> **#Савончик Егор 153505**
> **#Лабораторная работа 1**
> **#Операции с математическими выражениями**
> **#и функциями в Maple**
> **#Вариант 10**

> **#номер 1 :** Упростите алгебраическое выражение.

$$\mathrm{simplify}\left(\frac{\frac{(x^3-3\cdot x-2)}{(x^2+40\cdot x+400)}}{\frac{(x^4+x^3-3\cdot x^2-5\cdot x-2)}{(9\cdot x^3-351\cdot x^2+3240\cdot x+3600)}}\right);$$

$$\frac{9\,(x^2-40\,x+400)}{x^2+40\,x+400} \qquad \mathbf{(1)}$$

> #для проверки правильности выполнения разложим на множители

$\mathrm{factor}(x^3-3\cdot x-2);$

$$(x-2)\,(x+1)^2 \qquad \mathbf{(2)}$$

> $\mathrm{factor}(x^2+40\cdot x+400);$

$$(x+20)^2 \qquad \mathbf{(3)}$$

> $\mathrm{factor}(x^4+x^3-3\cdot x^2-5\cdot x-2);$

$$(x-2)\,(x+1)^3 \qquad \mathbf{(4)}$$

> $\mathrm{factor}(9\cdot x^3-351\cdot x^2+3240\cdot x+3600);$

$$9\,(x+1)\,(x-20)^2 \qquad \mathbf{(5)}$$

> **#номер 2:** Приведите выражение к многочлену стандартного вида.

> $\mathrm{expand}((3\cdot x-8)\cdot(2\cdot x^2+3)\cdot(4\cdot x+5));$

$$24\,x^4-34\,x^3-44\,x^2-51\,x-120 \qquad \mathbf{(6)}$$

> #для проверки полученное выжение разложим на множители

$\mathrm{factor}(24\cdot x^4-34\cdot x^3-44\,x^2-51\cdot x-120);$

$$(3\,x-8)\,(2\,x^2+3)\,(4\,x+5) \qquad \mathbf{(7)}$$

> **#номер 3:** Разложите многочлен на множители.

> $\mathrm{factor}(x^4-16\cdot x^3+67\cdot x^2-64\cdot x+252);$

$$(x-7)\,(x-9)\,(x^2+4) \qquad \mathbf{(8)}$$

> #для проверки перемножим полученные множители

$\mathrm{expand}((x-7)\cdot(x-9));$

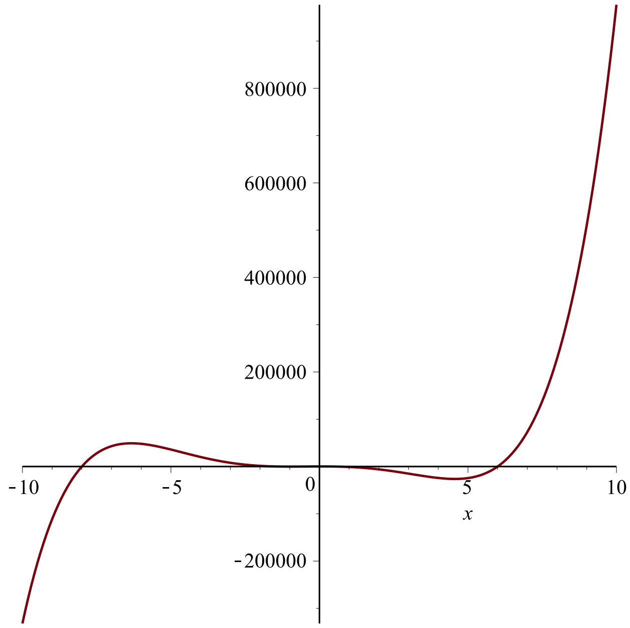
$$x^2-16\,x+63 \qquad \mathbf{(9)}$$

> $\mathrm{expand}((x^2-16\cdot x+63)\cdot(x^2+4));$

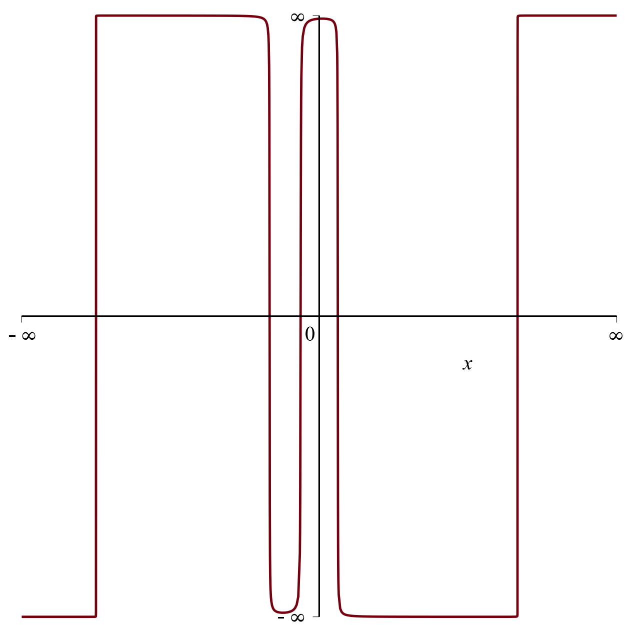
$$x^4 - 16\,x^3 + 67\,x^2 - 64\,x + 252 \qquad \textbf{(10)}$$

> **#номер 4:** Постройте график многочлена $P_5(x)$ и найдите все его корни.

> $\mathrm{plot}\left(12\cdot x^5 + 40\,x^4 - 547\cdot x^3 - 778\cdot x^2 + 136\cdot x + 192\right);$



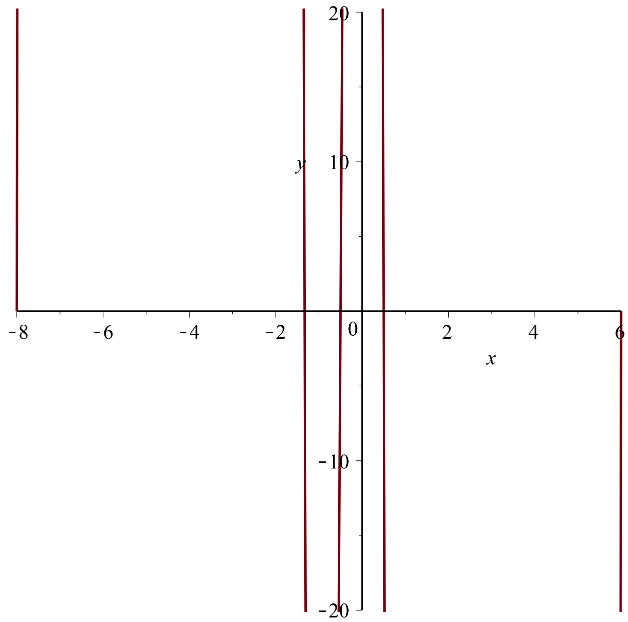
> $\mathrm{plot}\left(12\cdot x^5 + 40\,x^4 - 547\cdot x^3 - 778\cdot x^2 + 136\cdot x + 192, x = -\mathrm{infinity}\,..\mathrm{infinity}\right);$



> #найдем корни заданного многочлена
solve$\left(12\cdot x^5+40\,x^4-547\cdot x^3-778\cdot x^2+136\cdot x+192\right)$;

$$6,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{4}{3},\ -8 \qquad \textbf{(11)}$$

> plot$\left(12\cdot x^5+40\,x^4-547\cdot x^3-778\cdot x^2+136\cdot x+192,\ x=-8\,..6\,,\ y=-20\,..20\right)$;



> **#номер 5`:`` **`Разложите рациональную дробь на сумму простейших дробей.

> $\mathrm{convert}\left(\dfrac{4\cdot x^4+3\cdot x^3+2\cdot x-5}{\left(x^2+1\right)\cdot(x-3)^2\cdot\left(x^2-4\right)}, \mathrm{parfrac}\right);$

$$\frac{87}{20\,(x-2)}-\frac{31}{500\,(x+2)}+\frac{203}{25\,(x-3)^2}-\frac{1079}{250\,(x-3)}+\frac{1}{250}\,\frac{7\,x+1}{x^2+1} \quad \textbf{(12)}$$

> **#номер 6:** Решите графически уравнение и найдите его приближенные корни с точностью до 10^{-5}.

> $f1 := (\ln(x-1))^2;$

$$f1 := \ln(x-1)^2 \quad \textbf{(13)}$$

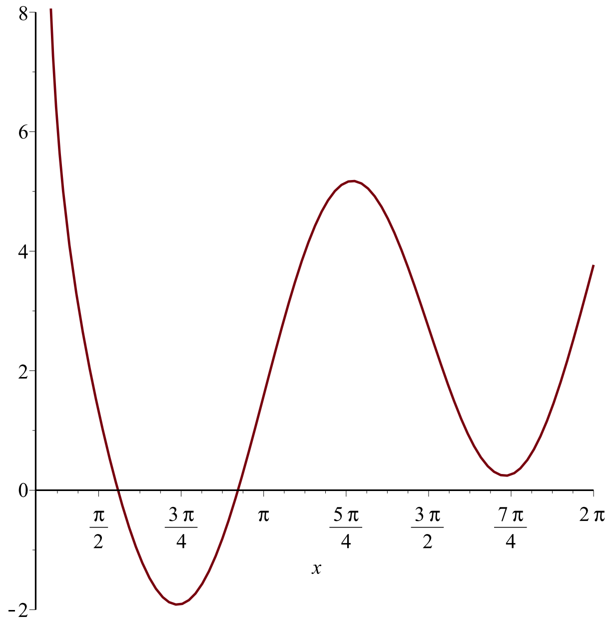
> $f2 := -3\cdot\sin(2\cdot x)-1;$

$$f2 := -3\,\sin(2\,x)-1 \quad \textbf{(14)}$$

> $equ := f1 - f2;$

$$equ := \ln(x-1)^2+3\,\sin(2\,x)+1 \quad \textbf{(15)}$$

> $\mathrm{plot}(equ);$



> #необходимые корни будут нулями функции, из графика видно что первый корень лежит в области $\left(\frac{Pi}{2}, \frac{3 \cdot Pi}{4}\right)$
#а второй $\left(\frac{3 \cdot Pi}{4}, \frac{5 \cdot Pi}{4}\right)$
. С помощью команды fsolve найдем приближенные значения в этих областях.
#А с помощью evalf округлим полученный результат до 4 разряда
$evalf\left(fsolve\left(equ, x = \frac{Pi}{2} .. \frac{3 \cdot Pi}{4}\right), 5\right);$

$$1.7548 \qquad (16)$$

> $evalf\left(fsolve\left(equ, x = \frac{3 \cdot Pi}{4} .. \frac{5 \cdot Pi}{4}\right), 5\right);$

$$2.8970 \qquad (17)$$

> **#номер 7 :** Докажите, что $\lim(a_n) = a$, определив номер $n_{epsilon}$, начиная с которого все члены последовательности (a_n)

#попадут в epsilon-окрестность точки a. Проиллюстрируйте полученный результат с помощью чертежа в Maple, положив epsilon=0,1.

> $\mathrm{abs}\left(\frac{7\cdot n+3}{6\cdot n-1}-\frac{7}{6}\right) < \mathrm{epsilon};$

$$\left|\frac{7\,n+3}{6\,n-1}-\frac{7}{6}\right| < \varepsilon \tag{18}$$

> $\mathrm{simplify}\left(\frac{7\cdot n+3}{6\cdot n-1}-\frac{7}{6}\right);$

$$\frac{25}{6\,(6\,n-1)} \tag{19}$$

> #при epsilon равном 0,1

> $\mathrm{abs}\left(\frac{25}{36\cdot n-6}\right) < 0.1;$

$$\frac{25}{|36\,n-6|} < 0.1 \tag{20}$$

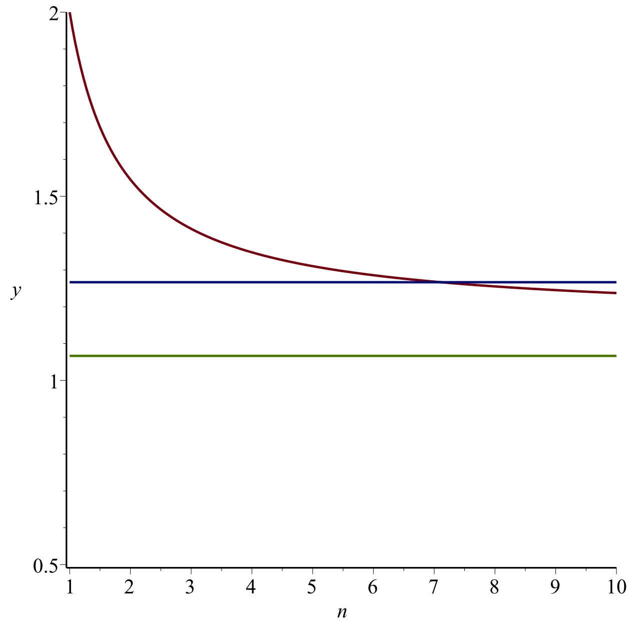
> #так как n - натуральное, то в выражении |36n-6| модуль можно опустить

> $\mathrm{evalf}\left(\mathrm{solve}\left(\frac{25}{36\cdot n-6} < 0.1\right), 5\right);$

$$\mathit{RealRange}(-\infty, \mathit{Open}(0.16667)), \mathit{RealRange}(\mathit{Open}(7.1111), \infty) \tag{21}$$

> #первый промежуток не содержит целых натуральных корней
#из второго промежутка видно что начиная с 8 члена последовательности, все следующие члены попадут в эпсилон окрестность точки a
#из этого следует что $\lim(a_n) = a$

> $\mathrm{plot}\left(\left[\frac{7\cdot n+3}{6\cdot n-1}, \frac{7}{6}+0.1, \frac{7}{6}-0.1\right], n=1..10, y=0.5..2\right);$



> **#номер 8:** Вычислите пределы числовых последовательностей.
#пример 1

> Limit(sqrt(n + 2) · (sqrt(n + 3) − sqrt(n − 4)), n = infinity) = limit(sqrt(n + 2) · (sqrt(n + 3) − sqrt(n − 4)), n = infinity);

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right) = \frac{7}{2} \quad \textbf{(22)}$$

> #домножим на сопряженное
sqrt(n + 2) · (sqrt(n + 3) − sqrt(n − 4)) = expand(sqrt(n + 2) · ((n + 3) - (n − 4)) / (sqrt(n + 3) + sqrt(n − 4)));

$$\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right) = \frac{7\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-4}} \quad \textbf{(23)}$$

> #разделим обе части выражения на корень из n
sqrt(n + 2) · ((n + 3) - (n − 4)) / sqrt(n) = 7 · sqrt(1 + 2/n);

(24)

$$\frac{7\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}=7\sqrt{1+\frac{2}{n}} \qquad (24)$$

> $\frac{\mathrm{sqrt}(n+3)+\mathrm{sqrt}(n-4)}{\mathrm{sqrt}(n)}=\mathrm{sqrt}\left(1+\frac{3}{n}\right)+\mathrm{sqrt}\left(1-\frac{4}{n}\right);$

$$\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-4}}{\sqrt{n}}=\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}} \qquad (25)$$

> #в итоге

$$\frac{7\cdot\mathrm{sqrt}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\mathrm{sqrt}\left(1+\frac{3}{n}\right)+\mathrm{sqrt}\left(1-\frac{4}{n}\right)}$$

$$\frac{7\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{4}{n}}} \qquad (26)$$

> #при n стремящемся к бесконечности $\frac{3}{n}, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}$ обратятся в ноль

#итог

> $\frac{7}{1+1}$

$$\frac{7}{2} \qquad (27)$$

> **#пример 2**

> $\mathrm{Limit}\left(\left(\frac{3\cdot n^2+6\cdot n-1}{3\cdot n^2-2\cdot n+4}\right)^{1-3\cdot n}, n=\mathrm{infinity}\right)=\mathrm{limit}\left(\left(\frac{3\cdot n^2+6\cdot n-1}{3\cdot n^2-2\cdot n+4}\right)^{1-3\cdot n}, n=\mathrm{infinity}\right);$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+6n-1}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n}=e^{-8} \qquad (28)$$

> #1 в степени бесконечность, решается с помощью второго замечательного предела

#представим в виде $\left(1+\frac{1}{a}\right)^{a}$

> Limit(((3·n^2 + 6·n − 1)/(3·n^2 − 2·n + 4))^(1 − 3·n), n = infinity) = Limit((1 + (−2·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4))^(1 − 3·n), n = infinity);

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+6n-1}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n-5}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n} \qquad (29)$$

> Limit((1 + (−2·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4))^(1 − 3·n), n = infinity) = Limit((1 + (−2·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4))^((1 − 3·n)·(−2·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4)·(3·n^2 − 2·n + 4)/(−2·n − 5)), n = infinity);

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n-5}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n-5}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n} \qquad (30)$$

> Limit((1 + (−2·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4))^((1 − 3·n)·(−2·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4)·(3·n^2 − 2·n + 4)/(−2·n − 5)), n = infinity) = e^(Limit((1 − 3·n)·(8·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4), n = infinity));

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n-5}{3n^2-2n+4}\right)^{1-3n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(1-3n)(8n-5)}{3n^2-2n+4}} \qquad (31)$$

> e^(Limit((1 − 3·n)·(8·n − 5)/(3·n^2 − 2·n + 4), n = infinity)) = e^(−8)

$$e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(1-3n)(8n-5)}{3n^2-2n+4}}=\frac{1}{e^8} \qquad (32)$$

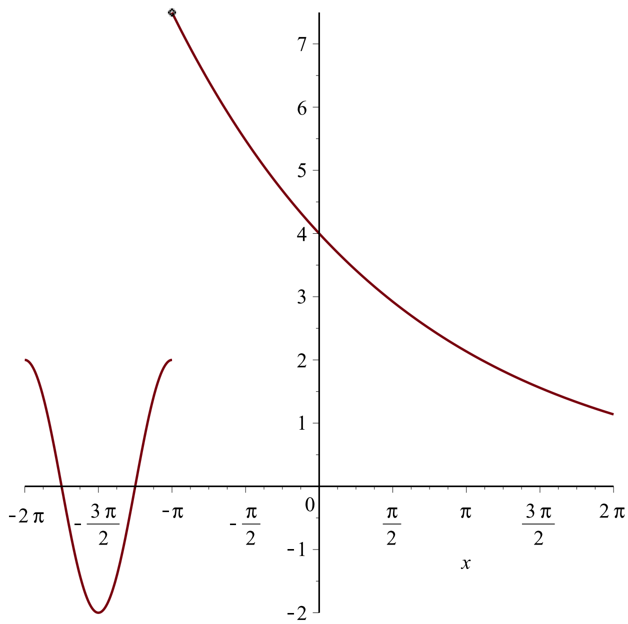
> **#номер 9:** Для заданной кусочно-непрерывной функции выполните следующие действия:

#пункт 1: Определите ее через функциональный оператор и постройте график.

> func := piecewise(x < -Pi, 2·cos(2·x), x ≥ -Pi, 4·exp(1)$^{-0.2·x}$);

$$func := \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases} \tag{33}$$

> plot(func, discont = true);



> **#пункт 2:** В точке разрыва и на бесконечности найдите односторонние пределы.

> #предел на +бесконечности
Limit(func, x = infinity) = limit(func, x = infinity);

$$\lim_{x \to \infty} \left(\begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases} \right) = 0. \tag{34}$$

> #предел на -бесконечности
Limit(func, x =-infinity) = limit(func, x =-infinity);

(35)

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases}\right) = -2\,..2. \qquad (35)$$

> #односторонний предел слева от точки разрыва
Limit(func, x = -Pi, left) = limit(func, x = -Pi, left);

$$\lim_{x\to -\pi^-}\left(\begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases}\right) = 2. \qquad (36)$$

> #односторонний предел справа от точки разрыва
Limit(func, x = -Pi, right) = limit(func, x = -Pi, right);

$$\lim_{x\to -\pi^+}\left(\begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases}\right) = 7.497824352 \qquad (37)$$

> **#пункт 3:** Найдите производную и неопределенный интеграл на каждом из промежутков непрерывности

> #для первого промежутка $2\cdot\cos(2\cdot x)$
Int(2·cos(2·x), x) = int(2·cos(2·x), x);

$$\int 2\cos(2x)\,dx = \sin(2x) \qquad (38)$$

> Diff(2·cos(2·x), x) = diff(2·cos(2·x), x);

$$\frac{d}{dx}\left(2\cos(2x)\right) = -4\sin(2x) \qquad (39)$$

> #для второго промежутка $4\cdot\exp(1)^{-0.2\cdot x}$
$\mathrm{Int}\left(4\cdot\exp(1)^{-0.2\cdot x}, x\right) = \mathrm{int}\left(4\cdot\exp(1)^{-0.2\cdot x}, x\right);$

$$\int 4\,(e)^{-0.2x}\,dx = -20.\,2.718281828^{-0.2000000000x} \qquad (40)$$

> $\mathrm{Diff}\left(4\cdot\exp(1)^{-0.2\cdot x}, x\right) = \mathrm{diff}\left(4\cdot\exp(1)^{-0.2\cdot x}, x\right);$

$$\frac{d}{dx}\left(4\,(e)^{-0.2x}\right) = -0.8\,(e)^{-0.2x} \qquad (41)$$

> Int(func, x) = int(func, x);

$$\int \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases}\,dx = \qquad (42)$$

$$\begin{cases} \sin(2.\,x) & x \le -3.141592654 \\ -20.\,2.718281828^{-0.2000000000x} + 37.48912175 & -3.141592654 < x \end{cases}$$

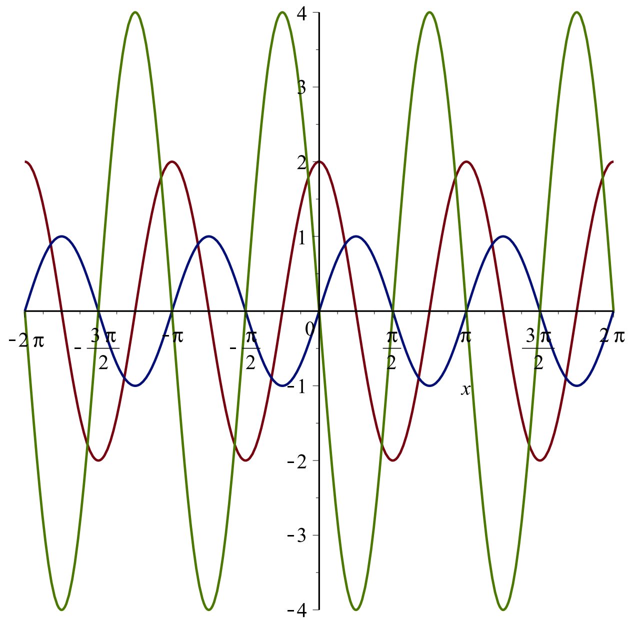
> Diff(func, x) = diff(func, x)

$$\frac{d}{dx}\left(\begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases}\right) = \qquad (43)$$

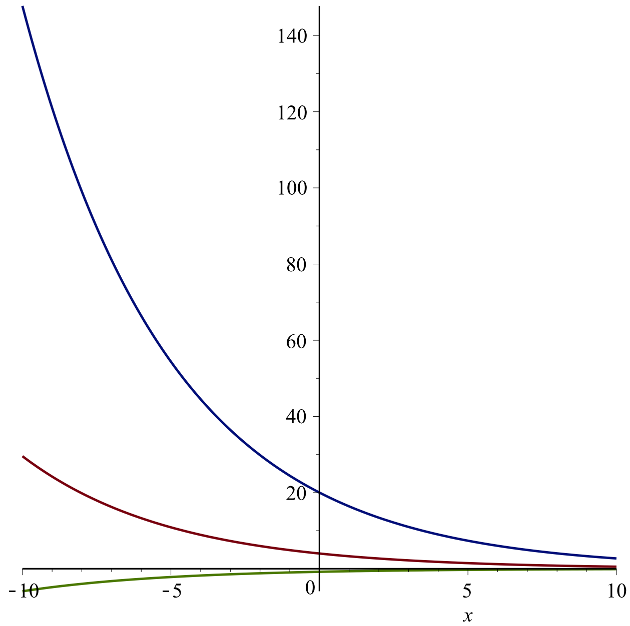
$$\begin{cases} -4.\sin(2.x) & x < -3.141592654 \\ Float(undefined) & x = -3.141592654 \\ -0.8000000000\ 2.718281828^{-0.2000000000x} & -3.141592654 < x \end{cases}$$

> **#пункт 4:** Постройте в одной системе координат графики функции, производной
#и какой-нибудь первообразной.

> plot([$2 \cdot \cos(2 \cdot x)$, $\sin(2x)$, $-4\sin(2x)$]);
#первообразная взята при C=0



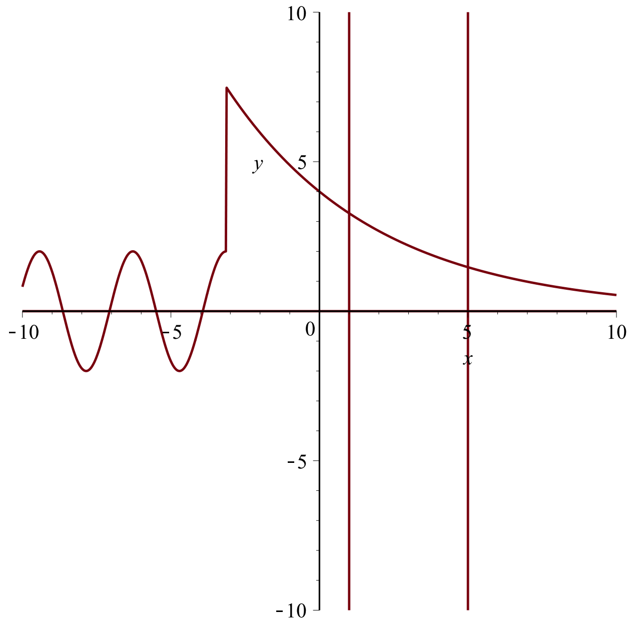
> plot($\left[4 \cdot \exp(1)^{-0.2 \cdot x}, 20.\ 2.718281828^{-0.2000000000 \cdot x}, -0.8 \cdot \exp(1)^{-0.2 \cdot x}\right]$);
#первообразная взята при C=0



> **#пункт 5:** Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком
> #функции и прямыми x=1, x=5, y=0. Сделайте чертеж.

> #подключение функции implicitplot из библиотеки plots для построения графика неявно заданной функции
> with(plots, implicitplot) :

> implicitplot([y = func(x), x = 1, x = 5, y = 0], x = -10 ..10, y = -10 ..10, gridrefine = 5);

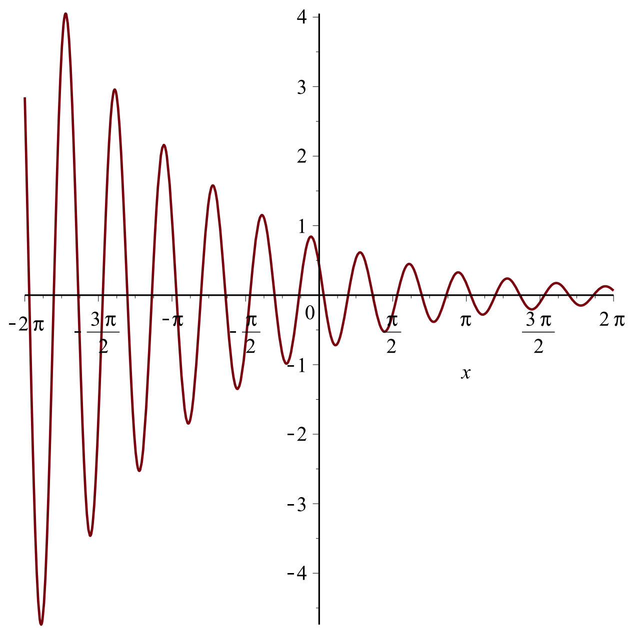


> #Из графика видно, что для нахождения площади трапеции нужно найти определенный интеграл на промежутке (1,5)
Int(func, x = 1 ..5) = int(func, x = 1 ..5);

$$\int_1^5 \begin{cases} 2\cos(2x) & x < -\pi \\ 4\,(e)^{-0.2x} & -\pi \le x \end{cases} \,dx = 9.017026238 \qquad (44)$$

> **#номер 10:** Постройте кривые на плоскости. Для кривой 2 - го порядка (пункт 2)
#найдите каноническое уравнение с помощью ортогонального преобразования.
#пункт 1

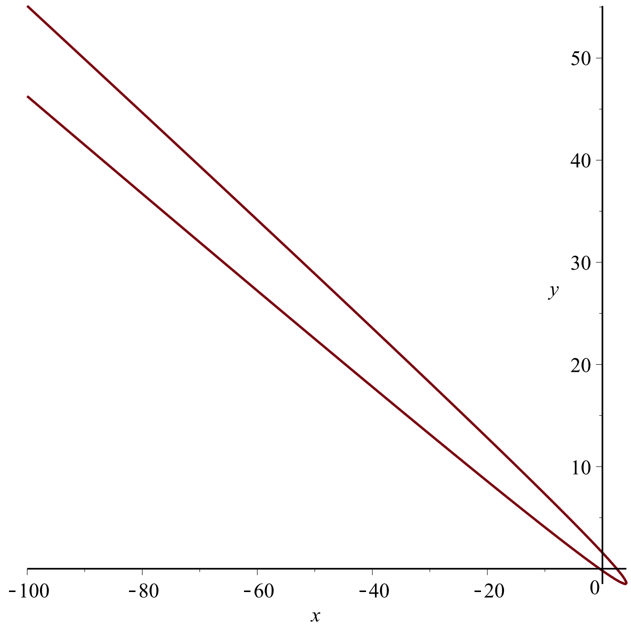
> $\mathrm{plot}\left(0.8\cdot \exp(1)^{-0.3\cdot x}\cdot \cos(6\cdot x+1)\right);$



> **#пункт 2**

> with(plots) : with(LinearAlgebra) :

> plots[implicitplot]$\left(4\cdot x^2+16\cdot x\cdot y+16\cdot y^2-8\cdot x-22\cdot y-5=0,\ x=-100\,..100,\ y=-100\,..100\ ,\ gridrefine=5\right)$;



> M := Matrix([[4, 8], [8, 16]]);

$$M := \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \tag{45}$$

> v := LinearAlgebra[Eigenvectors](M);

$$v := \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{46}$$

> e1 := Normalize(Column(v[2], [1]), Euclidean);

$$e1 := \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{47}$$

> e2 := Normalize(Column(v[2], [2]), Euclidean);

(48)

$$e2 := \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{bmatrix} \tag{48}$$

```
> subs(x = e1[1]·x1 + e2[1]·y1, y = e1[2]·x1 + e2[2]·y1, 4·x^2 + 16·x·y + 16·y^2
      − 8·x − 22·y − 5);
```

$$4\left(-\frac{2}{5}\,x1\sqrt{5}+\frac{1}{5}\,y1\sqrt{5}\right)^2+16\left(-\frac{2}{5}\,x1\sqrt{5}+\frac{1}{5}\,y1\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{5}\,x1\sqrt{5}+\frac{2}{5}\,y1\sqrt{5}\right)$$
$$+16\left(\frac{1}{5}\,x1\sqrt{5}+\frac{2}{5}\,y1\sqrt{5}\right)^2-\frac{6}{5}\,x1\sqrt{5}-\frac{52}{5}\,y1\sqrt{5}-5 \tag{49}$$

```
> expr := simplify(%);
```

$$expr := 20\,y1^2-\frac{6}{5}\,x1\sqrt{5}-\frac{52}{5}\,y1\sqrt{5}-5 \tag{50}$$

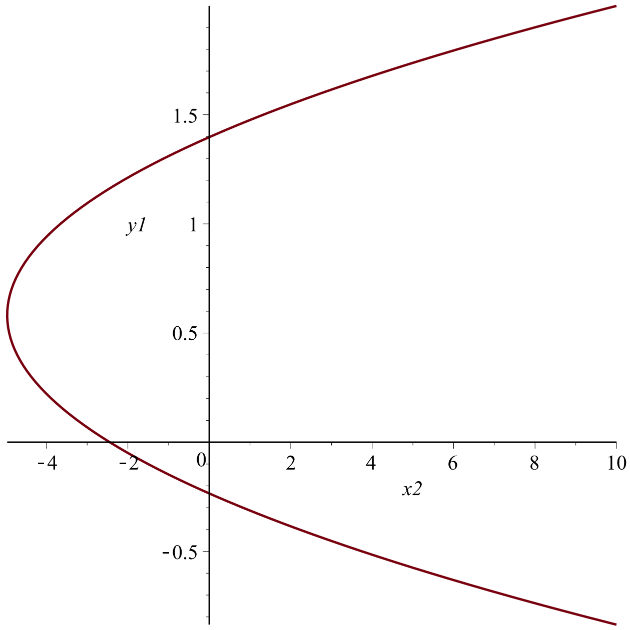
```
> expr_preseudocanon := Student[Precalculus][CompleteSquare](expr);
```

$$expr\_preseudocanon := 20\left(y1-\frac{13}{50}\sqrt{5}\right)^2-\frac{6}{5}\,x1\sqrt{5}-\frac{294}{25} \tag{51}$$

```
> expr_canon := subs(x1 = x2 + 13/50·sqrt(5), expr_preseudocanon);
```

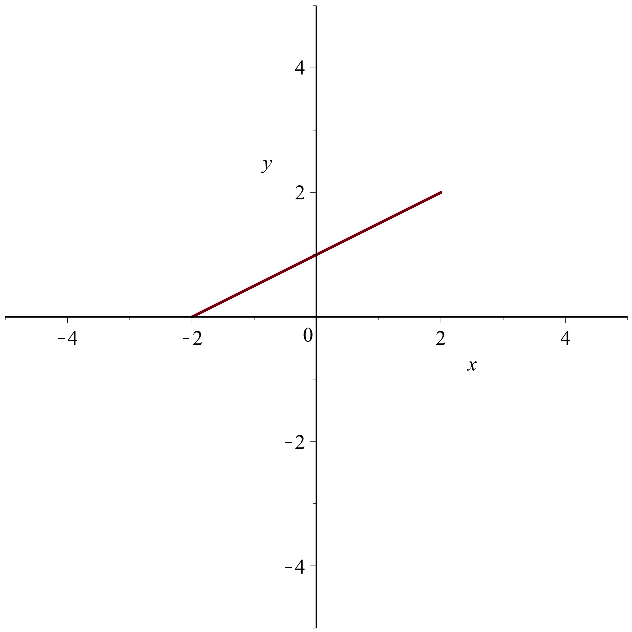
$$expr\_canon := 20\left(y1-\frac{13}{50}\sqrt{5}\right)^2-\frac{6}{5}\left(x2+\frac{13}{50}\sqrt{5}\right)\sqrt{5}-\frac{294}{25} \tag{52}$$

```
> implicitplot(expr_canon = 0, x2 =-10 ..10, y1 =-10 ..10, gridrefine = 5);
```



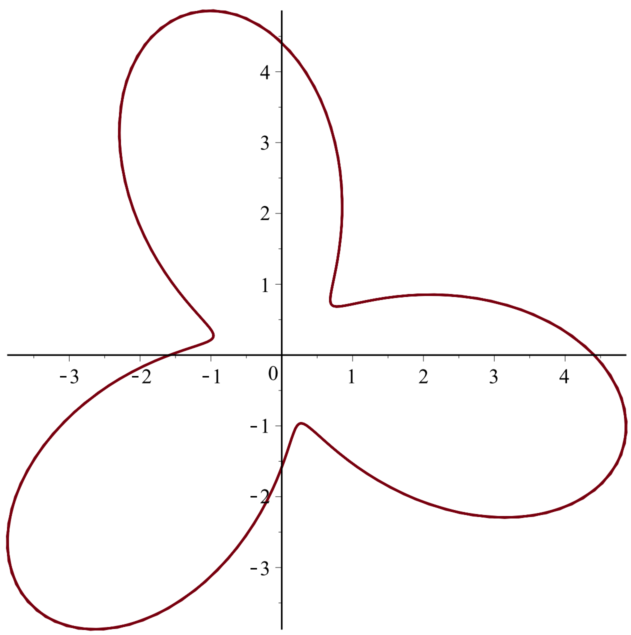
> **#пункт 3**

> $\mathrm{plot}\left(\left[2\cdot\cos(2\cdot t),\ 2\cdot\cos^2(t),\ t=-5\ ..5\right],\ x=-5\ ..5,\ y=-5\ ..5\right);$



> **#пункт 4**

> $\text{plot}\left(3+2\cdot\cos\left(3\cdot x+\frac{\text{Pi}}{4}\right),\ \text{coords}=\text{polar}\right);$



4
3
2
1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
-1
-2
-3

>