



Lomonosov Moscow  
State University

## Механико-математический факультет

### АЛГЕБРА, 3 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Авторы: Соколов Егор

Группа: 208

Контакт: [Мой телеграм для связи](#)

Наши конспекты: [Телеграм-канал с конспектами](#)

Москва

Последняя компиляция: 3 января 2026 г.

# Содержание

<b>1 Группы</b>	<b>3</b>
1.1 Основные понятия . . . . .	3
1.2 Циклические группы . . . . .	10
1.3 Смежные классы . . . . .	12
1.4 Факторгруппа . . . . .	17
1.5 Гомоморфизмы групп . . . . .	18
<b>2 Свободные группы</b>	<b>21</b>
2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями . . . . .	24
<b>3 Прямое произведение групп</b>	<b>28</b>
3.1 Внешнее прямое произведение . . . . .	28
3.2 Внутреннее прямое произведение . . . . .	29
3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением . . . . .	32
<b>4 Конечнопорождённые абелевы группы</b>	<b>34</b>
4.1 Связь между базисами свободной абелевой группы . . . . .	38
4.2 Элементарные преобразования свободных абелевых групп . . . . .	39
4.3 Согласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы . . . . .	42
4.4 Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах . . . . .	44
<b>5 Действия группы на множестве</b>	<b>52</b>
5.1 Орбиты и стабилизаторы . . . . .	53
5.2 Действия группы на себе . . . . .	57
5.3 Классы сопряжённости и централизаторы . . . . .	59
<b>6 Теоремы Силова</b>	<b>63</b>
6.1 I теорема Силова . . . . .	63
6.2 II теорема Силова . . . . .	65
6.3 Нормализатор. III теорема Силова . . . . .	66
<b>7 Коммутант</b>	<b>68</b>
7.1 Коммутанты некоторых известных групп . . . . .	69
<b>8 Разрешимые и простые группы</b>	<b>72</b>
8.1 Разрешимые группы . . . . .	72
8.2 Простые группы . . . . .	74
8.3 Значение простых групп . . . . .	75
8.4 Примеры простых групп . . . . .	76
<b>9 Линейные представления</b>	<b>80</b>
9.1 Матричные представления группы . . . . .	81
9.2 Приводимость линейных представлений . . . . .	82
9.2.1 Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп .	85
9.2.2 Одномерные комплексные представления группы . . . . .	86
9.3 Вполне приводимые линейные представления . . . . .	87
9.3.1 Ортогональные (унитарные) представления . . . . .	92
9.4 Неприводимые линейные представления над $\mathbb{C}$ . . . . .	93
9.5 Характеры комплексных линейных представлений . . . . .	97
9.5.1 Пространство центральных функций . . . . .	101

<b>10 Кольца и поля</b>	<b>105</b>
10.1 Идеалы колец и факторкольца . . . . .	107
10.2 Гомоморфизмы колец . . . . .	109
10.3 Главный идеал . . . . .	110
10.4 Расширения полей . . . . .	115
10.4.1 Конечные расширения полей . . . . .	115
10.4.2 Алгебраические расширения полей . . . . .	118
10.4.3 Конечнопорождённые расширения полей . . . . .	121
10.4.4 Алгебраическое замыкание . . . . .	122
10.5 Поле разложения многочлена . . . . .	124
10.6 Конечные поля . . . . .	126
<b>11 Материал для самостоятельного изучения</b>	<b>129</b>
11.1 Алгебры над полем . . . . .	129
11.2 Алгебра кватернионов . . . . .	130

# 1 Группы

## 1.1 Основные понятия

**Определение.** Пусть  $G$  — множество. Бинарной операцией на  $G$  называется отображение  $* : G \times G \rightarrow G$ .

**Определение.** Множество  $G$  с бинарной операцией  $*$  называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c;$
2.  $\exists e \in G : \forall a \in G \quad a * e = e * a = a;$
3.  $\forall a \in G \quad \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Различные формы записи группы:

1. Мультипликативная форма (терминология):  
Операция — ”·” (умножение);  
Нейтральный элемент — единичный (1);  
Элемент из аксиомы 3 — обратный ( $a^{-1}$  для  $a \in G$ );
2. Аддитивная форма (терминология):  
Операция — ”+” (сложение);  
Нейтральный элемент — нулевой (0);  
Элемент из аксиомы 3 — противоположный ( $-a$  для  $a \in G$ );

**Определение.** Если  $G$  — группа и  $\forall a, b \in G \quad a \cdot b = b \cdot a$ , то  $G$  — абелева (коммутативная) группа.

*Замечание.* Обычно для обозначения абелевых групп будем использовать аддитивную форму записи, для иных — мультипликативную.

**Утверждение** (Простейшие свойства групп).

1. Единичный элемент единственный;
2.  $\forall a \in G$  обратный к  $a$  элемент единственный;
3.  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ;
4. Если  $a, b \in G$ , то решение уравнения  $ax = b$  ( $xa = b$ ) единственно.

*Доказательство.*

1. (От противного) Допустим, что  $\exists e_1, e_2 \in A$  — единичные. Тогда  $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$  по определению единичного элемента.

2. Допустим  $\exists b_1, b_2$  — обратные к  $a$  элементы:  $b_1 \neq b_2$

В силу ассоциативности:

$$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$

$$b_1 * e = e * b_2$$

$$b_1 = b_2$$

$$3. abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e;$$

$$b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = e \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

$$4. ax = b \iff a^{-1}ax = a^{-1}b \iff x = a^{-1}b;$$

$$xa = b \iff xaa^{-1} = ba^{-1} \iff x = ba^{-1};$$

□

**Определение.** Группа  $G$  называется тривиальной, если  $G = \{e\}$ .

**Определение.** Мощность множества  $G$  называется порядком группы  $G$ .

Обозначается  $|G|$ .

Если  $|G| < \infty$ , то группа называется конечной, иначе бесконечной.

**Примеры.**

1.  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_n, +)$ ;

2.  $GL_n(F)$  — группа невырожденных матриц порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $F$ ;

3. Пусть  $\Omega$  — множество. Преобразованиями  $\Omega$  назовём биекции  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ .

$S(\Omega)$  — множество всех преобразований  $\Omega$  — образует группу относительно композиции.

Если  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ , то  $S(n) = S_n$  — группа подстановок.

4. Если  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$  — конечная группа, то её можно задать с помощью таблицы умножения (таблицы Кэли).

Например, для  $Z_2 = \{0, 1\}$ :

	0	1
0	0	1
1	1	0

5. Группа кватернионов:  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Таблица Кэли для кватернионов:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

**Определение.** Подмножество  $H \subseteq G$  называется подгруппой группы  $G$ , если:

1.  $\forall a, b \in H \ ab \in H;$
2.  $\forall a \in H \ a^{-1} \in H;$
3.  $1 \in H$  (можно заменить на  $H \neq \emptyset$ )

Обозначается  $H \leq G$ .

**Утверждение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  является группой относительно бинарной операции группы  $G$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$  ( $\mathbb{N} \not\leq \mathbb{Z}$ , т.к. не группа);
2.  $GL_n(F) \geq SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$  — унимодулярная группа.
3.  $GL_n(F) \geq O_n(F) \geq SO_n(F)$  ( $O_n(F)$  — ортогональная группа,  $SO_n(F)$  — специальная ортогональная группа);
4.  $GL_n(F) \geq$  группа строго треугольных матриц.

**Определение.** Любая подгруппа группы  $S(\Omega)$  называется группой преобразований множества  $\Omega$ .

**Примеры.**

1.  $GL(V)$  ( $\leq S(V)$ ) — группа всех невырожденных линейных операторов векторного пространства  $V$ ;
2.  $Aff(\mathbb{A})$  — группа всех невырожденных аффинных преобразований аффинного пространства  $\mathbb{A}$ ;

3.  $\mathcal{E}^2$  — аффинно-евклидово двумерное пространство.  
 $\text{Isom } \mathcal{E}^2$  — группа изометрий (движений) на  $\mathcal{E}^2$ .  
 $\text{Isom } \mathcal{E}^2 \geq O_2 \geq SO_2$ , где  $O_2$  — группа движений, сохраняющих точку  $O$ ,  $SO_2$  — группа поворотов вокруг точки  $O$ .
4.  $T \subseteq \mathcal{E}^2$  — некоторая фигура.  
 $\text{Sym } T = \{f \in \text{Isom } \mathcal{E}^2 \mid f(T) = T\}$  — группа симметрий фигуры  $T$ .
  - Если  $T$  — окружность с центром в точке  $O$ , то  $\text{Sym } T = O_2$ ;
  - Если  $T$  — правильный  $n$ -угольник с центром в точке  $O$ , то  $\text{Sym } T = D_n$  — группа Диэдра.  
 $|D_n| = 2n$ , т.к.  $n$  поворотов и  $n$  симметрий.

**Определение.** Пусть  $(G_1, *, e_1), (G_2, \circ, e_2)$  — группы. Отображение  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  — изоморфизм, если

1.  $\varphi$  — биекция;
2.  $\forall a, b \in G_1 \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Если между  $G_1$  и  $G_2$  существует изоморфизм, то  $G_1$  и  $G_2$  называются изоморфными. Обозначается  $G_1 \simeq G_2$ .

**Пример.**  $D_3 \simeq S_3$ .

*Доказательство.*  $D_3$  — группа движений, переводящая равносторонний треугольник в себя. Если пронумеровать вершины изначального треугольника, то каждый элемент группы  $D_3$  будет соответствовать подстановке, переводящей старый порядок вершин в новый. Определение изоморфизма проверяется очевидно.  $\square$

**Утверждение.** Изоморфность групп — отношение эквивалентности на множестве групп.

**Утверждение** (Свойства изоморфизмов).

1.  $\varphi(e_1) = e_2$ ;
2.  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ ;
3.  $G_1 \simeq G_2 \implies |G_1| = |G_2|$ .

*Замечание.* Обратное утверждение неверно (например,  $S_3 \not\simeq \mathbb{Z}_6$ ).

**Пример.**  $SO_2 \simeq (U, \cdot)$ , где  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e)$  — группа,  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ . Мультипликативный термин — элемент  $g$  в степени  $k$ :

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_k, & k > 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{-k}, & k < 0 \\ e, & k = 0 \end{cases}$$

**Определение.** Пусть  $(G, +, e)$  — группа,  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ .

Аддитивный термин — кратное элемента  $g$ :

$$kg = \begin{cases} \underbrace{g + g + \dots + g}_k, & k > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-k}, & k < 0 \\ e, & k = 0 \end{cases}$$

**Утверждение** (Свойства  $(k, m \in \mathbb{Z}, g \in G)$ ).

$$1. g^k \cdot g^m = g^{k+m};$$

$$2. (g^k)^m = g^{km};$$

$$3. (g^k)^{-1} = g^{-k}.$$

**Утверждение.** Множество всех элементов  $g^k$ , где  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ , образует подгруппу в  $G$ . Обозначается  $\langle g \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$ .

**Определение.**  $\langle g \rangle$  — циклическая подгруппа, порождённая элементом  $g$ .

**Примеры.**

$$1. G = \mathbb{Z} : \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z} — чётные целые числа;$$

$$2. G = \mathbb{Z}_6 : \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\};$$

$$3. G = \mathbb{C} : \langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$$

Пусть  $(G, \cdot, e)$  — группа,  $g \in G$ . Если  $\forall k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m \implies g^k \neq g^m$ , то  $\langle g \rangle$  — бесконечная (элемент  $g$  имеет бесконечный порядок).

Если  $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m, g^k = g^m \implies g^{k-m} = e \implies$  существует наименьшее  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $g^n = e$  (элемент  $g$  имеет порядок  $n$ )

**Определение.** Порядком элемента  $g \in G$  называется наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $g^n = e$ , если такое существует. Иначе говорят, что элемент  $g$  имеет бесконечный порядок. Обозначается  $\text{ord } g$ .

### Примеры.

1.  $G = \mathbb{Z} : \text{ord } 2 = \infty$ ;
2.  $G = \mathbb{Z}_{12} : \text{ord } 2 = 6$ ;
3.  $G = \mathbb{C}^* : \text{ord } 2 = \infty$   
( $\mathbb{C}^*$  — мультиPLICATивная группа поля,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  относительно умножения).

**Утверждение 1** (Свойства элементов конечного порядка).

1.  $g^m = e \iff \text{ord } g \mid m$ ;
2.  $g^m = g^l \iff m \equiv l \pmod{\text{ord } g}$

*Доказательство.*

1. Разделим  $m$  на  $n = \text{ord } g$  с остатком:  $m = nq + r$ , где  $0 \leq r < n$ . Тогда:

$$e = g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r \implies r = 0$$

так как  $r < n$ , где  $n$  — минимальное натуральное число такое, что  $g^n = e$ .

2. Следует из 1.

□

**Следствие.**  $\text{ord } g = |\langle g \rangle|$

*Доказательство.* Если  $\text{ord } g = \infty : \forall k \neq l, g^k \neq g^l \implies$  подгруппа  $\langle g \rangle = \{e, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, \dots\}$  бесконечна.

Если  $\text{ord } g = n : \langle g \rangle = \{e, g^1, \dots, g^{n-1}\}$  — все эти элементы различны из пункта 2 утверждения, а других нет по определению порядка. □

### Примеры.

1.  $i \in \mathbb{C}^* — \text{ord } i = 4$ ;

2.  $\sigma \in S_n$ :

Если  $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$  — цикл длины  $k$ , то  $\text{ord } \sigma = k$ .

Так как любая подстановка раскладывается в произведение независимых циклов и независимые циклы коммутируют, если  $\sigma = \tau_1 \dots \tau_n$ , где  $\tau_i$  — независимые циклы, то верно:  $\text{ord } \sigma = \text{НОД} \{|\tau_1|, \dots, |\tau_n|\}$ .

Например,  $\sigma = (23)(145) \implies \text{ord } \sigma = 6$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $n = \text{ord } g$ . Тогда  $\text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\text{ord } g^k = m$ . Из утверждения 1:  $g^{mk} = e \iff n | mk$ , откуда  $\frac{n}{\text{НОД}(n,k)} | m$ , т.е.  $m \geq \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ . Очевидно, что при  $m = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$   $n | mk$ .  $\square$

**Определение.** Множество  $S \subseteq G$  называется порождающим множеством для группы  $G$ , если  $\forall g \in G \exists s_1, \dots, s_k \in S : g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$  ( $s_i$  не обязательно различны).

При этом говорят, что  $G$  порождается множеством  $S$ .

Если  $\exists$  конечное множество  $S$  такое, что  $S$  порождает  $G$ , то  $G$  называется конечно порождённой, и бесконечно порождённой иначе.

Обозначается  $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} | \varepsilon_i = \pm 1\}$  — группа, порождённая  $S$ .

### Примеры.

1.  $S_n = \langle \text{все транспозиции} \rangle$ ;

2.  $GL_n(F) = \langle \text{все элементарные матрицы} \rangle$

3.  $Q_8 = \langle i, j \rangle$ ;

4.  $D_n = \langle \alpha, s \rangle$ , где  $\alpha$  — поворот на  $\frac{2\pi}{n}$ , а  $s$  — любая из симметрий.

5. Группа Клейна:  $H = \{\text{id}, a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)\} \leq S_4$

Это группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом:  $a, c$  — симметрии относительно средних линий,  $b$  — поворот на  $\pi$  вокруг центра.

Таблица Кэли для группы Клейна:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Отсюда  $\{e, a, b, c\} = \langle a, b \rangle$ .

6.  $\mathbb{Q}$  — бесконечно порождённая.

## 1.2 Циклические группы

**Определение.** Группа  $G$  называется циклической, если  $G$  порождается одним элементом, т.е.  $\exists g \in G : \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$ . Элемент  $g$  также называется образующим элементом группы  $G$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$ ;
2.  $U_n$  — множество всех комплексных корней степени  $n$  из 1.  
 $U_n$  — группа относительно умножения, причём  $U_n = \langle \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \rangle$ .

**Утверждение 3.** Если  $G = \langle g \rangle$ , то  $|G| = \text{ord } g$ .

*Доказательство.* Очевидно из определения порождающего множества.  $\square$

*Замечание.* Для групп конечного порядка, очевидно, выполняется и обратное утверждение: если  $\text{ord } g = |G| < \infty$ , то  $G = \langle g \rangle$ .

Далее циклическую группу порядка  $n$  будем обозначать  $\langle g \rangle_n$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $G = \langle g \rangle_n$ . Тогда  $G = \langle g^k \rangle \iff \text{НОД}(k, n) = 1$ .

*Доказательство.* Из утверждения 3  $|G| = \text{ord } g$ . Тогда:

$$G = \langle g^k \rangle \iff \text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)} = n \iff \text{НОД}(n, k) = 1$$

$\square$

**Теорема 1** (Классификация циклических групп).

1. Если циклическая группа  $G$  бесконечна, то  $G \simeq \mathbb{Z}$ ;
2. Если циклическая группа  $G$  конечна и имеет порядок  $n$ , то  $G \simeq \mathbb{Z}_n$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\text{ord } g = \infty, \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$

Рассмотрим отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$  такого вида:  $\varphi : g^k \mapsto k$ . Очевидно, что  $\varphi$  — сюръекция (в  $k \in \mathbb{Z}$  перешёл  $g^k \in G$ ).

$\varphi(g^k) = \varphi(g^m) \implies k = m \implies g^k = g^m$  — отсюда  $\varphi$  — инъекция.

Проверим сохранение операции:

$$\varphi(g^k \cdot g^m) = \varphi(g^{k+m}) = k + m = \varphi(g^k) + \varphi(g^m)$$

Отсюда  $\varphi$  — изоморфизм.

2. Пусть  $\text{ord } g = n$ . Рассмотрим отображение  $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$  такого вида:  $\varphi : k \mapsto g^k$ . Очевидно, что  $\varphi$  — сюръекция (в  $g^k \in G$  перешёл  $k \in \mathbb{Z}_n$ ).  
 $k \equiv m \pmod{n} \iff g^k = g^m$  — отсюда  $\varphi$  — инъекция.  
Сохранение операции — аналогично пункту 1.  
Отсюда  $\varphi$  — изоморфизм.

□

**Следствие.** Если  $G_1, G_2$  — циклические группы, то  $G_1 \simeq G_2 \iff |G_1| = |G_2|$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : верно всегда;

$\impliedby$ : из теоремы: если  $G_1$  бесконечна, то  $G_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq G_2$ , иначе  $G_1 \simeq \mathbb{Z}_n \simeq G_2$ , где  $n = |G_1| = |G_2|$ . □

**Теорема 2.**

1. Любая подгруппа циклической группы является циклической.
2. Подгруппы циклической группы  $G$  порядка  $n$  находятся во взаимно однозначном соответствии с делителями  $n$ , т.е.

$$\forall H \leq G \quad |H| \mid n \quad \text{и} \quad \forall d \mid n \quad \exists! \quad H \leq G : |H| = d$$

3. Подгруппы группы  $\mathbb{Z}$  исчерпываются группами  $k\mathbb{Z} = \langle k \rangle$ , где  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $G = \langle g \rangle, H \leq G$ . Если  $H = \{e\}$ , то  $H = \langle e \rangle$ .

При  $H \neq \{e\} : \forall h \in H \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$ . Так как  $g^k \in H \implies g^{-k} \in H$  и в  $H$  есть элемент, отличный от  $e$ ,  $\exists$  наименьшее  $k \in \mathbb{N} : g^k \in H$ .

Докажем, что  $H = \langle g^k \rangle$ . Рассмотрим произвольный  $g^m \in H$ . Разделим  $m$  на  $k$  с остатком:  $m = kq + r, 0 \leq r < k$ . Тогда:

$$g^m = (g^k)^q \cdot g^r \implies g^r = (g^k)^{-q} \cdot g^m$$

то есть  $g^r \in H$ , а в силу того, что  $k$  — наименьшее натуральное число такое, что  $g^k \in H$ , имеем  $r = 0$ . Значит,  $g^m = (g^k)^q$ , а отсюда  $H = \langle g^k \rangle$ .

$$2. G = \langle g \rangle_n, H \leq G \xrightarrow{1} H = \langle g^k \rangle.$$

Так как  $g^n = e \in H$ , то в силу рассуждений пункта 1 при  $m = n$  получаем  $k|n \Rightarrow n = kq$ .

Отсюда  $H = \{e, g^k, g^{2k}, \dots, g^{(q-1)k}\} \Rightarrow |H| = q$ , где  $q|n$ .

Обратно,  $\forall d|n \exists! H = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$  (в силу описания выше других подгрупп такого порядка нет).

$$3. \text{ Из пункта 1 в аддитивной форме получаем, что } H \leq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \Rightarrow H = \langle k \cdot 1 \rangle$$

□

**Следствие.** В циклической группе простого порядка существуют ровно две подгруппы — тривиальная и сама группа.

**Примеры.**

$$1. H \leq \mathbb{Z}_5 \Rightarrow H = \{0\}, H = \mathbb{Z}_5;$$

$$2. H \leq \mathbb{Z}_6 \Rightarrow H = \{0\}, H = \langle 2 \rangle, H = \langle 3 \rangle, H = \mathbb{Z}_6.$$

### 1.3 Смежные классы

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e)$  — произвольная группа,  $H \leq G, g \in G$ .

Рассмотрим множества:

$gH = \{gh | h \in H\}$  — левый смежный класс  $G$  по  $H$  с представителем  $g$

$Hg = \{hg | h \in H\}$  — правый смежный класс  $G$  по  $H$  с представителем  $g$

**Утверждение** (Свойства смежных классов).

$$1. \forall a \in G \quad a \in aH;$$

2. если  $a \in bH$ , то  $bH = aH$ ; в частности, любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

$$3. aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H;$$

(Верны аналогичные утверждения для правых смежных классов)

*Доказательство.*

1. Очевидно;

$$2. a \in bH \Rightarrow \exists h \in H : a = bh \Rightarrow \forall \tilde{h} \in H \quad a\tilde{h} = b\tilde{h}h \in bH \Rightarrow aH \subseteq bH.$$

Аналогично  $bH \subseteq aH \Rightarrow aH = bH$ .

3.  $\Rightarrow$ :  $aH = bH \Rightarrow a \in bH (a \in aH) \Rightarrow \exists h \in H : a = bh \Rightarrow b^{-1}a = h \in H$   
 $\Leftarrow$ :  $b^{-1}a = h \in H \Rightarrow a = bh \Rightarrow aH = bH$  по пункту 2.

□

**Утверждение.** Отношение  $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$  является отношением эквивалентности, причём классы эквивалентности совпадают с левыми смежными классами (аналогично  $ab^{-1} \in H$  для правых).

*Доказательство.*

- Рефлексивность:  $a^{-1}a = e \in H \Rightarrow a \equiv a \pmod{H}$ ;
- Симметричность:  $a \equiv b \pmod{H} \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv a \pmod{H}$ ;
- Транзитивность:  $a \equiv b, b \equiv c \pmod{H} \Rightarrow c^{-1}b, b^{-1}a \in H \Rightarrow c^{-1}b \cdot b^{-1}a = c^{-1}a \in H \Rightarrow a \equiv c \pmod{H}$ .

Совпадение классов эквивалентности с левыми смежными классами следует из пункта 3 предыдущего утверждения. □

**Утверждение.** Если  $G$  — абелева, то  $\forall a \in G : aH = Ha$ .

(В общем случае данное утверждение неверно).

*Доказательство.*  $\forall a \in G : \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} \Rightarrow aH = Ha$ . □

**Примеры.**

1.  $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$  ( $H = \{id, (12)\}$ ),  $g = (13)$ .  
 $(13)(12) = (123)$ ;  $(12)(13) = (132)$ .  
Тогда  $\{(13), (123)\} = gH \neq Hg = \{(13), (132)\}$ .
2.  $H = 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ . Смежные классы —  $3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}$ .
3.  $H = \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ . Смежные классы —  $a + bi + \mathbb{R} = bi + \mathbb{R}$ .

**Утверждение.** Множество  $\{aH : a \in G\}$  находится во взаимно однозначном соответствии с множеством  $\{Ha : a \in G\}$ .

*Доказательство.*  $gH \leftrightarrow Hg^{-1} : x = gh \in gH \leftrightarrow x^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}$ . □

**Следствие.**  $|\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$

**Определение.** Мощность множества левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $H$  называется индексом  $H$  в  $G$ . Обозначение:  $|G : H|$

**Пример.**  $|\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}| = 3$ , т.к. смежные классы —  $\{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$ .

**Теорема.** (*Теорема Лагранжа*)

Пусть  $G$  — конечная группа,  $H \leq G$ . Тогда  $|G| = |H| \cdot |G : H|$ .

*Доказательство.* Так как  $|G| < \infty$ , то  $|H| < \infty$ , т.е.  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ .

$\forall g \in G, gH = \{gh_1, \dots, gh_k\}$ , причем  $gh_i = gh_j \Rightarrow h_i = h_j \Rightarrow |gH| = |H|$ .

Отсюда, если  $|G : H| = n$ :

$$G = \bigsqcup_{i=1}^n a_i H \implies |G| = \sum_{i=1}^n |a_i H| = |G : H| \cdot |H|$$

□

**Следствие 1.** Если  $G$  — конечная группа,  $H \leq G$ , то  $|H| \mid |G|$ .

(Обратное утверждение неверно).

**Упражнение.** Пусть  $G = A_4$  (группа чётных перестановок).

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$ . Докажем, что в  $A_4$  нет подгруппы порядка 6.

Предположим, что  $H \leq A_4$  и  $|H| = 6$ .  $A_4$  состоит из элемента  $id$ , 3 элементов вида  $(ab)(cd)$  и восьми элементов вида  $(abc)$ . Значит,  $H$  содержит хотя бы один элемент вида  $(abc)$  (с точностью до перенумерования —  $(123)$ ). Тогда  $H$  содержит и  $(123)^{-1} = (132)$ . Также знаем, что группа чётного порядка содержит элемент порядка 2 (иначе в группе все элементы, кроме  $e$ , разбиваются на пары обратных, и элементов нечётное число), поэтому  $H$  содержит  $\sigma = (**)(**)$ . Рассмотрим  $\omega = \sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$  (это равенство легко проверить, подставив в него  $\sigma(1), \dots, \sigma(4)$ ). Очевидно, что это цикл длины 3, не оставляющий на месте 4 (т.к.  $\sigma$  не оставляет на месте 4). Значит,  $\omega$  и  $\omega^{-1}$  принадлежат  $H$  и не совпадают с предыдущими элементами (и друг с другом), т.е.

$$H = \{id, (123), (132), \sigma, \omega, \omega^{-1}\}$$

Осталось перебрать возможные значения  $\sigma$ :

- $\sigma = (12)(34) \implies (123)(12)(34)(132) = (14)(23) \notin H$ ;
- $\sigma = (13)(24) \implies (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \notin H$ ;
- $\sigma = (14)(23) \implies (123)(14)(23)(132) = (13)(24) \notin H$ ;

Отсюда таких  $H$  не существует.

**Следствие 2.** Если  $G$  — конечная группа, то  $\forall g \in G : \text{ord } g \mid |G|$

*Доказательство.*  $\text{ord } g = |\langle g \rangle| \mid |G|$ .  $\square$

**Следствие 3.** Если  $G$  — конечная группа порядка  $n$ , то  $\forall g \in G : g^n = e$  в  $G$ .

*Доказательство.* По следствию 2:  $n = \text{ord } g \cdot k \Rightarrow g^n = g^{(\text{ord } g) \cdot k} = e^k = e$ .  $\square$

**Пример.** Пусть  $G = \mathbb{Z}_p^*$ ,  $p$  — простое,  $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$ . По следствию 3:

$\forall a \in \mathbb{Z}_p^* : a^{p-1} = 1$  в  $\mathbb{Z}_p^*$ , отсюда  $\forall a \in \mathbb{Z}, p \nmid a : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  — малая теорема Ферма.

**Следствие 4.** Любая группа  $G$  простого порядка  $p$  является циклической.

*Доказательство.*  $\forall a \in G, a \neq e : \text{ord } a \neq 1, \text{ord } a \mid |G| = p \Rightarrow \text{ord } a = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$ .  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что с точностью до изоморфизма существует ровно две группы порядка 4 —  $\mathbb{Z}_4$  и  $V_4$ .

*Доказательство.* Пусть  $G$  — группа порядка 4. Заметим, что по следствию 2 порядок неединичного элемента в  $G$  может быть равен либо 2, либо 4. Если в  $G$  есть элемент порядка 4, то  $G$  циклическая, а тогда по теореме о классификации циклических групп  $G \simeq \mathbb{Z}_4$ .

Пусть  $G = \{e, a, b, c\}$ ,  $\text{ord } a = \text{ord } b = \text{ord } c = 2$ . Посмотрим, чему может быть равно  $ab$ :

- $ab = e \Rightarrow aab = a \Rightarrow b = a$  — противоречие;
- $ab = a \Rightarrow aab = aa \Rightarrow b = e$  — противоречие;
- $ab = b \Rightarrow abb = bb \Rightarrow a = e$  — противоречие.

Отсюда  $ab = c$  — аналогично произведение любых двух различных неединичных элементов равно третьему. Отсюда таблица Кэли для  $G$  имеет вид

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

откуда видно, что  $G \simeq V_4$ .  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что если в группе  $G$  все неединичные элементы имеют порядок 2, то  $G$  — абелева.

*Доказательство.*  $\text{ord } a = 2 \implies a = a^{-1} \implies \forall a, b \in G : ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ .  $\square$

**Пример.**  $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$ ,  $g = (13) \Rightarrow gH \neq Hg$

**Определение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется нормальной, если

$$\begin{aligned} \forall g \in G : gH = Hg &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} = H \iff \\ &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H \iff \forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H \end{aligned}$$

Обозначение:  $H \trianglelefteq G$ .

Эквивалентность определений:

- 1  $\iff$  2 — очевидно;
- 2  $\iff$  3:
  - $\Leftarrow$ :  $gHg^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$  — из условия на всевозможные  $g$  получаем равенство;
  - $\Rightarrow$  — очевидно;
- 3  $\iff$  4 — из определения смежного класса.

$\square$

**Примеры.**

1.  $A_n \trianglelefteq S_n$ , так как  $\forall \sigma \in S_n, \forall \tau \in A_n : \sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$ .
2.  $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$ , так как  $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall B \in SL_n(\mathbb{R}) : \det(ABA^{-1}) = \det B = 1 \Rightarrow ABA^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$ .

**Утверждение.** В абелевой группе любая подгруппа является нормальной.

**Упражнение.** Докажите, что если  $|G : H| = 2$ , то  $H \trianglelefteq G$  для произвольной группы  $G$  и произвольной подгруппы  $H \leq G$ .

*Доказательство.* Если  $|G : H| = 2$ , то  $G$  разбивается на два непересекающихся левых (правых) смежных класса по  $H$ . Очевидно, что один из этих классов в обоих случаях — сама подгруппа  $H$ . Тогда  $\forall g \in G \setminus H$  группа  $G$  разбивается на левые смежные классы  $H$  и  $gH$ , а также на правые смежные классы  $H$  и  $Hg$ , откуда  $gH = Hg$ . Также очевидно, что  $\forall h \in H : hH = H = Hh$ . Значит,  $\forall g \in G : gH = Hg \implies H \trianglelefteq G$ .  $\square$

## 1.4 Факторгруппа

**Утверждение.** Пусть  $G$  — группа,  $H \trianglelefteq G$ . Тогда множество всех смежных классов  $G$  по  $H$ :  $G/H = \{eH, aH, \dots\}$  образует группу относительно операции  $aH \cdot bH = abH$ .

*Доказательство.*

1. Проверим корректность операции, т.е.  $\begin{cases} aH = \tilde{a}H \\ bH = \tilde{b}H \end{cases} \implies abH = \tilde{a}\tilde{b}H$ .

Действительно, если  $\begin{cases} a = \tilde{a}h_a \\ b = \tilde{b}h_b \end{cases}$  из равенства смежных классов, то:

$$\forall x \in abH \implies \exists h \in H : x = abh = \tilde{a}h_a \tilde{b}h_b h = \tilde{a}\tilde{b}h'h_b h \in \tilde{a}\tilde{b}H$$

$$(H \trianglelefteq G \implies Hb = bH \implies \exists h' \in H : h_a \tilde{b} = \tilde{b}h')$$

2. Проверим, что это группа:

- Ассоциативность:

$$aH(bH \cdot cH) = aH(bcH) = a(bc)H = (ab)cH = (abH)cH = (aH \cdot bH)cH$$

- Нейтральный элемент:

$$eH = H : aH \cdot eH = aeH = aH = eaH = eH \cdot aH$$

- Обратный элемент:

$$\forall aH \exists a^{-1}H : aH \cdot a^{-1}H = eH = a^{-1}H \cdot aH$$

□

**Определение.** Группа  $G/H$  называется факторгруппой  $G$  по  $H$ .

*Замечание.* Если  $H \not\trianglelefteq G$ , то операция  $aH \cdot bH = abH$  некорректна:

$$\langle(12)\rangle \leq S_3 : (13)H = (132)H, (23)H = (123)H;$$

$$(13)(23)H = (132)H \neq H = (123)(123)H$$

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ ;
2.  $A_n \trianglelefteq S_n, S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$  (по чётности);
3.  $\mathbb{R} \trianglelefteq \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  ( $bi + \mathbb{R} \mapsto b$ ).

## 1.5 Гомоморфизмы групп

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e), (\tilde{G}, \circ, \tilde{e})$  — группы. Отображение  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  называется гомоморфизмом групп  $G$  и  $\tilde{G}$ , если  $\forall a, b \in G \ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ .

*Замечание.* В частности, изоморфизм — биективный гомоморфизм.

**Утверждение** (Свойства гомоморфизмов).

1.  $\varphi(e) = \tilde{e}$ ;
2.  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

**Определение.** Множество  $\text{Im } \varphi = \{b \in \tilde{G} \mid \exists a \in G : \varphi(a) = b\}$  — образ гомоморфизма. Множество  $\text{Ker } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = \tilde{e}\}$  — ядро гомоморфизма.

**Утверждение 1.**

1.  $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$ ;
2.  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$ .

*Доказательство.*

1.  $\text{Im } \varphi \subseteq \tilde{G}$

- $x, y \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists a, b \in G : x = \varphi(a), y = \varphi(b) \Rightarrow xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \text{Im } \varphi$ ;
- $\tilde{e} = \varphi(e) \in \text{Im } \varphi$ ;
- $\forall x \in \text{Im } \varphi \ \exists a \in G : \varphi(a) = x \Rightarrow x^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \text{Im } \varphi$

Отсюда  $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$ .

2.  $\text{Ker } \varphi \subseteq G$

- $\forall a, b \in \text{Ker } \varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow ab \in \text{Ker } \varphi$ ;
- $\tilde{e} = \varphi(e) \Rightarrow e \in \text{Ker } \varphi$ ;
- $\forall a \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = \tilde{e}^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker } \varphi$

Отсюда  $\text{Ker } \varphi \leq G$ .

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow ghg^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{Ker } \varphi \trianglelefteq G.$$

□

**Утверждение 2.**  $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$ .

В частности,  $\varphi$  инъективно  $\iff \text{Ker } \varphi = \{e\}$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) &\iff \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \tilde{e} \iff \varphi(ab^{-1}) = \tilde{e} \iff \\ ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi &\iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi \end{aligned}$$

□

**Пример.**  $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* : \varphi(A) = \det A$ .

$\text{Ker } \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^* \implies R^* \simeq GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ .

**Теорема** (О гомоморфизме). Пусть  $G, \tilde{G}$  — группы,  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  — гомоморфизм.

Тогда  $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

Доказательство. Для начала заметим, что  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$ , поэтому факторгруппа  $G/\text{Ker } \varphi$  определена.

Рассмотрим  $\psi : g\text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(g)$ :

- Корректность:

По утверждению 2:  $g_1\text{Ker } \varphi = g_2\text{Ker } \varphi \implies \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ ;

- Биективность:

Сюръективность:  $\forall b \in \text{Im } \varphi \exists a \in G : \varphi(a) = b \implies \psi(a\text{Ker } \varphi) = b$ ;

Инъективность: по утверждению 2:  $\psi(a\text{Ker } \varphi) = \psi(b\text{Ker } \varphi) \implies \varphi(a) = \varphi(b) \implies a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$ ;

- Сохранение операции:

$$\begin{aligned} \psi((g_1\text{Ker } \varphi)(g_2\text{Ker } \varphi)) &= \psi(g_1g_2\text{Ker } \varphi) = \varphi(g_1g_2) = \\ &= \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1\text{Ker } \varphi)\psi(g_2\text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

Отсюда  $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$  — изоморфизм.

□

**Пример.** Пусть  $G = S_n, \tilde{G} = \mathbb{R}^*, \varphi(\sigma) = \text{sgn } \sigma$ .

Тогда из теоремы о гомоморфизме:

$$\text{Im } \varphi = \{\pm 1\}, \text{Ker } \varphi = A_n \implies S_n/A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

**Следствие 1.** Гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  — изоморфизм  $\iff \begin{cases} \text{Ker } \varphi = \{e\} \\ \text{Im } \varphi = \tilde{G} \end{cases}$

*Доказательство.*

$\implies$  — очевидно из биективности;

$\impliedby$  — изоморфизм из теоремы совпадёт с  $\varphi$ .  $\square$

**Следствие 2.** Если  $|G| < \infty$ , то  $|G| = |\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi|$ .

*Доказательство.*  $|G| = |G/\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi| = |\text{Im } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi|$ .  $\square$

**Утверждение.** Пусть  $G$  — группа,  $H \trianglelefteq G$ . Тогда  $\exists$  такая группа  $\tilde{G}$ , что  $\exists$  сюръективный гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow \tilde{G}$ , причём  $\text{Ker } \pi = H$ .

*Доказательство.* Подходят  $\tilde{G} = G/H$ ,  $\pi : g \mapsto gH$ .  $\square$

**Определение.** Приведённый выше гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/H$  называется каноническим (естественным, натуральным) гомоморфизмом из  $G$  в  $G/H$ .

**Определение.** Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

**Утверждение.** Пусть  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  — произвольный эпиморфизм с ядром  $H$ . Тогда  $\exists$  изоморфизм  $\psi : G/H \rightarrow \tilde{G}$  такой, что  $\varphi = \psi \circ \pi$ , где  $\pi$  — натуральный гомоморфизм из  $G$  в  $G/H$ .

*Доказательство.* По теореме о гомоморфизме  $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

Так как  $\varphi$  — сюръекция,  $\text{Im } \varphi = \tilde{G}$ , также по условию  $\text{Ker } \varphi = H$ . Тогда  $\psi : G/H \rightarrow \tilde{G}$  — изоморфизм, заданный в доказательстве теоремы о гомоморфизме:  $\psi : gH \mapsto \varphi(g)$ .

Взяв этот изоморфизм, получим  $\varphi = \psi \circ \pi$  (так как  $g \xrightarrow{\pi} gH \xrightarrow{\psi} \varphi(g)$ ).  $\square$

## 2 Свободные группы

**Определение.** Тривиальные (групповые) соотношения — соотношения, которые выводятся из аксиом группы (и, соответственно, есть в любой группе).

Построим группу, в которой нет других соотношений.

**Определение.** Пусть  $A$  — множество символов (букв),  $A^{-1}$  — множество символов (букв)  $a^{-1}$ , где  $a \in A$ .

Условия на эти множества:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \forall a^{-1} \in A^{-1} \implies a^{-1} \notin A; \\ & \forall a \in A \implies a \notin A^{-1}; \end{aligned}$$

$$2. \quad (a^{-1})^{-1} = a;$$

Буквы  $a, a^{-1}$  назовём взаимно обратными.

Множество  $A^{\pm 1} = A \sqcup A^{-1}$  называется алфавитом.

Слово в алфавите  $A^{\pm 1}$  — конечная последовательность букв  $X = x_1 \dots x_k$ , где  $x_i \in A^{\pm 1}$ .

Длина слова  $X$  (обозначается  $|X|$ ) — количество букв в  $X$ .

**Пример.**  $A = \{a, b\} : X = abaab^{-1} \Rightarrow |X| = 5$ .

**Определение.** Слово  $X = x_1 \dots x_k$  — сократимое, если  $\exists i \in \{1, \dots, k-1\} : x_i = x_{i+1}^{-1}$ .

Сокращением взаимно обратных букв назовём вычёркивание пары  $x_i, x_{i+1}$  из  $X$  (получим слово длины  $|X| - 2$ ).

За конечное число сокращений получим слово  $\tilde{X}$ , не являющееся сократимым — такое  $\tilde{X}$  называется результатом полного сокращения слова  $X$ .

**Определение.** Рассмотрим множество  $F(A)$  всех несократимых слов в  $A^{\pm 1}$ .

Введём бинарную операцию на  $F(A)$ : пусть  $X = x_1 \dots x_k, Y = y_1 \dots y_m$ .

Если  $x_k \neq y_1^{-1}$ , то  $XY$  — конкатенация (приписывание)  $X$  и  $Y$ :

$$XY = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m, |XY| = k + m.$$

Если  $x_k = y_1^{-1}$ , то  $XY$  — результат полного сокращения слова  $x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m$ .

**Пример.**  $(abcda^{-1}b)(b^{-1}ad^{-1}aab) = abcaab$ .

**Определение.** Если  $|X| = 0$ , то  $X$  называется пустым словом (обозначим  $\lambda$ ).

Пустое слово по определению несократимо и лежит в  $F(A)$ .

**Теорема.**  $F(A)$  с приведённой выше бинарной операцией — группа.

*Доказательство.*

1. Ассоциативность:

Пусть  $X = x_1 \dots x_k$ ,  $Z = z_1 \dots z_m$ .

Случай  $|Y| = 0 \implies Y = \lambda$  очевиден ( $XZ = XZ$ );

Индукция по длине слова  $Y$ :

База индукции:  $|Y| = 1 \implies Y = a \in A^{\pm 1}$ . Индукция по  $|X| + |Z|$ :

База внутренней индукции:

$|X| + |Z| = 0$  — очевидно ( $a = a$ );

$|X| + |Z| = 1$  — очевидно (одно из слов  $X, Z$  пустое);

Шаг внутренней индукции ( $k + m - 2 \rightarrow k + m$ ) — рассмотрим случаи:

- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(YZ) = x_1 \dots x_k a z_1 \dots z_m = (XY)Z$ ;
- $a^{-1} = x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(aZ) = X(az_1 \dots z_m) =$   
= результат полного сокращения  $x_1 \dots x_{k-1} a^{-1} a z_1 \dots z_m =$   
= результат полного сокращения  $x_1 \dots x_{k-1} z_1 \dots z_m = (Xa)Z$ ;
- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} = z_1$  — аналогично предыдущему;
- $a^{-1} = x_k, a^{-1} = z_1$ : пусть  $X = X'a^{-1}, Z = a^{-1}Z'$ . Тогда:  

$$X(aZ) = X(a(a^{-1}Z')) = XZ' = (X'a^{-1})Z'$$
  

$$(Xa)Z = (X'a^{-1}a)Z = X'Z = X'(a^{-1}Z')$$
  
При этом  $|X'| + |Z'| = k + m - 2$ , то есть  $X'(a^{-1}Z') = (X'a^{-1})Z'$  по предположению внутренней индукции.

Во всех случаях  $X(aZ) = (Xa)Z \implies$  база доказана.

Шаг индукции: Пусть  $Y = y_1 \dots y_l$ . Тогда:

$$\begin{aligned} X(YZ) &= X(y_1 \dots y_l \cdot Z) = X((y_1 \dots y_{l-1} \cdot y_l)Z) \stackrel{1}{=} X((y_1 \dots y_{l-1}) \cdot (y_l Z)) \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} (X \cdot y_1 \dots y_{l-1})(y_l Z) \stackrel{3}{=} (X \cdot y_1 \dots y_l)Z = (XY)Z \end{aligned}$$

1, 3 — из утверждения базы индукции; 2 — по предположению индукции.

2.  $\lambda$  — нейтральный элемент;

3. обратный элемент к  $x_1 \dots x_k$  — элемент  $x_k^{-1} \dots x_1^{-1}$ .

□

**Определение.** Построенная группа  $F(A)$  называется свободной группой с базисом  $A$ . ( $A$  также называется свободной порождающей системой группы).

Любая группа, изоморфная  $F(A)$ , также называется свободной.

**Утверждение.** Пусть  $H \leq SL_2(\mathbb{Z}) : H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .

Тогда  $H \simeq F(A)$  с базисом  $A = \{a, b\}$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Утверждение.** Все базисы свободной группы равномощны.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Определение.** Ранг свободной группы — мощность её базиса.

*Замечание.* Заметим, что в  $F(A)$  результат умножения определён однозначно  $\implies$  однозначно определён элемент  $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ , где  $x_i \in A^{\pm 1}$ .

Тогда если считать слово  $x_1 \dots x_k$  результатом умножения  $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ , то можно опускать знак умножения, и в этом смысле работать и с сократимыми словами.

**Пример.**  $abb^{-1}ba^{-1}a = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a = ab \in F(A)$ .

**Теорема 1** (Универсальное свойство свободной группы).

Пусть  $G$  — группа,  $\{g_i \mid i \in I\} \subset G$  — произвольное множество её элементов.

Рассмотрим свободную группу  $F(A)$  с базисом  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ .

Тогда отображение  $\varphi : a_i \mapsto g_i$  продолжается до гомоморфизма  $\varphi : F(A) \rightarrow G$ , причём единственным образом.

*Доказательство.* Пусть  $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$  — несократимое слово из  $F(A)$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $a_{i_j} \in A$ . Зададим  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  по правилу  $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$ .

Проверим, что  $\varphi$  — гомоморфизм ( $W, \tilde{W} \in F(A)$ ,  $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ ,  $\tilde{W} = a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}$ ):

$$\begin{aligned} \varphi(W\tilde{W}) &= \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_{k-s}}^{\varepsilon_{k-s}} a_{j_{s+1}}^{\tau_{s+1}} \dots a_{j_m}^{\tau_m}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_{k-s}}^{\varepsilon_{k-s}} g_{j_{s+1}}^{\tau_{s+1}} \dots g_{j_m}^{\tau_m} \\ &= g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m} = (g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}) \cdot (g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(W)\varphi(\tilde{W}) \end{aligned}$$

(где  $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_{k-s}}^{\varepsilon_{k-s}} a_{j_{s+1}}^{\tau_{s+1}} \dots a_{j_m}^{\tau_m}$  — результат полного сокращения  $W\tilde{W}$ )

Единственность такого гомоморфизма очевидна:

$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varphi(a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots \varphi(a_{i_k})^{\varepsilon_k} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$  — определено однозначно. □

**Пример.** (несвободной группы)

$S_3 = \langle (12), (123) \rangle : \forall g \in S_3 \quad g^6 = id$ . Попытаемся продолжить до гомоморфизма  $S_3 \rightarrow Q_8$  отображение  $\varphi : (12) \mapsto i, (123) \mapsto j$ :

$-1 = i^2 = \varphi((12))^2 = \varphi((12)^2) = \varphi(id) = 1$  — противоречие.

**Следствие 1.** Пусть  $G$  — группа,  $M = \{g_i \mid i \in I\}$  — порождающее множество  $G$ ,  $F(A)$  — свободная группа с базисом  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ .

Тогда  $\exists!$  сюръективный гомоморфизм  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  такой, что  $\forall i \in I : \varphi(a_i) = g_i$ .

*Доказательство.* Достаточно показать, что в этом случае гомоморфизм из доказательства теоремы сюръективен — это следует из того, что множество  $\{g_i \mid i \in I\}$  порождает группу  $G$  (каждый элемент представим как  $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k})$ ).  $\square$

**Следствие 2.** Любая группа  $G$  изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы по некоторой её нормальной подгруппе.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  — гомоморфизм из следствия 1.

Так как  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq F(A)$ , из теоремы о гомоморфизме  $G = \text{Im } \varphi \simeq F(A)/\text{Ker } \varphi$ .  $\square$

**Определение.** Сюръективный гомоморфизм  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  — из следствия 1 называется копредставлением группы  $G$ .

*Замечание.* Копредставление зависит от выбора порождающего множества  $M$ .

## 2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями

По следствию 2:  $G \simeq F(A)/N$ , где  $N \trianglelefteq F(A)$ . Отсюда задание группы  $G$  сводится к заданию  $A$  и  $N$ .

$$N — нормальная \implies \forall f \in F(A), \forall h \in N : fhf^{-1} \in N.$$

**Определение.** Пусть  $\mathcal{R} \subseteq F(A)$ . Нормальным замыканием множества  $\mathcal{R}$  в группе  $F(A)$  называется наименьшая (по включению) нормальная подгруппа, содержащая  $\mathcal{R}$ . Обозначается  $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$

### Утверждение.

$$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} = \{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\}$$

*Доказательство.*

Пусть  $\{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\} = H$ . Тогда:

$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \trianglelefteq F(A) \implies \forall r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i \in \{\pm 1\} : f_i r_i^{\varepsilon_i} f_i^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies H \subseteq \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ . Осталось показать, что  $H \trianglelefteq F(A)$ :

$$\forall h \in H, g \in F(A) : ghg^{-1} = g(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) g^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= ((gf_1)r_1^{\varepsilon_1}(f_1^{-1}g^{-1})) \dots ((gf_k)r_k^{\varepsilon_k}(f_k^{-1}g^{-1})) = \\
&= ((gf_1)r_1^{\varepsilon_1}(gf_1)^{-1}) \dots ((gf_k)r_k^{\varepsilon_k}(gf_k)^{-1}) \in H
\end{aligned}$$

Отсюда минимальная группа, содержащая  $\mathcal{R}$ , в точности равна  $H$ .  $\square$

**Утверждение.** Любой нормальной подгруппы  $N \trianglelefteq F(A)$  можно задать как  $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$  для подходящего  $\mathcal{R} \subset F(A)$ .

*Доказательство.* Очевидно, подойдёт  $\mathcal{R} = N$ .  $\square$

**Элементарные преобразования над словами в  $F(A)$ :**

(под словами в  $F(A)$  подразумеваются любые произведения букв, а не только элементы  $F(A)$ )

- ЭП1:  $W = W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$ , где  $a \in A, \varepsilon = \pm 1$ ;
- ЭП2:  $W = W_1 r^\varepsilon W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$ , где  $r \in \mathcal{R}, \varepsilon = \pm 1$ ;
- ЭП1' — обратное к ЭП1;
- ЭП2' — обратное к ЭП2;

**Определение.** Назовём слова  $W$  и  $\tilde{W}$   $\mathcal{R}$ -эквивалентными, если от  $W$  можно с помощью ЭП перейти к  $\tilde{W}$ .

**Утверждение.**  $\mathcal{R}$ -эквивалентность — отношение эквивалентности.

*Доказательство.*

- Рефлексивность — очевидно;
- Симметричность — следует из обратимости каждого ЭП;
- Транзитивность — очевидно;

$\square$

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ ;
2.  $W$   $\mathcal{R}$ -эквивалентно пустому слову  $\lambda$ ;
3. Если для произвольной группы  $G$  с порождающим множеством  $M = \{g_i \mid i \in I\}$  (т.е. заданным копредставлением  $\varphi : F(A) \rightarrow G$ ) верно, что  $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1 \in G$ , то  $\varphi(W) = 1 \in G$ .

*Доказательство.*

- $1 \implies 2 : W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies W = (f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \xrightarrow[\mathfrak{EP}2]{} W \sim \tilde{W} = (f_1 f_1^{-1}) \dots (f_k f_k^{-1}) \xrightarrow[\mathfrak{EP}1]{} \lambda;$
- $2 \implies 3$  Пусть  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  взят из условия теоремы. Покажем, что при ЭП образ слова не меняется:

1.  $\varphi(W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2) = \varphi(W_1) \varphi(a)^\varepsilon \varphi(a)^{-\varepsilon} \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2);$
2.  $\varphi(W_1 r^\varepsilon W_2) = \varphi(W_1) \varphi(r)^\varepsilon \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \cdot 1^\varepsilon \cdot \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2);$

При ЭП, обратных этим, образ слова аналогично не изменяется.

Тогда если  $W \underset{\mathfrak{EP}}{\sim} \lambda$ , то  $\varphi(W) = \varphi(\lambda) = 1$ .

- $3 \implies 1 : \forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1 \implies r \in \text{Ker } \varphi; \varphi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \varphi.$

Рассмотрим в качестве  $G$  группу  $F(A)/N$ , где  $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ , а в качестве  $\varphi - \pi$  (естественный гомоморфизм  $F(A) \rightarrow F(A)/N$ ).

$r \in N \implies \pi(r) = 1$ . Тогда по условию 3:  $\pi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \pi = N$ .

□

**Определение.** Если  $W \in F(A)$  удовлетворяет любому из условий теоремы 2, то говорят, что соотношение  $W = 1$  следует из соотношений  $\{r = 1 \mid r \in \mathcal{R}\}$  или является следствием соотношений  $\mathcal{R}$ .

**Определение.** Рассмотрим копредставление произвольной группы  $G$ , т.е.  $\varphi : F(A) \rightarrow G$ , где  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ . Пусть слово  $W \in F(A)$  ( $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ ) такое, что  $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$  в  $G$ .

Тогда говорят о соотношении  $W = 1$ .

(Для упрощения записи вместо  $g_i$  пишут  $a_i$ ).

**Определение.** Множество  $\mathcal{R} \subset F(A)$  называется определяющим множеством соотношений группы  $G$ , если любое соотношение группы  $G$  следует из  $\mathcal{R}$ .

При этом элементы  $\mathcal{R}$  называются определяющими соотношениями  $G$ . Обозначается  $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$  (данная запись также называется копредставлением  $G$ ).

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle; a^{12} = 1$  — следствие;
2.  $V_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle; (ab)^2 = 1$  — следствие.

**Теорема** (Теорема Дика).

Пусть  $G$  — группа, заданная копредставлением  $\langle A \mid R \rangle$ , где  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ . Пусть  $H$  — произвольная группа,  $\{h_i \mid i \in I\} \subset H$  — произвольное множество её элементов.

Тогда отображение  $\varphi : a_i \mapsto h_i \forall i \in I$  на порождающих группы  $G$  продолжается до гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$  тогда и только тогда, когда  $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$  в  $H$ .

*Доказательство.*

Я устал пытаться починить доказательство, которое было здесь ранее, поэтому теперь оно в корне изменено — данный вариант взят из материалов спецкурса А.А. Клячко ([1]) и кажется мне значительно более наглядным.

$\Rightarrow$ : По определению определяющих соотношений любое соотношение  $r = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathcal{R}$  равно 1 в  $G$ . Тогда если  $\varphi$  продолжается до гомоморфизма, то  $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = \varphi(1) = 1$  в  $H$ .

$\Leftarrow$ : Рассмотрим свободную группу  $F(A)$ . По универсальному свойству свободной группы отображение  $\varphi : a_i \mapsto h_i$  продолжается до гомоморфизма  $\varphi : F(A) \rightarrow H$ . Знаем, что  $\varphi(r) = 1 \forall r \in \mathcal{R}$ , т.е.  $\mathcal{R} \subseteq \text{Ker } \varphi$ . Также  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq F(A)$  по свойству гомоморфизма, а так как  $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$  — наименьшая по включению нормальная подгруппа, содержащая  $\mathcal{R}$ , получаем  $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \subseteq \text{Ker } \varphi$ . Значит, корректно рассматривать  $\varphi$  как гомоморфизм  $F(A)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \rightarrow H$  (образ не зависит от представителя класса), а из определения копредставления  $F(A)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \simeq G$ . Отсюда получили гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow H$ , являющийся продолжением исходного отображения, что и требовалось.  $\square$

### 3 Прямое произведение групп

#### 3.1 Внешнее прямое произведение

Пусть  $G_1, \dots, G_k$  — группы.

$$G = G_1 \times \dots \times G_k = \{(g_1, \dots, g_k) | g_i \in G_i\}.$$

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = (g_1 \tilde{g}_1, \dots, g_k \tilde{g}_k)$$

( $g_i \tilde{g}_i$  перемножаются по правилу бинарной операции на  $G_i$ ).

**Утверждение.**  $(G, \cdot)$  — группа.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 1. \quad & (a_1, \dots, a_k)((b_1, \dots, b_k)(c_1, \dots, c_k)) = (a_1(b_1 c_1), \dots, a_k(b_k c_k)) = \\ & = ((a_1 b_1)c_1, \dots, (a_k b_k)c_k) = ((a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_k))(c_1, \dots, c_k) \end{aligned}$$

2. Нейтральный элемент —  $(e_1, \dots, e_k)$  ( $e_i$  — нейтральный в  $G_i$ )

$$3. \quad (g_1, \dots, g_k)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1})$$

□

**Определение.** Данная группа  $(G, \cdot)$  называется (внешним) прямым произведением групп  $G_1, \dots, G_k$ . Обозначается  $G = G_1 \times \dots \times G_k$ ;  $G_i$  называются множителями.

В аддитивной терминологии те же рассуждения определяют прямую сумму  $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ , где  $G_i$  — слагаемые.

**Примеры.**

$$1. \quad G_1 = \mathbb{Z}_3, G_2 = S_3, G = G_1 \times G_2.$$

$$(1, (12)) \cdot (2, (13)) = (1 + 2, (12)(13)) = (0, (132)).$$

$$2. \quad D_n(\mathbb{F}) \simeq \underbrace{\mathbb{F}^* \times \dots \times \mathbb{F}^*}_n \quad (D_n(\mathbb{F}) — группа диагональных матриц порядка n).$$

**Утверждение.**

1. Если  $(m, n) = 1$ , то  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq Z_{nm}$  — циклическая группа;

2. Если  $(m, n) \neq 1$ , то  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  — не циклическая.

*Доказательство.*

1. Обозначим за  $[a]_s \in \mathbb{Z}_s$  класс вычетов по модулю  $s$ , содержащий  $a$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  такое, что  $\varphi : [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$ . Очевидно, что это гомоморфизм:

$$\varphi([a]_{mn} \cdot [b]_{mn}) = ([ab]_m, [ab]_n) = ([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) = \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})$$

Найдём  $\text{Ker } \varphi$ :

$$\varphi([a]_{mn}) = ([0]_m, [0]_n) \iff \begin{cases} m \mid a \\ n \mid a \end{cases} \xrightarrow{(m,n)=1} mn \mid a \implies \text{Ker } \varphi = \{[0]_{mn}\}$$

По теореме о гомоморфизме  $\text{Im } \varphi \simeq \mathbb{Z}_{mn}/\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_{mn} \implies |\text{Im } \varphi| = mn$ .

Так как  $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$  и  $\text{Im } \varphi \leq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ,  $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ .

Отсюда  $\varphi$  — биекция (инъекция из  $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ ), т.е.  $\varphi$  — изоморфизм.

2. Пусть  $(m, n) = d \neq 1$  ( $m = dk_1, n = dk_2$ ). Тогда  $\forall g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ :

$$(g_1, g_2)^{dk_1 k_2} = (g_1^{dk_1 k_2}, g_2^{dk_1 k_2}) = (0^{k_2}, 0^{k_1}) = (0, 0)$$

Отсюда  $\text{ord } (g_1, g_2) \mid dk_1 k_2 = \frac{mn}{d} < mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n|$ . Значит,  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  не является циклической.

□

**Следствие.** Пусть  $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$  — разложение на простые множители. Тогда  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из теоремы. □

**Следствие.** (Китайская теорема об остатках) Если числа  $a_1, \dots, a_n$  попарно взаимно просты, то для любых целых  $r_1, \dots, r_n$  ( $0 \leq r_i < a_i$ )  $\exists! N$  ( $0 \leq N < a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ) такой, что  $N \equiv r_i \pmod{a_i}$

*Доказательство.* Из теоремы следует, что  $\mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} \simeq \mathbb{Z}_a$  ( $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ). Это означает, что набор остатков  $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}$  изоморфизм из теоремы однозначно переводит в элемент  $N \in \mathbb{Z}_a$  такой, что  $r_i = [N]_{a_i}$ , что и требовалось. □

## 3.2 Внутреннее прямое произведение

**Определение.** Пусть  $G$  — группа,  $H_1, \dots, H_k \leq G$ .

$G$  раскладывается в (внутреннее) прямое произведение подгрупп  $H_1, \dots, H_k$ , если:

1.  $\forall g \in G \exists! h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k;$
2.  $\forall i \neq j : \forall h_i \in H_i, h_j \in H_j \quad h_i h_j = h_j h_i.$

Обозначается  $G = H_1 \times \dots \times H_k$  ( $G = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$  в аддитивной терминологии).

*Замечание.* Из определения следует, что  $(h_1 \dots h_k)(\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) = (h_1 \tilde{h}_1) \dots (h_k \tilde{h}_k)$ .

**Определение.** Пусть  $H, N \leq G$ . Обозначим  $NH = \{nh | n \in N, h \in H\}$

**Утверждение.** Пусть  $N \trianglelefteq G, H \leq G$ . Тогда  $NH$  — подгруппа в  $G$ , причём  $NH = HN$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $(n_1 h_1)(n_2 h_2) = \underbrace{n_1(h_1 n_2 h_1^{-1})}_{= \tilde{n}} h_1 h_2 = \tilde{n} \tilde{h} \in NH$ .  
 $e \in N \cap H \implies e \cdot e = e \in NH$ .  
 $(nh)^{-1} = h^{-1} n^{-1} = (h^{-1} n^{-1} h) h^{-1} \in NH$ .

Отсюда  $NH$  — подгруппа. Покажем, что  $NH = HN$ :

$$\forall nh \in NH : nh = (hh^{-1})nh = h(h^{-1}nh) \in HN \implies NH \subseteq HN$$

$$\forall hn \in HN : hn = hn(h^{-1}h) = (hn h^{-1})h \in NH \implies HN \subseteq NH$$

Отсюда  $NH = HN$ . □

**Лемма 1.** Пусть  $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{e\}$ . Тогда  $\forall h \in H, n \in N \quad nh = hn$ .

*Доказательство.* Рассмотрим выражение  $(hn)(nh)^{-1} = hn h^{-1} n^{-1}$ :

$$hn h^{-1} n^{-1} = h(nh^{-1} n^{-1}) \in H; \quad hn h^{-1} n^{-1} = (hn h^{-1})n^{-1} \in N$$

Значит,  $hn h^{-1} n^{-1} \in H \cap N = \{e\} \implies (hn)(nh)^{-1} = e \implies hn = nh$  □

**Теорема 1.** Пусть  $H_1, H_2 \leq G$ . Тогда  $G = H_1 \times H_2 \iff \begin{cases} (1) \quad H_1, H_2 \trianglelefteq G \\ (2) \quad H_1 \cap H_2 = \{e\} \\ (3) \quad G = H_1 H_2 \end{cases}$

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $G = H_1 \times H_2$ .

(3) — очевидно из пункта 1 определения.

(1):  $\forall h_1 \in H_1, g \in G : g = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$  ( $\tilde{h}_1 \in H_1, \tilde{h}_2 \in H_2$ )  $\implies$

$$gh_1g^{-1} = \tilde{h}_1(\tilde{h}_2 h_1 \tilde{h}_2^{-1})\tilde{h}_1^{-1} \stackrel{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_1 h_1 \tilde{h}_1^{-1} \in H_1$$

Отсюда  $H_1 \trianglelefteq G$  (аналогично  $H_2 \trianglelefteq G$ ).

(2): Пусть  $\exists h \in H_1 \cap H_2$ . Тогда  $h = he = eh$  — два разложения на произведение

элементов подгрупп. Они совпадают только в случае  $h = e$ , т.е.  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ .

$\Leftarrow$ : Пусть даны условия (1)-(3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3):  $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 h_2$ .

Допустим, что это разложение не единственное, т.е.  $h_1 h_2 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$ .

Тогда  $\tilde{h}_1^{-1} h_1 = \tilde{h}_2 h_2^{-1}$ , а так как  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ , имеем  $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_2$ .  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $H_1, \dots, H_k \leq G$ .

$$\text{Тогда } G = H_1 \times \dots \times H_k \iff \begin{cases} (1) & H_1, \dots, H_k \trianglelefteq G \\ (2) & \forall i \ H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\} \\ (3) & G = H_1 \dots H_k \end{cases}$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ : Пусть  $G = H_1 \times \dots \times H_k$ .

(3) — очевидно из пункта 1 определения.

(1):  $\forall h_i \in H_i, g \in G : g = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k$  ( $\tilde{h}_i \in H_i$ )  $\Rightarrow$

$$g h_i g^{-1} = (\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) h_i (\tilde{h}_k^{-1} \dots \tilde{h}_1^{-1}) \underset{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_i h_i \tilde{h}_i^{-1} \in H_i$$

Отсюда  $H_i \trianglelefteq G$ .

(2): Пусть  $\exists h \in H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle$ . Тогда  $h = he = eh$  — два разложения на произведение элементов подгрупп. Они совпадают только в случае  $h = e$ , т.е.  $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$ .

$\Leftarrow$ : Пусть даны условия (1)-(3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3):  $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k$ .

Допустим, что это разложение не единственное, т.е.  $h_1 \dots h_k = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k$ .

Тогда  $\forall i : \tilde{h}_i^{-1} h_i = \prod_{j \neq i} \tilde{h}_j h_j^{-1}$ , а так как  $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$ , имеем  $h_i = \tilde{h}_i$ .  $\square$

**Примеры.**

$$1. V_4 = \{e, a, b, c\} = \{e, a\} \times \{e, b\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2;$$

$$2. \mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \times U (z = r \cdot e^{iy}).$$

3.  $\mathbb{Z}$  не раскладывается в произведение нетривиальных подгрупп.

Предположим противное, т.е.  $\mathbb{Z} = H_1 \times \dots \times H_m$ . Подгруппы  $\mathbb{Z}$  имеют вид  $k\mathbb{Z}$ , т.е.  $\mathbb{Z} = k_1\mathbb{Z} \times \dots \times k_m\mathbb{Z}, k_i \neq 0$ . Но тогда  $k_1 k_2 \in H_1 \cap H_2$  и  $k_1 k_2 \neq 0$ , что противоречит теореме 2.

### 3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением

**Теорема 3.**

1. Если группа  $G$  раскладывается в прямое произведение подгрупп  $H_1, \dots, H_k$ , то  $G$  изоморфна прямому произведению групп  $G_1, \dots, G_k$ , где  $\forall i G_i \simeq H_i$ ;
2. Если группа  $G$  изоморфна прямому произведению групп  $G_1, \dots, G_k$ , то  $\exists H_i \leq G$  такие, что  $G_i \simeq H_i$  и  $G$  раскладывается в прямое произведение  $H_1, \dots, H_k$ .

*Доказательство.*

1. Имеем:  $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi : G \rightarrow G_1 \times \dots \times G_k$ , где  $G_i = H_i$ , такое, что  $\forall g = h_1 \dots h_k \in G : \varphi(h_1 \dots h_k) = (h_1, \dots, h_k)$ . Это изоморфизм:

- Биекция — очевидна;
- Гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \varphi((h_1 \dots h_k) \cdot (h'_1 \dots h'_k)) &= \varphi(h_1 h'_1 \dots h_k h'_k) = (h_1 h'_1, \dots, h_k h'_k) = \\ &= (h_1, \dots, h_k) \cdot (h'_1, \dots, h'_k) = \varphi(h_1 \dots h_k) \cdot \varphi(h'_1 \dots h'_k) \end{aligned}$$

2. Имеем:  $G_1, \dots, G_k$  — группы,  $G = \{(g_1, \dots, g_k) \mid g_i \in G_i\}$ .

Тогда  $H_i = \{(e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) \mid g_i \in G_i\}$  очевидно является подгруппой  $G$ , изоморфной  $G_i$ .

Покажем, что  $G = H_1 \times \dots \times H_k$ :

- $\forall g = (g_1, \dots, g_k) \in G \exists! h_i = (e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) : g = h_1 \dots h_k$ ;
- $\forall i \neq j, h_i = ((e, \dots, e, a_i, e, \dots, e)) \in H_i, h_j = (e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) \in H_j :$

$$h_i h_j = (e, \dots, e, a_i, e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) = h_j h_i$$

□

**Теорема 4.** Пусть  $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k, N_i \trianglelefteq H_i$ . Тогда:

1.  $N_1 \times \dots \times N_k \trianglelefteq G$ ;
2.  $G/(N_1 \times \dots \times N_k) \simeq (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно, что  $N_1 \times \dots \times N_k = N \leq G$ .

Покажем нормальность:  $\forall g = h_1 \dots h_k \in G, n = n_1 \dots n_k \in N$

$$gng^{-1} = (h_1 \dots h_k)(n_1 \dots n_k)(h_k^{-1} \dots h_1^{-1}) \underset{(n_i \in H_i)}{\stackrel{\in N_1}{=}} (h_1 n_1 h_1^{-1}) \dots (h_k n_k h_k^{-1}) \in N$$

2. Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$  такой, что  $\varphi : h_1 \dots h_k \mapsto (h_1 N_1, \dots, h_k N_k)$ . Это сюръективный гомоморфизм, причём  $\text{Ker } \varphi = N_1 \times \dots \times N_k$ . Отсюда по теореме о гомоморфизме получаем необходимое утверждение.

□

**Следствие.** Если  $G = H_1 \times H_2$ , то  $G/H_1 \simeq H_2, G/H_2 \simeq H_1$ .

## 4 Конечнопорождённые абелевы группы

*Замечание.* В данном разделе используется аддитивная терминология:  
 $(A, +)$  — абелева группа,  $\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}$ :

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_n, & n > 0; \\ 0, & a = 0; \\ \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{|n|}, & n < 0 \end{cases}$$

**Свойства.** ( $\forall a, b \in A, n, m \in \mathbb{Z}$ )

1.  $(n + m)a = na + ma;$
2.  $n(a + b) = na + nb;$
3.  $(nm)a = n(ma)$

*Доказательство.* Непосредственный разбор случаев — знаков  $m, n$ .  $\square$

**Определение.** (Целочисленной) линейной комбинацией элементов  $a_1, \dots, a_k \in A$  называется выражение  $n_1a_1 + \dots + n_ka_k$  ( $n_i \in \mathbb{Z}$ ).

Если элемент  $b \in A$  равен некоторой линейной комбинации  $a_1, \dots, a_k \in A$ , то говорят, что  $b$  выражается через  $a_1, \dots, a_k$ .

**Определение.** Система элементов  $a_1, \dots, a_k$  называется линейно зависимой, если  $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ , не все равные 0, такие, что  $n_1a_1 + \dots + n_ka_k = 0$ .

В противном случае система  $a_1, \dots, a_k$  называется линейно независимой.

**Пример.**  $A = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$ . Система из одного элемента  $(1, 1)$  — линейно зависима:  $12 \cdot (1, 1) = (0, 0)$

**Определение.** Пусть  $A$  — абелева группа,  $a_1, \dots, a_k \in A$ .

Будем обозначать  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \{n_1a_1 + \dots + n_ka_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$

(для бесконечного числа  $a_k$  — всевозможные конечные линейные комбинации)

**Утверждение.**  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$  — наименьшая подгруппа  $A$ , содержащая  $a_1, \dots, a_k$ .

*Доказательство.* Пусть  $H$  — наименьшая подгруппа, содержащая  $a_1, \dots, a_k$ . Тогда с одной стороны  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \subseteq H$  по определению подгруппы, а с другой стороны  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , очевидно, подгруппа в  $A$ . Значит,  $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$   $\square$

**Определение.** Если  $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , то говорят, что  $A$  порождается  $a_1, \dots, a_k$ . Элементы  $a_1, \dots, a_k$  называются порождающими (образующими).

**Определение.** Если  $\exists$  конечное множество элементов  $a_1, \dots, a_k \in A$ , что  $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , то  $A$  называется конечнопорождённой.

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Q}$  — не конечнопорождённая;
2.  $U$  (комплексные корни из 1) — не конечнопорождённая;
3.  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$  — конечнопорождённые (циклические);
4.  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  — конечнопорождённая, не циклическая (примеры систем порождающих —  $(1, 0), (0, 1)$  или  $(3, 0), (4, 5), (0, 1)$ )

**Определение.** Линейно независимая система порождающих группы  $A$  называется базисом (или свободной системой порождающих).

**Утверждение.** (*не было в лекции*)

$a_1, \dots, a_k$  — базис  $\iff$  любой элемент  $A$  выражается через  $a_1, \dots, a_k$  единственным образом.

*Доказательство.*

$\implies$ : Из определения базиса любой элемент имеет разложение по базису.

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = a = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_n a_n \implies (\alpha_1 - \alpha'_1) a_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) a_n = 0$$

Отсюда из линейной независимости  $\alpha_i = \alpha'_i \forall i$ , т.е. разложение единствено.

$\impliedby$ : Любой элемент  $a \in A$  имеет разложение по  $a_1, \dots, a_n$  — система  $a_1, \dots, a_n$  порождает  $A$ . Разложение любого элемента единственно  $\implies 0$  имеет только тривиальное разложение  $\implies a_1, \dots, a_n$  линейно независимы.  $\square$

**Пример.**  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$  — не имеет базиса: любая система элементов в ней линейно зависима ( $12 \cdot a = 0 \forall a \in A$ ).

**Определение.** Конечнопорождённая абелева группа, имеющая базис, называется свободной абелевой группой. По определению  $A = \{0\}$  — свободная абелева группа.

**Пример.**  $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$  — свободная абелева группа;

Базис —  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ . Проверим это:

1. Линейная независимость:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \implies (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0) \implies \alpha_i = 0 \ \forall i$$

2. Порождаемость группы:

$$\forall a \in \mathbb{Z}^n : a = (a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

**Лемма.** (*Основная лемма о линейной зависимости для абелевых групп*)

Если абелева группа  $A$  обладает базисом из  $n$  элементов, то любая система из  $m > n$  элементов линейно зависима.

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис группы  $A$ ,  $a_1, \dots, a_m \in A$  — произвольные элементы. Тогда из определения базиса:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1n}e_n \longrightarrow (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ a_m = \alpha_{m1}e_1 + \dots + \alpha_{mn}e_n \longrightarrow (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{cases}$$

Строки  $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$  можно рассматривать как векторы из пр-ва  $\mathbb{Q}^n$  над  $\mathbb{Q}$ . Так как  $m > n$ , по ОЛЛЗ для векторных пространств система  $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m$  линейно зависима, т.е.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Q}$ , не все равные нулю, что  $\lambda_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \lambda_m \bar{\alpha}_m = 0$ . Тогда если  $d$  — НОК знаменателей ненулевых  $\lambda_i$ , то  $(d\lambda_1)\bar{\alpha}_1 + \dots + (d\lambda_m)\bar{\alpha}_m = 0$  — нетривиальная целочисленная линейная комбинация, равная нулю.

Тогда  $(d\lambda_1)a_1 + \dots + (d\lambda_m)a_m = 0$ , т.е.  $a_1, \dots, a_m$  линейно зависимы. □

**Теорема 1.** Все базисы свободной абелевой группы  $A$  равномощны.

*Доказательство.* Очевидно следует из ОЛЛЗ для абелевых групп. □

**Определение.** Число элементов в базисе свободной абелевой группы  $A$  называется рангом группы  $A$ . Обозначается  $\text{rk } A$ . По определению  $A = \{0\} \implies \text{rk } A = 0$ .

**Теорема 2.** Все свободные абелевые группы ранга  $n$  изоморфны между собой (в частности, изоморфны  $\mathbb{Z}^n$ ).

*Доказательство.*

Пусть  $A$  — свободная абелева группа,  $\text{rk } A = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис. Рассмотрим отображение  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}^n$  такое, что  $\forall a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in A \ \varphi(a) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Покажем, что  $\varphi$  — изоморфизм:

1. Биекция — следует из единственности разложения по базису;
2. Гомоморфизм: пусть  $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n) = ((\alpha_1 + \beta_1), \dots, (\alpha_n + \beta_n)) = \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \varphi(a) + \varphi(b)\end{aligned}$$

Отсюда  $A \simeq \mathbb{Z}^n$ .

Если  $\text{rk } A = \text{rk } B = n$ , то  $A \simeq \mathbb{Z}^n \simeq B \implies A \simeq B$ .  $\square$

**Теорема 3.** Любая подгруппа  $B$  свободной абелевой группы  $A$  ранга  $n$  является свободной абелевой, причём  $\text{rk } B \leq n$ .

*Доказательство.* Случай  $n = 0$  очевиден. Индукция по  $n$ :

База:  $n = 1 \implies A \simeq \mathbb{Z} \implies A = \langle e \rangle$ .

Знаем, что любая подгруппа циклической группы — циклическая.

Пусть  $B = \langle ke \rangle, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда:

$$k = 0 \implies B = \{0\} \implies \text{rk } B = 0 < 1 = \text{rk } A$$

$$k \neq 0 \implies B = \langle ke \rangle \simeq \mathbb{Z} \implies \text{rk } B = 1 = \text{rk } A$$

Шаг: пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис свободной абелевой группы  $A$ .

Рассмотрим  $\tilde{A} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \leq A$  — свободная абелева ранга  $n - 1$ .

Рассмотрим  $\tilde{B} = B \cap \tilde{A}$  — подгруппу  $B$ , которая содержится в  $\tilde{A}$  (очевидно, что это подгруппа). По предположению индукции  $\tilde{B}$  — свободная абелева, причём  $\text{rk } \tilde{B} \leq \text{rk } \tilde{A} = n - 1$ .

Если  $B = \tilde{B}$ , то теорема доказана.

Иначе рассмотрим гомоморфизм (проекцию на  $\langle e_n \rangle$ )

$$\pi : A \rightarrow \mathbb{Z} : \forall a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in A \quad \pi(a) = \alpha_n \quad (\text{Ker } \pi = \tilde{A}, \text{Im } \pi = \mathbb{Z}).$$

Знаем, что  $\pi(B)$  — подгруппа в  $\mathbb{Z} \implies \pi(B) = \langle k \rangle$  ( $k \neq 0$  из  $B \neq \tilde{B}$ ).

Рассмотрим  $b_0 \in B$  такой, что  $\pi(b_0) = k$ , т.е.  $b_0 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-1} e_{n-1} + k e_n$ .

Докажем, что если  $b_1, \dots, b_s$  — базис  $\tilde{B}$ , то  $b_0, b_1, \dots, b_s$  — базис  $B$  (тогда  $B$  — свободная абелева,  $\text{rk } B \leq n$ )

1. Проверим линейную независимость:

$$\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_s b_s = 0 \implies \pi(\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_s b_s) = 0 \implies \lambda_0 \pi(b_0) + \dots + \lambda_s \pi(b_s) = 0 \implies$$

$$\lambda_0 k = 0 \implies \lambda_0 = 0$$

Линейная комбинация  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s = 0$  тривиальна, так как  $b_1, \dots, b_s$  — базис  $\tilde{B}$ . Отсюда  $b_0, b_1, \dots, b_s$  линейно независимы.

2.  $\langle b_0, b_1, \dots, b_s \rangle \stackrel{?}{=} B$ :

Рассмотрим произвольный  $b \in B$ .  $\pi(b) \in \langle k \rangle \implies \pi(b) = tk, t \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $\tilde{b} = b - tb_0$ . Тогда  $\pi(\tilde{b}) = \pi(b) - t\pi(b_0) = tk - tk = 0 \implies \tilde{b} \in \text{Ker } \pi = \tilde{A} \implies \tilde{b} \in \tilde{A} \cap B = \tilde{B} \implies \tilde{b} = t_1 b_1 + \dots + t_s b_s \implies b = tb_0 + t_1 b_1 + \dots + t_s b_s$ .

□

## 4.1 Связь между базисами свободной абелевой группы

**Определение.** Пусть  $A$  — свободная абелева группа,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  — базисы  $A$ .

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n \\ \vdots \\ \tilde{e}_n = c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases} \implies (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Такая  $C \in M_n(\mathbb{Z})$  называется матрицей перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

**Утверждение.**

Пусть  $C \in M_n(\mathbb{Z})$ . Тогда  $C$  — матрица перехода  $\iff \det C = \pm 1$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $C$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ ,  $D$  — от  $\tilde{\mathcal{E}}$  к  $\mathcal{E}$ . Тогда:

$$\begin{cases} (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C \\ (e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)D \end{cases} \implies CD = DC = E \implies D = C^{-1}$$

$$\det C \cdot \det D = \det CD = \det E = 1$$

Так как  $C, D \in M_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det C, \det D \in \mathbb{Z} \implies \det C = \pm 1$ .

$\iff$ :  $C \in M_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det C = \pm 1$ . Рассмотрим некоторый базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и докажем, что  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C$  — базис.

1. Проверим линейную независимость:

Если  $\lambda_1 \tilde{e}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{e}_n = 0$ , то линейная комбинация столбцов  $C$  с теми же  $\lambda_i$  также равна 0. Из  $\det C \neq 0$  столбцы линейно независимы, т.е.  $\lambda_i = 0 \forall i$ .

2.  $\langle \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \rangle \stackrel{?}{=} A$ :

Так как  $\det C = \pm 1$ ,  $\exists D = C^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$  (из формулы явного выражения элементов обратной матрицы элементы  $D$  целые)  $\implies (e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)D$ .

$\forall a \in A$  целочисленно выражается через  $e_1, \dots, e_n$ , каждый  $e_i$  целочисленно выражается через  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \implies a$  целочисленно выражается через  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$

1

## 4.2 Элементарные преобразования свободных абелевых групп

**Определение.** (ЭП свободных абелевых групп)

Пусть  $A$  — свободная абелева группа,  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $A$ .

- **ЭП1:**  $\tilde{e}_i = e_i + ke_j$ ,  $i \neq j, k \in \mathbb{Z}$ ;  $\tilde{e}_s = e_s$ ,  $s \neq i$ ;
  - **ЭП2:**  $\tilde{e}_i = e_j$ ;  $\tilde{e}_j = e_i$ ;  $\tilde{e}_s = e_s$ ,  $s \neq i, j$  ( $i \neq j$ );
  - **ЭП3:**  $\tilde{e}_i = -e_i$ ;  $\tilde{e}_s = e_s$ ,  $s \neq i$ ;

Матрицы перехода при этих ЭП:

ЭП1:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

ЭП2:

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & 1 & 0 \\ j & & & 1 & & 1 \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ЭП3:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

называются (целочисленными) элементарными матрицами.

**Определение.** (ЭП строк целочисленных матриц)

- **ЭП1:**  $\bar{a}_i \rightarrow \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \quad i \neq j, \lambda \in \mathbb{Z};$
- **ЭП2:**  $\bar{a}_i \leftrightarrow \bar{a}_j, \quad i \neq j;$
- **ЭП3:**  $\bar{a}_i \rightarrow (-1)\bar{a}_i;$

(Аналогично определены ЭП над столбцами матрицы)

**Приведение целочисленной матрицы с помощью целочисленных ЭП к "диагональному" виду**

Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ . Будем говорить, что матрица  $A$  имеет "диагональный" вид, если либо  $A = 0$ , либо  $a_{ii} = \alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, l}$  и  $a_{ij} = 0$  иначе.

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_l & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**Лемма.** Любую матрицу  $M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$  за конечное число целочисленных ЭП над строками и столбцами можно привести к "диагональному" виду.

*Доказательство.* Индукция по  $n$  — числу строк матрицы. При фиксированном  $n$  индукция по  $\nu(M)$  — наименьшему по модулю ненулевому элементу  $M$ .

Если  $M = 0$ , то утверждение доказано, поэтому далее  $M \neq 0$ .

База индукции:  $n = 1 \implies M = (a_{11}, \dots, a_{1m})$ .

База внутренней индукции:  $\nu(M) = 1$  — очевидна (если в строке есть 1, то с помощью неё можно занулить все оставшиеся элементы).

Шаг внутренней индукции: Пусть  $\nu(M) = |a_{1j}|$ . Если  $a_{1j} < 0$ , то применим ЭП3 к столбцу  $j$ ; если  $j > 1$ , то применением ЭП2 поменяем 1-й и  $j$ -й столбцы местами. После этих операций  $\nu(M) = a_{11}$ .

$\forall j > 1 : a_{1j} = a_{11}q_j + r_j$ , где  $0 \leq r_j < a_{11}$ . Вычитая с помощью ЭП1 из  $j$ -го столбца 1-й, умноженный на  $q_j$ , получим строку  $\tilde{M} = (a_{11}, r_2, \dots, r_m)$ .

Если все  $r_j = 0$ , то диагональный вид получен, иначе можно воспользоваться предположением индукции ( $\nu(\tilde{M}) < \nu(M)$ ).

Шаг индукции: Пусть  $\nu(M) = |a_{ij}|$ . Сначала сделаем  $a_{ij}$  положительным (ЭП3), затем переставим его в верхний левый угол (ЭП2).

$$\text{Случай 1: } M = \left( \begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array} \right) \text{ — по предположению индукции приводим}$$

$C$  к диагональному виду;

Случай 2:  $\exists j > 1 : a_{1j} \neq 0$ . Тогда, аналогично базе индукции, с помощью ЭП1 приводим верхнюю строчку к виду:  $\forall j > 1 : a_{1j} = 0$ .

Случай 3:  $\exists j > 1 : a_{j1} \neq 0$  — аналогично случаю 2 (ЭП строк вместо столбцов).  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что с помощью конечного числа целочисленных ЭП над строками и столбцами

$$M \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & \dots & \alpha_l & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

где  $\alpha_l \mid \alpha_{l-1}, \alpha_{l-1} \mid \alpha_{l-2}, \dots, \alpha_2 \mid \alpha_1$ .

*Доказательство.* По лемме можем с помощью ЭП привести  $M$  к диагональному виду. Индукция по  $l$  — числу ненулевых  $\alpha$  в диагональном виде:

База:  $l = 0, 1$  — очевидно;

Шаг: Из теории чисел знаем, что для чисел  $\alpha_1, \alpha_i$  существуют  $a, b \in \mathbb{Z}$ , что  $a\alpha_1 + b\alpha_i = d_i = \text{НОД}(\alpha_1, \alpha_i)$ . Значит, с помощью ЭП1 можно сделать  $a_{1i} = d_i$ . Тогда следующими операциями:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc} k\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & d_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \end{aligned}$$

можем сделать так, чтобы  $\alpha_i \mid \alpha_1$ . Причём  $\alpha_1$  при этих операциях домножается на  $k \in \mathbb{Z}$ , а значит, делимость на все предыдущие  $\alpha_j$  сохраняется. Тогда за  $l - 1$  таких наборов операций можно сделать  $\alpha_1$  общим кратным всех  $\alpha$ , а матрица без первой строки и первого столбца приводится к нужному виду по предположению индукции.  $\square$

**Пример.**  $(12, 10, 6) \sim (6, 10, 12) \sim (6, 4, 0) \sim (4, 6, 0) \sim (4, 2, 0) \sim (2, 4, 0) \sim (2, 0, 0)$ .

(По сути — обобщённый алгоритм Евклида, остаётся НОД чисел 12, 10 и 6).

### 4.3 Согласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы

**Теорема 1.**

Пусть  $A$  — свободная абелева группа ранга  $n$ ,  $B \leq A$  — подгруппа ранга  $m$ .

Тогда  $\exists$  базисы  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  группы  $A$  и  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$  подгруппы  $B$  такие, что  $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_m$  — некоторые базисы  $A$  и  $B$  соответственно. Так как  $f_i \in A$ ,  $(f_1, \dots, f_m) = (e_1, \dots, e_n)C$ , где  $C \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ .

Если  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$  — другой базис  $B$ , то  $(f_1, \dots, f_m) = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)T$ , где  $T \in M_{m \times m}(\mathbb{Z})$

Если  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  — другой базис  $A$ , то  $(e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)S$ , где  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$  ( $\det T, S = \pm 1$ ). Отсюда

$$(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)T = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)SC \implies (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)\tilde{C}, \quad \tilde{C} = SCT^{-1}$$

Тогда если  $S, T^{-1}$  — элементарные матрицы, то  $SC$  — ЭП над строками  $C$ , а  $CT^{-1}$  — ЭП над столбцами  $C$ . По лемме 1  $C$  с помощью ЭП можно привести

к виду  $\tilde{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \\ & & 0 \end{pmatrix}$  (нулей среди  $\alpha_i$  не будет, т.к. векторы базиса  $f$  ЛНЗ).

Отсюда и получаем требуемое равенство  $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

*Замечание.* Для абелевых групп из теоремы 4 прямого произведения получим следующее утверждение: Пусть  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ ,  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ , причём  $B \leq A$ ,  $B_i \leq A_i$

Тогда  $A/B = (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)/(B_1 \oplus \dots \oplus B_n) \simeq A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_n/B_n$

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1:

$$A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

*Доказательство.* По теореме 1:  $\tilde{f}_1 = \alpha_1 \tilde{e}_1, \dots, \tilde{f}_m = \alpha_m \tilde{e}_m$ .

$$A = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle; \quad B = \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 0 \rangle$$

Тогда из замечания выше:

$$A/B \simeq \langle \tilde{e}_1 \rangle / \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle / \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle / \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle / \langle 0 \rangle \simeq$$

$$\simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

$\square$

**Следствие 2.** В условиях теоремы 1:  $\text{rk } A = \text{rk } B \iff |A : B| < \infty$ .

*Доказательство.* По определению  $|A : B| = |A/B|$ .

Из следствия 1 видно, что если  $\text{rk } A = \text{rk } B$ , то  $A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_n}$ , и  $|A/B| < \infty$ , а иначе в прямой сумме встретится слагаемое  $\mathbb{Z}$ , то есть найдётся элемент бесконечного порядка.  $\square$

**Утверждение 1.** (*Универсальное свойство абелевой группы*)

Пусть  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  — система порождающих абелевой группы  $A$ .

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $A$  — свободная с базисом  $S$ ;
2.  $\forall$  абелевой группы  $D$ ,  $\forall d_1, \dots, d_n \in D \exists!$  гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow D$  т.ч.  $\varphi : a_i \mapsto d_i \forall i$ .

*Доказательство.*

1  $\implies$  2 :  $S$  — базис  $A \implies \forall a \in A \exists! \alpha_i \in \mathbb{Z} : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi : A \rightarrow D$ , заданное как  $a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \mapsto \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_n d_n$ . Оно корректно вследствие единственности разложения по базису, а также очевидно является гомоморфизмом с нужным свойством.

2  $\implies$  1. Рассмотрим свободную группу  $D$  ранга  $n$ , в ней рассмотрим базис  $d_1, \dots, d_n$ . По условию  $\exists!$  гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow D$ , причём  $a_i \mapsto d_i$ .

Предположим, что  $a_1, \dots, a_n$  линейно зависимы. Тогда

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \implies \varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_n d_n = 0$$

Противоречие с линейной независимостью  $d_1, \dots, d_n$ . Значит,  $a_1, \dots, a_n$  — базис.  $\square$

**Следствие 3.** Любая конечнопорождённая абелева группа изоморфна факторгруппе некоторой свободной абелевой группы по некоторой её подгруппе.

*Доказательство.* Пусть  $D = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ . Рассмотрим свободную абелеву группу  $A$  ранга  $n$  с базисом  $a_1, \dots, a_n$ .

По утверждению 1  $\exists$  гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow D$  такой, что  $\varphi(a_i) = d_i$ .

Из порождаемости гомоморфизм сюръективен, а значит, по теореме о гомоморфизме  $D = \text{Im } \varphi \simeq A/\text{Ker } \varphi$ , где  $\text{Ker } \varphi \leq A$ .  $\square$

**Следствие 4.** Любая конечнопорождённая абелева группа раскладывается в сумму циклических подгрупп.

*Доказательство.*  $D \simeq A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$

□

**Следствие 5.** Любая конечнопорождённая абелева группа  $D$  раскладывается в прямую сумму конечной абелевой группы и свободной абелевой группы.

*Доказательство.*  $D \simeq (\mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m}) \oplus \mathbb{Z}^{n-m}$

**Определение.** Группа, в которой каждый неединичный элемент имеет бесконечный порядок, называется группой без кручения.

**Упражнение.** Если  $A$  — свободная абелева, то  $A$  — без кручения.

*Доказательство.* Предположим, что  $b \in A$  — элемент конечного порядка  $m$ . По определению свободной группы  $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ , причём не все  $\alpha_i$  равны 0. Тогда  $m\alpha_1 a_1 + \dots + m\alpha_n a_n = mb = 0$  — противоречие с линейной независимостью базиса. □

**Следствие 6.** Если  $A$  — конечнопорождённая абелева группа без кручения, то  $A$  — свободная абелева группа.

*Доказательство.* В обозначениях следствия 5  $m = 0$ .

#### 4.4 Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах

**Определение.** Группа  $G$  называется периодической, если  $\forall g \in G$   $g$  имеет конечный порядок.

**Определение.** Периодическая группа  $G$  называется  $p$ -группой, где  $p$  — простое, если  $\forall g \in G \exists s \in \mathbb{N} : \text{ord } g = p^s$ .

**Упражнение.**

Доказать, что конечная группа  $G$  является  $p$ -группой  $\iff |G| = p^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — очевидно, т.к.  $\forall g \in G : \text{ord } g \mid p^m = |G|$ ;

$\Rightarrow$ : на будущих лекциях будет доказательство в терминах силовских подгрупп.

□

**Определение.** Группа  $G$  называется примарной, если  $G$  является  $p$ -группой для некоторого простого  $p$ .

**Утверждение.** Существуют конечнопорождённые (не абелевы) бесконечные  $p$ -группы.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Пример.** Не конечнопорождённая примарная абелева группа:

$\mathbb{C}_{p^\infty}$  — группа комплексных корней степеней  $p^m$  из 1.

**Лемма 1.** Пусть  $A$  — конечнопорождённая абелева группа,  $B \leq A$  такая, что  $A/B$  — свободная абелева группа. Тогда  $\exists C \leq A$  — свободная абелева группа такая, что  $A \simeq B \oplus C$ .

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  — базис  $\mathbb{Z}^n \simeq A/B$ , и  $\varphi : A/B \rightarrow \mathbb{Z}^n$  — изоморфизм. Тогда  $\varphi^{-1}(\bar{e}_i) = e_i + B$ , где  $e_i \in A$ .

Рассмотрим  $C = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Покажем, что  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $C$ , т.е. докажем линейную независимость  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 &\implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + B = B \implies \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + B) = \\ &= \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n = 0 \implies \forall i \lambda_i = 0 \quad \text{т.к. } \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \text{ — базис } \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Покажем, что  $A = B \oplus C$ , или, что равносильно, что  $A = B + C$  и  $B \cap C = \{0\}$ :

- $B \cap C = \{0\}$ : Рассмотрим  $b \in B \cap C$ . Тогда:

$$\begin{aligned} b = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n &\implies \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + B = b + B = B \implies \\ &\implies \varphi(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + B) = \mu_1 \bar{e}_1 + \dots + \mu_n \bar{e}_n = 0 \implies \forall i \mu_i = 0 \end{aligned}$$

- $A = B + C$ : Рассмотрим произвольный  $a \in A$ .

$\varphi(a + B) = \bar{a} \in \mathbb{Z}^n$ , где  $\bar{a} = \mu_1 \bar{e}_1 + \dots + \mu_n \bar{e}_n$ . Тогда

$$\varphi(a - \sum_i \mu_i e_i + B) = 0 \implies a - \sum_i \mu_i e_i + B = B \implies \exists b \in B : a = b + \sum_i \mu_i e_i$$

□

**Лемма 2.** Все элементы конечного порядка абелевой группы  $A$  образуют подгруппу в  $A$ .

*Доказательство.* Обозначим за  $\text{Tor } A$  множество всех элементов конечного порядка группы  $A$ .

1.  $a, b \in \text{Tor } A \implies \exists n, m \in \mathbb{N} : na = mb = 0 \implies$   
 $\implies (n \cdot m)(a + b) = (n \cdot m)a + (n \cdot m)b = 0 \implies (a + b)$  имеет конечный порядок.

2.  $0 \in \text{Tor } A$  — очевидно.

3.  $\forall a \in \text{Tor } A \implies -a \in \text{Tor } A$ , т.к.  $n(-a) = -na = 0$ .

□

**Определение.** Подгруппа  $\text{Tor } A$  ("torsion subgroup") называется подгруппой кручения группы  $A$ .

**Упражнение.** Доказать, что в группе  $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$  все элементы конечного порядка не образуют подгруппу.

*Замечание.* Группа Диэдра  $D_n$  отлична от  $D_\infty$  наличием соотношения  $b^n = 1$ , ( $a$  — любая симметрия правильного  $n$ -угольника,  $b$  — поворот на  $\frac{2\pi}{n}$ ).

*Доказательство.* Заметим, что  $\text{ord } ba = 2$ :

$$a = a^{-1} \implies baba = b(aba^{-1}) = bb^{-1} = 1$$

Также  $\text{ord } a = 2 : a^2 = 1$ . При этом  $\text{ord } (ba)a = \text{ord } b = \infty$ . Значит, произведение элементов конечного порядка может быть элементом бесконечного порядка, т.е. все элементы конечного порядка не образуют подгруппу в  $D_\infty$ . □

**Лемма 3.** Пусть  $A$  — абелева группа. Тогда  $A/\text{Tor } A$  — группа без кручения.

*Доказательство.* От противного: пусть  $\bar{a} \in A/\text{Tor } A$ ,  $\bar{a} \neq 0$ ,  $\text{ord } \bar{a} = n$ .

Тогда  $\bar{a} = a + \text{Tor } A$ ,  $a \in A$ .

$$\begin{aligned} n\bar{a} = 0 &\implies n(a + \text{Tor } A) = \text{Tor } A \implies na \in \text{Tor } A \implies \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N} : m(na) = 0 \implies (mn)a = 0 \implies a \in \text{Tor } A \implies \bar{a} = 0 \end{aligned}$$

— противоречие с  $\bar{a} \neq 0$ . Значит,  $A/\text{Tor } A$  — группа без кручения. □

**Лемма 4.** Пусть  $A$  — конечнопорождённая абелева группа. Тогда  $A = \text{Tor } A \oplus C$ , где  $C \leq A$  — свободная абелева группа,  $\text{Tor } A$  — конечная.

*Доказательство.* Пусть  $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Тогда  $A/\text{Tor } A = \langle a_1 + \text{Tor } A, \dots, a_n + \text{Tor } A \rangle$ . Кроме того, по лемме 3  $A/\text{Tor } A$  — группа без кручения, а отсюда по следствию 6 из универсального свойства абелевой группы — свободная. Отсюда по лемме 1  $\exists C \leq A$  — свободная абелева группа такая, что  $A \simeq \text{Tor } A \oplus C$ .

Осталось показать, что  $\text{Tor } A$  — конечная:  $\text{Tor } A \simeq A/C = \langle a_1 + C, \dots, a_n + C \rangle$ .

$C\rangle \implies \text{Tor } A = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$  — конечнопорождённая. Тогда если  $k_i = \text{ord } b_i$ , то  $\forall b \in \text{Tor } A$

$$b = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq \lambda_i < k_i \implies |\text{Tor } A| \leq k_1 \dots k_n$$

□

**Лемма 5.** Пусть  $A$  — конечная абелева группа,  $|A| = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ . Тогда  $A$  раскладывается в прямую сумму  $A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ , где  $A_{p_i}$  —  $p_i$ -подгруппа, причём набор этих подгрупп определён однозначно.

Доказательство.

- Существование разложения:

Рассмотрим произвольное простое  $p$  и обозначим за  $A_p$  множество всех элементов  $A$  порядков  $p^m$ . Проверим, что  $A_p$  — подгруппа  $A$ :

1.  $a, b \in A_p, p^{m_1}a = p^{m_2}b = 0 \implies p^{m_1+m_2}(a+b) = p^{m_2} \cdot p^{m_1}a + p^{m_1} \cdot p^{m_2}b = 0$   
Отсюда  $a, b \in A_p \implies a+b \in A_p$ ;
2.  $0 \in A_p$  — очевидно;
3.  $p^m a = 0 \implies p^m(-a) = -p^m a = 0$ . Отсюда  $a \in A_p \implies -a \in A_p$ .

Докажем, что  $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ :

1.  $A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$  — прямая сумма.

Из критерия прямой суммы достаточно показать, что  $A_{p_i} \cap \langle A_{p_j} \mid j \neq i \rangle = \{0\}$ . Рассмотрим  $a \in A_{p_i} \cap \langle A_{p_j} \mid j \neq i \rangle$ . Так как  $a \in A_{p_i}$ , то  $p_i^{m_i}a = 0$ . С другой стороны,  $a = \sum_{j \neq i} a_j$ , то есть  $(\prod_{j \neq i} p_j^{m_j})a = 0$ .

Так как  $\prod_{j \neq i} p_j^{m_j}$  и  $p_i^{m_i}$  взаимно просты, имеем  $1 \cdot a = a = 0$ .

2.  $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ . Рассмотрим произвольный  $a \in A$ . Пусть  $\text{ord } a = n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ . Обозначим  $n_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$ .

Так как  $\text{НОД}(n_1, \dots, n_s) = 1$ ,  $\exists l_i \in \mathbb{Z} : l_1 n_1 + \dots + l_s n_s = 1$ . Отсюда  $a = l_1 n_1 a + \dots + l_s n_s a$ . Так как  $p_i^{\alpha_i}(l_i n_i a) = l_i n a = 0$ , имеем  $l_i n_i a \in A_{p_i}$ .

Значит,  $a$  раскладывается в линейную комбинацию элементов  $A_{p_i}$ .

- Единственность разложения — от противного: пусть

$$A = \tilde{A}_{p_1} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{p_s} = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$$

Так как  $A_{p_i}$  — максимальная  $p_i$ -подгруппа в  $A$  (содержит все элементы  $A$  порядка  $p_i^m$ ),  $\tilde{A}_{p_i} \subseteq A_{p_i}$ .

Предположим, что  $\exists a \in A_{p_i} : a \notin \tilde{A}_{p_i}$ . Так как  $a \in A = \tilde{A}_{p_1} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{p_s}$ ,  $a = \tilde{a}_{p_i} + b$ , где  $\tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$ ,  $b \in \langle \tilde{A}_{p_j} \mid j \neq i \rangle$ . Тогда  $\text{ord } a = p_i^{m_1}$ ,  $\text{ord } \tilde{a}_{p_i} = p_i^{m_2} \implies p_i^{m_1+m_2}a = p_i^{m_1+m_2}\tilde{a}_{p_i} + p_i^{m_1+m_2}b \implies p_i^{m_1+m_2}b = 0$ , а также  $\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}b = 0$

$\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$  и  $p_i^{m_1+m_2}$  взаимно просты  $\implies b = 0$ , т.е.  $a = \tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$  — противоречие.

Значит, такого  $a$  не существует, то есть  $A_{p_i} \subseteq \tilde{A}_{p_i}$ . Отсюда  $A_{p_i} = \tilde{A}_{p_i}$ .

□

**Лемма 6.** Пусть  $A$  — конечная абелева  $p$ -группа. Тогда если  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_s = B_1 \oplus \dots \oplus B_t$ , где  $A_i, B_i$  — примарные циклические подгруппы, то  $s = t$  и набор порядков  $|A_1|, \dots, |A_s|$  совпадает с набором порядков  $|B_1|, \dots, |B_t|$  (т.е. разложение единствено с точностью до порядка слагаемых).

*Доказательство.* Индукция по  $|A|$ :

База:  $|A| = p \implies A \simeq \mathbb{Z}_p$  — такое разложение единствено;

Шаг: Пусть  $|A_i| = p^{n_i}, |B_i| = p^{m_i}$ . Упорядочим их: пусть

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{\tilde{s}} > n_{\tilde{s}+1} = \dots = n_s = 1$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{\tilde{t}} > m_{\tilde{t}+1} = \dots = m_t = 1$$

Пусть  $A_i = \langle a_i \rangle_{p^{n_i}}, B_i = \langle b_i \rangle_{p^{m_i}}$ . Рассмотрим множество  $pA = \{pa \mid a \in A\}$ . Очевидно, что  $pA \leq A$ . Тогда:

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_{\tilde{s}} \rangle \oplus \langle a_{\tilde{s}+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_s \rangle$$

$\forall a \in A : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{\tilde{s}} a_{\tilde{s}} + \alpha_{\tilde{s}+1} a_{\tilde{s}+1} + \dots + \alpha_s a_s \implies pa = \alpha_1 pa_1 + \dots + \alpha_{\tilde{s}} pa_{\tilde{s}}$

( $A_{\tilde{s}+1}, \dots, A_s$  — циклические порядка  $p$ , поэтому  $\alpha_{\tilde{s}+1} pa_{\tilde{s}+1} + \dots + \alpha_s pa_s = 0$ )

Тогда  $pA = \langle pa_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle pa_{\tilde{s}} \rangle$ . При этом  $\text{ord } (pa_1) = p^{n_1-1}, \dots, \text{ord } (pa_{\tilde{s}}) = p^{n_{\tilde{s}}-1}$ .

Значит,  $|pA| = p^{n_1+\dots+n_{\tilde{s}}-\tilde{s}} < |A|$ .

Аналогично  $pA = \langle pb_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle pb_{\tilde{t}} \rangle, |pA| = p^{m_1+\dots+m_{\tilde{t}}-\tilde{t}}$ .

Тогда по предположению индукции разложения  $pA$  совпадают (порядок слагаемых одинаковый в силу упорядоченности), то есть

$$\tilde{s} = \tilde{t}; \quad \forall i = \overline{1 \dots \tilde{s}} : n_i - 1 = m_i - 1 \implies n_i = m_i$$

При этом  $|A| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_{\tilde{s}}| \cdot |A_{\tilde{s}+1}| \cdot \dots \cdot |A_s| = p^{n_1+\dots+n_{\tilde{s}}+s-\tilde{s}}$ , а с другой стороны  $|A| = |B_1| \cdot \dots \cdot |B_{\tilde{t}}| \cdot |B_{\tilde{t}+1}| \cdot \dots \cdot |B_t| = p^{m_1+\dots+m_{\tilde{t}}+t-\tilde{t}}$ . Отсюда

$$n_1 + \dots + n_{\tilde{s}} + s - \tilde{s} = m_1 + \dots + m_{\tilde{t}} + t - \tilde{t}; \quad \tilde{s} = \tilde{t}; \quad n_i = m_i \implies s = t$$

□

**Теорема. (Основная т. о конечнопорождённых абелевых группах)**

Пусть  $A$  — конечнопорождённая абелева группа. Тогда  $A$  изоморфна прямой сумме (конечных) примарных циклических подгрупп и бесконечных циклических подгрупп:

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$$

причём число  $m$  и набор  $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$  определены однозначно для группы  $A$ .

*Доказательство.*

- **Существование разложения**

Из следствия 4 универсального свойства абелевой группы для  $A$  имеем:

$$A \simeq A_0/B_0 \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

Также из аналога китайской теоремы об остатках знаем, что если  $\alpha = q_1^{\nu_1} \dots q_\mu^{\nu_\mu}$ , где  $q_i$  — различные простые, то  $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}_{q_1^{\nu_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_\mu^{\nu_\mu}}$ . Отсюда из разложения выше получаем искомое разложение.

- **Единственность разложения**

По лемме 4 для  $A$  имеет место разложение  $A = \text{Tor } A \oplus C$ , где  $\text{Tor } A$  — конечная,  $C$  — свободная. Заметим, что  $\text{rk } C = \text{rk } A/\text{Tor } A$ . Так как  $\text{Tor } A$  — инвариант  $A$ , то  $A/\text{Tor } A$ , а тогда и  $\text{rk } C$  — инварианты  $A$ .

Так как  $C \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ , а  $\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$  — конечная, имеем  $C = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$ , то есть  $m = \text{rk } C$ , а отсюда  $m$  однозначно определено для  $A$ .

Пусть  $B = \text{Tor } A$ . По лемме 5  $B \simeq A_{\tilde{p}_1} \oplus \dots \oplus A_{\tilde{p}_l}$ , причём это разложение на примарные подгруппы единственно с точностью до порядка слагаемых. А из леммы 6 каждая  $A_{\tilde{p}_i}$  раскладывается на циклические примарные однозначно с точностью до порядка слагаемых. Значит, набор порядков  $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$  определён однозначно для  $A$ .

□

**Пример.** Все абелевы группы порядка 8 с точностью до изоморфизма:

$$8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \implies A_1 \simeq \mathbb{Z}_8; A_2 \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2; A_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

**Пример.**  $V_4 = \{e, a, b, c\}$

$V_4 = \langle a \rangle_2 \oplus \langle b \rangle_2 = \langle b \rangle_2 \oplus \langle c \rangle_2$ , но разложение из теоремы единствено:  $V = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

*Замечание.* Для не конечнопорождённых абелевых групп утверждение теоремы неверно, контрпримером служит следующее упражнение:

**Упражнение.** Доказать, что  $\mathbb{Q}$  не раскладывается в прямую сумму циклических (вообще говоря, произвольных) подгрупп.

*Доказательство.* Пусть  $H_1, H_2 \trianglelefteq \mathbb{Q}$  — нетривиальные нормальные подгруппы  $\mathbb{Q}$ . Тогда  $\exists h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 : h_1, h_2 \neq 0$ . Тогда:

$$h_1 = \frac{m_1}{n_1}, h_2 = \frac{m_2}{n_2} \implies m_2 n_1 h_1 = m_1 n_2 h_2 \in H_1 \cap H_2$$

то есть  $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$ . Отсюда  $\mathbb{Q}$  не раскладывается в прямую сумму подгрупп.  $\square$

**Определение.** Экспонентой (периодом, показателем) конечной группы  $G$  называется наименьшее общее кратное порядков элементов группы  $G$ .

Обозначается  $\exp G$ .

**Утверждение.** Если  $G$  конечна, то  $\exp G \mid |G|$

*Доказательство.* Для конечных групп знаем, что порядок группы является общим кратным всех порядков элементов группы. Так как наименьшее общее кратное набора чисел делит любое общее кратное этого набора, получаем необходимое утверждение.  $\square$

**Утверждение.** Конечная абелева группа  $A$  циклическая  $\iff \exp A = |A|$ .

*Доказательство.*

$\implies: A = \langle a \rangle \implies \text{ord } a = |A| \implies \exp A \geq |A| \implies \exp A = |A|$  (т.к.  $\exp A \mid |A|$ ).

$\impliedby:$  От противного: пусть  $\exp A = |A|$ , но  $A$  — не циклическая. По основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах  $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{s_m}}$ . Если все  $p_1, \dots, p_m$  различны, то  $A$  циклическая по аналогу китайской теоремы об остатках — противоречие. Если среди них есть совпадающие, то можем без ограничения общности считать, что  $p_1 = p_2, s_1 \leq s_2$ . Обозначим  $\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} = \langle a_i \rangle \implies \forall a \in A : a = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$ . Тогда если в равенстве  $|A| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$  обозначить  $t = p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$ , то  $\forall a \in A : ta = \sum_{i=1}^m \alpha_i t a_i = 0$ .

(очевидно, что  $ta_i = 0$  для  $i \neq 1$ , а  $ta_1 = 0$  в силу  $p_1 = p_2, s_1 \leq s_2$ )

Тогда  $t$  — общее кратное всех порядков элементов  $A$ , то есть  $\exp A \mid t$ , но  $t < |A| = \exp A$  — противоречие. Значит,  $A$  — циклическая.  $\square$

**Теорема.** Пусть  $\mathbb{F}$  — произвольное поле,  $A$  — конечная подгруппа в  $\mathbb{F}^*$ . Тогда  $A$  — циклическая.

*Доказательство.* (мультипликативная терминология)

Из определения поля  $F^*$  — абелева группа, а значит,  $A$  также абелева.

От противного: пусть  $A$  не циклическая, т.е.  $\exp A < |A|$ . Тогда если  $\exp A = n$ , то  $\forall a \in A \ a^n = 1$ . Рассмотрим многочлен  $x^n - 1$  над полем  $\mathbb{F}$ . Его степень равна  $n$ , а число его корней в  $\mathbb{F}$  хотя бы  $|A|$ , что больше  $n$  по предположению — противоречие.  $\square$

**Пример.**  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$ :  $A = F^*$  — циклическая. Например,  $\mathbb{Z}_5^* = \langle 3 \rangle_4$ .

**Следствие.** Мультипликативная группа любого конечного поля — циклическая.

## 5 Действия группы на множестве

**Определение.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Биективное отображение  $f : X \rightarrow X$  называется преобразованием множества  $X$ .

Множество всех преобразований  $X$  обозначается  $S(X)$ .

**Утверждение.**  $S(X)$  — группа относительно композиции.

*Доказательство.*

1. Ассоциативность — очевидно;
2. Нейтральный элемент — тождественное преобразование;
3. Обратный элемент — обратное преобразование (существует, т.к. биекция)

□

**Определение.** Группа  $S(X)$  называется группой всех преобразований  $X$ .

Произвольная  $H \leq S(X)$  называется группой преобразований множества  $X$ .

**Пример.**  $GL(V)$  — группа невырожденных линейных операторов векторного пространства  $V$ :  $GL(V) \leq S(V)$ .

**Определение.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $X$  — произвольное множество.

Действием группы  $G$  на множестве  $X$  называется гомоморфизм  $\alpha : G \rightarrow S(X)$ .

Обозначается  $G \curvearrowright X$  (или  $G : H$ )

Элементы множества  $X$  при этом называются точками.

$\forall g \in G : g \mapsto \alpha(g)$  — преобразование множества  $X$ , т.е. биекция  $X \rightarrow X$ .

Равенство  $\alpha(g)(x) = y (\in X)$  записывают как  $\alpha(g)x = y$  или  $gx = y$ .

Так как  $\alpha$  — гомоморфизм, имеем:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2) \implies \alpha(g_1g_2)x = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))x = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)x)$$

Отсюда  $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$ . Аналогично:

$$\forall g \in G : \alpha(g^{-1}) = (\alpha(g))^{-1} \implies \alpha(g^{-1})x = (\alpha(g))^{-1}(x)$$

Отсюда  $g^{-1}x = y \iff gy = x$ .

Если  $H \leq S(X)$ , то определено "тавтологическое" действие  $H$  на  $X$ :  $\alpha(h) = h$  — вложение  $H \rightarrow S(X)$ .

**Пример.**  $GL(V) \curvearrowright V$ :  $\alpha(g)x = g(x) \quad \forall g \in GL(V), x \in X$

В общем случае  $\alpha : G \rightarrow S(X)$  — гомоморфизм, то есть  $\text{Im } \alpha \leq S(X)$ ,  $\text{Ker } \alpha \trianglelefteq G$ .

**Определение.**  $\text{Ker } \alpha$  называется ядром неэффективности действия группы  $G$  на  $X$ .

Если  $\text{Ker } \alpha = \{e\}$ , то действие называется эффективным.

*Замечание.* Всякое действие группы  $G$  на множестве  $X$  индуцирует и другие действия. Например:

1.  $G \curvearrowright 2^X$ ;
2. Если  $Y \subset X$  — инвариантное подмножество относительно  $G$ , то  $G \curvearrowright Y$ .

**Пример.** Пусть  $K$  — равносторонний треугольник,  $G = \text{Sym } K \leq S(X)$ , где  $X$  — множество точек треугольника.

Тогда если  $Y = \{v_1, v_2, v_3\}$  — вершины треугольника, а  $Z = \{e_1, e_2, e_3\}$  — стороны треугольника, то действие  $G \curvearrowright X$  индуцирует также и действия  $G \curvearrowright Y, G \curvearrowright Z$

**Пример.** Пусть задано  $G \curvearrowright X$ ,  $\mathbb{F}$  — поле,  $Y = \{f : X \rightarrow \mathbb{F}\}$  — алгебра всех функций  $X \rightarrow \mathbb{F}$ . Рассмотрим  $\alpha : G \rightarrow S(Y) : \forall g \in G \alpha(g)f = \tilde{f}$  такое, что  $\tilde{f}(x) = f(g^{-1}x) \forall x \in X$ . Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G : (\alpha(g_1g_2)f)(x) &= f((g_1g_2)^{-1}(x)) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (\alpha(g_2)f)(g_1^{-1}x) = \\ &= \alpha(g_1)(\alpha(g_2)f)(x) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2)f)(x) \end{aligned}$$

*Замечание.* Если  $G \curvearrowright X, H \leq G$ , то определено также действие  $H \curvearrowright X$  — ограничение действия на подгруппу.

**Пример.**  $G = S_3$ ;  $G \curvearrowright X$ , где  $X = \{1, 2, 3\}$  — действуют как подстановки.  $H = \langle (1, 2, 3) \rangle \leq G$  — определено действие  $H \curvearrowright X$  как ограничение  $G \curvearrowright X$ .

## 5.1 Орбиты и стабилизаторы

**Утверждение.** Отношение, заданное правилом  $x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$ , является отношением эквивалентности.

*Доказательство.*

- Рефлексивность:  $\forall x \in X : ex = x \implies x \sim x$ ;

- Симметричность:

$$x \sim y \implies \exists g \in G : gx = y \implies g^{-1}gx = g^{-1}y \implies g^{-1}y = x \implies y \sim x$$

- Транзитивность:

$$\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \implies \exists g_1, g_2 \in G : \begin{cases} y = g_1x \\ z = g_2y \end{cases} \implies z = g_2(g_1x) = (g_2g_1)x \implies x \sim z$$

□

**Определение.** Классы эквивалентности относительно этого отношения называются орбитами относительно действия  $G \curvearrowright X$ .

Обозначается  $\text{Orb}(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\}$

**Пример.** Пусть  $G$  — группа поворотов плоскости  $\mathcal{E}^2$  вокруг точки  $o$ .

Тогда при  $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$   $\text{Orb}(x)$  — окружность с центром в точке  $o$  радиуса  $|ox|$ .

**Определение.** Если  $\text{Orb}(x) = \{x\}$ , то  $x$  называется неподвижной точкой.

**Определение.** Если  $\text{Orb}(x) = X$ , то действие называется транзитивным.

*Замечание.* Это именно характеристика действия, так как  $\exists x : \text{Orb}(x) = X \Rightarrow \forall x \in X \text{ Orb}(x) = X$ .

**Пример.**  $G$  — группа сдвигов (параллельных переносов)  $\mathcal{E}^2$ .

Тогда  $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$  — транзитивное (из любой точки можно получить любую другую сдвигом на вектор, их соединяющий).

**Утверждение.** Если  $y \in \text{Orb}(x)$ , то  $\text{Orb}(y) = \text{Orb}(x)$ .

*Доказательство.* Напрямую следует из определения орбиты.

**Определение.** Стабилизатором (стационарной подгруппой) точки  $x$  называется множество  $\text{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ .

**Утверждение.**  $\text{St}(x) \leq G$ .

*Доказательство.*

- $g_1, g_2 \in \text{St}(x) \implies g_1x = g_2x = x$   
 $(g_1g_2)x = g_1(g_2x) = g_1x = x \implies g_1g_2 \in \text{St}(x);$
- $ex = x \implies e \in \text{St}(x);$

- Пусть  $g \in \text{St}(x)$ . Тогда  $g(x) = x$ , а также  $g(g^{-1}x) = ex = x$ . Так как образ  $g$  при действии — биекция, имеем  $x = g^{-1}x$ , то есть  $g^{-1} \in \text{St}(x)$

□

**Утверждение.** Если  $y = gx$ , то множество  $M_y = \{h \in G \mid y = hx\}$  совпадает с множеством  $g\text{St}(x)$ .

*Доказательство.* Покажем оба включения:

$g\text{St}(x) \subset M_y : \forall \tilde{g} \in g\text{St}(x) : \tilde{g} = g \cdot g'$ , где  $g' \in \text{St}(x)$ . Тогда:  $\tilde{g}x = (gg')x = g(g'x) = gx = y \implies \tilde{g} \in M_y$ . Отсюда  $g\text{St}(x) \subset M_y$ .

$M_y \subset g\text{St}(x) : \forall h \in M_y : y = hx$ . Также  $y = gx \implies gx = hx \implies (g^{-1}h)x = g^{-1}(hx) = x \implies g^{-1}h \in \text{St}(x) \implies h \in g\text{St}(x)$ . Отсюда  $M_y \subset g\text{St}(x)$ . □

**Теорема.** Отображение  $\psi : \text{Orb}(x) \rightarrow G/\text{St}(x)$  (множество левых смежных классов, не факторгруппа!) такое, что  $gx \mapsto g\text{St}(x)$ , является биекцией.

*Доказательство.* Из предыдущего утверждения:

$$g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x) \iff \{h \in G \mid g_1x = hx\} = \{h \in G \mid g_2x = hx\} \iff g_1x = g_2x$$

- Корректность:  $g_1x = g_2x \implies g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x)$ ;
- Сюръективность — очевидна ( $\forall g \in G g\text{St}(x)$  будет образом точки  $gx$ );
- Инъективность:  $g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x) \implies g_1x = g_2x$ .

Отсюда  $\psi$  — биекция. □

**Следствие 1.**  $|\text{Orb}(x)| = |G/\text{St}(x)| = |G : \text{St}(x)|$ .

**Следствие 2.** Если  $G$  — конечная группа, то  $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$ .

**Пример.** Пусть  $K \subset \mathcal{E}^3$  — куб,  $G = \text{Sym}^+(K) = \{g \in \text{Isom}^+(\mathcal{E}^3) \mid gK = K\}$  — группа вращений  $K$ .

Найдём  $|G|$ . Так как  $G \leq S(X)$ , где  $X = \{v_1, \dots, v_8\}$  — множество вершин куба,  $|G| < \infty$ . Значит, если рассмотреть индуцированное действие  $G \curvearrowright X$ , то  $|G| = |\text{Orb}(v_1)| \cdot |\text{St}(v_1)|$ .

$\text{Orb}(v_1) = X$  (вершина может перейти в любую)  $\implies |\text{Orb}(v_1)| = 8$ ;

$|\text{St}(v_1)| = 3$  (id и два поворота вокруг большой диагонали, содержащей  $v_1$ );

Отсюда  $|G| = 8 \cdot 3 = 24$ .

Более того, покажем, что  $G \simeq S_4$ . Рассмотрим множество диагоналей куба  $Y = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ . Так как при собственном движении диагонали переходят в

диагонали, можем рассмотреть действие  $G \curvearrowright Y \implies \exists \alpha : G \rightarrow S(Y) \simeq S_4$  — гомоморфизм. Из  $|G| = |S_4| = 24$  для доказательства того, что  $\alpha$  — изоморфизм, достаточно показать сюръективность, а для этого достаточно показать, что все транспозиции диагоналей можно получить вращениями (достаточно, т.к.  $S_4$  порождается транспозициями, а  $\text{Im } \alpha \leq S(Y)$ ).

Такая транспозиция — это поворот на  $\pi$  относительно прямой, проходящей через середины двух рёбер, соединяющих концы диагоналей.

**Упражнение.** Доказать, что если  $L$  — правильный тетраэдр, то  $\text{Sym}(L) \simeq S_4$ .

*Доказательство.* Будем действовать аналогично — пусть  $X = \{v_1, \dots, v_4\}$  — множество вершин тетраэдра, тогда действие  $\text{Sym}(L) \curvearrowright E^3$  индуцирует действие  $\text{Sym}(L) \curvearrowright X$ , а отсюда  $|\text{Sym}(L)| = |\text{Orb}(v_1)| \cdot |\text{St}(v_1)|$ .

$\text{Orb}(v_1) = X$  (вершина может перейти в любую)  $\implies |\text{Orb}(v_1)| = 4$ ;  
 $|\text{St}(v_1)| = 6$  (любые перестановки вершин на грани, не содержащей  $v_1$ );  
(проверка существования всех этих движений непосредственная)

Отсюда  $|G| = 4 \cdot 6 = 24$ .

Так как  $S(X) \simeq S_4$ , достаточно показать, что гомоморфизм действия — изоморфизм, а из равенства порядков достаточно сюръективности. Транспозиция любых двух вершин может быть получена симметрией относительно плоскости, проходящей через середину ребра, соединяющего вершины, и противоположное ребро.  $\square$

**Определение.** Элементы  $a, b \in G$  называются сопряжёнными, если  $\exists g \in G$  такой, что  $b = g^{-1}ag$ . Обозначается  $b = a^g$ .

*Замечание.* Такое обозначение не случайно: многие свойства возвведения в степень присущи и операции сопряжения. Однако в данном курсе эти свойства пока не понадобятся.

**Определение.** Подгруппы  $L, K \leq G$  называются сопряжёнными, если  $\exists g \in G$  такой, что  $K = g^{-1}Lg = \{g^{-1}lg \mid l \in L\}$ .

**Утверждение.** Пусть  $y = gx$ . Тогда  $g\text{St}(x)g^{-1} = \text{St}(y)$ .

*Доказательство.*

- $g\text{St}(x)g^{-1} \stackrel{?}{\subseteq} \text{St}(y)$ :  
 $\forall h \in \text{St}(x) : ghg^{-1}(y) = ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}g)x = ghx = gx = y \implies ghg^{-1} \in \text{St}(y)$ ;

- $\text{St}(y) \stackrel{?}{\subseteq} g\text{St}(x)g^{-1}$ : (аналогичные рассуждения, т.к.  $y = gx \iff x = g^{-1}y$ )
$$\forall h \in \text{St}(y) : g^{-1}hg(x) = g^{-1}hg(g^{-1}y) = g^{-1}h(gg^{-1})y = g^{-1}hy = g^{-1}y = x \implies g^{-1}hg \in \text{St}(x) \implies h \in g\text{St}(x)g^{-1}.$$

□

## 5.2 Действия группы на себе

Пусть  $G$  — группа,  $X = G$ . Рассмотрим основные действия  $G \curvearrowright G$  и покажем некоторые их свойства:

1. Действие  $G \curvearrowright G$  левыми сдвигами:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$  такое, что  $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = gh$ .

Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h = g_1(g_2h) = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

$g \in \text{Ker } \alpha \implies \forall h \in G : gh = h \implies g = e \implies \text{Ker } \alpha = \{e\}$  — действие эффективно.

Значит, по теореме о гомоморфизме  $G \simeq \text{Im } \alpha \leq S(G)$ .

**Следствие. (Теорема Кэли)**

Пусть  $|G| = n$ . Тогда  $G$  изоморфна некоторой подгруппе  $S_n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм  $\alpha : G \rightarrow S(G)$ , приведённый выше. Тогда  $G \simeq \text{Im } \alpha \leq S(G) \simeq S_n$ , т.к.  $|G| = n$ . □

2. Действие  $G \curvearrowright G$  правыми сдвигами:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$  такое, что  $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = hg^{-1}$ .

Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = hg_2^{-1}g_1^{-1} = \alpha(g_1)(hg_2^{-1}) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

$g \in \text{Ker } \alpha \implies \forall h \in G : hg^{-1} = h \implies g = e \implies \text{Ker } \alpha = \{e\}$  — действие эффективно.

3. Действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$  такое, что  $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = ghg^{-1}$ .

Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h)$$

**Утверждение.**  $\forall g \in G : \alpha(g) : G \rightarrow G$  — автоморфизм, т.е. изоморфизм  $G$  на себя.

*Доказательство.* Биективность  $\alpha(g)$  следует из  $\alpha(g) \in S(G)$ . Докажем, что  $\alpha(g)$  — гомоморфизм:

$$\alpha(g)(h_1 h_2) = gh_1 h_2 g^{-1} = (gh_1 g^{-1})(gh_2 g^{-1}) = (\alpha(g)h_1)(\alpha(g)h_2)$$

Значит,  $\alpha(g)$  — автоморфизм  $G$ . □

**Определение.** Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом группы  $G$  (относительно элемента  $g$ ).

**Утверждение.**

1. Множество  $\text{Aut } G$  всех автоморфизмов группы  $G$  — группа относительно композиции, причём  $\text{Aut } G \leq S(G)$ .
2. Множество  $\text{Int } G$  всех внутренних автоморфизмов группы  $G$  — группа относительно композиции, причём  $\text{Int } G \trianglelefteq \text{Aut } G$ .

*Доказательство.*

1. Достаточно проверить, что  $\text{Aut } G \leq S(G)$ :

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut } G \implies (\alpha_1 \alpha_2) \in \text{Aut } G$ ;
- $\text{id} \in \text{Aut } G$ ;
- $\alpha \in \text{Aut } G \implies \alpha^{-1} \in \text{Aut } G$  (изоморфизм обратим).

2. Для определения группы достаточно проверить, что  $\text{Int } G \leq \text{Aut } G$ :

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Int } G \implies \exists g_1, g_2 \in G : \alpha_i$  — сопряжение относительно  $g_i$ . Тогда  $(\alpha_1 \alpha_2)$  — сопряжение относительно  $g_1 g_2$ , т.е.  $(\alpha_1 \alpha_2) \in \text{Int } G$ ;
- $\text{id} \in \text{Int } G$  — сопряжение относительно  $e$ ;
- $\alpha \in \text{Int } G \implies \alpha$  — сопряжение относительно  $g \in G \implies \alpha^{-1}$  — сопряжение относительно  $g^{-1} \implies \alpha^{-1} \in \text{Int } G$ .

Проверим, что  $\text{Int } G \trianglelefteq \text{Aut } G$ , т.е.  $\forall \varphi \in \text{Aut } G, g \in G : \varphi \alpha(g) \varphi^{-1} \in \text{Int } G$ :

$$\begin{aligned} (\varphi \alpha(g) \varphi^{-1})(h) &= \varphi(\alpha(g)(\varphi^{-1}(h))) = \varphi(g \varphi^{-1}(h) g^{-1}) = \varphi(g) \varphi(\varphi^{-1}(h)) \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g) h (\varphi(g))^{-1} = \alpha(\varphi(g))(h) \implies \varphi \alpha(g) \varphi^{-1} = \alpha(\varphi(g)) \in \text{Int } G \end{aligned}$$

□

### Определение.

$\text{Aut } G$  называется группой автоморфизмов группы  $G$ .

$\text{Int } G$  называется группой внутренних автоморфизмов группы  $G$ .

Пусть  $\alpha$  — действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями. Тогда  $\text{Ker } \alpha = \{g \in G \mid \alpha(g)h = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$ , а  $\text{Im } \alpha = \text{Int } G$ .

**Определение.** Множество  $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$  называется центром группы  $G$ .

### Свойства.

1.  $Z(G) = \text{Ker } \alpha$ , где  $\alpha$  — действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями;
2.  $Z(G) \trianglelefteq G$ ;
3.  $\forall H \leq Z(G) : H \trianglelefteq G$ ;
4.  $Z(G) = G \iff G$  — абелева

*Доказательство.*

1. Доказано выше;
2. Следует из (1) ( $\text{Ker } \alpha \trianglelefteq G$  — свойство гомоморфизма);
3.  $\forall h \in H \leq Z(G), g \in G : ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H \implies H \trianglelefteq G$ ;
4. Очевидно из определения абелевой группы.

□

## 5.3 Классы сопряжённости и централизаторы

**Определение.** Пусть  $\alpha$  — действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями.

Классом сопряжённости  $x \in G$  называется орбита  $x$  относительно  $\alpha$ .

Централизатором элемента  $x \in G$  называется стабилизатор  $x$  относительно  $\alpha$ .

Класс сопряжённости обозначается как  $x^G = \{y \in G \mid \exists g \in G : y = gxg^{-1}\}$ .

Централизатор обозначается как  $C(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ .

**Утверждение 1.** Если  $|G| < \infty$ , то  $|x^G| = \frac{|G|}{|C(x)|}$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из утверждения  $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$ .  $\square$

**Утверждение 2.**  $x^G = \{x\} \iff x \in Z(G)$ .

*Доказательство.*  $\forall g \in G : gxg^{-1} = x \iff gx = xg$ .  $\square$

**Теорема.** Центр любой конечной нетривиальной  $p$ -группы нетривиален ( $p$  — простое).

*Доказательство.* Пусть  $|G| = p^s$ . Рассмотрим случаи:

1.  $G$  — абелева  $\implies Z(G) = G$ .

2.  $G$  — неабелева. Тогда  $G$  разбивается на несколько непересекающихся классов сопряжённости:  $G = \bigsqcup_{i=1}^k x_i^G$ .

По утверждению 2  $|x_i^G| = 1 \iff x_i \in Z(G)$ , а по утверждению 1  $|x_i^G| = \frac{|G|}{|C(x_i)|}$

Так как  $G$  —  $p$ -группа, для  $x_i \notin Z(G)$ :  $|x_i^G| = p^{s_i}, s_i \geq 1$ .

Без ограничения общности пусть только  $x_1, \dots, x_m \in Z(G)$  (всегда будет хотя бы один, так как  $e \in Z(G)$ ). Тогда:

$$|G| = \underbrace{|x_1^G| + \dots + |x_m^G|}_{|Z(G)|} + |x_{m+1}^G| + \dots + |x_k^G| \implies p^s = |Z(G)| + p^{s_{m+1}} + \dots + p^{s_k}$$

Отсюда  $p \mid |Z(G)|$ , а значит,  $|Z(G)| \geq p > 1$  — центр нетривиален.

$\square$

*Замечание.*  $\exists$  бесконечная (конечнопорождённая)  $p$ -группа с тривиальным центром (монстр Тарского).

**Следствие.** Если  $|G| = p^2$ , где  $p$  — простое, то  $G$  — абелева.

*Доказательство.*  $G$  —  $p$ -группа  $\implies Z(G) \neq \{e\}$ .

Предположим, что  $G$  неабелева, т.е. что  $Z(G) \neq G$ .

Тогда, так как  $|Z(G)| \mid |G| = p^2$  и  $|Z(G)| \neq 1, p^2$ , имеем  $|Z(G)| = p$ .

Рассмотрим группу  $G/Z(G)$ . Её порядок равен  $\frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^2}{p} = p \implies G/Z(G)$  — циклическая, а значит,  $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$ . Тогда  $\forall g \in G \ \exists t \in \mathbb{Z} : g \in a^t Z(G)$ . Рассмотрим два произвольных элемента  $g_1, g_2 \in G$  и докажем, что  $g_1 g_2 = g_2 g_1$ :

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : g_1 = a^{t_1} Z(G), g_2 = a^{t_2} Z(G) \implies \exists z_1, z_2 \in Z(G) : g_1 = a^{t_1} z_1, g_2 = a^{t_2} z_2$$

Так как элементы центра коммутируют со всеми элементами  $G$ , имеем:

$$g_1g_2 = a^{t_1}z_1a^{t_2}z_2 = a^{t_1+t_2}z_1z_2 = a^{t_2+t_1}z_2z_1 = a^{t_2}z_2a^{t_1}z_1 = g_2g_1$$

а значит,  $G$  — абелева, что противоречит предположению.

Отсюда  $G$  не может быть неабелевой, т.е.  $G$  — абелева.  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $X$  — произвольное множество,  $G \leq S(X)$ . Тогда если  $\varphi \in G$  т.ч.  $\varphi : x \mapsto y$ , то  $\forall \psi \in G : \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(x) \mapsto \psi(y)$ .

*Доказательство.* Применим преобразование  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ :

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \psi(\varphi(\psi^{-1}(\psi(x)))) = \psi(\varphi(x)) = \psi(y)$$

$\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $\sigma, \tilde{\sigma} \in S_n$ . Тогда  $\sigma, \tilde{\sigma}$  сопряжены в  $S_n \iff \sigma, \tilde{\sigma}$  имеют одинаковые цикловые структуры, т.е. наборы длин независимых циклов в разложении  $\sigma, \tilde{\sigma}$  совпадают.

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $\sigma, \tilde{\sigma}$  сопряжены в  $S_n \implies \exists \tau \in S_n : \tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$ .

Пусть  $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_s)(j_1 j_2 \dots j_t) \dots$  — разложение  $\sigma$  в независимые циклы. Тогда  $\sigma : i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_s \mapsto i_1$ , а тогда по лемме 1  $\tau\sigma\tau^{-1} : \tau(i_1) \mapsto \tau(i_2), \tau(i_2) \mapsto \tau(i_3), \dots, \tau(i_s) \mapsto \tau(i_1)$ . Аналогичное рассуждение можно провести для всех независимых циклов  $\sigma$ , а значит,  $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\tau(i_2)\dots\tau(i_s))(\tau(j_1)\tau(j_2)\dots\tau(j_t))\dots$  — длины циклов сохраняются.

$\iff$ : Пусть  $\sigma, \tilde{\sigma}$  имеют одинаковые цикловые структуры. Можем поменять порядок циклов так, чтобы длины  $i$ -х циклов в  $\sigma$  и  $\tilde{\sigma}$  совпадали, т.е.

$$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_s)(j_1 j_2 \dots j_t) \dots; \quad \tilde{\sigma} = (\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_s)(\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_t) \dots$$

Тогда если  $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s & j_1 & j_2 & \dots & j_t & \dots \\ \tilde{i}_1 & \tilde{i}_2 & \dots & \tilde{i}_s & \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & \dots & \tilde{j}_t & \dots \end{pmatrix}$ , то по лемме 1  $\tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$ .  $\square$

**Примеры.**  $\sigma = (12)(345)(6)(7), \tilde{\sigma} = (15)(243)(6)(7)$  — сопряжены в  $S_7$ :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{(из построения в теореме);}$$

$$\sigma = (123)(45), \tau = (135) \implies \tau\sigma\tau^{-1} = (325)(41).$$

**Следствие.**  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$  при  $n \geq 3$ .

*Доказательство.* Допустим, что в  $Z(S_n)$  есть  $\sigma \neq \text{id}$ . Разложим в независимые циклы:  $\sigma = (ij\dots)\dots$ . Так как  $n \geq 3, \exists k \neq i, j$ . Тогда при  $\tau = (jk) : \tau\sigma\tau^{-1} = (ik\dots)\dots$  — не совпадёт с  $\sigma$  ( $\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i)$ ) — противоречие.  $\square$

**Упражнение.** Докажите, что  $Z(A_n) = \{\text{id}\}$  при  $n \geq 4$ .

*Доказательство.* Допустим, что в  $Z(G)$  есть  $\sigma \neq \text{id}$ . Разложим в независимые циклы:  $\sigma = (ij\dots)\dots$ . Так как  $n \geq 4, \exists k, l : k, l, i, j$  попарно различны. Тогда при  $\tau = (jkl) : \tau\sigma\tau^{-1} = (ik\dots)\dots$  — не совпадёт с  $\sigma$  ( $\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i)$ ) — противоречие.  $\square$

**Утверждение.**

$$H \trianglelefteq G \iff \begin{cases} H \leq G \\ H — объединение нескольких классов сопряжённости G \end{cases}$$

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $H \trianglelefteq G$ . Очевидно, что  $H \leq G$ .

Если  $h \in H$ , то  $\forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H$  —  $H$  содержит классы сопряжённости всех её элементов  $\implies H = \bigcup_{h \in H} h^G$ .

$\impliedby$ : Пусть  $H \leq G$  и  $H$  — объединение классов сопряжённости. Тогда  $\forall h \in H, g \in G : ghg^{-1} \in H$  ( $H$  содержит весь класс сопряжённости  $h^G$ )  $\implies H \trianglelefteq G$ .  $\square$

## 6 Теоремы Силова

Пусть  $G$  — конечная группа,  $|G| = p^s \cdot m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

**Определение.** Подгруппа  $H \leq G$  называется силовской  $p$ -подгруппой, если  $|H| = p^s$ .

*Замечание.* Несложно видеть, что определение корректно: если  $H$  — силовская  $p$ -подгруппа, то  $H$  —  $p$ -подгруппа; более того, это доказано в [упражнении](#) п. 4.4

**Теорема 1.** (*Первая теорема Силова — о существовании*)

*Силовская  $p$ -подгруппа существует.*

*Замечание.* Напомним, что более общее утверждение  $k \mid |G| \implies \exists H \leq G : |H| = k$  неверно — в  $A_4$  нет подгруппы порядка 6.

**Теорема 2.** (*Вторая теорема Силова — о сопряжённости*)

*Любая  $p$ -подгруппа лежит в некоторой силовской  $p$ -подгруппе.*

*Все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены.*

**Теорема 3.** (*Третья теорема Силова — о количестве*)

Пусть  $N_p$  — число силовских  $p$ -подгрупп в  $G$ . Тогда

$$\begin{cases} N_p \equiv 1 \pmod{p} \\ N_p \mid m \end{cases}$$

**Примеры.**

1.  $G = S_3, |G| = 6 = 2 \cdot 3$ . Силовские 2-подгруппы:  $\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle$ .

2.  $G = S_4, |G| = 24 = 2^3 \cdot 3$ . Найдём силовские 2-подгруппы:

Доказывалось, что  $S_4 \simeq \text{Sym}^+ K$  — группа вращений куба. Можем рассмотреть сечение куба плоскостью, параллельной некоторой паре противоположных граней — вращения, оставляющие квадрат сечения на месте, образуют подгруппу, очевидно изоморфную  $D_4$  (по определению  $D_4$ ). Такая подгруппа будет иметь порядок 8, и таких подгрупп будет 3 — столько же, сколько пар противоположных граней — по III теореме Силова это все силовские  $p$ -подгруппы в  $G$ .

### 6.1 I теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ . Тогда  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа в  $G$ .

*Доказательство.* Рассмотрим случаи:

1.  $G$  — абелева  $\implies G \simeq \langle a_1 \rangle_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \langle a_k \rangle_{p_k^{s_k}}$ . Без ограничения общности  $p_1 = \dots = p_t = p$ ,  $p_{t+1}, \dots, p_k \neq p$ . Тогда  $H \simeq \langle a_1 \rangle_{p^{s_1}} \times \dots \times \langle a_t \rangle_{p^{s_t}}$  — искомая силовская  $p$ -подгруппа: очевидно, что  $H$  является  $p$ -подгруппой, а также  $p^s m = |G| = |H| \cdot |G/H|$ , где  $p \nmid |G/H| \implies p^s \mid |H| \implies |H| = p^s$ .

2. Общий случай ( $G$  — неабелева). Индукция по  $|G|$ :

База:  $|G| = 1$  — очевидно;

Шаг: Пусть  $G = Z(G) \sqcup x_1^G \sqcup \dots \sqcup x_k^G$  — разложение  $G$  на классы сопряжённости, где  $x_i \notin Z(G)$ , то есть  $|x_i^G| > 1$ . Вновь рассмотрим случаи:

- (a)  $\exists i = \overline{1, \dots, k} : p \nmid |x_i^G|$ . Знаем, что  $|C(x_i)| = \frac{|G|}{|x_i^G|}$ . По предположению индукции в  $C(x_i)$   $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $H \implies |H| = p^s$  (так как степень вхождения  $p$  в порядок группы не уменьшилась), т.е.  $H$  — силовская  $p$ -подгруппа и для  $G$ ;
- (b)  $\forall i = \overline{1, \dots, k} : p \mid |x_i^G|$ . Тогда  $p \mid |Z(G)| \implies |Z(G)| = p^{s_0} m_0$  ( $(p, m_0) = 1$ ). Так как  $Z(G)$  — абелева, по 1 случаю  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $S_0 \leq Z(G)$ ,  $|S_0| = p^{s_0}$ .

По свойству центра  $S_0 \leq Z(G) \implies S_0 \trianglelefteq G$  — можем рассмотреть  $G/S_0$ . Так как  $|G/S_0| < |G|$ , по предположению индукции  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $S \leq G/S_0$ .  $|G/S_0| = p^{s-s_0} m \implies |S| = p^{s-s_0}$

Рассмотрим натуральный гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/S_0$ , и  $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$  — полный прообраз  $S$  при этом гомоморфизме.

$S_0 \subset \tilde{S}$ , так как  $\forall s_0 \in S_0 : \pi(s_0) = eS_0$ , причём  $S_0 \trianglelefteq G \implies S_0 \trianglelefteq \tilde{S}$ , т.е. можем рассмотреть ограничение  $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/S_0$ .  $\pi|_{\tilde{S}}$  — натуральный гомоморфизм с ядром  $S_0$  и образом  $\pi(\tilde{S}) = S$ .

Натуральный гомоморфизм сюръективен, а отсюда по теореме о гомоморфизме  $|\tilde{S}| = |S_0| \cdot |S| = p^{s_0} \cdot p^{s-s_0} = p^s \implies \tilde{S}$  — искомая силовская  $p$ -подгруппа  $G$ .

□

**Следствие.** Пусть  $|G| < \infty$ . Тогда  $G$  —  $p$ -группа  $\iff |G| = p^s$  ( $s \in \mathbb{N}$ ).

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — доказано ранее;

$\implies$ : От противного: пусть  $|G|$  содержит простой множитель  $q \neq p$ . Тогда по I теореме Силова  $\exists$  силовская  $q$ -подгруппа в  $G$ , причём в ней хотя бы  $q$  элементов.

Значит, в ней есть элемент порядка  $q^k$  ( $k \geq 1$ ), что противоречит определению  $p$ -группы. Отсюда у  $|G|$  нет простых делителей, отличных от  $p \implies |G| = p^s$ .  $\square$

## 6.2 II теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

Тогда любая  $p$ -подгруппа группы  $G$  лежит в некоторой силовской  $p$ -подгруппе. Все силовские  $p$ -подгруппы группы  $G$  сопряжены.

*Доказательство.* Пусть  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

По I теореме Силова  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $S \leq G$ . Рассмотрим  $H \leq G$  — произвольную нетривиальную  $p$ -подгруппу (случай  $H = \{e\}$  очевиден).

Рассмотрим множество  $X = \{g_1 S, \dots, g_m S\}$  смежных классов  $G$  по  $S$  и действие  $H \curvearrowright X$ , заданное по правилу  $\alpha(h)g_i S = hg_i S$ .

$$|\text{Orb}(g_i S)| \mid |H| \implies \begin{cases} |\text{Orb}(g_i S)| = 1 \\ p \mid |\text{Orb}(g_i S)| \end{cases}$$

( $|H| = p^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) по следствию из I теоремы Силова)

Предположим, что  $\forall i = \overline{1, \dots, m} : p \mid |\text{Orb}(g_i S)|$ . Тогда  $p \mid |X|$ , так как  $|X|$  — сумма мощностей непересекающихся орбит. Однако  $|X| = m$  — взаимно просто с  $p$ . Противоречие.

Отсюда  $\exists i = \overline{1, \dots, m} : |\text{Orb}(g_i S)| = 1$ , т.е. точка  $g_i S$  неподвижна при  $H \curvearrowright X$ . Значит,  $\forall h \in H \quad hg_i S = g_i S \implies h \in g_i S g_i^{-1} \implies H \leq g_i S g_i^{-1}$ . Так как  $|g_i S g_i^{-1}| = |S|$ ,  $g_i S g_i^{-1}$  — силовская  $p$ -подгруппа, т.е.  $H$  лежит в силовской  $p$ -подгруппе  $G$ .

Заметим, что в доказательстве выше подгруппа  $S$  зафиксирована.

Если рассмотреть  $H$  — произвольную силовскую  $p$ -подгруппу  $G$ , то  $|H| = p^s$ . Так как  $H \leq g_i S g_i^{-1}$ ,  $|g_i S g_i^{-1}| = p^s \implies H = g_i S g_i^{-1}$  — любая силовская  $p$ -подгруппа сопряжена с  $S$ . Значит, все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

Тогда силовская  $p$ -подгруппа в  $G$  единственна  $\iff$  эта подгруппа нормальна.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ : Пусть  $S \trianglelefteq G$  — силовская  $p$ -подгруппа. По II теореме Силова все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены с  $S$ , а из нормальности совпадают с  $S$ .

(из нормальности следует включение  $gSg^{-1} \subseteq S$ , а также  $|gSg^{-1}| = |S| = p^s$ )

$\Rightarrow$ : Если  $S$  — единственная, то  $\forall g \in G : gSg^{-1} = S$ , т.к. сопряженной к силовской  $p$ -подгруппе должна быть силовская  $p$ -подгруппа. Отсюда  $S \trianglelefteq G$ .  $\square$

### 6.3 Нормализатор. III теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $H \leq G$ ,  $X = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ .

Рассмотрим действие  $G \curvearrowright X : \alpha(\tilde{g})(gHg^{-1}) = \tilde{g}(gHg^{-1})\tilde{g}^{-1}$

Для точки  $H \in X$ :  $\text{Orb}(H) = X$ ,  $\text{St}(H) = \{\tilde{g} \in G \mid \tilde{g}H\tilde{g}^{-1} = H\} \leq G$

**Определение.** Стабилизатор  $H$  относительно этого действия называется нормализатором группы  $H$ . Обозначается  $N_G(H)$ .

**Утверждение 1.** Если  $|G| < \infty$ , то  $|G| = |X| \cdot |N_G(H)|$ , где  $X$  — число подгрупп, сопряжённых с  $H$ . В частности,  $|X| = |G : N_G(H)|$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из утверждения  $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$ .  $\square$

**Утверждение 2.**  $N_G(H)$  — наибольшая (по включению) подгруппа  $G$ , содержащая  $H$  как нормальную подгруппу.

*Доказательство.* Из определения  $N_G(H)$  очевидно, что  $H \trianglelefteq N_G(H)$ .

Пусть  $H \trianglelefteq K \leq G$ . Тогда  $\forall g \in K \ gHg^{-1} = H \implies g \in N_G(H)$ .

Отсюда  $K \leq N_G(H)$ .  $\square$

### III теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^sm$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

Пусть  $N_p$  — число силовских  $p$ -подгрупп в  $G$ . Тогда  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $N_p \mid m$ .

*Доказательство.*

Пусть  $S$  — произвольная силовская  $p$ -подгруппа  $G$  (хотя бы одна существует по I теореме Силова). Рассмотрим  $X = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$ . По II теореме Силова все силовские  $p$ -подгруппы  $G$  сопряжены, а также порядок любой подгруппы вида  $gSg^{-1}$  равен  $|S|$ , т.е.  $gSg^{-1}$  — также силовская  $p$ -подгруппа. Отсюда  $X$  — множество всех силовских  $p$ -подгрупп  $G$ .

$|X| = N_p \implies$  по утверждению 1 получаем  $N_p \mid |G|$ . Осталось показать, что  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$  (если это так, то  $N_p \mid |G| = p^sm \implies N_p \mid m$ ).

Рассмотрим действие  $S \curvearrowright X$  сопряжениями. Очевидно,  $S$  — неподвижная точка относительно него. Так же  $N_p = |X| = \sum_{i=1}^k |\text{Orb}(x_i)|$ . При этом

$$|\text{Orb}(x_i)| \mid |S| = p^s \implies \begin{cases} |\text{Orb}(x_i)| = 1 \\ p \mid |\text{Orb}(x_i)| \end{cases}$$

Значит, достаточно показать, что  $S$  — единственная неподвижная точка относительно данного движения (тогда  $|X| = \sum_{i=1}^k |\text{Orb}(x_i)| \equiv |\text{Orb}(S)| = 1 \pmod{p}$ )

Допустим, что  $\tilde{S}$  — неподвижная точка  $\implies \forall g \in S \ g\tilde{S}g^{-1} = \tilde{S}$ .

Рассмотрим нормализатор  $N_G(\tilde{S})$ . Знаем, что  $\tilde{S} \subseteq N_G(\tilde{S})$ , а из неподвижности точки  $\tilde{S}$  имеем  $S \subseteq N_G(\tilde{S})$ . Также  $N_G(\tilde{S}) \leq G$ , то есть степень вхождения  $p$  в  $|N_G(\tilde{S})|$  также равна  $s$ . Значит,  $S, \tilde{S}$  — силовские  $p$ -подгруппы в  $N_G(\tilde{S})$ . Тогда по II теореме Силова  $S$  и  $\tilde{S}$  сопряжены в  $N_G(\tilde{S})$ , т.е.  $S = g\tilde{S}g^{-1}, g \in N_G(\tilde{S})$ , а тогда по определению нормализатора  $S = \tilde{S}$ . Значит,  $S$  — единственная неподвижная точка.  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что любая группа порядка 15 циклическая.

*Доказательство.* Пусть  $G$  — группа порядка 15. По I теореме Силова в ней есть силовские подгруппы порядка 3 и порядка 5. Притом по III теореме Силова:

$$N_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad N_3 \mid 5 \implies N_3 = 1$$

$$N_5 \equiv 1 \pmod{5}, \quad N_5 \mid 3 \implies N_5 = 1$$

Таким образом, в  $G$  есть по одной силовской подгруппе порядка 3 и 5, а по следствию из II теоремы Силова они обе нормальны в  $G$ . Так как их порядки простые, обе эти подгруппы циклические, т.е. изоморфны  $\mathbb{Z}_3$  и  $\mathbb{Z}_5$  соответственно.

Остаётся заметить, что эти подгруппы пересекаются тривиально (у остальных элементов разные порядки), т.е. некоторая подгруппа  $G$  раскладывается в их прямое произведение, а так как  $15 = 3 \cdot 5$ , эта подгруппа — вся  $G$ . Отсюда  $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{15}$  — циклическая.  $\square$

## 7 Коммутант

**Определение.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $x, y \in G$ .

Коммутатором элементов  $x, y$  называется элемент  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ .

**Свойства.**

1.  $[x, y] = e \iff xy = yx;$
2.  $[x, y]^{-1} = [y, x];$
3.  $\forall g \in G \ g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$ .

*Доказательство.* 1, 2 — очевидно;

$$3 : [gxg^{-1}, gyg^{-1}] = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = g[x, y]g^{-1}$$

□

**Определение.** Коммутантом группы  $G$  называется подгруппа, порождённая всеми коммутаторами элементов группы  $G$ . Обозначается  $[G]$  или  $G'$ .

$$G' = \left\{ \prod_{i=1}^k [x_i, y_i] \mid x_i, y_i \in G \right\}.$$

**Утверждение.**  $G' = \{e\} \iff G$  — абелева.

*Доказательство.* Очевидно из свойства 1 коммутатора. □

**Утверждение.**  $G' \trianglelefteq G$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall g \in G, g' &= [x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k] \in G' : gg'g^{-1} = g[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k]g^{-1} = \\ &(g[x_1, y_1]g^{-1})(g[x_2, y_2]g^{-1}) \dots (g[x_k, y_k]g^{-1}) = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}] \dots [gx_kg^{-1}, gy_kg^{-1}] \end{aligned}$$

Отсюда  $\forall g \in G, g' \in G' : gg'g^{-1} \in G' \implies G' \trianglelefteq G$ . □

**Утверждение.** Если  $H \leq G$  и  $G' \leq H$ , то  $H \trianglelefteq G$ .

*Доказательство.*  $\forall g \in G, h \in H : ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in H$ . □

**Утверждение.** Пусть  $N \trianglelefteq G$ . Тогда  $G/N$  абелева  $\iff G' \subseteq N$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $G/N$  абелева. Тогда  $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N) \implies g_1g_2N = g_2g_1N \implies g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = [g_1, g_2] \in N$ . Значит, любой коммутатор  $\in N$ , а значит и все произведения коммутаторов  $\in N$ , то есть  $G' \subseteq N$ .

$\impliedby$ : Пусть  $G' \subseteq N$ . Тогда  $\forall g_1, g_2 \in G : [g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in N \implies g_1g_2N = g_2g_1N \implies (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N)$ . □

## 7.1 Коммутанты некоторых известных групп

**Лемма 1.**

1.  $A_n$  порождается циклами длины 3 ( $n \geq 3$ );
2. Если  $n \geq 5$ , то  $A_n$  порождается произведениями пар независимых транспозиций;

*Доказательство.*  $\forall \sigma \in A_n \ \sigma = \prod_{i=1}^k \tau_i$ , где  $\tau_i$  — транспозиции,  $k$  — чётное, т.е. транспозиции разбиваются на пары — рассмотрим случаи зависимых и независимых транспозиций в паре:

Если  $i, j, k, l$  — различные (случай  $n = 3$  очевиден), то

$$(ij)(jk) = (ijk); \quad (ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl)$$

то есть  $\sigma$  представима как произведение тройных циклов.

Если  $n \geq 5$ , то  $\exists i, j, k, l, m$  — различные, а тогда  $(ij)(jk) = ((ij)(lm))((lm)(jk))$ . Таким образом можно избавиться от пар зависимых транспозиций, то есть  $\sigma$  представима как произведение пар независимых транспозиций.  $\square$

**Утверждение.**  $S'_n = A_n$ .

*Доказательство.*  $|S_n/A_n| = 2 \implies S_n/A_n$  — абелева  $\implies S'_n \subseteq A_n$ . Значит, достаточно доказать (по лемме 1), что  $\forall i, j, k$  (различных)  $(ikj) \in S'_n$ .

$$[(ij), (jk)] = (ij)(jk)(ij)^{-1}(jk)^{-1} = (ik)(kj) = (ikj)$$

$\square$

**Утверждение.**

$$1. \ n = 1, 2, 3 \implies A'_n = \{\text{id}\};$$

$$2. \ n = 4 \implies A'_n = V_4;$$

$$3. \ n \geq 5 \implies A'_n = A_n.$$

*Доказательство.*

$$1. \ n = 1, 2, 3 — A'_n = \{\text{id}\}, \text{ т.к. } A_n — \text{абелева};$$

$$2. \ n = 4: V_4 \trianglelefteq A_4, |V_4| = 4 \implies |A_4/V_4| = 3 — \text{абелева}. \text{ Значит, } A'_4 \subseteq V_4.$$

$$[(ijk), (ijm)] = (ijk)(ijm)(ijk)^{-1}(ijm)^{-1} = (jkm)(imj) = (ij)(km)$$

3.  $n \geq 5$ : По пункту 2 леммы 1  $A_n$  порождается парами независимых транспозиций. Аналогично  $[(ijk), (ijm)] = (ij)(km)$ , а значит, все элементы  $A_n$  принадлежат  $A'_n$ .

□

**Лемма 2.** Группа  $SL_n(\mathbb{F})$  порождается элементарными матрицами, соответствующими преобразованиям I типа ( $a_i \mapsto a_i + \lambda a_j$ ).

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$  приводится к  $E$  за конечное число операций I типа (над строками):

Индукция по  $n$ . База  $n = 1$  очевидна ( $\det A = a_{11} = 1 \implies A = E$ )

Шаг: Так как  $\det A \neq 0$ ,  $\exists i : a_{i1} \neq 0$ .

Если  $a_{11} = 0$ , то прибавим  $i$ -ю строку к первой — сделаем  $a_{11} \neq 0$ . Пусть  $n \geq 2$  (случай  $n = 1$ )

Если  $a_{11} \neq 1$ , то сделаем  $a_{21} \neq 0$  аналогично  $a_{11}$ , а далее прибавим к первой строке вторую, умноженную на  $\frac{1-a_{11}}{a_{21}}$  — сделаем  $a_{11} = 1$ . Далее с помощью первой строки сможем занулить оставшиеся элементы первого столбца. Тогда подматрица полученной матрицы без первой строки и первого столбца будет иметь определитель, равный определителю всей матрицы, то есть 1, а отсюда её можно привести к единичной по предположению индукции. Сделаем это, а далее с помощью  $i$ -й строки занулим  $a_{1i}$ .

Значит,  $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$  приводится к  $E$  за конечное число операций I типа над строками, то есть раскладывается в произведение соответствующих элементарных матриц. □

**Утверждение.** Пусть  $|\mathbb{F}| > 3$ . Тогда  $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^*$  из теоремы о гомоморфизме для  $\alpha : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow F^*$  такого, что  $\alpha(A) = \det A$ . Отсюда  $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F})$  — абелева (как мультиликативная группа поля), т.е.  $GL_n(\mathbb{F})' \subseteq SL_n(\mathbb{F})$ .

Если  $|\mathbb{F}| > 3$ , то  $\exists \lambda \in \mathbb{F} : \lambda \neq 0, 1, -1$ .

$$n = 2 : \left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

Любое ур-е  $(\lambda^2 - 1)a = \mu$  решается для  $a$ , так как  $\lambda \neq \pm 1$  — отсюда все верхнетреугольные элементарные матрицы I типа принадлежат  $GL_n(\mathbb{F})'$ . Аналогично для нижнетреугольных — все элементарные матрицы I типа, а отсюда и  $SL_n(\mathbb{F})$ ,

принадлежат  $GL_n(\mathbb{F})'$ .

Случай  $n > 2$  аналогичен: необходимо рассмотреть коммутатор

$$[E + (\lambda - 1)E_{ii} + (\lambda^{-1} - 1)E_{jj}, E + aE_{ij}] = E + (\lambda^2 - 1)aE_{ij} \quad (i \neq j)$$

Все рассуждения верны и для доказательства  $SL_n(\mathbb{F}) \subseteq SL_n(\mathbb{F})'$ , т.к. определители всех рассматриваемых при взятии коммутаторов матриц равны 1.  $\square$

# 8 Разрешимые и простые группы

## 8.1 Разрешимые группы

**Определение.** Кратный коммутант группы  $G$ :

$$G^{(1)} = G'; \quad G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] = (G^{(k)})'$$

Очевидно, что  $G \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$ .

**Определение.** Группа  $G$  называется разрешимой, если  $\exists m \in \mathbb{N} : G^{(m)} = \{e\}$ .

**Утверждение.**  $G$  — абелева  $\implies G$  — разрешимая.

*Доказательство.*  $G$  — абелева  $\implies G' = \{e\}$ . □

**Утверждение.**

1.  $S_n$  — разрешимая  $\iff n \leq 4$ ;

2.  $A_n$  — разрешимая  $\iff n \leq 4$ .

*Доказательство.*  $S'_n = A_n$ , поэтому  $S_n$  — разрешимая  $\iff A_n$  — разрешимая.  $A_2 = \{\text{id}\}$ ,  $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$  — абелева,  $A'_4 = V_4$  — абелева  $\implies$  при  $n \leq 4$   $A_n$  разрешима. При  $n \geq 5$   $A'_n = A_n$ , то есть  $A_n$  — не разрешимая. □

**Утверждение.** Пусть  $\mathbb{F}$  — поле,  $|\mathbb{F}| > 3$ . Тогда  $GL_n(\mathbb{F})$  и  $SL_n(\mathbb{F})$  не разрешимы.

*Доказательство.*  $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$ . □

**Утверждение.**

1.  $G$  — разрешимая,  $H \leq G \implies H$  — разрешимая;

2.  $G$  — разрешимая,  $H \trianglelefteq G \implies G/H$  — разрешимая;

3.  $H \trianglelefteq G$ ,  $H$  и  $G/H$  — разрешимые  $\implies G$  — разрешимая.

*Доказательство.*

1. Для начала заметим, что  $H \leq G \implies H' \leq G'$ , так как любой коммутатор элементов из  $H$  — также коммутатор элементов из  $G$ . Значит,  $H^{(m)} \leq G^{(m)}$ .  $G$  разрешима  $\implies \exists m : G^{(m)} = \{e\} \implies H^{(m)} = \{e\} \implies H$  разрешима.

2. Рассмотрим натуральный гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/H$ . Очевидно, что образ коммутатора при гомоморфизме — коммутатор:

$$\alpha([x, y]) = \alpha(xyx^{-1}y^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1} = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

то есть  $\pi(G') \subseteq (G/H)'$ . При этом натуральный гомоморфизм сюръективен, а прообраз коммутатора — также коммутатор (аналогично), то есть  $\pi(G') = (G/H)'$ . Аналогично  $\pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)}$ .

$$G \text{ разрешима} \implies \exists m : G^{(m)} = \{e\} \implies \pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)} = \{e\}.$$

3.  $(G/H)$  разрешима  $\implies \exists k : (G/H)^{(k)} = \{e\} \implies \pi(G^{(k)}) = \{e\} \implies G^{(k)} \subseteq H$ .

Также  $H$  разрешима  $\implies \exists l : H^{(l)} = \{e\} \implies (G^{(k)})^{(l)} = G^{(k+l)} = \{e\}$ .

Значит,  $G$  разрешима.

□

**Утверждение.** Группа  $T_n(\mathbb{F})$  невырожденных верхнетреугольных матриц порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{F}$  разрешима.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ :

База:  $n = 1 \implies T_1(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^*$  — абелева, а значит, разрешима;

Шаг: пусть  $T_{n-1}(\mathbb{F})$  разрешима. Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : T_n \rightarrow T_{n-1}$ :

$$\varphi : \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & & * & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{2n} \\ 0 & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc} a_{11} & & * \\ & \ddots & & a_{n-1n-1} \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Этот гомоморфизм, очевидно, сюръективен, т.е по теореме о гомоморфизме  $T_n/\text{Ker } \varphi \simeq T_{n-1}$ . Так как  $T_{n-1}$  разрешима по предположению индукции, по пункту 3 предыдущего утверждения достаточно доказать разрешимость группы

$$\text{Ker } \varphi = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} E & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{2n} \\ \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & a_{nn} \end{array} \right) : a_{in} \in \mathbb{F}, a_{nn} \neq 0 \right\}$$

Аналогично, рассмотрим гомоморфизм  $\psi : \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathbb{F}^*$ :

$$\psi : \left( \begin{array}{c|c} E & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{2n} \\ \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto a_{nn}$$

Заметим, что  $\text{Im } \psi = \mathbb{F}^*$  — абелева, а  $\text{Ker } \psi$  состоит из матриц  $\text{Ker } \varphi$  с  $a_{nn} = 1$ .

$$\left( \begin{array}{c|cc} E & a_{1n} & \\ & a_{2n} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|cc} E & b_{1n} & \\ & b_{2n} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|cc} E & a_{1n} + b_{1n} & \\ & a_{2n} + b_{2n} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

Отсюда несложно видеть, что  $\text{Ker } \psi$  — также абелева, то есть разрешимая группа. Значит,  $\text{Ker } \varphi$  разрешима, а отсюда и  $T_n(\mathbb{F})$  — разрешимая группа.  $\square$

**Утверждение 1.** *Всякая конечная примарная группа  $G$  разрешима.*

*Доказательство.* Пусть  $p$  — простое, для которого  $G$  является  $p$ -группой.

Индукция по  $n = |G|$ :

База:  $n = 1 \implies G = \{e\}$  — разрешима;

Шаг:  $G \neq \{e\} \implies Z(G) \neq \{e\}$  (из примарности). Знаем, что  $Z(G) \trianglelefteq G$  — рассмотрим  $G/Z(G)$ . Это также  $p$ -группа, причём порядка  $\frac{|G|}{|Z(G)|}$ , что меньше  $n$ . Значит,  $G/Z(G)$  разрешима по предположению индукции, а также  $Z(G)$  разрешима, так как абелева. Отсюда  $G$  разрешима.  $\square$

**Утверждение 2.** *Всякая группа  $G$  порядка  $pq$ , где  $p, q$  простые, разрешима.*

*Доказательство.* Случай  $p = q$  очевиден из утверждения 1.

Пусть  $p \neq q$  — без ограничения общности  $p > q$ .

По I теореме Силова  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $H \leq G$ .

По III теореме Силова  $\begin{cases} N_p \mid q \\ N_p \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \implies N_p = 1$

(не может равняться  $q$  в силу  $q < p$ )

Тогда по следствию из II теоремы Силова единственная силовская  $p$ -подгруппа  $H$  нормальна в  $G$ . Притом  $|H| = p \implies H \simeq \mathbb{Z}_p$  и  $|G/H| = q \implies G/H \simeq \mathbb{Z}_q$  — абелевы. Значит,  $H$  и  $G/H$  разрешимы, а отсюда  $G$  разрешима.  $\square$

## 8.2 Простые группы

**Определение.** Подгруппа  $H \leq G$  называется собственной, если  $H \neq \{e\}, G$ .

**Определение.** Группа  $G$  называется простой, если  $G \neq \{e\}$  и в  $G$  нет собственных нормальных подгрупп.

**Утверждение 1.** *Абелева группа  $G$  — простая  $\iff G \simeq \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  — простое.*

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — очевидно ( $\mathbb{Z}_p$  — циклическая, т.е. нет собственных подгрупп);

$\Rightarrow$ : Пусть  $G$  — абелева и простая группа.

Тогда  $G$  циклическая, так как  $\forall g \neq e : \langle g \rangle \trianglelefteq G$  (т.к. абелева) и  $g \neq \{e\}$ , т.е.  $\langle g \rangle = G$ . Теперь, если  $G$  бесконечна, то  $G \simeq \mathbb{Z}$ , но  $2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$  — противоречие, т.е.  $G$  конечна. А если  $|G|$  составное, то  $G \simeq \mathbb{Z}_{mn}$ , где  $\langle m \rangle \triangleleft \mathbb{Z}_{mn}$  ( $m, n \neq 1$ ). Значит,  $|G|$  простое, т.е.  $G \simeq \mathbb{Z}_p$ .  $\square$

**Утверждение 2.** Если  $G$  — разрешимая и простая, то  $G \simeq \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  — простое.

*Доказательство.* Так как  $G$  разрешима,  $G' \neq G$ . Притом  $G' \trianglelefteq G$ , а отсюда из простоты  $G' = \{e\}$ . Значит,  $G$  — абелева, а тогда  $\simeq \mathbb{Z}_p$  из утверждения 1.  $\square$

*Замечание.* Таким образом, всякая простая группа либо изоморфна  $\mathbb{Z}_p$ , либо не абелева и не разрешима.

### 8.3 Значение простых групп

**Определение.** Субнормальной матрёшкой называется последовательность

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_m = \{e\}; \quad G_{i+1} \trianglelefteq G_i \quad (i = \overline{0 \dots m-1})$$

**Пример.**  $G = A_4, H = V_4, K = \langle (12)(34) \rangle$ . Тогда  $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq H$ , то есть  $G \geq H \geq K \geq \{\text{id}\}$  — субнормальная матрёшка.

**Теорема.** Группа  $G$  разрешима  $\iff G$  обладает субнормальной матрёшкой такой, что  $G_i/G_{i+1}$  — абелева ( $i = \overline{0 \dots m-1}$ ).

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Определение.** Композиционным рядом называется субнормальная матрёшка такая, что  $\forall i = \overline{0 \dots m-1} : G_i \neq G_{i+1}$  и  $G_i/G_{i+1}$  — простая группа.

**Утверждение 3.** Всякая конечная группа  $G$  обладает композиционным рядом.

*Доказательство.* Если  $G$  — простая, то  $G \not\geq \{e\}$  — композиционный ряд.

Если  $G$  — не простая, то  $\exists$  собственная подгруппа  $N \trianglelefteq G$ , т.е.  $G \not\geq N \not\geq \{e\}$  — субнормальная матрёшка. Будем уплотнять эту матрёшку следующим образом:

Предположим, что в субнормальной матрёшке  $G_0 \not\geq \dots \not\geq G_m$  группа  $G_i/G_{i+1}$  — не простая. Тогда  $\exists$  собственная  $\tilde{N} \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$ .

Рассмотрим натуральный гомоморфизм  $\pi : G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$ . Тогда  $\pi^{-1}(\tilde{N}) = \tilde{N}$  — собственная нормальная подгруппа  $G_i$ , содержащая  $G_{i+1}$ , то есть в матрёшке кусок "...  $\geq G_i \geq G_{i+1} \geq ...$ " заменяем на "...  $\geq G_i \geq \tilde{N} \geq G_{i+1} \geq ...$ ". Очевидно, что процесс таких уплотнений конечен, так как количество членов матрёшки явно не превышает  $|G|$  (порядок строго убывает). Значит, за конечное число уплотнений сможем построить композиционный ряд для  $G$ .  $\square$

**Теорема.** (*Жордана — Гёльдера*)

Если группа  $G$  обладает композиционным рядом, то набор факторгрупп в нём определён однозначно (с точностью до перестановки).

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Пример.** Пусть  $G = \langle a \rangle_{12}$ . Композиционные ряды:

$$\begin{aligned}\langle a \rangle_{12} &> \langle a^2 \rangle_6 > \langle a^4 \rangle_3 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3; \\ \langle a \rangle_{12} &> \langle a^2 \rangle_6 > \langle a^6 \rangle_2 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2; \\ \langle a \rangle_{12} &> \langle a^3 \rangle_4 > \langle a^6 \rangle_2 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2;\end{aligned}$$

*Замечание.* Группа  $G$  не задаётся однозначно набором простых факторов композиционного ряда: пусть набор факторов —  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$ , тогда возможны композиционные ряды  $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4$  и  $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq V_4$ .

## 8.4 Примеры простых групп

**Упражнение.** Если  $|G| < 60$  и  $|G|$  — не простое, то  $G$  — не простая группа.

*Доказательство.* Докажем несколько лемм:

**Лемма 1.** Всякая неабелева примарная группа не является простой.

*Доказательство.* Очевидно из нетривиальности центра — он не совпадает со всей группой из неабелевости, а значит является собственной нормальной подгруппой  $G$ .  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — неабелева группа,  $|G| = p^l m$ , где  $p \nmid m$ ,  $p^l \nmid (m - 1)$ !

Тогда  $G$  — не простая группа.

*Доказательство.* Случай  $m = 1$  очевиден из леммы 1.

Пусть  $m > 1$ ,  $S$  — силовская  $p$ -подгруппа  $G$ . Рассмотрим действие  $G \curvearrowright G/S$  левыми сдвигами ( $G/S$  — множество левых смежных классов). Таких смежных

классов ровно  $m$  (из теоремы Лагранжа), причём каждый элемент  $g$  переводит разные смежные классы в разные — отсюда каждый элемент  $G$  соответствует некоторой подстановке из  $S_m$ , то есть определён гомоморфизм  $\alpha : G \rightarrow S_m$ . Если  $G$  простая, то  $\text{Ker } \alpha = \{e\}$  либо  $G$  — второе, очевидно, невозможно (класс  $g_1S$  в класс  $g_2S$  переводит элемент  $g_2g_1^{-1}$ ). Значит,  $G \simeq \alpha(G) \leq S_m$  из теоремы о гомоморфизме. Отсюда  $|G| \mid |S_m| \implies p^l m \mid m! \implies p^l \mid (m-1)!$  — противоречие.

□

*Замечание.* Данная лемма очень сильна при решении некоторых упражнений — например, из неё несложными рассуждениями следует непростота (а по индукции и разрешимость) неабелевых групп порядков  $2p^k, 3p^k, 4p^k$  ( $p$  — простое).

Остаётся лишь перебор случаев составных чисел  $< 60$  — целиком его несложно провести самому, поэтому здесь он приведён не будет в целях сохранения моего морального и физического благополучия.

В результате под лемму 2 не попадут порядки 30, 40 и 56 — разберём их:

- $|G| = 40 = 2^3 \cdot 5$ : По III теореме Силова в  $G$  единственная подгруппа порядка 5 ( $N_5 \mid 8, N_5 \equiv 1 \pmod{5}$ ) — она нормальна;
- $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ : По III теореме Силова число силовских 5-подгрупп в  $G$  либо 1, либо 6 ( $N_5 \mid 6, N_5 \equiv 1 \pmod{5}$ ). Если такая подгруппа единственна — то она нормальна, и  $G$  не простая. Аналогично силовских 3-подгрупп либо 1, либо 10 — случай единственности очевиден. Остаётся заметить, что порядки самих силовских подгрупп простые, то есть эти подгруппы циклические — значит, различные 3- и 5-подгруппы пересекаются тривиально. Значит, в  $G$  есть  $6 \cdot (5-1) = 24$  различных элементов порядка 5 и  $10 \cdot (3-1) = 20$  различных элементов порядка 3, что невозможно для группы порядка 30.
- $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$ : По III теореме Силова силовских 7-подгрупп в  $G$  либо 1, либо 8 ( $N_7 \mid 8, N_7 \equiv 1 \pmod{7}$ ). Случай  $N_7 = 1$  очевиден, а иначе по рассуждениям выше силовские 7-подгруппы пересекаются тривиально, а значит в  $G$  есть хотя бы  $8 \cdot (7-1) = 48$  различных элементов порядка 7. При этом в  $G$  есть силовская 2-подгруппа, которой принадлежат 8 элементов порядка  $2^k$  — либо она единственна, то есть нормальна, либо их больше одной, что невозможно в группе порядка  $56 = 48 + 8$ .

Все случаи разобраны.

□

**Теорема.** Если  $G$  — простая и  $|G| = 60$ , то  $G \simeq A_5$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Пример.**  $A_2 = \{\text{id}\}$ ,  $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$  — простая,  $A_4$  — не простая ( $V_4 \trianglelefteq A_4$ ).

**Лемма.** Пусть  $n \geq 5$ ,  $N \leq A_n$ ,  $N \neq \{\text{id}\}$ ,  $N \trianglelefteq S_n$ . Тогда  $A_n = N$ .

*Доказательство.* Так как  $N \neq \{\text{id}\}$ , то  $\exists \sigma \in N, \sigma \neq \text{id}$ . Разложим  $\sigma$  в независимые циклы:  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ . Рассмотрим случаи:

1.  $\exists i$  такой, что длина  $c_i \geq 3$ , то можем считать, что  $c_1 = (i_1 \dots i_k)$ ,  $k \geq 3$ . Так как  $N \trianglelefteq S_n$ ,  $\forall \tau \in S_n : \tau \sigma \tau^{-1} \in N$ . Рассмотрим  $\tau = (i_1 i_2)$ :

$$\tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} \in N; \tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} = \tau c_1 \tau^{-1} c_1^{-1} = (i_2 i_1 i_3 \dots i_k)(i_k \dots i_1) = (i_1 i_2 i_3)$$

( $\tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} = \tau c_1 \tau^{-1} c_1^{-1}$ , так как остальные циклы в  $\sigma$  независимы с  $\tau$ , т.е. коммутируют с  $\tau$ )

Тогда в  $N$  содержатся все тройные циклы —  $A_n = N$ .

2. Если же  $\forall i$  длина  $c_i$  равна 2, то  $k$  — чётно, т.е.  $\sigma = (i_1 i_2)(i_3 i_4) \dots c_k$ .

Тогда при аналогичных рассуждениях и  $\tau = (i_2 i_3)$ :

$$\begin{aligned} \tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} &= (i_2 i_3)(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_2 i_3)(i_1 i_2)(i_3 i_4) = \\ &= (i_1 i_3)(i_2 i_4)(i_1 i_2)(i_3 i_4) = (i_1 i_4)(i_2 i_3) \in N \end{aligned}$$

Так как в  $S_n$  все произведения пар независимых транспозиций сопряжены, все пары независимых транспозиций  $\in N$ . Так как  $n \geq 5$ ,  $A_n$  порождается парами независимых транспозиций, а значит,  $N = A_n$ .

□

**Теорема.**  $A_n$  — простая при  $n \geq 5$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную нормальную подгруппу  $N \trianglelefteq A_n$ .

Если  $N \trianglelefteq S_n$ , то по лемме 1  $N = A_n$ . Иначе:  $|S_n : A_n| = 2$ ,  $S_n = A_n \sqcup (12)A_n$ .

Пусть  $N$  не нормальна в  $S_n$ . Обозначим  $N_1 = N$ ,  $N_2 = (12)N_1(12)$ .

Если  $N_1 = N_2$ , то  $N$  при сопряжении любой  $\sigma \in S_n$  не изменится (для  $\sigma \in A_n$  очевидно из  $N \trianglelefteq A_n$ , для  $\tau \in S_n$ :  $\tau = (12)\tau' \implies \tau N \tau^{-1} = (12)\tau' N \tau'^{-1}(12) = (12)N(12) = N$ ), т.е.  $N \trianglelefteq S_n$  — противоречие.

Поэтому  $N_1 \neq N_2$ , причём  $|N_1| = |N_2|$ .

Докажем, что  $A_n = N_1 \times N_2$  (отсюда получим, что  $|A_n| = |N|^2$ ):

1.  $N_1 \trianglelefteq A_n$  — уже имеем;

2.  $N_2 \trianglelefteq A_n$ :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in A_n : \sigma N_2 \sigma^{-1} &= \sigma(12)N_1(12)\sigma^{-1} = (12)(12)\sigma(12)N_1(12)\sigma^{-1}(12)(12) = \\ &\stackrel{=\tilde{\sigma}}{=} \tilde{\sigma}N_1\tilde{\sigma}^{-1}(12) = (12)N_1(12) = N_2 \end{aligned}$$

3.  $N_1 \cap N_2 = \{\text{id}\}$ : Пусть  $K = N_1 \cap N_2 \leq A_n$ . Тогда  $K \trianglelefteq S_n$ :

- $\forall \sigma \in A_n : \sigma K \sigma^{-1} \subseteq N_1, N_2$  из  $N_1, N_2 \trianglelefteq A_n$ , то есть  $\sigma K \sigma^{-1} \subseteq K$ ;
- $(12)K(12) \subseteq N_2$  из  $K \subseteq N_1$ ,  $(12)K(12) \subseteq N_1$  из  $K \subseteq N_2 \implies$   
 $\implies (12)K(12) \subseteq K$

Значит,  $K$  не изменится при сопряжении любой подстановкой из  $S_n$ , то есть  $K \trianglelefteq S_n$ . Тогда по лемме 1 и  $K \neq A_n$  имеем  $K = \{\text{id}\}$ .

4.  $N_1 N_2 = A_n$ : Пусть  $L = N_1 N_2 \leq A_n$  Тогда  $L \trianglelefteq S_n$ :

- $\forall \sigma \in A_n : \sigma L \sigma^{-1} = \sigma N_1 N_2 \sigma^{-1} = \sigma N_1 \sigma^{-1} \sigma N_2 \sigma^{-1} = N_1 N_2$ ;
- $(12)L(12) = (12)N_1 N_2(12) = (12)N_1(12)(12)N_2(12) = N_2 N_1 = N_1 N_2$

При этом  $L \neq id$  — по лемме 1  $L = A_n$ .

Теперь индукцией по  $n \geq 5$  докажем, что  $A_n$  — простая.

База:  $n = 5$  —  $|A_5| = 60$  — не точный квадрат, то есть невозможна ненормальность  $N$  в  $S_n$ , а отсюда  $A_n$  — простая;

Шаг: Пусть  $A_{n-1}$  — простая. Обозначим  $A_n \geq H = \{\sigma \in A_n \mid \sigma(n) = n\} \simeq A_{n-1}$ . Предположим, что  $N_1 \neq N_2 \implies A_n = N_1 \times N_2 \implies H \leq N_1 \times N_2$ . Тогда  $H \cap N_2 \trianglelefteq H$ , т.к.  $N_2 \trianglelefteq A_n$  и  $H \cap N_2 \subseteq H$ .

Так как  $H$  — простая, то  $H \cap N_2$  равно либо  $H$ , либо  $id$ .

Если  $H \cap N_2 = H$ , то  $H \subseteq N_2 \implies |H| \leq |N_2| = |N|$ .

Если  $H \cap N_2 = \{id\}$ , то рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : A_n = N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$ .  $\text{Ker } \varphi = N_2 \implies H \simeq \varphi(H) \leq N_1 \implies |H| \leq |N_1| = |N|$ .

В каждом случае  $|H| = |A_{n-1}| \leq |N|$ . Тогда из предположения

$$|A_n| = |N|^2 \geq |A_{n-1}|^2 \implies \frac{n!}{2} \geq \frac{((n-1)!)^2}{4} \implies 2n \geq (n-1)!$$

Последнее неравенство, очевидно, неверно при  $n \geq 5$ .  $\square$

**Теорема.**  $SO_3(\mathbb{R})$  — простая.

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

## 9 Линейные представления

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$ ,  $GL(V)$  — группа обратимых линейных операторов над  $V$ ,  $G$  — произвольная группа.

**Определение.** Произвольный гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется линейным представлением группы  $G$ .

$V$  называется пространством линейного представления,  $\dim V$  — размерность (степень) линейного представления. Если  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , то линейное представление называется рациональным, вещественным или комплексным соответственно.

Из определения  $\Phi(e) = I$  — тождественный оператор,  $\Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)$ .

**Определение.**  $\forall g \in G \Phi(g)$  называется оператором линейного представления. Обозначается  $\forall v \in V \Phi(g)v := \Phi(g)(v)$ .

**Определение.** Если  $\text{Ker } \Phi = \{e\}$ , то линейное представление называется точным. В этом случае  $G \simeq \text{Im } \Phi \leq GL(V)$ .

**Определение.** Если  $G \leq GL(V)$ , то тождественное линейное представление  $\Phi = \text{id} : G \rightarrow GL(V)$  называется тавтологическим линейным представлением  $G$ .

### Примеры.

1.  $\dim V = 1 : GL(V) \simeq \mathbb{F}^*$ , то есть  $\Phi : G \rightarrow GL(V) \simeq \mathbb{F}^*$ ;
  - (a)  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, G = \mathbb{R} : \Phi(t) = e^t$ ;
  - (b)  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, G = S_n : \Phi(\sigma) = \text{sgn } \sigma$ ;
  - (c)  $G = GL_n(\mathbb{F}) : \Phi(A) = \det A$ .
2.  $V = M_n(\mathbb{C}), G = \mathbb{R}$ . Если зафиксировать матрицу  $B \in M_n(\mathbb{C})$ , то определено линейное представление  $\Phi(t) = e^{tB}$ .
3. Пусть задано линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  и задан гомоморфизм  $\Psi : H \rightarrow G$ . Тогда  $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \Psi : H \rightarrow GL(V)$  — линейное представление группы  $H$ .
4. Пусть  $X$  — некоторое множество, задано  $G \curvearrowright X$ .  
Рассмотрим векторное пространство функций  $\mathcal{F}(X, \mathbb{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{F}\} = V$

Тогда  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ :  $\forall g \in G$   $\Phi(g)f = \tilde{f}$ , где  $\tilde{f}(x) = f(g^{-1}x)$  — линейное представление группы  $G$ :

$$\begin{aligned}\forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1)\Phi(g_2)f(x) &= \Phi(g_1)(h(x)) = h(g_1^{-1}x) = \Phi(g_2)f(g_1^{-1}x) = \\ &= f(g_2^{-1}g_1^{-1}x) = f((g_1g_2)^{-1}x) = \Phi(g_1g_2)f(x)\end{aligned}$$

## 9.1 Матричные представления группы

**Определение.** Произвольный гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$  называется матричным представлением группы  $G$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}$ .

Заметим, что линейные и матричные представления связаны между собой:

1. Если задано матричное представление  $G$ , то есть гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$ , то  $GL_n(\mathbb{F}) \xrightarrow{\psi} GL(\mathbb{F}^n) \implies \tilde{\Phi} = \psi \circ \Phi : G \rightarrow GL(\mathbb{F}^n)$  — линейное представление  $G$ .
2. Если задано  $n$ -мерное линейное представление  $G$ , то есть гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL(V) : \forall g \in G$   $g \mapsto \Phi(g) = \varphi_g$  — линейный оператор. Если фиксировать базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , то  $\varphi_g \leftrightarrow A_g$  — матрица  $\varphi_g$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Отсюда  $GL(V) \xrightarrow{\tilde{\psi}} GL_n(\mathbb{F})$  — получим матричное представление группы  $G$ .

Поэтому при фиксированном базисе  $V$  имеет место взаимно однозначное соответствие между линейными представлениями  $G \rightarrow GL(V)$  и матричными представлениями  $G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$ , где  $n = \dim V$ .

*Замечание.* Далее зачастую  $n$ -мерное линейное представление  $G \rightarrow GL(V)$  будет рассматриваться как матричное представление  $G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$ , ему соответствующее.

*Замечание.* Все напоминания данной главы взяты из курса линейной алгебры.

**Напоминание.** Если  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  и  $\tilde{A}$  — его матрицы в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  соответственно, то  $\tilde{A} = C^{-1}AC$ , где  $C$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

**Определение.** Матричные представления  $\Phi_1, \Phi_2$  группы  $G$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}$  называются эквивалентными (изоморфными, подобными), если  $\exists C \in GL_n(\mathbb{F}) : \forall g \in G : \Phi_1(g) = C^{-1}\Phi_2(g)C$ . Обозначается  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ .

*Замечание.* Эквивалентные матричные представления группы  $G$  соответствуют одному и тому же линейному представлению  $G$  относительно разных базисов.

**Определение.** Пусть  $V_1, V_2$  — векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ . Линейные представления  $\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$  и  $\Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  называются эквивалентными (изоморфными, подобными), если  $\exists \varphi : V_1 \rightarrow V_2$  — изоморфизм такой, что  $\forall g \in G : \Phi_1(g) = \varphi^{-1} \circ \Phi_2(g) \circ \varphi$ . Обозначается  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ .

*Замечание.* Если  $\Phi_1 \approx \Phi_2$  и  $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V_1$ , то в базисе  $\mathcal{E}_2 = \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  (где  $\varphi$  — изоморфизм  $V_1$  и  $V_2$  из определения  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ ) для любого  $g$  матрица линейного оператора  $\Phi_2(g)$  равна матрице оператора  $\Phi_1(g)$  в базисе  $\mathcal{E}_1$ .

## 9.2 Приводимость линейных представлений

**Напоминание.** Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Подпространство  $U \subseteq V$  называется инвариантным относительно  $\varphi$ , если  $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$ .

**Определение.** Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление группы  $G$ . Подпространство  $U \subseteq V$  называется инвариантным относительно  $\Phi$ , если  $\forall g \in G$   $U$  инвариантно относительно оператора  $\Phi(g)$ , то есть  $\forall g \in G, u \in U : \Phi(g)u \in U$ .

*Замечание.* Подпространства  $\{0\}, V$ , очевидно, всегда инвариантны — они называются тривиальными инвариантными подпространствами.

**Утверждение.** Сумма и пересечение инвариантных подпространств — инвариантное подпространство (как для оператора, так и для линейного представления).

*Доказательство.* Очевидно из определений инвариантности.  $\square$

**Напоминание.** Если  $U \subseteq V$  — инвариантное подпространство относительно линейного оператора  $\varphi$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V$  такой, что  $\{e_1, \dots, e_m\}$  — базис  $U$ , то матрица линейного оператора в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  имеет вид  $A = \begin{pmatrix} A_u & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ , где  $A_u$  — матрица  $\varphi|_U$  (ограничения на инвариантное подпространство).

**Утверждение.** Если  $U \subseteq V$  — инвариантное подпространство относительно линейного представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V$  такой, что  $\{e_1, \dots, e_m\}$  — базис  $U$ , то  $\forall g \in G$  матрица линейного оператора  $\Phi(g)$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  имеет вид  $A_g = \begin{pmatrix} A_{g,u} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ .

**Определение.** Если  $U \subseteq V$  — инвариантное подпространство относительно линейного представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ , то ограничением линейного представления  $\Phi$  на  $U$  называется линейное представление  $\Phi|_U : G \rightarrow GL(U)$  такое, что  $\forall g \in G : \Phi|_U(g) = \Phi(g)|_U$

**Определение.** Линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется неприводимым, если:

1.  $V \neq \{0\}$ ;
2.  $\Phi$  не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

В противном случае  $\Phi$  называется приводимым.

### Примеры.

1. Любое одномерное линейное представление неприводимо;
2. Пусть  $G = \mathbb{R}, V = \mathcal{E}^2$  — двумерное евклидово пространство;  $\Phi : G \rightarrow GL(\mathcal{E}^2)$  такое, что  $\Phi(g)$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} \cos g & -\sin g \\ \sin g & \cos g \end{pmatrix}$  (т.е.  $\Phi(g)$  — поворот евклидова пространства).

Над  $\mathbb{R}$  данное линейное представление неприводимо, так как не имеет одномерных инвариантных подпространств (геометрически очевидно).

Однако над  $\mathbb{C}$  нетривиальные инвариантные подпространства есть: они будут собственными подпространствами  $\langle e_1 + ie_2 \rangle, \langle e_1 - ie_2 \rangle$  — поэтому  $\Phi$  приводимо над  $\mathbb{C}$ .

3. Пусть  $G = \langle a \rangle_k, V = \mathcal{E}^2$  — двумерное евклидово пространство;  $\Phi : G \rightarrow GL(\mathcal{E}^2)$  такое, что  $\Phi(a^m)$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  — поворот на  $\frac{2\pi m}{k}$ . Абсолютно аналогично примеру (2) доказывается, что  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$  и приводимо над  $\mathbb{C}$ ;

4. Пусть  $G = D_n (n \geq 3), V = \mathcal{E}^2$  — двумерное евклидово пространство; По определению  $D_n = \text{Sym } N \subset O_2 \subset GL(\mathcal{E}^2)$  (где  $N$  — правильный  $n$ -угольник) — можем задать тавтологическое линейное представление  $\Phi$ .  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$ , так как нет одномерных инвариантных подпространств относительно поворотов.

Также  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{C}$ , так как все одномерные инвариантные подпространства относительно поворотов — это  $\langle e_1 + ie_2 \rangle, \langle e_1 - ie_2 \rangle$ , которые не инвариантны относительно симметрий.

5. Пусть  $G = S_4$ ,  $V = \mathcal{E}^3$  — трёхмерное евклидово пространство;  
 Ранее доказывали, что  $S_4 \simeq \text{Sym}^+ K \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3)$  (где  $K$  — куб) — задали линейное представление  $\Phi$ .  
 $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$ , так как одномерных инвариантных подпространств не может быть из геометрических соображений, а двумерных не может быть, так как если  $U$  — инвариантное, то  $U^\perp$  инвариантно из ортогональности  $\Phi(g)$  для всех  $g$ , а  $U^\perp$  одномерно.  
 Также  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{C}$ : любое одномерное инвариантное подпространство над  $\mathbb{C}$  соответствует двумерному инвариантному подпространству над  $\mathbb{R}$  (либо одномерному, если оно полностью вещественное) — значит, таковых нет; двумерных инвариантных подпространств не может быть из рассуждений об ортогональности (как выше).
6. Пусть  $G = S_4$ ,  $V = \mathcal{E}^3$  — трёхмерное евклидово пространство;  
 Ранее доказывали, что  $S_4 \simeq \text{Sym } T \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3)$  (где  $T$  — правильный тетраэдр) — задали линейное представление  $\Phi$ .  
 Абсолютно аналогично примеру (5) доказывается, что  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$  и над  $\mathbb{C}$ . При этом данное представление неэквивалентно предыдущему, так как в образе данного представления есть несобственные движения, а в образе предыдущего — только собственные;
7. Пусть  $G = S_n$ ,  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}$  ( $\text{char } \mathbb{F} = 0$ ). Зададим *мономиальное* линейное представление  $S_n$ : зафиксируем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $V$  и определим  $M : G \rightarrow GL(V)$  так, что  $\forall \sigma \in G : M(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$  (очевидно, что для любой подстановки такой оператор существует и единственный)  
 Заметим, что  $M$  приводимо — оно имеет одномерное инвариантное подпространство  $U = \langle e_1 + \dots + e_n \rangle$  и  $n - 1$ -мерное инвариантное подпространство  $W = \{x = \sum_i x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$  (оно  $(n - 1)$ -мерно, т.к. любой его элемент однозначно задаётся первыми  $n - 1$  координатами).  
 Более того, докажем, что  $V = U \oplus W$ :
- $\dim V = \dim U + \dim W$ ;
  - Если  $x \in U \cap W$ , то  $x = k(e_1 + \dots + e_n)$ , причём сумма его координат равна нулю, т.е.  $k = 0 \implies x = 0$ . Значит,  $U \cap W = \{0\}$ .

Однако ограничение  $M|_W = M_W$  неприводимо — докажем это:  
 Пусть  $\tilde{U} \subset W$  — нетривиальное инвариантное подпространство.

Тогда  $\exists x \in \tilde{U}, x \neq 0$ . Так как  $x \in W, \sum x_i = 0 \implies \exists i, j : x_i \neq x_j$ . Рассмотрим  $(ij) \in S_n$ :

$$M(ij)x \in \tilde{U} \implies x - M(ij)x = (x_i - x_j)(e_i - e_j) \in \tilde{U} \implies e_i - e_j \in \tilde{U}$$

Отсюда из инвариантности  $\tilde{U}$   $\forall \sigma \in S_n : e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)} \in \tilde{U} \implies \forall k, m : e_k - e_m \in \tilde{U} \implies \tilde{U} = W$  (т.к.  $W = \langle e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n \rangle$ )

**Теорема.** (*Лемма Шура*).

Пусть  $\mathbb{F}$  — алгебраически замкнутое поле,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ ,  $G$  — произвольная группа,  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимое линейное представление. Тогда если  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор такой, что  $\forall g \in G : \varphi \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \varphi$ , то  $\varphi$  — скалярный оператор (т.е.  $\varphi = \lambda I$ ).

*Доказательство.* Так как  $\mathbb{F}$  алгебраически замкнуто,  $\varphi$  имеет хотя бы одно собственное значение  $\lambda$  и собственное подпространство  $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ . Докажем, что  $V_\lambda$  — инвариантное подпространство, т.е. что  $\forall g \in G, v \in V_\lambda : \Phi(g)v \in V_\lambda$ , что равносильно  $\varphi(\Phi(g)v) = \lambda\Phi(g)v$ :

$$\varphi(\Phi(g)v) = (\varphi \circ \Phi(g))v = (\Phi(g) \circ \varphi)v = \Phi(g)(\varphi(v)) = \Phi(g)(\lambda v) = \lambda\Phi(g)v$$

Т.к.  $V_\lambda \neq \{0\}$  и  $\Phi$  неприводимо,  $V_\lambda = V \implies \forall v \in V : \varphi(v) = \lambda v \implies \varphi = \lambda I$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\mathbb{F}$  — алгебраически замкнутое поле,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ ,  $G$  — абелева группа,  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимое линейное представление. Тогда  $\dim V = 1$ , т.е.  $\Phi$  — одномерное линейное представление.

*Доказательство.*  $\forall g, h \in G : gh = hg \implies \Phi(gh) = \Phi(hg) \implies \Phi(g)\Phi(h) = \Phi(h)\Phi(g)$ . Тогда если обозначить  $\Phi(h) = \varphi$ , то условия леммы Шура выполняются, а отсюда  $\forall h : \Phi(h)$  — скалярный оператор. Но для скалярного оператора любое подпространство  $V$  инвариантно, а значит, любое подпространство  $V$  инвариантно для  $\Phi$ . Тогда из неприводимости  $\Phi$  любое нетривиальное подпространство  $V$  совпадает с  $V$ , а отсюда  $\dim V = 1$ .  $\square$

### 9.2.1 Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп

Пусть  $G$  — конечная абелева группа,  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . По следствию из леммы Шура любое неприводимое линейное представление  $G$  имеет одномерное пространство представления, то есть  $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$ .

**Утверждение.** Для конечной абелевой группы  $G$  существует ровно  $|G|$  различных комплексных неприводимых линейных представлений  $G$ .

*Доказательство.* Опишем все гомоморфизмы  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ :

Так как  $G$  — конечная абелева, по основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах  $G \simeq \langle a_1 \rangle_{n_1} \times \dots \times \langle a_k \rangle_{n_k}$ . Пусть  $\Phi(a_i) = c_i$ . Тогда  $c_i^{n_i} = \Phi(a_i^{n_i}) = \Phi(e) = 1$ , то есть  $c_i$  — комплексный корень степени  $n_i$  из единицы. Так как  $a_1, \dots, a_k$  порождают  $G$ , очевидно, что гомоморфизм однозначно задаётся выбором  $c_1, \dots, c_k$ . Способов выбрать  $c_i$  ровно  $n_i$  (количество комплексных корней степени  $n_i$  из единицы) — отсюда гомоморфизмов  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k = |G|$ .  $\square$

**Пример.**  $V_4 = \langle a \rangle_2 \times \langle b \rangle_2 \implies \Phi(a) = \pm 1, \Phi(b) = \pm 1$ .

	e	a	b	ab
$\Phi_1 = I$	1	1	1	1
$\Phi_2$	1	-1	1	-1
$\Phi_3$	1	1	-1	-1
$\Phi_4$	1	-1	-1	1

### 9.2.2 Одномерные комплексные представления группы

Пусть  $G$  — произвольная группа.

Знаем, что коммутант  $G' \trianglelefteq G$  — подгруппа такая, что  $G/G'$  абелева. Рассмотрим канонический гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/G'$ :

**Утверждение.** Если  $\Psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^*$  — одномерное комплексное линейное представление  $G/G'$ , то  $\Phi = \psi \circ \pi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  — одномерное комплексное линейное представление  $G$ .

*Доказательство.* Очевидно (композиция гомоморфизмов — гомоморфизм).  $\square$

**Утверждение.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  — произвольное одномерное комплексное линейное представление  $G$ . Тогда  $\exists$  линейное представление  $\Psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^*$  такое, что  $\Phi = \Psi \circ \pi$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\text{Im } \Phi \leq \mathbb{C}^* \implies \text{Im } \Phi$  — абелева.

Из теоремы о гомоморфизме  $\text{Im } \Phi \simeq G/\text{Ker } \Phi$ , то есть  $G/\text{Ker } \Phi$  — абелева, а тогда  $G' \subseteq \text{Ker } \Phi$  (свойство коммутанта).

Отсюда  $\forall g \in G, h \in G' : \Phi(gh) = \Phi(g)$ , то есть значения  $\Phi$  на всех элементах

левого смежного класса  $g$  по  $G'$  совпадают. Поэтому корректно отображение  $\Psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^*$ , заданное по правилу  $gG' \mapsto \Phi(g)$ . Это гомоморфизм:

$$\Psi(g_1G' \cdot g_2G') = \Psi(g_1g_2G') = \Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Psi(g_1G')\Psi(g_2G')$$

При этом  $\forall g \in G : g \xrightarrow{\pi} gG' \xrightarrow{\Psi} \Phi(g)$ , то есть  $\Phi = \Psi \circ \pi$ .  $\square$

**Следствие.** Если  $G$  конечна, то одномерных комплексных линейных представлений  $G$  ровно  $|G/G'|$ .

*Доказательство.* Из двух предыдущих утверждений имеем взаимно однозначное соответствие между одномерными комплексными линейными представлениями  $G$  и  $G/G'$ . Если  $G$  конечна, то  $G/G'$  — конечная абелева, а тогда она имеет ровно  $|G/G'|$  представлений.  $\square$

### 9.3 Вполне приводимые линейные представления

**Определение.** Сумма линейных представлений:

#### 1. Внутренняя сумма линейных представлений

Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление  $G$ , и пусть  $V = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$  инвариантны относительно  $\Phi$ . Тогда говорят, что  $\Phi$  есть сумма (внутренняя) представлений  $\Phi|_U$  и  $\Phi|_W$ .

Заметим, что если выбрать базисы  $\mathcal{E}_U = \{e_1, \dots, e_m\}$  в  $U$ ,  $\mathcal{E}_W = \{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  в  $W$ , то в базисе  $\mathcal{E}_V = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  матрица оператора  $\Phi(g)$  для любого  $g \in G$  имеет вид  $A_g = \begin{pmatrix} A_{U,g} & 0 \\ 0 & A_{W,g} \end{pmatrix}$ , где  $A_{U,g}$  — матрица  $\Phi|_U$  в базисе  $\mathcal{E}_U$ , а  $A_{W,g}$  — матрица  $\Phi|_W$  в базисе  $\mathcal{E}_W$ .

#### 2. Внешняя сумма линейных представлений

Пусть  $U, W$  — векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ , и пусть заданы линейные представления  $\Psi_1 : G \rightarrow GL(U)$  и  $\Psi_2 : G \rightarrow GL(W)$ . Обозначим  $V = U \oplus W$  — внешняя прямая сумма  $U$  и  $W$ . Тогда линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ , заданное по правилу  $\Phi(g)(u, w) = (\Psi_1(g)u, \Psi_2(g)w)$  (очевидно, что это гомоморфизм), называется (внешней) суммой линейных представлений  $\Psi_1, \Psi_2$  и обозначается  $\Phi = \Psi_1 + \Psi_2$ .

Аналогично, если выбрать базисы  $\mathcal{E}_U = \{e_1, \dots, e_m\}$  в  $U$ ,  $\mathcal{E}_W = \{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  в  $W$ , то в базисе  $\mathcal{E}_V = \{(e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, e_{m+1}), \dots, (0, e_n)\}$  пространства  $V$  матрица оператора  $\Phi(g)$  для любого  $g \in G$  имеет вид  $\begin{pmatrix} A_{\Psi_1} & 0 \\ 0 & A_{\Psi_2} \end{pmatrix}$ , где  $A_{\Psi_1}$  — матрица  $\Psi_1$  в базисе  $\mathcal{E}_U$ , а  $A_{\Psi_2}$  — матрица  $\Psi_2$  в базисе  $\mathcal{E}_W$ .

**Определение.** Линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется вполне приводимым, если для любого подпространства  $U \subseteq V$ , инвариантного относительно  $\Phi$ , существует такое подпространство  $W \subseteq V$ , инвариантное относительно  $\Phi$ , что  $V = U \oplus W$ .

*Замечание.* Любое неприводимое линейное представление вполне приводимо — для него инвариантные подпространства — только  $V$  и  $\{0\}$ , причём  $V \oplus \{0\} = V$ .

**Примеры.** (Напомним, что при фиксированном базисе  $V$  линейные представления взаимно однозначно соответствуют матричным, где в соответствие каждому оператору поставлена его матрица).

$$1. \Phi : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \text{ — вполне приводимо.}$$

(поворот унитарного пространства — ортогональный оператор, то есть если  $U$  инвариантно, то  $U^\perp$  инвариантно, причём  $V = U \oplus U^\perp$ )

$$2. \Phi : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — приводимо, но не вполне приводимо:}$$

Рассмотрим базис  $\tilde{C} = \{e_1, e_2\}$  двумерного пространства линейного представления  $V$ , в котором записаны матрицы операторов.

Заметим, что  $\langle e_1 \rangle$  — инвариантное подпространство относительно  $\Phi$ . Однако никакое подпространство  $W = \langle \mu e_1 + e_2 \rangle$  не инвариантно:

$$\forall t > 0 : \Phi(t) \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление  $G$ . Линейное представление  $\tilde{\Phi}$  называется подпредставлением  $\Phi$ , если  $\exists \tilde{V} \subseteq V$  — такое подпространство, инвариантное относительно  $\Phi$ , что  $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\tilde{V}} : G \rightarrow GL(\tilde{V})$ .

**Лемма 1.** *Любое подпредставление вполне приводимого представления вполне приводимо.*

*Доказательство.* Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — вполне приводимое линейное представление,  $\tilde{\Phi} : G \rightarrow GL(\tilde{V})$  — его подпредставление ( $\tilde{V}$  — подпространство  $V$ ). Рассмотрим произвольное подпространство  $U \subseteq \tilde{V}$ , инвариантное относительно  $\tilde{\Phi}$ .  $U$  является подпространством и для  $V$ , а тогда  $\exists$  инвариантное относительно  $\Phi$  подпространство  $W \subseteq V$  такое, что  $V = U \oplus W$  (т.к.  $\Phi$  вполне приводимо). Тогда если обозначить  $\tilde{W} = W \cap \tilde{V}$ , то  $\tilde{W}$  — подпространство  $\tilde{V}$ , инвариантное относительно  $\tilde{\Phi}$ .

Осталось показать, что  $\tilde{V} = U \oplus \tilde{W}$ , то есть что  $\forall x \in \tilde{V}$  единственным образом раскладывается как  $x = u + \tilde{w}, u \in U, \tilde{w} \in \tilde{W}$ . Действительно, из  $V = U \oplus W$  знаем, что  $x$  как элемент  $V$  единственno раскладывается в сумму  $x = u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ , однако  $w = x - u \in \tilde{V}$ , то есть  $w \in \tilde{V} \cap W = \tilde{W}$ . Значит, такое разложение существует и единствено, что и требовалось.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — вполне приводимое линейное представление. Тогда  $\Phi$  раскладывается в сумму неприводимых линейных представлений (возможно, одного).

*Доказательство.* Индукция по  $n = \dim V$ :

База:  $n = 1 \implies \Phi$  неприводимо;

Шаг: Пусть  $V_1$  — минимальное ненулевое инвариантное подпространство линейного представления  $\Phi$ . Так как  $\Phi$  вполне приводимо,  $\exists$  инвариантное дополнение  $W : V = V_1 \oplus W \implies \Phi = \Phi_{V_1} + \Phi_W$ . При этом  $\Phi_{V_1}$  неприводимо из минимальности  $V_1$  (нет нетривиальных инвариантных подпространств меньшей размерности), а  $\Phi_W$  по лемме 1 вполне приводимо, и притом меньшей размерности — раскладывается в исходную сумму по предположению индукции. Значит,  $\Phi$  также раскладывается в исходную сумму.  $\square$

**Пример.** Если  $\dim V = n > 1$  и  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  такое, что  $\Phi(g) = I \forall g \in G$ , то все подпространства  $V$  являются инвариантными для  $\Phi$ , откуда  $\Phi$  вполне приводимо. Тогда  $\Phi$  раскладывается в сумму одномерных представлений, причём не единственным образом — в зависимости от выбора базиса:

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} \implies V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle \implies \Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_n;$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\} \implies V = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle \implies \Phi = \tilde{\Phi}_1 + \dots + \tilde{\Phi}_n;$$

**Лемма 3.** Пусть  $V = V_1 + \dots + V_k$ , где  $V_i$  — минимальные ненулевые подпространства, инвариантные относительно линейного представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ . Тогда  $\Phi$  вполне приводимо, причём для произвольного инвариантного подпространства  $U \subseteq V$  существует инвариантное дополнение вида  $W = \sum_{i \in I} V_i$  для некоторого  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $V_I = \sum_{i \in I} V_i$ , где  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ . Очевидно, что  $V_I$  — инвариантное подпространство (как сумма инвариантных). Рассмотрим произвольное инвариантное  $U \subseteq V$  и возьмём  $I$  максимальное (по включению) такое, что  $U \cap V_I = \{0\}$ . Докажем, что  $V = U \oplus V_I$  (по построению  $U \cap V_I = \{0\}$ , поэтому достаточно доказать  $V = U + V_I$ ):

Рассмотрим  $j \notin I$ . Тогда  $V_{I \cup \{j\}} = V_I + V_j$ , а также из максимальности  $I$   $U \cap V_{I \cup \{j\}} \neq 0 \implies \exists u \in U : u = \sum_{i \in I} v_i + v_j$ , причём  $v_j \neq 0$ .

Тогда  $v_j = u - \sum_{i \in I} v_i \in U + V_I$ , то есть  $V_j \cap (U + V_I) \neq \{0\}$ . При этом пересечение инвариантных подпространств инвариантно, то есть  $V_j \cap (U + V_I)$  — инвариантное подпространство в  $V_j$ . Тогда из минимальности  $V_j$  это подпространство совпадает с  $V_j$ , а значит,  $V_j \subseteq U + V_I$ .

Проведя это рассуждение для всех  $j \in \{1, \dots, k\} \setminus I$ , получим  $V_1 + \dots + V_k \subseteq U + V_I$ , то есть  $V \subseteq U + V_I$  а отсюда  $V = U + V_I$ .  $\square$

**Пример.** Пусть  $\dim V = n, \text{char } \mathbb{F} = 0$ . Рассмотрим мономиальное линейное представление  $M : S_n \rightarrow GL(V)$  для некоторого базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} : M(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$ . Ранее доказывали, что относительно него инвариантны  $U = \langle e_1 + \dots + e_n \rangle$  и  $W = \{x = \sum_i x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$ , причём  $V = U \oplus W$ . Отсюда по лемме 3  $M$  вполне приводимо.

**Теорема. (Машке)**

Пусть  $G$  — произвольная конечная группа,  $\mathbb{F}$  — поле,  $\text{char } \mathbb{F} \nmid |G|$  (в частности, верно при  $\text{char } \mathbb{F} = 0$ ),  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ . Тогда произвольное линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  вполне приводимо.

*Доказательство.* Пусть  $U$  — произвольное подпространство  $V$ , инвариантное относительно  $\Phi$ . Докажем, что к  $U$  существует инвариантное дополнение  $W \subseteq V : V = U \oplus W$ .

Рассмотрим произвольное дополнение  $U$  до  $V$  — подпространство  $U'$  такое, что  $V = U \oplus U'$ . Обозначим за  $\psi$  линейный оператор проектирования на  $U'$  вдоль  $U$ , то есть  $\psi : V \rightarrow V$  такой, что  $\forall v : v = u + u' \Rightarrow \psi(v) = u'$ .

Обозначим очевидные свойства  $\psi$  :

- (i)  $\forall u \in U : \psi(u) = 0$ ;
- (ii)  $\forall v \in V : v - \psi(v) \in U$ .

Построим новый линейный оператор  $\tilde{\psi}$  по правилу  $\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h) \circ \psi \circ \Phi(h^{-1})$  (из условия  $\text{char } \mathbb{F} \nmid |G|$  возможно деление на  $|G|$ , т.к. оно не соответствует  $0_{\mathbb{F}}$ ) и докажем, что  $W = \text{Im } \tilde{\psi}$  подойдёт под условие:

1. Инвариантность  $W$  относительно  $\Phi$ :

- (a) Докажем, что  $\forall g \in G : \Phi(g)\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\Phi(g)$ :

$$\begin{aligned}\Phi(g)\tilde{\psi}\Phi(g^{-1}) &= \Phi(g) \left( \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1}) \right) \Phi(g^{-1}) = \\ \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(g)\Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})\Phi(g^{-1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(gh)\psi\Phi((gh)^{-1}) = \\ \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Phi(t)\psi\Phi(t^{-1}) &= \tilde{\psi}\end{aligned}$$

(b) Докажем инвариантность  $\text{Im } \tilde{\psi}$  относительно  $\Phi$ :

$$\forall w \in \text{Im } \tilde{\psi} : \exists v \in V : w = \tilde{\psi}(v)$$

$$\forall g \in G : \Phi(g)(w) = \Phi(g)(\tilde{\psi}(v)) = \tilde{\psi}(\Phi(g)(v)) \in \text{Im } \tilde{\psi}$$

Отсюда  $W$  инвариантно относительно  $\Phi$ ;

2. Докажем, что  $V = U + W$ :

Заметим, что  $\forall v \in V : v = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} v = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\Phi(h^{-1})v$ . Тогда:

$$\begin{aligned}v - \tilde{\psi}(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\Phi(h^{-1})v - \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})v = \\ &\quad \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)(\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v))\end{aligned}$$

При этом  $\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v) \in U$  по свойству (ii), а в силу инвариантности  $U$   $\Phi(h)(\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v)) \in U$  для любого  $h \in G$ . Значит,  $\forall v \in V : v - \tilde{\psi}(v) \in U \implies v = u + \tilde{\psi}(v)$ . Отсюда  $V = U + W$ .

3.  $U \cap W = \{0\}$ :

(a) Заметим, что  $\forall u \in U : \tilde{\psi}(u) = 0$ :

$\tilde{\psi}(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})u$ . Из инвариантности  $U$   $\Phi(h^{-1})u \in U$ , а тогда  $\psi(\Phi(h^{-1})u) = 0 \quad \forall h \in G$ , то есть все слагаемые равны 0.

(b) Докажем, что  $\tilde{\psi}^2 = \tilde{\psi}$ :

$\forall v \in V$  по (2) имеем  $v - \tilde{\psi}(v) \in U$ , а тогда по (3a)  $\tilde{\psi}(v - \tilde{\psi}(v)) = 0 \implies \tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}^2(v) = 0 \implies \tilde{\psi}(v) = \tilde{\psi}^2(v)$ .

(c) Докажем, что  $U \cap W = \{0\}$ :

Рассмотрим  $v \in U \cap W$ . Тогда  $\tilde{\psi}(v) = 0$  по (3a), а также  $\exists v' : v = \tilde{\psi}(v')$ , т.к.  $v \in W = \text{Im } \tilde{\psi}$ . Отсюда  $\tilde{\psi}^2(v') = \tilde{\psi}(v) = 0$ , а тогда по (3b)  $\tilde{\psi}(v') = 0$ , то есть  $v = 0$ . Отсюда  $U \cap W = \{0\}$ .

Значит, для  $\Phi$  выполняется определение вполне приводимости.  $\square$

**Следствие 1.** Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является вполне приводимым.

**Следствие 2.** Любое комплексное линейное представление конечной абелевой группы раскладывается в сумму одномерных линейных представлений (то есть в  $V$  существует базис  $\mathcal{E}$  такой, что  $\forall g \in G$  матрица оператора  $\Phi(g)$  диагональна в  $\mathcal{E}$ ).

**Пример.** Найдём число неэквивалентных двумерных комплексных линейных представлений  $\mathbb{Z}_2$ .  $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle_2$  — конечная абелева группа, то есть по следствию 2 любое комплексное линейное представление  $\Phi$  представимо в виде суммы одномерных линейных представлений  $\Phi_1 + \Phi_2$ . Таким образом, матрица  $\Phi(a)$  имеет вид  $\begin{pmatrix} \Phi_1(a) & 0 \\ 0 & \Phi_2(a) \end{pmatrix}$ , а также  $\Phi_i(a) = \pm 1$ , т.к.  $a^2 = e$ . Значит,  $\Phi(a) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$  — 4 различные матрицы. Осталось заметить, что линейные представления неэквивалентны, если ЖНФ матриц  $\Phi(a)$  различны — отсюда случаи  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  эквивалентны, что оставляет нам 3 неэквивалентных (разные собственные значения) линейных представления.

### 9.3.1 Ортогональные (унитарные) представления

**Определение.** Вещественное (комплексное) линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется ортогональным (унитарным), если в  $V$  можно ввести скалярное произведение так, что  $\forall g \in G : \Phi(g)$  — ортогональный (унитарный) оператор относительно этого скалярного произведения.

**Лемма.** Любое ортогональное (унитарное) линейное представление является вполне приводимым.

*Доказательство.* Пусть  $U$  — произвольное подпространство  $V$ , инвариантное относительно  $\Phi$ . Тогда из ортогональности  $\Phi(g)$  для всех  $g \in G$  получаем, что  $U^\perp$  также инвариантно относительно  $\Phi$ , причём  $V = U \oplus U^\perp$ . Значит,  $\Phi$  вполне приводимо.  $\square$

**Теорема.** Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является ортогональным (унитарным).

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

Рассмотрим произвольную симметрическую положительно определённую билинейную функцию  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Определим отображение

$$(x|y) := \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)y)$$

Докажем, что  $(x|y)$  — искомое скалярное произведение:

1. Симметричность и билинейность — очевидны из симметричности и билинейности  $\beta$ ;

2. Положительная определённость — докажем, что  $\forall x \neq 0 : (x|x) > 0$ :

По определению  $(x|x) = \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x)$ . Из положительной определённости  $\beta$  знаем, что  $\beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x) \geq 0$ , причём  $\beta(x, x) = 0 \iff x = 0$ . Остаётся заметить, что при  $h = e$ :  $\beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x) = \beta(x, x) > 0$ , а значит,  $(x|x) > 0$  (все слагаемые  $\geq 0$ , причём хотя бы одно  $> 0$ ).

3. Докажем, что  $\forall g \in G : \Phi(g)$  ортогонально относительно  $(x|y)$ , то есть  $(\Phi(g)x | \Phi(g)y) = (x|y)$ :

$$\begin{aligned} (\Phi(g)x, \Phi(g)y) &= \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)\Phi(g)x, \Phi(h)\Phi(g)y) = \sum_{h \in G} \beta(\Phi(hg)x, \Phi(hg)y) = \\ &= \sum_{t \in G} \beta(\Phi(t)x, \Phi(t)y) = (x|y) \end{aligned}$$

Значит,  $\Phi$  — ортогональное линейное представление.

Случай  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ : рассмотрим произвольную эрмитову положительно определённую полуторалинейную функцию  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда аналогично определим отображение  $(x|y)$  — его свойства и унитарность  $\Phi(g)$  проверяются аналогично свойствам  $\beta$  и ортогональности  $\Phi(g)$ .  $\square$

**Следствие.** *Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является вполне приводимым.*

*Замечание.* Данное следствие является случаем теоремы Машке для  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

## 9.4 Неприводимые линейные представления над $\mathbb{C}$

Сформулируем две теоремы, описывающие поведение неприводимых комплексных представлений произвольной конечной группы. Они будут доказаны в разделе 9.5, а этот раздел посвящён их практическому применению.

**Теорема 1.** *Пусть  $G$  — конечная группа,  $r$  — количество классов сопряжённости в  $G$ . Тогда существует ровно  $r$  попарно неэквивалентных неприводимых комплексных линейных представлений  $G$  над  $\mathbb{C}$ .*

**Теорема 2.** *Пусть  $G$  — конечная группа,  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$  — все её попарно неэквивалентные неприводимые комплексные линейные представления,  $n_1, \dots, n_r$  — их размерности. Тогда  $|G| = n_1^2 + \dots + n_r^2$ .*

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа. Тогда  $G$  имеет только одномерные неприводимые комплексные линейные представления  $\iff G$  абелева.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — было доказано как следствие леммы Шура;

$\Rightarrow$  — по теореме 2:  $|G| = \sum_{i=1}^r n_i = \sum_{i=1}^r 1 = r$  (где  $r$  — число классов сопряжённости по теореме 1), то есть все классы сопряжённости состоят из одного элемента. Значит,  $\forall g_1, g_2 \in G : g_2 g_1 g_2^{-1} = g_1 \implies g_2 g_1 = g_1 g_2$ , то есть  $G$  абелева.  $\square$

Опишем неприводимые линейные представления над  $\mathbb{C}$  некоторых групп:

1.  $G = S_3$ :

(a)  $\dim V = 1$ :  $|G/G'| = |S_3/A_3| = 2$

Одномерные комплексные представления  $G$  уже умеем классифицировать — они соответствуют представлениям  $G/G'$ . В данном случае их два —  $\forall \sigma \in S_3 : \Phi_1(\sigma) = I, \Phi_2(\sigma) = \text{sgn } \sigma \cdot I$ ;

(b)  $\dim V = 2$ : Заметим, что  $S_3 \simeq D_3 = \text{Sym } \Delta \subset GL_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{C})$ . Так зададим двумерное линейное представление  $\Phi_3$  — в примерах раздела 2 данной главы доказана неприводимость такого представления.

Остаётся заметить, что  $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ , причём уже найдены одно двумерное и два неэквивалентных одномерных неприводимых комплексных линейных представления. Отсюда по теореме 2 других представлений быть не может, то есть любое неприводимое комплексное линейное представление  $S_3$  эквивалентно одному из представлений  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ;

2.  $G = S_4$ :

(a)  $\dim V = 1$ :  $|G/G'| = |S_4/A_4| = 2$

Одномерные комплексные представления  $S_4$ , аналогично  $S_3$ , имеют вид  $\forall \sigma \in S_3 : \tilde{\Phi}_1(\sigma) = I, \tilde{\Phi}_2(\sigma) = \text{sgn } \sigma \cdot I$ ;

(b)  $\dim V = 2$ : Для начала докажем, что  $S_4/V_4 \simeq S_3$ :

Рассмотрим произвольный элемент  $S_4/V_4$  — это смежный класс вида  $H = \sigma V_4$ . Заметим, что в  $V_4$  четыре элемента, причём все они переводят 4 в различные элементы — значит, для всех четырёх  $\tilde{\sigma} \in H$  значения  $\tilde{\sigma}(4)$  различны, то есть  $H$  содержит ровно один элемент  $\sigma'$  такой, что  $\sigma'(4) = 4$ . Отсюда каждый элемент можно единственным

образом домножить справа на элемент из  $V_4$ , чтобы результат оставлял 4 на месте.

Рассмотрим отображение  $\varphi : S_4/V_4 \rightarrow S_3$ , которое переводит каждый смежный класс в его элемент, оставляющий 4 на месте. Такое отображение биективно по соображениям выше, а также, очевидно, является гомоморфизмом ( $\varphi(\sigma V_4)\varphi(\tau V_4) = \sigma'\tau' = \varphi(\sigma\tau V_4)$ , так как  $\sigma'\tau' \in \sigma\tau V_4$  и оставляет 4 на месте). Значит,  $\varphi$  — изоморфизм.

Поэтому можем задать линейное представление  $\tilde{\Phi}_3 : S_4 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ :

$$S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/V_4 \xrightarrow{\varphi} S_3 \xrightarrow{\Phi_3} GL_2(\mathbb{C})$$

где  $\Phi_3$  — линейное представление из предыдущего пункта. Неприводимость  $\tilde{\Phi}_3$  очевидно следует из неприводимости  $\Phi_3$  (инвариантное подпространство для  $\tilde{\Phi}_3$  было бы инвариантно и для  $\Phi_3$ ).

(c)  $\dim V = 3$ : В разделе 2 данной главы (примеры 5,6) приводились два трёхмерных линейных представления  $S_4$ :

$$\tilde{\Phi}_4 : S_4 \simeq \text{Sym}^+ K \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3) \quad (\text{где } K \text{ — куб})$$

$$\tilde{\Phi}_5 : S_4 \simeq \text{Sym} T \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3) \quad (\text{где } T \text{ — правильный тетраэдр})$$

Там же была доказана неэквивалентность и неприводимость этих представлений.

Остаётся заметить, что  $|S_4| = 24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$ , причём уже найдены два трёхмерных, одно двумерное и два неэквивалентных одномерных неприводимых комплексных линейных представления. Отсюда по теореме 2 других представлений быть не может, то есть любое неприводимое комплексное линейное представление  $S_3$  эквивалентно одному из представлений  $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_5$ .

**Лемма.** Пусть  $V_1, V_2$  — векторные пространства над  $\mathbb{C}$ , и  $\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ ,  $\Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  — неприводимые линейные представления произвольной группы  $G$ .

Пусть  $\exists \varphi : V_1 \rightarrow V_2$  — линейное отображение такое, что  $\forall g \in G : \Phi_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_1(g)$ . Тогда:

1. Если  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$ , то  $\varphi = 0$ ;
2. Если  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ , то либо  $\varphi = 0$ , либо  $\varphi$  — изоморфизм;
3. Если  $V_1 = V_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2$ , то  $\varphi = \lambda I$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Пункт 3 — частный случай леммы Шура для  $\mathbb{C}$ ;

2) Предположим, что  $\varphi \neq 0$ , то есть  $\text{Ker } \varphi \neq V_1, \text{Im } \varphi \neq \{0\}$ .

$$\forall x \in \text{Ker } \varphi : \varphi(\Phi_1(g)x) = \Phi_2(g)\varphi(x) = 0 \implies \Phi_1(g)x \in \text{Ker } \varphi;$$

$$\forall y \in \text{Im } \varphi (y = \varphi(x)) : \Phi_2(g)y = \Phi_2(g)\varphi(x) = \varphi(\Phi_1(g)x) \implies \Phi_2(g)y \in \text{Im } \varphi$$

Отсюда  $\text{Ker } \varphi$  — инвариантное пространство для  $\Phi_1$ , а  $\text{Im } \varphi$  — для  $\Phi_2$ . Из их неприводимости и нетривиальности  $\varphi$  следует  $\text{Ker } \varphi = \{0\}, \text{Im } \varphi = V_2$ , то есть  $\varphi$  — изоморфизм.

1) Аналогично пункту 2, но если  $\varphi$  — изоморфизм, то  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ , что противоречит условию.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $V_1, V_2$  — векторные пространства над  $\mathbb{C}$ , и  $\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1), \Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  — неприводимые линейные представления конечной группы  $G$ ,  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  — произвольное линейное отображение.

Рассмотрим "усреднённое" линейное отображение:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_2(g) \circ \psi \circ \Phi_1(g^{-1})$$

Тогда:

1. Если  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$ , то  $\tilde{\psi} = 0$ ;
2. Если  $V_1 = V_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2$ , то  $\tilde{\psi} = \lambda I$ , где  $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1}$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\forall g \in G : \Phi_2(g) \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi} \circ \Phi_1(g)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2(g)\tilde{\psi}\Phi_1(g^{-1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi_2(g)\Phi_2(h)\psi\Phi_1(h^{-1})\Phi_1(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi_2(gh)\psi\Phi_1((gh)^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Phi_2(t)\psi\Phi_1(t^{-1}) = \tilde{\psi} \end{aligned}$$

Отсюда можем применить доказанную лемму.

Осталось показать, что  $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1}$ . Рассмотрим  $\text{tr } \tilde{\psi}$ :

С одной стороны,  $\tilde{\psi} = \lambda I$ , то есть  $\text{tr } \tilde{\psi} = \lambda \cdot \dim V_1$ ;

С другой стороны, из аддитивности следа  $\text{tr } \tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr} (\Phi_1(g)\psi\Phi_1(g^{-1})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \psi = \text{tr } \psi$ . Значит,  $\text{tr } \psi = \text{tr } \tilde{\psi} = \lambda \cdot \dim V_1$ , то есть  $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1}$ .  $\square$

**Следствие 2.** (Следствие 1 в матричной форме)

$\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1), \Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  — неприводимые комплексные линейные представления конечной группы  $G$ ,  $\dim V_1 = n_1, \dim V_2 = n_2, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  —

некоторые базисы  $V_1, V_2$  соответственно. Обозначим для всех  $g \in G$  матрицы оператора  $\Phi_1(g)$  в  $\mathcal{E}_1$  как  $A(g) = (a_{ij}(g))$ , а матрицы  $\Phi_2(g)$  в  $\mathcal{E}_2$  — как  $B(g) = (b_{ij}(g))$

Тогда  $\forall i, j, i_0, j_0$ :

1. Если  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$ , то  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1}) = 0$ ;
2. Если  $V_1 = V_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2$ , то  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1}) = \frac{\delta_{i_0}^{j_0} \delta_i^j}{\dim V_1}$ .

*Доказательство.* Для любых  $i_0, j_0$  возьмём в качестве  $\psi$  из следствия 1 линейное отображение, матрица  $C$  которого в базисах  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  равна  $E_{i_0, j_0}$  (матричная единица). Тогда матрица линейного отображения  $\tilde{\psi}$  в базисах  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  имеет вид

$$\tilde{C} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} B(g)CA(g^{-1})$$

При этом элемент на  $ij$ -ой позиции матрицы  $B(g)CA(g^{-1})$  равен

$$\sum_{k=1}^{n_2} b_{ik}(g)[CA(g^{-1})]_{kj} = \sum_{k=1}^{n_2} b_{ik}(g) \sum_{l=1}^{n_1} c_{kl}a_{lj}(g^{-1}) = \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_1} b_{ik}(g)c_{kl}a_{lj}(g^{-1})$$

Ненулевым будет только слагаемое при  $k = i_0, l = j_0$ , и оно равно  $b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1})$ . Значит,  $\tilde{c}_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1})$ . По следствию 1:

1.  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2 \implies \tilde{\psi} = 0 \implies \forall i, j : \tilde{c}_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1}) = 0$ ;
2.  $V_1 = V_2, \Phi_1 = \Phi_2 \implies \tilde{\psi} = \lambda I \implies \tilde{C} = \lambda E \implies \tilde{c}_{ij} = \lambda \delta_i^j$ .  
 $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1} = \frac{\text{tr } C}{\dim V_1} = \frac{\delta_{i_0}^{j_0}}{\dim V_1} \implies \tilde{c}_{ij} = \frac{\delta_{i_0}^{j_0} \delta_i^j}{\dim V_1}$ .

□

## 9.5 Характеры комплексных линейных представлений

**Определение.** Пусть  $\Phi$  — комплексное линейное представление группы  $G$ . Отображение  $\chi_\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  такое, что  $\forall g \in G : \chi_\Phi(g) = \text{tr } \Phi(g)$ , называется характером линейного представления  $\Phi$ .

*Замечание.*

1. Если  $\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g)$  — все собственные значения  $\Phi(g)$  с учётом кратности, то  $\chi_\Phi(g) = \lambda_1(g) + \dots + \lambda_n(g)$  (в частности, характер не зависит от базиса);

2. Если  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ , то  $\chi_{\Phi_1} = \chi_{\Phi_2}$ .

### Свойства.

1.  $\chi_{\Phi}(e) = \dim V$ ;
2.  $\forall g, h \in G : \chi_{\Phi}(hgh^{-1}) = \chi_{\Phi}(g)$  (характер равен для всех элементов одного класса сопряжённости);
3. Если  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , то  $\chi_{\Phi} = \chi_{\Phi_1} + \chi_{\Phi_2}$ ;
4. Если  $\text{ord } g < \infty$ , то  $\chi_{\Phi}(g^{-1}) = \overline{\chi_{\Phi}(g)}$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно ( $\Phi(e) = I$ , то есть его матрица единичная);
2. В произвольном базисе  $\mathcal{E}$ :  $A(hgh^{-1}) = A(h)A(g)(A(h))^{-1}$  — след матрицы не меняется при сопряжении (так как не зависит от базиса);
3. Следует из того, что в некотором базисе  $\mathcal{E}$ :  $A_{\Phi} = \begin{pmatrix} A_{\Phi_1} & 0 \\ 0 & A_{\Phi_2} \end{pmatrix}$ ;
4. Пусть  $\text{ord } g = k$ . Тогда  $\text{ord } \Phi(g) = m \mid k$  (т.к.  $\Phi(g)^k = I$ ).

Рассмотрим матрицу  $A(g)$  в жордановом базисе. Так как  $A(g)^m = E$ , все собственные значения  $\lambda_i(g)$  — комплексные корни степени  $m$  из единицы. Также из определения линейного представления  $A(g^{-1}) = A(g)^{-1}$ , то есть на диагонали  $A(g^{-1})$  стоят  $\lambda_i(g^{-1}) = \overline{\lambda_i(g)} = \overline{\lambda_i(g)}$ , т.к. модуль корня из единицы равен 1. Тогда:

$$\chi_{\Phi}(g^{-1}) = \text{tr } A(g^{-1}) = \sum_i \lambda_i(g^{-1}) = \sum_i \overline{\lambda_i(g)} = \overline{\sum_i \lambda_i(g)} = \overline{\text{tr } A(g)} = \overline{\chi_{\Phi}(g)}$$

□

**Определение.** Множество всех функций  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  будем обозначать как  $\mathbb{C}^G$ .

**Утверждение.**  $\mathbb{C}^G$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Очевидно. □

**Утверждение.** Пусть  $G$  — конечная группа. Тогда функция

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

задаёт на  $\mathbb{C}^G$  скалярное произведение, т.е.  $\mathbb{C}^G$  с данной функцией — эрмитово пространство.

*Доказательство.* Проверим определение:

1.  $\forall f \in \mathbb{C}^G : (f, f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 \geq 0$ , причём  
 $(f, f) = 0 \iff \forall g \in G : |f(g)| = 0 \iff f = 0$ ;
2.  $\overline{(f_1, f_2)} = \overline{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g) = (f_2, f_1)$ ;
3.  $(\alpha f_1 + \beta f_2, f_3) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\alpha f_1 + \beta f_2)(g) \overline{f_3(g)} =$   
 $= \frac{\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_3(g)} + \frac{\beta}{|G|} \sum_{g \in G} f_2(g) \overline{f_3(g)} = \alpha(f_1, f_3) + \beta(f_2, f_3)$ .

Значит,  $(f_1, f_2)$  задаёт на  $\mathbb{C}^G$  скалярное произведение.  $\square$

**Теорема.** (*Свойство ортогональности характеров*)

Пусть  $\Phi_1, \Phi_2 : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимые комплексные линейные представления конечной группы  $G$ . Тогда  $(\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi_2}) = \begin{cases} 1, & \Phi_1 \approx \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases}$

*Доказательство.* Пусть  $\dim V = n$ . Зафиксируем базис  $\mathcal{E}$  пространства  $V$  — в нём  $\Phi_1(g) \leftrightarrow A(g) = (a_{ij}(g))$ ,  $\Phi_2(g) \leftrightarrow B(g) = (b_{ij}(g))$ . Так как  $G$  конечна,  $\forall g \in G : \text{ord } g < \infty$ , то есть по свойству 4  $\overline{\chi_{\Phi_1}(g)} = \chi_{\Phi_1}(g^{-1})$ . Тогда:

$$\begin{aligned} (\chi_{\Phi_2}, \chi_{\Phi_1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\Phi_2}(g) \overline{\chi_{\Phi_1}(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\Phi_2}(g) \chi_{\Phi_1}(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{i=1}^n b_{ii}(g) \right) \left( \sum_{j=1}^n a_{jj}(g^{-1}) \right) = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (b_{ii}(g) a_{jj}(g^{-1})) \right) = \\ &= \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta_i^j}{n}, & \Phi_1 = \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \Phi_1 = \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Остается заметить, что  $\Phi_1 \approx \Phi_2 \implies \chi_{\Phi_1} = \chi_{\Phi_2}$ , т.е.  $(\chi_{\Phi_2}, \chi_{\Phi_1}) = (\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi_1}) = 1$ . Теорема доказана.  $\square$

*Замечание.* Далее в разложениях линейного представления в сумму неприводимых будут группироваться эквивалентные слагаемые — это записывается в виде

$$\Phi = m_1 \Phi_1 + \dots + m_s \Phi_s \iff \Phi = \underbrace{\Phi_1 + \dots + \Phi_1}_{m_1} + \dots + \underbrace{\Phi_s + \dots + \Phi_s}_{m_s}$$

В данной записи подразумевается, что  $\Phi_i \not\approx \Phi_j$  при  $i \neq j$ .

**Следствие.** Пусть  $\Phi = m_1\Phi_1 + \dots + m_s\Phi_s$ , где  $\Phi_1, \dots, \Phi_s$  — комплексные неприводимые линейные представления конечной группы  $G$ . Тогда:

1.  $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = m_i$ ;
2.  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = m_1^2 + \dots + m_s^2$ ;
3. Если  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1$ , то  $\Phi$  — неприводимое.

*Доказательство.* Заметим, что  $\Phi = \sum_i m_i \Phi_i \implies \chi_\Phi = \sum_i m_i \chi_{\Phi_i}$ . При этом  $\Phi_i \not\approx \Phi_j$  при  $i \neq j$ , а значит,  $(\chi_j, \chi_i) = \delta_i^j$  из теоремы. Тогда:

1.  $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = (\sum_j m_j \chi_{\Phi_j}, \chi_{\Phi_i}) = \sum_j m_j (\chi_j, \chi_i) = m_i$ ;
2.  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = (\sum_i m_i \chi_{\Phi_i}, \sum_j m_j \chi_{\Phi_j}) = \sum_{i,j} m_i m_j (\chi_i, \chi_j) = \sum_i m_i^2$ ;
3. Следует из пункта 2 — если  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1$ , то ненулевой коэффициент может быть только один, и он равен единице. Пусть  $m_i = 1$  — тогда  $\Phi = \Phi_i$ , т.е.  $\Phi$  — неприводимое.

□

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $\Phi, \Psi$  — линейные представления группы  $G$ . Тогда если  $\chi_\Phi = \chi_\Psi$ , то  $\Phi \approx \Psi$ .

*Доказательство.* По теореме Машке  $\Phi$  и  $\Psi$  вполне приводимы, то есть

$$\Phi = m_1\Phi_1 + \dots + m_s\Phi_s, \quad \Psi = n_1\Psi_1 + \dots + n_t\Psi_t$$

При этом  $\forall i : (\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = m_i$  из 1 пункта предыдущего следствия, то есть

$$(\chi_\Psi, \chi_{\Phi_i}) = m_i \implies n_1(\chi_{\Psi_1}, \chi_{\Phi_i}) + \dots + n_t(\chi_{\Psi_t}, \chi_{\Phi_i}) = m_i$$

Так как эта сумма не равна нулю, среди слагаемых в разложении  $\Psi$  найдётся  $\Psi_j \approx \Phi_i$ , а также  $n_j = m_i$ . Аналогичными рассуждениями для всех слагаемых обоих разложений получим, что каждое из них имеет эквивалентное в другом разложении, причём с тем же коэффициентом. Таким образом, с точностью до нумерации  $\Psi = n_1\Psi_1 + \dots + n_s\Psi_s$ , где  $\Psi_i \approx \Phi_i$ . Отсюда очевидно, что  $\Phi \approx \Psi$ . □

### 9.5.1 Пространство центральных функций

**Определение.** Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  называется центральной, если она постоянна на классах сопряжённости  $G$ . Множество всех центральных функций для группы  $G$  обозначается как  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .

**Пример.** Для произвольного комплексного линейного представления  $\Phi$  гр.  $G$   $\chi_{\Phi}$  — центральная функция.

**Утверждение.**  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$  — подпространство в  $\mathbb{C}^G$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $\forall \chi_1, \chi_2 \in \chi_{\mathbb{C}}(G), \lambda \in \mathbb{C}$  функции  $\chi_1 + \chi_2$  и  $\lambda \chi_1$  также являются центральными, так как постоянность на классах сопряжённости не нарушается. Также  $0 \in \chi_{\mathbb{C}}(G)$ , то есть определение подпространства выполнено.  $\square$

**Утверждение.** Если  $r$  — число классов сопряжённости в  $G$ , то  $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G) = r$ .

*Доказательство.* Если в группе  $G$  есть ровно  $r$  классов сопряжённости, то  $G = x_1^G \sqcup \dots \sqcup x_r^G$ . В таком случае функции

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_r, \text{ где } \Gamma_i = \begin{cases} 1, & g \in x_i^G \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

очевидно, образуют базис в  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимое линейное представление,  $\Gamma \in \chi_{\mathbb{C}}(G)$ .

Тогда оператор

$$\Psi_{\Gamma, \Phi} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \Phi(g) \text{ равен } \lambda I, \text{ где } \lambda = |G| \frac{(\chi_{\Phi}, \Gamma)}{\chi_{\Phi}(e)}$$

*Доказательство.* Докажем, что  $\forall g \in G : \Psi_{\Gamma, \Phi} \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \Psi_{\Gamma, \Phi}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(g) \circ \Psi_{\Gamma, \Phi} \circ \Phi(g^{-1}) &= \Phi(g) \left( \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \Phi(h) \right) \Phi(g^{-1}) = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \Phi(ghg^{-1}) = \\ (\text{из центральности } \Gamma) \quad &= \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(ghg^{-1})} \Phi(ghg^{-1}) = \sum_{\tilde{g} \in G} \overline{\Gamma(\tilde{g})} \Phi(\tilde{g}) = \Psi_{\Gamma, \Phi} \end{aligned}$$

Отсюда по лемме Шура  $\Psi_{\Gamma, \Phi} = \lambda I$ . Рассмотрим след  $\Psi_{\Gamma, \Phi}$ :

$$\operatorname{tr} \Psi_{\Gamma, \Phi} = \operatorname{tr} \lambda I = \lambda \dim V = \lambda \chi_{\Phi}(e)$$

$$\operatorname{tr} \Psi_{\Gamma, \Phi} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \cdot \operatorname{tr} \Phi(g) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \chi_{\Phi}(g) = |G| \cdot (\chi_{\Phi}, \Gamma)$$

Значит,  $\lambda = \frac{\operatorname{tr} \Psi_{\Gamma, \Phi}}{\chi_{\Phi}(e)} = |G| \frac{(\chi_{\Phi}, \Gamma)}{\chi_{\Phi}(e)}$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ ,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$  такое, что  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$  — базис  $V$ . Линейное представление  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , заданное по правилу  $\forall g \in G : \rho(g)e_{g_r} = e_{gg_r}$ , называется регулярным представлением группы  $G$  над полем  $\mathbb{F}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  — все попарно неэквивалентные неприводимые комплексные линейные представления группы  $G$ ,  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — их характеристы. Тогда  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — ортонормированный базис в  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .

*Доказательство.* Так как  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  неприводимы и попарно неэквивалентны,  $(\chi_i, \chi_j) = \delta_i^j$ , то есть  $\chi_1, \dots, \chi_k$  линейно независимы как попарно ортогональные векторы. При этом  $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G) < \infty$  (равно числу классов сопряжённости в  $G$ ), то есть  $k < \infty$ . Осталось доказать, что  $\chi_{\mathbb{C}}(G) = \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ .

Докажем от противного: предположим, что  $\chi_{\mathbb{C}}(G) \neq \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ . Тогда  $\langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle^\perp \neq \{0\}$ , то есть  $\exists \Gamma \in \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle^\perp$ ,  $\Gamma \neq 0$ . Пусть  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ . Выберем произвольное векторное пространство  $V$  размерности  $n$  и произвольный базис  $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$  в нём. Рассмотрим регулярное представление  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  над  $\mathbb{C}$ . По теореме Машке оно вполне приводимо, то есть представимо в виде  $\rho = m_1 \tilde{\Phi}_1 + \dots + m_s \tilde{\Phi}_s$ , где  $\tilde{\Phi}_i$  неприводимы и попарно неэквивалентны. Рассмотрим линейный оператор  $\Psi_{\Gamma, \rho} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g)$  пр-ва  $V$ , как в лемме 1:

$$\Psi_{\Gamma, \rho} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} (m_1 \tilde{\Phi}_1 + \dots + m_s \tilde{\Phi}_s)(g) = m_1 \Psi_{\Gamma, \tilde{\Phi}_1} + \dots + m_s \Psi_{\Gamma, \tilde{\Phi}_s}$$

Из неприводимости  $\tilde{\Phi}_i$  по лемме 1  $\Psi_{\Gamma, \tilde{\Phi}_i} = \lambda_i I$ , где  $\lambda_i = |G| \frac{(\chi_{\tilde{\Phi}_i}, \Gamma)}{\chi_{\tilde{\Phi}_i}(e)}$ . Но при этом  $\tilde{\Phi}_i$  — неприводимое представление  $G$ , то есть оно эквивалентно одному из  $\Phi_i$ , а отсюда  $\chi_{\tilde{\Phi}_i} \in \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ . Значит,  $(\chi_{\tilde{\Phi}_i}, \Gamma) = 0 \implies \lambda_i = 0 \implies \Psi_{\Gamma, \rho} = 0$ .

С другой стороны,

$$\Psi_{\Gamma, \rho}(e_{g_1}) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g)(e_{g_1}) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} e_{gg_1}$$

А так как  $\Psi_{\Gamma, \rho} = 0$ , имеем  $\sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} e_{gg_1} = 0 \implies \forall g \in G : \Gamma(g) = 0 \implies \Gamma = 0$  — противоречие. Значит,  $\chi_{\mathbb{C}}(G) = \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ , и  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — ортонормированный базис в  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $r$  — количество классов сопряжённости в  $G$ . Тогда существует ровно  $r$  попарно неэквивалентных неприводимых комплексных линейных представлений  $G$ .

*Доказательство.* Из леммы 2 количество попарно неэквивалентных комплексных линейных представлений  $G$  равно  $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G)$ , что равно количеству классов сопряжённости в  $G$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$  — все попарно неэквивалентные комплексные линейные представления группы  $G$ ,  $n_1, \dots, n_r$  — их размерности. Тогда:

1.  $\rho = n_1\Phi_1 + \dots + n_r\Phi_r$ , где  $\rho$  — регулярное представление группы  $G$  над  $\mathbb{C}$ ;
2.  $|G| = n_1^2 + \dots + n_r^2$

*Доказательство.*

1. По теореме Машке  $\rho$  вполне приводимо, то есть  $\rho = m_1\Phi_1 + \dots + m_r\Phi_r$  ( $m \geq 0$ ). Пусть  $\chi_\rho$  и  $\chi_{\Phi_i}$  — характеристы  $\rho$  и  $\Phi_i$  соответственно. Так как  $\chi_1, \dots, \chi_r$  — ортонормированный базис,  $(\chi_\rho, \chi_{\Phi_i}) = m_i$ . С другой стороны:

$$(\chi_\rho, \chi_{\Phi_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_{\Phi_i}(g)}$$

Посмотрим, какие значения принимает  $\chi_\rho$ . Выберем векторное пространство  $V$  размерности  $n$  и базис  $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$ . Так как  $\rho(g)e_{g_i} = e_{gg_i}$ , в базисе  $\mathcal{E}$  каждый столбец матрицы  $A_\rho(g)$  содержит одну единицу и  $n - 1$  ноль. При этом если  $g = 1$  в  $G$ , то  $A_\rho(g) = E$ , а иначе ни один базисный вектор не перейдёт в себя, то есть все элементы на главной диагонали  $A_\rho(g)$  равны нулю. Отсюда:

$$\chi_\rho(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_{\Phi_i}(g)} = \frac{1}{|G|} \cdot |G| \overline{\chi_{\Phi_i}(1)} = n_i$$

так как  $\Phi_i(1) = I$

2. Выразим  $|G|$ :

$$|G| = \dim V = \text{tr } \rho(1) = n_1 \text{tr } \Phi_1(1) + \dots + n_r \text{tr } \Phi_r(1) = n_1^2 + \dots + n_r^2$$

□

**Пример.** Построим таблицу характеров неприводимых комплексных представлений  $S_3$ : Сами представления уже были найдены:

- $\Phi_1(\sigma) = I$ ;
- $\Phi_2(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot I$ ;
- $\Phi_3 : S_3 \simeq D_3 = \operatorname{Sym} \Delta \subset GL_2(\mathbb{C})$

Классы сопр.	id	(12)	(123)
$\chi_{\Phi_1}$	1	1	1
$\chi_{\Phi_2}$	1	-1	1
$\chi_{\Phi_3}$	2	0	-1

Значения  $\chi_{\Phi_1}$  и  $\chi_{\Phi_2}$  ищутся очевидно. Опишем подробнее поиск значений  $\chi_{\Phi_3}$ :

- $\chi_{\Phi_3}(\operatorname{id}) = I$  — в любом базисе матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , след равен 2;
- $\chi_{\Phi_3}((12))$  — симметрия относительно прямой, содержащей вершину 3 и середину стороны 1-2. Так как характер не зависит от базиса, можем выбрать удобный нам — в ортонормированном базисе, где первый базисный вектор параллелен оси симметрии, матрица примет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , след равен 0;
- $\chi_{\Phi_3}((123))$  — поворот на  $\frac{2\pi}{3}$  относительно центра треугольника. Матрица этого поворота имеет вид  $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , след равен -1.

Покажем с помощью характера, что  $\Phi_3$  — неприводимое представление:

$$(\chi_{\Phi_3}, \chi_{\Phi_3}) = \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} \chi_{\Phi_3}(g) \overline{\chi_{\Phi_3}(g)} = \frac{1}{6} (1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

## 10 Кольца и поля

**Определение.** Кольцо — множество  $K$ , на котором введены две бинарные операции — сложение и умножение — удовлетворяющие следующим условиям:

1.  $(K, +)$  — абелева группа;
2.  $\forall a, b, c \in K : (b + c)a = ba + ca$  и  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность)

**Определение.** Кольцо называется коммутативным (ассоциативным), если в нём умножение коммутативно (ассоциативно).

**Определение.** Кольцо  $K$  называется кольцом с единицей, если

$$\exists 1 \in K : \forall a \in K a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Элемент 1 называется единицей.

**Определение.** Элемент кольца  $K$  с единицей называется обратимым, если

$$\exists b \in K : ab = ba = 1$$

Элемент  $b$  называется обратным к  $a$  и обозначается  $a^{-1}$ .

**Определение.** Поле — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $1 \neq 0$ , в котором любой ненулевой элемент обратим.

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x]$  — ассоциативное, коммутативное, с единицей;  
 $M_n(\mathbb{R})$  — некоммутативное, ассоциативное, с единицей;  
 $(V^3, +, \times)$  — некоммутативное, неассоциативное, без единицы ( $\times$  — векторное произведение);  
 $2\mathbb{Z}$  — ассоциативное, коммутативное, без единицы;
2.  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$  — поле;  
 $\mathbb{Z}_n$  — поле  $\iff n$  — простое;  
 $\mathbb{R}(x)$  (рациональные дроби над  $\mathbb{R}$ ) — поле.

**Определение.** Если  $a, b \in K$  такие, что  $a, b \neq 0$  и  $ab = 0$ , то  $a, b$  называются делителями нуля ( $a$  — левый делитель нуля,  $b$  — правый делитель нуля)

**Примеры.** Делители нуля в кольцах:

- $\mathbb{Z}_6 : 2, 3, 4$  — все делители нуля;

- $M_2(\mathbb{R})$ : например,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Утверждение.** Если  $a$  — обратимый элемент ассоциативного кольца  $K$  с единицей, то обратный элемент к  $a$  единственный.

*Доказательство.* Пусть  $b$  и  $c$  — обратные к  $a$ . Тогда:

$$b = b \cdot 1 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c = c$$

□

*Замечание.* В дальнейшем все рассматриваемые кольца — ассоциативные (свойства неассоциативных колец не такие общие и не рассматриваются в данном курсе).

**Утверждение.** Если элемент  $a$  кольца  $K$  обратим, то  $a$  — не делитель нуля.

*Доказательство.* От противного: пусть  $a$  обратим и  $a$  — делитель нуля. Тогда:

$$\exists b \neq 0 : ab = 0 \implies a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 \implies b = 0 — \text{противоречие.}$$

□

**Следствие.** В поле нет делителей нуля.

**Определение.** Подмножество  $L$  кольца  $K$  называется подкольцом, если

1.  $(L, +)$  — подгруппа аддитивной группы кольца  $(K, +)$ ;
2.  $\forall a, b \in L : ab \in L$ .

**Утверждение.** Любое подкольцо  $L$  кольца  $K$  является кольцом относительно операций кольца  $K$ .

**Пример.**  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

**Определение.** Подмножество  $L$  поля  $K$  называется подполем, если

1.  $(L, +, \cdot)$  — подкольцо кольца  $(K, +, \cdot)$ ;
2.  $1 \in L$ ;
3.  $\forall a \in L : a^{-1} \in L$ .

**Утверждение.** Любое подполе  $L$  поля  $K$  является полем относительно операций поля  $K$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}$  — подкольцо  $\mathbb{Q}$ , но не подполе  $\mathbb{Q}$ ;
2.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## 10.1 Идеалы колец и факторкольца

**Определение.** Подмножество  $L$  кольца  $K$  называется левым (правым) идеалом, если:

1.  $(L, +)$  — подгруппа  $(K, +)$ ;
2.  $\forall a \in K, x \in L : ax \in L$  ( $xa \in L$ )

*Замечание.* Левый идеал замкнут относительно умножения на элементы кольца слева, правый — относительно умножения справа.

**Определение.** Подмножество  $L$  кольца  $K$  называется (двусторонним) идеалом, если:

1.  $(L, +)$  — подгруппа  $(K, +)$ ;
2.  $\forall a \in K, x \in L : ax, xa \in L$

**Утверждение.** (Левый, правый, двусторонний) идеал кольца  $K$  — подкольцо кольца  $K$ .

*Доказательство.* Очевидно из определения. □

*Замечание.* Идеалы в кольцах можно считать аналогом нормальных подгрупп в группах.

**Пример.** Пусть  $K = \mathbb{Z}$ . Тогда любое подкольцо  $K$  имеет вид  $H = m\mathbb{Z}$  — любое такое подкольцо является идеалом в  $\mathbb{Z}$

**Определение.** В любом кольце  $K$  есть идеалы  $\{0\}, K$  — они называются тривиальными идеалами.

**Утверждение.** В поле нет нетривиальных идеалов.

*Доказательство.* Пусть  $F$  — поле. Пусть  $I \subset F$  — идеал, причём  $I \neq 0$ . Тогда  $\exists x \in I : x \neq 0$ . Так как  $F$  — поле,  $\exists x^{-1} \in F$ , а отсюда  $1 = x^{-1}x \in I$  (т.к.  $x \in I$ ). Тогда для любого  $a \in F$ :  $a = a \cdot 1 \in I$  (т.к.  $1 \in F$ )  $\implies I = F$ . □

Пусть  $K$  — кольцо,  $I$  — идеал  $K$ . Рассмотрим множество

$$K/I = \{a + I \mid a \in K\}$$

и введём на нём операции:

1. Сложение:  $(a + I) + (b + I) = a + b + I$ ;

2. Умножение:  $(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$ .

**Утверждение.** *Даные операции корректны (не зависят от представителей классов).*

*Доказательство.*

1. Сложение корректно из корректности сложения смежных классов в группах, так как  $(I, +)$  — подгруппа  $(K, +)$ , нормальная из абелевости;

2. Пусть  $a + I = \tilde{a} + I$ ,  $b + I = \tilde{b} + I$ . Докажем, что  $ab + I = \tilde{a}\tilde{b} + I$ :  
 $\tilde{a} = a + y_a$ ,  $\tilde{b} = b + y_b$ , где  $y_a, y_b \in I$ . Тогда:

$$\forall x \in \tilde{a}\tilde{b} + I : x = \tilde{a}\tilde{b} + y, y \in I$$

$$x = \tilde{a}\tilde{b} + y = (a + y_a)(b + y_b) + y = ab + \underbrace{y_a b + a y_b + y_a y_b}_{\in I} + y = ab + I$$

□

**Утверждение.** *Множество  $K/I$  с введёнными операциями — кольцо, причём если  $K$  ассоциативно (коммутативно), то  $K/I$  ассоциативно (коммутативно).*

*Доказательство.* Проверим определение кольца:

- $(K/I, +)$  — группа по сложению (как факторгруппа  $K/I$ );
- $(a + I) + (b + I) = a + b + I = b + a + I = (b + I) + (a + I)$  — коммутативность сложения;
- $(a + I)((b + I) + (c + I)) = (a + I)(b + c + I) = a(b + c) + I = ab + ac + I = (ab + I) + (ac + I) = (a + I)(b + I) + (a + I)(c + I)$ ;
- $((b + I) + (c + I))(a + I) = (b + c + I)(a + I) = (b + c)a + I = ba + ca + I = (ba + I) + (ca + I) = (b + I)(a + I) + (c + I)(a + I)$ ;

При этом:

- $K$  ассоциативно  $\implies (a + I)((b + I)(c + I)) = (a + I)(bc + I) = (a(bc) + I) = ((ab)c + I) = (ab + I)(c + I) = ((a + I)(b + I))(c + I) \implies K/I$  ассоциативно;
- $K$  коммутативно  $\implies (a + I)(b + I) = ab + I = ba + I = (b + I)(a + I) \implies K/I$  коммутативно.

□

**Определение.** Кольцо  $K/I$  с введёнными операциями называется факторкольцом  $K$  по идеалу  $I$ .

## 10.2 Гомоморфизмы колец

**Определение.** Пусть  $K, \tilde{K}$  — кольца. Отображение  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  называется гомоморфизмом колец, если:

1.  $\forall a, b \in K : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b);$
2.  $\forall a, b \in K : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b);$

**Определение.** Изоморфизм колец — биективный гомоморфизм колец.

**Определение.** Кольца  $K, \tilde{K}$  называются изоморфными, если существует изоморфизм  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$ . Обозначается  $K \simeq \tilde{K}$ .

**Определение.** Пусть  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  — гомоморфизм.

Множество  $\text{Ker } \varphi = \{a \in K \mid \varphi(a) = 0\}$  называется ядром  $\varphi$ .

Множество  $\text{Im } \varphi = \{b \in \tilde{K} \mid \exists a \in K : \varphi(a) = b\}$  называется образом  $\varphi$ .

**Утверждение.** Пусть  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  — гомоморфизм. Тогда:

1.  $\text{Ker } \varphi$  — идеал  $K$ ;
2.  $\text{Im } \varphi$  — подкольцо  $\tilde{K}$ .

*Доказательство.*

1. Проверим определение идеала:

- $\text{Ker } \varphi$  — подгруппа  $(K, +)$ , так как  $\varphi$  — гомоморфизм  $(K, +) \rightarrow (\tilde{K}, +)$ ;
- $\forall a \in \text{Ker } \varphi, b \in K : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0; \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = 0$ .  
Значит,  $ab, ba \in \text{Ker } \varphi$ .

Отсюда  $\text{Ker } \varphi$  — идеал кольца  $K$ .

2. Проверим определение подкольца:

- $\text{Im } \varphi$  — подгруппа  $(\tilde{K}, +)$ , так как  $\varphi$  — гомоморфизм  $(K, +) \rightarrow (\tilde{K}, +)$ ;
- $\forall a, b \in \text{Im } \varphi : \exists x_a, x_b \in K : \varphi(x_a) = a, \varphi(x_b) = b$ . Тогда  $\varphi(x_a x_b) = ab$ , то есть  $ab \in \text{Im } \varphi$ .

Отсюда  $\text{Im } \varphi$  — подкольцо  $\tilde{K}$ .

□

**Утверждение.** Пусть  $K$  — кольцо,  $I$  — идеал  $K$ . Тогда  $\exists$  гомоморфизм колец  $\varphi : K \rightarrow K/I$  такой, что  $\text{Ker } \varphi = I$ ,  $\text{Im } \varphi = K/I$ .

*Доказательство.* Подойдёт гомоморфизм  $\pi : a \mapsto a + I$ .

**Определение.** Приведённый выше гомоморфизм  $\pi : K \rightarrow K/I$  называется каноническим (естественным, натуральным) гомоморфизмом колец  $K$  и  $K/I$ .

**Теорема.** (*О гомоморфизме колец*)

Пусть  $K, \tilde{K}$  — кольца,  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  — гомоморфизм колец.

Тогда  $K/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

*Доказательство.*  $\text{Ker } \varphi$  — идеал кольца  $K$ , то есть факторкольцо  $K/\text{Ker } \varphi$  определено. Рассмотрим отображение

$$\psi : K/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi \quad a + \text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(a)$$

В доказательстве теоремы о гомоморфизме групп было доказано, что это отображение корректно, биективно и сохраняет сложение. Проверим сохранение умножения:

$$\begin{aligned} \psi((a + \text{Ker } \varphi)(b + \text{Ker } \varphi)) &= \psi(ab + \text{Ker } \varphi) = \varphi(ab) = \\ &= \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a + \text{Ker } \varphi)\psi(b + \text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

Значит,  $\psi$  — изоморфизм колец.

### 10.3 Главный идеал

Пусть  $K$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей,  $S \subset K$  — произвольное подмножество. Рассмотрим множество

$$(S) = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i s_i \mid a_i \in K, s_i \in S \right\}$$

**Утверждение.**

1.  $(S)$  — двусторонний идеал;

2.  $(S)$  — наименьший двусторонний идеал, содержащий  $S$ .

*Доказательство.*

1. Мы поверим, но проверим:

- $\forall x, y \in (S) : x + y = \sum_{i=0}^k x_i s_i + \sum_{i=0}^k y_i s_i = \sum_{i=0}^k (x_i + y_i) s_i \in (S);$
- $0 = \sum_{i=0}^k 0 \cdot s_i \in (S);$
- $\forall x \in (S) : -x = -\sum_{i=0}^k x_i s_i = \sum_{i=0}^k (-x_i) s_i \in (S);$
- $\forall x \in (S), a \in K : xa = ax = a \sum_{i=0}^k x_i s_i = \sum_{i=0}^k ax_i s_i \in (S).$

Значит,  $(S)$  — двусторонний идеал.

2. Пусть  $I$  — двусторонний идеал кольца  $K$  такой, что  $S \subset I$ . Тогда из определения идеала  $\forall a \in K, s \in S : as \in I$ , а так как идеал — подкольцо, любая сумма вида  $\sum_{i=0}^k a_i s_i$ , где  $a_i \in K, s_i \in S$ , лежит в  $I$ . Значит,  $(S) \subseteq I$ .

□

**Определение.** Если  $I = (S)$ , то говорят, что  $I$  порождается множеством  $S$ .

Если при этом  $|S| = 1$ , то  $I$  называется главным идеалом.

Иными словами,  $I$  — главный идеал кольца  $K$ , если  $\exists u \in K : \forall x \in I : x = ua$  для некоторого  $a \in K$ .

**Примеры.**

1.  $K = \mathbb{Z}$ :  $(m) = m\mathbb{Z}$ ;
2.  $K = F[x]$ :  $(x+1) = \{(x+1)f \mid f \in F[x]\}$ .

**Определение.** Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $1 \neq 0$ , в котором любой идеал является главным, называется кольцом главных идеалов.

**Пример.**  $\mathbb{Z}$  — кольцо главных идеалов.

**Определение.** Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $1 \neq 0$ , в котором нет делителей нуля, называется целостным кольцом.

**Примеры.**  $\mathbb{Z}, F[x]$  — целостные кольца.

*Замечание.* Все напоминания данной главы взяты из курса 1 семестра.

**Напоминание.** Если  $K$  — целостное кольцо, то в  $K$  определены понятия  $a \mid b$ ,  $\text{НОД}(a, b)$ .

НОД бывает не определён, но если он существует — определён однозначно с точностью до ассоциированности (умножения на обратимые элементы).

**Определение.** Целостное кольцо  $K$ , не являющееся полем, называется евклидовым кольцом, если  $\exists$  функция  $N : K \setminus 0 \rightarrow \mathbb{Z}_+$  (она называется нормой) такая, что:

$$1. \forall a, b \in K : N(ab) \geq N(a);$$

$$2. \forall a, b \in K, b \neq 0 \exists q, r \in K : a = bq + r, \text{ где } \begin{cases} r = 0 \\ N(r) < N(b) \end{cases}$$

**Примеры.**

$$1. K = \mathbb{Z}: N(a) = |a|;$$

$$2. K = F[x]: N(f) = \deg f;$$

$$3. K = \mathbb{Z}[i] — кольцо гауссовых чисел$$

$$N(a + bi) = a^2 + b^2.$$

**Упражнение.**  $\mathbb{Z}[x]$  — целостное, но не евклидово кольцо.

*Доказательство.* Покажем, что  $\mathbb{Z}[x]$  — целостное кольцо. Очевидно, что  $\mathbb{Z}[x]$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, то есть остаётся показать, что в нём нет делителей нуля: если  $P(x), Q(x) \neq 0$ , то, взяв произведение членов с максимальной степенью  $x$  в обоих многочленах, получим одночлен, степень которого больше, чем у всех других в произведении. Значит, коэффициент при нём останется ненулевым, то есть  $ab \neq 0$ .

Доказательство неевклидости  $\mathbb{Z}[x]$  проведём после следующей теоремы.  $\square$

**Напоминание.** Пусть  $K$  — евклидово кольцо. Тогда  $\exists \text{НОД}(a, b) = d$  и  $\exists u, v \in K : d = ua + vb$ .

**Теорема.** Всякий идеал евклидова кольца  $K$  является главным.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный идеал  $I$  кольца  $K$ .

Если  $I = \{0\}$ , то  $I = (0)$ . Иначе рассмотрим наименьший по норме элемент в  $I$  — обозначим его  $u$ . Докажем, что  $I = (u)$ :

Пусть  $a \in I$  — произвольный элемент. Разделим  $a$  на  $u$  с остатком:  $\exists q, r \in K : a = uq + r$ , причём если  $r \neq 0$ , то  $N(r) < N(u)$ . При этом  $r = a - uq \in I$ , а

значит,  $r = 0$  из предположения, что  $u$  — наименьший по норме элемент в  $I$ . Значит,  $\forall a \in I \exists q \in K : a = uq$ , а значит,  $I = (u)$ .  $\square$

**Следствие.** Любой евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

### Примеры.

1.  $F[x]$  — кольцо главных идеалов;

2.  $F[x, y]$  — не кольцо главных идеалов. Покажем это:

Рассмотрим идеал  $I = (x, y)$ . Предположим, что  $I = (f)$  — тогда  $\exists q_1, q_2 \in F[x, y] : x = fq_1, y = fq_2$ . Из равенства многочленов  $x = fq_1$  имеем, что либо  $f \sim 1$ , либо  $f \sim x$ . Рассмотрим эти случаи:

- $f \sim 1 \implies 1 = ax + by$  — очевидно невозможно (не можем получить ненулевую константу);
- $f \sim x \implies f = cx \implies y = cxq_2$  — невозможно.

Значит,  $I$  — не главный идеал.

3. Докажем, что  $\mathbb{Z}[x]$  — не кольцо главных идеалов. Рассмотрим  $I = (2, x)$ .

Предположим, что  $I = (f)$  — тогда  $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}[x] : 2 = fq_1, x = fq_2$ . Из первого равенства имеем, что либо  $f \sim 1$ , либо  $f \sim 2$ :

- $f \sim 1 \implies 1 = 2a + xb$  — невозможно, т.к. коэффициенты целые;
- $f \sim 2 \implies x = 2 \cdot q_2$  — невозможно по тем же соображениям.

Значит,  $\mathbb{Z}[x]$  — не кольцо главных идеалов, а отсюда и не евклидово кольцо.

**Определение.** Пусть  $K$  — целостное кольцо.

Элемент  $p \in K$  называется простым, если

1.  $p \neq 0$ ;

2.  $p$  — необратимый;

3. если  $p = ab$ , то либо  $a$ , либо  $b$  — обратимый элемент.

### Примеры.

1.  $K = \mathbb{Z}$ : простые элементы —  $\pm p$ , где  $p$  — простое число;

2.  $K = F[x]$ : простые элементы — неприводимые многочлены.

**Напоминание.** Любой элемент евклидова кольца раскладывается в произведение простых элементов этого кольца, причём это разложение единствено с точностью до домножения множителей на обратимые элементы и их порядка.

*Замечание.* Аналогичное утверждение верно для всех колец главных идеалов, однако в данном курсе оно рассматриваться не будет.

**Напоминание.**  $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$  — поле  $\iff n$  — простое.

Теперь можем доказать гораздо более общее утверждение:

**Теорема.** Пусть  $K$  — евклидово кольцо,  $u \in K$ . Тогда  $K/(u)$  — поле  $\iff u$  — простой элемент.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ : Пусть  $K/(u)$  — поле. Допустим, что  $u$  — не простой. Тогда возможны случаи:

1.  $u = 0 \Rightarrow K/(u) = K$  — не поле по определению евклидова кольца;
2.  $u$  обратим  $\Rightarrow 1 \in (u) \Rightarrow K/(u) = K/K = \{0\}$  — не поле;
3.  $u = ab$ , где  $a, b$  — необратимы. Тогда покажем, что  $a + (u) \neq (u)$ : иначе  $a \in (u) \Rightarrow a = ud = abd \Rightarrow a(bd - 1) = 0 \Rightarrow bd = 1 \Rightarrow b$  — обратим

Аналогично  $b + (u) \neq (u)$ . Тогда из  $u = ab$  следует, что  $(a + (u))(b + (u)) = (u)$ , то есть в поле  $K/(u)$  элементы  $a + (u)$  и  $b + (u)$  — делители нуля — противоречие.

Все случаи невозможны, а значит,  $u$  не может не быть простым.

$\Leftarrow$ : Пусть  $u$  — простой элемент.  $K/(u)$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей из соответствующих свойств  $K$ , причём единица в нём —  $1 + (u) \neq (u)$ , так как иначе  $1 \in (u) \Rightarrow 1 = ua$  — противоречие с необратимостью  $u$ . Пусть  $a$  — произвольный ненулевой элемент  $K/(u)$ . Тогда:

$$a + (u) \neq (u) \Rightarrow a \notin (u) \Rightarrow u \nmid a \stackrel{u\text{-простой}}{\Rightarrow} \text{НОД}(u, a) = 1 \Rightarrow \exists x, y \in K : xa + yu = 1 \text{ в } K \Rightarrow (x + (u))(a + (u)) = 1 + (u) \text{ в } K/(u)$$

Значит,  $x + (u)$  — обратный к  $a + (u)$ . Отсюда любой ненулевой элемент  $K/(u)$  обратим, а тогда  $K/(u)$  — поле.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $K = F[x]$  ( $F$  — поле),  $f \in F[x]$ . Тогда  $F[x]/(f)$  — поле  $\iff f$  — неприводимый многочлен.

**Пример.**  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$  — поле.

## 10.4 Расширения полей

**Утверждение.** Множество  $\{a + (f) \mid a \in F\}$  образует подкольцо в кольце  $F[x]/(f)$ , где  $F$  — поле.

В частности, если  $f$  неприводим, то это подкольцо — подполе поля  $F[x]/(f)$ . Более того, это подполе изоморфно полю  $F$  (изоморфизм  $a + (f) \mapsto a$ ).

*Доказательство.* Все пункты определения подкольца (под поля) очевидно следуют из аналогичных утверждений для поля  $F$ .  $\square$

*Замечание.* В дальнейшем такое подполе и поле  $F$  будут отождествляться.

**Определение.** Если  $L$  — подполе поля  $K$ , то  $K$  называется расширением  $L$ .

В таком случае  $K$  можно рассматривать как векторное пространство над  $L$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{C}$  — расширение  $\mathbb{R}$ ;
2. если  $f \in F[x]$  — неприводимый, то  $F(x)/(f)$  — расширение поля  $F$ .

### 10.4.1 Конечные расширения полей

**Определение.** Расширение  $K$  поля  $L$  называется конечным, если  $K$  — конечномерное векторное пространство над  $L$  (т.е.  $\dim_L K < \infty$ ).

В этом случае  $\dim_L K$  называется степенью расширения.

**Пример.**  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$  — базис  $\{1, i\}$ .

**Утверждение.**

Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[x]$  — неприводимый многочлен,  $\deg f = n$ . Тогда элементы  $1 + (f), x + (f), \dots, x^{n-1} + (f)$  — базис  $F[x]/(f)$  как векторного пространства над  $F$ , то есть  $F[x]/(f)$  — расширение поля  $F$  степени  $n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный многочлен  $g \in F[x]$  и разделим его на  $f$  с остатком:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \quad \begin{cases} r = 0 \\ \deg r < \deg f \end{cases}$$

Если  $r = 0$ , то  $g(x) \in (f) \implies g + (f) = 0$ .

Иначе (далее обозначим  $(f)$  как  $I$ ):

$$g(x) + I = r(x) + I = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + I =$$

$$= (c_0 + I)(1 + I) + (c_1 + I)(x + I) + \dots + (c_{n-1} + I)(x^{n-1} + I) = \\ (\text{отождествление}) = c_0(1 + I) + c_1(x + I) + \dots + c_{n-1}(x^{n-1} + I)$$

— отсюда система  $\{1 + (f), x + (f), \dots, x^{n-1} + (f)\}$  порождает  $F[x]/(f)$ . Покажем линейную независимость:

$$\lambda_0(1 + I) + \lambda_1(x + I) + \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} + I = I \implies \lambda_0 + \lambda_1x + \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} \in I$$

Тогда  $f \mid (\lambda_0 + \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1})$ , но  $\deg f > n - 1$ . Значит, такое возможно только в случае, когда все  $\lambda_i$  равны нулю, что и означает линейную независимость.  $\square$

Далее введём обозначения  $\alpha = x + I, \alpha^k = x^k + I$ . Тогда по утверждению  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$  — базис  $F[x]/I$ . Посмотрим на значение  $f(\alpha)$ :

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \implies f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n + I = \\ = a_0 + a_1(x + I) + \dots + a_n(x^n + I) + I = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + I = I$$

то есть в отождествлении  $f(\alpha) = 0$ , и  $\alpha$  — корень  $f$  в  $F[x]/(f)$ .

При этом в  $F$  у многочлена  $f$  не было корней, так как он неприводим над  $F$ .

**Определение.** Данный переход от поля  $F$  к расширению  $F[x]/(f)$  ( $f$  — неприводимый) называется присоединением к полю  $F$  корня  $\alpha$  многочлена  $f$ .

**Пример.** Пусть  $F = \mathbb{R}, f = x^2 + 1$  — неприводимый над  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}[x]/(f)$  — поле,  $\{1, \alpha\} = \{1 + (f), x + (f)\}$  — его базис как векторного пространства над  $\mathbb{R}$ . Тогда любой элемент этого пространства представим в виде

$$a + bx + (f) = a(1 + (f)) + b(x + (f)) = a + b\alpha$$

При этом  $f(\alpha) = 0 \implies \alpha^2 + 1 = 0 \implies \alpha^2 = -1$ . Значит, получили поле, в котором все элементы представляются в виде  $a + b\alpha$ , где  $\alpha^2 = -1$  — это в точности поле комплексных чисел. Значит,  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$ .

**Пример.** Построим поле, состоящее из 4 элементов:

Пусть  $F = \mathbb{Z}_2, f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  — неприводимый над  $\mathbb{Z}_2$ . Тогда  $L = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$  — поле, причём (вновь обозначим  $(f) = I, x + I = \alpha$ ):

$$\forall g(x) \in L : g(x) = q(x)(x^2 + x + 1) + (a + bx) \implies \{g(x) + I\} = \\ = \{a + bx + I \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} = \{0 + I, 1 + I, x + I, x + 1 + I\} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

Полученное поле  $L$  — векторное пространство над  $Z_2$  размерности  $\deg f = 2$  (базис  $\{1, \alpha\}$ )

Таблицу сложения просто построить, рассматривая  $L$  как пространство над  $Z_2$ :

$+$	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
0	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
1	1	0	$\alpha + 1$	$\alpha$
$\alpha$	$\alpha$	$\alpha + 1$	0	1
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha$	1	0

Умножение в  $L$  зависит от  $\alpha$ : знаем, что  $f(\alpha) = 0 \implies \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ , т.е.:

$$\alpha^2 = \alpha + 1; \quad \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = 1; \quad (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1 = \alpha$$

Отсюда таблица умножения для  $F$  имеет следующий вид:

$\times$	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
$\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha + 1$	1
$\alpha + 1$	0	$\alpha + 1$	1	$\alpha$

**Теорема.** (о башне расширений)

Пусть  $F$  — поле,  $L$  — конечное расширение  $F$ ,  $M$  — конечное расширение  $L$ .

Тогда  $M$  — конечное расширение  $F$ , причём  $\dim_F M = \dim_L M \cdot \dim_F L$ .

*Доказательство.* Из конечности расширений можем выбрать:

$\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $L$  как векторного пространства над  $F$  ( $\dim_F L = n$ );

$\{g_1, \dots, g_m\}$  — базис  $M$  как векторного пространства над  $L$  ( $\dim_L M = m$ ).

Докажем, что  $\mathcal{E} = \{e_i g_j \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$  — базис  $M$  как векторного пространства над  $F$ :

1. Докажем, что  $\mathcal{E}$  — порождающая система  $M$  как пространства над  $F$ :

$$\begin{aligned} \forall x \in M : x = \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j, \quad \lambda_j \in L; \quad \forall j : \lambda_j = \sum_{i=1}^n \mu_{ij} e_i, \quad \mu_{ij} \in F \implies \\ \implies x = \sum_j \left( \sum_i \mu_{ij} e_i \right) g_j = \sum_{i,j} \mu_{ij} e_i g_j \end{aligned}$$

2. Докажем линейную независимость:

$$\sum_{i,j} \mu_{ij} e_i g_j = 0 \implies \sum_j (\sum_i \mu_{ij} e_i) g_j = 0 \stackrel{1}{\implies} \forall j : \sum_i \mu_{ij} e_i = 0 \stackrel{2}{\implies} \forall i, j : \mu_{ij} = 0$$

(1, 2 – т.к.  $\{g_j\}$  является базисом  $M$  над  $L$ , а  $\{e_i\}$  – базисом  $L$  над  $F$ )

Значит,  $M$  – конечное расширение размерности  $mn$ , что и требовалось.  $\square$

### 10.4.2 Алгебраические расширения полей

**Определение.** Пусть  $L$  – расширение поля  $F$ .

Элемент  $a \in L$  называется алгебраическим над  $F$ , если  $\exists h \in F[x], h \neq 0$  такой, что  $h(a) = 0$ . В противном случае  $a$  называется трансцендентным над  $F$ .

**Примеры.**

1.  $L = \mathbb{C}, F = \mathbb{Q}$  – привычные алгебраические и трансцендентные числа:

- $i, \sqrt{2}$  – алгебраические ( $i$  – корень  $x^2 + 1$ ,  $\sqrt{2}$  – корень  $x^2 - 2$ )
- $e, \pi$  – трансцендентные.

2. Если  $L$  – расширение  $F$ , то  $\forall a \in F$  – алгебраический над  $F$  (корень  $x - a$ )

**Определение.** Расширение  $L$  поля  $F$  называется алгебраическим, если любой элемент  $a \in L$  – алгебраический над  $F$ .

**Пример.**  $\mathbb{C}$  – алгебраическое расширение  $\mathbb{R}$ .

**Утверждение.** Конечное расширение  $L$  поля  $F$  является его алгебраическим расширением.

**Доказательство.** Пусть  $\dim_F L = n$ . Для произвольного  $a \in L$  рассмотрим элементы  $\{1, a, a^2, a^3, \dots, a^n\}$  поля  $L$  – всего их  $n+1$ , а отсюда по ОЛЛЗ они линейно зависимы над  $F$ , т.е.

$$\exists c_i \in F : c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot a + \dots + c_n a^n = 0 \implies a \text{ – корень } h(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \in F[x]$$

Отсюда любой  $a \in L$  – алгебраический над  $F$ , то есть  $L$  – алгебраическое расширение  $F$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $L$  – расширение поля  $F$ ,  $a \in L$  – произвольный алгебраический элемент. Минимальным многочленом элемента  $a$  называется многочлен  $\mu_a \in F[x]$  наименьшей степени такой, что  $\mu_a \neq 0, \mu_a(a) = 0$ .

**Свойства.** (минимального многочлена)

1.  $\mu_a$  – неприводимый над  $F$ ;

2. Для любого  $h \in F[x]$  такого, что  $h(a) = 0$ , верно  $\mu_a \mid h$ ;
3. Минимальный многочлен единственный с точностью до домножения на ненулевой элемент  $\mathbb{F}$  (обратимый элемент  $F[x]$ )

*Доказательство.*

1. Так как  $\mu_a$  имеет корень  $a$  и при этом не тождественно равен нулю,  $\mu_a$  — не константа, то есть не обратим в  $F[x]$ . Также:

$$\mu_a(x) = p(x)q(x) \implies 0 = \mu_a(a) = p(a)q(a)$$

$p(a)$  и  $q(a)$  — элементы поля  $L$ , а раз в поле нет делителей нуля,

$$p(a)q(a) = 0 \implies \begin{cases} p(a) = 0 \\ q(a) = 0 \end{cases}$$

Тогда хотя бы один из многочленов  $p(x)$  и  $q(x)$  является константой — иначе у одного из них есть корень  $a$  и степень меньше степени  $\mu_a$ , что противоречит определению минимального многочлена.

Значит,  $\mu_a$  неприводим в  $F[x]$ ;

2. Разделим  $h$  на  $\mu_a$  с остатком:

$$h = \mu_a(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \begin{cases} r = 0 \\ \deg r < \deg f \end{cases}$$

При этом

$$0 = h(a) = \mu_a(a) \cdot q(a) + r(a) = r(a)$$

а тогда по определению минимального многочлена  $r(x) = 0$ . Значит,  $\mu_a \mid h$ ;

3. Очевидно следует из пункта 2 — если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  минимальны для  $a$ , то

$$\mu_1(a) = 0 \implies \mu_2 \mid \mu_1; \quad \mu_2(a) = 0 \implies \mu_1 \mid \mu_2$$

а отсюда  $\mu_1 = c\mu_2$ , где  $c$  обратим в  $F[x]$ , то есть является элементом  $F$ .

□

**Определение.** Степень минимального многочлена  $\mu_a \in F[x]$  для алгебраического элемента  $a \in L$  называется степенью  $a$ .

**Пример.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}, a = \sqrt{2} : \mu_a(x) = x^2 - 2$ , степень  $\sqrt{2}$  равна 2.

**Определение.** Пусть  $S$  — подкольцо кольца  $T$ ,  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Кольцом, порождённым элементами  $a_1, \dots, a_n$  над  $S$ , называется наименьшее подкольцо кольца  $T$ , содержащее  $S$  и элементы  $a_1, \dots, a_n$ . Обозначается  $S[a_1, \dots, a_n]$ .

**Утверждение.**  $S[a_1, \dots, a_n] = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \in S[x_1, \dots, x_n]\}$

*Доказательство.* Очевидно, что  $S_0 = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \in S[x_1, \dots, x_n]\}$  — подкольцо кольца  $T$ , содержащее  $S$  и  $a_1, \dots, a_n$ . При этом любое подкольцо  $T$ , содержащее  $S$  и  $a_1, \dots, a_n$ , обязано содержать все элементы вида  $f(a_1, \dots, a_n)$  в силу замкнутости относительно сложения и умножения, а значит,  $S_0$  — наименьшее подкольцо  $T$  с такими свойствами.  $\square$

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$
2.  $F \subset L = F[x]/(f)$ ,  $\alpha = x + (f) : F[\alpha] = L$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L$  — расширение поля  $F$ . Тогда:

1.  $a \in L$  — алгебраический над  $F \iff F[a]$  — конечномерное векторное пространство над  $F$ ;
2. если  $a \in L$  — алгебраический над  $F$ , то  $F[a]$  — поле, изоморфное  $F[x]/(\mu_a)$  (в частности,  $\dim_F F[a] = \dim F[x]/(\mu_a) = \deg \mu_a$ ).

*Доказательство.*  $F[u] = \{g(u) \mid g \in F[x]\}$

1.  $\Leftarrow$ : Пусть  $F[a]$  —  $n$ -мерное векторное пространство над  $F$ . Тогда аналогично рассуждениям о алгебраичности конечного расширения с помощью рассмотрения системы векторов  $\{1, a, \dots, a^n\}$ , линейно зависимой над  $F$ , найдём ненулевой многочлен с корнем  $a$ ;  
 $\Rightarrow$ : Пусть  $a$  — алгебраический элемент поля  $F$ , то есть

$$\exists h(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \in F[x], h \neq 0, h(a) = c_0 + c_1a + \dots + c_na^n = 0$$

Отсюда  $a^n = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1a + \dots + \tilde{c}_{n-1}a^{n-1}$ , где  $\tilde{c}_i \in F$ .

Покажем, что  $F[a]$  порождается множеством  $\{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ :

Пусть  $x \in F[a] \implies x = \sum_{j=0}^m \lambda_j a^j$ . Индукция по  $m$ :

База:  $m < n$  — уже имеем разложение по нужным элементам;

Шаг: Заметим, что

$$a^m = a^{m-n}a^n = a^{m-n}(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1a + \dots + \tilde{c}_{n-1}a^{n-1}) = \tilde{c}_0a^{m-n} + \dots + \tilde{c}_{n-1}a^{m-1}$$

Значит, в разложении  $x = \sum_{j=0}^m \lambda_j a^j$  можно представить слагаемое  $\lambda_m a^m$  как сумму меньших степеней  $a$ , а тогда после приведения подобных применимо предположение индукции. Отсюда  $F[a]$  конечно порождается как векторное пространство над  $F$ , а значит, имеет конечный базис.

2. Рассмотрим гомоморфизм колец  $\varphi : F[x] \rightarrow L$ , заданный по правилу  $f(x) \mapsto f(a)$ . Тогда  $\text{Im } \varphi = F[a]$ ,  $\text{Ker } \varphi = (\mu_a)$ , и по теореме о гомоморфизме колец  $F[a] \simeq F[x]/(\mu_a)$ .

Притом  $\mu_a$  — неприводимый над  $F$ , то есть  $F[x]/(\mu_a)$  — поле, а отсюда и  $F[a]$  — поле.

□

**Пример.**  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$  — поле.

#### 10.4.3 Конечнопорождённые расширения полей

**Определение.** Пусть  $L$  — расширение поля  $F$ ,  $M = \{a_i \mid i \in I\} \subset L$ . Подполе, порождённым элементами из  $M$  над  $F$ , называется наименьшее подполе  $L$ , содержащее  $M$  и  $F$ . Обозначается  $F(M)$ .

**Утверждение.**

$$F(M) = \left\{ \frac{f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})}{g(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})} \mid m \in \mathbb{N}, i_k \in I, f, g \in F[x_1, \dots, x_m], g(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$$

*Доказательство.* Аналогично выражению подкольца, порождённого элементами кольца (обратимость элементов в поле даёт возможность делить). □

**Определение.** Поле  $L$  называется конечнопорождённым расширением поля  $F$ , если  $\exists a_1, \dots, a_m \in L : L = F(a_1, \dots, a_m)$ .

**Утверждение.** (*Эффект уничтожения иррациональных знаменателей*)  
Если  $a \in L$  — алгебраический элемент над  $F$ , то  $F[a] = F(a)$ .

*Доказательство.* Следует из п. 2 теоремы 1 ( $F[a]$  — поле). □

**Пример.**  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $L$  — конечное расширение поля  $F$ ;
2.  $L$  — конечнопорождённое алгебраическое расширение поля  $F$ ;

3.  $L$  порождается конечным числом элементов, алгебраических над  $F$ .

*Доказательство.*

1  $\implies$  2 : Алгебраичность любого конечного расширения уже доказывалась.

Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис векторного пространства  $L$  над  $F$ .

Тогда  $L = F[e_1, \dots, e_n] = F(e_1, \dots, e_n)$ , т.е.  $L$  — конечнопорождённое;

2  $\implies$  3 : Из конечнопорождённости  $L = F(a_1, \dots, a_n)$ . При этом  $a_1, \dots, a_n$  — алгебраические над  $F$  из алгебраичности расширения  $L$ , то есть  $L$  порождается конечным числом элементов, алгебраических над  $F$ ;

3  $\implies$  1 : Пусть  $L = F(a_1, \dots, a_n)$ , где  $a_i$  — алгебраические. Рассмотрим цепочку

$$F \subset F(a_1) \subset F(a_1, a_2) \subset \dots \subset F(a_1, \dots, a_n)$$

и обозначим  $L_k = F(a_1, \dots, a_k) = F(a_1, \dots, a_{k-1})(a_k) = L_{k-1}(a_k)$ .

Тогда  $L_{k+1}$  — конечное расширение  $L_k$ : так как  $a_{k+1} \in L_{k+1}$  является алгебраическим над  $F$ , он является алгебраическим и над  $L_k$ , а отсюда

$$L_{k+1} = L_k(a_{k+1}) = L_k[a_{k+1}] \text{ — конечномерное в.п. над } L_k \text{ по теореме 1}$$

Значит, все последовательные расширения в цепочке конечные, а тогда по теореме о башне расширений  $L$  — конечное расширение  $F$ .  $\square$

#### 10.4.4 Алгебраическое замыкание

**Теорема.** Пусть  $L$  — расширение поля  $F$ .

Обозначим  $\overline{F} = \{a \in L \mid a \text{ — алгебраический над } F\}$ . Тогда:

1.  $\overline{F}$  — подполе  $L$ ;
2. если  $b \in L$  — алгебраический над  $\overline{F}$ , то  $b$  — алгебраический над  $F$  (то есть  $b \in \overline{F}$ )

*Доказательство.*

1.  $\forall a, b \in \overline{F}$  рассмотрим  $F(a, b)$  — подполе, порождённое элементами  $a, b$ , алгебраическими над  $F$ . По теореме 2  $F(a, b)$  — алгебраическое расширение  $F$ , а отсюда  $F(a, b) \subset \overline{F}$ . Тогда  $\forall a, b \in \overline{F}$ :

- $a + b \in \overline{F}, 0 \in \overline{F}, -a \in \overline{F} \implies \overline{F}$  — аддитивная подгруппа;
- $ab \in \overline{F} \implies \overline{F}$  — подкольцо;
- $1 \in \overline{F}, a^{-1} \in \overline{F} (a \neq 0) \implies \overline{F}$  — подполе.

2. Пусть  $b \in L$  — алгебраический над  $\bar{F}$ , т.е.

$$\exists h \in \bar{F}[x] (h = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k, c_i \in \bar{F}) : h \neq 0, h(b) = 0$$

Рассмотрим в  $L$  подполе  $\tilde{F} = F(c_0, c_1, \dots, c_k)$ . Так как  $c_i \in \bar{F}$ ,  $c_i$  — алгебраические над  $F$ . Тогда  $\tilde{F}$  порождается над  $F$  конечным числом алгебраических элементов, а отсюда по теореме 2  $\tilde{F}$  — конечное расширение  $F$ .

При этом  $h \in \tilde{F}[x]$ , а значит,  $b$  является алгебраическим над  $\tilde{F}$ . Тогда по теореме 2  $\tilde{F}(b)$  — конечное расширение  $\tilde{F}$ , а отсюда по теореме о башне расширений  $\tilde{F}(b)$  — конечное расширение  $F$ . Так как любое конечное расширение является алгебраическим,  $\tilde{F}(b)$  — алгебраическое расширение  $F$ , а отсюда  $b$  является алгебраическим над  $F$ .

□

**Определение.**  $\bar{F}$  называется алгебраическим замыканием поля  $F$  в поле  $L$ .

**Замечание.**  $\bar{F}$  не обязано быть алгебраически замкнутым, так как поле  $L$  может быть не алгебраически замкнуто. Например, алгебраическое замыкание поля  $\mathbb{Q}$  в поле  $\mathbb{R}$  не алгебраически замкнуто, так как многочлен  $x^2 + 1$  не имеет корней в нём.

**Пример.** Пусть  $\bar{\mathbb{Q}}$  — алгебраическое замыкание  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{C}$ .

( $\bar{\mathbb{Q}}$  называется полем всех алгебраических чисел)

**Упражнение.**

1. Доказать, что  $\bar{\mathbb{Q}}$  алгебраически замкнуто;
2. Доказать, что любое конечное расширение  $\mathbb{Q}$  — подполе  $\bar{\mathbb{Q}}$ .

*Доказательство.*

1. Рассмотрим произвольный многочлен  $f \in \bar{\mathbb{Q}}[x]$  положительной степени. Это многочлен с комплексными коэффициентами, а так как  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто,  $f$  имеет корень  $a \in \mathbb{C}$ . Тогда  $a$  — алгебраический над  $\bar{\mathbb{Q}}$ , и по пункту 2 предыдущей теоремы  $a \in \bar{\mathbb{Q}}$ . Поэтому  $f$  имеет корень в  $\bar{\mathbb{Q}}$ , то есть  $\bar{\mathbb{Q}}$  алгебраически замкнуто;
2. Любое конечное расширение  $F$  поля  $\mathbb{Q}$  является алгебраическим расширением  $\mathbb{Q}$ . Рассмотрим произвольный  $b \in F$  — он является алгебраическим над  $\mathbb{Q}$ , а так как любой корень многочлена с рациональными коэффициентами является комплексным числом,  $b \in \mathbb{C}$ . Тогда по определению  $b \in \bar{\mathbb{Q}}$

( $b \in \mathbb{C}$  и  $b$  — алгебраический над  $\mathbb{Q}$ ), то есть  $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ . При этом все операции введены как операции над  $\mathbb{C}$ , то есть  $F$  — подполе  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

□

## 10.5 Поле разложения многочлена

**Определение.** Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[x]$  — произвольный многочлен. Расширение  $L$  поля  $F$  называется полем разложения многочлена  $f$ , если

1.  $f$  можно разложить на линейные множители над  $L$ ;
2.  $L$  порождается над  $F$  корнями многочлена  $f$ .

То есть  $L$  — наименьшее поле, содержащее  $F$  и все корни многочлена  $f$ .

**Примеры.**

1.  $f(x) = x - 5$ ,  $F = \mathbb{R} \implies L = \mathbb{R}$ ;
2.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $F = \mathbb{R} \implies L = R[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$ ;
3.  $f(x) = x^3 - 2$ ,  $F = \mathbb{Q}$ .

Поле  $L_1 = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  — не поле разложения  $f$ , т.к.

$$f(x) = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$$

где корни  $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}$  комплексные.

Поэтому поле разложения  $f$  должно иметь вид  $L = L_1[x]/(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$ .

**Лемма.** Пусть  $P, \tilde{P}$  — поля,  $h(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  — неприводимый многочлен из  $P[x]$ ,  $P(\alpha)$  — поле, полученное из  $P$  присоединением корня  $\alpha$  многочлена  $h$ . Тогда если  $\varphi : P \rightarrow \tilde{P}$  — гомоморфизм полей, то количество способов продолжить его до гомоморфизма  $\psi : P(\alpha) \rightarrow \tilde{P}$  совпадает с числом корней  $\tilde{h}$  в  $\tilde{P}$ , где  $\tilde{h}(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1x + \dots + \tilde{c}_nx^n$ ,  $\tilde{c}_i = \varphi(c_i)$ .

**Доказательство.**  $P(\alpha) = P[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_k\alpha^k \mid a_i \in P\}$ .

Если  $\exists \psi : P(\alpha) \rightarrow \tilde{P}$ , то

$$\psi(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_k\alpha^k) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1)\beta + \dots + \varphi(a_k)\beta^k, \text{ где } \beta = \psi(\alpha) \quad (1)$$

Применим это к  $h(\alpha) = 0$ :

$$0 = \psi(0) = \psi(h(\alpha)) = \psi(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_n\alpha^n) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\beta + \dots + \tilde{c}_n\beta^n$$

Поэтому для любого продолжения  $\psi$  элемент  $\beta = \psi(\alpha)$  — корень  $\tilde{h}(x)$ .

С другой стороны, если  $\beta$  — произвольный корень  $\tilde{h}(x)$ , то правило (1) задаёт корректный гомоморфизм  $\psi : P(\alpha) \rightarrow \tilde{P}$ , причём все такие гомоморфизмы различны (различны их значения на  $\alpha$ ). Значит, искомых гомоморфизмов столько же, сколько и корней у  $\tilde{h}(x)$  в  $\tilde{P}$ .  $\square$

**Теорема.** *Поле разложения любого  $f \in F[x]$  существует и единствено с точностью до изоморфизма, тождественного на  $F$ .*

*Доказательство.* Построим одно из полей разложения  $L$  многочлена  $f$  с помощью цепочки расширений

$$F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_s = L, \quad L_{i+1} = L_i(\alpha_{i+1}), \text{ где } \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ — корни } f$$

Разложим  $f$  на неприводимые множители и докажем существование нужной цепочки индукцией по  $S$  — сумме степеней нелинейных многочленов в разложении  $f$  над  $L_i$ :

База:  $S = 0 \implies$  все множители линейны —  $L_i = L$ , цепочка завершена;

Шаг: Пусть в разложении есть неприводимый множитель  $f_i$  степени  $\geq 2$  — тогда  $L_{i+1} = L_i[x]/(f_i) = L_i(\alpha_{i+1})$ , где  $\alpha_{i+1}$  — корень  $f_i$ . В  $L_{i+1}$  у многочлена  $f(x)$  сохранились все имевшиеся корни и добавился хотя бы один новый корень  $\alpha_{i+1}$  — значит, в  $L_{i+1}$  сумма степеней нелинейных многочленов в разложении  $f$  уменьшилась хотя бы на 1, то есть к  $L_{i+1}$  применимо предположение индукции. Осталось заметить, что по построению  $L$  порождается над  $F$  корнями  $f$ , не принадлежащими  $F$ , что то же самое, что и всеми корнями  $f$ . Значит,  $L$  — поле разложения  $f$ .

Теперь докажем единственность. Пусть  $\tilde{L}$  — произвольное поле разложения многочлена  $f$  (из опр.  $F \subseteq \tilde{L}$ ). Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$\varphi_i : L_i \rightarrow \tilde{L} \text{ таких, что } \varphi_0 = \text{id}, \quad \varphi_{i+1}|_{L_i} = \varphi_i$$

По лемме при присоединении корня неприводимого  $f_i$  хотя бы одно продолжение  $\varphi_{i+1}$  существует тогда и только тогда, когда  $\varphi_i(f_i)$  имеет корень в  $\tilde{L}$ .

Для многочленов знаем, что  $f_i | f$  над  $L_i \implies \varphi_i(f_i) | \varphi_i(f)$  над  $\tilde{L}$ , а  $\varphi_i(f) = f$ , так как все  $\varphi_i$  тождественны на  $F$ . При этом  $f$  раскладывается на линейные множители над  $\tilde{L}$  — значит, у  $\varphi_i(f_i)$  не может не быть корней над  $\tilde{L}$ , и расширение возможно.

Так построим  $\varphi_s : L \rightarrow \tilde{L}$  — гомоморфизм полей, тождественный на  $F$ .

Ядро  $\text{Ker } \varphi_s$  — идеал в поле  $L$ , то есть оно равно либо  $\{0\}$ , либо  $L$  — второе

невозможно, так как  $\varphi_s$  тождественный на  $F$ , а в  $F$  есть  $1 \neq 0$ .

Образ  $\text{Im } \varphi_s$  — подполе  $\tilde{L}$ , содержащее все корни многочлена  $f$ , а тогда из минимальности поля разложения совпадающее с  $\tilde{L}$ . Значит,  $\varphi_s$  — биективный гомоморфизм полей, т.е. изоморфизм полей, тождественный на  $F$ .  $\square$

## 10.6 Конечные поля

**Определение.** Наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $\overbrace{1 + \dots + 1}^n = 0$  в  $F$ , называется характеристикой поля  $F$ . Если таких натуральных  $n$  не существует, то характеристика поля  $F$  равна 0. Обозначается как  $\text{char } F$ .

**Примеры.**  $\text{char } \mathbb{R} = 0$ ,  $\text{char } \mathbb{Z}_3 = 3$ .

**Утверждение 1.** Если  $n = \text{char } F > 0$ , то  $n$  — простое.

*Доказательство.* Доказывалось в курсе первого семестра.  $\square$

**Утверждение 2.** Пусть  $F$  — поле. Тогда

1. если  $\text{char } F = p > 0$ , то  $\exists M$  — подполе  $F$ , изоморфное  $\mathbb{Z}_p$ ;
2. если  $\text{char } F = 0$ , то  $\exists M$  — подполе  $F$ , изоморфное  $\mathbb{Q}$ ;

*Доказательство.*

1.  $M = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots, \underbrace{1 + \dots + 1}_{p-1}\} \simeq \mathbb{Z}_p$  — подполе  $F$ ;
  2.  $K = \{0, 1, (-1), 1+1, (-1)+(-1), \dots\} \simeq \mathbb{Z}$  — подкольцо  $F$ .
- Значит, в  $F$  есть подполе  $M = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in K, b \neq 0\} \simeq \mathbb{Q}$ .

$\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $F$  — поле,  $\text{char } F = p > 0$ ,  $\varphi : F \rightarrow F$  — отображение, заданное по правилу  $\varphi : x \mapsto x^p$ . Тогда  $\varphi$  — инъективный гомоморфизм, причём если  $|F| < \infty$ , то  $\varphi$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Очевидно, что  $\varphi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \varphi(a)\varphi(b)$ .

$$\varphi(a+b) = (a+b)^p = \sum_{i=0}^p C_p^k a^k b^{p-k} = a^p + b^p = \varphi(a) + \varphi(b)$$

(так как  $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ , и при  $k \neq 0, p$  только числитель кратен  $p$ , т.е.  $p \mid C_p^k$ )

Также  $\varphi(a) = 0 \iff a^p = 0 \iff a = 0$  (в поле нет делителей нуля).

Отсюда  $\varphi$  — инъективный гомоморфизм.

При  $|F| < \infty$  он сюръективен, то есть является изоморфизмом.  $\square$

**Определение.**  $\varphi$  из утверждения 3 называется эндоморфизмом Фробениуса (автоморфизмом Фробениуса для конечного  $F$ ).

**Утверждение 4.**  $F$  — конечное поле  $\implies |F| = p^k$ , где  $p = \text{char } F$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* По утверждению 2 в поле  $F$  есть подполе  $M \simeq \mathbb{Z}_p$ .

Тогда  $F$  можно рассматривать как векторное пространство над  $M$ . Из конечности поля  $F$  конечна его размерность как векторного пространства над  $M$ . Пусть она равна  $k$  — тогда  $|F| = p^k$ .

(каждый элемент однозначно задаётся  $k$  координатами из  $\mathbb{Z}_p$ )  $\square$

**Лемма.** Пусть  $\varphi$  — автоморфизм поля  $F$ . Тогда множество  $S$  неподвижных точек  $\varphi$  — подполе в  $F$ .

*Доказательство.* Если  $a, b$  неподвижны относительно  $\varphi$ , то из определения изоморфизма очевидно, что и неподвижны и точки  $a + b$ ,  $-a$ ,  $ab$ ,  $a^{-1}$ . Также  $\varphi(0) = 0$  по свойству гомоморфизмов групп,  $\varphi(1) = 1$  по аналогичным рассуждениям для мультиликативной группы поля. Значит,  $S$  — подполе  $F$ .  $\square$

**Теорема.** Для любого простого  $p$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  существует единственное с точностью до изоморфизма поле  $F$  из  $p^n$  элементов.

*Доказательство.* Построим поле порядка  $p^n$ : рассмотрим поле  $F$  разложения многочлена  $f(x) = x^{p^n} - x$  над  $\mathbb{Z}_p$ . Его производная  $f' = p^n x^{p^n-1} - 1 = -1$ , то есть у  $f$  нет кратных корней. Значит, в  $F$  есть  $p^n$  различных корней  $f$ .

Рассмотрим подмножество  $S \subseteq F$  этих корней:

$$S = \{a \in F \mid a^{p^n} = a\} \quad (|S| = p^n)$$

— это множество неподвижных точек автоморфизма  $\varphi^n$ , где  $\varphi$  — автоморфизм Фробениуса. По лемме множество неподвижных точек автоморфизма поля является подполем, и при этом  $S$  содержит все корни  $f$  — из минимальности поля разложения  $S = F \implies |F| = p^n$ .

Единственность: пусть  $\tilde{F}$  — произвольное поле из  $p^n$  элементов. Тогда

$$|\tilde{F}^*| = p^n - 1 \implies \forall a \in \tilde{F}^* : a^{p^n-1} = 1 \implies \forall a \in \tilde{F} : a^{p^n} - a = 0$$

то есть  $\tilde{F}$  состоит из корней многочлена  $f(x) = x^{p^n} - x$ , которых ровно  $p^n$ . Значит,  $\tilde{F}$  — поле разложения  $f$  над  $\mathbb{Z}_p$ , то есть  $\tilde{F} \simeq F$ .  $\square$

**Определение.** Поле из  $p^n$  элементов обозначается  $\mathbb{F}_{p^n}$ .

**Следствие.** Для любого простого  $p$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  существует неприводимый многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$ .

*Доказательство.* Рассмотрим поле  $F$  из  $p^n$  элементов. В конце раздела 4.4 доказывалось, что мультиликативная группа конечного поля — циклическая  $\Rightarrow F^* = \langle \alpha \rangle$ . Тогда  $F$  порождается над  $\mathbb{Z}_p$  элементом  $\alpha$ , то есть  $F = \mathbb{Z}_p(\alpha) = \mathbb{Z}_p[x]/(\mu_\alpha)$ , где  $\deg \mu_\alpha = \dim_{\mathbb{Z}_p} F = n$ , и при этом  $\mu_\alpha$  неприводим по свойству минимального многочлена. Значит,  $\mu_\alpha$  — искомый многочлен.  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что в  $\mathbb{F}_{p^n}$  есть подполе, изоморфное  $\mathbb{F}_{p^m} \iff m \mid n$ .

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ : Если в  $F_1 \simeq \mathbb{F}_{p^n}$  есть подполе  $F_2 \simeq \mathbb{F}_{p^m}$ , то  $F_1$  можно рассматривать как векторное пространство над  $F_2$ . Тогда  $|F_1| = |F_2|^k$ , где  $k$  — размерность  $F_1$  как пространства над  $F_2$ , то есть  $p^n = p^{km} \Rightarrow m \mid n$ ;

$\Leftarrow$ : Заметим, что если  $n = km$ , то многочлен  $x^{p^n} - x$  делится на  $x^{p^m} - x$ :

$$p^n - 1 = (p^m)^k - 1^k = (p^m - 1)(p^{m(k-1)} + p^{m(k-2)} + \dots + p^m + 1) = (p^m - 1)Q \Rightarrow \\ \Rightarrow x^{p^n} - x = x(x^{p^{n-1}} - 1) = x(x^{(p^m-1)Q} - 1^Q) = x(x^{p^m-1} - 1)P(x) = (x^{p^m} - x)P(x)$$

Таким образом, все корни многочлена  $x^{p^m} - x$  являются корнями  $x^{p^n} - x$ , то есть в  $\mathbb{F}_{p^n}$  как в поле разложения  $x^{p^n} - x$  над  $\mathbb{Z}_p$  есть все  $p^m$  корней многочлена  $x^{p^m} - x$ , которые образуют поле, изоморфное  $\mathbb{F}_{p^m}$ , относительно тех же операций. Значит, в  $\mathbb{F}_{p^n}$  есть подполе, изоморфное  $\mathbb{F}_{p^m}$   $\square$

# 11 Материал для самостоятельного изучения

Материал для данной главы взят из [2], лекции 18-19.

## 11.1 Алгебры над полем

**Определение.** Алгеброй над полем  $F$  называется множество  $A$  с операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля  $K$ , обладающими следующими свойствами:

1.  $(A, +, \lambda \cdot)$  — векторное пространство над  $F$ ;
2.  $(A, +, \cdot)$  — кольцо;
3.  $\forall a, b \in A, \lambda \in F : \lambda(ab) = (\lambda a)b$ .

**Определение.** Для алгебры над полем определены следующие понятия:

- как для векторного пространства — размерность;
- как для кольца — ассоциативность, коммутативность, наличие единицы.

### Примеры.

1. Если  $L$  — расширение поля  $F$ , то  $L$  — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над  $F$ ;
2. Множество  $F(X, K)$  функций  $f : X \rightarrow K$ , где  $X$  — произвольное множество,  $K$  — поле, является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей над  $K$ ;
3.  $M_n(F)$  — некоммутативная ассоциативная алгебра с единицей над  $F$ .

**Определение.** Тело — ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный.

### Примеры.

1. Любое поле является телом (поле — коммутативное тело)
2.  $Q_8$  — тело, не являющееся полем (любой элемент имеет обратный, но умножение некоммутативно)

**Определение.** Алгебра, являющаяся телом относительно сложения и умножения, называется алгеброй с делением.

## Примеры.

- Любая алгебра, являющаяся полем, является алгеброй с делением (например, поле  $L$  как алгебра над подполем  $F$ );
- Любое тело  $D$  можно рассматривать как алгебру с делением над своим центром  $Z(D) = \{z \in D \mid \forall a \in D : za = az\}$ , который является коммутативным телом, то есть полем.

*Замечание.* Если  $D$  — алгебра с делением над полем  $F$ , то элементы вида  $\lambda \cdot 1$  образуют в ней подкольцо, содержащееся в  $Z(D)$  и изоморфное  $F$ .

## 11.2 Алгебра кватернионов

Рассмотрим ассоциативную алгебру  $\mathbb{H}$  над  $\mathbb{R}$ , порождаемую элементами  $i, j$  такими, что

$$i^2 = j^2 = -1; \quad ij = -ji$$

Тогда базисом  $\mathbb{H}$  как векторного пространства над  $\mathbb{R}$  будут элементы  $\{1, i, j, k\}$ , где  $k = ij$ . Тогда:

$$k^2 = (ij)^2 = iji j = i(-ij)j = -(-1)(-1) = -1;$$

$$ki = (ij)i = i(-ij) = -ik; \quad kj = (ij)j = (-ji)j = -jk$$

и любой элемент (кватернион)  $q \in \mathbb{H}$  можно записать в виде  $q = a + bi + cj + dk$ .

**Определение.** Пусть  $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$  — произвольный кватернион. Тогда кватернион  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$  называется сопряжённым кватернионом к  $q$ .

**Свойства.**  $\forall q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ :

- $\bar{\bar{q}} = q$ ;
- $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$ ;
- $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

*Доказательство.*

- Очевидно из определения;

2. В силу линейности  $\mathbb{H}$  как векторного пространства достаточно проверить данное равенство на базисных элементах. Равенства с участием единицы очевидны ( $\bar{1} = 1$ ) — рассмотрим остальные:

$$ij = \bar{k} = -k = ji = (-j)(-i) = \bar{j} \cdot \bar{i}$$

$$\bar{jk} = \bar{i} = -i = kj = (-k)(-j) = \bar{k} \cdot \bar{j}$$

$$\bar{ki} = \bar{j} = -j = ik = (-i)(-k) = \bar{i} \cdot \bar{k}$$

3.

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 - (bi + cj + dk)^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bcij - bcji - bdik - bdkj - cdjk - cdkj = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

Равенство  $q\bar{q} = \bar{q}q$  получается из данного подстановкой  $\bar{q}$  вместо  $q$ .

□

**Определение.** Число  $q\bar{q} \in \mathbb{R}$  называется нормой  $q \in \mathbb{H}$  и обозначается  $N(q)$ .

**Утверждение.**  $\mathbb{H}$  — алгебра с делением.

*Доказательство.* Уже знаем, что  $\mathbb{H}$  — ассоциативная алгебра с единицей.

Докажем, что любой ненулевой элемент  $H$  обратим: если  $q \neq 0$ , то  $N(q) \neq 0$ , а тогда  $q^{-1} = \frac{1}{N(q)} \cdot \bar{q}$ , так как  $q\bar{q} = \bar{q}q = N(q)$ . Значит,  $\mathbb{H}$  — алгебра с делением. □

**Теорема. (Фробениуса)**

*Над полем  $\mathbb{R}$  с точностью до изоморфизма существует только три конечномерные ассоциативные алгебры с делением:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ .*

*Доказательство.* Без доказательства. □

## Список литературы

- [1] “Спецкурс по теории групп”, Клячко А.А., 2022, <https://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/lect21.pdf>
- [2] “Лекции по высшей алгебре, 2 курс, 1 поток”, Бунина Е.И., 2016, <https://halgebra.math.msu.su/wiki/doku.php/staff:bunina>