СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАНИЕ

Разработка программы для моделирования трехмерного электромагнитного поля на шестигранниках с использованием векторного МКЭ.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. ВЕКТОРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Математическая модель, служащая для описания электромагнитного поля в средах с изменяющимся коэффициентом магнитной проницаемости и в ситуациях, когда нельзя пренебрегать влиянием токов смещения, выглядит следующим образом (1.1):

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\overrightarrow{\mathbf{A}}\right)+\sigma\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial t}+\epsilon\frac{\partial^2\overrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial t^2}=\overrightarrow{\mathbf{J}}^{\mathbf{ст}}. \tag{1.1}$$

Математическая модель электромагнитного поля на основе уравнения (1.1) позволяет решать самые сложные задачи электромагнетизма. Она корректно описывает электромагнитные поля в ситуациях, когда среда содержит любые неоднородности с измененными электрическими и магнитными свойствами.

При решении задач с использованием схемы разделения полей, для описания осесимметричной горизонтально-слоистой среды используется следующее уравнение (1.2):

$$-\frac{1}{\mu_0}\Delta A_\varphi+\frac{A_\varphi}{\mu_0 r^2}+\sigma\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}=J_\varphi. \tag{1.2}$$

В свою очередь, учёт от объектов, имеющих неоднородные значения удельной электропроводности, осуществляется за счёт математической модели, описываемой уравнением (1.3)

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{A}}^{+}\right)+\sigma\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{A}}^{+}}{\partial t}=\left(\sigma-\sigma_{\mathrm{n}}\right)\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\mathrm{n}}. \tag{1.3}$$

Для тестирования на правильность решения дифференциального уравнения (1.3) будем использовать уравнение (1.4), правая часть которого представляется в виде вектор-функции $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, а также будет иметь место быть слагаемое $\gamma\overrightarrow{\mathbf{A}}$ в левой части уравнения:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{A}}\right)+\gamma\overrightarrow{\mathbf{A}}+\sigma\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial t}=\overrightarrow{\mathbf{F}}. \tag{1.4}$$

1.2. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Будем считать, что на границе $S=S_1\cup S_2$ расчётной области Ω, в которой определено уравнение (1.4), заданы краевые условия двух типов:

$$\left.\left(\overrightarrow{\mathbf{A}}\times\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)\right|_{S_1}=\overrightarrow{\mathbf{A}}^{g}\times\overrightarrow{\mathbf{n}}, \tag{1.5}$$

$$\left.\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{A}}\times\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)\right|_{S_1}=\overrightarrow{\mathbf{H}}^{\Theta}\times\overrightarrow{\mathbf{n}}. \tag{1.6}$$

Тогда эквивалентная вариационная формулировка в форме Галёркина для уравнения (1.4) без производной по времени, и с учётом краевых условий (1.5) - (1.6) имеет вид:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\overrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\operatorname{rot}\overrightarrow{\Psi}\,d\Omega+\int\limits_{\Omega}\gamma\overrightarrow{\mathbf{A}}\cdot\overrightarrow{\Psi}\,d\Omega=\int\limits_{\Omega}\overrightarrow{\mathbf{F}}\cdot\overrightarrow{\Psi}\,d\Omega+\\+\int\limits_{S_2}\left(\overrightarrow{\mathbf{H}}^{\Theta}\times\overrightarrow{\mathbf{n}}\right)\cdot\overrightarrow{\Psi}\,dS\qquad\forall\overrightarrow{\Psi}\in H_0^{rot}.\end{gathered} \tag{1.7}$$

1.3. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

На шестиграннике базисные вектор-функции удобней строить с помощью шаблонного элемента. Обычно в качестве такого берут кубик $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ при использовании базиса лагранжева или иерархического типа.

Пусть у нас имеется произвольный шестигранник Ω_m с вершинами $(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)\,, i = 1...8$. Тогда отображение шаблонного кубика Ω^E в шестигранник Ω_m будет задаваться соотношениями:

$$x = \sum_{i=1}^{8} \hat{\varphi}_i(\xi,\eta,\zeta)\hat{x}_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{8} \hat{\varphi}_i(\xi,\eta,\zeta)\hat{y}_i, \qquad z = \sum_{i=1}^{8} \hat{\varphi}_i(\xi,\eta,\zeta)\hat{z}_i, \tag{1.8}$$

где $\hat{\varphi}_i(\xi,\eta,\zeta)$ - стандартные скалярные трилинейные базисные функции, определённые на шаблонном элементе Ω^E.

Отображение базисных вектор-функций $\hat{\varphi}_i(\xi,\eta,\zeta)$ шаблонного элемента Ω^E на шестигранник Ω_m можно определить следующим образом:

$$\hat{\psi}_i(x,y,z) = \mathbf{J}^{-1}\hat{\varphi}_i(\xi(x,y,z),\eta(x,y,z),\zeta(x,y,z)), \tag{1.9}$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

- функциональная матрица преобразования координат, переводящего кубик Ω^E в шестигранник Ω_m.

1.4. ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦ МАСС И ЖЁСТКОСТИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Матрица жёсткости:

$$\begin{gathered}\hat{\mathrm{G}}_{ij} = \int\limits_{\Omega_e} \frac{1}{\mu_0} \mathrm{rot}\hat{\psi}_i \cdot \mathrm{rot}\hat{\psi}_j d\Omega = \\ = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{|J|}\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{rot}\hat{\varphi}_i\right) \cdot \left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{rot}\hat{\varphi}_j\right) d\xi d\eta d\zeta\end{gathered} \tag{1.11}$$

Матрица масс:

$$\hat{\mathrm{M}}_{ij} = \int\limits_{\Omega_e} \gamma\hat{\psi}_i \cdot \hat{\psi}_j d\Omega = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \gamma\left(\mathbf{J}^{\text{-1}}\hat{\varphi}_i\right) \cdot \left(\mathbf{J}^{\text{-1}}\hat{\varphi}_j\right) |J|\, d\xi d\eta d\zeta \tag{1.12}$$

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. ГЕНЕРАЦИЯ ТРЁХМЕРНОЙ СЕТКИ С ЯЧЕЙКАМИ В ВИДЕ ШЕСТИГРАННИКОВ

При написании программы был использован следующий подход к построению сетки на шестигранных элементах.

```
1. [lines amount x] 2 [lines amount y] 2 [lines amount z] 2
2. [field description of points]
3. 0.0 0.0 0.0     1.0 0.0 0.0
4. 0.0 1.0 0.0     1.0 1.0 0.0
5. 0.0 0.0 1.0     1.0 0.0 1.0
6. 0.0 1.0 1.0     1.0 1.0 1.0
7. [unique areas amount] 1
8. [unique areas description]
9. 1 0 1 0 1 0 1
10. [unique areas coefficients description]
11. 1 1.0 1.0
12. [delimiters above X description] 1 1.0
13. [delimiters above Y description] 3 1.1
14. [delimiters above Z description] 4 0.8
15. [borders amount] 6
16. [borders description]
17. 1 1 0 1 0 0 0 1
18. 1 1 0 1 1 1 0 1
19. 1 1 0 0 0 1 0 1
20. 1 1 1 1 0 1 0 1
```

```
21. 1 1 0 1 0 1 0 0
22. 1 1 0 1 0 1 1 1
```

В первой строке заданы количество опорных узлов N_x^W, N_y^W, N_z^W, базовой плоскости по осям X, Y, Z соответственно. С третьей по шестую строки перечисленны тройки чисел $(x_i,\, y_i,\, z_i)$ - как раз и определяющие эти опорные узлы.

В седьмой строке указано количество уникальных областей в расчётной области, которые имеют определённые уникальные значения физических параметров μ и σ. Начиная с девятой строки (в общем случае должен быть построчный перечень каждой области) описывается геометрическое расположение i - ой области. В одиннадцатой строке указаны уникальные значения параметров μ и σ для i - ой области.

В строках с двенадцатой по четырнадцатую описывается количество и характер необходимых разбиений для осей X, Y, Z соответственно.

В пятнадцатой строке целочисленным значением задаётся количество границ. Далее с семнадцатой по двадцать вторую строки описывается расположение и характер этих границ. Первым числом задаётся тип краевого условия (т.е. принимает значения 1 или 2), вторым числом задаётся номер формулы, третьим первая координатная линия по оси X, четвёртым вторая координатная линия по оси X, пятым и шестым аналогично по оси Y и седьмым и восьмым по оси Z.

Пример расчётной области этой фигуры изображён на рисунке (2.1).

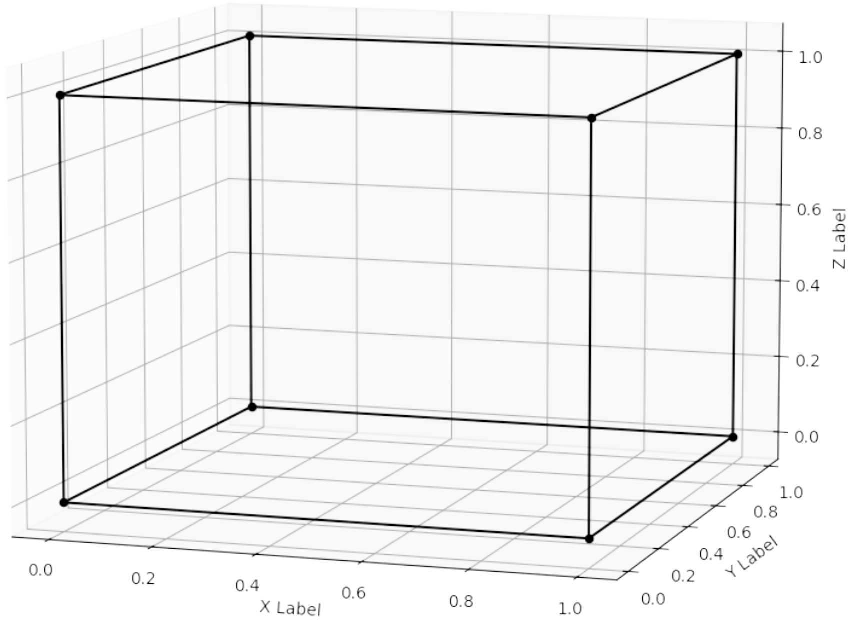


Рисунок 2.1 – Расчетная область для кубика

Попробуем подробить расчётную область (2.1) на несколько частей. Получим сетку изображённую на рисунке (2.2).

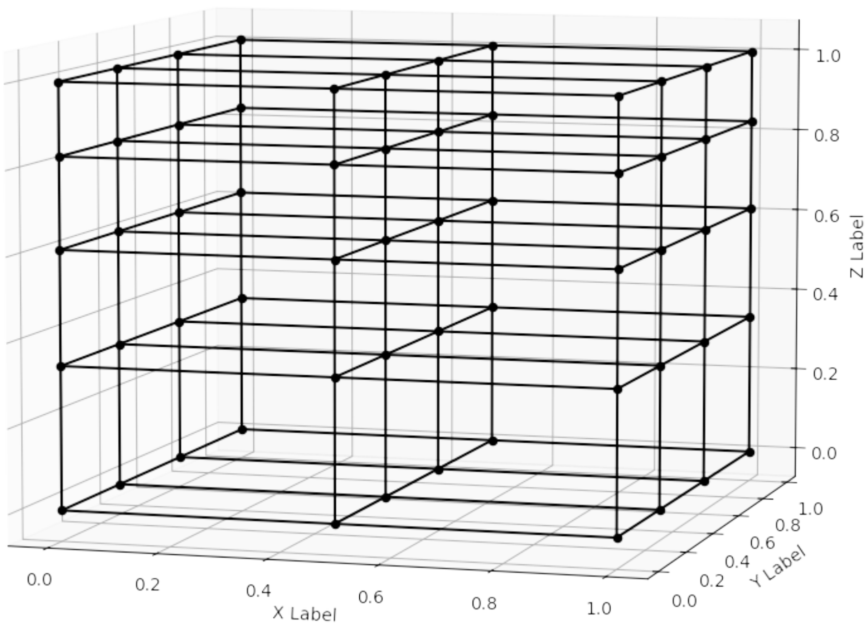
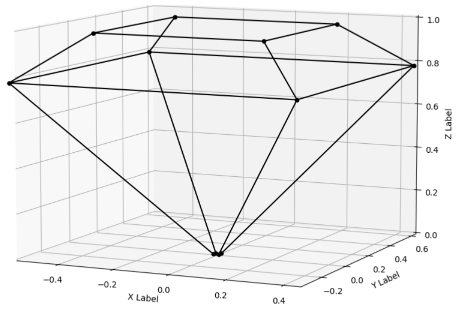
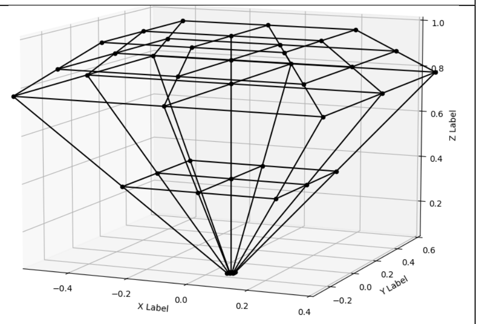


Рисунок 2.2 – Секта для кубика

Приведём ещё насколько примеров для построения сеток на шестигранниках, изображённых на рисунках в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Примеры сеток на шестигранниках

Фигура	Расчётная область	Сетка
Изумруд		
Скошенная пирамида		
Песочные часы		
Ванная		
Детализированный изумруд		
Случайная фигура		

2.2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.3. РЕШЕНИЕ СЛАУ

2.4. ТЕСТИРОВАНИЕ ТРЁХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯХ

Проведем сначала тестирование разработанной программы по векторному МКЭ на работоспособность. Образец расчетной области изображен на рисунке **??**. Это область $\Omega = [0.0, 3.0]_x \times [0.0, 3.0]_y \times [0.0, 3.0]_z$, она содержит 144 ребра, на всех границах будем задавать первые краевые условия.

Тестирование будем проводить дифференциального уравнения (2.1):

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\overrightarrow{\mathbf{A}}\right) + \gamma\overrightarrow{\mathbf{A}} + \sigma\frac{\partial\overrightarrow{\mathbf{A}}}{\partial t} = \overrightarrow{\mathbf{F}}. \quad (2.1)$$

В таблицах 2.2 – 2.10 приведено тестирование на работоспособность программы. Для искомых $\overrightarrow{\mathbf{A}}$ будем выводить значения функции в центрах рёбер сетки, отмеченных красным цветом на рисунке **??**.

Таблица 2.2 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (1.0, 1.0, 1.0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (1.0, 1.0, 1.0)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.3 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y, z, x)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y, z, x)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.4 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (1 + y + x; 1 + x + z; 1 + x + y)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (1 + y + x; 1 + x + z; 1 + x + y)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	3.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	3.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	3.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.5 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y - z; x - z; x - y)^{\mathrm{T}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y - x; x - z; x - y)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	2.35132600E-016	2.35132600E-016	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	-1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	-5.55111512E-016	-5.55111512E-016	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	-3.97378607E-016	-3.97378607E-016	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	-1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	-1.94289029E-016	-1.94289029E-016	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	-2.74847895E-016	-2.74847895E-016	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	-1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	4.27842044E-016	4.27842044E-016	0.00000000E+000

Таблица 2.6 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y \cdot z; x \cdot z; x \cdot y)^{\mathrm{T}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y \cdot z; x \cdot z; x \cdot y)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.7 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y^2; z^2; x^2)^{\mathrm{T}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y^2 - 2; z^2 - 2; x^2 - 2)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.8 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y^2 + z^2; x^2 + z^2; x^2 + y^2)^{\mathrm{T}}$,

$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y^2 + z^2 - 4; x^2 + z^2 - 4; x^2 + y^2 - 4)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	8.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	8.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	2.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	5.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	8.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.9 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y^3; 0; 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y^3 - 6y; 0; 0)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	8.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	8.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	0.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.10 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y^2 \cdot z^2; x^2 \cdot z^2; x^2 \cdot y^2)^{\mathrm{T}}$,
$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y^2 \cdot z^2 - 2(y^2 + z^2); x^2 \cdot z^2 - 2(x^2 + z^2); x^2 \cdot y^2 - 2(x^2 + y^2))^{\mathrm{T}}$,
$\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(x; 1.0; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 1.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 1.0; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(x; 2.0; 2.0)$	1.60000000E+001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 1.0)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 1.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; y; 2.0)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; y; 2.0)$	1.60000000E+001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 1.0; z)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 1.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.0; 2.0; z)$	4.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(2.0; 2.0; z)$	1.60000000E+001	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Проведём тестирование на порядок аппроксимации. Для оценки будем брать значения вектор-функции в центрах параллелепипедов. Сетка по пространству для данных тестов изображена на рисунке **??**.

В таблицах 2.11 – 2.12 представлены результаты тестирования для постоянной и линейной вектор-функциях.

Таблица 2.11 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (1.0; 1.0; 1.0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (1.0; 1.0; 1.0)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(0.5; 0.5; 0.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 0.5; 0.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(0.5; 1.5; 0.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 1.5; 0.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(0.5; 0.5; 1.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 0.5; 1.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(0.5; 1.5; 1.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 1.5; 1.5)$	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.00000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Таблица 2.12 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (y; z; x)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (y; z; x)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Ребро	Значение	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$(0.5; 0.5; 0.5)$	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 0.5; 0.5)$	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(0.5; 1.5; 0.5)$	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 1.5; 0.5)$	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(0.5; 0.5; 1.5)$	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 0.5; 1.5)$	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(0.5; 1.5; 1.5)$	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	5.00000000E-001	0.00000000E+000	0.00000000E+000
$(1.5; 1.5; 1.5)$	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000
	1.50000000E+000	0.00000000E+000	0.00000000E+000

Как и предполагали, при использовании билинейных вектор-функций точное решение находится вплоть до линейной вектор-функции без численной погрешности.

Проведём теперь тестирование на порядок сходимости на сетке изображённой на рисунке **??**. Для этого последовательно будем разбивать сетку в 2 раза сначала по оси x, потом по y и затем по z. Результаты тестирования приведены в таблицах 2.13 – 2.15.

Таблица 2.13 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (0; 0; e^x)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (0; 0; 0)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Шаг по оси x	Средняя погрешность	$\log_2\left(\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\right)$
h	4.1223218E-001	-
$^h/_2$	6.9015889E-002	2.57845668
$^h/_4$	1.4360912E-002	2.26478117
$^h/_8$	3.28952607E-003	2.1261957

Таблица 2.14 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (e^y; 0; 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (0; 0; 0)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Шаг по оси y	Средняя погрешность	$\log_2\left(\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\right)$
h	4.1223218E-001	-
$^h/_2$	6.9015889E-002	2.57845668
$^h/_4$	1.4360912E-002	2.26478117
$^h/_8$	3.28952607E-003	2.1261957

Таблица 2.15 – Тестирование при $\overrightarrow{\mathbf{A}} = (0; e^z; 0)^{\mathrm{T}}$, $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (0; 0; 0)^{\mathrm{T}}$, $\mu = 1$, $\gamma = 1$, $\sigma = 0$

Шаг по оси z	Средняя погрешность	$\log_2\left(\frac{\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\right)$
h	4.1223218E-001	-
$^h/_2$	6.9015889E-002	2.57845668
$^h/_4$	1.4360912E-002	2.26478117
$^h/_8$	3.28952607E-003	2.1261957

Во всех трёх случая порядок сходимости стремится к 2. Исходя из полученных данных, можно сказать, что программа верно находит численное решение эллиптической задачи.

3. ИССЛЕДОВАНИЯ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе была разработанная программа для расчёта электромагнитного поля в трёхмерном пространстве.

Для проверки корректности работы программы была проведена ее верификация на полиномиальных функциях и вектор-функциях. В процессе тестирования осесимметричной задачи было получено, что на полиномах первой степени задача решается без погрешности, однако начиная с полинома второй степени появлялась погрешность, которая уменьшалась при дроблении сетки. Был рассчитан порядок сходимости метода решения, который, как и предполагалось, оказался равен порядку сходимости билинейных базисных функций. В процессе тестирования трёхмерных задач векторным методом конечных элементов результат оказался аналогичный результату осесимметричной задачи.

Было проведено исследование на поведение электромагнитного поля, при добавлении аномалий в разные места горизонтально-слоистой среды многоэтапной схемой разделения полей. По итогам исследования была проведена оценка поведения поля при различном использовании схемы разделения. Порядок добавления аномалий в область не дал никакого влияния, т.е. порядок добавления объектов не имеет разницы при разделении полей. Также было выяснено, что при достаточно близком расположении аномальных объектов друг к другу может возникать явление взаимоиндукции двух тел. Соответственно, при использовании многоэтапной схемы разделения полей не рекомендуется пренебрегать учётом влияния других аномальных тел, расположенных на достаточно близком друг к другу расстоянии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. М.С. Жданов Электроразведка. - М.: Недра, 1986. - 316 с.

2. А.А. Логачев, В.П. Захаров Магниторазведка. - 5 изд. - Ленинград: Недра, 1979. - 350 с.

3. Pavel Solin Partial Differential Equations and the Finite Element Method. - Hoboken, New Jersey: A JOHN WILEY & SONS, INC., 2006.

4. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский Уравнения математической физики: Учеб.пособие. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский — 6-е изд., — М: Изд-во МГУ, 1999 — 799 с.

5. М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, М.Г. Токарева, М.В. Абрамов 3D-моделирование процессов индукционной вызванной поляризации при возбуждении токовой петлей и проблема эквивалентности // Научный вестник НГТУ. - 2013. - №2(51). - С. 53 - 61.

6. М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Г. М. Тригубович, М. В. Абрамов, А. А. Заборцева О вычислении трёхмерного нестационарного поля вертикальной электрической линии в удалённой обсаженной скважине // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2007. - №3(31). - С. 114 - 127.

7. Ю.Г. Соловейчик, М.Э. Рояк, М.Г. Персова Метод конечных элементов для скалярных и векторных задач Учеб. пособие. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007 — 896 с.

8. М.Ю.Баландин, Э.П.Шурина Векторный метод конечных элементов: Учеб. пособие. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001 — 69 с.

9. М.Ю.Баландин, Э.П.Шурина Методы решения СЛАУ большой размерности: Учеб. пособие. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000 — 70 с.

10. М.Г. Персова, Ю.Г. Соловейчик, Д.В. Вагин, П.А. Домников, Ю.И. Кошкина Численные методы в уравнениях математической физики. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016 — 60 с.

11. Вагин Денис Владимирович Разработка методов конечноэлементного моделирования трехмерных электромагнитных полей на неструктурированных сетках: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.18. - Новосибирск, 2012.

12. Тракимус Юрий Викторович Разработка и применение схем конечноэлементного моделирования электромагнитных полей в задачах электроразведки с использованием скважин: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.18. - Новосибирск, 2007.

13. П.А. Домников Решение систем конечноэлементных уравнений при моделировании гармонических геоэлектромагнитных полей в трехмерных задачах морской электроразведки // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. - 2013. - №1 (20).

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТЕКСТ ПРОГРАММЫ

Program.cs

```csharp
using Project;
using System.Globalization;
using Solver;
using Processor;
using Grid;
using static Grid.MeshReader;
using static Grid.MeshGenerator;
using static Manager.FolderManager;
using DataStructs;

CultureInfo.CurrentCulture = CultureInfo.InvariantCulture;

string InputDirectory = Path.GetFullPath("../../../../Data/Input/");
string SubtotalsDirectory = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/");
string OutputDirectory = Path.GetFullPath("..\\..\\..\\..\\Data\\Output\\");
string PicturesDirectory = Path.GetFullPath("../../../../Drawer/Pictures/");
bool isSolving2DimTask = Checker(OutputDirectory);

// Pre-processor. Clearing output folders.
if (isSolving2DimTask)
    ClearFolders(new List<string> {SubtotalsDirectory + "/2_dim/",
                                   PicturesDirectory + "/E_phi/",
                                   PicturesDirectory + "/A_phi/",
                                   OutputDirectory});

// Reading mesh.
ReadMesh(InputDirectory + "WholeMesh.txt");
ReadTimeMesh(InputDirectory + "Time.txt");

// Set recivers
List<Point3D> recivers = [new(681.9, -681.9, 0.0), new(1331.4, -1331.4, 0.0),
                          new(1980.8, -1980.8, 0.0), new(2630.3, -2630.3, 0.0)];

Mesh3Dim mesh3D = new(NodesX, InfoAboutX, NodesY, InfoAboutY,
                      NodesZ, InfoAboutZ, Elems, Borders);
Mesh2Dim mesh2D = new(NodesR, InfoAboutR, NodesZ, InfoAboutZ,
                      Elems, Math.Sqrt(Math.Pow(mesh3D.nodesX[^1], 2) +
                      ↪ Math.Pow(mesh3D.nodesY[^1], 2)));
mesh2D.SetBorders(mesh3D.borders);
var timeMesh = GenerateTimeMesh(Time.Item1, Time.Item2, tn, tk);

// Main process of 2-dim task.
ConstructMesh(ref mesh2D);
FEM2D myFEM2D = new(mesh2D, timeMesh);
if (isSolving2DimTask)
{
    myFEM2D.SetSolver(new LU_LOS());
    myFEM2D.Solve();
    myFEM2D.GenerateVectorEphi();
    myFEM2D.WriteData(OutputDirectory);
    myFEM2D.WritePointsToDraw(OutputDirectory + "ToDraw\\2_dim\\Aphi\\",
                              OutputDirectory + "ToDraw\\2_dim\\Ephi\\");
    myFEM2D.MeasureValuesOnReceivers(recivers, OutputDirectory +
    ↪ "ToDraw\\2_dim\\Receivers\\");
}
else
{
    myFEM2D.ReadAnswer(OutputDirectory);
    Console.WriteLine("2D answer read");
}
myFEM2D.MeasureValuesOnReceivers(recivers, OutputDirectory +
↪ "ToDraw\\2_dim\\Receivers\\");
ConstructMesh(ref mesh3D);
Console.WriteLine("3D mesh constructed");
```

```
FEM3D myFEM3D = new(mesh3D, timeMesh);
myFEM3D.ConvertResultTo3Dim(myFEM2D);
myFEM3D.GenerateVectorB();
Console.WriteLine("2D answer converted to 3D");

// Solving first layer: groundwater.
ReadAnomaly(InputDirectory + "Anomalies\\Anomaly1.txt");
Console.WriteLine("Anomaly read");

Mesh3Dim mesh3D_a1 = new(NodesX, InfoAboutX, NodesY, InfoAboutY,
                         NodesZ, InfoAboutZ, Elems, Borders);
mesh3D_a1.CommitAnomalyBorders(FieldBorders);
ConstructMeshAnomaly(ref mesh3D_a1, SubtotalsDirectory + "3_dim\\Anomaly0\\");
Console.WriteLine("Anomaly mesh built");
FEM3D fem3D_a1 = new(mesh3D_a1, timeMesh, myFEM3D, 0);
fem3D_a1.SetSolver(new LU_LOS(15_000, 1e-15));
Console.WriteLine("Solving begun");
fem3D_a1.Solve();
fem3D_a1.WriteData(OutputDirectory + $"A_phi\\Answer3D\\AfterField1\\");
Console.WriteLine("Solved");
fem3D_a1.GenerateVectorE();
Console.WriteLine("E generated");
myFEM3D.AddSolution(fem3D_a1);
myFEM3D.MeasureValuesOnReceivers(recivers, OutputDirectory +
↪  "ToDraw\\3_dim\\Receivers\\");

// Solving second layer: groundwater.
ReadAnomaly(InputDirectory + "Anomalies\\Anomaly2.txt");
Console.WriteLine("Anomaly read");
Mesh3Dim mesh3D_a2 = new(NodesX, InfoAboutX, NodesY, InfoAboutY,
                         NodesZ, InfoAboutZ, Elems, Borders);
mesh3D_a2.CommitAnomalyBorders(FieldBorders);
ConstructMeshAnomaly(ref mesh3D_a2, SubtotalsDirectory + "3_dim\\Anomaly1\\");
Console.WriteLine("Anomaly mesh built");
FEM3D fem3D_a2 = new(mesh3D_a2, timeMesh, myFEM3D, 1);
fem3D_a2.SetSolver(new LU_LOS(15_000, 1e-15));
Console.WriteLine("Solving begun");
fem3D_a2.Solve();
fem3D_a2.WriteData(OutputDirectory + $"A_phi\\Answer3D\\AfterField2\\");
Console.WriteLine("Solved");
fem3D_a2.GenerateVectorE();
Console.WriteLine("E generated");
myFEM3D.AddSolution(fem3D_a2);
myFEM3D.WriteDrawingForSecond(OutputDirectory + "ToDraw\\3_dim\\");
myFEM3D.MeasureValuesOnReceivers(recivers, OutputDirectory +
↪  "ToDraw\\3_dim\\Receivers\\");
Console.WriteLine($"{e}");

// Solving both anomalies.
ReadBothAnomalies(InputDirectory + "Anomalies\\AnomalyBoth.txt");
Console.WriteLine("Anomalies read");
Mesh3Dim mesh3D_ab = new(NodesX, InfoAboutX, NodesY, InfoAboutY,
                         NodesZ, InfoAboutZ, Elems, Borders);
mesh3D_ab.CommitAnomalyBorders(FieldBorders);
mesh3D_ab.CommitSecondAnomalyBorders(FieldBorders1);
ConstructMeshAnomaly(ref mesh3D_ab, SubtotalsDirectory + "3_dim\\Anomaly2\\");
Console.WriteLine("Anomalies mesh built");
FEM3D fem3D_ab = new(mesh3D_ab, timeMesh, myFEM3D, 2);
fem3D_ab.SetSolver(new LU_LOS(15_000, 1e-15));
Console.WriteLine("Solving begun");
fem3D_ab.Solve();
fem3D_ab.WriteData(OutputDirectory + $"A_phi\\Answer3D\\AfterFieldBoth\\");
Console.WriteLine("Solved");
fem3D_ab.GenerateVectorE();
Console.WriteLine("E generated");
myFEM3D.AddSolution(fem3D_ab);
myFEM3D.WriteDataToDraw2DimSolution(OutputDirectory + "ToDraw\\3_dim\\");
myFEM3D.MeasureValuesOnReceivers(recivers, OutputDirectory +
↪  "ToDraw\\3_dim\\Receivers\\");
return 0;

static bool Checker(string Answer)
{
    if (CountFilesAmount(Answer + "A_phi/Answer/") == CountFilesAmount(Answer +
    ↪  "E_phi/Answer/"))
```

```
        while (true)
        {
            string? ans;
            Console.WriteLine("Detected answer for 2-dim task. Would you like to solve 2-dim task again? [Y/n]");
            ans = Console.ReadLine()?.ToLower();
            if (ans == "y" || ans == "yes" || ans == "да" || ans == "д")
                return true;
            else if (ans == "n" || ans == "no" || ans == "нет" || ans == "н")
                return false;
            Console.WriteLine("Unexpected answer!");
        }
    return true;
}
```

LocalMatrix.cs

```
using DataStructs;
using static Functions.BasisFunctions2D;
using Solution;

namespace MathObjects;


public class LocalMatrix : Matrix
{
    private TypeOfMatrixM _typeOfMatrixM;
    private readonly double _lambda;
    private readonly double _gamma;
    private readonly double _rk;
    private readonly double _hr;
    private readonly double _hz;

    public override double this[int i, int j]
    {
        get
        {
            if (i > 3 || j > 3) throw new IndexOutOfRangeException("Local matrix error.");
            return _typeOfMatrixM switch
            {
                TypeOfMatrixM.Mr =>  _gamma * (_Mr[i % 2, j % 2] * _Mz[i / 2, j / 2]),
                TypeOfMatrixM.Mrr => _lambda * (_Gr[i % 2, j % 2] * _Mz[i / 2, j / 2] + _Mr[i % 2, j % 2] * _Gz[i / 2, j / 2]) +
                                     _lambda * (_Mrr[i % 2, j % 2] * _Mz[i / 2, j / 2]),
                _ => throw new Exception("Unexpected matrix"),
            };
        }
        set{}
    }

    private readonly double[,] _G =  {{ 1.0, -1.0},
                                      {-1.0,  1.0}};
    private readonly double[,] _Mz = {{2.0, 1.0},
                                      {1.0, 2.0}};
    private readonly double[,] _Mr1;
    private readonly double[,] _M1r = {{2.0, 1.0},
                                       {1.0, 2.0}};
    private readonly double[,] _M2r = {{1.0, 1.0},
                                       {1.0, 3.0}};
    private readonly double[,] _Mr2 = {{-3.0D, 1.0D},
                                       { 1.0D, 1.0D}};
    private readonly double[,] _Gr = new double[2, 2];
    private readonly double[,] _Mr = new double[2, 2];
    private readonly double[,] _Gz = new double[2, 2];
    private readonly double[,] _Mrr = new double[2, 2];
    double[,] matr = new double[4, 4];

    public LocalMatrix(double lambda, double rk, double hz, double hr)
    {
        _rk = rk;
        _hr = hr;
        _hz = hz;
        double _d = _rk / _hr;
```

```
        _lambda = lambda;
        _gamma = _lambda;
        _Mr1 = new double[2,2] {{ (1 + _d) * (1 + _d), -1.0 * _d * (1 + _d)},
                                {-1.0 * _d * (1 + _d),               _d * _d}};
        _typeOfMatrixM = TypeOfMatrixM.Mrr;
        for (int i = 0; i < 2; i++)
        {
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                _Gr[i, j] = ((_rk + _hr / 2.0D) / _hr) * _G[i, j];
                _Mr[i, j] = (_hr / 6.0D) * (_rk * _M1r[i, j] + (_hr / 2.0D) * _M2r[i, j]);
                _Mrr[i, j] = Math.Log(1.0D + 1.0D / _d) * _Mr1[i, j] - _d * _G[i, j] + 0.5 * _Mr2[i, j];
                _Gz[i, j] = _G[i, j] / _hz;
                _Mz[i, j] = (_hz / 6.0D) * _Mz[i, j];
            }
        }
    }

    public LocalMatrix(List<int> elem, ArrayOfPoints2D arrPt, TypeOfMatrixM typeOfMatrixM, double lambda = 0.0D, double gamma = 0.0D)
    {
        _typeOfMatrixM = typeOfMatrixM;
        _rk = arrPt[elem[0]].R;
        _hr = arrPt[elem[1]].R - arrPt[elem[0]].R;
        _hz = arrPt[elem[2]].Z - arrPt[elem[0]].Z;
        double _d = _rk / _hr;
        _lambda = 1.0D / lambda;
        _gamma = gamma;
        _Mr1 = new double[2,2] {{ (1 + _d) * (1 + _d), -1.0 * _d * (1 + _d)},
                                {-1.0 * _d * (1 + _d),               _d * _d}};

        for (int i = 0; i < 2; i++)
        {
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                _Gr[i, j] = ((_rk + _hr / 2.0D) / _hr) * _G[i, j];
                _Mr[i, j] = (_hr / 6.0D) * (_rk * _M1r[i, j] + (_hr / 2.0D) * _M2r[i, j]);
                _Mrr[i, j] = Math.Log(1.0D + 1.0D / _d) * _Mr1[i, j] - _d * _G[i, j] + 0.5 * _Mr2[i, j];
                _Gz[i, j] = _G[i, j] / _hz;
                _Mz[i, j] = (_hz / 6.0D) * _Mz[i, j];
            }
        }
    }
}
```

LocalVector.cs

```
using System.Drawing;
using DataStructs;
using Functions;

namespace MathObjects;

public class LocalVector : Vector
{

    private readonly double _r0;
    private readonly double _r1;
    private readonly double _z0;
    private readonly double _z1;
    private readonly double _hr;
    private readonly double _hz;
    private readonly double _t;
    public override int Size => 4;

    private readonly double[,] _M2R = {{1.0D, 1.0D},
                                       {1.0D, 3.0D}};
    private readonly double[,] _Mz = {{2.0D, 1.0D},
                                      {1.0D, 2.0D}};
    private readonly double[,] _M1R = {{2.0D, 1.0D},
                                       {1.0D, 2.0D}};
```

```
    public override double this[int i] => i switch
    {
        0 => _Mr[0, 0] * _Mz[0, 0] * Function.F(_r0, _z0, _t) +
             _Mr[0, 1] * _Mz[0, 0] * Function.F(_r1, _z0, _t) +
             _Mr[0, 0] * _Mz[0, 1] * Function.F(_r0, _z1, _t) +
             _Mr[0, 1] * _Mz[0, 1] * Function.F(_r1, _z1, _t),

        1 => _Mr[1, 0] * _Mz[0, 0] * Function.F(_r0, _z0, _t) +
             _Mr[1, 1] * _Mz[0, 0] * Function.F(_r1, _z0, _t) +
             _Mr[1, 0] * _Mz[0, 1] * Function.F(_r0, _z1, _t) +
             _Mr[1, 1] * _Mz[0, 1] * Function.F(_r1, _z1, _t),

        2 => _Mr[0, 0] * _Mz[1, 0] * Function.F(_r0, _z0, _t) +
             _Mr[0, 1] * _Mz[1, 0] * Function.F(_r1, _z0, _t) +
             _Mr[0, 0] * _Mz[1, 1] * Function.F(_r0, _z1, _t) +
             _Mr[0, 1] * _Mz[1, 1] * Function.F(_r1, _z1, _t),

        3 => _Mr[1, 0] * _Mz[1, 0] * Function.F(_r0, _z0, _t) +
             _Mr[1, 1] * _Mz[1, 0] * Function.F(_r1, _z0, _t) +
             _Mr[1, 0] * _Mz[1, 1] * Function.F(_r0, _z1, _t) +
             _Mr[1, 1] * _Mz[1, 1] * Function.F(_r1, _z1, _t),

        _ => throw new IndexOutOfRangeException("Vector out of index"),
    };

    private double[,] _Mr = new double[2, 2];

    public LocalVector(List<int> elem, ArrayOfPoints2D arrPt, double t)
    {
        _r0 = arrPt[elem[0]].R;
        _r1 = arrPt[elem[1]].R;
        _t = t;

        _z0 = arrPt[elem[0]].Z;
        _z1 = arrPt[elem[2]].Z;
        _hr = _r1 - _r0;
        _hz = _z1 - _z0;

        for (int i = 0; i < 2; i++)
        {
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                _Mr[i, j] = (_hr / 6.0) * (_r0 * _M1R[i, j] + (_hr / 2.0) * _M2R[i, j]);
                _Mz[i, j] = (_hz / 6.0) * _Mz[i, j];
            }
        }
    }

    private void WriteVector()
    {
        for (int i = 0; i < 4; i++)
            Console.WriteLine($"{this[i]:E5}");
    }

    public LocalVector(double r0, double r1, double z0, double z1)
    {
        _r0 = r0;
        _r1 = r1;
        _z0 = z0;
        _z1 = z1;
        _hr = _r1 - _r0;
        _hz = _z1 - _z0;
    }
}
```

FEM.cs

```
namespace Project;
using System.Collections.Immutable;
using System.Numerics;
using MathObjects;
using Solver;
```

```
using Grid;
using DataStructs;
using System.Diagnostics;
using Functions;
using System.ComponentModel.DataAnnotations;
using System.Timers;

public enum EquationType
{
    Elliptic,
    Parabolic
}

public abstract class FEM(TimeMesh time)
{
    protected static string _3dValuesPath = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/3_dim/");
    protected static string _elemspath2D = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/2_dim/Elems.poly");
    protected static string _pointspath2D = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/2_dim/Points.poly");
    protected static string _borderspath2D = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/2_dim/Borders.poly");
    protected static string _elemspath3D = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/3_dim/Elems.poly");
    protected static string _pointspath3D = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/3_dim/Points.poly");
    protected static string _borderspath3D = Path.GetFullPath("../../../../Data/Subtotals/3_dim/Borders.poly");

    public TimeMesh Time = time;
    protected internal EquationType equationType;
    public ISolver? solver;
    public ArrayOfElems elemsArr;
    public ArrayOfBorders bordersArr;
    public GlobalMatrix? Matrix;
    public GlobalVector? Vector;
    public GlobalVector? Answer;
    public GlobalVector[] Solutions = new GlobalVector[time.Count];
    public GlobalVector[] Discrepancy = new GlobalVector[time.Count];

    public void SetSolver(ISolver solver)
    {
        this.solver = solver;
        Debug.WriteLine("Solvet set");
    }
}
```

FEM2D.cs

```
using MathObjects;
using DataStructs;
using Grid;
using System.Diagnostics;
using Functions;

namespace Project;

public class FEM2D : FEM
{
    public ArrayOfPoints2D pointsArr = new(_pointspath2D);

    public FEM2D(Mesh2Dim mesh, TimeMesh timeMesh) : base(timeMesh)
    {
        mesh2Dim = mesh;
        if (timeMesh[0] == timeMesh[^1])
            equationType = EquationType.Elliptic;
        else
            equationType = EquationType.Parabolic;

        elemsArr = new(_elemspath2D);
        bordersArr = new(_borderspath2D);

        A_phi = new GlobalVector[Time.Count];
```

```
        E_phi = new GlobalVector[Time.Count];
        Debug.WriteLine("Generated data submited");
    }

    private readonly Mesh2Dim mesh2Dim;
    public GlobalVector[] A_phi;
    public GlobalVector[] E_phi;

    public void Solve()
    {
        if (solver is null) throw new ArgumentNullException("solver is null !");
        if (Time is null) throw new ArgumentNullException("Time is null!");

        Stopwatch solutionStopwatch = new();
        solutionStopwatch.Start();

        Debug.WriteLine($"\nTime layer: before BC");
        Thread.Sleep(1500);

        Matrix = new GlobalMatrix(pointsArr.GetLength());
        Generator.BuildPortait(ref Matrix, pointsArr.GetLength(), elemsArr);
        Generator.FillMatrix(ref Matrix, pointsArr, elemsArr, TypeOfMatrixM.Mrr);

        Vector = new GlobalVector(pointsArr.GetLength());
        Generator.FillVector(ref Vector, pointsArr, elemsArr, Time[0]);

        Generator.ConsiderBoundaryConditions(ref Matrix, ref Vector, pointsArr,
        ↪  bordersArr, Time[0]);
        (Solutions[0], Discrepancy[0]) = solver.Solve(Matrix, Vector);

        if (Time.Count > 1)
        {
            (Solutions[1], Discrepancy[1]) = (Solutions[0], Discrepancy[0]);
            if (Time.Count > 2)
            for (int i = 2; i < Time.Count; i++)
            {
                Console.WriteLine($"\n {i} / {Time.Count - 1}. Time layer: {Time[i]}");
                //Thread.Sleep(1500);

                double deltT = Time[i] - Time[i - 2];
                double deltT0 = Time[i] - Time[i - 1];
                double deltT1 = Time[i - 1] - Time[i - 2];
                double tau0 = (deltT + deltT0) / (deltT * deltT0);
                double tau1 = deltT / (deltT1 * deltT0);
                double tau2 = deltT0 / (deltT * deltT1);
                double deltT = Time[i] - Time[i - 1];
                double tau = 1.0D / deltT;

                var matrix1 = new GlobalMatrix(pointsArr.GetLength());
                Generator.BuildPortait(ref matrix1, pointsArr.GetLength(), elemsArr);
                Generator.FillMatrix(ref matrix1, pointsArr, elemsArr, TypeOfMatrixM.Mrr);
                var M = new GlobalMatrix(pointsArr.GetLength()); // ???
                Generator.BuildPortait(ref M, pointsArr.GetLength(), elemsArr);
                Generator.FillMatrix(ref M, pointsArr, elemsArr, TypeOfMatrixM.Mr);

                var bi = new GlobalVector(pointsArr.GetLength());
                Matrix = (tau0 * M) + matrix1;
                Vector = bi + (tau1 * (M * Solutions[i - 1])) - (tau2 * (M * Solutions[i
                ↪  - 2]));
                Generator.ConsiderBoundaryConditions(ref Matrix, ref Vector, pointsArr,
                ↪  bordersArr, Time[i]);
                (Solutions[i], Discrepancy[i]) = solver.Solve(Matrix, Vector);
            }
        }
        A_phi = Solutions;
        solutionStopwatch.Stop();
        var milseconds = solutionStopwatch.ElapsedMilliseconds;
        Console.WriteLine($"Lin eq solved for {milseconds / 60000} min {(milseconds %
        ↪  60000) / 1000} sec");
    }

    public void WriteData()
    {
        if (Answer is null)
            throw new Exception("Vector _answer is null");
```

```
        for (int i = 0; i < Answer.Size; i++)
            Console.WriteLine($"{Answer[i]:E15}");
    }

    public void WriteData(string _path)
    {
        if (A_phi is null) throw new ArgumentNullException();
        if (E_phi is null) throw new ArgumentNullException();

        if (Time.Count != 1)
        {
            for (int i = 0; i < Time.Count; i++)
            {
                using var sw = new StreamWriter($"{_path}\\A_phi\\Answer\\Answer_Aphi_time={Time[i]}.dat");
                for (int j = 0;   j < A_phi[i].Size; j++)
                    sw.WriteLine($"{A_phi[i][j]:E8}");
                sw.Close();
            }
            for (int i = 0; i < Time.Count; i++)
            {
                using var sw = new StreamWriter($"{_path}\\E_phi\\Answer\\Answer_Ephi_time={Time[i]}.dat");
                for (int j = 0;   j < E_phi[i].Size; j++)
                    sw.WriteLine($"{E_phi[i][j]:E8}");
                sw.Close();
            }
        }
        else
        {
            using var sw = new StreamWriter($"{_path}\\A_phi\\Answer\\Answer.dat");
            for (int j = 0; j < A_phi[0].Size; j++)
                sw.WriteLine($"{A_phi[0][j]:E8}");
            sw.Close();
            using var sw1 = new StreamWriter($"{_path}\\E_phi\\Answer\\Answer.dat");
            for (int j = 0; j < E_phi[0].Size; j++)
                sw1.WriteLine($"{E_phi[0][j]:E8}");
            sw1.Close();
        }
    }

    public void WriteDiscrepancy(string _path)
    {
        if (A_phi is null) throw new ArgumentNullException();
        if (E_phi is null) throw new ArgumentNullException();

        if (Time.Count != 1)
        {
            for (int i = 0; i < Time.Count; i++)
            {
                using var sw_d = new StreamWriter($"{_path}\\A_phi\\Discrepancy\\Discrepancy_Aphi_time={Time[i]}.dat");

                int NotNaNamount = 0;
                double maxDisc = 0.0;
                double avgDisc = 0.0;
                double sumU = 0.0D;
                double sumD = 0.0D;

                List<double> TheorAnswer = [];
                foreach (var Z in mesh2Dim.nodesZ)
                    foreach (var R in mesh2Dim.nodesR)
                        TheorAnswer.Add(Function.U(R, Z, Time[i]));

                for (int j = 0; j < A_phi[i].Size; j++)
                {
                    double absDiff = Math.Abs(A_phi[i][j] - TheorAnswer[j]);
                    double currDisc = Math.Abs((A_phi[i][j] - TheorAnswer[j]) / TheorAnswer[j]);

                    if (Math.Abs(maxDisc) < Math.Abs(currDisc))
                        maxDisc = currDisc;

                    if (!double.IsNaN(currDisc) && currDisc > 1E-14)
                    {
```

```
                        avgDisc += currDisc;
                        NotNaNamount++;
                        sumU += absDiff * absDiff;
                        sumD += TheorAnswer[j] * TheorAnswer[j];
                    }
                    sw_d.WriteLine($"{absDiff:E8} {currDisc:E8}");
                }
                avgDisc = Math.Sqrt(sumU) / Math.Sqrt(sumD);
                sw_d.WriteLine($"Средняя невязка: {avgDisc:E15}");
                sw_d.WriteLine($"Максимальная невязка: {maxDisc:E15}");
                sw_d.WriteLine($"C: {avgDisc:E7}");
                sw_d.WriteLine($"M: {maxDisc:E7}");
                sw_d.Close();
            }
        }
        else
        {
            using var sw_d = new StreamWriter($"{_path}\\A_phi\\Discrepancy\\Discrepancy_Aphi.dat");

            int NotNaNamount = 0;
                double maxDisc = 0.0;
                double avgDisc = 0.0;
                double sumU = 0.0D;
                double sumD = 0.0D;
                List<double> TheorAnswer = [];
                foreach (var Z in mesh2Dim.nodesZ)
                    foreach (var R in mesh2Dim.nodesR)
                        TheorAnswer.Add(Function.U(R, Z, 0.0D));
                for (int j = 0; j < A_phi[0].Size; j++)
                {
                    double absDiff = Math.Abs(A_phi[0][j] - TheorAnswer[j]);
                    double currDisc = Math.Abs((A_phi[0][j] - TheorAnswer[j]) / TheorAnswer[j]);

                    if (Math.Abs(maxDisc) < Math.Abs(currDisc))
                        maxDisc = currDisc;

                    if (!double.IsNaN(currDisc) && currDisc > 1E-14)
                    {
                        avgDisc += currDisc;
                        NotNaNamount++;
                        sumU += absDiff * absDiff;
                        sumD += TheorAnswer[j] * TheorAnswer[j];
                    }
                    sw_d.WriteLine($"{absDiff:E8} {currDisc:E8}");
                }
                avgDisc = Math.Sqrt(sumU) / Math.Sqrt(sumD);
                sw_d.WriteLine($"Средняя невязка: {avgDisc:E15}");
                sw_d.WriteLine($"Максимальная невязка: {maxDisc:E15}");
                sw_d.WriteLine($"C: {avgDisc:E7}");
                sw_d.WriteLine($"M: {maxDisc:E7}");
                sw_d.Close();
        }
    }

    public void GenerateVectorEphi()
    {
        E_phi = new GlobalVector[A_phi.Length];
        for (int i = 0; i < E_phi.Length; i++)
        {
            if (i == 0)
                E_phi[i] = new GlobalVector(A_phi[i].Size);
            else
                E_phi[i] = -1.0D / (Time[i] - Time[i - 1]) * (A_phi[i] - A_phi[i - 1]);
        }
    }

    internal List<int>? GetElem(double r, double z)
    {
        if (r < mesh2Dim.nodesR[0] || mesh2Dim.nodesR[^1] < r || z < mesh2Dim.nodesZ[0] || mesh2Dim.nodesZ[^1] < z)
            return null;
        int i = 0;
        for (; i < mesh2Dim.nodesR.Count - 1 && r >= 0.001; i++)
            if (mesh2Dim.nodesR[i] <= r && r <= mesh2Dim.nodesR[i + 1])
```

```
                break;
        int j = 0;
        for (; j < mesh2Dim.nodesZ.Count - 1; j++)
            if (mesh2Dim.nodesZ[j] <= z && z <= mesh2Dim.nodesZ[j + 1])
                break;
        return elemsArr[j * (mesh2Dim.nodesR.Count - 1) + i].Arr;
    }

    public double GetA_phiAt(double r, double z, double t)
    {
        for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
        {
            if (Time[tt] == t)
            {
                var elem = GetElem(r, z);
                if (elem is null) return 0.0D;
                double[] q = new double[4];
                for (int i = 0; i < 4; i++)
                    q[i] = A_phi[tt][elem[i]];
                double r0 = pointsArr[elem[0]].R;
                double r1 = pointsArr[elem[3]].R;
                double z0 = pointsArr[elem[0]].Z;
                double z1 = pointsArr[elem[3]].Z;
                return BasisFunctions2D.GetValue(q[0], q[1], q[2], q[3], r0, r1, z0, z1,
                ↪  r, z);
            }
        }
        throw new Exception("Out of mesh borders");
    }

    public double GetE_phiAt(double r, double z, double t)
    {
        for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
        {
            if (Time[tt] == t)
            {
                var elem = GetElem(r, z);
                if (elem is null) return 0.0D;
                double[] q = new double[4];
                for (int i = 0; i < 4; i++)
                    q[i] = E_phi[tt][elem[i]];
                double r0 = pointsArr[elem[0]].R;
                double r1 = pointsArr[elem[3]].R;
                double z0 = pointsArr[elem[0]].Z;
                double z1 = pointsArr[elem[3]].Z;
                return BasisFunctions2D.GetValue(q[0], q[1], q[2], q[3], r0, r1, z0, z1,
                ↪  r, z);
            }
        }
        throw new Exception("Out of mesh borders");
    }

    public void ReadAnswer(string AnswerPath)
    {
        string file = string.Empty;
        if (equationType == EquationType.Elliptic)
        {
            file = "Answer.dat";
            var fileData = File.ReadAllText(AnswerPath + "A_phi/Answer/" +
            ↪  file).Split("\n");
            A_phi[0] = new GlobalVector(fileData.Length - 1);
            for (int i = 0; i < fileData.Length - 1; i++)
                A_phi[0][i] = double.Parse(fileData[i]);
            fileData = File.ReadAllText(AnswerPath + "E_phi/Answer/" + file).Split("\n");
            E_phi[0] = new GlobalVector(fileData.Length - 1);
            for (int i = 0; i < fileData.Length - 1; i++)
                E_phi[0][i] = double.Parse(fileData[i]);
        }
        else
        {
            for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
            {
                file = $"Answer_Aphi_time={Time[t]}.dat";
                var fileData = File.ReadAllText(AnswerPath + "A_phi/Answer/" +
                ↪  file).Split("\n");
```

```
                A_phi[t] = new GlobalVector(fileData.Length - 1);
                for (int i = 0; i < fileData.Length - 1; i++)
                    A_phi[t][i] = double.Parse(fileData[i]);
                file = $"Answer_Ephi_time={Time[t]}.dat";
                fileData = File.ReadAllText(AnswerPath + "E_phi/Answer/" + file).Split("\n");
                E_phi[t] = new GlobalVector(fileData.Length - 1);
                for (int i = 0; i < fileData.Length - 1; i++)
                    E_phi[t][i] = double.Parse(fileData[i]);
            }
        }
    }

    public void MeasureValuesOnReceivers(List<Point3D> recivers, string OutputPath)
    {
        using var sw_a = new StreamWriter(OutputPath + "A.txt");
        using var sw_e = new StreamWriter(OutputPath + "E.txt");
        List<(double, double)> pnt2D = [];
        foreach (var reciver in recivers)
            pnt2D.Add((Math.Sqrt(reciver.X * reciver.X + reciver.Y * reciver.Y), reciver.Z));
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            var a_a = GetA_phiAt(pnt2D[0].Item1, pnt2D[0].Item2, Time[t]);
            var b_a = GetA_phiAt(pnt2D[1].Item1, pnt2D[1].Item2, Time[t]);
            var c_a = GetA_phiAt(pnt2D[2].Item1, pnt2D[2].Item2, Time[t]);
            var d_a = GetA_phiAt(pnt2D[3].Item1, pnt2D[3].Item2, Time[t]);
            var a_e = GetE_phiAt(pnt2D[0].Item1, pnt2D[0].Item2, Time[t]);
            var b_e = GetE_phiAt(pnt2D[1].Item1, pnt2D[1].Item2, Time[t]);
            var c_e = GetE_phiAt(pnt2D[2].Item1, pnt2D[2].Item2, Time[t]);
            var d_e = GetE_phiAt(pnt2D[3].Item1, pnt2D[3].Item2, Time[t]);
            sw_a.WriteLine($"{Time[t]} {a_a} {b_a} {c_a} {d_a}");
            sw_e.WriteLine($"{Time[t]} {a_e} {b_e} {c_e} {d_e}");
        }
        sw_a.Close();
        sw_e.Close();
    }

    public void WritePointsToDraw(string pathA, string pathE)
    {
        double hr = (mesh2Dim.nodesR[^1] - mesh2Dim.nodesR[0]) / 150;
        double hz = (mesh2Dim.nodesZ[^1] - mesh2Dim.nodesZ[0]) / 150;
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var swa = new StreamWriter(pathA + $"Answer_A_time_layer_{t}.txt");
            for (int j = 0; j < 150; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 150; i++)
                {
                    double rCurr = mesh2Dim.nodesR[0] + i * hr;
                    double zCurr = mesh2Dim.nodesZ[0] + j * hz;
                    swa.WriteLine($"{rCurr:E15} {zCurr:E15} {GetA_phiAt(rCurr, zCurr, Time[t]):E15}");
                }
            }
            swa.Close();
        }
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var swe = new StreamWriter(pathE + $"Answer_E_time_layer_{t}.txt");
            for (int j = 0; j < 150; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 150; i++)
                {
                    double rCurr = mesh2Dim.nodesR[0] + i * hr;
                    double zCurr = mesh2Dim.nodesZ[0] + j * hz;
                    swe.WriteLine($"{rCurr:E15} {zCurr:E15} {GetE_phiAt(rCurr, zCurr, Time[t]):E15}");
                }
            }
            swe.Close();
        }
    }
}
```

FEM3D.cs

```
using MathObjects;
using Grid;
using DataStructs;
using Functions;
using System.Diagnostics;



namespace Project;

public class FEM3D : FEM
{
    private static readonly double mu0 = 4.0D * Math.PI * Math.Pow(10.0D, -7);
    public ArrayOfPoints3D pointsArr;
    public List<GlobalVector> A;
    public List<GlobalVector> E;
    public List<GlobalVector> B;
    public List<GlobalVector> H;
    public ArrayOfRibs? ribsArr;
    private readonly Mesh3Dim mesh3Dim;
    private GlobalMatrix? G;
    List<FEM3D> additionalFields = [];
    private readonly FEM3D? _originalFEM;
    private List<GlobalVector>? _originalE;
    private GlobalMatrix? M;
    internal static List<int> ConvertGlobalToLocalNumeration(List<int> global) =>
            [global[0], global[3], global[8], global[11],
             global[1], global[2], global[9], global[10],
             global[4], global[5], global[6], global[7]];

    public FEM3D(Mesh3Dim mesh, TimeMesh timeMesh) : base(timeMesh)
    {
        string pointsPath = _3dValuesPath + $"AfterConvertation\\Points.poly";
        string elemsPath = _3dValuesPath + $"AfterConvertation\\Elems.poly";
        string bordersPath = _3dValuesPath + $"AfterConvertation\\Borders.poly";
        pointsArr = new ArrayOfPoints3D(pointsPath);
        elemsArr = new(elemsPath, 3);
        bordersArr = new (bordersPath, 3);
        ribsArr = mesh.arrayOfRibs;
        equationType = timeMesh[0] == timeMesh[^1] ? EquationType.Elliptic : EquationType.Parabolic;
        A = [];
        E = [];
        B = [];
        H = [];
        mesh3Dim = mesh;
    }

    public FEM3D(Mesh3Dim mesh, TimeMesh timeMesh, FEM3D originalFEM, int Num) : base(timeMesh)
    {
        string pointsPath = _3dValuesPath + $"Anomaly{Num}\\Points.poly";
        string elemsPath = _3dValuesPath + $"Anomaly{Num}\\Elems.poly";
        string bordersPath = _3dValuesPath + $"Anomaly{Num}\\Borders.poly";
        pointsArr = new(pointsPath);
        elemsArr = new(elemsPath, 3);
        bordersArr = new(bordersPath, 3);
        ribsArr = mesh.arrayOfRibs;
        _originalFEM = originalFEM;
        _originalE = [];
        equationType = timeMesh[0] == timeMesh[^1] ? EquationType.Elliptic : EquationType.Parabolic;
        A = [];
        E = [];
        B = [];
        H = [];
        mesh3Dim = mesh;
        ConstructMatrixes();
    }

    public (double, double, double) GetAAt(double x, double y, double z, double t)
    {
        if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("Array of ribs not generated");
```

```
        for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
            if (Time[tt] == t)
            {
                var arr = GetElem(x, y, z);
                if (arr is null) return (0.0D, 0.0D, 0.0D);
                var elem = ConvertGlobalToLocalNumeration(arr);
                double[] q = new double[12];
                for (int i = 0; i < 12; i++)
                    q[i] = A[tt][elem[i]];
                double x0 = ribsArr[elem[0]].a.X;
                double x1 = ribsArr[elem[0]].b.X;
                double y0 = ribsArr[elem[4]].a.Y;
                double y1 = ribsArr[elem[4]].b.Y;
                double z0 = ribsArr[elem[8]].a.Z;
                double z1 = ribsArr[elem[8]].b.Z;
                double eps = (x - x0) / (x1 - x0);
                double nu =  (y - y0) / (y1 - y0);
                double khi = (z - z0) / (z1 - z0);
                var ans = BasisFunctions3DVec.GetValue(eps, nu, khi, q);
                foreach (var solution in additionalFields)
                {
                    var arrCurr = solution.GetElem(x, y, z);
                    if (arrCurr is null) continue;
                    var elemCurr = ConvertGlobalToLocalNumeration(arrCurr);
                    double[] qCurr = new double[12];
                    for (int ii = 0; ii < 12; ii++)
                        qCurr[ii] = solution.A[tt][elemCurr[ii]];
                    double x0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].a.X;
                    double x1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].b.X;
                    double y0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].a.Y;
                    double y1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].b.Y;
                    double z0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].a.Z;
                    double z1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].b.Z;
                    double epsCurr = (x - x0Curr) / (x1Curr - x0Curr);
                    double nuCurr =  (y - y0Curr) / (y1Curr - y0Curr);
                    double khiCurr = (z - z0Curr) / (z1Curr - z0Curr);
                    var ansCurr = BasisFunctions3DVec.GetValue(epsCurr, nuCurr, khiCurr, qCurr);
                    ans.Item1 += ansCurr.Item1;
                    ans.Item2 += ansCurr.Item2;
                    ans.Item3 += ansCurr.Item3;
                }
                return ans;
            }
        throw new Exception("Out of mesh borders");
    }

    public (double, double, double) AdditioanalGetEAt(double x, double y, double z, double t)
    {
        if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("Array of ribs not generated");
        for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
            if (Time[tt] == t)
            {
                var ans = (0.0D, 0.0D, 0.0D);
                foreach (var solution in additionalFields)
                {
                    var arrCurr = solution.GetElem(x, y, z);
                    if (arrCurr is null) continue;
                    var elemCurr = ConvertGlobalToLocalNumeration(arrCurr);
                    double[] qCurr = new double[12];
                    for (int ii = 0; ii < 12; ii++)
                        qCurr[ii] = solution.E[tt][elemCurr[ii]];
                    double x0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].a.X;
                    double x1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].b.X;
                    double y0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].a.Y;
                    double y1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].b.Y;
                    double z0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].a.Z;
                    double z1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].b.Z;
                    double epsCurr = (x - x0Curr) / (x1Curr - x0Curr);
                    double nuCurr =  (y - y0Curr) / (y1Curr - y0Curr);
                    double khiCurr = (z - z0Curr) / (z1Curr - z0Curr);
                    var ansCurr = BasisFunctions3DVec.GetValue(epsCurr, nuCurr, khiCurr, qCurr);
```

```
                ans.Item1 += ansCurr.Item1;
                ans.Item2 += ansCurr.Item2;
                ans.Item3 += ansCurr.Item3;
            }
            return ans;
        }
    throw new Exception("Out of mesh borders");
}

public (double, double, double) GetEAt(double x, double y, double z, double t)
{
    if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("Array of ribs not
    ↪  generated");
    for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
        if (Time[tt] == t)
        {
            var arr = GetElem(x, y, z);
            if (arr is null) return (0.0D, 0.0D, 0.0D);
            var elem = ConvertGlobalToLocalNumeration(arr);
            double[] q = new double[12];
            for (int i = 0; i < 12; i++)
                q[i] = E[tt][elem[i]];
            double x0 = ribsArr[elem[0]].a.X;
            double x1 = ribsArr[elem[0]].b.X;
            double y0 = ribsArr[elem[4]].a.Y;
            double y1 = ribsArr[elem[4]].b.Y;
            double z0 = ribsArr[elem[8]].a.Z;
            double z1 = ribsArr[elem[8]].b.Z;
            double eps = (x - x0) / (x1 - x0);
            double nu =  (y - y0) / (y1 - y0);
            double khi = (z - z0) / (z1 - z0);
            var ans = BasisFunctions3DVec.GetValue(eps, nu, khi, q);
            foreach (var solution in additionalFields)
            {
                var arrCurr = solution.GetElem(x, y, z);
                if (arrCurr is null) continue;
                var elemCurr = ConvertGlobalToLocalNumeration(arrCurr);
                double[] qCurr = new double[12];
                for (int ii = 0; ii < 12; ii++)
                    qCurr[ii] = solution.E[tt][elemCurr[ii]];
                double x0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].a.X;
                double x1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].b.X;
                double y0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].a.Y;
                double y1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].b.Y;
                double z0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].a.Z;
                double z1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].b.Z;
                double epsCurr = (x - x0Curr) / (x1Curr - x0Curr);
                double nuCurr =  (y - y0Curr) / (y1Curr - y0Curr);
                double khiCurr = (z - z0Curr) / (z1Curr - z0Curr);
                var ansCurr = BasisFunctions3DVec.GetValue(epsCurr, nuCurr, khiCurr,
                ↪  qCurr);
                ans.Item1 += ansCurr.Item1;
                ans.Item2 += ansCurr.Item2;
                ans.Item3 += ansCurr.Item3;
            }
            return ans;
        }
    throw new Exception("Out of mesh borders");
}

public (double, double, double) GetBAt(double x, double y, double z, double t)
{
    if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("Array of ribs not
    ↪  generated");
    for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
        if (Time[tt] == t)
        {
            var arr = GetElem(x, y, z);
            if (arr is null) return (0.0D, 0.0D, 0.0D);
            var elem = ConvertGlobalToLocalNumeration(arr);
            double[] q = new double[12];
            for (int i = 0; i < 12; i++)
                q[i] = B[tt][elem[i]];
            double x0 = ribsArr[elem[0]].a.X;
            double x1 = ribsArr[elem[0]].b.X;
```

```
                double y0 = ribsArr[elem[4]].a.Y;
                double y1 = ribsArr[elem[4]].b.Y;
                double z0 = ribsArr[elem[8]].a.Z;
                double z1 = ribsArr[elem[8]].b.Z;
                double eps = (x - x0) / (x1 - x0);
                double nu =  (y - y0) / (y1 - y0);
                double khi = (z - z0) / (z1 - z0);
                var ans = BasisFunctions3DVec.GetValue(eps, nu, khi, q);
                foreach (var solution in additionalFields)
                {
                    var arrCurr = solution.GetElem(x, y, z);
                    if (arrCurr is null) continue;
                    var elemCurr = ConvertGlobalToLocalNumeration(arrCurr);
                    double[] qCurr = new double[12];
                    for (int ii = 0; ii < 12; ii++)
                        qCurr[ii] = solution.B[tt][elemCurr[ii]];
                    double x0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].a.X;
                    double x1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].b.X;
                    double y0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].a.Y;
                    double y1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].b.Y;
                    double z0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].a.Z;
                    double z1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].b.Z;
                    double epsCurr = (x - x0Curr) / (x1Curr - x0Curr);
                    double nuCurr =  (y - y0Curr) / (y1Curr - y0Curr);
                    double khiCurr = (z - z0Curr) / (z1Curr - z0Curr);
                    var ansCurr = BasisFunctions3DVec.GetValue(epsCurr, nuCurr, khiCurr,
                    ↪  qCurr);
                    ans.Item1 += ansCurr.Item1;
                    ans.Item2 += ansCurr.Item2;
                    ans.Item3 += ansCurr.Item3;
                }
                return ans;
            }
        throw new Exception("Out of mesh borders");
    }

    public (double, double, double) GetHAt(double x, double y, double z, double t)
    {
        if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("Array of ribs not
        ↪  generated");
        for (int tt = 0; tt < Time.Count; tt++)
            if (Time[tt] == t)
            {
                var arr = GetElem(x, y, z);
                if (arr is null) return (0.0D, 0.0D, 0.0D);
                var elem = ConvertGlobalToLocalNumeration(arr);
                double[] q = new double[12];
                for (int i = 0; i < 12; i++)
                    q[i] = H[tt][elem[i]];
                double x0 = ribsArr[elem[0]].a.X;
                double x1 = ribsArr[elem[0]].b.X;
                double y0 = ribsArr[elem[4]].a.Y;
                double y1 = ribsArr[elem[4]].b.Y;
                double z0 = ribsArr[elem[8]].a.Z;
                double z1 = ribsArr[elem[8]].b.Z;
                double eps = (x - x0) / (x1 - x0);
                double nu =  (y - y0) / (y1 - y0);
                double khi = (z - z0) / (z1 - z0);
                var ans = BasisFunctions3DVec.GetValue(eps, nu, khi, q);
                foreach (var solution in additionalFields)
                {
                    var arrCurr = solution.GetElem(x, y, z);
                    if (arrCurr is null) continue;
                    var elemCurr = ConvertGlobalToLocalNumeration(arrCurr);
                    double[] qCurr = new double[12];
                    for (int ii = 0; ii < 12; ii++)
                        qCurr[ii] = solution.H[tt][elemCurr[ii]];
                    double x0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].a.X;
                    double x1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[0]].b.X;
                    double y0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].a.Y;
                    double y1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[4]].b.Y;
                    double z0Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].a.Z;
                    double z1Curr = solution.ribsArr[elemCurr[8]].b.Z;
                    double epsCurr = (x - x0Curr) / (x1Curr - x0Curr);
                    double nuCurr =  (y - y0Curr) / (y1Curr - y0Curr);
```

```
                    double khiCurr = (z - z0Curr) / (z1Curr - z0Curr);
                    var ansCurr = BasisFunctions3DVec.GetValue(epsCurr, nuCurr, khiCurr, qCurr);
                    ans.Item1 += ansCurr.Item1;
                    ans.Item2 += ansCurr.Item2;
                    ans.Item3 += ansCurr.Item3;
                }
                return ans;
            }
        throw new Exception("Out of mesh borders");
    }

    // B = rot A
    public void GenerateVectorB()
    {
        if (A is []) throw new Exception("Vector B isn't generated");
        if (ribsArr is null) throw new Exception("Array of ribs isn't generated");
        B = new(A.Count);
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            B.Add(new GlobalVector(ribsArr.Count));
            for (int i = 0; i < A[t].Size; i++)
            {
                double ht = Math.Pow(10, -10);
                var pnt = ribsArr[i].GetMiddlePoint();
                var tan = ribsArr[i].GetTangent();
                var vec1 = GetAAt(pnt.X, pnt.Y, pnt.Z + ht, Time[t]);
                var vec2 = GetAAt(pnt.X, pnt.Y, pnt.Z - ht, Time[t]);
                var Bx = -1.0D * (vec1.Item2 - vec2.Item2) / (2.0D * ht);
                vec1 = GetAAt(pnt.X, pnt.Y, pnt.Z + ht, Time[t]);
                vec2 = GetAAt(pnt.X, pnt.Y, pnt.Z - ht, Time[t]);
                var By = (vec1.Item1 - vec2.Item1) / (2.0D * ht);
                vec1 = GetAAt(pnt.X + ht, pnt.Y, pnt.Z, Time[t]);
                vec2 = GetAAt(pnt.X - ht, pnt.Y, pnt.Z, Time[t]);
                var Bz1 = (vec1.Item2 - vec2.Item2) / (2.0D * ht);
                vec1 = GetAAt(pnt.X, pnt.Y + ht, pnt.Z, Time[t]);
                vec2 = GetAAt(pnt.X, pnt.Y - ht, pnt.Z, Time[t]);
                var Bz2 = (vec1.Item1 - vec2.Item1) / (2.0D * ht);
                B[t][i] = Bx * tan.Item1 + By * tan.Item2 + (Bz1 - Bz2) * tan.Item3;
            }
        }
    }

    // H = B / mu_0
    public void GenerateVectorH()
    {
        if (B is []) throw new Exception("Vector B isn't generated");
        H = new(B.Count);
        for (int t = 0; t < B.Count; t++)
        {
            H.Add(new GlobalVector(B[t].Size));
            for (int i = 0; i < B[i].Size; i++)
                H[t][i] = B[t][i] / mu0;
        }
    }

    // E = - dA / dt
    public void GenerateVectorE()
    {
        E = new(A.Count);
        for (int i = 0; i < A.Count; i++)
        {
            if (i == 0)
                E.Add(new GlobalVector(A[1].Size));
            else
            {
                if (A[i - 1].Size == 0) A[i - 1] = new GlobalVector(ribsArr.Count);
                if (A[i].Size == 0) A[i] = new GlobalVector(ribsArr.Count);
                E.Add(-1.0D / (Time[i] - Time[i - 1]) * (A[i] - A[i - 1]));
            }
        }
    }

    public void AddSolution(FEM3D fem) => additionalFields.Add(fem);

```

```
    public List<int>? GetElem(double x, double y, double z)
    {
        if (x < mesh3Dim.nodesX[0] || mesh3Dim.nodesX[^1] < x ||
            y < mesh3Dim.nodesY[0] || mesh3Dim.nodesY[^1] < y ||
            z < mesh3Dim.nodesZ[0] || mesh3Dim.nodesZ[^1] < z)
            return null;
        int i = 0;
        for (; i < mesh3Dim.nodesX.Count - 1; i++)
            if (mesh3Dim.nodesX[i] <= x && x <= mesh3Dim.nodesX[i + 1])
                break;
        int j = 0;
        for (; j < mesh3Dim.nodesY.Count - 1; j++)
            if (mesh3Dim.nodesY[j] <= y && y <= mesh3Dim.nodesY[j + 1])
                break;
        int k = 0;
        for (; k < mesh3Dim.nodesZ.Count - 1; k++)
            if (mesh3Dim.nodesZ[k] <= z && z <= mesh3Dim.nodesZ[k + 1])
                break;
        return elemsArr[k * (mesh3Dim.nodesX.Count - 1) * (mesh3Dim.nodesY.Count - 1) + j * (mesh3Dim.nodesX.Count - 1) + i].Arr;
    }

    public void ConvertResultTo3Dim(FEM2D fem2d)
    {
        if (fem2d.pointsArr is null) throw new ArgumentNullException();
        if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException();
        for (int i = 0; i < Time.Count; i++)
        {
            A.Add(new GlobalVector(ribsArr.Count));
            E.Add(new GlobalVector(ribsArr.Count));
            for (int j = 0; j < ribsArr.Count; j++)
            {
                var X = 0.5D * (ribsArr[j].a.X + ribsArr[j].b.X);
                var Y = 0.5D * (ribsArr[j].a.Y + ribsArr[j].b.Y);
                var Z = 0.5D * (ribsArr[j].a.Z + ribsArr[j].b.Z);
                var antinormal = ((ribsArr[j].b.X - ribsArr[j].a.X) / ribsArr[j].Length,
                                  (ribsArr[j].b.Y - ribsArr[j].a.Y) / ribsArr[j].Length,
                                  (ribsArr[j].b.Z - ribsArr[j].a.Z) / ribsArr[j].Length);
                double fa = 0.0;
                double fe = 0.0;
                var elem = fem2d.GetElem(Math.Sqrt(X * X + Y * Y), Z);
                if (elem is not null)
                {
                    fa = BasisFunctions2D.GetValue(
                                    fem2d.A_phi[i][elem[0]], fem2d.A_phi[i][elem[1]],
                                    fem2d.A_phi[i][elem[2]], fem2d.A_phi[i][elem[3]],
                                    fem2d.pointsArr[elem[0]].R, fem2d.pointsArr[elem[1]].R,
                                    fem2d.pointsArr[elem[0]].Z, fem2d.pointsArr[elem[3]].Z,
                                    Math.Sqrt(X * X + Y * Y), Z);
                    fe = BasisFunctions2D.GetValue(
                                    fem2d.E_phi[i][elem[0]], fem2d.E_phi[i][elem[1]],
                                    fem2d.E_phi[i][elem[2]], fem2d.E_phi[i][elem[3]],
                                    fem2d.pointsArr[elem[0]].R, fem2d.pointsArr[elem[1]].R,
                                    fem2d.pointsArr[elem[0]].Z, fem2d.pointsArr[elem[3]].Z,
                                    Math.Sqrt(X * X + Y * Y), Z);
                }
                var Ax = X == 0 && Y == 0 ? 0.0D : -1.0D * (Y / Math.Sqrt(X * X + Y * Y)) * fa;
                var Ay = X == 0 && Y == 0 ? 0.0D : X / Math.Sqrt(X * X + Y * Y) * fa;
                var Az = 0.0D;
                var Ex = X == 0 && Y == 0 ? 0.0D :  -1.0D * (Y / Math.Sqrt(X * X + Y * Y)) * fe;
                var Ey = X == 0 && Y == 0 ? 0.0D :  X / Math.Sqrt(X * X + Y * Y) * fe;
                var Ez = 0.0D;
                A[i][j] = Ax * antinormal.Item1 + Ay * antinormal.Item2 + Az * antinormal.Item3;
                E[i][j] = Ex * antinormal.Item1 + Ey * antinormal.Item2 + Ez * antinormal.Item3;
            }
        }
    }
```

```
    public void CheckSolution(List<Point3D> recivers)
    {
        using var sw = new StreamWriter("C:\\Users\\USER\\Desktop\\Test.txt");
        GenerateVectorB();
        GenerateVectorH();
        for (int t = 0; t < Time.Count - 1; t++)
        {
            sw.WriteLine($"Time: {Time[t]}:E15");
            foreach (var reciver in recivers)
            {
                var BAt = GetBAt(reciver.X, reciver.Y, reciver.Z, Time[t]);
                var BAt_1 = GetBAt(reciver.X, reciver.Y, reciver.Z, Time[t + 1]);
                var dBdt = ((BAt_1.Item1 - BAt.Item1) / (Time[t + 1] - Time[t]),
                            (BAt_1.Item2 - BAt.Item2) / (Time[t + 1] - Time[t]),
                            (BAt_1.Item3 - BAt.Item3) / (Time[t + 1] - Time[t]));
                var Ex_1 = GetEAt(reciver.X - 1E-10, reciver.Y, reciver.Z, Time[t]);
                var Ex_2 = GetEAt(reciver.X + 1E-10, reciver.Y, reciver.Z, Time[t]);
                var Ey_1 = GetEAt(reciver.X, reciver.Y - 1E-10, reciver.Z, Time[t]);
                var Ey_2 = GetEAt(reciver.X, reciver.Y + 1E-10, reciver.Z, Time[t]);
                var Ez_1 = GetEAt(reciver.X, reciver.Y, reciver.Z - 1E-10, Time[t]);
                var Ez_2 = GetEAt(reciver.X, reciver.Y, reciver.Z + 1E-10, Time[t]);
                var rotE = ((Ey_2.Item3 - Ey_1.Item3) / (2.0 * 1E-10) - (Ez_2.Item2 - Ez_1.Item2) / (2.0 * 1E-10),
                   -1.0D * ((Ex_2.Item3 - Ex_1.Item3) / (2.0 * 1E-10) - (Ez_2.Item1 - Ez_1.Item1) / (2.0 * 1E-10)),
                            (Ex_2.Item2 - Ex_1.Item2) / (2.0 * 1E-10) - (Ey_2.Item1 - Ey_1.Item1) / (2.0 * 1E-10));
                sw.WriteLine($"reciver: ({reciver.X:E15}, {reciver.Y:E15}, {reciver.Z:E15})");
                sw.WriteLine($"  rot E: ({rotE.Item1:E15}, {rotE.Item2:E15}, {rotE.Item3:E15})");
                sw.WriteLine($"   dBdt: ({dBdt.Item1:E15}, {dBdt.Item2:E15}, {dBdt.Item3:E15})");
                sw.WriteLine($"discep.: ({Math.Abs(rotE.Item1 - dBdt.Item1):E15}, {Math.Abs(rotE.Item2 - dBdt.Item2):E15}, {Math.Abs(rotE.Item3 - dBdt.Item3):E15})");
            }
            sw.WriteLine();
        }
        sw.Close();
    }

    public void ConstructMatrixes()
    {
        if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("ribsArr is null");
        var sparceMatrix = new GlobalMatrix(ribsArr.Count);
        Generator.BuildPortait(ref sparceMatrix, ribsArr.Count, elemsArr, true);
        G = new GlobalMatrix(sparceMatrix);
        Generator.FillMatrixG(ref G, ribsArr, elemsArr);
        M = new GlobalMatrix(sparceMatrix);
        Generator.FillMatrixM(ref M, ribsArr, elemsArr, mesh3Dim, _originalFEM.mesh3Dim);
    }

    public void Solve()
    {
        if (solver is null) throw new ArgumentNullException("Solver is null");
        if (ribsArr is null) throw new ArgumentNullException("ribs array is null");
        if (_originalFEM is null) throw new ArgumentNullException("original E is null");
        if (G is null) throw new ArgumentNullException();
        if (M is null) throw new ArgumentNullException();
        Stopwatch solutionStopwatch = new();
        solutionStopwatch.Start();
        Solutions = new GlobalVector[Time.Count];
        Discrepancy = new GlobalVector[Time.Count];
        (Solutions[0], Discrepancy[0]) = (new GlobalVector(ribsArr.Count), new GlobalVector(ribsArr.Count));
        if (Time.Count > 1)
        {
            (Solutions[1], Discrepancy[1]) = (Solutions[0], Discrepancy[0]);
            for (int i = 1; i < Time.Count; i++)
            {
                Console.WriteLine($"\n {i} / {Time.Count - 1}. Time layer: {Time[i]}");
```

```
                Thread.Sleep(1500);

                double deltT = Time[i] - Time[i - 2];
                double deltT0 = Time[i] - Time[i - 1];
                double deltT1 = Time[i - 1] - Time[i - 2];
                double tau0 = (deltT + deltT0) / (deltT * deltT0);
                double tau1 = deltT / (deltT1 * deltT0);
                double tau2 = deltT0 / (deltT * deltT1);
                double deltT = Time[i] - Time[i - 1];
                double tau = 1.0D / deltT;
                Matrix = G + tau0 * M;
                var b = new GlobalVector(ribsArr.Count);
                Generator.FillVector3D(ref b, _originalFEM.GetEAt, ribsArr, elemsArr, mesh3Dim, _originalFEM.mesh3Dim, Time[i]);
                Vector = b + (tau1 * (M * Solutions[i - 1])) - (tau2 * (M * Solutions[i - 2]));
                Generator.ConsiderBoundaryConditions(ref Matrix, ref Vector, ribsArr, bordersArr, Time[i]);
                var localStopWatch = Stopwatch.StartNew();
                (Solutions[i], Discrepancy[i]) = solver.Solve(Matrix, Vector);
                localStopWatch.Stop();
                var localMS = localStopWatch.ElapsedMilliseconds;
                Console.WriteLine($"Current iteration for {localMS / 60000} min {(localMS % 60000) / 1000} sec");
            }
        }
        A = [.. Solutions];
        solutionStopwatch.Stop();
        var milseconds = solutionStopwatch.ElapsedMilliseconds;
        Console.WriteLine($"Lin eq solved for {milseconds / 60000} min {(milseconds % 60000) / 1000} sec");
    }

    public void WriteData(string path)
    {
        if (Solutions is null) throw new ArgumentNullException("No solutions");
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var sw = new StreamWriter(path + $"Answer_{Time[t]}.txt");
            for (int i = 0; i < A[t].Size; i++)
                sw.WriteLine($"{i} {A[t][i]:E8}");
            sw.Close();
        }
    }

    public void WriteDrawingForFirst(string path)
    {
        double hx = (50000.0D) / 300.0D;
        double hy = (25000.0D) / 300.0D;
        double hz = (mesh3Dim.nodesZ[^1] - mesh3Dim.nodesZ[0]) / 300.0D;

        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var swe = new StreamWriter(path + $"E\\Answer_E_time_layer_{t}.txt");
            for (int k = 0; k < 300; k++)
            {
                for (int i = 0; i < 300; i++)
                {
                    double zCurr = mesh3Dim.nodesZ[0] + k * hz;
                    double xCurr = 0.0D + i * hx;
                    double yCurr = 0.0D + i * hy;
                    var vec = GetEAt(xCurr, yCurr, zCurr, Time[t]);
                    var ans = Math.Sqrt(vec.Item1 * vec.Item1 + vec.Item2 * vec.Item2);
                    var rCurr = Math.Sqrt(xCurr * xCurr + yCurr * yCurr);
                    swe.WriteLine($"{rCurr:E15} {zCurr:E15} {ans:E15}");
                }
            }
            swe.Close();
        }
    }

    public void WriteDrawingForSecond(string path)
    {
        double hx = (50000.0D) / 300.0D;
        double hy = -1.0D * (12500.0D) / 300.0D;
```

```
        double hz = (mesh3Dim.nodesZ[^1] - mesh3Dim.nodesZ[0]) / 300.0D;
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var swe = new StreamWriter(path + $"E\\Answer_E_time_layer_{t}.txt");
            for (int k = 0; k < 300; k++)
            {
                for (int i = 0; i < 300; i++)
                {
                    double zCurr = mesh3Dim.nodesZ[0] + k * hz;
                    double xCurr = 0.0D + i * hx;
                    double yCurr = 0.0D + i * hy;
                    var vec = GetEAt(xCurr, yCurr, zCurr, Time[t]);
                    var ans = Math.Sqrt(vec.Item1 * vec.Item1 + vec.Item2 * vec.Item2 + vec.Item3 * vec.Item3);
                    var rCurr = Math.Sqrt(xCurr * xCurr + yCurr * yCurr);
                    swe.WriteLine($"{rCurr:E15} {zCurr:E15} {ans:E15}");                 }
            }
            swe.Close();
        }
    }

    public void WriteDataToDraw2DimSolution(string path)
    {
        double hx = (25500.0D) / 300.0D;
        double hy = (25500.0D) / 300.0D;
        double hz = (mesh3Dim.nodesZ[^1] - mesh3Dim.nodesZ[0]) / 300.0D;
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var swe = new StreamWriter(path + $"E\\Answer_E_time_layer_{t}.txt");
            for (int k = 0; k < 300; k++)
            {
                for (int i = 0; i < 300; i++)
                {
                    double zCurr = mesh3Dim.nodesZ[0] + k * hz;
                    double xCurr = 0.0D + i * hx;
                    double yCurr = 0.0D + i * hy;
                    var vec = GetEAt(xCurr, yCurr, zCurr, Time[t]);
                    var ans = Math.Sqrt(vec.Item1 * vec.Item1 + vec.Item2 * vec.Item2 + vec.Item3 * vec.Item3);
                    var rCurr = Math.Sqrt(xCurr * xCurr + yCurr * yCurr);
                    swe.WriteLine($"{rCurr:E15} {zCurr:E15} {ans:E15}");
                }
            }
            swe.Close();
        }
    }

    public void WriteDataAtLine(string path)
    {
        double x0 = -1177.5;
        double hy = (mesh3Dim.nodesY[^1] - mesh3Dim.nodesY[0]) / 300.0D;
        double z0 = -1050.0D;
        List<double> times = [Time[0], Time[Time.Count / 2], Time[^1]];
        for (int t = 0; t < times.Count; t++)
        {
            using var swa = new StreamWriter(path + $"A_With_anomaly_{times[t]}.txt");

            for (int i = 0; i < 300; i++)
            {
                double xCurr = x0;
                double yCurr = mesh3Dim.nodesY[0] + i * hy;
                double zCurr = z0;
                var vec = GetAAt(xCurr, yCurr, zCurr, times[t]);
                var ans = vec.Item1;
                swa.WriteLine($"{yCurr:E15} {ans:E15}");
            }
            swa.Close();
        }
        for (int t = 0; t < times.Count; t++)
        {
            using var swe = new StreamWriter(path + $"E_With_anomaly_{times[t]}.txt");
            for (int i = 0; i < 300; i++)
            {
                double xCurr = x0;
                double yCurr = mesh3Dim.nodesY[0] + i * hy;
                double zCurr = z0;
```

```
                var vec = GetEAt(xCurr, yCurr, zCurr, times[t]);
                var ans = vec.Item1;
                swe.WriteLine($"{yCurr:E15} {ans:E15}");
            }
            swe.Close();
        }
    }

    public void WriteDataToDraw(string path)
    {
        double hx = (mesh3Dim.nodesX[^1] - mesh3Dim.nodesX[0]) / 10.0D;
        double hy = (mesh3Dim.nodesY[^1] - mesh3Dim.nodesY[0]) / 10.0D;
        double hz = (mesh3Dim.nodesZ[^1] - mesh3Dim.nodesZ[0]) / 10.0D;
        double x0 = mesh3Dim.nodesX[0];
        double y0 = mesh3Dim.nodesY[0];
        double z0 = mesh3Dim.nodesZ[0];
        List<Point3D> points = [];
        int i = 0;
        int j = 0;
        int k = 0;
        while (z0 + hz * k <= mesh3Dim.nodesZ[^1])
        {
            j = 0;
            while (y0 + hy * j <= mesh3Dim.nodesY[^1])
            {
                i = 0;
                while (x0 + hx * i <= mesh3Dim.nodesX[^1])
                {
                    points.Add(new Point3D(x0 + i * hx, y0 + j * hy, z0 + k * hz));
                    i++;
                }
                j++;
            }
            k++;
        }
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            using var sw = new StreamWriter(path + $"Answer{t}.txt");
            sw.WriteLine($"{mesh3Dim.nodesX[0]:E15} {mesh3Dim.nodesX[^1]:E15}
                {mesh3Dim.nodesY[0]:E15} {mesh3Dim.nodesY[^1]:E15}
                {mesh3Dim.nodesZ[0]:E15} {mesh3Dim.nodesZ[^1]:E15}");
            foreach (var point in points)
            {
                var ans = GetEAt(point.X, point.Y, point.Z, Time[t]);
                sw.WriteLine($"{point.X:E15} {point.Y:E15} {point.Z:E15} {ans.Item1:E15}
                    {ans.Item2:E15} {ans.Item3:E15}");
            }
            sw.Close();
        }
    }

    public void ReadData(string AnswerPath)
    {
        A = new(Time.Count);
        string file = string.Empty;
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            file = $"Answer_{Time[t]}.txt";
            var fileData = File.ReadAllText(AnswerPath + file).Split("\n");
            A.Add(new GlobalVector(fileData.Length - 1));
            for (int i = 0; i < fileData.Length - 1; i++)
            {
                var val = fileData[i].Split(" ")[1];
                A[t][i] = double.Parse(val);
            }
        }
    }

    public void TestOutput(string path)
    {
        using var sw = new StreamWriter(path + "/A_phi/Answer3D/Answer_Test.txt");
        var absDiscX = 0.0D;
        var absDiscY = 0.0D;
        var absDiscZ = 0.0D;
        var absDivX = 0.0D;
        var absDivY = 0.0D;
```

```
        var absDivZ = 0.0D;
        var relDiscX = 0.0D;
        var relDiscY = 0.0D;
        var relDiscZ = 0.0D;
        var relDivX = 0.0D;
        var relDivY = 0.0D;
        var relDivZ = 0.0D;
        int iter = 0;
        foreach (Elem elem in elemsArr)
        {
            int[] elem_local = [elem[0], elem[3], elem[8], elem[11],
                                elem[1], elem[2], elem[9], elem[10],
                                elem[4], elem[5], elem[6], elem[7]];
            var x = 0.5D * (ribsArr[elem_local[0]].a.X + ribsArr[elem_local[0]].b.X);
            var y = 0.5D * (ribsArr[elem_local[4]].a.Y + ribsArr[elem_local[4]].b.Y);
            var z = 0.5D * (ribsArr[elem_local[8]].a.Z + ribsArr[elem_local[8]].b.Z);
            sw.WriteLine($"Points {x:E15} {y:E15} {z:E15}");
            var eps = (x - ribsArr[elem_local[0]].a.X) / (ribsArr[elem_local[0]].b.X - ribsArr[elem_local[0]].a.X);
            var nu =  (y - ribsArr[elem_local[4]].a.Y) / (ribsArr[elem_local[4]].b.Y - ribsArr[elem_local[4]].a.Y);
            var khi = (z - ribsArr[elem_local[8]].a.Z) / (ribsArr[elem_local[8]].b.Z - ribsArr[elem_local[8]].a.Z);
            double[] q = [Solutions[0][elem_local[0]], Solutions[0][elem_local[1]], Solutions[0][elem_local[2]], Solutions[0][elem_local[3]],
                          Solutions[0][elem_local[4]], Solutions[0][elem_local[5]], Solutions[0][elem_local[6]], Solutions[0][elem_local[7]],
                          Solutions[0][elem_local[8]], Solutions[0][elem_local[9]], Solutions[0][elem_local[10]], Solutions[0][elem_local[11]]];
            var ans = BasisFunctions3DVec.GetValue(eps, nu, khi, q);
            var theorValue = Function.A(x, y, z, 0.0D);
            sw.WriteLine($"FEM A  {ans.Item1:E15} {ans.Item2:E15} {ans.Item3:E15}");
            sw.WriteLine($"Theor  {theorValue.Item1:E15} {theorValue.Item2:E15} {theorValue.Item3:E15}");
            var currAbsDiscX = Math.Abs(ans.Item1 - theorValue.Item1);
            var currAbsDiscY = Math.Abs(ans.Item2 - theorValue.Item2);
            var currAbsDiscZ = Math.Abs(ans.Item3 - theorValue.Item3);
            var currRelDiscX = currAbsDiscX / Math.Abs(theorValue.Item1);
            var currRelDiscY = currAbsDiscY / Math.Abs(theorValue.Item2);
            var currRelDiscZ = currAbsDiscZ / Math.Abs(theorValue.Item3);
            sw.WriteLine($"CurrAD {currAbsDiscX:E15} {currAbsDiscY:E15} {currAbsDiscZ:E15}");
            sw.WriteLine($"CurrRD {currRelDiscX:E15} {currRelDiscY:E15} {currRelDiscZ:E15}\n");
            absDiscX += currAbsDiscX;
            absDiscY += currAbsDiscY;
            absDiscZ += currAbsDiscZ;
            absDivX += theorValue.Item1;
            absDivY += theorValue.Item2;
            absDivZ += theorValue.Item3;
            relDiscX += currRelDiscX * currRelDiscX;
            relDiscY += currRelDiscY * currRelDiscY;
            relDiscZ += currRelDiscZ * currRelDiscZ;
            relDivX += theorValue.Item1 * theorValue.Item1;
            relDivY += theorValue.Item2 * theorValue.Item2;
            relDivZ += theorValue.Item3 * theorValue.Item3;
            iter++;
        }
        sw.WriteLine($"Avg disc: {absDiscX / iter:E15} {absDiscY / iter:E15} {absDiscZ / iter:E15}");
        sw.WriteLine($"Rel disc: {Math.Sqrt(relDiscX / relDivX):E15} {Math.Sqrt(relDiscY / relDivY):E15} {Math.Sqrt(relDiscZ / relDivZ):E15}");
        sw.Close();
    }

    public void MeasureValuesOnReceiversWithoutNormal(List<Point3D> recivers, string OutputPath)
    {
        using var sw_e = new StreamWriter(OutputPath + "E.txt");
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            var a_e = AdditioanalGetEAt(recivers[0].X, recivers[0].Y, recivers[0].Z, Time[t]);
            var b_e = AdditioanalGetEAt(recivers[1].X, recivers[1].Y, recivers[1].Z, Time[t]);
```

```
            var c_e = AdditioanalGetEAt(recivers[2].X, recivers[2].Y, recivers[2].Z, Time[t]);
            var d_e = AdditioanalGetEAt(recivers[3].X, recivers[3].Y, recivers[3].Z, Time[t]);
            var f_a_e = Math.Sqrt(a_e.Item1 * a_e.Item1 + a_e.Item2 * a_e.Item2 + a_e.Item3 * a_e.Item3);
            var f_b_e = Math.Sqrt(b_e.Item1 * b_e.Item1 + b_e.Item2 * b_e.Item2 + b_e.Item3 * b_e.Item3);
            var f_c_e = Math.Sqrt(c_e.Item1 * c_e.Item1 + c_e.Item2 * c_e.Item2 + c_e.Item3 * c_e.Item3);
            var f_d_e = Math.Sqrt(d_e.Item1 * d_e.Item1 + d_e.Item2 * d_e.Item2 + d_e.Item3 * d_e.Item3);
            sw_e.WriteLine($"{Time[t]} {f_a_e} {f_b_e} {f_c_e} {f_d_e}");
        }
        sw_e.Close();
    }

    public void MeasureValuesOnReceivers(List<Point3D> recivers, string OutputPath)
    {
        using var sw_a = new StreamWriter(OutputPath + "A.txt");
        using var sw_e = new StreamWriter(OutputPath + "E.txt");
        for (int t = 0; t < Time.Count; t++)
        {
            var a_a = GetAAt(recivers[0].X, recivers[0].Y, recivers[0].Z, Time[t]);
            var b_a = GetAAt(recivers[1].X, recivers[1].Y, recivers[1].Z, Time[t]);
            var c_a = GetAAt(recivers[2].X, recivers[2].Y, recivers[2].Z, Time[t]);
            var d_a = GetAAt(recivers[3].X, recivers[3].Y, recivers[3].Z, Time[t]);
            var f_a_a = Math.Sqrt(a_a.Item1 * a_a.Item1 + a_a.Item2 * a_a.Item2 + a_a.Item3 * a_a.Item3);
            var f_b_a = Math.Sqrt(b_a.Item1 * b_a.Item1 + b_a.Item2 * b_a.Item2 + b_a.Item3 * b_a.Item3);
            var f_c_a = Math.Sqrt(c_a.Item1 * c_a.Item1 + c_a.Item2 * c_a.Item2 + c_a.Item3 * c_a.Item3);
            var f_d_a = Math.Sqrt(d_a.Item1 * d_a.Item1 + d_a.Item2 * d_a.Item2 + d_a.Item3 * d_a.Item3);
            var a_e = GetEAt(recivers[0].X, recivers[0].Y, recivers[0].Z, Time[t]);
            var b_e = GetEAt(recivers[1].X, recivers[1].Y, recivers[1].Z, Time[t]);
            var c_e = GetEAt(recivers[2].X, recivers[2].Y, recivers[2].Z, Time[t]);
            var d_e = GetEAt(recivers[3].X, recivers[3].Y, recivers[3].Z, Time[t]);
            var f_a_e = Math.Sqrt(a_e.Item1 * a_e.Item1 + a_e.Item2 * a_e.Item2 + a_e.Item3 * a_e.Item3);
            var f_b_e = Math.Sqrt(b_e.Item1 * b_e.Item1 + b_e.Item2 * b_e.Item2 + b_e.Item3 * b_e.Item3);
            var f_c_e = Math.Sqrt(c_e.Item1 * c_e.Item1 + c_e.Item2 * c_e.Item2 + c_e.Item3 * c_e.Item3);
            var f_d_e = Math.Sqrt(d_e.Item1 * d_e.Item1 + d_e.Item2 * d_e.Item2 + d_e.Item3 * d_e.Item3);
            sw_a.WriteLine($"{Time[t]} {f_a_a} {f_b_a} {f_c_a} {f_d_a}");
            sw_e.WriteLine($"{Time[t]} {f_a_e} {f_b_e} {f_c_e} {f_d_e}");
        }
        sw_a.Close();
        sw_e.Close();
    }
}
```

Mesh.cs

```
using DataStructs;

namespace Grid;

public abstract class Mesh(List<Elem> elems) : ICloneable
{
    public abstract int ElemsAmount { get; set; }
    internal int bordersAmount;
    public List<Elem> Elems = elems;
    public abstract int NodesAmountTotal { get; }
    public abstract object Clone();
}
```

Mesh2Dim.cs

```
using System.Collections.Immutable;
using DataStructs;

namespace Grid;

public class Mesh2Dim(List<double> nodesR, string infoAboutR,
                      List<double> nodesZ, string infoAboutZ,
                      List<Elem> elems, double lastR) : Mesh(elems)
{
    public override int NodesAmountTotal => NodesAmountR * NodesAmountZ;
    public List<double> nodesR = [.. nodesR, lastR];
    public List<double> nodesZ = nodesZ;
    public override int ElemsAmount
    {
        get => (NodesAmountR - 1) * (NodesAmountZ - 1);
        set => ElemsAmount = value;
    }
    public int NodesAmountR => nodesR.Count;
    public int NodesAmountZ => nodesZ.Count;
    public List<int> NodesR_Refs = [0];
    public List<int> NodesZRefs = [0];
    internal ImmutableArray<double> NodesRWithoutFragmentation { get; set; } = [..
        nodesR, lastR];
    public ImmutableArray<double> NodesZWithoutFragmentation { get; set; } = [.. nodesZ];
    internal string infoAboutR = infoAboutR;
    internal string infoAboutZ = infoAboutZ;
    internal List<Border2D> borders = [];
    public void SetLastR(double val)
    {
        int i = 1;
        if (val <= nodesR[^i])
        {
            while (val < nodesR[^i]) i++;
            nodesR[^i] = val;
            nodesR = nodesR.Take(i + 1).ToList();
        }
        else
            nodesR.Add(val);
    }

    public void SetBorders(List<Border3D> borders3D)
    {
        // Set lower border.
        borders.Add(new Border2D(borders3D[0].BorderType, borders3D[0].BorderFormula,
                                 0, NodesRWithoutFragmentation.Length - 1, 0, 0));
        // Set left border.
        borders.Add(new Border2D(borders3D[1].BorderType, borders3D[1].BorderFormula,
                                 0, 0, 0, NodesZWithoutFragmentation.Length - 1));
        // Set right border.
        borders.Add(new Border2D(borders3D[3].BorderType, borders3D[3].BorderFormula,
                                 NodesRWithoutFragmentation.Length - 1,
                                 NodesRWithoutFragmentation.Length - 1,
                                 0, NodesZWithoutFragmentation.Length - 1));
        // Set upper border.
        borders.Add(new Border2D(borders3D[^1].BorderType, borders3D[^1].BorderFormula,
                                 0, NodesRWithoutFragmentation.Length - 1,
                                 NodesZWithoutFragmentation.Length - 1,
                                 NodesZWithoutFragmentation.Length - 1));
    }

    public override Mesh2Dim Clone() => (Mesh2Dim)MemberwiseClone();
}
```

Mesh3Dim.cs

```
using System.Collections.Immutable;
using DataStructs;

namespace Grid;

```

```
public class Mesh3Dim(List<double> nodesX, string infoAboutX,
                      List<double> nodesY, string infoAboutY,
                      List<double> nodesZ, string infoAboutZ,
                      List<Elem> elems, List<Border3D> borders) : Mesh(elems)
{
    public override int NodesAmountTotal
    {
        get => NodesAmountX * NodesAmountY * NodesAmountZ;
    }

    public override int ElemsAmount
    {
        get => (NodesAmountX - 1) * (NodesAmountY - 1) * (NodesAmountZ - 1);
        set => ElemsAmount = value;
    }

    public int NodesAmountX => nodesX.Count;
    public int NodesAmountY => nodesY.Count;
    public int NodesAmountZ => nodesZ.Count;
    public List<double> nodesX = nodesX;
    public List<double> nodesY = nodesY;
    public List<double> nodesZ = nodesZ;
    public void CommitFieldBorders(List<int> ints) => FieldBorders = ints;
    public void CommitAnomalyBorders(List<int> ints) => AnomalyBorders = ints;
    public void CommitSecondAnomalyBorders(List<int> ints) => SecondAnomaly = ints;
    public List<int> FieldBorders = [];
    public List<int> AnomalyBorders = [];
    public List<int> SecondAnomaly = [];
    internal ImmutableArray<double> NodesXWithoutFragmentation { get; set; } = [..
    ↪  nodesX];
    internal ImmutableArray<double> NodesYWithoutFragmentation { get; set; } = [..
    ↪  nodesY];
    public ImmutableArray<double> NodesZWithoutFragmentation { get; set; } = [.. nodesZ];
    internal string infoAboutX = infoAboutX;
    internal string infoAboutY = infoAboutY;
    internal string infoAboutZ = infoAboutZ;
    public List<int> NodesXRefs = [0];
    public List<int> NodesYRefs = [0];
    public List<int> NodesZRefs = [0];
    public List<Border3D> borders = borders;
    public ArrayOfRibs? arrayOfRibs;
    public override Mesh3Dim Clone() => (Mesh3Dim)MemberwiseClone();
}
```

LocalMatrix3D.cs

```
namespace MathObjects;

public class LocalMatrixG3D (double mu, double hx, double hy, double hz) : Matrix
{
    private readonly double _mu = mu;
    private readonly double _hx = hx;
    private readonly double _hy = hy;
    private readonly double _hz = hz;
    private readonly double[,] G1 = {{ 2.0D,  1.0D, -2.0D, -1.0D},
                                     { 1.0D,  2.0D, -1.0D, -2.0D},
                                     {-2.0D, -1.0D,  2.0D,  1.0D},
                                     {-1.0D, -2.0D,  1.0D,  2.0D}};
    private readonly double[,] G2 = {{ 2.0D, -2.0D,  1.0D, -1.0D},
                                     {-2.0D,  2.0D, -1.0D,  1.0D},
                                     { 1.0D, -1.0D,  2.0D, -2.0D},
                                     {-1.0D,  1.0D, -2.0D,  2.0D}};
    private readonly double[,] G3 = {{-2.0D,  2.0D, -1.0D,  1.0D},
                                     {-1.0D,  1.0D, -2.0D,  2.0D},
                                     { 2.0D, -2.0D,  1.0D, -1.0D},
                                     { 1.0D, -1.0D,  2.0D, -2.0D}};

    public override double this[int i, int j]
    {
        get
        {
            return (i / 4, j / 4)
            switch
```

```
            {
                (0, 0) => (_hx * _hy / (6.0D * _hz) * G1[i % 4, j % 4] + _hx * _hz / (6.0D * _hy) * G2[i % 4, j % 4]) / _mu,
                (0, 1) or (1, 0) => -1.0D * (_hz / 6.0D) * G2[i % 4, j % 4] / _mu,
                (0, 2) => _hy / 6.0D * G3[i % 4, j % 4] / _mu,
                (1, 1) => (_hx * _hy / (6.0D * _hz) * G1[i % 4, j % 4] + _hy * _hz / (6.0D * _hx) * G2[i % 4, j % 4]) / _mu,
                (1, 2) or (2, 1) => -1.0D * _hx / 6.0D * G1[i % 4, j % 4] / _mu,
                (2, 0) => _hy / 6.0D * G3[j % 4, i % 4] / _mu,
                (2, 2) => (_hx * _hz / (6.0D * _hy) * G1[i % 4, j % 4] + _hy * _hz / (6.0D * _hx) * G2[i % 4, j % 4]) / _mu,
                _ => throw new ArgumentOutOfRangeException("Out of local matrix 3d range"),
            };
        }
        set{}
    }
}

public class LocalMatrixM3D(double gamma, double hx, double hy, double hz) : Matrix
{
    private readonly double _gamma = gamma;
    private readonly double _hx = hx;
    private readonly double _hy = hy;
    private readonly double _hz = hz;
    private readonly double[,] D = {{4.0D, 2.0D, 2.0D, 1.0D},
                                    {2.0D, 4.0D, 1.0D, 2.0D},
                                    {2.0D, 1.0D, 4.0D, 2.0D},
                                    {1.0D, 2.0D, 2.0D, 4.0D}};

    public override double this[int i, int j]
    {
        get
        {
            return (i / 4, j / 4)
            switch
            {
                (0, 0) or (1, 1) or (2, 2) => _gamma * _hx * _hy * _hz / 36.0D * D[i % 4, j % 4],
                (0, 1) or (0, 2) or (1, 0) or (1, 2) or (2, 0) or (2, 1) => 0.0D,
                _ => throw new ArgumentOutOfRangeException("Out of local matrix 3d range"),
            };
        }
        set
        {}
    }
}
```

LocalVector3D.cs

```
using static Functions.Function;

namespace MathObjects;


public class LocalVector3D(Egetter egetter, double x0, double x1, double y0, double y1, double z0, double z1, double t) : Vector
{
    private readonly double x0 = x0;
    private readonly double x1 = x1;
    private readonly double y0 = y0;
    private readonly double y1 = y1;
    private readonly double z0 = z0;
    private readonly double z1 = z1;
    private readonly double xm = 0.5D * (x1 + x0);
    private readonly double ym = 0.5D * (y1 + y0);
    private readonly double zm = 0.5D * (z1 + z0);
    private readonly double t = t;

    private readonly LocalMatrixM3D M = new(1.0, x1 - x0, y1 - y0, z1 - z0);
    private readonly Egetter _egetter = egetter;

```

```
    public override double this[int i]
    {
        get
        {
            static double ScalarMult((double, double, double) a, (double, double, double) b)
            => a.Item1 * b.Item1 + a.Item2 * b.Item2 + a.Item3 * b.Item3;
            List<double> vect = [
                ScalarMult(_egetter(xm, y0, z0, t), (1.0D, 0.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(xm, y1, z0, t), (1.0D, 0.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(xm, y0, z1, t), (1.0D, 0.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(xm, y1, z1, t), (1.0D, 0.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x0, ym, z0, t), (0.0D, 1.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x1, ym, z0, t), (0.0D, 1.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x0, ym, z1, t), (0.0D, 1.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x1, ym, z1, t), (0.0D, 1.0D, 0.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x0, y0, zm, t), (0.0D, 0.0D, 1.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x1, y0, zm, t), (0.0D, 0.0D, 1.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x0, y1, zm, t), (0.0D, 0.0D, 1.0D)),
                ScalarMult(_egetter(x1, y1, zm, t), (0.0D, 0.0D, 1.0D))
            ];
            double ans = 0.0D;
            for (int j = 0; j < vect.Count; j++)
                ans += M[i, j] * vect[j];
            return ans;
        }
    }
}
```

MathOperations.cs

```
using System.Threading.Tasks;

namespace MathObjects;

public static class MathOperations
{
    public static GlobalVector Diff(GlobalVector gv1, GlobalVector gv2)
    {
        if (gv1.Size != gv2.Size)
            throw new Exception("Найти разность векторов не возможно, т.к. они имеют разные размеры.");

        GlobalVector gv = new(gv1.Size);
        for (int i = 0; i < gv.Size; i++)
            gv[i] = gv1[i] - gv2[i];

        return gv;
    }

    public static GlobalVector DiffPar(GlobalVector gv1, GlobalVector gv2)
    {
        if (gv1.Size != gv2.Size)
            throw new Exception("Найти разность векторов не возможно, т.к. они имеют разные размеры.");
        GlobalVector gv = new(gv1.Size);
        Parallel.For(0, gv1.Size, i => {
            gv[i] = gv1[i] - gv2[i];
        });
        return gv;
    }

    public static GlobalVector Sum(GlobalVector gv1, GlobalVector gv2)
    {
        if (gv1.Size != gv2.Size)
            throw new Exception("Найти разность векторов не возможно, т.к. они имеют разные размеры.");

        GlobalVector gv = new(gv1.Size);
        for (int i = 0; i < gv.Size; i++)
            gv[i] = gv1[i] + gv2[i];

```

```
        return gv;
    }

    public static GlobalVector SumPar(GlobalVector gv1, GlobalVector gv2)
    {
        if (gv1.Size != gv2.Size)
            throw new Exception("Найти разность векторов не возможно, т.к. они имеют
            ↪  разные размеры.");

        GlobalVector gv = new(gv1.Size);
        Parallel.For(0, gv1.Size, i => {
            gv[i] = gv1[i] + gv2[i];
        });
        return gv;
    }

    public static GlobalVector Multiply(double a, GlobalVector gv)
    {
        GlobalVector _gv = new(gv.Size);
        for (int i = 0; i < gv.Size; i++)
            _gv[i] = a * gv[i];
        return _gv;
    }

    public static GlobalVector MultiplyPar(double a, GlobalVector gv)
    {
        GlobalVector _gv = new(gv.Size);
        Parallel.For(0, gv.Size, i => {
            _gv[i] = a * gv[i];
        });
        return _gv;
    }

    public static double Multiply(GlobalVector gv1, GlobalVector gv2)
    {
        if (gv1.Size != gv2.Size) throw new Exception("Невозможно найти скалярное
        ↪  умножение векторов, из-за разности в размерах.");
        double ans = 0.0D;
        for (int i = 0; i < gv1.Size; i++)
            ans += gv1[i] * gv2[i];
        return ans;
    }

    public static double MultiplyPar(GlobalVector gv1, GlobalVector gv2)
    {
        if (gv1.Size != gv2.Size) throw new Exception("Невозможно найти скалярное
        ↪  умножение векторов, из-за разности в размерах.");
        double ans = 0.0D;
        Parallel.For(0, gv1.Size, i => {
            ans = gv1[i] * gv2[i];
        });
        return ans;
    }


    public static GlobalVector Multiply(GlobalMatrix _gm, GlobalVector _gv)
    {
        if (_gm.Size != _gv.Size)
            throw new Exception("Невозможно перемножить матрицу на вектор.");
        GlobalVector ans = new(_gv.Size);

        for (int i = 0; i < _gv.Size; i++)
        {
            for (int j = 0; j < _gm._ig[i + 1] - _gm._ig[i]; j++)
            {
                ans[i] += _gm._al[_gm._ig[i] + j] * _gv[_gm._jg[_gm._ig[i] + j]];
                ans[_gm._jg[_gm._ig[i] + j]] += _gm._au[_gm._ig[i] + j] * _gv[i];
            }
            ans[i] += _gm._diag[i] * _gv[i];
        }
        return ans;
    }

    public static GlobalVector CustomMultiply(GlobalMatrix _gm, GlobalVector _gv)
    {
        if (_gm.Size != _gv.Size)
```

```
            throw new Exception("Невозможно перемножить матрицу на вектор.");
        GlobalVector ans = new(_gv.Size);

        for (int i = 0; i < _gv.Size; i++)
        {
            for (int j = _gm._ig[i]; j < _gm._ig[i + 1]; j++)
            {
                ans[i] += _gm._al[j] * _gv[_gm._jg[j]];
                ans[_gm._jg[j]] += _gm._au[j] * _gv[i];
            }
            ans[i] += _gm._diag[i] * _gv[i];
        }
        return ans;
    }


    public static GlobalVector MultiplyPar(GlobalMatrix _gm, GlobalVector _gv)
    {
        if (_gm.Size != _gv.Size)
            throw new Exception("Невозможно перемножить матрицу на вектор.");
        GlobalVector ans = new(_gv.Size);

        for (int i = 0; i < _gv.Size; i++)
        {
            Parallel.For(0, _gm._ig[i + 1] - _gm._ig[i], j => {
                ans[i] += _gm._al[_gm._ig[i] + j] * _gv[_gm._jg[_gm._ig[i] + j]];
            });
            Parallel.For(0, _gm._ig[i + 1] - _gm._ig[i], j => {
                ans[_gm._jg[_gm._ig[i] + j]] += _gm._au[_gm._ig[i] + j] * _gv[i];
            });
            ans[i] += _gm._diag[i] * _gv[i];
        }
        return ans;
    }


    public static GlobalMatrix Multiply(double a, GlobalMatrix gm)
    {
        var ans = new GlobalMatrix(gm);
        for (int i = 0; i < ans.Size; i++)
        {
            for (int j = 0; j < ans._ig[i + 1] - ans._ig[i]; j++)
            {
                ans._al[ans._ig[i] + j] *= a;
                ans._au[ans._ig[i] + j] *= a;
            }
            ans._diag[i] *= a;
        }
        return ans;
    }


    public static GlobalMatrix MultiplyPar(double a, GlobalMatrix gm)
    {
        var ans = new GlobalMatrix(gm);
        Parallel.For(0, ans.Size, i => {
            for (int j = 0; j < ans._ig[i + 1] - ans._ig[i]; j++)
            {
                ans._al[ans._ig[i] + j] *= a;
                ans._au[ans._ig[i] + j] *= a;
            }
            ans._diag[i] *= a;
        });
        return ans;
    }


    public static GlobalMatrix Sum(GlobalMatrix gm1, GlobalMatrix gm2)
    {
        if (!gm1.CheckPortrait(gm2)) throw new ArgumentException("Different matrixes
        ↪  portrait!");
        GlobalMatrix ans = new(gm1);
        for (int i = 0; i < ans.Size; i++)
        {
            for (int j = 0; j < ans._ig[i + 1] - ans._ig[i]; j++)
            {
```

```
                ans._al[ans._ig[i] + j] += gm2._al[gm2._ig[i] + j];
                ans._au[ans._ig[i] + j] += gm2._au[gm2._ig[i] + j];
            }
            ans._diag[i] += gm2._diag[i];
        }
        return ans;
    }


    public static GlobalMatrix SumPar(GlobalMatrix gm1, GlobalMatrix gm2)
    {
        if (!gm1.CheckPortrait(gm2)) throw new ArgumentException("Different matrixes
         ↪  portrait!");
        GlobalMatrix ans = new(gm1);

        Parallel.For(0, ans.Size, i => {
            for (int j = 0; j < ans._ig[i + 1] - ans._ig[i]; j++)
            {
                ans._al[ans._ig[i] + j] += gm2._al[gm2._ig[i] + j];
                ans._au[ans._ig[i] + j] += gm2._au[gm2._ig[i] + j];
            }
            ans._diag[i] += gm2._diag[i];
        });
        return ans;
    }
}
```

LULOS.cs

```
public class LU_LOS(int maxIter = 100_000, double eps = 1E-15) : ISolver
{
    private int _maxIter = maxIter;
    private double _eps = eps;

    private static void PartitialLU(GlobalMatrix A)
    {
        for (int i = 0; i < A.Size; i++)
        {
            for (int j = A._ig[i]; j < A._ig[i + 1]; j++)
            {
                int jCol = A._jg[j];
                int jk = A._ig[jCol];
                int k = A._ig[i];
                int sdvig = A._jg[A._ig[i]] - A._jg[A._ig[jCol]];
                if (sdvig > 0) jk += sdvig;
                else k -= sdvig;
                double sumL = 0.0;
                double sumU = 0.0;
                for (; k < j && jk < A._ig[jCol + 1]; k++, jk++)
                {
                    sumL += A._al[k] * A._au[jk];
                    sumU += A._au[k] * A._al[jk];
                }
                A._al[j] -= sumL;
                A._au[j] -= sumU;
                A._au[j] /= A._diag[jCol];
            }
            double sumD = 0.0;
            for (int j = A._ig[i]; j < A._ig[i + 1]; j++)
                sumD += A._al[j] * A._au[j];
            A._diag[i] -= sumD;
        }
    }

    private static GlobalVector Forward(GlobalMatrix Matrix, GlobalVector b)
    {
        var result = new GlobalVector(b);
        for (int i = 0; i < Matrix.Size; i++)
        {
            for (int j = Matrix._ig[i]; j < Matrix._ig[i + 1]; j++)
                result[i] -= Matrix._al[j] * result[Matrix._jg[j]];
            result[i] /= Matrix._diag[i];
```

```
        }
        return result;
    }

    private static GlobalVector Backward(GlobalMatrix A, GlobalVector b)
    {
        var result = new GlobalVector(b);
        for (int i = A.Size - 1; i >= 0; i--)
            for (int j = A._ig[i + 1] - 1; j >= A._ig[i]; j--)
                result[A._jg[j]] -= A._au[j] * result[i];
        return result;
    }

    public (GlobalVector, GlobalVector) Solve(GlobalMatrix A, GlobalVector b)
    {
        GlobalVector x = new(b.Size);
        GlobalVector x_ = new(b.Size);
        GlobalMatrix LU = new(A);
        PartialLU(LU);
        GlobalVector r = Forward(LU, b - A * x);
        var r0 = new GlobalVector(r);
        GlobalVector z = Backward(LU, r);
        GlobalVector p = Forward(LU, A * z);
        GlobalVector tmp = new(b.Size);
        GlobalVector r_ = new(b.Size);
        GlobalVector z_ = new(b.Size);
        GlobalVector p_ = new(b.Size);
        double alph = 0.0D;
        double beta = 0.0D;
        int iter = 0;
        do
        {
            x_ = x;
            z_ = z;
            r_ = r;
            p_ = p;
            alph = (p_ * r_) / (p_ * p_);
            x = x_ + alph * z_;
            r = r_ - alph * p_;
            tmp = Forward(LU, A * Backward(LU, r));
            beta = -1.0D * (p_ * tmp) / (p_ * p_);
            z = Backward(LU, r) + beta * z_;
            p = tmp + beta * p_;
            iter++;
            if (iter % 10 == 0)
                Console.WriteLine($"{(r.Norma() * r.Norma()) / (r0.Norma() * r0.Norma()):E15}");
        } while (iter < _maxIter && (r.Norma() * r.Norma()) / (r0.Norma() * r0.Norma()) >= _eps * _eps);
        Console.WriteLine(
        $@"Computing finished!
Total iterations: {iter}
Relative residuality: {r.Norma() / b.Norma():E15}");
        return (x, x_);
    }
}
```