

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение.</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1. Теоретическая часть</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1. Аппроксимация дифференциального уравнения с использованием четырёхслойной неявной схемы . . . . .	5
1.2. Лагранжев базис для аппроксимации по времени . . . . .	6
<b>2. Исследования</b> . . . . .	<b>8</b>
2.1. Предварительное описание. . . . .	8
2.2. Тестирование на работоспособность . . . . .	9
2.3. Исследование на определение порядка аппроксимации . . . . .	9
2.4. Исследование на определение порядка сходимости по времени .	10
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>12</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>Приложение. Текст программы</b> . . . . .	<b>14</b>

# ВВЕДЕНИЕ

Мир, в котором мы живем, состоит из разнообразных регионов, каждый из которых имеет уникальный набор проблем и проблем. Эти региональные проблемы могут варьироваться от экологических проблем, таких как загрязнение и изменение климата, до социальных и экономических проблем, таких как бедность и безработица. Решение этих проблем имеет решающее значение для устойчивого развития и благополучия затронутых регионов и их жителей.

Одним из подходов, который привлек значительное внимание и оказался эффективным в решении региональных проблем, является использование конечных элементов. Анализ конечных элементов – это числовой метод, используемый для решения сложных инженерных и научных проблем путем разделения их на более мелкие, более управляемые элементы. Этот метод был широко принят в различных областях, включая гражданское строительство, машиностроение и физику. Тем не менее, его потенциал в решении региональных проблем был только недавно изучен.

Цель этой работы – углубить концепцию решения региональных задач с использованием конечных элементов. Мы рассмотрим основные принципы анализа конечных элементов и то, как он может быть применен для решения широкого спектра региональных задач. Понимая основы этого метода, мы можем получить представление о его применимости и потенциальных ограничениях в решении реальных проблем.

В этой работе мы начнем с предоставления обзора региональных проблем и их значения. Мы обсудим сложности и взаимозависимости, которые делают решение этих проблем. Далее мы представим концепцию анализа конечных

элементов и объясним ее основные принципы. Мы рассмотрим математические основы и вычислительные методы, связанные с этим методом.

# 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## 1.1. АППРОКСИМАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧЕТЫРЁХСЛОЙНОЙ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ

Рассмотрим аппроксимацию нашего уравнения в частных производных с использованием четырехслойной неявной схемы:

$$\sigma \frac{u^j - u^{j-1}}{\Delta t} - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(u^j)) = f^j, j = \overline{1, J}, \quad (1.1)$$

где:  $\Delta t = t^j - t^{j-1}$  - разница текущего и предыдущего временных слоёв,  $u^j$  - значение искомой функции на текущем слое,  $u^{j-1}$  - значение искомой функции на предыдущем слое,  $f^j$  - значение функции правой части на текущем слое [1].

В результате конечномерной аппроксимации краевой задачи 1.1 для каждого  $j = \overline{1, J}$  и получим матричное уравнение следующего вида:

$$\frac{1}{\Delta t} M q^j - \frac{1}{\Delta t} M q^{j-1} + G q^j = b^j \quad (1.2)$$

или

$$\left( \frac{1}{\Delta t} M + G \right) q^j = b^j + \frac{1}{\Delta t} M q^{j-1}, \quad (1.3)$$

где:  $M$  - матрица масс  $G$  - матрица жёсткости,  $b^j$  - значение вектора правой части, построенного по значениям функции, на текущем временном слое,  $q^j$  - решение на текущем временном слое,  $q^{j-1}$  - решение на предыдущем временном слое [2].

## 1.2. ЛАГРАНЖЕВ БАЗИС ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ПО ВРЕМЕНИ

Представим искомое решение  $u$  на интервале  $(t_{j-3}; t_j)$  в следующем виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^3 u^{j-i}(x, y) \eta_i^j(t). \quad (1.4)$$

Функции  $\eta_3^j(t)$ ,  $\eta_2^j(t)$ ,  $\eta_1^j(t)$ ,  $\eta_0^j(t)$  - базисные кубические полиномы Лагранжа [3], которые могут быть записаны в виде:

$$\eta_3^j(t) = \frac{(t - t_{j-2})(t - t_{j-1})(t - t_j)}{(t_{j-3} - t_{j-2})(t_{j-3} - t_{j-1})(t_{j-3} - t_j)}, \quad (1.5)$$

$$\eta_2^j(t) = \frac{(t - t_{j-3})(t - t_{j-1})(t - t_j)}{(t_{j-2} - t_{j-3})(t_{j-2} - t_{j-1})(t_{j-2} - t_j)}, \quad (1.6)$$

$$\eta_1^j(t) = \frac{(t - t_{j-3})(t - t_{j-2})(t - t_j)}{(t_{j-1} - t_{j-3})(t_{j-1} - t_{j-2})(t_{j-1} - t_j)}, \quad (1.7)$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{(t - t_{j-3})(t - t_{j-2})(t - t_{j-1})}{(t_j - t_{j-3})(t_j - t_{j-2})(t_j - t_{j-1})}, \quad (1.8)$$

Обозначим:  $\Delta t_{03} = t_j - t_{j-3}$ ,  $\Delta t_{02} = t_j - t_{j-2}$ ,  $\Delta t_{01} = t_j - t_{j-1}$ ,  $\Delta t_{12} = t_{j-1} - t_{j-2}$ ,  $\Delta t_{13} = t_{j-1} - t_{j-3}$ ,  $\Delta t_{23} = t_{j-2} - t_{j-3}$ . Получим первые производные по  $t$  при  $t = t_j$ . Далее учтем представление решения 1.4 для аппроксимации производной по времени параболического уравнения 1.1 на временном слое  $t = t_j$ :

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=0}^3 u^{j-i}(x, y) \eta_i^j \right) \right|_{t=t_{j-1}} - \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad}(u^{j-1})) = f^{j-1}. \quad (1.9)$$

Выполняя конечноэлементную аппроксимацию краевой задачи, получим СЛАУ вида:

$$\left( \left( \frac{1}{\Delta t_{03}} + \frac{1}{\Delta t_{02}} + \frac{1}{\Delta t_{01}} \right) M + G \right) q^j = b^j + \frac{\Delta t_{02} \Delta t_{01}}{\Delta t_{23} \Delta t_{13} \Delta t_{03}} M q^{j-3} - \frac{\Delta t_{02} \Delta t_{01}}{\Delta t_{23} \Delta t_{13} \Delta t_{03}} M q^{j-3} + \frac{\Delta t_{02} \Delta t_{01}}{\Delta t_{23} \Delta t_{13} \Delta t_{03}} M q^{j-3}, \quad (1.10)$$

где  $M$  - матрица масс,  $G$  - матрица жесткости,  $b^j$  - вектор правой части, построенный по значениям функции  $f$  на текущем временном слое,  $q^{j-1}$ ,  $q^{j-2}$ ,  $q^{j-3}$  - решения на трех предыдущих слоях по времени,  $q^j$  - решение на текущем временном слое [4].

## 2. ИССЛЕДОВАНИЯ

### 2.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ

Тестирование было проведено на одном конечном элементе, изображенном на рисунке 2.1:

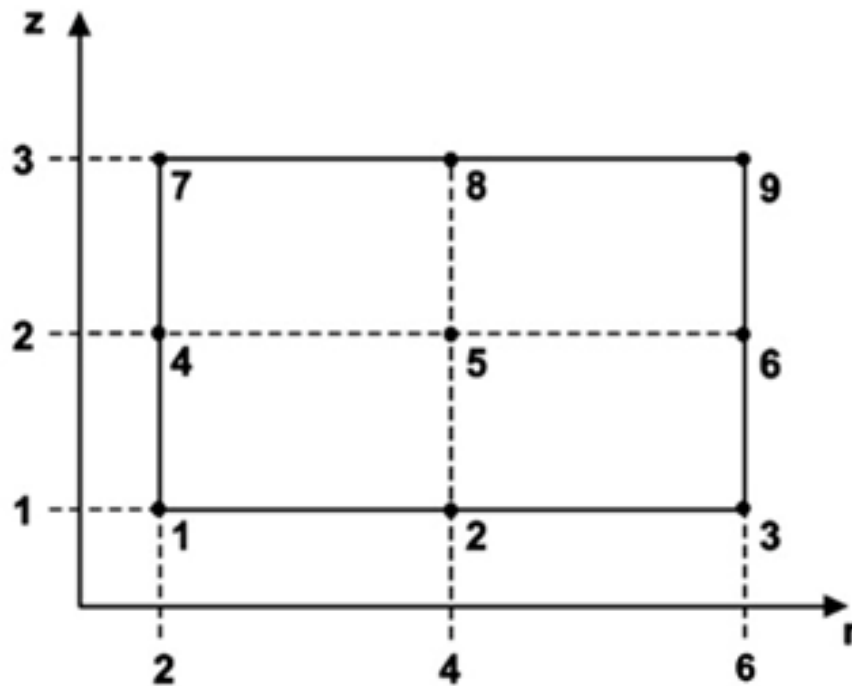


Рисунок 2.1 – Конечный элемент

На конечном элементе первые краевые условия заданы на все границы. Сетка по времени равномерная  $t \in [0; 1]$ ,  $h_t = 0, 1$ .

## 2.2. ТЕСТИРОВАНИЕ НА РАБОТОСПОСОБНОСТЬ

Таблица 2.1 – Тестирование при  $u = z + t$ ,  $\lambda = 1$ ,  $f = 1$ ,  $\sigma = 1$

$t_i$	Относительная погрешность
0	2
0.1	0
0.2	0
0.3	5.76889e-16
0.4	9.61481e-16
0.5	1.15378e-15
0.6	1.15378e-15
0.7	9.61481e-16
0.8	5.76889e-16
0.9	9.61481e-16
1.0	5.76889e-16

Исходя из приведенных результатов в таблице 2.1, делаем вывод, что программа работает верно.

## 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

Тестирование на определение порядка аппроксимации проведём на одном конечном элементе, изображенном на рисунке 2.1. Краевые условия на всех границах первого рода. Сетка по времени равномерная  $t \in [0; 1]$ ,  $h_t = 0, 1$ .



Таблица 2.2 – Тестирование при  $u = t^4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $f = 4t^3$ ,  $\sigma = 1$

$t_i$	Относительная погрешность
0	2
0.1	0
0.2	0
0.3	0.000488688
0.4	0.00112553
0.5	0.00163702
0.6	0.00195938
0.7	0.00213841
0.8	0.00313841
0.9	0.00113841
1.0	0.00513841

Исходя из приведенных результатов в таблице 2.2, делаем вывод, что порядок аппроксимации для четырехслойной неявной схемы равен 3.

## 2.4. ИССЛЕДОВАНИЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКА СХОДИМОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

Тестирование было проведено на одном конечном элементе, изображённом на рисунке 1. Первые краевые условия заданы на все границы. Сетка по времени равномерная  $t \in [0; 1]$ ,  $h_t = 0, 1$ .

Таблица 2.3 – Тестирование при  $u = t^4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $f = 4t^3$ ,  $\sigma = 1$

Шаг	Средняя погрешность	Порядок сходимости
$h$	0.001291498	-
$h/2$	0.000197091	2,71211
$h/4$	0.0000270421	2,86558
$h/8$	0.00000353646	2,93483
$h/16$	0.000000452009	2,96788

Исходя из полученных данных таблицы 2.3, делаем вывод, что порядок сходимости для четырехслойной неявной схемы по времени равен 3.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мир, в котором мы живем, состоит из разнообразных регионов, каждый из которых имеет уникальный набор проблем и проблем. Эти региональные проблемы могут варьироваться от экологических проблем, таких как загрязнение и изменение климата, до социальных и экономических проблем, таких как бедность и безработица. Решение этих проблем имеет решающее значение для устойчивого развития и благополучия затронутых регионов и их жителей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова Метод конечных элементов для скалярных и векторных задач Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007 — 896 с.
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики: Учеб.пособие. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский — 6-е изд., — М: Изд-во МГУ, 1999 — 799 с.
3. М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина Векторный метод конечных элементов: Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. — 69 с.
4. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат Методы теории функции комплексного переменного: Учеб. пособие. / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат — 6-е изд. — СПб.: Изд-во «Лань», 2002. — 688 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ. ТЕКСТ ПРОГРАММЫ.

```
1  #include <iostream>
2  #include <vector>
3  #include <stdio.h>
4  #include <fstream>
5  #include <algorithm>
6  #include <iomanip>
7
8  using namespace std;
9
10 // Координаты узлов (r,z)
11 vector<pair<double, double>> Cn;
12
13 // Материал
14 vector <pair<double, double>> mat;
15
16 // Элементы разбиения (нижняя, верхняя грани, номер материала)
17 vector<vector<int>> elems;
18
19 // Первое краевое условие (глобальный номер узла, значение функции)
20 vector <pair<int, double>> b1;
21
22 // Второе краевое условие (номер элемента, его локальная грань, значение)
23 vector<vector<double>> b2;
24
25 int Nn; // Число узлов
26 int Nel; // Число элементов
27 int Nt; // Число временных слоев
28
29 vector<int> ig;
30 vector<int> jg;
31
32 vector<double> ggl; // нижний треугольник матрицы слау
33
34 vector<double> ggu; // верхний треугольник матрицы слау
35
36 vector<double> di; // главная диагональ матрицы слау
```

```

37 vector<double> gggl; //нижний треугольник матрицы жесткости
38 vector<double> gggu; //верхний треугольник матрицы жесткости
39 vector<double> gdi; //главная диагональ матрицы жесткости
40 vector<double> sggl; //нижний треугольник матрицы масс первой производной
41 vector<double> sggu; //верхний треугольник матрицы масс первой производной
42 vector<double> sdi; //главная диагональ матрицы масс первой производной
43 vector<double> vec; //вектор правой части
44 vector<double> P; // Результат
45 vector<double> t; //вектор временных слоев
46 vector<double> P0; //вектор весов функции на первом слое
47 vector<double> P1; //вектор весов функции на втором слое
48 vector<double> P2; //вектор весов функции на третьем слое
49 vector<double> nu; //вектор коэффициентов для первой производной
50
51 double Function(double r, double z, double t) //функция правой части
52 {
53     return 1;
54 }
55 double Tetta(int n, double r, double z)
56 {
57     switch (n)
58     {
59         case 1:
60             return 1;
61         case 0:
62             return 0;
63         case -1:
64             return 1;
65         case -2:
66             return -2;
67     }
68 }
69
70 double Sigma(int n, double r, double z) //функция сигмы
71 {
72     switch (n)
73     {
74         case 0:
75             return 0;
76         case 1:

```

```

77         return 1;
78     case 2:
79         return r;
80     case 3:
81         return 3;
82     case 4:
83         return 4;
84     }
85 }
86 double U(int n, double r, double z, double t) //функция третьего краевого условия
87 {
88     switch (n)
89     {
90     case 0:
91         return 0;
92     case 1:
93         return t;
94     case 2:
95         return pow(t, 4);
96     case 3:
97         return 3;
98     case 4:
99         return 4;
100    }
101 }

```