Лабораторная работа №4

Научное программирование

Викторов Егор

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Изучить встроенные в Octave алгоритмы, необходимые для решения систем линейных уравнений.

2 Теоретическое введение

Метод Гаусса

Запишем исходную систему

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + ... + a_n^1 x^n = b^1 \\ ... \\ a_1^m x^1 + ... + a_n^m x^n = b^m \end{cases}$$

в матричном виде: $Ax = b$. Матрица A называется основной матрицей системы, b — столбцом свободных членов. Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса подразделяется на два этапа:

- на первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путём элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливают, что система несовместна;
- на втором этапе осуществляется так называемый обратный ход, суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений, либо, если все переменные являются базисными, то выразить в численном виде единственное решение системы линейных уравнений.

Для приведения матрицы к треугольному виду для системы уравнений $Ax = b$ используют расширенную матрицу.

LU-разложение

LU-разложение — это вид факторизации матриц для метода Гаусса. Цель состоит в том, чтобы записать матрицу A в виде $A = LU$, где L — нижняя треугольная матрица, а U — верхняя треугольная матрица. Эта факторизованная форма может быть использована для решения уравнения $Ax = b$.

Если известно LU-разложение матрицы A, то исходная система может быть записана как $LUx = b$. Эта система может быть решена в два шага. На первом шаге решается система $Ly = b$. Поскольку L — нижняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно прямой подстановкой. На втором шаге решается система $Ux = y$. Поскольку U — верхняя треугольная матрица, эта система решается непосредственно обратной подстановкой.

LUP-разложение

Если используются чередования строк, то матрица A умножается на матрицу переста- новок, и разложение принимает форму $PA = LU$.

Более подробно см. в [@Gauss:bash] и [@LU:bash].

3 Выполнение лабораторной работы

Для системы линейных уравнений:

$$Ax = b \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

построим расширенную матрицу вида

$$B = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Рассмотрим ее поэлементно, например, выведем элемент, стоящий на пересечении 2й строки и 3го столбца. Также можем извлечь целый вектор строки или вектор столбца, например, выведем первую строку.

Реализуем явно метод Гаусса. Сначала добавим к третьей строке первую строку, умноженную на −1. Далее добавим к третьей строке вторую строку, умноженную на −1.5. Выведем явно решение системы, а затем воспользуемся встроенной командой. Можем поменять формат вывода значений, чтобы отображалось более пяти десятичных знаков. Затем вернем изначальный формат представления (рис. fig. 3.1) и (рис. fig. 3.2).

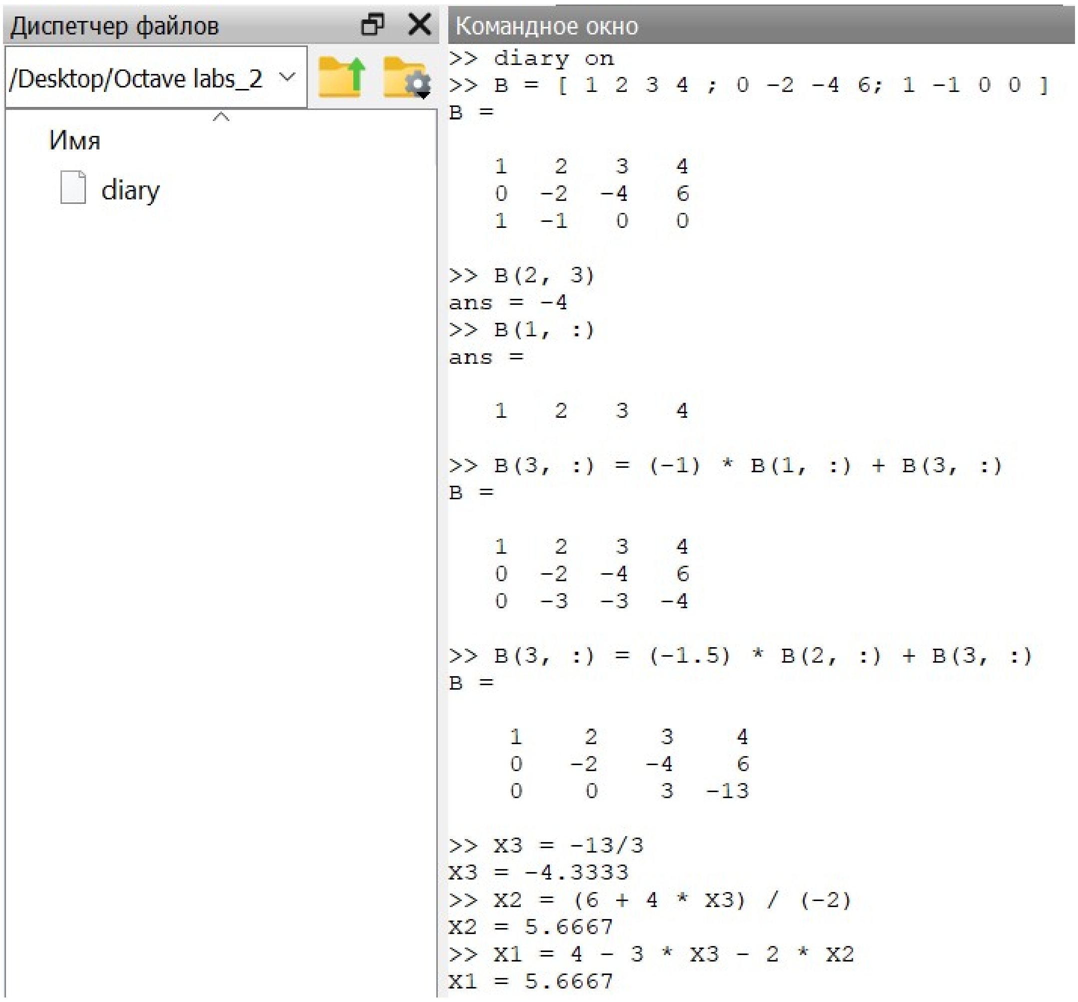

Рис. 3.1: Метод Гаусса

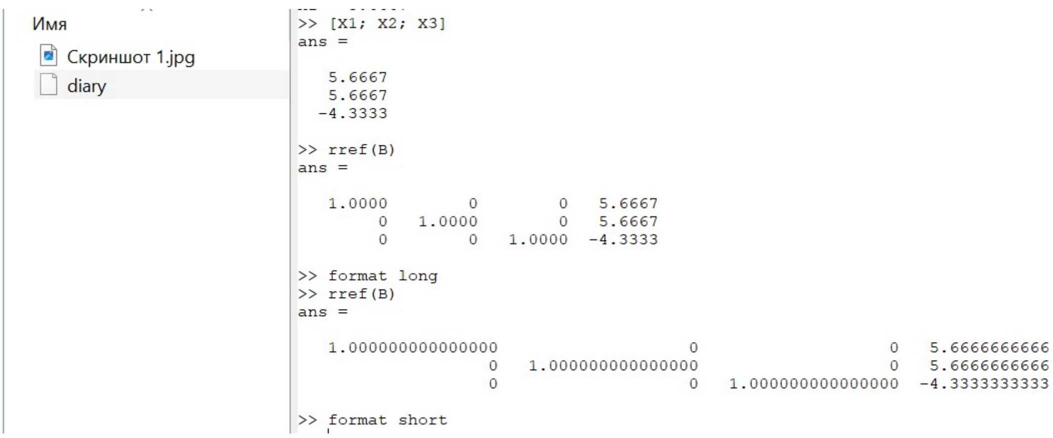

Рис. 3.2: Метод Гаусса

Встроенная операция для решения линейных систем вида $Ax = b$ в Octave называется левым делением и записывается как $A\backslash b$. Это концептуально эквивалентно выражению $A^{-1}b$. Выделим из расширенной матрицы B матрицу A и вектор b. После чего найдем вектор x (рис. fig. 3.3).

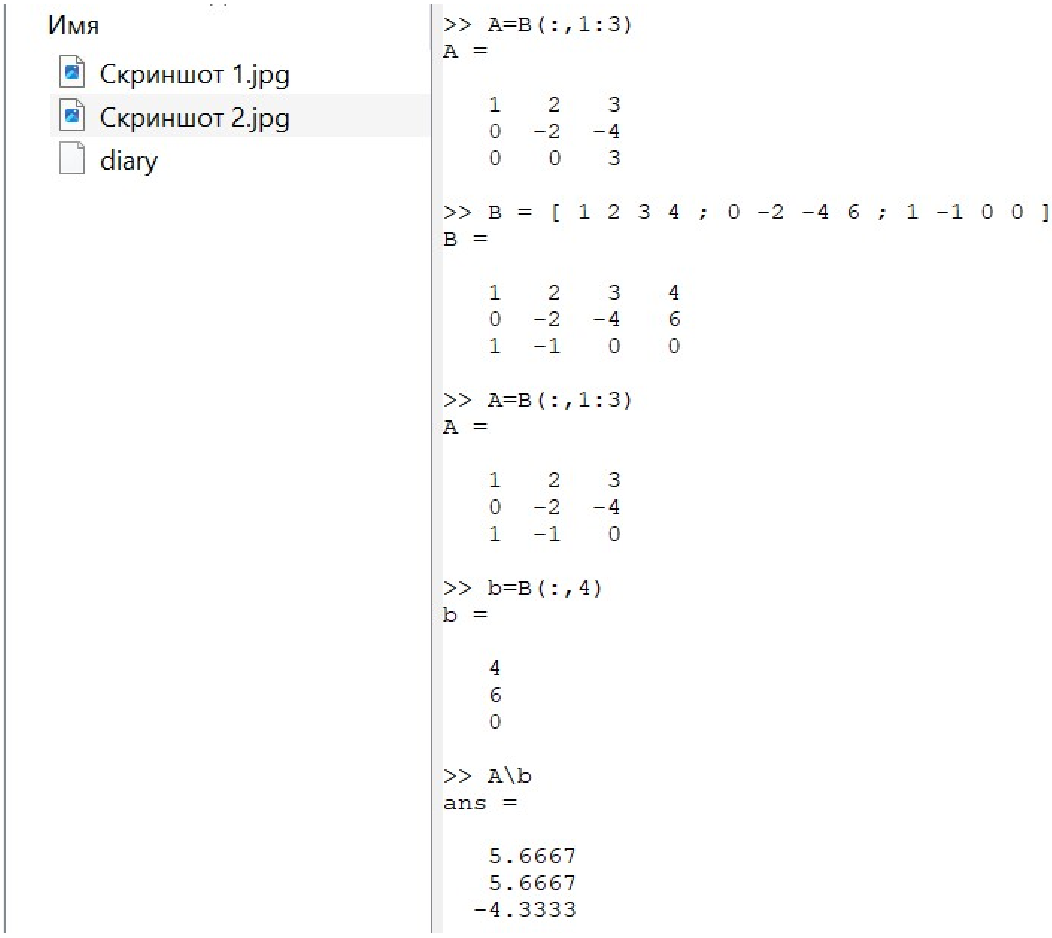

Рис. 3.3: Левое деление

Пусть дана матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

С помощью Octave распишем её LU-разложение и найдем вектор x (рис. fig. 3.4).

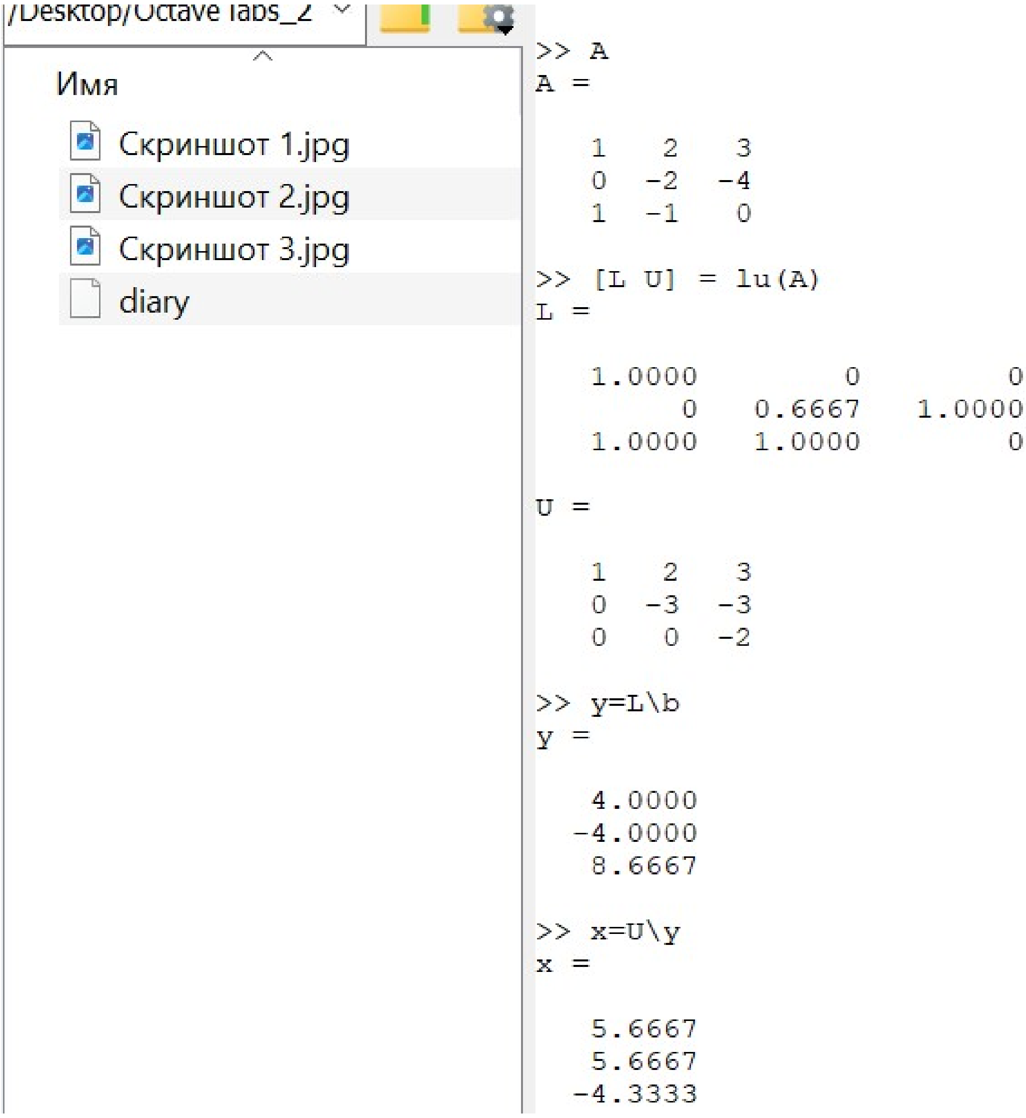

Рис. 3.4: LU-разложение

Для этой же матрицы A распишем LUP-разложение (рис. fig. 3.5).

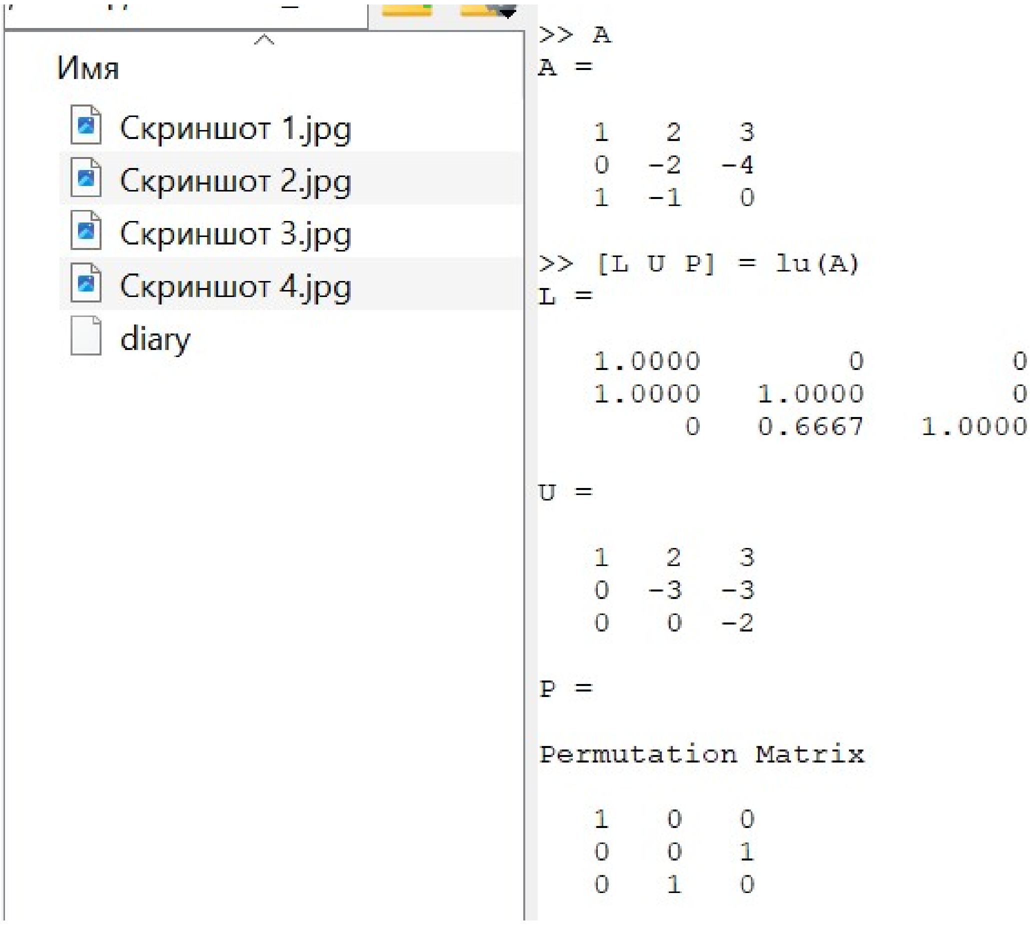

Рис. 3.5: LUP-разложение

4 Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы я изучил встроенные в Octave алгоритмы, необходимые для решения систем линейных уравнений.