Задача об эпидемии

Смирнов-Мальцев Егор Дмитриевич

1032212272@pfur.ru

Российский университет дружбы народов им. Патриса Лумумбу, Москва, Россия

Цель работы

Построить модель эпидемии в двух случаях:

1. Зараженные изолированы
2. Зараженных не удается изолировать

Задание

1. Построить модели эпидемии в Julia
2. Построить модели эпидемии в Openmodelica

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая изолированная популяция, состоящая из N особей подразделяется на три группы. Первая группа -- это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи. Обозначим их через $S(t)$. Вторая группа –- это число инфицированных особей, которые являются распространителями инфекции. Обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) –- здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения $I^* $, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^* $, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = 0, I(t) \leq I^* \\ \dot{S}(t) = -aS(t), I(t) > I^*. \end{cases}$$

Теоретическое введение

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\begin{cases} \dot{I(t)} = -bI(t), I(t) \leq I^* \\ \dot{I(t)} = aS(t) - bI(t), I(t) > I^*. \end{cases}$$

Теоретическое введение

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\dot{R}(t) = bI(t).$$

Теоретическое введение

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что в момент времени t_0 нет особей с иммунитетом к болезни ($R(t_0) = 0$), а
число инфицированных и восприимчивых к болезни особей: $$I(t_0)=I_0, S(t_0) = S_0$$.

Выполнение лабораторной работы

Моделирование в Julia

Для начала введем параметры задачи:

```julia
a = 0.1;
b = 0.15;
t = (0, 100);
```

Переменные a, b являются коэффициентами заболеваемости и выздоровления соответственно.

Моделирование в Julia

Далее введем систему дифференциальных уравнений, характеризующую нашу модель.

```
function syst!(dx,x,p,t)
    dx[1] = a*x[3]-b.*x[1];
    dx[2] = b.*x[1];
    dx[3] = -a*x[3];
end;
```

Моделирование в Julia

Теперь введем начальные условия задачи:

```
x0 = [45, 3, 5457];
```

Моделирование в Julia

Решим систему дифференциальных уравнений первого порядка и запишем $I(t)$ в переменную u_1, $R(t)$ -- в u_2, а $S(t)$ в u_3:

```
prob = ODEProblem(syst!, x0, t);
y = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.2);
u1 = Vector{Float64}()
u3 = Vector{Float64}()
u2 = Vector{Float64}()
for i in range(1, length(y.t))
    push!(u1, y.u[i][1]);
    push!(u2, y.u[i][2]);
    push!(u3, y.u[i][3]);
end;
```

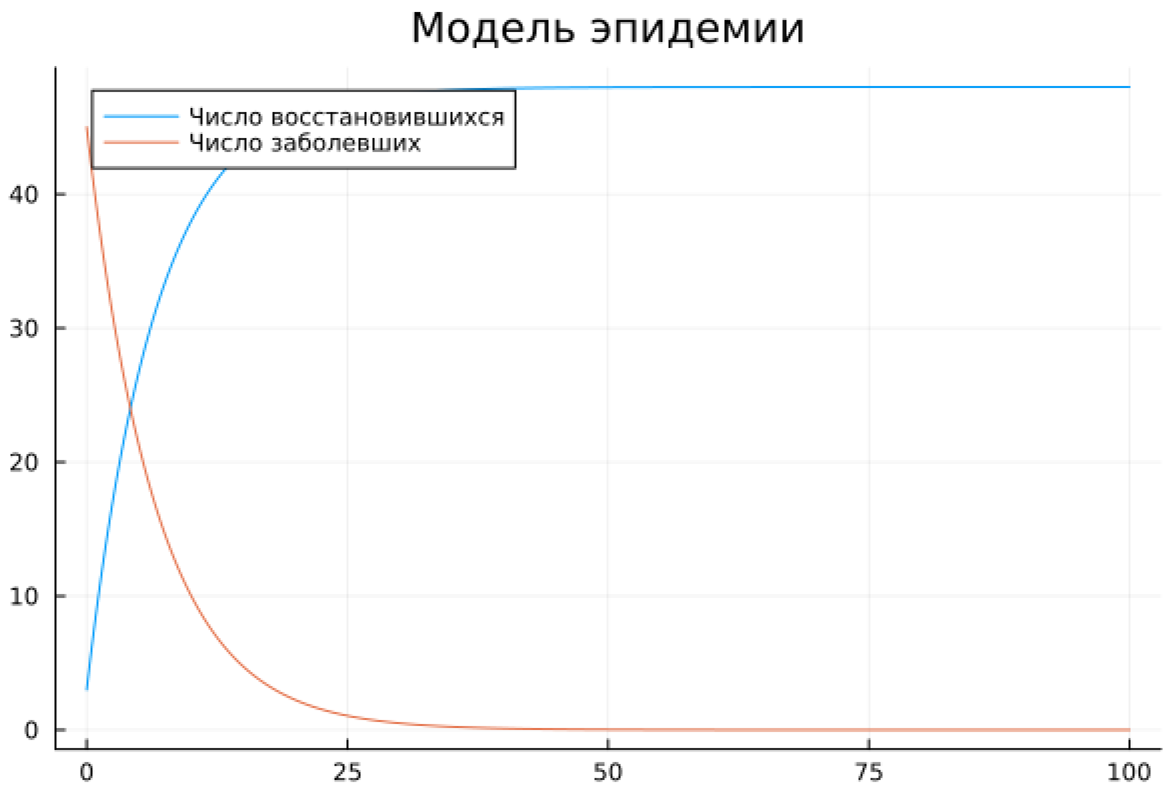
Моделирование в Julia

Построим график зависимости количества в каждой из групп от времени:

```
t1 = [0:0.2:100];
plot(t1, [u2, u1, u3], label = ["Число восстановившихся" "Число заболевших" "Число неконтактировавших"], title = "Модель эпидемии");
savefig("name.png")
```

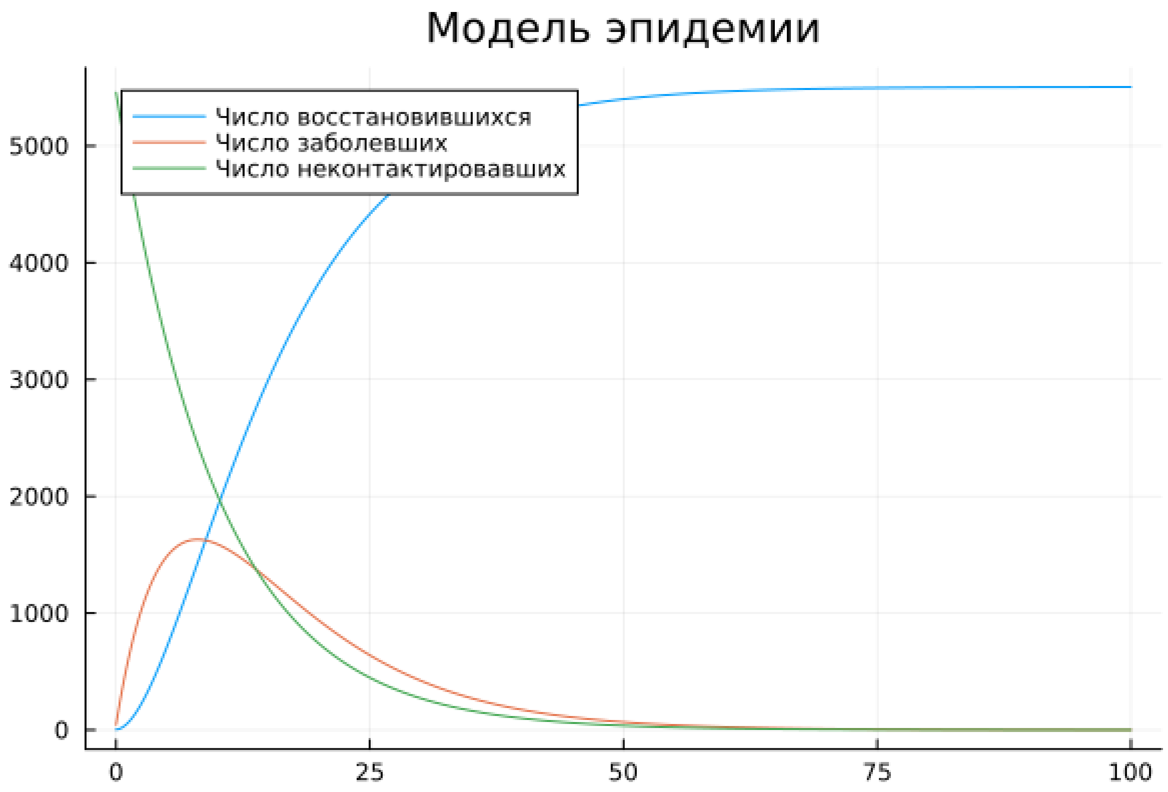
Моделирование в Julia

Число восстановившихся и болеющих при изоляции заболевших:



Моделирование в Julia

Число восстановившихся и болеющих при невозможности изоляции заболевших:



Моделирование с помощью Openmodelica

Аналогично первому случаю введем параметры a, b, а также параметр N -- количество особей в популяции:

```
parameter Real N = 5505;
parameter Real a = 0.10;
parameter Real b = 0.15;
```

Моделирование с помощью Openmodelica

Введем переменные I, R, S:

```
Real I(start=45);
Real R(start=3);
Real S(start=5457);
```

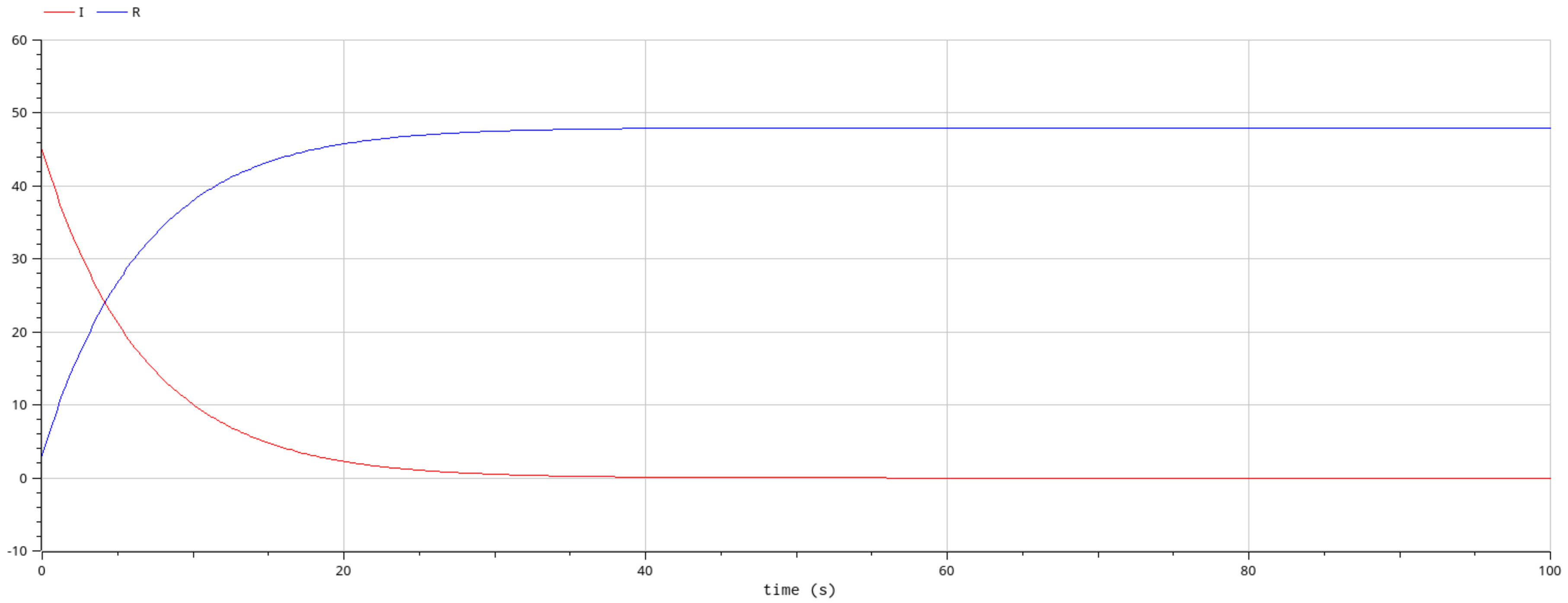
Моделирование с помощью Openmodelica

Введем систему уравнений, описывающую нашу модель:

```
equation
  der(I) = a*S-b*I;
  der(R) = b*I;
  der(S) = -a*S;
```

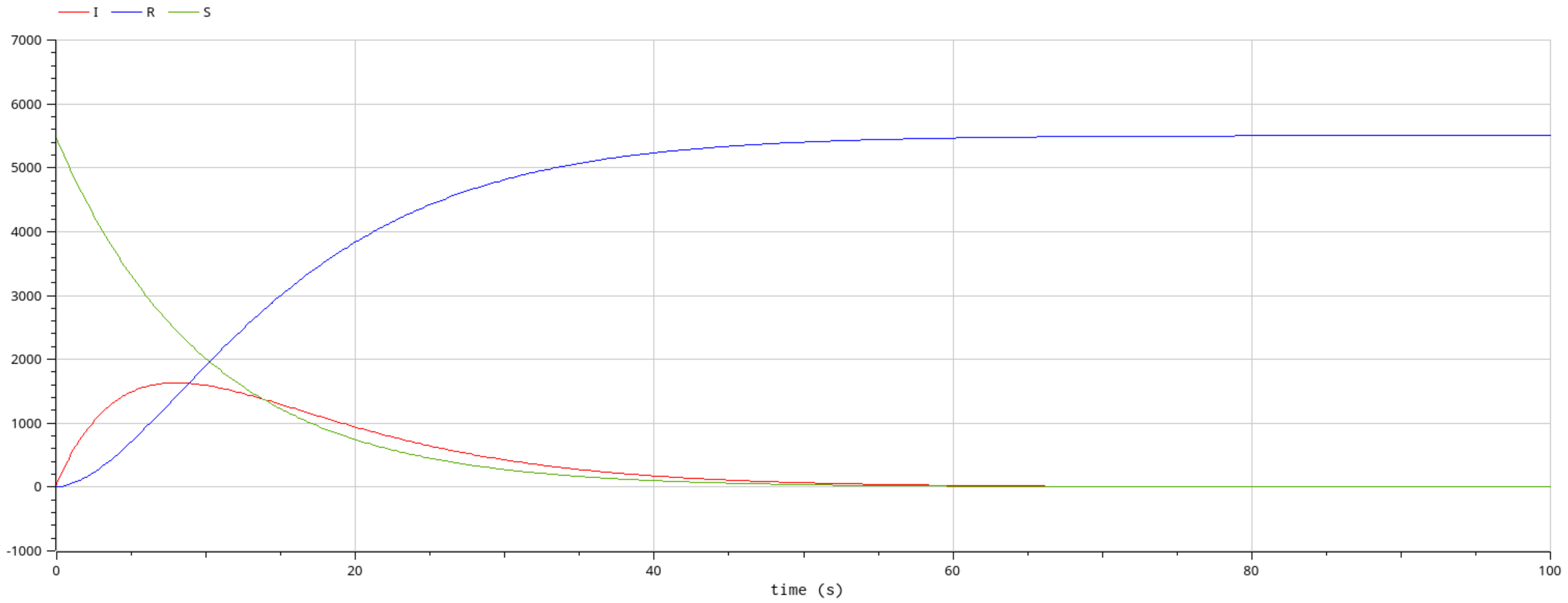
Моделирование с помощью Openmodelica

Число восстановившихся и болеющих при изоляции заболевших:



Моделирование с помощью Openmodelica

Число восстановившихся и болеющих при невозможности изоляции заболевших:



Выводы

Была построена модель эпидемии. В случае изоляции зоболевших число зараженных сразу падает. В случае невозможности изоляции число зараженных в какой-то момент достигает своего пика, а потом падает.