



Механико-математический факультет

АЛГЕБРА, 3 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Авторы: Соколов Егор

Группа: 208

Контакт: [Мой телеграм для связи](#)

Москва

Последняя компиляция: 27 сентября 2025 г.

Содержание

1	Группы	2
1.1	Основные понятия	2
1.2	Циклические группы	9
1.3	Смежные классы	11
1.4	Факторгруппа	16
1.5	Гомоморфизмы групп	17
2	Свободные группы	20
2.1	Задание группы порождающими и определяющими соотношениями	23
3	Прямое произведение групп	27
3.1	Внешнее прямое произведение	27
3.2	Внутреннее прямое произведение	28
3.3	Связь между внутренним и внешним прямым произведением	31

1 Группы

1.1 Основные понятия

Определение. Пусть G - множество. Бинарной операцией на G называется отображение $*$: $G \times G \rightarrow G$.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. $\exists e \in G : \forall a \in G \quad a * e = e * a = a$;
3. $\forall a \in G \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Различные формы записи группы:

1. Мультипликативная форма (терминология):
Операция - " \cdot " (умножение);
Нейтральный элемент - единичный (1);
Элемент из аксиомы 3 - обратный (a^{-1} для $a \in G$);
2. Аддитивная форма (терминология):
Операция - " $+$ " (сложение);
Нейтральный элемент - нулевой (0);
Элемент из аксиомы 3 - противоположный ($-a$ для $a \in G$);

Определение. Если G - группа и $\forall a, b \in G \quad a \cdot b = b \cdot a$, то G - абелева (коммутативная) группа.

Замечание. Обычно для обозначения абелевых групп будем использовать аддитивную форму записи, для иных - мультипликативную.

Утверждение (Простейшие свойства групп).

1. Единичный элемент единственный;
2. $\forall a \in G$ обратный к a элемент единственный;
3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;
4. Если $a, b \in G$, то решение уравнения $ax = b$ ($xa = b$) единственно.

Доказательство.

1. (От противного) Допустим, что $\exists e_1, e_2 \in A$ - единичные. Тогда $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ по определению единичного элемента.

2. Допустим $\exists b_1, b_2$ - обратные к a элементы: $b_1 \neq b_2$

В силу ассоциативности:

$$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$

$$b_1 * e = e * b_2$$

$$b_1 = b_2$$

3. $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e;$

$$b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = e \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

4. $ax = b \iff a^{-1}ax = a^{-1}b \iff x = a^{-1}b;$

$$xa = b \iff xaa^{-1} = ba^{-1} \iff x = ba^{-1};$$

□

Определение. Мощность множества G называется порядком группы G .

Обозначается $|G|$.

Если $|G| < \infty$, то группа называется конечной, иначе бесконечной.

Примеры.

1. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_n, +);$

2. $GL_n(F)$ - группа невырожденных матриц порядка n с коэффициентами из поля F ;

3. Пусть Ω - множество. Преобразованиями Ω назовём биекции $f : \Omega \rightarrow \Omega$.

$S(\Omega)$ - множество всех преобразований Ω - образует группу относительно композиции.

Если $\Omega = \{1, \dots, n\}$, то $S(n) = S_n$ - группа подстановок.

4. Если $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ - конечная группа, то её можно задать с помощью таблицы умножения (таблицы Кэли).

Например, для $Z_2 = \{0, 1\}$:

	0	1
0	0	1
1	1	0

5. Группа кватернионов: $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Таблица Кэли для кватернионов:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	i	-1

Определение. Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой группы G , если:

1. $\forall a, b \in H \quad ab \in H$;
2. $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$;
3. $1 \in H$ (можно заменить на $H \neq \emptyset$)

Обозначается $H \leq G$.

Утверждение. Подгруппа H группы G является группой относительно бинарной операции группы G .

Примеры.

1. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ ($\mathbb{N} \not\leq \mathbb{Z}$, т.к. не группа);
2. $GL_n(F) \geq SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$ - унимодулярная группа.
3. $GL_n(F) \geq O_n(F) \geq SO_n(F)$ ($O_n(F)$ - ортогональная группа, $SO_n(F)$ - специальная ортогональная группа);
4. $GL_n(F) \geq$ группа строго треугольных матриц.

Определение. Любая подгруппа группы $S(\Omega)$ называется группой преобразований множества Ω .

Примеры.

1. $GL(V) (\leq S(V))$ - группа всех невырожденных линейных операторов векторного пространства V ;
2. $Aff(\mathbb{A})$ - группа всех невырожденных аффинных преобразований аффинного пространства \mathbb{A} ;

3. \mathcal{E}^2 - аффинно-евклидово двумерное пространство.

$\text{Isom } \mathcal{E}^2$ - группа изометрий (движений) на \mathcal{E}^2 .

$\text{Isom } \mathcal{E}^2 \geq O_2 \geq SO_2$, где O_2 - группа движений, сохраняющих точку O , SO_2 - группа поворотов вокруг точки O .

4. $T \subseteq \mathcal{E}^2$ - некоторая фигура.

$\text{Sym } T = \{f \in \text{Isom } \mathcal{E}^2 \mid f(T) = T\}$ - группа симметрий фигуры T .

- Если T - окружность с центром в точке O , то $\text{Sym } T = O_2$;
- Если T - правильный n -угольник с центром в точке O , то $\text{Sym } T = D_n$ - группа Диэдра.
 $|D_n| = 2n$ - n поворотов и n симметрий.

Определение. Пусть $(G_1, *, e_1), (G_2, \circ, e_2)$ - группы. Отображение $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ - изоморфизм, если

1. φ - биекция;
2. $\forall a, b \in G_1 \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

Если между G_1 и G_2 существует изоморфизм, то G_1 и G_2 называются изоморфными. Обозначается $G_1 \simeq G_2$.

Пример. $D_3 \simeq S_3$.

Доказательство. D_3 - группа движений, переводящая равносторонний треугольник в себя. Если пронумеровать вершины изначального треугольника, то каждый элемент группы D_3 будет соответствовать подстановке, переводящей старый порядок вершин в новый. Определение изоморфизма проверяется очевидно. \square

Утверждение. *Изоморфность групп - отношение эквивалентности на множестве групп.*

Утверждение (Свойства изоморфизмов).

1. $\varphi(e_1) = e_2$;
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$;
3. $G_1 \simeq G_2 \implies |G_1| = |G_2|$.

Замечание. Обратное утверждение неверно (например, $S_3 \not\simeq \mathbb{Z}_6$).

Пример. $SO_2 \simeq (U, \cdot)$, где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Определение. Пусть (G, \cdot, e) - группа, $k \in \mathbb{Z}, g \in G$.

Мультипликативный термин - элемент g в степени k :

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_k, k > 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

Определение. Пусть $(G, +, e)$ - группа, $k \in \mathbb{Z}, g \in G$.

Аддитивный термин - кратное элемента g :

$$kg = \begin{cases} \underbrace{g + g + \dots + g}_k, k > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

Утверждение (Свойства $(k, m \in \mathbb{Z}, g \in G)$).

1. $g^k \cdot g^m = g^{k+m}$;
2. $(g^k)^m = g^{km}$;
3. $(g^k)^{-1} = g^{-k}$.

Утверждение. Множество всех элементов g^k , где $k \in \mathbb{Z}, g \in G$, образует подгруппу в G . Обозначается $\langle g \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$.

Определение. $\langle g \rangle$ - циклическая подгруппа, порождённая элементом g .

Примеры.

1. $G = \mathbb{Z} : \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ - чётные целые числа;
2. $G = \mathbb{Z}_6 : \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$;
3. $G = \mathbb{C} : \langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$

Пусть (G, \cdot, e) - группа, $g \in G$. Если $\forall k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m \implies g^k \neq g^m$, то $\langle g \rangle$ - бесконечная (элемент g имеет бесконечный порядок).

Если $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m, g^k = g^m \implies g^{k-m} = e \implies$ существует наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $g^n = e$ (элемент g имеет порядок n)

Определение. Порядком элемента $g \in G$ называется наименьшее натуральное число n такое, что $g^n = e$, если такое существует. Иначе говорят, что элемент g имеет бесконечный порядок. Обозначается $\text{ord } g$.

Примеры.

$$1. G = \mathbb{Z} : \text{ord } 2 = \infty;$$

$$2. G = \mathbb{Z}_{12} : \text{ord } 2 = 6;$$

$$3. G = \mathbb{C}^* : \text{ord } 2 = \infty$$

(\mathbb{C}^* - мультипликативная группа поля, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ относительно умножения).

Утверждение 1 (Свойства элементов конечного порядка).

$$1. g^m = e \iff \text{ord } g \mid m;$$

$$2. g^m = g^l \iff k \equiv l \pmod{\text{ord } g}$$

Доказательство.

1. Разделим m на $n = \text{ord } g$ с остатком: $m = nq + r$, где $0 \leq r < n$. Тогда:

$$e = g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r \implies r = 0$$

так как $r < n$, где n - минимальное натуральное число такое, что $g^n = e$.

2. Следует из 1.

□

Следствие. $\text{ord } g = |\langle g \rangle|$

Доказательство. Если $\text{ord } g = \infty : \forall k \neq l \ g^k \neq g^l \implies$ подгруппа $\langle g \rangle = \{e, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, \dots\}$ бесконечна.

Если $\text{ord } g = n : \langle g \rangle = \{e, g^1, \dots, g^{n-1}\}$ - все эти элементы различны из пункта 2 утверждения, а других нет по определению порядка. □

Примеры.

1. $i \in \mathbb{C}^*$ - $\text{ord } i = 4$;

2. $\sigma \in S_n$:

Если $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ - цикл длины k , то $\text{ord } \sigma = k$.

Так как любая подстановка раскладывается в произведение независимых циклов и независимые циклы коммутируют, если $\sigma = \tau_1 \dots \tau_n$, где τ_i - независимые циклы, то верно: $\text{ord } \sigma = \text{НОК } \{|\tau_1|, \dots, |\tau_n|\}$.

Например, $\sigma = (23)(145) \implies \text{ord } \sigma = 6$.

Утверждение 2. Пусть $n = \text{ord } g$. Тогда $\text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$.

Доказательство. Пусть $\text{ord } g^k = m$. Из утверждения 1: $g^{mk} = e \iff n | mk$, откуда $\frac{n}{\text{НОД}(n,k)} | m$, т.е. $m \geq \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$. Очевидно, что при $m = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ $n | mk$. \square

Определение. Множество $S \subseteq G$ называется порождающим множеством для группы G , если $\forall g \in G \exists s_1, \dots, s_k \in S : g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ (s_i не обязательно различны).

При этом говорят, что G порождается множеством S .

Если \exists конечное множество S такое, что S порождает G , то G называется конечно порождённой, и бесконечно порождённой иначе.

Обозначается $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} | \varepsilon_i = \pm 1\}$ - группа, порождённая S .

Примеры.

1. $S_n = \langle \text{все транспозиции} \rangle$;

2. $GL_n(F) = \langle \text{все элементарные матрицы} \rangle$

3. $Q_8 = \langle i, j \rangle$;

4. $D_n = \langle \alpha, s \rangle$, где α - поворот на $\frac{2\pi}{n}$, а s - любая из симметрий.

5. Группа Клейна: $H = \{\text{id}, a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)\} \leq S_4$

Это группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом: a, c - симметрии относительно средних линий, b - поворот на π вокруг центра.

Таблица Кэли для группы Клейна:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Отсюда $\{e, a, b, c\} = \langle a, b \rangle$.

6. \mathbb{Q} - бесконечно порождённая.

1.2 Циклические группы

Определение. Группа G называется циклической, если G порождается одним элементом, т.е. $\exists g \in G : \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$. Элемент g также называется образующим элементом группы G .

Примеры.

1. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$;

2. U_n - множество всех комплексных корней степени n из 1.

U_n - группа относительно умножения, причём $U_n = \langle \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \rangle$.

Утверждение 3. Если $G = \langle g \rangle$, то $|G| = \text{ord } g$.

Доказательство. Очевидно из определения порождающего множества. □

Замечание. Далее циклическую группу порядка n обозначаем $\langle g \rangle_n$

Утверждение 4. Пусть $G = \langle g \rangle_n$. Тогда $G = \langle g^k \rangle \iff \text{НОД}(k, n) = 1$.

Доказательство. Из утверждения 3 $|G| = \text{ord } g$. Тогда:

$$G = \langle g^k \rangle \iff \text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)} = n \iff \text{НОД}(n, k) = 1$$

□

Теорема 1 (Классификация циклических групп).

1. Если циклическая группа G бесконечна, то $G \simeq \mathbb{Z}$;

2. Если циклическая группа G конечна и имеет порядок n , то $G \simeq \mathbb{Z}_n$.

Доказательство.

1. Пусть $\text{ord } g = \infty, \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$

Рассмотрим отображение $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ такого вида: $\varphi : g^k \mapsto k$. Очевидно, что φ - сюръекция (в $k \in \mathbb{Z}$ перешёл $g^k \in G$).

$\varphi(g^k) = \varphi(g^m) \implies k = m \implies g^k = g^m$ - отсюда φ - инъекция.

Проверим сохранение операции:

$$\varphi(g^k \cdot g^m) = \varphi(g^{k+m}) = k + m = \varphi(g^k) + \varphi(g^m)$$

Отсюда φ - изоморфизм.

2. Пусть $\text{ord } g = n$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ такого вида: $\varphi : k \mapsto g^k$. Очевидно, что φ - сюръекция (в $g^k \in G$ перешёл $k \in \mathbb{Z}_n$).
 $k \equiv m \pmod{n} \iff g^k = g^m$ - отсюда φ - инъекция.
 Сохранение операции - аналогично пункту 1.
 Отсюда φ - изоморфизм.

□

Следствие. Если G_1, G_2 - циклические группы, то $G_1 \simeq G_2 \iff |G_1| = |G_2|$.

Доказательство.

\implies : верно всегда;

\impliedby : из теоремы: если G_1 бесконечна, то $G_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq G_2$, иначе $G_1 \simeq \mathbb{Z}_n \simeq G_2$, где $n = |G_1| = |G_2|$. □

Теорема 2.

1. Любая подгруппа циклической группы является циклической.
2. Подгруппы циклической группы G порядка n находятся во взаимно однозначном соответствии с делителями n , т.е.

$$\forall H \leq G \ |H| \mid n \text{ и } \forall d \mid n \ \exists! H \leq G : |H| = d$$

3. Подгруппы группы \mathbb{Z} исчерпываются группами $k\mathbb{Z} = \langle k \rangle$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство.

1. Пусть $G = \langle g \rangle, H \leq G$. Если $H = \{e\}$, то $H = \langle e \rangle$.
 При $H \neq \{e\} : \forall h \in H \ \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$. Так как $g^k \in H \implies g^{-k} \in H$ и в H есть элемент, отличный от e , \exists наименьшее $k \in \mathbb{N} : g^k \in H$.
 Докажем, что $H = \langle g^k \rangle$. Рассмотрим произвольный $g^m \in H$. Разделим m на k с остатком: $m = kq + r, 0 \leq r < k$. Тогда:

$$g^m = (g^k)^q \cdot g^r \implies g^r = (g^k)^{-q} \cdot g^m \implies r = 0, \text{ т.к. } k - \text{наименьшее} \in \mathbb{N}$$

2. $G = \langle g \rangle_n, H \leq G \implies_{(1)} H = \langle g^k \rangle$.

Так как $g^n = e \in H$, то в силу рассуждений пункта 1 при $m = n$ получаем $k \mid n \implies n = kq$.

Отсюда $H = \{e, g^k, g^{2k}, \dots, g^{(q-1)k}\} \implies |H| = q$, где $q \mid n$.

Обратно, $\forall d \mid n \ \exists! H = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$ (в силу описания выше других подгрупп такого порядка нет).

3. Из пункта 1 в аддитивной форме получаем, что $H \leq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \implies H = \langle k \cdot 1 \rangle$

□

Следствие. В циклической группе простого порядка существуют ровно две подгруппы - тривиальная и сама группа.

Примеры.

$$1. H \leq \mathbb{Z}_5 \implies H = \{0\}, H = \mathbb{Z}_5;$$

$$2. H \leq \mathbb{Z}_6 \implies H = \{0\}, H = \langle 2 \rangle, H = \langle 3 \rangle, H = \mathbb{Z}_6.$$

1.3 Смежные классы

Определение. Пусть (G, \cdot, e) - произвольная группа, $H \leq G, g \in G$.

Рассмотрим множества:

$gH = \{gh | h \in H\}$ - левый смежный класс G по H с представителем g

$Hg = \{hg | h \in H\}$ - правый смежный класс G по H с представителем g

Утверждение (Свойства смежных классов).

$$1. \forall a \in G \ a \in aH;$$

2. если $a \in bH$, то $bH = aH$; в частности, любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

$$3. aH = bH \iff b^{-1}a \in H;$$

(Верны аналогичные утверждения для правых смежных классов)

Доказательство.

1. Очевидно;

$$2. a \in bH \implies \exists h \in H : a = bh \implies \forall \tilde{h} \in H \ a\tilde{h} = b\tilde{h} \in bH \implies aH \subseteq bH. \\ \text{Аналогично } bH \subseteq aH \implies aH = bH.$$

$$3. \implies: aH = bH \implies a \in bH (a \in aH) \implies \exists h \in H : a = bh \implies b^{-1}a = h \in H \\ \iff: b^{-1}a = h \in H \implies a = bh \implies aH = bH \text{ по пункту 2.}$$

□

Утверждение. Отношение $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ является отношением эквивалентности, причём классы эквивалентности совпадают с левыми смежными классами (аналогично $ab^{-1} \in H$ для правых).

Доказательство.

- Рефлексивность: $a^{-1}a = e \in H \Rightarrow a \equiv a \pmod{H}$;
- Симметричность: $a \equiv b \pmod{H} \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv a \pmod{H}$;
- Транзитивность: $a \equiv b, b \equiv c \pmod{H} \Rightarrow c^{-1}b, b^{-1}a \in H \Rightarrow c^{-1}b \cdot b^{-1}a = c^{-1}a \in H \Rightarrow a \equiv c \pmod{H}$.

Совпадение классов эквивалентности с левыми смежными классами следует из пункта 3 предыдущего утверждения. \square

Утверждение. Если G - абелева, то $\forall a \in G : aH = Ha$.

(В общем случае данное утверждение неверно).

Доказательство. $\forall a \in G : \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} \Rightarrow aH = Ha$. \square

Примеры.

1. $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$ ($H = \{id, (12)\}$), $g = (13)$.
 $(13)(12) = (123)$; $(12)(13) = (132)$.
Тогда $\{(13), (123)\} = gH \neq Hg = \{(13), (132)\}$.
2. $H = 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Смежные классы - $3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}$.
3. $H = \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$. Смежные классы - $a + bi + \mathbb{R} = bi + \mathbb{R}$.

Утверждение. Множество $\{aH : a \in G\}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\{Ha : a \in G\}$.

Доказательство. $gH \leftrightarrow Hg^{-1} : x = gh \in gH \leftrightarrow x^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}$. \square

Следствие. $|\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$

Определение. Мощность множества левых смежных классов группы G по подгруппе H называется индексом H в G . Обозначение: $|G : H|$

Пример. $|\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}| = 3$, т.к. смежные классы - $\{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$.

Теорема. (Теорема Лагранжа)

Пусть G - конечная группа, $H \leq G$. Тогда $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Доказательство. Так как $|G| < \infty$, то $|H| < \infty$, т.е. $H = \{h_1, \dots, h_k\}$.

$\forall g \in G, gH = \{gh_1, \dots, gh_k\}$, причем $gh_i = gh_j \Rightarrow h_i = h_j \Rightarrow |gH| = |H|$.

Отсюда, если $|G : H| = n$:

$$G = \bigsqcup_{i=1}^n a_i H \implies |G| = \sum_{i=1}^n |a_i H| = |G : H| \cdot |H|$$

□

Следствие 1. Если G - конечная группа, $H \leq G$, то $|H| \mid |G|$.

(Обратное утверждение неверно).

Упражнение. Пусть $G = A_4$ (группа чётных перестановок).

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. Докажем, что в A_4 нет подгруппы порядка 6.

Предположим, что $H \leq A_4$ и $|H| = 6$. A_4 состоит из элемента id , 3 элементов вида $(ab)(cd)$ и восьми элементов вида (abc) . Значит, H содержит хотя бы один элемент вида (abc) (с точностью до перенумерования - (123)). Тогда H содержит и $(123)^{-1} = (132)$. Также знаем, что группа чётного порядка содержит элемент порядка 2 (иначе в группе все элементы, кроме e , разбиваются на пары обратных, и элементов нечётное число), поэтому H содержит $\sigma = (**)(**)$.

Рассмотрим $\omega = \sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ (это равенство легко проверить, подставив в него $\sigma(1), \dots, \sigma(4)$). Очевидно, что это цикл длины 3, не оставляющий на месте 4 (т.к. σ не оставляет на месте 4). Значит, ω и ω^{-1} принадлежат H и не совпадают с предыдущими элементами (и друг с другом), т.е.

$$H = \{id, (123), (132), \sigma, \omega, \omega^{-1}\}$$

Осталось перебрать возможные значения σ :

- $\sigma = (12)(34) \implies (123)(12)(34)(132) = (14)(23) \notin H$;
- $\sigma = (13)(24) \implies (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \notin H$;
- $\sigma = (14)(23) \implies (123)(14)(23)(132) = (13)(24) \notin H$;

Отсюда таких H не существует.

Следствие 2. Если G - конечная группа, то $\forall g \in G : \text{ord } g \mid |G|$

Доказательство. $\text{ord } g = |\langle g \rangle| \mid |G|$.

□

Следствие 3. Если G - конечная группа порядка n , то $\forall g \in G : g^n = e$ в G .

Доказательство. По следствию 2: $n = \text{ord } g \cdot k \Rightarrow g^n = g^{(\text{ord } g) \cdot k} = e^k = e$.

□

Пример. Пусть $G = \mathbb{Z}_p^*$, p - простое, $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$. По следствию 3:
 $\forall a \in \mathbb{Z}_p^* : a^{p-1} = 1$ в \mathbb{Z}_p^* , отсюда $\forall a \in \mathbb{Z}, p \nmid a : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ - малая теорема Ферма.

Следствие 4. Любая группа G простого порядка p является циклической.

Доказательство. $\forall a \in G, a \neq e : \text{ord } a \neq 1, \text{ord } a \mid |G| = p \Rightarrow \text{ord } a = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$. \square

Упражнение. Доказать, что с точностью до изоморфизма существует ровно две группы порядка 4 - \mathbb{Z}_4 и V_4 .

Доказательство. Пусть G - группа порядка 4. Заметим, что по следствию 2 порядок неединичного элемента в G может быть равен либо 2, либо 4. Если в G есть элемент порядка 4, то G циклическая, а тогда по теореме о классификации циклических групп $G \simeq \mathbb{Z}_4$.

Пусть $G = \{e, a, b, c\}, \text{ord } a = \text{ord } b = \text{ord } c = 2$. Посмотрим, чему может быть равно ab :

- $ab = e \Rightarrow aab = a \Rightarrow b = a$ - противоречие;
- $ab = a \Rightarrow aab = aa \Rightarrow b = e$ - противоречие;
- $ab = b \Rightarrow abb = bb \Rightarrow a = e$ - противоречие.

Отсюда $ab = c$ - аналогично произведение любых двух различных неединичных элементов равно третьему. Отсюда таблица Кэли для G имеет вид

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

откуда видно, что $G \simeq V_4$. \square

Упражнение. Доказать, что если в группе G все неединичные элементы имеют порядок 2, то G - абелева.

Доказательство. $\text{ord } a = 2 \Rightarrow a = a^{-1} \Rightarrow \forall a, b \in G : ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$. \square

Пример. $H = \langle (12) \rangle \leq S_3, g = (13) \Rightarrow gH \neq Hg$

Определение. Подгруппа H группы G называется нормальной, если

$$\begin{aligned} \forall g \in G : gH = Hg &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} = H \iff \\ &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H \iff \forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H \end{aligned}$$

Обозначение: $H \trianglelefteq G$.

Эквивалентность определений:

- $1 \iff 2$ - очевидно;
- $2 \iff 3$:
 \Leftarrow : $gHg^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$ - из условия на всевозможные g получаем равенство;
 \Rightarrow - очевидно;
- $3 \iff 4$ - из определения смежного класса.

□

Примеры.

1. $A_n \trianglelefteq S_n$, так как $\forall \sigma \in S_n, \forall \tau \in A_n : \sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$.
2. $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$, так как $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall B \in SL_n(\mathbb{R}) : \det(ABA^{-1}) = \det B = 1 \Rightarrow ABA^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$.

Утверждение. В абелевой группе любая подгруппа является нормальной.

Упражнение. Докажите, что если $|G : H| = 2$, то $H \trianglelefteq G$ для произвольной группы G и произвольной подгруппы $H \leq G$.

Доказательство. Если $|G : H| = 2$, то G разбивается на два непересекающихся левых (правых) смежных класса по H . Очевидно, что один из этих классов в обоих случаях - сама подгруппа H . Тогда $\forall g \in G \setminus H$ группа G разбивается на левые смежные классы H и gH , а также на правые смежные классы H и Hg , откуда $gH = Hg$. Также очевидно, что $\forall h \in H : hH = H = Hh$. Значит, $\forall g \in G : gH = Hg \implies H \trianglelefteq G$. □

1.4 Факторгруппа

Утверждение. Пусть G - группа, $H \trianglelefteq G$. Тогда множество всех смежных классов G по H : $G/H = \{eH, aH, \dots\}$ образует группу относительно операции $aH \cdot bH = abH$.

Доказательство.

1. Проверим корректность операции, т.е. $\begin{cases} aH = \tilde{a}H \\ bH = \tilde{b}H \end{cases} \implies abH = \tilde{a}\tilde{b}H$.

Действительно, если $\begin{cases} a = \tilde{a}h_a \\ b = \tilde{b}h_b \end{cases}$ из равенства смежных классов, то:

$$\forall x \in abH \implies \exists h \in H : x = abh = \tilde{a}h_a\tilde{b}h_bh = \tilde{a}\tilde{b}h'h_bh \in \tilde{a}\tilde{b}H$$

$$(H \trianglelefteq G \implies Hb = bH \implies \exists h' \in H : h_a\tilde{b} = \tilde{b}h')$$

2. Проверим, что это группа:

- Ассоциативность:

$$aH(bH \cdot cH) = aH(bcH) = a(bc)H = (ab)cH = (abH)cH = (aH \cdot bH)cH$$

- Нейтральный элемент:

$$eH = H : aH \cdot eH = aeH = aH = eaH = eH \cdot aH$$

- Обратный элемент:

$$\forall aH \exists a^{-1}H : aH \cdot a^{-1}H = eH = a^{-1}H \cdot aH$$

□

Определение. Группа G/H называется факторгруппой G по H .

Замечание. Если $H \not\trianglelefteq G$, то операция $aH \cdot bH = abH$ некорректна:

$$\langle (12) \rangle \leq S_3 : (13)H = (132)H, (23)H = (123)H;$$

$$(13)(23)H = (132)H \neq H = (123)(123)H$$

Примеры.

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$;
2. $S_n \trianglelefteq A_n, S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$ (по чётности);
3. $\mathbb{R} \trianglelefteq \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ ($bi + \mathbb{R} \mapsto b$).

1.5 Гомоморфизмы групп

Определение. Пусть $(G, \cdot, e), (\tilde{G}, \cdot, \tilde{e})$ - группы. Отображение $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ называется гомоморфизмом групп G и \tilde{G} , если $\forall a, b \in G \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Замечание. В частности, изоморфизм - биективный гомоморфизм.

Утверждение (Свойства гомоморфизмов).

1. $\varphi(e) = \tilde{e}$;
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Определение. Множество $\text{Im } \varphi = \{b \in \tilde{G} \mid \exists a \in G : \varphi(a) = b\}$ - образ гомоморфизма. Множество $\text{Ker } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = \tilde{e}\}$ - ядро гомоморфизма.

Утверждение 1.

1. $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$;
2. $\text{Ker } \varphi \leq G$.

Доказательство.

1. $\text{Im } \varphi \subseteq \tilde{G}$

- $x, y \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists a, b \in G : x = \varphi(a), y = \varphi(b) \Rightarrow xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \text{Im } \varphi$;
- $\tilde{e} = \varphi(e) \in \text{Im } \varphi$;
- $\forall x \in \text{Im } \varphi \exists a \in G : \varphi(a) = x \Rightarrow x^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \text{Im } \varphi$

Отсюда $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$.

2. $\text{Ker } \varphi \subseteq G$

- $\forall a, b \in \text{Ker } \varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow ab \in \text{Ker } \varphi$;
- $\tilde{e} = \varphi e \Rightarrow e \in \text{Ker } \varphi$;
- $\forall a \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = \tilde{e}^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker } \varphi$

Отсюда $\text{Ker } \varphi \leq G$.

$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow ghg^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$.

□

Утверждение 2. $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$.

В частности, φ инъективно $\iff \text{Ker } \varphi = \{e\}$.

Доказательство.

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \tilde{e} \iff \varphi(ab^{-1}) = \tilde{e} \iff$$

$$ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$$

□

Пример. $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* : \varphi(A) = \det A$.

$$\text{Ker } \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^* \implies \mathbb{R}^* \simeq GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}).$$

Теорема (О гомоморфизме). Пусть G, \tilde{G} - группы, $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ - гомоморфизм. Тогда $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

Доказательство. Для начала заметим, что $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$, поэтому факторгруппа $G/\text{Ker } \varphi$ определена.

Рассмотрим $\psi : g\text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(g)$:

- Корректность:

$$\text{По утверждению 2: } g_1\text{Ker } \varphi = g_2\text{Ker } \varphi \implies \varphi(g_1) = \varphi(g_2);$$

- Биективность:

$$\text{Сюръективность: } \forall b \in \tilde{G} \exists a \in G : \varphi(a) = b \implies \psi(a\text{Ker } \varphi) = b;$$

$$\text{Инъективность: по утверждению 2: } \psi(a\text{Ker } \varphi) = \psi(b\text{Ker } \varphi) \implies \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \implies a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi;$$

- Сохранение операции:

$$\begin{aligned} \psi((g_1\text{Ker } \varphi)(g_2\text{Ker } \varphi)) &= \psi(g_1g_2\text{Ker } \varphi) = \varphi(g_1g_2) = \\ &= \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1\text{Ker } \varphi)\psi(g_2\text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

Отсюда $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ - изоморфизм.

□

Пример. Пусть $G = S_n, \tilde{G} = \mathbb{R}^*, \varphi(\sigma) = \text{sgn } \sigma$.

Тогда из теоремы о гомоморфизме:

$$\text{Im } \varphi = \{\pm 1\}, \text{Ker } \varphi = A_n \implies S_n/A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Следствие 1. Гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ - изоморфизм $\iff \begin{cases} \text{Ker } \varphi = \{e\} \\ \text{Im } \varphi = \tilde{G} \end{cases}$

Доказательство.

\implies - очевидно из биективности;

\impliedby - изоморфизм из теоремы совпадёт с φ . □

Следствие 2. Если $|G| < \infty$, то $|G| = |\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi|$.

Доказательство. $|G| = |G/\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi| = |\text{Im } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi|$. □

Утверждение. Пусть G - группа, $H \trianglelefteq G$. Тогда \exists такая группа \tilde{G} , что \exists сюръективный гомоморфизм $\pi : G \rightarrow \tilde{G}$, причём $\text{Ker } \pi = H$.

Доказательство. Подходят $\tilde{G} = G/H, \pi : g \mapsto gH$. □

Определение. Приведённый выше гомоморфизм $\pi : G \mapsto G/H$ называется естественным (натуральным) гомоморфизмом из G в G/H .

Определение. Эпиморфизм - сюръективный гомоморфизм.

Утверждение. Пусть $\varphi : G \rightarrow \tilde{\tilde{G}}$ - произвольный эпиморфизм с ядром H .

Тогда \exists изоморфизм $\psi : G/H \rightarrow \tilde{\tilde{G}}$ такой, что $\varphi = \psi \circ \pi$, где π - натуральный гомоморфизм из G в G/H .

Доказательство. По теореме о гомоморфизме $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

Так как φ - сюръекция, $\text{Im } \varphi = \tilde{\tilde{G}}$, также по условию $\text{Ker } \varphi = H$. Тогда $\psi : G/H \rightarrow \tilde{\tilde{G}}$ - изоморфизм, заданный в доказательстве теоремы о гомоморфизме: $\psi : gH \mapsto \varphi(g)$.

Взяв этот изоморфизм, получим $\varphi = \psi \circ \pi$ (так как $g \xrightarrow{\pi} gH \xrightarrow{\psi} \varphi(g)$). □

2 Свободные группы

Определение. Тривиальные (групповые) соотношения - соотношения, которые выводятся из аксиом группы (и, соответственно, есть в любой группе).

Построим группу, в которой нет других соотношений.

Определение. Пусть A - множество символов (букв), A^{-1} - множество символов (букв) a^{-1} , где $a \in A$.

Условия на эти множества:

$$1. \forall a^{-1} \in A^{-1} \implies a^{-1} \notin A;$$

$$\forall a \in A \implies a \notin A^{-1};$$

$$2. (a^{-1})^{-1} = a;$$

Буквы a, a^{-1} назовём взаимно обратными.

Множество $A^{\pm 1} = A \sqcup A^{-1}$ называется алфавитом.

Слово в алфавите $A^{\pm 1}$ - конечная последовательность букв $X = x_1 \dots x_k$, где $x_i \in A^{\pm 1}$.

Длина слова X (обозначается $|X|$) - количество букв в X .

Пример. $A = \{a, b\} : X = abaab^{-1} \Rightarrow |X| = 5$.

Определение. Слово $X = x_1 \dots x_k$ - сократимое, если $\exists i \in \overline{1, \dots, k-1} : x_i = x_{i+1}^{-1}$.

Сокращением взаимно обратных букв назовём вычёркивание пары x_i, x_{i+1} из X (получим слово длины $|X| - 2$).

За конечное число сокращений получим слово \tilde{X} , не являющееся сократимым - такое \tilde{X} называется результатом полного сокращения слова X .

Определение. Рассмотрим множество $F(A)$ всех несократимых слов в $A^{\pm 1}$.

Введём бинарную операцию на $F(A)$: пусть $X = x_1 \dots x_k, Y = y_1 \dots y_m$.

Если $x_k \neq y_1^{-1}$, то XY - конкатенация (приписывание) X и Y :

$$XY = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m, |XY| = k + m.$$

Если $x_k = y_1^{-1}$, то XY - результат полного сокращения слова $x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m$.

Пример. $(abcd a^{-1} b)(b^{-1} a d^{-1} a a b) = abcaab$.

Определение. Если $|X| = 0$, то X называется пустым словом (обозначим λ).

Пустое слово по определению несократимо и лежит в $F(A)$.

Теорема. $F(A)$ с приведённой выше бинарной операцией - группа.

Доказательство.

1. Ассоциативность:

Пусть $X = x_1 \dots x_k, Z = z_1 \dots z_m$.

Случай $|Y| = 0 \implies Y = \lambda$ очевиден ($XZ = XZ$);

Индукция по длине слова Y :

База индукции: $|Y| = 1 \implies Y = a \in A^{\pm 1}$. Индукция по $|X| + |Z|$:

База внутренней индукции:

$|X| + |Z| = 0$ - очевидно ($a = a$);

$|X| + |Z| = 1$ - очевидно (одно из слов X, Z пустое);

Шаг внутренней индукции ($k + m - 2 \rightarrow k + m$) - рассмотрим случаи:

- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(YZ) = x_1 \dots x_k a z_1 \dots z_m = (XY)Z$;
- $a^{-1} = x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(aZ) = X(az_1 \dots z_m) =$
 $=$ результат полного сокращения $x_1 \dots x_{k-1} a^{-1} a z_1 \dots z_m =$
 $=$ результат полного сокращения $x_1 \dots x_{k-1} z_1 \dots z_m = (Xa)Z$;
- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} = z_1$ - аналогично предыдущему;
- $a^{-1} = x_k, a^{-1} = z_1$: пусть $X = X'a^{-1}, Z = a^{-1}Z'$. Тогда:
 $X(aZ) = X(a(a^{-1}Z')) = XZ' = (X'a^{-1})Z'$
 $(Xa)Z = (X'a^{-1}a)Z = X'Z = X'(a^{-1}Z')$
 При этом $|X'| + |Y'| = k + m - 2$, то есть $X'(a^{-1}Z') = (X'a^{-1})Z'$ по предположению внутренней индукции.

Во всех случаях $X(aZ) = (Xa)Z \implies$ база доказана.

Шаг индукции: Пусть $Y = y_1 \dots y_l$. Тогда:

$$\begin{aligned} X(YZ) &= X(y_1 \dots y_l \cdot Z) = X((y_1 \dots y_{l-1} \cdot y_l)Z) \stackrel{1}{=} X((y_1 \dots y_{l-1}) \cdot (y_l Z)) \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} ((X \cdot y_1 \dots y_{l-1})y_l)Z \stackrel{3}{=} (X \cdot y_1 \dots y_l)Z = (XY)Z \end{aligned}$$

1, 3 - из утверждения базы индукции; 2 - по предположению индукции.

2. λ - нейтральный элемент;

3. обратный элемент к $x_1 \dots x_k$ - элемент $x_k^{-1} \dots x_1^{-1}$.

□

Определение. Построенная группа $F(A)$ называется свободной группой с базисом A . (A также называется свободной порождающей системой группы).

Любая группа, изоморфная $F(A)$, также называется свободной.

Утверждение. Пусть $H \leq SL_2(\mathbb{Z}) : H = \langle \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Тогда $H \simeq F(A)$ с базисом $A = \{a, b\}$.

Доказательство. Без доказательства. □

Утверждение. Все базисы свободной группы равномощны.

Доказательство. Без доказательства. □

Определение. Ранг свободной группы - мощность её базиса.

Замечание. Заметим, что в $F(A)$ результат умножения определён однозначно \implies однозначно определён элемент $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, где $x_i \in A^{\pm 1}$.

Тогда если считать слово $x_1 \dots x_k$ результатом умножения $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, то можно опускать знак умножения, и в этом смысле работать и с сократимыми словами.

Пример. $abb^{-1}ba^{-1}a = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a = ab \in F(A)$.

Теорема 1 (Универсальное свойство свободной группы).

Пусть G - группа, $\{g_i \mid i \in I\} \subset G$ - произвольное множество её элементов.

Рассмотрим свободную группу $F(A)$ с базисом $A = \{a_i \mid i \in I\}$.

Тогда отображение $\varphi : a_i \mapsto g_i$ продолжается до гомоморфизма $\varphi : F(A) \rightarrow G$, причём единственным образом.

Доказательство. Пусть $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ - несократимое слово из $F(A)$, где $\varepsilon_i = \pm 1, a_{i_j} \in A$. Зададим $\varphi : F(A) \rightarrow G$ по правилу $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$.

Проверим, что φ - гомоморфизм ($W, \tilde{W} \in F(A), W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \tilde{W} = a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}$):

$$\begin{aligned} \varphi(W\tilde{W}) &= \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m} = \\ &= (g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}) \cdot (g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(W)\varphi(\tilde{W}) \end{aligned}$$

Единственность такого гомоморфизма очевидна:

$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varphi(a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots \varphi(a_{i_k})^{\varepsilon_k} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$ - определено однозначно. □

Пример. (несвободной группы)

$S_3 = \langle (12), (123) \rangle : \forall g \in S_3 \ g^6 = id$. Попытаемся продолжить до гомоморфизма $S_3 \rightarrow Q_8$ отображение $\varphi : (12) \mapsto i, (123) \mapsto j$:

$-1 = i^2 = \varphi((12))^2 = \varphi((12)^2) = \varphi(id) = 1$ - противоречие.

Следствие 1. Пусть G - группа, $M = \{g_i \mid i \in I\}$ - порождающее множество G , $F(A)$ - свободная группа с базисом $A = \{a_i \mid i \in I\}$.

Тогда $\exists!$ сюръективный гомоморфизм $\varphi : F(A) \rightarrow G$ такой, что $\forall i \in I : \varphi(a_i) = g_i$.

Доказательство. Достаточно показать, что в этом случае гомоморфизм из доказательства теоремы сюръективен - это следует из того, что множество $\{g_i \mid i \in I\}$ порождает группу G (каждый элемент представим как $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k})$). \square

Следствие 2. Любая группа G изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы по некоторой её нормальной подгруппе.

Доказательство. Пусть $\varphi : F(A) \rightarrow G$ - гомоморфизм из следствия 1.

Так как $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq F(A)$, из теоремы о гомоморфизме $G = \text{Im } \varphi \simeq F(A)/\text{Ker } \varphi$. \square

Определение. Сюръективный гомоморфизм $\varphi : F(A) \rightarrow G$ - из следствия 1 называется копредставлением группы G .

Замечание. Копредставление зависит от выбора порождающего множества M .

2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями

По следствию 2: $G \simeq F(A)/N$, где $N \trianglelefteq F(A)$. Отсюда задание группы G сводится к заданию A и N .

N - нормальная $\implies \forall f \in F(A), \forall h \in N : fhf^{-1} \in N$.

Определение. Пусть $\mathcal{R} \subseteq F(A)$. Нормальным замыканием множества \mathcal{R} в группе $F(A)$ называется наименьшая (по включению) нормальная подгруппа, содержащая \mathcal{R} . Обозначается $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$

Утверждение.

$$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} = \{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\}$$

Доказательство.

Пусть $\{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\} = H$. Тогда:

$$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \trianglelefteq F(A) \implies \forall r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i \in \{\pm 1\} : f_i r_i^{\varepsilon_i} f_i^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies H \subseteq \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}. \text{ Осталось показать, что } H \trianglelefteq F(A):$$

$$\begin{aligned} \forall h \in H, g \in F(A) : ghg^{-1} &= g(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) g^{-1} = \\ &= ((gf_1) r_1^{\varepsilon_1} (f_1^{-1} g^{-1})) \dots ((gf_k) r_k^{\varepsilon_k} (f_k^{-1} g^{-1})) = \\ &= ((gf_1) r_1^{\varepsilon_1} (gf_1)^{-1}) \dots ((gf_k) r_k^{\varepsilon_k} (gf_k)^{-1}) \in H \end{aligned}$$

Отсюда минимальная группа, содержащая \mathcal{R} , в точности равна H . \square

Утверждение. Любую нормальную подгруппу $N \trianglelefteq F(A)$ можно задать как $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ для подходящего $\mathcal{R} \subset F(A)$.

Доказательство. Очевидно, подойдёт $\mathcal{R} = N$. □

Элементарные преобразования над словами в $F(A)$:

(под словами в $F(A)$ подразумеваются любые произведения букв, а не только элементы $F(A)$)

- ЭП1: $W = W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$, где $a \in A, \varepsilon = \pm 1$;
- ЭП2: $W = W_1 r^\varepsilon W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$, где $r \in \mathcal{R}, \varepsilon = \pm 1$;
- ЭП1' - обратное к ЭП1;
- ЭП2' - обратное к ЭП2;

Определение. Назовём слова W и \tilde{W} \mathcal{R} -эквивалентными, если от W можно с помощью ЭП перейти к \tilde{W} .

Утверждение. \mathcal{R} -эквивалентность - отношение эквивалентности.

Доказательство.

- Рефлексивность - очевидно;
- Симметричность - следует из обратимости каждого ЭП;
- Транзитивность - очевидно;

□

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

1. $W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$;
2. W \mathcal{R} -эквивалентно пустому слову λ ;
3. Если для произвольной группы G с порождающим множеством $M = \{g_i \mid i \in I\}$ (т.е. заданным копредставлением $\varphi : F(A) \rightarrow G$) верно, что $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в G , то $\varphi(W) = 1$ в G .

Доказательство.

- $1 \implies 2$: $W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies W = (f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \xRightarrow{\text{ЭП2}} W \sim \tilde{W} = (f_1 f_1^{-1}) \dots (f_k f_k^{-1}) \xRightarrow{\text{ЭП1}} \lambda$;

- $2 \implies 3$ Пусть $\varphi : F(A) \rightarrow G$ взят из условия теоремы. Покажем, что при ЭП образ слова не меняется:

1. $\varphi(W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2) = \varphi(W_1) \varphi(a)^\varepsilon \varphi(a)^{-\varepsilon} \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2)$;
2. $\varphi(W_1 r^\varepsilon W_2) = \varphi(W_1) \varphi(r)^\varepsilon \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \cdot 1^\varepsilon \cdot \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2)$;

При ЭП, обратных этим, образ слова аналогично не изменяется.

Тогда если $W \underset{\text{ЭП}}{\sim} \lambda$, то $\varphi(W) = \varphi(\lambda) = 1$.

- $3 \implies 1$: $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1 \implies r \in \text{Ker } \varphi$; $\varphi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \varphi$.

Рассмотрим в качестве G группу $F(A)/N$, где $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$, а в качестве φ - π (естественный гомоморфизм $F(A) \rightarrow F(A)/N$).

$r \in N \implies \pi(r) = 1$. Тогда по условию 3: $\pi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \varphi = N$.

□

Определение. Если $W \in F(A)$ удовлетворяет любому из условий теоремы 2, то говорят, что соотношение $W = 1$ следует из соотношений $\{r = 1 \mid r \in \mathcal{R}\}$ или является следствием соотношений \mathcal{R} .

Определение. Рассмотрим копредставление произвольной группы G , т.е. $\varphi : F(A) \rightarrow G$, где $A = \{a_i \mid i \in I\}$. Пусть слово $W \in F(A)$ ($W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$) такое, что $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$ в G .

Тогда говорят о соотношении $W = 1$.

(Для упрощения записи вместо g_i пишут a_i).

Определение. Множество $\mathcal{R} \subset F(A)$ называется определяющим множеством соотношений группы G , если любое соотношение группы G следует из \mathcal{R} .

При этом элементы \mathcal{R} называются определяющими соотношениями G . Обозначается $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$ (данная запись также называется копредставлением G).

Примеры.

1. $\mathbb{Z}_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$; $a^{12} = 1$ - следствие;
2. $V_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$; $(ab)^2 = 1$ - следствие.

Теорема (Теорема Дика).

Пусть G - группа, заданная копредставлением $\langle A \mid R \rangle$, где $A = \{a_i \mid i \in I\}$.

Пусть H - произвольная группа, $\{h_i \mid i \in I\} \subset H$ - произвольное множество её элементов.

Тогда отображение φ на порождающих $\varphi : a_i \mapsto h_i \ \forall i \in I$ продолжается до

гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow H$ тогда и только тогда, когда $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в H .

Доказательство. Если $\varphi : a_i \mapsto h_i$ и φ - гомоморфизм, то должно выполняться $\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = h_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots h_{i_k}^{\varepsilon_k}$. Если это отображение корректно, то очевидно, что оно является искомым гомоморфизмом. Покажем корректность:

Пусть $W = \tilde{W}$ в G . Тогда $\tilde{W}W^{-1} = 1$ в $G \implies \tilde{W}W^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ (так как по определению копредставления соотношение $\tilde{W}^{-1}W = 1$ следует из R).

Отсюда $\tilde{W}W^{-1} \sim \lambda \implies W \sim \tilde{W}W^{-1}W = \tilde{W}$. Из размышлений доказательства перехода $2 \implies 3$ теоремы 2 видно, что из условия $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в H следует, что образ не изменяется при ЭП, то есть $\varphi(W) = \varphi(\tilde{W})$, т.е. отображение корректно. \square

3 Прямое произведение групп

3.1 Внешнее прямое произведение

Пусть G_1, \dots, G_k - группы.

$$G = G_1 \times \dots \times G_k = \{(g_1, \dots, g_k) | g_i \in G_i\}.$$

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = (g_1 \tilde{g}_1, \dots, g_k \tilde{g}_k)$$

($g_i \tilde{g}_i$ перемножаются по правилу бинарной операции на G_i).

Утверждение. (G, \cdot) - группа.

Доказательство.

1. $(a_1, \dots, a_k)((b_1, \dots, b_k)(c_1, \dots, c_k)) = (a_1(b_1 c_1), \dots, a_k(b_k c_k)) = ((a_1 b_1) c_1, \dots, (a_k b_k) c_k) = ((a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_k))(c_1, \dots, c_k)$
2. Нейтральный элемент - (e_1, \dots, e_k) (e_i - нейтральный в G_i)
3. $(g_1, \dots, g_k)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1})$

□

Определение. Данная группа (G, \cdot) называется прямым произведением групп G_1, \dots, G_k . Обозначается $G = G_1 \times \dots \times G_k$; G_i называются множителями.

В аддитивной терминологии те же рассуждения определяют прямую сумму $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$, где G_i - слагаемые.

Примеры.

1. $G_1 = \mathbb{Z}_3, G_2 = S_3, G = G_1 \times G_2$.
 $(1, (12)) \cdot (2, (13)) = (1 + 2, (12)(13)) = (0, (132)).$
2. $D_n \simeq \underbrace{F^* \times \dots \times F^*}_n$ (D_n - группа диагональных матриц порядка n).

Утверждение.ⁿ

1. Если $(m, n) = 1$, то $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{nm}$ - циклическая группа;
2. Если $(m, n) \neq 1$, то $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ - не циклическая.

Доказательство.

1. Обозначим за $[a]_s \in \mathbb{Z}_s$ класс вычетов по модулю s , содержащий a .

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ такое, что $\varphi : [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$. Очевидно, что это гомоморфизм:

$$\varphi([a]_{mn} \cdot [b]_{mn}) = ([ab]_m, [ab]_n) = ([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) = \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})$$

Найдём $\text{Ker } \varphi$:

$$\varphi([a]_{mn}) = ([0]_m, [0]_n) \iff \begin{cases} m \mid a \\ n \mid a \end{cases} \xRightarrow{(m,n)=1} mn \mid a \implies \text{Ker } \varphi = \{[0]_{mn}\}$$

По теореме о гомоморфизме $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_{mn}/\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_{mn} \implies |\text{Im } \varphi| = mn$.

Так как $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$ и $\text{Im } \varphi \leq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Отсюда φ - биекция (инъекция из $\text{Ker } \varphi = \{e\}$), т.е. φ - изоморфизм.

2. Пусть $(m, n) = d \neq 1$ ($m = dk_1, n = dk_2$). Тогда $\forall g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$:

$$(g_1, g_2)^{dk_1k_2} = (g_1^{dk_1k_2}, g_2^{dk_1k_2}) = (0^{k_2}, 0^{k_1}) = (0, 0)$$

Отсюда $\text{ord } (g_1, g_2) = dk_1k_2 = \frac{mn}{d} < mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n|$. Значит, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ не является циклической.

□

Следствие. Пусть $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ - разложение на простые множители. Тогда $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$.

Доказательство. Очевидно следует из теоремы.

□

Следствие. (Китайская теорема об остатках) Если числа a_1, \dots, a_n попарно взаимно просты, то для любых целых r_1, \dots, r_n ($0 \leq r_i < n$) $\exists! N$ ($0 \leq N < a_1 \cdot \dots \cdot a_n$) такой, что $N \equiv r_i \pmod{a_i}$

Доказательство. Из теоремы следует, что $\mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} \simeq \mathbb{Z}_a$ ($a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$). Это означает, что набор остатков $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}$ изоморфизм из теоремы однозначно переводит в элемент $N \in \mathbb{Z}_a$ такой, что $r_i = [N]_{a_i}$, что и требовалось.

□

3.2 Внутреннее прямое произведение

Определение. Пусть G - группа, $H_1, \dots, H_k \leq G$.

G раскладывается в прямое произведение подгрупп H_1, \dots, H_k , если:

1. $\forall g \in G \exists! h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k$;
2. $\forall i \neq j : \forall h_i \in H_i, h_j \in H_j \ h_i h_j = h_j h_i$.

Обозначается $G = H_1 \times \dots \times H_k$ ($G = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ в аддитивной терминологии).

Замечание. Из определения следует, что $(h_1 \dots h_k)(\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) = (h_1 \tilde{h}_1) \dots (h_k \tilde{h}_k)$.

Определение. Пусть $H, N \leq G$. Обозначим $NH = \{nh | n \in N, h \in H\}$

Утверждение. Пусть $N \trianglelefteq G, H \leq G$. Тогда NH - подгруппа в G , причём $NH = HN$.

Доказательство. Рассмотрим $(n_1 h_1)(n_2 h_2) = n_1 \underbrace{(h_1 n_2 h_1^{-1})}_{=\tilde{n}} \underbrace{h_1 h_2}_{=\tilde{h}} = \tilde{n} \tilde{h} \in NH$.

$e \in N \cap H \implies e \cdot e = e \in NH$.

$(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1}h)h \in NH$.

Отсюда NH - подгруппа. Покажем, что $NH = HN$:

$$\forall nh \in NH : nh = (hh^{-1})nh = h(h^{-1}nh) \in HN \implies NH \subseteq HN$$

$$\forall hn \in HN : hn = hn(h^{-1}h) = (hnh^{-1})h \in NH \implies HN \subseteq NH$$

Отсюда $NH = HN$. □

Лемма 1. Пусть $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{e\}$. Тогда $\forall h \in H, n \in N \ nh = hn$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $(hn)(nh)^{-1} = hnh^{-1}n^{-1}$:

$$hnh^{-1}n^{-1} = h(nh^{-1}n^{-1}) \in H; \quad hnh^{-1}n^{-1} = (hnh^{-1})n^{-1} \in N$$

Значит, $hnh^{-1}n^{-1} \in H \cap N = \{e\} \implies (hn)(nh)^{-1} = e \implies hn = nh$ □

Теорема 1. Пусть $H_1, H_2 \leq G$. Тогда $G = H_1 \times H_2 \iff \begin{cases} (1) \ H_1, H_2 \trianglelefteq G \\ (2) \ H_1 \cap H_2 = \{e\} \\ (3) \ G = H_1 H_2 \end{cases}$

Доказательство.

\implies : Пусть $G = H_1 \times H_2$.

(3) - очевидно из пункта 2 определения.

(1): $\forall h_1 \in H_1, g \in G : g = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \implies$

$$gh_1 g^{-1} = \tilde{h}_1 (\tilde{h}_2 h_1 \tilde{h}_2^{-1}) \tilde{h}_1^{-1} \underset{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_1 h_1 \tilde{h}_1^{-1} \in H_1$$

Отсюда $H_1 \trianglelefteq G$ (аналогично $H_2 \trianglelefteq G$).

(2): Пусть $\exists h \in H_1 \cap H_2$. Тогда $h = he = eh$ - два разложения на произведение

элементов подгрупп. Они совпадают только в случае $h = e$, т.е. $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

\Leftarrow : Пусть даны условия (1) - (3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3): $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 h_2$.

Допустим, что это разложение не единственно, т.е. $h_1 h_2 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$.

Тогда $\tilde{h}_1^{-1} h_1 = \tilde{h}_2 h_2^{-1}$, а так как $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, имеем $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_2$. \square

Теорема 2. Пусть $H_1, \dots, H_k \leq G$.

$$\text{Тогда } G = H_1 \times \dots \times H_k \iff \begin{cases} (1) H_1, \dots, H_k \leq G \\ (2) \forall i H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\} \\ (3) G = H_1 \dots H_k \end{cases}$$

Доказательство.

\Rightarrow : Пусть $G = H_1 \times \dots \times H_k$.

(3) - очевидно из пункта 2 определения.

(1): $\forall h_i \in H_i, g \in G : g = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k \Rightarrow$

$$gh_1 g^{-1} = (\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) h_i (\tilde{h}_k^{-1} \dots \tilde{h}_1^{-1}) \underset{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_i h_i \tilde{h}_i^{-1} \in H_i$$

Отсюда $H_i \leq G$.

(2): Пусть $\exists h \in H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle$. Тогда $h = he = eh$ - два разложения на произведение элементов подгрупп. Они совпадают только в случае $h = e$, т.е. $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$.

\Leftarrow : Пусть даны условия (1) - (3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3): $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k$.

Допустим, что это разложение не единственно, т.е. $h_1 \dots h_k = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k$.

Тогда $\forall i : \tilde{h}_i^{-1} h_i = \prod_{j \neq i} \tilde{h}_j h_j^{-1}$, а так как $\langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$, имеем $h_i = \tilde{h}_i$. \square

Примеры.

1. $V_4 = \{e, a, b, c\} = \{e, a\} \times \{e, b\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;

2. $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \times U \ (z = r \cdot e^{iy})$.

3. \mathbb{Z} не раскладывается в произведение нетривиальных подгрупп.

Предположим противное, т.е. $\mathbb{Z} = H_1 \times \dots \times H_m$. Подгруппы \mathbb{Z} имеют вид $k\mathbb{Z}$, т.е. $\mathbb{Z} = k_1 \mathbb{Z} \times \dots \times k_m \mathbb{Z}, k_i \neq 0$. Но тогда $k_1 k_2 \in H_1 \cap H_2$ и $k_1 k_2 \neq 0$, что противоречит теореме 2.

3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением

Теорема 3.

1. Если группа G раскладывается в прямое произведение подгрупп H_1, \dots, H_k , то G изоморфна прямому произведению групп G_1, \dots, G_k , где $\forall i \ G_i \simeq H_i$;
2. Если группа G изоморфна прямому произведению групп G_1, \dots, G_k , то $\exists H_i \leq G$ такие, что $G_i \simeq H_i$ и G раскладывается в прямое произведение H_1, \dots, H_k .

Доказательство.

1. Имеем: $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k$.

Рассмотрим отображение $\varphi : G \rightarrow G_1 \times \dots \times G_k$, где $G_i = H_i$, такое, что $\forall g = h_1 \dots h_k \in G \ \varphi(h_1 \dots h_k) \mapsto (h_1, \dots, h_k)$. Это изоморфизм:

- Биекция - очевидна;
- Гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \varphi((h_1 \dots h_k) \cdot (h'_1 \dots h'_k)) &= \varphi(h_1 h'_1 \dots h_k h'_k) = (h_1 h'_1, \dots, h_k h'_k) = \\ &= (h_1, \dots, h_k) \cdot (h'_1, \dots, h'_k) = \varphi(h_1 \dots h_k) \cdot \varphi(h'_1 \dots h'_k) \end{aligned}$$

2. Имеем: G_1, \dots, G_k - группы, $G = \{(g_1, \dots, g_k) \mid g_i \in G_i\}$.

Тогда $H_i = \{(e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) \mid g_i \in G_i\}$ очевидно является подгруппой G , изоморфной G_i .

Покажем, что $G = H_1 \times \dots \times H_k$:

- $\forall g = (g_1, \dots, g_k) \in G \ \exists! \ h_i = (e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) : g = h_1 \dots h_k$;
- $\forall i \neq j, h_i = ((e, \dots, e, a_i, e, \dots, e)) \in H_i, h_j = (e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) \in H_j :$

$$h_i h_j = (e, \dots, e, a_i, e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) = h_j h_i$$

□

Теорема 4. Пусть $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k, N_i \leq H_i$. Тогда:

1. $N_1 \times \dots \times N_k \leq G$;
2. $G/(N_1 \times \dots \times N_k) \simeq (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$.

Доказательство.

1. Очевидно, что $N_1 \times \dots \times N_k = N \leq G$.

Покажем нормальность: $\forall g = h_1 \dots h_k \in G, n = n_1 \dots n_k \in N$

$$gng^{-1} = (h_1 \dots h_k)(n_1 \dots n_k)(h_k^{-1} \dots h_1^{-1}) \underset{(n_i \in H_i)}{=} \overset{\in N_1}{(h_1 n_1 h_1^{-1})} \dots \overset{\in N_k}{(h_k n_k h_k^{-1})} \in N$$

2. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$ такой, что $\varphi : h_1 \dots h_k \mapsto (h_1 N_1, \dots, h_k N_k)$. Это сюръективный гомоморфизм, причём $\text{Ker } \varphi = N_1 \times \dots \times N_k$. Отсюда по теореме о гомоморфизме получаем необходимое утверждение.

□

Следствие. Если $G = H_1 \times H_2$, то $G/H_1 \simeq H_2, G/H_2 \simeq H_1$.