Теория графов. Лекции. Заметки.

Семён Григорьев

5 апреля 2021 г.

Содержание

1 Лекция 1: Разреженные матрицы

1.1 Форматы разреженных матриц

Важно то, что их дофига. И разные хороши для разных задач.

Рассмотрм матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В ней всего 15 ненулевыз элементов (NNZ(M) = 15). Попробуем представить её в разных форматах.

Покоординатный (COO). Часто он же *triple store*. Просто коллекция троек вида *(*строка, столбец, значение) только для ненулевых элементов.

$$\begin{aligned} M_{COO} = [&(0,0,1);(0,4,3);(0,6,9);(1,2,2);(1,5,-1);(2,3,7);(3,1,6);(3,7,5);(4,1,3);\\ &(4,2,4);(5,4,2);(5,6,8);(6,2,-3);(2,7,-7);(7,4,-4)] \end{aligned}$$

Потратили $3 * NNZ(M)$ памяти.

Формат простой. Можно предварительно сортировать по столбцам или строкам. Достаточно просто удалять и добавлять элементы. Не самый оптимальный по доступу и по дополнительной памяти.

Compressed row storage (CRS). Заведём 3 массива: *val* для хранения значений, *col_ id* для хранения номера столбца, *row_ ptr* для указателя на начало строки в *col_ id*.

$$M_{CRS} = (val, col\_\,id, row\_\,ptr)$$

val	1	3	9	2	-1	7	6	5	3	4	2	8	-3	-7	-4
col_id	0	4	6	2	5	3	1	7	1	2	4	6	2	7	4

row_ptr	0	3	5	6	8	10	12	14

Потратили $2*NNZ(M)+n$ памяти. Сложнее построить, сложно удалять и добавлять. Достаточно просто последовательно обходить, лучше по памяти и по обращению к элементу. Наиболее часто встречается в современных библиотеках.

Compressed column storage (CCS) и **compressed dioganal storage (CDS).** Вариации на тему CRS. Второй — для диоганальных матриц.

Блочный CRS (CCS, CDS). Когда мы знаем, что матрица имеет блочную структуру, а каждый блок — разреженная матрица. Пример — результат тензорного произведения.

Quad-tree.

Предположим, что $n = 2^k$. Если это не так, то выравниваем нулями. После этого строим рекурсивно дерево: дели матрицу на 4 блока, корень — это текущая матрица, листья — 4 полученных блока.

Если в блоке все элементы нули, то сразу рисуем лист типа *(этот блок — ноль)*, иначе продолжаем разбиение. И так до тех пор пока не получатся блоки из одного элемента.

$$
M = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
M_{(0,0)} = \left[\begin{array}{cc|cc}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 7 \\
0 & 6 & 0 & 0
\end{array}\right], M_{(0,1)} = \left[\begin{array}{cc|cc}
3 & 0 & 9 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right]
$$

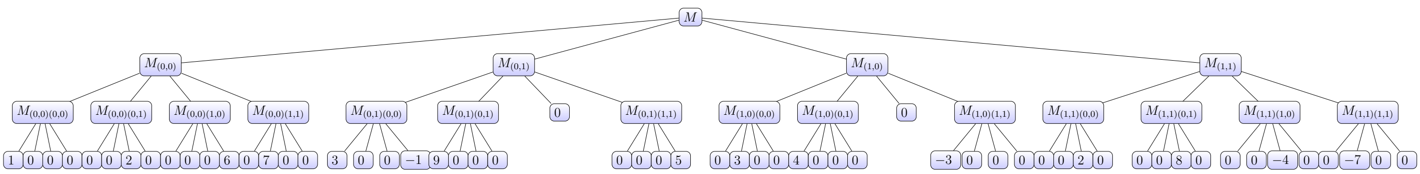
$$
M_{(1,0)} = \left[\begin{array}{cc|cc}
0 & 3 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right], M_{(1,1)} = \left[\begin{array}{cc|cc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 8 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -7 \\
-4 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
M_{(0,0)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(0,0)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right], M_{(0,0)(1,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 6 \end{array}\right], M_{(0,0)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 7 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
M_{(0,1)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 3 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right], M_{(0,1)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(0,1)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 \end{array}\right]
$$

$$
M_{(1,0)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(1,0)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], M_{(1,0)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
M_{(1,1)(0,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)(0,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 8 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)(1,0)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -4 & 0 \end{array}\right], M_{(1,1)(1,1)} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -7 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]
$$



Относительно сложно построить, легко разделить на части (хорошо для распределённых вычислений), достаточно быстрый доступ к элементу, простой рекурсивный алгоритм перемножения.

Часто используется в композиции с CRS или другими форматами: до какого-то момента строим дередо, а потом в листьях храним сравнительно большие подматрицы в CRS.

1.2 Умножение разреженных матриц

Временная сложность оценивается относительно количества ненулевых элементов (NNZ) либо во входных матрицах, либо в выходной матрице, либо и там и там.

При использовании GPGPU возникают проблемы с необходимостью динамически выделять память. Поэтому используют два шага: оценка NNZ в результирующей матрице с последующим выделением нужного количества памяти, собственно перемножение.

2 Спектральная теория графов. Введение

Матрица смежности.

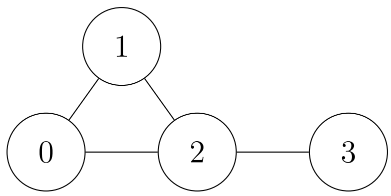
Матрица Кирхгофа. Оператор Лапласа. Для неориентированного графа без кратных рёбер и петель.

Определение 2.1. Пусть неориентированный граф без кратных рёбер и петель (простой граф) $G = \langle V, E\rangle, |V| = n$. Тогда матрица Кирхгофа $K = (k_{i,j})_{n\times n}$.

$$k_{i,j} := \begin{cases} \deg(v_i) & \text{при } i = j, \\ -1 & \text{при } (v_i, v_j) \in E(G), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$K = D - A$, где A — матрица смежности графа, а D — матрица, на диагонали которой строят степени вершин, а остальные элементы равны нулю.

Пример 2.1 (Пример графа и его матрицы Кирхгофа)**.** Пусть дан граф:



$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = D - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определитель матрицы.

Определение 2.2 (Дополнительный минор)**.** $M_{i,j}$ — дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A путём вычёркивания i-й строки и j-го столбца.

Определение 2.3 (Определитель матрицы 2×2)**.** Для матрицы 2×2 определитель вычисляется как:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Определение 2.4 (Определитель матрицы $N \times N$)**.**

$$\Delta = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_{0,j} M_{0,j}$$

, где $M_{0,j}$ — дополнительный минор к элементу $a_{0,j}$.

Это было разложение по строке и, вообще говоря, подобная операция может быть проделяна для любой строки. Аналогично можно использовать разложение по столбцу.

Определение 2.5 (Определитель матрицы 3×3)**.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{0,1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} - a_{0,2} \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,2} \end{vmatrix} + a_{0,3} \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} \\ a_{2,0} & a_{2,1} \end{vmatrix} =$$
$$a_{0,0}a_{1,1}a_{2,2} - a_{0,0}a_{1,2}a_{2,1} - a_{0,1}a_{1,0}a_{2,2} + a_{0,1}a_{1,2}a_{2,0} + a_{0,2}a_{1,0}a_{2,1} - a_{0,2}a_{1,1}a_{2,0}$$

Определение 2.6 (Алгебраическое дополнение)**.** Алгебраическим дополнением элемента $a_{i,j}$ матрицы A называется число $A_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$, где $M_{i,j}$ — дополнительный минор.

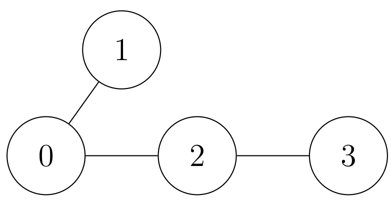
Пример 2.2 (Определитель)**.** Найдём определитель матрицы Кирхгофа для нашего графа. Будем использовать разложение по 3-й строке.

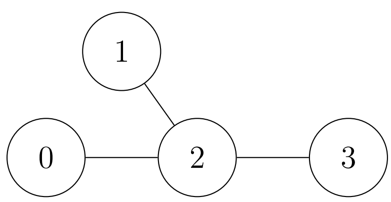
$$\Delta \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^5(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^6 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$1((2 \cdot 2 \cdot -1) - (2 \cdot 0 \cdot -1) - (-1 \cdot -1 \cdot -1) + (-1 \cdot 0 \cdot -1) + (0 \cdot -1 \cdot -1) - (0 \cdot 2 \cdot -1)) +$$
$$1((2 \cdot 2 \cdot 3) - (2 \cdot -1 \cdot -1) - (-1 \cdot -1 \cdot 3) + (-1 \cdot -1 \cdot -1) + (-1 \cdot -1 \cdot -1) - (-1 \cdot 2 \cdot -1)) =$$
$$(-4 + 1) + (12 - 2 - 3 - 1 - 1 - 2) = -3 + 3 = 0$$

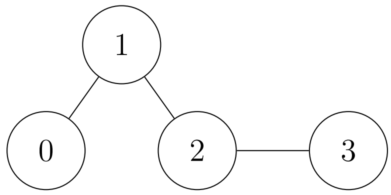
Теорема 2.1 (Матричная теорема об остовных деревьях)**.** Пусть G — связный простой граф с матрицей Кирхгофа K. Все алгебраические дополнения матрицы Кирхгофа K равны между собой и их общее значение равно количеству остовных деревьев графа G.

Пример 2.3 (Количество остовных деревьев)**.** Из примера выше, значения миноров равно 3.

Деревья:







Сумма элементов каждой строки (столбца) матрицы Кирхгофа равна нулю: $\sum_{i=0}^{|V|-1} k_{i,j} = 0$.

Определитель матрицы Кирхгофа равен нулю: $\Delta K = 0$.

Собственные числа и собственные вектора.

Нам понадобится поле F.

Определение 2.7 (Собственный вектор)**.** Ненулевой вектор x называется собственным вектором матрицы A для некоторого элемента $\lambda \in F$, если $Ax = \lambda x$

Определение 2.8 (Собственное число (Собственное значение))**.** Собственным числом матрицы A называется такое $\lambda \in F$, что существует ненулевое решение уравнения $Ax = \lambda x$.

Как видно, собственные числа и собственные вектора “ходят парами”.

Пример 2.4 (Собственные числа и вектора)**.**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

По определению $Ax = \lambda x$.

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda E)x = 0$$

$$(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix})x = 0$$

Данное уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $|A - \lambda E| = 0$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 19\lambda^2 - 12\lambda$$

То есть надо решить уравнение

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 19\lambda^2 - 12\lambda = 0$$

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 19\lambda^2 - 12\lambda = \lambda(\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4) = 0$$

Корни: $\lambda \in \{0, 1, 3, 4\}$.

Далее для каждого совственного числа нужно найти соответсвующий вектор. Для этого решаем системы линейных уравнений (метод Гаусса в помощь).

$$(A - 0 \cdot E)x = 0$$

$$(A - 1 \cdot E)x = 0$$

$$(A - 3 \cdot E)x = 0$$

$$(A - 4 \cdot E)x = 0$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определение 2.9 (Спектр графа)**.** Спектром графа называется упорядоченное по возростанию мультимножество собственных значений его матрицы смежности.

Так как мы говорим о неориентированном графе, то собственные значения всегд вещественные числа (почему?).

Хотя матрица смежности и зависит от нумерации вешин, спектр является инвариантом графа (почему?).

Следствие: изоморфные графы имеют одинаковый спектр.

Графы с одинаковым спектром — изоспектральные (или коспектральные).

Теорема 2.2. Изоморфные графы всегда изоспектральны. Обратное не верно (изоспектральные графы не обязательно изоморфны).

2.1 Лекция 2

Вернёмся к собственным числам матрицы Кирхгофа.

Минимальное значение собственных чисел — это 0.

Теорема 2.3. $\lambda_1 = 0$ тогда и только тогда, когда в графе больше одной компоненты связянности.

Напомним, что нумерация с нуля. То есть речь про второе совственное число.

Кратность нуля как собственного числа — количество компонент явязанности.

Определение 2.10 (Алгебраическая связянность графа)**.** Занчение второго собственного числа матрицы Кирхгофа называют алгебраической связанностью графа. Соотвтетсвующий собственный вектор — вектор Фидлера (Fiedler).

λ_1 монотонно неубывает при добавлении рёбер.

2.1.1 Укладка графов

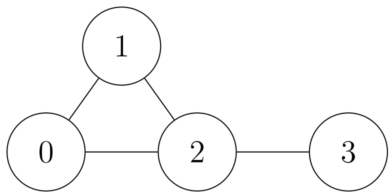
Hall, Kenneth M. "An r-Dimensional Quadratic Placement Algorithm." Management Science, vol. 17, no. 3, 1970, pp. 219–229. JSTOR, www.jstor.org/stable/2629091. Accessed 4 Apr. 2021.

Цель: нарисовать граф. Построить отоброжение из V $\mathbb{R}^n$.

Для начала, на прямой ($n = 1$). То есть хотим получить вектор координат вершин x. Для этого минимизируем

$$\sum_{(i,j)\in E} (x_i + x_j)^2 = x^T K x$$

Тривиальное решение: $x = \mathbb{1}$. Чтобы его не допускать, потребуем, чтобы $x^T \mathbb{1} = 0$. Тогда решением будет второй собственный вектор.



$$x_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В $\mathbb{R}^2$ интереснее. Хотим минимизировать суму расстояний:

$$\sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$$

при условии

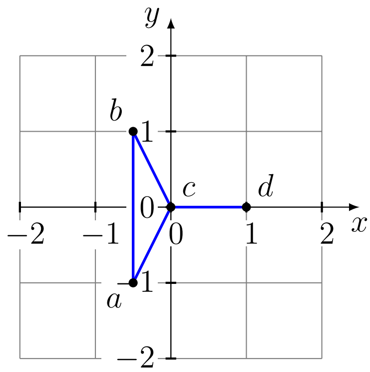
$$\sum_{i\in V} (x_i, y_i) = (0, 0)$$

чтобы избежать тривиального решения. Дополнительно потребуем ортогональность x и y.

Тогда решение — второй и третий собственные вектора.

$$x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a : (-\frac{1}{2}, -1)$$
$$b : (-\frac{1}{2}, 1)$$
$$c : (0, 0)$$
$$d : (1, 0)$$



2.1.2 Матрицы смежности

Вернёмся к матрицам смежности. Те же собственные числа, те же собственные вектора. Только упорядочиваем наоборот: $\lambda_0 \geq \lambda_1 \ldots \geq \lambda_n$.

Теорема 2.4.

$$d_{avg} \leq \lambda_0 \leq d_{max}$$

, где d — степень вершины.

Что будет, если начать удалять вешины с наименьшими степенями?

Теорема 2.5. Граф раскрашиваем в $\lfloor \lambda_0 \rfloor + 1$ цвет

Пример 2.5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \{2.170, 0.311, -1, -1.481\}$$

(все, кроме одного — приближённые значения).

Раскрашиваем ли он наш граф в $\lfloor \lambda_0 \rfloor + 1 = \lfloor 2.170 \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$ цвета?

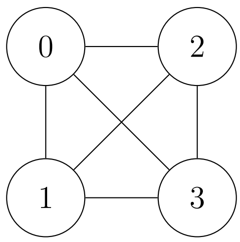
Теорема 2.6. Хроматическое число $\chi \geq 1 + \frac{\lambda_0}{-\lambda_n}$

Теорема 2.7. Граф двудольный тогда и только тогда, когда для любого собственного числа λ_i, величина $-\lambda_i$ также является собственным числом.

Теорема 2.8. Ещё немного характеристик на основе собственных значений.

- Граф с одним собственным числом — граф без рёбер.
- Граф с двумя собственными числами — полный граф.

Пример 2.6 (Пример полного графа и его матриц смежности и Кирхгофа)**.** Пусть дан граф:



$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

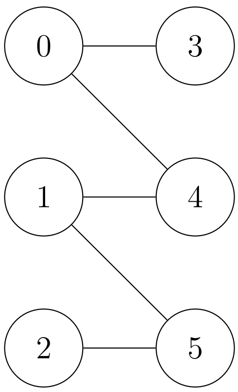
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = D - A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Начнём с матрицы смежности. Посчитаем её собственные числа.

$$\lambda_0 = 3; \lambda_1 = -1$$

Пример 2.7 (Пример двудольного графа и его матриц смежности и Кирхгофа)**.** Пусть дан граф:



$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = D - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = D + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Начнём с матрицы смежности. Посчитаем её собственные числа.

$$\lambda_0 \approx 1.802; \lambda_1 \approx 1.247; \lambda_2 \approx 0.445;$$
$$\lambda_3 \approx -0.445; \lambda_4 \approx -1.247; \lambda_5 \approx -1.802$$

Собственные числа и собственные вектора матрицы Кирхгофа.

$$\lambda_0 = 0; \lambda_1 = -\sqrt{3} + 2; \lambda_2 = 1;$$
$$\lambda_3 = 2; \lambda_4 = 3; \lambda_4 = \sqrt{3} + 2;$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}+1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что спектр K равен спектру Q.

Спектр Q:

$$\lambda_0^q = 0; \lambda_1^q = -\sqrt{3} + 2; \lambda_2^q = 1;$$
$$\lambda_3^q = 2; \lambda_4^q = 3; \lambda_4^q = \sqrt{3} + 2;$$

Теорема 2.9. Граф двудольный тогда и только тогда, когда спектр матрицы Кирхгофа равен спектру беззнаковой матрицы Кирхгофа.

2.2 Задачи

1. **[2 балла]** Доказать формулу Кэли, пользуясь матричной теоремой об остовных деревьях. Формула Кэли даёт оценку числа остовных деревьев полного графа K_n: n^{n-2}.

2. **[2 балла]** Доказать, пользуясь матричной теоремой об остовных деревьях, что число остовных деревьев полного двудольного графа $K_{m,n}$ равно $m^{n-1} \cdot n^{m-1}$.

3. **[2 балла]** Доказать, что спектр является инвариантом графа.

4. **[4 балла]** Реализовать визуализацию графов через собственные вектора. Граф принимается либо как матрица смежности в формате .mtx, либо как список рёбер (лучше предусмотреть обв варианта). Предусмотреть возможность "зума"результирующей картинки. Для экспорта лучше выбирать векторный формат, тогда проблем не будет. Можно использовать готовые компоненты.