Лабораторная работа №9. Регуляторы с заданной степенью устойчивости

Вариант: 11

Подготовил: Прокопов Егор Максимович

Группа R33353

Преподаватель-практик: Пашенко А.В

Исходные данные

Для задания 1

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Для задания 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Для задания 4

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Задание 1

Возьмем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Шаг 1

Мы имеем объект управления $\dot{x} = Ax + Bu$ и регулятор $u = Kx$. Отсюда мы можем получить систему

$$\dot{x} = Ax + BKx = (A + BK)x$$

Шаг 2

Были найдены собственные числа матрицы A:

$$\sigma(A) = \{-4, 1, 1 \pm 5j\}$$

Среди них, только $\lambda_1 = -4$ неуправляемо. Поскольку оно неуправляемо, то его не получится "сдвинуть", а значит мы не сможем получить желаемую степень устойчивости α большую, чем $-Re(\lambda_1)$
.

Поэтому выберем следующий набор желаемых степеней устойчивости:

$$\mathrm{A} = \{0.000001, 0.1, 1, 4, 5\}$$

Последнее значение было выбрано для проверки гипотезы выше.

Шаг 3

Найдем матрицу K, при которой гарантируется заданная степень устойчивости $\alpha_i \in \mathrm{A}$.

Для этого необходимо решить следующую систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} P \succ 0, \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0, \\ K = YP^{-1} \end{cases}$$

Решим ее при помощи библиотеки `cvx` .

Для $\alpha_1 = 0.000001$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.78e-16 & -8.07e-01 & -2.45e-01 & -3.09e-01 \end{bmatrix}$$

Для $\alpha_2 = 0.1$:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -2.51e-16 & -9.12e-01 & -2.89e-01 & -3.22e-01 \end{bmatrix}$$

Для $\alpha_1 = 1.0$:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.65e-15 & -2.58e+00 & -9.45e-01 & -3.23e-01 \end{bmatrix}$$

Для $\alpha_1 = 4.0$:

$$K_4 = \begin{bmatrix} -3.04e-16 & -3.45e+01 & -7.83e+00 & 4.97e+00 \end{bmatrix}$$

Для $\alpha_1 = 5.0$:

Не решаемо.

Шаг 4

Для каждой найденной матрицы K_i был найден спектр матрицы $A + BK_i$.

Для K_1:

$$\sigma(A + BK_1) = \{-0.57 + 5.44j, -0.57 - 5.44j, -0.26 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Для K_2:

$$\sigma(A + BK_2) = \{-0.68 + 5.53j, -0.68 - 5.53j, -0.36 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Для K_3:

$$\sigma(A + BK_3) = \{-1.84 + 6.77j, -1.84 - 6.77j, -1.39 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Для K_4:

$$\sigma(A + BK_4) = \{-7.81 + 13.56j, -7.81 - 13.56j, -5.59 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

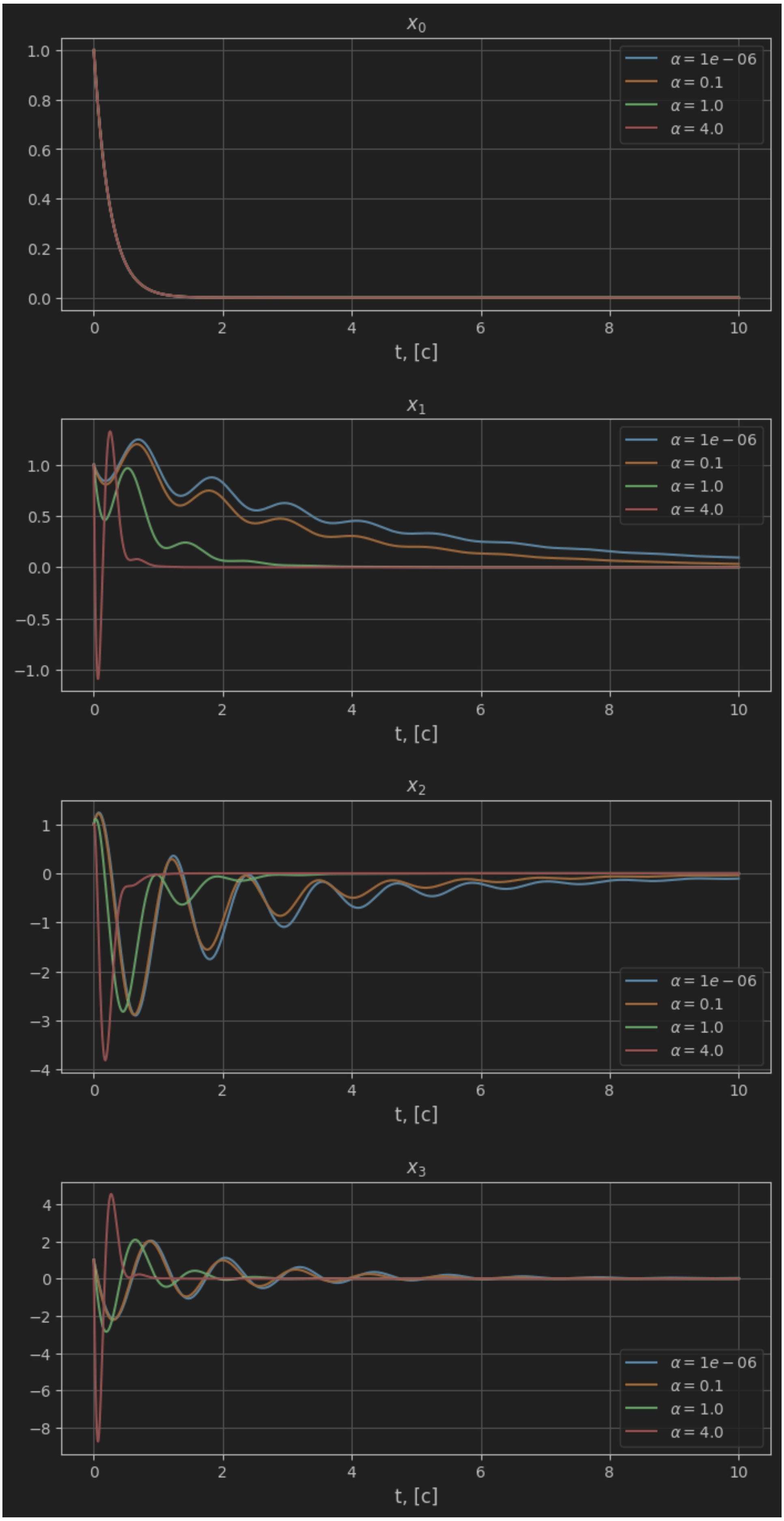
Шаг 5

В качестве начальных условий был выбран вектор

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 6

Результаты моделирования:



x_0
$\alpha = 1e-06$
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 1.0$
$\alpha = 4.0$
t, [c]
x_1
t, [c]
x_2
t, [c]
x_3
t, [c]

График 1. Графики моделирования компонент траектории при различных заданных значениях степени устойчивости

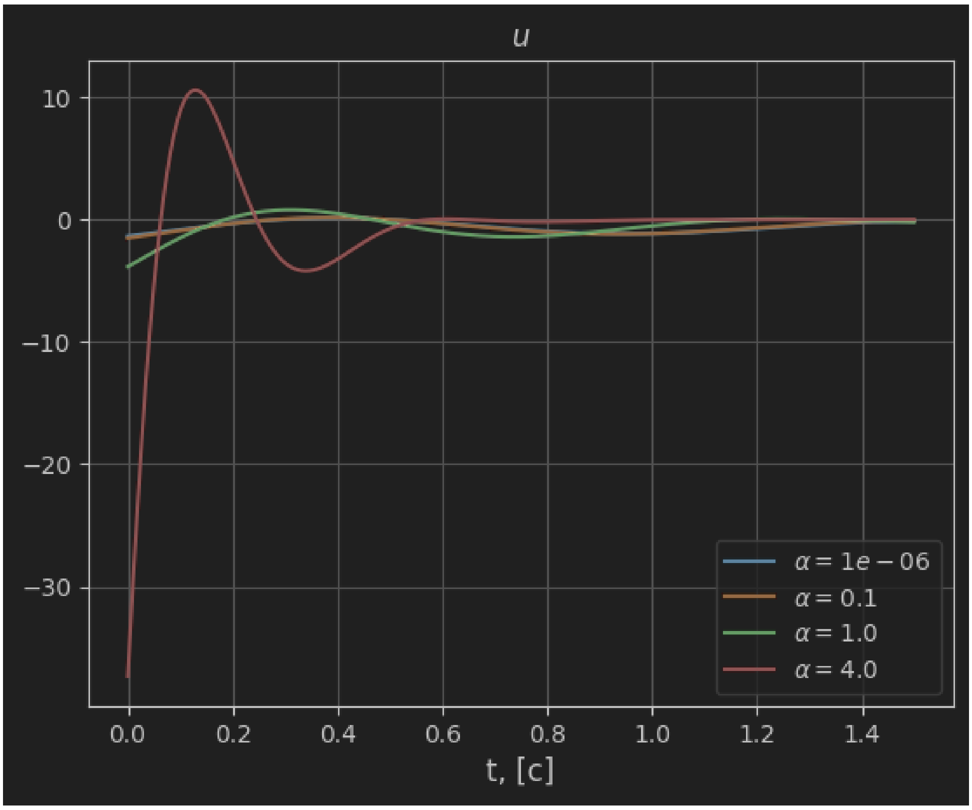


График 2. График моделирования управляющего воздействия при различных заданных значениях степени устойчивости

Шаг 7

Из графиков 1 и 2 можно заметить, что чем больше α, тем быстрее сходимость и тем больше $u(t)$.

Задание 2

Шаг 1

Зафиксируем значение $\alpha = 1.0$.

Добавим в процесс синтеза регулятора ограничение на величину управляющего воздействия:

$$\begin{cases} P \succ 0, \\ \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0, \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0, \\ K = YP^{-1} \end{cases}$$

Найдем минимальное значение μ_{min} с помощью библиотеки `cvx`, решив систему выше. $\mu_{min} = 3.1$. Выберем набор $\mu = \{3.1, 6.2, 15.5\}$.

Далее были найдены матрицы K_{μ_i} для каждого из выбранных значений μ_i.

$\mu_1 = 3.1$:

$$K_{\mu_1} = \begin{bmatrix} 0.03 & -1.39 & -0.39 & -0.36 \end{bmatrix}$$

$\mu_2 = 6.2$:

$$K_{\mu_2} = \begin{bmatrix} 0.26 & -1.97 & -0.68 & -0.3 \end{bmatrix}$$

$\mu_3 = 15.5$:

$$K_{\mu_3} = \begin{bmatrix} 0.44 & -2.38 & -0.89 & -0.23 \end{bmatrix}$$

Для каждой найденной матрицы K_{μ_i} был найден спектр матрицы $A + BK_i$.

Для K_{μ_1}:

$$\sigma(A + BK_{\mu_1}) = \{-1.01 + 5.5j, -1.01 - 5.5j, -1.02 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Для K_{μ_2}:

$$\sigma(A + BK_{\mu_2}) = \{1.26 + 6.36j, -1.26 - 6.36j, -1.16 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Для K_{μ_3}:

$$\sigma(A + BK_{\mu_3}) = \{-1.34 + 7.03j, -1.34 - 7.03j, -1.17 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Можно заметить, что при увеличении μ_i, также увеличивается и $||\sigma(A + BK_{\mu_i})||$.

Было проведено моделирование с соответствующими ограничениями.

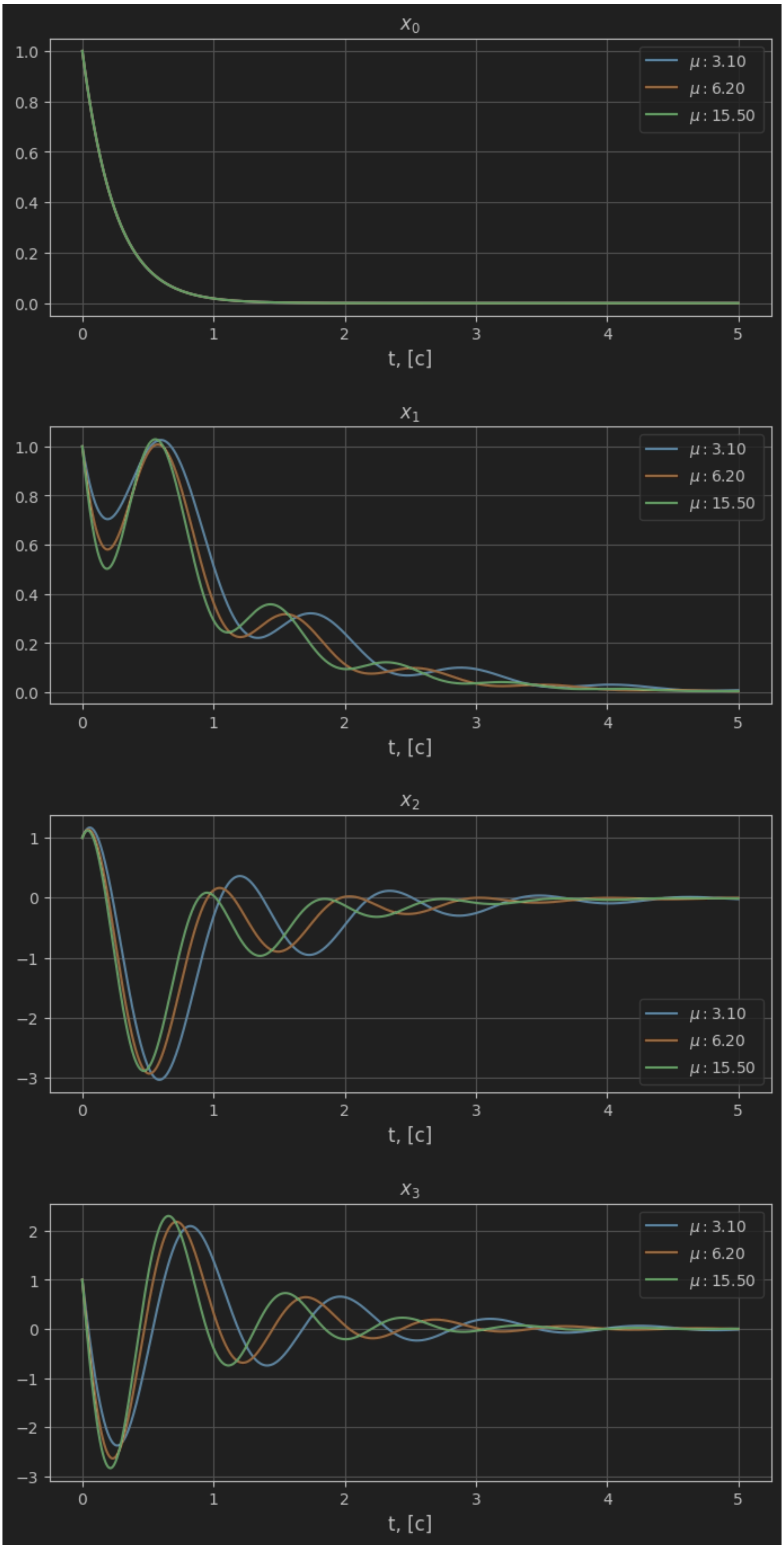

x_0
x_1
x_2
x_3
$\mu: 3.10$
$\mu: 6.20$
$\mu: 15.50$
t, [c]

График 3. Графики моделирования компонент траектории $x(t)$ при различных заданных значениях ограничений μ при выбранном $\alpha = 1.0$.

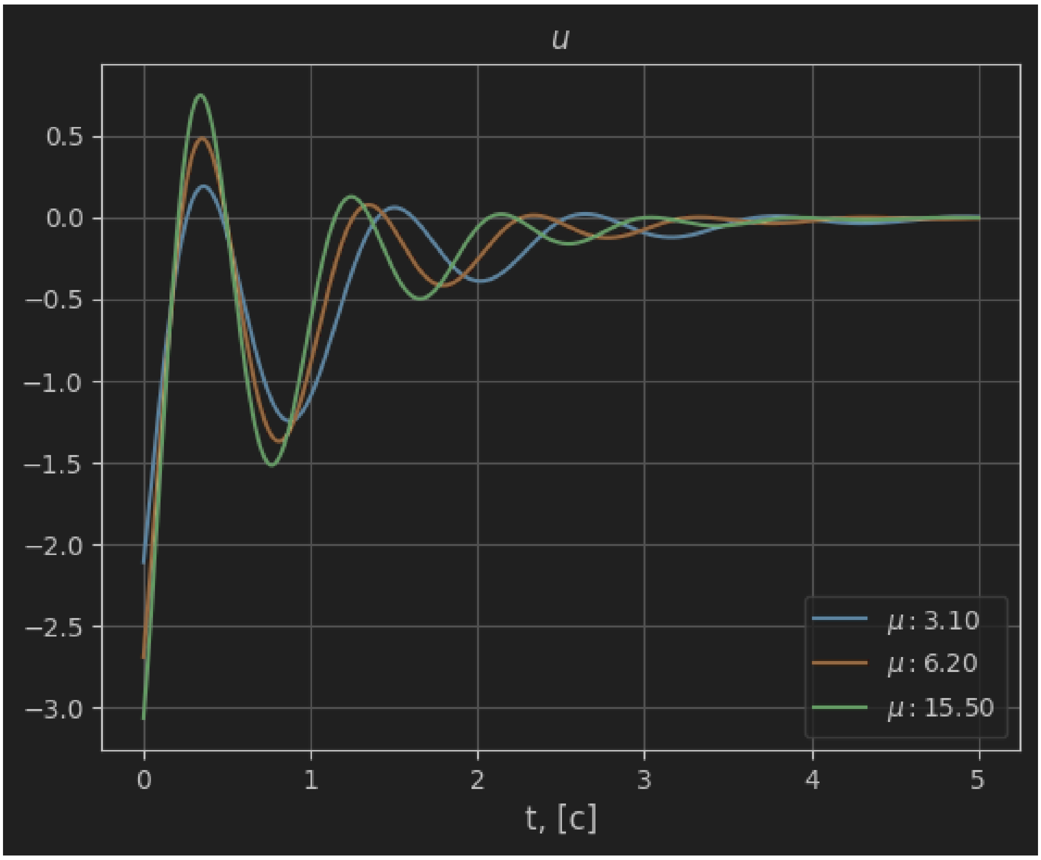


График 4. График моделирования управляющего воздействия при различных заданных значениях степени устойчивости.

На графиках 3-4 можно заметить, что при большем значении μ скорость сходимости системы увеличивается

Шаг 2

Аналогично предыдущему шагу, для каждого значения из $\{0.000001, 0.1, 1.0\}$ было найдено соответствующее значение $\mu_{min} = \{1.1, 1.3, 3.1\}$. При вычислении μ_{min} для $\alpha = 4.0$ была получена ошибка оптимизации системы.

Были найдены соответствующие матрицы $K_{\mu_{min_i}}$.

$\mu_{min_1} = 1.1$:

$$K_{\mu_{min_1}} = \begin{bmatrix} 4.20e-07 & -5.45e-01 & -9.42e-02 & -2.12e-01 \end{bmatrix}$$

$\mu_{min_2} = 1.3$:

$$K_{\mu_{min_2}} = \begin{bmatrix} 4.88e-07 & -6.10e-01 & -1.14e-01 & -2.31e-01 \end{bmatrix}$$

$\mu_{min_3} = 3.1$:

$$K_{\mu_{min_3}} = \begin{bmatrix} 1.94e-06 & -1.37e+00 & -3.84e-01 & -3.62e-01 \end{bmatrix}$$

Для каждой матрицы $K_{\mu_{min_i}}$ были найдены собственные числа матрицы $A + BK_{\mu_{min_i}}$:

$K_{\mu_{min_1}}$:

$\sigma(A + BK_{\mu_{min_1}}) = \{-1.26e - 06 + 5.12j, -1.26e - 06 - 5.12j, -1.27e - 06 + 0.j, -4.00e + 00 + 0.j\}$

$K_{\mu_{min_2}}$:

$$\sigma(A + BK_{\mu_{min_2}}) = \{-0.1 + 5.15j, -0.1 - 5.15j, -0.1 + 0.j, -4. + 0.j\}$$

$K_{\mu_{min_3}}$:

$$\sigma(A + BK_{\mu_{min_3}}) = \{-1. + 5.5j, -1. - 5.5j, -1. + 0.j, -4. + 0.j\}$$

Было проведено моделирование:

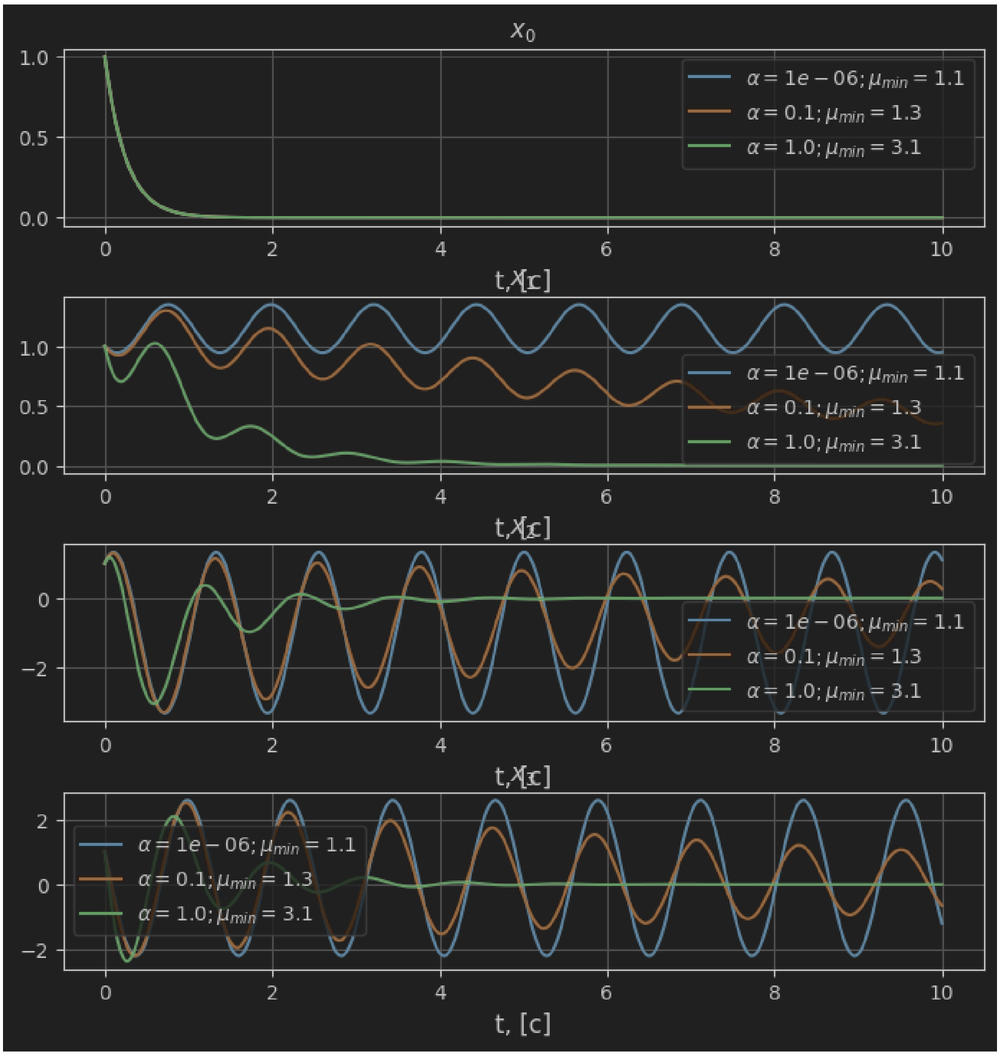


График 5. Графики компонент траектории $x(t)$ при μ_{min}, соответствующих выбранным значениям α

Из графиков видно, что чем меньше α, тем медленнее сходится система (при около нулевом α даже тяжело заметить, что она сходится).

Шаг 3

Можно заметить, что при увеличении μ_i, также увеличивается и $||\sigma(A + BK_{\mu_i})||$.

Также можно видеть, что при минимальных значениях μ_{min_i}, соответсвующих α_i, управляемые собственные числа матрицы $A + BK_{\mu_{min_i}}$ принимают значения α_i.

Задание 3

Возьмем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx \end{cases}$$

Шаг 1

Мы имеем систему $\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx \end{cases}$ и наблюдатель состояния $\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Шаг 2

Выберем те же степени устойчивости динамики ошибки, что и в предыдущих заданиях:

$$\mathrm{A} = \{0.000001, 0.1, 1.0, 4.0\}$$

Шаг 3

Теперь необходимо найти наблюдатель, гарантирующий степень устойчивости динамики ошибки.

Для этого с помощью библиотеки `cvx` решим систему:

$$\begin{cases} A^TQ + QA + 2\alpha Q + C^TY^T + YC < 0, \\ Q \succ 0, \\ L = Q^{-1}Y \end{cases}$$

Для $\alpha_1 = 0.000001$:

$$L_1 = \begin{bmatrix} -6.80e-07 & -1.66e-12 & -2.58e-12 & -2.72e-07 \end{bmatrix}^T$$

Для $\alpha_2 = 0.1$:

$$L_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.03 & 0.01 & -0.03 \end{bmatrix}^T$$

Для $\alpha_1 = 1.0$:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2.4 & -3.04 & -0.38 & -2.35 \end{bmatrix}^T$$

Для $\alpha_1 = 4.0$:

$$L_4 = \begin{bmatrix} 53.51 & 10.09 & 18.64 & -32. \end{bmatrix}^T$$

Шаг 4

Для каждой найденной матрицы L_i был найден спектр матрицы $A + L_iC$.

Для L_1:

$$\sigma(A + L_1C) = \{-1.70e - 06 + 4.j, -1.70e - 06 - 4.j, -1.22e - 06 + 3.j, -1.22e - 06 - 3.j\}$$

Для L_2:

$$\sigma(A + L_2C) = \{-0.14 + 4.05j, -0.14 - 4.05j, -0.12 + 3.07j, -0.12 - 3.07j\}$$

Для L_3:

$$\sigma(A + L_3C) = \{-2.64 + 6.01j, -2.64 - 6.01j, -1.92 + 2.93j, -1.92 - 2.93j\}$$

Для L_4:

$$\sigma(A + L_4C) = \{-5.35 + 12.62j, -5.35 - 12.62j, -4.89 + 3.17j, -4.89 - 3.17j\}$$

Шаг 5

В качестве начальных условий был выбран вектор

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Шаг 6

Результаты моделирования:

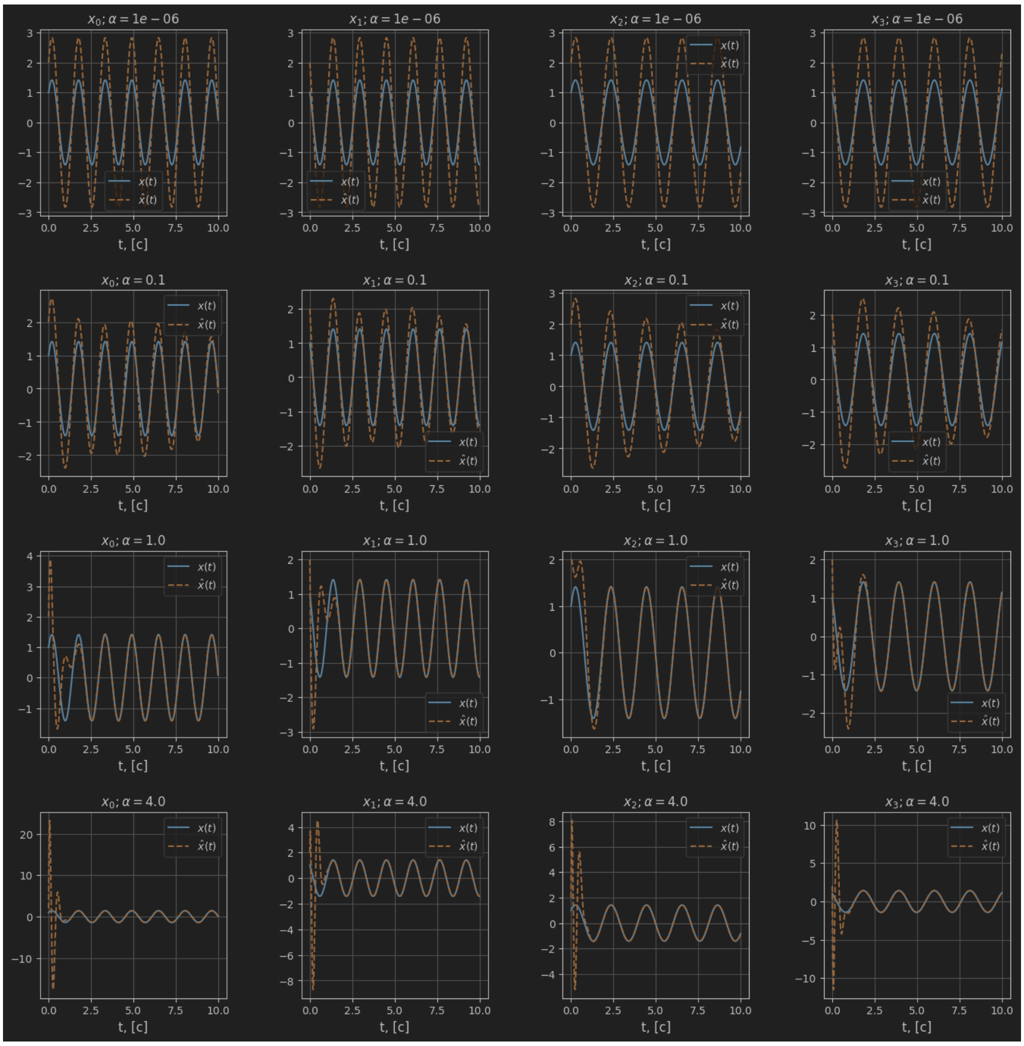


График 6. Результаты моделирования задания 3

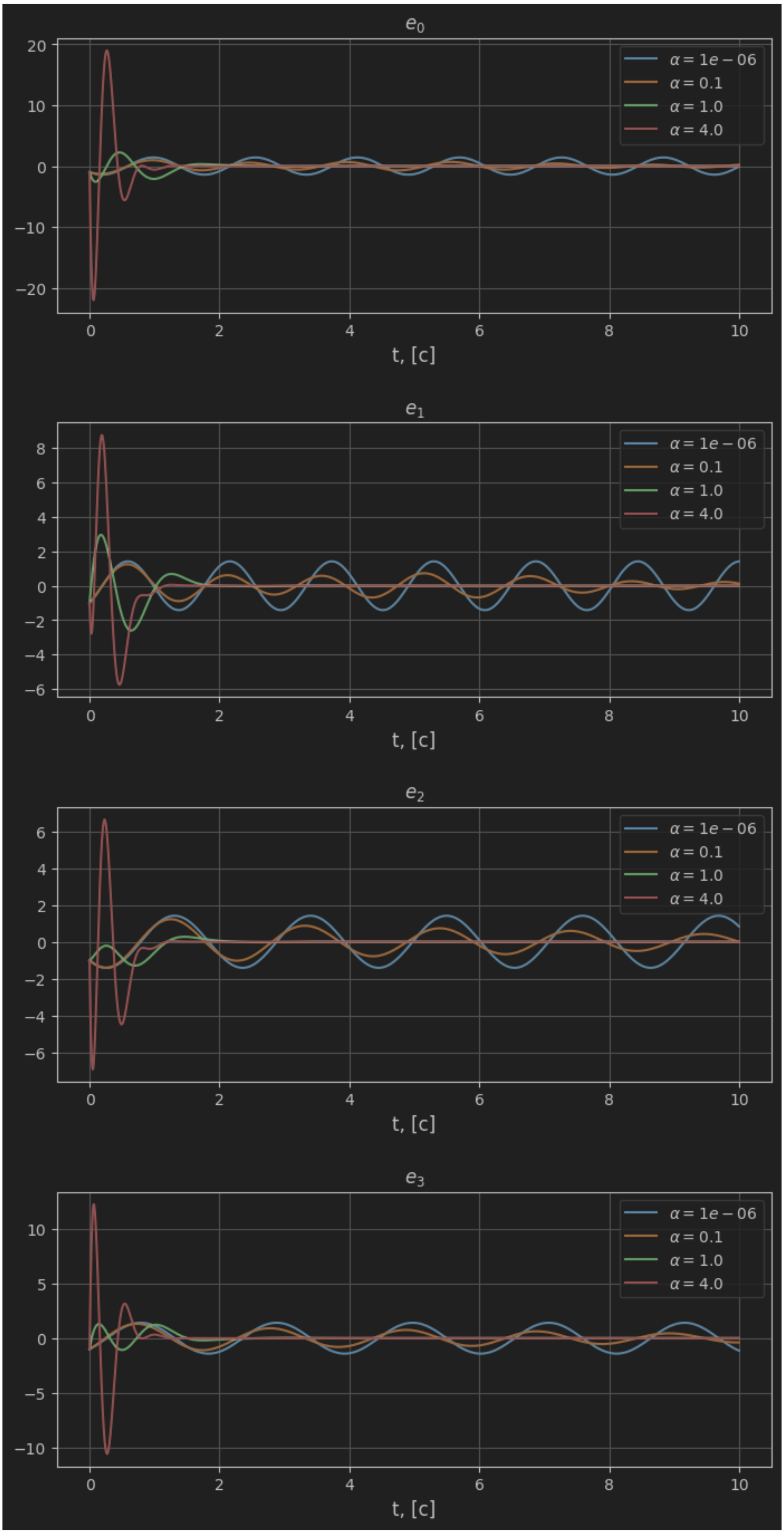

e_0
e_1
e_2
e_3
$\alpha = 1e-06$
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 1.0$
$\alpha = 4.0$
t, [c]

График 7. Графики ошибок в задании 3

Шаг 7

Видно, что чем больше α, тем быстрее сходится ошибка.

Задание 4

Возьмем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}$$

Собственные числа матрицы A:

$$\sigma(A) = \{-12, 4, 12, 16\}$$

Среди них неуправляемое только $\lambda_1 = -12.0$.

Выберем набор желаемых степеней устойчивости $\mathrm{A} = \{0.1, 1.0, 10.0\}$.

Для каждого значения $\alpha \in \mathrm{A}$ были синтезированы регулятор и наблюдатель.

$\alpha_1 = 0.1$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 159.98 & 100.26 & -185.16 & 71.37 \end{bmatrix}$$
$$L_1 = \begin{bmatrix} -18.84 & -2.76 & -18.84 & 2.76 \\ 54.24 & -23.47 & -54.24 & -23.47 \end{bmatrix}^T$$

$\alpha_2 = 1.0$:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 142.46 & 91.27 & -166.66 & 63.6 \end{bmatrix}$$
$$L_2 = \begin{bmatrix} -14.9 & -1.06 & -14.9 & 1.06 \\ 60.46 & -25.99 & -60.46 & -25.99 \end{bmatrix}^T$$

$\alpha_3 = 10.0$:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1214.42 & 1120.28 & -1739.51 & 589.15 \end{bmatrix}$$
$$L_3 = \begin{bmatrix} -7.52 & 2.92 & -7.52 & -2.92 \\ 190.07 & -73.96 & -190.07 & -73.96 \end{bmatrix}^T$$

Результаты моделирования:

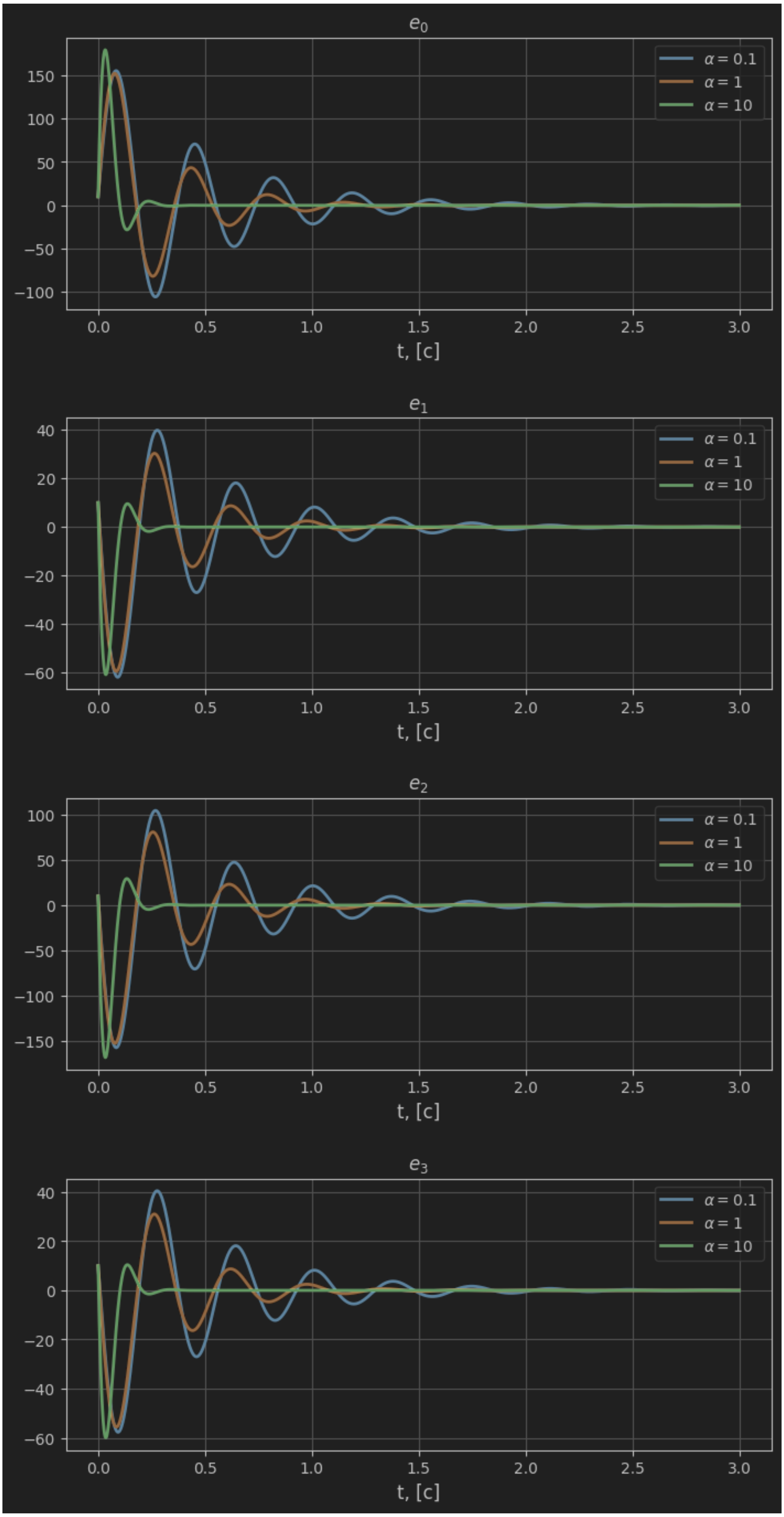

e_0
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 1$
$\alpha = 10$
t, [c]
e_1
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 1$
$\alpha = 10$
t, [c]
e_2
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 1$
$\alpha = 10$
t, [c]
e_3
$\alpha = 0.1$
$\alpha = 1$
$\alpha = 10$
t, [c]

График 8. Результаты моделирования задания 4.

Видно, что при больших α $e(t)$ быстрее сходится, но имеет большую ошибку в начале. Также можно заметить, что при больших α, значительно увеличивается $||K||$ и $||L||$. Это может быть опасно, так как может повредить оборудование.

Следует соблюдать баланс между скоростью сходимости и затрачиваемыми ресурсами.