

Задача 2

Ребалансировка портфеля активов.

Дано:

- w_{target} — целевое распределение средств по активам
- $w_{current}$ — текущее распределение
- w — искомое распределение
- c_i — коэффициент пропорциональности комиссии к изменению доли актива
- μ_i — ожидаемая прибыль актива
- R — минимально допустимая доходность портфеля
- t — вектор коэффициентов налога на прибыль по каждому активу

Тогда:

- $||w - w_{target}||_2^2$ — отклонение от целевого распределения
- $|diag(c)(w - w_{current})|$ — общая комиссия за ребалансировку,
 $diag(\mu)$ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят компоненты вектора c
- $diag(\mu)w$ — вектор ожидаемой прибыли
- $t^T(diag(\mu)w)$ — общий налог на прибыль
- $\mu^T w$ — прибыль без учета налога

Необходимо минимизировать отклонение и сумму комиссий за ребалансирвку. Возможно мы захотим ввести коэффициент важности величины отклонения относительно суммы комиссий λ . При этом портфель должен принести доход не меньше ожидаемой прибыли, доли активов не должны быть меньше нуля, сумма долей должна быть равна 1.

Задача оптимизации:

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \lambda ||w - w_{target}||_2^2 + |diag(c)(w - w_{current})| \\ s.t. : \quad & \mu^T w - t^T(diag(\mu)w) \geq R, \\ & w_i \geq 0, \\ & \sum_i w_i = 1 \end{aligned}$$

Покажем, что это задача выпуклой оптимизации:

- $||w - w_{target}||_2^2$ — вторая норма от линейного преобразования вектора, выпуклая
 - $|diag(c)(w - w_{current})|$ — первая норма от линейного преобразования вектора, выпуклая
- Значит, функция минимизации выпуклая, как сумма выпуклых функций.

$\mu^T w - t^T(diag(\mu)w) \geq R$ — умножение вектора на матрицу и разность скалярных произведений, выпуклая.

Остальные ограничения представляют собой линейные функции, значит задача выпуклая.