Лабораторная работа №8. Модальные регуляторы и наблюдатели

Вариант: 11

Подготовил: Прокопов Егор Максимович

Группа R33353

Преподаватель-практик: Пашенко А.В

Исходные данные

Для задания 1

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Желаемые спектры $\sigma(A + BK)$:

$$\{-4, -4, -4, -4\}$$
$$\{-4, -40, -400, -400\}$$
$$\{-4, -8, 5j, -5j\}$$
$$\{-4, -8, -1 + 5j, -1 - 5j\}$$

Для задания 2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Желаемые спектры $\sigma(A + BK)$:

$$\{-4, -4, -4, -4\}$$
$$\{-4, -40, -400, -400\}$$
$$\{-4, -8, 5j, -5j\}$$
$$\{-4, -8, -1 + 5j, -1 - 5j\}$$

Для задания 3

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Задание 1

Из таблицы взяты матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

системы

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Шаг 1

Были найдены собственные числа матрицы A:

$$\sigma(A) = \{-4, 1, 1 \pm 5j\}$$

Все собственные числа матрицы A, кроме $\lambda_1 = -4$ - управляемы.

Поскольку все неустойчивые собственные числа управляемы, система стабилизируема.

Шаг 2

Из теории воспользуемся следующим алгоритмом поиска матрицы K:

1. Выберем матрицу Γ так, чтобы $\sigma(\Gamma)$ совпадал с желаемым спектром
2. Выберем матрицу Y так, чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема
3. Найдем P как решение уравнения $AP - P\Gamma = BY$
4. Вычислим $K = -YP^{-1}$

Шаг 3

Для каждого желаемого спектра $\sigma(A + BK)$ была найдена матрица K и проведено моделирование:

$\sigma(A + BK) = \{\{-4, -4, -4, -4\}\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -4.0 \end{bmatrix}$$
$$Y = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -2.5 & -1.11 & -1.11 \end{bmatrix}$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A + BK) = \{-4.0 + 0.0j, -4.0 - 0.0j, -3.99 + 0.0j, -4.0 + 0.0j\}$$

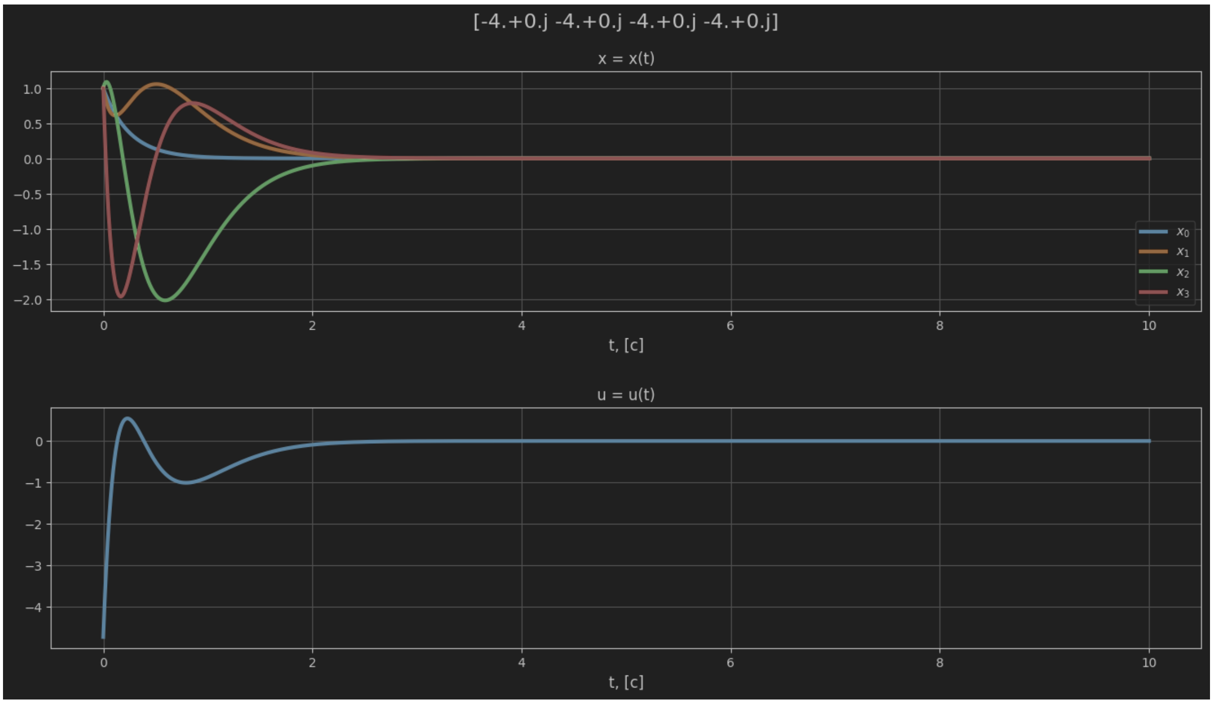


График 1. Графики результатов моделирования 1го задания для 1го набора собственных чисел

$$\sigma(A + BK) = \{\{-4, -40, -400, -400\}\} :$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -40.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -400.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -400.0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -131856.8 & -4303.5 & 29207.8 \end{bmatrix}$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A + BK) = \{-4.0 + 0.0j, -40.0 + 0.0j, -400.0 - 0.0j, -400.0 + 0.0j\}$$

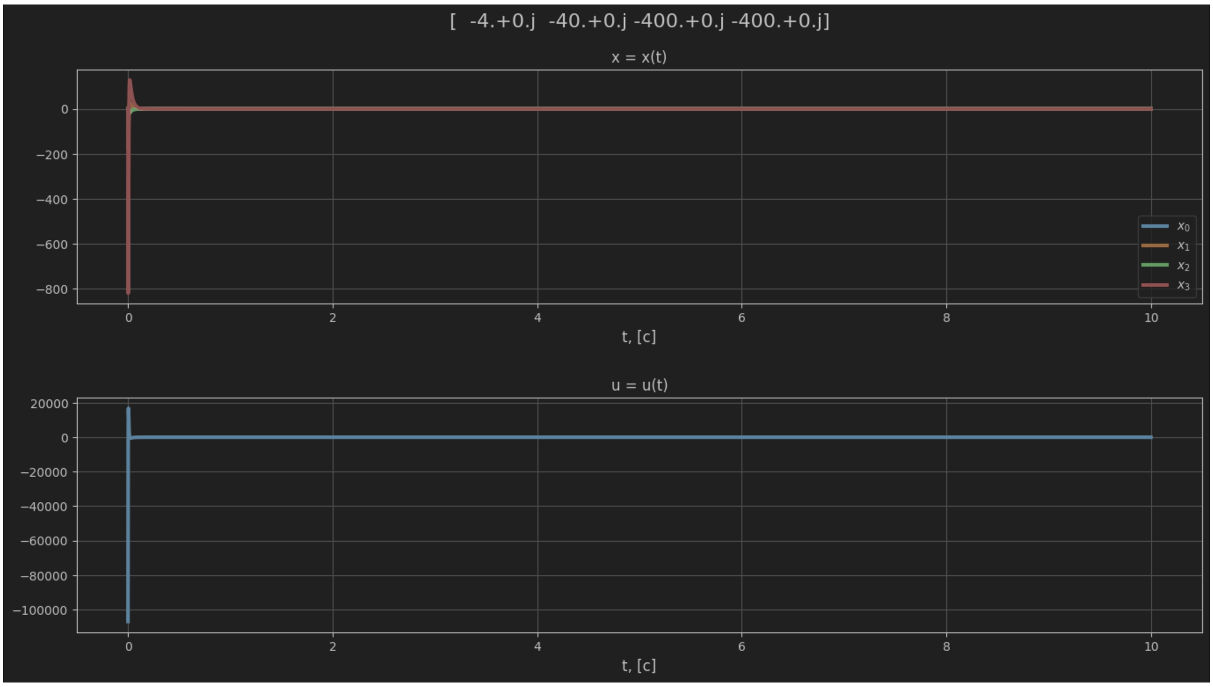


График 2. Графики результатов моделирования 1го задания для 2го набора собственных чисел

$\sigma(A+BK) = \{\{-4, -8, 5j, -5j\}\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -8.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$
$$Y = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.00 & -4.68 & -0.42 & -0.18 \end{bmatrix}$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A+BK) = \{0 + 5.j, 0 - 5.j, -8.0 + 0.j, -4.0 + 0.j\}$$

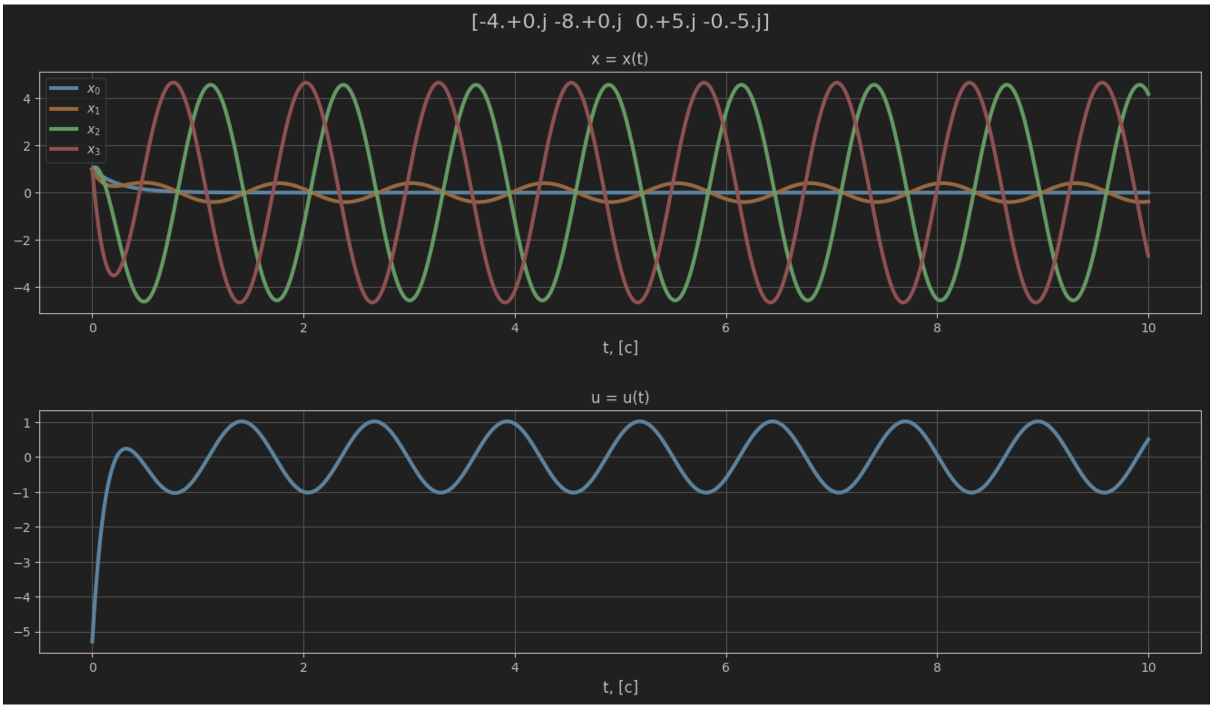


График 3. Графики результатов моделирования 1го задания для 3го набора собственных чисел

$$\sigma(A+BK) = \{\{-4, -8, -1+5j, -1-5j\}\}:$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -8.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$
$$Y = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.00 & -5.22 & -0.89 & -0.28 \end{bmatrix}$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A+BK) = \{-1.+5.j, -1.-5.j, -8.+0.j, -4.+0.j\}$$

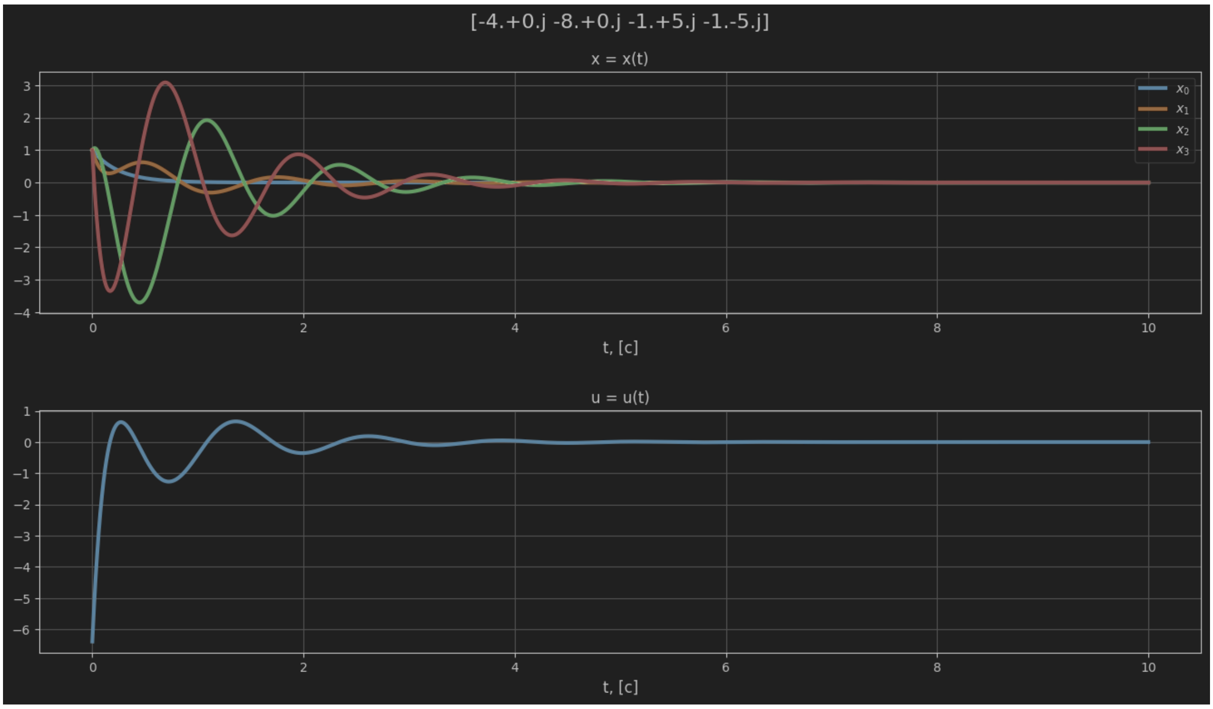


График 4. Графики результатов моделирования 1го задания для 4го набора собственных чисел

Шаг 4

На графиках можно заметить, что поведение системы соответствует тому типу устойчивости, который можно определить по желаемым спектрам.

Задание 2

Из таблицы были взяты матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

Шаг 1

Были найдены собственные числа матрицы A:

$$\sigma(A) = \{\pm 3.0j, \pm 4.0j\}$$

Все собственные числа матрицы A наблюдаемы. Таким образом система наблюдаема и обнаруживаема.

Шаг 2

Наблюдатель системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx \end{cases}$$

выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Динамика ошибки:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y) = (A + LC)\hat{x} - Ly \\ \dot{e} = (A + LC)e \end{cases}$$

Нам необходимо, чтобы матрица $A + LC$ была устойчивой. Для этого, нам необходимо найти такую матрицу L, чтобы собственные числа $A + LC$ были устойчивыми.

Из теории воспользуемся следующим алгоритмом поиска матрицы L:

1. Выберем матрицу Γ так, чтобы $\sigma(\Gamma)$ совпадал с желаемым спектром
2. Выберем матрицу Y так, чтобы пара (Γ, Y) была управляема
3. Найдем Q как решение уравнения $\Gamma Q - QA = YC$
4. Вычислим $L = Q^{-1}Y$

Шаг 3

Для каждого желаемого спектра $\sigma(A + LC)$ была найдена матрица L и проведено моделирование:

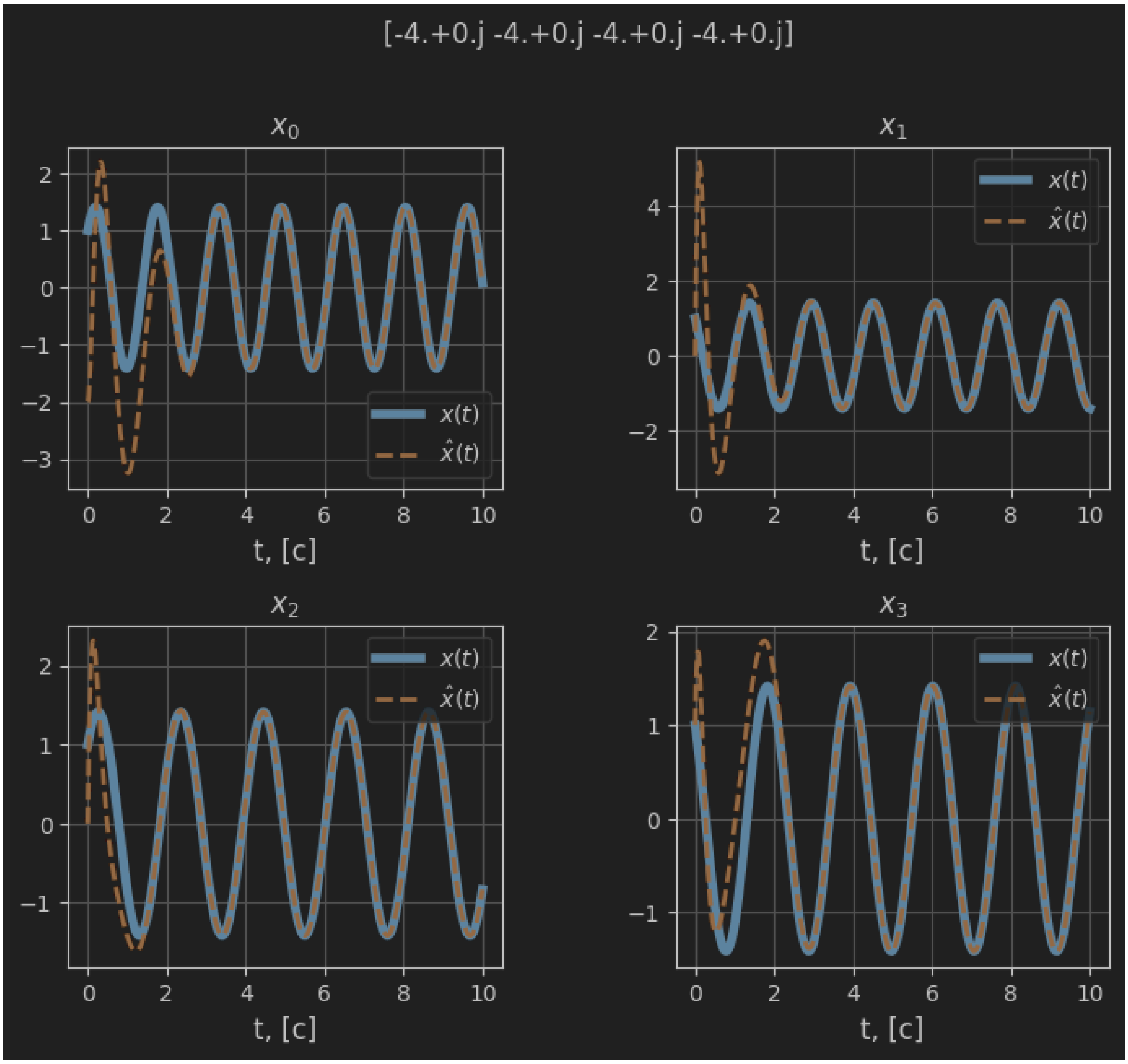
$\sigma(A + LC) = \{\{-4, -4, -4, -4\}\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -4.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -4.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -4.0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.00 & -7.31 & -2.79 & -1.78 \end{bmatrix}^T$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A + LC) = \{-4.0 + 0.j, -4.0 + 0.0j, -4.0 - 0.0j, -4.0 + 0.j\}$$



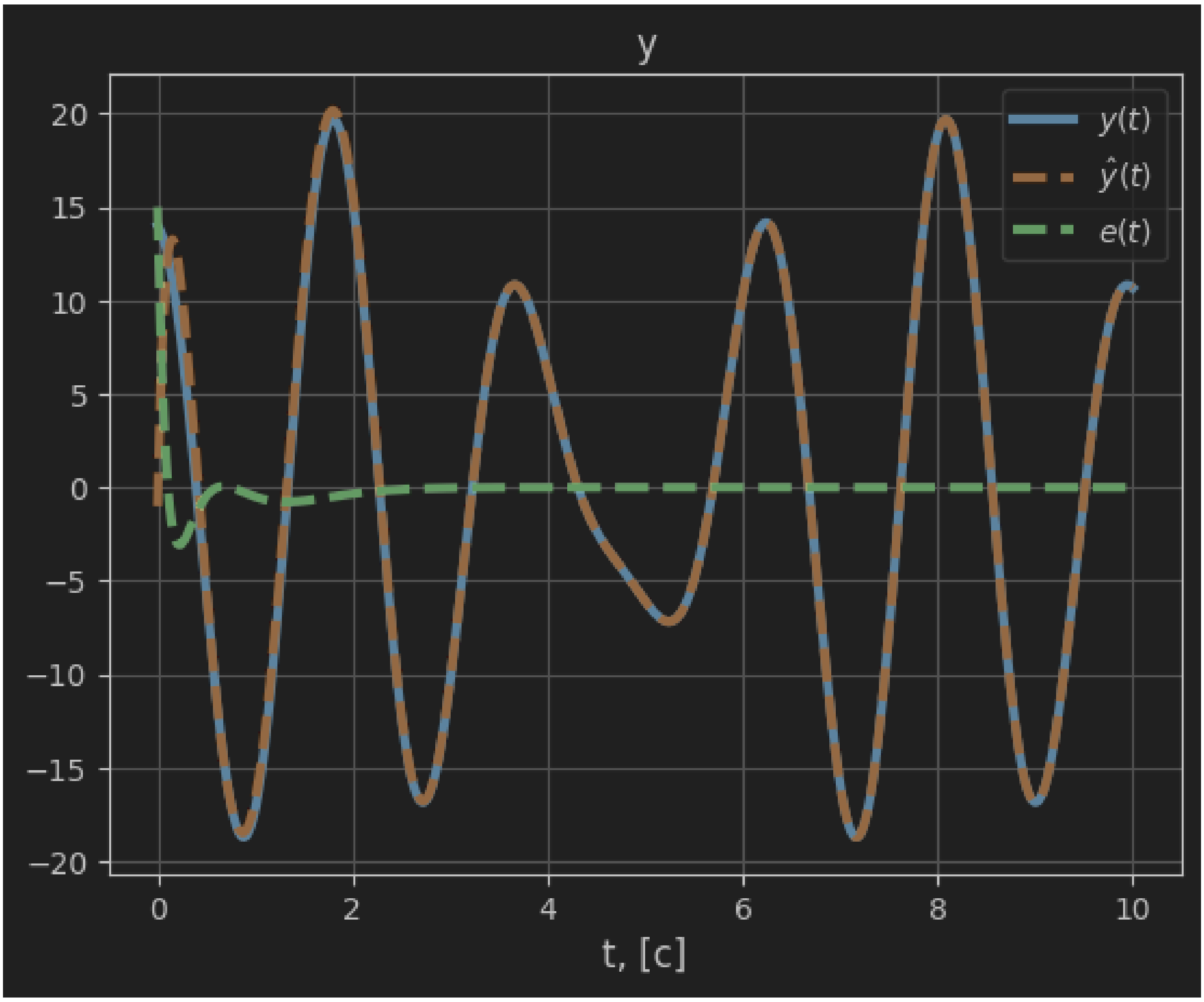


График 5. Графики результатов моделирования 2го задания для 1го набора собственных чисел

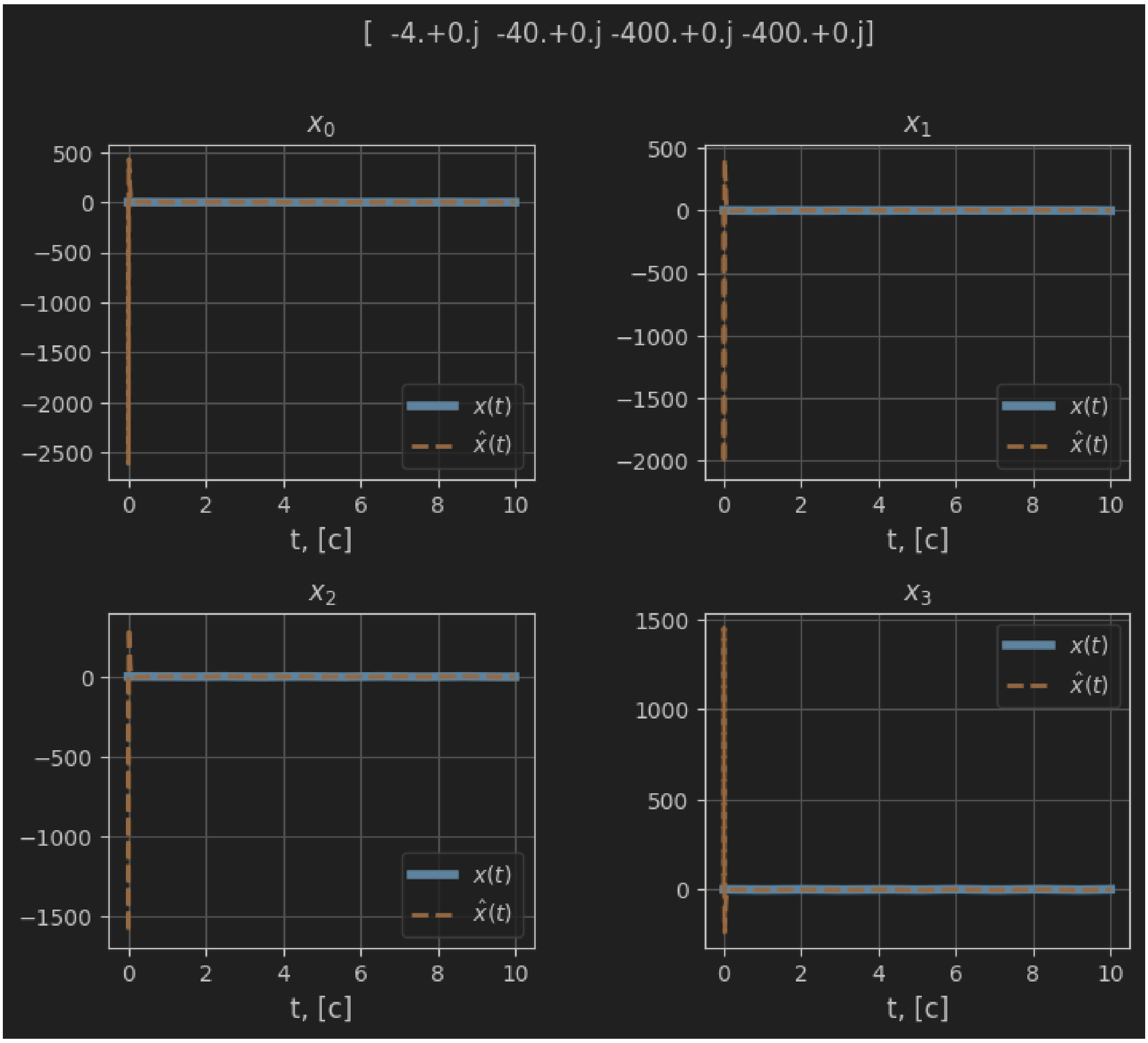
$\sigma(A + LC) = \{\{-4, -40, -400, -400\}\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -40.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -400.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -400.0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 204414.17 & 160532.11 & 126147.31 & -113657.21 \end{bmatrix}^T$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A + LC) = \{-400.0 + 0.j, -399.97 + 0.0j, -40.0 - 0.0j, -4.0 + 0.j\}$$


[-4.+0.j -40.+0.j -400.+0.j -400.+0.j]
x_0
x_1
x_2
x_3
$x(t)$
$\hat{x}(t)$
t, [c]

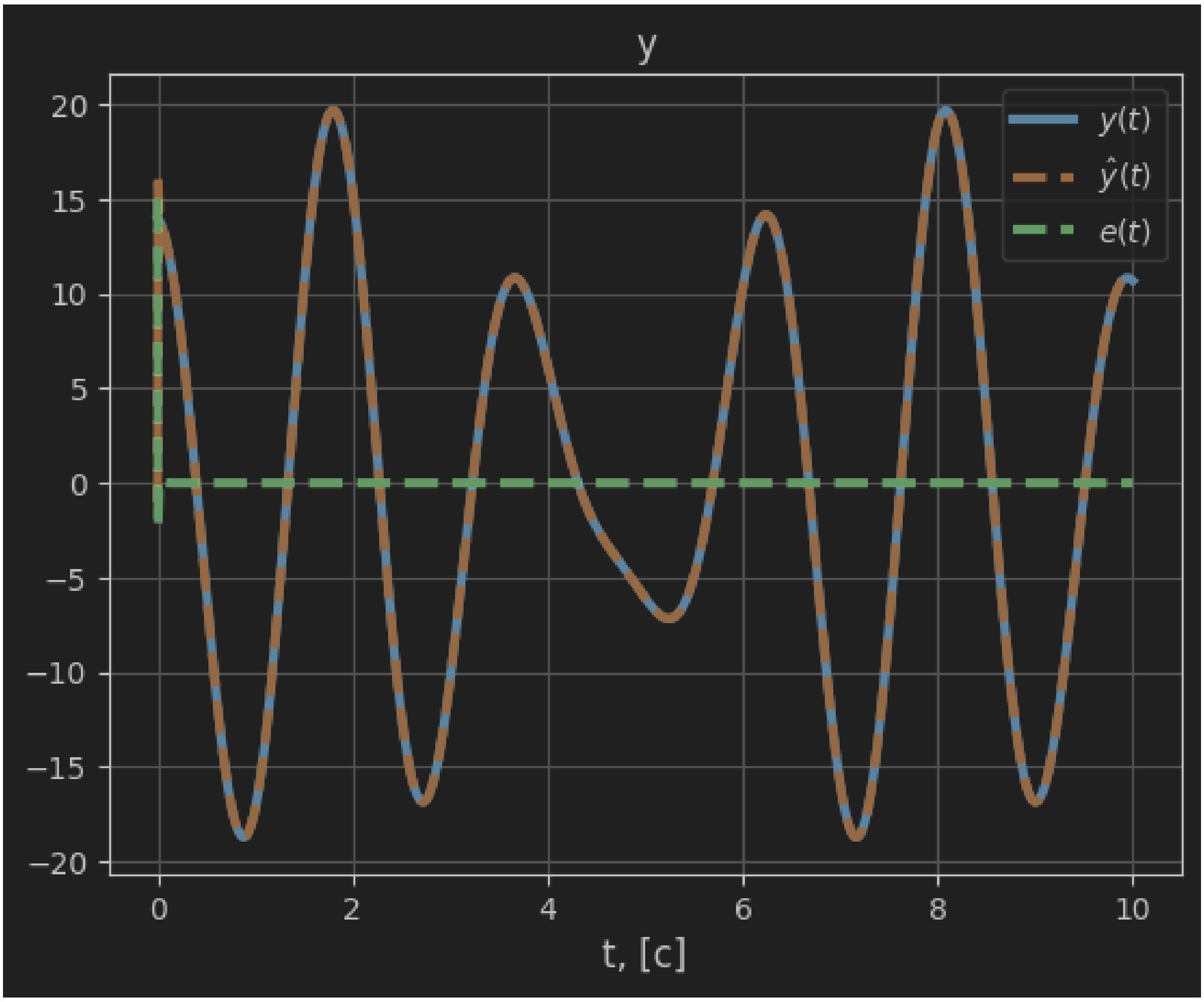


График 6. Графики результатов моделирования 2го задания для 2го набора собственных чисел

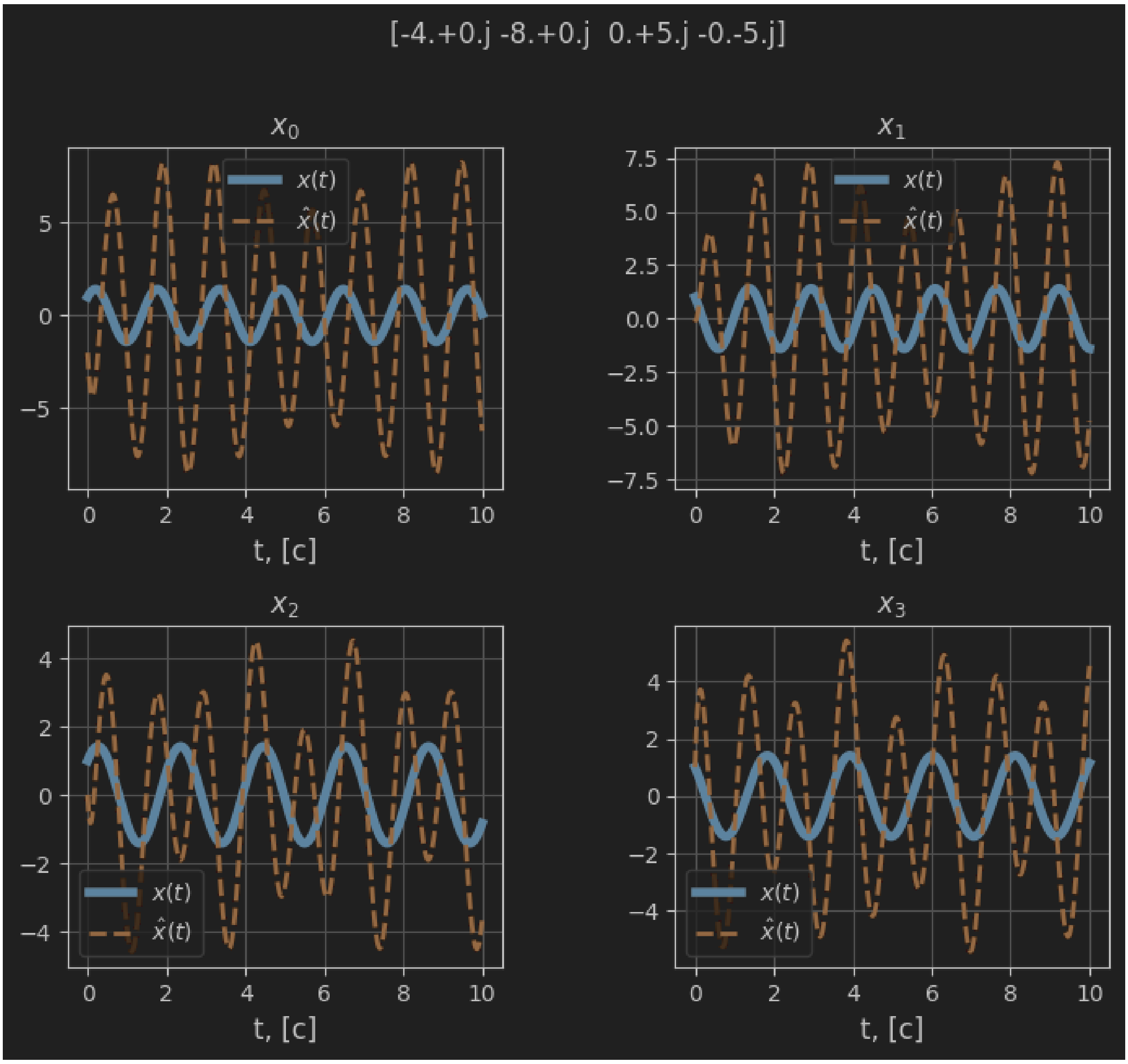
$\sigma(A + LC) = \{\{-4, -8, 5j, -5j\}\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -8.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.0 & -5.0 & 0.0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 3.09 & 1.03 & 1.95 & -3.05 \end{bmatrix}^T$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A + LC) = \{-0.0 + 5.0j, -0.0 - 5.0j, -8.0 - 0.0j, -4.0 + 0.j\}$$


[-4.+0.j -8.+0.j 0.+5.j -0.-5.j]
x_0
x_1
x_2
x_3
$x(t)$
$\hat{x}(t)$
t, [c]

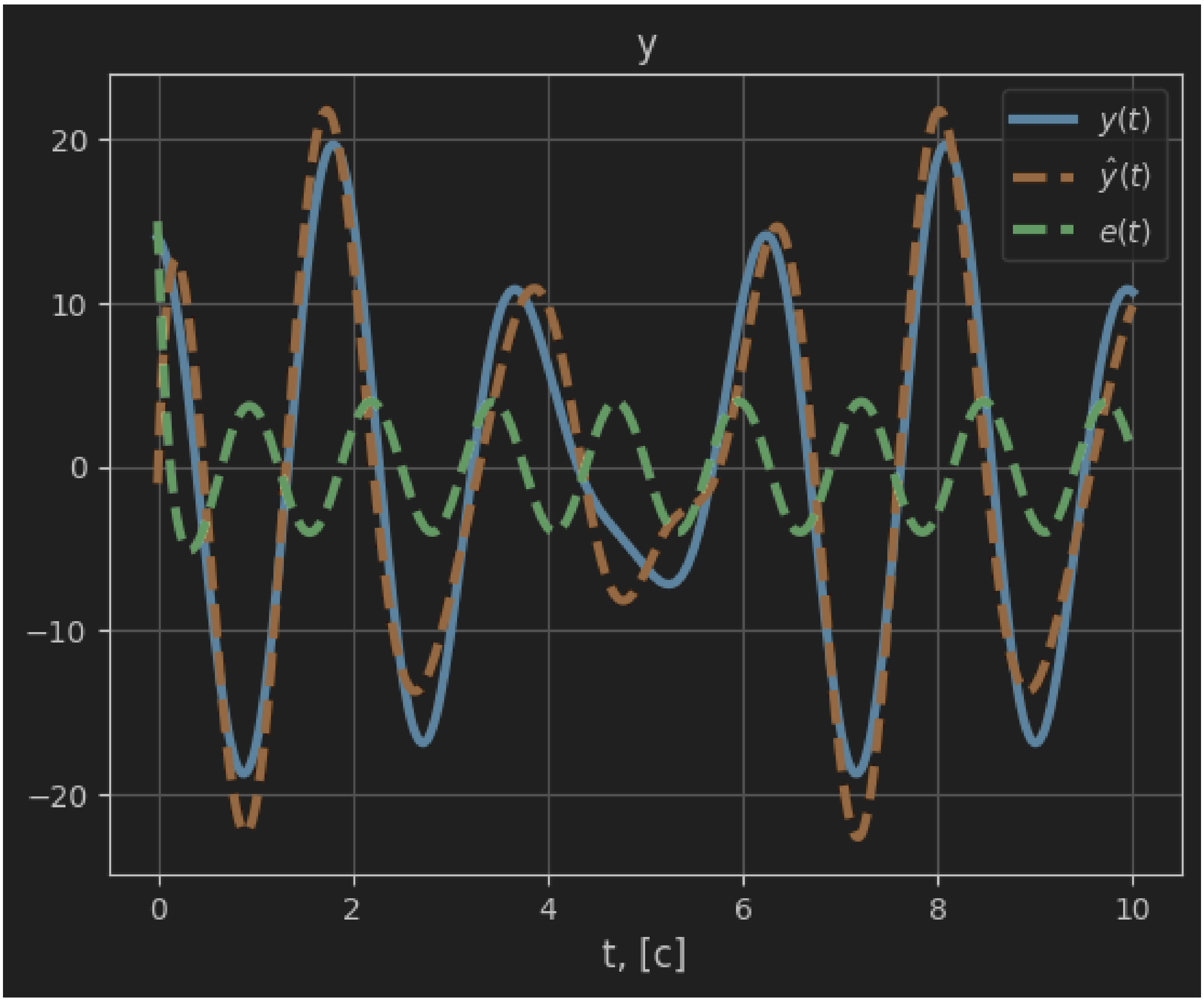


График 7. Графики результатов моделирования 2го задания для 3го набора собственных чисел

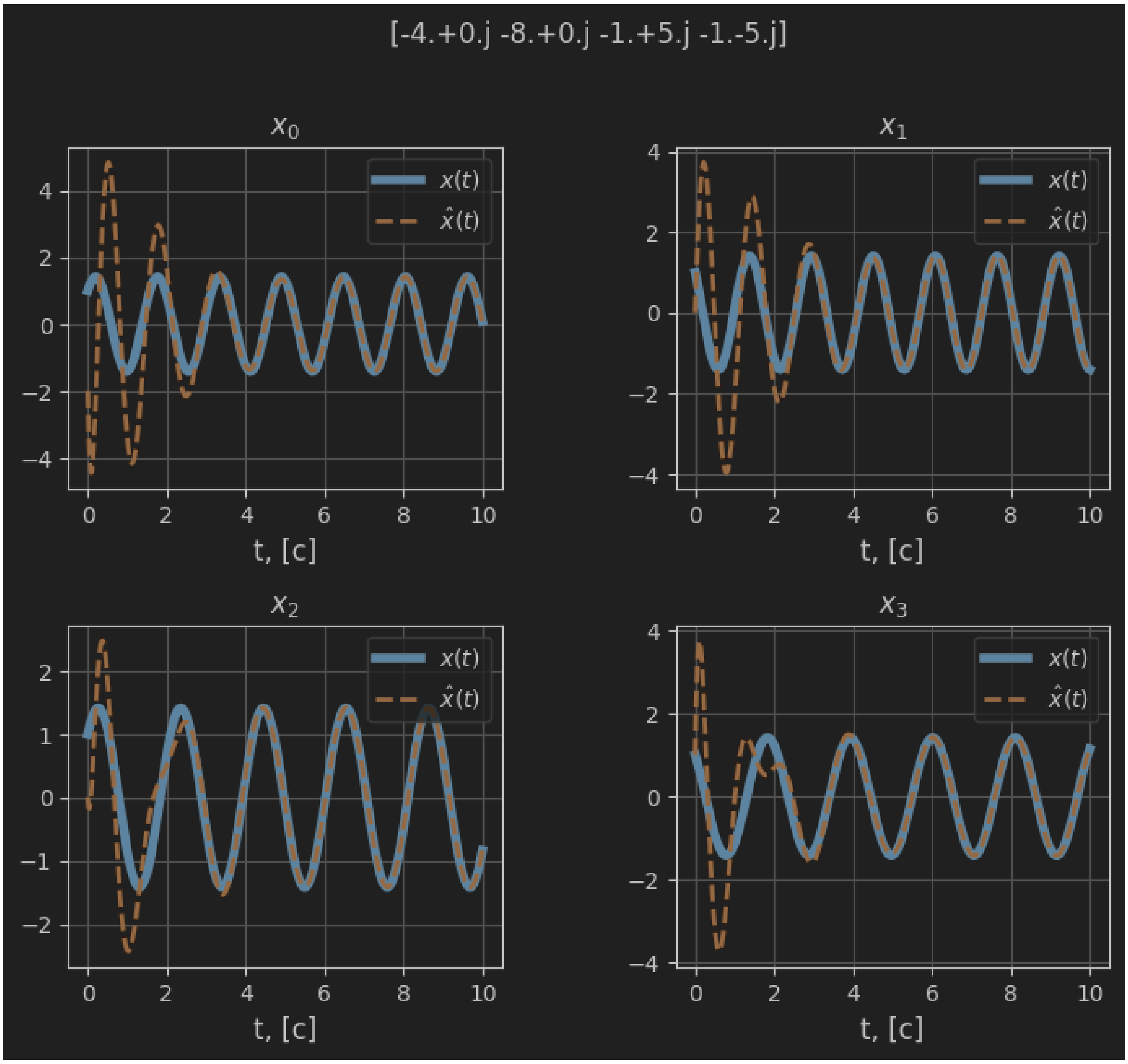
$\sigma(A+LC) = \{\{-4, -8, -1+5j, -1-5j\}\}$:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -4.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -8.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 5.0 \\ 0.0 & 0.0 & 5.0 & -1.0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 4.34 & -1.60 & 0.93 & -3.97 \end{bmatrix}^T$$

Полученный спектр:

$$\sigma(A+LC) = \{-8.0+0.j, -1.0+5.0j, -1.0-5.0j, -4.0+0.j\}$$


[-4.+0.j -8.+0.j -1.+5.j -1.-5.j]
x_0
x_1
x_2
x_3
$x(t)$
$\hat{x}(t)$
t, [c]

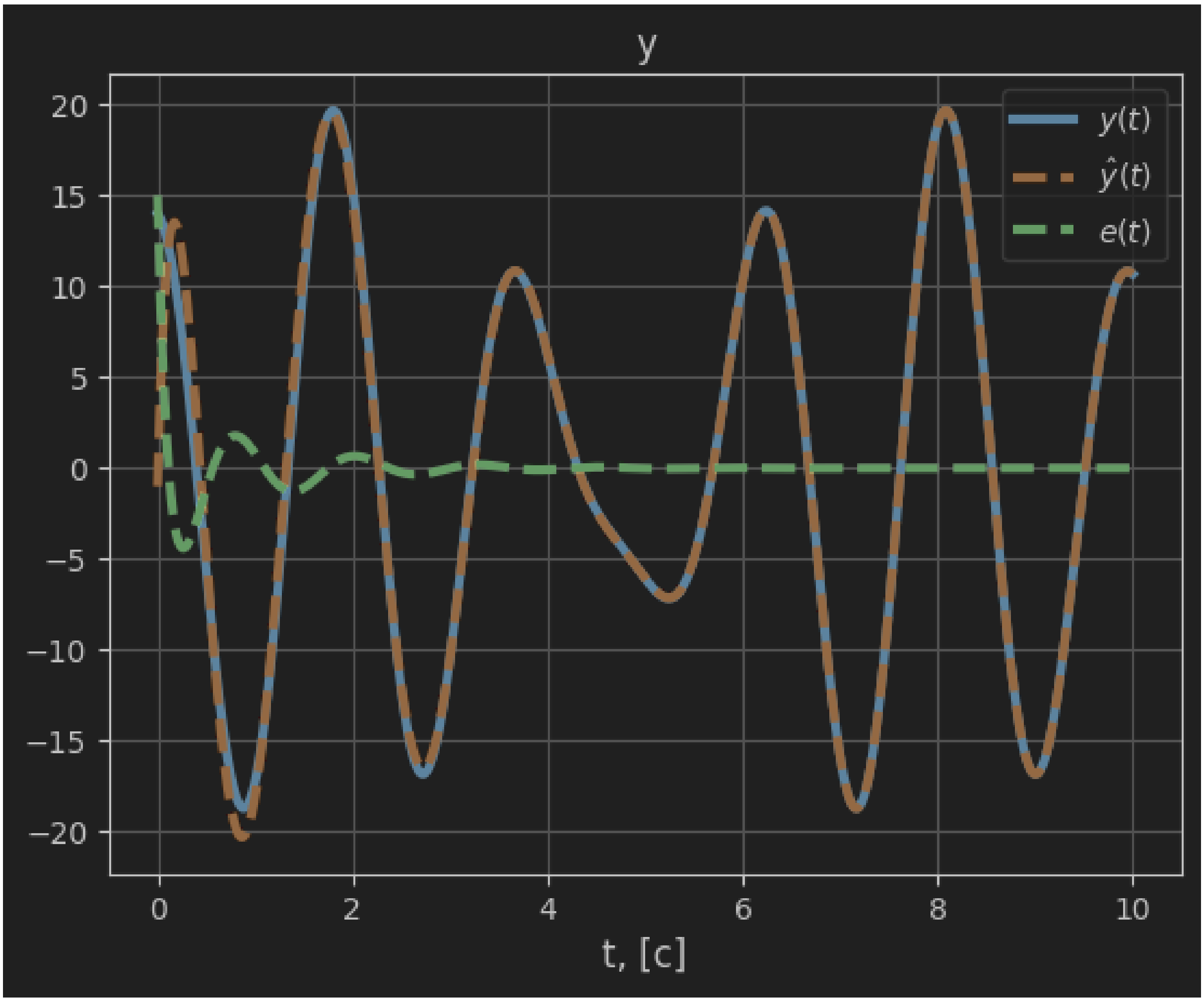


График 8. Графики результатов моделирования 2го задания для 4го набора собственных чисел

Шаг 4

На графиках можно заметить, что поведение ошибки тому типу устойчивости, который можно определить по желаемым спектрам.

Задание 3

Из таблицы были взяты матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -9 & 3 \\ -5 & 5 & -3 & 9 \\ -9 & -3 & 5 & 5 \\ 3 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

системы

$$\begin{cases} \hat{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx \end{cases}$$

Шаг 1

Были найдены собственные числа матрицы A:

$$\sigma(A) = \{-12, 4, 12, 16\}$$

Все собственные числа матрицы A - управляемы, но число -12 - не наблюдаемо. Таким образом, система полностью управляема, стабилизируема и обнаруживаема

Шаг 2

Имея систему

$$\begin{cases} \hat{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases}$$

необходимо построить наблюдатель

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x}, \end{cases}$$

с законом управления

$$u = K\hat{x}$$

Шаг 3

Выберем желаемые спектры:

$$\sigma(A + BK) = \{-12, -3, -2, -1\}$$
$$\sigma(A + LC) = \{-12, -3, -2, -1\}$$

Аналогично тому, как это было сделано в задании 1, найдем матрицу K:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -12.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$
$$Y = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 38.32 & 15.20 & -39.93 & 13.78 \end{bmatrix}$$

Теперь, найдем матрицу L:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -12.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -3.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 40.40 & 40.40 \\ -19.07 & -19.07 \\ -41.49 & -41.49 \\ -20.16 & -20.16 \end{bmatrix}$$

Шаг 4

Выберем начальные условия:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Результаты моделирования:

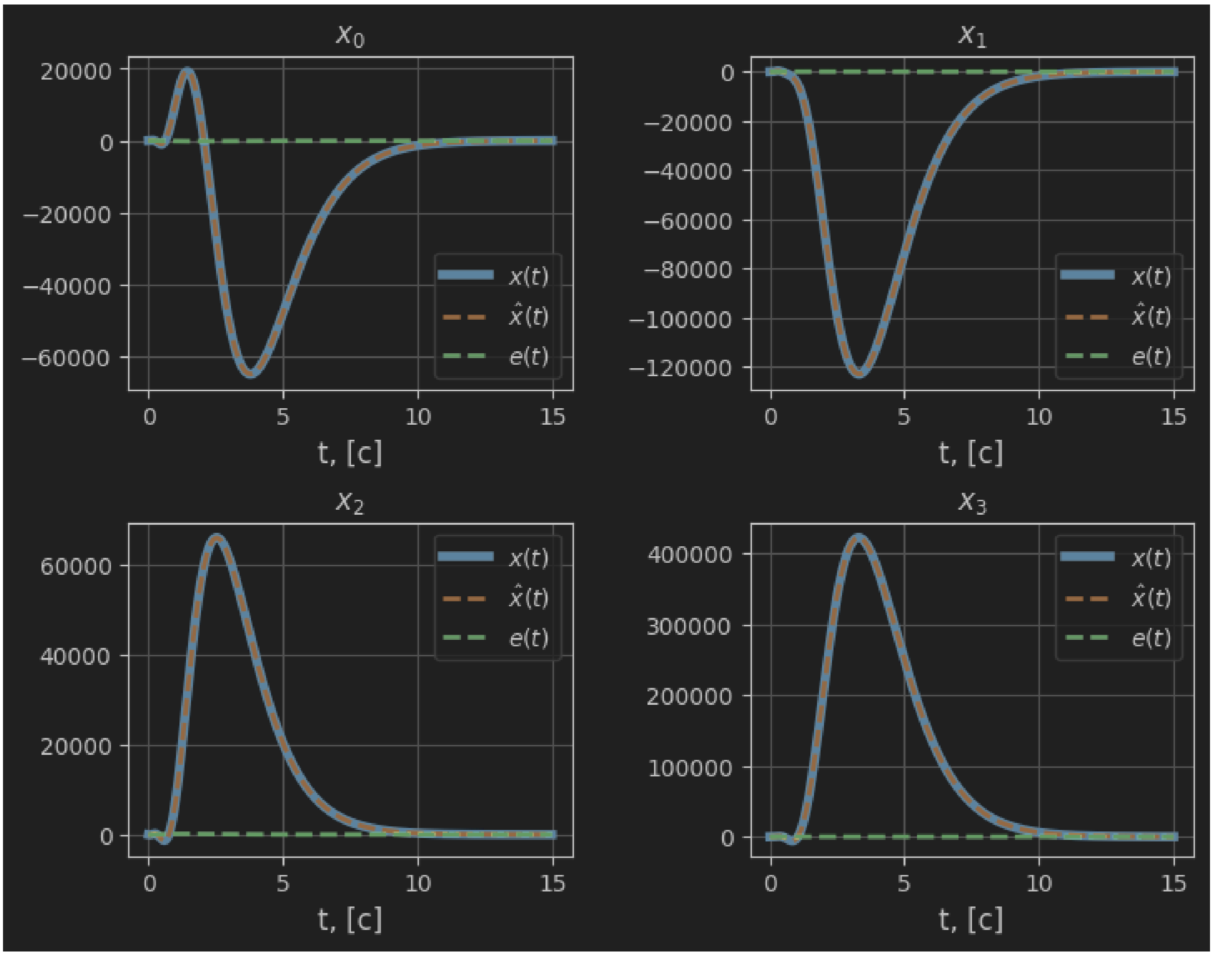


График 9. Графики результатов моделирования компонент траектории системы и наблюдателя

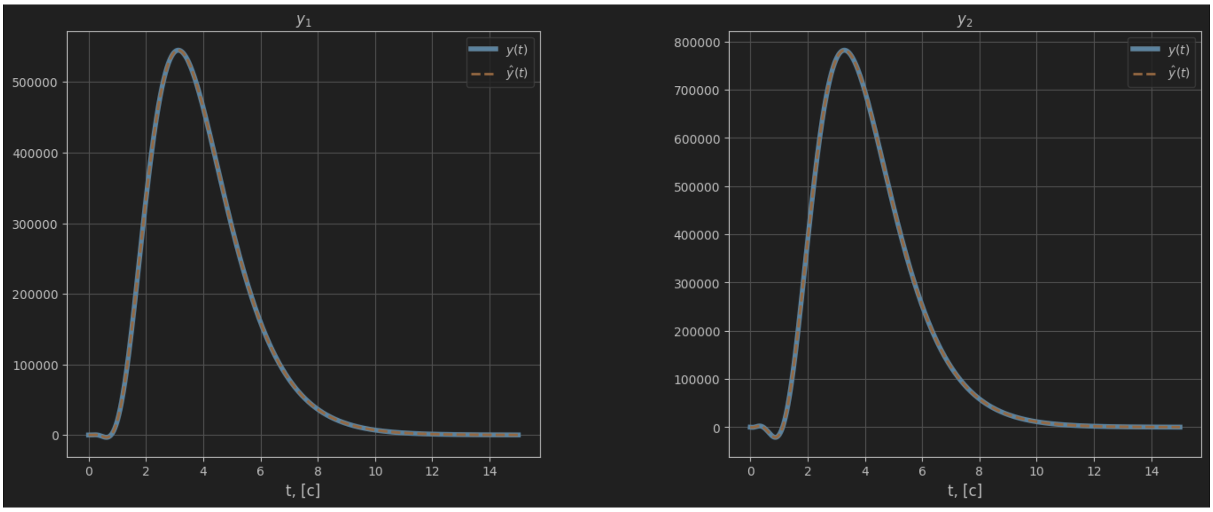


График 10. Графики результатов моделирования выхода системы и наблюдателя

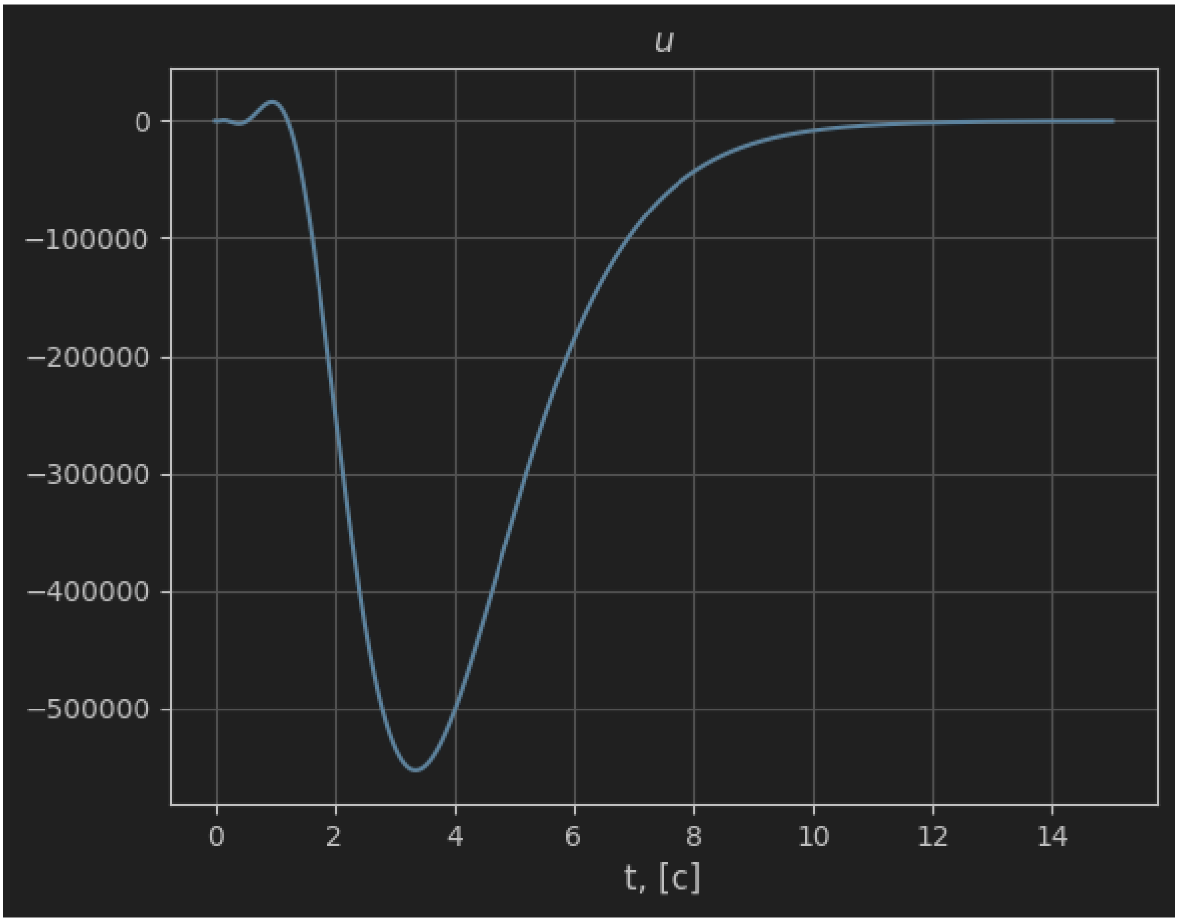


График 11. График результатов моделирования управляющего воздействия системы

График 11. График результатов моделирования управляющего воздействия системы

Шаг 5

Получившаяся система с обратной связью по выходу устойчива.