1 Уравнение движения

Рассмотрим уравнение движения материальной точки.

Пусть $\overrightarrow{r(t)}$ – радиус-вектор материальной точки. $\overrightarrow{v(t)}$ – скорость материальной точки.

$$\overrightarrow{r(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Уравнение движения представляют собой второй закон Ньютона:

$$\frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} = \frac{1}{m}\overrightarrow{F}(t, \overrightarrow{r(t)}, \overrightarrow{v(t)})$$

где m – масса; $\overrightarrow{F}$ – равнодейтсвующая сила, дествующая на материальную точку.

Рассмотрим вектор состояния материальной точки

$$\overrightarrow{cond}(t) = \begin{pmatrix} \overrightarrow{r}(t) \\ \overrightarrow{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix}$$

Запишем производную этого вектора:

$$\frac{d(\overrightarrow{cond})}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d(\overrightarrow{r})}{dt} \\ \frac{d(\overrightarrow{v})}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{v} \\ \frac{1}{m}\overrightarrow{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \\ \frac{F_x}{m} \\ \frac{F_y}{m} \\ \frac{F_z}{m} \end{pmatrix}$$

2 Расчет равнодействующего ускорения

В нашей работе учитываются только гравитационные силы, действующие со стороны всех планет, Солнца и Луны. Тогда

$$\frac{\overrightarrow{F}}{m} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i(\overrightarrow{r_i}(t) - \overrightarrow{r})}{|r_i(t) - r|^3}$$

где i – индекс небесного тела; $r_i(t)$ – положение в момент t; μ_i – гравитационный параметр; $\mu_i = M_i * G$

3 Решение ОДУ

Введем обозначение $\overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{cond})$

$$\overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{cond}) = \begin{pmatrix} \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \\ \frac{1}{m}\overrightarrow{F} \end{pmatrix}$$

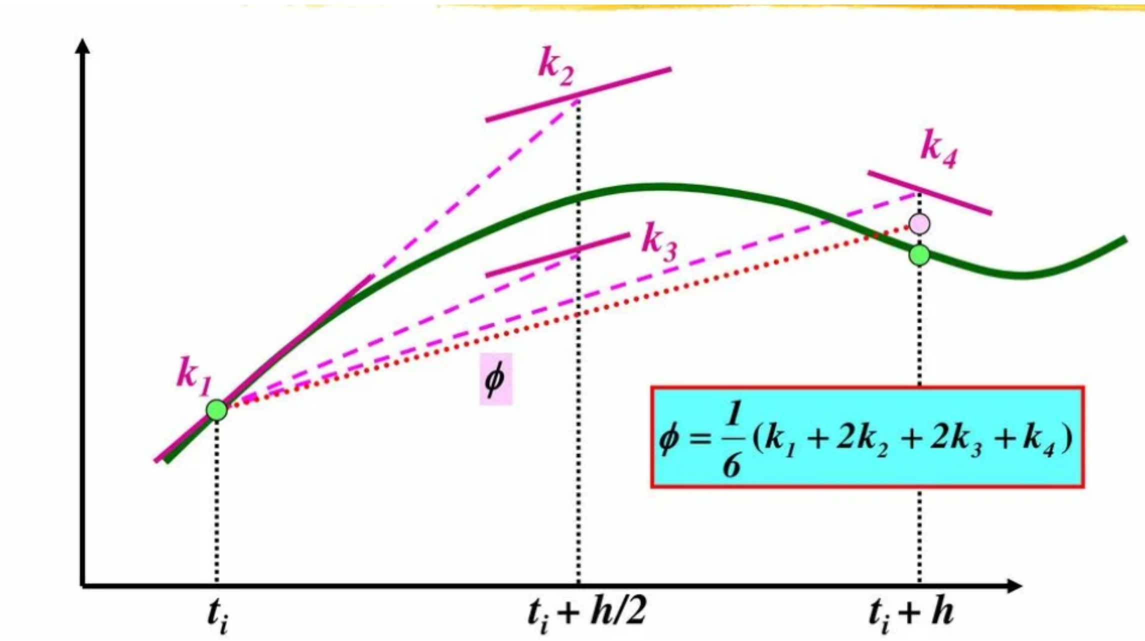
Таким образом можно записать уравнение:

$$\overrightarrow{f}(t, \overrightarrow{cond}) = \frac{d(\overrightarrow{cond})}{dt} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i(x_i(t)-x)}{|r_i(t)-r|^3} \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i(y_i(t)-y)}{|r_i(t)-r|^3} \\ \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i(z_i(t)-z)}{|r_i(t)-r|^3} \end{pmatrix}$$

Для решения такого уравнения необходимо знать начальное положение и начальную скорость точки. Запишем начальный вектор состояния:

$$\overrightarrow{cond_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$$

Для решения поставленной задачи, воспользуемся методом Рунге-Кутты 4-ого порядка. Пусть известно решение $\overrightarrow{cond_i}$ в момент времени $t_i = i\Delta t$. Найдем решение для i+1



момента времени. Вычислим вспомогательные векторные коэффициенты:

$$\overrightarrow{k_1} = \overrightarrow{f}(t_i, \overrightarrow{cond_i})$$

$$\overrightarrow{k_2} = \overrightarrow{f}(t_i + \frac{1}{2}\Delta t, \overrightarrow{cond_i} + \frac{1}{2}\Delta t \overrightarrow{k_1})$$

$$\overrightarrow{k_3} = \overrightarrow{f}(t_i + \frac{1}{2}\Delta t, \overrightarrow{cond_i} + \frac{1}{2}\Delta t \overrightarrow{k_2})$$

$$\overrightarrow{k_4} = \overrightarrow{f}(t_i + \Delta t, \overrightarrow{cond_i} + \Delta t \overrightarrow{k_3})$$

После вычисляем решение $\overrightarrow{f}_{i+1}$:

$$\overrightarrow{f}_{i+1} = \overrightarrow{f}_i + \frac{\Delta t}{6}(\overrightarrow{k}_1 + 2\overrightarrow{k}_2 + 2\overrightarrow{k}_3 + \overrightarrow{k}_4)$$