

Лабораторная работа №10.

Линейно-квадратичные радости

Вариант: 11

Подготовил: Прокопов Егор Максимович

Группа R33353

Преподаватель-практик: Пашенко А.В

Исходные данные

Задание 1. Исследование LQR

Задание 2. Сравнение LQR с не-LQR

Задание 3. Исследование LQE (фильтр Калмана)

Задание 4. Синтез LQG

Исходные данные

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Задание 1. Исследование LQR

Были взяты матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Начальные условия:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Нам необходимо синтезировать регулятор

$$\begin{aligned} u &= Kx \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{x} &= (A + BK)x, \end{aligned}$$

минимизирующий функционал качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

Выберем значения матриц Q и R :

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1.0I_Q, R_1 = 1.0I_R, \\ Q_2 &= 10.0I_Q, R_2 = 1.0I_R, \\ Q_3 &= 1.0I_Q, R_3 = 10.0I_R, \\ Q_4 &= 1.0I_Q, R_4 = 0.1I_R, \\ Q_5 &= 0.1I_Q, R_5 = 1.0I_R \end{aligned}$$

Для каждого такого набора синтезируем регулятор, решив уравнение Риккати

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0, \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases}$$

и найдем соответствующее минимальное значение функционала качества по формуле

$$J = x_0^T P x_0$$

1. $Q_1 = 1.0I_Q, R_1 = 1.0I_R$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.2 & 10.9 & 3.6 & -6.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2.76 & -18.96 & -4.19 & 12.71 \\ -18.96 & 142.76 & 31.41 & -96.83 \\ -4.19 & 31.41 & 7.97 & -22.57 \\ 12.71 & -96.83 & -22.57 & 67.86 \end{bmatrix}, J_{\text{теор}_1} = 24.5$$

2. $Q_2 = 10.0I_Q, R_2 = 1.0I_R$:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.5 & 32.4 & 9.5 & -20.5 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 25.76 & -179.50 & -38.16 & 120.61 \\ -179.50 & 1340.45 & 287.05 & -913.20 \\ -38.16 & 287.05 & 70.33 & -208.48 \\ 120.61 & -913.20 & -208.48 & 643.59 \end{bmatrix}, J_{\text{теор}_2} = 216.8$$

3. $Q_3 = 1.0I_Q, R_3 = 10.0I_R$:

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.60 & 3.52 & 1.41 & -2.17 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 4.05 & -24.10 & -6.40 & 16.10 \\ -24.10 & 173.36 & 41.73 & -116.38 \\ -6.40 & 41.73 & 12.24 & -29.30 \\ 16.10 & -116.38 & -29.30 & 80.61 \end{bmatrix}, J_{\text{теор}_3} = 33.56$$

4. $Q_4 = 1.0I_Q, R_4 = 0.1I_R$:

$$K_4 = \begin{bmatrix} -2.50 & 32.40 & 9.53 & -20.47 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 2.58 & -17.95 & -3.82 & 12.06 \\ -17.95 & 134.04 & 28.70 & -91.32 \\ -3.82 & 28.70 & 7.03 & -20.85 \\ 12.06 & -91.32 & -20.85 & 64.36 \end{bmatrix}, J_{\text{теор}_4} = 21.68$$

5. $Q_5 = 0.1I_Q, R_5 = 1.0I_R$:

$$K_5 = \begin{bmatrix} -0.60 & 3.52 & 1.41 & -2.17 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix},$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0.40 & -2.41 & -0.64 & 1.61 \\ -2.41 & 17.34 & 4.17 & -11.64 \\ -0.64 & 4.17 & 1.22 & -2.93 \\ 1.61 & -11.64 & -2.93 & 8.06 \end{bmatrix}, J_{\text{теор}_5} = 3.36$$

Из расчетов (2 и 4, 3 и 5) подтверждено, что при увеличении Q и R в несколько раз, настолько же увеличится $J_{\text{теор}}$ и P . При этом регулятор не изменится.

Реальные значения функционала качества, полученные при моделировании $J_{\text{эксп}} : \{24.52, 216.92, 33.58\}$. Видно, что разница между экспериментальными и реальными значениями минимальна.

Далее было проведено моделирование, исключив из списка пар (Q, R) случаи 4 и 5, поскольку они дублируют случаи 2 и 3.

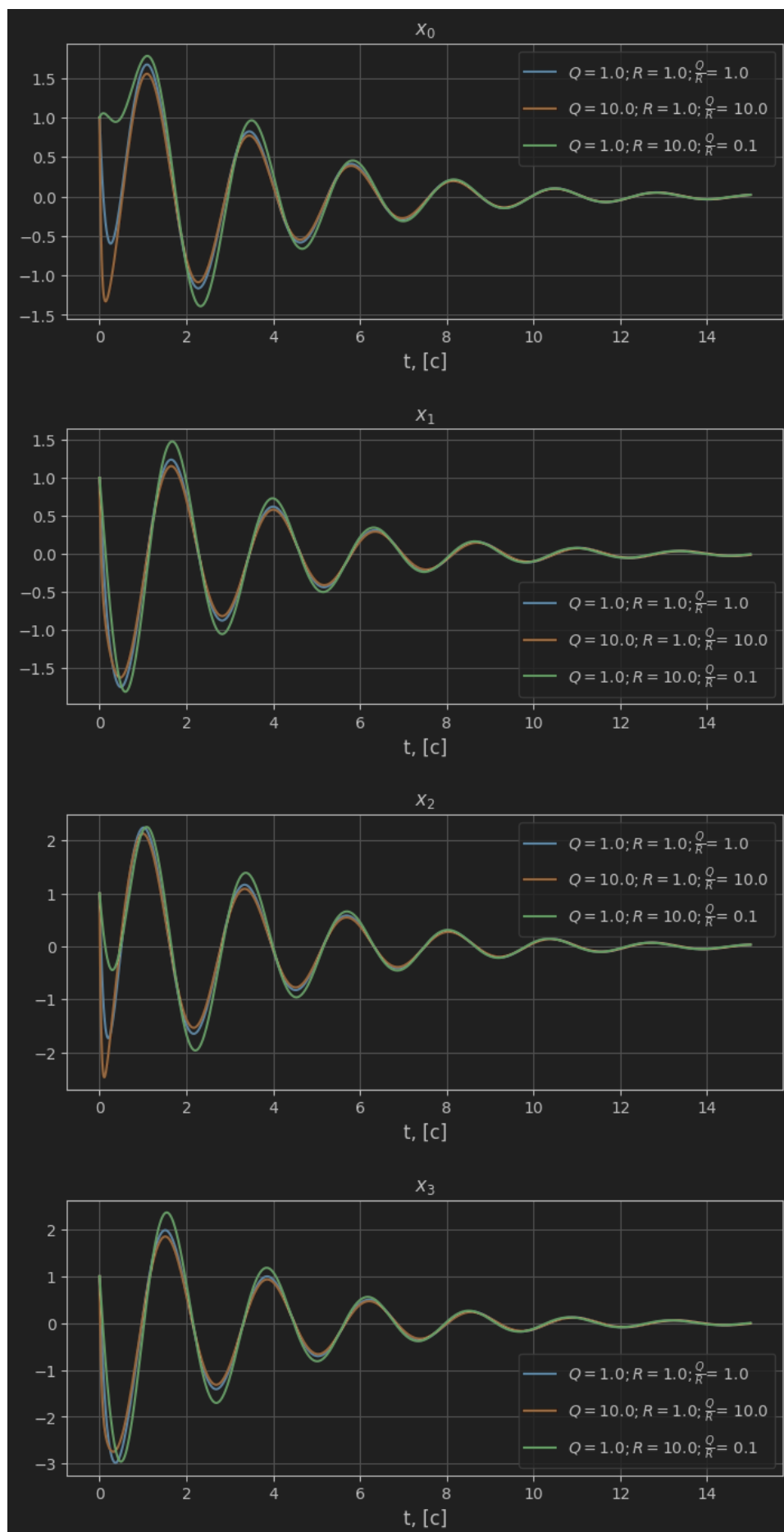


График 1. Графики компонент моделирования траектории при различных наборах Q и R задания 1.

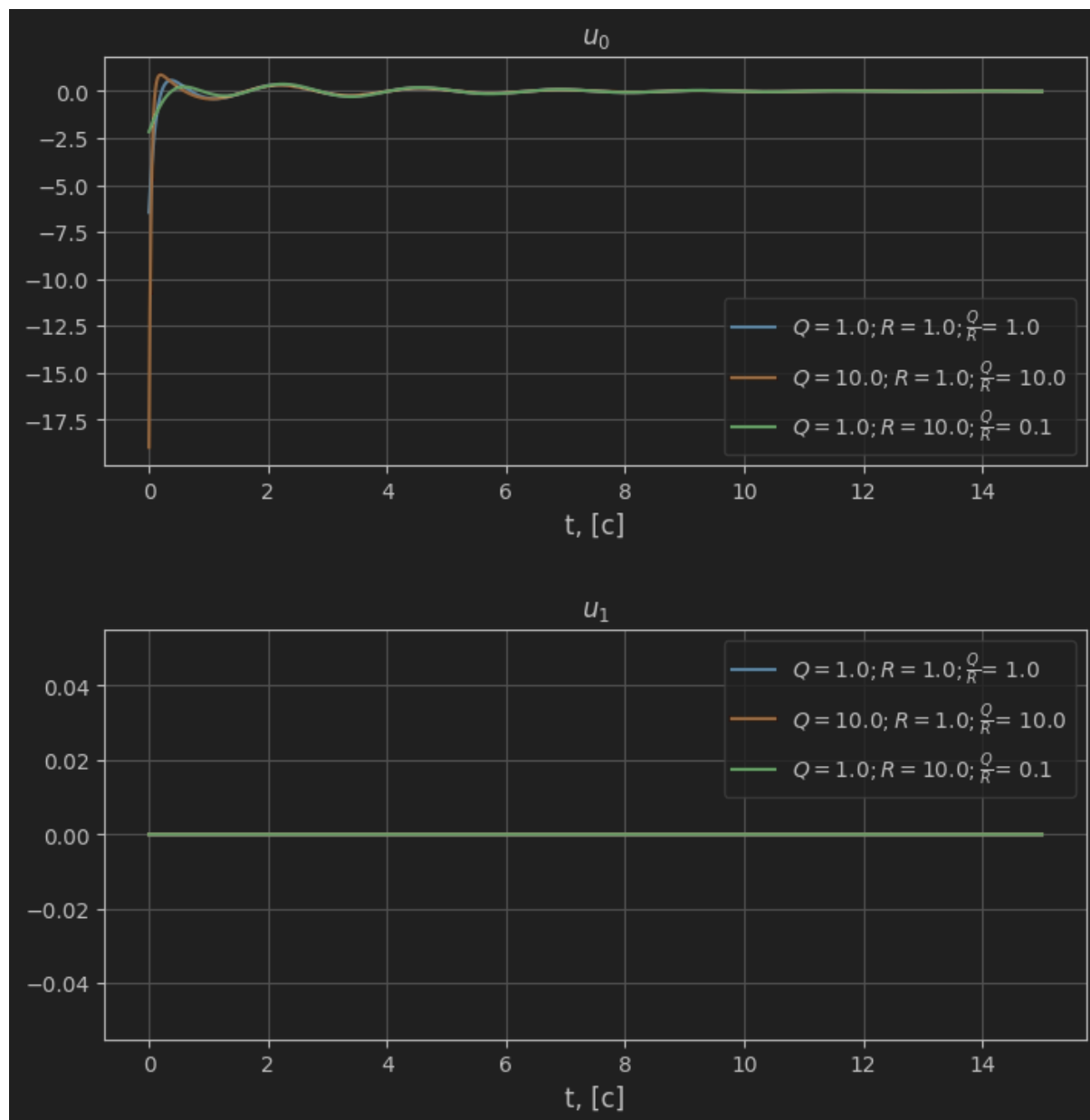


График 2. Графики компонент моделирования входного воздействия системы при различных наборах Q и R задания 1.

Можно заметить, что чем больше соотношение Q/R , тем сильнее входное воздействие и тем быстрее сходятся графики компонент траектории.

Задание 2. Сравнение LQR с не-LQR

Возьмем $Q_2 = 10.0I_Q, R_2 = 1.0I_R$. Сравнивать будем с LMI при $\alpha = 2.0$. Было проведено моделирование:

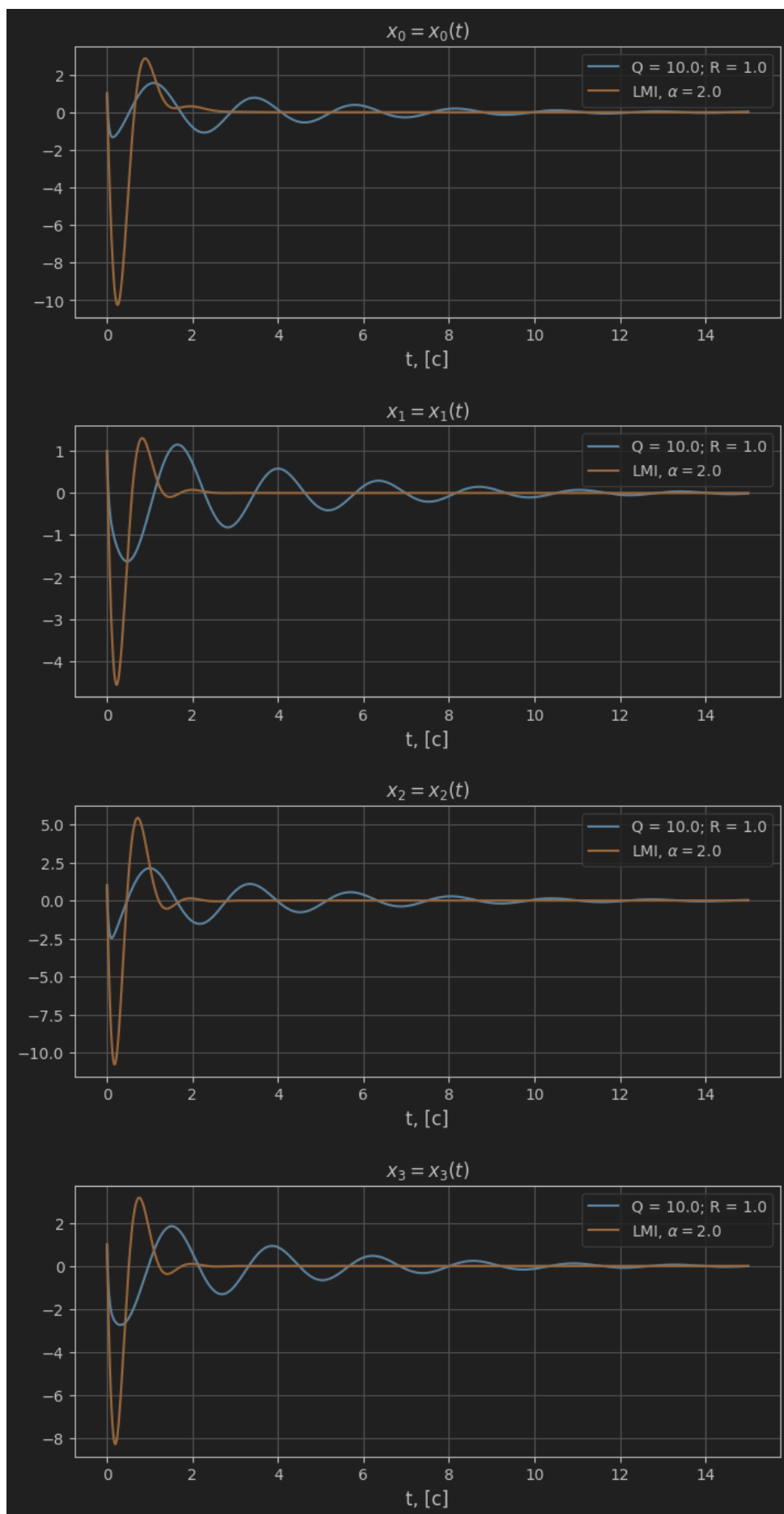


График 3. Графики компонент моделирования траектории при $Q = 10.0$, $R = 1.0$ и LMI при $\alpha = 2.0$ задания 2.

Заметно, что при LMI график сходится быстрее, однако присутствует гораздо большее, чем при LQR , перерегулирование.

Также были замерены значения функционала качества по формуле

$$J(t) = \int_0^t (x^T Q x + u^T R u) d\tau$$

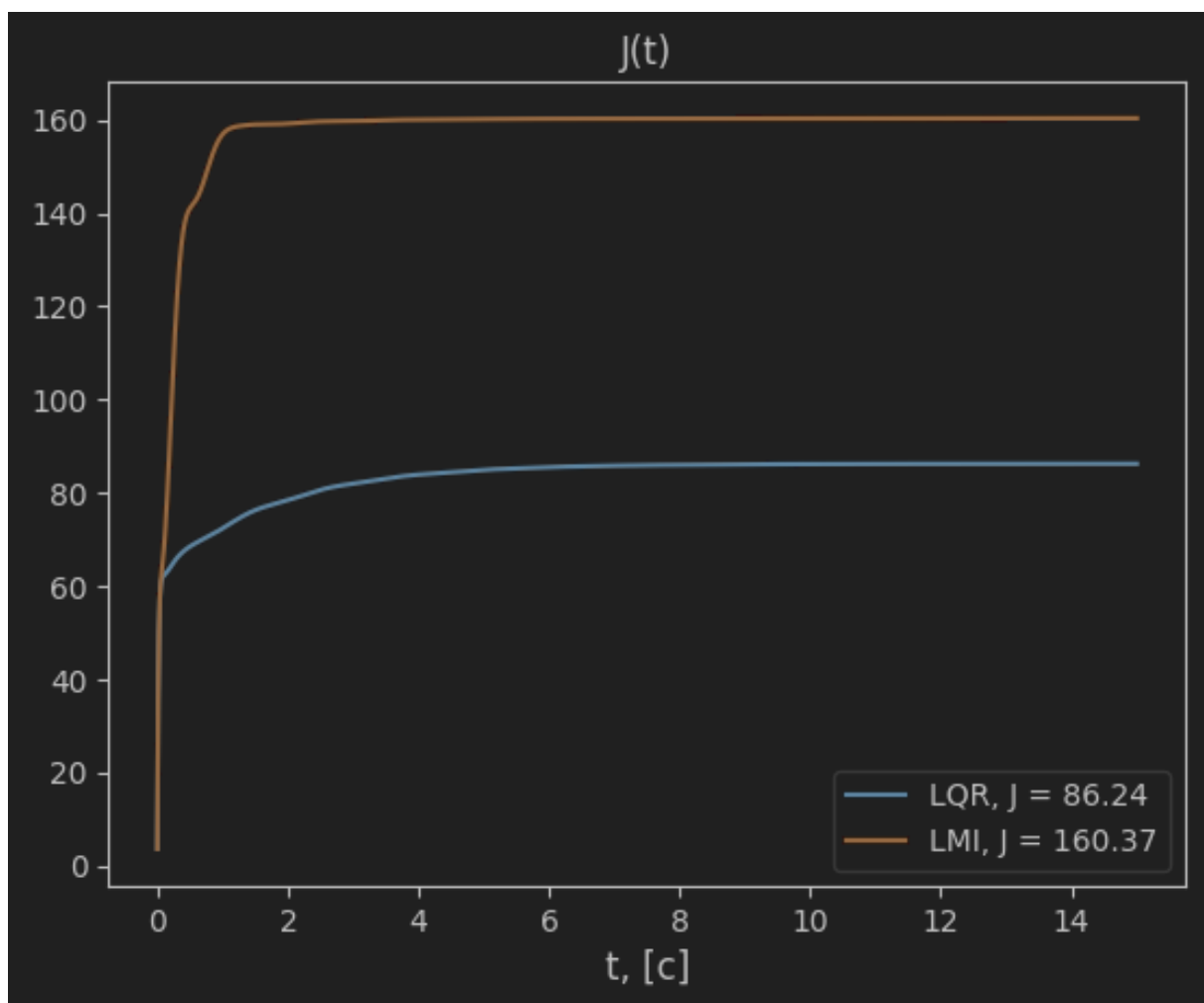


График 4. Графики величины $J(t)$, соответствующих LQR и LMI .

Видно, что LQR действительно обеспечивает лучший результат (почти в 2 раза лучший).

Задание 3. Исследование LQE (фильтр Калмана)

Возьмем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f, \\ y = Cx + \xi, \end{cases}$$

где $f(t)$ и $\xi(t)$ - внешние возмущения.

Начальные условия:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Выберем те же значения Q и R , что и в первом задании (а именно набор из 5 пар):

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1.0I_Q, R_1 = 1.0I_R, \\ Q_2 &= 10.0I_Q, R_2 = 1.0I_R, \\ Q_3 &= 1.0I_Q, R_3 = 10.0I_R, \\ Q_4 &= 1.0I_Q, R_4 = 0.1I_R, \\ Q_5 &= 0.1I_Q, R_5 = 1.0I_R \end{aligned}$$

Для каждой такой пары синтезируем соответствующий наблюдатель LQE (фильтр Калмана), решив уравнения фильтра Калмана:

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases}$$

1. $Q_1 = 1.0I_Q, R_1 = 1.0I_R$:

$$L = \begin{bmatrix} -12.29 & -0.54 \\ 3.19 & -1.35 \\ -7.98 & 0.26 \\ 4.65 & -1.33 \end{bmatrix}$$

2. $Q_2 = 10.0I_Q, R_2 = 1.0I_R$:

$$L = \begin{bmatrix} -108.11 & -27.74 \\ 31.97 & -10.01 \\ -72.07 & -17.20 \\ 46.43 & -6.82 \end{bmatrix}$$

3. $Q_3 = 1.0I_Q, R_3 = 10.0I_R$:

$$L = \begin{bmatrix} -1.33 & -0.08 \\ 0.09 & -0.22 \\ -0.89 & 0.08 \\ 0.04 & -0.22 \end{bmatrix}$$

4. $Q_4 = 1.0I_Q, R_4 = 0.1I_R$:

$$L = \begin{bmatrix} -108.11 & -27.74 \\ 31.97 & -10.01 \\ -72.07 & -17.20 \\ 46.43 & -6.82 \end{bmatrix}$$

5. $Q_5 = 0.1I_Q, R_5 = 1.0I_R$:

$$L = \begin{bmatrix} -1.33 & -0.08 \\ 0.09 & -0.22 \\ -0.89 & 0.08 \\ 0.04 & -0.22 \end{bmatrix}$$

Видно, что наблюдатели в 3 и 5 и 2 и 4 случаях идентичны, повторяя опыт из предыдущих заданий (где идентичными получились регуляторы).

Поэтому также, как и в прошлых заданиях, выберем только 3 пары (Q, R) из 5. Но на этот раз, для разнообразия, пусть это будут пары 1, 4 и 5.

Для каждого наблюдателя выполним сравнение их работы при разных возмущениях f и ξ (увеличив их std в $(1, 10)$, $(10, 1)$ и $(10, 10)$ раз):

1. $Q_1 = 1.0I_Q, R_1 = 1.0I_R$:

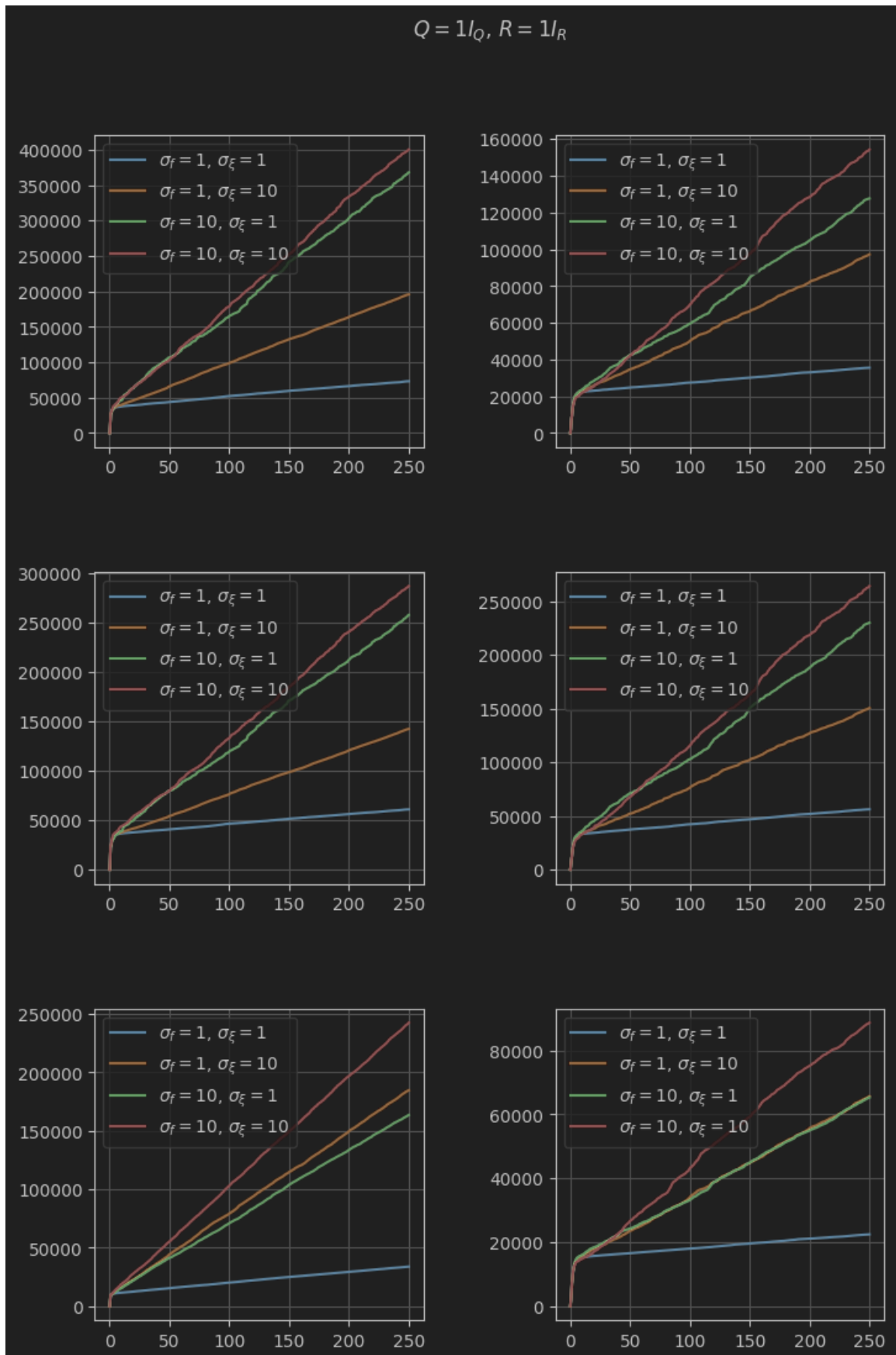


График 5. Графики кумулятивных сумм модулей ошибок компонент при том наборе (Q, R)

2. $Q_4 = 1.0I_Q, R_4 = 0.1I_R$:

$$Q = 1I_Q, R = 0.1I_R$$

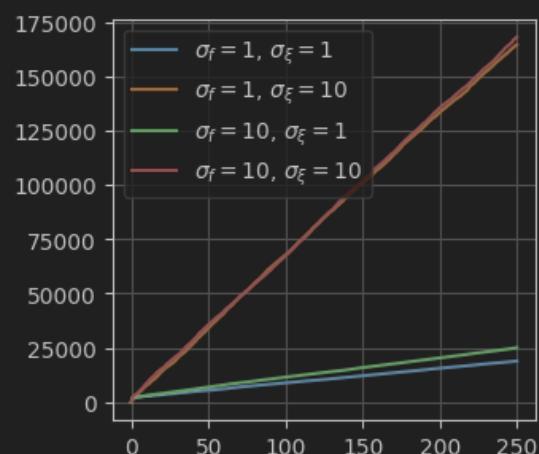
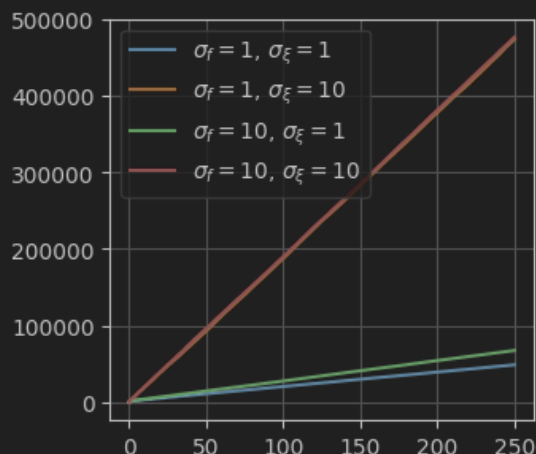
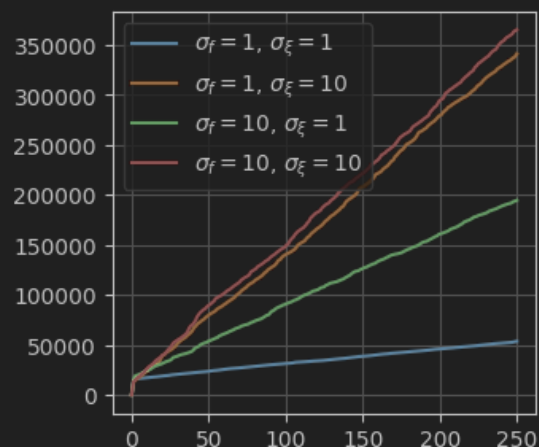
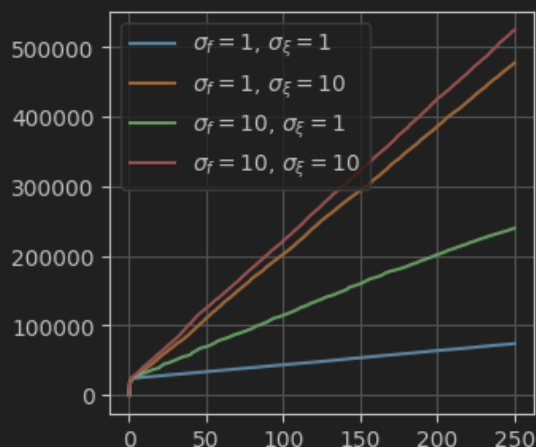
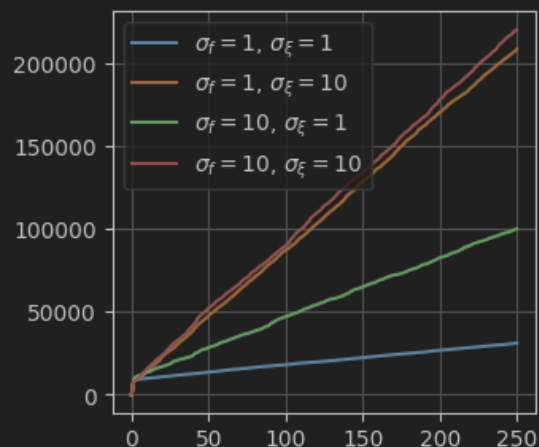
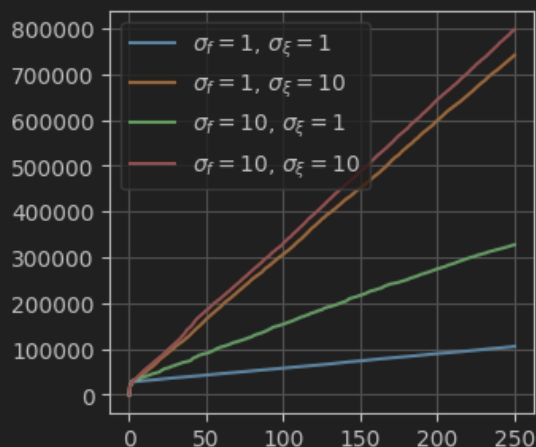


График 6. Графики кумулятивных сумм модулей ошибок компонент при 2ом наборе (Q, R)

3. $Q_5 = 0.1I_Q, R_5 = 1.0R$:

$$Q = 0.1I_Q, R = 1.0I_R$$

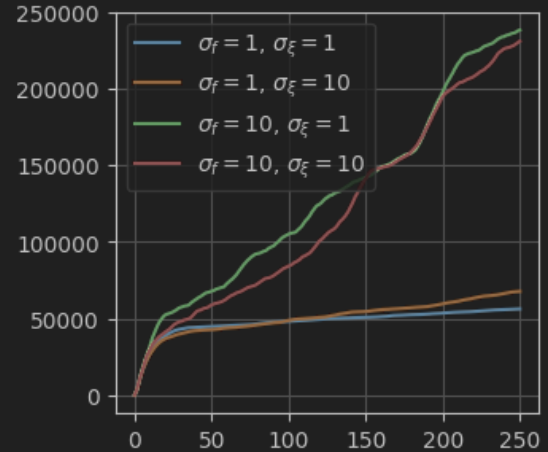
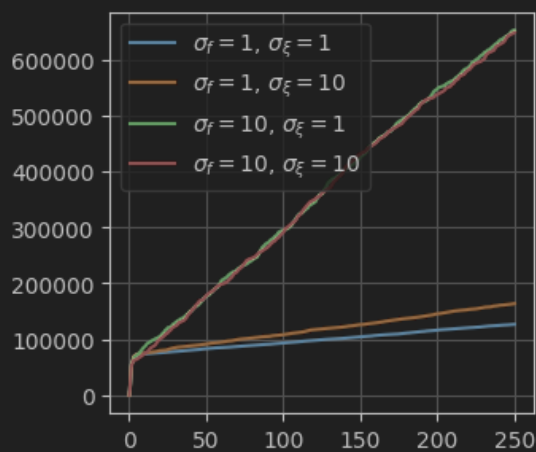
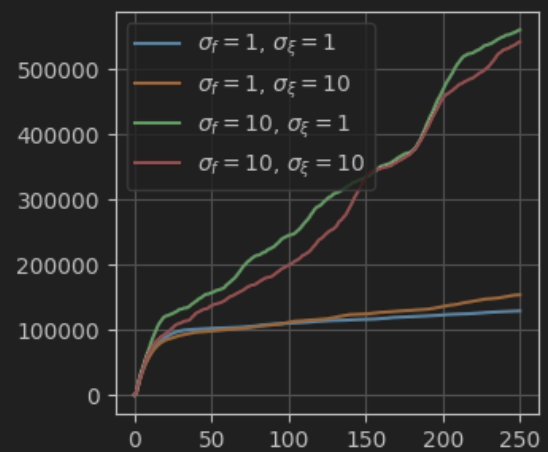
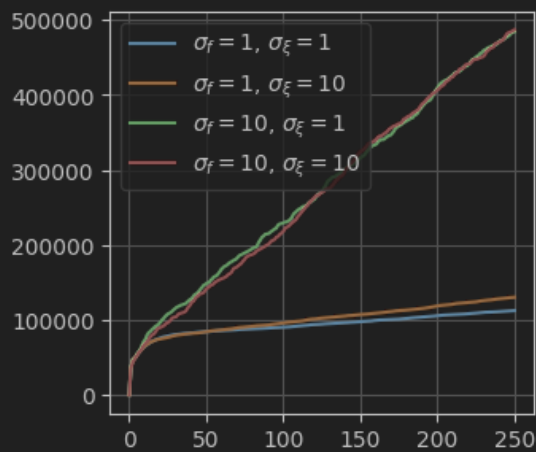
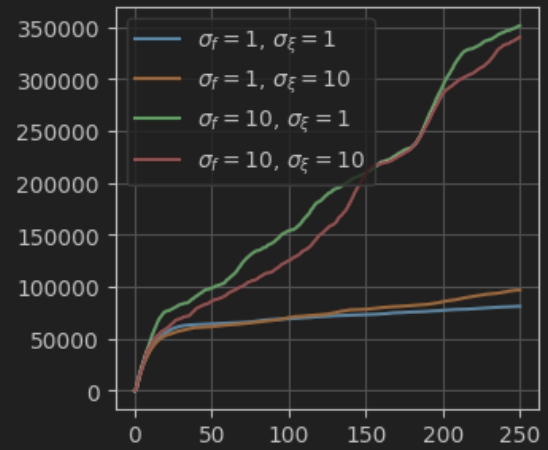
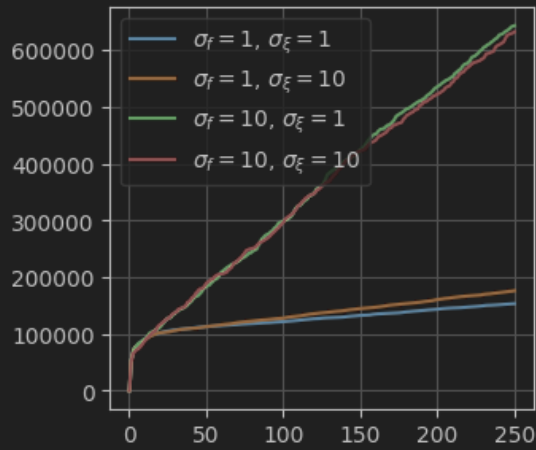


График 7. Графики кумулятивных сумм модулей ошибок компонент при Зом наборе (Q, R)



Поскольку простое сравнение модуля ошибки той или иной компоненты крайне зашумлено (см график 8), было принято решение сравнивать кумулятивные суммы ошибок

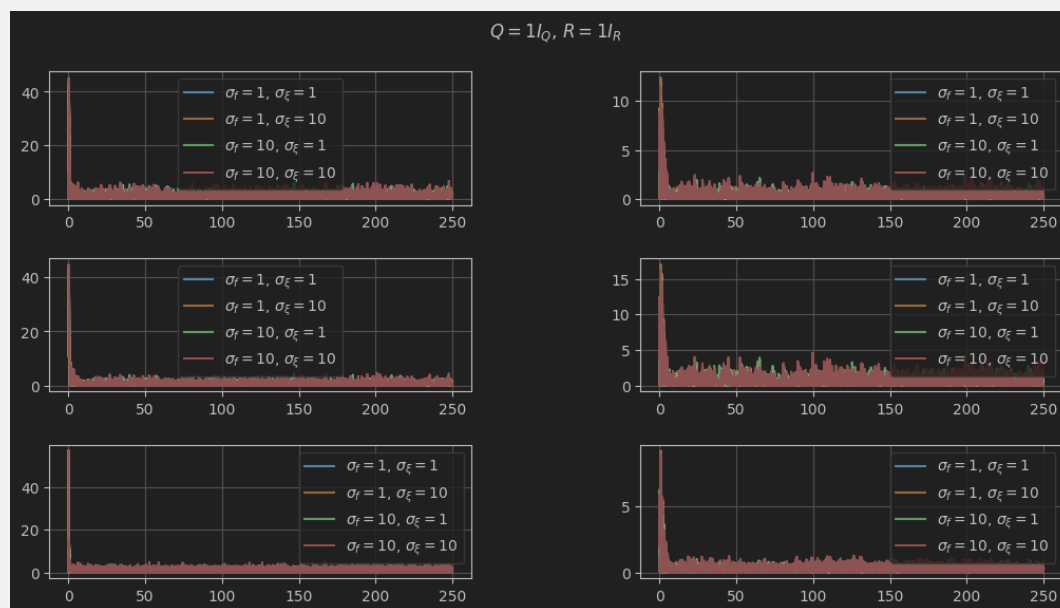


График 8. Графики модулей ошибок компонент

Из графиков 5, 6 и 7 видно, что вне зависимости от матриц Q или R , или стандартного отклонения шума, кумулятивная сумма после какого то момента становится "почти прямой". Это значит, что ошибка со временем не возрастает. Однако из за того, что шумы имеют случайный характер, разброс значений все равно присутствует. Очевидно, что больший шум порождает больший разброс в значениях, а следовательно большую ошибку.

Также видно, что при стандартном распределении шума ($\sigma = 1$) динамика ошибки различных наблюдателей различна (синяя линия на графиках). При большем соотношении Q/R угол наклона "прямой" кумулятивной ошибки больший. Однако, стоит помнить, что точное следование наблюдателя за реальными данными не всегда хорошо, поскольку имеющиеся шумы могут в значительной степени исказить производную траектории $x(t)$ (что

может исказить анализ, как это произошло на 1ом курсе на влд при проектировании сигвея).

Задание 4. Синтез LQG

Возьмем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 19 & 10 & -13 \\ 0 & -9 & 0 & 6 \\ -4 & 8 & 6 & -7 \\ 0 & -15 & 0 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 6 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bx + f, \\ y = Cx + Du + \xi, \end{cases} f \sim N(0, 1), \xi \sim N(0, 1)$$

По опыту прошлых заданий выберем $Q = 1.0I_Q, R = 10.0I_R$, поскольку такая пара обеспечивает схождение системы при меньших затратах и снижает влияние внешних шумов на наблюдатель.

Синтезируем соответствующий регулятор и соответствующий наблюдатель:

$$K = \begin{bmatrix} 0.60 & -3.52 & -1.41 & 2.17 \\ -0.00 & -0.00 & -0.00 & -0.00 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -1.33 & -0.08 \\ 0.09 & -0.22 \\ -0.89 & 0.08 \\ 0.04 & -0.22 \end{bmatrix}$$

По полученному регулятору и наблюдателю выполним моделирование:

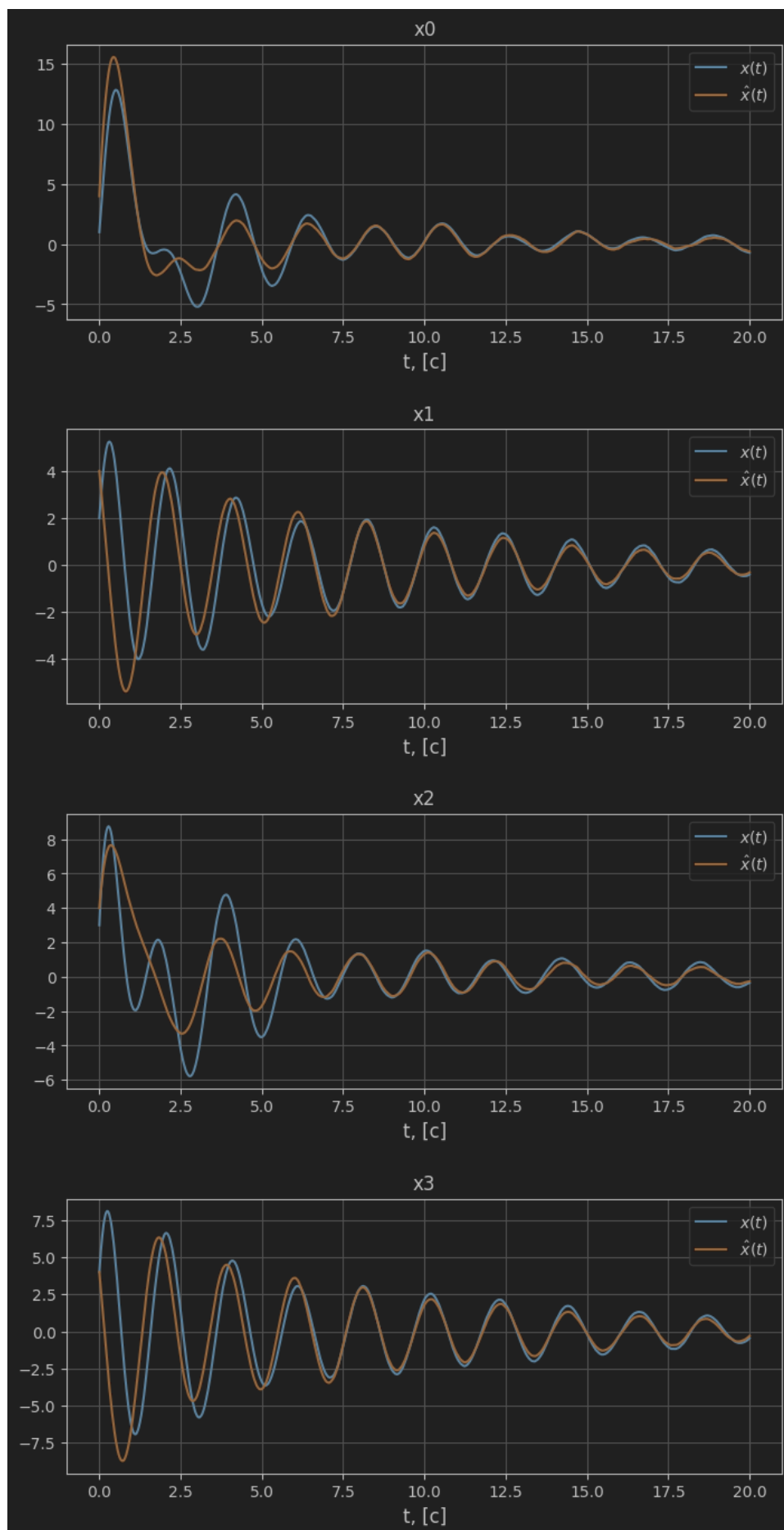


График 9. Результаты моделирования задания 4

Видно, что хоть система сходится.