Лабораторная работа №4

Системы линейных уравнений

Смирнов-Мальцев Егор Дмитриевич

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Научиться решать системы линейных уравненийй с помощью системы для математических вычислений Octave.

Задание

- Решить СЛАУ методом Гаусса
- Решить СЛАУ с помощью деления
- Сделать LUP-разложение матрицы

Теоретическое введение

Система линейных уравнений — это система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где x_1,...,x_n — неизвестные переменные, a_{ij} — коэффициент при x_j в i-ом уравнении, b_i — свободные члены.

Эту систему можно переписать в виде $Ax = b$. A — основная матрица системы, b — столбец свободных членов. Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа [@wiki:bash]. - На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна. А именно, среди элементов первого столбца матрицы выбирают ненулевой, перемещают его на крайнее верхнее по- ложение перестановкой строк и вычитают получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляя тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку и первый столбец мысленно вычёркивают и продолжают пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то переходят к следующему столбцу и проделывают аналогичную операцию. - На втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь наверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуация в точности повторяет случай последней строки.

LUP-разложение: матрица L — нижняя треугольная матрица, матрица U — верхняя треугольная матрица, матрица P — матрица перестановки: $PA = LU$.

Выполнение лабораторной работы

Введем расширенную матрицу уравнения. Вручную распишем метод Гаусса. Также решим эту СЛАУ с помощью стандартной функции в Octave. Для увеличения количества показанных знаков после запятой используем команду format long. (рис. [-@fig:001])

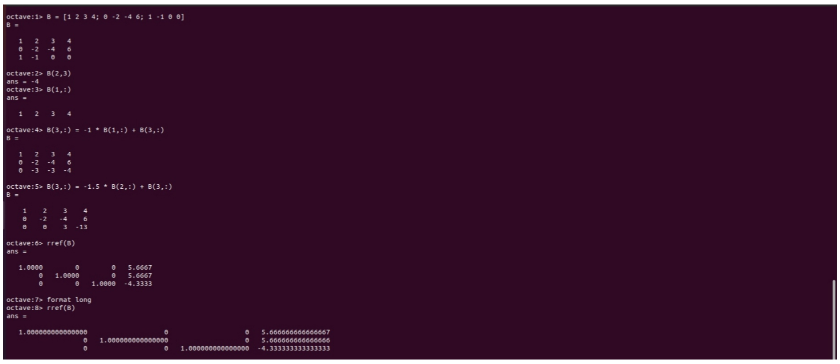

Рис. 1: Метод Гаусса

Встроенная операция для решения линейных систем вида $Ax = b$ в Octave называется левым делением и записывается как A. Это эквивалентно выражению $A^{-1}b$ (рис. [-@fig:002])

Рис. 2: Левое деление

С помощью функции lu() в Octave распишем LUP-разложение матрицы A (рис. [-@fig:003]):

Рис. 3: LUP-разложение

Выводы

В результате выполнения работы научились решать системы линейных уравнениий с помощью системы для математических вычислений Octave.

Список литературы