

Цель работы

Построить модель Лотки-Вольтерра.

Задание

1. Создать модель по данной системе дифференциальных уравнений:
2. Построить графики изменения числа особей.
3. Найти стационарную точку.

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник-жертва» -- модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

Теоретическое введение

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy. \end{cases}$$

В этой модели x — число жертв, y — число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c — естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Теоретическое введение

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в начальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей особей. Колебания совершаются в противофазе.

Моделирование в Julia

Для начала введем параметры задачи:

```
a = 0.19;  
b = 0.026;  
c = 0.18;  
d = 0.032;  
t = (0, 400);
```

Переменные a , d являются коэффициентами смертности, а b , c -- коэффициенты рождаемости.

Моделирование в Julia

Далее введем систему дифференциальных уравнений, характеризующую нашу модель.

```
function syst!(dx, x, p, t)
    dx[1] = -a.*x[1] + b .* x[1] * x[2];
    dx[2] =  c.*x[2] - d .* x[1] * x[2];
end;
```

Моделирование в Julia

Теперь введем начальные условия задачи:

```
x0 = [3, 8];
```


Моделирование в Julia

Решим систему дифференциальных уравнений первого порядка и запишем x -ы в переменную u_1 , а y -и в u_2 :

```
prob = ODEProblem(syst!, x0, t);  
y = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.01);  
u1 = Vector{Float64}()  
u2 = Vector{Float64}()  
for i in range(1, length(y.t))  
    push!(u1, y.u[i][1]);  
    push!(u2, y.u[i][2]);  
end;
```

Моделирование в Julia

Построим график зависимости количества жертв от количества хищников:

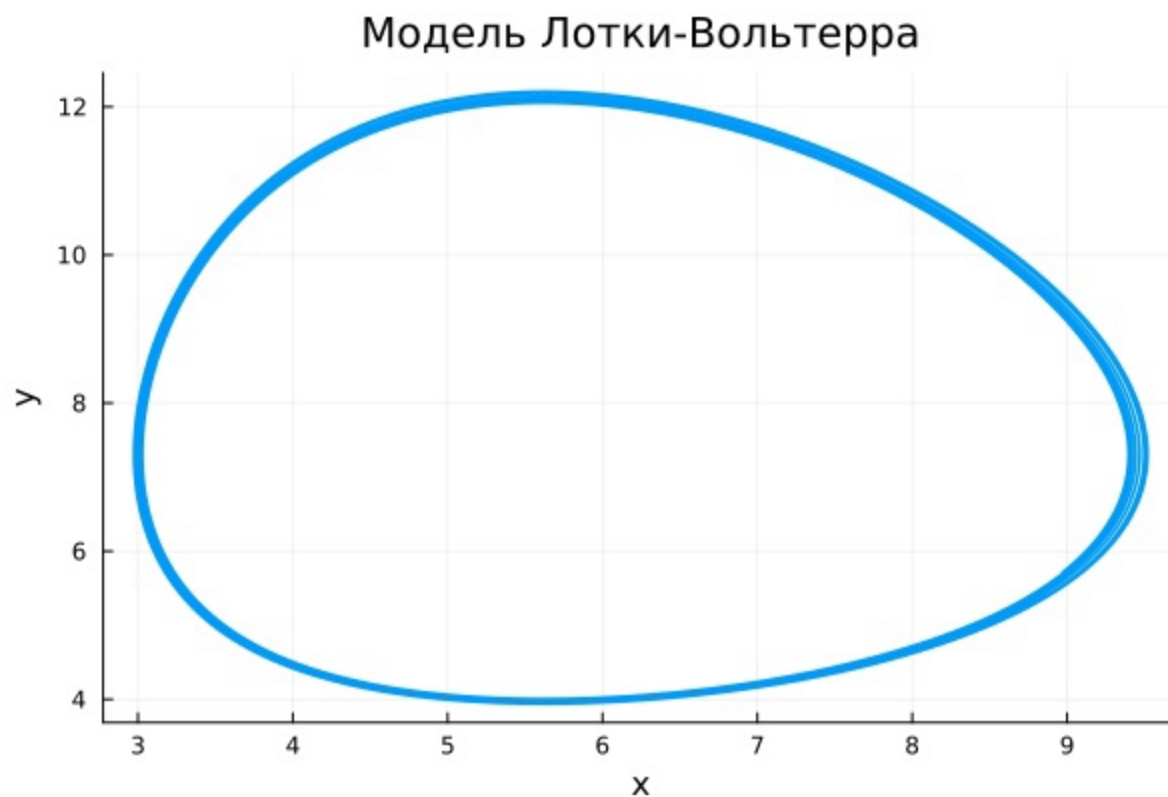
```
plot(u1, u2, label = "", title = "Модель Лотки-Вольтерра");  
savefig("name.png");
```

Также построим график изменения числа особей в популяциях:

```
t1 = [0:0.01:400]  
plot(t1, [u1, u2], label = ["Хищники" "Жертвы"], title = "Изменение числа особей в популяциях");  
savefig("name.png");
```

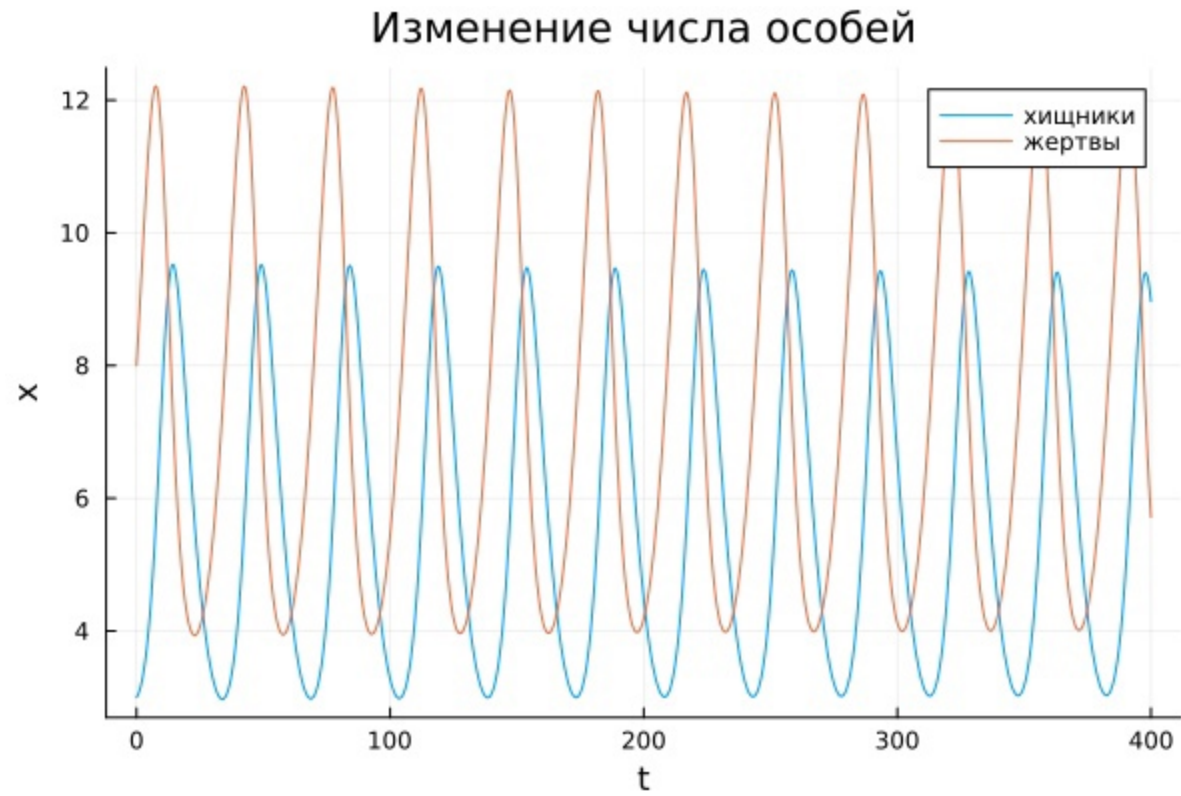
Моделирование в Julia

Зависимость количества жертв от количества хищников.



Моделирование в Julia

Изменение числа особей в популяциях.



Моделирование в Openmodelica

Аналогично первому случаю введем параметры a , b , c и d :

```
parameter Real a = 0.19;  
parameter Real b = 0.026;  
parameter Real c = 0.18;  
parameter Real d = 0.032;
```

Моделирование в Openmodelica

Введем переменные x, y :

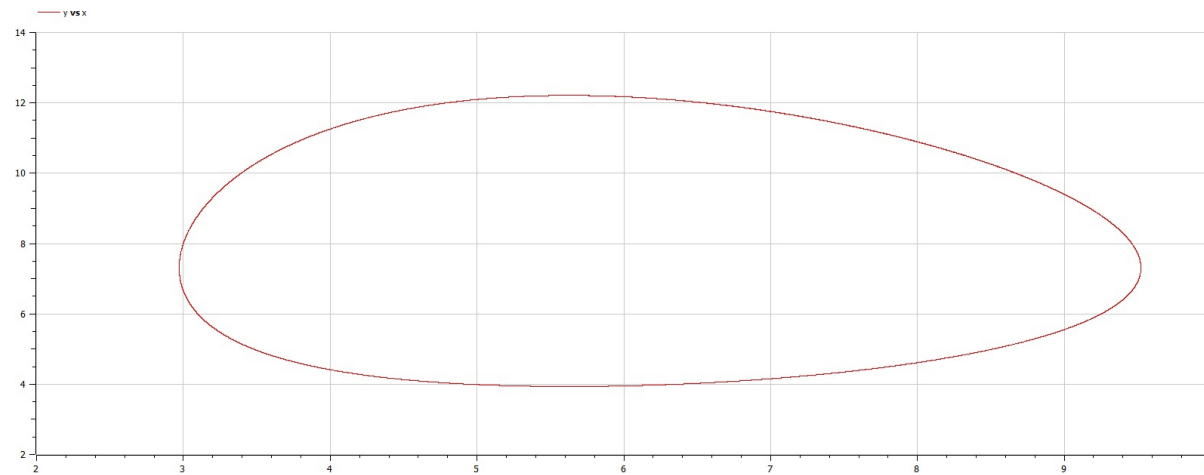
```
Real x(start=3);  
Real y(start=8);
```

Введем систему уравнений, описывающую нашу модель:

```
equation  
  der(x) = -a*x + b*x*y;  
  der(y) =  c*y + d*x*y;
```

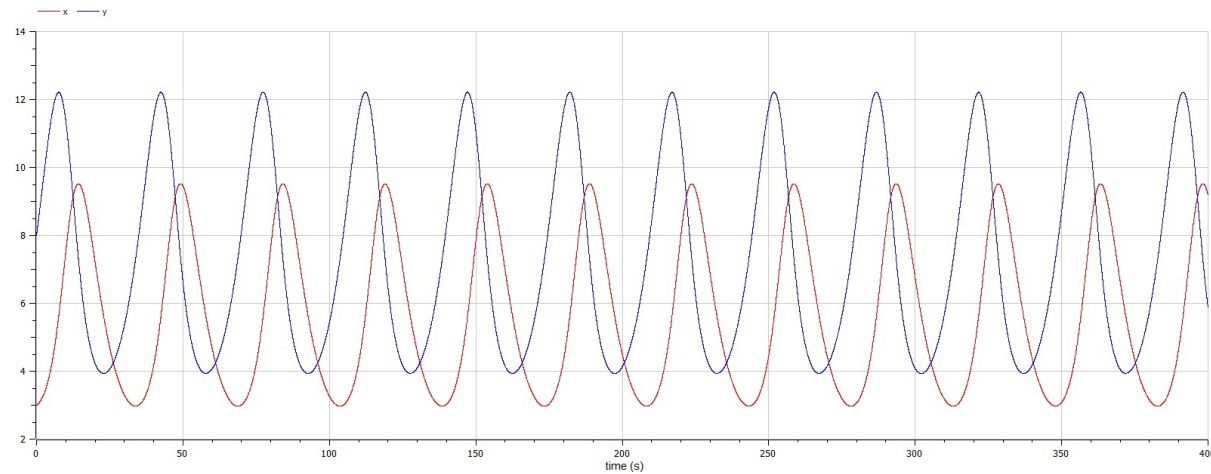
Моделирование в Openmodelica

Зависимость количества жертв от количества хищников.



Моделирование в Openmodelica

Изменение числа особей в популяциях.



Стационарная точка

$$x_0 = \frac{c}{d} = 0.5625, y_0 = \frac{a}{b} \approx 7.3.$$

Выводы

Мы построили модель Лотки-Вольтерра и нашли стационарную точку.