Задача 1

Доказать: $(n+a)^p = O(n^p)$

$\forall a \in R$

$\forall p > 0$

Рассмотрим предел отношения

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+a)^p}{n^p} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^p = (\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n}))^p = 1^p = 1 \in R$ - существует конечный предел отношения

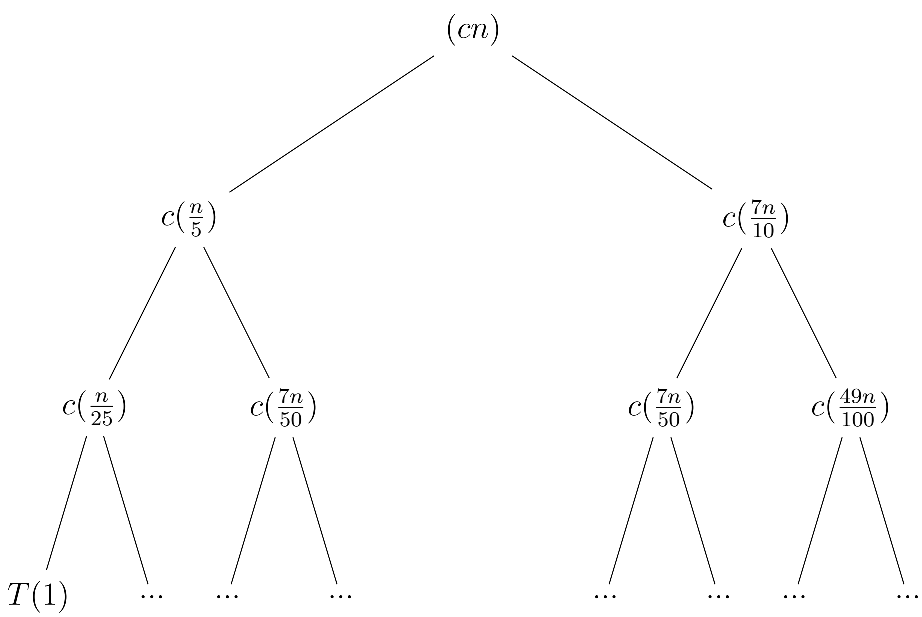
$\Downarrow$

$\boxed{(n+a)^p = O(n^p)}$

Задача 2

$T(n) = 1 \cdot T(\frac{n}{5}) + 1 \cdot T(\frac{7n}{10}) + cn$

Построим дерево рекурсии:



Самый длинный путь от корня дерева до его листа:

$n \to (\frac{7}{10})n \to (\frac{49}{100}) \to ...$

$(\frac{7}{10})^k \cdot n = 1$

$k = \log_{\frac{7}{10}} n$ - высота дерева

Ождиаем что решение рекурентного соотношения: $O(n)$

Предположим, что асимптотичесая верхняя граница решения представляет собой: $O(n)$

Покажем, что $T(n) \le d \cdot n$, где d - подходящая положительная константа $T(n) = T(\frac{n}{5}) + T(\frac{7n}{10}) + cn$

$\leq d(\frac{n}{5}) + d(\frac{7n}{10}) + cn =$

$= (\frac{9n}{10}) \cdot d + cn$

$\leq dn$

Подберём константу d:

$(\frac{9}{10})d + c \leq d \Rightarrow c \leq \frac{1}{10}d$

$10c \leq d$ - можно подобрать такие d в зависимости от константы c, что будет выполняться:

$T(n) \leq dn$

$\Downarrow$

$\boxed{T(n) = O(n)}$

Задача 3

(a)

$f_n = f_n^h + f_n^p$, где

f_n^h - решение соответствующего однородного рекурентного соотношения

f_n^p - частное решение

(по условию) частное решение $x_k = ak + b$

$x_{k+3} - 7x_{k+2} + 15x_{k+1} - 9x_k = 4$; - неоднородное рекурентное соотношение

$x_0 = 3; x_1 = 9; x_2 = 31$

Рассмотрим характеристическое уравнение для однородного уравнения $x_{k+3} - 7x_{k+2} + 15x_{k+1} - 9x_k = 0$

$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 \cdot (\lambda - 1) = 0$

Решения уравнения $\lambda_{1,2} = 3$; $\lambda_3 = 1$

$f_n^h = (c_0 + c_1 \cdot n)3^n + c_2$

Найдём коэффициенты для частного решения:

$a(n + 3) + b - 7a(n + 2) - 7b + 15a(n + 1) + 15b - 9an - 9b = 4$

$an + 3a + b - 7an - 14a - 7b + 15an + 15a + 15b - 9an - 9b = 4$; $4a = 4 \rightarrow a = 1$

$f_n = (c_0 + c_1 n) \cdot 3^n + c_2 + n$

$$\begin{cases} f_0 = 3 - 0 = 3 = c_0 + c_2 \\ f_1 = 9 - 1 = 8 = (c_0 + c_1) \cdot 3 + c_2 \\ f_2 = 31 - 2 = 29 = (c_0 + c_1 \cdot 2) \cdot 9 + c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

$\boxed{f_n = (1+n) \cdot 3^n + 2 + n}$

(b)

$x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ - числа Фибоначчи

$x_{k+2} - x_{k+1} - x_k = 0$ - однородное рекурентное соотношение

$x_0 = 1; x_1 = 1$

Составим характеристическое уравнение с λ

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

$D = 1 + 4 = 5 > 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Downarrow$

$f_n = c_1 (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2 (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ x_1 = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) c_1 + (\frac{1-\sqrt{5}}{2}) c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} - c_1 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$f_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$\boxed{f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}$

Задача 4

$T(n) = 5T(\frac{n}{7}) + n(log(n))^2$ $a = 5; b = 7$

$n^{log_7 5} \approx O(n^{0,8})$

$f(n) = \Omega(n^{log_7 5 + e})$, где $e \approx 0,2$

$f(n) = \Omega(n) (\Rightarrow \Omega(n) = \{f(n) : \exists c, n_0 > 0$ такие, что $0 \leq cn \leq f(n), \forall n > n_0\})$

Проверим условие регулярности:
$af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$; $c < 1$ для достаточно больших n
$af(\frac{n}{b}) = 5(\frac{n}{7}) \cdot (log(\frac{n}{7}))^2 \leq (\frac{5n}{7}) \cdot (log(n))^2$
Докажем неравенство: $(log(\frac{n}{7}))^2 \leq (log(n))^2$
$\Updownarrow$
$\log\frac{1}{7} \cdot \log\frac{n^2}{7} \leq 0,$
$\Uparrow$
$\log\frac{1}{7} < 0$; $\log\frac{n^2}{7} > 0$ - при достаточно больших n
$\Downarrow$ (условия теоремы выполняются)
$\boxed{T(n) = \Theta(n \cdot (\log n)^2)}$

Задача 5

$M(n)$ - число операций умножения, которые используются при перемножении матриц $n \times n$ с помощью алгоритма Штрассена, используя стратегию разделяй и властвуй
$A(n)$ - число операций сложения Из условия алгоритма известно, что на каждом шаге потребуются 7 операций умножения и 18 операций сложения. Соответсвенно:
$M(n) = 7M(\frac{n}{2}) = ... = 7^{d-1} \cdot M(1) = 7^d$
$2^d = n \Rightarrow d = \log_2 n$
$\Downarrow$
$M(n) = n^{\log_2 7}$
$A(n) = 7A(\frac{n}{2}) + 18(\frac{n}{2})^2 = 7(7 \cdot A(\frac{n}{2}) + 18 \cdot 7(\frac{n}{4})^2) + 18(\frac{n}{2})^2 = 7^2(7 \cdot A(\frac{n}{8}) + 18 \cdot (\frac{n}{8})^2)) + 18 \cdot 7 \cdot (\frac{n}{4})^2 + 18 \cdot (\frac{n}{2})^2 = 7^3 \cdot A(\frac{n}{8}) + 7^2 \cdot 18(\frac{n}{8})^2 + 18 \cdot 7(\frac{n}{4})^2 + 18 \cdot (\frac{n}{2})^2$
Получаем сумму геометрической прогрессии с первым членом
$b_1 = 18 \cdot (\frac{n}{2})^2$ и со знаменателем прогрессии $q = \frac{7}{4}$
Тогда по формуле для суммы геометрической прогрессии (для d членов):
$A(n) = b_1 \cdot \frac{(q^n-1)}{(q-1)} = 18(\frac{n}{2})^2 \cdot \frac{(\frac{7}{4})^n - 1}{(\frac{7}{4}) - 1} = 24 \cdot (\frac{n}{2})^2 \cdot ((\frac{7}{4})^n - 1) \leq 6n^2 \cdot (\frac{7}{4})^d = 6n^2 \cdot (\frac{7}{4})^{\log_2 n} = 6n^2 \cdot n^{\log_2 \frac{7}{4}} = 6n^2 \cdot n^{\log_2 7} \cdot \frac{1}{n^2} = 6n^{\log_2 7} \Longrightarrow$
$A(n) = 6n^{\log_2 7}$
$M(n) + A(n) \approx n^{\log_2 7} + 6n^{\log_2 7} = \boxed{7n^{\log_2 7}}$
Таким образом, сложность алгоритма равна $O(n^{\log_2 7}) \approx \boxed{O(n^{2.8})}$
Определим, при каких n алгоритм Штрассена становится быстрее наивного умножения матриц.
Для наивного алгоритма: $O(n^3) : 2n^3$
Для алгоритма Штрассена: $O(n^{\log_2 7}) : 7n^{\log_2 7}$

$7n^{\log_2 7} = 2n^3$

$2n^3 - 7n^{\log_2 7} = 0$

$n^{\log_2 7}(2n^{3-\log_2 7} - 7) = 0$

$n = 0$ - не подходит, $2n^{3-\log_2 7} - 7 = 0$

$n^{3-\log_2 7} = \frac{7}{2}$

$n = (\frac{7}{2})^{\frac{1}{3-\log_2 7}}$

$\Downarrow$

$\boxed{n \approx 667}$