Отчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Смирнов-Мальцев Егор Дмитриевич

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

Цель работы

Построить фазовые портеты гармонических колебаний.

Задание

Смоделировать гармонические колебание:

1. Без затухани и внешних сил.
2. С затуханием.
3. С затуханием и действием внешних сил.

Теоретическое введение

Движение грузика на пружинке, маятника, заряда в электрическом контуре, а также эволюция во времени многих систем в физике, химии, биологии и других науках при определенных предположениях можно описать одним и тем же дифференциальным уравнением, которое в теории колебаний выступает в качестве основной модели. Эта модель называется линейным гармоническим осциллятором. Уравнение свободных колебаний гармонического осциллятора имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где x – переменная, описывающая состояние системы (смещение грузика, заряд конденсатора и т.д.), γ – параметр, характеризующий потери энергии (трение в механической системе, сопротивление в контуре), ω_0 – собственная частота колебаний, t – время.

Это уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка и примером линейной динамической системы. При отсутствии потерь в системе получаем уравнение консервативного осциллятора, энергия колебания которого сохраняется во времени.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Для однозначной разрешимости уравнения второго порядка необходимо задать два начальных условия вида

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Уравнение второго порядка можно представить в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x. \end{cases}$$

Начальные условия для этой системы примут вид:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Независимые переменные x, y определяют пространство, в котором «движется» решение. Это фазовое пространство системы. Поскольку оно двумерно, будем называть его фазовой плоскостью. Значение фазовых координат x, y в любой момент времени полностью определяет состояние системы. Решению уравнения движения как функции времени отвечает гладкая кривая в фазовой плоскости. Она называется фазовой траекторией. Если множество различных решений (соответствующих различным начальным условиям) изобразить на одной фазовой плоскости, возникает общая картина поведения системы. Такую картину, образованную набором фазовых траекторий, называют фазовым портретом

Выполнение лабораторной работы

Моделирование в Julia

Для начала введем параметры задачи:

```
w = 2.4;
g = 0;
t = (0, 60)
f(t) = 0
```

Переменная w является квадратом частоты колебаний. Такой смысл был выбран, поскольку нам не дана частота колебаний, а дан сразу ее квадрат. Переменная g характеризует потерю энергии. Переменная t показывает сколько времени моделируется колебание. Функция f характеризует влияние внешних сил.

Далее введем систему дифференциальных уравнений, характеризующую нашу модель.

```
function syst!(dx,x,p,t)
    dx[1] = x[2];
    dx[2] = -w.*x[1] - g .* x[2] - f(t);
end;
```

Теперь введем начальные условия задачи:

```
x0 = [2, -1];
```

Решим систему дифференциальных уравнений первого порядка и запишем x-ы в переменную u_1, а y-и в u_2:

```
prob = ODEProblem(syst!, x0, t);
y = solve(prob, Tsit5(), saveat=0.05);
u1 = Vector{Float64}()
u2 = Vector{Float64}()
for i in range(1, length(y.t))
    push!(u1, y.u[i][1]);
    push!(u2, y.u[i][2]);
end;
```

Построим фазовый портрет:

```
plot(u1, u2, label = "y(x)", title = "Гармонический осциллятор");
savefig("name.png");
```

Для моего варианта получились следующие графики (рис. [-@fig:001], [-@fig:002], [-@fig:003]).

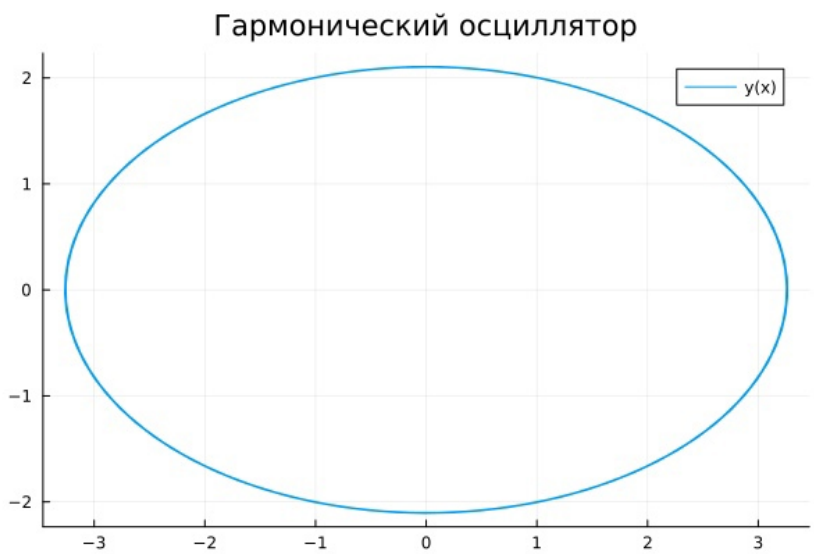

Рис. 1: Система без затухания и действия внешних сил

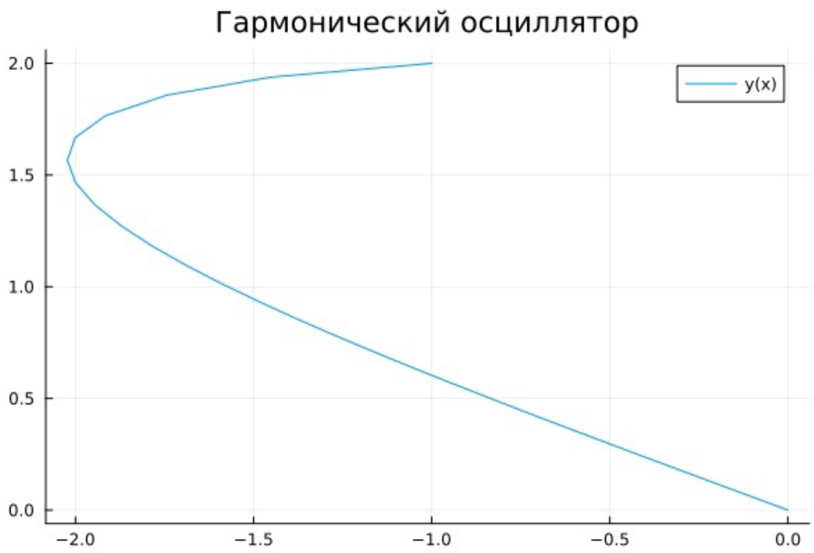

Рис. 2: Система с затуханием

Рис. 3: Система с затуханием и действием внешних сил

Моделирование с помощью Openmodelica

Аналогично первому случаю введем параметры w и g:

parameter Real w = 3;

parameter Real g = 12;

Введем переменные x, y, а также t, отвечающую за время, и f, отвечающую за действие внешних сил:

Real x(start=2);

Real y(start=-1);

Real t(start=0);

Real f;

Введем систему уравнений, описывающую нашу модель:

equation

der(x) = y;

der(y) = -w*x - g*y - f;

f = 0.2*sin(5*t);

der(t) = 1

Для моего варианта получились следующие графики (рис. [-@fig:004], [-@fig:005], [-@fig:006]).

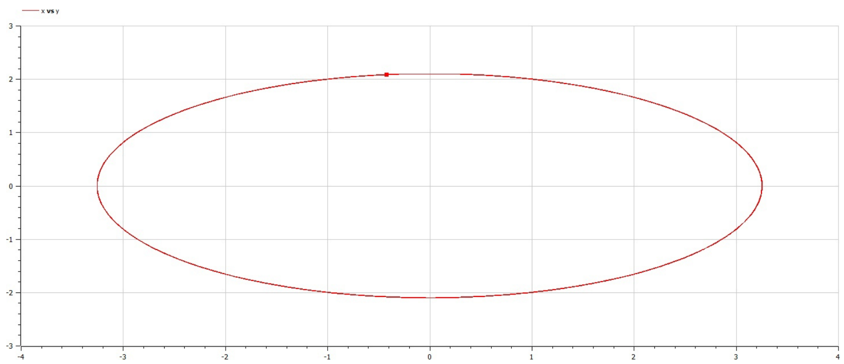

Рис. 4: Система без затухания и действия внешних сил

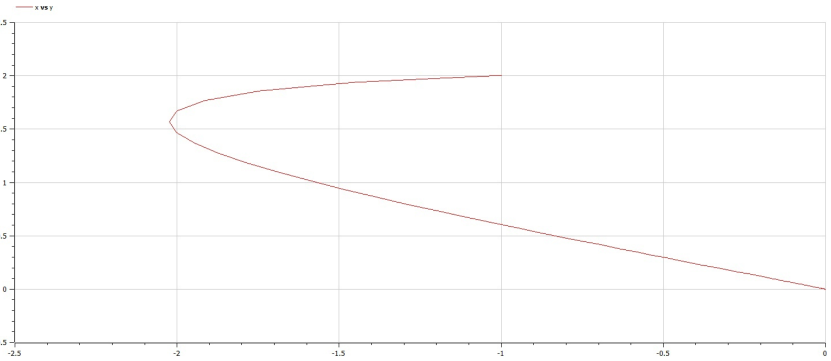

Рис. 5: Система с затуханием

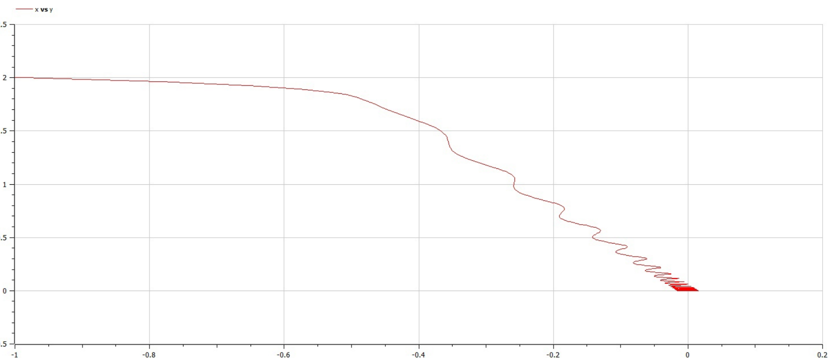

Рис. 6: Система с затуханием и действием внешних сил

Выводы

Мы построили фазовые портреты колебаний.

Список литературы