Auton Агент Multi-Agent Сист (2011) 22: 31-42 DOI 10.1007 /
s10458-009-9120-й

Дистилляция мудрости толпы: взвешенное агрегацию решений по нескольким вопросам

**Эяль Baharad · Jacob Голдбергер · Моше Коппел ·
Шмуэль Nitzan**

Опубликовано на сайте: 20 декабря 2009

Аннотация С учетом решения многочисленных избирателей по поводу какого-то вопроса, то, как правило, предполагается, что лучший способ достигнуть некоторого коллективного суждение, следуя большинству. Мы рассмотрим здесь в настоящее время общего случая, в котором каждый избиратель выражает некоторое (бинарное) суждение относительно каждый из множества независимых вопросов и предположить, что каждый избиратель имеет некоторую неподвижную (неизвестную) вероятность принятия правильного суждения по любому вопросу. Мы используем тот факт, что несколько голосов по каждому избирателю известны, чтобы продемонстрировать, как аналитический и эмпирический, что метод, основанный на оценке максимального правдоподобия превосходит простое правило большинства для прибывающих в настоящих коллективных решениях.

Ключевые слова агрегация Суждение · Дихотомический выбор · Expectation Максимизация ·
теорема жюри Кондорсе

1. Введение

Одним из ключевых нововведений, порождённых в Интернете является составлением суждений неспециалистов в отношении нескольких вопросов определенного типа. Некоторые веб-инструменты (например,

E. Baharad
Департамент экономики, Университет Хайфы, 31905 Хайфа, Израиль по электронной почте:
baharad@econ.haifa.ac.il

J. Голдбергер
Инженерная школа, Бар Илан, 52900 Рамат - Ган, Израиль по электронной почте:
goldbej@eng.biu.ac.il

M. Коппел (B)
Факультет компьютерных наук, Университет Бар - Илан, 52900 Рамат - Ган, Израиль электронная почта:
koppel@cs.biu.ac.il ; moishk@gmail.com

C. Nitzan
Департамент экономики, университете Бар - Илан, 52900 Рамат - Ган, Израиль по электронной почте:
nitzans@mail.biu.ac.il

Amazon Механический Турок [1] и инструменты социальных закладок, такие как Digg и de.licio.us) рычаги коллективного суждение, чтобы получить ответы на простые вопросы (например, это ключевое слово соответствующего тега для этой веб-страницы?) по низкой цене. Другие пытаются кране в «мудрости толпы», чтобы определить, ответы на вопросы с потенциально серьезными политическими или коммерческими последствиями, такими как, кто победит на выборах или спортивное мероприятие или является ли данная идея продукта, скорее всего, удастся. В любом случае соответствующие независимые суждения всех избирателей в отношении данного вопроса, затем объединяются в единый коллективный суд. Как правило, это делается путем непосредственного усреднением или, в случае бинарных суждений, следуя правилу простого большинства (SMR). Было часто, однако, отметить, что избиратель навыки принятия решения неравномерно; некоторые избиратели предлагают решения, которые являются произвольными, перекос или иным образом введены в заблуждение. Таким образом, фундаментальный вопрос заключается в том, в тех случаях, когда мы не имеем доступ к какой-либо наземной истине, с которым сравниваются суждениями, мы можем оценить навыки каждого принятия решения избирателя и, соответственно, достичь коллективного решения, которое, скорее всего, будет правильными.

В самом деле, где вообще ничего не известно об относительных индивидуальных навыков принятия решения избирателей (за исключением, что в среднем, они лучше, чем случайный), мы не можем улучшить SMR [8 , 1]. Покажу, однако, что во многих распространенных сценариях, хотя у нас нет никакой прямой информации о квалификации отдельных избирателей, мы можем по-прежнему опережать SMR, используя тот факт, что у нас есть решения для каждого избирателя в отношении каждого из множества независимых вопросов. Что такое отслеживание возможно это явно верно в настройках Интернет уже упоминалось выше, но также весьма распространены в постоянных экспертных комиссий - таких, как суды, медицинские диагностические органы, инвестиционные комитеты, комитеты центрального банка - это периодически Invoke голосования для достижения коллективных решений.

Обратите внимание, что здесь мы рассмотрим сценарии суждения, где одна из альтернатив является правильным, а другой неправильно. В принципе, однако, этот метод может быть применен так же, парламентов и других органов принятия решений, где выбор отражать предпочтения. В этом контексте мы должны использовать в фикция, что существует какой-то «правильный» ответ, и что предпочтения отражают шумные суждения [3].

Наше основное понимание в том, что, даже не зная, кто прав, а кто виноват, избиратели, чьи суждения в отношении многих вопросов отличаются от других избирателей должны быть меньшим весом, чем у других избиратели. Хотя это упрощенное понимание спорно, мы покажем в этой статье, что она может быть использована в высокоточный алгоритм агрегирования голосов, когда решения избирателей по всем вопросам доступны. Целью алгоритма является фи-й максимальных значений правдоподобия для компетентности избирателей. В частности, мы покажем, как выход из этого algorithmenables агрегировать голоса amanner, что значительно превосходит SMR.

Отметим, что использование оценок максимального правдоподобия для агрегирования голосов имеет богатую историю. Кондорсе [4] Уже отмечалось, что в случае дихотомического выбора, если отдельные надежностей избирателей лучше, чем случайный, SMR дает оценке максимального правдоподобия «правильный» ответ. В дальнейшем, такие оценки максимального правдоподобия были вычислены в явном виде, данные надежностей избирателей [11 , 12]. Совсем недавно Conitzer и Sandholm [3] Показал, что некоторые методы голосования (ранжирование) агрегатная неявно Compute максимальной правдоподобии «правильный» ранжирование с помощью некоторой подразумеваемой, лежащей в основе модели компетентности избирателей. Наша задача отличается от всей этой ранней работы в том, что мы хотим использовать несколько голосов от избирателей к фи без обозначения даты максимального правдоподобия оценки из надежностей избирателей, которые затем могут быть использованы, так как по Ницану и Paroush [11] И Шепли и Grofman [12] Для нахождения максимального правдоподобия «правильного» ответа на каждый вопрос.

1 www.mturk.com/mturk ,

Процедура 2 Q

Позволять $N = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 3$, обозначает конечное множество избирателей, и пусть M Обозначим множество m различные бинарные вопросы, $m \geq 2$. Суждение избирателя $i \in N$ по вопросу $j \in M$ обозначается $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Символ обозначает всю матрицу суждений (a_{ij}). J столбец в матрице a, обозначается $_j$, это решение установить на вопрос k. Мы предполагаем, что каждая проблема имеет некоторый (неизвестный) «правильное» решение, обозначаемый $T_j \in \{0, 1\}$, и что каждый избиратель i связан с неизвестной вероятностью p_i от принятия правильного решения. Вектор индивидуальных вероятностей ($p_1, \ldots, p_n$) обозначается θ. Для простоты будем считать, что в отсутствие какой-либо информации, два возможных решения вопроса о равновероятны; то есть, для каждого J, априорная вероятность $p(T_j = 1) = 0{,}5$. (Ниже мы увидим, что релаксация этого предположения требует лишь незначительных корректировок нашего основного алгоритма). Мы также предполагаем, что вопросы являются независимым друг от друга, так что все результаты по множеству вопросов равновероятны. По этой причине мы не должны иметь дело с вопросами согласованности, которые возникают, когда вопросы логически зависит [10 , 7].

Правило агрегации суждения V представляет собой отображение из матрицы суждений $a = (_{ij})$ к набору бинарных решений в $\{0, 1\}^m$. Наша цель состоит в том, чтобы фи м правило оптимального агрегирования суждения, не дало никакой информации, кроме матрицы суждений a. Предложенная структура не предполагает, что индивидуальные навыки, $p_1, \ldots, p_n$, и правильное разрешение для каждого вопроса есть (экс-анте) известно; следовательно, можно задаться вопросом, в каком смысле метод решения может быть оптимальным. В принципе, учитывая $\theta = (p_i)$ и при условии, что для всех J, априорная вероятность

$p(T_j = 1) = 0{,}5$, можно явно записать вероятность наблюдаемой матрицы суждения a:

$$p(a; \theta) = \prod_j p(a_j; \theta) = \prod_j \left(p(T_j = 0)\, p(a_j \mid T_j = 0) + p(T_j = 1)\, p(a_j \mid T_j = 1) \right)$$

$$= \prod_j \left(\frac{1}{2} \prod_i (a_{ij} p_i + (1 - a_{ij})(1 - p_i)) + \frac{1}{2} \prod_i (p_i (1 - a_{ij}) + (1 - p_i) a_{ij}) \right) \quad (1)$$

Обратите внимание, что в этом вероятностном моделировании индивидуальных навыков $p_1, \ldots, p_N$ рассматриваются как (неизвестные) параметры и «правильные» резолюции { T_j} рассматриваются как скрытые двоичные случайные величины. Таким образом, учитывая некоторую матрицу суждений a, оптимальность получается по значениям θ которые максимизируют вероятность наблюдаемых данных $p(a; \theta)$. То есть, мы хотим фи Н.Д. оценку максимального правдоподобия θ:

$$\hat{\theta} = \text{Arg макс}_{\theta \in [0,1]^N} p(a; \theta) \quad (2)$$

Предлагаемый итеративный подход находки этого максимума основан на некоторой первоначальной оценке θ. Эти значения повторно используются для вычислений, по каждому вопросу J, вероятность того, что $T_j = 1$. Более того, когда все вероятности условных разрешений $p(T_j = 1 \mid a)$ приведены, один может вычислить для каждого принимающего решения i, более вероятное значение p_i, который мы называем p'_i.

Итерационная процедура является неполной до тех пор, $\theta = \theta'$, т.е. $p_i = p'_i$ по крайней мере, одно решение мейкера; такие $\theta = (p_i)$ Считается *противоречивы*. Несогласованность подразумевает суб-оптимальность, в том смысле, что θ не является оценка максимального правдоподобия. Процедура будет завершена, когда $\theta = \theta'$, т.е. для всех i, $p_i = p'_i$; на данном этапе равновесие навыков оценки получается. Давайте первая покажи как $p(T_j = 1 \mid a)$ Полученные в данный p_i (Список [9], Нитцан и Paroush [11] И Grofman др. [12]), И как обновленное значение p_i вычисляется, учитывая вероятностные значения истинности $p(T_j = 1 \mid a)$.

Лемма 1 *Принимая во внимание суждения $a = (a_{ij})$ и вероятности $\theta = (p_1, \ldots, p_n)$, условная «правильная» вероятность разрешения задаются следующим образом:*

$$p(t_j = 1 \mid a) = \frac{H}{H+1}, \text{ где } H = \prod_i \left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)^{(2a_{ij}-1)}$$

доказательство Напоминая, что априорная вероятность $p(t_j = 1) = 1/2$, правило Байеса следует, что:

$$p(t_j = 1 \mid a) = p(t_j = 1 \mid a_j) = \frac{p(a_j \mid t_j = 1)}{p(a_j \mid t_j = 0) + p(a_j \mid t_j = 1)} \quad (3)$$

где a_j это решение установить на вопрос j. Из нашего предположения о независимости, то отсюда следует, что

$$p(a_j \mid t_j = 1) = \prod_i (a_{ij} p_i + (1 - a_{ij})(1 - p_i))$$

$$p(a_j \mid t_j = 0) = \prod_i (p_i (1 - a_{ij}) + (1 - p_i) a_{ij})$$

Заметив, что $H = \frac{p(a_j \mid t_j = 1)}{p(a_j \mid t_j = 0)}$, мы получаем, что $p(t_j = 1 \mid a) = \frac{H}{1+H}$

В том случае, когда априорная вероятность $p(t_j = 1) = \alpha_j$ кроме 1/2, мы только должны изменить формулу. (3) следующее:

$$p(t_j = 1 \mid a_j) = \frac{\alpha_j p(a_j \mid t_j = 1)}{(1 - \alpha_j) p(a_j \mid t_j = 0) + \alpha_j p(a_j \mid t_j = 1)} = \frac{\alpha_j H}{(1 - \alpha_j) + \alpha_j H} \quad (4)$$

Теперь предположим, что правильные резолюции $\{t_j\}$ известны. Их можно сравнить с решениями индивидуального i, для того, чтобы вычислить значение максимального правдоподобия p_i:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{m} \left| \{ j \mid a_{ij} = t_j \} \right| \quad (5)$$

Предположим, что нам дано только стохастический информацию о наборе правильного разрешения $\{t_j\}$. Обозначим вероятность того, что $t_j = 1$ по w_{j1} и вероятность того, что $t_j = 0$ по w_{j0}. Тогда мы все еще можем применить Моди версию фи ред уравнения. (5):

$$p'_i = \frac{1}{m} E(\left| \{ j \mid a_{ij} = t_j \} \right|) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} p(a_{ij} = t_j) = \frac{1}{m} \sum_j (a_{ij} w_{j1} + (1 - a_{ij}) w_{j0}) \quad (6)$$

Наконец, мы определяем порядок пониженного, Q, для аппроксимирующего равновесия навыков оценки итерации два шагов, описанных выше:

1. Выберите некоторые начальные θ.
2. Для каждого $j = 1, \ldots, m$, вычисление $p(t_j = 1 \mid a; \theta)$ (вычисленной в лемме 1).
3. Пусть $w_{j0} = p(t_j = 0 \mid a_j; \theta)$ а также $w_{j1} = p(t_j = 1 \mid a_j; \theta)$. замещать $\theta = (p_i)$ с индуцированный θ знак равно p'_i с помощью уравнения. (6).
4. Повторите не до сходимости (окончание).

3 Аналитические результаты

Процедура Q является частным случаем алгоритма EM (Демпстер и др. [5]), Но с особыми свойствами не вытекает из общей теории. Таким образом, хотя наши доказательства следуют общим контурам Демпстер и др. [5], Мы докажем ниже теорем с нуля. Наши две основные теоремы заключаются в следующем:

Теорема 1 *Для любого голосования матрицы* $a \in \{0, 1\}$ *нм и любой первоначальный выбор* $\theta \in [0, 1]$ *п, Процедура Q сходится к равновесию навыков оценки* θ^* (*то есть, применяя Q итерационной процедуры на* θ^* *дает один и тот же вектор параметров* θ^*).

Теорема 2 *Для любого голосования матрицы* $a \in \{0, 1\}$ *нм и почти любой первоначальный выбор* $\theta \in [0, 1]$ *п,*
Процедура Q сходится к вектору вероятности θ^* *то есть локальный максимум функции вероятности p (a; θ).*

Доказательства двух теорем будут ссылаться на следующие три леммы:

Лемма A1 *Пусть поперечное энтропию два бинарных распределения р = (р* 0, *п* 1) *и д =*
(Q 0, *Q* 1) *быть CE (p, д) = -* *п* 0 журнал *Q* 0 - *п* 1 журнал *Q* 1. *Каждая пара бинарных распределений р и д удовлетворяет CE (p, п) ≤ CE (p, д) и равенство имеет место тогда и только тогда, когда р = кв.*

Доказательство леммы A1 *CE (p, п) - CE (p, д) = р* 0 журнал $\frac{Q_0}{п_0}$ + *п* 1 журнал $\frac{Q_1}{п_1}$ ≤ журнал(*п* 0 $\frac{Q_0}{п_0}$ + *П* 1 $\frac{Q_1}{п_1}$) = Журнал (1) = 0. Неравенство получается потому, что журнал является вогнутой функцией. Функция журнала, на самом деле, строго вогнута (вторая производная всегда отрицательна), следовательно, имеет место равенство, если и только если *р = кв.*

Лемма A2 *Вероятность того, функция р (а* $_J$*; θ) см. (* 1) *удовлетворяет:*

$$\text{журнал } p(a_J; \theta) = L_J(\theta, \theta_0) + CE(p(\tau \mid_J; \theta_0), p(\tau \mid_J; \theta)) \tag{7}$$

где

$$L_J(\theta, \theta_0) = \sum_{\tau = 0,1} p(\tau \mid_J; \theta_0) \text{ журнал } p(T, A_J; \theta)$$

а также θ_0 *может быть любым другим возможным значением параметра.*

Доказательство леммы A2 Принимая журнал *p (τ* $_J$, $_J$*; θ) = p (a* $_J$*; θ) p (τ* $_J$ *|* $_J$*; θ)* мы получаем:

$$\text{журнал } p(a_J; \theta) = \text{журнал } p(\tau_J, _J; \theta) - \text{журнал } p(\tau_J \mid _J; \theta) \tag{8}$$

Умножив каждый член в (8) по *p (τ* $_J$ *|* $_J$*;* θ_0) и суммируя по $T_J = 0, 1$, мы получим:

$$\text{журнал } p(a_J; \theta) = \sum_T p(\tau \mid_J; \theta_0) \text{ журнал } p(T, A_J; \theta) - \sum_T p(\tau \mid_J; \theta_0) \text{ журнал } p(\tau \mid_J; \theta) \tag{9}$$

$$\text{знак равно } L_J(\theta, \theta_0) + CE(p(\tau \mid_J; \theta_0), p(\tau \mid_J; \theta))$$

Лемма A3 *Эта процедура Q удовлетворяет р (а;* θ_{T+1}) ≥ *р (а;* θ_T) *где* θ_T *это значение θ*
Полученный в т-й итерации процедуры Q.

Доказательство леммы A3 Используя обозначения *L (θ,* θ_0) = $\sum_J L_J(\theta, \theta_0)$, Из леммы 2 следует, что для каждое значение параметра *θ:*

$$\text{журнал } p(a; \theta) = L(\theta, \theta_T) + \sum_J CE(p(\tau \mid_J; \theta_T), p(\tau \mid_J; \theta)) \tag{10}$$

$$\text{журнал } p(a; \theta_T) = L(\theta_T, \theta_T) + \sum_J CE(p(\tau \mid_J; \theta_T), p(\tau \mid_J; \theta_T)) \tag{11}$$

лемма A1 следует, что для каждого номера *J*

$$CE(p(\tau \mid_J; \theta_T), p(\tau \mid_J; \theta)) \geq CE(p(\tau \mid_J; \theta_T), p(\tau \mid_J; \theta_T))$$

Вычитая уравнение. (11) Из уравнения. (10) мы получаем:

$$журнал\ p\ (a;\ \theta) -журнал\ p\ (a;\ \theta_{T}) \geq L\ (\theta,\ \theta_{T}) - L\ (\theta_{T},\ \theta_{T})$$

Следовательно, чтобы доказать, что $p\ (a;\ \theta_{T+1}) \geq p\ (a;\ \theta_{T})$, достаточно показать, что $L\ (\theta_{T+1},\ \theta_{T}) \geq L\ (\theta_{T},\ \theta_{T})$.

Покажем, что θ_{T+1} = Argmax $_{\theta} L\ (\theta,\ \theta_{T})$. Обозначим $вес_{J0} = p\ (T = 0 \mid J;\ \theta_{T})$ а также $вес_{J1}$ =
$p\ (T = 0 \mid J;\ \theta_{T})$.

$$L\ (\theta,\ \theta_{T}) = \sum_{J} вес_{J1} \sum_{я} (a_{И.Я.}\ журнал\ п_{I} + (1 - a_{IJ})\ Журнал\ (1 - п_{я}))$$

$$+ \sum_{J} вес_{J0} \sum_{я} ((1 - a_{IJ})\ журнал\ п_{я} + a_{И.Я.}\ Журнал\ (1 - п_{я}))$$

$$знак\ равно \sum_{я} журнал\ п_{я} \bullet \bullet \sum_{J} (a_{И.Я.}\ вес_{J1} + (1 - a_{IJ})\ вес_{J0}) \bullet \bullet$$

$$+ Журнал\ (1 - п_{я}) \bullet \bullet \sum_{J} (a_{И.Я.}\ вес_{J0} + (1 - a_{IJ})\ вес_{J1}) \bullet \bullet \tag{12}$$

Используя обозначения $п'_{я} = \frac{1}{M} \sum_{J} (a_{И.Я.}\ вес_{J1} + (1 - a_{IJ})\ вес_{J0})$, мы получаем:

$$L\ (\theta,\ \theta_{T}) = - M \sum_{я} CE\ ((p'_{я},\ 1 - п'_{я}),\ (п_{я},\ 1 - п_{я})) \tag{13}$$

Уравнение (13) Означает, что мы можем максимально $L\ (\theta,\ \theta_{T})$ сепарабельнозначный для каждого $п_{я}$. лемма A1 следует, что для каждого избирателя $я$

$$п'_{я} = Arg\ макс_{п_{я} \in [0,1]} - CE\ ((p'_{я},\ 1 - п'_{я}),\ (п_{я},\ 1 - п_{я})) \tag{14}$$

и этот максимум является уникальным. Таким образом, единственный максимум $L\ (\theta,\ \theta_{T})$ получают при векторе параметров $\theta_{T+1} = (п'_{я})$ получается путем применения единой итерации процедуры Q на θ_{T}. Следовательно, θ_{T+1} = Argmax $L\ (\theta,\ \theta_{T})$ и поэтому $p\ (a;\ \theta_{T+1}) \geq p\ (a;\ \theta_{T})$.

Доказательство теоремы 1 лемма A3 утверждает, что последовательность $\{ p\ (a;\ \theta_{T}) \}$ ismonotonically растет. Кроме того, ограниченная последовательность, так как $\{ p\ (a;\ \theta) \}$ рассматривается как функция θ является полиномиальной функцией, определяемая на компакте $п$- мерное множество $[0,\ 1]^{п}$. Следовательно $p\ (a;\ \theta_{T})$ сходится к предельной точке $p\ (a;\ \theta^{*})$. Остается только показать, что процедура Q не колеблется между точками с той же вероятностью. Обозначим результат применения процедуры Q на θ^{*} по θ^{**}. Мы должны показать, что $\theta^{*} = \theta^{**}$. поскольку $p\ (a,\ \theta^{*})$ предельная точка, то отсюда следует, что $p\ (a;\ \theta^{*}) = p\ (a;\ \theta^{**})$. Из леммы A3 мы имеем, что, по определению процедуры Q, θ^{**} = Argmax $L\ (\theta,\ \theta^{*})$. Из доказательства леммы 3 следует, что максимум $_{\theta} L\ (\theta,\ \theta^{*})$ получается в одной точке. Следовательно, если $\theta^{*} = \theta^{**}$ тогда $L\ (\theta^{**},\ \theta^{*}) > L\ (\theta^{*},\ \theta^{*})$ и поэтому

$p\ (a;\ \theta^{**}) > p\ (a;\ \theta)$. Это, однако, противоречит нашему предположению, что $p\ (a,\ \theta^{*})$ является предельной точкой и, следовательно, $p\ (a;\ \theta^{*}) = p\ (a;\ \theta^{**})$. следовательно θ^{*} это уникальная максимальная точка $L\ (\theta,\ \theta^{*})$, т.е.
$\theta^{**} = \theta^{*}$.

Доказательство теоремы 2 Позволять θ^{*} является равновесной точкой процедуры Q. По лемме A2 мы получаем, что для каждого θ

$$журнал\ p\ (a;\ \theta) = L\ (\theta,\ \theta^{*}) + \sum_{J} CE\ (p\ (T \mid J;\ \theta^{*})),\ p\ (T \mid J;\ \theta)) \tag{15}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\text{журнал } p(a;\theta) = \frac{d}{d\theta}L(\theta,\theta^*) + \frac{d}{d\theta}\sum_J CE(p(\tau\,|\,J;\theta^*), p(\tau\,|\,J;\theta)) \tag{16}$$

Следует отметить, что до тех пор, θ^* падает во внутренней части пространства параметров $[0, 1]^N$ функции выше всех дифференцируемы. По теореме 1 , θ^* является фиксирована точкой процедуры Q, т.е. $\theta^* = \text{Argmax}_\theta L(\theta,\theta^*)$. следовательно

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L(\theta,\theta^*)\,|_{\theta=\theta^*} = 0 \tag{17}$$

лемма A1 означает, что $\theta^* = \text{argmin}_\theta \sum_J CE(p(\tau\,|\,J;\theta^*), p(\tau\,|\,J;\theta))$. таким образом

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left.\left(\sum_J CE(p(\tau\,|\,J;\theta^*), p(\tau\,|\,J;\theta))\right)\right|_{\theta=\theta^*} = 0 \tag{18}$$

Подставляя (15) а также (16) В (18) мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\text{журнал } p(a;\theta^*) = 0$$

Отсюда Q-процедура сходится к неподвижной точке $p(a;\theta)$. Стационарная точка является локальный максимум, локальный минимум или седловой точки. На самом деле, однако, можно показать, что, так как локальные минимумы и точка перевала не являются аттракторами, вероятность выбора начальной точки, что приводит к сходимости к локальному минимуму или к седловой точке равно 0.

В заключение этого раздела отметим, что в нашей ситуации два свойства, которые не вытекают из общей теории EM. Позволять θ_T быть значением θ полученное в t- й итерации процедуры Q. Теория EM [5] гарантирует, что последовательность правдоподобия $p(a;\theta_T)$ монотонно возрастает и, следовательно, если она ограничена, она обязательно сходится к некоторому пределу числа. Это именно то, что показано в лемме A3 , В нашем случае, однако, есть два дополнительных свойства, которые не необходимые бушует в общей теории EM. Во-первых, в общей теории EM, тот факт, что последовательность $\{\pi(\theta_T)\}$ сходится не гарантирует, что последовательность параметров $\{\theta_T\}$ сходится к предельной точке в области параметров. Это может случиться, что последовательность $\{\theta_T\}$ колеблется между различными точками, чьи Вероятности равны. Во-вторых, хотя EM сходится к предельной точке функции правдоподобия $p(a,\theta)$, нет теоретической гарантии, что это предельная точка действительно локальный максимум (см, например, В [13]). Сходимость последовательности θ_T (доказано в теореме 1) Следует в нашем случае из того факта, что этот шаг параметра повторной оценки (что соответствует M-шаг в EM) в каждой итерации применяются к кросс-энтропии, которая является строго вогнута (как функция второго аргумента) и Таким образом, имеет уникальную точку максимума. Доказательство (в теореме 2), Что этот предел точка локального максимума следует из того же факта. В общей теории ЭМ, нет никакой гарантии, выпуклостей на функции развернутой в M-шаге.

4 Эмпирические результаты

В то время как наш аналитический результат только показывает, что Q фи НСР локальный максимум, мы находим эмпирически, что на самом деле Q значительно лучше, чем это делает. На смоделированных примерах, где мы знаем истинное θ используется для получения данных для голосования, Q почти всегда сходится к некоторым θ^* то есть, по крайней мере так хорошо, как истинный θ, в том смысле, что $p(a;\theta^*) \geq p(a;\theta)$. Это наводит на мысль, что Q, как правило, сходится к некоторому значению, близкому к глобальному максимуму $p(a; \theta)$. Таким образом, основное требование для практических целей, которые дают матрицу голосов, правильный метод достижения коллективного решения в отношении каждого вопроса J состоит в назначении консенсуса суждение 1, если Q сходится к значению $p(T_J = 1 \mid a)$ больше (или равно) 1/2 и 0 в противном случае. (Конечно, в принципе, если в каком-то контексте мы рассматриваем 1 тип ошибку с различной степенью тяжести, чем 2 типа ошибок, мы можем использовать порог, отличный от 1/2 (Nitzan и Paroush [11] И Дитрих [6]).) Мы видим, что этот метод значительно превосходит SMR именно в том смысле, что более вероятно, чтобы прийти к правильному ответу на любой заданный вопрос.

4.1 Процедура моделирования

Мы используем следующую процедуру моделирования. Выберите значение N а также $м$, представляющее число избирателей, и ряд вопросов, соответственно. Назначает случайный двоичный правильный ответ T_J по каждому вопросу J и некоторый случайный уровень надежности $п_я$ каждый избиратель $я$ (с учетом одного состояния, как будет описано ниже). Для каждого $1 \le я \le N$ и каждый $1 \le J \le м$,
генерировать $a_{и.я.} \in \{0, 1\}$, голос избирателя $я$ по вопросу J, бросая монетку с вероятностью $п_я$ образовывать $T_к$. Задача состоит в том, чтобы установить T_J по каждому вопросу J, дается только матрица голосования a.

Нам нужно сделать одно предположение о значениях $\theta = (п_я)$. Обратите внимание, что для любого вектора $\theta^* = (п_я)$, есть двойной вектор, $\bar{\theta}^* = (1 - п_я)$, такой, что $p(a; \theta) = p(a; \bar{\theta})$. Таким образом, для каждого «разумного» решения, θ, есть счетчик-интуитивный один, $\bar{\theta}$. Для того, чтобы отличить между ними, мы отмечаем, что для более одного из них, $\Pi п_я > \Pi(1 - п_я)$, а именно, что если избиратели единодушны по какому-то вопросу, их голос правильно с вероятностью больше 1/2. Таким образом, чтобы нарушить симметрию между разумным решением и его сопряженным, мы предполагаем, что $\Pi п_я > \Pi(1 - п_я)$.

4.2 Пример простой

Теперь, чтобы проиллюстрировать нашу процедуру моделирования, мы первая прогон через одну игрушку examplewith $п =$ 5 и $м = 10$. Мы произвольно назначить правильный ответ 0 в первых трех вопросов, и от 1 до семи других вопросов, и присвоить значения соответствующего надежности {0.82, 0,61, 0,83, 0,60, 0,76} до пяти избирателей. Используя монету-бросание, как описано, мы получим матрицу, показанную на рис. 1 , Обратите внимание, что SMR будет возвращать неверные ответы на вопросы, 6 и 7. Применим теперь Q на матрицу в надежде реконструировать правильные ответы (которые, конечно же, неизвестные нам).

Как и во всех наших вычислениях ниже, мы инициализируем все $п_я$ до 0,9. (Другие начальные значения возвращают по существу те же самые общие результаты.) Мы выключили, когда $p(a; \theta_{T+1}) - p(a; \theta_T) <$ 0,0001. Столбцы слева от матрицы представляют уровни надежности для соответствующих избирателей в ходе последовательных итераций алгоритма, а строки ниже матриц представляют собой вероятности того, что правильный ответ на соответствующие вопросы, является 1 во время последовательных итераций алгоритма. В алгоритм сходится после шести итераций и, в отличие от SMR, достигает правильный ответ на каждый вопрос. Более того, $p(a, \theta)$ увеличивается после каждой итерации и значения, к которому она сходится (exp (- 20,2)), на самом деле гораздо большей, чем полученная от фактических значений надежности, используемых для генерирования голоса (exp (- 29,0)).

4.3 Моделирование результатов

Теперь мы систематически сравнивать производительность нашей algorithmQ этой задачи с этим стандартного алгоритма, а именно SMR. Для нашего первого эксперимента мы фи х числа избирателей в $п = 50$ и пусть число вопросов $м$ варьироваться. Для каждого значения $м$, мы проводим испытание 10000,

(p_i)						Votes									
.99	.94	.86	.82	.79	.9	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
.50	.53	.57	.63	.68	.9	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
.99	.94	.86	.82	.79	.9	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
.50	.55	.63	.67	.70	.9	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
.70	.75	.82	.86	.87	.9	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
						$\{p(t_j = 1 \cdot a)\}$									
						.01	.01	.10	.99	.99	.10	.10	.90	.99	.99
						.01	.01	.34	.99	.99	.31	.31	.96	.99	.99
						.01	.01	.29	.99	.99	.50	.50	.98	.99	.99
						.01	.01	.13	.99	.99	.80	.80	.99	.99	.99
						.01	.01	.01	.99	.99	.98	.98	.99	.99	.99
						.01	.01	.01	.99	.99	.99	.99	.99	.99	.99

рисунок 1 Amatrix голосов по пяти избирателей более десяти вопросов. Значения (*число Пи)* на соответствующих итераций приведены в *левые столбцы* прогрессируя от *справа налево.* Соответствующие значения *p (TJ =* 1 | *a)* показаны в bottomprogressing из *сверху вниз*

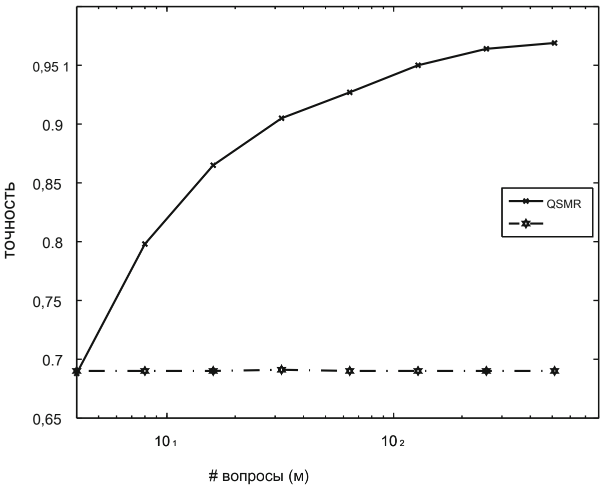


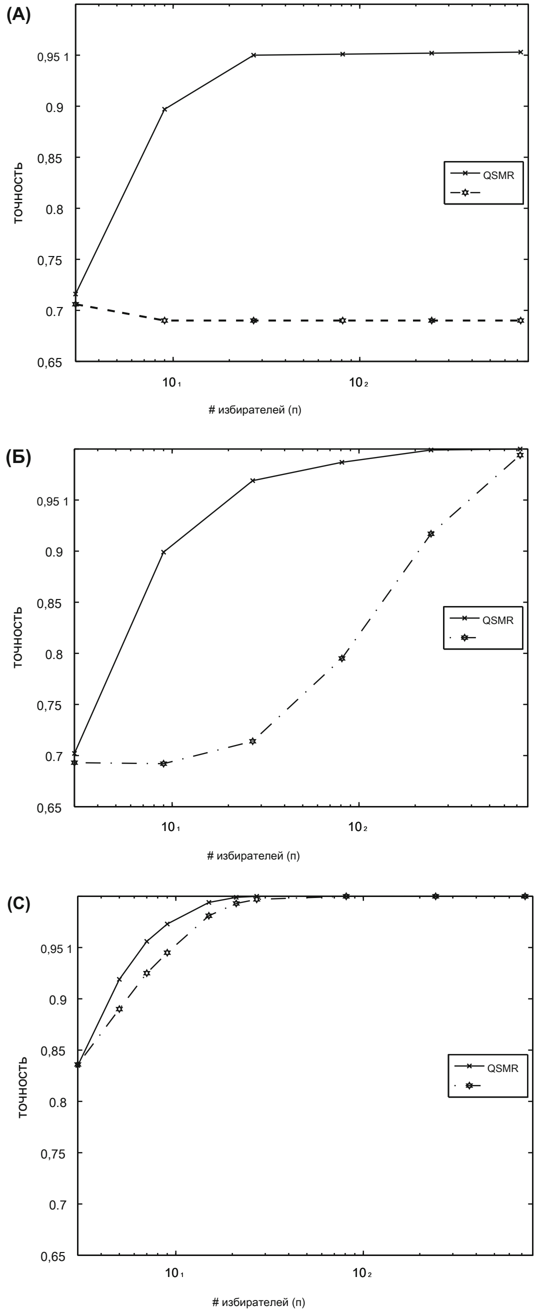
Рис. 2 Точность SMR и Q 50 избирателей и все большее число вопросов. Каждый DataPoint представляет 10000 испытаний в каждом из которых значений *число Пи* отбираются равномерно по теме диапазона [0,1] в единогласиях состояния

каждый из которых представляет новый рандомизированный выбор (*п я)* **а также {** *Т J}.* **Значения (** *п я)* **отбираются равномерно в диапазоне [0, 1], при условии единственного требование о том, П** *п я>* **П (1 -** *п я).*

Для каждого испытания, точность алгоритма доля *J* **для которых алгоритм правильно устанавливает значение** *Т к.* **Результаты показаны на рис. 2 , Как можно видеть, SMR остается стабильным на уровне точности 0,7 и не улучшается, как количество** вопросов увеличивается, так как он не узнает от одного вопроса к другому. С другой стороны, Q непрерывно возрастает почти идеальной точности, как количество вопросов увеличивается, так как большее количество вопросов, тем более точно мы можем оценить надежность избирателей.

Наш второй эксперимент действует в соответствии с теми же принципами, что и во-первых, за исключением числа **вопросов, проводится фиксированы на** *м =* **100 и число избирателей** *п* **меняется. Результаты показаны на рис. 3 а.** Примечательно, что мы находим то же явление в этом эксперименте, как и в предыдущем. SMR остается стабильным на уровне точности 0,7 и не улучшается, как количество

Рис. 3 Точность SMR и Q на 100 вопросов, и все большее число избирателей. Каждый DataPoint представляет 10000 испытаний в **каждом из которых значений** *число Пи* **отбираются равномерно в диапазоне: (а) [** 0,1], **(б) [** 0.1,1], **(с) [** 0.5,1]



избирателей увеличивается. С другой стороны, Q непрерывно возрастает точность 0,95 как число избирателей увеличивается.

Обратите внимание, что, когда коллективные навыки решения избирателей являются достаточными, Юрий Теорема Кондорса [4] Обеспечивает сходимость SMR к совершенным принятию решений, а число избирателей растет.

Однако, в этом эксперименте, наши предположения относительно коллективных навыков решения избирателей слишком слабы для этой теоремы в трюм (Berend и Paroush [2]). Таким образом, мы перезапустили наш второй эксперимент, на этот раз выборки значений (*п я)* равномерно в диапазоне [0.1,1], так что Юрий theoremwould трюме Кондорсе. Как можно видеть на фиг. 3 б, даже в этом случае, так как число избирателей растет, точность Q сходится к 1 гораздо быстрее, чем SMR. На рис. 3 с, мы показываем результаты для того же эксперимента со значениями (*п я)* образцы равномерно в диапазоне [0.5,1]. Как видно, в таких случаях SMR сходится быстро и преимущество Q уменьшается.

5. Выводы

Итак, мы рассмотрели сценарии, в которых выполняются следующие условия:

1. Избирательные записи доступны по целому ряду вопросов.
2. Для каждого избирателя, есть некоторые фиксированы (неизвестно) вероятность того, что что избиратель дает правильный ответ на любой заданный вопрос.
3. суждения избирателей не зависят друг от друга.
4. Избиратели коллективно, по крайней мере минимально компетентны в том смысле, что единогласие, скорее всего, правы, чем неправильно.

Конечно, некоторые из этих предположений весьма ограничительный характер, в частности, предположения независимости. Кроме того, наш метод применяется главным образом для голосования в отношении истинности суждений, а не голосование в отношении личных предпочтений, и предполагает, что компетентность избирателя является одинаковой для всех предложений. Тем не менее, такие сценарии являются довольно распространенным явлением, особенно в контексте постоянных комитетов экспертов и интернет-сайты агрегации суждения.

Мы обнаружили, что в таких случаях метод агрегирования суждения в рамках expectationmaximization гораздо больше шансов достичь правильных ответов, чем стандартный SMR. Этот результат имеет место независимо от числа избирателей, или количества вопросов, каждый проголосовал, но преимущество предлагаемого способа по сравнению SMR особенно заметен, когда запись трека отдельных избирателей суф фи ciently в изобилие и когда принятия решения навыки избирателей являются дост фи ciently гетерогенными ,

Наш подход тривиальный обобщенный к случаям, в которых запись голоса является неполной, так что у нас есть голоса каждого избирателя на некотором подмножестве всех вопросов. Распространенным примером такого сценария является судейство документов конференции; Q может быть использован для совокупных суждений судей таким образом, чтобы оптимально обесценивает судья, чьи суждения различных работ свидетельствуют о своеобразных взглядах. Кроме того, наши предварительные исследования показывают, метод легко обобщаются на случаи, в которых голос не являются двоичным, а скорее вещественными числами в диапазоне [0, 1]. В таких случаях, мы предполагаем другую порождающую модель, например, что шум каждого избирателя (усечен) нормальное распределение с неподвижным смещением и дисперсией.

Ссылки

1. Бен-Яшар, P., & Paroush, J. (2000). теорема жюри присяжных Неасимптотические Кондорсе. *Социальный выбор и Благосостояние, 17,* 189-199.
2. Беренда Д., & Paroush, J. (1998). Когда теорема жюри Кондорсе в силе. *Социальный выбор и Благосостояние, 15,* 481-488.
3. Conitzer, B., & Sandholm, T. (2005). Общие протоколы голосования, как максимум правдоподобия. В *Труды конференции по неопределенности искусственного интеллекта (UAI).*
4. де Кондорсе, NC (1785). Essai сюр l'приложение де l'проанализируем ля probabilité де rendues решений, а ля pluralité де Voix (стр. 27-32).

5. Демпстера, A., Laird, H., & Рубин, D. (1977). Максимальное правдоподобие из неполных данных с помощью алгоритма ЕМ. *Журнал Королевского статистического общества Услуги B, 39,* 1-38.
6. Dietrich, F. (2006). Общее представление эпистемический оптимальные процедуры. *Социальный выбор и Благосостояние, 26,* 263-283.
7. Dokow, E., & Хольцман, P. (2009). Агрегация бинарных оценок для истины-функциональных программ. *Социальное Выбор и социального обеспечения, 32,* 221-241.
8. Karotkin, D. (1996). Justi фи катион простого большинства и председатель правил. *Социальный выбор и Благосостояние, 13,* 479-486.
9. Список, C. (2004). О значении абсолютного края. *Британский журнал для философии Науки, 55 (* 3), 521-544.
10. Список C., и Петит, P. (2002). Агрегирование множества решений: результат невозможности. *Экономика и Философия, 18,* 89-110.
11. Нитцан, C., & Paroush, J. (1982). Оптимальные правила принятия решений в неопределенных дихотомических выбор ситуациях. *Международный экономический обзор, 23 (* 2), 289-297.
12. Шэпли, Л.С., & Grofman, B. (1984). Оптимизация групповой субъективной точности в присутствии взаимозависимостей. *Общественный выбор, 43,* 329-343.
13. В, CFJ (1983). О свойствах сходимости алгоритма ЕМ. *Летопись статистики, 11 (* 1), 95-103.