

Лабораторная работа №5

Работа с полиномами

Смирнов-Мальцев Егор Дмитриевич

Содержание

Цель работы	4
Задание	5
Теоретическое введение	6
Выполнение лабораторной работы	7
Выводы	13
Список литературы	14

Список иллюстраций

1	График точек, заданных матрицей D	8
2	Задание графика	8
3	Построение матрицы коэффициентов	8
4	Нахождение полинома и построение его графика	9
5	График полинома	9
6	Построение графика исходных и подгоночных данных	10
7	Построение графика дома	10
8	График дома	10
9	Построение графика дома	11
10	График домика, отраженный относительно прямой $y = x$	11
11	Построение графика дома, увеличенного в 2 раза	11
12	График увеличенного дома	12

Цель работы

Научиться подгонять полиномиальные кривые и выполнять различные матричные преобразования с помощью системы для математических вычислений Octave.

Задание

- Выполнить подгонку полиномиальной кривой с помощью Octave.
- Представить изображение с помощью матрицы.
- Перевернуть изображение на определённый угол.
- Отразить изображение относительно прямой.
- Выполнить преобразование делитации.

Теоретическое введение

Подгонка кривой — это построение математической функции, которая наилучшим образом соответствует имеющимся данным[@wiki:bash].

Поворот происходит путем домножения координат точки на матрицу поворота:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Дилатация (то есть расширение или сжатие) также может быть выполнено путём умножения матриц. Матричное произведение TD будет преобразованием дилатации D с коэффициентом k , где

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Выполнение лабораторной работы

Пусть нам нужно найти параболу по методу наименьших квадратов для набора точек, заданных матрицей

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 4 \\ 5 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

В матрице заданы значения x в столбце 1 и значения y в столбце 2. Введём матрицу данных в Octave и извлечём вектора x и y . Нарисуем точки на графике.(рис. [-@fig:001], [-@fig:002])

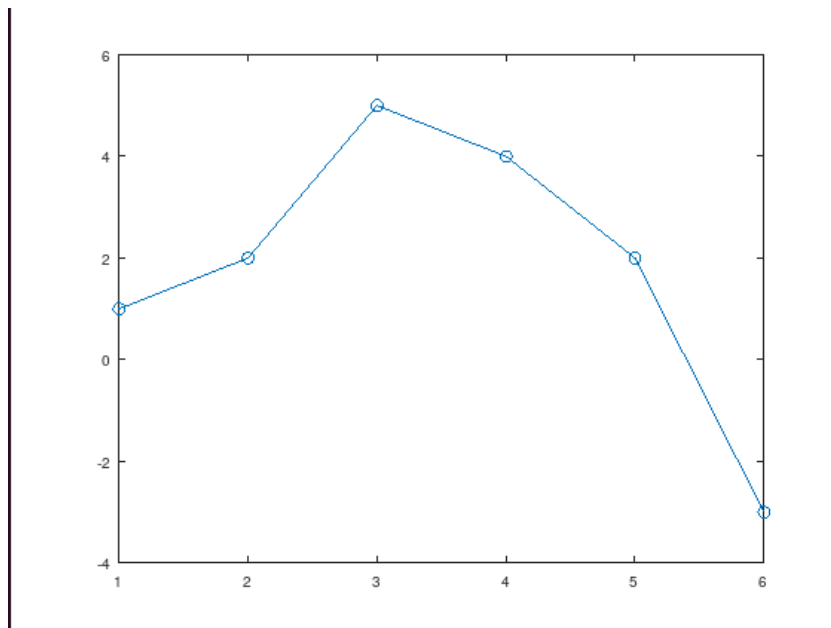


Рис. 1: График точек, заданных матрицей D

```
octave> D = [1 1; 2 2; 3 5; 4 4; 5 2; 6 -3]
D =
     1     1
     2     2
     3     5
     4     4
     5     2
     6    -3

octave> xdata = D(:,1)
xdata =
     1
     2
     3
     4
     5
     6

octave> ydata = D(:,2)
ydata =
     1
     2
     5
     4
     2
    -3

octave> plot(xdata, ydata, 'o-')
octave> A = ones(6,3)
```

Рис. 2: Задание графика

Построим уравнение вида $y = ax^2 + bx + c$ (рис. [-@fig:003])

```
octave> A = ones(6,3)
A =
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1

octave> A(:,1) = xdata.^2
A =
     1     1     1
     4     2     1
     9     3     1
    16     4     1
    25     5     1
    36     6     1

octave> A(:,2) = xdata
A =
     1     1     1
     4     2     1
     9     3     1
    16     4     1
    25     5     1
    36     6     1
```

Рис. 3: Построение матрицы коэффициентов

Решение по методу наименьших квадратов получается из решения уравнения $A^T A b = A^T y$, где b – вектор коэффициентов полинома. Решим его с помощью Octave. Построим график полученной параболы (рис. [-@fig:004], [-@fig:005])

```
octave:9> B = A'*A;
octave:10> B(1,4) = A' * ydata;
B =
    2275    442    91    68
    442    92    21    18
    91    21    6    11
octave:11> B_res = rref(B);
B_res =
    1.0000    0    0    -0.8929
    0    1.0000    0    5.6500
    0    0    1.0000    -4.4000
octave:12> x = linspace(0,7,50);
octave:13> y = B_res(1,4) * x.^2 + B_res(2,4) * x + B_res(3,4);
octave:14> plot(xdata, ydata, 'o', x, y, 'linesolid', 'r')
octave:15> hold on
```

Рис. 4: Нахождение полинома и построение его графика

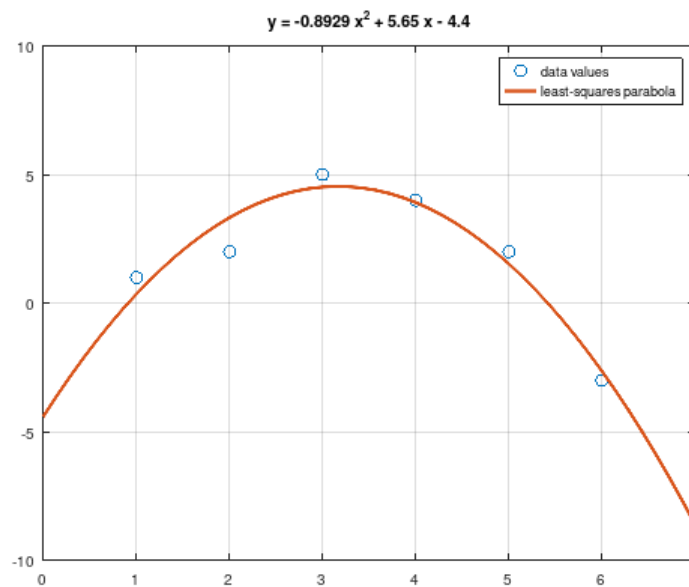


Рис. 5: График полинома

Для подгонки можно использовать встроенную функцию `polyfit`. Значения полинома P в точках, задаваемых вектором-строкой x можно получить с помощью функции `polyval` (рис. [-@fig:006])

```

octave:18> P = polyfit(xdata, ydata, 2)
P =
   -0.8929    5.6500   -4.4888
octave:19> y = polyval(P,xdata)
y =
    0.2071
    3.3266
    4.5143
    3.9143
    1.5206
   -2.6629
octave:20> plot(xdata,ydata,'o','xdata,y','-')
octave:21> grid on
octave:22> legend ('original data' , 'polyfit data' );
octave:23>

```

Рис. 6: Построение графика исходных и подгоночных данных

Закодируем граф-домик. Выберем путь, который проходит по каждому ребру ровно один раз. Повернем граф на 90 и 225 градусов с помощью матрицы поворота (рис. [-@fig:007], [-@fig:008])

```

D =
    1    1    3    3    2    1    3
    2    0    0    2    3    2    2
octave:24> x = D(:,1)
x =
    1
    2
octave:25> x = D(:,2)
x =
    1    1    3    3    2    1    3
octave:26> y = D(:,3)
y =
    2    0    0    2    3    2    2
octave:27> plot(x,y)
octave:28> theta1 = 90 * pi / 180
theta1 = 1.5708
octave:29> R1 = [cos(theta1) -sin(theta1); sin(theta1) cos(theta1)]
R1 =
    6.1232e-17   -1.0000e+00
    1.0000e+00    6.1232e-17
octave:30> plot(x,y)

```

Рис. 7: Построение графика дома

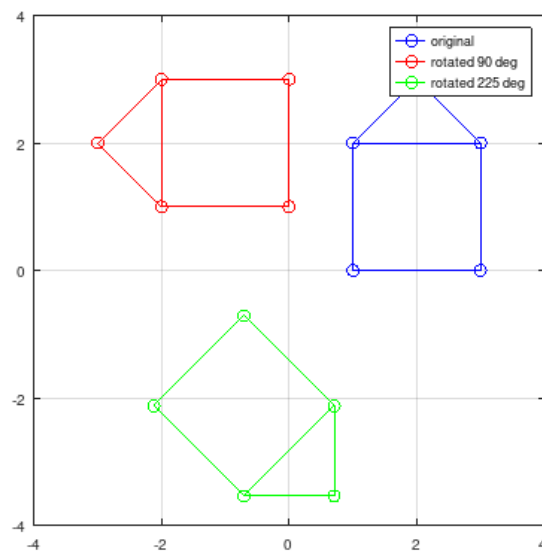


Рис. 8: График дома

Отразим граф дома относительно прямой $y = x$. Зададим матрицу отражения, подставив угол 45 градусов, так как именно под таким углом относительно оси абсцисс проходит прямая $y = x$. (рис. [-@fig:009],[-@fig:010])

```
octave> R = [0 1; 1 0]
R =
  0 1
  1 0

octave> RD = R^D
RD =
  2 0 0 2 3 2 2
  1 1 3 3 2 1 3

octave> x1 = RD(1,:)
x1 =
  2 0 0 2 3 2 2

octave> y1 = RD(2,:)
y1 =
  1 1 3 3 2 1 3

octave> plot(x,y,'o','b')
octave> axis([-1 4;-1 4], 'equal');
octave> axis([-1 5;-1 5], 'equal');
octave> grid on;
octave> legend('original', 'reflected')
```

Рис. 9: Построение графика дома

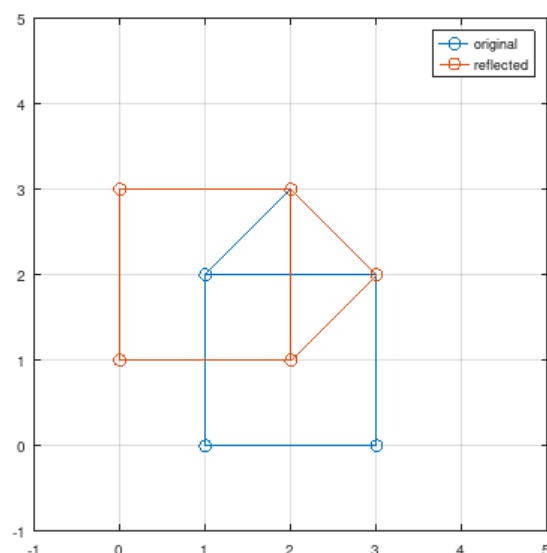


Рис. 10: График домика, отраженный относительно прямой $y = x$

Увеличим граф дома в 2 раза, используя матрицу для делитации (рис. [-@fig:011],[-@fig:012])

```
octave> T = [2 0; 0 2]
T =
  2 0
  0 2

octave> TD = T^D;
octave> x1 = TD(1,:); y1 = TD(2,:);
octave> plot(x,y,'o','b')
octave> axis([-1 7;-1 7], 'equal');
octave> grid on;
octave> legend('original', 'expanded')
```

Рис. 11: Построение графика дома, увеличенного в 2 раза

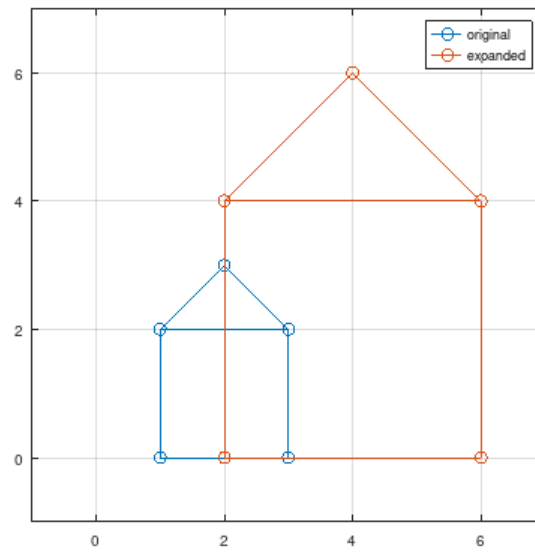


Рис. 12: График увеличенного дома

Выводы

В результате выполнения работы научились подгонять полиномы и выполнять аффинные преобразования графиком с помощью системы для математических вычислений Octave.

Список литературы