Задача 1

Пусть $X \in N$ - число пройденных светофоров до первой остановки. $P\{X\} = 0.3^X \cdot 0.7$, если $X \in [0, 2]$, где $P(\bar{X}) = 1 - 0.3 = 0.7$ - вероятность остановки на светофоре

$P\{X\} = 0.3^X$, если $X = 3$

Распределение числа пройденных светофоров

X	0	1	2	3
$P\{X\}$	0.7	0.21	0.063	0.027

Математическое ожидание величины X: $E < X > \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i P\{X_i\} = 0.7 \cdot 0 + 0.21 \cdot 1 + 0.063 \cdot 2 + 0.027 \cdot 3 = 0.417$

Дисперсия X: $D < X > \stackrel{\text{def}}{=} E[(X - E < X >)^2] = E < X^2 > -(E < X >)^2 = 0.705 - 0.174 = 0.531$

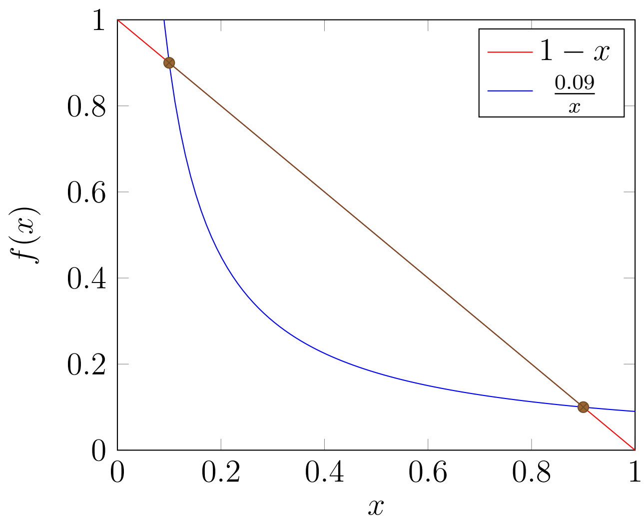
$E < X^2 >= 0.705$; $(E < X >)^2 = (0.417)^2 \approx 0.174$

$\boxed{\textbf{Ответ: } E < X >= 0.705;\ D < X >= 0.531}$

Задача 2

$0 < x, y < 1$

Найти: $P < [(x + y) \leq 1] \wedge [xy \geq 0.09] >= P'$



$S_{all} = 1 \cdot 1 = 1$

$S_{pos} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \int_{0.1}^{0.9} (\frac{0.09}{x})\, dx \approx 0.414$

Из определения геометрической вероятности: $P' = \frac{S_{pos}}{S_{all}} = \frac{0.414}{1} = 0.414$

$\boxed{\textbf{Ответ: } P' = 0.414}$

Задача 3

Достать 1 шар из первой урны и достать 1 шар из второй урны - 2 независимых события. Пусть события A - достали белый шар из первой урны, B - достали белый шар из второй урны.

$P(A \cap B)$ - вероятность *совместного* наступления событий A и B. Из условия задачи следует, что A и B - независимые события $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{11}{16} \cdot \frac{7}{16} = \frac{77}{256} \approx 0.3$

Ответ: 0.3

Задача 4

$f(x)$ - плотность вероятности случайной величины ξ

$F_\xi(x)$ - функция распределения ξ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ C(x^2 - 1), & 1 < x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases} \Longrightarrow F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 0 + [C(\frac{x^3}{3} - x)]\Big|_1^x, & 1 < x \leq 3 \\ 0 + C(\frac{x^3}{3} - x)\Big|_1^3 + 0 & x > 3 \end{cases}$$

$F_\xi(x) \overset{def}{=} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Используем свойство плотности вероятности: для нахождения константы C

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx + \int\limits_{3}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 + \int\limits_{1}^{3} f(x)\,dx + 0 = \int\limits_{-\infty}^{1} f(x)\,dx = C \cdot [(\frac{27}{3} - -3) - (\frac{1}{3} - 1)] = C(6 + \frac{2}{3}) = C \cdot \frac{20}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{20}$

Тогда с учётом $C = \frac{3}{20}$ получаем функцию распределения:

$$F_\xi^(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{3}{20}(\frac{x^3}{3} - x) + 0.1, & 1 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \qquad (\beta)$$

Рассчитаем математичечкое ожидание непрерывной случайной величины:

$$E(\xi=x) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x \cdot f(x)\,dx) = \int\limits_{-\infty}^{1} (x \cdot f(x)\,dx) + \int\limits_{1}^{3} (x \cdot f(x)\,dx) + \int\limits_{3}^{+\infty} (x \cdot f(x)\,dx) = \int\limits_{1}^{3} x \cdot \frac{3}{20}(x^2-1)\,dx =$$

$$= \frac{3}{20}(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}) == \frac{3}{20}(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2})\Big|_1^3 = \frac{3}{20}(\frac{81}{4} - \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 2}) - \frac{3}{20}(\frac{1}{4} - \frac{2}{4}) = \frac{3}{20} \cdot 16 = \frac{12}{5} \Rightarrow E(\xi) = \frac{12}{5} = 2.4$$

Теперь рассчитаем дисперсию $D(\xi)$ для непрерывной случайной величины:

$$D(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - E(\xi=x)]f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x^2 \cdot f(x)\,dx) - (E(x))^2 = \int\limits_{1}^{3} (x^2 \cdot (\frac{3}{20}(x^2-1)))\,dx - (\frac{12}{5})^2 =$$

$$= \frac{3}{20}(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3})\Big|_1^3 - \frac{144}{25} = 40 \cdot \frac{3}{20} - \frac{144}{25} = 6 - 5.76 = 0.24 \Rightarrow D(\xi) = 0.24$$

Найдём вероятность $P(-10 \le \xi < 2)$ как интеграл:

$$P(-10 \le \xi < 2) = \int\limits_{-10}^{2} (f(x)\,dx) = \int\limits_{-10}^{1} (f(x)\,dx) + \int\limits_{1}^{2} (f(x)\,dx) = 0 + F_\xi(2) =$$

$$= \frac{3}{20}(\frac{2^3}{3} - 2) + 0.1 = \frac{3}{20} \cdot \frac{2}{3} + 0.1 = 0.2 \Rightarrow P(-10 \le \xi < 2) = 0.2$$

Ответ:
1. $C = \frac{3}{20}$; $F_\xi(x)$ (β)
2. $E(\xi = x) = 2.4$; $D(\xi = x) = 0.24$
3. $P(-10 \le \xi < 2) = 0.2$

Задача 5

Пусть событие A - сообщили обсерватория I, что объект в состоянии H_1, а обсерватория II - в состоянии H_2

Апостериорная вероятность того, что объект находится в состоянии $H1$ при условии наступления события A: $P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)}$

$P(H_1) = 0.6$

Воспользуемся формулой полной вероятности: $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)$

$P(A|H_1) = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18$

$P(A|H_2) = 0.1 \cdot 0.8 = 0.08$

$P(A) = 0.18 \cdot 0.6 + 0.08 \cdot 0.4 = 0.14 \Rightarrow P(A) = 0.14$

$\Downarrow$

$P(H_1|A) = \frac{0.18 \cdot 0.6}{0.14} \approx 0.77$

$\boxed{\textbf{Ответ: } P(H_1|A) = 0.77}$

Задача 6

Пусть событие A - в первый раз извлекли чёрный шар,

событие B - во второй раз извлекли белый шар

Необходимо найти: $P(B|A)$

Способ I *В первый раз* достали чёрный шар: $P(A) = \frac{5}{16}$. Соответсвенно, осталось всего 15 шаров: 4 чёрных и 11 белых.

Во второй раз взяли уже белый шар:

Пусть $P(B|A)$ - вероятность наступления события B после при условии наступления A. Тогда:

$\underline{P(B|A) = \frac{11}{15}}$

Способ II Воспользуемся формулой условной вероятности:

$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$

$P(A) = \frac{5}{16}$ - вероятность, что извлекли в первый раз именно чёрный шар

$P(AB)$ - вероятность совместного наступления событий A и B, т.е. вероятность того, что в первый раз мы вытянули именно чёрный шар, а во второй - именно белый

$P(A) = \frac{5}{16}$

$P(AB) = \frac{5 \cdot 11}{16 \cdot 15}$, где $(5 \cdot 11)$ - количество способов выбрать сначала чёрный, а затем белый шарики, $(16 \cdot 15)$ - количество способов выбрать 2 *любых* шара из 16 (без возвращения)

Откуда получаем, что $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{11}{48}}{\frac{5}{16}} = \frac{11}{15}$

$\underline{P(B|A) = \frac{11}{15}}$

$\boxed{\text{Ответ: } P(B|A) = \frac{11}{15}}$

Задача 7

$f(x)$ - плотность вероятности случайной величины ξ - времени безотказной работы прибора

$F_\xi(x)$ - функция распределения ξ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2e^{-2x}, & 0 \leq x \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -e^{-2x} + 1, & 0 \le x \end{cases} (\alpha)$$

Определим вероятность $P(\xi \le 1)$, что прибор проработает не более года:

$P(\xi \le 1) \overset{\text{def}}{=} F_\xi(1) = -e^{-2} + 1 \approx 0.86$

Определим вероятность $P(\xi \ge 3)$, что прибор безотказно проработает 3 года, то есть *не менее* 3 лет:

$P(\xi \ge 3) = 1 - P(\xi < 3) = 1 - F_\xi(3) = 1 - 1 + e^{-6} = 0.002$

Среднее время безотказной работы прибора - математическое ожидание:

$E < \xi = X > \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot (2e^{-2x})\, dx = -2 \cdot (\frac{1}{4}e^{-2x}(2x+1))\Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$

Ответ:

1. $F_\xi(x)$ (α)
2. $P(\xi \le 1) = 0.86$
3. $P(\xi \ge 3) = 0.002$
4. $E < \xi = X >= 0.5$