> #Савончик Егор 153505 #Лабораторная работа 2 #Ряды Фурье #Вариант 10

- > #номер 1 : Для 2 π периодической кусочно
 - непрерывной функции f(x) по ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в

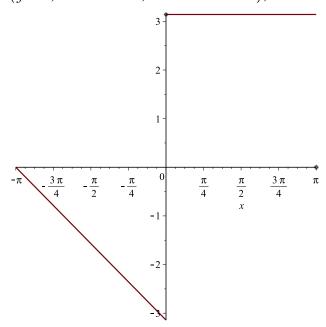
#тригонометрический ряд Фурье.

#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

> func := piecewise(-Pi $\leq x < 0$, -Pi -x, $0 \leq x < Pi$, Pi);

$$func := \begin{cases} -\pi - x & -\pi \le x \text{ and } x < 0 \\ \pi & 0 \le x \text{ and } x < \pi \end{cases}$$
 (1)

 \rightarrow plot(func, x = -Pi...Pi, discont = true);



> #если рассматривать не как сумму двух интегралов то ВАЖНО поставить знак умножения ·

$$a_{-}0 := \frac{1}{Pi} (int(-Pi - x, x = -Pi ..0) + int(Pi, x = 0 ..Pi));$$

$$a_{-}0 := \frac{1}{2} \pi$$

$$a_{-}n := \frac{1}{Pi} (int((-Pi - x) \cdot cos(x \cdot n), x = -Pi ..0) + int(Pi \cdot cos(x \cdot n), x = 0 ..Pi));$$

$$(2)$$

#после упрощения получим` $\frac{1}{p_{i \cdot n}^2} \cdot ((-1)^n - 1)$

$$a_n := \frac{\frac{\cos(\pi n) - 1}{n^2} + \frac{\sin(\pi n)\pi}{n}}{\pi}$$

$$(3)$$

> $b_n := \frac{1}{Pi} (int((-Pi - x) \cdot sin(x \cdot n), x = -Pi ..0) + int(Pi \cdot sin(x \cdot n), x = 0 ..Pi));$

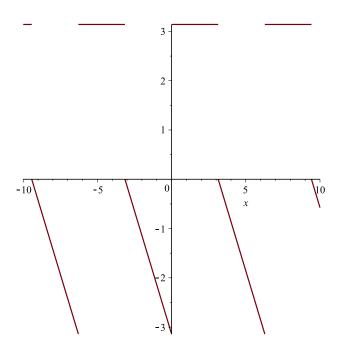
#после упрощения получим` $\frac{-(1)^{n}+2}{n}$

$$-\frac{-\pi n + \sin(\pi n)}{n^2} - \frac{\pi \left(\cos(\pi n) - 1\right)}{n}$$

$$b_n := \frac{n^2}{\pi}$$
(4)

#построим график разложения функции

$$plot\left(\frac{a_0}{2} + sum((a_n \cdot cos(n \cdot x) + b_n \cdot sin(n \cdot x)), n = 1 ...infinity), x = -10 ...10,$$
$$discont = true\right);$$



> #Создайте пользовательскую процедуру — функцию, осуществляющую построение тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции, #удовлетворяющей теореме Дирихле.

#Создание функции, которая возвращает разложенную в тригонометрический ряд Фурье функцию.

razlozhenie := proc(func, num)

local a0, an, bn;

$$a0 := \frac{1}{Pi} \cdot int(func, x = -Pi ...Pi);$$

$$an := \frac{1}{Pi} \cdot int(func \cdot cos(n \cdot x), x = -Pi ...Pi);$$

$$bn := \frac{1}{Pi} int(func \cdot sin(n \cdot x), x = -Pi ...Pi);$$

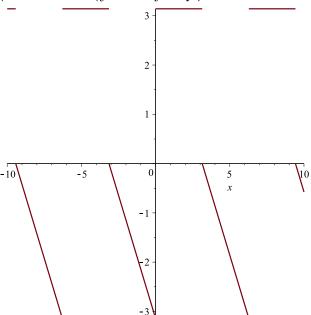
$$return\left(\frac{a0}{2} + sum((an \cdot cos(n \cdot x) + bn \cdot sin(n \cdot x)), n = 1 ...num)\right);$$

$$end proc:$$

end proc:

> #проверка работы функции

plot(razlozhenie(func, infinity), x = -10..10, discont = true);



> #Постройте в одной системе координат на промежутке [-3π ,

$$[3\,\pi]$$
 графики частичных сумм $S_1(x), S_3(x), S_7(x)$

#ряда и его суммы S(x)

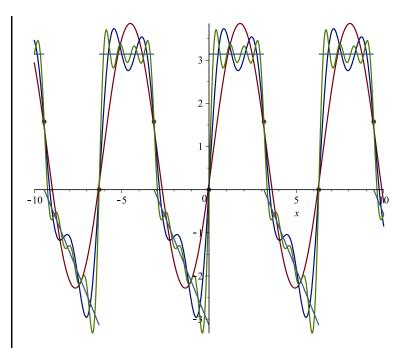
. Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.

$$points1 := pointplot \left(\left[seq \left(\left[Pi + 2 \cdot Pi \cdot k, \frac{Pi}{2} \right], k = -2 ...1 \right) \right], symbol = solidcircle,$$

$$symbolsize = 10 \right) :$$

 $points2 := pointplot([seq([2 \cdot Pi \cdot k, 0], k=-1 ..1)], symbol = solidcircle, symbol size = 10):$

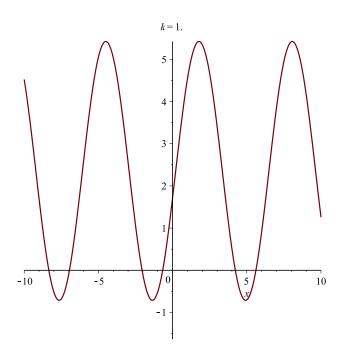
funcPlot := plot([razlozhenie(func, 1), razlozhenie(func, 3), razlozhenie(func, 7), razlozhenie(func, infinity)], <math>x = -10..10, discont = true): display(points1, points2, funcPlot);



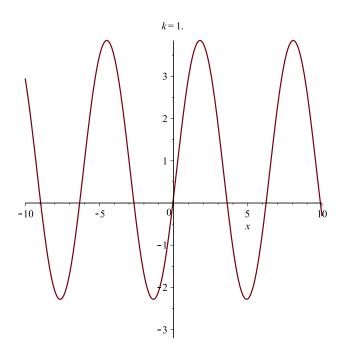
- \searrow with(plots):
- > #Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной сумм

#Анимация для разложения с помощью переменых

$$animate \left(plot, \left[\frac{a_0}{2} + sum((a_n \cdot cos(n \cdot x) + b_n \cdot sin(n \cdot x)), n = 1 ...k), x = -10\right], k = [seq(i, i = 1 ...5)]\right);$$



* #Анимация ждя разложения с помощью фуннкции(результат одинаков) animate(plot, [razlozhenie(func, k), x = -10..10], k = [seq(i, i = 1..5)]);



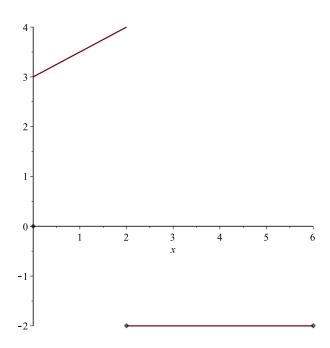
> **#номер 2 :** Разложите в ряд Фурье x_2^- - периодическую функцию y = f(x), заданную на промежутке $\#(0, x_1)$ формулой y = ax + b, а на $[x_1, x_2] - y = c$.

#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

$$func_{2} := piecewise \left(0 < x < 2, \frac{x}{2} + 3, 2 \le x \le 6, -2 \right);$$

$$func_{2} := \begin{cases} \frac{1}{2} x + 3 & 0 < x \text{ and } x < 2 \\ -2 & 2 \le x \text{ and } x \le 6 \end{cases}$$
(5)

 \rightarrow plot(func_2, x = 0..6, discont = true);



 $a_{n} := \frac{1}{2} \frac{8 \sin\left(\frac{2}{3} \pi n\right) \pi n + 3 \cos\left(\frac{2}{3} \pi n\right) - 3}{\pi^{2} n^{2}}$

(7)

$$+\frac{2\left(-2\sin(\pi n)\cos(\pi n)+\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)\right)}{\pi n}$$

>
$$b_n := \frac{1}{3} \cdot int \left(func_2 \cdot sin \left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{3} \right), x = 0 ..6 \right);$$

#после упрощения $-6 \cdot cos(\frac{2}{3} \cdot Pi \cdot n) \cdot \frac{1}{Pi \cdot n} + \frac{5}{Pi \cdot n} + sin \left(\frac{2}{3} \cdot Pi \cdot n \right) \cdot \frac{3}{2 \cdot Pi^2 \cdot n^2}$

$$b_{n} := -\frac{1}{2} \frac{8 \cos\left(\frac{2}{3} \pi n\right) \pi n - 6 \pi n - 3 \sin\left(\frac{2}{3} \pi n\right)}{\pi^{2} n^{2}}$$

$$= \frac{2 \left(-2 \cos(\pi n)^{2} + \cos\left(\frac{2}{3} \pi n\right) + 1\right)}{2 \sin\left(\frac{2}{3} \pi n\right)}$$
(8)

 πn

> #Модифицируйте созданную ранее процедуру (задание 1). $razlozhenie_2 := proc(func, l, num)$

local a0, an, bn;

#без округления переходит на комплексные числа

$$a0 := evalf\left(\frac{1}{l} \cdot int(func, x = 0 ... 2 \cdot l)\right);$$

$$an := evalf\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(func \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0 ... 2 \cdot l\right)\right);$$

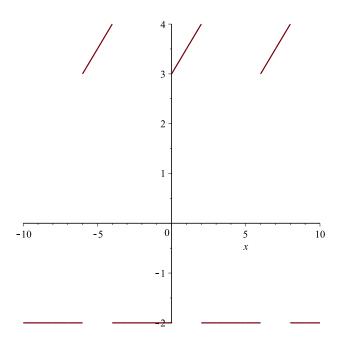
$$bn := evalf\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(func \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = 0 ... 2 \cdot l\right)\right);$$

$$return\left(\frac{a0}{2} + sum\left(\left(an \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + bn \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right)\right), n = 1 ... num\right)\right);$$

$$end \ proc:$$

#построение графика разложения функции в тригонометрический ряд Фурье с помощью функции

plot(razlozhenie 2(func 2, 3, infinity), x = -10..10, discont = true);



> #Постройте в одной системе координат графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ ряда и его суммы S(x) на промежутке $\#[-2x_2,2x_2]$

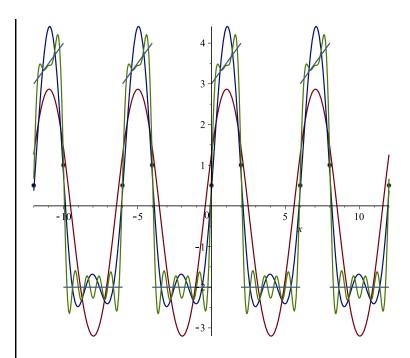
. Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде

points1 := $pointplot([seq([2+6 \cdot k, 1], k=-2..1)], symbol = solidcircle, symbolsize = 10):$

 $points2 := pointplot \left(\left[seq \left(\left[6 \cdot k, \frac{1}{2} \right], k = -2 ...2 \right) \right], \text{ symbol} = \text{solidcircle},$ $\text{symbolsize} = 10 \right) :$

 $\begin{aligned} \textit{funcPlot} &\coloneqq \textit{plot}([\textit{razlozhenie}_2(\textit{func}_2, 3, 1), \textit{razlozhenie}_2(\textit{func}_2, 3, 3), \\ &\textit{razlozhenie}_2(\textit{func}_2, 3, 7), \textit{razlozhenie}_2(\textit{func}_2, 3, \textit{infinity})], \textit{x} = -12 ..12, \\ &\textit{discont} = \textit{true}): \end{aligned}$

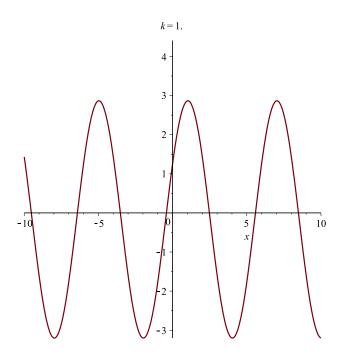
display(points1, points2, funcPlot);



> #Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.

#анимация с помощью переменных

$$animate \left(plot, \left[\frac{a_0}{2} + sum\left(\left(a_n \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{3}\right) + b_n \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{3}\right)\right), n = 1\right)\right), k = [seq(i, i = 1 ...5)],$$



> #номер 3: Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд

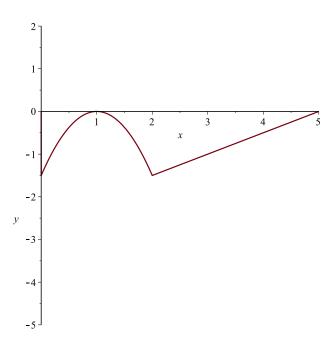
#Фурье. Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

$$func_{3} := piecewise \left(0 < x < 2, -\frac{3}{2} \cdot x^{2} + 3 \cdot x - \frac{3}{2}, 2 \le x \le 5, \frac{1}{2} \cdot x - \frac{5}{2} \right);$$

$$func_{3} := \begin{cases} -\frac{3}{2} x^{2} + 3 x - \frac{3}{2} & 0 < x \text{ and } x < 2 \\ \frac{1}{2} x - \frac{5}{2} & 2 \le x \text{ and } x \le 5 \end{cases}$$

$$(9)$$

> $plot(func_3, x = 0..5, y = -5..2);$



> #по син нечетная

$$b_sin := \frac{2}{5} \cdot int \left(func_3 \cdot sin \left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{5} \right), x = 0 ...5 \right);$$

$$b_sin := \frac{3 \left(\pi^2 n^2 \cos \left(\frac{2}{5} \pi n \right) - \pi^2 n^2 - 10 \pi n \sin \left(\frac{2}{5} \pi n \right) - 50 \cos \left(\frac{2}{5} \pi n \right) + 50 \right)}{\pi^3 n^3}$$

$$+ \frac{-3 \cos \left(\frac{2}{5} \pi n \right) \pi n + 5 \sin (\pi n) - 5 \sin \left(\frac{2}{5} \pi n \right)}{\pi^2 n^2}$$

$$(10)$$

$$int\left(x^{2} \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{5}\right), x = 0..2\right);$$

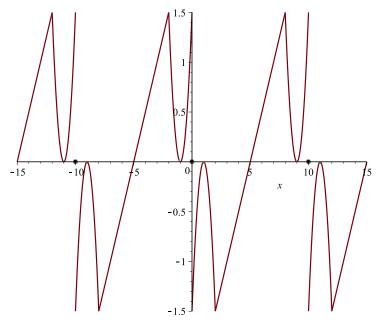
$$\frac{10\left(-2\pi^{2}n^{2}cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 10\pi n sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 25cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) - 25\right)}{\pi^{3}n^{3}}$$
(11)

> points := pointplot([seq([$10 \cdot k, 0$], k = -1 ...1)], symbol = solidcircle, symbolsize

$$=10$$
):

$$plotFunc := plot \left(sum \left(b_sin \cdot sin \left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{5} \right), n = 1 ..infinity \right), x = -15 ..15, discont = true \right) :$$

display(points, plotFunc);



#по кос четная

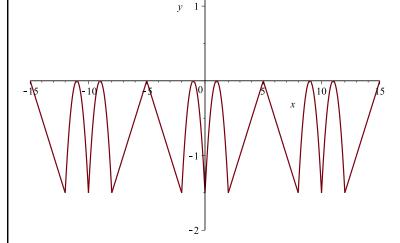
$$= > #по кос четная$$
 $> a0_cos := \frac{2}{5} \cdot int(func_3, x = 0..5);$
 $= a0_cos := \frac{2}{5} \cdot int(func_3, x = 0..5);$

$$a0_cos := -\frac{13}{10}$$
 (12)

$$= int\left(x^2 \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot x \cdot n}{5}\right), x = 0..2\right);$$

$$\frac{10\left(2\pi^{2}n^{2}\sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right)+10\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right)\pi n-25\sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right)\right)}{\pi^{3}n^{3}}$$
(13)

> $plot\left(\frac{a0_cos}{2} + sum\left(a_cos \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{5}\right), n = 1 ..infinity\right), x = -15 ..15, y = -2$..2, discont = true;



- **_>** #по синкос
- $a_0 := \frac{2}{5} int(func_3, x = 0..5);$

$$a_0 := -\frac{13}{10}$$
 (15)

$$a_{n} := -\frac{3}{4} \frac{2 \pi^{2} n^{2} sin\left(\frac{4}{5} \pi n\right) + 10 \pi n cos\left(\frac{4}{5} \pi n\right) + 10 \pi n - 25 sin\left(\frac{4}{5} \pi n\right)}{\pi^{3} n^{3}}$$
 (16)

$$+\frac{1}{4}\frac{6\sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right)\pi n+10\cos\left(\pi n\right)^{2}-5\cos\left(\frac{4}{5}\pi n\right)-5}{\pi^{2}n^{2}}$$

$$b_n := \frac{2}{5} int \left(func_3 \cdot sin \left(2 \cdot \frac{Pi \cdot n \cdot x}{5} \right), x = 0 ..5 \right);$$

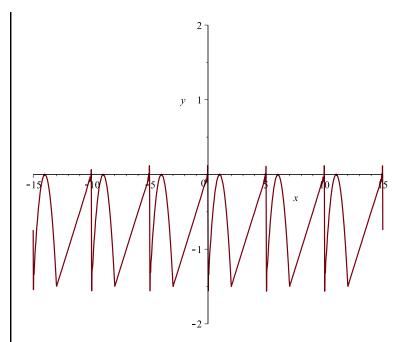
$$b_n :=$$

$$(17)$$

$$\frac{3}{4} \frac{1}{\pi^{3} n^{3}} \left(2 \pi^{2} n^{2} \cos \left(\frac{4}{5} \pi n \right) - 2 \pi^{2} n^{2} - 10 \sin \left(\frac{4}{5} \pi n \right) \pi n \right)$$
$$-25 \cos \left(\frac{4}{5} \pi n \right) + 25$$

$$+\frac{1}{4}\frac{-6\pi n\cos\left(\frac{4}{5}\pi n\right)+10\sin(\pi n)\cos(\pi n)-5\sin\left(\frac{4}{5}\pi n\right)}{\pi^{2}n^{2}}$$

>
$$plot\left(\frac{a_0}{2} + sum\left(a_n \cdot cos\left(\frac{2}{5} \cdot Pi \cdot x \cdot n\right) + b_n \cdot sin\left(\frac{2}{5} \cdot Pi \cdot x \cdot n\right), n = 1..100\right), x = -15..15, y = -2..2\right);$$



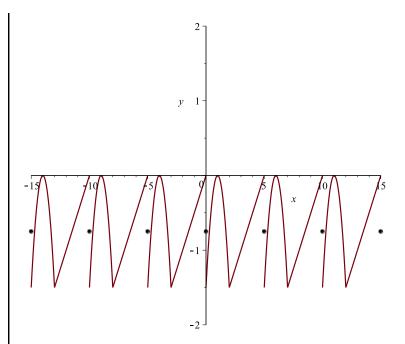
> points :=
$$pointplot\left(\left[seq\left(\left[5\cdot k, -\frac{3}{4}\right], k=-3..3\right)\right], symbol = solidcircle,$$

$$symbolsize = 10\right):$$

$$plotFunc := plot\left(razlozhenie_2\left(func_3, \frac{5}{2}, infinity\right), x = -15..15, y = -2..2,$$

$$discont = true\right):$$

$$display(points, plotFunc);$$



> #**HOMEP 4**:

Разложите функцию в ряд Фурье по многочленам Лежандра и Чебышёва на промежутке [-1, 1]. Создайте пользовательские процедуры, #осуществляющие построение частичной суммы ряда для абсолютно интегрируемой функции по этим ортогональным полиномам.

> #функция номер 1

$$func := 4 \cdot sin(2 \cdot x)^3$$
;

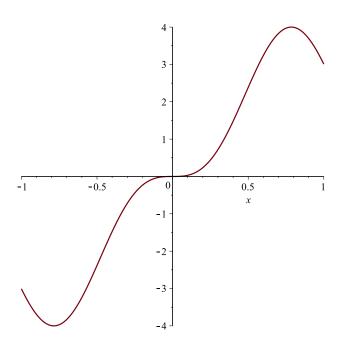
$$func := 4 \sin(2x)^3 \tag{18}$$

> #функция номер 2

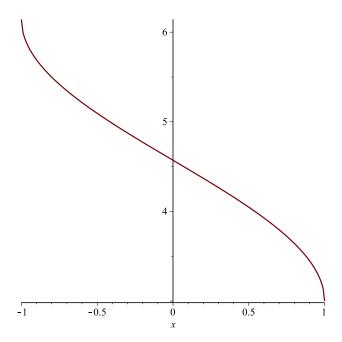
$$func_2 := arccos(x) + 3;$$

$$func_2 := arccos(x) + 3$$
 (19)

> plot(func, x = -1..1);

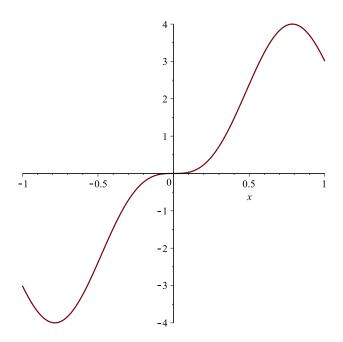


 $> plot(func_2, x = -1..1);$

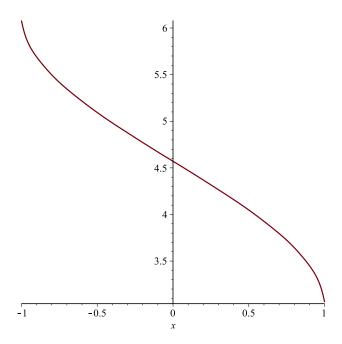


> #разложение по многочленам Лежандра
Lezhandr :=proc(func, k)
local
$$C_n$$
, P ;
 $C_n := n \to \frac{2 \cdot n + 1}{2} \cdot int(func \cdot P(n), x = -1 ..1);$
 $P := n \to \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \left(\left(x^2 - 1\right)^n\right)^{\binom{n}{2}}$;
#c sum не работает
return(add($C_n(n) \cdot P(n), n = 0 ..k$));
end proc:

 \rightarrow plot(Lezhandr(func, 15), x = -1..1);



> $plot(Lezhandr(func_2, 15), x = -1..1);$



- > with(orthopoly):
- > #разложение по многочленам Чебышева Chebish := proc(func, k)

local C n;

$$C_n(n) := \frac{2}{Pi} \cdot int \left(\frac{func \cdot T(n, x)}{sqrt(1 - x^2)}, x = -1 ...1 \right);$$

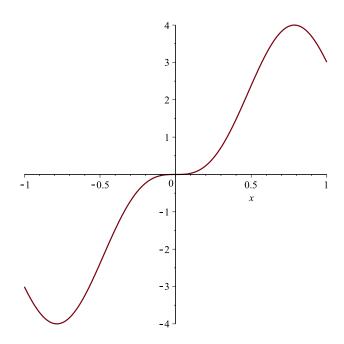
#Самописный не работает, поэтому использую из пакета

$$\#T(n, x) := piecewise(n = 0, 1, n = 1, x, 2 \cdot x \cdot T(n - 1, x) - T(n - 2, x));$$

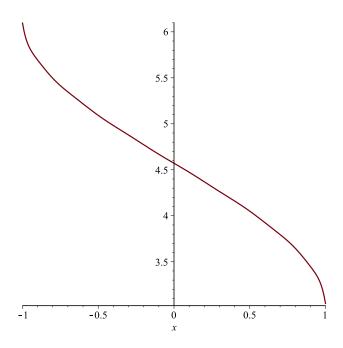
$$return\left(\frac{1}{Pi} \cdot int\left(\frac{func}{sqrt(1-x^2)}, x = -1..1\right) + sum(C_n(n) \cdot T(n, x), n = 1..k)\right);$$

end proc:

> plot(Chebish(func, 15), x = -1..1);



> $plot(Chebish(func_2, 15), x = -1..1);$



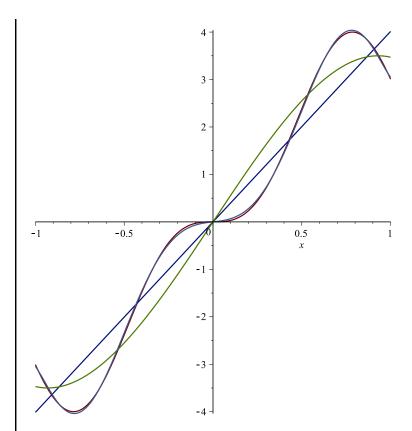
> #Постройте в одной системе координат на промежутке [-1,

1] графики заданной функции и построенных частичных сумм ряда Фурье. #Экспериментально найдите наименьший порядок частичной суммы, равномерно аппроксимирующей на всем промежутке заданную функцию с точностью 0,1.

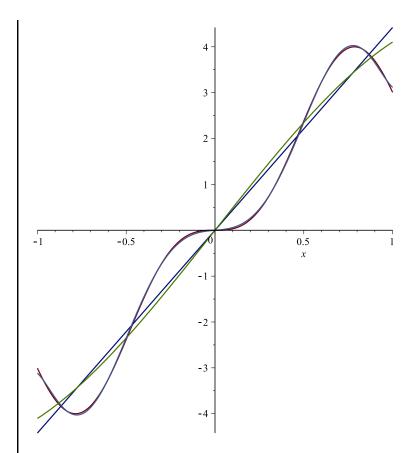
#Проиллюстрируйте свой результат.

#Частичные суммы по многочленам Чебышевам и Лежандра для п равных 1,
 3,7.

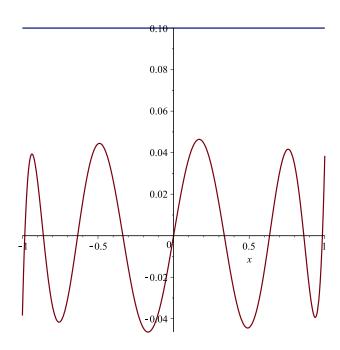
plot([func, Chebish(func, 1), Chebish(func, 3), Chebish(func, 7)], x = -1..1);



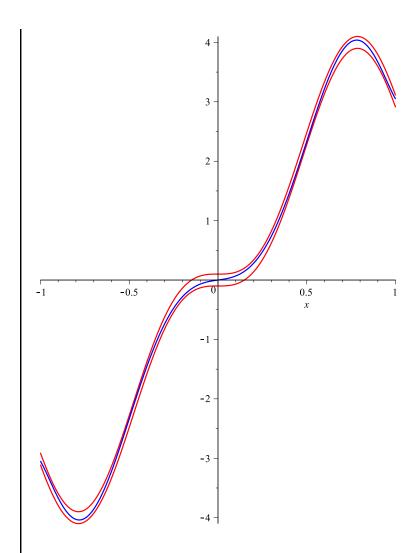
> plot([func, Lezhandr(func, 1), Lezhandr(func, 3), Lezhandr(func, 7)], x = -1..1);



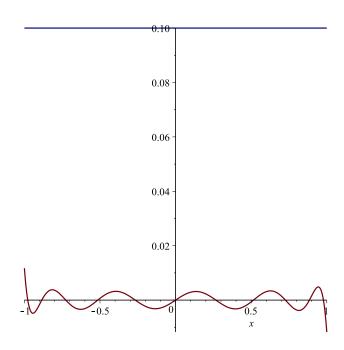
 $\Rightarrow plot([Chebish(func, 7) - func, 0.1], x = -1..1);$



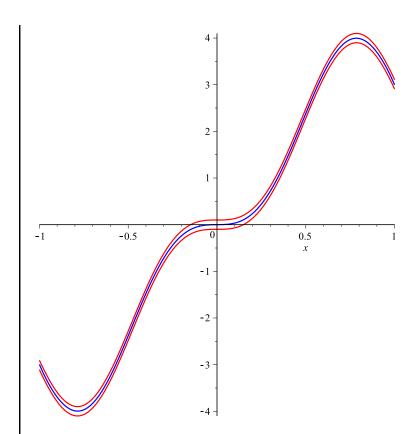
> plot([func + 0.1, func - 0.1, Chebish(func, 7)], x = -1..1, color = [red, red, blue]);



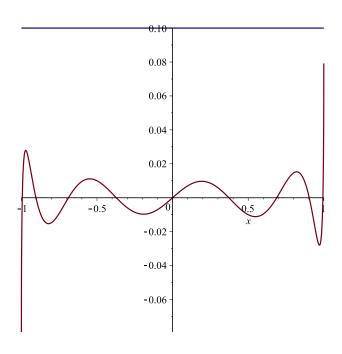
> plot([Lezhandr(func, 9) - func, 0.1], x = -1..1);



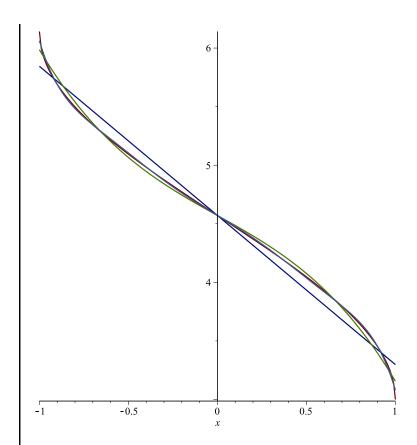
> plot([func + 0.1, func - 0.1, Lezhandr(func, 9)], x = -1..1, color = [red, red, blue]);



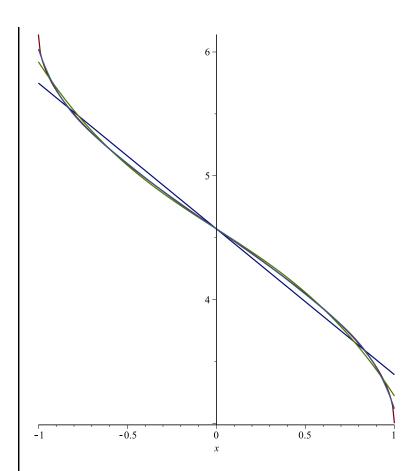
 $\rightarrow plot([Chebish(func_2, 7) - func_2, 0.1], x = -1..1);$



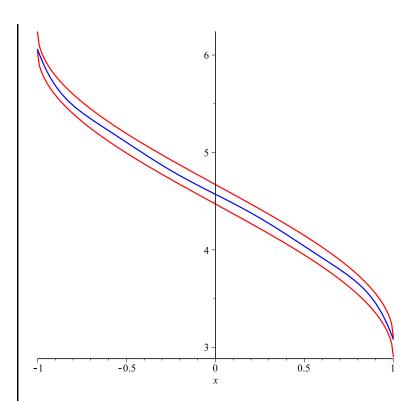
> plot([func_2, Chebish(func_2, 1), Chebish(func_2, 3), Chebish(func_2, 7)], x = -1..1);



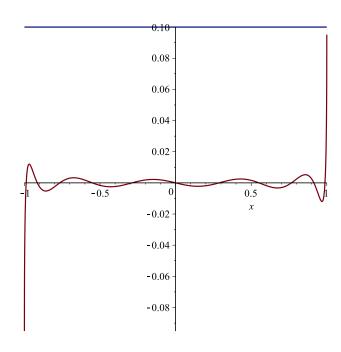
> $plot([func_2, Lezhandr(func_2, 1), Lezhandr(func_2, 3), Lezhandr(func_2, 7)], x = -1 ...1);$



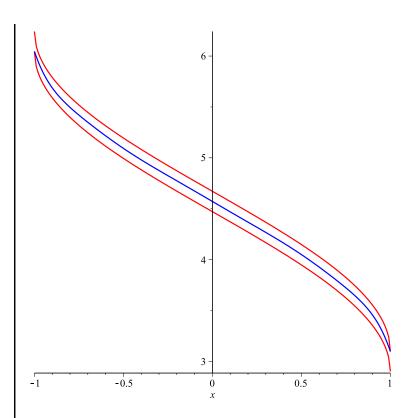
> $plot([func_2 + 0.1, func_2 - 0.1, Chebish(func_2, 7)], x = -1..1, color = [red, red, blue]);$



 \rightarrow plot([Lezhandr(func_2, 9) - func_2, 0.1], x = -1 ...1);



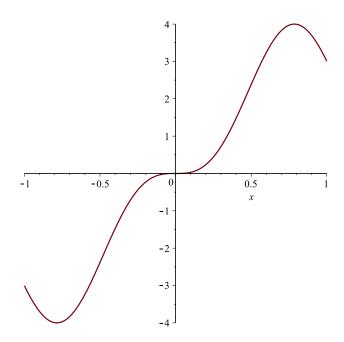
> plot([func_2 + 0.1, func_2 - 0.1, Lezhandr(func_2, 9)], x = -1 ..1, color = [red, red, blue]);



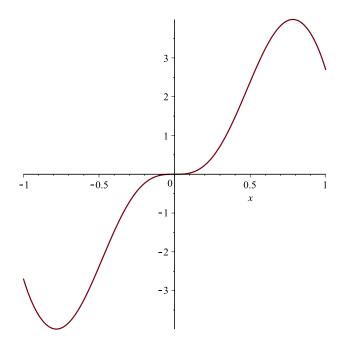
- > #Разложите функцию в тригонометрический и степенной ряды на промежутке
 - #[-1,1]. Найдите наименьший порядок частичных суммы, равномерно аппроксимирующих на всем промежутке заданную функцию с точностью 0, 1.

#Проиллюстрируйте свой результат.

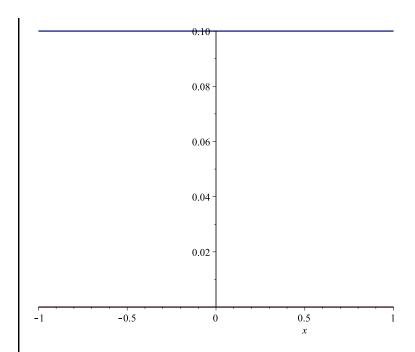
> #тригонометрический ряд Фурье #можно взять разложение от -Рі до Рі из первого номера, в таком случае на границах будет ровный график plot(razlozhenie(func, 6), x = -1..1);



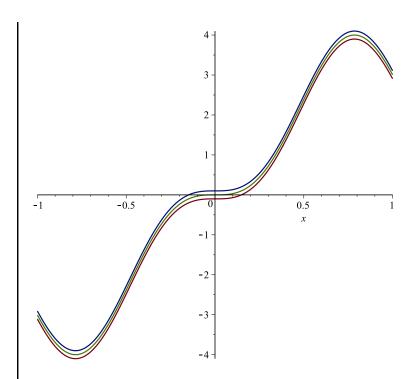
> #Степенной ряд Тейлера plot(mtaylor(func, x = 0, 15), x = -1 ..1);

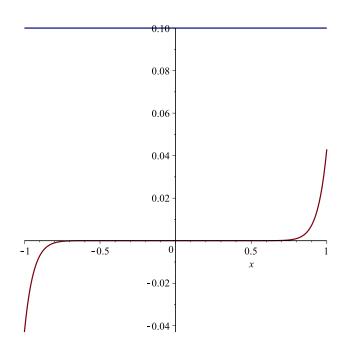


> plot([razlozhenie(func, 6) - func, 0.1], x = -1..1);

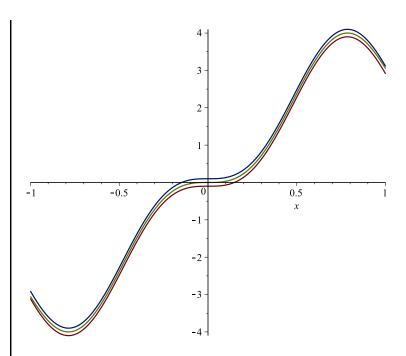


= > plot([func - 0.1, func + 0.1, razlozhenie(func, 6)], x = -1..1);





> plot([func - 0.1, func + 0.1, mtaylor(func, x = 0, 16)], x = -1..1);



> разложение из первого номера (om - nu до nu) не работает для арккосинуса razlozhenie_special :=proc(func, l, num)

local a0, an, bn;

#без округления переходит на комплексные числа

$$a0 := evalf\left(\frac{1}{l} \cdot int(func, x = -l...l)\right);$$

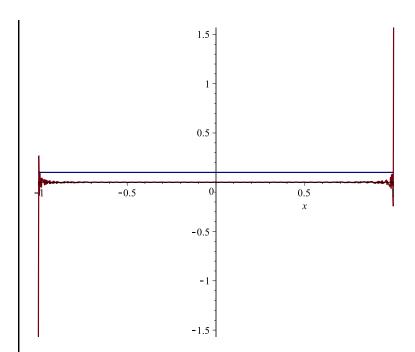
$$an := evalf\left(\frac{1}{l} \cdot int\left(func \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = -l...l\right)\right);$$

$$bn := evalf\left(\frac{1}{l} int\left(func \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right), x = -l...l\right)\right);$$

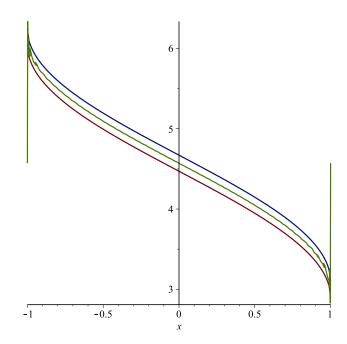
$$return\left(\frac{a0}{2} + sum\left(\left(an \cdot cos\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right) + bn \cdot sin\left(\frac{Pi \cdot n \cdot x}{l}\right)\right), n = 1..num\right)\right);$$

$$end\ proc:$$

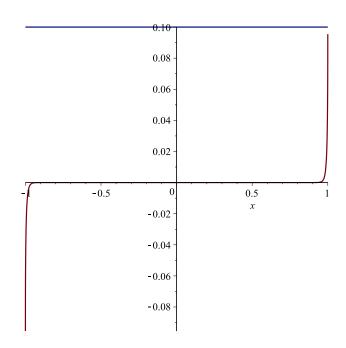
> #пересечение на границе не учитываю, при построении на infinity вылазит ошибка ядра $plot([razlozhenie(func_2, 3) - func_2, 0.1], x = -1..1);$



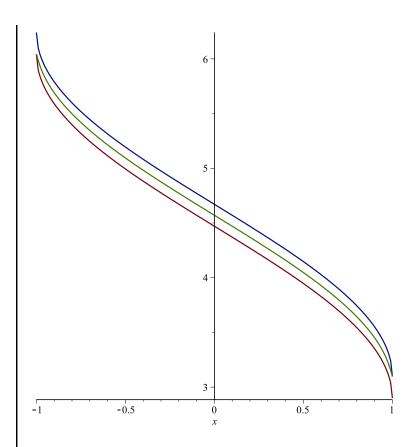
> plot([func_2 - 0.1, func_2 + 0.1, razlozhenie_special(func_2, 1, 350)], x = -1
..1);



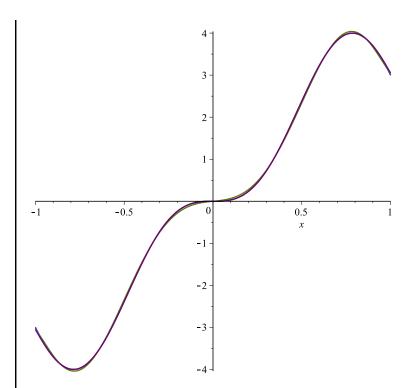
 $\Rightarrow plot([mtaylor(func_2, x = 0, 70) - func_2, 0.1], x = -1..1);$



 \rightarrow plot([func_2 - 0.1, func_2 + 0.1, mtaylor(func_2, x = 0, 70)], x = -1 ..1);



- #Изобразите в одной системе координат на промежутке
 #[-1,
 1]
 графики заданной функции и всех построенных аппроксимирующих многочленов.
- > plot([func, Lezhandr(func, 9), Chebish(func, 7), razlozhenie(func, 6), mtaylor(func, <math>x = 0, 16)], x = -1..1);



> $plot([func_2, Lezhandr(func_2, 9), Chebish(func_2, 7), razlozhenie_special(func_2, 1, 350), mtaylor(func_2, x = 0, 70)], x = -1 ..1)$

