> **#Савончик Егор 153505**
> **#Лабораторная работа 3.1**
> **#Обыкновенные дифференциальные уравнения 1-го порядка**
> **#Вариант 10**

> *#номер 1 : Для данного дифференциального уравнения методом изоклин*
> *#постройте интегральную кривую, проходящую через точку M .*

> $with(DEtools):$
> $with(plots):$

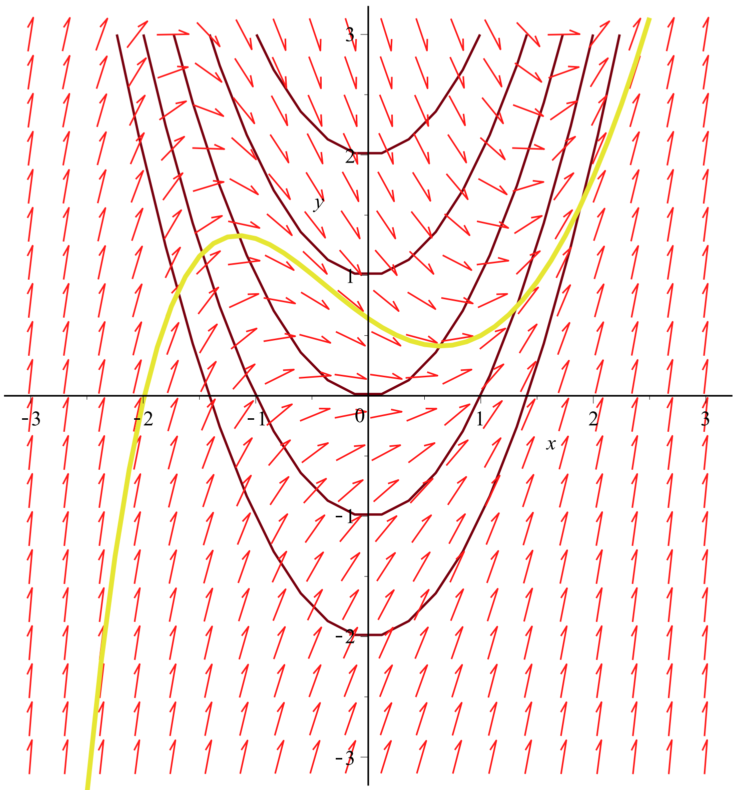
> *#построение нескольких изоклин*
> $\mathrm{linii} := \mathrm{implicitplot}(\,[seq(subs(k=i, y=x^2-k), i=-2..2)\,], x=-3..3, y=-3..3);$

$$linii := PLOT(\ldots) \tag{1}$$

> *#построение интегральной кривой*
> $krivaia := DEplot\left(\{diff(y(x), x) = x^2 - y(x)\}, y(x), x=-3..3, y=-3..3, \left[\left[1, \frac{1}{2}\right]\right]\right)$

$$krivaia := PLOT(\ldots) \tag{2}$$

> $display(linii, krivaia);$




> *номер* 2.1 : *Найдите линию, проходящую через точку* $M_0$ и *обладающую тем свойством, что* в *любой ее точке M*
*нормальный вектор MN* с *концом на оси Oy имеет длину, равную a,* и *образует острый угол* с *положительным*
*направлением оси Oy . Сделайте чертеж*

> *#для нормали M(5,2), a=13*

> *#уравнение нормали*

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f(x_0)}(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) - \frac{x - x_0}{f(x_0)} \quad (3)$$

> #рассмотрим точку N в которой нормаль пересекает ось y

#N(0, $y_0 + \dfrac{x_0}{y_0^{(1)}}\Big)$

#возьмем произвольную точку на прямой, с координатами ($x_0$, $y_0\Big)$

> #используем формулу расстояния между двумя точками

$$a^2 = \left(x_0 - 0\right)^2 + \left(y_0 - y_0 - \frac{x_0}{y_0^{(1)}}\right)^2$$

$$a^2 = x_0^2 + \frac{x_0^2}{\left(\frac{d}{dx}\, y_0(x)\right)^2} \tag{4}$$

> $dsolve\left(a^2 = (x-0)^2 + \left(y(x) - y(x) - \dfrac{x}{diff(y(x), x)}\right)^2, y(x)\right)$

$$y(x) = -\frac{(a-x)\,(a+x)}{\sqrt{(a-x)\,(a+x)}} + \_C1, y(x) = \frac{(a-x)\,(a+x)}{\sqrt{(a-x)\,(a+x)}} + \_C1 \tag{5}$$

> #подставим a

$func\_1 := subs\left(a = 13, y(x) = -\dfrac{(a-x)\,(a+x)}{\sqrt{(a-x)\,(a+x)}} + \_C1\right);$

#после упрощения $func\_1 = -\mathrm{sqrt}\left(13^2 - x^2\right) + C;$

$func\_2 := subs\left(a = 13, y(x) = \dfrac{(a-x)\,(a+x)}{\sqrt{(a-x)\,(a+x)}} + \_C1\right);$

#после упрощения $func\_2 = \mathrm{sqrt}\left(13^2 - x^2\right) + C;$

$$func\_1 := y(x) = -\frac{(13-x)\,(13+x)}{\sqrt{(13-x)\,(13+x)}} + \_C1$$

$$func\_2 := y(x) = \frac{(13-x)\,(13+x)}{\sqrt{(13-x)\,(13+x)}} + \_C1 \tag{6}$$

> #найдем свободный член

$C1 := simplify\left(subs\left(y(x) = 2, x = 5, a = 13, y(x) + \mathrm{sqrt}\left(13^2 - x^2\right)\right)\right);$

$C2 := simplify\left(subs\left(y(x) = 2, x = 5, a = 13, y(x) - \mathrm{sqrt}\left(13^2 - x^2\right)\right)\right);$

$$C1 := 14$$

$$C2 := -10 \tag{7}$$

> #найдем координаты y для точки N и построим линию NM в качестве примера

$solve\left(subs\left(a = 13, x = 0, a^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2\right)\right);$

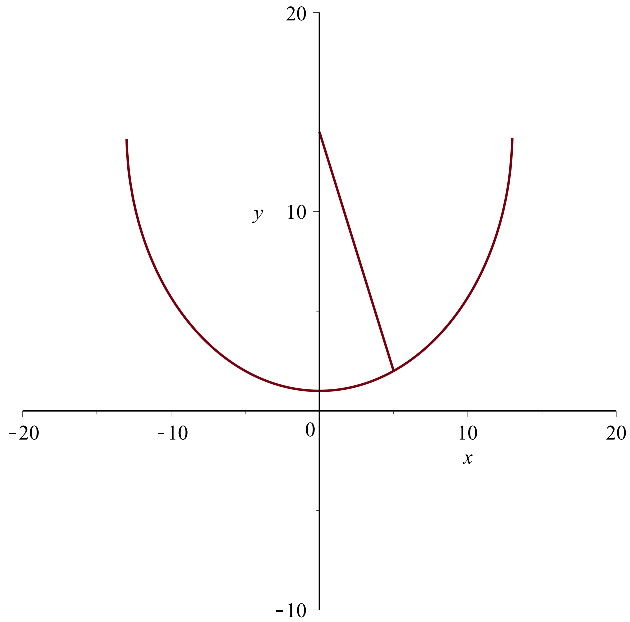
$$-10, 14 \tag{8}$$

> $otv := plot\left(-\mathrm{sqrt}\left(13^2 - x^2\right) + C1, x = -20..20, y = -10..20\right):$

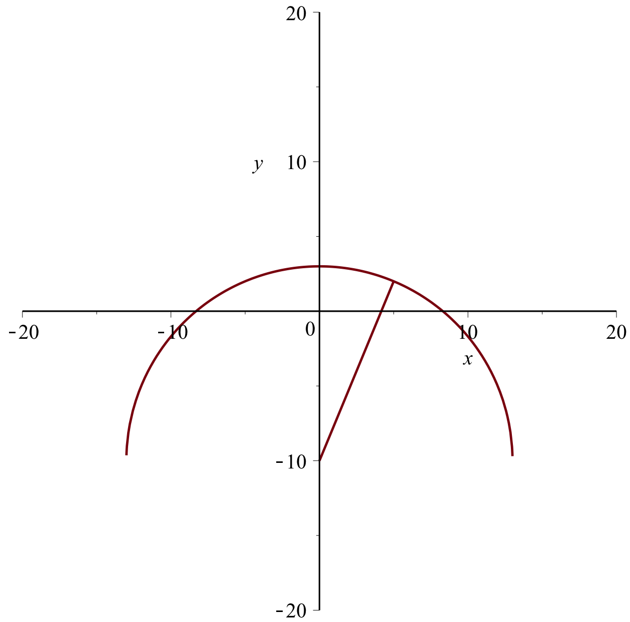
$line := plot([0, 5], [14, 2]):$

$display(otv, line);$

#верный ответ




> $otv := plot\left(\mathrm{sqrt}\left(13^2 - x^2\right) + C2, x = -20..20, y = -20..20\right)$ :
$line := plot([0, 5], [-10, 2])$ :
$display(otv, line)$
*#угол тупой, ответ неверный*




> *#номер 2.2 : Найдите линию, проходящую через точку $M_0$,* и *обладающую тем свойством, что* в *любой ее точке M*
> *касательный вектор MN* с *концом на оси Ox имеет проекцию на ось Ox, обратно пропорциональную абсциссе точки M.*
> *Коэффициент пропорциональности равен a . Сделайте чертеж.*

> *#для касательной с обратной пропорциональностью,* $M_0\left(4, \frac{1}{e^2}\right)$, $a = 4$

> *#запишем уравнение касательной*
> $y = y_0 + f^{(1)}(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$y = y_0 + \mathrm{D}(f)(x_0)\,(x - x_0) \tag{9}$$

> *#согласно условию об обратной пропорциональности*
> $x_n - x = \frac{a}{x}$

$$x - x_n = \frac{a}{x} \tag{10}$$

> *#рассмотрим проекцию касательной* к *линии, где* $(\mathrm{x}, y)$ - *координаты точки касания,* а $(\mathrm{x}_n, 0)$ - *точка пересечения касательной* с *осью* x

*#тогда касательная принимает вид*

$y = y^{(1)}(x - x_n);$

*#откуда выразим x - $x_n$*

*#*$x - x_n = \frac{y}{y^{(1)}}$ *, подставим* в *формулу пропорциональности*

$$y = \mathrm{D}(y)\left(x - x_n\right) \qquad \textbf{(11)}$$

> $-\frac{y}{y^{(1)}} = \frac{a}{x};$

$$-\frac{y(x)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y(x)} = \frac{a}{x} \qquad \textbf{(12)}$$

> $dsolve\left(subs\left(a = 4, -\frac{y}{y^{(1)}} = \frac{a}{x}\right)\right);$

$$y(x) = \_C1\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x^2} \qquad \textbf{(13)}$$

> *#найдем свободный член*

> $solve\left(subs\left(x = 4, \frac{1}{\exp(1)^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\cdot x^2 + C}\right)\right)$

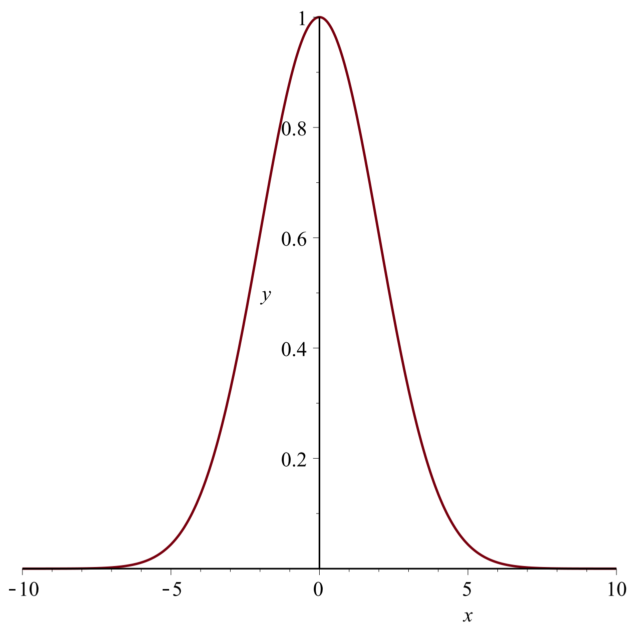
$$0 \qquad \textbf{(14)}$$

> *#итоговая функция:*

$func := y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x^2}$

$$func := y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}x^2} \qquad \textbf{(15)}$$

> $implicitplot(func, x = -10..10, y = -10..5, gridrefine = 5);$




> *#номер 3 : Найдите общий интеграл уравнения. Постройте на одном чертеже вблизи особой точки уравнения поле направлений и какую-либо интегральную кривую.*
> *#Сделайте вывод о типе особой точки.*

> $func := diff(y(x), x) - \frac{20 \cdot x + 77 \cdot y(x) - 97}{76 \cdot x + y(x) - 77}$

$$func := \frac{d}{dx}\, y(x) - \frac{20\, x + 77\, y(x) - 97}{76\, x + y(x) - 77} \tag{16}$$

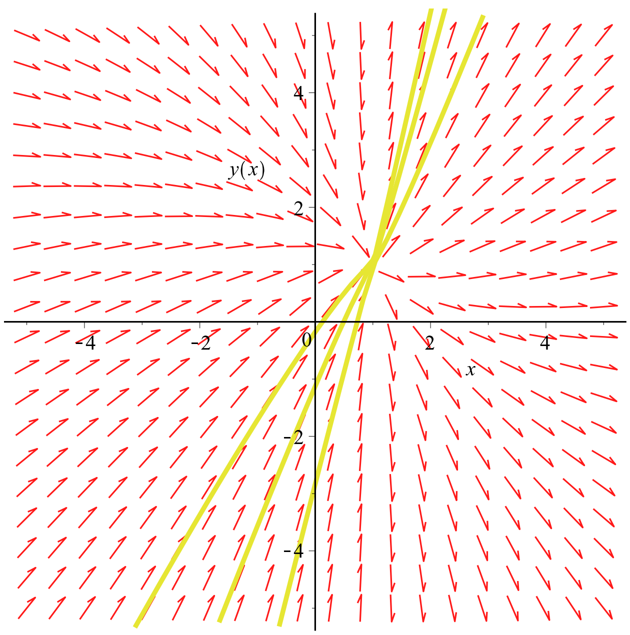
> $df := dsolve(func, y(x))$

$$df := -9 \ln\left(\frac{-y(x) - 4 + 5\, x}{x - 1}\right) + 8 \ln\left(-\frac{y(x) - 5 + 4\, x}{x - 1}\right) - \ln(x - 1) - \_C1 = 0 \tag{17}$$

> *#координаты особой точки*
> $solve([20 \cdot x + 77 \cdot y - 97 = 0, 76 \cdot x + y - 77 = 0])$

$$\{x = 1, y = 1\} \tag{18}$$

> $DEplot(func, y(x), x = -5 ..5, y = -5 ..5, [[1.01, 1.01], [0.99, 0.99], [0.5, 0.5]])$




> $A := matrix([[76-l, 1], [20, 77-l]])$

$$A := \begin{bmatrix} 76-l & 1 \\ 20 & 77-l \end{bmatrix} \quad \textbf{(19)}$$

> $solve(linalg[det](A) = 0)$

$$81, 72 \quad \textbf{(20)}$$

> *#действительные положительные, значит особая точка - неусточивый узел*

> *#номер 4: Найдите решение задачи Коши( y(0)= -1). Сделайте чертеж интегральной кривой.*

> $func := 3 \cdot diff(y(x), x) + 2 \cdot x \cdot y(x) = 2 \cdot x \cdot y(x)^{-2} \cdot \exp(1)^{-2 \cdot x^2}$

$$func := 3 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right) + 2\,x\,y(x) = \frac{2\,x\,(e)^{-2\,x^2}}{y(x)^2} \quad \textbf{(21)}$$

> $df := dsolve(\{func, y(0) = -1\})$

$$df := y(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{\left(-\left(e^{x^2}\right)^2 e^{-x^2}\right)^{1/3}}{e^{x^2}} + \frac{\frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\,\left(-\left(e^{x^2}\right)^2 e^{-x^2}\right)^{1/3}}{e^{x^2}} \quad \textbf{(22)}$$

> $de := dsolve(func, y(x));$

$$de := y(x) = \frac{\left(\left(-e^{-x^2} + \_C1\right)\left(e^{x^2}\right)^2\right)^{1/3}}{e^{x^2}}, y(x) = -\frac{1}{2}\frac{\left(\left(-e^{-x^2} + \_C1\right)\left(e^{x^2}\right)^2\right)^{1/3}}{e^{x^2}} - \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\left(-e^{-x^2} + \_C1\right)\left(e^{x^2}\right)^2\right)^{1/3}}{e^{x^2}}, y(x) = -\frac{1}{2}\frac{\left(\left(-e^{-x^2} + \_C1\right)\left(e^{x^2}\right)^2\right)^{1/3}}{e^{x^2}} + \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{I}\sqrt{3}\left(\left(-e^{-x^2} + \_C1\right)\left(e^{x^2}\right)^2\right)^{1/3}}{e^{x^2}} \quad \textbf{(23)}$$

```
> simplify(subs(y(x) =-1, x = 0, de[1]));
  #C=0
```

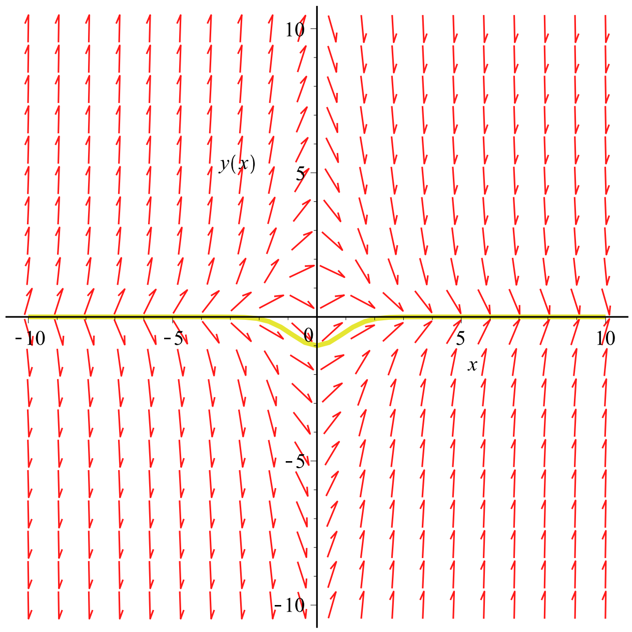
$$chastn := -\exp(1)^{-\frac{4}{3}x^2};$$

*#если выражать через simplify(subs(_C1=0,de[1])) ответ такой же но никуда не подставляется*

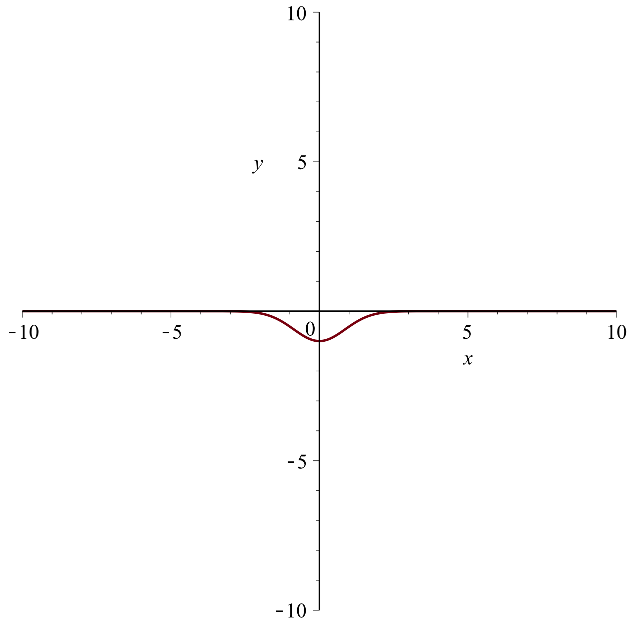
$$-1 = (-1 + \_C1)^{1/3}$$

$$chastn := -(e)^{-\frac{4}{3}x^2} \quad \textbf{(24)}$$

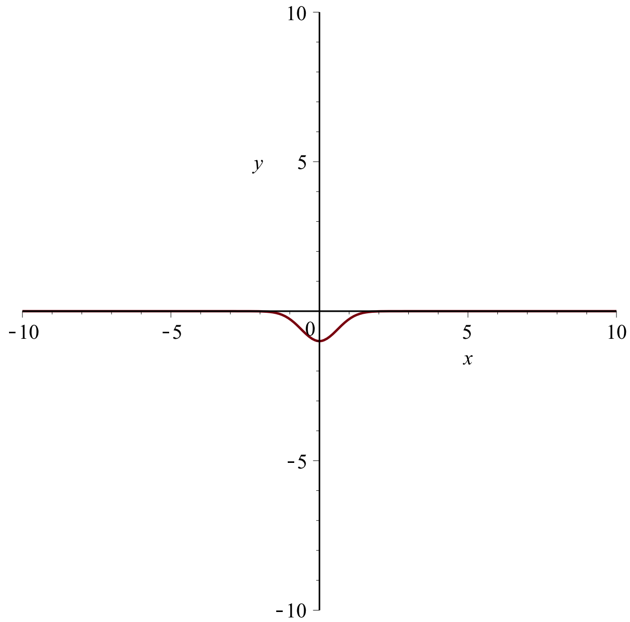
```
> DEplot(func, y(x), x =-10 ..10, y =-10 ..10, [y(0) =-1])
```




> $plot(rhs(df), x=-10..10, y=-10..10);$




> $plot(chastn, x = -10..10, y = -10..10);$




> #номер 5 : Решите дифференциальные уравнения. Постройте в одной #системе координат интегральные кривые при целых значениях произвольной #постоянной от –1 до 1

> #пункт 1, относительно x

$func\_1 := x - (diff(y(x), x) - 1) \cdot \exp(1)^{diff(y(x), x)}$

$$func\_1 := x - \left(\frac{d}{dx}\, y(x) - 1\right) (e)^{\frac{d}{dx}\, y(x)} \qquad \textbf{(25)}$$

> $df := dsolve(func\_1, y(x))$

$$df := y(x) = -\frac{-\mathrm{LambertW}\left(\frac{x}{e}\right)^2 x + x\,\mathrm{LambertW}\left(\frac{x}{e}\right) - x}{\mathrm{LambertW}\left(\frac{x}{e}\right)} + x + \_C1 \qquad \textbf{(26)}$$

> #Сделаем параметрическую замену $y^{(1)} = t$

$X := (t-1) \cdot \exp(1)^t;$

$$X := (t-1)\ (e)^t \qquad \textbf{(27)}$$

> #через $\frac{dy}{dx} = t$ выразим $dy$ и проинтегрируем обе части полученного уравнения

$Y := int(diff(X, t) \cdot t, t);$

$$Y := \left(t^2 - 2\,t + 2\right)\,(\mathrm{e})^t \tag{28}$$

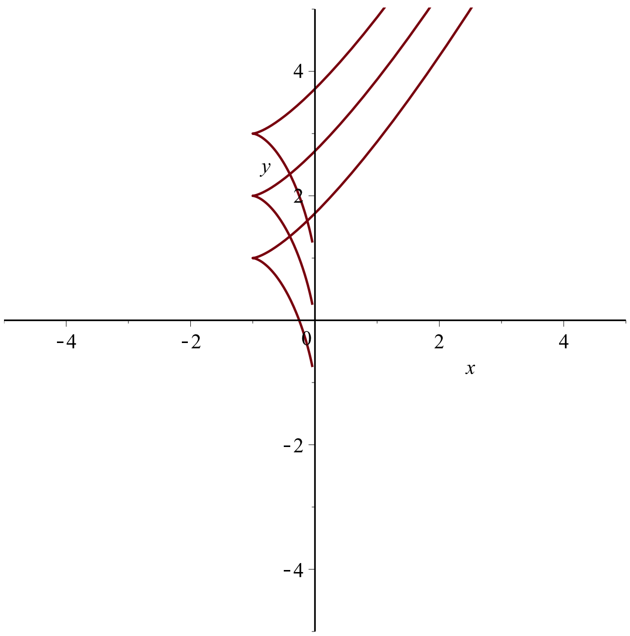
> #построим графики полученных параметрических функций, взяв C равным -1,0,1

$l1 := plot([X, Y - 1, t = -5..5], x = -5..5, y = -5..5):$

$l2 := plot([X, Y, t = -5..5], x = -5..5, y = -5..5):$

$l3 := plot([X, Y + 1, t = -5..5], x = -5..5, y = -5..5):$

$display(l1, l2, l3);$




> #пункт 2, относительно y

> #Сделаем параметрическую замену $y^{(1)} = t$

$Y := \ln(\mathrm{abs}(\sin(t))) - t \cdot \cot(t) - 1;$

$$Y := \ln(|\sin(t)|) - t\cot(t) - 1 \tag{29}$$

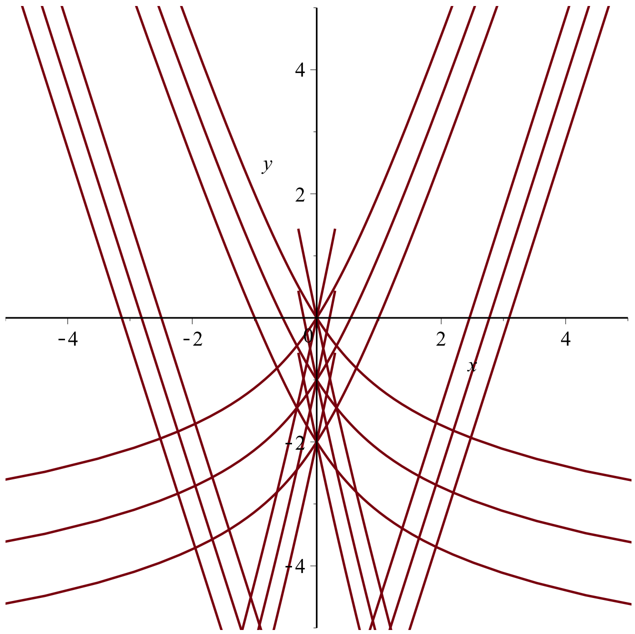
> #через $\frac{dy}{dx} = t$ выразим $dx$ и проинтегрируем обе части полученного уравнения

$X := int\left(\frac{diff(Y, t)}{t}, t\right);$

(30)

$$X := -\cot(t) \qquad (30)$$

> #построим графики полученных параметрических функций, взяв C равным -1,0,1
$l1 := plot([X, Y-1, t=-5..5], x=-5..5, y=-5..5):$
$l2 := plot([X, Y, t=-5..5], x=-5..5, y=-5..5):$
$l3 := plot([X, Y+1, t=-5..5], x=-5..5, y=-5..5):$
$display(l1, l2, l3);$




> #номер 6 : Найдите все решения уравнения. Постройте в одной системе координат график особого решения и интегральных кривых при целых значениях произвольной постоянной от $-3$ до 3.

> $res := dsolve\left(y(x) = x\cdot diff(y(x), x) - 3\cdot diff(y(x), x)^2 - 1, y(x)\right);$

$$res := y(x) = \frac{1}{12}x^2 - 1, y(x) = -3\_C1^2 + \_C1\,x - 1 \qquad (31)$$

> #особое решение
$spec := rhs(res[1]);$

$$spec := \frac{1}{12}x^2 - 1 \qquad (32)$$

> #обычное решение
$simpl := rhs(res[2]);$

(33)

$$simpl := -3\ \_C1^2 + \_C1\ x - 1 \tag{33}$$

> $lines := seq(subs(\_C1 = i, simpl), i = -3\,..3);$

$$lines := -3\,x - 28,\ -2\,x - 13,\ -x - 4,\ -1,\ x - 4,\ 2\,x - 13,\ 3\,x - 28 \tag{34}$$

> $plot([lines, spec]);$