

# Лабораторная работа №8

Собственные значения матриц

Смирнов-Мальцев Егор Дмитриевич

# Содержание

Цель работы	4
Задание	5
Теоретическое введение	6
Выполнение лабораторной работы	7
Нахождение собственных значений и векторов . . . . .	7
Марковские цепи . . . . .	7
Выводы	9
Список литературы	10

## Список иллюстраций

1	Собственные значения и векторы матрицы $A$ . . . . .	7
2	Матрица с вещественными собственными значениями . . . . .	7
3	Случайное блуждание . . . . .	8
4	Вектор равновесного состояния . . . . .	8

## Цель работы

Решить задачи, связанные с собственными значениями матриц.

## Задание

- Найти собственные значения и собственные векторы матрицы
- Решить задачу о случайном блуждании
- Найти равновесное состояние цепи Маркова

# Теоретическое введение

Случайное блуждание — математический объект, известный как стохастический или случайный процесс, который описывает путь, состоящий из последовательности случайных шагов в каком-нибудь математическом пространстве (например, на множестве целых чисел).

Простейшим примером случайного блуждания является случайное блуждание по числовой прямой целых чисел,  $\mathbb{Z}$ , которое начинается в точке 0 и на каждом шаге сдвигается на  $+1$  или на  $-1$  с равной вероятностью. Другими примерами могут послужить траектория движения молекулы в жидкости или газе (броуновское движение), поиск пути у животных во время фуражировки, колебания цен акций на фондовом рынке, финансовое состояние игрока: все описанные случаи могут быть аппроксимированы моделями случайного блуждания, даже несмотря на то, что они могут не быть полностью случайными в реальной жизни.

# Выполнение лабораторной работы

## Нахождение собственных значений и векторов

Зададим матрицу  $A$  и найдём ее собственные значения и векторы командой `eig` (рис. [-@fig:001]).

```
octave> A = [1 2 -3; 2 4 0; 1 1 1]
A =
   1   2  -3
   2   4   0
   1   1   1

octave> [v lambda] = eig(A)
v =
-0.23095 + 0.00000i -0.79195 + 0.00000i -0.79195 - 0.00000i
-0.91393 + 0.00000i  0.45225 + 0.12259i  0.45225 - 0.12259i
-0.32733 + 0.00000i  0.33219 + 0.31519i  0.33219 - 0.31519i

lambda =
Diagonal Matrix
  4.52510 + 0.00000i      0      0
      0  0.73745 + 0.88437i      0
      0      0  0.73745 - 0.88437i
```

Рис. 1: Собственные значения и векторы матрицы  $A$

Умножим  $A$  на свою транспонированную матрицу, чтобы получить матрицу с вещественными собственными значениями (рис. [-@fig:002]).

```
octave> B = A * A'
B =
  14  10   0
  10  20   0
   0   0   3

octave> [v lambda] = eig(B)
v =
  0.29593  0.77340 -0.50860
-0.46987 -0.42730 -0.80587
  0.80280 -0.46826 -0.19855

lambda =
Diagonal Matrix
  0.14970      0      0
      0  0.47515      0
      0      0 28.37516
```

Рис. 2: Матрица с вещественными собственными значениями

## Марковские цепи

Решим задачу случайного блуждания. Зададим начальные векторы вероятности, сформируем матрицу переходов и найдём вектор вероятности после 5 шагов. (рис.

[-@fig:003]).

```
octave:8> T = [1 .5 0 0; 0 0 .5 0; 0 .5 0 .5; 0 0 .5 0; 0 0 0 .5 1]
T =
   1.0000   0.5000   0.0000   0.0000   0.0000
   0.0000   0.0000   0.5000   0.0000   0.0000
   0.0000   0.5000   0.0000   0.0000   0.5000
   0.0000   0.0000   0.5000   0.0000   0.0000
   0.0000   0.0000   0.0000   0.5000   1.0000

octave:9> a = [2; 2; 2; 2; 2];
octave:10> b = [5; 0; 0; 0; 5];
octave:11> c = [0; 1; 0; 0; 0];
octave:12> d = [0; 0; 1; 0; 0];
octave:13> T%* a
ans =
   0.45000
   0.02500
   0.00000
   0.02500
   0.45000

octave:14> T%* b
ans =
   2.5000
   0.0000
   0.0000
   0.0000
   2.5000

octave:15> T%* c
ans =
   0.0075
   0.0000
   0.1250
   0.0000
   0.1875

octave:16> T%* d
ans =
   0.3750
   0.1250
   0.0000
   0.1250
   0.3750
```

Рис. 3: Случайное блуждание

Найдём равновесное состояние. Для этого найдем собственные векторы матрицы перехода. Вектор равновесного состояния можно найти, разделив собственный вектор на сумму элементов этого вектора (рис. [-@fig:004]).

```
octave:18> T = [-.48 -.51 .14; -.29 -.04 -.52; -.23 -.45 .34]
T =
   -0.48000   -0.51000    0.14000
   -0.29000   -0.04000   -0.52000
   -0.23000   -0.45000    0.34000

octave:19> [v lambda] = eig(T)
v =
   -0.64048   -0.00111    0.43240
   -0.58463    0.26394   -0.81601
   -0.57002    0.53717    0.38351

lambda =

Diagonal Matrix
   1.0000      0      0
      0   0.21810      0
      0      0  -0.35810

octave:20> x = v(:,1)/sum(v(:,1))
x =
   0.37631
   0.29287
   0.33082

octave:21> T^10*x
ans =
   0.37631
   0.29287
   0.33082

octave:22> T^50*x - T^10*x
ans =
  -4.4409e-16
  -2.7756e-16
  -3.8859e-16
```

Рис. 4: Вектор равновесного состояния



## Выводы

1. Найти собственные значения и вектора матрицы можно с помощью функции `eig`.
2. Найти равновесное состояние Марковских цепей можно с помощью собственных векторов матрицы перехода.

## Список литературы