Лабораторная работа 12. Слежение и компенсация

Вариант: 11

Подготовил: Прокопов Егор Максимович

Группа R33353

Преподаватель-практик: Пашенко А.В

Исходные данные

В этой лабораторной работе их нет.

Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Имеем объект с генератором внешнего возмущения вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w, \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Выберем матрицы этой системы:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 3.00 & 1.00 \\ 0.00 & -1.00 & 4.00 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа матриц A_1 и A_2:

$$\sigma(A_1) = \{1.0, 3.5 \pm 0.87j\},$$
$$\sigma(A_2) = \{0. \pm 1.j, 0. \pm 2.j\}$$

Как видно, оба набора собственных чисел лежат в правой комплексной полуплоскости.

Все собственные числа матрицы A_1 управляемы, соответственно пара (A_1, B_1) стабилизируема.

Зададимся целевой переменной

$$z = C_2 x,$$

где

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Найдем регулятор вида

$$u = K_1 x + K_2 w$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1(K_1 x + K_2 w) + B_2 w = (A_1 + B_1 K_1)x + (B_2 + B_1 K_2)w \\ z = C_2 x + D_2 w = C_2 x, \text{ т.к. } D_2 = 0 \end{cases}$$

Матрицу K_1 мы можем определить как матрицу регулятора, синтезированного любым способом, поэтому был выбран LQR регулятор с матрицами $Q = 1I$, $R = 5$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -6.35 & -94.35 & 84.56 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы $(A + B_1 K_1)$:

$$\sigma(A_1 + B_1 K_1) = \{-3.53 \pm 0.86j, -1.09\}$$

Видно, что все собственные числа такой матрицы - устойчивые.

Матрицу K_2 найдем, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2, \\ C_2 P = 0, \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

Матрица K_2 получилась следующая:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.80 & -6.74 & -31.30 & 10.72 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование:

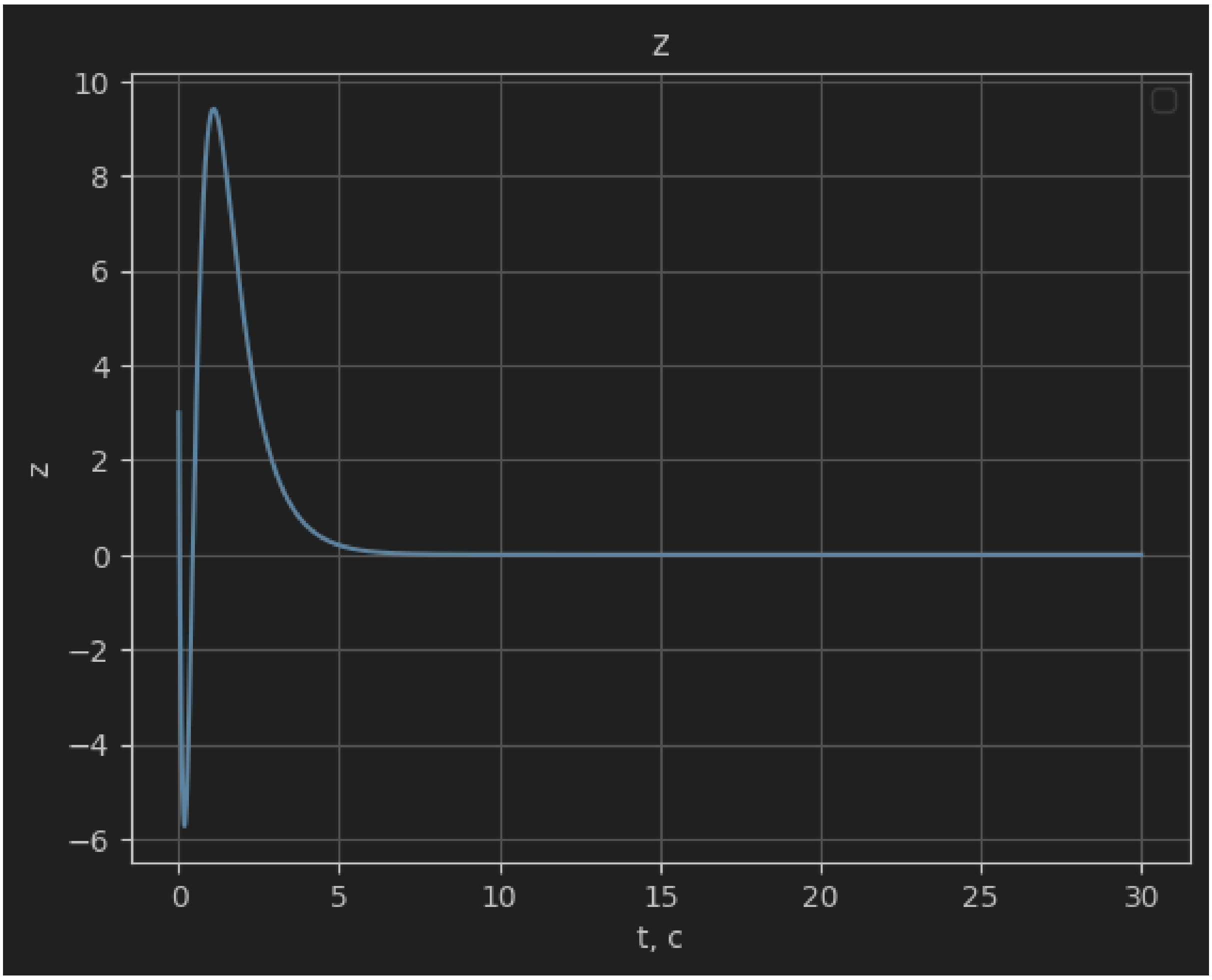

График 1. График целевой переменной $z = C_2 x$.

Как видно, $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$, значит все работает.

Задание 2. Следящий регулятор по состоянию

Имеем объект управления с генератором задающего воздействия вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u, \\ \dot{w} = A_2 w \end{cases}$$

Зададимся целевой переменной

$$z = C_2 x + D_2 w$$

Матрицы A_1, A_2, B_1, C_2 возьмем с предыдущего задания:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 3.00 & 1.00 \\ 0.00 & -1.00 & 4.00 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

Выберем $D_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix}$.

Найдем регулятор вида

$$u = K_1 x + K_2 w,$$

обеспечивающий выполнение целевого условия $\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = 0$.

Тогда:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 (K_1 x + K_2 w) = (A_1 + B_1 K_1) x + B_1 K_2 w \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases}$$

Матрицу K_1 также, как и в первом задании, можем найти как матрицу регулятора, синтезированную любым способом. Также, как и в прошлый раз, воспользуемся LQR с теми же значениями $Q = 1I$, $R = 5$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -6.35 & -94.35 & 84.56 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы $(A_1 + B_1K_1)$:

$$\sigma(A_1 + B_1K_1) = \{-3.53 \pm 0.86j, -1.09 + 0.00j\}$$

Видно, что все собственные числа такой матрицы - устойчивые.

Найдем матрицу K_2, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y, \\ C_2P + D_2 = 0, \\ K_2 = Y - K_1P \end{cases}$$

Матрица K_2 получилась следующая:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.19 & -0.42 & 0.84 & 1.41 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование:

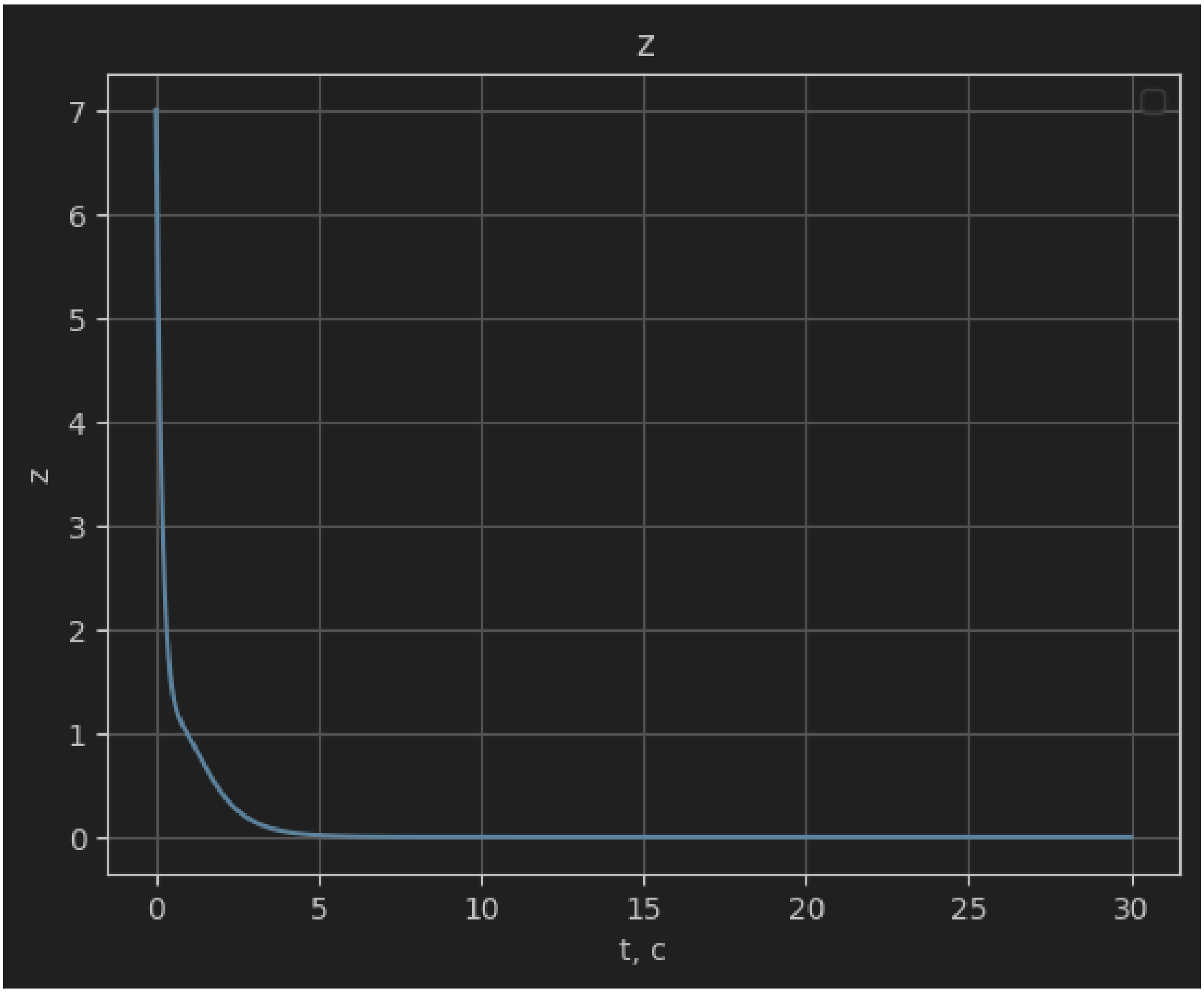

График 2. График целевой переменной $z = C_2x + D_2w$.

Из графика 2 видно, что $\lim\limits_{t\to\infty} z(t) = 0$.

Задание 3. Регулятор по выходу при различных y и z

Имеем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w, \\ \dot{w} = A_2w, \\ y = C_1x + D_1w, \\ z = C_2x + D_2w \end{cases}$$

Выберем матрицы $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 4.00 \\ 7.00 \\ 10.00 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 4.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 10.00 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 2.00 & 3.00 & 1.00 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 11.00 & 12.00 & 13.00 & 14.00 \end{bmatrix}$$
$$D_1 = \begin{bmatrix} 3.00 & 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 14.00 & 13.00 & 12.00 & 11.00 \end{bmatrix}$$

Все собственные числа $\sigma(A_1) = \{1.0, 2.0, 3.0, 4.0\}$ управляемы, получается, что система (A_1, B_1) - стабилизируема. Также, $\sigma(A_2) \in \overline{C}_+$.

Пара

$$\left(\begin{bmatrix} C_1 & D_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}\right)$$

обнаруживаема, поскольку все ее собственные числа наблюдаемы.

Расширенный наблюдатель:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_1\hat{x} + B_1 u + B_2\hat{w} + L_1(\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{w}} = A_2\hat{w} + L_2(\hat{y} - y), \\ \hat{y} = C_1\hat{x} + D_1\hat{w} \end{cases}$$

Следящий регулятор:

$$u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w}$$

Ошибка наблюдателя:

$$\begin{cases} e_x = x - \hat{x}, \\ e_w = w - \hat{w} \end{cases}$$

Динамика ошибки наблюдателя:

$$\begin{cases} \dot{e}_x = (A_1 + L_1C_1)e_x + (B_2 + L_1D_1)e_w, \\ \dot{e}_w = L_2C_1e_x + (A_2 + L_2D_1)e_w \end{cases}$$

Синтезируем наблюдатель LQE ($Q = 1I$, $R = 5$):

$$L_1 = \begin{bmatrix} 133.89 \\ -451.78 \\ 540.59 \\ -884.30 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.09 \\ -0.90 \\ -0.95 \\ 1.04 \end{bmatrix}$$

Аналогично предыдущим заданиям синтезируем регулятор и получим матрицы K_1 и K_2, использовав LQR со значениями $Q = 1I$, $R = 5$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 35.99 & -73.76 & 92.03 & -40.85 \end{bmatrix}$$

Найдем решение системы

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2, \\ C_2 P + D_2 = 0, \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases}$$

Получим:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 76.62 & -99.75 & 188.85 & 17.10 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование:

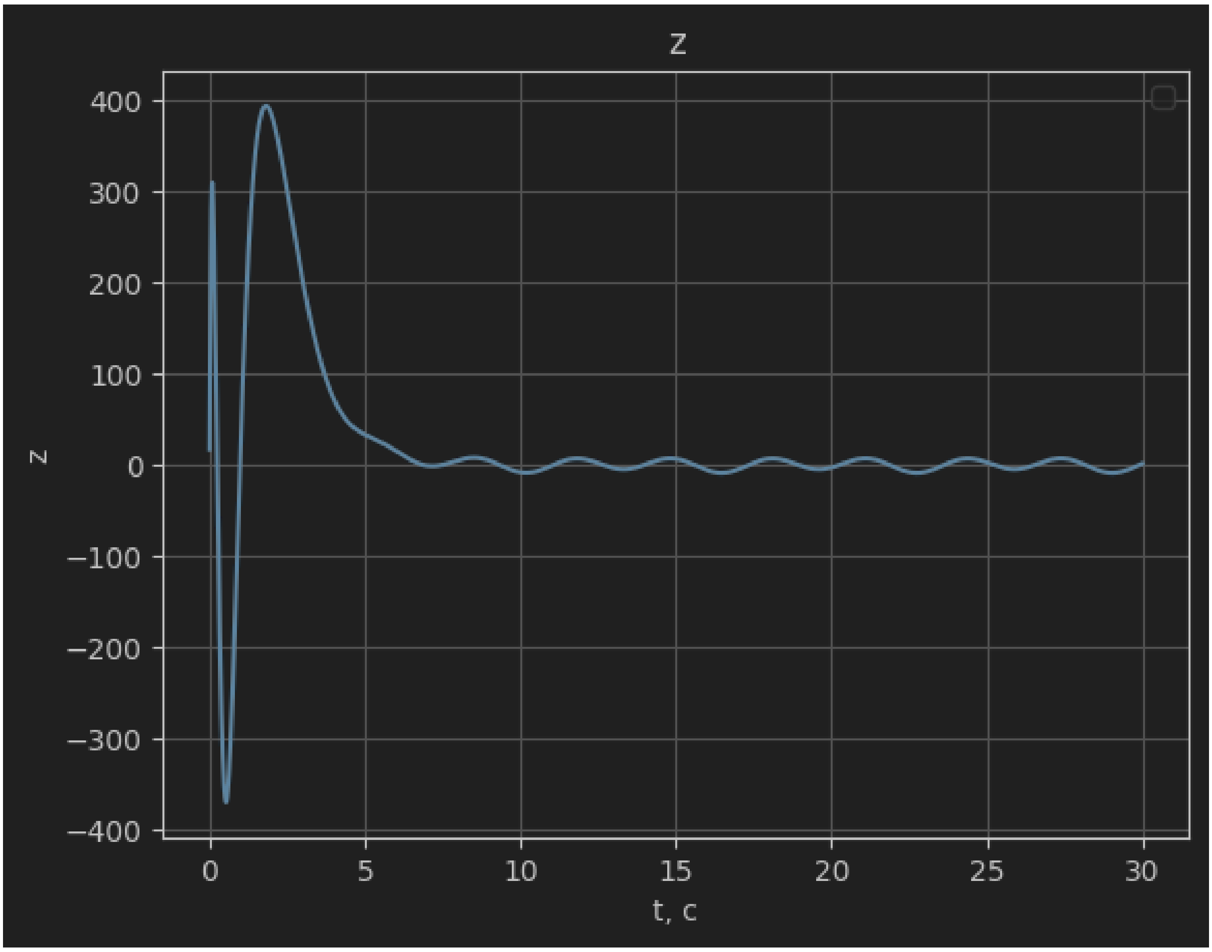

График 3. График целевой переменной $z = C_2 x + D_2 w$ при различных y и z.

Видно, что $z(t)$ стремится к нулю.

Представим уравнение регулятора в форме вход-состояние-выход:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$

Задание 4. Регулятор по выходу при одинаковых y и z

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w, \\ \dot{w} = A_2 w, \\ y = z = Cx + Dw \end{cases}$$

Возьмем матрицы из предыдущего задания:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ -1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 2.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 4.00 \\ 7.00 \\ 10.00 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 4.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 10.00 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1.00 & 2.00 & 3.00 & 1.00 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3.00 & 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

Аналогично предыдущему заданию, синтезируем регулятор и наблюдатель:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 35.99 & -73.76 & 92.03 & -40.85 \end{bmatrix},$$
$$K_2 = \begin{bmatrix} 76.70 & -99.76 & 188.82 & 17.36 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 133.89 \\ -451.78 \\ 540.59 \\ -884.30 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.09 \\ -0.90 \\ -0.95 \\ 1.04 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование:

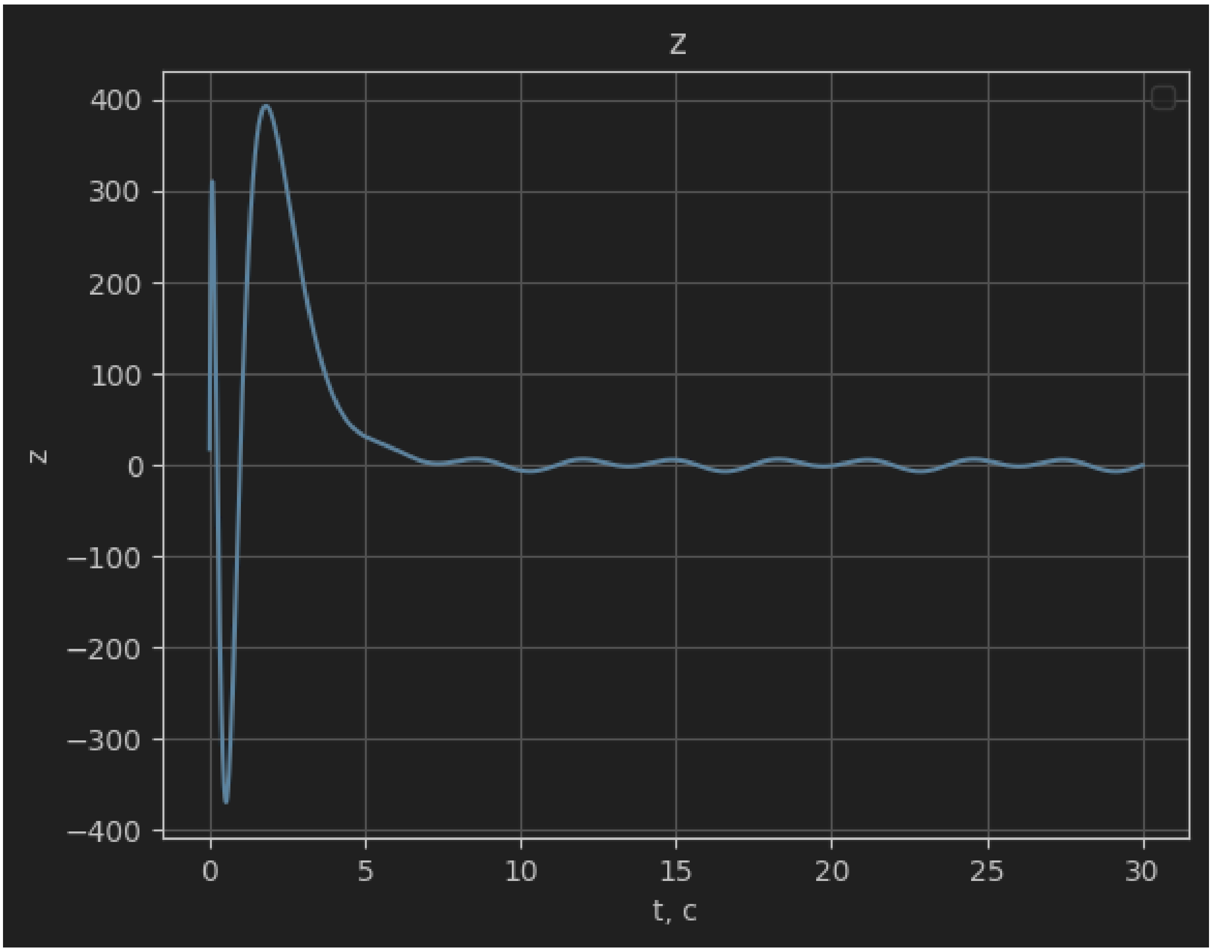

График 4. График целевой переменной $z = Cx + Dw$ при одинаковых y и z.

Видно, что $z(t)$ стремится к нулю.

Представим уравнение регулятора в форме вход-состояние-выход:

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}$$