1. Постановка задачи
   1. Уравнение

Заданное в области с границей и краевыми условиями

Вариант: МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции квадратичные на треугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии разложить по линейным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

* 1. Вариационная постановка

Будем называть пространством Hm- множество функций , которые вместе со своими производными до m-го порядка включительно суммируемы с квадратом на . Потребуем, чтобы невязка дифференциального уравнения была ортогональна (в смысле скалярного произведения пространства ) некоторому пространству функций , которое называется пространством пробных функций, т.е.

Применив формулу Грина к 1 слагаемому в интеграле, получим

Воспользовавшись краевыми условиями, получим

Чтобы избавиться от интеграла Выберем в качестве пространство пробных функций равных 0 на границе , а чтобы учесть краевые условия первого рода будем искать решение среди функций, удовлетворяющих этому условию.

Таким образом получим

* 1. Конечномерная дискретизация

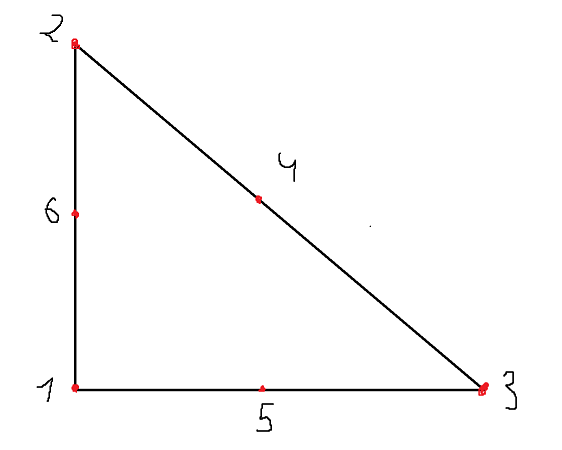
При построении конечноэлементной аппроксимации мы будем искать проекцию искомой функции u на конечномерное пространство натянутое на кусочно-полиномиальные финитные базисные функции . В качестве пространства пробных функций возьмем то же самое подпространство (только функции на границе будут равны 0). Так как принадлежит его можно представить в виде линейной комбинации базисных функций этого пространства

Таким образом, взяв в качестве , получим

Получим СЛАУ относительно

1. Базисные функции и - координаты

Мы разбиваем расчетную область на конечные элементы треугольного вида и на каждом элементе вводим 3 линейных базисных функций.



Базисные функции будем выражать через - координаты

Введем на треугольнике с вершинами три линейные функции каждая из которых равна 1 в своей вершине и 0 в двух других

Так как линейная функция r z для нее справедливо следующее представление

Тогда справедливо следующее соотношение

Из этого соотношения очевидно, что чтобы найти коэффициенты нужно обратить матрицу

Теперь выпишем базисные функции выраженные через L – координаты

1. Локальные матрицы и вектора

Так как область разбита по элементам, то объемные интегралы в вариационной постановке можно считать, как сумму от интегралов по элементам. Базисные функции финитные поэтому на каждом элементе интегралы с произведением базисных функций будут ненулевыми только для тех функций, которые ненулевые на данном элементе (которых 6). Таким образом глобальная матрица и вектор правой части может быть сгенерирован из локальных матриц и векторов каждого конечного элемента.

Для вычисления интегралов по треугольнику от произведения в некоторой степени использовалось следующее соотношение

Для вычисления матрицы масс мы усредняем значение на элементе и считаем интеграл по соотношению с факториалами.

Локальная матрица масс считается следующим образом:

И заменив линейным интерполянтом получим

где определяются из соотношения

Локальный вектор правой части вычисляется следующим образом: f заменяется своим квадратичным интерполянтом и интегрируется получается выражение похожее на умножение локальной матрицы масс на вектор значений f в точках

1. Учет краевых условий

Краевые условия 2 рода учитываются следующим образом:

На ребре базисные функции будут совпадать с квадратичными одномерными лагранжевыми базисными функциями, тогда разложив по квадратичным базисным функциям получим

Аналогично с локальным вектором и матрицей третьего краевого условия

Первые краевые условия учитываются следующим образом:

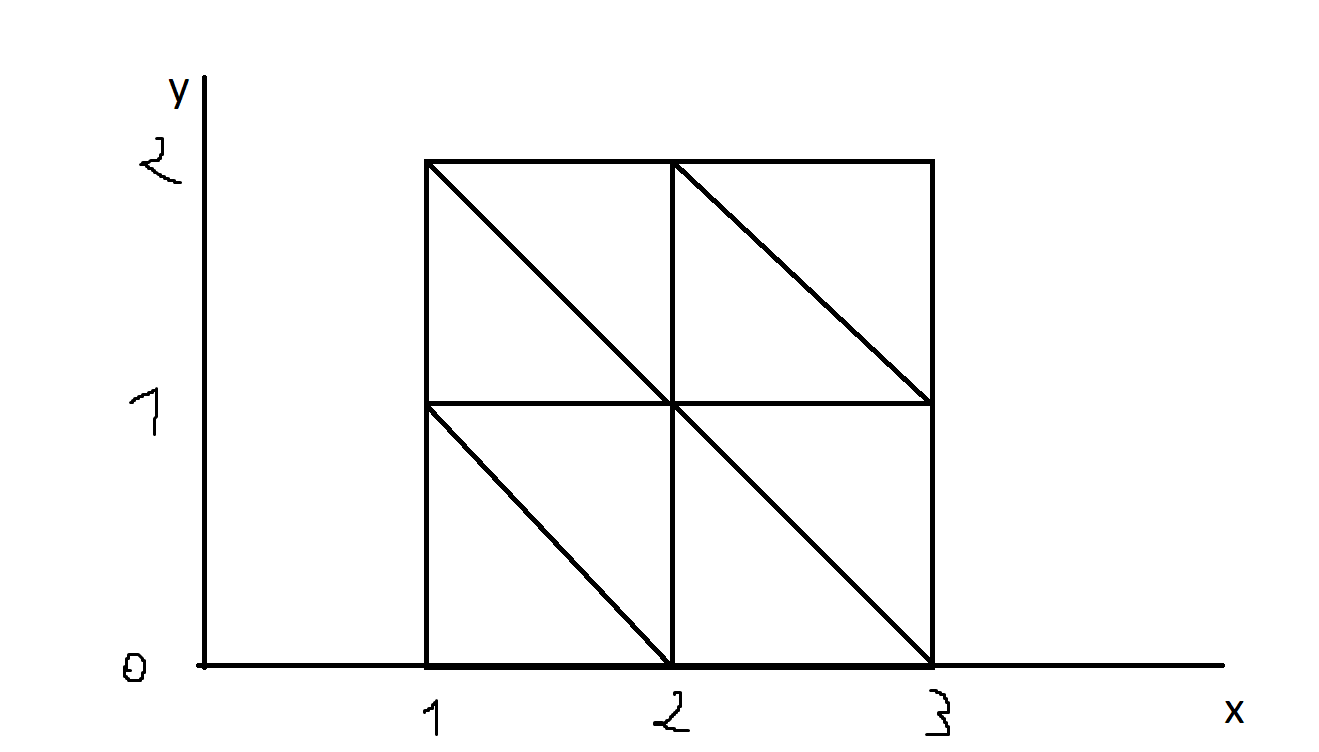
Строка, соответствующая узлу, к которому нужно применить первое краевое условие заполняется нулями, на диагонали ставится единица, а в правой части значение, которое нужно задать в этом узле. Чтобы не нарушалась симметричность матрицы так же зануляется и соответствующий столбец, но, чтобы СЛАУ не изменилась от каждой компоненты правой части отнимается зануленный элемент, умноженный на необходимое значение в узле. Таким образом при решении СЛАУ веса у функций, связанных с узлами, находящимися на границе будут удовлетворять первому краевому условию.

1. Решение СЛАУ

СЛАУ решается с помощью ЛОСа с LU предобуславливанием .

1. Тестирование

Тесты будут проводиться на этой сетке:



Чтобы оценивать точность будем смотреть относительную погрешность вектора полученного вектора весов q относительно истинного значения.

* 1. Тест 1

u = x

= 1

= 0

Заданы первые краевые на боковых ребрах и вторые на верхнем и нижнем

Относительная погрешность = 0

* 1. Тест 2

u = x

= 1

= 0

Заданы вторые краевые на левом ребре и третье краевое на правом и вторые на верхнем и нижнем

Относительная погрешность = 9.4372E-15

* 1. Тест 3

u =

= 1

= 1

Заданы вторые краевые на левом ребре и третье краевое на правом и вторые на верхнем и нижнем

Относительная погрешность = 6.88556E-15

* 1. Тест 4

u =

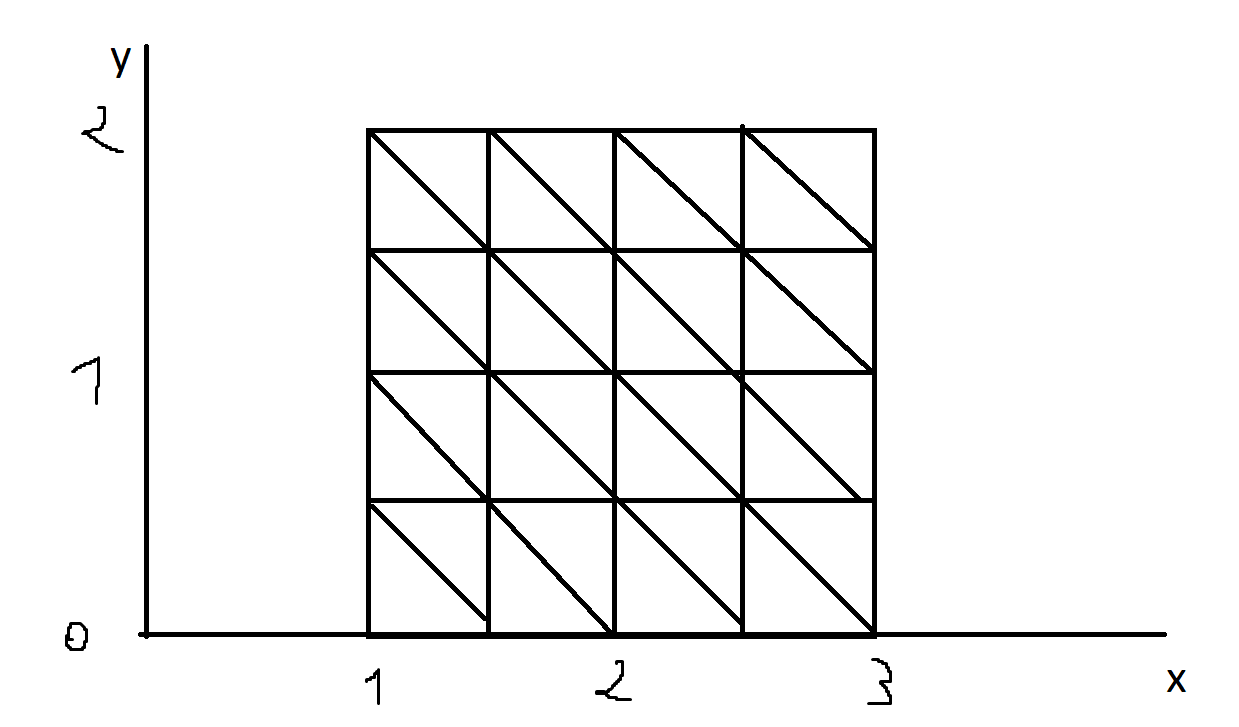
= 1

Заданы первые краевые на боковых ребрах и вторые на верхнем и нижнем

Относительная погрешность = 7.16825E-15

* 1. Тест на порядок сходимости

Для теста на сходимость понадобится вложенная сетка



Будем смотреть на значения полученной функции в серединах элементов вложенной сетки и относительную погрешность.

u =

= 0

Заданы первые краевые на боковых ребрах и вторые на верхнем и нижнем

Относительная погрешность на перовой сетке = 0.002625475

Относительная погрешность на вложенной сетке = 0.000389992

Отношение этих погрешностей =6.73

Порядок сходимости совпадает с теоретическим третьим

}