Аналитические методы моделирования , общая характеристика, особенности применения, ограничения

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ

ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, СИМПЛЕКС-МЕТОД И ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И БЕЗУСЛОВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И УСЛОВНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДЫОЦЕНКИ ВАРИАНТОВ ПРИ ПРИНЯТИИ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

ОСОБЕННОГО И ГРАНИЦЫ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

**ВВЕДЕНИЕ**

**1. ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

**2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

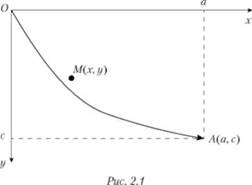
**3. ВАРИАЦИОНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Частные задачи о поиске экстремумов функций и функционалов при тех или иных ограничениях ставились и нередко успешно решались еще в глубокой древности. Например, задача о замкнутой кривой заданной длины на плоскости, охватывающей максимальную площадь, или, что то же самое, о кривой минимальной длины на плоскости, охватывающей заданную площадь, ставилась еще в древней Греции. Однако решения каждой из конкретных задач искались всегда сугубо индивидуальным методом. И до середины XVIII века не было известно метода, который позволял бы решать какой-либо класс задач. Лишь после создания основ теории бесконечно малых стало возможным создание такого метода. Создание Ньютоном и Лейбницем в конце XVII века основ дифференциального исчисления и установление Лейбницем его связи с зарождавшимся интегральным исчислением открыло новую страницу в математике и заложило основы для создания вариационного исчисления как самостоятельной математической дисциплины. Становлению этой главы математики способствовали многочисленные попытки великих математиков XVII века – Галилео (1564–1642), Лейбница (1646–1716), Ньютона, братьев Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748) Бернулли и др. – решить задачу о брахистохроне, поставленную в 1696 г. в журнале «Acta Eruditorum» Иоганном Бернулли и впервые решенную Якобом Бернулли. [3]

Задача, называемая ныне задачей о брахистохроне заключалась в том что: даны две точки в одной и той же вертикальной плоскости. По какой (гладкой) кривой тяжелая материальная точка *М* под действием силы тяжести скатится, оставаясь в этой плоскости, из верхней точки в нижнюю в наименьший промежуток времени? Задачу можно поставить также следующим образом: какой формы должна быть крыша, чтобы капли дождя скатывались с конька крыши в наименьший промежуток времени? Формально задача ставится, в современном изложении, следующим образом. Пусть *ОМА* (рис. 2.1) — искомая кривая с "верхним концом" в точке *О* (О, 0) и "нижним концом" в точке *А(а, с).* Пусть уравнение этой кривой будет *у = у(х),* 0 < *х < а.* Очевидно, *у(0) =* 0, *у(а) = с.* Простой расчет показывает, что время Г скатывания материальной точки *М* под действием силы тяжести из точки *О* в точку *А* вдоль данной кривой (без учета трения) будет равно:

0𝑎1+(𝑦)22𝑔𝑦𝑑𝑥

где *g* — ускорение силы тяжести. Обратим внимание читателя на то, что величина Г, называемая *функционалом* от *у = у(х),* зависит от поведения функции *у(х)* на всем промежутке изменения величины х: 0 < *х < а,* а не только в каких-то отдельных точках этого промежутка. При этом на функцию *у = у(х)* накладываются как условие непрерывной дифференцируемость на всем промежутке, так и "краевые условия" *у(0) =* 0, *у(а) = с.*



Необходимо, таким образом, найти непрерывно дифференцируемую функцию *у(х),* заданную на промежутке О < *х < а,* удовлетворяющую краевым условиям *у(0) =* О, *у(а) = с,* и для которой функционал *Т= Т(у)* принимает наименьшее значение среди всех кривых такого типа. [2]

Обобщая естественным образом эту задачу, приходим к так называемой *простейшей задаче вариационного исчисления,* которая формулируется следующим образом.

Пусть F(х, *у, р) —* непрерывная и ограниченная функция в области

D = {a ≤ x ≤ b; -∞ < y < +∞; -∞ < p < +∞}

Пусть *W —* множество функций *у = у(х),* непрерывно дифференцируемых на промежутке *[а, b]* и таких, что *у(а) = A, у(b) = В* (величины *а, b, А, В —* одинаковы для всех *у).* На этом множестве рассмотрим функционал

Простейшая задача вариационного исчисления состоит в нахождении функции  *∈ W*, для которой функционал *J(у)*принимал бы наименьшее для всех *у ∈*  значение. Такую функцию обычно называют *экстремалью функционала* (2.2.1). Задачу отыскания экстремали функционала (2.2.1) в классе функций г/еИ7 называют еще *задачей с закрепленными концами.*

Решение этой задачи было дано в конце XVIII — начале XIX в. в трудах Л. Эйлера и Ж. Лагранжа, и тем самым заложены теоретические основы классического вариационного исчисления. Ими же были вскрыты важнейшие связи вариационного исчисления с механикой и физикой, о чем пойдет речь ниже.

Одним из наиболее ярких результатов начального периода развития вариационного исчисления явилась теорема Эйлера, согласно которой задача нахождения экстремали функционала (2.2.1) сводится к задаче отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения на множестве функций *у(х)е№.* Это уравнение имеет вид



или, в развернутом виде,



Уравнение (2.2.2) обычно называют *уравнением Эйлера.* К этим уравнениям, очевидно, следует добавить краевые условия *у(а) = А,у(Ь) В.* Естественно также предполагать существование и непрерывность производных, присутствующих в уравнении (2.2.2, *а).* Основным звеном при выводе уравнения Эйлера является следующая лемма, принадлежащая Лагранжу.

**Лемма** 1.

Пусть *М(х) —* непрерывная на промежутке [а, ¿" функция, а *ц(х)* — функция, непрерывно дифференцируемая на этом промежутке и обращающаяся в нуль на его концах: ч(")Т= *Ф)* 0 ■ Положим, что интеграл



обращается в нуль при любом выборе функции п(.г) с указанными выше свойствами. Тогда функция *М(х)* тождественно равна нулю на *а, Ь].*

Теорема Эйлера, однако, не означает эквивалентность простейшей задачи вариационного исчисления и задачи нахождения решения (решений) уравнения Эйлера, а дает лишь необходимое условие. Решения уравнения Эйлера называют обычно *стационарными "точками" функционала* (2.2.1), некоторые из которых могут быть экстремалями; значения функционала в стационарных точках называют *стационарными.* Кроме того, обращает на себя внимание тот факт, что решения уравнения Эйлера представляют собой дважды непрерывно дифференцируемые функции, в то время как функционал (2.2.1) имеет смысл и для функций, дифференцируемых лишь однократно. .Эта последняя "нестыковка" была разрешена в 1879 г. П. Дюбуа-Реймоном, который доказал, что всякая непрерывно дифференцируемая экстремаль функционала (2.2.1) является также дважды непрерывно дифференцируемой функцией. В основе доказательства Дюбуа-Реймона лежит следующая лемма.

**Лемма 2.**

Пусть *М(х) —* непрерывная на промежутке *[а, Ь]* функция, а *ц(х)* — функция, непрерывно дифференцируемая на этом промежутке и обращающаяся в нуль на его концах: (6) 0 . Положим, что интеграл



обращается в нуль при любом выборе функции *у(х)* с указанными выше свойствами. Тогда функция *М(х)* постоянна на *Ь.*

Обе приведенные выше леммы в математике заслужили название основной леммы вариационного исчисления.

Основная задача вариационного исчисления, описанная выше, естественным образом обобщается па случай нескольких функций = #,(х),7 1,2,...,*т* и нескольких независимых переменных *хк, к*=1,2,*п.* Соответствующие задачи формулируются следующим образом.

Случай нескольких функций

Соответствующий функционал имеет вид



Относительно функций *У) = У](х),]* 1,2,...," предполагается, что все они заданы и непрерывно дифференцируемы на одном и том же промежутке *[а, Ь],* причем на концах этого промежутка *у^а)-А^у^(Ь)* для ^сех *} = ,2,...,т.* Обозначим множество таких функций через *Ш'".* Введем вектор-функцию *у(х)=(у(х),„.1ут(х)).* В этом случае простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании вектор функции *у(х)* е *Уту* для которой функционал *Лу)* принимал бы наименьшее для всех *у* е V/'" значение.

Аналогом уравнения Эйлера здесь будет система дифференциальных уравнений



с соответствующими краевыми условиями *yj(a) = Aj, Uj(b) Bj.* Естественно, предполагается существование и непрерывность всех входящих в (2.2.4) производных. Подчеркнем еще раз, что условия (2.2.4) являются лишь необходимыми, но отнюдь не достаточными для того, чтобы соответствующие решения *у(х)* системы (2.2.4) были экстремалями функционала (2.2.3). Для проверки "экстремальности" соответствующих решений требуется дополнительное исследование (эта проблема аналогична задаче отыскания точек экстремума "обычной" функции в математическом анализе).

**У. Гамильтон** обратил внимание на следующее замечательное следствие вышеизложенной задачи, которое впоследствии дало толчок к развитию так называемых *вариационных принципов механики.* Рассмотрим находящуюся под действием потенциальных сил систему материальных точек с голономными (геометрическими) связями. Пусть обобщенные координаты системы будут о,, *q2, q„; L = L(t,* о,, *qiv qv...,q„) —* соответствующая функция Лагранжа. Здесь, как обычно, *t —* время, *qj = qj(t), q} =* ^"У/О. *j* 1.2,*п = Т -* П,

где *Т—* кинетическая, а П — потенциальная энергия системы. Как известно, кинетическая энергия 7'является квадратичной функцией обобщенных скоростей *qj* с коэффициентами, зависящими от времени и обобщенных координат, а потенциальная энергия П — функцией времени и обобщенных координат *q^* Уравнения Лагранжа второго рода для такой системы имеют вид



что, с точностью до обозначений, совпадает с системой уравнений Эйлера (2.2.4). Соответствующий функционал, порождающий систему уравнений (2.2.5), имеет вид



Функционал (2.2.6) называется *действием по Гамильтону.* Здесь наборы переменных *с$ = ц$0),а%* <72(го)> ~

= "Д\*о) и *<А=4(к)><А Я(Ч)>-Пп=Яп(Ч)* залают начальное (¿ = ¿0) и конечное (¿ = ¿1) состояния системы соответственно.

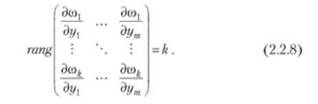
Принцип Гамильтона (принцип наименьшего, или стационарного, действия) гласит, что голономная система материальных точек, находящаяся под действием потенциальных сил, движется таким образом, что функционал действия (2.2.6) достигает наименьшего (точнее, стационарного) значения на истинных траекториях материальных точек, составляющих систему.

Таким образом, принцип Гамильтона может быть положен в основу классической механики, а задачу решения уравнений Лагранжа (2.2.5) (соответственно, уравнений Эйлера (2.2.4)) можно заменить задачей непосредственного нахождения стационарных точек функционала (2.2.6) (соответственно, функционала (2.2.3)). Методы, позволяющие это делать, носят название *прямых методов* вариационного исчисления. К таким методам, в частности, относится ряд численных методов вариационного исчисления.

Аналогия простейшей задачи вариационного исчисления с классической механикой прослеживается и в гак называемой *задаче Лагранжа,* или задаче нахождения *условного экстремума* функционала (2.2.3). Поставим задачу отыскания экстремума функционала (2.2.3) при дополнительном условии *у(1)е, /се[а, Ь],* где I — гладкое многообразие, определяемое £ условиями



где все соу(г/,, //2. = 0 — непрерывно дифференцируемые функции, и матрица Якоби этих функций имеет ранг, равный *к* (по числу функций ©,):

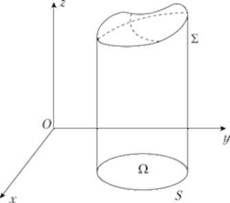


Условие (2.2.7) позволяет из системы уравнений (2.2.5) выделить *п = т* £-независимых переменных г/7 , 5 = 1,2,и, через которые могут быть выражены остальные & переменных г/,-. Если обозначить эти независимые переменные *у-}* через <7Х,$ = 1,2,..., *п,* то наша задача сведется к простейшей ("безусловной") задаче вариационного исчисления для функционала типа (2.2.6). Ясно, что все стационарные точки соответствующего функционала будут удовлетворять условию (2.2.7)'.

Частным случаем является так называемая *задача о геодезических:* среди всех гладких кривых, лежащих на многообразии X и соединяющих две заданные точки, найти кривую наименьшей длины. Такие кривые называются *геодезическими.* В частности, эта задача тесно связана с задачей о распространении света в общей теории относительности.

# Случай нескольких независимых переменных

Для упрощения записи ограничимся случаем двух независимых переменных *х, у.* Пусть на плоскости *хОу* задана ограниченная односвязная область О с гладкой границей 5 (рис. 2.2). Пусть *г = г(х,у) —* непрерывно дифференцируемая функция, заданная в замыкании области *О..*



*Рис. 2.2*

Тогда множество точек *{(х, у, г(х, у))(х, у)еО.* будет представлять собой некоторую гладкую поверхность Хс!\*3 с границей Г = *{(х, у, г(х, у)) (х, у) е* 5). Эту границу мы будем считать общей для всех рассматриваемых поверхностей X. Иными словами, все функции *г = г(х,у)* предполагаются имеющими одинаковые значения в соответственных точках границы 5 области О.

Рассмотрим далее функционал



Простейшая задача вариационного исчисления для функционала (2.2.9) ставится следующим образом: найти функцию *z = z{x,y)* (т.е. поверхность £) такую, чтобы для нее данный функционал принимал экстремальное (т.е. наименьшее или наибольшее) значение среди всех функций описанного выше типа.

Относительно функции *F(x,y,z,p,q)* будем предполагать, что она ограничена и дважды непрерывно дифференцируема в области *{(x,y)eQ;(z,p,q)eR3}.* Рассуждения, аналогичные проводимым обычно при выводе уравнений Эйлера (2.2.2, 2.2.2, *а),* приводят к следующему утверждению: всякая экстремаль *z = z(x,y)* функционала (2.2.9) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных



с граничными условиями



где <р(х,#) — заданная функция на границе 5 области О.

Уравнение (2.2.10), как и предыдущие подобные уравнения, носит имя Эйлера. Обобщение этих результатов на случай большего числа независимых переменных не представляет особого труда.

В развернутом виде уравнение (2.2.10) выглядит так:



Примером подобной задачи может служить известная задача о нахождении гладкой поверхности минимальной площади, "натянутой" на заданную простую гладкую замкнутую пространственную кривую. Из матанализа известно, что площадь |£| поверхности I, задаваемой непрерывно дифференцируемой функцией *г = г(х, у), (х, у)* € й с Я, равна



а это, как легко видеть, и есть наш искомый функционал (2.2.9). Дальнейшие действия описаны выше.

# Функционально-аналитический подход к задачам вариационного исчисления

Как мы видели, вариационное исчисление — это раздел математики, посвященный исследованию методов отыскания экстремумов функционалов, зависящих от выбора одной или нескольких функций при различных ограничениях, накладываемых на эти функции. Используемый при этом язык описания и инструменты исследования могут быть весьма разнообразны и заимствованы из теории дифференциальных уравнений, математической физики, функционального анализа и других разделов математики. Большое значение приобрело направление, родившееся внутри собственно классических вариационных задач, где исследование экстремумов проводится "методом вариаций", т.е. методом малого возмущения аргументов и функционалов. Современное вариационное исчисление включает в себя и задачи теории оптимального управления.

Однако функциональный анализ, в силу его большой общности, универсальности и удобства языка и методов, дает возможность использовать их для решения различных задач вариационного исчисления, рассматривая эти задачи с единой точки зрения. Ниже мы постараемся проиллюстрировать сказанное. Напомним прежде всего некоторые определения, важные для дальнейшего. Мы предполагаем, что читатель знаком с понятиями векторного, метрического и нормированного, в частности евклидова и гильбертова, пространств, включая понятия полноты и сепарабельности, в объеме стандартных курсов математики хорошего технического вуза, а также с понятиями и основными свойствами линейных ограниченных и замкнутых операторов.

Определение 1.

*Функционалом* мы будем называть отображение произвольного множества *X* в множество действительных (И) или комплексных (С) чисел.

Если множество *X* наделено структурой векторного пространства, метрического пространства, упорядоченного множества, то возникают важные классы соответственно линейных, непрерывных, монотонных функционалов. В вариационном исчислении множество *X,* как правило, является подмножеством линейного нормированного пространства.

Определение 2.

*Евклидовым пространством Е* мы будем называть нормированное векторное пространство, в котором определено скалярное произведение (■,-) (со стандартными свойствами), а норма элемента *хеЕ* задается формулой *х = (х,ху/2.*

Определение 3.

Полное бесконечномерное сепарабельное евклидово пространство // называется *пространством Гильберта,* или *гильбертовым пространством.*

Важным следствием условия сепарабельности гильбертова пространства является факт существования в нем (счетной) полной ортонормированной системы элементов.

Следующая теорема даст одно из важнейших свойств гильбертовых пространств.

**Теорема 1.**

Пусть Ф],ф>- — полная ортонормированная система элементов в гильбертовом пространстве *Н.* Тогда всякий элемент *хеН* единственным образом представляется в виде *ряда Фурье х=* £сА к, гаде *ск = (х,* А)фи ряд сходится по норме. При этом имеет место *равенство Парсеваля*

£1с\*|2=1И-

Обратимся теперь собственно к обобщенной постановке задач в вариационном исчислении. Начнем с понятия *вариации.* Вариация — термин, введенный в математику Ж. Лагранжем для обозначения малого смещения независимого переменного, или функционала. Метод вариаций — метод исследования экстремальных задач, основанный на малых смещениях аргумента и изучении того, как в зависимости от них изменяется функционал. Этот метод является одним из основных методов при решении задач на экстремум функционала (отсюда и название *"вариационное исчисление").*

Пусть *X —* линейное нормированное пространство, *МсХ* и функционал /— действительный, т.е. отображает множество *М* в множество действительных чисел. Это предположение здесь оправдано, поскольку далее речь пойдет об *экстремумах* функционалов, а множество комплексных чисел не является упорядоченным.

Далее, пусть *хеМ* и линейное множество *УхаХ* таково, что для любых достаточно малых по норме элементов г>е*Ух* сумма *х+иеМ* (для разных элементов *хеМ* множества V,- могут различаться). Такие элементы *V* в вариационном исчислении обычно называются *вариацией независимой переменной х* и обозначаются символом 8.г. Выбор соответствующих множеств *М* и V,. является важным этапом в постановке и решении вариационных задач.

Определение 4.

Пусть/ — действительный функционал, заданный на подмножестве *М* линейного нормированного пространствах Пусть *хеМ* и



где Д,.(г>) — линейный ограниченный (т.е. непрерывный) функционал от переменной *V* на множестве *Ух* (здесь *х* выступает в качестве параметра, и для различных элементов *хвМ* функционалы Д,.(а)могут различаться). Тогда функционал Дд-(г') называется *(первой) вариацией функционала / в точке х* и обозначается 8/,.(8л), или просто 8/,..

Подчеркнем еще раз, что *Ъ/х* является линейным функционалом от переменной 8.г, а не от *х.* В традиционной для вариационного исчисления 8-символике соотношение (2.2.13) запишется так:



Определенная выше вариация функционала 8/,.(8.г) = Дд(г.') носит еще название *производной Фреше* функционала /(.г) в точке *х,* а сам функционал */(х)* называется *дифференцируемым по Фреше* в соответствующей точке.

В качестве примера рассмотрим функционал (2.2.1) простейшей задачи вариационного исчисления. Роль множества *М* играет здесь множество *У/,* а роль множества *Ух —* множество непрерывно дифференцируемых на промежутке *[а, Ь]* функций, принимающих на концах этого промежутка нулевые значения. Простые расчеты, при соответствующих предположениях о гладкости подынтегральной функции *Б* в (2.2.1), дают следующее выражение для вариации (производной Фреше) функционала./(\*/):



В последнем равенстве учтено, что "(а) = *и(Ь)* 0 . =

Определение 5.

Говорят, что функционал */(х)* достигает в точке *х* локального максимума (минимума), если для всех, достаточно малых по норме, допустимых вариаций *Ъх* независимой переменной выполняется неравенство */(х)>/(х + 8х)* (соответственно /(£)< /(дЧбх)).

Одним из ключевых результатов вариационного исчисления является следующая теорема.

**Теорема**2 **(необходимое условие экстремума функционала).**

Если функционал /(.г) дифференцируем по Фреше и достигает в точке *х* своего (локального) экстремума, то его первая вариация (производная Фреше) в этой точке равна нулю.

Из этой теоремы, формулы (2.2.14) и леммы 1 немедленно следует уравнение Эйлера (2.2.2). Это, в частности, иллюстрирует тот факт, что метод вариации является эффективным инструментом исследования экстремумов функционалов.

Как указано в названии теоремы 2, она дает *необходимое* условие экстремума функционала. Это означает, что экстремаль следует искать лишь среди функций, для которых (первая) вариация функционала равна нулю. Для выделения же из этого множества функций, подозрительных на экстремум, "настоящих" экстремалей требуется дополнительное исследование.

Выше мы указывали, что функционально-аналитический подход позволяет с единой точки зрения описывать целые классы, на первый взгляд, совершенно различных задач, предоставляя и обосновывая единые методы, алгоритмы, инструменты их постановки, анализа и решения. Постараемся проиллюстрировать сказанное на одном важном примере из области математической физики.

Рассмотрим задачу об интегрировании уравнения Пуассона



в односвязной ограниченной области £2 плоскости (х, *у)* с кусочно-гладкой границей 5, при краевом условии



Нетрудно убедиться, что уравнение (2.2.15) совпадает с уравнением Эйлера для функционала



при том же краевом условии. Поскольку функционал (2.2.17) содержит только первые производные от искомой функции, а уравнение (2.2.15) требует наличия у функции *и(х,у)* вторых производных, естественно, возникает следующий вопрос: будет ли элемент *й*, реализующий минимум функционала (2.2.17), также иметь вторые частные производные? Для функционалов от функций одной переменной этот вопрос положительно решается с помощью леммы 2 (Дюбуа-Реймона). Для функций многих независимых переменных ответ на этот вопрос оказывается значительно более трудным и неоднозначным.

Не вдаваясь в детали и отсылая читателя за подробностями к книге С. Г. Михлина, укажем на один из возможных подходов к постановке задачи интегрирования уравнения (2.2.15), а именно: назовем *обобщенным решением* уравнения (2.2.15) экстремаль *й(х,у)* функционала (2.2.17), удовлетворяющую краевым условиям (2.2.16). В упомянутой книге С. Г. Михлина указаны условия, при которых такая функция будет дважды непрерывно дифференцируема и, следовательно, будет "обычным" решением уравнения (2.2.15). Мы, однако, сосредоточимся на нахождении обобщенного решения, ибо процедура его построения, с одной стороны, хорошо иллюстрирует возможности функционально-аналитического подхода, а с другой — дает нетривиальный пример одного из *прямых методов* вариационного исчисления (т.е. методов, не требующих для отыскания экстремумов функционалов непосредственного перехода к задаче отыскания решений соответствующих уравнений Эйлера).

Определение 6.

Пусть *Н —* гильбертово пространство, а линейное множество йсЯ - плотно в *Н.* Пусть линейный оператор Л:£)—>Я. Оператор Л называется *положительным,* если *(Аи,и)>ОУиеО,и\*о* (здесь символом "о" обозначен нулевой элемент пространства Я). Оператор *Л* называется *положительно определенным,* если существует положительная постоянная *у* такая, что (Лы,ы)> у*УиеИ.* Отметим, что в *комплексном* гильбертовом пространстве всякий положительный оператор симметричен, т.е. *(Аи,ю) = (и,Аг>) £>.* В вещественном гильбертовом пространстве это не так. Мы далее будем рассматривать только вещественные гильбертовы пространства, т.е. при необходимости симметричность положительного оператора будет оговариваться особо.

Имеет место следующая замечательная теорема.

**Теорема** 3.

Пусть *А —* положительный симметричный оператор в гильбертовом пространстве *Н* с областью определения, плотной в *Н.* Рассмотрим уравнение



Тогда:

* 1) уравнение (2.2.18) имеет не более одного решения;
* 2) если уравнение (2.2.18) имеет решение, то это решение сообщает функционалу



наименьшее значение. Обратно, элемент, реализующий минимум функционала (2.2.19), удовлетворяет уравнению (2.2.18).

В качестве примера вновь рассмотрим уравнение Пуассона (2.2.15):



с прежним краевым условием (2.2.16). В качестве гильбертова пространства // возьмем вещественное пространство квадратично суммируемых функций, заданных на П: £2(й). Напомним, что в этом пространстве скалярное произведение и норма задаются формулами



В качестве оператора *А* возьмем оператор -А, а в качестве его области определения *Б —* множество функций *С(0),* дважды непрерывно дифференцируемых на Й и равных нулю на границе 5 множества О. Можно доказать, что замыкание С'2(Й) = 12( )фт.е. область определения нашего оператора плотна в *Н = Ь(* ). ЗЯ имеет место следующая теорема.

**Теорема 4.**

Оператор *А* = -Д — это симметричный положительно определенный оператор на своей области определения *В = СС). О.*

Таким образом, в рассматриваемом случае справедлива теорема 3, из которой заключаем, что задачу отыскания решения уравнения Пуассона (2.2.15) с краевыми условиями (2.2.16) можно заменить задачей нахождения минимума функционала (?(") при тех же краевых условиях (см. (2.2.17)).

Вернемся теперь к общей постановке задачи о минимуме функционала (2.2.19) в условиях теоремы 3. Опишем алгоритм "прямого" отыскания точки, доставляющей минимум этому функционалу, следуя упомянутой выше книге С. Г. Михлина.

Итак, пусть *А* — положительно определенный (см. определение 6) симметричный оператор в вещественном гильбертовом пространстве Я с областью определения Д плотной в //. Па множестве О определим новое скалярное произведение *[и, у],* полагая



Нетрудно проверить, тю її силу такого определения *О* превращается в новое гильбертово пространство, которое мы будем обозначать через //,,. норму в Я, будем обозначать символом *и*,, гак что II нл



Из положительной определенности оператора *А* вытекает следующее важное соотношение между нормами в Я и *Нл:*



Если пространство *Нд* окажется неполным, то мы обычным способом пополним его. Множество *Б* при этом будет плотным в *Нл.* Имеет место следующая важная теорема, принадлежащая К. Фридрихсу.

**Теорема 5.**

Все элементы пространства *НА* принадлежат также и пространству Я.

Иными словами, пополнение пространства *НА* можно произвести за счет элементов пространства Я.

Обратимся теперь к нашей основной вариационной задаче для функционала (2.2.19):



и несколько изменим ее постановку, так как правая часть (2.2.19) определена только на множестве Д а па этом множестве минимум функционала ^(") может и не достигаться, так как множество *Э* неполно. Поэтому мы преобразуем правую часть (2.2.19) таким образом, чтобы функционал Г(") можно было доопределить на всем пространстве *Нл.* С этой целью заметим, что если /— фиксированный элемент из Я, а и — произвольный элемент из *IIА,* то ф(и) = (/,м) — ограниченный функционал на *Нл,* поскольку в силу формулы (2.2.22)



Но тогда по известной теореме Ф. Риса существует единственный элемент и„ е *НА* такой, что



Функционал (2.2.19) можно теперь переписать в виде



Формула (2.2.24) первоначально установлена для г/еО, но правая часть (2.2.24) имеет смысл для всех *иеНл.* Таким образом, мы расширяем функционал *Р(и)* на все пространство *Нл* и ищем минимум Р(") на *Нл.* В этом и состоит обобщенная постановка вариационной задачи. Но эта задача решается без особого труда. Действительно, формулу (2.2.24) легко привести к виду



откуда видно, что минимум *F(u)* достигается при *и = и0,* и этот минимум равен minF(w) = -fl"o|2,-

Осталось ответить на вопрос, как построить элемент *и0,* решающий основную вариационную задачу. Поскольку *Нл —* гильбертово пространство, то в нем существует полная ортонормированная система (последовательность) элементов {ф„}~. Тогда, в силу теоремы 1 всякий элемент пространства *Нд,* в частности элемент *и0,* реализующий минимум функционала ?(м) = [м, *и* 2(м,/), можно разложить в ряд Фурье



сходящийся в метрике пространства *Нл.* Полагая в формуле (2.2.23) *и= %,* получим



Подставив это соотношение в (2.2.26), получим формулу



определяющую решение основной вариационной задачи для функционала (2.2.19). Ряд (2.2.27) сходится в метрике пространства *НА* и тем более в метрике пространства *Н.*

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

[1] Моделирование процессов и систем : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. В. Стельмашонок [и др.] ; под ред. Е. В. Стельмашонок. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 289 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).

[2] Моделирование систем и процессов : учебник для академического бакалавриата / ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. — М. : Издательство Юрайт, 2019. — 450 с. (Серия: Бакалавр. Академический курс).

[3] ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Электронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 69 с.