)) = 2 \cdot j_1(x) \cdot$
$\cdot j_0(y) + 1 \cdot j_1(x) \cdot j_1(y) + 2 \cdot j_1(x) \cdot j_2(y) + 1 \cdot j_2(x) \cdot j_0(y) + 2 \cdot j_2(x) \cdot j_1(y) +$
$+ 1 \cdot j_2(x) \cdot j_2(y)$. Воспользуемся полученными в предыдущем примере соотношениями $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$ и $j_i(x) = j_0(x-i)$, $i = 1,2,\ldots,k-1$. Тогда $j_1(x) = j_0(x-1) = 1 - (x-1)^2 = 1 - x^2 + 2x - 1 = -x^2 + 2x$, $j_0(y) = 1 - y^2$, $j_1(y) = -y^2 + 2y$, $j_2(y) = j_0(y-2) = 1 - (y-2)^2 = 1 - y^2 + y - 1 = -y^2 + y$, $j_2(x) = -x^2 + x$.

Наконец, получим выражение для самой функции:

$$f(x,y)=(-x^2+2x)(2-2y^2)+(-x^2+2x)(-y^2+2y)+(-2x^2+x)\cdot$$
$$\cdot(-y^2+y)+(-x^2+x)(1-y^2)+(-2x^2+2x)(-y^2+2y)+(-x^2+x)\cdot$$
$$\cdot(-y^2+y)=-2x^2+x+2x^2y^2-xy^2+x^2y^2-2xy^2-2yx^2+xy+$$
$$+2x^2y^2-xy^2-2yx^2+xy-x^2+x+x^2y^2-xy^2+2x^2y^2-2xy^2-x^2y+$$
$$+xy+x^2y^2-xy^2-yx^2+xy=2x-2xy^2+xy=2x+xy+xy^2.$$

6.4. Ответы и решения практического занятия №4

1.21.1.

а) $\overline{x}=\varphi_2(x,x)$, т. к. $x|y=\overline{xy}$, элемент φ_2 уже реализует $x|x=\overline{xx}=\overline{x}$. Задержка равна единице. На рис. 6.6 изображена схема для $\overline{x}$. Мы ранее предполагали, что все функциональные элементы, из которых строятся схемы, являются однотактными. Следовательно, сигнал на выходе схемы, равный $\overline{x}$ (рис. 6.6), появится через один такт после появления сигнала x на обоих входах функционального элемента φ_2;

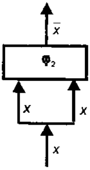


Рис. 6.6

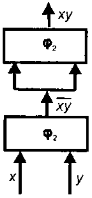


Рис. 6.7

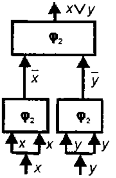


Рис. 6.8

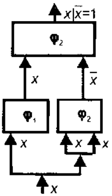


Рис. 6.9

б) $xy=\overline{\varphi_2(x,y)}$, т. к. $xy=\overline{\overline{xy}}=\overline{x|y}$. Задержка равна двум тактам. На входах нижнего элемента (рис. 6.7) — сигналы x и y, на выходе $\overline{xy}=x|y$. На входах верхнего элемента $x|y$ и $x|y$, на выходе $\overline{(x|y)}|\overline{(x|y)}=\overline{(x|y)(x|y)}=\overline{\overline{xy}\,\overline{xy}}=\overline{\overline{xy}}=xy=\overline{\varphi_2(x,y)}$;

в) $x \vee y = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = (x|x)(y|y)$. Задержка равна двум тактам. На входах нижних элементов x и y (рис. 6.8), на выходах $\overline{x}$ и $\overline{y}$; на выходе верхнего элемента $x \vee y = \overline{x}|\overline{y} = \varphi_2(\overline{x}, \overline{y})$;

г) $1 = \overline{0} = \overline{x\overline{x}} = x|\overline{x} = \varphi_2(x, \overline{x})$. На входе схемы x. $\overline{x} = \varphi_2(x, x)$, т. е. на выходе нижнего элемента φ_2 через такт, т. к. все элементы однотактовые, вырабатывается $\overline{x}$. Следовательно, левый сигнал на верхний элемент φ_2 должен подаваться с задержкой в один такт. φ_1 — элемент, реализующий задержку x на один такт (рис. 6.9). На выходе верхнего элемента φ_2 сигнал равен $x|\overline{x} = \overline{x\overline{x}} = \overline{0} = 1$. Задержка схемы равна двум тактам;

д) смотрите предыдущий пункт. Общая задержка схемы равна трем тактам (рис. 6.10);

е) $x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y = \overline{\overline{x} \vee \overline{\overline{y}}} \vee \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x} \vee y} \vee \overline{x \vee \overline{y}} =$
$= (\overline{x}|y) \vee (x|\overline{y}) = (\overline{x} \vee y)|(x \vee \overline{y}) = \varphi_2(\overline{x} \vee y, x \vee \overline{y}) =$
$= \varphi_2(\varphi_2(x, \overline{y}), \varphi_2(\overline{x}, y))$. Задержка схемы равна трем тактам (рис. 6.11). На рис. 6.11 знаками $\neg(x \vee \overline{y})$ и $\neg(\overline{x} \vee y)$ обозначены $\overline{(x \vee \overline{y})}$ и $\overline{(\overline{x} \vee y)}$.

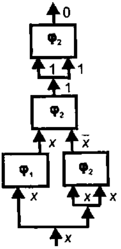


Рис. 6.10

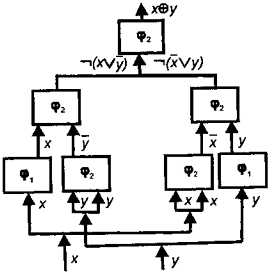


Рис. 6.11

1.21.2. Перечислим все простые цепи схем, изображенных на рис. 1.19, и определим по ним дизъюнкцию по формуле (1.19.1). После упрощения полученных выражений найдем функцию проводимости:

а) $xyt \vee tyt \vee xz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee \bar{y}\bar{x}yz \vee tz \equiv yt(x \vee 1) \vee xz \vee \bar{y}\bar{x}t \vee$

$\vee \bar{y}\bar{x}yz \vee tz \equiv yt \vee xz \vee tz \vee \bar{y}\bar{x}t$;

б) $xy\bar{x} \vee xt\bar{x} \vee xy\bar{t}y\bar{x} \vee xy\bar{x} \vee x\bar{t}\bar{x} \vee xyty\bar{x} \vee x\bar{t}yt\bar{x} = 0$;

в) $xy \vee xzu \vee tu \vee tzy$.

1.21.3.

а) схема;

б) не является схемой, т. к. последний вход φ_1 соединен с выходами φ_3 и φ_4, а вход каждого элемента φ_i может быть соединен не более чем с одним выходом элемента φ_j;

в) не схема, ибо φ_3, φ_4 и φ_5 образуют цикл.

1.21.4. Релейно-контактные схемы заданных функций изображены на рис. 6.12.

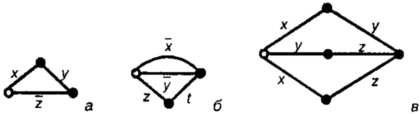


Рис. 6.12

1.21.5.

а) $(y \vee z) \to x\bar{y} \equiv \overline{y \vee z} \vee x\bar{y} \equiv \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \equiv \bar{y}(x \vee \bar{z})$ (рис. 6.13, *а*);

б) $x\bar{y} \leftrightarrow yx \equiv (x\bar{y} \to yx)(yx \to x\bar{y}) \equiv \left(\overline{x\bar{y}} \vee yx\right) \wedge (\overline{yx} \vee x\bar{y}) \equiv$

$\equiv ((\bar{x} \vee y) \vee yx)((\bar{y} \vee \bar{x}) \vee x\bar{y}) \equiv (\bar{x} \vee y \vee yx)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x\bar{y}) \equiv$

$\equiv (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y}) \equiv xy \vee \bar{x}\bar{y}$ (рис. 6.13, *б*);

в) $x \oplus y \oplus z = (x\bar{y} \vee \bar{x}y) \oplus z = (x\bar{y} \vee \bar{x}y)\bar{z} \vee \overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}y)}z \equiv$

$\equiv x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \left(\overline{x\bar{y}} \wedge \overline{\bar{x}y}\right)z \equiv x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}z$ (рис. 6.13, *в*).

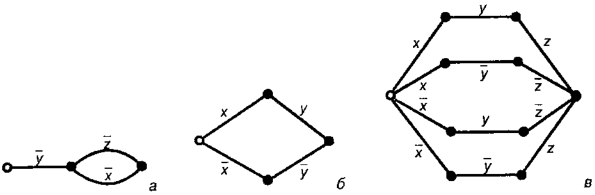


Рис. 6.13

1.21.6.

а) схема формулы $(x \vee y\bar{z})(xy \vee zt)$ изображена на рис. 6.14;

б) π-схема формулы $(\bar{x}(y \vee \bar{z}) \vee \bar{t})x$ приведена на рис. 6.15.

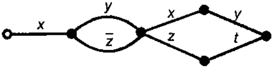


Рис. 6.14

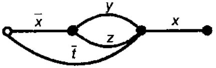


Рис. 6.15

1.21.7.

а) рассмотрим множество простых цепей схемы вида $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i}$. Очевидно, две цепи $x_1 x_2 \ldots x_n$ и $\overline{x_1 x_2} \ldots \overline{x_n}$ не будут иметь в составе элементы x_i и $\overline{x_i}$ одновременно, их функция проводимости $f = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \overline{x_1 x_2} \ldots \overline{x_n}$. Хотя остальные цепи также будут существенны (каждая внутренняя вершина будет обходиться один раз), их функция проводимости будет равна нулю;

б) существует лишь одна цепь без повторений элементов x_i и $\overline{x_i}$. Это цепь $x_1 x_2 \ldots \overline{x_n} x_{n-1}$, функция проводимости по остальным цепям равна нулю.

1.21.8. Упростим приведенные формулы, чтобы π-схема была проще.

а) $x(yz \vee \overline{yz}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z}) \equiv x(yz \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}(\bar{y}z \vee y\bar{z}) \equiv$

$\equiv xyz \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \equiv \bar{y}(x \vee \bar{x}z) \vee \bar{z}(x \vee \bar{x}y) \vee xyz \equiv$

$\equiv \bar{y}(x \vee z) \vee \bar{z}(x \vee y) \vee xyz \equiv x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee xyz \equiv$

$\equiv x(\bar{y} \vee yz) \vee \bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \equiv$

$\equiv x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y}z \vee x\bar{z} \vee y\bar{z} \equiv x(z \vee \bar{y}) \vee \bar{z}(x \vee y) \vee \bar{y}z$. Схема изображена на рис. 6.16, *а*;

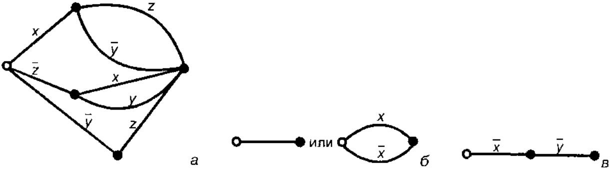


Рис. 6.16

б) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z) \equiv \overline{(\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee z)} \vee (\bar{x} \vee z) \equiv$
$\equiv x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x} \vee z \equiv (\bar{x} \vee x\bar{y}) \vee (z \vee \bar{z}y) \equiv \bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee y \equiv 1 \equiv x \vee \bar{x}$
(рис. 6.16, *б*);

в) Очевидно, что $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$, $x \wedge y = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$. Тогда $x \downarrow y = \bar{x} \wedge \bar{y} \equiv \bar{x}\bar{y}$. Схема изображена на рис. 6.16, *в*.

1.21.9. Предложенные схемы являются π-схемами. Составим вначале для них функции проводимости и упростим эти функции.

а) $(x \vee \bar{y})(z \vee \bar{x})(y \wedge \bar{z})(xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}) \equiv (xz \vee \bar{y}z \vee x\bar{x} \vee \bar{x}\bar{y}) \cdot$
$\cdot (xyz \vee xyz\bar{z} \vee \bar{z}\bar{y}\bar{z}y \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}) \equiv$

$\equiv xyz \vee xyz\bar{y}z \vee xyz\bar{y}\bar{x} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}xz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{y}z \vee$
$\vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{y}\bar{x} \equiv xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ (рис. 6.17, *а*);

б) $(xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z})yz \vee t(y \vee \bar{z}) \equiv xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}yz \vee t(y \vee \bar{z}) \equiv xyz \vee t(y \vee \bar{z})$
(рис. 6.17, *б*);

в) $x(x \vee y_1)(x \vee y_2)\ldots(x \vee y_n) \equiv x(x \vee xy_1 \vee xy_2 \vee y_1y_2)(x \vee y_3)\ldots$

$$\ldots(x \vee y_n) \equiv x(x \vee xy_1 \vee xy_2 \vee xy_1y_2 \vee xy_3 \vee xy_1y_3 \vee xy_2y_3 \vee y_1y_2y_3)\ldots$$
$$\ldots(x \vee y_n) \equiv x(x \vee xy_1 \vee xy_2 \vee \ldots \vee xy_n \vee xy_1y_2 \vee \ldots \vee xy_1y_2\ldots y_n \vee \ldots$$
$$\ldots \vee y_1y_2\ldots y_n) \equiv x(x \vee y_1y_2\ldots y_n) \equiv x \vee xy_1y_2\ldots y_n \equiv x \text{ (рис. 6.17, } в\text{).}$$

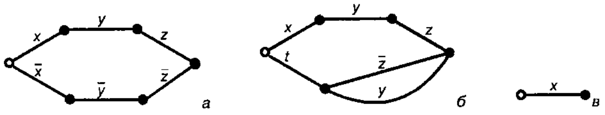


Рис. 6.17

1.21.10.

а) Итак, восстанавливаем схему методом каскадов.

$f(\tilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$, $n = 3$, $i = 1,2,3$.

$i = 1$, $U_1 : f(\sigma_1, x_2, x_3)$, $f(1, x_2, x_3) = x_2 \oplus x_3$, $f(0, x_2, x_3) = x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

$i = 2$, $U_2 : f(\sigma_1, \sigma_2, x_3)$, $f(1,1,x_3) = x_3 \oplus 1$, $f(1,0,x_3) = x_3$, $f(0,1,x_3) = x_3$, $f(0,0,x_3) = x_3 \oplus 1$.

$i = 3$, $U_3 : f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $f(1,1,1) = 0$, $f(1,1,0) = 1$, $f(1,0,1) = 1$, $f(1,0,0) = 0$, $f(0,1,1) = 1$, $f(0,1,0) = 0$, $f(0,0,1) = 0$, $f(0,0,0) = 1$.

$$U_1^* = \left\{ x_2 \overset{1}{\oplus} x_3,\ x_2 \oplus \overset{2}{x_3} \oplus 1 \right\},\ U_2^* = \left\{ x_3 \overset{3}{\oplus} 1,\ \overset{4}{x_3} \right\},\ U_3^* = \left\{ \overset{5}{0},\ \overset{6}{1} \right\}.$$

Способ проведения ребер показан на рис. 6.18, *а*. На рис. 6.18, *б* — схема, полученная после удаления вершины $c = 0$.

Проверим правильность построения схемы, упростив исходную функцию.

$$x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus \overline{x_3} = (x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2) \oplus \overline{x_3} = (x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2) \cdot$$
$$\cdot x_3 \vee \overline{(x_1\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2)}\overline{x_3} \equiv x_1\overline{x_2}x_3 \vee \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee ((\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2}))\overline{x_3} \equiv$$

$\equiv x_1\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$. Если теперь составить функцию проводимости схемы рис. 1.18, *б*, она совпадет с последним выражением для $f(x_1, x_2, x_3)$.

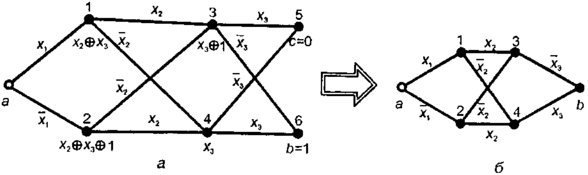


Рис. 6.18

б) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$, $n = 3$, $i = 1,2,3$.

$i = 1$, $U_1 : f(\sigma_1, x_2, x_3)$, $f(1, x_2, x_3) = x_2 \vee x_3$, $f(0, x_2, x_3) = x_2x_3$.

$i = 2$, $U_2 : f(\sigma_1, \sigma_2, x_3)$, $f(1,1,x_3) = 1$, $f(1,0,x_3) = x_3$, $f(0,1,x_3) = x_3$, $f(0,0,x_3) = 0$.

$i = 3$, $U_3 : f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, $f(1,1,1) = 1$, $f(1,1,0) = 1$, $f(1,0,1) = 1$, $f(1,0,0) = 0$, $f(0,1,1) = 1$, $f(0,1,0) = 0$, $f(0,0,1) = 0$, $f(0,0,0) = 0$.

$$U_1^* = \left\{ \overset{1}{x_2 \vee x_3},\ \overset{2}{x_2x_3} \right\},\ U_2^* = \left\{ \overset{3}{1},\ \overset{4}{x_3},\ \overset{5}{0} \right\},\ U_3^* = \left\{ \overset{6}{0},\ \overset{7}{1} \right\}.$$

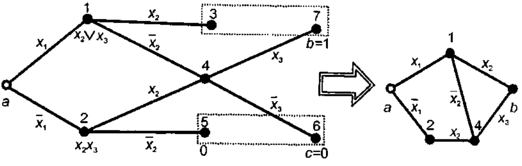


Рис. 6.19

Вершины 3 и 7, 5 и 6, соответствующие функциям 1 и 0, эквивалентны. Из схемы, полученной отождествлением эквивалентных вершин и удалением вершины $c = 0$ (рис. 6.19, *б*), функция проводимости

$$f = x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_2x_2 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \equiv$$

$$\equiv x_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \equiv x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \equiv$$

$\equiv \left(x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x_3}\right) \vee \left(x_1\overline{x_2}x_3 \vee x_1x_2x_3\right) \vee$
$\vee \left(\overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1x_2x_3\right) \equiv x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, что совпадает с исходной функцией. Заметим, что π-схема этой функции имеет иной вид.

1.21.11. Введем следующие обозначения для высказываний: $p = \{$ машина синего цвета $\}$, $q = \{$ машина марки "Бьюик" $\}$, $r = \{$ машина черного цвета $\}$, $s = \{$ машина марки "Крайслер" $\}$, $t = \{$ машина марки "Форд" $\}$.

Из показаний Брауна, Джонса и Смита следует, что высказывания $p \vee q \equiv 1$, $r \vee s \equiv 1$, $\overline{p} \vee t \equiv 1$. Конъюнкция этих высказываний также будет истинна, т. е. $(p \vee q)(r \vee s)(\overline{p} \vee t) \equiv$ $\equiv 1 \equiv pr\overline{p} \vee prt \vee ps\overline{p} \vee pst \vee qr\overline{p} \vee qrt \vee qs\overline{p} \vee qst$. Однако все конъюнкции, кроме $qr\overline{p}$, ложны. Следовательно, $qr\overline{p} \equiv 1$, т. е. преступники скрылись на черном "Бьюике".

1.21.12. Обозначим через x высказывание $x = \{$ первый студент изучал логику $\}$. Аналогично $y = \{$ второй студент изучал логику $\}$, $z = \{$ третий студент изучал логику $\}$. Тогда условия задачи дают:

1) $x \to z \equiv 1$;

2) $\overline{y \to z} \equiv 1$.

Составим конъюнкцию этих высказываний. $(x \to z)\left(\overline{y \to z}\right) \equiv 1 \equiv \left(\overline{x} \vee z\right)\left(\overline{\overline{y} \vee z}\right) \equiv$ $\equiv \left(\overline{x} \vee z\right)\left(y \wedge \overline{z}\right) \equiv \overline{x}y\overline{z} \vee zy\overline{z} \equiv \overline{x}y\overline{z}$. Таким образом, $\overline{x}y\overline{z} \equiv 1$, т. е. логику изучал только второй студент.

1.21.13. Обозначим через x, y, x, t следующие высказывания: $x = \{$ первый студент сдал экзамен $\}$, $y = \{$ второй студент сдал экзамен $\}$, $z = \{$ третий студент сдал экзамен $\}$, $t = \{$ четвертый студент сдал экзамен $\}$. Тогда $x \to y \equiv 1$; $y \to z \vee \overline{x} \equiv 1$; $\overline{t} \to x \wedge \overline{z} \equiv 1$; $t \to z \equiv 1$.

Очевидно, что $(x \to y)(y \to z \vee \overline{x})(\overline{t} \to x\overline{z})(t \to x) \equiv 1 \equiv$
$\equiv \left(\overline{x} \vee y\right)\left(\overline{y} \vee z \vee \overline{x}\right)\left(t \vee x\overline{z}\right)\left(\overline{t} \vee x\right) \equiv \left(\overline{x}\overline{y} \vee y\overline{y} \vee \overline{x}z \vee yz \vee y\overline{x} \vee \overline{x}\right)$.

$\cdot\left(t\bar{t} \vee x\bar{z}t \vee xt \vee x\bar{z}\right) \equiv \left(yz \vee \bar{x}\right)\left(xt \vee x\bar{z}\right) \equiv xyzt \vee x\bar{x}t \vee yzx\bar{z} \vee x\bar{x}\bar{z} \equiv$ $xyzt \equiv 1$. Таким образом, экзамен сдали все четыре студента.

1.21.14. Основное условие этой задачи заключается в том, что шесть человек будущей экспедиции должны выполнять шесть обязанностей строго индивидуально. Кроме того, имеются ограничения на персональный состав: если едет F, то должен ехать B, если едет D, то должны одновременно ехать H и C, т. е. в состав экспедиции входят FB и DHC. Напротив, $CG \equiv 0$ и $AB \equiv 0$.

Шесть специальностей экспедиции должны быть обязательно заняты, т. е. $(E \vee G)(B \vee F)(F \vee G)(C \vee D)(C \vee H)(A \vee D) \equiv 1$ или $(BE \vee BG \vee EF \vee FG)(CF \vee CG \vee DF \vee DG)(AC \vee AH \vee CD \vee DH) \equiv$
$\equiv (BCEF \vee BCFG \vee CEF \vee CFG \vee BCEG \vee BCG \vee CEFG \vee CFG \vee$
$\vee BDEF \vee BDFG \vee DEF \vee DFG \vee BDEG \vee BDG \vee DEFG \vee DFG)\cdot$
$\cdot(AC \vee AH \vee CD \vee DH)$.

Исключим сразу логические слагаемые из трех членов, т. к. в экспедиции должно быть шесть человек (не допускается совмещение специальностей) и логические слагаемые, содержащие $CG \equiv 0$. Тогда

$$(BCEF \vee CEFG \vee BDEF \vee DEFG)(AC \vee AH \vee CD \vee DH) \equiv$$
$$\equiv ABCEF \vee ACEFG \vee ABCDEF \vee ACDEFG \vee ABCEFH \vee$$
$$\vee ACEFGH \vee ABDEFH \vee ADEFGH \vee BCDEF \vee CDEFG \vee$$
$$\vee BCDEF \vee CDEFG \vee BCDEFH \vee CDEFGH \vee BDEFH \vee DEFGH.$$

Опять исключим пятичленные логические слагаемые и учтем условие $AB \equiv 0$. Получим $BCDEFH \equiv 1$.

Набор специальностей заполним по порядку. Пусть B будет гидрологом, тогда F гидрологом не может быть, а будет синоптиком. Аналогично C — радист, D — врач, E — биолог, а H — механик.

1.21.15. Поскольку в каждом из ответов лишь одно утверждение из двух истинное, то истинной будет их дизъюнкция. Тогда $(C_1 \vee P_2) \wedge (C_2 \vee B_3) \wedge (\text{Ю}_2 \vee B_4) \equiv 1 \equiv (C_1C_2 \vee P_2C_2 \vee C_1B_3 \vee P_2B_3)\cdot$
$\cdot(\text{Ю}_2 \vee B_4) \equiv C_1C_2\text{Ю}_2 \vee P_2C_2\text{Ю}_2 \vee C_1B_3\text{Ю}_2 \vee P_2B_3\text{Ю}_2 \vee$
$\vee C_1C_2B_4 \vee P_2C_2B_4 \vee C_1B_3B_4 \vee P_2B_3B_4 \equiv C_1B_3\text{Ю}_2 \equiv 1$.

Отсюда $P_4 \equiv 1$, и места распределились так: Сергей — первый, Юрий — второй, Виктор — третий, Роман — четвертый.

1.21.16. Введем следующие обозначения: $П_К = \{$ Петя видел Колю на улице $\}$, $К_К = \{$ Коля ходил в кино $\}$, $К_П = \{$ Коля сказал правду $\}$, $П_П = \{$ Петя сказал правду $\}$. Условия задачи следующие:

$\overline{П_К} \to (К_К \vee П_П) \equiv 1$;

$\overline{К_К} \to \left(\overline{П_К} \wedge К_П\right) \equiv 1$;

$К_П \to \left(К_К \vee \overline{П_П}\right) \equiv 1$.

Отсюда

$$\left(\overline{П_К} \to (К_К \vee П_П)\right)\left(\overline{К_К} \to \left(\overline{П_К} К_П\right)\right)\left(К_П \to \left(К_К \vee \overline{П_П}\right)\right) \equiv$$
$$\equiv (П_К \vee К_К \vee П_П) \cdot \left(К_К \vee \overline{П_К} К_П\right)\left(\overline{К_П} \vee К_К \vee \overline{П_П}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(П_К К_К \vee К_К \vee П_П К_К \vee П_К \overline{П_К} К_П \vee\right.$$
$$\left.\vee К_К \overline{П_К} К_П \vee П_П \overline{П_К} К_П\right)\left(\overline{К_П} \vee К_К \vee \overline{П_П}\right) \equiv \left(К_К \vee П_П \overline{П_К} К_П\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\overline{К_П} \vee К_К \vee \overline{П_П}\right) \equiv К_К \overline{К_П} \vee П_К \overline{П_К}\, \overline{К_П} К_П \vee К_К \vee П_П \overline{П_К} К_П К_К \vee$$
$$\vee К_К \overline{П_П} \vee П_П \overline{П_К} К_П \overline{П_П} \equiv К_К \equiv 1.$$

Итак, Коля ходил в кино.

1.21.17. Обозначим город, куда собираются поехать друзья, буквой в нижнем индексе фамилии. Тогда условия задачи дадут следующие уравнения:

1) $\overline{A_М} \to \overline{C_О} \equiv 1$;

2) $\overline{B_М} \wedge \overline{B_Т} \to A_М \equiv 1$;

3) $\overline{C_Т} \to B_К \equiv 1$;

4) $\overline{D_М} \to \overline{B_М} \equiv 1$;

5) $\overline{D_О} \to \overline{B_М} \equiv 1$.

Конъюнкция этих высказываний также будет истинной. Запишем ее и упростим полученное выражение:

$$\left(\overline{A_М} \to \overline{C_О}\right)\left(\overline{B_М B_Т} \to A_М\right)\left(\overline{C_Т} \to B_К\right)\left(\overline{D_М} \to \overline{B_М}\right)\left(\overline{D_О} \to \overline{B_М}\right) \equiv$$
$$\equiv \left(A_М \vee \overline{C_О}\right) \cdot (B_М \vee B_Т \vee A_М)(C_Т \vee B_К)\left(D_М \vee \overline{B_М}\right)\left(D_О \vee \overline{B_М}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(A_M B_M \vee \overline{C_O} B_M \vee A_M B_T \vee \overline{C_O} B_T \vee A_M \vee A_M \overline{C_O}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(C_T D_M \vee B_K D_M \vee C_T \overline{B_M} \vee B_K \overline{B_M}\right)\left(D_O \vee \overline{B_M}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(B_M \overline{C_O} \vee B_T \overline{C_O} \vee A_M\right)\cdot$$

$$\cdot\left(C_T D_M D_O \vee B_K D_M D_O \vee C_T \overline{B_M} D_O \vee B_K \overline{B_M} D_O \vee\right.$$

$$\left.\vee C_T D_M \overline{B_M} \vee B_K D_M \overline{B_M} \vee C_T \overline{B_M} \vee B_K \overline{B_M}\right) \equiv$$

$$\equiv B_M \overline{C_O} C_T \overline{B_M} D_O \vee B_T \overline{C_O} C_T \overline{B_M} D_O \vee$$

$$\vee A_M C_T \overline{B_M} D_O \vee B_M \overline{C_O} C_T \overline{B_M} \vee A_M C_T \overline{B_M} \vee$$

$$\vee B_M \overline{C_O} B_K \overline{B_M} \vee B_T \overline{C_O} B_K \overline{B_M} \vee$$

$$\vee A_M B_K \overline{B_M} \equiv A_M C_T \overline{B_M} D_O \vee A_M C_T \overline{B_M} \vee A_M B_K \overline{B_M} \equiv 1.$$

Каждое из логических слагаемых может быть истинным. Рассмотрим первое: $A_M C_T D_O \equiv 1$, тогда $B_K \equiv 1$. Для второго: $A_M C_T \equiv 1$, тогда либо $B_O D_K \equiv 1$, либо $D_O B_K \equiv 1$, однако второе сочетание уже встречалось в первом слагаемом. Аналогично, третье слагаемое дает $A_M B_K \equiv 1$, тогда $C_O D_T \equiv 1$ или $C_T D_O \equiv 1$. Итак, окончательный выбор городов таков: $A_M B_K C_T D_O \vee A_M B_O C_T D_K \vee A_M B_K C_O D_T$.

1.21.18. Обозначим фамилию школьника с индексом внизу, равным номеру убранного класса. Сообщения учеников с учетом ложности одного и истинности другого высказывания будут иметь вид

$$(A_9 \vee C_7) \wedge (K_9 \vee A_8) \wedge (C_8 \vee K_{10}) \equiv 1 \equiv$$

$$\equiv (A_9 K_9 \vee C_7 K_9 \vee A_9 A_8 \vee C_7 A_8)(C_8 \vee K_{10}) \equiv$$

$$\equiv C_7 C_8 K_9 \vee C_7 C_8 A_8 \vee C_7 K_9 K_{10} \vee C_7 A_8 K_{10}.$$ Итак, $C_7 A_8 K_{10} \equiv 1$, т. е. $Д_9 \equiv 1$.

Андреев убирал 8-й класс, Костин — 10-й, Савельев — 7-й, а Давыдов — 9-й.

Глава 7

Исчисление высказываний

7.1. Ответы и решения практического занятия № 5

2.4.1.

а) $\overline{A \to B}$, $A \wedge B$, $A \to B$, A, B;

б) $(A \to B) \wedge (B \to C)$, $\overline{A} \vee C$, $A \to B$, $B \to C$, $\overline{A}$, A, B, C;

в) A, $\overline{B} \to \overline{(A \to B)}$, $\overline{B}$, $\overline{A \to B}$, $A \to B$, B;

г) $A_1 \to A_2 \vee A_3$, A_3, A_1, $A_2 \vee A_3$, A_2.

2.4.2. С помощью подстановки выводимая формула получается лишь тогда, когда подстановка осуществляется в одну из аксиом 2.1.1. Таким образом, необходимо лишь подобрать нужную аксиому.

а) $$\int_{x,y}^{A\wedge B, C} (x \to (x \vee y)) \equiv \vdash A \wedge B \to A \wedge B \vee C;$$

б) $$\int_{x,y,z}^{A, B\wedge C, A} (z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y)) \equiv$$
$$\equiv \vdash (A \to A) \to ((A \to B \wedge C) \to (A \to A \wedge B \wedge C));$$

в) $$\int_{x,y,z}^{A\wedge B, C, B\wedge C} (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \equiv$$
$$\equiv \vdash (A \wedge B \to (C \to B \wedge C)) \to ((A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C));$$

г) $$\int_{x,y}^{A\vee \overline{B}, C} (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x}) \equiv \vdash (A \vee \overline{B} \to C) \to (\overline{C} \to \overline{A} \wedge B).$$

2.4.3. Выводом в исчислении высказываний называется конечная последовательность формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такая, что $\forall i\ (1 \le i \le n)\ A_i$ есть либо аксиома, либо непосредственное следствие предыдущих аксиом, причем аксиомой называется всякая формула, полученная из схемы аксиом 2.1.1 по правилу подстановки, а непосредственное следствие получается по правилу простого заключения.

а) вывод, т. к. $A \to (A \vee B)$ — аксиома III_1: $\int\limits_{x,y}^{A,B}(x \to x \vee y) \equiv \vdash A \to (A \vee B)$;

б) вывод. Первый член — аксиома III_1, второй член получен подстановкой $\int\limits_{x,y}^{A\to A\vee B,\,B} x \to (y \to x) \equiv \vdash (A \to A \vee B) \to (B \to (A \to A \vee B))$, третий по правилу простого заключения из первых двух;

в) данная последовательность формул не является выводом, т. к. второй член последовательности $A \to (B \to A) \to B$ не может быть получен подстановкой ни в одну из аксиом 2.1.1.

2.4.4.

а) $$\Gamma = \{A \to (B \to C), A, B\}: A, B, A \to (B \to C),\ \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \dfrac{\vdash A,\ \vdash A\to(B\to C)}{\vdash B\to C}}}{B \to C},\ \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \dfrac{\vdash B,\ \vdash B\to C}{\vdash C}}}{C};$$

б) $$\Gamma = \{A \to \overline{\overline{B}}, \overline{B}\}: \overline{B}, A \to \overline{\overline{B}}, \underset{\substack{IV_1:(x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x})\\ \int\limits_{x,y}^{A,B}(IV_1)\equiv\vdash(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A})}}{(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})},$$

$$\underset{\substack{\int\limits_{B}^{\overline{\overline{B}}}(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A})\equiv\\ \equiv\vdash\left(A\to\overline{\overline{B}}\right)\to(\overline{B}\to\overline{A})}}{\left(A \to \overline{\overline{B}}\right) \to (\overline{B} \to \overline{A})},\quad \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \dfrac{\vdash A\to\overline{\overline{B}},\ \vdash\left(A\to\overline{\overline{B}}\right)\to(\overline{B}\to\overline{A})}{\vdash\overline{B}\to\overline{A}}}}{\overline{B} \to \overline{A}},\quad \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \dfrac{\vdash\overline{B},\ \vdash\overline{B}\to\overline{A}}{\vdash\overline{A}}}}{\overline{A}};$$

в) $$\Gamma = \{A \to B, A\}: A, A \to B,\ \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \dfrac{\vdash A,\ \vdash A\to B}{\vdash B}}}{B},\ \underset{\substack{III_1:x\to x\vee y\\ \int\limits_{x,y}^{B,C}(III_1)\equiv\vdash B\to B\vee C}}{B \to B \vee C},\ \underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \dfrac{\vdash B,\ \vdash B\to B\vee C}{\vdash B\vee c}}}{B \vee C},$$

$$\underset{\substack{\text{по обобщенной теореме дедукции}\\ \dfrac{A\to B, A\vdash B\vee C}{\vdash(A\to B)\to(A\to B\vee C)}}}{(A \to B) \to (A \to B \vee C)}.$$

2.4.5.

а) пусть $\Gamma, B, B = \Gamma_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_n, B, B\}$, тогда $\Gamma, B = \Gamma_2 = \{A_1, A_2, \dots, A_n, B\}$. Выводы из Γ_1 и Γ_2 будут одинаковы, т. к. вывод из совокупности формул может содержать доказуемые формулы, формулы из рассматриваемого множества и формулы, полученные из формул множества по правилу простого заключения. Все три источника формул вывода для Γ_1 и Γ_2 будут давать одинаковый состав формул;

б) если $A_1, A_2, \dots, A_n$ есть вывод A из Γ_1, а $B_1, B_2, \dots, B_k$ — вывод B из Γ_2, то $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_k$ есть вывод B из Γ_1, Γ_2;

в) пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — вывод C из Γ_1, A, B, Γ_2. Вывод C из Γ_1, B, A, Γ_2 будет такой же, только порядок формул в выводе может измениться. Качественный состав формул вывода от этого не изменится.

2.4.6.

а) исходное множество произвольно, т. к. оно не задано. Воспользуемся первой и девятой аксиомами: $\int_{x,y}^{A,\overline{B}} x \to (y \to x) \equiv \vdash A \to (\overline{B} \to A)$, $\int_{x,y}^{\overline{B},A} (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x}) \equiv \vdash (\overline{B} \to A) \to (\overline{A} \to \overline{\overline{B}})$. По правилу силлогизма $\dfrac{\vdash A \to (\overline{B} \to A) \vdash (\overline{B} \to A) \to (\overline{A} \to \overline{\overline{B}})}{\vdash A \to (\overline{A} \to \overline{\overline{B}})}$, по правилу соединения посылок $\dfrac{\vdash A \to (\overline{A} \to \overline{\overline{B}})}{\vdash A \wedge \overline{A} \to \overline{\overline{B}}}$. Наконец, применим правило снятия двойного отрицания $\dfrac{\vdash A \wedge \overline{A} \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \wedge \overline{A} \to B}$ и заменим B на F: $\int_{B}^{F} A \wedge \overline{A} \to B \equiv \vdash A \wedge \overline{A} \to F$;

б) сделаем подстановки во второй, третьей, четвертой и девятой аксиомах и применим правила силлогизма и сложного заключения. Получим:

$$\int_{x,y,z}^{(A\to B)\wedge\overline{B},\overline{B},\overline{A}} (x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))\equiv\,\vdash((A\to B)\wedge\overline{B}\to(\overline{B}\to\overline{A}))\to$$

$$\to\left(\left((A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{B}\right)\to\left((A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{A}\right)\right)\equiv A_1,$$

$$\int_{x,y}^{A\to B,\overline{B}} x\wedge y\to x\equiv\,\vdash(A\to B)\wedge\overline{B}\to(A\to B),$$

$$\int_{x,y}^{A\to B,\overline{B}} x\wedge y\to y\equiv-(A\to B)\wedge \qquad \wedge\overline{B}\to\overline{B}\equiv A_2,$$

$$\int_{x,y}^{A,B}(x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x})\equiv\,\vdash(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A}).$$

Пусть $A_3\equiv(A\to B)\wedge\overline{B}\to(\overline{B}\to\overline{A})$,

тогда $$\frac{\vdash(A\to B)\wedge\overline{B}\to(A\to B),\ \vdash(A\to B)\to(\overline{B}\to\overline{A})}{\vdash(A\to B)\wedge\overline{B}\to(\overline{B}\to\overline{A})},$$

$$\frac{\vdash A_3,\ \vdash A_2,\ \vdash A_3\to\left(A_2\to\left((A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{A}\right)\right)}{\vdash(A\to B)\wedge\overline{B}\to\overline{A}};$$

в) воспользуемся первой, второй, восьмой и десятой аксиомами, правилами простого и сложного заключения, тогда

$$\int_{x,y}^{A,\overline{\overline{A}}} x\to(y\to x)\equiv\,\vdash A\to(\overline{\overline{A}}\to A), \qquad \int_{x}^{A} x\to\overline{\overline{x}}\equiv\,\vdash A\to\overline{\overline{A}},$$

$$\int_{x,y,z}^{A,\overline{\overline{A}},A}(x\to(y\to z))\to$$

$$\to((x\to y)\to(x\to z))\equiv\,\vdash\left(A\to\left(\overline{\overline{A}}\to A\right)\right)\to\left(\left(A\to\overline{\overline{A}}\right)\to(A\to A)\right),$$

$$\frac{\vdash A\to(\overline{\overline{A}}\to A),\ \vdash(A\to(\overline{\overline{A}}\to A))\to((A\to\overline{\overline{A}})\to(A\to A))}{\vdash(A\to\overline{\overline{A}})\to(A\to A)},$$

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{A}}, \vdash \left(A \to \overline{\overline{A}}\right) \to (A \to A)}{\vdash A \to A},$$

$$\int\limits_{x,y,z}^{A,A,A} (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \equiv$$

$$\equiv \vdash (A \to A) \to ((A \to A) \to (A \vee A \to A)),$$

$$\frac{\vdash A \to A, \vdash A \to A, \vdash (A \to A) \to ((A \to A) \to (A \vee A \to A))}{\vdash A \vee A \to A};$$

г) применим третью, четвертую и восьмую аксиомы из 2.1.1 и правила контрпозиции, снятия двойного отрицания и сложного заключеиия:

$$\int\limits_{x,y,z}^{A,B,\overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}} (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \equiv \vdash \left(A \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \right) \to$$

$$\to \left(\left(B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \right) \to \left(A \vee B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \right) \right),$$

$$\int\limits_{x,y}^{\overline{A},\overline{B}} x \wedge y \to x \equiv \vdash \overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A},$$

$$\int\limits_{x,y}^{\overline{A},\overline{B}} x \wedge y \to y \equiv \vdash \overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{B}, \qquad \frac{\vdash \overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A}}{\vdash \overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}}, \qquad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}}{\vdash A \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}},$$

$$\frac{\vdash \overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{B}}{\vdash \overline{\overline{B}} \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}}, \frac{\vdash \overline{\overline{B}} \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}}{\vdash B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}},$$

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}, \vdash B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}, \vdash \left(A \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}\right) \to \left(\left(B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}\right) \to \left(A \vee B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}\right)\right)}{\vdash A \vee B \to \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}};$$

д) воспользуемся очевидной секвенцией $C \vdash C$. Тогда по теореме дедукции $\dfrac{C \vdash C}{\vdash C \to C}$. Пусть $C = A \wedge B$, т. е. $\vdash A \wedge B \to A \wedge B$.

По теореме разъединения посылок имеем $\dfrac{\vdash A\wedge B\to A\wedge B}{\vdash A\to(B\to A\wedge B)}$;

е) секвенция выводится применением первой и девятой аксиом, правил силлогизма, снятия двойного отрицания, соединения, разъединения и перестаиовки посылок.

$$\int_{x,y}^{A,\overline{B}} x\to(y\to x)\equiv\vdash A\to(\overline{B}\to A),\quad \int_{x,y}^{\overline{B},A}(x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x})\equiv$$

$$\equiv\vdash(\overline{B}\to A)\to(\overline{A}\to\overline{\overline{B}}),\quad \frac{\vdash A\to(\overline{B}\to A)\ \vdash(\overline{B}\to A)\to(\overline{A}\to\overline{\overline{B}})}{\vdash A\to(\overline{A}\to\overline{\overline{B}})},$$

$$\frac{\vdash A\to(\overline{A}\to\overline{\overline{B}})}{\vdash A\wedge\overline{A}\to\overline{\overline{B}}},\quad \frac{\vdash A\wedge\overline{A}\to\overline{\overline{B}}}{\vdash A\wedge\overline{A}\to B},\quad \frac{\vdash A\wedge\overline{A}\to B}{\vdash A\to(\overline{A}\to B)},$$

$$\frac{\vdash A\to(\overline{A}\to B)}{\vdash\overline{A}\to(A\to B)}.$$

2.4.7. Запишем все доказательства в виде вывода из исходного множества формул:

а) $\Gamma=\{A\to(B\to C)\}$: $A\to(B\to C)$, $\underset{\substack{\text{соединение посылок}\\ \frac{\vdash A\to(B\to C)}{\vdash A\wedge B\to C}}}{A\wedge B\to C}$;

б) $\Gamma=\{A\to B\}$. Обозначим $\Gamma_1=\{A\to B,A\}$ и $\Gamma_2=\{A\to B,B\}$.

По теореме дедукции $\dfrac{A\to B,A\vdash A\to B}{A\to B\vdash A\to(A\to B)}$,

$\dfrac{A\to B,B\vdash A\to B}{A\to B\vdash B\to(A\to B)}$, $\dfrac{A\to B,C\vdash A\to B}{A\to B\vdash C\to(A\to B)}$. Тогда эти формулы можно добавить в вывод из Γ,

т. е. Γ: $A\to B$, $\underset{\text{по теореме дедукции}}{A\to(A\to B)\ ,B\to(A\to B),\ C\to(A\to B)}$,

$\underset{\substack{\text{соединение посылок}\\ \frac{\vdash C\to(A\to B)}{\vdash A\wedge C\to B}}}{A\wedge C\to B}$, $\underset{\int_{B}^{C} B\to(A\to B)\equiv\vdash C\to(A\to C)}{C\to(A\to C)}$, $\underset{\text{соединение посылок}}{A\wedge C\to C}$,

$$\underset{\substack{\Pi_3:(z\to x)\to((z\to y)\to(z\to x\wedge y))\\ \int_{x,y,z}^{B,C,A\wedge C}(\Pi_3)\vDash-(A\wedge C\to B)\to((A\wedge C\to C)\to(A\wedge C\to B\wedge C))}}{(A\wedge C\to B)\to((A\wedge C\to C)\to(A\wedge C\to B\wedge C)),}$$

$$\underset{\substack{\text{по правилу сложного заключения}\\ \frac{\vdash A\wedge C\to B,\ \vdash A\wedge C\to C,\ \vdash(A\wedge C\to B)\to((A\wedge C\to C)\to(A\wedge C\to B\wedge C))}{\vdash A\wedge C\to B\wedge C}}}{A\wedge C\to B\wedge C}\quad;$$

в) $\Gamma=\{\overline{A}\}$: $\overline{A}$, $\underset{\substack{\mathrm{I}_1:x\to(y\to x)\\ \int_{x,y}^{\overline{A},\overline{B}}(\mathrm{I}_1)\vDash-\overline{A}\to(\overline{B}\to\overline{A})}}{\overline{A}\to(\overline{B}\to\overline{A})}$, $\underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash\overline{A},\ \vdash\overline{A}\to(\overline{B}\to\overline{A})}{\vdash\overline{B}\to\overline{A}}}}{\overline{B}\to\overline{A}}$, $\underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash\overline{B}\to\overline{A}}{\vdash\overline{\overline{A}}\to\overline{\overline{B}}}}}{\overline{\overline{A}}\to\overline{\overline{B}}}$,

$$\underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \frac{\vdash\overline{\overline{A}}\to\overline{\overline{B}}}{\vdash\overline{\overline{A}}\to B}}}{\overline{\overline{A}}\to B}\quad,\quad\underset{\text{аналогично предыдущему}}{A\to B}\quad;$$

г) $\Gamma=\{\overline{A}\to B\}$: $\overline{A}\to B$, $\underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash\overline{A}\to B}{\vdash\overline{B}\to\overline{\overline{A}}}}}{\overline{B}\to\overline{\overline{A}}}$, $\underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \frac{\vdash\overline{B}\to\overline{\overline{A}}}{\vdash\overline{B}\to A}}}{\overline{B}\to A}$;

д) $\Gamma=\{A\to B, B\to C\}$: $A\to B, B\to C$, $\underset{\substack{\text{силлогизм}\\ \frac{\vdash A\to B,\ \vdash B\to C}{\vdash A\to C}}}{A\to C}$;

е) $\Gamma=\{A\to B\}$: $A\to B$, $\underset{\substack{\text{по теореме дедукции}\\ \frac{A\to B, C\vdash A\to B}{\vdash C\to(A\to B)}}}{C\to(A\to B)}$,

$$\underset{\substack{\mathrm{I}_2:(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))\\ \int_{x,y,z}^{C,A,B}(\mathrm{I}_2)\vDash-(C\to(A\to B))\to((C\to A)\to(C\to B))}}{(C\to(A\to B))\to((C\to A)\to(C\to B)),}$$

$$\underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash C\to(A\to B),\ \vdash(C\to(A\to B))\to((C\to A)\to(C\to B))}{\vdash(C\to A)\to(C\to B)}}}{(C\to A)\to(C\to B)}\quad;$$

ж) $\Gamma=\{A\to B\}\vdash A\vee C\to B\vee C$. Рассмотрим вначале дополнительное множество $\Gamma_1=\{A\to B, A\}$ и запишем вывод из него

$$\Gamma_1: A \to B, A, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}}}{B}, \underset{\substack{\mathrm{III}_1: x \to x \vee y \\ \int_{x,y}^{B,C} (\mathrm{III}_1) \models \vdash B \to (B \vee C)}}{B \to B \vee C}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash B,\ \vdash B \to B \vee C}{\vdash B \vee C}}}{B \vee C}.$$

Применим теперь обобщенную теорему дедукции: $\dfrac{A \to B, A \vdash B \vee C}{\vdash (A \to B) \to (A \to B \vee C)}$.

Таким образом, формула $(A \to B) \to (A \to B \vee C)$ выводима, и ее можно добавить в любой вывод. Тогда

$$\Gamma: A \to B, (A \to B) \to (A \to B \vee C), \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \to B,\ \vdash (A \to B) \to (A \to B \vee C)}{\vdash A \to B \vee C}}}{A \to B \vee C},$$

$$\underset{\substack{\mathrm{III}_2: y \to x \vee y \\ \int_{y,x}^{C,B} (\mathrm{III}_2) \models \vdash C \to B \vee C}}{C \to B \vee C}, \underset{\substack{\mathrm{III}_3: (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \\ \int_{x,y,z}^{A,C,B \vee C} (\mathrm{III}_3) \models \vdash (A \to B \vee C) \to ((C \to B \vee C) \to (A \vee C \to B \vee C))}}{(A \to B \vee C) \to ((C \to B \vee C) \to (A \vee C \to B \vee C))},$$

$$\underset{\substack{\text{по правилу сложного заключения} \\ \frac{\vdash A \to B \vee C,\ \vdash C \to B \vee C,\ \vdash (A \to B \vee C) \to ((C \to B \vee C) \to (A \vee C \to B \vee C))}{\vdash A \vee C \to B \vee C}}}{A \vee C \to B \to C};$$

з) $\Gamma = \{A, \bar{\bar{A}} \to B\}: A, \bar{\bar{A}} \to B, \underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания} \\ \frac{\vdash \bar{\bar{A}} \to B}{\vdash A \to B}}}{A \to B}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}}}{B};$

и) $\Gamma = \{A \to B, \bar{B}\}: A \to B, \bar{B}, \underset{\substack{\mathrm{IV}_1: (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x}) \\ \int_{x,y}^{A,B} (\mathrm{IV}_1) \models \vdash (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})}}{(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})},$

$$\underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \to B,\ \vdash (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})}{\vdash \bar{B} \to \bar{A}}}}{\bar{B} \to \bar{A}}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\bar{B},\ \vdash \bar{B} \to \bar{A}}{\vdash \bar{A}}}}{\bar{A}};$$

к) $\Gamma = \{A\}: A, \underset{\substack{\mathrm{I}_1: x \to (y \to x) \\ \int_{x,y}^{A,B} (\mathrm{I}_1) \models \vdash A \to (B \to A)}}{A \to (B \to A)}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A,\ \vdash A \to (B \to A)}{\vdash B \to A}}}{B \to A}.$

2.4.8.

а) для доказательства этого правила используем правило введения импликации и конъюнкции и правило объединения посылок, записанное в более общем виде, чем рассмотренное ранее: $\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$ — объединение посылок, $\dfrac{A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B}{\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B}$ — введение импликации и конъюнкции. Применим эти правила n раз к формулам $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$: $\dfrac{A_1, A_2 \vdash B}{A_1 \wedge A_2 \vdash B}$, $\dfrac{A_1 \wedge A_2 \vdash B}{\vdash A_1 \wedge A_2 \to B}$, $\dfrac{A_1 \wedge A_2, A_3 \vdash B}{A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \vdash B}$,

$$\frac{A_1 \wedge A_2, A_3 \vdash B}{\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \to B}, \ldots, \frac{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}, A_n \vdash B}{\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A_n \to B};$$

б) $\{A \to B, \overline{A} \to B\}$: $A \to B, \overline{A} \to B, \underset{\substack{IV_1: (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x}) \\ \int_{x,y}^{A,B} (IV_1) \models \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}}{(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}$,

$$\underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \to B, \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}}}{\overline{B} \to \overline{A}}, \quad \underset{\substack{\text{силлогизм} \\ \frac{\vdash \overline{B} \to \overline{A}, \vdash \overline{A} \to B}{\vdash \overline{B} \to B}}}{\overline{B} \to B}, \quad \underset{\substack{III_3: (x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \\ \int_{x,y,z}^{\overline{B},B,B} (III_3) \models \vdash (\overline{B} \to B) \to ((B \to B) \to (\overline{B} \vee B \to B))}}{(\overline{B} \to B) \to ((B \to \overline{B}) \to (\overline{B} \vee B \to B))},$$

$$\underset{\substack{IV_2: x \to \overline{\overline{x}} \\ \int_{x}^{B} (IV_2) \models \vdash B \to \overline{\overline{B}}}}{B \to \overline{\overline{B}}}, \quad \underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания} \\ \frac{\vdash B \to \overline{\overline{B}}}{\vdash B \to B}}}{B \to B}, \quad \underset{\substack{\text{см. пример 4} \\ \text{раздела 2.3}}}{\overline{B} \vee B},$$

$$\underset{\substack{\text{по ПСЗ} \\ \frac{\vdash \overline{B} \to B, \vdash B \to B, \vdash \overline{B} \vee B, \vdash (\overline{B} \to B) \to ((B \to B) \to (\overline{B} \vee B \to B))}{\vdash B}}}{B};$$

в) $\{A, \overline{B}\}$: $A, \overline{B}, \underset{\substack{\text{по теореме дедукции} \\ \frac{A \vdash A}{\vdash A \to A}}}{A \to A}, \underset{\int_{A}^{A \to B} (A \to A) \models \vdash (A \to B) \to (A \to B)}{(A \to B) \to (A \to B)}$,

$$\underset{\substack{\text{перестановка посылок} \\ \frac{\vdash (A \to B) \to (A \to B)}{\vdash A \to ((A \to B) \to B)}}}{A \to ((A \to B) \to B)}, \quad \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A, \vdash A \to ((A \to B) \to B)}{\vdash (A \to B) \to B}}}{(A \to B) \to B}, \quad \underset{\substack{\text{контрпозиция} \\ \frac{\vdash (A \to B) \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{(A \to B)}}}}{\overline{B} \to \overline{(A \to B)}}, \quad \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash \overline{B}, \vdash \overline{B} \to \overline{(A \to B)}}{\vdash \overline{A \to B}}}}{\overline{A \to B}};$$

г) $\{A \wedge B\}$: $A \wedge B, \underset{\substack{II_1: x \wedge y \to x \\ \int_{x,y}^{A,B} (II_1) \models \vdash A \wedge B \to A}}{A \wedge B \to A}, \underset{\substack{\text{по ППЗ} \\ \frac{\vdash A \wedge B, \vdash A \wedge B \to A}{\vdash A}}}{A}$;

д) $\left\{A\to\overline{A}\right\}$: $A\to\overline{A}$, $\underset{\substack{IV_2:x\to\overline{\overline{x}}\\ \int\limits_{x}^{\overline{A}}(IV_2)=\vdash\overline{A}\to\overline{\overline{\overline{A}}}}}{\overline{A}\to\overline{\overline{\overline{A}}}}$, $\underset{\frac{\vdash\overline{A}\to\overline{\overline{\overline{A}}}}{\vdash\overline{A}\to\overline{A}}}{\overline{A}\to\overline{A}}$, $\underset{\substack{\text{см. пример 4}\\ \text{раздела 2.3}}}{A\vee\overline{A}}$,

$$\underset{\substack{III_3:(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))\\ \int\limits_{x,y,z}^{A,\overline{A},\overline{A}}(III_3)=\vdash(A\to\overline{A})\to((\overline{A}\to\overline{A})\to(A\vee\overline{A}\to\overline{A}))}}{\left(A\to\overline{A}\right)\to\left(\left(\overline{A}\to\overline{A}\right)\to\left(A\vee\overline{A}\to\overline{A}\right)\right)},$$

$$\underset{\substack{\text{по ПСЗ}\\ \frac{\vdash A\to\overline{A},\ \vdash\overline{A}\to\overline{A},\ \vdash A\vee\overline{A},\ \vdash(A\to\overline{A})\to((\overline{A}\to\overline{A})\to(A\vee\overline{A}\to\overline{A})).}{\vdash\overline{A}}}}{\overline{A}}$$

2.4.9.

а) рассмотрим множество формул $\Gamma=\{A\to B,B\to C,A\}$. Вывод из этого множества может быть таким: $\Gamma: A\to B, B\to C, A,$ $\underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash A,\ \vdash A\to B}{\vdash B}}}{B}$, $\underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash B,\ \vdash B\to C}{\vdash C}}}{C}$. Применим теперь обобщенную теорему дедукции $\dfrac{\{A\to B,B\to C,A\}\vdash C}{\vdash(A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C))}$;

б) $\Gamma=\{A\to B\}\vdash(C\to A)\to(C\to B)$, см. задачу 2.4.7, *е*. Тогда

$$\frac{\{A\to B\}\vdash(C\to A)\to(C\to B)}{\vdash(A\to B)\to((C\to A)\to(C\to B))};$$

в) $\Gamma=\left\{\overline{A},B\to A\right\}$: $\overline{A}, B\to A,$ $\underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash B\to A}{\vdash\overline{A}\to\overline{B}}}}{\overline{A}\to\overline{B}}$, $\underset{\substack{\text{по ППЗ}\\ \frac{\vdash\overline{A},\ \vdash\overline{A}\to\overline{B}}{\vdash\overline{B}}}}{\overline{B}}$.

Отсюда $\dfrac{\left\{\overline{A},B\to A\right\}\vdash\overline{B}}{\vdash\overline{A}\to(B\to A)\to\overline{B}}$.

2.4.10. Пусть в исчислении Лукасевича доказуема хотя бы одна однобуквенная формула $\vdash R$. Тогда $\int\limits_{R}^{A}R\equiv\vdash A$, $\int\limits_{R}^{A\to B}R\equiv\vdash A\to B$,

$$\int_{R}^{B\to A} R \equiv \vdash B \to A,$$

$$\int_{C}^{A} (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \equiv \vdash (A \to B) \to$$

$$\to ((B \to A) \to (A \to A)),$$

$$\frac{\vdash A \to B, \vdash (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \to A))}{\vdash (B \to A) \to (A \to A)},$$

$$\frac{\vdash B \to A, \vdash (B \to A) \to (A \to A)}{\vdash A \to A}.$$ Итак, необходимый вывод имеет

вид $\{R\}$: $A, A \to B, B \to A, (A \to B) \to ((B \to A) \to (A \to A)),$ $(B \to A) \to (A \to A), A \to A$.

1)* $\int_{A,B,C}^{A,\bar{A}\to B,C} (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \vdash (A \to (\bar{A} \to B)) \to$

$$\to (((\bar{A} \to B) \to C) \to (A \to C));$$

2) $$\frac{\vdash (A \to (\bar{A} \to B)), \vdash (A \to (\bar{A} \to B)) \to (((\bar{A} \to B) \to C) \to (A \to C))}{\vdash (((\bar{A} \to B) \to C) \to (A \to C))};$$

3) $\int_{A,B,C}^{A,A,A} (((\bar{A} \to B) \to C) \to (A \to C)) \vdash (((\bar{A} \to A) \to A) \to (A \to A));$

4) $$\frac{\vdash ((\bar{A} \to A) \to A), \vdash (((\bar{A} \to A) \to A) \to (A \to A))}{\vdash (A \to A)}.$$

7.2. Ответы и решения практического занятия №6

2.9.1.

а) $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$, но $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \equiv$

$\equiv (A \wedge B \to B \wedge A) \wedge (B \wedge A \to A \wedge B)$. Пусть C — любая форму-

---

*Решение предложено студентом С. Васильевым (гр. И323).

ла, выводимая в исчислении высказываний, тогда

$$\{C\}: C,\quad \underset{\substack{\mathrm{II}_2: x\wedge y\to y\\ \int\limits_{x,y}^{A,B}(\mathrm{II}_2)\models\vdash A\wedge B\to B}}{A\wedge B\to B},\quad \underset{\substack{\mathrm{I}_1: x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{C,C}(\mathrm{I}_1)\models\vdash C\to(C\to C)}}{C\to(C\to C)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash C,\ \vdash C\to(C\to C)}{\vdash C\to C}}}{C\to C},\quad \underset{\int\limits_{C}^{B}(C\to C)\models\vdash B\to B}{B\to B},$$

$$\underset{\substack{\mathrm{II}_3: (z\to x)\to((z\to y)\to(z\to x\wedge y))\\ \int\limits_{z,x,y}^{B,A,B}(\mathrm{II}_3)\models\vdash (B\to B)\to((B\to A)\to(B\to B\wedge A))}}{(B\to B)\to((B\to A)\to(B\to B\wedge A))},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash B\to B,\ \vdash (B\to B)\to((B\to A)\to(B\to B\wedge A))}{\vdash (B\to A)\to(B\to B\wedge A)}}}{(B\to A)\to(B\to B\wedge A)},$$

$$\underset{\substack{\mathrm{I}_1: x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{C,A}(\mathrm{I}_1)\models\vdash C\to(A\to C)}}{C\to(A\to C)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash C,\ \vdash C\to(A\to C)}{\vdash A\to C}}}{A\to C},\quad \underset{\int\limits_{A,C}^{B,A}(A\to C)\models\vdash B\to A}{B\to A},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash B\to A,\ \vdash (B\to A)\to(B\to B\wedge A)}{\vdash B\to B\wedge A}}}{B\to B\wedge A},$$

$$\underset{\substack{\text{силлогизм}\\ \frac{\vdash A\wedge B\to B,\ \vdash B\to B\wedge A}{\vdash A\wedge B\to B\wedge A}}}{A\wedge B\to B\wedge A},\quad \underset{\text{аналогично предыдущему}}{B\wedge A\to A\wedge B},$$

$$\underset{\substack{\text{введение конъюнкции}\\ \frac{\vdash A\wedge B\to B\wedge A,\ \vdash B\wedge A\to A\wedge B}{\vdash (A\wedge B\to B\wedge A)\wedge(B\wedge A\to A\wedge B)}}}{(A\wedge B\to B\wedge A)\wedge(B\wedge A\to A\wedge B)}\equiv A\wedge B\leftrightarrow B\wedge A;$$

б) пусть C — любая выводимая формула. Тогда

$$\{C\}: C,\quad \underset{\substack{\mathrm{III}_1: x\to x\vee y\\ \int\limits_{x,y}^{A,B}(\mathrm{III}_1)\models\vdash A\to A\vee B}}{A\to A\vee B},\quad \underset{\substack{\mathrm{III}_3: (x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))\\ \int\limits_{x,y,z}^{A,B,A}(\mathrm{III}_3)\models\vdash (B\to A)\to((A\to A)\to(B\vee A\to A))}}{(B\to A)\to((A\to A)\to(B\vee A\to A))},$$

$$\underset{\substack{\mathrm{I}_1: x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{C,C}(\mathrm{I}_1)\models\vdash C\to(C\to C)}}{C\to(C\to C)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash \tilde{N},\ \vdash C\to(C\to C)}{\vdash C\to C}}}{C\to C},\quad \underset{\int\limits_{C}^{A}(C\to C)\models\vdash A\to A}{A\to A},$$

$$\underset{\substack{\mathrm{I}_1: x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{C,B}(\mathrm{I}_1)\models\vdash C\to(B\to C)}}{C\to(B\to C)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash C,\ \vdash C\to(B\to C)}{\vdash B\to C}}}{B\to C},$$

$$\underset{\int\limits_{C}^{A}(B\to C)\models\vdash B\to A}{B\to A},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash B\to A,\ \vdash (B\to A)\to((A\to A)\to(B\vee A\to A))}{\vdash (A\to A)\to(B\vee A\to A)}}}{(A\to A)\to(B\vee A\to A)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash A\to A,\ \vdash (A\to A)\to(B\vee A\to A)}{\vdash B\vee A\to A}}}{B\vee A\to A},$$

$$\underset{\text{силлогизм}}{B\vee A\to A\vee B},\quad \underset{\text{аналогично предыдущему}}{A\vee B\to B\vee A},$$

$$\frac{\vdash B\vee A\to A,\ \vdash A\to A\vee B}{\vdash B\vee A\to A\vee B}$$

$$(B\vee A\to A\vee B)\wedge(A\vee B\to B\vee A)\equiv B\vee A\leftrightarrow A\vee B.$$

введение конъюнкции

$$\frac{\vdash B\vee A\to A\vee B,\ \vdash A\vee B\to B\vee A}{\vdash (B\vee A\to A\vee B)\wedge(A\vee B\to B\vee A)}$$

2.9.2.

а) $\underset{VI_2:x\to\overline{\overline{x}}}{A\to\overline{\overline{A}}}$, $\underset{\text{снятие двойного отрицания}}{A\to A}$, $\underset{\text{введение коньюнкции}}{(A\to A)\wedge(A\to A)}\equiv A\leftrightarrow A$;

$$\int\limits_{x}^{A}(VI_2)\equiv\vdash A\to\overline{\overline{A}}\qquad \frac{\vdash A\to\overline{\overline{A}}}{\vdash A\to A}\qquad \frac{\vdash A\to A,\ \vdash A\to A}{\vdash (A\to A)\wedge(A\to A)}$$

б) $\{A\leftrightarrow B\}:(A\to B)\wedge(B\to A)$, $\underset{\text{удаление конъюнкции}}{A\to B}$,

$$\frac{\vdash (A\to B)\wedge(B\to A)}{\vdash A\to B}$$

$\underset{\text{аналогично предыдущему}}{B\to A}$, $(C\to A)\to(C\to B)$,

$$\int\limits_{A,B}^{C\to A,\,C\to B}(A\to B)\equiv\vdash (C\to A)\to(C\to B)$$

$(C\to B)\to(C\to A)$,

$$\int\limits_{A,B}^{C\to B,\,C\to A}(B\to A)\equiv\vdash (C\to B)\to(C\to A)$$

$$((C\to A)\to(C\to B))\wedge((C\to B)\to(C\to A))\equiv(C\to A)\leftrightarrow(C\to B).$$

введение конъюнкции

$$\frac{\vdash (C\to A)\to(C\to B),\ \vdash (C\to B)\to(C\to A)}{\vdash ((C\to A)\to(C\to B))\wedge((C\to B)\to(C\to A))}$$

2.9.3.

а) $\vdash \overline{A\vee B}\leftrightarrow\overline{A}\wedge\overline{B}\equiv\left(\overline{A\vee B}\to\overline{A}\wedge\overline{B}\right)\wedge\left(\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A\vee B}\right).$

$\varnothing:\underset{III_3:(x\to z)\to((y\to z)\to(x\vee y\to z))}{\left(A\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\right)\to\left(\left(B\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\right)\to\left(A\vee B\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\right)\right)}$, $\underset{II_1:x\wedge y\to x}{\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A}}$,

$$\int\limits_{x,y,z}^{A,B,\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}(III_3)\equiv\vdash\left(A\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\right)\to\left(\left(B\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\right)\to\left(A\vee B\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}\right)\right)\qquad \int\limits_{x,y}^{\overline{A},\overline{B}}(II_1)\equiv\vdash\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A}$$

$\underset{II_2:x\wedge y\to y}{\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{B}}$, $\underset{\text{контрпозиция}}{\overline{\overline{A}}\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}$, $\underset{\text{снятие двойного отрицания}}{A\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}$, $\underset{\text{контрпозиция}}{\overline{\overline{B}}\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}$,

$$\int\limits_{x,y}^{\overline{A},\overline{B}}(II_2)\equiv\vdash\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{B}\qquad \frac{\vdash\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{A}}{\vdash\overline{\overline{A}}\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}\qquad \frac{\vdash\overline{\overline{A}}\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}{\vdash A\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}\qquad \frac{\vdash\overline{A}\wedge\overline{B}\to\overline{B}}{\vdash\overline{\overline{B}}\to\overline{\overline{A}\wedge\overline{B}}}$$

$$\underset{\text{снятие двойного отрицания}}{B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}\ , \qquad \underset{\text{правило сложного заключения}}{A \vee B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}\ ,$$

$$\frac{\vdash \overline{\overline{B}} \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}{\vdash B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \qquad \frac{\vdash A \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}},\ \vdash B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}},\ \vdash \left(A \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}\right) \to \left(\left(B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}\right) \to \left(A \vee B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}\right)\right)}{\vdash A \vee B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}$$

$$\underset{\text{контрпозиция}}{\overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \to \overline{A \vee B}},\quad \underset{\text{снятие двойного отрицания}}{\overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \vee B}}\ ,\quad \underset{III_1: x \to x \vee y}{A \to A \vee B}\ ,\quad \underset{III_2: y \to x \vee y}{B \to A \vee B}\ ,$$

$$\frac{\vdash A \vee B \to \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}{\vdash \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \to \overline{A \vee B}} \qquad \frac{\vdash \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} \to \overline{A \vee B}}{\vdash \overline{A} \vee \overline{B} \to \overline{A \vee B}} \qquad \int_{x,y}^{A,B} (III_1) \models \vdash A \to A \vee B \qquad \int_{x,y}^{A,B} (III_2) \models \vdash B \to A \vee B$$

$$\underset{\text{контрпозиция}}{\overline{A \vee B} \to \overline{A}},\ \underset{\text{контрпозиция}}{\overline{A \vee B} \to \overline{B}},\ \underset{II_3: (z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))}{\left(\overline{A \vee B} \to \overline{A}\right) \to \left(\left(\overline{A \vee B} \to \overline{B}\right) \to \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}\right)\right)},$$

$$\frac{\vdash A \to A \vee B}{\vdash \overline{A \vee B} \to \overline{A}} \qquad \frac{\vdash B \to A \vee B}{\vdash \overline{A \vee B} \to \overline{B}} \qquad \int_{x,y,z}^{\overline{A}, \overline{B}, \overline{A \vee B}} (II_3) \models \vdash \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A}\right) \to \left(\left(\overline{A \vee B} \to \overline{B}\right) \to \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}\right)\right)$$

$$\underset{\text{правило сложного заключения}}{\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}}\ ,\quad \underset{\text{введение конъюнкции}}{\left(\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}\right) \wedge \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A \vee B}\right)};$$

$$\frac{\vdash \overline{A \vee B} \to \overline{A},\ \vdash \overline{A \vee B} \to \overline{B},\ \vdash \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A}\right) \to \left(\left(\overline{A \vee B} \to \overline{B}\right) \to \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}\right)\right)}{\vdash \overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}} \qquad \frac{\vdash \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}\right),\ \vdash \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A \vee B}\right)}{\vdash \left(\overline{A \vee B} \to \overline{A} \wedge \overline{B}\right) \wedge \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \to \overline{A \vee B}\right)}$$

б) $\vdash \overline{\overline{\overline{A}}} \leftrightarrow \overline{A} \equiv \left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}\right) \wedge \left(\overline{A} \to \overline{\overline{\overline{A}}}\right)$. $\varnothing$:

$$\underset{IV_2: x \to \overline{\overline{x}}}{A \to \overline{\overline{A}}}\ ,\quad \underset{\text{контрпозиция}}{\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}}\ ,$$

$$\int_{x}^{A} (IV_2) \models \vdash A \to \overline{\overline{A}} \qquad \frac{\vdash A \to \overline{\overline{A}}}{\vdash \overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}}$$

$$\underset{IV_3: \overline{\overline{x}} \to x}{\overline{\overline{A}} \to A}\ ,\quad \underset{\text{контрпозиция}}{\overline{A} \to \overline{\overline{\overline{A}}}}\ ,\quad \underset{\text{введение конъюнкции}}{\left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}\right) \wedge \left(\overline{A} \to \overline{\overline{\overline{A}}}\right)}.$$

$$\int_{x}^{A} (IV_3) \models \vdash \overline{\overline{A}} \to A \qquad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to A}{\vdash \overline{A} \to \overline{\overline{\overline{A}}}} \qquad \frac{\vdash \overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A},\ \vdash \overline{A} \to \overline{\overline{\overline{A}}}}{\vdash \left(\overline{\overline{\overline{A}}} \to \overline{A}\right) \wedge \left(\overline{A} \to \overline{\overline{\overline{A}}}\right)}$$

2.9.4.

а) рассмотрим исходную формулу $A = \overline{x} \to (x \to (x \to y \wedge x))$. Обозначнм через B выражение $B = x \to y \wedge x$, тогда формула $A = \overline{x} \to (x \to B)$ возрастает по переменной B (см. теорему 2.2). Заменим B более сильной формулой y, т. к. $\vdash y \to (x \to y \wedge x)$.

Действительно, $\varnothing$: $\underset{\text{аксиома } VI_2}{x \to \overline{\overline{x}}}$,

$$x \to x \quad , \quad y \wedge x \to y \wedge x \quad , \quad y \to (x \to y \wedge x).$$

снятие двойного отрицания

$$\frac{\vdash x \to \bar{\bar{x}}}{\vdash x \to x}$$

$$\int_{x}^{y \wedge x} (x \to x) \equiv\ \vdash y \wedge x \to y \wedge x$$

перестановка посылок

$$\frac{\vdash y \wedge x \to y \wedge x}{\vdash y \to (x \to y \wedge x)}$$

После замены получим формулу, возрастающую по y, причем $\bar{x} \to (x \to y) \equiv 1$, т. е. тождественно истинную, следовательно, выводимую по теореме 2.6. Итак, $\vdash \bar{x} \to (x \to y)$, тогда $\vdash \bar{x} \to (x \to (x \to y \wedge x))$;

б) в исходной формуле $A = \overline{x \wedge y \to y} \to y$ заменим посылку импликации. Поскольку импликация $A \to B$ убывает по A, заменим посылку более слабой формулой $x \wedge y$, т. к. $\vdash \overline{x \wedge y \to y} \to x \wedge y$.

$$\varnothing:\ x \to (\bar{y} \to x),\ (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}),\quad x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}) \quad ,$$

$\mathrm{I}_1: x \to (y \to x)$

$$\int_{y}^{\bar{y}} (\mathrm{I}_1) \equiv\ \vdash x \to (\bar{y} \to x)$$

$\mathrm{VI}_1: (x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$

$$\int_{x,y}^{\bar{y},\bar{x}} (\mathrm{VI}_1) \equiv\ \vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})$$

силлогизм

$$\frac{\vdash x \to (\bar{y} \to x),\ \vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})}{\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})}$$

$$x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}} \quad , \quad x \wedge \bar{x} \to y \quad , \quad x \to (\bar{x} \to y) \quad ,$$

соединение посылок

$$\frac{\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}})}{\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}}$$

снятие двойного отрицания

$$\frac{\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}}{\vdash x \wedge \bar{x} \to y}$$

разъединение посылок

$$\frac{\vdash x \wedge \bar{x} \to y}{\vdash x \to (\bar{x} \to y)}$$

$$\bar{x} \to (x \to y) \quad , \quad \overline{(x \to y)} \to \bar{\bar{x}},$$

перестановка посылок

$$\frac{\vdash x \to (\bar{x} \to y)}{\vdash \bar{x} \to (x \to y)}$$

контрпозиция

$$\frac{\vdash \bar{x} \to (x \to y)}{\vdash \overline{(x \to y)} \to \bar{\bar{x}}}$$

$$\overline{(x \to y)} \to x \quad , \quad \overline{x \wedge y \to y} \to x \wedge y.$$

снятие двойного отрицания

$$\frac{\vdash \overline{(x \to y)} \to \bar{\bar{x}}}{\vdash \overline{(x \to y)} \to x}$$

$$\int_{x}^{x \wedge y} \left(\overline{(x \to y)} \to x\right) \equiv\ \vdash \overline{x \wedge y \to y} \to x \wedge y$$

Получим формулу $x \wedge y \to y$ — четвертую аксиому исчисления высказываний, следовательно, она выводима. Тогда выводима и исходная формула, т. е. $\vdash \overline{x \wedge y \to y} \to y$.

2.9.5. $A=\left(x\wedge\overline{\left(x\wedge\bar{x}\to y\wedge\bar{y}\right)}\to\bar{z}\right)\vee x\vee z$. Заменим в формуле A подформулу $B=x\wedge\overline{\left(x\wedge\bar{x}\to y\wedge\bar{y}\right)}\to\bar{z}$ более сильной формулой $\bar{z}$ и докажем, что $\vdash\bar{z}\to\left(x\wedge\overline{\left(x\wedge\bar{x}\to y\wedge\bar{y}\right)}\to\bar{z}\right)$.

$$\varnothing:\quad \underset{\substack{\mathrm{I}_1:x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x}^{\bar{x}}(\mathrm{I}_1)\equiv\vdash\bar{x}\to(y\to\bar{x})}}{\bar{x}\to\left(y\to\bar{x}\right)},\qquad \underset{\int\limits_{x,y}^{z,\,x\wedge\overline{(x\wedge\bar{x}\to y\wedge\bar{y})}}\left(\bar{x}\to(y\to\bar{x})\right)\equiv\vdash\bar{z}\to\left(x\wedge\overline{(x\wedge\bar{x}\to y\wedge\bar{y})}\to\bar{z}\right)}{\bar{z}\to\left(x\wedge\overline{\left(x\wedge\bar{x}\to y\wedge\bar{y}\right)}\to\bar{z}\right)}$$

. Получим формулу $A'=\bar{z}\vee x\vee z\equiv 1$, т. е. $\vdash A'$. Следовательно, выводима и формула A. Действительно, после упрощения A получим $A=1\vee x\vee z\equiv 1$.

2.9.6.

а) $A=\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}\vee(x\to y)\wedge x$, $A(1,1)=1$, т. е. $\{x,y\}\vdash A$. Покажем это:

$$\{x,y\}:\ x,\ y,\ \underset{\substack{\mathrm{I}_1:x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{y,x}(\mathrm{I}_1)\equiv\vdash y\to(x\to y)}}{y\to(x\to y)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash y,\ \vdash y\to(x\to y)}{\vdash x\to y}}}{x\to y}\ ,$$

$$\underset{\substack{\text{правило введения конъюнкции}\\ \frac{\vdash x\to y,\ \vdash x}{\vdash (x\to y)\wedge x}}}{(x\to y)\wedge x}\ ,\quad \underset{\substack{\mathrm{I}_1:x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}(\mathrm{I}_1)\equiv\vdash\bar{x}\to(\bar{y}\to\bar{x})}}{\bar{x}\to(\bar{y}\to\bar{x})},$$

$$\underset{\substack{\text{соединение посылок}\\ \frac{\vdash\bar{x}\to(\bar{y}\to\bar{x})}{\vdash\bar{x}\wedge\bar{y}\to\bar{x}}}}{\bar{x}\wedge\bar{y}\to\bar{x}}\ ,\ \underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash\bar{x}\wedge\bar{y}\to\bar{x}}{\vdash\bar{\bar{x}}\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}}}{\bar{\bar{x}}\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}},\qquad \underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \frac{\vdash\bar{\bar{x}}\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}{\vdash x\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}}}{x\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}\ ,$$

$$\underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash x,\ \vdash x\to\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}{\vdash\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}}}{\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}}\ ,\ \underset{\substack{\text{правило введения дизъюнкции}\\ \frac{\vdash\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}},\ \vdash(x\to y)\wedge x}{\vdash\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}\vee(x\to y)\wedge x}}}{A=\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}}\vee(x\to y)\wedge x};$$

б) $A(0,0)=0$, таким образом $\{\bar{x},\bar{y}\}\vdash\bar{A}$. Вывод $\bar{A}$ может быть, например, таким:

$$\{\bar{x},\bar{y}\}:\ \bar{x},\ \bar{y},\ \underset{\substack{\mathrm{I}_1:x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{\bar{x},\bar{y}}(\mathrm{I}_1)\equiv\vdash\bar{x}\to(\bar{y}\to\bar{x})}}{\bar{x}\to(\bar{y}\to\bar{x})}\ ,\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash\bar{x},\ \vdash\bar{x}\to(\bar{y}\to\bar{x})}{\vdash\bar{y}\to\bar{x}}}}{\bar{y}\to\bar{x}}\ ,\quad \underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash\bar{y}\to\bar{x}}{\vdash\bar{\bar{x}}\to\bar{\bar{y}}}}}{\bar{\bar{x}}\to\bar{\bar{y}}}\ ,$$

$$\underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \dfrac{\vdash \bar{\bar{x}}\to y}{\vdash x\to y}}}{x\to y},\quad \underset{\int_{x,y}^{A,x}(x\to y)\equiv\vdash A\to x}{A\to x},\quad \underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \dfrac{\vdash A\to x}{\vdash \bar{x}\to\bar{A}}}}{\bar{x}\to\bar{A}},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash\bar{x},\ \vdash\bar{x}\to\bar{A}}{\vdash\bar{A}}}}{\bar{A}}\ .$$

2.9.7.

а) $A=x_1\vee x_2\to x_3$. $A(0,0,1)=0\vee 0\to 1=0\to 1=1$, следовательно, $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3\}\vdash A$. А именно,

$$\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3\}:\ \bar{x}_1,\bar{x}_2,x_3,\ \underset{\substack{\mathrm{I}_1: x\to(y\to x)\\ \int_{x,y}^{x_3,\,x_1\vee x_2}(\mathrm{I}_1)\equiv\vdash x_3\to(x_1\vee x_2\to x_3)}}{x_3\to(x_1\vee x_2\to x_3)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash x_3,\ \vdash x_3\to(x_1\vee x_2\to x_3)}{\vdash x_1\vee x_2\to x_3}}}{x_1\vee x_2\to x_3}\ ;$$

б) $A(1,0,0)=1\vee 0\to 0=1\to 0=0$. Тогда $\{x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}\vdash\bar{A}$. Действительно, $\{x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3\}$: $x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$,

$$\underset{\substack{\mathrm{III}_1\ x\to x\vee y\\ \int_{x,y}^{x_1,x_2}(\mathrm{III}_1)\equiv\vdash x_1\to x_1\vee x_2}}{x_1\to x_1\vee x_2},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash x_1,\ \vdash x_1\to x_1\vee x_2}{\vdash x_1\vee x_2}}}{x_1\vee x_2},$$

$$\underset{\substack{\mathrm{I}_1\ x\to(y\to x)\\ \int_{x,y}^{x_1,x_1}(\mathrm{I}_1)\equiv\vdash x_1\to(x_1\to x_1)}}{x_1\to(x_1\to x_1)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash x_1,\ \vdash x_1\to(x_1\to x_1)}{\vdash x_1\to x_1}}}{x_1\to x_1},$$

$$\underset{\int_{x_1}^{(x_1\vee x_2\to x_3)}(x_1\to x_1)\equiv\vdash(x_1\vee x_2\to x_3)\to(x_1\vee x_2\to x_3)}{(x_1\vee x_2\to x_3)\to(x_1\vee x_2\to x_3)},$$

$$\underset{\substack{\text{перестановка посылок}\\ \dfrac{\vdash(x_1\vee x_2\to x_3)\to(x_1\vee x_2\to x_3)}{\vdash x_1\vee x_2\to((x_1\vee x_2\to x_3)\to x_3)}}}{x_1\vee x_2\to((x_1\vee x_2\to x_3)\to x_3)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash x_1\vee x_2,\ \vdash x_1\vee x_2\to((x_1\vee x_2\to x_3)\to x_3)}{\vdash(x_1\vee x_2\to x_3)\to x_3}}}{(x_1\vee x_2\to x_3)\to x_3},$$

$$\underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \dfrac{\vdash(x_1\vee x_2\to x_3)\to x_3}{\vdash\bar{x}_3\to\overline{(x_1\vee x_2\to x_3)}}}}{\bar{x}_3\to\overline{(x_1\vee x_2\to x_3)}},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash\bar{x}_3,\ \vdash\bar{x}_3\to\overline{(x_1\vee x_2\to x_3)}}{\vdash\overline{(x_1\vee x_2\to x_3)}}}}{\overline{(x_1\vee x_2\to x_3)}}\ .$$

2.9.8.

а) $A=(x\to y)\wedge(y\to z)\to(z\to x)$, $A(0,0,1)=0$ и $\Gamma_1=\{\bar{x},\bar{y},z\}\vdash\bar{A}$, например, таким способом:

$$\{\bar x,\bar y,z\}:\ \bar x,\bar y,z,\quad \underset{\substack{I_1:\,x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{\bar y,x}(I_1)\equiv\,\vdash\bar y\to(x\to\bar y)}}{\bar y\to(x\to\bar y)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash\bar y,\ \vdash\bar y\to(x\to\bar y)}{\vdash x\to\bar y}}}{x\to\bar y},\quad \underset{\int\limits_{x,y}^{A,z}(x\to\bar y)\equiv\,\vdash A\to\bar z}{A\to\bar z},\quad \underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash A\to\bar z}{\vdash\bar{\bar z}\to\bar A}}}{\bar{\bar z}\to\bar A},$$

$$\underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \frac{\vdash\bar{\bar z}\to\bar A}{\vdash z\to\bar A}}}{z\to\bar A},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash z,\ \vdash z\to\bar A}{\vdash\bar A}}}{\bar A};$$

б) $A(1,1,1)=1$ и $\Gamma_2=\{x,y,z\}\vdash A$.

$$\{x,y,z\}:\ x,y,z,\quad \underset{\substack{I_1:\,x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{y,x}(I_1)\equiv\,\vdash y\to(x\to y)}}{y\to(x\to y)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash y,\ \vdash y\to(x\to y)}{\vdash x\to y}}}{x\to y},\quad \underset{\text{аналогично}}{y\to z},$$

$$\underset{\text{аналогично}}{z\to x},\ \underset{\substack{\text{введение конъюнкции}\\ \frac{\vdash x\to y,\ \vdash y\to z}{\vdash(x\to y)\wedge(y\to z)}}}{(x\to y)\wedge(y\to z)},\ \underset{\int\limits_{x,y}^{(x\to y)\wedge(y\to z),\,z\to x}(x\to y)\equiv\,\vdash(x\to y)\wedge(y\to z)\to(z\to x)}{(x\to y)\wedge(y\to z)\to(z\to x)}.$$

2.9.9.

а) $A(1,1,1)=0$, следовательно, $\{x_1,x_2,x_3\}\vdash\bar A$.

$$\{x_1,x_2,x_3\}:\ x_1,x_2,x_3,\quad \underset{\substack{I_1:\,x\to(y\to x)\\ \int\limits_{x,y}^{x_1,x_1}(I_1)\equiv\,\vdash x_1\to(x_1\to x_1)}}{x_1\to(x_1\to x_1)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash x_1,\ \vdash x_1\to(x_1\to x_1)}{\vdash x_1\to x_1}}}{x_1\to x_1},\quad \underset{\int\limits_{x_1}^{A}(x_1\to x_1)\equiv\,\vdash A\to A}{A\to A},$$

$$\underset{\substack{\text{перестановка посылок}\\ \frac{\vdash(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}{\vdash(\bar x_1\vee x_2)\to((\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to\bar x_3)}}}{(\bar x_1\vee x_2)\to((\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to\bar x_3)},\quad \underset{\substack{III_2:\,y\to x\vee y\\ \int\limits_{y,x}^{x_2,\bar x_1}(III_2)\equiv\,\vdash x_2\to\bar x_1\vee x_2}}{x_2\to\bar x_1\vee x_2},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash x_2,\ \vdash x_2\to\bar x_1\vee x_2}{\vdash\bar x_1\vee x_2}}}{\bar x_1\vee x_2},$$

$$\underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash\bar x_1\vee x_2,\ \vdash(\bar x_1\vee x_2)\to((\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to\bar x_3)}{\vdash(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to\bar x_3}}}{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to\bar x_3},\quad \underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \frac{\vdash(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)\to\bar x_3}{\vdash\bar{\bar x}_3\to\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}}}}{\bar{\bar x}_3\to\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}},$$

$$\underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \frac{\vdash\bar{\bar x}_3\to\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}}{\vdash x_3\to\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}}}}{x_3\to\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \frac{\vdash x_3,\ \vdash x_3\to\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}}{\vdash\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}}}}{\overline{(\bar x_1\vee x_2\to\bar x_3)}};$$

б) $A(1,0,1)=1$, $\{x_1,\overline{x_2},x_3\}\vdash A$. Вывод A может быть, например, таким:

$\{x_1,\overline{x_2},x_3\}$: $x_1,\overline{x_2},x_3$, $\quad x_3\to(x_1\to x_3)$, $\quad x_1\to x_3$, $\quad x_1\to\overline{\overline{x_1}}$,

$$x_3\to(x_1\to x_3):\quad \mathrm{I}_1: x\to(y\to x),\quad \int_{x,y}^{x_3,x_1}(\mathrm{I}_1)\equiv\ \vdash x_3\to(x_1\to x_3)$$

$$x_1\to x_3:\quad \text{ППЗ}\ \frac{\vdash x_3,\ \vdash x_3\to(x_1\to x_3)}{\vdash x_1\to x_3}$$

$$x_1\to\overline{\overline{x_1}}:\quad \mathrm{VI}_2: x\to\overline{\overline{x}},\quad \int_{x}^{x_1}(\mathrm{VI}_2)\equiv\ \vdash x_1\to\overline{\overline{x_1}}$$

$\overline{\overline{x_1}}$, $\quad \overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}$, $\quad \overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}\to\overline{\overline{x_1}\vee x_2}$,

$$\overline{\overline{x_1}}:\quad \text{ППЗ}\ \frac{\vdash x_1,\ \vdash x_1\to\overline{\overline{x_1}}}{\vdash\overline{\overline{x_1}}}$$

$$\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}:\quad \text{введение конъюнкции}\ \frac{\vdash\overline{\overline{x_1}},\ \vdash\overline{x_2}}{\vdash\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}}$$

$$\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}\to\overline{\overline{x_1}\vee x_2}:\quad \int_{x_1,x_3}^{\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2},\ \overline{\overline{x_1}\vee x_2}}(x_1\to x_3)\equiv\ \vdash\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}\to\overline{\overline{x_1}\vee x_2}$$

$\overline{\overline{x_1}\vee x_2}$, $\quad x_1\to(\overline{x_2}\to x_1)$, $\quad (\overline{x_2}\to x_1)\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}})$,

$$\overline{\overline{x_1}\vee x_2}:\quad \text{ППЗ}\ \frac{\vdash\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2},\ \vdash\overline{\overline{x_1}}\wedge\overline{x_2}\to\overline{\overline{x_1}\vee x_2}}{\vdash\overline{\overline{x_1}\vee x_2}}$$

$$x_1\to(\overline{x_2}\to x_1):\quad \mathrm{I}_1: x\to(y\to x),\quad \int_{x,y}^{x_1,\overline{x_2}}(\mathrm{I}_1)\equiv\ \vdash x_1\to(\overline{x_2}\to x_1)$$

$$(\overline{x_2}\to x_1)\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}}):\quad \mathrm{VI}_2: (x\to y)\to(\overline{y}\to\overline{x}),\quad \int_{x,y}^{\overline{x_2},x_1}(\mathrm{VI}_2)\equiv\ \vdash(\overline{x_2}\to x_1)\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}})$$

$x_1\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}})$, $\quad x_1\wedge\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}}$, $\quad x_1\wedge\overline{x_1}\to x_2$,

$$x_1\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}}):\quad \text{силлогизм}\ \frac{\vdash x_1\to(\overline{x_2}\to x_1)\ \big|\ \vdash(\overline{x_2}\to x_1)\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}})}{\vdash x_1\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}})}$$

$$x_1\wedge\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}}:\quad \text{соединение посылок}\ \frac{\vdash x_1\to(\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}})}{\vdash x_1\wedge\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}}}$$

$$x_1\wedge\overline{x_1}\to x_2:\quad \text{снятие двойного отрицания}\ \frac{\vdash x_1\wedge\overline{x_1}\to\overline{\overline{x_2}}}{\vdash x_1\wedge\overline{x_1}\to x_2}$$

$x_1\to(\overline{x_1}\to x_2)$, $\quad \overline{x_1}\vee x_2\to(\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to\overline{x_3})$,

$$x_1\to(\overline{x_1}\to x_2):\quad \text{разъединение посылок}\ \frac{\vdash x_1\wedge\overline{x_1}\to x_2}{\vdash x_1\to(\overline{x_1}\to x_2)}$$

$$\overline{x_1}\vee x_2\to(\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to\overline{x_3}):\quad \int_{x_1,x_2}^{\overline{x_1}\vee x_2,\ \overline{x_3}}(x_1\wedge\overline{x_1}\to x_2)\equiv\ \vdash\overline{x_1}\vee x_2\to(\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to\overline{x_3})$$

$\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3})$, $\quad \overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}$;

$$\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}):\quad \text{перестановка посылок}\ \frac{\vdash\overline{x_1}\vee x_2\to(\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to\overline{x_3})}{\vdash\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3})}$$

$$\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}:\quad \text{ППЗ}\ \frac{\vdash\overline{\overline{x_1}\vee x_2},\ \vdash\overline{\overline{x_1}\vee x_2}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3})}{\vdash\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}}$$

в) $A(0,1,0)=1$, $\{\overline{x_1},x_2,\overline{x_3}\}\vdash A$, например,

$\{\overline{x_1},x_2,\overline{x_3}\}$: $\overline{x_1},x_2,\overline{x_3}$, $\quad \overline{x_3}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3})$, $\quad \overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}$.

$$\overline{x_3}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}):\quad \mathrm{I}_1: x\to(y\to x),\quad \int_{x,y}^{\overline{x_3},\ \overline{x_1}\vee x_2}(\mathrm{I}_1)\equiv\ \vdash\overline{x_3}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3})$$

$$\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}:\quad \text{ППЗ}\ \frac{\vdash\overline{x_3},\ \vdash\overline{x_3}\to(\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3})}{\vdash\overline{x_1}\vee x_2\to\overline{x_3}}$$

2.9.10.

а) $A=x\to(x\to y)$, $A(1,0)=0$, $\{x,\overline{y}\}\vdash\overline{A}$.

$$\{x,\overline{y}\}:\ x,\ \overline{y},\ \underset{\text{первая аксиома}}{x\to(y\to x)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash x,\ \vdash x\to(y\to x)}{\vdash y\to x}}}{y\to x}\ ,\quad \underset{\int_{y,x}^{x\to(x\to y),y}(y\to x)\,\equiv\,\vdash(x\to(x\to y))\to y}{(x\to(x\to y))\to y}\ ,$$

$$\underset{\substack{\text{контрпозиция}\\ \dfrac{\vdash(x\to(x\to y))\to y}{\vdash\overline{y}\to\overline{(x\to(x\to y))}}}}{\overline{y}\to\overline{(x\to(x\to y))}},\ \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash\overline{y},\ \vdash\overline{y}\to\overline{(x\to(x\to y))}}{\vdash\overline{(x\to(x\to y))}}}}{\overline{(x\to(x\to y))}}\ ;$$

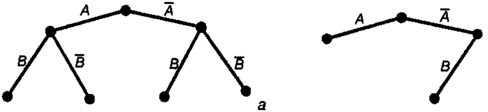
б) $A(0,1)=1,\ \{\overline{x},y\}\vdash A$.

$$\{\overline{x},y\}:\ \overline{x},\ y,\ \underset{\text{первая аксиома}}{x\to(y\to x)},\ \underset{\substack{\mathrm{I}_1:x\to(y\to x)\\ \int_{x,y}^{y,\overline{x}}(\mathrm{I}_1)\equiv\ \vdash y\to(\overline{x}\to y)}}{y\to(\overline{x}\to y)},\quad \underset{\substack{\text{ППЗ}\\ \dfrac{\vdash y,\ \vdash y\to(\overline{x}\to y)}{\vdash\overline{x}\to y}}}{\overline{x}\to y}\ ,$$

$$\underset{\int_{x,y}^{\overline{x},x\to y}(\overline{x}\to y)\,\equiv\,\vdash\overline{\overline{x}}\to(x\to y)}{\overline{\overline{x}}\to(x\to y)}\ ,\quad \underset{\substack{\text{снятие двойного отрицания}\\ \dfrac{\vdash\overline{\overline{x}}\to(x\to y)}{\vdash x\to(x\to y)}}}{x\to(x\to y)}\ .$$

2.9.11.

а) $f(A,B)=(A\to B)\to(B\to A)$, $A=1$,
$f(1,B)=(1\to B)\to(B\to 1)\equiv\ \equiv(1\to B)\to 1\equiv 1$; $A=0$,
$f(0,B)=(0\to B)\to(B\to 0)\equiv 1\to(B\to 0)$, $B=1$,
$f(0,1)=1\to(1\to 0)\equiv 1\to 0\equiv 0$. Формула f не тождественно истинна. На рис. 7.1, *а* показано семантическое дерево этой формулы, а на рис. 7.1, *б* — поддерево, используемое для проверки истинности;



а *б*

Рис. 7.1

б) $f(A,B)=(A\vee B)\to((\overline{A}\wedge B)\vee(\overline{B}\wedge A))$, $A=1$,

$f(1,B)=(1\vee B)\to((0\wedge B)\vee(\overline{B}\wedge 1))\equiv 1\to(0\vee\overline{B})\equiv 1\to\overline{B}$; $B=1$,
$f(1,1)=1\to 0\equiv 0$. Формула f выполнима;

в) $f(A,B,C)=\overline{(A\vee B)\rightarrow(\overline{C}\leftrightarrow B)}$, $A=1$,

$f(1,B,C)=\overline{(1\vee B)\rightarrow(\overline{C}\leftrightarrow B)}\equiv\overline{1\rightarrow(\overline{C}\leftrightarrow B)}$; $B=1$,

$f(1,1,C)=\overline{1\rightarrow(\overline{C}\leftrightarrow 1)}$, $B=0$, $f(1,0,C)=\overline{1\rightarrow(\overline{C}\leftrightarrow 0)}$; $C=1$, $f(1,1,1)=\overline{1\rightarrow(0\leftrightarrow 1)}\equiv 1$, $C=0$, $f(1,1,0)=\overline{1\rightarrow(1\leftrightarrow 1)}\equiv 0$, формула выполнима. На рис. 7.2 жирными линиями выделен подграф, используемый по алгоритму Квайна;

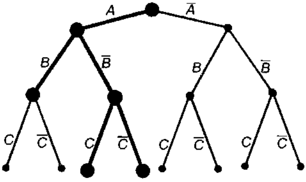


Рис. 7.2

г) $f(A,B,C)=A\vee\overline{B}\rightarrow\overline{(C\leftrightarrow\overline{A})}$, $A=1$,

$f(1,B,C)=1\vee\overline{B}\rightarrow\overline{(C\leftrightarrow 0)}\equiv 1\rightarrow\overline{(C\leftrightarrow 0)}$, $C=1$,

$f(1,B,1)=1\rightarrow\overline{(1\leftrightarrow 0)}\equiv 1\rightarrow 1\equiv 1$, $C=0$,

$f(1,B,0)=1\rightarrow\overline{(0\leftrightarrow 0)}\equiv 1\rightarrow 0\equiv 0$.

Граф и его подграф, используемый по алгоритму Квайна, изображены на рис. 7.3. Формула не тождественно истиина.

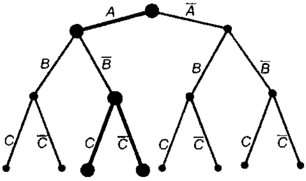


Рис. 7.3

2.9.12.

а) $f(A,B,C)=(A\wedge B\to C)\to(A\to(B\to C))$. Пусть формула f ложна, тогда $A\wedge B\to C=1$, $A\to(B\to C)=0$; $A=1$, $B\to C=0$; $B=1$, $C=0$. Но тогда $A\wedge B\to C\equiv 1\wedge 1\to 0\equiv 1\to 0\equiv 0$, а не 1. Следовательно, предположение о том, что $f=0$, неверно, формула f — тождественно истиная формула;

б) $f=A_1\to(A_2\to\ldots\to(A_{n-1}\to(A_n\to B\vee\overline{B}))..)$. Пусть $f=0$, тогда $A_1=1$, а $A_2\to\ldots\to(A_{n-1}\to(A_n\to B\vee\overline{B}))=0$, аналогично $A_2=1$, $A_3\to\ldots\to(A_{n-1}\to(A_n\to B\vee\overline{B}))=0$ и т. д. Предпоследняя импликация дает $A_{n-1}=1$, $A_n\to B\vee\overline{B}=0$, последняя $A_n=1$, $B\vee\overline{B}=0$. Но $B\vee\overline{B}=1$ всегда, следовательно, предположение $f=0$ неверно, т. е. формула f — тождественно истинная формула;

в) $f(A,B)=(A\to B)\wedge(A\to\overline{B})\to\overline{A}$. Пусть $f=0$, тогда $(A\to B)\wedge(A\to\overline{B})=1$, $\overline{A}=0$, $A=1$;

$\begin{cases}A\to B=1,\\ A\to\overline{B}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}B=1,\\ \overline{B}=1,\end{cases}$ $\begin{cases}B=1,\\ B=0.\end{cases}$ Получено противоречие,

т. е. f — тождественно истинная формула.

2.9.13. Покажем результат решения на примере трех аксиом: $\mathrm{I}_2,\mathrm{III}_1$ и IV_3 (см. формулы 2.1.1). Остальные аксиомы проверяются аналогично.

1) Алгоритм Квайна.

$\mathrm{I}_2: f(x,y,z)=(x\to(y\to z))\to((x\to y)\to(x\to z))$. $x=1$,

$f(1,y,z)=(1\to(y\to z))\to((1\to y)\to(1\to z))$, $y=1$,

$f(1,1,z)=(1\to(1\to z))\to(1\to(1\to z))$, $y=0$,

$f(1,0,z)=(1\to(0\to z))\to$

$\to((1\to 0)\to(1\to z))\equiv 1\to(0\to(1\to z))\equiv 1$, $z=1$,

$f(1,1,1)=(1\to(1\to 1))\to(1\to(1\to 1))\equiv 1$, $z=0$,

$f(1,1,0)=(1\to(1\to 0))\to(1\to(1\to 0))\equiv 1$, $x=0$,

$f(0,y,z)=(0\to(y\to z))\to$

$\to ((0 \to y) \to (0 \to z)) \equiv 1 \to 1 \equiv 1$. Формула I_2 тождественно истинна.

$\mathrm{III}_1 : f(x,y) = x \to x \vee y$. $x = 1$, $f(1,y) = 1 \to 1 \vee y \equiv 1$, $x = 0$, $f(0,y) = 0 \to 0 \vee y \equiv 1$.

$\mathrm{IV}_3 : f(x) = \overline{\overline{x}} \to x$. $x = 1$, $f(1) = \overline{\overline{1}} \to 1 \equiv 1$, $x = 0$, $f(0) = \overline{\overline{0}} \to 0 \equiv 1$.

2) Алгоритм редукции.

$\mathrm{I}_2 : f(x,y,z) = (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$. Пусть $f = 0$, тогда $x \to (y \to z) = 1$, а $(x \to y) \to (x \to z) = 0$, т. е. $x \to y = 1$ и $x \to z = 0$, $x = 1$, $z = 0$ и $y = 1$. Однако в этом случае $x \to (y \to z) = 1 \to (1 \to 0) = 0$. Получено противоречие, т. е. $f \equiv 1$.

$\mathrm{III}_1 : f(x,y) = x \to x \vee y$. Пусть $f = 0$, тогда $x = 1$, $x \vee y = 0$, т. е. $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ что невозможно, т. к. $x = 1$. Предположение $f = 0$ неверно, должно быть $f \equiv 1$.

$\mathrm{IV}_3 : f(x) = \overline{\overline{x}} \to x$. Пусть $f = 0$, $\overline{\overline{x}} = 1$, $x = 0$, т. е. $\begin{cases} x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$ Получено противоречие, следовательно, $f \equiv 1$.

2.9.14.

а) согласно методу резолюций исходное соотношение $\Gamma = \{\overline{A} \vee C, C \to B, B \to A\} \vdash A \to (B \to C)$ преобразуем в множество $\Gamma_1 = \{\overline{A} \vee C, C \to B, B \to A, \overline{A \to (B \to C)}\}$, которое надо проверить на противоречивость. Составим множество дизъюнктов Γ и применим теорему 2.10.

$\Gamma_1' = \{\overline{A} \vee C, \overline{C} \vee B, \overline{B} \vee A, A, B, \overline{C}\}$. Вывод нуля из Γ_1' может быть, например, таким:

1) $res_A(\overline{A} \vee C, A) = C$;

2) $res(C, \overline{C}) = 0$.

Итак, формула $A \to (B \to C)$ выводима из исходного множества;

б) проводим вычисления аналогично пункту (а):

$\Gamma = \{A \vee C \to B, C \to A \vee B, BC \to A \vee \overline{B}\} \vdash B \to C$,

$\Gamma_1 = \{(\overline{A} \vee B)(\overline{C} \vee B), A \vee B \vee \overline{C}, A \vee \overline{B} \vee \overline{C}, B\overline{C}\} \vdash$, $\Gamma_1' = \{(\overline{A} \vee B)(\overline{C} \vee B),$

$A \vee B \vee \overline{C}, A \vee \overline{B} \vee \overline{C}, B, \overline{C}\} \vdash$. Найдем все резольвенты множества Γ_1':

1) $res_A(\overline{A} \vee B, A \vee B \vee \overline{C}) = B \vee \overline{C}$;

2) $res_B(A \vee B \vee \overline{C}, A \vee \overline{B} \vee \overline{C}) = A \vee \overline{C}$;

3) $res_B(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}, B) = A \vee \overline{C}$;

4) $res_A(\overline{A} \vee B, A \vee \overline{C}) = B \vee \overline{C}$.

Дальнейший резолютивный вывод невозможен, т. е. формула $B \to C$ не выводима из исходного множества Γ;

в) $\Gamma = \{\overline{C}, A \vee B\} \vdash (B \to C) \to A$.

$\Gamma_1 = \{\overline{C}, A \vee B, \overline{(B \to C) \to A}\} = \{\overline{C}, A \vee B, \overline{A} \wedge (\overline{B} \vee C)\} \vdash$,

$\Gamma_1' = \{\overline{C}, A \vee B, \overline{A}, \overline{B} \vee C\}$.

1) $res_A(A \vee B, \overline{A}) = B$;

2) $res_B(B, \overline{B} \vee C) = C$;

3) $res(C, \overline{C}) = 0$.

Формула $(B \to C) \to A$ выводима из Γ.

2.9.15.

а) $\Gamma = \{A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}, B, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}, C, \overline{B} \vee D\}$. Применим к этому множеству описанный в *разделе* 2.7 алгоритм проверки противоречивости множества хорновских дизъюнктов. После найденной очередной резольвенты укажем состав множества хорновских дизъюнктов.

1) $res_B(B, A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}) = A \vee \overline{C} \vee \overline{D}$,

$\{A \vee \overline{C} \vee \overline{D}, B, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}, C, \overline{B} \vee D\}$;

2) $res_C(C, A \vee \overline{C} \vee \overline{D}) = A \vee \overline{D}$, $\{A \vee \overline{D}, B, C, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}, \overline{B} \vee D\}$;

3) $res_B(B, \overline{B} \vee D) = D$, $\{D, A \vee \overline{D}, B, C, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}\}$;

4) $res_D\left(D, A \vee \overline{D}\right) = A$, $\left\{A, D, B, C, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right\}$;

5) $res_A\left(A, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right) = B \vee \overline{C}$, $\left\{B \vee \overline{C}, A, D, B, C\right\}$;

6) $res_C\left(C, B \vee \overline{C}\right) = B$, $\left\{B, C, A, D\right\}$.

Во множестве $\{B, C, A, D\}$ нет дизъюнктов необходимого вида для составления резольвент. Следовательно, исходное множество Γ непротиворечиво;

б) $\Gamma = \left\{\overline{A} \vee \overline{B} \vee C, A, B, \overline{C}\right\}$.

1) $res_A\left(A, \overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right) = \overline{B} \vee C$, $\left\{\overline{B} \vee C, A, B, \overline{C}\right\}$;

2) $res_C\left(\overline{C}, \overline{B} \vee C\right) = \overline{B}$, $\left\{\overline{B}, A, B, \overline{C}\right\}$;

3) $res\left(B, \overline{B}\right) = 0$. Исходное множество Γ противоречиво;

в) $\Gamma = \left\{\overline{C} \vee \overline{D} \vee E, \overline{E} \vee F, C, D, \overline{A}, \overline{F}\right\}$.

1) $res_C\left(C, \overline{C} \vee \overline{D} \vee E\right) = \overline{D} \vee E$, $\left\{\overline{D} \vee E, C, \overline{E} \vee F, D, \overline{A}, \overline{F}\right\}$;

2) $res_D\left(\overline{D} \vee E, D\right) = E$, $\left\{E, C, \overline{E} \vee F, \overline{A}, \overline{F}\right\}$;

3) $res_E\left(E, \overline{E} \vee F\right) = F$, $\left\{F, E, C, D, \overline{A}, \overline{F}\right\}$;

4) $res\left(F, \overline{F}\right) = 0$. Множество Γ противоречиво.

Глава 8

Логика предикатов

8.1. Ответы и решения практического занятия № 7

3.4.1.

а) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0$. Следует найти корни числителя и исключить из их числа корни знаменателя, если они совпадут. Итак, $x^2+3x+2=0,\ x_1=-2,\ x_2=-1$;

$x^2+4x+3=0,\ x_1=-3,\ x_2=-1$. Следовательно, $I_P=\{-2\}$;

б) $\begin{cases} x^2-13x+40\ge 0, \\ 2x^2+x+30<0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \text{ или } x\ge 8, \\ \varnothing. \end{cases}$ $I_P=\varnothing$;

в) $\sin x=\sin y$, $2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}=0$.

1) $\cos\dfrac{x+y}{2}=0$, $x+y=\pi+2n\pi$;

2) $\sin\dfrac{x-y}{2}=0$, $x-y=2n\pi$.

Итак,

$$I_P=\left\{(x,y)\in R^2 \Big/ \begin{matrix}(x-y=2n\pi)\wedge(x+y=\pi+2n\pi) \\ n\in Z\end{matrix}\right\},$$ область истинности предиката изображена на рис. 8.1.

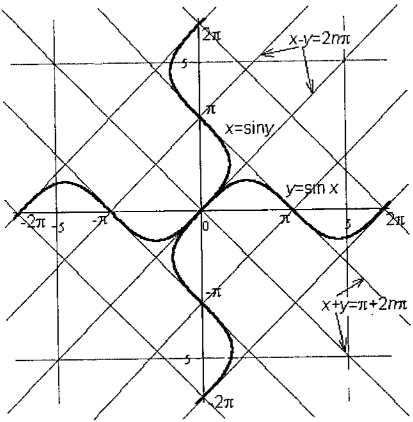


Рис. 8.1

г) $\lg x = \lg y,\ x > 0,\ y > 0.\ \dfrac{x}{y} = 1,\ x = y.$

$$I_p = \left\{ (x, y) \in R^2 \middle/ x > 0, y > 0, x = y \right\}$$ (рис. 8.2).

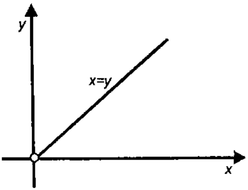


Рис. 8.2

3.4.2. Области истинности заданных предикатов изображены на рис. 8.3.

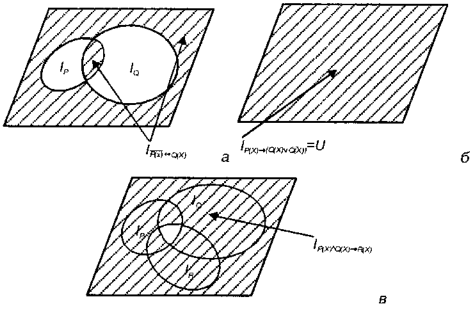


Рис. 8.3

3.4.3.

а) $(P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x))$;

б) $\overline{P(x)} \vee Q(x)$;

в) $\overline{P(x) \vee Q(x) \vee R(x)} \vee (P(x) \wedge Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee Q(x) \wedge R(x))$;

г) $P(x) \vee Q(x)$.

3.4.4.

а) $\forall x((x^2 - 6x + 8 \geq 0) \vee (x^2 - 6x + 8 < 0))$.

$x^2 - 6x + 8 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4$. Если $x^2 - 6x + 8 \geq 0$, то $x \geq 4$ или $x \leq 2$; если же $x^2 - 6x + 8 < 0$, то $2 < x < 4$, т. е.

$x \in \{(-\infty, 2] \cup [4, +\infty)\} \cup \{(2,4)\}$. Таким образом, $\forall x \in R$ исходное высказывание истинно;

б) $\exists x\left(x^2 + x + \dfrac{1}{2} = 0\right)$. $x^2 + x + \dfrac{1}{2} = 0,\ x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}}$. Действительных корней нет. Так как область определения предиката совпадает с R, то высказывание $\exists x\left(x^2 + x + \dfrac{1}{2} = 0\right)$ ложно;

в) $\forall x(x^2 - 5x + 6 \geq 0)$. $x^2 - 5x + 6 = 0,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

12 Зак. 4306

$\forall x \in \{(x \le 2) \vee (x \ge 3)\}$. Так как на интервале $2 < x < 3$ неравенство не выполняется, то высказывание ложно;

г) $\exists x((x \in \{2{,}5\}) \to (x^2 - 6x + 8 = 0))$. $x^2 - 6x + 8 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. $\exists x((x \in \{2{,}5\}) \to (x \in \{2{,}4\})) = \exists x(x \notin \{2{,}5\} \vee x \in \{2{,}4\})$. Высказывание истинно при $x = 2$.

3.4.5.

а) да;

б) да;

в) нет.

3.4.6.

а) да;

б) нет;

в) да.

3.4.7.

а) x_0 — связанная, x_1 — свободная;

б) x_2 — связанная, x_1 и x_3 — свободные переменные.

3.4.8.

а) $A = \forall y S(x, y, y)$;

б) $B = \exists z(\forall y P(z, y, y) \wedge S(z, z, x))$;

в) $C = \exists y S(y, y, x)$.

3.4.9.

а) $\forall x \forall y \forall z(S(x, y, z) \to S(y, x, z))$, т. к. $S(x, y, z) = (x + y = z)$, а $S(y, x, z) = (y + x = z)$;

б) $\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w((S(x, y, u) \wedge S(u, z, v) \wedge S(y, z, w)) \to S(x, w, v))$. Это вытекает из следующих рассуждений: $S(x, y, u) = (x + y = u)$, $S(u, z, v) = (u + z = v)$, $S(y, z, w) = (y + z = w)$, $S(x, w, v) = (x + w = v)$, т. е. $((x + y) + z = v) \wedge (y + z = w) \to (x + w = v)$, $(x + y) + z = v = x + (y + z)$;

в) аналогично предыдущему пункту:
$\forall x\forall y\forall z\forall u\forall v\forall w(P(x,y,u)\wedge P(u,z,v)\wedge P(y,z,w)\to P(x,w,v))$;

г) $\exists x\exists y(\Pi(y)\wedge x\le y)$, где $\Pi(x)=\overline{E(x)}\wedge\forall y\forall z(P(y,z,x)\to$
$\to(E(y)\vee E(z)))$, $E(x)=\forall yP(x,y,y)$, $x\le y=\exists zS(x,z,y)$, P и S из задачи 3.4.8.

Формула $\exists zS(x,z,y)$ с двумя свободными переменными x и y истинна тогда, когда $x\le y$, действительно, если $\exists z\in N(x+z=y)$, то $x\le y$. Предикат $E(x)=\forall yP(x,y,y)=\forall y(x\cdot y)=y$ истинен при $x=1$. Предикат $\Pi(x)$ истинен, если x — простое число. Это можно продемонстрировать на простом примере, например при $x=4$ и $x=5$.

$$\Pi(5)=\overline{\forall yP(5,y,y)}\wedge\forall y\forall z(P(y,z,5)\to(\forall vP(y,v,v)\vee\forall uP(z,u,u)))=$$
$$=\overline{\forall y(5\cdot y=y)}\wedge\forall y\forall z((y\cdot z=5)\to(\forall v(y\cdot v=v)\vee\forall u(z\cdot u=u)))=$$
$$=(y\ne1)\wedge((y=5,z=1)\to(y=1)\wedge(z=1))=1,$$
$$\Pi(4)=\overline{\forall yP(4,y,y)}\wedge\forall y\forall z(P(y,z,4)\to(\forall vP(y,v,v)\vee\forall uP(z,u,u)))=$$
$$=\overline{\forall y(4\cdot y=y)}\wedge\forall y\forall z((y\cdot z=4)\to(\forall v(y\cdot v=v)\vee\forall u(z\cdot u=u)))=$$
$$=(y\ne1)\wedge\left(\begin{pmatrix}\text{например,}\\ y=2,z=2\end{pmatrix}\to(y=1)\wedge(z=1)\right)=0,$$

т. к. простое число делится только на единицу и на самого себя, а у составного числа несколько делителей.

Таким образом, бесконечность множества простых чисел выражается формулой $\exists x\exists y(\Pi(y)\wedge x\le y)$, т. е. для любого $x\in N$ найдется такое простое $y\in N$, что простое y и любое x не больше y. При подстановке предиката $\Pi(y)$ в исходную формулу, получим:

$$\forall x\exists y(\exists zS(\Pi(y)\wedge x,z,y))=\forall x\exists y(\exists zS(\overline{E(y)}\wedge\forall u\forall w(P(u,w,y)\to$$
$$\to(E(u)\vee E(w)))\wedge x,z,y))=\forall x\exists y(\exists zS(\overline{\forall uP(y,u,u)}\wedge$$
$$\wedge\forall u\forall w(P(u,w,y)\to(E(u)\vee E(w)))\wedge x,z,y)).$$

3.4.10.

а) $x^2+ax+a=0$, $x_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$. $\exists x<0$ подразумевает действительный корень. Корни квадратного уравнения действительны, если $a^2-4a\geq 0$, т. е. $a\leq 0$ или $a\geq 4$. Таким образом, высказывание истинно, если $a\in(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$, и ложно, если $a\in(0,4)$;

б) $\exists x\in[a,a+1](x^2-x-2\leq 0)$. $x^2-x-2\leq 0$, $-1\leq x\leq 2$. Следовательно, если $a\in[-2,2]$, то x будет попадать на отрезок $[-1,2]$. Тогда исходное высказывание истинно при $a\in[-2,2]$ и ложно, если $a>2$ или $a<-2$.

.4.11. Рассуждение можно разбить на ряд посылок:

1) Любой разумный философ — циник;

2) Любой разумный философ — женщина;

3) Если разумные философы существуют, то существуют женщины, которые являются циниками.

Введем следующие предикаты: $P(x)=\{x$ является разумным философом $\}$, $Q(x)=\{x$ является женщиной $\}$, $R(x)=\{x$ является циником $\}$. Тогда общая формула, соединяющая в себе все посылки, имеет вид

$$(\forall x(P(x)\to R(x))\wedge\forall x(P(x)\to Q(x)))\to(\exists xP(x)\to\exists x(Q(x)\wedge R(x))).$$

.4.12. Введем три одноместных предиката: $P(x)=\{x$ — политик $\}$, $Q(x)=\{x$ — лицедей $\}$ и $R(x)=\{x$ — лицемер $\}$. Тогда все три предложения исходного рассуждения могут быть представлены в виде формул $\forall x(P(x)\to Q(x))$, $\exists x(Q(x)\to R(x))$ и $\exists x(P(x)\to R(x))$, а "перевод" всей фразы на язык логики предикатов будет иметь вид

$$(\forall x(P(x)\to Q(x))\wedge\exists x(Q(x)\to R(x)))\to\exists x(P(x)\to R(x)).$$

.4.13. Пусть одноместный предикат $P(x)=\{x$ — глупец $\}$, а предикат $N(x)$ описывает действие: $N(x)=\{x$ способен совершить что-то $\}$. Тогда высказывание $\exists x\overline{N}(x)$ можно интерпретировать, что некто (возможно я) не может совершить этого действия, а высказывание $\exists x\overline{P}(x)$ означает, что некто не глупец. В целом исходная фраза может быть передана следующей формулой: $(\forall x(P(x)\to N(x))\wedge\exists x\overline{N}(x))\to\exists x\overline{P}(x)$.

.4.14. Это утверждение заключает в себе много неопределенностей, связанных с отношениями субъектов и их свойствами. При обозначении предикатов будем интерпретировать эти свойства и отношения самым простым и понятным способом. Введем двухместный предикат

$P(x,y)=\{x$ и y - друзья$\}$. Будем считать, что $P(x,y)=P(y,x)$, т. е. если x — друг y, то y — друг x.

Тогда утверждение, заключающееся в том, что для любой пары друзей найдется такой человек, что если он дружит со вторым из этой пары, то он дружит и с первым, запишется так: $\forall x\forall y\exists z(P(x,y)\wedge P(y,z))\to P(x,z)$.

3.4.15. Введем двухместный предикат $P(x,y)=\{x$ любит $y\}$. Тогда первая часть предложения выражается высказыванием $\forall xP(x,x)$, а вторая — $\exists x\exists yP(x,y)$. Общая формула $\forall xP(x,x)\to\exists x\exists yP(x,y)$.

8.2. Ответы и решения практического занятия № 8

3.7.1.

а) $\forall x(F(x)\to G(x))\wedge\exists x(\overline{F(x)}\wedge G(x))\equiv$

$\equiv\forall x(\overline{F(x)}\vee G(x))\wedge\exists x(\overline{F(x)}\wedge G(x))\equiv 1$. Тогда $\begin{cases}\forall x(\overline{F(x)}\vee G(x))\equiv 1,\\ \exists x(\overline{F(x)}\wedge G(x))\equiv 1.\end{cases}$

Перейдем к однотипным кванторам в обоих тождествах.

$$\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall yG(y)\equiv 1,\\ \exists x\overline{F(x)}\wedge\exists yG(y)\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{\overline{\forall x\overline{F(x)}}\wedge\overline{\forall yG(y)}}\equiv 1,\\ \exists x\overline{F(x)}\wedge\exists yG(y)\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\exists xF(x)\wedge\exists y\overline{G(y)}\equiv 0,\\ \exists x\overline{F(x)}\wedge\exists yG(y)\equiv 1.\end{cases}$$

Или $\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall yG(x)\equiv 1,\\ \exists x\overline{F(x)}\wedge\exists yG(x)\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall yG(x)\equiv 1,\\ \overline{\overline{\exists x\overline{F(x)}}\vee\overline{\exists yG(x)}}\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall yG(x)\equiv 1,\\ \forall xF(x)\vee\forall y\overline{G(y)}\equiv 1.\end{cases}$$

Обеим полученным системам удовлетворяет следующее расположение области истинности предикатов $F(x)$ и $G(x)$.

Таким образом, $I_F\subset I_G$ (рис. 8.4);

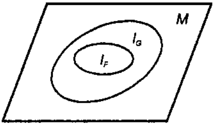


Рис. 8.4

б) $\overline{\exists x(F(x)\wedge G(x))}\wedge\exists x(F(x)\to G(x))\equiv$

$\equiv\forall x(\overline{F(x)}\vee\overline{G(x)})\wedge\exists x(\overline{F(x)}\vee G(x))\equiv 1$.

$$\begin{cases}\forall x(\overline{F(x)}\vee\overline{G(x)})\equiv 1,\\ \exists x(\overline{F(x)}\vee G(x))\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall y\overline{G(y)}\equiv 1,\\ \exists x\overline{F(x)}\vee\exists xG(x)\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall y\overline{G(y)}\equiv 1,\\ \overline{\overline{\exists x\overline{F(x)}}\wedge\overline{\exists xG(x)}}\equiv 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\forall x\overline{F(x)}\vee\forall y\overline{G(y)}\equiv 1,\\ \forall xF(x)\wedge\forall x\overline{G(x)}\equiv 0.\end{cases}$$

Итак, $I_F=\varnothing$, I_G — любое подмножество M (рис. 8.5).

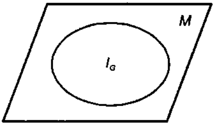


Рис. 8.5

3.7.2.

а) выполнима, если $P(x)$ — не тождественно ложный предикат;

б) невыполнима. Пусть $\exists(x=a)\in N$ такой, что выполнима формула $\forall y(Q(a,a)\wedge\overline{Q(a,y)})$. Тогда выполнима и формула $Q(a,a)\wedge\overline{Q(a,a)}$. Но $Q(a,a)\wedge\overline{Q(a,a)}=0$. Получено противоречие. Следовательно, исходная формула невыполнима;

в) формула может быть выполнима на N, например, когда предикаты Q и R выражают следующие отношения порядка $Q(x,y)=(x\geq y)$, $R(x,y,z)=(x+y\geq z)$. Пусть $\exists(x=a)\in N$, что выполнима формула $\forall y((a\geq y)\to\forall z(a+y\geq z))$. Тогда, если

$y = z = a$, то $(a \geq a) \to (a + a \geq a) = 1 \to 1 = 1$, т. е. исходная формула выполнима.

3.7.3.

а) нет. Формула ложна на множестве N, если, например, $P(x) = \{x$ — четное число $\}$. Тогда $\exists x P(x) \to \forall x P(x) = 1 \to 0 = 0$;

б) $\forall x P(x) \to \exists x P(x) \equiv \overline{\forall x P(x)} \vee \exists x P(x) \equiv \exists x \overline{P(x)} \vee \exists x P(x) \equiv$
$\equiv \exists x\left(\overline{P(x)} \vee P(x)\right) \equiv 1$;

в) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \to$
$\to \exists x(P(x) \vee Q(x))) \wedge (\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)) \equiv$
$$\equiv \exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv 1,$$

ибо высказывание $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ принимает значение 0 или 1, а $1 \to 1 = 1$ или $0 \to 0 = 1$;

г) пусть $Q(x, y) = (x \leq y), x, y \in N$. Тогда высказывания $\exists x \forall y Q(x, y) = \{$ существует натуральное число x такое, что для всякого натурального y истинно $x \leq y$ $\}$ и $\forall y \exists x Q(x, y) = \{$ для всякого натурального y найдется не превосходящее его натуральное x $\}$ истинны на N. Таким образом, формула $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \forall x Q(x, y)$ тождественно истинна;

д) нет. Формула ложна на N, если $P(x) = \{x$ — простое число $\}$. Тогда $P(x) \to \forall y P(y) = 1 \to 0 = 0$;

е) $\exists x(P(x) \wedge (r \to Q(x))) \to \left(\forall x\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \bar{r}\right) \equiv$
$\equiv \overline{\exists x\left(P(x) \wedge \left(\bar{r} \vee Q(x)\right)\right)} \vee \overline{\forall x\left(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\right)} \vee \bar{r} \equiv \forall x\left(\overline{P(x)} \vee \left(r \wedge \overline{Q(x)}\right)\right) \vee$
$\vee \left(\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \bar{r}\right) \equiv \forall x \overline{P(x)} \vee \left(r \wedge \forall y \overline{Q(y)}\right) \vee \left(\bar{r} \vee \exists x P(x)\right) \wedge$
$\wedge \left(\bar{r} \vee \exists y Q(y)\right) \equiv \forall x \overline{P(x)} \vee \left(\left(r \wedge \forall y \overline{Q(y)}\right) \vee \left(\bar{r} \vee \exists x P(x)\right)\right) \wedge$
$\wedge \left(\left(r \wedge \forall y \overline{Q(y)}\right) \vee \left(\bar{r} \vee \exists y Q(y)\right)\right)$. Но $r \wedge \forall y \overline{Q(y)} \equiv \overline{\bar{r} \vee \overline{\forall y \overline{Q(y)}}} \equiv$
$\equiv \overline{\bar{r} \vee \exists y Q(y)}$. Тогда $\left(r \wedge \forall y \overline{Q(y)}\right) \vee \left(\bar{r} \vee \exists y Q(y)\right) \equiv 1$ и формула упрощается.
$\forall x \overline{P(x)} \vee \left(r \wedge \forall y \overline{Q(y)}\right) \vee \left(\bar{r} \vee \exists x P(x)\right) \equiv \left(\forall x \overline{P(x)} \vee \exists x P(x)\right) \vee \bar{r} \vee$

$\vee\left(r\wedge\forall y\overline{Q(y)}\right)$. Однако $\forall x\overline{P(x)}\equiv\overline{\overline{\forall x\overline{P(x)}}}\equiv\overline{\exists xP(x)}$. Тогда $1\vee\bar r\vee\left(r\wedge\forall y\overline{Q(y)}\right)\equiv 1$, т. е. исходная формула тождественно истинна.

3.7.4.

а) пусть на некотором множестве M данная формула ложна. Тогда $\overline{\exists xP(x)}=1$, $\overline{\forall xP(x)}=0$, т. е. $\exists xP(x)=0$, $\forall xP(x)=1$, что не может быть, если $M\neq\varnothing$. Получено противоречие, следовательно, формула $\overline{\exists xP(x)}\to\overline{\forall xP(x)}$ тождественно истинна;

б) пусть на M данная формула ложна. Тогда на M $\forall x\left(P(x)\to\overline{Q(x)}\right)=1$ и $\overline{\exists xP(x)\wedge\forall xQ(x)}=0$, т. е. $\exists xP(x)=1$ и $\forall xQ(x)=1$. Выберем $(x=a)\in M$ такое, что $P(x)=1$. В этом случае $P(a)\to\overline{Q(a)}=1$, т. е. $\overline{Q(a)}=1$ и $Q(a)=0$, что противоречит $\forall xQ(x)=1$. Таким образом, исходная формула тождественно истинна;

в) доказательство полностью аналогично приведенному в предыдущем пункте. Пусть на M формула $\forall x\left(P(x)\to\overline{Q(x)}\right)\to\overline{\left(\forall xP(x)\wedge\exists xQ(x)\right)}$ ложна. Это значит, что $\forall x\left(P(x)\to\overline{Q(x)}\right)=1$, а $\forall xP(x)=1$ и $\exists xQ(x)=1$. Тогда должно быть $P(a)\to\overline{Q(a)}=1$, т. е. $P(a)=0$, что противоречит $\forall xP(x)=1$.

3.7.5.

а) доказательство аналогично приведенному в *разделе 3.5* для формулы $\overline{\forall xA(x)}\equiv\exists x\overline{A(x)}$. Рассмотрим на M множество значений связанной переменной x и свободных переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ предиката P и выясним, какие значения принимают формулы $\overline{\exists xP(x)}$ и $\forall x\overline{P(x)}$ на произвольном наборе свободных переменных $a_1,a_2,\dots,a_n\in M$.

1) $\forall a\in M\ \ P(x)\big|_{a,a_1,a_2,\dots,a_n}=1$,

2) $\exists a_0\in M\ \ P(x)\big|_{a_0,a_1,a_2,\dots,a_n}=0$.

В первом случае $\forall a\in M\ \ P(x)\big|_{a,a_1,a_2,\dots,a_n}=1$, тогда по определению $\exists xP(x)\big|_{a_1,a_2,\dots,a_n}=1$ и $\overline{\exists xP(x)\big|_{a_1,a_2,\dots,a_n}}=0$. С другой стороны, т. к.

$\forall a P(x)\big|_{a,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 1$, то $\overline{\forall x P(x)\big|_{a_1,a_2,\ldots,a_n}} = 0$. Таким образом, $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$.

Если же $\exists a_0 \in M \;\; P(x)\big|_{a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n} = 0$, то $\exists x P(x)\big|_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = 0$. Тогда $\overline{\exists x P(x)\big|_{a_1,a_2,\ldots,a_n}} = 1$, т. е. неверно, что найдется такой x, для которого $P(x)$ истинно. Это равносильно тому, что для всякого x истинно $\overline{P(x)}$, т. е. $\overline{\forall x P(x)\big|_{a_1,a_2,\ldots,a_n}} = 1$. Следовательно, опять $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$;

б) $\forall x P(x) \wedge C \equiv \forall x (P(x) \wedge C)$. Упростим пример и рассмотрим случай, когда список свободных переменных предиката P пустой. Здесь возможны опять два случая:

1) $\forall a \in M \;\; P(x) = 1,\; C = 1$ или $C = 0$,

2) $\forall a \in M \;\; P(x) = 0,\; C = 1$ или $C = 0$.

В первом случае $\forall x P(x) = 1$, если $C = 1$, то $\forall x P(x) \wedge C = 1$, если же $C = 0$, то $\forall x P(x) \wedge C = 0$. Формула в правой части примет аналогичные значения. Действительно, если $\forall x P(x) = 1$, то $P(x) \equiv 1$. Тогда $\forall x (P(x) \wedge C) = 1$, если $C = 1$ и $\forall x (P(x) \wedge C) = 0$, если $C = 0$. Второй случай рассматривается аналогично. Желающие могут повторить доказательство с непустым списком свободных переменных предиката P.

3.7.6.

а) $\overline{\exists x \forall y \exists z \forall u P(x, y, z, u)} \equiv \forall x \exists y \forall z \exists u \overline{P(x, y, z, u)}$;

б) $\exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \exists x \forall y P(x, y) \wedge \exists z \forall y Q(z, y) \equiv$
$\equiv \exists x \exists z (\forall y P(x, y) \wedge \forall y Q(z, y)) \equiv \exists x \exists z \forall y (P(x, y) \wedge Q(z, y))$;

в) $\exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y Q(x, y)) \equiv$
$\equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall z Q(x, z)) \equiv \exists x \forall y \forall z (P(x, y) \vee Q(x, z))$;

г) $\exists x \forall y P(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \overline{\exists x \forall y P(x, y)} \vee \exists x \forall y Q(x, y) \equiv$
$\equiv \forall x \exists y \overline{P(x, y)} \vee \exists x \forall y Q(x, y) \equiv \forall x \exists y \overline{P(x, y)} \vee \exists z \forall u Q(z, u) \equiv$
$\equiv \forall x \exists y \exists z \forall u (\overline{P(x, y)} \vee Q(z, u))$;

д) $\overline{\forall x\exists y(P(x)\leftrightarrow Q(y))}\equiv\exists x\forall y\overline{((P(x)\to Q(y))\wedge(Q(y)\to P(x)))}\equiv$
$\equiv\exists x\forall y\left(\overline{(\overline{P(x)}\vee Q(y))}\vee\overline{(\overline{Q(y)}\vee P(x))}\right)\equiv\exists x\forall y\Big((P(x)\wedge\overline{Q(y)})\vee$
$\vee(Q(y)\wedge\overline{P(x)})\Big)$;

е) $\forall x(P(x)\to\exists yQ(y))\equiv\forall x(\overline{P(x)}\vee\exists yQ(y))\equiv\forall x\exists y(\overline{P(x)}\vee Q(y))$.

3.7.7.

а) $\forall x\exists yQ(x,y)\to\exists x\forall yQ(x,y)\equiv\overline{\forall x\exists yQ(x,y)}\vee$
$\vee\forall x\exists yQ(x,y)\equiv\exists x\forall y\overline{Q(x,y)}\vee\exists x\forall yQ(x,y)\equiv$
$\equiv\exists x(\forall y\overline{Q(x,y)}\vee\forall zQ(x,z))\equiv$
$\equiv\exists x\forall y\forall z(\overline{Q(x,y)}\vee Q(x,z))$;

б) $\exists x(P(x)\to(\forall yQ(x,y)\to\forall zR(x,z)))\equiv$
$\equiv\exists x(\overline{P(x)}\vee(\overline{\forall yQ(x,y)}\vee\forall zR(x,z)))\equiv$
$\equiv\exists x(\overline{P(x)}\vee(\exists y\overline{Q(x,y)}\vee\forall zR(x,z)))\equiv$
$\equiv\exists x(\overline{P(x)}\vee\exists y\forall z(\overline{Q(x,y)}\vee R(x,z)))\equiv$
$\equiv\exists x\exists y\forall z(\overline{P(x)}\vee\overline{Q(x,y)}\vee R(x,z))$.

3.7.8.

а) $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\forall xP(x)\to\forall xQ(x))\equiv$
$\equiv\overline{\forall x(\overline{P(x)}\vee Q(x))}\vee(\overline{\forall xP(x)}\vee\forall xQ(x))\equiv\exists x(P(x)\wedge\overline{Q(x)})\vee$
$\vee(\exists x\overline{P(x)}\vee\forall xQ(x))\equiv\exists x(\overline{P(x)}\vee(P(x)\wedge\overline{Q(x)}))\vee\forall xQ(x)\equiv$
$\equiv\exists x(\overline{P(x)}\vee\overline{Q(x)})\vee\forall xQ(x)\equiv\exists x\overline{P(x)}\vee\exists x\overline{Q(x)}\vee\forall xQ(x)\equiv$
$\equiv\exists x\overline{P(x)}\vee\overline{\forall xQ(x)}\vee\forall xQ(x)\equiv 1\vee\exists x\overline{P(x)}\equiv 1$;

б) $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists xP(x)\to\exists xQ(x))\equiv\exists x(P(x)\wedge\overline{Q(x)})\vee$
$\vee\forall x\overline{P(x)}\vee\exists xQ(x)\equiv\exists x(Q(x)\vee(P(x)\wedge\overline{Q(x)}))\vee\forall x\overline{P(x)}\equiv$
$\equiv\exists x(Q(x)\vee P(x))\vee\forall x\overline{P(x)}\equiv\exists xQ(x)\vee\exists xP(x)\vee\overline{\exists xP(x)}\equiv 1$;

в) $\forall x(q\to P(x))\leftrightarrow(q\to\forall xP(x))\equiv$
$\equiv(\forall x(q\to P(x))\to(q\to\forall xP(x)))\wedge$

$$\wedge\left(\left(q \to \forall x P(x)\right) \to \left(\forall x\left(q \to P(x)\right)\right)\right) \equiv \left(\exists x\left(q \wedge \overline{P(x)}\right) \vee \bar{q} \vee \forall x P(x)\right) \wedge$$
$$\wedge\left(\left(q \wedge \exists x \overline{P(x)}\right) \vee \bar{q} \vee \forall x P(x)\right) \equiv \left(\left(q \vee \bar{q}\right) \wedge \left(\bar{q} \vee \exists x \overline{P(x)}\right) \vee \forall x P(x)\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\bar{q} \vee \overline{\forall x P(x)} \vee \forall x P(x)\right) \equiv \bar{q} \vee 1 \equiv 1.$$

3.7.9. $\exists x \exists y\left(\left(P(x) \to P(y)\right) \wedge \left(P(x) \to \overline{P(y)}\right) \wedge P(x)\right) \equiv$
$$\equiv \exists x \exists y\left(\left(\overline{P(x)} \vee P(y)\right) \wedge \left(\overline{P(x)} \vee \overline{P(y)}\right) \wedge P(x)\right) \equiv \exists x \exists y\left(\left(\overline{P(x)} \vee P(y)\right) \wedge\right.$$
$$\left.\wedge\left(\left(\overline{P(x)} \wedge P(x)\right) \vee \left(\overline{P(y)} \wedge P(x)\right)\right)\right) \equiv \exists x \exists y\left(\left(\overline{P(x)} \vee P(y)\right) \wedge \overline{P(y)} \wedge P(x)\right) \equiv$$
$$\equiv \exists x \exists y\left(\left(\overline{P(x)} \wedge \overline{P(y)}\right) \vee \left(P(y) \wedge \overline{P(y)}\right) \wedge P(x)\right) \equiv$$
$$\equiv \exists x \exists y\left(\overline{P(x)} \wedge \overline{P(y)} \wedge P(x)\right) \equiv 0.$$

3.7.10. Рассмотрим сначала простой пример формулы A и продемонстрируем механизм преобразования формулы к требуемому виду. Пусть $A = \exists x P_1(x) \wedge \left(\overline{\forall y P_2(y)} \vee \forall z P_3(z)\right) \equiv \exists x P_1(x) \wedge \forall y \forall z\left(\overline{P_2(y)} \vee P_3(z)\right)$. Теперь вынесем все кванторы в начало формулы и кванторы всеобщности преобразуем в кванторы существования с помощью соответствующих эквивалентностей:
$$A = \exists x P_1(x) \wedge \forall y \forall z\left(\overline{P_2(y)} \vee P_3(z)\right) \equiv \exists x \forall y \forall z\left(P_1(x) \wedge \left(\overline{P_2(y)} \vee P_3(z)\right)\right) \equiv$$
$$\equiv \exists x \overline{\exists y \forall z\left(P_1(x) \wedge \left(\overline{P_2(y)} \vee P_3(z)\right)\right)} \equiv \exists x \overline{\exists y \exists z\left(\overline{P_1(x)} \vee \left(P_2(y) \wedge \overline{P_3(z)}\right)\right)} = B.$$

В общем случае, если подформула A_i формулы A имеет вид $\exists(\forall) y A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, то необходимо привести $A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ к виду $\bigvee_i(\bigwedge_j A_{ij})$ или $\bigwedge_i(\bigvee_j A_{ij})$, где каждое A_{ij} начинается с квантора или имеет вид $P(u)$ или $\overline{P(u)}$ для некоторого P из σ и переменной u. Далее, используя необходимые эквивалентности, получаем формулу B.

8.3. Ответы и решения практического занятия № 9

3.9.1.

1) $\forall x \in R \forall y \in R\left(\overline{(x > y)} \vee \overline{(y > x)}\right)$;

2) $\forall a \in A \exists x_m \in R(a \leq x_m)$;

3) $\forall \overline{x_1} \in M\ \forall \overline{x_2} \in M \ldots \forall \overline{x_k} \in M\ \exists \alpha_1 \in R \exists \alpha_2 \in R \ldots \exists \alpha_k \in$

$\in R\left(\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k \neq 0\right) \wedge\left(\alpha_1 \overline{x_1}+\alpha_2 \overline{x_2}+\ldots+\alpha_k \overline{x_k}=\dot{0}\right)\right)$;

4) $\forall \bar{a} \in R^3 \forall \bar{b} \in R^3\left(\left(\bar{a}, \bar{b}\right)=0\right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \exists N(\varepsilon)>0 \forall n\in N\left(\left(n>N(\varepsilon)\right)\to\left|x_n-x\right|<\varepsilon\right)$;

6) $\forall n\in N\left(x_{n+1}>x_n\right)$;

7) $\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)>0\forall n,l>N(\varepsilon)\left(\left|x_n-x_l\right|<\varepsilon\right)$;

8) $\exists T\in R\setminus\{0\}\forall x\in M\left((x\pm T)\wedge\left(f(x\pm T)=f(x)\right)\right)$;

9) $\forall x_1\in M\forall x_2\in M\left(\left(x_1<x_2\right)\to\left(f(x_1)<f(x_2)\right)\right)$;

10) $\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)>0\forall x\in M\left(\left(x>N(\varepsilon)\right)\to\left|f(x)-A\right|<\varepsilon\right)$.

3.9.2.

1) Признак имеет стандартную структуру $\forall x\in M\left(P(x)\to Q(x)\right)$. Посылка и заключение импликации имеют вид $\left(x_n\geq x_{n+1}\geq 0\right)\wedge\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\right)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n=S$. В целом признак можно записать так:

$$\forall n\in N\left(x_n\geq x_{n+1}\geq 0\right)\wedge\left(\lim_{n\to\infty}x_n=0\right)\to\exists S\in R\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n=S\right).$$

Выражение $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ можно расписать подробнее, например, так, как это сделано в задаче 3.9.1 (10).

2) $\forall y\in[a,b]\left(\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in M\left(0<|x-y|<\delta\to\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon\right)\right)\to$
$\to\exists N\in R_+\forall x\in[a,b]\left(\left|f(x)\right|<N\right)$.

3) $\left(\left(\forall y\in[a,b]\left(\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in M\left(0<|x-y|<\delta\to\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon\right)\right)\right)\wedge\right.$
$\left.\wedge\left(\forall x\in(a,b)\exists f'(x)\neq\infty\right)\wedge\left(f(a)=f(b)\right)\right)\to\exists c\in(a,b)\left(f'(c)=0\right)$.

4) $\forall y\in[a,b]\left(\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in M\left(0<|x-y|<\delta\to\left|f(x)-f(y)\right|<\varepsilon\right)\right)\to$

$$\to\exists c\in[a,b]\left(\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)\right).$$

5) $\left(\left(\left(\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)>0\forall n\in N\left(\left(n>N(\varepsilon)\right)\to\left|x_n-x\right|<\varepsilon\right)\right)\to\left|x_n-x\right|<\varepsilon\right)\to\right.$

$$\to (\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 \forall n, l > N(\varepsilon)(|x_n - x_l| < \varepsilon))) \wedge$$

$$\wedge ((\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 \forall n, l > N(\varepsilon)(|x_n - x_l| < \varepsilon)) \to (\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 \forall n > N$$

$$((n > N(\varepsilon)) \to |x_n - x| < \varepsilon))).$$

3.9.3.

1) Исходное утверждение имеет вид $\forall f \in F(P(f) \to Q(f))$, где $P(f)$ — предикат, выражающий интегрируемость $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, а $Q(f)$ определяет свойство монотонности этой функции на $[a,b]$. Перейдем к противоположному выражению $\overline{\forall f \in F(P(f) \to Q(f))} \equiv \exists f \in F(P(f) \wedge \overline{Q}(f))$. Таким образом, чтобы доказать несправедливость исходного утверждения, необходимо привести пример любой функции, которая была бы непрерывной на $[a,b]$, но немонотонной на этом отрезке. Такую функцию найти нетрудно, например, $y = x^2$ на отрезке $[-1,1]$ удовлетворяет заданным требованиям (рис. 8.6).

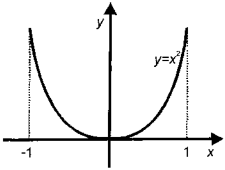


Рис. 8.6

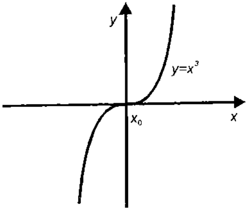


Рис. 8.7

2) $\forall f \in F(P(f) \to Q(f))$, где $P(f) = (f''(x_0) = 0)$, $Q(f) = \{x_0$ — точка экстремума функции $f(x)\}$. $\exists f \in F(P(f) \wedge \overline{Q}(f))$ — существует функция, имеющая в точке x_0 вторую производную, равную нулю, но не имеющая экстремума в этой точке. Например, $y = x^3$. $y'' = 6x$, $y''(0) = 0$, но $x_0 = 0$ — точка перегиба графика функции, а не точка экстремума (рис. 8.7).

3) $\forall f \in F(P(f) \to Q(f))$, $P(f) = \{f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]\}$, $Q(f) = \{f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]\}$. $\exists f \in F\left(P(f) \wedge \overline{Q}(f)\right)$ — найдется ограниченная на $[a,b]$ функция, не интегрируемая по Риману на этом отрезке. Рассмотрим функцию Дирихле* $D(x) = \begin{cases} 1, x \text{ — рациональное,} \\ 0, x \text{ — иррациональное.} \end{cases}$ Она ограничена на $[a,b]$, но не интегрируема по Риману. В самом деле, для любого разбиения отрезка $[a,b]$ при рациональных x_i соответствующая интегральная сумма равна $b-a$, а при иррациональных — нулю. Поэтому не существует предела интегральных сумм при $h = x_i - x_{i-1} \to 0$ и, следовательно, функция Дирихле не интегрируема по Риману.

4) $\exists f \in F\left(P(f) \wedge \overline{Q}(f)\right)$ — существует дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$, не имеющая в этой точке локального экстремума. Если $f(x) = x^3$ и $x_0 = 0$, то $f'(0) = 0$, но $x_0 = 0$ — точка перегиба (рис. 8.7).

5) $\exists f \in F\left(P(f) \wedge \overline{Q}(f)\right)$ — существует функция, представимая на отрезке $[a,b]$ рядом Тейлора, но этот ряд не сходится к $f(x)$ во всех точках этого отрезка. Такие функции существуют. Например, рассмотрим $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$ Эта функция бесконечно дифференцируема. При $x \neq 0$ это очевидно. При $x = 0$ производные вычисляются по определению. Оказывается, что $f^{(n)}(0) = 0$ при $n \geq 0$. Поэтому все члены ряда Тейлора для функции $f(x)$ при $x_0 = 0$ обращаются в нуль. Ясно, что получившийся ряд не сходится к функции $f(x)$.

6) $\exists A\left(P(A) \wedge \overline{Q}(A)\right)$ — найдется такая формула логики предикатов, которая будет выполнима, но не общезначима. Например, $\exists x P(x)$. Значение этого высказывания зависит от области истинности I_P

---

* Петер Густав Лежен-Дирихле (1805–1859) — немецкий математик.

предиката $P(x)$. Формула $\exists x P(x)$ выполнима, если $P(x)$ — не тождественно ложный предикат, т. е. если $I_P \neq \varnothing$, однако не общезначима.

3.9.4.

1) $P(x) = \{$ в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны $\}$, $Q(x) = \{$ четырехугольник — ромб $\}$. $\forall x \in M\,(P(x) \to Q(x))$ — основная теорема неверна, ибо легко можно представить трапецию с взаимно перпендикулярными диагоналями (рис. 8.8).

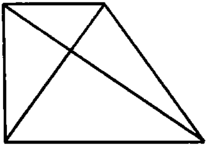


Рис. 8.8

Обратная теорема $\forall x \in M\,(Q(x) \to P(x))$: если четырехугольник — ромб, то его диагонали перпендикулярны. Эта теорема верна и является одним из признаков ромба.

Противоположная теорема $\forall x \in M\,(\overline{P}(x) \to \overline{Q}(x))$ — если у четырехугольника диагонали не перпендикулярны, то это не ромб — тоже верна.

Обратная к противоположной теорема $\forall x \in M\,(\overline{Q}(x) \to \overline{P}(x))$: если четырехугольник — не ромб, то его диагонали не перпендикулярны, — неверна (рис. 8.8).

2) $\forall f \in F\,(P(f) \to Q(f))$, $P(f) = \{f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a) < 0, f(b) > 0\}$, $Q(f) = \exists c \in (a,b)(f(c) = 0)$. Это верная теорема, она выражает одно из свойств непрерывных функций и имеет простой геометрический смысл. График непрерывной функции, соединяющий точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, где $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$ пересекает ось OX по крайней мере в одной точке (рис. 8.9).

Обратная теорема $\forall f \in F\,(Q(f) \to P(f))$: если между точками a и b найдется точка c, в которой функция обращается в нуль, то функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Эта теорема неверна, что хорошо видно на рис. 8.10. Противоположная теорема $\forall f \in F(\overline{P}(f) \to \overline{Q}(f))$: если $f(x)$ разрывна на $[a,b]$ и на его концах не принимает значения разных знаков, то не найдется точки $c \in (a,b)$, в которой $f(c)=0$. Эта теорема также неверна, что демонстрирует рис. 8.10.

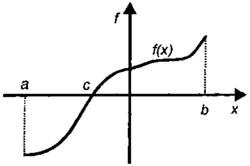


Рис. 8.9

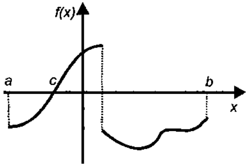


Рис. 8.10

Наконец, обратная к противоположной теорема $\forall f \in F(\overline{Q}(f) \to \overline{P}(f))$: если нет точки $c \in (a,b)$, где $f(c)=0$, то функция $f(x)$ разрывна на $[a,b]$ и не принимает на концах отрезка значения разных знаков. Это верная теорема. Различные случаи описанной ситуации (когда неверно следствие теоремы) показаны на рис. 8.11.

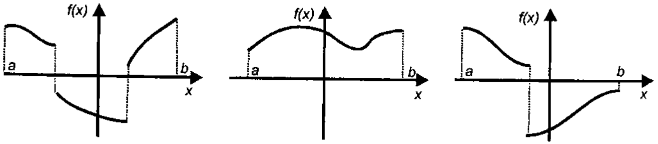


Рис. 8.11

3) $\forall f \in F(P(f) \to Q(f))$, $P(f) = \{f(x)$ дифференцируема в точке $x_0\}$, $Q(f) = \{f(x)$ непрерывна в точке $x_0\}$. Исходная теорема верна, она выражает одно из свойств дифференцируемых функций.

Обратная теорема $\forall f \in F(Q(f) \to P(f))$: если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она и дифференцируема в этой точке. Эта теорема неверна (*см. разд. 3.8.* и рис. 3.10).

Противоположная теорема $\forall f \in F\left(\overline{P}(f) \to \overline{Q}(f)\right)$: если $f(x)$ не дифференцируема в точке x_0, то она разрывна в этой точке. Это утверждение тоже неверно (рис. 8.11). Непрерывная функция не имеет конечных производных во всех угловых точках и точках возврата.

Обратная к противоположной теорема $\forall f \in F\left(\overline{Q}(f) \to \overline{P}(f)\right)$: если $f(x)$ разрывна в точке x_0, то она и не дифференцируема в этой точке. Это верное утверждение.

4) $\forall f \in F(P(f) \to Q(f))$, $P(f) = \{$ дифференцируемая $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум $\}$, $Q(f) = (f'(x_0) = 0)$. Это верная теорема, она составляет необходимое условие экстремума.

Обратная теорема $\forall f \in F(Q(f) \to P(f))$: если $f'(x) = 0$, то в точке x_0 $f(x)$ имеет экстремум. Теорема неверна (рис. 8.7).

Противоположная теорема $\forall f \in F\left(\overline{P}(f) \to \overline{Q}(f)\right)$: если в точке x_0 $f(x)$ не имеет экстремума, то $f'(x_0) \neq 0$. Это утверждение тоже неверно, что подтверждается тем же рисунком.

Обратная к противоположной теорема $\forall f \in F\left(\overline{Q}(f) \to \overline{P}(f)\right)$: если $f'(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$. Теорема верна.

5) $\forall u \in M(P(u) \to Q(u))$, $P(u) = \{$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится $\}$, $Q(u) = \left(\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0\right)$. Основная теорема верна, в математическом анализе она называется необходимым признаком сходимости ряда.

Обратная теорема $\forall u \in M(Q(u) \to P(u))$: если предел общего члена ряда равен нулю, то ряд сходится. Это неверное утверждение. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Известно, что этот ряд расходится, но $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Противоположная теорема $\forall u \in M\left(\overline{P}(u) \to \overline{Q}(u)\right)$: если ряд расходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$. Несправедливость этой теоремы демонстрируется тем же примером.

Обратная к противоположной теорема $\forall u \in M\left(\overline{Q}(u) \to \overline{P}(u)\right)$: если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится. Теорема справедлива и известна под иазванием *практического признака расходимости рядов*.

3.9.5.

1) Даны два предиката $P(x) = \{$ два треугольника равны $\}$ и $Q(x) = \{$ все углы одного треугольника равны соответствующим углам другого $\}$. Рассмотрим формулу

$$\forall x \in M\left(P(x) \leftrightarrow Q(x)\right) \equiv$$

$$\equiv\left(\forall x \in M\left(\overset{\ddot{A}}{P}(x) \to \overset{I}{Q}(x)\right)\right) \wedge \left(\forall x \in M\left(\overset{\ddot{A}}{Q}(x) \to \overset{I}{P}(x)\right)\right).$$

Первый логический сомножитель $\forall x \in M\left(\overset{Д}{P}(x) \to \overset{Н}{Q}(x)\right)$ — очевидно, верное высказывание. Второй сомножитель $\forall x \in M\left(\overset{Д}{Q}(x) \to \overset{Н}{P}(x)\right)$ — высказывание ложное: если все углы одного треугольника равны соответствующим углам другого, то эти треугольники равны.

Предикат $Q(x)$ для $P(x)$, таким образом, является необходимым, но недостаточным условием. Следовательно, исходное предложение должно быть сформулировано так: для того чтобы два треугольника были равны, необходимо, ио недостаточно, чтобы все углы одного треугольника были равны соответствующим углам другого.

2) Правильными называются такие многоугольиики, у которых все стороны и все углы равны. Введем два предиката с условным аргументом x: $P(x) = \{$ все стороны многоугольника равны $\}$ и $Q(x) = \{$ этот многоугольник правильный $\}$. Тогда

$$\forall x \in M\left(P(x) \leftrightarrow Q(x)\right) \equiv$$

$$\equiv\left(\forall x \in M\left(\overset{\ddot{A}}{P}(x) \to \overset{I}{Q}(x)\right)\right) \wedge \left(\forall x \in M\left(\overset{\ddot{A}}{Q}(x) \to \overset{I}{P}(x)\right)\right).$$

Первое высказывание $\forall x \in M\left(\overset{Д}{P}(x) \to \overset{Н}{Q}(x)\right)$ ложно, примером может служить ромб; второе высказывание $\forall x \in M\left(\overset{Д}{Q}(x) \to \overset{Н}{P}(x)\right)$

истинно. Таким образом, исходное утверждение имеет вид: для того чтобы все стороны многоугольника были равны, достаточно, но не необходимо, чтобы многоугольник был правильным.

3) Сформулирована известная теорема векторной алгебры. Пусть $P(x) = \{$ два вектора в R^2 линейно зависимы $\}$ и $Q(x) = \{$ два вектора коллинеарны $\}$. Тогда $\forall x \in M\left(\overset{\text{Д}}{Q(x)} \to \overset{\text{Н}}{P(x)}\right)$ — верное высказывание, высказывание $\forall x \in M\left(\overset{\text{Д}}{Q(x)} \to \overset{\text{Н}}{P(x)}\right)$ тоже истинно. Следовательно, исходная теорема звучит так: для того чтобы два вектора в R^2 были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

4) Достаточно, но не необходимо (*см. разд. 3.8, пример 1*).

5) Необходимо и достаточно (*см. п. 3*).

Глава 9

Исчисление предикатов

9.1. Ответы и решения практического занятия № 10

4.10.1. Найдем все $\theta_i \circ \theta_j$. $\theta_1 = \{t_1|x_1, t_2|x_2, t_3|x_3\} = \{F_1(y)|x, F_2(x,z)|y, c_1|z\}$,

$\theta_2 = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{F_2(F_1(x), y)|x, F_1(c_1)|y, F_1(z)|z\}$.

Сначала получим множество

$\{t_1\theta_2|x_1, t_2\theta_2|x_2, t_3\theta_2|x_3, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{F_1(F_1(c_1))|x,$
$F_2(F_2(F_1(x), y), F_1(z))|y, c_1|z, F_2(F_1(x), y)|x. F_1(c_1)|y, F_1(z)|z\}$. Из этого множества надо вычеркнуть все элементы $t_j\theta_2|x_j$, для которых $t_j\theta_2 = x_j$, и все элементы $q_i|y_i$ такие, что $y_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

В нашем случае $t_1\theta_2 = F_1(F_1(c_1)) \neq x_1 = x$,
$t_2\theta_2 = F_2(F_2(F_1(x), y), F_1(z)) \neq x_2 = y$ и $t_3\theta_2 = c_1 \neq x_3 = z$. Однако $y_1 = x_1 = x$, следовательно, выражение $F_2(F_1(x), y)|x$ надо вычеркнуть, аналогично $y_2 = x_2 = y$, т. е. $F_1(c_1)y|$ надо вычеркнуть, и $y_3 = x_3 = z$, т. е. $F_1(z)|z$ вычеркиваем. Окончательно,

$\theta_1\theta_2 = \{F_1(F_1(c_1))|x, F_2(F_2(F_1(x), y), F_1(z))|y, c_1|z\}$.

$\theta_1 \circ \theta_3 : \theta_1 = \{t_1|x_1, t_2|x_2, t_3|x_3\} = \{F_1(y)|x, F_2(x,z)|y, c_1|z\}$,
$\theta_3 = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{F_2(c_1)|x, c_2|y, x|z\}$. Находим множество
$\{t_1\theta_3|x_1, t_2\theta_3|x_2, t_3\theta_3|x_3, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} =$
$= \{F_1(c_2)|x, F_2(F_2(c_1), x)|y, c_1|z. F_2(c_1)|x, c_2|y, x|z\}$.

$t_1\theta_3 = F_1(c_1) \neq x_1 = x$, $t_2\theta_3 = F_2(F_2(c_1), x) \neq x_2 = y$, $t_3\theta_3 = c_1 \neq x_3 = z$;

$y_1 = x_1 = x$, т. е. $F_2(c_1)|x$ вычеркиваем, $y_2 = x_2 = y$, $c_2|y$ вычеркиваем, $y_3 = x_3 = z$, $x|z$ вычеркиваем. Тогда

$\theta_1\theta_3 = \{F_1(c_2)|x, F_2(F_2(c_1), x)|y, c_1|z\}$.

$\theta_1 \circ \theta_4 : \theta_1 = \{t_1|x_1, t_2|x_2, t_3|x_3\} = \{F_1(y)|x, F_2(x,z)|y, c_1|z\}$,

$\theta_4 = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{y|x, z|y, x|z\}$.

Отсюда $\theta_1\theta_4 = \{t_1\theta_4|x_1, t_2\theta_4|x_2, t_3\theta_4|x_3, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} =$
$= \{F_1(z)|x, F_2(y,x)|y, c_1|z, y|x, z|y, x|z\}$. Здесь $t_1\theta_4 = F_1(z) \neq x_1 = x$,
$t_2\theta_4 = F_2(y,x) \neq x_2 = y$, $t_3\theta_4 = c_1 \neq x_3 = z$; $y_1 = x_1 = x$,
$y|x$ вычеркиваем, $y_2 = x_2 = y$, $z|y$ вычеркиваем, $y_3 = x_3 = z$,
$x|z$ вычеркиваем. Следовательно, $\theta_1\theta_4 = \{F_1(z)|x, F_2(y,x)|y, c_1|z\}$.

$\theta_2 \circ \theta_3 : \theta_2 = \{t_1|y_1, t_2|y_2, t_3|y_3\} = \{F_2(F_1(x), y)|x, F_1(c_1)|y, F_1(z)|z\}$,

$\theta_3 = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{F_2(c_1)|x, c_2|y, x|z\}$.

$\theta_2\theta_3 = \{t_1\theta_3|x_1, t_2\theta_3|x_2, t_3\theta_3|x_3, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} =$
$= \{F_2(F_1(F_2(c_1)), c_2)|x, F_1(c_1)|y, F_1(x)|z, F_2(c_1)|x, c_2|y, x|z\}$.
$t_1\theta_3 = F_2(F_1(F_2(c_1)), c_2) \neq x_1 = x$, $t_2\theta_3 = F_1(c_1) \neq x_2 = y$,
$t_3\theta_3 = F_1(x) \neq x_3 = z$; $y_1 = x_1 = x$, $F_2(c_1)|x$ вычеркиваем,
$y_2 = x_2 = y$, $c_2|y$ вычеркиваем, $y_3 = x_3 = z$, $x|z$ вычеркиваем.
Отсюда $\theta_2\theta_3 = \{F_2(F_1(F_2(c_1)), c_2)|x, F_1(c_1)|y, F_1(x)|z\}$.

$\theta_2 \circ \theta_4 : \theta_2 = \{t_1|y_1, t_2|y_2, t_3|y_3\} = \{F_2(F_1(x), y)|x, F_1(c_1)|y, F_1(z)|z\}$,

$\theta_4 = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{y|x, z|y, x|z\}$.

$\theta_2\theta_4 = \{t_1\theta_4|x_1, t_2\theta_4|x_2, t_3\theta_4|x_3, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} =$
$\{F_2(F_1(y), z)|x, F_1(c_1)|y, F_1(x)|z, y|x, z|y, x|z\}$.
$t_1\theta_4 = F_2(F_1(y), z) \neq x_1 = x$, $t_2\theta_4 = F_1(c_1) \neq x_2 = y$,
$t_3\theta_4 = F_1(x) \neq x_3 = z$; $y_1 = x_1 = x$, $y|x$ вычеркиваем, $y_2 = x_2 = y$,
$z|y$ вычеркиваем, $y_3 = x_3 = z$, $x|z$ вычеркиваем. Таким образом,

$\theta_2\theta_4 = \{F_2(F_1(y), z)|x, F_1(c_1)|y, F_1(x)|z\}$.

$\theta_3 \circ \theta_4 : \theta_3 = \{t_1|y_1, t_2|y_2, t_3|y_3\} = \{F_2(c_1)|x, c_2|y, x|z\}$,

$\theta_4 = \{q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} = \{y|x, z|y, x|z\}$.

$\theta_3\theta_4 = \{t_1\theta_4|x_1, t_2\theta_4|x_2, t_3\theta_4|x_3, q_1|y_1, q_2|y_2, q_3|y_3\} =$

$= \{F_2(c_1)|x, c_2|y, y|z, y|x, z|y, x|z\}$.

$t_1\theta_4 = F_2(c_1) \neq x_1 = x$, $t_2\theta_4 = c_2 \neq x_2 = y$, $t_3\theta_4 = y \neq x_3 = z$;

$y_1 = x_1 = x$, $y|x$ вычеркиваем, $y_2 = x_2 = y$, $z|y$ вычеркиваем,

$y_3 = x_3 = z$, $x|z$ вычеркиваем. Итоговая подстановка

$\theta_3\theta_4 = \{F_2(c_1)|x, c_2|y, y|z\}$.

4.10.2.

а) воспользуемся алгоритмом унификации, описанным в *разделе 4.8*.

$P_0 = \Gamma = \{P(\underline{c}, x, F_2(F_1(y))), P(\underline{z}, F_2(z), F_2(u))\}$.

1. $k = 0$, P_0 — исходное множество, $\theta_{P_0} = \varepsilon$;
2. P_0 — неодноэлементное множество, $D_0 = \{c, z\}$;
3. $z \notin c$;
4. $\theta = \{c|z\}$, $\theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{c|z\}$,

$P_1 = P_0\theta_1 = \{P(c, \underline{x}, F_2(F_1(y))), P(c, \underline{F_2(c)}, F_2(u))\}$;

1. $k = 1$, P_1 — неодноэлементное множество, $D_1 = \{x, F_2(c)\}$;
2. $x \notin F_2(c)$;
3. $\theta = \{F_2(c)|x\}$, $\theta_2 = \theta_1\theta = \{c|z, F_2(c)|x\}$,

$P_2 = P_1\theta = \{P(c, F_2(c), F_2(\underline{F_1(y)})), P(c, F_2(c), F_2(\underline{u}))\}$;

1. $k = 2$, P_2 — неодноэлементное множество, $D_2 = \{F_1(y), u\}$;
2. $u \notin F_1(y)$;
3. $\theta = \{F_1(y)|u\}$ $\theta_3 = \theta_2\theta = \{c|z, F_2(c)|x, F_1(y)|u\}$;

$P_3 = P_2\theta = \{P(c, F_2(c), F_2(F_1(y))), P(c, F_2(c), F_2(F_1(u)))\} =$

$= \{P(c, F_2(c), F_2(F_1(y)))\}$;

1. P_3 — одноэлементное множество, $\theta_3 = \{c|z, F_2(c)|x, F_1(y)|u\}$ — НОУ для Γ.

б) $P_0 = \Gamma = \{P(\underline{F_1(c)}, F_2(x)), P(\underline{y}, y)\}$.

1. $k = 0$, P_0 — исходное множество содержит два элемента, $\theta_{P_0} = \varepsilon$;
2. $D_0 = \{F_1(c), y\}$;
3. $y \notin F_1(c)$;
4. $\theta = \{F_1(c)|y\}$, $\theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{F_1(c)|y\}$,

   $P_1 = P_0\theta_1 = \{P(F_1(c), \underline{F_2(x)}), P(F_1(c), \underline{F_1(c)})\}$;
5. $k = 1$, P_1 — неодноэлементное множество, $D_1 = \{F_2(x), F_1(c)\}$, D_1 не содержит переменных; конец алгоритма, исходное множество не унифицируемо.

в) $P_0 = \Gamma = \{P(c, \underline{x}), P(c, \underline{c})\}$.

1. $k = 0$, P_0 — неодноэлементно, $\theta_{P_0} = \varepsilon$;
2. $D_0 = \{x, c\}$;
3. $x \notin c$;
4. $\theta = \{c|x\}$, $\theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{c|x\}$,

   $P_1 = P_0\theta_1 = \{P(c,c), P(c,c)\} = \{P(c,c)\}$;
5. $k = 1$, P_1 — одноэлементное множество, $\theta_1 = \{c|x\}$ — НОУ для Γ.

г) $P_0 = \Gamma = \{P(c, \underline{x}, F(x)), P(c, \underline{y}, y)\}$.

1. $k = 0$, P_0 — исходное множество содержит два элемента, $\theta_{P_0} = \varepsilon$;
2. $D_0 = \{x, y\}$;
3. $x \notin y$;
4. $\theta = \{x|y\}$, $\theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{x|y\}$, $P_1 = P_0\theta_1 = \{P(c, x, \underline{F(x)}), P(c, x, \underline{x})\}$;
5. $k = 1$, P_1 — неодноэлементное множество, $D_1 = \{F(x), x\}$;
6. $x \in F(x)$, исходное множество не унифицируемо.

д) $P_0 = \Gamma = \{F(\underline{u}, F_1(x, y), F(\underline{y}, z)), F(u, F_1(c, z))\}$.

1. $k = 0$, P_0 — исходное множество содержит три элемента, $\theta_{P_0} = \varepsilon$;

2. $D_0 = \{u, y\}$;

3. $u \notin y$;

4. $\theta = \{u|y\}$, $\theta_1 = \theta_{P_0}\theta = \{u|y\}$,

$P_1 = P_0\theta_1 = \{F(u, \underline{F_1(x,u)}), F(u,\underline{z}), F(u, F_1(c,z))\}$;

1. $k = 1$, P_1 — неодноэлементное множество, $D_1 = \{F_1(x,u), z\}$;

2. $z \notin F_1(x,u)$;

3. $\theta = \{F_1(x,u)|z\}$, $\theta_2 = \theta_1\theta = \{u|y, F_1(x,u)|z\}$,

$P_2 = P_1\theta = \{F(u,F_1(x,u)), F(u,F_1(x,u)), F(u,F_1(c,F_1(x,u)))\} =$
$= \{F(u,F_1(\underline{x},u)), F(u,F_1(\underline{c},F_1(x,u)))\}$;

1. $k = 2$, P_2 — неодноэлементное множество, $D_2 = \{x, c\}$;

2. $x \notin c$;

3. $\theta = \{c|x\}$, $\theta_3 = \theta_2\theta = \{u|y, F_1(x,u)|z, c|x\}$,

$P_3 = P_2\theta = \{F(u, F_1(c,\underline{u})), F(u, F_1(c, \underline{F_1(x,u)}))\}$;

1. $k = 3$, P_3 — неодноэлементное множество, $D_3 = \{u, F_1(x,u)\}$;

2. $u \in F_1(x,u)$, исходное множество не унифицируемо.

4.10.3.

а) $A = P(x) \vee P(F(y)) \vee \overline{P_2}(x)$. Найдем НОУ для первых двух членов формулы A. $\theta = \{F(y)|x\}$,

$A\theta = P(F(y)) \vee P(F(y)) \vee \overline{P_2}(F(y)) = P(F(y)) \vee \overline{P_2}(F(y))$.

$A\theta$ — склейка A;

б) $A = P_1(x) \vee P_2(y) \vee P_1(F(x))$. $\theta = \{F(x)|x\}$, $x \in F(x)$. Формулы $P_1(x)$ и $P_1(F(x))$ не имеют НОУ, формула A не имеет склейки;

в) $A = F_1(x) \vee F_2(y) \vee F_1(F_2(c)) \vee F_1(z) \vee F_2(z)$. $\theta = \{F_2(c)|x\}$,

$A\theta = F_1(F_2(c)) \vee F_2(y) \vee F_1(z) \vee F_2(z)$ — первая склейка A; $\theta_1 = \{F_2(c)|z\}$, $A\theta\theta_1 = F_1(F_2(c)) \vee F_2(y) \vee F_2(F_2(c))$ — вторая склейка A; $\theta_2 = \{F_2(c)|y\}$, $A\theta\theta_1\theta_2 = F_1(F_2(c)) \vee F_2(F_2(c))$ — третья склейка A.

4.10.4.

а) $B_1 = P_1(x) \vee P_2(x)$, $B_2 = \overline{P_1}(c) \vee P_3(x)$. Дизъюнкты имеют общую переменную x, заменим ее на y, получим $B_2' = \overline{P_1}(c) \vee P_3(y)$.
Тогда $A_1 = P_1(x)$, $A_2 = \overline{P_1}(c)$, $\overline{A_2} = P_1(c)$, $\theta = \{c|x\}$,
$B_1\theta \vee B_2'\theta = P_1(c) \vee P_2(c) \vee \overline{P_1}(c) \vee P_3(y)$,
$res(B_1, B_2) = P_2(c) \vee P_3(y)$;

б) $B_1 = \overline{P_1}(x) \vee P_2(x,x)$, $B_2 = \overline{P_2}(c, F(c))$. Общих переменных в B_1 и B_2 нет. $A_1 = P_2(x,x)$, $\overline{A_2} = P_2(c, F(c))$, $\theta = \{c|x\}$,
$B_1\theta \vee B_2'\theta = \overline{P_1}(c) \vee P_2(c,c) \vee \overline{P_2}(c, F(c))$, $\theta_2 = \{F(c)|c\}$, $c \in F(c)$.
Множество дизъюнктов $\{B_1, B_2\}$ не унифицируемо, следовательно, не имеет резольвент;

в) $B_1 = P(a) \vee Q(x,b)$, $B_2 = \overline{P}(x) \vee Q(b,y)$. $\theta = \{a|x\}$,
$B_1\theta \vee B_2\theta = P(a) \vee Q(a,b) \vee \overline{P}(a) \vee Q(b,y)$,
$res(B_1, B_2) = Q(a,b) \vee Q(b,y)$.

4.10.5.

а) $F_1 = \forall x \forall y (P_1(x,y) \to P_2(x,y)) \equiv \forall x \forall y (\overline{P_1}(x,y) \vee P_2(x,y))$,
$F_2 = \forall x \forall y (P_2(x,y) \to P_3(x,y)) \equiv \forall x \forall y (\overline{P_2}(x,y) \vee P_3(x,y))$,
$F_3 = \exists x \exists y P_1(x,y)$. Отбросим кванторы всеобщности, а переменным, связанным квантором существования, присвоим конкретные значения: $x = a$, $y = b$, $F_3' = P_1(a,b)$. Получим множество дизъюнктов $\Gamma = \{\overline{P_1}(x,y) \vee P_2(x,y), \overline{P_2}(x,y) \vee P_3(x,y), P_1(a,b)\}$, которое надо проверить на противоречивость методом резолюций.
$res(\overline{P_1}(x,y) \vee P_2(x,y), P_1(a,b)) = ?$ $\theta_1 = \{a|x, b|y\}$,
$res = \overline{P_1}(a,b) \vee P_2(a,b) \vee P_1(a,b) = P_2(a,b)$.
$res(P_2(a,b), \overline{P_2}(x,y) \vee P_3(x,y)) = ?$ $\theta_1 = \{a|x, b|y\}$,
$res = P_2(a,b) \vee \overline{P_2}(a,b) \vee P_3(a,b) = P_3(a,b)$.

Других резольвент у множества $\Gamma = \{F_1, F_2, F_3\}$ нет, поэтому резолютивный вывод нуля из Γ не существует. Следовательно, исходное множество формул Γ не противоречиво;

б) $\Gamma=\{P_1(c_1,f(c_2),f(c_3)), P_2(c_1), P_1(x,x,f(x)), \overline{P_1}(x,y,z)\vee P_3(x,z), \overline{P_2}(x)\vee$
$\vee\overline{P_1}(y,z,u)\vee\overline{P_3}(x,u)\vee P_3(x,y)\vee P_3(x,z), \overline{P_3}(c_1,c_3)\}=$
$=\{F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6\}$.

$res(F_2,F_5)=res(F_2,F_2\{z|y\})=?\ \theta_1=\{c_1|x\}$,

$F_2\theta_1\vee F_5\{z|y\}\theta_1=P_2(c_1)\vee\overline{P_2}(c_1)\vee\overline{P_1}(z,z,u)\vee$
$\vee\overline{P_3}(c_1,u)\vee P_3(c_1,z)\vee P_3(c_1,z)=\overline{P_1}(z,z,u)\vee\overline{P_3}(c_1,u)\vee P_3(c_1,z)=F_7$.

$res(F_3,F_7)=?\ \theta_1=\{x|z,f(x)|u\}$,

$F_3\theta_1\vee F_7\theta_1=P_1(x,x,f(x))\vee\overline{P_1}(x,x,f(x))\vee\overline{P_3}(c_1,f(x))\vee$
$\vee P_3(c_1,x)=\overline{P_3}(c_1,f(x))\vee P_3(c_1,x)=F_8$.

$res(F_6,F_8)=?\ \theta_1=\{c_3|x\}$,

$F_6\theta_1\vee F_8\theta_1=\overline{P_3}(c_1,c_3)\vee\overline{P_3}(c_1,f(c_3))\vee P_3(c_1,c_3)=\overline{P_3}(c_1,f(c_3))=F_9$.

$res(F_4,F_9)=?\ \theta_1=\{c_1|x,f(c_3)|z\}$,

$F_4\theta_1\vee F_9\theta_1=\overline{P_1}(c_1,y,f(c_3))\vee\overline{P_3}(c_1,f(c_3))\vee P_3(c_1,f(c_3))=$
$=\overline{P_1}(c_1,y,f(c_3))=F_{10}$.

$res(F_1,F_{10})=?\ \theta_1=\{f(c_2)|y\}$,

$F_1\theta_1\vee F_{10}\theta_1=\overline{P_1}(c_1,f(c_2),f(c_3))\vee P_1(c_1,f(c_2),f(c_3))=0$;

в) $F_1=\exists x(P(x)\wedge\exists y(P(y\wedge((Q(x)\wedge Q(y))\wedge\exists z\overline{P}(z)))))\equiv$
$\equiv\exists x(P(x)\wedge\exists y(P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y)\wedge\exists z\overline{P}(z)))\equiv$
$\equiv\exists x\exists y\exists z(P(x)\wedge P(y)\wedge Q(x)\wedge Q(y)\wedge\overline{P}(z))$,
$x=a,\ y=b,\ z=c$,

$\Gamma=\{P(a),P(b),Q(a),Q(b),\overline{P}(c)\}$, $res(P(a),\overline{P}(c)\{a|c\})=0$. Исходная формула не выполнима.

4.10.6. Метод резолюций в исчислении предикатов представляет собой сложную процедуру, состоящую из нескольких этапов:

1. Представление исходной формулы в виде множества дизъюнктов.

2. Доказательство противоречивости множества дизъюнктов, включающее в себя получение скулемовских форм исходных формул, униификацию формул, т. е. нахождение нужной подстановки, и доказательство противоречивости множества дизъюнктов в данном константном частном случае.

Первый этап основан на том факте, что если $\Gamma = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash A$, то формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$ общезначима, т. е. истинна в любой интерпретации.

Второй этап базируется на том, что для того, чтобы доказать $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash A$, нужно показать, что множество формул $\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\overline{A}\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \overline{A}\}$ противоречиво. Противоречивость доказывается с помощью теоремы Эрбрана подбором конкретного константного частного случая. Механизм доказательства противоречивости множества дизъюнктов похож на аналогичный в исчислении высказываний.

а) рассмотрим первый пример:

$$F = \left(\left(\forall z B(b,z,z) \vee \exists v \overline{A}(b,v,b)\right) \wedge \left(\forall u B(u,u,u) \vee \forall y \forall z A(y,y,z)\right)\right) \to$$
$$\to \left(\left(\exists w B(w,c,w) \wedge \exists u \overline{A}(u,u,u)\right) \vee \left(\exists w \forall u B(b,u,w) \wedge \exists z \forall x B(x,c,z)\right)\right) =$$
$$= (F_1 \wedge F_2) \to (F_3 \vee F_4).$$

Получим по формуле $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$ множество $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \overline{A}\}$. В нашем случае $(F_1 \wedge F_2) \to (F_3 \vee F_4)$, т. е. $A = F_3 \vee F_4$, $\overline{A} = \overline{F_3} \wedge \overline{F_4}$. Тогда множество Γ_1 будет иметь вид $\Gamma_1 = \{F_1, F_2, \overline{F_3}, \overline{F_4}\}$.

$F_1 = \forall z B(b,z,z) \vee \exists v \overline{A}(b,v,b) \equiv \exists v \overline{A}(b,v,b) \vee \forall z B(b,z,z) \equiv$
$\equiv \exists v \forall z \left(\overline{A}(b,v,b) \vee B(b,z,z)\right)$. Обозначим значение v, которое существует в соответствии с первым квантором, константой a, отбросив квантор существования. Тогда $F_1 = \forall z \left(\overline{A}(b,a,b) \vee B(b,z,z)\right)$.

Квантор всеобщности можно также отбросить в предположении, что доказательство проводится для всякого фиксированного z. Тогда $F_1' = \overline{A}(b,a,b) \vee B(b,z,z)$.

Аналогично $F_2 = \forall u B(u,u,u) \vee \forall y \forall z A(y,y,z) \equiv$

$\equiv \forall u \forall y \forall z (B(u,u,u) \vee A(y,y,z))$ или

$F_2' = B(u,u,u) \vee A(y,y,z)$. $F_3 = \exists w B(w,c,w) \wedge \exists u \overline{A}(u,u,u)$,

$\overline{F_3} = \forall w \overline{B}(w,c,w) \vee \forall u A(u,u,u) \equiv \forall w \forall u (\overline{B}(w,c,w) \vee A(u,u,u))$,

$\overline{F_3'} = \overline{B}(w,c,w) \vee A(u,u,u)$. $F_4 = \exists w \forall u B(b,u,w) \wedge \exists z \forall x B(x,c,z)$,

$\overline{F_4} = \forall w \exists u \overline{B}(b,u,w) \vee \forall z \exists x \overline{B}(x,c,z) \equiv$

$\equiv \forall w \exists u \overline{B}(b,u,w) \vee \forall z \exists u \overline{B}(u,c,z) \equiv$

$\equiv \exists u (\forall w \overline{B}(b,u,w) \vee \forall z \overline{B}(u,c,z)) \equiv \exists u \forall w \forall z (\overline{B}(b,u,w) \vee \overline{B}(u,c,z))$.

Обозначим значение u, которое существует в соответствии с первым квантором, константой d $(u = d)$, отбросив при этом квантор существования. $\overline{F_4} = \forall w \forall z (\overline{B}(b,d,w) \vee \overline{B}(d,c,z))$. Тогда

$\overline{F_4'} = \overline{B}(b,d,w) \vee \overline{B}(d,c,z)$.

Таким образом, множество Γ, противоречивость которого необходимо проверить, будет иметь вид

$\Gamma = \{\overline{A}(b,a,b) \vee B(b,z,z), B(u,u,u) \vee A(y,y,z), \overline{B}(w,c,w) \vee A(u,u,u),$
$\overline{B}(b,d,w) \vee \overline{B}(d,c,z)\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

Исследуем это множество на выполнимость с помощью метода резолюций, воспользовавшись обозначениями *раздела 4.9.*

Найдем $res(C_2,C_3)$. $C_2 = B(u,u,u) \vee A(y,y,z)$,

$C_3 = \overline{B}(w,c,w) \vee A(u,u,u)$, $\theta_1 = \{u|w\}$,

$C_2\theta_1 \vee C_3\theta_1 = B(u,u,u) \vee A(y,y,z) \vee \overline{B}(u,c,u) \vee A(u,u,u)$,

$\theta_2 = \{c|u\}$,

$C_2\theta_1\theta_2 \vee C_3\theta_1\theta_2 = B(c,c,c) \vee A(y,y,z) \vee \overline{B}(c,c,c) \vee A(c,c,c) =$

$= A(y,y,z) \vee A(c,c,c)$. Вычислим теперь склейку этого дизъюнкта. $\theta_3 = \{c|y, c|z\}$. Склейка $res(C_2,C_3)$ равна $A(c,c,c) = C_5$.

$res(C_1,C_5) =$? $C_1 = \overline{A}(b,a,b) \vee B(b,z,z)$, $C_5 = A(c,c,c)$.

$\theta_1 = \{c|b, c|a\}$, $C_1\theta_1 \vee C_5\theta_1 = \overline{A}(c,c,c) \vee B(c,z,z) \vee A(c,c,c)$,

$res(C_1,C_5) = C_6 = B(c,z,z)$.

$res(C_4, C_6) = ?$ $C_4 = \overline{B}(d,c,z)$, $C_6 = B(c,z,z)$, $\theta_1 = \{c|d\}$,

$C_4\theta_1 \vee C_6\theta_1 = \overline{B}(c,c,z) \vee B(c,z,z)$, $\theta_2 = \{c|z\}$, $res(C_4, C_6) = 0$.

Множество формул Γ противоречиво, таким образом, исходная формула F истинна.

б) доказательство проводится по схеме пункта а.

$$F = (\forall u \exists w A(b,u,w) \vee B(c,c,c) \vee \exists w \forall u A(u,c,w) \vee \forall w B(b,w,w)) \wedge$$
$$(\forall w \exists u B(w,u,a)) \to (\exists u \overline{A}(u,c,a) \wedge \exists v \exists w B(w,v,w)) \vee (\exists v \exists w B(b,v,w) \wedge$$
$$\wedge \exists z A(z,c,x) \wedge \exists x \forall y B(y,x,a)) = (F_1 \wedge F_2) \to (F_3 \vee F_4).$$

$$F_1 = \forall u \exists w A(b,u,w) \vee B(c,c,c) \vee \exists w \forall u A(u,c,w) \vee \forall w B(b,w,w) =$$
$$= \exists w (\forall u A(b,u,w) \vee B(c,c,c) \vee \forall t_2 A(t_2,c,w) \vee \forall t_1 B(b,t_1,t_1)) =$$
$$= \exists w \forall u \forall t_2 \forall t_1 (A(b,u,w) \vee B(c,c,c) \vee A(t_2,c,w) \vee B(b,t_1,t_1)),$$

$w = d$, $F_1' = A(b,u,d) \vee B(c,c,c) \vee A(t_2,c,d) \vee B(b,t_1,t_1)$.

$F_2 = \forall w \exists u B(w,u,a)$, $u = f_1(w)$, $F_2' = B(w, f_1(w), a)$.

$\overline{F_3 \vee F_4} = \overline{F_3} \wedge \overline{F_4}$,

$$\overline{F_3} = \overline{\exists u \overline{A}(u,c,a) \wedge \exists v \exists w B(w,v,w)} \equiv \forall u A(u,c,a) \vee \forall v \forall w \overline{B}(w,v,w) \equiv$$
$$\equiv \forall u \forall v \forall w (A(u,c,a) \vee \overline{B}(w,v,w)),\ F_3' = A(u,c,a) \vee \overline{B}(w,v,w).$$

$$\overline{F_4} = \overline{\exists v \exists w B(b,v,w) \wedge \exists z A(z,c,z) \wedge \exists x \forall y B(y,x,a)} \equiv \forall v \forall w \overline{B}(b,v,w) \vee$$
$$\vee \forall z \overline{A}(z,c,z) \vee \forall x \exists y \overline{B}(y,x,a) \equiv \exists y (\forall v \forall w \overline{B}(b,v,w) \vee \forall z \overline{A}(z,c,z) \vee$$
$$\vee \forall x \overline{B}(y,x,a)) \equiv \exists y \forall v \forall w \forall z \forall x (\overline{B}(b,v,w) \vee \overline{A}(z,c,z) \vee \overline{B}(y,x,a)),$$

$y = l$, $F_4' = \overline{B}(b,v,w) \vee \overline{A}(z,c,z) \vee \overline{B}(l,x,a)$.

$$\Gamma = \{A(b,u,d) \vee A(t_2,c,d) \vee B(c,c,c) \vee B(b,t_1,t_1), B(w, f_1(w), a),$$
$$A(u,c,a) \vee \overline{B}(w,v,w), \overline{B}(b,v,w) \vee \overline{A}(z,c,z) \vee \overline{B}(l,x,a)\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}.$$

Упростим формулы множества Γ, найдя их склейки.

$C_1 = A(\underline{b},u,d) \vee A(\underline{t_2},c,d) \vee B(c,c,c) \vee B(b,t_1,t_1)$, $\quad \theta_1 = \{b|t_2\}$,

$C_1\theta_1 = A(b,\underline{u},d) \vee A(b,\underline{c},d) \vee B(c,c,c) \vee B(b,t_1,t_1)$, $\quad \theta_2 = \{c|u\}$,

$C_1\theta_1\theta_2 = A(b,c,d) \vee A(b,c,d) \vee B(c,c,c) \vee B(b,t_1,t_1)$,

$\theta_3 = \{c|b, c|t_1\}$, Склейка равна $A(c,c,d) \vee B(c,c,c)$.

$C_4 = \overline{B}(\underline{b}, v, w) \vee \overline{A}(z, c, z) \vee \overline{B}(l, x, a)$, $\theta_1 = \{b|l\}$,

$C_4\theta_1 = \overline{B}(b, \underline{v}, w) \vee \overline{A}(z, c, z) \vee \overline{B}(b, \underline{x}, a)$,

$\theta_2 = \{x|v\}$, $C_4\theta_1\theta_2 = \overline{B}(b, x, \underline{w}) \vee \overline{A}(z, c, z) \vee \overline{B}(b, x, \underline{a})$, $\theta_3 = \{a|w\}$,

$C_4\theta_1\theta_2\theta_3 = \overline{B}(b, x, a) \vee \overline{A}(z, c, z) \vee \overline{B}(b, x, a) = \overline{A}(z, c, z) \vee \overline{B}(b, x, a)$.

$res(C_1, C_3) = ?$ $C_1 = A(c, c, d) \vee B(c, c, c)$,

$C_3 = \overline{A}(u, c, a) \vee \overline{B}(w, v, w)$, $\theta_1 = \{c|u\}$,

$C_1\theta_1 \vee C_3\theta_1 = A(c, c, \underline{d}) \vee B(c, c, c) \vee \overline{A}(c, c, \underline{a}) \vee \overline{B}(w, v, w)$;

$\theta_2 = \{a|d\}$,

$C_2\theta_1\theta_2 \vee C_3\theta_1\theta_2 = A(c, c, a) \vee B(c, c, c) \vee \overline{A}(c, c, a) \vee \overline{B}(w, v, w)$,

$\theta_3 = \{c|w, c|v\}$, $res(C_1, C_3) = B(c, c, c) \vee \overline{B}(c, c, c) = 0$.

Исходная формула F истинна.

в) $F = (\exists u A(u, b, c) \to (\exists v \exists w B(v, v, w) \to \exists v A(b, v, v))) \wedge$
$\wedge (\exists y B(a, y, a) \vee \forall x A(b, x, x) \vee \forall x \forall u B(x, u, b)) \to ((\forall x A(x, x, c) \to$
$\to \exists y \exists z A(b, y, z) \vee B(a, a, b))) = (F_1 \wedge F_2) \to (F_3 \vee F_4)$.

$F_1 = \overline{\exists u A(u, b, c)} \vee \overline{\exists v \exists w B(v, v, w)} \vee \exists v A(b, v, v) \equiv \forall u \overline{A}(u, b, c) \vee$
$\vee \forall v \forall w \overline{B}(v, v, w) \vee \exists v A(b, v, v) \equiv \forall u \overline{A}(u, b, c) \vee \forall t \forall w \overline{B}(t, t, w) \vee$
$\vee \exists v A(b, v, v) \equiv \exists v (\forall u \overline{A}(u, b, c) \vee \forall t \forall w \overline{B}(t, t, w) \vee A(b, v, v)) \equiv$
$\equiv \exists v \forall u \forall t \forall w (\overline{A}(u, b, c) \vee \overline{B}(t, t, w) \vee A(b, v, v))$, $v = d$,
$F_1' = \overline{A}(u, b, c) \vee \overline{B}(t, t, w) \vee A(b, d, d)$.

$F_2 = \exists y B(a, y, a) \vee \forall x A(b, x, x) \vee \forall x \forall u B(x, u, b) \equiv \exists y (B(a, y, a) \vee$
$\forall x A(b, x, x) \vee \forall t \forall u B(t, u, b)) \equiv \exists y \forall x \forall t \forall u (B(a, y, a) \vee A(b, x, x) \vee B(t, u, b))$,
$y = l$, $F_2' = B(a, l, a) \vee A(b, x, x) \vee B(t, u, b)$.

$\overline{F_3} = \overline{\forall x A(x, x, c) \to \exists y \exists z A(b, y, z)} \equiv \forall x A(x, x, c) \wedge \forall y \forall z \overline{A}(b, y, z) \equiv$
$\equiv \forall x \forall y \forall z (A(x, x, c) \wedge \overline{A}(b, y, z))$, $F_3' = A(x, x, c) \wedge \overline{A}(b, y, z)$.

$\overline{F_4} = F_4' = \overline{B}(a, a, b)$.

$\Gamma = \{\overline{A}(u, b, c) \vee \overline{B}(t, t, w) \vee A(b, d, d), B(a, l, a) \vee A(b, x, x) \vee B(t, u, b),$

$A(x,x,c),\overline{A}(b,y,z),\overline{B}(a,a,b)\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

Найдем все склейки формул.

$C_1 = \overline{A}(u,b,c) \vee \overline{B}(t,t,w) \vee A(b,d,d)$, $\theta_1 = \{b|u, b|d, b|c\}$,

$C_1\theta_1 = \overline{A}(b,b,b) \vee \overline{B}(t,t,w) \vee A(b,b,b) = \overline{B}(t,t,w)$,

$C_2 = B(a,l,a) \vee A(b,x,x) \vee B(t,u,b)$, $\theta_1 = \{a|t, l|u, a|b\}$,

$C_2\theta_1 = B(a,l,a) \vee A(b,x,x) \vee B(a,l,a) = A(b,x,x) \vee B(a,l,a)$.

$res(A(b,x,x) \vee B(a,l,a), \overline{B}(t,t,w)) = ?$ $\theta_1 = \{a|t, a|l, a|w\}$,

$res = A(b,x,x) \vee B(a,a,a) \vee \overline{B}(a,a,a) = A(b,x,x)$.

$res(A(b,x,x), \overline{A}(b,y,z)) = ?$ $\theta_1 = \{x|y, x|z\}$,

$res = A(b,x,x) \vee \overline{A}(b,x,x) = 0$.

В этом примере исходная формула дана в виде импликации, причем следствие импликации равно единице, т. е. $F \equiv 1$ независимо от посылки. Действительно, $res(A(x,x,c), \overline{A}(b,y,z)) = ?$ $\theta_1 = \{b|x, b|y, c|z\}$, $res = A(b,b,c) \vee \overline{A}(b,b,c) = 0$.

г) $F = (\exists x \forall y \exists z B(x,y,z)) \wedge (\exists u \forall y \forall x A(u,x,y) \vee \forall x \exists z B(x,a,z)) \wedge$
$(\forall z \exists x B(z,a,x) \to \forall u \exists v \forall w \overline{B}(u,v,w)) \to \exists u \exists v \forall w A(u,v,w) \wedge$
$\wedge \exists v \exists w \forall u A(w,v,u) = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \to F_4$.

$F_1 = \exists x \forall y \exists z B(x,y,z)$, $x = b$, $z = f_1(y)$, $F_1' = B(b,y,f_1(y))$.

$F_2 = \exists u \forall y \forall x A(u,x,y) \vee \forall x \exists z B(x,a,z) \equiv \exists u \forall y \forall x A(u,x,y) \vee$
$\vee \forall x \exists u B(x,a,u) \equiv \exists u(\forall y \forall x A(u,x,y) \vee \forall x B(x,a,u)) \equiv$
$\equiv \exists u(\forall y \forall x A(u,x,y) \vee \forall t B(t,a,u)) \equiv \exists u \forall y \forall x \forall t(A(u,x,y) \vee$
$\vee B(t,a,u))$, $u = c$, $F_2' = A(c,x,y) \vee B(t,a,c)$.

$F_3 = \forall z \exists x B(z,a,x) \to \forall u \exists v \forall w \overline{B}(u,v,w) \equiv \exists z \forall x \overline{B}(z,a,x) \vee$
$\vee \forall u \exists v \forall w \overline{B}(u,v,w) \equiv \exists z \forall x \overline{B}(z,a,x) \vee \forall u \exists z \forall w \overline{B}(u,z,w) \equiv$
$\equiv \exists z(\forall x \overline{B}(z,a,x) \vee \forall u \forall w \overline{B}(u,z,w)) \equiv \exists z \forall x \forall u \forall w(\overline{B}(z,a,x) \vee$
$\vee \overline{B}(u,z,w))$, $z = d$, $F_3' = \overline{B}(d,a,x) \vee \overline{B}(u,d,w)$.

$\overline{F_4} = \overline{\exists u\exists v\forall w A(u,v,w)\wedge \exists v\exists w\forall u A(w,v,u)} \equiv \forall u\forall v\exists w\overline{A}(u,v,w)\vee$
$\vee \forall v\forall w\exists u\overline{A}(w,v,u) \equiv \forall u\forall v\exists w\overline{A}(u,v,w)\vee \forall x\forall y\exists w\overline{A}(y,x,w)\equiv$
$\equiv \exists w\left(\forall u\forall v\overline{A}(u,v,w)\vee \forall x\forall y\overline{A}(y,x,w)\right)\equiv$
$\equiv \exists w\forall u\forall v\forall x\forall y\left(\overline{A}(u,v,w)\vee \overline{A}(y,x,w)\right),$
$w = l,\ F_4' = \overline{A}(u,v,l)\vee \overline{A}(y,x,l).$

$\Gamma = \{B(b,y,f_1(y)), A(c,x,y)\vee B(t,a,c), \overline{B}(d,a,x)\vee \overline{B}(u,d,w),$
$\overline{A}(u,v,l)\vee \overline{A}(y,x,l)\}$. Склейки дизъюнктов: $\overline{B}(d,a,x)\vee \overline{B}(u,d,w)$,
$\theta_1 = \{d|u, d|a, x|w\}$, $\overline{B}(d,d,x)\vee \overline{B}(d,d,x) = \overline{B}(d,d,x)$.
$\overline{A}(u,v,l)\vee \overline{A}(y,x,l)$, $\theta_1 = \{y|u, x|v\}$,
$\overline{A}(u,v,l)\vee \overline{A}(y,x,l) = \overline{A}(y,x,l)$.
$res(B(b,y,f_1(y)), \overline{B}(d,d,x)) = ?, \qquad \theta_1 = \{b|d, b|y\}$,
$B(b,y,f_1(y))\theta_1 \vee \overline{B}(d,d,x)\theta_1 = B(b,b,f_1(b))\vee \overline{B}(b,b,x)$,
$\theta_2 = \{f_1(b)|x\}$, $res = B(b,b,f_1(b))\vee \overline{B}(b,b,f_1(b)) = 0$.

Формула F истинна.

д) $F = (\forall u\forall v\forall w A(u,v,w)\vee \forall x\exists y B(x,b,y)\vee \forall u\forall v C(u,v,b))\wedge$
$\wedge\left(\exists x\overline{A}(x,a,b)\vee \forall y\exists z B(a,y,z)\vee \forall v\forall u C(v,u,a)\right)\wedge\left(\forall w\overline{B}(a,b,w)\right)\rightarrow$
$\rightarrow (\forall u\exists v\exists w C(u,v,w)\wedge \exists x\forall y\exists z C(x,y,z)) = F_1\wedge F_2\wedge F_3\rightarrow F_4$.

$F_1 = \forall u\forall v\forall w A(u,v,w)\vee \forall x\exists y B(x,b,y)\vee \forall u\forall v C(u,v,b)\equiv$
$\equiv \exists y(\forall u\forall v\forall w A(u,v,w)\vee \forall x B(x,b,y)\vee \forall t_1\forall t_2 C(t_1,t_2,b))\equiv$
$\equiv \exists y\forall u\forall v\forall w\forall t_1\forall t_2(A(u,v,w)\vee B(x,b,y)\vee C(t_1,t_2,b)),$
$y = d,\ F_1' = A(u,v,w)\vee B(x,b,y)\vee C(t_1,t_2,b)$.

$F_2 = \exists x\overline{A}(x,a,b)\vee \forall y\exists z B(a,y,z)\vee \forall v\forall u C(v,u,a)\equiv \exists x\left(\overline{A}(x,a,b)\vee\right.$
$\left.\vee \forall y B(a,y,x)\vee \forall v\forall u C(v,u,a)\right)\equiv$
$\equiv \exists x\forall y\forall v\forall u\left(\overline{A}(x,a,b)\vee B(a,y,x)\vee C(v,u,a)\right),$
$x = l,\ F_2' = \overline{A}(l,a,b)\vee B(a,y,l)\vee C(v,u,a)$.

$F_3 = \forall w\overline{B}(a,b,w),\ F_3' = \overline{B}(a,b,w)$.

$\overline{F_4} = \overline{\forall u\exists v\exists w C(u,v,w)\wedge \exists x\forall y\exists z C(x,y,z)} \equiv \exists u\forall v\forall w\overline{C}(u,v,w)\vee$

$\vee \forall x \exists y \forall z \overline{C}(x,y,z) \equiv \exists u \left(\forall v \forall w \overline{C}(u,v,w) \vee \forall x \forall z \overline{C}(x,u,z) \right) \equiv$

$\equiv \exists u \forall v \forall w \forall x \forall z \left(\overline{C}(u,v,w) \vee \overline{C}(x,u,z) \right),$

$u = k$, $F_4' = \overline{C}(k,v,w) \vee \overline{C}(x,k,z)$.

$\Gamma = \{ A(u,v,w) \vee B(x,b,d) \vee C(t_1,t_2,b), \overline{A}(l,a,b) \vee B(a,y,l) \vee C(v,u,a),$ $\overline{B}(a,b,w), \overline{C}(k,v,w) \vee \overline{C}(x,k,z) \} = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$. Склейка последнего дизъюнкта из множества Γ: $\theta_1 = \{ k|x, k|v, z|w \}$,

$\overline{C}(k,v,w)\theta_1 \vee \overline{C}(x,k,z)\theta_1 = \overline{C}(k,k,z)$.

$res(C_1, C_2) = ?$

$\theta_1 = \{ l|u, a|v, b|w \}$, $C_1\theta_1 \vee C_2\theta_2 = A(l,a,b) \vee B(x,b,d) \vee C(t_1,t_2,b) \vee$

$\vee \overline{A}(l,a,b) \vee B(a,y,l) \vee C(a,l,a) =$

$= B(x,b,d) \vee C(t_1,t_2,b) \vee B(a,y,l) \vee C(a,l,a)$,

$\theta_2 = \{ a|x, b|y, d|l \}$,

$C_1\theta_1\theta_2 \vee C_2\theta_1\theta_2 = B(a,b,d) \vee C(t_1,t_2,b) \vee B(a,b,d) \vee C(a,l,a) =$

$= B(a,b,d) \vee C(t_1,t_2,b) \vee C(a,l,a)$, $\theta_3 = \{ a|t_1, l|t_2, a|b \}$,

$C_1\theta_1\theta_2\theta_3 \vee C_2\theta_1\theta_2\theta_3 = B(a,a,d) \vee C(a,l,a) \vee C(a,l,a) =$

$= B(a,a,d) \vee C(a,l,a)$.

$res(B(a,a,d) \vee C(a,l,a), C_3) = ?$ $\theta_1 = \{ a|b, d|w \}$,

$res = B(a,a,d) \vee C(a,l,a) \vee \overline{B}(a,a,d) = C(a,l,a)$.

$res(C(a,l,a), \overline{C}(k,k,z)) = ?$ $\theta_1 = \{ a|k, a|l, a|z \}$,

$res = C(a,a,a) \vee \overline{C}(a,a,a) = 0$. F — истинная формула.

е) $F = (\exists y \forall z B(y,a,z) \to \forall u \forall v A(b,v,u)) \wedge (\forall u \forall v A(v,u,a) \vee$

$\vee \forall y \exists u \forall z B(u,y,z)) \wedge (\forall z B(z,z,z)) \to$

$\to ((\exists y B(a,y,b) \wedge \exists x \forall y \exists z A(x,y,z)) \vee$

$\vee \exists u \forall v \exists w A(u,v,w)) = F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \to F_4 \vee F_5$.

$F_1 = \exists y \forall z B(y,a,z) \to \forall u \forall v A(b,v,u) \equiv \forall y \exists z \overline{B}(y,a,z) \vee$

$\vee \forall u \forall v A(b,v,u) \equiv \exists z \left(\forall y \overline{B}(y,a,z) \vee \forall u \forall v A(b,v,u) \right) \equiv$

$\equiv \exists z \forall y \forall u \forall v \left(\overline{B}(y,a,z) \vee A(b,v,u) \right),$

$z = c$, $F_1' = \overline{B}(y,a,c) \vee A(b,v,u)$.

$$F_2 = \forall u \forall v A(v,u,a) \vee \forall y \exists u \forall z B(u,y,z) \equiv$$
$$\equiv \exists t(\forall u \forall v A(v,u,a) \vee \forall y \forall z B(t,y,z)) \equiv$$
$$\equiv \exists t \forall u \forall v \forall y \forall z (A(v,u,a) \vee B(t,y,z)),\ t = d,$$
$$F_2' = A(v,u,a) \vee B(d,y,z).$$

$F_3 = \forall z B(z,z,z)$, $F_3' = B(z,z,z)$.

$$\overline{F_4} = \overline{\exists y B(a,y,b) \wedge \exists x \forall y \exists z A(x,y,z)} \equiv \forall y \overline{B}(a,y,b) \vee$$
$$\vee \forall x \exists y \forall z \overline{A}(x,y,z) \equiv \exists t(\forall y \overline{B}(a,y,b) \vee \forall x \forall z \overline{A}(x,t,z)) \equiv$$
$$\equiv \exists t \forall y \forall x \forall z (\overline{B}(a,y,b) \vee \overline{A}(x,t,z)),$$

$t = l$, $F_4' = \overline{B}(a,y,b) \vee \overline{A}(x,l,z)$.

$$\overline{F_5} = \overline{\exists u \forall v \exists w A(u,v,w)} \equiv \forall u \exists v \forall w \overline{A}(u,v,w),\ v = f_1(u),$$
$$F_5' = \overline{A}(u, f_1(u), w).$$

$$\Gamma = \{\overline{B}(y,a,c) \vee A(b,v,u), A(v,u,a) \vee B(d,y,z), B(z,z,z), \overline{B}(a,y,b) \vee$$
$$\vee \overline{A}(x,l,z), \overline{A}(u,f_1(u),w)\} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}.$$

$res(C_1, C_2) = ?$ $\theta_1 = \{d|u, d|a, c|z\}$,

$$C_1\theta_1 \vee C_2\theta_1 = \overline{B}(d,d,c) \vee A(b,v,u) \vee A(v,u,a) \vee$$
$$\vee B(d,d,c) = A(b,v,u) \vee A(v,u,a),\ \theta_2 = \{b|v, b|u\},$$
$$C_1\theta_1\theta_2 \vee C_2\theta_1\theta_2 = A(b,b,b) \vee A(b,b,a),$$
$$\theta_3 = \{b|a\},\ res(C_1, C_2) = A(b,b,b).$$

$res(C_3, C_4) = ?$ z — общая переменная, заменим z на t.

$$C_3 = B(z,z,z),\ C_4 = \overline{B}(a,y,b) \vee \overline{A}(x,l,t), \theta_1 = \{a|z, a|y, a|b\},$$
$$C_3\theta_1 \vee C_4\theta_1 = B(a,a,a) \vee \overline{B}(a,a,a) \vee \overline{A}(x,l,t) \equiv \overline{A}(x,l,t).$$

$res(A(b,b,b), \overline{A}(x,l,t)) = ?$ $\theta_1 = \{b|x, b|l, b|t\}$,

$res = A(b,b,b) \vee \overline{A}(b,b,b) = 0$. Исходная формула F — истинна.

Глава 10

Теория алгоритмов

10.1. Ответы и решения практического занятия № 11

5.4.1.

а) функция ψ получается суперпозицией из f и I_n^m:
$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\big(I_n^2(x_1, x_2, \ldots, x_n), I_n^3(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, I_n^n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$
$I_n^1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)$;

б) функция φ — суперпозиция f и I_{n-1}^m: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) =$
$= f\big(I_{n-1}^1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), I_{n-1}^1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \ldots, I_{n-1}^{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\big)$.

5.4.2.

а) $f(x) = x + n$, функция $f(x)$ — суперпозиция функций $\lambda(x)$;
$$f(x) = \underbrace{(((x+1)+1)+\ldots+1)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\lambda(\lambda(\ldots\lambda}_{n \text{ раз}}(x)\ldots));$$

б) $f(x) = n$, функция $f(x)$ — суперпозиция функций $\lambda(x)$ и $O(x)$;
$$f(x) = \underbrace{(((0+1)+1)+\ldots+1)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{\lambda(\lambda(\ldots\lambda}_{n \text{ раз}}(O(x))\ldots));$$

в) $f(x, y) = x + y$. Применим схему примитивной рекурсии функции двух переменных: $\begin{cases} f(x,0) = \varphi(x), \\ f(x, y+1) = \psi(x, y, f(x, y)). \end{cases}$ Роль $\varphi(x)$ может играть функция $I_1^1(x) = x$,
роль $\psi(x, y, z) = \lambda(I_3^3(x, y, z)) = z + 1 = 1 + f(x, y)$,
т. е. $f(x,0) = x = x + 0$, $f(x,1) = \psi(x,0, f(x,0)) = 1 + f(x,0) = 1 + x$,
$f(x,2) = \psi(x,1, f(x,1)) = 1 + f(x,1) = 2 + x$ и т. д.

5.4.3.

а) функцию $|x-y|$ можно легко выразить через усеченную разность. Действительно, $|x-y| = \begin{cases} x-y, x \geq y, \\ y-x, x < y, \end{cases}$ а $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, x \geq 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$ Тогда

$$\left(x \dot{-} y\right) + \left(y \dot{-} x\right) = \begin{cases} x-y = x \dot{-} y, y \dot{-} x = 0, x \geq y, \\ y-x = y \dot{-} x, x \dot{-} y = 0, x < y, \end{cases}$$

следовательно, $|x-y| = \left(x \dot{-} y\right) + \left(y \dot{-} x\right)$. Функция $|x-y|$ примитивно рекурсивна, ибо представляет собой суперпозицию примитивно рекурсивных функций;

б) $\tau(x)$ — число делителей числа x, $\tau(0) = 0$. Воспользуемся функцией $\text{rest}(x, y)$. $\text{rest}(x, y) = 0$, если x делится на y без остатка, и $\text{rest}(x, y) > 0$, если не делится без остатка. Таким образом, если i — делитель x, то $\text{rest}(x, i) = 0$. Нужно подсчитать лишь число нулей при $i = 1, 2, \ldots, x$. Это можно сделать с помощью функции $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x > 0 \end{cases}$. Итак, $\tau(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{\text{sgn}} \text{rest}(x, i)$. Функцию $\tau(x)$ удалось представить суперпозицией примитивно рекурсивных функций, следовательно, сама она также примитивно рекурсивна;

в) $\pi(x)$ — число простых чисел, не превосходящих x. Воспользуемся только что полученной функцией $\tau(x)$. Все простые числа делятся без остатка только на себя и единицу; составные же имеют больше делителей. Если число делителей числа уменьшить на два, то для простых чисел получим нуль. Осталось как в предыдущем пункте (б) подсчитать число нулей. Следовательно, $\pi(x) = \sum_{i=1}^{x} \overline{\text{sgn}}\left(\left|\tau(i) - 2\right|\right)$, при этом единица не считается простым числом. Таким образом, опять удалось представить функцию $\pi(x)$ в виде суперпозиции функций $x \pm y$, $|x|$, $\overline{\text{sgn}}(x)$, $\tau(x)$, которые примитивно рекурсивны;

г) $lh(x)$ — число простых делителей числа x, $lh(0)=0$. Эта функция по строению похожа на предыдущую $\pi(x)$. Если y — простое число, то $\tau(y)=2$, если при этом аргумент x делится на это простое число без остатка, то $\mathrm{rest}(x,y)=0$, в противном случае сумма $|\tau(y)-2|+\mathrm{rest}(x,y)>0$.

Тогда $lh(x)=\sum_{i=1}^{x}\overline{\mathrm{sgn}}(|\tau(i)-2|+\mathrm{rest}(x,i))$. $lh(x)$ — примитнвно рекурсивна, т. к. представляет собой суперпозицию примитивно рекурсивных функций;

д) здесь не обойтись без привлечения операции минимизации. Пусть $\pi(y)$ — число простых чисел, не превосходящих y. Тогда поскольку в данной функции $p(x)$ нумерация простых чисел начинается с нуля, то уравнение $\pi(y)-(x+1)=0$ выполняется лишь тогда, когда очередное простое число будет x-е по счету.

Действительно, пусть, например, $x=4$. Четвертое простое число — это 11. $p(4)=\mu_y[|\pi(y)-(4+1)|=0]$, $y=0$, $|\pi(0)-5|=5\neq0$,
$y=1$, $|\pi(1)-5|=|0-5|=5\neq0$, $y=2$, $|\pi(2)-5|=|1-5|=4\neq0$,
$y=3$, $|\pi(3)-5|=|2-5|=3\neq0$, $y=4$, $|\pi(4)-5|=|2-5|=3\neq0$,
$y=5$, $|\pi(5)-5|=|3-5|=2\neq0$, $y=6$, $|\pi(6)-5|=|3-5|=2\neq0$,
$y=7$, $|\pi(7)-5|=|4-5|=1\neq0$, $y=8$, $|\pi(8)-5|=|4-5|=1\neq0$,
$y=9$, $|\pi(9)-5|=|4-5|=1\neq0$, $y=10$, $|\pi(10)-5|=|4-5|=1\neq0$,
$y=11$, $|\pi(11)-5|=|5-5|=0$, $y=11$, $p(4)=11$.

Поскольку использовалась операция минимизации, необходимо применить теорему 5.3. Для этого надо составить примитивно рекурсивную мажоранту $\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. В нашем случае $\mu_y[|\pi(y)-(x+1)|=0]\leq\alpha(x)$. Проще всего взять быстро возрастающую показательную функцию, например, 2^{2^x}. Эта функция примитивно рекурсивна (без доказательства). Тогда так как $\mu_y[|\pi(y)-(x+1)|=0]\leq 2^{2^x}$, то $p(x)=\mu_y[|\pi(y)-(x+1)|=0]$ — примитивно рекурсивная функция;

е) эта функция определяется аналогично $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ (*см. разд. 5.3*).

Так как $\left[\sqrt{x}\right]=\mu_z\left[\operatorname{sgn}\left((z+1)^2\dot{-}x\right)=1\right]\le x$,

то $\left[\sqrt{2}x\right]=\mu_z\left[\operatorname{sgn}\left((z+1)^2\dot{-}2x^2\right)=1\right]\le 2x$. В качестве мажоранты можно взять $2x$, т. к. $\sqrt{2}x\le 2x$. Вычислим, например, $\lfloor\sqrt{2}\cdot 4\rfloor=5$,

$z=0,\ 1\dot{-}32=0,\ \operatorname{sgn}0=0\ne 1,\ z=1,\ 4\dot{-}32=0,\ \operatorname{sgn}0=0\ne 1,$

$z=2,\ 9\dot{-}32=0,\ \operatorname{sgn}0=0\ne 1,\ z=3,\ 16\dot{-}32=0,\ \operatorname{sgn}0=0\ne 1,$

$z=4,\ 25\dot{-}32=0,\ \operatorname{sgn}0=0\ne 1,\ z=5,\ 36\dot{-}32=4,\ \operatorname{sgn}4=1,$

$z=\lfloor\sqrt{2}\times 4\rfloor=5$. По теореме 5.3 функция примитивно рекурсивна;

ж) C_x^y должна быть целочисленной функцией, поэтому определим ее через функции $[x]$, $\operatorname{sgn}(x)$ и $\overline{\operatorname{sgn}}(x)$ таким образом, чтобы $C_x^y=1$ при $y\ge x$. $C_x^y=\left[\dfrac{x!}{y!|x-y|!}\right]\cdot\operatorname{sgn}\left(x\dot{-}y\right)+\overline{\operatorname{sgn}}\left(x\dot{-}y\right)$. Функция C_x^y получена суперпозицией функций $x!$, $[x]$, $\operatorname{sgn}(x)$, $\overline{\operatorname{sgn}}(x)$, $|x-y|$, $x+y$, $x\dot{-}y$, поэтому является примитивио рекурсивной.

5.4.4. Пусть $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ получена суперпозицией и по схемам примитивной рекурсии с использованием функций $O(x)=0$ и $I_n^m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Тогда для этой функции должны быть справедливыми следующие соотношения:

а) $f(0,0,\ldots,0)=0$;

б) если $x_i\le 1, i=\overline{1,n}$, то $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\le 1$.

Рассмотрим $f_1(x)=x+1$. Эта функция не удовлетворяет условию (а); $f_2(x)=2x$ не удовлетворяет условию (б) при $x=1$.

5.4.5. Пары натуральных чисел можно разложить в простую последовательность разными способами. Рассмотрим так называемый канторовский способ: (0,0); (0,1), (1,0); (0,2), (1,1), (2,0); (0,3), (1,2), (2,1), (3,0);... В этой последовательности пары чисел идут в порядке возрастания суммы их членов, а из пар с одинаковой суммой членов раньше идет пара с меньшим первым членом.

Начнем нумерацию пар с нуля и обозначим через $c(x,y)$ номер пары (x,y) в этой последовательности. Число $c(x,y)$ называется *канторовским номером пары* (x,y). Обозначим через $l(n)$ и $r(n)$ левый и правый номер пары с номером n и найдем вид функций $c(x,y)$, $l(n)$ и $r(n)$.

Пара (x,y) находится на отрезке $(0,x+y),(1,x+y),...,(x+y),...,(x+y-1,1),(x+y,0)$ на x-м месте после пары $(0,x+y)$. Перед парой $(0,x+y)$ в канторовской последовательности находятся $x+y$ отрезков (отделены друг от друга точкой с запятой), содержащих всего $1+2+3+...+(x+y)$ пар. Поэтому

$$c(x,y)=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}.$$

Если теперь $x=l(n)$, $y=r(n)$ и $n=c(x,y)$, то $2n=(x+y)^2+3x+y$,

$$8n+1=4(x+y)^2+12x+4y+1=(2x+2y)^2+12x+4y+1=4x^2+8xy+$$
$$+4y^2+4x+4y+1+8x=(2x+2y+1)^2+8=(2x+2y+3)^2-8y-8,$$

т. е. $(2x+2y+1)^2+8x=8n+1=(2x+2y+3)^2-8y-8$. Уменьшим левое выражение и увеличим правое:

$$(2x+2y+1)^2\le 8n+1<(2x+2y+3)^2,$$
$$2x+2y+1\le\left\lfloor\sqrt{8n+1}\right\rfloor<2x+2y+3$$

или $x+y+1\le\dfrac{\left\lfloor\sqrt{8n+1}\right\rfloor+1}{2}<x+y+2$.

Следовательно, $x+y+1=l(n)+r(n)+1=\left[\dfrac{\left\lfloor\sqrt{8n+1}\right\rfloor+1}{2}\right]$.

Пусть $A=\left[\dfrac{\left\lfloor\sqrt{8n+1}\right\rfloor+1}{2}\right]$, тогда $x+y=A-1$ и из уравнения

$c(x,y)=\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$ получаем $2x=2n-A(A-1)$, т. е. $x = n - \frac{A(A-1)}{2} = l(n) = n \dot{-} \frac{1}{2}\left[\frac{\left[\sqrt{8n+1}\right]+1}{2}\right]\left[\frac{\left[\sqrt{8n+1}\right]\dot{-}1}{2}\right]$,

$A = x + y + 1$,

$$y = (A-1) - x = r(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left[\sqrt{8n+1}\right]\dot{-}1}{2}\right]\left[\frac{\left[\sqrt{8n+1}\right]+5}{2}\right]\dot{-}n.$$

Итак, $\begin{cases} c(x,y) = n = \dfrac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}, \\ x = l(n) = n \dot{-} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\left[\sqrt{8n+1}\right]+1}{2}\right]\left[\dfrac{\left[\sqrt{8n+1}\right]\dot{-}1}{2}\right], \\ y = r(n) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\left[\sqrt{8n+1}\right]\dot{-}1}{2}\right]\left[\dfrac{\left[\sqrt{8n+1}\right]+5}{2}\right]\dot{-}n. \end{cases}$

Видно, что функции $c(x,y)$, $l(n)$ и $r(n)$ выражаются с помощью подстановок через элементарные арифметические функции $x+y$, $x \dot{-} y$, $\left[\sqrt{x}\right]$, $\left[\frac{x}{2}\right]$, следовательно, они примитивно рекурсивны.

Кроме того, из самого определения функций $c(x,y)$, $l(n)$ и $r(n)$ как функций, связанных с нумерацией пар, вытекают следующие тождества: $c(l(n), r(n)) = n$, $l(c(x,y)) = x$, $r(c(x,y)) = y$.

5.4.6. Рассмотрим схему возвратной рекурсии

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},0)=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}), \\ f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y+1)=\psi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y,f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},\alpha_1(y+1)), \\ \quad f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},\alpha_2(y+1)),\dots,f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},\alpha_s(y+1)))= \\ \quad =\psi(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},y,z_1,z_2,\dots,z_s), \end{cases}$$

где $\alpha_1(x),\alpha_2(x),\dots,\alpha_s(x)$ — всюду определенные функции, удовлетворяющие всем значениям x при $\alpha_i(x+1)\le x$, $i=\overline{1,s}$.

Последовательность чисел Фибоначчи определяется уравнениями

$$\begin{cases} f(0)=0, f(1)=1, \\ f(n+2)=f(n)+f(n+1) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(0)=0, \\ f(n+1)=f(n)+f\left(n\dot{-}1\right)+\overline{\mathrm{sg}}n. \end{cases}$$

Действительно, $f(0)=0$. $f(1)=f(0)+f\left(0\dot{-}1\right)+\overline{\mathrm{sg}}0=0+0+1=1$,

$f(2)=f(1)+f\left(1\dot{-}1\right)+\overline{\mathrm{sg}}1=1+0+0=1$,

$f(3)=f(2)+f\left(2\dot{-}1\right)+\overline{\mathrm{sg}}2=1+1+0=2$ и т. д.

Отсюда видно, что функция $f(n)$ возникает по схеме возвратной рекурсии из функций $\varphi(x)=0$, $\psi(x,y,z_1,z_2)=\overline{\mathrm{sg}}y+z_1+z_2$ и функций $\alpha_1(y)=y\dot{-}1$, $\alpha_2(y)=y\dot{-}2$. Так как все эти функции примитивно рекурсивны, то функция $f(n)$ также примитивно рекурсивна.

5.4.7.

а) в операции минимизации (*см. разд. 5.2*) $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)=$ $=\mu_y[f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=b]$ функция $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ считается неопределенной, если окажется, что для всех y $f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)\ne b$ или для какого-то y $f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ не определено.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\mu_y[\lambda(x)+y=0]$.

$y=0$, $\lambda(x)+y=x+1+0\ne 0$, $y=1$, $\lambda(x)+y=x+1+1\ne 0$ и т. д.

Очевидно, что для любого y $\lambda(x)+y\neq 0$, т. е. $\varphi(x)$ — неопределенная функция. Использована операция минимизации, следовательно, фуикция $\varphi(x)$ частично рекурсивна;

б) пусть $f(x,y)=\mu_z\left[|x-(z+y)|=0\right]$ и, например, $x=4$, $y=2$. Тогда $z=0$, $|x-(z+y)|=|4-(0+2)|=|4-2|=2\neq 0$,

$z=1$, $|x-(z+y)|=|4-(1+2)|=|4-3|=1\neq 0$,

$z=2$, $|x-(z+y)|=|4-(2+2)|=|4-4|=0$,

т. е. $f(x,y)=x-y=z=2$.

Если же $x=2$, $y=4$, то $z=0$, $|x-(z+y)|=|2-(0+4)|=2\neq 0$, $z=1$, $|2-(1+4)|=3\neq 0$, $z=2$, $|2-(2+4)|=4\neq 0$ и т. д., т. е. $f(x,y)=x-y$ не определена. Функция $f(x,y)$ вычисляется через оператор минимизации, значит, частично рекурсивна;

в) $f(x,y)=\begin{cases} z, \; z^y=x, \\ \text{не определена в остальных случаях.}\end{cases}$

Пусть $f(x,y)=\mu_z\left[\left|x-z^y\right|=0\right]$. Функция определена и вычисляется так же, как в пункте (б).

5.4.8. С помощью нумераций пар натуральных чисел легко получить нумерации троек, четверок и т. д. Введем следующие функции: $c^3(x_1,x_2,x_3)=c(c(x_1,x_2),x_3)$,

$c^4(x_1,x_2,x_3,x_4)=c^3(c(x_1,x_2),x_3,x_4),\ldots,$

$c^{n+1}(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})=c^n(c(x_1,x_2),x_3,\ldots,x_{n+1})$.

Число $c^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется *канторовским номером n-ки чисел* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Если $c^n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=t$, то $x_n=r(t)$, $x_{n-1}=r(l(t)),\ldots,$ $x_2=r(l(\ldots(l(t))\ldots))$, $x_1=l(l(\ldots(l(t))\ldots))$.

Действительно, пусть, например, $n=3$.
Тогда $c^3(x_1,x_2,x_3)=c(c(x_1,x_2),x_3)=t$, $x_3=r(c(x_1,x_2),x_3)=r(t)$, $c(x_1,x_2)=l(t)$, $x_2=r(l(t))$ и $x_1=l(l(t))$.

Введем обозначения $c_{n,n}(t)=x_n$, $c_{n,n-1}(t)=x_{n-1},\ldots,$ $c_{n,1}(t)=x_1$. Тогда $c^n(c_{n,1}(t),c_{n,2}(t),\ldots,c_{n,n}(t))=t$, $c_{n,i}(c^n(x_1,x_2,\ldots,x_n))=x_i$, $i=\overline{1,n}$. Эти формулы аналогичны соответствующим формулам задачи 5.4.5.

Для получения основного результата задачи введем вспомогательную функцию $\psi(t,y)=c^{n+2}\left(c_{n,1}(t),\dots,c_{n,n}(t),y,f\left(c_{n,1}(t),\dots,c_{n,n}(t),y\right)\right)$. Пусть функция $f(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1})$ задана примитивной рекурсией через функции g и h таким образом:

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_n,0)=g(x_1,x_2,\dots,x_n), \\ f(x_1,x_2,\dots,x_n,y+1)=h(x_1,x_2,\dots,x_n,y,f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)). \end{cases}$$

Из функции $\psi(t,y)$ имеем

$$f\left(c_{n,1}(t),c_{n,2}(t),\dots,c_{n,n}(t),y\right)=f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=c_{n+2,n+2}(\psi(t,y))=$$
$$=c_{n+2,n+2}\left(\psi\left(c^n(x_1,x_2,\dots,x_n),y\right)\right).$$

Тогда $\psi(t,0)=c^{n+2}\left(c_{n,1}(t),c_{n,2}(t),\dots,c_{n,n}(t),0,g\left(c_{n,1}(t),c_{n,2}(t),\dots,c_{n,n}(t)\right)\right)$, а $\psi(t,y+1)=c^{n+2}\left(c_{n,1}(t),c_{n,2}(t),\dots,c_{n,n}(t),y+1,h\left(c_{n,1}(t),c_{n,2}(t),\dots,c_{n,n}(t),y,\right.\right.$ $\left.\left.c_{n+2,n+2}(\psi(t,y))\right)\right)$. Так как $\psi(t,y+1)=\Phi(\psi(t,y))$, где функция Φ имеет вид $\Phi(u)=$

$$=c^{n+2}\left(c_{n+2,1}(u),c_{n+2,2}(u),\dots,c_{n+2,n+1}(u)+1,h\left(c_{n+2,1}(u),c_{n+2,2}(u),\dots,c_{n+2,n+2}(u)\right)\right).$$

Таким образом, функция f получается из функций g,h,l,r,c,O,λ и I_n^m подстановкой и специальной рекурсией вида $\psi(x,0)=G(x)$, $\psi(x,y+1)=\Phi(\psi(x,y))$, второе из уравнений которой представляет собой итерацию, т. е. функция ψ получена из Φ с помощью итерации (*см. разд. 5.2*).

Заменим теперь функцию ψ функцией F посредством рекурсии $F(x,0)=x$, $F(x,y+1)=\Phi(F(x,y))$. Так как для $\psi(x,y)$ и $F(x,y)$ справедливы соотношения:

$$\psi(x,0)=G(x),$$
$$\psi(x,1)=\Phi(\psi(x,0)),$$
$$\psi(x,2)=\Phi(\psi(x,1))=\Phi(\Phi(\psi(x,0))),$$

....

$$\psi(x,y)=\Phi(\Phi(\dots\Phi(\psi(x,0))\dots))=\Phi(\Phi(\dots\Phi(G(x))\dots));$$
$$F(x,0)=x,$$
$$F(x,1)=\Phi(F(x,0)),$$

$F(x,2)=\Phi(F(x,1))=\Phi(\Phi(F(x,0)))$,

....

$F(x,y)=\Phi(\Phi(\ldots\Phi(F(x,0))\ldots))=\Phi(\Phi(\ldots\Phi(x)\ldots))$, то $\psi(x,y)=F(G(x),y)$. Таким образом, вместо формул

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\ldots,x_n,0)=g(x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y+1)=h(x_1,x_2,\ldots,x_n,y,f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)) \end{cases}$$ функция f

получается из g,h,l,r,c,O,λ и I_n^m подстановкой, рекурсией $\psi(x,0)=G(x)$, $\psi(x,y+1)=\Phi(\psi(x,y))$ и рекурсией $F(x,0)=x$, $F(x,y+1)=\Phi(F(x,y))$, где $\psi(x,y)=F(G(x),y)$,

$G(x)=\psi(x,0)=c^{n+2}(c_{n,1}(x),c_{n,2}(x),\ldots,c_{n,n}(x),0,g(c_{n,1}(x),c_{n,2}(x),\ldots,c_{n,n}(x)))$.

5.4.9.

а) функция $f(x)$ получается из функции $g(x)$ с помощью итерации $f(x)=ig(x)$, если $\begin{cases} f(0)=0, \\ f(x+1)=g(f(x)). \end{cases}$ По определению $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, x\neq 0, \\ 0, x=0. \end{cases}$ Рассмотрим левую часть формулы $i\left(1+\left[\frac{x}{2}\right]\right)=\operatorname{sgn} x$. Здесь $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $g(x)=1+\left[\frac{x}{2}\right]$. Рассчитаем несколько значений функции $f(x+k)$: $x=0$, $f(0)=\operatorname{sgn} 0=0$,

$k=1$, $f(0+1)=g(f(0))=1+\left[\frac{\operatorname{sgn} 0}{2}\right]=1+0=1$,

$k=2$, $f(1+1)=g(f(1))=1+\left[\frac{\operatorname{sgn} 1}{2}\right]=1+0=1$.

Очевидно, что $\left[\frac{\operatorname{sgn} k}{2}\right]=0$ при любом $k>0$, т. е. формула $\operatorname{sgn} x=i\left(1+\left[\frac{x}{2}\right]\right)$ справедлива;

б) $i\left(x+1+\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x}{2}\right]\right)=2x\dot{-}1$. $2x\dot{-}1=\begin{cases} 0, x=0, \\ 2x-1, x>0. \end{cases}$

$f(x)=2x\dot{-}1$, $g(x)=x+1+\left[\frac{x+1}{2}\right]-\left[\frac{x}{2}\right]$, функция $f(x)=2x\dot{-}1$ удовлетворяет условию $f(0)=0$. Вычислим несколько значений функции $g(f(x))$.

$g(f(0+1))=f(0)+1+\left[\frac{f(0)+1}{2}\right]-\left[\frac{f(0)}{2}\right]=$

$=0+1+\left[\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{0}{2}\right]=0+1+0+0=1,$

$g(f(1+1))=(2\cdot 1-1)+1+\left[\frac{2\cdot 1-1+1}{2}\right]-\left[\frac{2\cdot 1-1}{2}\right]=$

$=2+1-0=2\cdot 2-1=3,$

$g(f(2+1))=(2\cdot 2-1)+1+\left[\frac{2\cdot 2-1+1}{2}\right]-\left[\frac{2\cdot 2-1}{2}\right]=$

$=4+2-1=2\cdot 3-1=5,$

$g(f(3+1))=(2\cdot 3-1)+1+\left[\frac{2\cdot 3-1+1}{2}\right]-\left[\frac{2\cdot 3-1}{2}\right]=$

$=6+3-2=2\cdot 4-1=7$ и т. д.

Очевидно, что исходная формула верна;

в) $i\left(x+1+\left\lfloor\sqrt{4x+1}\right\rfloor\right)=x^2+x$. $f(x)=x^2+x$, $f(0)=0$, $g(x)=x+1+\left\lfloor\sqrt{4x+1}\right\rfloor$,

$f(x+1)=g(f(x))=(x^2+x)+1+\left\lfloor\sqrt{4(x^2+x)+1}\right\rfloor$. Доказательство аналогично пунктам (а) и (б).

5.4.10.

а) $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, x\neq 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$ Если $f(x)$ может быть получена из $g(x)$ с помощью итерации, то $\begin{cases}f(0)=0,\\ f(x+1)=g(f(x)).\end{cases}$ Тогда $\operatorname{sgn} x=i\lambda(0)$, действительно, $x=0, \operatorname{sgn} x=\operatorname{sgn} 0=0$,

$x=1$, $\operatorname{sgn}(0+1)=\lambda(\operatorname{sgn} 0)=\lambda(0)=0+1=1$,

$x=2$, $\operatorname{sgn}(1+1)=\lambda(\operatorname{sgn} 0)=\lambda(0)=0+1=1$ и т. д.

б) $f(x)=\overline{\mathrm{sgn}}(x)=\begin{cases}1, x=0,\\ 0, x>0\end{cases}$ или $\overline{\mathrm{sgn}}(x)=1\dot{-}x$.

Так как $f(0)=\overline{\mathrm{sgn}}(0)=1$, то операция итерации не подходит. Рассмотрим несколько значений функции $q(x)$, приведенных в табл. 10.1.

Таблица 10.1

x	$q(x)$	x	$q(x)$	x	$q(x)$
0	0	4	0	8	4
1	0	5	1	9	0
2	1	6	2	10	1
3	2	7	3	11	2

Таким образом, можно использовать функцию $q(x)$, подобрав ее аргумент y так, чтобы при $y=0$, $q(0)=1$, а для всех остальных значений y должно быть $q(y)=0$.

Если, например, $y=2+2\mathrm{sgn}(x)$, то эта задача выполиеиа. Итак, $\overline{\mathrm{sgn}}(x)=q(2+2\mathrm{sgn}(x))$;

в) $I_n^m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=i\lambda(x_m)$. В самом деле, $f(0)=I_n^0(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$,
$f(0+1)=\lambda(I_n^{0+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n))=x_1$,
$f(1+1)=\lambda(I_n^{1+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n))=x_2$ и т. д;

г) $f(x)=ax+by+c$. Так как функция $I_n^m(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ сама может быть получена с помощью операции итерирования из функции $\lambda(x)$ (*см. п. (в)*), используем эту функцию в суперпозиции. Очевидно, $x=I_2^1(x,y)$, $y=I_2^2(x,y)$, тогда

$$ax+by+c=\underbrace{I_2^1(x,y)+I_2^1(x,y)+\ldots+I_2^1(x,y)}_{a\text{ раз}}+\underbrace{I_2^2(x,y)+\ldots+I_2^2(x,y)}_{b\text{ раз}}+\underbrace{\lambda(0)+\ldots+\lambda(0)}_{c\text{ раз}};$$

д) $x^2=\dfrac{i\left(x+2\left\lfloor\sqrt{x^2}\right\rfloor+1\right)}{g(x)=x+2\left\lfloor\sqrt{x^2}\right\rfloor+1}$. Действительно, $f(x)=x^2$,

$$f(0)=0,\ f(0+1)=1=0^2+2\left\lfloor\sqrt{0^2}\right\rfloor+1=1,$$
$$f(1+1)=4=1^2+2\left\lfloor\sqrt{1^2}\right\rfloor+1=4,\quad f(2+1)=9=2^2+2\left\lfloor\sqrt{2^2}\right\rfloor+1=9$$
и т. д.

10.2. Ответы и решения практического занятия № 12

5.8.1. Исходный алфавит $\mathbf{A}=\{\underset{1}{A},\underset{2}{B},\underset{3}{C}\}$, $p=3$. $F(\Lambda)=BC$,

$F(\Lambda C)=H_3(\Lambda,F(\Lambda))=I_2^1(\Lambda,F(\Lambda))=\Lambda$. Далее по определению $F(CB)=H_2(C,F(C))=S_3(C)=CC$, $F(CBA)=H_1(CB,F(CB))=B$.

Найдем теперь все представляющие функции.

$g(x)=c(G(\mathbf{K}x))=c(BC)=3\cdot p^0+2\cdot p^1=3+2\cdot 3=9$,

$g(x)=9=\mathrm{const}$,

$h_1(x,y)=c(H_1(\mathbf{K}x,\mathbf{K}y))=i$, где i — номер буквы алфавита $\mathbf{A}$,

$h_2(x,y)=c(H_2(\mathbf{K}x,\mathbf{K}y))=c(S_3(\mathbf{K}x))=pc(\alpha)+3=3x+3$,

$h_3(x,y)=c(H_3(\mathbf{K}x,\mathbf{K}y))=c(I_2^1(\mathbf{K}x,\mathbf{K}y))=c(\alpha)=x$.

Итак, представляющие функции имеют вид:

$$\begin{cases} f(0)=9,\\ f(3x+i)=h_i(x,f(x))=h_i(x,y), i=1,2,3 \end{cases}\text{ или}$$

$$\begin{cases} f(0)=9,\\ f(3x+1)=h_1(x,f(x))=i,\\ f(3x+2)=h_2(x,f(x))=3x+3,\\ f(3x+3)=h_3(x,f(x))=x, \end{cases}$$

где i — номер последней буквы рассматриваемого слова в алфавите $\mathbf{A}$.

Определим несколько номеров слов и значений представляющих функций.

$$x=0,\ \begin{cases} i=1,\ f(1)=h_1(0,f(0))=h_1(0,9)=0,\\ i=2,\ f(2)=h_2(0,f(0))=h_2(0,9)=3\cdot 0+3=3,\\ i=3,\ f(3)=h_3(0,f(0))=h_3(0,9)=0, \end{cases}$$

$$x=1,\ \begin{cases} i=1,\ f(4)=h_1(1,f(1))=h_1(1,i)=i,\\ i=2,\ f(5)=h_2(1,f(1))=h_2(1,i)=3\cdot 1+3=6,\\ i=3,\ f(6)=h_3(1,f(1))=h_3(1,i)=1,\end{cases}$$

$$x=2,\ \begin{cases} i=1,\ f(7)=h_1(2,f(2))=h_1(2{,}3)=i,\\ i=2,\ f(8)=h_2(2,f(2))=h_2(2{,}3)=9,\\ i=3,\ f(9)=h_3(2,f(2))=h_3(2{,}3)=2,\end{cases}$$

$$x=3,\ \begin{cases} i=1,\ f(10)=h_1(3,f(3))=h_1(3{,}0)=i,\\ i=2,\ f(11)=h_2(3,f(3))=h_2(3{,}0)=12,\\ i=3,\ f(12)=h_3(3,f(3))=h_3(3{,}0)=3.\end{cases}$$

$F(\Lambda)=BC$, a, $c(\Lambda)=0$, $g(0)=9$; $F(C)=H_3(\Lambda,F(\Lambda))=\Lambda$,

$c(F(C))=c(\Lambda)=0$, $c(F(\Lambda))=9$, $h_3(0{,}9)=0$;

$F(CB)=H_2(C,F(C))=CC$, $c(CC)=3+3\cdot 3=12$, $c(C)=3$,

$c(F(C))=0$, $h_2(3{,}0)=12$; $F(CBA)=H_1(CB,F(CB))=B$, $c(B)=2$,

$c(CB)=2+3\cdot 3=11$, $c(A)=1$,

$h_1(11{,}1)=i\big|_{i=2,\ \text{B- вторая буква алфавита A}}=2$.

5.8.2. Здесь $p=5$. $F(\Lambda,\beta,\gamma)=\gamma$,

$F(\Lambda C,A,E)=H_3(\Lambda,F(\Lambda,A,E),A,E)=S_5(\Lambda)=\Lambda E=E$,

$F(CD,A,E)=H_4(C,F(C,A,E),A,E)=H_4(C,E,A,E)=EAC$,

$g(z)=c(G(\mathbf{K}y,\mathbf{K}z))=c(\gamma)=z$,

$h_1(x,t,y,z)=c(\alpha\beta\gamma)=c(\gamma)+pc(\beta)+p^2c(\alpha)=25x^2+5y+z$,

$h_2(x,t,y,z)=0$,

$h_3(x,t,y,z)=c(\alpha E)=5+pc(\alpha)=5x+5$,

$h_4(x,t,y,z)=c(\gamma\beta\alpha)=x+5y+25z^2$,

$h_5(x,t,y,z)=BCD=4\cdot 1+3\cdot 5+2\cdot 25=69$.

Итак, $\begin{cases} f(0, y, z) = g(z) = z, \\ f(5x+1, y, z) = h_1(x, t, y, z) = 25x^2 + 5y + z, \\ f(5x+2, y, z) = h_2(x, t, y, z) = 0, \\ f(5x+3, y, z) = h_3(x, t, y, z) = 5x + 5, \\ f(5x+4, y, z) = h_4(x, t, y, z) = x + 5y + 25z^2, \\ f(5x+5, y, z) = h_5(x, t, y, z) = 69. \end{cases}$

$F(C, A, E) = H_3(\Lambda, E, A, E) = E$, $c(E) = 5$, $h_3(0{,}5{,}1{,}5) = 5 \cdot 0 + 5 = 5$;
$F(CD, A, E) = H_4(C, E, A, E) = EAC$,
$c(EAC) = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 5 \cdot 25 = 133$, $h_4(3{,}5{,}1{,}5) = 3 + 1 \cdot 5 + 25 \cdot 5 = 133$.

5.8.3. $\overline{\mathrm{sgn}}\,x = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x \neq 0, \end{cases}$ начальное слово $q_1 01110$ или $q_1 00000$. Программа машины Тьюринга приведена в табл. 10.2.

Таблица 10.2

Команда	Значение
$q_1 0 \to q_2 R$	$\begin{cases} 0q_2 1110 \\ 0q_2 0000 \end{cases}$
$q_2 0 \to q_0 1L$ если 0 $q_2 1 \to q_3 R$	$q_0 01000$ $01q_3 110$
$q_3 1 \to q_3 0R$ 2 раза	$0100q_3 0$
$q_3 0 \to q_4 L$	$010q_4 00$
$q_4 0 \to q_4 L$ 2 раза	$0q_4 1000$
$q_4 1 \to q_0 0L$	$q_0 00000$

5.8.4. Проанализируем данную программу (табл. 10.3) по командам для слов $q_1 010$ и $q_1 100$.

Таблица 10.3

Команда	Значение
$q_1 0 \to q_2 0R$	$0q_2 10$
$q_1 1 \to q_0 1$	$q_0 100$ для $x = 0$
$q_2 1 \to q_2 R$	$01q_2 0$
$q_2 0 \to q_0 1$	$01q_0 1$ для $x \neq 0$

Видно, что программа вычисляет функцию $f(x)=x+1$. Хотя при $x \neq 0$ конечное слово содержит $f(x)$ вхождений символа 1, управляющая головка машины не находится в крайней левой позиции.

5.8.5. Здесь роль ненулевого символа алфавита играет вертикальная черточка. Составим программу (табл. 10.4), перерабатывающую исходное слово $a_0| \; | \; | \; a_0$.

Таблица 10.4

Команда	Значение
$q_1 1 \to q_2 R$	$a_0| \; q_2| \; | \; a_0$
$q_2| \; \to q_2 a_0 R$ 2 раза	$a_0| \; a_0 a_0 q_2 a_0$
$q_2 a_0 \to q_3 L$	$a_0| \; a_0 q_3 a_0$
$q_3 a_0 \to q_3 L$ 2 раза	$a_0 q_3| \; a_0$
$q_3| \; \to q_0 a_0$	$a_0 q_0 a_0$

5.8.6. Пусть машина Тьюринга $\mathbf{T}$ имеет алфавиты $\mathbf{A}=\{a_0,a_1,...,a_m\}$, $\mathbf{Q}=\{q_0,q_1,...,q_n\}$ и $F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ — s-местная словарная функция, заданная в алфавите $\mathbf{A}$. Говорят, что машина $\mathbf{T}$ правильно вычисляет функцию $F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$, если $q_1 a_0 \alpha_1 a_0 \alpha_2 ... a_0 \alpha_s \models q_0 a_0 F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s) a_0 ... a_0$ для любой системы слов $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ в алфавите $\mathbf{A}$. Если же $F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s)$ не определено, то машина $\mathbf{T}$, начав работать в состоянии $q_1 a_0 \alpha_1 a_0 \alpha_2 ... a_0 \alpha_s$, не должна никогда остановиться в состоянии q_0 и не должна надстраивать ленту слева.

Для нашей функции $f(x)=x+y$ для любого начального слова $q_1 0 1^x 0 1^y$ машина должна выдать результат $q_0 0 1^{x+y} 0$. Это можно сделать следующей системой команд (табл. 10.5) при начальном слове, например, такого вида $q_1 0110110$.

Таблица 10.5

Команда	Значение
$q_1 0 \to q_2 R$	$0q_2 110110$
$q_2 1 \to q_2 1R$ 2 раза	$011q_2 0110$
$q_2 0 \to q_3 1R$	$0111q_3 110$
$q_3 1 \to q_3 1R$ 2 раза	$011111q_3 0$
$q_3 0 \to q_4 0L$	$01111q_4 10$
$q_4 1 \to q_5 0L$	$0111q_5 10$
$q_5 1 \to q_5 1L$ 4 раза	$q_5 011110$
$q_5 0 \to q_0 0$	$q_0 011110$

5.8.7. Введем понятие композиции машин Тьюринга. Пусть заданы две машины Тьюринга $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, имеющие общий внешний алфавит $\mathbf{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ и внутренние алфавиты $\mathbf{Q}_1 = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ и $\mathbf{Q}_2 = \{q_0, q_1', \ldots, q_l'\}$. Произведением машины $\mathbf{T}_1$ на машину $\mathbf{T}_2$ называется машина $\mathbf{T}_3$ с тем же внешним алфавитом, внутренним алфавитом $\mathbf{Q}_3 = \{q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{n+l}\}$ и следующей программой: программа первой машины $\mathbf{T}_1$ остается неизменной, только символ q_0 заменяется на символ q_{n+1}; в программе второй машины $\mathbf{T}_2$ только символ q_0 не меняется, все остальные символы q_j' заменяются на q_{n+j+1}.

Совокупность всех команд машин $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$, измененных указанным способом, и будет программой машины $\mathbf{T}_3$.

При составлении программ для многих машин Тьюринга приходится использовать суперпозицию функций. Суперпозиция моделируется произведением двух или нескольких машин Тьюринга. Для того чтобы было легче следить за работой машин в таких случаях, введем следующие обозначения. Пусть $\mathbf{П}$ — программа какой-то машины с алфавитами $\mathbf{A} = \{0,1\}$ и $\mathbf{Q} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$, а k — положительное натуральное число. Если заменить в $\mathbf{П}$ символы $q_1, q_2, \ldots, q_n$ на

$q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+n-1}$, а символ q_0 на q_{k+n}, то получим программу с тем же внешним алфавитом $\mathbf{A} = \{0,1\}$ и внутренним алфавитом $\mathbf{Q}' = \{q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+n}\}$. Эту новую программу можно обозначить через $\mathbf{П_k}$. Если машина, начав работать в состоянии $\alpha q_k \beta$, переходит через некоторое время в состояние $\alpha_1 q_m \beta_1$, то будем обозначать этот процесс $\alpha q_k \beta \mathbf{П_k} \alpha_1 q_m \beta_1$.

Очевидно, что если $\mathbf{П}^{(1)}, \mathbf{П}^{(2)}, \ldots, \mathbf{П}^{(l)}$ — программы некоторых машин Тьюринга в алфавите $\mathbf{A} = \{0,1\}$, то $\alpha_0 q_1 \beta_0 \mathbf{П}_1^{(1)} \alpha_1 q_k \beta_1 \mathbf{П}_k^{(2)} \alpha_2 q_m \beta_2 \ldots \mathbf{П}_r^{(l)} \alpha_i q_s \beta_i$ эквивалентно $\alpha_0 q_1 \beta_0 \left(\mathbf{П}^{(1)} \mathbf{П}^{(2)} \ldots \mathbf{П}^{(l)}\right) \alpha_i q_s \beta_i$.

Вернемся к решаемой задаче и рассмотрим сначала более простой случай: $I_2^2(x_1, x_2) = x_2$. Исходное слово $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} 0$, необходимо получить конечное слово $q_0 0 1^{x_2}$. Обратимся к примерам, разобранным в *разделе 5.6*, и обозначим программы соответствующих машин Тьюринга: **Б$^-$** — левый сдвиг (пример 3), **Б$^+$** — правый сдвиг (пример 4), **В** — транспозиция (пример 5), **О** — вычисление функции $O(x) = 0$ (пример 8), **Ц = ВБ$^-$В** — циклический сдвиг (пример 7).

Тогда для $I_2^2(x_1, x_2) = x_2$ будем иметь $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} (\mathbf{Б}^+)_1 0 1^{x_1} q_3 0 1^{x_2} (\mathbf{В})_3 0 1^{x_2} q_{21} 0 1^{x_1} (\mathbf{О})_{21} 0 1^{x_2} q_{25} 0 \ldots 0 (\mathbf{Б}^-)_{25} q_{27} 0 1^{x_2} 0$ или сокращенно **Б$^+$ВОБ$^-$**. Эта итоговая программа представляет собой произведение четырех машин Тьюринга. Конечная команда $q_{27} = q_0$. Нижние индексы программ считаются следующим образом: последняя команда q_0 предыдущей программы является первой командой следующей, при этом учитывается число букв внутреннего алфавита предыдущей машины Тьюринга (*см. примеры 3, 4, 5, 8 разд. 5.6*).

Для машины, реализующей $I_n^m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_m$, начальное слово $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} \ldots 0 1^{x_m} 0 1^{x_{m+1}} \ldots 0 1^{x_n} 0$, конечное $q_0 0 1^{x_m} 0$. Воспользуемся программой циклического сдвига **Ц = ВБ$^-$В**, $q_1 0 1^{x_1} 0 1^{x_2} \ldots 0 1^{x_n} 0 \Rightarrow q_0 0 1^{x_2} 0 1^{x_3} \ldots 0 1^{x_n} 0 1^{x_1} 0$.

Если применить ее $(m-1)$ раз, то получим слово $q_0 01^{x_m} 01^{x_{m+1}} \ldots 01^{x_n} 01^{x_1} \ldots 01^{x_{m-1}} 0$, затем применим к этому слову $(n-1)$ раз программу правого сдвига, получим $01^{x_m} 01^{x_{m+1}} \ldots 01^{x_n} 01^{x_1} \ldots q_0 01^{x_{m-1}} 0$. Наконец, применим $(n-1)$ раз произведение программ вычисления функции $O(x)$ и левого сдвига $(\mathbf{О Б^-})$. В результате будем иметь: $q_0 01^{x_m} 0$. Итак, машина Тьюринга, правильно вычисляющая функцию I_n^m, такова: $(\mathbf{Ц})^{m-1} \cdot (\mathbf{Б^+})^{n-1} \cdot (\mathbf{О} \cdot \mathbf{Б^-})^{n-1}$.

5.8.8. Пусть F и G — машины Тьюринга, правильно вычисляющие функции $f(x)$ и $g(x)$ соответственно. Тогда $H = G \times F$ правильно вычисляет h (*см. начало задачи 5.8.7*).

5.8.9.

а) $x \dot{-} y = \begin{cases} x-y, x \geq y, \\ 0, x < y. \end{cases}$ Задача решается с помощью произведения машин Тьюринга. Рассмотрим две программы: сложения $x + y$ (задача 5.8.6) и усеченной разности $x \dot{-} 1$ (*см. пример 10 разд. 5.6*). Обозначим первую программу $\mathbf{С}$, вторую $\mathbf{УР1}$. Пусть начальное слово $q_1 01^x 01^y 0$. После применения программы сложения получим конечное слово $q_0 01^{x+y} 0$; оно будет начальным для второй программы, применив которую один раз будем иметь $q_0 01^{x+y \dot{-} 1} 0$.

Ясно, что использовав программу $\mathbf{УР1}$ $2y$ раз, получим требуемый результат. Итак, $\mathbf{УР} = \mathbf{С} \cdot (\mathbf{УР1})^y \cdot (\mathbf{УР1})^y$. Написанная программа не самая короткая и не единственная. Очевидно, что этот же результат можно достигнуть и другими путями;

б) $f(x) = \left[\dfrac{x}{2}\right] = \sum\limits_{i=1}^{x} \overline{\operatorname{sgn}}\left(2 \cdot i \dot{-} x\right)$. Программу машины Тьюринга, реализующую эту функцию, можно составить, например, из уже рассмотренных ранее программ:

1. Вычисление произведения $2 \cdot i$ по программе сложения $2i = \underbrace{2+2+\ldots+2}_{i \text{ раз}}$ $(\mathbf{С})^i$ (задача 5.8.6);

2. Вычисление усеченной разности $2i \dot{-} x$ **УР** (задача 5.8.9 (а));

3. Вычисление функции $\overline{\mathrm{sgn} x}$ $\overline{\mathbf{S}}$ (задача 5.8.3);

4. Вычисление суммы $\sum_{i=1}^{x} \overline{\mathrm{sgn} i}$ $(\mathbf{C})^x$ (задача 5.8.6).

Таким образом, машина Тьюринга, правильно вычисляющая функцию $\left[\frac{x}{2}\right]$, имеет вид $(\mathbf{C})^y \cdot \mathbf{УР} \cdot \overline{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{C})^x$. Конкретный текст программы можно написать при заданном значении x.

5.8.10. Если функция $g(x,y)$ правильно вычислима, то существует программа $\mathbf{G}$, вычисляющая эту функцию для любого $x>0$ и $y>0$. Пусть начальное слово для $g(x,y)$ $q_1 01^x 01^y 0$. Рассмотрим вычисление по одному аргументу x: $q_1 01^x 0 (\mathbf{ГГ})_1 01^x q_k 01^x 0 (\mathbf{G})_m 01^x 0\underbrace{1^0}_{\wedge} q_m 01^{g(x,0)} 0$, где **ГГ** — программа копирования, переводящая слово $q_1 01^x 01^y 0$ в слово $01^x 01^y q_0 01^x 01^y$, $\mathbf{ГГ} = \mathbf{Б}^+\mathbf{ВГВБ}^+\mathbf{ВГВ}$, $\mathbf{Г}$ — удвоение: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 01^x 01^x 0$, программа $\mathbf{Г}$ приведена в табл. 10.7.

Итак, начало программы таково (табл. 10.6).

Таблица 10.6

Команда	Значение
	$q_1 01^x 0$
$(\mathbf{ГГ})_1$	$01^x 0 q_k 01^x 0$
$(\mathbf{G})_k$	$01^x 0\underbrace{1^0}_{\wedge} q_m 01^{g(x,0)} 0$

Далее вставляем команды, которые при $g(x,i)>0$ преобразовывали бы слово $01^x 01^i q_m 01^{g(x,i)}$ в слово $01^x 01^{i+1} q_m 01^{g(x,i+i)}$.

Таблица 10.6 (продолжение)

Команда	Значение
$q_m 0 \to q_{m+1} R$	$01^x01^0 0 q_{m+1} 1^{g(x,0)}$
$q_{m+1} 1 \to q_{m+2} 0$	$01^x01^0 0 q_{m+2} 01^{g(x,0)-1}$
$q_{m+2} 0 \to q_{m+3} L$	$01^x01^0 q_{m+3} 001^{g(x,0)-1}$
$q_{m+3} 0 \to q_{m+4} 1$	$01^x01^0 q_{m+4} 101^{g(x,0)-1}$
$q_{m+4} 1 \to q_{m+5} R$	$01^x01^1 q_{m+5} 01^{g(x,0)-1}$
$(\mathbf{O})_{m+5}$	$01^x01^1 q_r 0$
$(\mathbf{Б}^-)\times(\mathbf{Б}^-)_r$	$q_s 01^x01^1$
$(\mathbf{ГГ})_s$	$01^x01^1 q_l 01^x01^1$
$(\mathbf{G})_l$	$01^x01^1 q_t 01^{g(x,1)}$
$q_t 0 \to q_m 0$	$01^x01^1 q_m 01^{g(x,1)}$

Команда $q_t 0 \to q_m 0$ зацикливает программу и машина от состояния $01^x01^1 q_m 01^{g(x,1)}$ преобразуется в состояние $01^x01^2 q_m 01^{g(x,2)}$ и т. д.

Пусть по прошествии нескольких циклов машина перешла в состояние $01^x01^i q_m 01^{g(x,i)}$ и $g(x,i)=0$. Тогда поскольку $1^0 = \Lambda$, то должна выполняться команда $q_m 0 \to q_{m+1} R$, которая переведет машину в состояние $01^x01^i 0 q_{m+1} 0$. Так как $f(x)=i$ по операции минимизации, то необходимо получить ответ — состояние $q_0 01^i$. Это можно сделать так.

Таблица 10.6 (окончание)

Команда	Значение
$q_{m+1} 0 \to q_{t+1} 0$	$01^x01^i q_{t+1} 0$
$(\mathbf{Б}^-)\times(\mathbf{Б}^-)_{t+1}$	$01^x q_d 01^i$
$(\mathbf{В}\times\mathbf{О}\times\mathbf{Б}^-)_d$	$q_h 01^i$
$q_h 0 \to q_0 0$	$q_0 01^{f(x)}$

Программа удвоения **Г**: $q_1 01^x 0 \Rightarrow q_0 01^x 01^x 0$.

Таблица 10.7

Команда	Значение
$q_1 0 \to q_2 R$	$0q_2 1^x 0$
$q_1 1 \to q_2 R$ x раз	$01^x q_2 0$
$q_2 0 \to q_3 L$	$01^{x-1} q_3 10$
$q_3 1 \to q_4 0$	$01^{x-1} q_4 00$
$q_4 0 \to q_5 R$	$01^{x-1} 0 q_5 0$
$q_5 0 \to q_6 1$	$01^{x-1} 0 q_6 1$
$q_6 1 \to q_6 R$	$01^{x-1} 01 q_6 0$
$q_6 0 \to q_7 R$	$01^{x-1} 010 q_7 0$
$q_7 0 \to q_8 1$	$01^{x-1} 010 q_8 1$
$q_8 1 \to q_8 L$	$01^{x-1} 01 q_8 01$
$q_8 0 \to q_9 L$	$01^{x-1} 0 q_9 01$
$q_9 1 \to q_9 L$	$01^{x-1} q_9 0101$
$q_9 0 \to q_2 0$	$01^{x-1} q_2 0101$
Через x, циклов работы	$0q_2 01^x 01^x 0$
$q_2 0 \to q_3 L$	$q_3 001^x 01^x 0$
А (перенос нуля) пример 2, разд. 5.6 $q_1 001^x 0 \Rightarrow q_0 01^x 00$	$q_k 01^x 001^x 0$
$(Б^+)_k$	$01^x q_m 001^x 0$
$(\mathbf{A})_m$	$01^x q_r 01^x 00$
$(\mathbf{Б}^-)_r$	$q_s 01^x 01^x 0$
$q_s 0 \to q_0 0$	$q_0 01^x 01^x 0$

Список литературы

1. Адаменко А. Н., Кучуков А. М. Логическое программирование и Visual Prolog. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003.
2. Акимов О. Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.
3. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики. — М.: Наука, 1992.
4. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972.
5. Горбатов В. А. Основы дискретной математики. — М.: Высшая школа, 1986.
6. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под ред. Яблонского С. В и Лупанова О. Б. — М.: Наука, 1974.
7. Ершов Ю. Л., Палютин Е. А. Математическая логика. — М.: Наука, 1987.
8. Клини С. Математическая логика. — М.: Мир, 1973.
9. Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
10. Косовский Н. К. Основы теории элементарных алгоритмов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.
11. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1984.
12. Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г. Математическая логика. — СПб.: Лань, 1998.
13. Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
14. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986.
15. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. — М.: Наука, 1984.
16. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
17. Новиков П. С. Элементы математической логики. — М.: Наука, 1973.
18. Проблемы математической логики. Сложность алгоритмов и классы вычислимых функций / Под ред. Козмидиади В. А. и Мучника А. А. — М.: Мир, 1970.
19. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. — М.: Наука, 1967.
20. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. — М.: Мир, 1972.
21. Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В. Элементы дискретной математики. — М., Новосибирск: ИНФА-М–НГТУ, 2002.
22. Успенский В. А. Лекции о вычислимых функциях. — М.: Физматгиз, 1960.
23. Успенский В. А. Машина Поста. — М.: Наука, 1979.
24. Фридман А., Менон П. Теория и проектирование переключательных схем. — М.: Мир, 1978.
25. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. — М.: Наука, 1983.
26. Шенфилд Дж. Математическая логика. — М.: Наука, 1975.

Предметный указатель

А

Аксиома 4, 98
Аксиоматическая система 4
Аксиоматический метод 93
Аксиоматическое исчисленне
  полное в узком смысле 135
  полное в широком смысле 136
Алгебра
  Вебба 66
  Поста 66
  Россера-Тьюкета 66
Алгоритм 215
  Квайна 129
  метода редукций 131
  унификации 201
Алгоритмическая проблема
  разрешимости 212
Алфавит 10, 94, 217
Алфавитиый номер 239
Антецедент 7
Ассоциативное нсчисление 258
Ассоциативность
  дизъюнкции 12
  конъюнкции 12
Атомная (атомариая) формула
  сигнатуры 150

Б

Базис 53
Буква 217
Булева алгебра 21
Булевы алгебры
  изоморфиые 22

В

Векторы
  лииейно зависимые 177
Вторая формула расщеплеиия 12
Вход 74
Вход функциональиого элемента
  фиктивный 72
Вхождеиие символа в формулу 14
Вывод:
  в исчислении предикатов 190
  из совокупности формул 102
  свойства 102
Выражение 10
Высказываие 5
  абсолютио истииное 5
  абсолютно ложное 5
  простое (элементарное) 5
  сложное 5
Выход 74

Г

Гомоморфизм 22

Д

Двойное отрицание высказывания 5
Двухполюсник 74
Дедуктивная цепочка 258
Дерево
  вывода 98
Дизъюнкт 29
  пустой 29
  точный 134
  унитарный позитивиый 134
  хорновский 133
  хорновский негативный 134
Дизъюнктивная нормальная
  форма 27, 28
  минимальная 37
  минимальная тупиковая 39
  совершеииая 28
  тупиковая 39
Дизъюнкция 6
  обобщение 62
  полная правильная элементарная 30
  правильная элементарная 30
  предикатов 143
  элементарная 29
Дистрибутивность дизъюнкции
  относительно конъюнкции 12
Дистрибутивность конъюнкции
  относительно дизъюнкции 12
Доказательство
  в виде дерева 98
  в нсчислеиии высказываний 98

З

Заключение 7
Закон:
ассоциативный 21
второй закон де Моргана 12
второй закон поглощения 12
двойного отрицания 21
де Моргана 21
дистрибутивный 21
идемпотентности 21
идемпотентности дизъюнкции 11
идемпотентности конъюнкции 11
исключенного третьего 11, 14
коммутативный 21
коммутативный закон
дизъюнкции 12
первый закон де Моргана 12
первый закон поглощения 12
перестановки посылок 109
Пирса 15
поглощения 21
противоречия 11
снятия двойного отрицания 11
соединения посылок 109
Замена:
переменного высказывания 184
переменного предиката 184
свободной предметной переменной 186

И

Изоморфизм 22
Импликанта 37
простая 37
Импликация 7
предикатов 143
Интерпретация 21
Интерпретация высказываний 11
Исчисление противоречивое 212
Итерация 220

К

Карта Карно 40
Квадратичный остаток 234
Квантор 146
всеобщности 146
область действия 150
существования 146
Класс функций
максимальный 53
предполный 53
собственно функционально
замкнутый 49
функционально замкнутый 49
Коллизия переменных 183
Консеквент 7
Конституента единицы набора σ 30
Конституента нуля набора σ 30
Контактная схема
k-полюсная 74
изоморфная 74
минимальная 77
параллельно-последовательная 74
связная 74
сильно связная 74
Контактные схемы
эквивалентные 77
Конъюнкт 28
Конъюнктивная нормальная
форма (КНФ) 30
Конъюнкция 6
второе обобщение 62
первое обобщение 62
полная правильная
элементарная 28
предикатов 142
элементарная 28
элементарная правильная 28
Критерий
Коши 178

Л

Линейное доказательство 98
Линейный вывод 98
Логика предикатов 141
Логическая эквивалентность 8
Логические константы 5
Логические связки 10
Логический закон 160
Логическое следование 7
Логическое сложение 6
Логическое умножение 6

М

Математическая логика 3
Математические понятия 4
Машина Тьюринга 244
Метаязык 121
Метод
резолюций 131
Метод доказательства
от противного 16
Метод моделирования 4
Множество
ограниченное сверху (снизу) 176
рассогласований 201
Множество слов
примитивно рекурсивное 239

Н

Необходимый призиак сходимости
  ряда 363
Неполное склеивание 39
Непосредствеииое следствие секвенций 95
Непротиворечивость исчисления
  высказыванй 135
Номер слова 239
Нормальная форма 159, 194
  предваренная 159
  предвареиная (приведенная) 195
  скулемовская 159

О

Обратиая связь 72
Обращеиие функции 230
Оператор:
  аннулирования 218
  проектирования 218
  сдвига 218
Отрицание:
  предиката 143
  высказывания 5
  Лукасевича 61
  Поста 61
Оцеики:
  несравнимые 50
  сравнимые 50

П

Первая формула расщепления 12
Переменная:
  иесущественная 24
  пропозициональиая 94
  свободиая 146
  связанная 146
  существенная 24
  фиктивная 24
Подслово 94, 239
Подстановка сигнатуры 200
  пустая 200
Подформула 10, 94, 150, 182
Полиномы (миогочлеиы) Жегалкина 45
Полное склеивание 39
Последовательиость
  возрастающая (убывающая) 177
  сходящаяся к числу 177
  фундаментальная 177
Посылка 7
Правило:
  (простого) заключения 184
  введения дизъюнкции 187
  введения импликации 187
  введеиия квантора всеобщности 188
  введения квантора существования 188
  введения конъюнкции 187
  введения отрицаиия 187
  вывода 95
  вывода исчислеиия высказываний 96
  переименования связанных предметных
    перемеиных 186
  переноса кваитора через отрицаиие 158
  перестановки 188
  подстановки 184
  разъединения посылок 110
  расширения 188
  сведеиия к противоречию 188
  связывания квантором 186, 189
  силлогизма 189
  соедииеиия посылок 110
  сокращения 188
  удаления дизъюнкции 187
  удаления импликации 187
  удаления квантора всеобщиости 188
  удалеиия квантора существования 188
  удаления конъюнкции 187
  удаления отрицания 188
  утоичеиия 188
Правило вывода:
  допустимое 97
  правило введеиия дизъюикции 96
  правило введения импликации 96
  правило введения конъюикции 96
  правило введеиия отрицания 96
  правило коитрпозиции 100
  правило одновременной подстаиовки 99
  правило перестановки 97
  правило подстановки 97
  правило простого заключения 97
  правило расширения 97, 103
  правило сведения к противоречию 96
  правило силлогизма 99
  правило сложиого заключеиия 99
  правило сиятия двойного отрицания 101
  правило сокращения 97
  правило удаления выводимой
    гипотезы 103
  правило удаления дизъюнкции 96
  правило удалеиия импликации 96
  правило удаления импликации 103
  правило удаления конъюикции 96
  правило удаления отрицания 96
  правило утончения 96
Практический признак расходимости
  рядов 364
Предикат 142
  миогоместный 142
  множество истииности 142
  нульместный 142

 область определения 142
 одноместный 142
 предметная область 142
 тождественно истинный 142
 тождественно ложный 142
Предметная область 168
Признак Лейбница 178
Принцип нормализации 217
Проблема:
 независимости 136
 полноты 135
 разрешимости 42, 135
Производная:
 k-го порядка 54
 первого порядка 53
 смешанная 54
Производные понятия 4
Пропозициональные связки 8

Р

Разделители 10
Ранги логических связок 8
Рассуждение
 правильное 15
Резольвента
 бинарная 205
 дизъюнктов 132
Резолютивный вывод 132
Резолюция 204
Рекурсия:
 возвратная 219
 примитивная 219
Реле с размыкающим контактом 74
Релейно-контактные схемы (РКС) 73

С

Свойства совершенства 27
Свойство взаимности 33
Связки исчисления высказываний 8
Секвенция 95
 доказуемая 98
Сигнатура 149
Символ следования 94
Символы алфавита 10
Система булевых функций
 полная 48
Система функций
 независимая 53
Склейка 205
Следствие 7
Словарная минимизация 242
Словарное множество 239
Слово 10, 94, 217
 длина 94
 пустое 94
Сложность булевой функции 77
Совершенная конъюнктивная
 нормальная форма (СКНФ) 30
Совокупность рекурсивных функций 216
Соединение слов 94
Субъект 142
Суперпозиция:
 первого ранга 25
 элементарная 25
Схема:
 примитивной рекурсии 219
 элементарная 76
Схема из функциональных
 элементов (СФЭ) 71
 допустимая 71
 многотактная 73
 нультактная 73
 правильная 73

Т

Таблицы Поста 52
Тавтология 14
Такт 73
Тезис:
 Тьюринга 217, 248
 Черча 217, 231
Теорема 4
 большая теорема Ферма 152
 Вейерштрасса 178
 взаимно противоположные теоремы 173
 взаимно-обратные теоремы 173
 Геделя 197
 дедукции 96, 106
 заключение 170
 Квайна 39
 Лагранжа 170
 о выводимости 124
 о мажорируемых неявных
 функциях 232
 о полноте метода резолюций 132, 207
 о среднем для определенного
 интеграла 178
 обратная 173
 Поста о функциональной
 полноте 51
 прямая 173
 Р. Робинсона 235
 разъяснительная часть 170
 Ролля 178
 условие 170
 Черча 163
 Эрбрана 205
Теория нормальных алгоритмов
 Маркова 217
Терм 149

У

Универсум Эрбрана 204
Унификатор 201
наиболее общий
(простейший) 201
Унификация 200
Усеченная разность 62
Условие 7
достаточное 175
необходимое 175
Условия совершенства ДНФ 28

Ф

Формула 10
алгебры логики 10
атомарная 94
в исчислении предикатов 182
выполнимая 14, 42, 160
доказуемая 98
замкнутая 150
замыкание общности 164
замыкание существования 164
исчисления высказываний 94
литеральная 150
логики предикатов 150
монотонно возрастающая 120
монотонно убывающая 120
общезначимая 160
опровержимая 14
отрезаемая 205
противоречивая 14
тождественно истинная 160
тождественно ложная 14
универсальная 159
эквивалентная 121
элементарная 94
Формулы:
дедуктивно эквивалентные 196
равносильные 11
эквивалентные 193
Функциональная схема
тьюринговая 246
Функционально замкнутый класс
предполный 53
Функциональные элементы
эквивалентные 72
Функциональный элемент 71
Функция:
k-значной логики 59
алгебры логики n переменных 23
бесконечно малая 168
Буля 23
Вебба 63
вычислимая 216
двойственная 32, 33
Дирихле 176
компоненты разложения 26
линейная 50
монотонная 50
монотонно возрастающая 177
неопределенная 229
обратная 230
общерекурсивная 220
периодическая 177
предел 178
примитивно рекурсивная 220
проводимости 75
разложение 26
разрешающая 198
рекурсивная 216
самодвойственная 32
Скулема 198
словарная простейшая 241
существенная 65
характеристическая второго рода 61
частично рекурсивная 220, 231
четная 169
Шеннона 77
эффективно вычислимая 218

Ц

Цепное рассуждение 14
Цепь существенная 75
Цикл 72

Ш

Штрих Шеффера 9

Э

Эквиваленция 8
Эквивалетность 8
Элементарное поглощение 39

Шапорев Сергей Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Балтийского государственного технического университета "Военмех". Член ассоциации математиков вузов Северо-Запада. Автор более 50 работ по небесной механике и вычислительной математике.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Пособие построено как учебный курс для чтения лекций и проведения практических занятий. Весь материал, представленный достаточно сжато, дается на основе аксиоматического метода. Рассматриваются методы математической логики в их классическом изложении, а также вопросы определения понятия алгоритма через рекурсивные функции и машины Тьюринга. Для всех задач, предложенных в книге, приводятся ответы, а для большинства из них и решения. Пособие написано на высоком научном и методическом уровне и в то же время доступно для понимания студентами, обучающимися по соответствующим специальностям. Также книга может быть полезна аспирантам и преподавателям технических вузов, изучающим математическую логику как фундаментальную основу многих естественных наук.

ISBN 5-94157-702-8

БХВ-Петербург

194354, Санкт-Петербург
ул. Есенина, 5Б

E-mail: mail@bhv.ru
Internet: www.bhv.ru

Тел./факс: (812) 591-6243