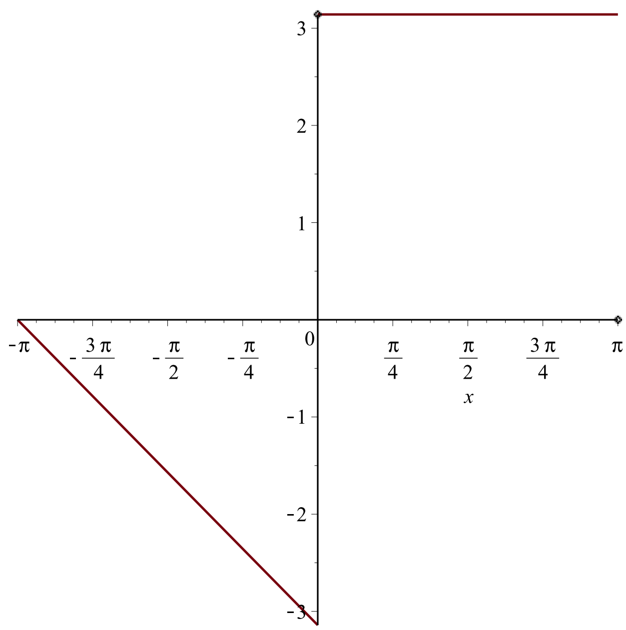
> **#Савончик Егор 153505**
> **#Лабораторная работа 2**
> **#Ряды Фурье**
> **#Вариант 10**

> **#номер 1 :** Для $2\pi -$ периодической кусочно $-$ непрерывной функции $f(x)$ *по* ее аналитическому определению на главном периоде получите разложение в
#тригонометрический ряд Фурье.
#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

> $func := piecewise(-\mathrm{Pi} \le x < 0, -\mathrm{Pi} - x, 0 \le x < \mathrm{Pi}, \mathrm{Pi});$

$$func := \begin{cases} -\pi - x & -\pi \le x \textbf{ and } x < 0 \\ \pi & 0 \le x \textbf{ and } x < \pi \end{cases} \qquad (1)$$

> $plot(func, x = -\mathrm{Pi}..\mathrm{Pi}, discont = true);$



> $a\_0 := \dfrac{1}{\mathrm{Pi}}\left(int(-\mathrm{Pi} - x, x = -\mathrm{Pi}..0) + int(\mathrm{Pi}, x = 0..\mathrm{Pi})\right);$

(2)

$$a\_0 := \frac{1}{2}\pi \qquad (2)$$

> $a\_n := \frac{1}{\mathrm{Pi}}(int((-\mathrm{Pi}-x)\cdot\cos(x\cdot n), x=-\mathrm{Pi}..0) + int(\mathrm{Pi}\cdot\cos(x\cdot n), x=0..\mathrm{Pi}));$

#*после упрощения получим* $\frac{1}{\mathrm{Pi}\cdot n^2}\cdot\left((-1)^n-1\right)$

$$a\_n := \frac{\frac{\cos(\pi n)-1}{n^2}+\frac{\sin(\pi n)\,\pi}{n}}{\pi} \qquad (3)$$

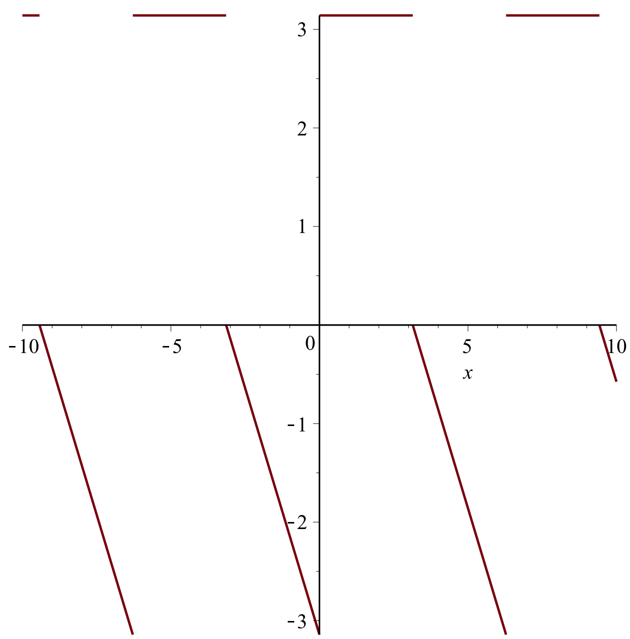
> $b\_n := \frac{1}{\mathrm{Pi}}(int((-\mathrm{Pi}-x)\cdot\sin(x\cdot n), x=-\mathrm{Pi}..0) + int(\mathrm{Pi}\cdot\sin(x\cdot n), x=0..\mathrm{Pi}));$

#*после упрощения получим* $\frac{-(1)^n+2}{n}$

$$b\_n := \frac{-\frac{-\pi n+\sin(\pi n)}{n^2}-\frac{\pi(\cos(\pi n)-1)}{n}}{\pi} \qquad (4)$$

> #*построим график разложения функции*

$plot\left(\frac{a\_0}{2} + sum((a\_n\cdot\cos(n\cdot x) + b\_n\cdot\sin(n\cdot x)), n=1..infinity), x=-10..10,\ discont=true\right);$



> *#Создайте пользовательскую процедуру — функцию, осуществляющую построение тригонометрического ряда Фурье для произвольной функции,*

#удовлетворяющей теореме Дирихле
#Создание функции, которая возвращает разложенную в тригонометрический ряд Фурье функцию
razlozhenie :=**proc**(*func*, *num*)
local *a0*, *an*, *bn*;

$a0 := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(func, x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi});$

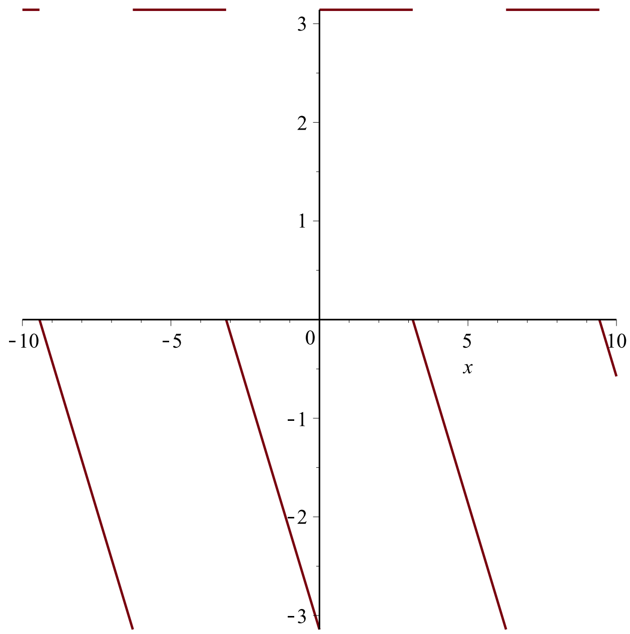
$an := \frac{1}{\mathrm{Pi}} \cdot int(func \cdot \cos(n \cdot x), x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi});$

$bn := \frac{1}{\mathrm{Pi}}\ int(func \cdot \sin(n \cdot x), x = -\mathrm{Pi}\,..\mathrm{Pi});$

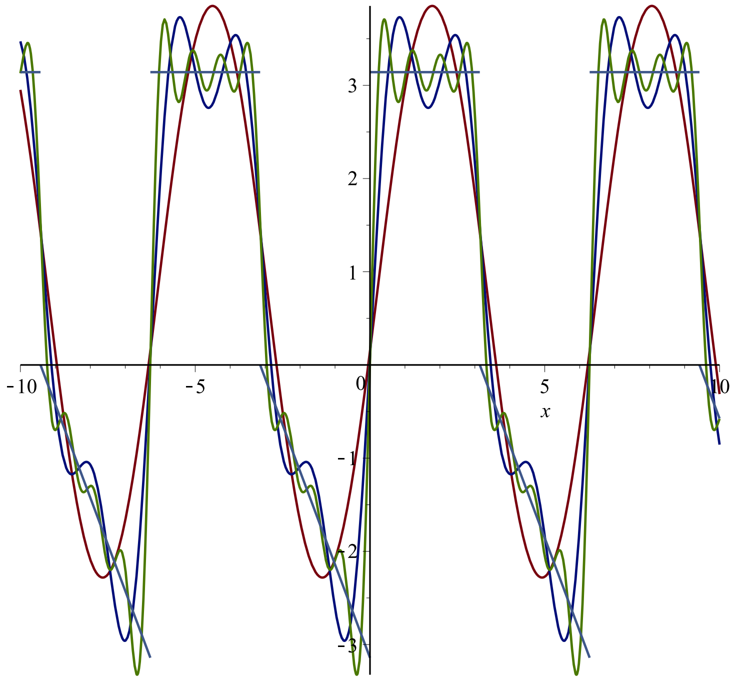
$\mathbf{return}\left(\frac{a0}{2} + sum((an \cdot \cos(n \cdot x) + bn \cdot \sin(n \cdot x)), n = 1\,..num)\right);$

end proc:

> *#проверка работы функции*
plot(*razlozhenie*(*func*, *infinity*), $x = -10..10$, *discont* = *true*);

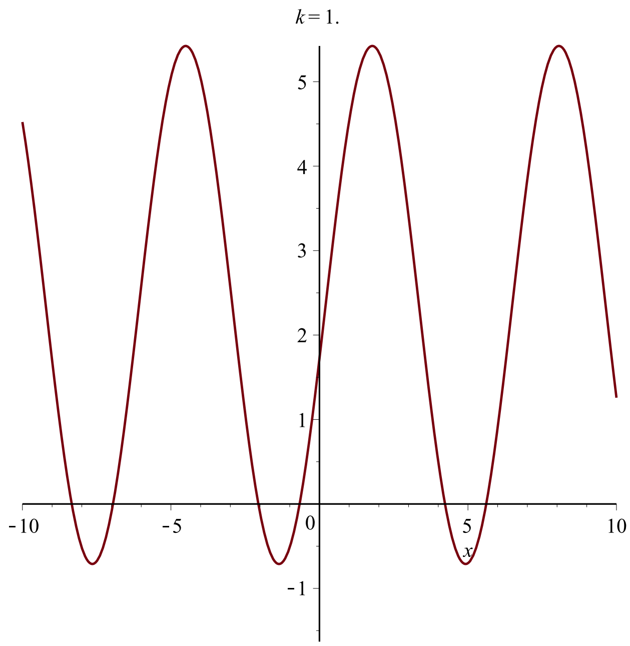


> #Постройте в одной системе координат на промежутке $[-3\pi, 3\pi]$ графики частичных сумм $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$
#ряда и его суммы $S(x)$
. Сравните полученный результат с графиком порождающей функции на главном периоде.
plot([*razlozhenie*(*func*, 1), *razlozhenie*(*func*, 3), *razlozhenie*(*func*, 7), *razlozhenie*(*func*, *infinity*)], $x = -10..10$, *discont* = *true*);

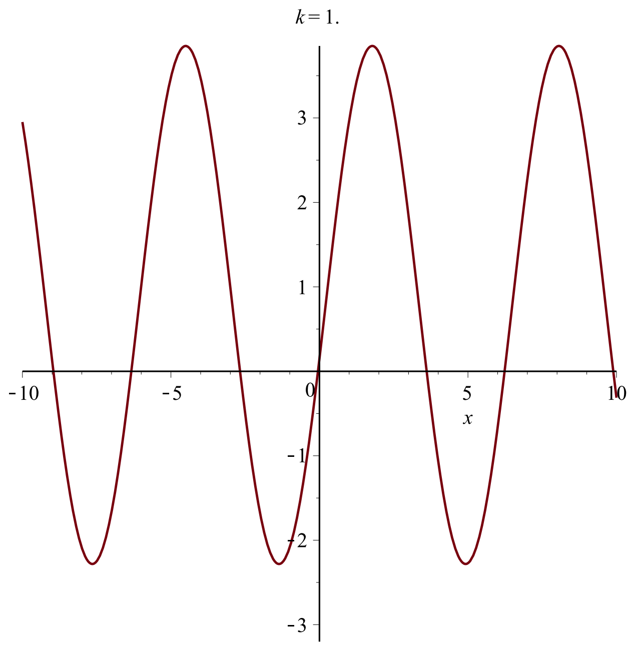


> #Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной сумм
#Анимация для разложения с помощью переменых

$$animate\left(plot, \left[\frac{a\_0}{2} + sum((a\_n \cdot \cos(n \cdot x) + b\_n \cdot \sin(n \cdot x)), n = 1 ..k), x = -10 ..10\right], k = [seq(i, i = 1 ..5)]\right);$$



#Анимация ждя разложения с помощью фуннкции(результат одинаков)
$animate(plot, [razlozhenie(func, k), x = -10..10], k = [seq(i, i = 1..5)]);$

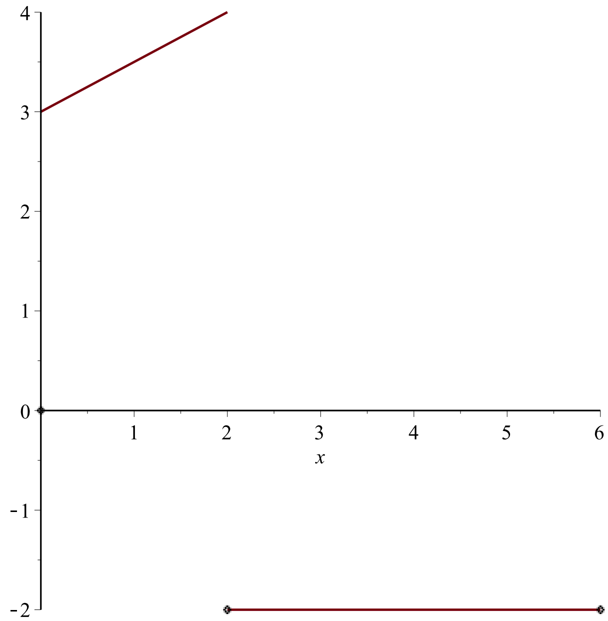


> ***#номер 2 :*** *Разложите* в *ряд Фурье* x_2 *-периодическую функцию* $y = f(x)$,
заданную на промежутке
#$\left(0, x_1\right)$ *формулой* $y = ax + b$, а *на* $\left[x_1, x_2\right]$ $- y = c$.
#Убедитесь в правильности результата, проведя расчеты в системе Maple.

> $func\_2 := piecewise\left(0 < x < 2, \frac{x}{2} + 3, 2 \le x \le 6, -2\right);$

$$func\_2 := \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 & 0 < x \textbf{ and } x < 2 \\ -2 & 2 \le x \textbf{ and } x \le 6 \end{cases} \tag{5}$$

> $plot(func\_2, x = 0 ..6, discont = true);$



> $a\_0 := \frac{1}{3} int(func\_2, x=0..6);$

$$a\_0 := -\frac{1}{3} \quad (6)$$

> $a\_n := \frac{1}{3} \cdot int\left(func\_2 \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{3}\right), x=0..6\right);$

#после упрощения $6 \cdot sin(\frac{2}{3} \cdot \mathrm{Pi} \cdot n\Big) \cdot \frac{1}{\mathrm{Pi} \cdot n} + \cos\left(\frac{2}{3} \cdot \mathrm{Pi} \cdot n\right) \cdot \frac{3}{2 \cdot \mathrm{Pi}^2 \cdot n^2} - \frac{3}{2 \cdot \mathrm{Pi}^2 \cdot n^2}$

$$a\_n := \frac{1}{2} \frac{8 \sin\left(\frac{2}{3} \pi n\right) \pi n + 3 \cos\left(\frac{2}{3} \pi n\right) - 3}{\pi^2 n^2} \quad (7)$$

$$-\frac{2\left(2\sin(\pi n)\cos(\pi n)-\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)\right)}{\pi n}$$

> $b\_n := \frac{1}{3}\cdot int\left(func\_2\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{3}\right), x=0..6\right);$

#после упрощения $-6\cdot cos(\frac{2}{3}\cdot\mathrm{Pi}\cdot n\Big)\cdot\frac{1}{\mathrm{Pi}\cdot n}+\frac{5}{\mathrm{Pi}\cdot n}+\sin\left(\frac{2}{3}\cdot\mathrm{Pi}\cdot n\right)\cdot\frac{3}{2\cdot\mathrm{Pi}^2\cdot n^2}$

$$b\_n := -\frac{1}{2}\,\frac{8\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)\pi n-6\pi n-3\sin\left(\frac{2}{3}\pi n\right)}{\pi^2 n^2}+\frac{2\left(2\cos(\pi n)^2-\cos\left(\frac{2}{3}\pi n\right)-1\right)}{\pi n} \tag{8}$$

> #Модифицируйте созданную ранее процедуру (задание 1).

$razlozhenie\_2 :=$ **proc**$(func, l, num)$

local $a0, an, bn;$

$a0 := evalf\left(\frac{1}{1}\cdot int(func, x=0..2\cdot l)\right);$

$an := evalf\left(\frac{1}{1}\cdot int\left(func\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right), x=0..2\cdot l\right)\right);$

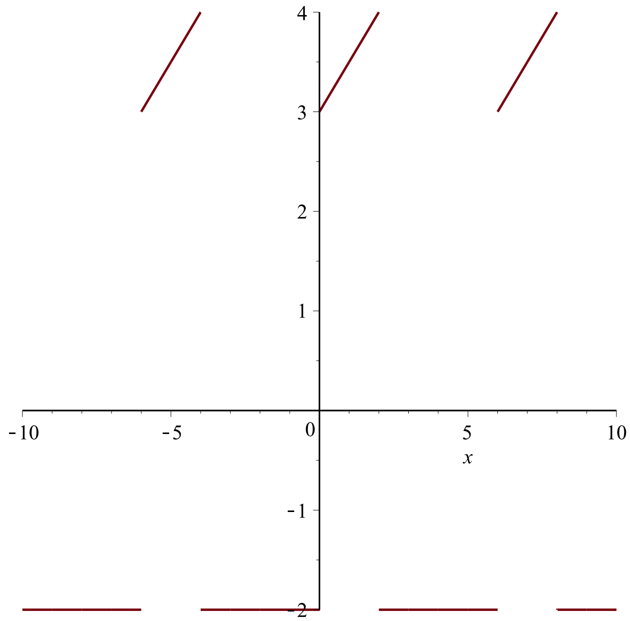
$bn := evalf\left(\frac{1}{1}\ int\left(func\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right), x=0..2\cdot l\right)\right);$

return$\left(\frac{a0}{2}+sum\left(\left(an\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right)+bn\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{l}\right)\right), n=1..num\right)\right);$

end proc:

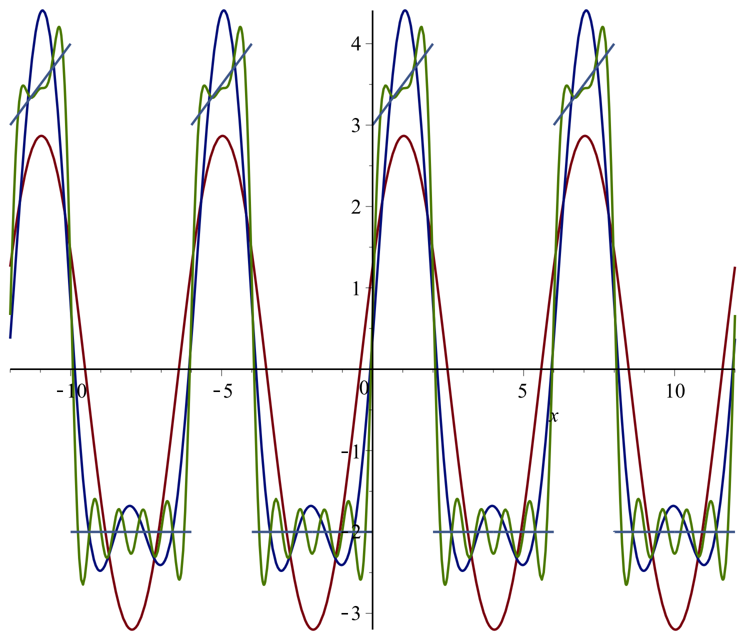
> *#построение графика разложения функции в тригонометрический ряд Фурье с помощью функции*

$plot(razlozhenie\_2(func\_2, 3, infinity), x=-10..10, discont=true);$



> *#Постройте в одной системе координат графики частичных сумм* $S_1(x)$, $S_3(x)$, $S_7(x)$ *ряда* и *его суммы* $S(x)$ *на промежутке*
> $\#\left[-2\,x_2, 2\,x_2\right]$
> *. Сравните полученный результат* с *графиком порождающей функции на главном периоде*

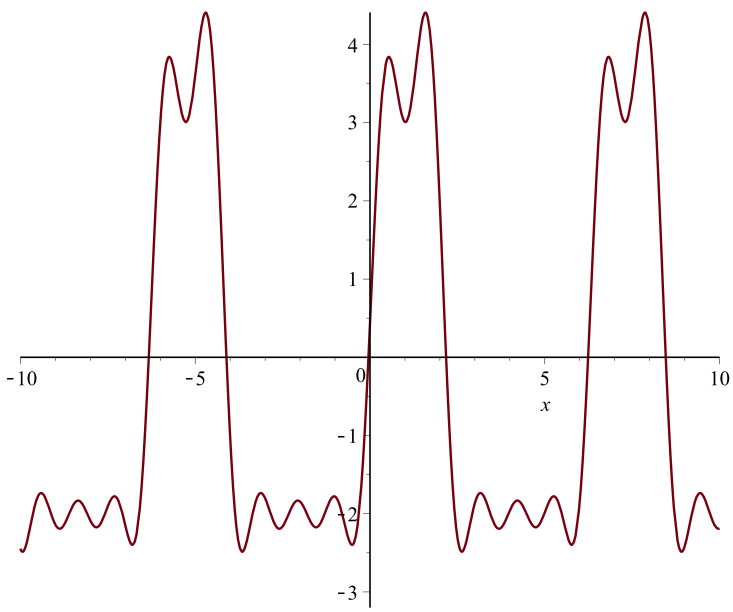
$plot([razlozhenie\_2(func\_2, 3, 1), razlozhenie\_2(func\_2, 3, 3), razlozhenie\_2(func\_2, 3, 7), razlozhenie\_2(func\_2, 3, infinity)], x = -12\,..12, discont = true);$



> *#Анимируйте процесс построения графиков сумм ряда, взяв в качестве параметра порядковый номер частичной суммы.*
> *#анимация с помощью переменных*

$$animate\left(plot, \left[\frac{a\_0}{2} + sum(\,(a\_n\cdot\cos(n\cdot x) + b\_n\cdot\sin(n\cdot x)\,), n=1\,..k), x=-10\,..10\right], k=[\,seq(i, i=1\,..5)\,]\right);$$

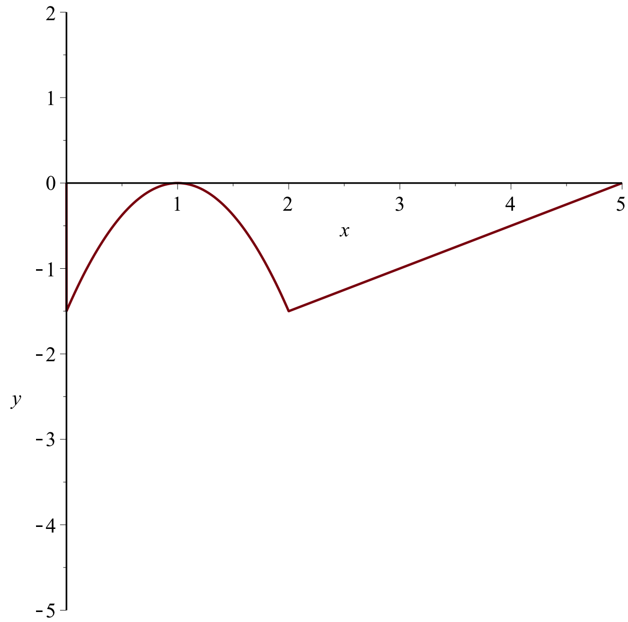
$k = 5.$



> ***#номер 3 :*** Для графически заданной на промежутке функции как комбинации квадратичной и линейной постройте три разложения в тригонометрический ряд
#Фурье. Убедитесь в *правильности результата*, *проведя расчеты* в *системе Maple.*

$$func\_3 := piecewise\left(0 < x < 2, -\frac{3}{2}\cdot x^2 + 3\cdot x - \frac{3}{2}, 2 \le x \le 5, \frac{1}{2}\cdot x - \frac{5}{2}\right);$$

> $plot(func\_3, x = 0 ..5, y = -5 ..2);$



> *#по син нечетная*

> $b\_sin := \frac{2}{5} \cdot int\left(func\_3 \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi} \cdot n \cdot x}{5} \right), x = 0\,..5 \right);$

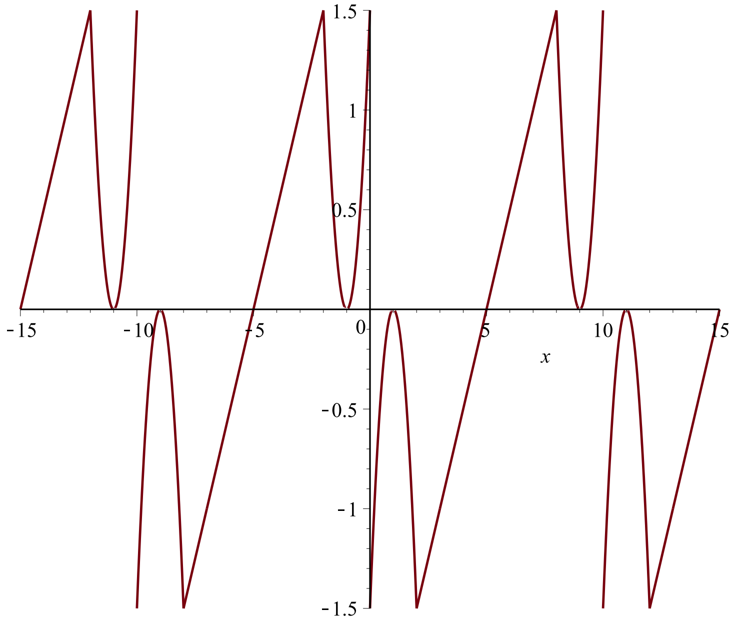
$$b\_sin := \frac{3 \left(\pi^2 n^2 \cos\left(\frac{2}{5} \pi n \right) - \pi^2 n^2 - 10 \pi n \sin\left(\frac{2}{5} \pi n \right) - 50 \cos\left(\frac{2}{5} \pi n \right) + 50 \right)}{\pi^3 n^3} + \frac{-3 \cos\left(\frac{2}{5} \pi n \right) \pi n + 5 \sin(\pi n) - 5 \sin\left(\frac{2}{5} \pi n \right)}{\pi^2 n^2} \tag{9}$$

> $int\left(x^2 \cdot \sin\left(\frac{\text{Pi} \cdot n \cdot x}{5} \right), x = 0\,..2 \right);$

(10)

$$\frac{10\left(-2\pi^2 n^2\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right)+10\pi n\sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right)+25\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right)-25\right)}{\pi^3 n^3} \quad \textbf{(10)}$$

> $plot\left(sum\left(b\_sin\cdot\sin\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot n\cdot x}{5}\right), n=1..infinity\right), x=-15..15, discont=true\right);$



> *#по кос четная*

> $a0\_cos := \frac{2}{5}\cdot int(func\_3, x=0..5);$

$$a0\_cos := -\frac{13}{10} \quad \textbf{(11)}$$

> $int\left(x^2\cdot\cos\left(\frac{\mathrm{Pi}\cdot x\cdot n}{5}\right), x=0..2\right);$

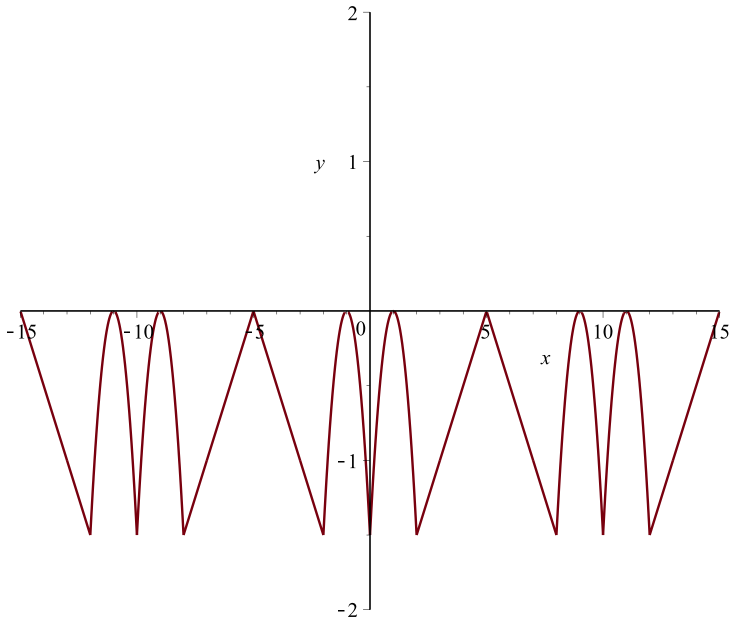
(12)

$$\frac{10\left(2\pi^2 n^2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 10\pi n \cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right) - 25\sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right)\right)}{\pi^3 n^3} \quad \textbf{(12)}$$

> $a\_cos := \frac{2}{5} \cdot int\left(func\_3 \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{5}\right), x = 0 ..5\right);$

$$a\_cos := -\frac{3\left(\pi^2 n^2 \sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 10\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right)\pi n + 10\pi n - 50\sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right)\right)}{\pi^3 n^3} + \frac{3\pi n \sin\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 5\cos(\pi n) - 5\cos\left(\frac{2}{5}\pi n\right)}{\pi^2 n^2} \quad \textbf{(13)}$$

> $plot\left(\frac{a0\_cos}{2} + sum\left(a\_cos \cdot \cos\left(\frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{5}\right), n = 1 ..infinity\right), x = -15 ..15, y = -2 ..2, discont = true\right);$



> *#по синкос*

> $a\_0 := \frac{2}{5}\, int(func\_3, x = 0\,..5);$

$$a\_0 := -\frac{13}{10} \tag{14}$$

> $a\_n := \frac{2}{5} int\left(func\_3 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{5}\right), x = 0\,..5\right);$

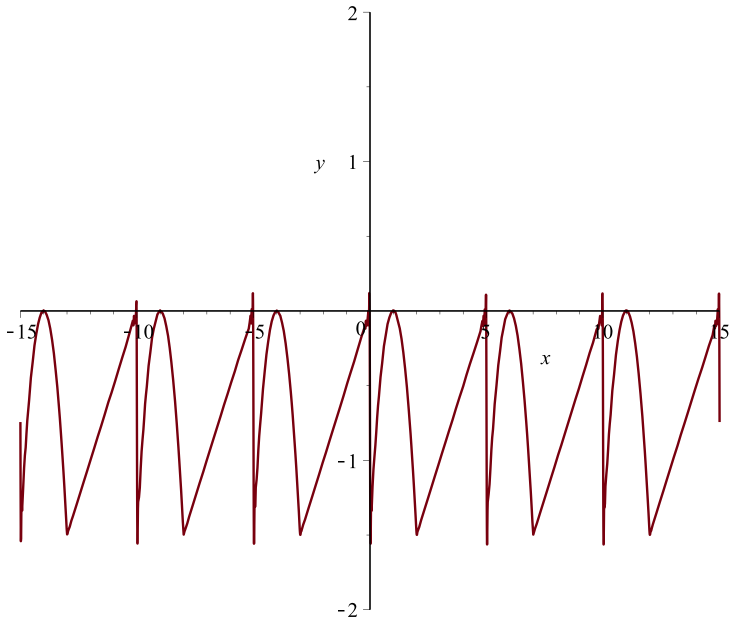
$$a\_n := -\frac{3}{4}\, \frac{2\,\pi^2\, n^2 \sin\left(\frac{4}{5}\,\pi\, n\right) + 10\,\pi\, n \cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\, n\right) + 10\,\pi\, n - 25 \sin\left(\frac{4}{5}\,\pi\, n\right)}{\pi^3\, n^3} \tag{15}$$
$$+ \frac{1}{4}\, \frac{6 \sin\left(\frac{4}{5}\,\pi\, n\right)\pi\, n + 10 \cos(\pi\, n)^2 - 5 \cos\left(\frac{4}{5}\,\pi\, n\right) - 5}{\pi^2\, n^2}$$

$$> b\_n := \frac{2}{5} int\left(func\_3 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\mathrm{Pi} \cdot n \cdot x}{5} \right), x = 0 \,..\, 5 \right);$$

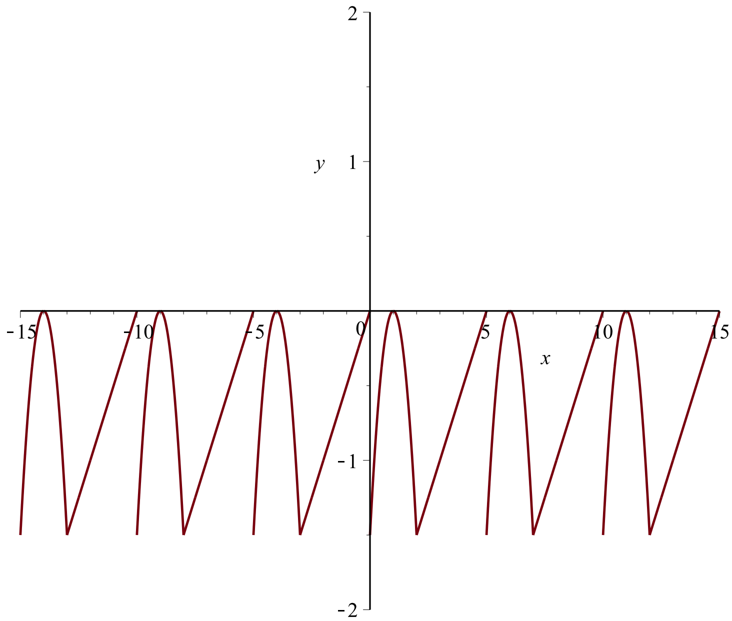
$$b\_n := \frac{3}{4} \frac{1}{\pi^3 n^3} \left(2 \pi^2 n^2 \cos\left(\frac{4}{5} \pi n \right) - 2 \pi^2 n^2 - 10 \sin\left(\frac{4}{5} \pi n \right) \pi n - 25 \cos\left(\frac{4}{5} \pi n \right) + 25 \right) + \frac{1}{4} \frac{-6 \pi n \cos\left(\frac{4}{5} \pi n \right) + 10 \sin(\pi n) \cos(\pi n) - 5 \sin\left(\frac{4}{5} \pi n \right)}{\pi^2 n^2} \tag{16}$$

>

$$> plot\left(\frac{a\_0}{2} + sum\left(a\_n \cdot \cos\left(\frac{2}{5} \cdot \mathrm{Pi} \cdot x \cdot n \right) + b\_n \cdot \sin\left(\frac{2}{5} \cdot \mathrm{Pi} \cdot x \cdot n \right), n = 1 \,..\, 100 \right), x = -15 \,..\, 15, y = -2 \,..\, 2 \right);$$



> $plot\left(razlozhenie\_2\left(func\_3, \frac{5}{2}, infinity\right), x=-15..15, y=-2..2, discont=true\right);$



2
1
y
-15
-10
-5
0
5
10
15
x
-1
-2

>

>