Лабораторная работа №7. Управляемость и наблюдаемость

Вариант: 11

Подготовил: Прокопов Егор Максимович

Группа R33353

Преподаватель-практик: Пашенко А.В

Исходные данные

Для задания 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Для задания 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_1'' = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Для задания 3

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & 18 & -2 \end{bmatrix}, y(t) = 3e^{-5t}\cos(2t) - 1e^{-5t}\sin(2t)$$

Для задания 4

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \end{bmatrix}, y(t) = 3e^{-5t}\cos(2t) - 1e^{-5t}\sin(2t)$$

Задание 1

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Шаг 1

Матрица управляемости:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 17 & -62 \\ 5 & -23 & -1 \\ -3 & 21 & 3 \end{bmatrix}$$

Поскольку $\det(U) = -2340 \neq 0$, то $rank(U) = 3$, следовательно система **управляема.**

Шаг 2

Найдем собственные числа матрицы:

$$\det(A - \lambda I) = 0; \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 & -1 \\ -10 & -11-\lambda & -4 \\ 10 & 10 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0;$$
$$\sigma(A) = \{-2 \pm 5j; -1\}$$

Оценим управляемость каждого из полученных собственных чисел:

$\lambda_1 = -2 - 5j$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = 3,$$

λ_1 управляемо.

$\lambda_2 = -2 + 5j$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = 3,$$

λ_2 управляемо.

$\lambda_3 = -1$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = 3,$$

λ_3 управляемо.

Таким образом, все собственные числа матрицы A управляемы.

Найдем жорданову форму системы:

$$A = PJP^{-1},$$
$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix}$$

Таким образом жорданова форма системы:

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + P^{-1}Bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix} u$$

Видно, что каждому собственному числу соответствует одна жорданова клетка, а элементы матрицы входного воздействия, соответствующие последним строкам клеток - ненулевые. Таким образом, наша система в жордановой форме **полностью управляема**.

Шаг 3

Линейная система управляема, если ее можно перевести из $x(0) = 0$ в любое $x(t_1)$ за любое время t_1. Поскольку наша система полностью управляема, как стало известно в предыдущем шаге, то любая точка принадлежит управляемому подпространству системы, в том числе и точка $x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Шаг 4

Грамиан управляемости:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} BB^T c^{A^T t} dt,$$

$$P(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 1.20 & -1.34 & 0.23 \\ -1.34 & 2.76 & -1.12 \\ 0.23 & -1.12 & 1.47 \end{bmatrix}$$

Спектр матрицы $P(t_1 = 3)$: $\sigma(P(t_1 = 3)) = \{0.28; 1.15; 4.00\}$

Шаг 5

Управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время $t_1 = 3$:

$$u(t) = B^T e^{A^T (3-t)} (P(t_1 = 3))^{-1} x_1$$

Шаг 6

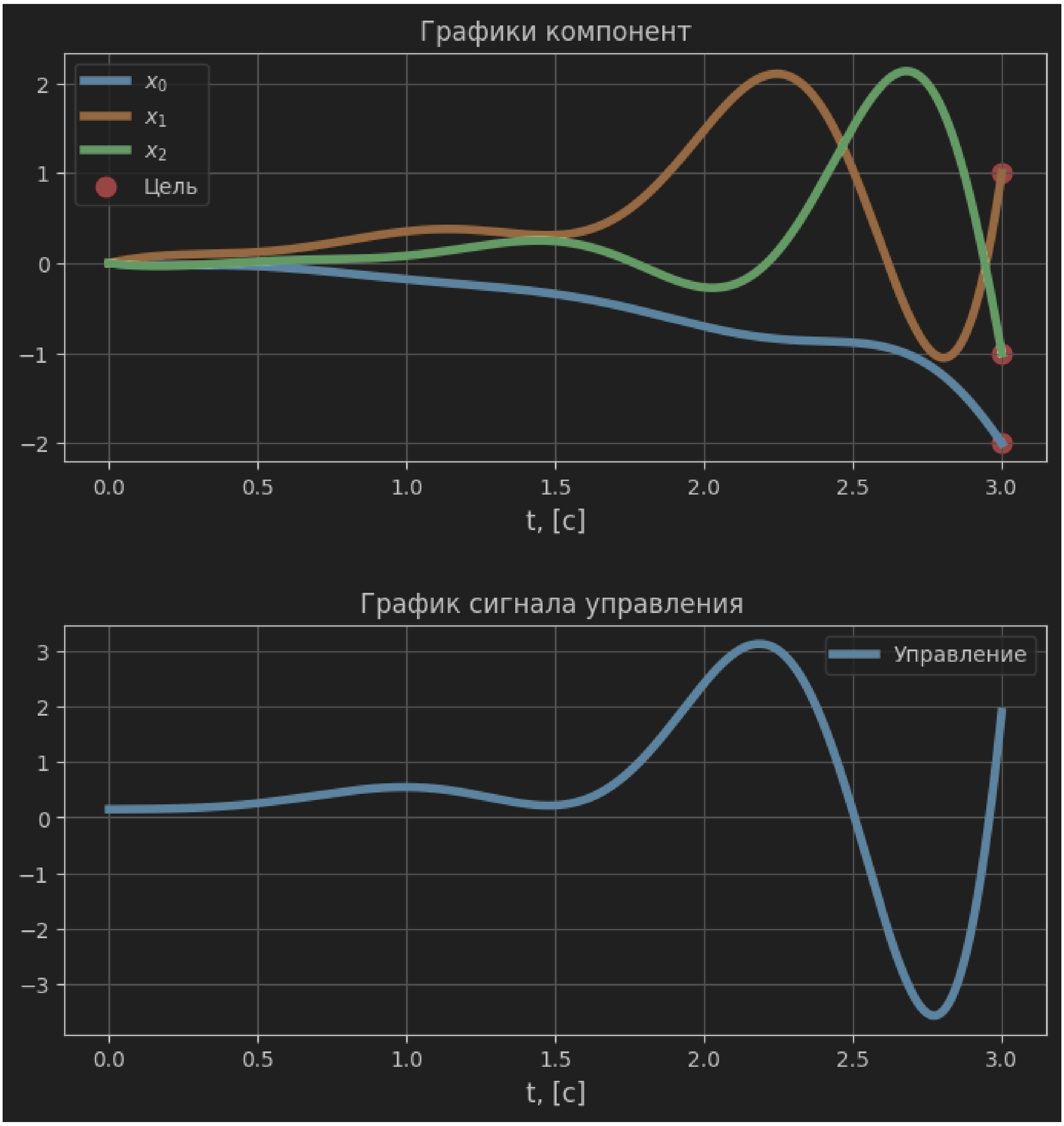

График 1. Графики компонент вектора $x(t)$ и график сигнала управления

Из графиков видно, что система приняла желаемое состояние $x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ за нужное время $t_1 = 3$.

Задание 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_1' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_1'' = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу управляемости:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & -102 \\ 1 & -27 & 79 \\ -1 & 27 & -79 \end{bmatrix}$$

$rank(U) = 2 = n \Rightarrow$ система неполностью управляема. $\sigma(A) = \{-2 \pm 5j; -1\}$.

$\lambda_1 = -1$ - неуправляемо.

Найдем Жорданову форму:

$$\dot{\hat{x}} = J\hat{x} + P^{-1}Bu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-5j & 0 \\ 0 & 0 & -2+5j \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1.5+1.5j \\ -1.5-1.5j \end{bmatrix} u$$

В матрице входного воздействия первый элемент нулевой, что подтверждает неуправляемость $\lambda_1 = -1$.

Проверим точки x_1' и x_1'' на принадлежность управляемому подпространству:

$$\begin{gathered} rank \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & x_1' \end{bmatrix} = 2, \\ rank \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & x_1'' \end{bmatrix} = 3 \end{gathered}$$

Отсюда видно, что только первая точка x_1' принадлежит управляемому пространтсву. Ее и возьмем в качестве целевой точки.

Найдем грамиан системы относительно времени $t_1 = 3$ также, как это было сделано в предыдущем задании и вычислим его собственные числа:

$$P(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 2.05 & -1.63 & 1.63 \\ -1.63 & 2.40 & -2.40 \\ 1.63 & -2.40 & 2.40 \end{bmatrix}, \sigma(P(t_1 = 3)) = \{0.00; 0.74; 6.12\}$$

Теперь аналогично тому, как и в предыдущем задании, найдем управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время $t_1 = 3$ и проведем моделирование:

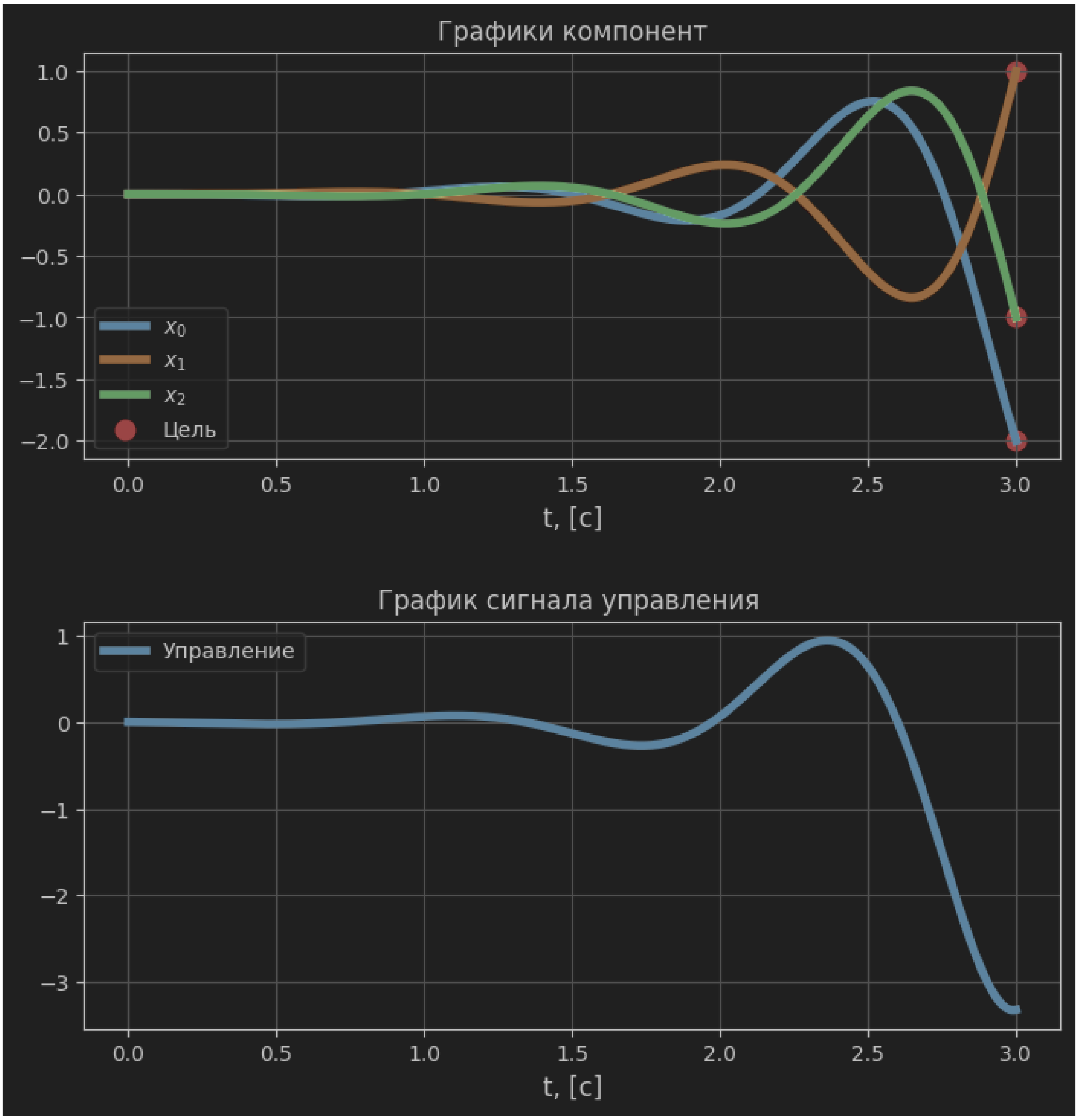

График 2. Графики компонент вектора $x(t)$ и график сигнала управления

Задание 3

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & 18 & -2 \end{bmatrix}$$

Шаг 1

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ ... \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 & -2 \\ -33 & -80 & -16 \\ 149 & 438 & 138 \end{bmatrix}$$

$rank(V) = 3 \Rightarrow$ система наблюдаема.

Шаг 2

$$\sigma(A) = \{-5 \pm 2j; 1\}.$$

Определим наблюдаемость данных собственных чисел:

$\lambda_1 = -5 - 2j$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = 3,$$

$\lambda_2 = -5 + 2j$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = 3,$$

$\lambda_3 = 1$:

$$rank \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = 3,$$

Таким образом, все собственные числа матрицы A наблюдаемы. Таким образом система наблюдаема.

Рассмотрим жорданову форму системы:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5-2j & 0 \\ 0 & 0 & -5+2j \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Видно, что система наблюдаема.

Шаг 3

Грамиан наблюдаемости системы:

$$Q(t_1) = \int\limits_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

$$Q(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 815 & 1627 & -809 \\ 1627 & 3251 & -1618 \\ -809 & -1618 & 807 \end{bmatrix}, \sigma(Q(t_1 = 3)) = \{0.057, 2.37, 4872\}.$$

Шаг 4

Выход системы:

$$y(t) = 3e^{-5t}\cos(2t) - 1e^{-5t}\sin(2t)$$

Вычисление начальных условий:

$$x(0) = (Q(t_1))^{-1} \int\limits_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

Подставив все значения, получаем:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.29 \\ 0.43 \end{bmatrix}$$

Шаг 5

Так как наша система наблюдаема, то она может иметь лишь один вектор начальных условий, поскольку система называется наблюдаемой, если двум траекториям, порожденным различными начальными условиями, соответствуют различные выходы.

Шаг 6

Результаты моделирования представлены на графике 3:

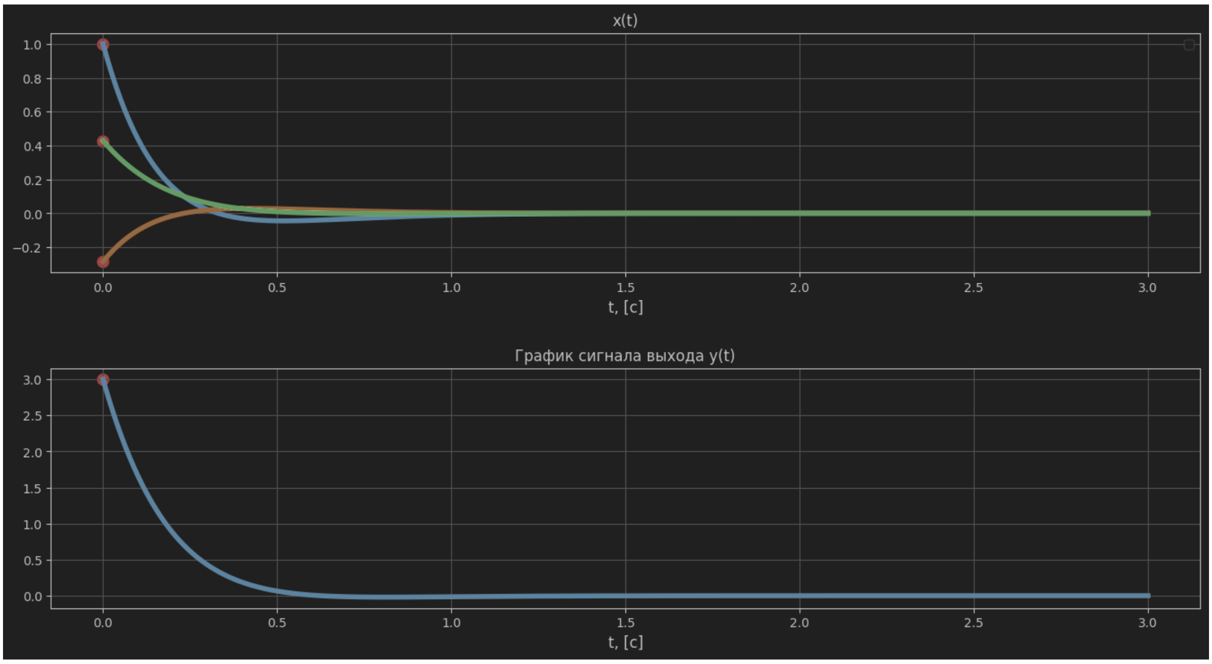

График 3. Графики x(t) и сигнала выхода y(t)

Задание 4

$$A = \begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Шаг 1

Матрица наблюдаемости:

$$V = \begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \\ -35 & -84 & -14 \\ 147 & 434 & 140 \end{bmatrix}$$

$rank(V) = 2 \Rightarrow$ система неполностью наблюдаема.

Шаг 2

$$\sigma(A) = \{-5 \pm 2j; 1\}.$$

Определив наблюдаемость собственных чисел также, как это было сделано в предыдущем задании, видим, что $\lambda_3 = 1$ не наблюдаемо.

Рассмотрим жорданову форму системы:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5-2j & 0 \\ 0 & 0 & -5+2j \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Видно, что система неполностью наблюдаема.

Шаг 3

Грамиан наблюдаемости системы:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

$$Q(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 4.56 & 8.28 & -0.84 \\ 8.28 & 15.21 & -1.35 \\ -0.84 & -1.35 & 0.34 \end{bmatrix}, \sigma(Q(t_1 = 3)) = \{1.98, 0, 2.5\}.$$

Шаг 4

Выход системы:

$$y(t) = 3e^{-5t}\cos(2t) - 1e^{-5t}\sin(2t)$$

Вычисление начальных условий:

$$x(0) = (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

Подставив все значения, получаем:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.17 \\ -0.02 \end{bmatrix}$$

Шаг 5

Наша система не полностью наблюдаема, потому могут быть другие начальные состояния, приводящие к такому же сигналу выхода $y(t)$. Для их нахождения необходимо найти ядро матрицы V.

Размерность такого ядра будет равна $dimV - rankV = 1.$ Получим базис этого подпространства:

$$Nullspace(V) = \begin{bmatrix} -0.81 \\ 0.41 \\ -0.41 \end{bmatrix}$$

Шаг 6

Выберем вектора начальных условий:

$$x'(0) = \begin{bmatrix} -0.81 \\ 0.41 \\ -0.41 \end{bmatrix}, x''(0) = \begin{bmatrix} -1.62 \\ 0.82 \\ -0.82 \end{bmatrix}, x'''(0) = \begin{bmatrix} -5.05 \\ 2.05 \\ -2.05 \end{bmatrix}$$

Результаты моделирования:

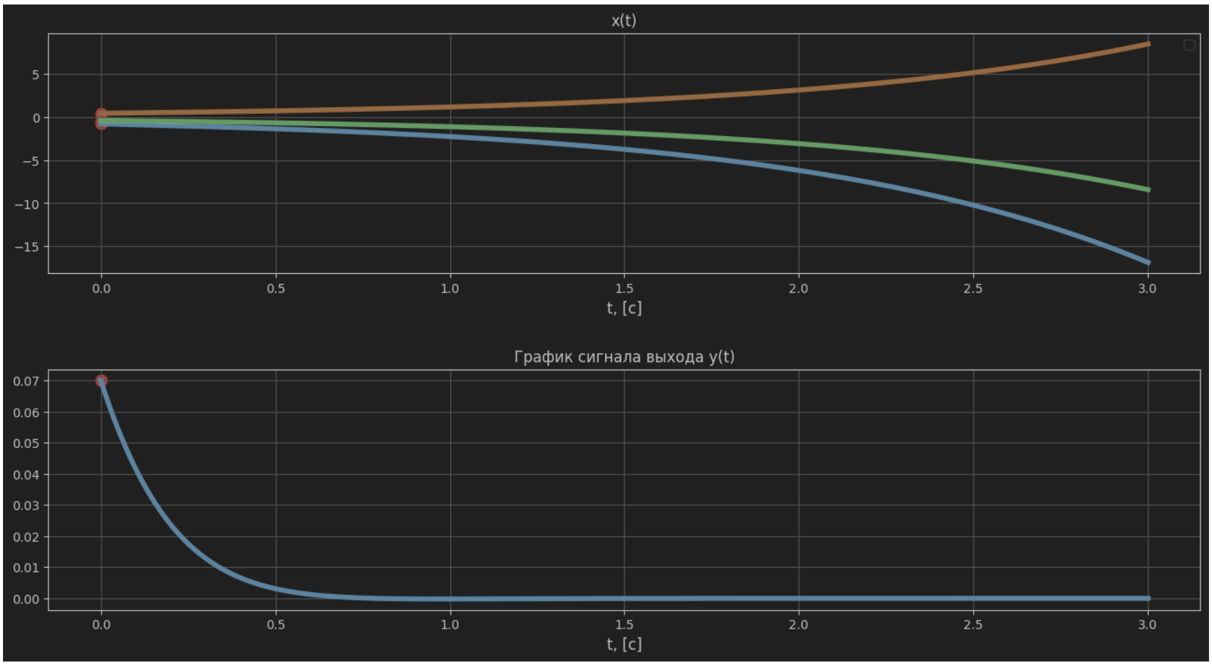

График 4. Графики результата моделирования траектории при начальных условиях $x'(0)$

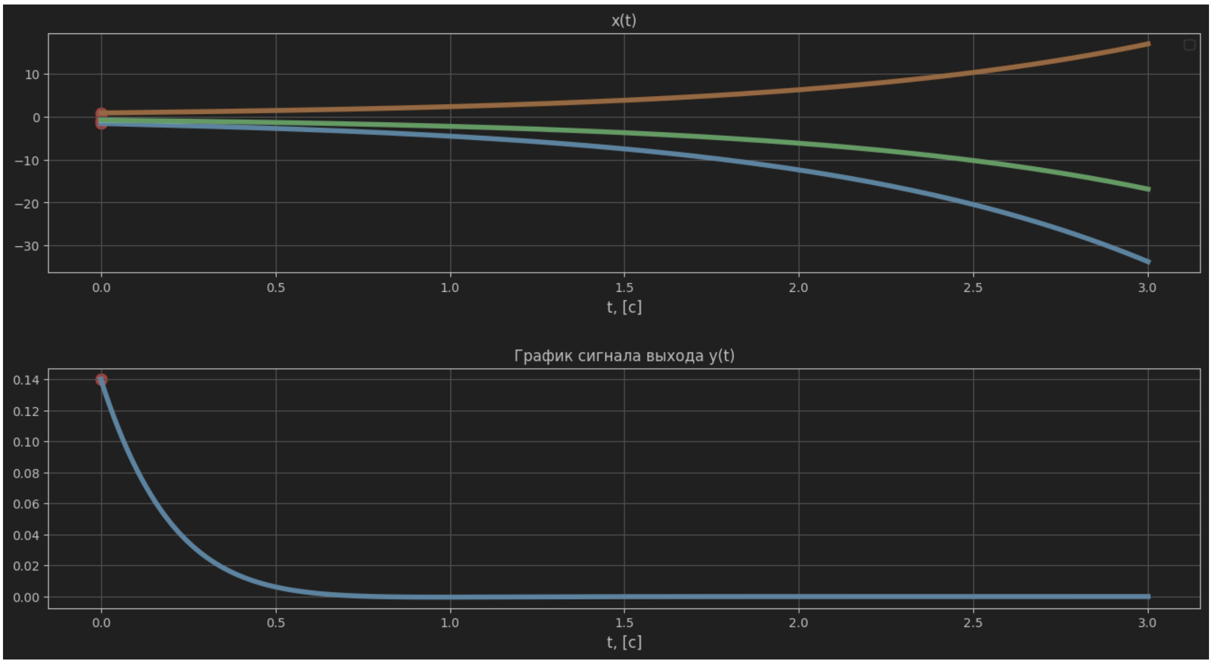

График 5. Графики результата моделирования траектории при начальных условиях $x''(0)$

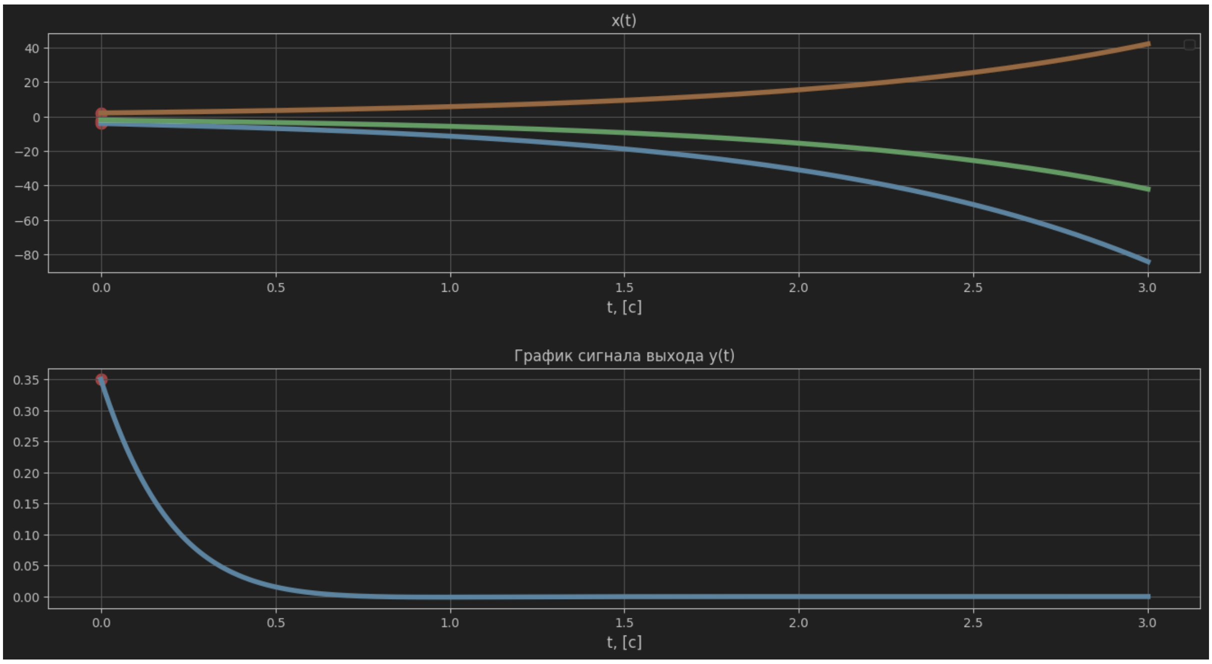

График 6. Графики результата моделирования траектории при начальных условиях $x'''(0)$

Из графиков 4-6 видно, что при разных начальных условиях $x'(0), x''(0), x'''(0)$, тректории и сигнал выхода совпадают.