



Механико-математический факультет

**АЛГЕБРА, 3 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель:	Куликова Ольга Викторовна
Авторы:	Соколов Егор
Группа:	208
Контакт:	<a href="#">Мой телеграм для связи</a>
Наши конспекты:	<a href="#">Телеграм-канал с конспектами</a>

Москва  
Последняя компиляция: 3 января 2026 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Группы</b>	<b>3</b>
1.1	Основные понятия	3
1.2	Циклические группы	10
1.3	Смежные классы	12
1.4	Факторгруппа	17
1.5	Гомоморфизмы групп	18
<b>2</b>	<b>Свободные группы</b>	<b>21</b>
2.1	Задание группы порождающими и определяющими соотношениями	24
<b>3</b>	<b>Прямое произведение групп</b>	<b>28</b>
3.1	Внешнее прямое произведение	28
3.2	Внутреннее прямое произведение	29
3.3	Связь между внутренним и внешним прямым произведением	32
<b>4</b>	<b>Конечнопорождённые абелевы группы</b>	<b>34</b>
4.1	Связь между базисами свободной абелевой группы	38
4.2	Элементарные преобразования свободных абелевых групп	39
4.3	Согласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы	42
4.4	Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах	44
<b>5</b>	<b>Действия группы на множестве</b>	<b>52</b>
5.1	Орбиты и стабилизаторы	53
5.2	Действия группы на себе	57
5.3	Классы сопряжённости и централизаторы	59
<b>6</b>	<b>Теоремы Силова</b>	<b>63</b>
6.1	I теорема Силова	63
6.2	II теорема Силова	65
6.3	Нормализатор. III теорема Силова	66
<b>7</b>	<b>Коммутант</b>	<b>68</b>
7.1	Коммутанты некоторых известных групп	69
<b>8</b>	<b>Разрешимые и простые группы</b>	<b>72</b>
8.1	Разрешимые группы	72
8.2	Простые группы	74
8.3	Значение простых групп	75
8.4	Примеры простых групп	76
<b>9</b>	<b>Линейные представления</b>	<b>80</b>
9.1	Матричные представления группы	81
9.2	Приводимость линейных представлений	82
9.2.1	Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп	85
9.2.2	Одномерные комплексные представления группы	86
9.3	Вполне приводимые линейные представления	87
9.3.1	Ортогональные (унитарные) представления	92
9.4	Неприводимые линейные представления над $\mathbb{C}$	93
9.5	Характеры комплексных линейных представлений	97
9.5.1	Пространство центральных функций	101

<b>10 Кольца и поля</b>	<b>105</b>
10.1 Идеалы колец и факторкольца . . . . .	107
10.2 Гомоморфизмы колец . . . . .	109
10.3 Главный идеал . . . . .	110
10.4 Расширения полей . . . . .	115
10.4.1 Конечные расширения полей . . . . .	115
10.4.2 Алгебраические расширения полей . . . . .	118
10.4.3 Конечнопорождённые расширения полей . . . . .	121
10.4.4 Алгебраическое замыкание . . . . .	122
10.5 Поле разложения многочлена . . . . .	124
10.6 Конечные поля . . . . .	126
<b>11 Материал для самостоятельного изучения</b>	<b>129</b>
11.1 Алгебры над полем . . . . .	129
11.2 Алгебра кватернионов . . . . .	130
<b>12 Заключение и источники</b>	<b>132</b>

# 1 Группы

## 1.1 Основные понятия

**Определение.** Пусть  $G$  — множество. Бинарной операцией на  $G$  называется отображение  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ .

**Определение.** Множество  $G$  с бинарной операцией  $*$  называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c$ ;
2.  $\exists e \in G : \forall a \in G \quad a * e = e * a = a$ ;
3.  $\forall a \in G \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Различные формы записи группы:

1. Мультипликативная форма (терминология):  
Операция — ”  $\cdot$  ” (умножение);  
Нейтральный элемент — единичный (1);  
Элемент из аксиомы 3 — обратный ( $a^{-1}$  для  $a \in G$ );
2. Аддитивная форма (терминология):  
Операция — ”  $+$  ” (сложение);  
Нейтральный элемент — нулевой (0);  
Элемент из аксиомы 3 — противоположный ( $-a$  для  $a \in G$ );

**Определение.** Если  $G$  — группа и  $\forall a, b \in G \quad a \cdot b = b \cdot a$ , то  $G$  — абелева (коммутативная) группа.

*Замечание.* Обычно для обозначения абелевых групп будем использовать аддитивную форму записи, для иных — мультипликативную.

**Утверждение** (Простейшие свойства групп).

1. Единичный элемент единственный;
2.  $\forall a \in G$  обратный к  $a$  элемент единственный;
3.  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ;
4. Если  $a, b \in G$ , то решение уравнения  $ax = b$  ( $xa = b$ ) единственно.

*Доказательство.*

1. (От противного) Допустим, что  $\exists e_1, e_2 \in A$  — единичные. Тогда  $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$  по определению единичного элемента.

2. Допустим  $\exists b_1, b_2$  — обратные к  $a$  элементы:  $b_1 \neq b_2$

В силу ассоциативности:

$$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$

$$b_1 * e = e * b_2$$

$$b_1 = b_2$$

3.  $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e;$

$$b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = e \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

4.  $ax = b \iff a^{-1}ax = a^{-1}b \iff x = a^{-1}b;$

$$xa = b \iff xaa^{-1} = ba^{-1} \iff x = ba^{-1};$$

□

**Определение.** Группа  $G$  называется тривиальной, если  $G = \{e\}$ .

**Определение.** Мощность множества  $G$  называется порядком группы  $G$ .

Обозначается  $|G|$ .

Если  $|G| < \infty$ , то группа называется конечной, иначе бесконечной.

**Примеры.**

1.  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_n, +);$

2.  $GL_n(F)$  — группа невырожденных матриц порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $F$ ;

3. Пусть  $\Omega$  — множество. Преобразованиями  $\Omega$  назовём биекции  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ .  $S(\Omega)$  — множество всех преобразований  $\Omega$  — образует группу относительно композиции.

Если  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ , то  $S(n) = S_n$  — группа подстановок.

4. Если  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$  — конечная группа, то её можно задать с помощью таблицы умножения (таблицы Кэли).

Например, для  $Z_2 = \{0, 1\}$ :

	0	1
0	0	1
1	1	0

5. Группа кватернионов:  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Таблица Кэли для кватернионов:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

**Определение.** Подмножество  $H \subseteq G$  называется подгруппой группы  $G$ , если:

1.  $\forall a, b \in H \quad ab \in H$ ;
2.  $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$ ;
3.  $1 \in H$  (можно заменить на  $H \neq \emptyset$ )

Обозначается  $H \leq G$ .

**Утверждение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  является группой относительно бинарной операции группы  $G$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$  ( $\mathbb{N} \not\leq \mathbb{Z}$ , т.к. не группа);
2.  $GL_n(F) \geq SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$  — унимодулярная группа.
3.  $GL_n(F) \geq O_n(F) \geq SO_n(F)$  ( $O_n(F)$  — ортогональная группа,  $SO_n(F)$  — специальная ортогональная группа);
4.  $GL_n(F) \geq$  группа строго треугольных матриц.

**Определение.** Любая подгруппа группы  $S(\Omega)$  называется группой преобразований множества  $\Omega$ .

**Примеры.**

1.  $GL(V) (\leq S(V))$  — группа всех невырожденных линейных операторов векторного пространства  $V$ ;
2.  $Aff(\mathbb{A})$  — группа всех невырожденных аффинных преобразований аффинного пространства  $\mathbb{A}$ ;

3.  $\mathcal{E}^2$  — аффинно-евклидово двумерное пространство.

$\text{Isom } \mathcal{E}^2$  — группа изометрий (движений) на  $\mathcal{E}^2$ .

$\text{Isom } \mathcal{E}^2 \geq O_2 \geq SO_2$ , где  $O_2$  — группа движений, сохраняющих точку  $O$ ,  $SO_2$  — группа поворотов вокруг точки  $O$ .

4.  $T \subseteq \mathcal{E}^2$  — некоторая фигура.

$\text{Sym } T = \{f \in \text{Isom } \mathcal{E}^2 \mid f(T) = T\}$  — группа симметрий фигуры  $T$ .

- Если  $T$  — окружность с центром в точке  $O$ , то  $\text{Sym } T = O_2$ ;
- Если  $T$  — правильный  $n$ -угольник с центром в точке  $O$ , то  $\text{Sym } T = D_n$  — группа Диэдра.  
 $|D_n| = 2n$ , т.к.  $n$  поворотов и  $n$  симметрий.

**Определение.** Пусть  $(G_1, *, e_1), (G_2, \circ, e_2)$  — группы. Отображение  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  — изоморфизм, если

1.  $\varphi$  — биекция;
2.  $\forall a, b \in G_1 \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Если между  $G_1$  и  $G_2$  существует изоморфизм, то  $G_1$  и  $G_2$  называются изоморфными. Обозначается  $G_1 \simeq G_2$ .

**Пример.**  $D_3 \simeq S_3$ .

*Доказательство.*  $D_3$  — группа движений, переводящая равносторонний треугольник в себя. Если пронумеровать вершины изначального треугольника, то каждый элемент группы  $D_3$  будет соответствовать подстановке, переводящей старый порядок вершин в новый. Определение изоморфизма проверяется очевидно.  $\square$

**Утверждение.** *Изоморфность групп — отношение эквивалентности на множестве групп.*

**Утверждение** (Свойства изоморфизмов).

1.  $\varphi(e_1) = e_2$ ;
2.  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ ;
3.  $G_1 \simeq G_2 \implies |G_1| = |G_2|$ .

*Замечание.* Обратное утверждение неверно (например,  $S_3 \not\simeq \mathbb{Z}_6$ ).

**Пример.**  $SO_2 \simeq (U, \cdot)$ , где  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e)$  — группа,  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ .

Мультипликативный термин — элемент  $g$  в степени  $k$ :

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_k, k > 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

**Определение.** Пусть  $(G, +, e)$  — группа,  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ .

Аддитивный термин — кратное элемента  $g$ :

$$kg = \begin{cases} \underbrace{g + g + \dots + g}_k, k > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

**Утверждение** (Свойства  $(k, m \in \mathbb{Z}, g \in G)$ ).

1.  $g^k \cdot g^m = g^{k+m}$ ;
2.  $(g^k)^m = g^{km}$ ;
3.  $(g^k)^{-1} = g^{-k}$ .

**Утверждение.** Множество всех элементов  $g^k$ , где  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ , образует подгруппу в  $G$ . Обозначается  $\langle g \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$ .

**Определение.**  $\langle g \rangle$  — циклическая подгруппа, порождённая элементом  $g$ .

**Примеры.**

1.  $G = \mathbb{Z} : \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$  — чётные целые числа;
2.  $G = \mathbb{Z}_6 : \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ ;
3.  $G = \mathbb{C} : \langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$



Пусть  $(G, \cdot, e)$  — группа,  $g \in G$ . Если  $\forall k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m \implies g^k \neq g^m$ , то  $\langle g \rangle$  — бесконечная (элемент  $g$  имеет бесконечный порядок).

Если  $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m, g^k = g^m \implies g^{k-m} = e \implies$  существует наименьшее  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $g^n = e$  (элемент  $g$  имеет порядок  $n$ )

**Определение.** Порядком элемента  $g \in G$  называется наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $g^n = e$ , если такое существует. Иначе говорят, что элемент  $g$  имеет бесконечный порядок. Обозначается  $\text{ord } g$ .

**Примеры.**

$$1. G = \mathbb{Z} : \text{ord } 2 = \infty;$$

$$2. G = \mathbb{Z}_{12} : \text{ord } 2 = 6;$$

$$3. G = \mathbb{C}^* : \text{ord } 2 = \infty$$

( $\mathbb{C}^*$  — мультипликативная группа поля,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  относительно умножения).

**Утверждение 1** (Свойства элементов конечного порядка).

$$1. g^m = e \iff \text{ord } g \mid m;$$

$$2. g^m = g^l \iff m \equiv l \pmod{\text{ord } g}$$

*Доказательство.*

1. Разделим  $m$  на  $n = \text{ord } g$  с остатком:  $m = nq + r$ , где  $0 \leq r < n$ . Тогда:

$$e = g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r \implies r = 0$$

так как  $r < n$ , где  $n$  — минимальное натуральное число такое, что  $g^n = e$ .

2. Следует из 1.

□

**Следствие.**  $\text{ord } g = |\langle g \rangle|$

*Доказательство.* Если  $\text{ord } g = \infty$  :  $\forall k \neq l \ g^k \neq g^l \implies$  подгруппа  $\langle g \rangle = \{e, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, \dots\}$  бесконечна.

Если  $\text{ord } g = n$  :  $\langle g \rangle = \{e, g^1, \dots, g^{n-1}\}$  — все эти элементы различны из пункта 2 утверждения, а других нет по определению порядка. □

**Примеры.**

1.  $i \in \mathbb{C}^* - \text{ord } i = 4$ ;

2.  $\sigma \in S_n$ :

Если  $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$  — цикл длины  $k$ , то  $\text{ord } \sigma = k$ .

Так как любая подстановка раскладывается в произведение независимых циклов и независимые циклы коммутируют, если  $\sigma = \tau_1 \dots \tau_n$ , где  $\tau_i$  — независимые циклы, то верно:  $\text{ord } \sigma = \text{НОК } \{|\tau_1|, \dots, |\tau_n|\}$ .

Например,  $\sigma = (23)(145) \implies \text{ord } \sigma = 6$ .

**Утверждение 2.** Пусть  $n = \text{ord } g$ . Тогда  $\text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\text{ord } g^k = m$ . Из утверждения 1:  $g^{mk} = e \iff n | mk$ , откуда  $\frac{n}{\text{НОД}(n,k)} | m$ , т.е.  $m \geq \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ . Очевидно, что при  $m = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$   $n | mk$ .  $\square$

**Определение.** Множество  $S \subseteq G$  называется порождающим множеством для группы  $G$ , если  $\forall g \in G \exists s_1, \dots, s_k \in S : g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1$  ( $s_i$  не обязательно различны).

При этом говорят, что  $G$  порождается множеством  $S$ .

Если  $\exists$  конечное множество  $S$  такое, что  $S$  порождает  $G$ , то  $G$  называется конечно порождённой, и бесконечно порождённой иначе.

Обозначается  $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} | \varepsilon_i = \pm 1\}$  — группа, порождённая  $S$ .

**Примеры.**

1.  $S_n = \langle \text{все транспозиции} \rangle$ ;

2.  $GL_n(F) = \langle \text{все элементарные матрицы} \rangle$

3.  $Q_8 = \langle i, j \rangle$ ;

4.  $D_n = \langle \alpha, s \rangle$ , где  $\alpha$  — поворот на  $\frac{2\pi}{n}$ , а  $s$  — любая из симметрий.

5. Группа Клейна:  $H = \{\text{id}, a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)\} \leq S_4$

Это группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом:  $a, c$  — симметрии относительно средних линий,  $b$  — поворот на  $\pi$  вокруг центра.

Таблица Кэли для группы Клейна:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Отсюда  $\{e, a, b, c\} = \langle a, b \rangle$ .

6.  $\mathbb{Q}$  — бесконечно порождённая.

## 1.2 Циклические группы

**Определение.** Группа  $G$  называется циклической, если  $G$  порождается одним элементом, т.е.  $\exists g \in G : \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$ . Элемент  $g$  также называется образующим элементом группы  $G$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$ ,  $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$ ;

2.  $U_n$  — множество всех комплексных корней степени  $n$  из 1.

$U_n$  — группа относительно умножения, причём  $U_n = \langle \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \rangle$ .

**Утверждение 3.** Если  $G = \langle g \rangle$ , то  $|G| = \text{ord } g$ .

*Доказательство.* Очевидно из определения порождающего множества. □

*Замечание.* Для групп конечного порядка, очевидно, выполняется и обратное утверждение: если  $\text{ord } g = |G| < \infty$ , то  $G = \langle g \rangle$ .

Далее циклическую группу порядка  $n$  будем обозначать  $\langle g \rangle_n$ .

**Утверждение 4.** Пусть  $G = \langle g \rangle_n$ . Тогда  $G = \langle g^k \rangle \iff \text{НОД}(k, n) = 1$ .

*Доказательство.* Из утверждения 3  $|G| = \text{ord } g$ . Тогда:

$$G = \langle g^k \rangle \iff \text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)} = n \iff \text{НОД}(n, k) = 1$$

□

**Теорема 1** (Классификация циклических групп).

1. Если циклическая группа  $G$  бесконечна, то  $G \simeq \mathbb{Z}$ ;

2. Если циклическая группа  $G$  конечна и имеет порядок  $n$ , то  $G \simeq \mathbb{Z}_n$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $\text{ord } g = \infty, \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$

Рассмотрим отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$  такого вида:  $\varphi : g^k \mapsto k$ . Очевидно, что  $\varphi$  — сюръекция (в  $k \in \mathbb{Z}$  перешёл  $g^k \in G$ ).

$\varphi(g^k) = \varphi(g^m) \implies k = m \implies g^k = g^m$  — отсюда  $\varphi$  — инъекция.

Проверим сохранение операции:

$$\varphi(g^k \cdot g^m) = \varphi(g^{k+m}) = k + m = \varphi(g^k) + \varphi(g^m)$$

Отсюда  $\varphi$  — изоморфизм.

2. Пусть  $\text{ord } g = n$ . Рассмотрим отображение  $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$  такого вида:  $\varphi : k \mapsto g^k$ . Очевидно, что  $\varphi$  — сюръекция (в  $g^k \in G$  перешёл  $k \in \mathbb{Z}_n$ ).

$k \equiv m \pmod{n} \iff g^k = g^m$  — отсюда  $\varphi$  — инъекция.

Сохранение операции — аналогично пункту 1.

Отсюда  $\varphi$  — изоморфизм.

□

**Следствие.** Если  $G_1, G_2$  — циклические группы, то  $G_1 \simeq G_2 \iff |G_1| = |G_2|$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : верно всегда;

$\impliedby$ : из теоремы: если  $G_1$  бесконечна, то  $G_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq G_2$ , иначе  $G_1 \simeq \mathbb{Z}_n \simeq G_2$ , где  $n = |G_1| = |G_2|$ .

□

**Теорема 2.**

1. Любая подгруппа циклической группы является циклической.

2. Подгруппы циклической группы  $G$  порядка  $n$  находятся во взаимно однозначном соответствии с делителями  $n$ , т.е.

$$\forall H \leq G \quad |H| \mid n \text{ и } \forall d \mid n \quad \exists! H \leq G : |H| = d$$

3. Подгруппы группы  $\mathbb{Z}$  исчерпываются группами  $k\mathbb{Z} = \langle k \rangle$ , где  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $G = \langle g \rangle, H \leq G$ . Если  $H = \{e\}$ , то  $H = \langle e \rangle$ .

При  $H \neq \{e\} : \forall h \in H \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$ . Так как  $g^k \in H \implies g^{-k} \in H$  и в  $H$  есть элемент, отличный от  $e$ ,  $\exists$  наименьшее  $k \in \mathbb{N} : g^k \in H$ .

Докажем, что  $H = \langle g^k \rangle$ . Рассмотрим произвольный  $g^m \in H$ . Разделим  $m$  на  $k$  с остатком:  $m = kq + r, 0 \leq r < k$ . Тогда:

$$g^m = (g^k)^q \cdot g^r \implies g^r = (g^k)^{-q} \cdot g^m$$

то есть  $g^r \in H$ , а в силу того, что  $k$  — наименьшее натуральное число такое, что  $g^k \in H$ , имеем  $r = 0$ . Значит,  $g^m = (g^k)^q$ , а отсюда  $H = \langle g^k \rangle$ .

$$2. G = \langle g \rangle_n, H \leq G \xrightarrow{1} H = \langle g^k \rangle.$$

Так как  $g^n = e \in H$ , то в силу рассуждений пункта 1 при  $m = n$  получаем  $k|n \implies n = kq$ .

Отсюда  $H = \{e, g^k, g^{2k}, \dots, g^{(q-1)k}\} \implies |H| = q$ , где  $q|n$ .

Обратно,  $\forall d|n \exists! H = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$  (в силу описания выше других подгрупп такого порядка нет).

$$3. \text{ Из пункта 1 в аддитивной форме получаем, что } H \leq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \implies H = \langle k \cdot 1 \rangle$$

□

**Следствие.** В циклической группе простого порядка существуют ровно две подгруппы — тривиальная и сама группа.

**Примеры.**

$$1. H \leq \mathbb{Z}_5 \implies H = \{0\}, H = \mathbb{Z}_5;$$

$$2. H \leq \mathbb{Z}_6 \implies H = \{0\}, H = \langle 2 \rangle, H = \langle 3 \rangle, H = \mathbb{Z}_6.$$

### 1.3 Смежные классы

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e)$  — произвольная группа,  $H \leq G, g \in G$ .

Рассмотрим множества:

$gH = \{gh | h \in H\}$  — левый смежный класс  $G$  по  $H$  с представителем  $g$

$Hg = \{hg | h \in H\}$  — правый смежный класс  $G$  по  $H$  с представителем  $g$

**Утверждение** (Свойства смежных классов).

$$1. \forall a \in G \ a \in aH;$$

2. если  $a \in bH$ , то  $bH = aH$ ; в частности, любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

$$3. aH = bH \iff b^{-1}a \in H;$$

(Верны аналогичные утверждения для правых смежных классов)

*Доказательство.*

1. Очевидно;

$$2. a \in bH \implies \exists h \in H : a = bh \implies \forall \tilde{h} \in H \ a\tilde{h} = b\tilde{h} \in bH \implies aH \subseteq bH.$$

Аналогично  $bH \subseteq aH \implies aH = bH$ .

3.  $\implies$ :  $aH = bH \implies a \in bH (a \in aH) \implies \exists h \in H : a = bh \implies b^{-1}a = h \in H$   
 $\impliedby$ :  $b^{-1}a = h \in H \implies a = bh \implies aH = bH$  по пункту 2.

□

**Утверждение.** Отношение  $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$  является отношением эквивалентности, причём классы эквивалентности совпадают с левыми смежными классами (аналогично  $ab^{-1} \in H$  для правых).

*Доказательство.*

- Рефлексивность:  $a^{-1}a = e \in H \implies a \equiv a \pmod{H}$ ;
- Симметричность:  $a \equiv b \pmod{H} \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv a \pmod{H}$ ;
- Транзитивность:  $a \equiv b, b \equiv c \pmod{H} \implies c^{-1}b, b^{-1}a \in H \implies c^{-1}b \cdot b^{-1}a = c^{-1}a \in H \implies a \equiv c \pmod{H}$ .

Совпадение классов эквивалентности с левыми смежными классами следует из пункта 3 предыдущего утверждения. □

**Утверждение.** Если  $G$  — абелева, то  $\forall a \in G : aH = Ha$ .  
(В общем случае данное утверждение неверно).

*Доказательство.*  $\forall a \in G : \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} \implies aH = Ha$ . □

**Примеры.**

1.  $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$  ( $H = \{id, (12)\}$ ),  $g = (13)$ .  
 $(13)(12) = (123)$ ;  $(12)(13) = (132)$ .  
Тогда  $\{(13), (123)\} = gH \neq Hg = \{(13), (132)\}$ .
2.  $H = 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ . Смежные классы —  $3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}$ .
3.  $H = \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ . Смежные классы —  $a + bi + \mathbb{R} = bi + \mathbb{R}$ .

**Утверждение.** Множество  $\{aH : a \in G\}$  находится во взаимно однозначном соответствии с множеством  $\{Ha : a \in G\}$ .

*Доказательство.*  $gH \leftrightarrow Hg^{-1} : x = gh \in gH \leftrightarrow x^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}$ . □

**Следствие.**  $|\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$

**Определение.** Мощность множества левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $H$  называется индексом  $H$  в  $G$ . Обозначение:  $|G : H|$

**Пример.**  $|\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}| = 3$ , т.к. смежные классы —  $\{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$ .

**Теорема.** (Теорема Лагранжа)

Пусть  $G$  — конечная группа,  $H \leq G$ . Тогда  $|G| = |H| \cdot |G : H|$ .

*Доказательство.* Так как  $|G| < \infty$ , то  $|H| < \infty$ , т.е.  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$ .

$\forall g \in G, gH = \{gh_1, \dots, gh_k\}$ , причем  $gh_i = gh_j \Rightarrow h_i = h_j \Rightarrow |gH| = |H|$ .

Отсюда, если  $|G : H| = n$ :

$$G = \bigsqcup_{i=1}^n a_i H \implies |G| = \sum_{i=1}^n |a_i H| = |G : H| \cdot |H|$$

□

**Следствие 1.** Если  $G$  — конечная группа,  $H \leq G$ , то  $|H| \mid |G|$ .  
(Обратное утверждение неверно).

**Упражнение.** Пусть  $G = A_4$  (группа чётных перестановок).

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$ . Докажем, что в  $A_4$  нет подгруппы порядка 6.

Предположим, что  $H \leq A_4$  и  $|H| = 6$ .  $A_4$  состоит из элемента  $id$ , 3 элементов вида  $(ab)(cd)$  и восьми элементов вида  $(abc)$ . Значит,  $H$  содержит хотя бы один элемент вида  $(abc)$  (с точностью до перенумерования —  $(123)$ ). Тогда  $H$  содержит и  $(123)^{-1} = (132)$ . Также знаем, что группа чётного порядка содержит элемент порядка 2 (иначе в группе все элементы, кроме  $e$ , разбиваются на пары обратных, и элементов нечётное число), поэтому  $H$  содержит  $\sigma = (**)(**)$ . Рассмотрим  $\omega = \sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$  (это равенство легко проверить, подставив в него  $\sigma(1), \dots, \sigma(4)$ ). Очевидно, что это цикл длины 3, не оставляющий на месте 4 (т.к.  $\sigma$  не оставляет на месте 4). Значит,  $\omega$  и  $\omega^{-1}$  принадлежат  $H$  и не совпадают с предыдущими элементами (и друг с другом), т.е.

$$H = \{id, (123), (132), \sigma, \omega, \omega^{-1}\}$$

Осталось перебрать возможные значения  $\sigma$ :

- $\sigma = (12)(34) \implies (123)(12)(34)(132) = (14)(23) \notin H$ ;
- $\sigma = (13)(24) \implies (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \notin H$ ;
- $\sigma = (14)(23) \implies (123)(14)(23)(132) = (13)(24) \notin H$ ;

Отсюда таких  $H$  не существует.

**Следствие 2.** Если  $G$  — конечная группа, то  $\forall g \in G : \text{ord } g \mid |G|$

*Доказательство.*  $\text{ord } g = |\langle g \rangle| \mid |G|$ . □

**Следствие 3.** Если  $G$  — конечная группа порядка  $n$ , то  $\forall g \in G : g^n = e$  в  $G$ .

*Доказательство.* По следствию 2:  $n = \text{ord } g \cdot k \Rightarrow g^n = g^{(\text{ord } g) \cdot k} = e^k = e$ . □

**Пример.** Пусть  $G = \mathbb{Z}_p^*$ ,  $p$  — простое,  $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$ . По следствию 3:

$\forall a \in \mathbb{Z}_p^* : a^{p-1} = 1$  в  $\mathbb{Z}_p^*$ , отсюда  $\forall a \in \mathbb{Z}, p \nmid a : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  — малая теорема Ферма.

**Следствие 4.** Любая группа  $G$  простого порядка  $p$  является циклической.

*Доказательство.*  $\forall a \in G, a \neq e : \text{ord } a \neq 1, \text{ord } a \mid |G| = p \Rightarrow \text{ord } a = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$ . □

**Упражнение.** Доказать, что с точностью до изоморфизма существует ровно две группы порядка 4 —  $\mathbb{Z}_4$  и  $V_4$ .

*Доказательство.* Пусть  $G$  — группа порядка 4. Заметим, что по следствию 2 порядок неединичного элемента в  $G$  может быть равен либо 2, либо 4. Если в  $G$  есть элемент порядка 4, то  $G$  циклическая, а тогда по теореме о классификации циклических групп  $G \simeq \mathbb{Z}_4$ .

Пусть  $G = \{e, a, b, c\}, \text{ord } a = \text{ord } b = \text{ord } c = 2$ . Посмотрим, чему может быть равно  $ab$ :

- $ab = e \Rightarrow aab = a \Rightarrow b = a$  — противоречие;
- $ab = a \Rightarrow aab = aa \Rightarrow b = e$  — противоречие;
- $ab = b \Rightarrow abb = bb \Rightarrow a = e$  — противоречие.

Отсюда  $ab = c$  — аналогично произведение любых двух различных неединичных элементов равно третьему. Отсюда таблица Кэли для  $G$  имеет вид

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

откуда видно, что  $G \simeq V_4$ . □



**Упражнение.** Доказать, что если в группе  $G$  все неединичные элементы имеют порядок 2, то  $G$  — абелева.

*Доказательство.*  $\text{ord } a = 2 \implies a = a^{-1} \implies \forall a, b \in G : ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$ .  $\square$

**Пример.**  $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$ ,  $g = (13) \Rightarrow gH \neq Hg$

**Определение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется нормальной, если

$$\begin{aligned} \forall g \in G : gH = Hg &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} = H \iff \\ &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H \iff \forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H \end{aligned}$$

Обозначение:  $H \trianglelefteq G$ .

*Эквивалентность определений:*

- $1 \iff 2$  — очевидно;
- $2 \iff 3$ :  
 $\Leftarrow$ :  $gHg^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$  — из условия на всевозможные  $g$  получаем равенство;  
 $\Rightarrow$  — очевидно;
- $3 \iff 4$  — из определения смежного класса.

$\square$

**Примеры.**

1.  $A_n \trianglelefteq S_n$ , так как  $\forall \sigma \in S_n, \forall \tau \in A_n : \sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$ .
2.  $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$ , так как  $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall B \in SL_n(\mathbb{R}) : \det(ABA^{-1}) = \det B = 1 \Rightarrow ABA^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$ .

**Утверждение.** В абелевой группе любая подгруппа является нормальной.

**Упражнение.** Докажите, что если  $|G : H| = 2$ , то  $H \trianglelefteq G$  для произвольной группы  $G$  и произвольной подгруппы  $H \leq G$ .

*Доказательство.* Если  $|G : H| = 2$ , то  $G$  разбивается на два непересекающихся левых (правых) смежных класса по  $H$ . Очевидно, что один из этих классов в обоих случаях — сама подгруппа  $H$ . Тогда  $\forall g \in G \setminus H$  группа  $G$  разбивается на левые смежные классы  $H$  и  $gH$ , а также на правые смежные классы  $H$  и  $Hg$ , откуда  $gH = Hg$ . Также очевидно, что  $\forall h \in H : hH = H = Hh$ . Значит,  $\forall g \in G : gH = Hg \implies H \trianglelefteq G$ .  $\square$

## 1.4 Факторгруппа

**Утверждение.** Пусть  $G$  — группа,  $H \trianglelefteq G$ . Тогда множество всех смежных классов  $G$  по  $H$  :  $G/H = \{eH, aH, \dots\}$  образует группу относительно операции  $aH \cdot bH = abH$ .

*Доказательство.*

1. Проверим корректность операции, т.е.  $\begin{cases} aH = \tilde{a}H \\ bH = \tilde{b}H \end{cases} \implies abH = \tilde{a}\tilde{b}H$ .

Действительно, если  $\begin{cases} a = \tilde{a}h_a \\ b = \tilde{b}h_b \end{cases}$  из равенства смежных классов, то:

$$\forall x \in abH \implies \exists h \in H : x = abh = \tilde{a}h_a\tilde{b}h_bh = \tilde{a}\tilde{b}h'h_bh \in \tilde{a}\tilde{b}H$$

$$(H \trianglelefteq G \implies Hb = bH \implies \exists h' \in H : h_a\tilde{b} = \tilde{b}h')$$

2. Проверим, что это группа:

- Ассоциативность:

$$aH(bH \cdot cH) = aH(bcH) = a(bc)H = (ab)cH = (abH)cH = (aH \cdot bH)cH$$

- Нейтральный элемент:

$$eH = H : aH \cdot eH = aeH = aH = eaH = eH \cdot aH$$

- Обратный элемент:

$$\forall aH \exists a^{-1}H : aH \cdot a^{-1}H = eH = a^{-1}H \cdot aH$$

□

**Определение.** Группа  $G/H$  называется факторгруппой  $G$  по  $H$ .

*Замечание.* Если  $H \not\trianglelefteq G$ , то операция  $aH \cdot bH = abH$  некорректна:

$$\langle (12) \rangle \leq S_3 : (13)H = (132)H, (23)H = (123)H;$$

$$(13)(23)H = (132)H \neq H = (123)(123)H$$

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ ;
2.  $A_n \trianglelefteq S_n, S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$  (по чётности);
3.  $\mathbb{R} \trianglelefteq \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$  ( $bi + \mathbb{R} \mapsto b$ ).

## 1.5 Гомоморфизмы групп

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e), (\tilde{G}, \circ, \tilde{e})$  — группы. Отображение  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  называется гомоморфизмом групп  $G$  и  $\tilde{G}$ , если  $\forall a, b \in G \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$ .

*Замечание.* В частности, изоморфизм — биективный гомоморфизм.

**Утверждение** (Свойства гомоморфизмов).

1.  $\varphi(e) = \tilde{e}$ ;
2.  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

**Определение.** Множество  $\text{Im } \varphi = \{b \in \tilde{G} \mid \exists a \in G : \varphi(a) = b\}$  — образ гомоморфизма. Множество  $\text{Ker } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = \tilde{e}\}$  — ядро гомоморфизма.

**Утверждение 1.**

1.  $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$ ;
2.  $\text{Ker } \varphi \leq G$ .

*Доказательство.*

1.  $\text{Im } \varphi \subseteq \tilde{G}$ 
  - $x, y \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists a, b \in G : x = \varphi(a), y = \varphi(b) \Rightarrow xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \text{Im } \varphi$ ;
  - $\tilde{e} = \varphi(e) \in \text{Im } \varphi$ ;
  - $\forall x \in \text{Im } \varphi \exists a \in G : \varphi(a) = x \Rightarrow x^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \text{Im } \varphi$

Отсюда  $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$ .

2.  $\text{Ker } \varphi \subseteq G$ 
  - $\forall a, b \in \text{Ker } \varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow ab \in \text{Ker } \varphi$ ;
  - $\tilde{e} = \varphi(e) \Rightarrow e \in \text{Ker } \varphi$ ;
  - $\forall a \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = \tilde{e}^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker } \varphi$

Отсюда  $\text{Ker } \varphi \leq G$ .

$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow ghg^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$ .

□

**Утверждение 2.**  $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$ .

В частности,  $\varphi$  инъективно  $\iff \text{Ker } \varphi = \{e\}$ .

*Доказательство.*

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \tilde{e} \iff \varphi(ab^{-1}) = \tilde{e} \iff$$

$$ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$$

□

**Пример.**  $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* : \varphi(A) = \det A$ .

$\text{Ker } \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^* \implies \mathbb{R}^* \simeq GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$ .

**Теорема** (О гомоморфизме). Пусть  $G, \tilde{G}$  — группы,  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  — гомоморфизм.

Тогда  $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

*Доказательство.* Для начала заметим, что  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$ , поэтому факторгруппа  $G/\text{Ker } \varphi$  определена.

Рассмотрим  $\psi : g\text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(g)$ :

- Корректность:

По утверждению 2:  $g_1\text{Ker } \varphi = g_2\text{Ker } \varphi \implies \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ ;

- Биективность:

Сюръективность:  $\forall b \in \text{Im } \varphi \exists a \in G : \varphi(a) = b \implies \psi(a\text{Ker } \varphi) = b$ ;

Инъективность: по утверждению 2:  $\psi(a\text{Ker } \varphi) = \psi(b\text{Ker } \varphi) \implies \varphi(a) = \varphi(b) \implies a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$ ;

- Сохранение операции:

$$\begin{aligned} \psi((g_1\text{Ker } \varphi)(g_2\text{Ker } \varphi)) &= \psi(g_1g_2\text{Ker } \varphi) = \varphi(g_1g_2) = \\ &= \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1\text{Ker } \varphi)\psi(g_2\text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

Отсюда  $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$  — изоморфизм.

□

**Пример.** Пусть  $G = S_n, \tilde{G} = \mathbb{R}^*, \varphi(\sigma) = \text{sgn } \sigma$ .

Тогда из теоремы о гомоморфизме:

$$\text{Im } \varphi = \{\pm 1\}, \text{Ker } \varphi = A_n \implies S_n/A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

**Следствие 1.** Гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  — изоморфизм  $\iff \begin{cases} \text{Ker } \varphi = \{e\} \\ \text{Im } \varphi = \tilde{G} \end{cases}$

*Доказательство.*

$\implies$  — очевидно из биективности;

$\impliedby$  — изоморфизм из теоремы совпадёт с  $\varphi$ . □

**Следствие 2.** Если  $|G| < \infty$ , то  $|G| = |\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi|$ .

*Доказательство.*  $|G| = |G/\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi| = |\text{Im } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi|$ . □

**Утверждение.** Пусть  $G$  — группа,  $H \trianglelefteq G$ . Тогда  $\exists$  такая группа  $\tilde{G}$ , что  $\exists$  сюръективный гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow \tilde{G}$ , причём  $\text{Ker } \pi = H$ .

*Доказательство.* Подходят  $\tilde{G} = G/H$ ,  $\pi : g \mapsto gH$ . □

**Определение.** Приведённый выше гомоморфизм  $\pi : G \mapsto G/H$  называется каноническим (естественным, натуральным) гомоморфизмом из  $G$  в  $G/H$ .

**Определение.** Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

**Утверждение.** Пусть  $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$  — произвольный эпиморфизм с ядром  $H$ . Тогда  $\exists$  изоморфизм  $\psi : G/H \rightarrow \tilde{G}$  такой, что  $\varphi = \psi \circ \pi$ , где  $\pi$  — натуральный гомоморфизм из  $G$  в  $G/H$ .

*Доказательство.* По теореме о гомоморфизме  $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

Так как  $\varphi$  — сюръекция,  $\text{Im } \varphi = \tilde{G}$ , также по условию  $\text{Ker } \varphi = H$ . Тогда  $\psi : G/H \rightarrow \tilde{G}$  — изоморфизм, заданный в доказательстве теоремы о гомоморфизме:  $\psi : gH \mapsto \varphi(g)$ .

Взяв этот изоморфизм, получим  $\varphi = \psi \circ \pi$  (так как  $g \xrightarrow{\pi} gH \xrightarrow{\psi} \varphi(g)$ ). □

## 2 Свободные группы

**Определение.** Тривиальные (групповые) соотношения — соотношения, которые выводятся из аксиом группы (и, соответственно, есть в любой группе).

Построим группу, в которой нет других соотношений.

**Определение.** Пусть  $A$  — множество символов (букв),  $A^{-1}$  — множество символов (букв)  $a^{-1}$ , где  $a \in A$ .

Условия на эти множества:

$$1. \forall a^{-1} \in A^{-1} \implies a^{-1} \notin A;$$

$$\forall a \in A \implies a \notin A^{-1};$$

$$2. (a^{-1})^{-1} = a;$$

Буквы  $a, a^{-1}$  назовём взаимно обратными.

Множество  $A^{\pm 1} = A \sqcup A^{-1}$  называется алфавитом.

Слово в алфавите  $A^{\pm 1}$  — конечная последовательность букв  $X = x_1 \dots x_k$ , где  $x_i \in A^{\pm 1}$ .

Длина слова  $X$  (обозначается  $|X|$ ) — количество букв в  $X$ .

**Пример.**  $A = \{a, b\} : X = abaab^{-1} \Rightarrow |X| = 5$ .

**Определение.** Слово  $X = x_1 \dots x_k$  — сократимое, если  $\exists i \in \{1, \dots, k-1\} : x_i = x_{i+1}^{-1}$ .

Сокращением взаимно обратных букв назовём вычёркивание пары  $x_i, x_{i+1}$  из  $X$  (получим слово длины  $|X| - 2$ ).

За конечное число сокращений получим слово  $\tilde{X}$ , не являющееся сократимым — такое  $\tilde{X}$  называется результатом полного сокращения слова  $X$ .

**Определение.** Рассмотрим множество  $F(A)$  всех несократимых слов в  $A^{\pm 1}$ .

Введём бинарную операцию на  $F(A)$ : пусть  $X = x_1 \dots x_k, Y = y_1 \dots y_m$ .

Если  $x_k \neq y_1^{-1}$ , то  $XY$  — конкатенация (приписывание)  $X$  и  $Y$ :

$$XY = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m, |XY| = k + m.$$

Если  $x_k = y_1^{-1}$ , то  $XY$  — результат полного сокращения слова  $x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m$ .

**Пример.**  $(abcd a^{-1} b)(b^{-1} a d^{-1} a a b) = abcaab$ .

**Определение.** Если  $|X| = 0$ , то  $X$  называется пустым словом (обозначим  $\lambda$ ).

Пустое слово по определению несократимо и лежит в  $F(A)$ .

**Теорема.**  $F(A)$  с приведённой выше бинарной операцией — группа.

*Доказательство.*

1. Ассоциативность:

Пусть  $X = x_1 \dots x_k, Z = z_1 \dots z_m$ .

Случай  $|Y| = 0 \implies Y = \lambda$  очевиден ( $XZ = XZ$ );

Индукция по длине слова  $Y$ :

База индукции:  $|Y| = 1 \implies Y = a \in A^{\pm 1}$ . Индукция по  $|X| + |Z|$ :

База внутренней индукции:

$|X| + |Z| = 0$  — очевидно ( $a = a$ );

$|X| + |Z| = 1$  — очевидно (одно из слов  $X, Z$  пустое);

Шаг внутренней индукции ( $k + m - 2 \rightarrow k + m$ ) — рассмотрим случаи:

- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(YZ) = x_1 \dots x_k a z_1 \dots z_m = (XY)Z$ ;
- $a^{-1} = x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(aZ) = X(a z_1 \dots z_m) =$   
 $=$  результат полного сокращения  $x_1 \dots x_{k-1} a^{-1} a z_1 \dots z_m =$   
 $=$  результат полного сокращения  $x_1 \dots x_{k-1} z_1 \dots z_m = (Xa)Z$ ;
- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} = z_1$  — аналогично предыдущему;
- $a^{-1} = x_k, a^{-1} = z_1$ : пусть  $X = X' a^{-1}, Z = a^{-1} Z'$ . Тогда:  
 $X(aZ) = X(a(a^{-1} Z')) = XZ' = (X' a^{-1}) Z'$   
 $(Xa)Z = (X' a^{-1} a) Z = X' Z = X' (a^{-1} Z')$   
 При этом  $|X'| + |Z'| = k + m - 2$ , то есть  $X' (a^{-1} Z') = (X' a^{-1}) Z'$  по предположению внутренней индукции.

Во всех случаях  $X(aZ) = (Xa)Z \implies$  база доказана.

Шаг индукции: Пусть  $Y = y_1 \dots y_l$ . Тогда:

$$\begin{aligned} X(YZ) &= X(y_1 \dots y_l \cdot Z) = X((y_1 \dots y_{l-1} \cdot y_l)Z) \stackrel{1}{=} X((y_1 \dots y_{l-1}) \cdot (y_l Z)) \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} (X \cdot y_1 \dots y_{l-1})(y_l Z) \stackrel{3}{=} (X \cdot y_1 \dots y_l)Z = (XY)Z \end{aligned}$$

1, 3 — из утверждения базы индукции; 2 — по предположению индукции.

2.  $\lambda$  — нейтральный элемент;

3. обратный элемент к  $x_1 \dots x_k$  — элемент  $x_k^{-1} \dots x_1^{-1}$ .

□

**Определение.** Построенная группа  $F(A)$  называется свободной группой с базисом  $A$ . ( $A$  также называется свободной порождающей системой группы).

Любая группа, изоморфная  $F(A)$ , также называется свободной.

**Утверждение.** Пусть  $H \leq SL_2(\mathbb{Z}) : H = \langle \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \rangle$ .

Тогда  $H \simeq F(A)$  с базисом  $A = \{a, b\}$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Утверждение.** Все базисы свободной группы равномощны.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Определение.** Ранг свободной группы — мощность её базиса.

*Замечание.* Заметим, что в  $F(A)$  результат умножения определён однозначно  $\implies$  однозначно определён элемент  $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ , где  $x_i \in A^{\pm 1}$ .

Тогда если считать слово  $x_1 \dots x_k$  результатом умножения  $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$ , то можно опускать знак умножения, и в этом смысле работать и с сократимыми словами.

**Пример.**  $abb^{-1}ba^{-1}a = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a = ab \in F(A)$ .

**Теорема 1** (Универсальное свойство свободной группы).

Пусть  $G$  — группа,  $\{g_i \mid i \in I\} \subset G$  — произвольное множество её элементов.

Рассмотрим свободную группу  $F(A)$  с базисом  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ .

Тогда отображение  $\varphi : a_i \mapsto g_i$  продолжается до гомоморфизма  $\varphi : F(A) \rightarrow G$ , причём единственным образом.

*Доказательство.* Пусть  $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$  — несократимое слово из  $F(A)$ , где  $\varepsilon_i = \pm 1, a_{i_j} \in A$ . Зададим  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  по правилу  $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$ .

Проверим, что  $\varphi$  — гомоморфизм ( $W, \tilde{W} \in F(A)$ ,  $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \tilde{W} = a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}$ ):

$$\begin{aligned} \varphi(W\tilde{W}) &= \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_{k-s}}^{\varepsilon_{k-s}} a_{j_{s+1}}^{\tau_{s+1}} \dots a_{j_m}^{\tau_m}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_{k-s}}^{\varepsilon_{k-s}} g_{j_{s+1}}^{\tau_{s+1}} \dots g_{j_m}^{\tau_m} \\ &= g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m} = (g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}) \cdot (g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(W)\varphi(\tilde{W}) \end{aligned}$$

(где  $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_{k-s}}^{\varepsilon_{k-s}} a_{j_{s+1}}^{\tau_{s+1}} \dots a_{j_m}^{\tau_m}$  — результат полного сокращения  $W\tilde{W}$ )

Единственность такого гомоморфизма очевидна:

$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varphi(a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots \varphi(a_{i_k})^{\varepsilon_k} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$  — определено однозначно. □

**Пример.** (несвободной группы)

$S_3 = \langle (12), (123) \rangle : \forall g \in S_3 \ g^6 = id$ . Попытаемся продолжить до гомоморфизма

$S_3 \rightarrow Q_8$  отображение  $\varphi : (12) \mapsto i, (123) \mapsto j$ :

$-1 = i^2 = \varphi((12))^2 = \varphi((12)^2) = \varphi(id) = 1$  — противоречие.



**Следствие 1.** Пусть  $G$  — группа,  $M = \{g_i \mid i \in I\}$  — порождающее множество  $G$ ,  $F(A)$  — свободная группа с базисом  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ .

Тогда  $\exists!$  сюръективный гомоморфизм  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  такой, что  $\forall i \in I : \varphi(a_i) = g_i$ .

*Доказательство.* Достаточно показать, что в этом случае гомоморфизм из доказательства теоремы сюръективен — это следует из того, что множество  $\{g_i \mid i \in I\}$  порождает группу  $G$  (каждый элемент представим как  $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k})$ ).  $\square$

**Следствие 2.** Любая группа  $G$  изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы по некоторой её нормальной подгруппе.

*Доказательство.* Пусть  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  — гомоморфизм из следствия 1.

Так как  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq F(A)$ , из теоремы о гомоморфизме  $G = \text{Im } \varphi \simeq F(A)/\text{Ker } \varphi$ .  $\square$

**Определение.** Сюръективный гомоморфизм  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  — из следствия 1 называется копредставлением группы  $G$ .

*Замечание.* Копредставление зависит от выбора порождающего множества  $M$ .

## 2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями

По следствию 2:  $G \simeq F(A)/N$ , где  $N \trianglelefteq F(A)$ . Отсюда задание группы  $G$  сводится к заданию  $A$  и  $N$ .

$N$  — нормальная  $\implies \forall f \in F(A), \forall h \in N : fhf^{-1} \in N$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{R} \subseteq F(A)$ . Нормальным замыканием множества  $\mathcal{R}$  в группе  $F(A)$  называется наименьшая (по включению) нормальная подгруппа, содержащая  $\mathcal{R}$ . Обозначается  $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$

**Утверждение.**

$$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} = \{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\}$$

*Доказательство.*

Пусть  $\{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\} = H$ . Тогда:

$$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \trianglelefteq F(A) \implies \forall r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i \in \{\pm 1\} : f_i r_i^{\varepsilon_i} f_i^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies H \subseteq \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}. \text{ Осталось показать, что } H \trianglelefteq F(A):$$

$$\forall h \in H, g \in F(A) : ghg^{-1} = g(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) g^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= ((gf_1)r_1^{\varepsilon_1}(f_1^{-1}g^{-1}))\dots((gf_k)r_k^{\varepsilon_k}(f_k^{-1}g^{-1})) = \\
&= ((gf_1)r_1^{\varepsilon_1}(gf_1)^{-1})\dots((gf_k)r_k^{\varepsilon_k}(gf_k)^{-1}) \in H
\end{aligned}$$

Отсюда минимальная группа, содержащая  $\mathcal{R}$ , в точности равна  $H$ .  $\square$

**Утверждение.** Любую нормальную подгруппу  $N \trianglelefteq F(A)$  можно задать как  $N = \langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle^{F(A)}$  для подходящего  $\mathcal{R} \subset F(A)$ .

*Доказательство.* Очевидно, подойдёт  $\mathcal{R} = N$ .  $\square$

**Элементарные преобразования над словами в  $F(A)$ :**

(под словами в  $F(A)$  подразумеваются любые произведения букв, а не только элементы  $F(A)$ )

- ЭП1:  $W = W_1a^\varepsilon a^{-\varepsilon}W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1W_2$ , где  $a \in A, \varepsilon = \pm 1$ ;
- ЭП2:  $W = W_1r^\varepsilon W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1W_2$ , где  $r \in \mathcal{R}, \varepsilon = \pm 1$ ;
- ЭП1' — обратное к ЭП1;
- ЭП2' — обратное к ЭП2;

**Определение.** Назовём слова  $W$  и  $\tilde{W}$   $\mathcal{R}$ -эквивалентными, если от  $W$  можно с помощью ЭП перейти к  $\tilde{W}$ .

**Утверждение.**  $\mathcal{R}$ -эквивалентность — отношение эквивалентности.

*Доказательство.*

- Рефлексивность — очевидно;
- Симметричность — следует из обратимости каждого ЭП;
- Транзитивность — очевидно;

$\square$

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $W \in \langle\langle\mathcal{R}\rangle\rangle^{F(A)}$ ;
2.  $W$   $\mathcal{R}$ -эквивалентно пустому слову  $\lambda$ ;
3. Если для произвольной группы  $G$  с порождающим множеством  $M = \{g_i \mid i \in I\}$  (т.е. заданным копредставлением  $\varphi : F(A) \rightarrow G$ ) верно, что  $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$  в  $G$ , то  $\varphi(W) = 1$  в  $G$ .

*Доказательство.*

- $1 \implies 2 : W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies W = (f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \xrightarrow[\Theta_{\Pi 2}]{} W \sim \tilde{W} = (f_1 f_1^{-1}) \dots (f_k f_k^{-1}) \xrightarrow[\Theta_{\Pi 1}]{} \lambda;$

- $2 \implies 3$  Пусть  $\varphi : F(A) \rightarrow G$  взят из условия теоремы. Покажем, что при ЭП образ слова не меняется:

1.  $\varphi(W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2) = \varphi(W_1) \varphi(a)^\varepsilon \varphi(a)^{-\varepsilon} \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2);$
2.  $\varphi(W_1 r^\varepsilon W_2) = \varphi(W_1) \varphi(r)^\varepsilon \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \cdot 1^\varepsilon \cdot \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2);$

При ЭП, обратных этим, образ слова аналогично не изменяется.

Тогда если  $W \underset{\Theta_{\Pi}}{\sim} \lambda$ , то  $\varphi(W) = \varphi(\lambda) = 1$ .

- $3 \implies 1 : \forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1 \implies r \in \text{Ker } \varphi; \varphi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \varphi.$   
Рассмотрим в качестве  $G$  группу  $F(A)/N$ , где  $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ , а в качестве  $\varphi - \pi$  (естественный гомоморфизм  $F(A) \rightarrow F(A)/N$ ).  
 $r \in N \implies \pi(r) = 1$ . Тогда по условию 3:  $\pi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \pi = N$ .

□

**Определение.** Если  $W \in F(A)$  удовлетворяет любому из условий теоремы 2, то говорят, что соотношение  $W = 1$  следует из соотношений  $\{r = 1 \mid r \in \mathcal{R}\}$  или является следствием соотношений  $\mathcal{R}$ .

**Определение.** Рассмотрим копредставление произвольной группы  $G$ , т.е.  $\varphi : F(A) \rightarrow G$ , где  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ . Пусть слово  $W \in F(A)$  ( $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ ) такое, что  $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$  в  $G$ .

Тогда говорят о соотношении  $W = 1$ .

(Для упрощения записи вместо  $g_i$  пишут  $a_i$ ).

**Определение.** Множество  $\mathcal{R} \subset F(A)$  называется определяющим множеством соотношений группы  $G$ , если любое соотношение группы  $G$  следует из  $\mathcal{R}$ .

При этом элементы  $\mathcal{R}$  называются определяющими соотношениями  $G$ . Обозначается  $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$  (данная запись также называется копредставлением  $G$ ).

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle; a^{12} = 1$  — следствие;
2.  $V_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle; (ab)^2 = 1$  — следствие.

**Теорема** (Теорема Дика).

Пусть  $G$  — группа, заданная копредставлением  $\langle A \mid R \rangle$ , где  $A = \{a_i \mid i \in I\}$ . Пусть  $H$  — произвольная группа,  $\{h_i \mid i \in I\} \subset H$  — произвольное множество её элементов.

Тогда отображение  $\varphi : a_i \mapsto h_i \ \forall i \in I$  на порождающих группы  $G$  продолжается до гомоморфизма  $\varphi : G \rightarrow H$  тогда и только тогда, когда  $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$  в  $H$ .

*Доказательство.*

Я устал пытаться починить доказательство, которое было здесь ранее, поэтому теперь оно в корне изменено — данный вариант взят из материалов спецкурса А.А. Клячко ([1]) и кажется мне значительно более наглядным.

$\Rightarrow$ : По определению определяющих соотношений любое соотношение  $r = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathcal{R}$  равно 1 в  $G$ . Тогда если  $\varphi$  продолжается до гомоморфизма, то  $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = \varphi(1) = 1$  в  $H$ .

$\Leftarrow$ : Рассмотрим свободную группу  $F(A)$ . По универсальному свойству свободной группы отображение  $\varphi : a_i \mapsto h_i$  продолжается до гомоморфизма  $\varphi : F(A) \rightarrow H$ . Знаем, что  $\varphi(r) = 1 \ \forall r \in \mathcal{R}$ , т.е.  $\mathcal{R} \subseteq \text{Ker } \varphi$ . Также  $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq F(A)$  по свойству гомоморфизма, а так как  $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$  — наименьшая по включению нормальная подгруппа, содержащая  $\mathcal{R}$ , получаем  $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \subseteq \text{Ker } \varphi$ . Значит, корректно рассматривать  $\varphi$  как гомоморфизм  $F(A)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \rightarrow H$  (образ не зависит от представителя класса), а из определения копредставления  $F(A)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \simeq G$ . Отсюда получили гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow H$ , являющийся продолжением исходного отображения, что и требовалось.  $\square$

## 3 Прямое произведение групп

### 3.1 Внешнее прямое произведение

Пусть  $G_1, \dots, G_k$  — группы.

$$G = G_1 \times \dots \times G_k = \{(g_1, \dots, g_k) | g_i \in G_i\}.$$

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = (g_1 \tilde{g}_1, \dots, g_k \tilde{g}_k)$$

( $g_i \tilde{g}_i$  перемножаются по правилу бинарной операции на  $G_i$ ).

**Утверждение.**  $(G, \cdot)$  — группа.

*Доказательство.*

1.  $(a_1, \dots, a_k)((b_1, \dots, b_k)(c_1, \dots, c_k)) = (a_1(b_1 c_1), \dots, a_k(b_k c_k)) = ((a_1 b_1) c_1, \dots, (a_k b_k) c_k) = ((a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_k))(c_1, \dots, c_k)$
2. Нейтральный элемент —  $(e_1, \dots, e_k)$  ( $e_i$  — нейтральный в  $G_i$ )
3.  $(g_1, \dots, g_k)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1})$

□

**Определение.** Данная группа  $(G, \cdot)$  называется (внешним) прямым произведением групп  $G_1, \dots, G_k$ . Обозначается  $G = G_1 \times \dots \times G_k$ ;  $G_i$  называются множителями.

В аддитивной терминологии те же рассуждения определяют прямую сумму  $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$ , где  $G_i$  — слагаемые.

**Примеры.**

1.  $G_1 = \mathbb{Z}_3, G_2 = S_3, G = G_1 \times G_2$ .  
 $(1, (12)) \cdot (2, (13)) = (1 + 2, (12)(13)) = (0, (132)).$
2.  $D_n(\mathbb{F}) \simeq \underbrace{\mathbb{F}^* \times \dots \times \mathbb{F}^*}_n$  ( $D_n(\mathbb{F})$  — группа диагональных матриц порядка  $n$ ).

**Утверждение.**

1. Если  $(m, n) = 1$ , то  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{nm}$  — циклическая группа;
2. Если  $(m, n) \neq 1$ , то  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  — не циклическая.

*Доказательство.*

1. Обозначим за  $[a]_s \in \mathbb{Z}_s$  класс вычетов по модулю  $s$ , содержащий  $a$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  такое, что  $\varphi : [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$ . Очевидно, что это гомоморфизм:

$$\varphi([a]_{mn} \cdot [b]_{mn}) = ([ab]_m, [ab]_n) = ([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) = \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})$$

Найдём  $\text{Ker } \varphi$  :

$$\varphi([a]_{mn}) = ([0]_m, [0]_n) \iff \begin{cases} m \mid a \\ n \mid a \end{cases} \xRightarrow{(m,n)=1} mn \mid a \implies \text{Ker } \varphi = \{[0]_{mn}\}$$

По теореме о гомоморфизме  $\text{Im } \varphi \simeq \mathbb{Z}_{mn}/\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_{mn} \implies |\text{Im } \varphi| = mn$ .

Так как  $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$  и  $\text{Im } \varphi \leq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ,  $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ .

Отсюда  $\varphi$  — биекция (инъекция из  $\text{Ker } \varphi = \{e\}$ ), т.е.  $\varphi$  — изоморфизм.

2. Пусть  $(m, n) = d \neq 1$  ( $m = dk_1, n = dk_2$ ). Тогда  $\forall g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ :

$$(g_1, g_2)^{dk_1k_2} = (g_1^{dk_1k_2}, g_2^{dk_1k_2}) = (0^{k_2}, 0^{k_1}) = (0, 0)$$

Отсюда  $\text{ord}(g_1, g_2) \mid dk_1k_2 = \frac{mn}{d} < mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n|$ . Значит,  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$  не является циклической.

□

**Следствие.** Пусть  $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$  — разложение на простые множители. Тогда  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из теоремы.

□

**Следствие.** (Китайская теорема об остатках) Если числа  $a_1, \dots, a_n$  попарно взаимно просты, то для любых целых  $r_1, \dots, r_n$  ( $0 \leq r_i < a_i$ )  $\exists! N$  ( $0 \leq N < a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ) такой, что  $N \equiv r_i \pmod{a_i}$

*Доказательство.* Из теоремы следует, что  $\mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} \simeq \mathbb{Z}_a$  ( $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ). Это означает, что набор остатков  $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}$  изоморфизм из теоремы однозначно переводит в элемент  $N \in \mathbb{Z}_a$  такой, что  $r_i = [N]_{a_i}$ , что и требовалось.

□

## 3.2 Внутреннее прямое произведение

**Определение.** Пусть  $G$  — группа,  $H_1, \dots, H_k \leq G$ .

$G$  раскладывается в (внутреннее) прямое произведение подгрупп  $H_1, \dots, H_k$ , если:

1.  $\forall g \in G \exists! h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k$ ;
2.  $\forall i \neq j : \forall h_i \in H_i, h_j \in H_j \ h_i h_j = h_j h_i$ .

Обозначается  $G = H_1 \times \dots \times H_k$  ( $G = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$  в аддитивной терминологии).

*Замечание.* Из определения следует, что  $(h_1 \dots h_k)(\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) = (h_1 \tilde{h}_1) \dots (h_k \tilde{h}_k)$ .

**Определение.** Пусть  $H, N \leq G$ . Обозначим  $NH = \{nh | n \in N, h \in H\}$

**Утверждение.** Пусть  $N \trianglelefteq G, H \leq G$ . Тогда  $NH$  — подгруппа в  $G$ , причём  $NH = HN$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $(n_1 h_1)(n_2 h_2) = n_1 \underbrace{(h_1 n_2 h_1^{-1})}_{=\tilde{n}} \underbrace{h_1 h_2}_{=\tilde{h}} = \tilde{n} \tilde{h} \in NH$ .

$e \in N \cap H \implies e \cdot e = e \in NH$ .

$(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1}h)h^{-1} \in NH$ .

Отсюда  $NH$  — подгруппа. Покажем, что  $NH = HN$ :

$$\forall nh \in NH : nh = (hh^{-1})nh = h(h^{-1}nh) \in HN \implies NH \subseteq HN$$

$$\forall hn \in HN : hn = hn(h^{-1}h) = (hnh^{-1})h \in NH \implies HN \subseteq NH$$

Отсюда  $NH = HN$ . □

**Лемма 1.** Пусть  $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{e\}$ . Тогда  $\forall h \in H, n \in N \ nh = hn$ .

*Доказательство.* Рассмотрим выражение  $(hn)(nh)^{-1} = hnh^{-1}n^{-1}$ :

$$hnh^{-1}n^{-1} = h(nh^{-1}n^{-1}) \in H; \quad hnh^{-1}n^{-1} = (hnh^{-1})n^{-1} \in N$$

Значит,  $hnh^{-1}n^{-1} \in H \cap N = \{e\} \implies (hn)(nh)^{-1} = e \implies hn = nh$  □

**Теорема 1.** Пусть  $H_1, H_2 \leq G$ . Тогда  $G = H_1 \times H_2 \iff \begin{cases} (1) \ H_1, H_2 \trianglelefteq G \\ (2) \ H_1 \cap H_2 = \{e\} \\ (3) \ G = H_1 H_2 \end{cases}$

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $G = H_1 \times H_2$ .

(3) — очевидно из пункта 1 определения.

(1):  $\forall h_1 \in H_1, g \in G : g = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \ (\tilde{h}_1 \in H_1, \tilde{h}_2 \in H_2) \implies$

$$gh_1 g^{-1} = \tilde{h}_1 (\tilde{h}_2 h_1 \tilde{h}_2^{-1}) \tilde{h}_1^{-1} \underset{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_1 h_1 \tilde{h}_1^{-1} \in H_1$$

Отсюда  $H_1 \trianglelefteq G$  (аналогично  $H_2 \trianglelefteq G$ ).

(2): Пусть  $\exists h \in H_1 \cap H_2$ . Тогда  $h = he = eh$  — два разложения на произведение

элементов подгрупп. Они совпадают только в случае  $h = e$ , т.е.  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ .  
 $\Leftarrow$ : Пусть даны условия (1)-(3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3):  $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 h_2$ .

Допустим, что это разложение не единственно, т.е.  $h_1 h_2 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$ .

Тогда  $\tilde{h}_1^{-1} h_1 = \tilde{h}_2 h_2^{-1}$ , а так как  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ , имеем  $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_2$ .  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $H_1, \dots, H_k \leq G$ .

$$\text{Тогда } G = H_1 \times \dots \times H_k \iff \begin{cases} (1) H_1, \dots, H_k \leq G \\ (2) \forall i H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\} \\ (3) G = H_1 \dots H_k \end{cases}$$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$ : Пусть  $G = H_1 \times \dots \times H_k$ .

(3) — очевидно из пункта 1 определения.

(1):  $\forall h_i \in H_i, g \in G : g = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k (\tilde{h}_i \in H_i) \Rightarrow$

$$gh_i g^{-1} = (\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) h_i (\tilde{h}_k^{-1} \dots \tilde{h}_1^{-1}) \underset{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_i h_i \tilde{h}_i^{-1} \in H_i$$

Отсюда  $H_i \leq G$ .

(2): Пусть  $\exists h \in H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle$ . Тогда  $h = he = eh$  — два разложения на произведение элементов подгрупп. Они совпадают только в случае  $h = e$ , т.е.  $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$ .

$\Leftarrow$ : Пусть даны условия (1)-(3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3):  $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k$ .

Допустим, что это разложение не единственно, т.е.  $h_1 \dots h_k = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k$ .

Тогда  $\forall i : \tilde{h}_i^{-1} h_i = \prod_{j \neq i} \tilde{h}_j h_j^{-1}$ , а так как  $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$ , имеем  $h_i = \tilde{h}_i$ .  $\square$

**Примеры.**

$$1. V_4 = \{e, a, b, c\} = \{e, a\} \times \{e, b\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2;$$

$$2. \mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \times U \ (z = r \cdot e^{iy}).$$

3.  $\mathbb{Z}$  не раскладывается в произведение нетривиальных подгрупп.

Предположим противное, т.е.  $\mathbb{Z} = H_1 \times \dots \times H_m$ . Подгруппы  $\mathbb{Z}$  имеют вид  $k\mathbb{Z}$ , т.е.  $\mathbb{Z} = k_1 \mathbb{Z} \times \dots \times k_m \mathbb{Z}, k_i \neq 0$ . Но тогда  $k_1 k_2 \in H_1 \cap H_2$  и  $k_1 k_2 \neq 0$ , что противоречит теореме 2.



### 3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением

#### Теорема 3.

1. Если группа  $G$  раскладывается в прямое произведение подгрупп  $H_1, \dots, H_k$ , то  $G$  изоморфна прямому произведению групп  $G_1, \dots, G_k$ , где  $\forall i \ G_i \simeq H_i$ ;
2. Если группа  $G$  изоморфна прямому произведению групп  $G_1, \dots, G_k$ , то  $\exists H_i \leq G$  такие, что  $G_i \simeq H_i$  и  $G$  раскладывается в прямое произведение  $H_1, \dots, H_k$ .

*Доказательство.*

1. Имеем:  $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi : G \rightarrow G_1 \times \dots \times G_k$ , где  $G_i = H_i$ , такое, что  $\forall g = h_1 \dots h_k \in G : \varphi(h_1 \dots h_k) = (h_1, \dots, h_k)$ . Это изоморфизм:

- Биекция — очевидна;
- Гомоморфизм:

$$\begin{aligned}\varphi((h_1 \dots h_k) \cdot (h'_1 \dots h'_k)) &= \varphi(h_1 h'_1 \dots h_k h'_k) = (h_1 h'_1, \dots, h_k h'_k) = \\ &= (h_1, \dots, h_k) \cdot (h'_1, \dots, h'_k) = \varphi(h_1 \dots h_k) \cdot \varphi(h'_1 \dots h'_k)\end{aligned}$$

2. Имеем:  $G_1, \dots, G_k$  — группы,  $G = \{(g_1, \dots, g_k) \mid g_i \in G_i\}$ .

Тогда  $H_i = \{(e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) \mid g_i \in G_i\}$  очевидно является подгруппой  $G$ , изоморфной  $G_i$ .

Покажем, что  $G = H_1 \times \dots \times H_k$ :

- $\forall g = (g_1, \dots, g_k) \in G \exists! h_i = (e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) : g = h_1 \dots h_k$ ;
- $\forall i \neq j, h_i = ((e, \dots, e, a_i, e, \dots, e)) \in H_i, h_j = (e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) \in H_j :$

$$h_i h_j = (e, \dots, e, a_i, e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) = h_j h_i$$

□

**Теорема 4.** Пусть  $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k, N_i \leq H_i$ . Тогда:

1.  $N_1 \times \dots \times N_k \leq G$ ;
2.  $G/(N_1 \times \dots \times N_k) \simeq (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно, что  $N_1 \times \dots \times N_k = N \leq G$ .

Покажем нормальность:  $\forall g = h_1 \dots h_k \in G, n = n_1 \dots n_k \in N$

$$gng^{-1} = (h_1 \dots h_k)(n_1 \dots n_k)(h_k^{-1} \dots h_1^{-1}) \underset{(n_i \in H_i)}{=} \overset{\in N_1}{(h_1 n_1 h_1^{-1})} \dots \overset{\in N_k}{(h_k n_k h_k^{-1})} \in N$$

2. Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : G \rightarrow (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$  такой, что  $\varphi : h_1 \dots h_k \mapsto (h_1 N_1, \dots, h_k N_k)$ . Это сюръективный гомоморфизм, причём  $\text{Ker } \varphi = N_1 \times \dots \times N_k$ . Отсюда по теореме о гомоморфизме получаем необходимое утверждение.

□

**Следствие.** Если  $G = H_1 \times H_2$ , то  $G/H_1 \simeq H_2, G/H_2 \simeq H_1$ .

## 4 Конечнопорождённые абелевы группы

*Замечание.* В данном разделе используется аддитивная терминология:

$(A, +)$  — абелева группа,  $\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}$ :

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_n, & n > 0; \\ 0, & a = 0; \\ \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{|n|}, & n < 0 \end{cases}$$

**Свойства.**  $(\forall a, b \in A, n, m \in \mathbb{Z})$

1.  $(n + m)a = na + ma$ ;

2.  $n(a + b) = na + nb$ ;

3.  $(nm)a = n(ma)$

*Доказательство.* Непосредственный разбор случаев — знаков  $m, n$ . □

**Определение.** (Целочисленной) линейной комбинацией элементов  $a_1, \dots, a_k \in A$  называется выражение  $n_1a_1 + \dots + n_ka_k$  ( $n_i \in \mathbb{Z}$ ).

Если элемент  $b \in A$  равен некоторой линейной комбинации  $a_1, \dots, a_k \in A$ , то говорят, что  $b$  выражается через  $a_1, \dots, a_k$ .

**Определение.** Система элементов  $a_1, \dots, a_k$  называется линейно зависимой, если  $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ , не все равные 0, такие, что  $n_1a_1 + \dots + n_ka_k = 0$ .

В противном случае система  $a_1, \dots, a_k$  называется линейно независимой.

**Пример.**  $A = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$ . Система из одного элемента  $(1, 1)$  — линейно зависима:  $12 \cdot (1, 1) = (0, 0)$

**Определение.** Пусть  $A$  — абелева группа,  $a_1, \dots, a_k \in A$ .

Будем обозначать  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \{n_1a_1 + \dots + n_ka_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$

(для бесконечного числа  $a_k$  — всевозможные конечные линейные комбинации)

**Утверждение.**  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$  — наименьшая подгруппа  $A$ , содержащая  $a_1, \dots, a_k$ .

*Доказательство.* Пусть  $H$  — наименьшая подгруппа, содержащая  $a_1, \dots, a_k$ . Тогда с одной стороны  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \subseteq H$  по определению подгруппы, а с другой стороны  $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , очевидно, подгруппа в  $A$ . Значит,  $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$  □

**Определение.** Если  $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , то говорят, что  $A$  порождается  $a_1, \dots, a_k$ . Элементы  $a_1, \dots, a_k$  называются порождающими (образующими).

**Определение.** Если  $\exists$  конечное множество элементов  $a_1, \dots, a_k \in A$ , что  $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , то  $A$  называется конечнопорождённой.

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Q}$  — не конечнопорождённая;
2.  $U$  (комплексные корни из 1) — не конечнопорождённая;
3.  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$  — конечнопорождённые (циклические);
4.  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  — конечнопорождённая, не циклическая (примеры систем порождающих —  $(1, 0), (0, 1)$  или  $(3, 0), (4, 5), (0, 1)$ )

**Определение.** Линейно независимая система порождающих группы  $A$  называется базисом (или свободной системой порождающих).

**Утверждение.** (не было в лекции)

$a_1, \dots, a_k$  — базис  $\iff$  любой элемент  $A$  выражается через  $a_1, \dots, a_k$  единственным образом.

*Доказательство.*

$\implies$ : Из определения базиса любой элемент имеет разложение по базису.

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = a = \alpha'_1 a_1 + \dots + \alpha'_n a_n \implies (\alpha_1 - \alpha'_1) a_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) a_n = 0$$

Отсюда из линейной независимости  $\alpha_i = \alpha'_i \forall i$ , т.е. разложение единственно.

$\impliedby$ : Любой элемент  $a \in A$  имеет разложение по  $a_1, \dots, a_n$  — система  $a_1, \dots, a_n$  порождает  $A$ . Разложение любого элемента единственно  $\implies 0$  имеет только тривиальное разложение  $\implies a_1, \dots, a_n$  линейно независимы.  $\square$

**Пример.**  $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$  — не имеет базиса: любая система элементов в ней линейно зависима ( $12 \cdot a = 0 \forall a \in A$ ).

**Определение.** Конечнопорождённая абелева группа, имеющая базис, называется свободной абелевой группой. По определению  $A = \{0\}$  — свободная абелева группа.

**Пример.**  $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$  — свободная абелева группа;

Базис —  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ . Проверим это:

1. Линейная независимость:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \implies (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0) \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

2. Порождаемость группы:

$$\forall a \in \mathbb{Z}^n : a = (a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

**Лемма.** (Основная лемма о линейной зависимости для абелевых групп)

Если абелева группа  $A$  обладает базисом из  $n$  элементов, то любая система из  $m > n$  элементов линейно зависима.

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис группы  $A$ ,  $a_1, \dots, a_m \in A$  — произвольные элементы. Тогда из определения базиса:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1n}e_n \longrightarrow (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ a_m = \alpha_{m1}e_1 + \dots + \alpha_{mn}e_n \longrightarrow (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{cases}$$

Строки  $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$  можно рассматривать как векторы из пр-ва  $\mathbb{Q}^n$  над  $\mathbb{Q}$ . Так как  $m > n$ , по ОЛЛЗ для векторных пространств система  $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m$  линейно зависима, т.е.  $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Q}$ , не все равные нулю, что  $\lambda_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \lambda_m \bar{\alpha}_m = 0$ .

Тогда если  $d$  — НОК знаменателей ненулевых  $\lambda_i$ , то  $(d\lambda_1)\bar{\alpha}_1 + \dots + (d\lambda_m)\bar{\alpha}_m = 0$  — нетривиальная целочисленная линейная комбинация, равная нулю.

Тогда  $(d\lambda_1)a_1 + \dots + (d\lambda_m)a_m = 0$ , т.е.  $a_1, \dots, a_m$  линейно зависимы.  $\square$

**Теорема 1.** Все базисы свободной абелевой группы  $A$  равномощны.

*Доказательство.* Очевидно следует из ОЛЛЗ для абелевых групп.  $\square$

**Определение.** Число элементов в базисе свободной абелевой группы  $A$  называется рангом группы  $A$ . Обозначается  $\text{rk } A$ . По определению  $A = \{0\} \implies \text{rk } A = 0$ .

**Теорема 2.** Все свободные абелевы группы ранга  $n$  изоморфны между собой (в частности, изоморфны  $\mathbb{Z}^n$ ).

*Доказательство.*

Пусть  $A$  — свободная абелева группа,  $\text{rk } A = n$ ,  $e_1, \dots, e_n$  — базис. Рассмотрим отображение  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}^n$  такое, что  $\forall a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in A \quad \varphi(a) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Покажем, что  $\varphi$  — изоморфизм:

1. Биекция — следует из единственности разложения по базису;
2. Гомоморфизм: пусть  $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ . Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n) = ((\alpha_1 + \beta_1), \dots, (\alpha_n + \beta_n)) = \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \varphi(a) + \varphi(b)\end{aligned}$$

Отсюда  $A \simeq \mathbb{Z}^n$ .

Если  $\text{rk } A = \text{rk } B = n$ , то  $A \simeq \mathbb{Z}^n \simeq B \implies A \simeq B$ . □

**Теорема 3.** Любая подгруппа  $B$  свободной абелевой группы  $A$  ранга  $n$  является свободной абелевой, причём  $\text{rk } B \leq n$ .

*Доказательство.* Случай  $n = 0$  очевиден. Индукция по  $n$ :

База:  $n = 1 \implies A \simeq \mathbb{Z} \implies A = \langle e \rangle$ .

Знаем, что любая подгруппа циклической группы — циклическая.

Пусть  $B = \langle ke \rangle, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Тогда:

$$k = 0 \implies B = \{0\} \implies \text{rk } B = 0 < 1 = \text{rk } A$$

$$k \neq 0 \implies B = \langle ke \rangle \simeq \mathbb{Z} \implies \text{rk } B = 1 = \text{rk } A$$

Шаг: пусть  $e_1, \dots, e_n$  — базис свободной абелевой группы  $A$ .

Рассмотрим  $\tilde{A} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \leq A$  — свободная абелева ранга  $n - 1$ .

Рассмотрим  $\tilde{B} = B \cap \tilde{A}$  — подгруппу  $B$ , которая содержится в  $\tilde{A}$  (очевидно, что это подгруппа). По предположению индукции  $\tilde{B}$  — свободная абелева, причём  $\text{rk } \tilde{B} \leq \text{rk } \tilde{A} = n - 1$ .

Если  $B = \tilde{B}$ , то теорема доказана.

Иначе рассмотрим гомоморфизм (проекцию на  $\langle e_n \rangle$ )

$$\pi : A \rightarrow \mathbb{Z} : \forall a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in A \quad \pi(a) = \alpha_n \quad (\text{Ker } \pi = \tilde{A}, \text{Im } \pi = \mathbb{Z}).$$

Знаем, что  $\pi(B)$  — подгруппа в  $\mathbb{Z} \implies \pi(B) = \langle k \rangle$  ( $k \neq 0$  из  $B \neq \tilde{B}$ ).

Рассмотрим  $b_0 \in B$  такой, что  $\pi(b_0) = k$ , т.е.  $b_0 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-1} e_{n-1} + k e_n$ .

Докажем, что если  $b_1, \dots, b_s$  — базис  $\tilde{B}$ , то  $b_0, b_1, \dots, b_s$  — базис  $B$  (тогда  $B$  — свободная абелева,  $\text{rk } B \leq n$ )

1. Проверим линейную независимость:

$$\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_s b_s = 0 \implies \pi(\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_s b_s) = 0 \implies \lambda_0 \pi(b_0) + \dots + \lambda_s \pi(b_s) = 0 \implies$$

$$\lambda_0 k = 0 \implies \lambda_0 = 0$$

Линейная комбинация  $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s = 0$  тривиальна, так как  $b_1, \dots, b_s$  — базис  $\tilde{B}$ . Отсюда  $b_0, b_1, \dots, b_s$  линейно независимы.

2.  $\langle b_0, b_1, \dots, b_s \rangle \stackrel{?}{=} B$ :

Рассмотрим произвольный  $b \in B$ .  $\pi(b) \in \langle k \rangle \implies \pi(b) = tk, t \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $\tilde{b} = b - tb_0$ . Тогда  $\pi(\tilde{b}) = \pi(b) - t\pi(b_0) = tk - tk = 0 \implies \tilde{b} \in \text{Ker } \pi = \tilde{A} \implies \tilde{b} \in \tilde{A} \cap B = \tilde{B} \implies \tilde{b} = t_1 b_1 + \dots + t_s b_s \implies b = tb_0 + t_1 b_1 + \dots + t_s b_s$ .

□

## 4.1 Связь между базисами свободной абелевой группы

**Определение.** Пусть  $A$  — свободная абелева группа,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$  — базисы  $A$ .

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n \\ \vdots \\ \tilde{e}_n = c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases} \implies (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Такая  $C \in M_n(\mathbb{Z})$  называется матрицей перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

**Утверждение.**

Пусть  $C \in M_n(\mathbb{Z})$ . Тогда  $C$  — матрица перехода  $\iff \det C = \pm 1$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $C$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ ,  $D$  — от  $\tilde{\mathcal{E}}$  к  $\mathcal{E}$ . Тогда:

$$\begin{cases} (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C \\ (e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)D \end{cases} \implies CD = DC = E \implies D = C^{-1}$$

$$\det C \cdot \det D = \det CD = \det E = 1$$

Так как  $C, D \in M_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det C, \det D \in \mathbb{Z} \implies \det C = \pm 1$ .

$\Leftarrow$ :  $C \in M_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det C = \pm 1$ . Рассмотрим некоторый базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  и докажем, что  $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C$  — базис.

1. Проверим линейную независимость:

Если  $\lambda_1 \tilde{e}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{e}_n = 0$ , то линейная комбинация столбцов  $C$  с теми же  $\lambda_i$  также равна 0. Из  $\det C \neq 0$  столбцы линейно независимы, т.е.  $\lambda_i = 0 \forall i$ .

2.  $\langle \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \rangle \stackrel{?}{=} A$ :

Так как  $\det C = \pm 1$ ,  $\exists D = C^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$  (из формулы явного выражения элементов обратной матрицы элементы  $D$  целые)  $\implies (e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)D$ .

$\forall a \in A$  целочисленно выражается через  $e_1, \dots, e_n$ , каждый  $e_i$  целочисленно выражается через  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \implies a$  целочисленно выражается через  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$

□

## 4.2 Элементарные преобразования свободных абелевых групп

**Определение.** (ЭП свободных абелевых групп)

Пусть  $A$  — свободная абелева группа,  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $A$ .

- ЭП1:  $\tilde{e}_i = e_i + ke_j, i \neq j, k \in \mathbb{Z}; \quad \tilde{e}_s = e_s, s \neq i;$
- ЭП2:  $\tilde{e}_i = e_j; \quad \tilde{e}_j = e_i; \quad \tilde{e}_s = e_s, s \neq i, j (i \neq j);$
- ЭП3:  $\tilde{e}_i = -e_i; \quad \tilde{e}_s = e_s, s \neq i;$

Матрицы перехода при этих ЭП:

ЭП1:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ЭП2:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ЭП3:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

называются (целочисленными) элементарными матрицами.



**Определение.** (ЭП строк целочисленных матриц)

- ЭП1:  $\overline{a_i} \rightarrow \overline{a_i} + \lambda \overline{a_j}, \quad i \neq j, \lambda \in \mathbb{Z};$
- ЭП2:  $\overline{a_i} \leftrightarrow \overline{a_j}, \quad i \neq j;$
- ЭП3:  $\overline{a_i} \rightarrow (-1)\overline{a_i};$

(Аналогично определены ЭП над столбцами матрицы)

**Приведение целочисленной матрицы с помощью целочисленных ЭП к "диагональному" виду**

Пусть  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ . Будем говорить, что матрица  $A$  имеет "диагональный" вид, если либо  $A = 0$ , либо  $a_{ii} = \alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, l}$  и  $a_{ij} = 0$  иначе.

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_l & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

**Лемма.** Любую матрицу  $M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$  за конечное число целочисленных ЭП над строками и столбцами можно привести к "диагональному" виду.

*Доказательство.* Индукция по  $n$  — числу строк матрицы. При фиксированном  $n$  индукция по  $\nu(M)$  — наименьшему по модулю ненулевому элементу  $M$ .

Если  $M = 0$ , то утверждение доказано, поэтому далее  $M \neq 0$ .

База индукции:  $n = 1 \implies M = (a_{11}, \dots, a_{1m})$ .

База внутренней индукции:  $\nu(M) = 1$  — очевидна (если в строке есть 1, то с помощью неё можно занулить все оставшиеся элементы).

Шаг внутренней индукции: Пусть  $\nu(M) = |a_{1j}|$ . Если  $a_{1j} < 0$ , то применим ЭП3 к столбцу  $j$ ; если  $j > 1$ , то применением ЭП2 поменяем 1-й и  $j$ -й столбцы местами. После этих операций  $\nu(M) = a_{11}$ .

$\forall j > 1 : a_{1j} = a_{11}q_j + r_j$ , где  $0 \leq r_j < a_{11}$ . Вычитая с помощью ЭП1 из  $j$ -го столбца 1-й, умноженный на  $q_j$ , получим строку  $\tilde{M} = (a_{11}, r_2, \dots, r_m)$ .

Если все  $r_j = 0$ , то диагональный вид получен, иначе можно воспользоваться предположением индукции ( $\nu(\tilde{M}) < \nu(M)$ ).

Шаг индукции: Пусть  $\nu(M) = |a_{ij}|$ . Сначала сделаем  $a_{ij}$  положительным (ЭП3), затем переставим его в верхний левый угол (ЭП2).

Случай 1:  $M = \left( \begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{C} & \\ 0 & & & \end{array} \right)$  — по предположению индукции приводим

$C$  к диагональному виду;

Случай 2:  $\exists j > 1 : a_{1j} \neq 0$ . Тогда, аналогично базе индукции, с помощью ЭП1 приводим верхнюю строчку к виду:  $\forall j > 1 : a_{1j} = 0$ .

Случай 3:  $\exists j > 1 : a_{j1} \neq 0$  — аналогично случаю 2 (ЭП строк вместо столбцов).  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что с помощью конечного числа целочисленных ЭП над строками и столбцами

$$M \sim \left( \begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_l & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array} \right)$$

где  $\alpha_l \mid \alpha_{l-1}, \alpha_{l-1} \mid \alpha_{l-2}, \dots, \alpha_2 \mid \alpha_1$ .

*Доказательство.* По лемме можем с помощью ЭП привести  $M$  к диагональному виду. Индукция по  $l$  — числу ненулевых  $\alpha$  в диагональном виде:

База:  $l = 0, 1$  — очевидно;

Шаг: Из теории чисел знаем, что для чисел  $\alpha_1, \alpha_i$  существуют  $a, b \in \mathbb{Z}$ , что  $a\alpha_1 + b\alpha_i = d_i = \text{НОД}(\alpha_1, \alpha_i)$ . Значит, с помощью ЭП1 можно сделать  $a_{1i} = d_i$ . Тогда следующими операциями:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} k\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & d_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \end{aligned}$$

можем сделать так, чтобы  $\alpha_i \mid \alpha_1$ . Причём  $\alpha_1$  при этих операциях домножается на  $k \in \mathbb{Z}$ , а значит, делимость на все предыдущие  $\alpha_j$  сохраняется. Тогда за  $l - 1$  таких наборов операций можно сделать  $\alpha_1$  общим кратным всех  $\alpha$ , а матрица без первой строки и первого столбца приводится к нужному виду по предположению индукции.  $\square$

**Пример.**  $(12, 10, 6) \sim (6, 10, 12) \sim (6, 4, 0) \sim (4, 6, 0) \sim (4, 2, 0) \sim (2, 4, 0) \sim (2, 0, 0)$ .

(По сути — обобщённый алгоритм Евклида, остаётся НОД чисел 12, 10 и 6).

### 4.3 Сogласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы

#### Теорема 1.

Пусть  $A$  — свободная абелева группа ранга  $n$ ,  $B \leq A$  — подгруппа ранга  $m$ .

Тогда  $\exists$  базисы  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  группы  $A$  и  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$  подгруппы  $B$  такие, что  $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* Пусть  $e_1, \dots, e_n$  и  $f_1, \dots, f_m$  — некоторые базисы  $A$  и  $B$  соответственно. Так как  $f_i \in A$ ,  $(f_1, \dots, f_m) = (e_1, \dots, e_n)C$ , где  $C \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ .

Если  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$  — другой базис  $B$ , то  $(f_1, \dots, f_m) = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)T$ , где  $T \in M_{m \times m}(\mathbb{Z})$

Если  $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$  — другой базис  $A$ , то  $(e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)S$ , где  $S \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$  ( $\det T, S = \pm 1$ ). Отсюда

$$(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)T = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)SC \implies (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)\tilde{C}, \quad \tilde{C} = SCT^{-1}$$

Тогда если  $S, T^{-1}$  — элементарные матрицы, то  $SC$  — ЭП над строками  $C$ , а  $CT^{-1}$  — ЭП над столбцами  $C$ . По лемме 1  $C$  с помощью ЭП можно привести

к виду  $\tilde{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \\ & & & 0 \end{pmatrix}$  (нулей среди  $\alpha_i$  не будет, т.к. векторы базиса  $f$  ЛНЗ).

Отсюда и получаем требуемое равенство  $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ . □

*Замечание.* Для абелевых групп из теоремы 4 прямого произведения получим следующее утверждение: Пусть  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ ,  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$ , причём  $B \leq A$ ,  $B_i \leq A_i$

Тогда  $A/B = (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)/(B_1 \oplus \dots \oplus B_n) \simeq A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_n/B_n$

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1:

$$A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

*Доказательство.* По теореме 1:  $\tilde{f}_1 = \alpha_1 \tilde{e}_1, \dots, \tilde{f}_m = \alpha_m \tilde{e}_m$ .

$A = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle$ ;  $B = \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 0 \rangle$

Тогда из замечания выше:

$$\begin{aligned} A/B &\simeq \langle \tilde{e}_1 \rangle / \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle / \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle / \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle / \langle 0 \rangle \simeq \\ &\simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m} \end{aligned}$$

□

**Следствие 2.** В условиях теоремы 1:  $\text{rk } A = \text{rk } B \iff |A : B| < \infty$ .

*Доказательство.* По определению  $|A : B| = |A/B|$ .

Из следствия 1 видно, что если  $\text{rk } A = \text{rk } B$ , то  $A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_n}$ , и  $|A/B| < \infty$ , а иначе в прямой сумме встретится слагаемое  $\mathbb{Z}$ , то есть найдётся элемент бесконечного порядка.  $\square$

**Утверждение 1.** (Универсальное свойство абелевой группы)

Пусть  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$  — система порождающих абелевой группы  $A$ .

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1.  $A$  — свободная с базисом  $S$ ;
2.  $\forall$  абелевой группы  $D$ ,  $\forall d_1, \dots, d_n \in D \exists!$  гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow D$  т.ч.  
 $\varphi : a_i \mapsto d_i \forall i$ .

*Доказательство.*

$1 \implies 2$  :  $S$  — базис  $A \implies \forall a \in A \exists! \alpha_i \in \mathbb{Z} : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ .

Рассмотрим отображение  $\varphi : A \rightarrow D$ , заданное как  $a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \mapsto \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_n d_n$ . Оно корректно вследствие единственности разложения по базису, а также очевидно является гомоморфизмом с нужным свойством.

$2 \implies 1$ . Рассмотрим свободную группу  $D$  ранга  $n$ , в ней рассмотрим базис  $d_1, \dots, d_n$ . По условию  $\exists!$  гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow D$ , причём  $a_i \mapsto d_i$ .

Предположим, что  $a_1, \dots, a_n$  линейно зависимы. Тогда

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \implies \varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_n d_n = 0$$

Противоречие с линейной независимостью  $d_1, \dots, d_n$ . Значит,  $a_1, \dots, a_n$  — базис.  $\square$

**Следствие 3.** Любая конечнопорождённая абелева группа изоморфна факторгруппе некоторой свободной абелевой группы по некоторой её подгруппе.

*Доказательство.* Пусть  $D = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ . Рассмотрим свободную абелеву группу  $A$  ранга  $n$  с базисом  $a_1, \dots, a_n$ .

По утверждению 1  $\exists$  гомоморфизм  $\varphi : A \rightarrow D$  такой, что  $\varphi(a_i) = d_i$ .

Из порождаемости гомоморфизм сюръективен, а значит, по теореме о гомоморфизме  $D = \text{Im } \varphi \simeq A/\text{Ker } \varphi$ , где  $\text{Ker } \varphi \leq A$ .  $\square$

**Следствие 4.** Любая конечнопорождённая абелева группа раскладывается в сумму циклических подгрупп.

*Доказательство.*  $D \simeq A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$  □

**Следствие 5.** Любая конечнопорождённая абелева группа  $D$  раскладывается в прямую сумму конечной абелевой группы и свободной абелевой группы.

*Доказательство.*  $D \simeq (\mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m}) \oplus \mathbb{Z}^{n-m}$  □

**Определение.** Группа, в которой каждый неединичный элемент имеет бесконечный порядок, называется группой без кручения.

**Упражнение.** Если  $A$  — свободная абелева, то  $A$  — без кручения.

*Доказательство.* Предположим, что  $b \in A$  — элемент конечного порядка  $m$ . По определению свободной группы  $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$ , причём не все  $\alpha_i$  равны 0. Тогда  $m\alpha_1 a_1 + \dots + m\alpha_n a_n = mb = 0$  — противоречие с линейной независимостью базиса. □

**Следствие 6.** Если  $A$  — конечнопорождённая абелева группа без кручения, то  $A$  — свободная абелева группа.

*Доказательство.* В обозначениях следствия 5  $m = 0$ . □

## 4.4 Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах

**Определение.** Группа  $G$  называется периодической, если  $\forall g \in G$   $g$  имеет конечный порядок.

**Определение.** Периодическая группа  $G$  называется  $p$ -группой, где  $p$  — простое, если  $\forall g \in G \exists s \in \mathbb{N} : \text{ord } g = p^s$ .

**Упражнение.**

Доказать, что конечная группа  $G$  является  $p$ -группой  $\iff |G| = p^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — очевидно, т.к.  $\forall g \in G : \text{ord } g \mid p^m = |G|$ ;

$\Rightarrow$ : на будущих лекциях будет доказательство в терминах силовских подгрупп. □

**Определение.** Группа  $G$  называется примарной, если  $G$  является  $p$ -группой для некоторого простого  $p$ .

**Утверждение.** Существуют конечнопорождённые (не абелевы) бесконечные  $p$ -группы.

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Пример.** Не конечнопорождённая примарная абелева группа:

$\mathbb{C}_{p^\infty}$  — группа комплексных корней степеней  $p^m$  из 1.

**Лемма 1.** Пусть  $A$  — конечнопорождённая абелева группа,  $B \leq A$  такая, что  $A/B$  — свободная абелева группа. Тогда  $\exists C \leq A$  — свободная абелева группа такая, что  $A \simeq B \oplus C$ .

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  — базис  $\mathbb{Z}^n \simeq A/B$ , и  $\varphi : A/B \rightarrow \mathbb{Z}^n$  — изоморфизм. Тогда  $\varphi^{-1}(\bar{e}_i) = e_i + B$ , где  $e_i \in A$ .

Рассмотрим  $C = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ .

Покажем, что  $e_1, \dots, e_n$  — базис  $C$ , т.е. докажем линейную независимость  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 &\implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + B = B \implies \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + B) = \\ &= \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n = 0 \implies \forall i \lambda_i = 0 \quad \text{т.к. } \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \text{ — базис } \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Покажем, что  $A = B \oplus C$ , или, что равносильно, что  $A = B + C$  и  $B \cap C = \{0\}$ :

- $B \cap C = \{0\}$ : Рассмотрим  $b \in B \cap C$ . Тогда:

$$\begin{aligned} b = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n &\implies \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + B = b + B = B \implies \\ &\implies \varphi(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + B) = \mu_1 \bar{e}_1 + \dots + \mu_n \bar{e}_n = 0 \implies \forall i \mu_i = 0 \end{aligned}$$

- $A = B + C$ : Рассмотрим произвольный  $a \in A$ .

$\varphi(a + B) = \bar{a} \in \mathbb{Z}^n$ , где  $\bar{a} = \mu_1 \bar{e}_1 + \dots + \mu_n \bar{e}_n$ . Тогда

$$\varphi(a - \sum_i \mu_i e_i + B) = 0 \implies a - \sum_i \mu_i e_i + B = B \implies \exists b \in B : a = b + \sum_i \mu_i e_i$$

□

**Лемма 2.** Все элементы конечного порядка абелевой группы  $A$  образуют подгруппу в  $A$ .

*Доказательство.* Обозначим за  $\text{Tor } A$  множество всех элементов конечного порядка группы  $A$ .

1.  $a, b \in \text{Tor } A \implies \exists n, m \in \mathbb{N} : na = mb = 0 \implies$   
 $\implies (n \cdot m)(a + b) = (n \cdot m)a + (n \cdot m)b = 0 \implies (a + b)$  имеет конечный порядок.

2.  $0 \in \text{Tor } A$  — очевидно.

3.  $\forall a \in \text{Tor } A \implies -a \in \text{Tor } A$ , т.к.  $n(-a) = -na = 0$ .

□

**Определение.** Подгруппа  $\text{Tor } A$  ("torsion subgroup") называется подгруппой кручения группы  $A$ .

**Упражнение.** Доказать, что в группе  $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$  все элементы конечного порядка не образуют подгруппу.

*Замечание.* Группа Диэдра  $D_n$  отлична от  $D_\infty$  наличием соотношения  $b^n = 1$ , ( $a$  — любая симметрия правильного  $n$ -угольника,  $b$  — поворот на  $\frac{2\pi}{n}$ ).

*Доказательство.* Заметим, что  $\text{ord } ba = 2$  :

$$a = a^{-1} \implies baba = b(aba^{-1}) = bb^{-1} = 1$$

Также  $\text{ord } a = 2 : a^2 = 1$ . При этом  $\text{ord } (ba)a = \text{ord } b = \infty$ . Значит, произведение элементов конечного порядка может быть элементом бесконечного порядка, т.е. все элементы конечного порядка не образуют подгруппу в  $D_\infty$ . □

**Лемма 3.** Пусть  $A$  — абелева группа. Тогда  $A/\text{Tor } A$  — группа без кручения.

*Доказательство.* От противного: пусть  $\bar{a} \in A/\text{Tor } A, \bar{a} \neq 0, \text{ord } \bar{a} = n$ . Тогда  $\bar{a} = a + \text{Tor } A, a \in A$ .

$$n\bar{a} = 0 \implies n(a + \text{Tor } A) = \text{Tor } A \implies na \in \text{Tor } A \implies$$

$$\implies \exists m \in \mathbb{N} : m(na) = 0 \implies (mn)a = 0 \implies a \in \text{Tor } A \implies \bar{a} = 0$$

— противоречие с  $\bar{a} \neq 0$ . Значит,  $A/\text{Tor } A$  — группа без кручения. □

**Лемма 4.** Пусть  $A$  — конечнопорождённая абелева группа. Тогда  $A = \text{Tor } A \oplus C$ , где  $C \leq A$  — свободная абелева группа,  $\text{Tor } A$  — конечная.

*Доказательство.* Пусть  $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Тогда  $A/\text{Tor } A = \langle a_1 + \text{Tor } A, \dots, a_n + \text{Tor } A \rangle$ . Кроме того, по лемме 3  $A/\text{Tor } A$  — группа без кручения, а отсюда по следствию 6 из универсального свойства абелевой группы — свободная. Отсюда по лемме 1  $\exists C \leq A$  — свободная абелева группа такая, что  $A \simeq \text{Tor } A \oplus C$ .

Осталось показать, что  $\text{Tor } A$  — конечная:  $\text{Tor } A \simeq A/C = \langle a_1 + C, \dots, a_n + C \rangle$

$C) \implies \text{Tor } A = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$  — конечнопорождённая. Тогда если  $k_i = \text{ord } b_i$ , то  $\forall b \in \text{Tor } A$

$$b = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n, \lambda_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq \lambda_i < k_i \implies |\text{Tor } A| \leq k_1 \dots k_n$$

□

**Лемма 5.** Пусть  $A$  — конечная абелева группа,  $|A| = p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s}$ . Тогда  $A$  раскладывается в прямую сумму  $A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ , где  $A_{p_i}$  —  $p_i$ -подгруппа, причём набор этих подгрупп определён однозначно.

*Доказательство.*

- Существование разложения:

Рассмотрим произвольное простое  $p$  и обозначим за  $A_p$  множество всех элементов  $A$  порядков  $p^m$ . Проверим, что  $A_p$  — подгруппа  $A$ :

1.  $a, b \in A_p, p^{m_1}a = p^{m_2}b = 0 \implies p^{m_1+m_2}(a+b) = p^{m_2} \cdot p^{m_1}a + p^{m_1} \cdot p^{m_2}b = 0$   
Отсюда  $a, b \in A_p \implies a+b \in A_p$ ;
2.  $0 \in A_p$  — очевидно;
3.  $p^m a = 0 \implies p^m(-a) = -p^m a = 0$ . Отсюда  $a \in A_p \implies -a \in A_p$ .

Докажем, что  $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ :

1.  $A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$  — прямая сумма.

Из критерия прямой суммы достаточно показать, что  $A_{p_i} \cap \langle A_{p_j} \mid j \neq i \rangle = \{0\}$ . Рассмотрим  $a \in A_{p_i} \cap \langle A_{p_j} \mid j \neq i \rangle$ . Так как  $a \in A_{p_i}$ , то  $p_i^{m_i}a = 0$ . С другой стороны,  $a = \sum_{j \neq i} a_j$ , то есть  $(\prod_{j \neq i} p_j^{m_j})a = 0$ .

Так как  $\prod_{j \neq i} p_j^{m_j}$  и  $p_i^{m_i}$  взаимно просты, имеем  $1 \cdot a = a = 0$ .

2.  $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ . Рассмотрим произвольный  $a \in A$ . Пусть  $\text{ord } a = n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ . Обозначим  $n_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$ . Так как  $\text{НОД}(n_1, \dots, n_s) = 1, \exists l_i \in \mathbb{Z} : l_1 n_1 + \dots + l_s n_s = 1$ . Отсюда  $a = l_1 n_1 a + \dots + l_s n_s a$ . Так как  $p_i^{\alpha_i}(l_i n_i a) = l_i n a = 0$ , имеем  $l_i n_i a \in A_{p_i}$ . Значит,  $a$  раскладывается в линейную комбинацию элементов  $A_{p_i}$ .

- Единственность разложения — от противного: пусть

$$A = \tilde{A}_{p_1} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{p_s} = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$$

Так как  $A_{p_i}$  — максимальная  $p_i$ -подгруппа в  $A$  (содержит все элементы  $A$  порядка  $p_i^m$ ),  $\tilde{A}_{p_i} \subseteq A_{p_i}$ .



Предположим, что  $\exists a \in A_{p_i} : a \notin \tilde{A}_{p_i}$ . Так как  $a \in A = \tilde{A}_{p_1} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{p_s}$ ,  $a = \tilde{a}_{p_i} + b$ , где  $\tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$ ,  $b \in \langle \tilde{A}_{p_j} \mid j \neq i \rangle$ . Тогда  $\text{ord } a = p_i^{m_1}$ ,  $\text{ord } \tilde{a}_{p_i} = p_i^{m_2} \implies p_i^{m_1+m_2}a = p_i^{m_1+m_2}\tilde{a}_{p_i} + p_i^{m_1+m_2}b \implies p_i^{m_1+m_2}b = 0$ , а также  $\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}b = 0$

$\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$  и  $p_i^{m_1+m_2}$  взаимно просты  $\implies b = 0$ , т.е.  $a = \tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$  — противоречие.

Значит, такого  $a$  не существует, то есть  $A_{p_i} \subseteq \tilde{A}_{p_i}$ . Отсюда  $A_{p_i} = \tilde{A}_{p_i}$ .

□

**Лемма 6.** Пусть  $A$  — конечная абелева  $p$ -группа. Тогда если  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_s = B_1 \oplus \dots \oplus B_t$ , где  $A_i, B_i$  — примарные циклические подгруппы, то  $s = t$  и набор порядков  $|A_1|, \dots, |A_s|$  совпадает с набором порядков  $|B_1|, \dots, |B_t|$  (т.е. разложение единственно с точностью до порядка слагаемых).

*Доказательство.* Индукция по  $|A|$ :

База:  $|A| = p \implies A \simeq \mathbb{Z}_p$  — такое разложение единственно;

Шаг: Пусть  $|A_i| = p^{n_i}$ ,  $|B_i| = p^{m_i}$ . Упорядочим их: пусть

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{\tilde{s}} > n_{\tilde{s}+1} = \dots = n_s = 1$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{\tilde{t}} > m_{\tilde{t}+1} = \dots = m_t = 1$$

Пусть  $A_i = \langle a_i \rangle_{p^{n_i}}$ ,  $B_i = \langle b_i \rangle_{p^{m_i}}$ . Рассмотрим множество  $pA = \{pa \mid a \in A\}$ . Очевидно, что  $pA \leq A$ . Тогда:

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_{\tilde{s}} \rangle \oplus \langle a_{\tilde{s}+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_s \rangle$$

$$\forall a \in A : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{\tilde{s}} a_{\tilde{s}} + \alpha_{\tilde{s}+1} a_{\tilde{s}+1} + \dots + \alpha_s a_s \implies pa = \alpha_1 pa_1 + \dots + \alpha_{\tilde{s}} pa_{\tilde{s}}$$

( $A_{\tilde{s}+1}, \dots, A_s$  — циклические порядка  $p$ , поэтому  $\alpha_{\tilde{s}+1} pa_{\tilde{s}+1} + \dots + \alpha_s pa_s = 0$ )

Тогда  $pA = \langle pa_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle pa_{\tilde{s}} \rangle$ . При этом  $\text{ord } (pa_1) = p^{n_1-1}, \dots, \text{ord } (pa_{\tilde{s}}) = p^{n_{\tilde{s}}-1}$ .

Значит,  $|pA| = p^{n_1+\dots+n_{\tilde{s}}-\tilde{s}} < |A|$ .

Аналогично  $pA = \langle pb_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle pb_{\tilde{t}} \rangle$ ,  $|pA| = p^{m_1+\dots+m_{\tilde{t}}-\tilde{t}}$ .

Тогда по предположению индукции разложения  $pA$  совпадают (порядок слагаемых одинаковый в силу упорядоченности), то есть

$$\tilde{s} = \tilde{t}; \quad \forall i = \overline{1 \dots \tilde{s}} : n_i - 1 = m_i - 1 \implies n_i = m_i$$

При этом  $|A| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_{\tilde{s}}| \cdot |A_{\tilde{s}+1}| \cdot \dots \cdot |A_s| = p^{n_1+\dots+n_{\tilde{s}}+s-\tilde{s}}$ , а с другой стороны

$|A| = |B_1| \cdot \dots \cdot |B_{\tilde{t}}| \cdot |B_{\tilde{t}+1}| \cdot \dots \cdot |B_t| = p^{m_1+\dots+m_{\tilde{t}}+t-\tilde{t}}$ . Отсюда

$$n_1 + \dots + n_{\tilde{s}} + s - \tilde{s} = m_1 + \dots + m_{\tilde{t}} + t - \tilde{t}; \quad \tilde{s} = \tilde{t}; \quad n_i = m_i \implies s = t$$

□

**Теорема. (Основная т. о конечнопорождённых абелевых группах)**

Пусть  $A$  — конечнопорождённая абелева группа. Тогда  $A$  изоморфна прямой сумме (конечных) примарных циклических подгрупп и бесконечных циклических подгрупп:

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$$

причём число  $m$  и набор  $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$  определены однозначно для группы  $A$ .

*Доказательство.*

- **Существование разложения**

Из следствия 4 универсального свойства абелевой группы для  $A$  имеем:

$$A \simeq A_0/B_0 \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

Также из аналога китайской теоремы об остатках знаем, что если  $\alpha = q_1^{\nu_1} \dots q_\mu^{\nu_\mu}$ , где  $q_i$  — различные простые, то  $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}_{q_1^{\nu_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_\mu^{\nu_\mu}}$ . Отсюда из разложения выше получаем искомое разложение.

- **Единственность разложения**

По лемме 4 для  $A$  имеет место разложение  $A = \text{Tor } A \oplus C$ , где  $\text{Tor } A$  — конечная,  $C$  — свободная. Заметим, что  $\text{rk } C = \text{rk } A/\text{Tor } A$ . Так как  $\text{Tor } A$  — инвариант  $A$ , то  $A/\text{Tor } A$ , а тогда и  $\text{rk } C$  — инварианты  $A$ .

Так как  $C \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ , а  $\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$  — конечная, имеем  $C = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$ , то есть  $m = \text{rk } C$ , а отсюда  $m$  однозначно определено для  $A$ .

Пусть  $B = \text{Tor } A$ . По лемме 5  $B \simeq A_{\tilde{p}_1} \oplus \dots \oplus A_{\tilde{p}_l}$ , причём это разложение на примарные подгруппы единственно с точностью до порядка слагаемых. А из леммы 6 каждая  $A_{\tilde{p}_i}$  раскладывается на циклические примарные однозначно с точностью до порядка слагаемых. Значит, набор порядков  $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$  определён однозначно для  $A$ .

□

**Пример.** Все абелевы группы порядка 8 с точностью до изоморфизма:

$$8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \implies A_1 \simeq \mathbb{Z}_8; \quad A_2 \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2; \quad A_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

**Пример.**  $V_4 = \{e, a, b, c\}$

$V_4 = \langle a \rangle_2 \oplus \langle b \rangle_2 = \langle b \rangle_2 \oplus \langle c \rangle_2$ , но разложение из теоремы единственно:  $V = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ .

*Замечание.* Для не конечнопорождённых абелевых групп утверждение теоремы неверно, контрпримером служит следующее упражнение:

**Упражнение.** Доказать, что  $\mathbb{Q}$  не раскладывается в прямую сумму циклических (вообще говоря, произвольных) подгрупп.

*Доказательство.* Пусть  $H_1, H_2 \trianglelefteq \mathbb{Q}$  — нетривиальные нормальные подгруппы  $\mathbb{Q}$ . Тогда  $\exists h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 : h_1, h_2 \neq 0$ . Тогда:

$$h_1 = \frac{m_1}{n_1}, h_2 = \frac{m_2}{n_2} \implies m_2 n_1 h_1 = m_1 n_2 h_2 \in H_1 \cap H_2$$

то есть  $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$ . Отсюда  $\mathbb{Q}$  не раскладывается в прямую сумму подгрупп.  $\square$

**Определение.** Экспонентой (периодом, показателем) конечной группы  $G$  называется наименьшее общее кратное порядков элементов группы  $G$ .

Обозначается  $\exp G$ .

**Утверждение.** Если  $G$  конечна, то  $\exp G \mid |G|$

*Доказательство.* Для конечных групп знаем, что порядок группы является общим кратным всех порядков элементов группы. Так как наименьшее общее кратное набора чисел делит любое общее кратное этого набора, получаем необходимое утверждение.  $\square$

**Утверждение.** Конечная абелева группа  $A$  циклическая  $\iff \exp A = |A|$ .

*Доказательство.*

$\implies$ :  $A = \langle a \rangle \implies \text{ord } a = |A| \implies \exp A \geq |A| \implies \exp A = |A|$  (т.к.  $\exp A \mid |A|$ ).

$\impliedby$ : От противного: пусть  $\exp A = |A|$ , но  $A$  — не циклическая. По основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах  $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{s_m}}$ . Если все  $p_1, \dots, p_m$  различны, то  $A$  циклическая по аналогу китайской теоремы об остатках — противоречие. Если среди них есть совпадающие, то можем без ограничения общности считать, что  $p_1 = p_2, s_1 \leq s_2$ . Обозначим  $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}} = \langle a_i \rangle \implies$

$\forall a \in A : a = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$ . Тогда если в равенстве  $|A| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$  обозначить

$t = p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$ , то  $\forall a \in A : ta = \sum_{i=1}^m \alpha_i ta_i = 0$ .

(очевидно, что  $ta_i = 0$  для  $i \neq 1$ , а  $ta_1 = 0$  в силу  $p_1 = p_2, s_1 \leq s_2$ )

Тогда  $t$  — общее кратное всех порядков элементов  $A$ , то есть  $\exp A \mid t$ , но  $t < |A| = \exp A$  — противоречие. Значит,  $A$  — циклическая.  $\square$

**Теорема.** Пусть  $\mathbb{F}$  — произвольное поле,  $A$  — конечная подгруппа в  $\mathbb{F}^*$ . Тогда  $A$  — циклическая.

*Доказательство.* (мультипликативная терминология)

Из определения поля  $F^*$  — абелева группа, а значит,  $A$  также абелева.

От противного: пусть  $A$  не циклическая, т.е.  $\exp A < |A|$ . Тогда если  $\exp A = n$ , то  $\forall a \in A \ a^n = 1$ . Рассмотрим многочлен  $x^n - 1$  над полем  $\mathbb{F}$ . Его степень равна  $n$ , а число его корней в  $\mathbb{F}$  хотя бы  $|A|$ , что больше  $n$  по предположению — противоречие.  $\square$

**Пример.**  $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p$  :  $A = F^*$  — циклическая. Например,  $\mathbb{Z}_5^* = \langle 3 \rangle_4$ .

**Следствие.** Мультипликативная группа любого конечного поля — циклическая.

## 5 Действия группы на множестве

**Определение.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Биективное отображение  $f : X \rightarrow X$  называется преобразованием множества  $X$ .

Множество всех преобразований  $X$  обозначается  $S(X)$ .

**Утверждение.**  $S(X)$  — группа относительно композиции.

*Доказательство.*

1. Ассоциативность — очевидно;
2. Нейтральный элемент — тождественное преобразование;
3. Обратный элемент — обратное преобразование (существует, т.к. биекция)

□

**Определение.** Группа  $S(X)$  называется группой всех преобразований  $X$ . Произвольная  $H \leq S(X)$  называется группой преобразований множества  $X$ .

**Пример.**  $GL(V)$  — группа невырожденных линейных операторов векторного пространства  $V$  :  $GL(V) \leq S(V)$ .

**Определение.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $X$  — произвольное множество. Действием группы  $G$  на множестве  $X$  называется гомоморфизм  $\alpha : G \rightarrow S(X)$ . Обозначается  $G \curvearrowright X$  (или  $G : X$ )

Элементы множества  $X$  при этом называются точками.

$\forall g \in G : g \mapsto \alpha(g)$  — преобразование множества  $X$ , т.е. биекция  $X \rightarrow X$ .

Равенство  $\alpha(g)(x) = y (x \in X)$  записывают как  $\alpha(g)x = y$  или  $gx = y$ .

Так как  $\alpha$  — гомоморфизм, имеем:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1) \alpha(g_2) \implies \alpha(g_1 g_2)x = (\alpha(g_1) \alpha(g_2))x = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)x)$$

Отсюда  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ . Аналогично:

$$\forall g \in G : \alpha(g^{-1}) = (\alpha(g))^{-1} \implies \alpha(g^{-1})x = (\alpha(g))^{-1}(x)$$

Отсюда  $g^{-1}x = y \iff gy = x$ .

Если  $H \leq S(X)$ , то определено "тавтологическое" действие  $H$  на  $X$  :  $\alpha(h) = h$  — вложение  $H \rightarrow S(X)$ .

**Пример.**  $GL(V) \curvearrowright V$  :  $\alpha(g)x = g(x) \forall g \in GL(V), x \in X$

В общем случае  $\alpha : G \rightarrow S(X)$  — гомоморфизм, то есть  $\text{Im } \alpha \leq S(X)$ ,  $\text{Ker } \alpha \trianglelefteq G$ .

**Определение.**  $\text{Ker } \alpha$  называется ядром неэффективности действия группы  $G$  на  $X$ .

Если  $\text{Ker } \alpha = \{e\}$ , то действие называется эффективным.

*Замечание.* Всякое действие группы  $G$  на множестве  $X$  индуцирует и другие действия. Например:

1.  $G \curvearrowright 2^X$ ;
2. Если  $Y \subset X$  — инвариантное подмножество относительно  $G$ , то  $G \curvearrowright Y$ .

**Пример.** Пусть  $K$  — равносторонний треугольник,  $G = \text{Sym } K \leq S(X)$ , где  $X$  — множество точек треугольника.

Тогда если  $Y = \{v_1, v_2, v_3\}$  — вершины треугольника, а  $Z = \{e_1, e_2, e_3\}$  — стороны треугольника, то действие  $G \curvearrowright X$  индуцирует также и действия  $G \curvearrowright Y, G \curvearrowright Z$

**Пример.** Пусть задано  $G \curvearrowright X$ ,  $\mathbb{F}$  — поле,  $Y = \{f : X \rightarrow \mathbb{F}\}$  — алгебра всех функций  $X \rightarrow \mathbb{F}$ . Рассмотрим  $\alpha : G \rightarrow S(Y) : \forall g \in G \alpha(g)f = \tilde{f}$  такое, что  $\tilde{f}(x) = f(g^{-1}x) \forall x \in X$ . Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G : (\alpha(g_1 g_2)f)(x) &= f((g_1 g_2)^{-1}(x)) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (\alpha(g_2)f)(g_1^{-1}x) = \\ &= \alpha(g_1)(\alpha(g_2)f)(x) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2)f)(x) \end{aligned}$$

*Замечание.* Если  $G \curvearrowright X, H \leq G$ , то определено также действие  $H \curvearrowright X$  — ограничение действия на подгруппу.

**Пример.**  $G = S_3$ ;  $G \curvearrowright X$ , где  $X = \{1, 2, 3\}$  — действуют как подстановки.  $H = \langle (1, 2, 3) \rangle \leq G$  — определено действие  $H \curvearrowright X$  как ограничение  $G \curvearrowright X$ .

## 5.1 Орбиты и стабилизаторы

**Утверждение.** Отношение, заданное правилом  $x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$ , является отношением эквивалентности.

*Доказательство.*

- Рефлексивность:  $\forall x \in X : ex = x \implies x \sim x$ ;

- Симметричность:

$$x \sim y \implies \exists g \in G : gx = y \implies g^{-1}gx = g^{-1}y \implies g^{-1}y = x \implies y \sim x$$

- Транзитивность:

$$\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \implies \exists g_1, g_2 \in G : \begin{cases} y = g_1x \\ z = g_2y \end{cases} \implies z = g_2(g_1x) = (g_2g_1)x \implies x \sim z$$

□

**Определение.** Классы эквивалентности относительно этого отношения называются орбитами относительно действия  $G \curvearrowright X$ .

Обозначается  $\text{Orb}(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\}$

**Пример.** Пусть  $G$  — группа поворотов плоскости  $\mathcal{E}^2$  вокруг точки  $o$ .

Тогда при  $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$   $\text{Orb}(x)$  — окружность с центром в точке  $o$  радиуса  $|ox|$ .

**Определение.** Если  $\text{Orb}(x) = \{x\}$ , то  $x$  называется неподвижной точкой.

**Определение.** Если  $\text{Orb}(x) = X$ , то действие называется транзитивным.

*Замечание.* Это именно характеристика действия, так как  $\exists x : \text{Orb}(x) = X \implies \forall x \in X \text{ Orb}(x) = X$ .

**Пример.**  $G$  — группа сдвигов (параллельных переносов)  $\mathcal{E}^2$ .

Тогда  $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$  — транзитивное (из любой точки можно получить любую другую сдвигом на вектор, их соединяющий).

**Утверждение.** Если  $y \in \text{Orb}(x)$ , то  $\text{Orb}(y) = \text{Orb}(x)$ .

*Доказательство.* Напрямую следует из определения орбиты. □

**Определение.** Стабилизатором (стационарной подгруппой) точки  $x$  называется множество  $\text{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ .

**Утверждение.**  $\text{St}(x) \leq G$ .

*Доказательство.*

- $g_1, g_2 \in \text{St}(x) \implies g_1x = g_2x = x$   
 $(g_1g_2)x = g_1(g_2x) = g_1x = x \implies g_1g_2 \in \text{St}(x);$
- $ex = x \implies e \in \text{St}(x);$

- Пусть  $g \in \text{St}(x)$ . Тогда  $g(x) = x$ , а также  $g(g^{-1}x) = ex = x$ . Так как образ  $g$  при действии — биекция, имеем  $x = g^{-1}x$ , то есть  $g^{-1} \in \text{St}(x)$

□

**Утверждение.** Если  $y = gx$ , то множество  $M_y = \{h \in G \mid y = hx\}$  совпадает с множеством  $g\text{St}(x)$ .

*Доказательство.* Покажем оба включения:

$g\text{St}(x) \subset M_y$  :  $\forall \tilde{g} \in g\text{St}(x) : \tilde{g} = g \cdot g'$ , где  $g' \in \text{St}(x)$ . Тогда:  $\tilde{g}x = (gg')x = g(g'x) = gx = y \implies \tilde{g} \in M_y$ . Отсюда  $g\text{St}(x) \subset M_y$ .

$M_y \subset g\text{St}(x)$  :  $\forall h \in M_y : y = hx$ . Также  $y = gx \implies gx = hx \implies (g^{-1}h)x = g^{-1}(hx) = x \implies g^{-1}h \in \text{St}(x) \implies h \in g\text{St}(x)$ . Отсюда  $M_y \subset g\text{St}(x)$ . □

**Теорема.** Отображение  $\psi : \text{Orb}(x) \rightarrow G/\text{St}(x)$  (множество левых смежных классов, не факторгруппа!) такое, что  $gx \mapsto g\text{St}(x)$ , является биекцией.

*Доказательство.* Из предыдущего утверждения:

$$g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x) \iff \{h \in G \mid g_1x = hx\} = \{h \in G \mid g_2x = hx\} \iff g_1x = g_2x$$

- Корректность:  $g_1x = g_2x \implies g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x)$ ;
- Сюръективность — очевидна ( $\forall g \in G$   $g\text{St}(x)$  будет образом точки  $gx$ );
- Инъективность:  $g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x) \implies g_1x = g_2x$ .

Отсюда  $\psi$  — биекция. □

**Следствие 1.**  $|\text{Orb}(x)| = |G/\text{St}(x)| = |G : \text{St}(x)|$ .

**Следствие 2.** Если  $G$  — конечная группа, то  $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$ .

**Пример.** Пусть  $K \subset \mathcal{E}^3$  — куб,  $G = \text{Sym}^+(K) = \{g \in \text{Isom}^+(\mathcal{E}^3) \mid gK = K\}$  — группа вращений  $K$ .

Найдём  $|G|$ . Так как  $G \leq S(X)$ , где  $X = \{v_1, \dots, v_8\}$  — множество вершин куба,  $|G| < \infty$ . Значит, если рассмотреть индуцированное действие  $G \curvearrowright X$ , то  $|G| = |\text{Orb}(v_1)| \cdot |\text{St}(v_1)|$ .

$\text{Orb}(v_1) = X$  (вершина может перейти в любую)  $\implies |\text{Orb}(v_1)| = 8$ ;

$|\text{St}(v_1)| = 3$  (id и два поворота вокруг большой диагонали, содержащей  $v_1$ );

Отсюда  $|G| = 8 \cdot 3 = 24$ .

Более того, покажем, что  $G \simeq S_4$ . Рассмотрим множество диагоналей куба  $Y = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ . Так как при собственном движении диагонали переходят в



диагонали, можем рассмотреть действие  $G \curvearrowright Y \implies \exists \alpha : G \rightarrow S(Y) \simeq S_4$  — гомоморфизм. Из  $|G| = |S_4| = 24$  для доказательства того, что  $\alpha$  — изоморфизм, достаточно показать сюръективность, а для этого достаточно показать, что все транспозиции диагоналей можно получить вращениями (достаточно, т.к.  $S_4$  порождается транспозициями, а  $\text{Im } \alpha \leq S(Y)$ ).

Такая транспозиция — это поворот на  $\pi$  относительно прямой, проходящей через середины двух рёбер, соединяющих концы диагоналей.

**Упражнение.** Доказать, что если  $L$  — правильный тетраэдр, то  $\text{Sym}(L) \simeq S_4$ .

*Доказательство.* Будем действовать аналогично — пусть  $X = \{v_1, \dots, v_4\}$  — множество вершин тетраэдра, тогда действие  $\text{Sym}(L) \curvearrowright E^3$  индуцирует действие  $\text{Sym}(L) \curvearrowright X$ , а отсюда  $|\text{Sym}(L)| = |\text{Orb}(v_1)| \cdot |\text{St}(v_1)|$ .

$\text{Orb}(v_1) = X$  (вершина может перейти в любую)  $\implies |\text{Orb}(v_1)| = 4$ ;

$|\text{St}(v_1)| = 6$  (любые перестановки вершин на грани, не содержащей  $v_1$ );

(проверка существования всех этих движений непосредственная)

Отсюда  $|G| = 4 \cdot 6 = 24$ .

Так как  $S(X) \simeq S_4$ , достаточно показать, что гомоморфизм действия — изоморфизм, а из равенства порядков достаточно сюръективности. Транспозиция любых двух вершин может быть получена симметрией относительно плоскости, проходящей через середину ребра, соединяющего вершины, и противоположное ребро.  $\square$

**Определение.** Элементы  $a, b \in G$  называются сопряжёнными, если  $\exists g \in G$  такой, что  $b = g^{-1}ag$ . Обозначается  $b = a^g$ .

*Замечание.* Такое обозначение не случайно: многие свойства возведения в степень присущи и операции сопряжения. Однако в данном курсе эти свойства пока не понадобятся.

**Определение.** Подгруппы  $L, K \leq G$  называются сопряжёнными, если  $\exists g \in G$  такой, что  $K = g^{-1}Lg = \{g^{-1}lg \mid l \in L\}$ .

**Утверждение.** Пусть  $y = gx$ . Тогда  $g\text{St}(x)g^{-1} = \text{St}(y)$ .

*Доказательство.*

- $g\text{St}(x)g^{-1} \stackrel{?}{\subseteq} \text{St}(y)$ :  
 $\forall h \in \text{St}(x) : ghg^{-1}(y) = ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}g)x = ghx = gx = y \implies ghg^{-1} \in \text{St}(y)$ ;

- $\text{St}(y) \stackrel{?}{\subseteq} g\text{St}(x)g^{-1}$ : (аналогичные рассуждения, т.к.  $y = gx \iff x = g^{-1}y$ )  
 $\forall h \in \text{St}(y) : g^{-1}hg(x) = g^{-1}hg(g^{-1}y) = g^{-1}h(gg^{-1})y = g^{-1}hy = g^{-1}y =$   
 $x \implies g^{-1}hg \in \text{St}(x) \implies h \in g\text{St}(x)g^{-1}.$

□

## 5.2 Действия группы на себе

Пусть  $G$  — группа,  $X = G$ . Рассмотрим основные действия  $G \curvearrowright G$  и покажем некоторые их свойства:

1. Действие  $G \curvearrowright G$  левыми сдвигами:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$  такое, что  $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = gh$ .

Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h = g_1(g_2h) = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

$g \in \text{Ker } \alpha \implies \forall h \in G : gh = h \implies g = e \implies \text{Ker } \alpha = \{e\}$  — действие эффективно.

Значит, по теореме о гомоморфизме  $G \simeq \text{Im } \alpha \leq S(G)$ .

**Следствие.** (Теорема Кэли)

Пусть  $|G| = n$ . Тогда  $G$  изоморфна некоторой подгруппе  $S_n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим гомоморфизм  $\alpha : G \rightarrow S(G)$ , приведённый выше. Тогда  $G \simeq \text{Im } \alpha \leq S(G) \simeq S_n$ , т.к.  $|G| = n$ . □

2. Действие  $G \curvearrowright G$  правыми сдвигами:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$  такое, что  $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = hg^{-1}$ .

Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = hg_2^{-1}g_1^{-1} = \alpha(g_1)(hg_2^{-1}) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

$g \in \text{Ker } \alpha \implies \forall h \in G : hg^{-1} = h \implies g = e \implies \text{Ker } \alpha = \{e\}$  — действие эффективно.

3. Действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$  такое, что  $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = ghg^{-1}$ .

Покажем, что  $\alpha$  — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h)$$

**Утверждение.**  $\forall g \in G : \alpha(g) : G \rightarrow G$  — автоморфизм, т.е. изоморфизм  $G$  на себя.

*Доказательство.* Биективность  $\alpha(g)$  следует из  $\alpha(g) \in S(G)$ . Докажем, что  $\alpha(g)$  — гомоморфизм:

$$\alpha(g)(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = (g h_1 g^{-1})(g h_2 g^{-1}) = (\alpha(g)h_1)(\alpha(g)h_2)$$

Значит,  $\alpha(g)$  — автоморфизм  $G$ . □

**Определение.** Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом группы  $G$  (относительно элемента  $g$ ).

**Утверждение.**

1. Множество  $\text{Aut } G$  всех автоморфизмов группы  $G$  — группа относительно композиции, причём  $\text{Aut } G \leq S(G)$ .
2. Множество  $\text{Int } G$  всех внутренних автоморфизмов группы  $G$  — группа относительно композиции, причём  $\text{Int } G \trianglelefteq \text{Aut } G$ .

*Доказательство.*

1. Достаточно проверить, что  $\text{Aut } G \leq S(G)$ :

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut } G \implies (\alpha_1 \alpha_2) \in \text{Aut } G$ ;
- $\text{id} \in \text{Aut } G$ ;
- $\alpha \in \text{Aut } G \implies \alpha^{-1} \in \text{Aut } G$  (изоморфизм обратим).

2. Для определения группы достаточно проверить, что  $\text{Int } G \leq \text{Aut } G$ :

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Int } G \implies \exists g_1, g_2 \in G : \alpha_i$  — сопряжение относительно  $g_i$ .  
Тогда  $(\alpha_1 \alpha_2)$  — сопряжение относительно  $g_1 g_2$ , т.е.  $(\alpha_1 \alpha_2) \in \text{Int } G$ ;
- $\text{id} \in \text{Int } G$  — сопряжение относительно  $e$ ;
- $\alpha \in \text{Int } G \implies \alpha$  — сопряжение относительно  $g \in G \implies \alpha^{-1}$  — сопряжение относительно  $g^{-1} \implies \alpha^{-1} \in \text{Int } G$ .

Проверим, что  $\text{Int } G \trianglelefteq \text{Aut } G$ , т.е.  $\forall \varphi \in \text{Aut } G, g \in G : \varphi \alpha(g) \varphi^{-1} \in \text{Int } G$ :

$$\begin{aligned} (\varphi \alpha(g) \varphi^{-1})(h) &= \varphi(\alpha(g)(\varphi^{-1}(h))) = \varphi(g \varphi^{-1}(h) g^{-1}) = \varphi(g) \varphi(\varphi^{-1}(h)) \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g) h (\varphi(g))^{-1} = \alpha(\varphi(g))(h) \implies \varphi \alpha(g) \varphi^{-1} = \alpha(\varphi(g)) \in \text{Int } G \end{aligned}$$

□

**Определение.**

$\text{Aut } G$  называется группой автоморфизмов группы  $G$ .

$\text{Int } G$  называется группой внутренних автоморфизмов группы  $G$ .

Пусть  $\alpha$  — действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями. Тогда  $\text{Ker } \alpha = \{g \in G \mid \alpha(g)h = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$ , а  $\text{Im } \alpha = \text{Int } G$ .

**Определение.** Множество  $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$  называется центром группы  $G$ .

**Свойства.**

1.  $Z(G) = \text{Ker } \alpha$ , где  $\alpha$  — действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями;
2.  $Z(G) \trianglelefteq G$ ;
3.  $\forall H \leq Z(G) : H \trianglelefteq G$ ;
4.  $Z(G) = G \iff G$  — абелева

*Доказательство.*

1. Доказано выше;
2. Следует из (1) ( $\text{Ker } \alpha \trianglelefteq G$  — свойство гомоморфизма);
3.  $\forall h \in H \leq Z(G), g \in G : ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H \implies H \trianglelefteq G$ ;
4. Очевидно из определения абелевой группы.

□

### 5.3 Классы сопряжённости и централизаторы

**Определение.** Пусть  $\alpha$  — действие  $G \curvearrowright G$  сопряжениями.

Классом сопряжённости  $x \in G$  называется орбита  $x$  относительно  $\alpha$ .

Централизатором элемента  $x \in G$  называется стабилизатор  $x$  относительно  $\alpha$ .

Класс сопряжённости обозначается как  $x^G = \{y \in G \mid \exists g \in G : y = gxg^{-1}\}$ .

Централизатор обозначается как  $C(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$ .

**Утверждение 1.** Если  $|G| < \infty$ , то  $|x^G| = \frac{|G|}{|C(x)|}$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из утверждения  $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$ .  $\square$

**Утверждение 2.**  $x^G = \{x\} \iff x \in Z(G)$ .

*Доказательство.*  $\forall g \in G : gxg^{-1} = x \iff gx = xg$ .  $\square$

**Теорема.** Центр любой конечной нетривиальной  $p$ -группы нетривиален ( $p$  — простое).

*Доказательство.* Пусть  $|G| = p^s$ . Рассмотрим случаи:

1.  $G$  — абелева  $\implies Z(G) = G$ .
2.  $G$  — неабелева. Тогда  $G$  разбивается на несколько непересекающихся классов сопряжённости:  $G = \bigsqcup_{i=1}^k x_i^G$ .

По утверждению 2  $|x_i^G| = 1 \iff x_i \in Z(G)$ , а по утверждению 1  $|x_i^G| = \frac{|G|}{|C(x_i)|}$

Так как  $G$  —  $p$ -группа, для  $x_i \notin Z(G) : |x_i^G| = p^{s_i}, s_i \geq 1$ .

Без ограничения общности пусть только  $x_1, \dots, x_m \in Z(G)$  (всегда будет хотя бы один, так как  $e \in Z(G)$ ). Тогда:

$$|G| = \underbrace{|x_1^G| + \dots + |x_m^G|}_{|Z(G)|} + |x_{m+1}^G| + \dots + |x_k^G| \implies p^s = |Z(G)| + p^{s_{m+1}} + \dots + p^{s_k}$$

Отсюда  $p \mid |Z(G)|$ , а значит,  $|Z(G)| \geq p > 1$  — центр нетривиален.

$\square$

*Замечание.*  $\exists$  бесконечная (конечнопорождённая)  $p$ -группа с тривиальным центром (монстр Тарского).

**Следствие.** Если  $|G| = p^2$ , где  $p$  — простое, то  $G$  — абелева.

*Доказательство.*  $G$  —  $p$ -группа  $\implies Z(G) \neq \{e\}$ .

Предположим, что  $G$  неабелева, т.е. что  $Z(G) \neq G$ .

Тогда, так как  $|Z(G)| \mid |G| = p^2$  и  $|Z(G)| \neq 1, p^2$ , имеем  $|Z(G)| = p$ .

Рассмотрим группу  $G/Z(G)$ . Её порядок равен  $\frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^2}{p} = p \implies G/Z(G)$  — циклическая, а значит,  $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$ . Тогда  $\forall g \in G \exists t \in \mathbb{Z} : g \in a^t Z(G)$ .

Рассмотрим два произвольных элемента  $g_1, g_2 \in G$  и докажем, что  $g_1 g_2 = g_2 g_1$ :

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : g_1 = a^{t_1} Z(G), g_2 = a^{t_2} Z(G) \implies \exists z_1, z_2 \in Z(G) : g_1 = a^{t_1} z_1, g_2 = a^{t_2} z_2$$

Так как элементы центра коммутируют со всеми элементами  $G$ , имеем:

$$g_1 g_2 = a^{t_1} z_1 a^{t_2} z_2 = a^{t_1+t_2} z_1 z_2 = a^{t_2+t_1} z_2 z_1 = a^{t_2} z_2 a^{t_1} z_1 = g_2 g_1$$

а значит,  $G$  — абелева, что противоречит предположению.

Отсюда  $G$  не может быть неабелевой, т.е.  $G$  — абелева.  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $X$  — произвольное множество,  $G \leq S(X)$ . Тогда если  $\varphi \in G$  т.ч.  $\varphi : x \mapsto y$ , то  $\forall \psi \in G : \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(x) \mapsto \psi(y)$ .

*Доказательство.* Применим преобразование  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ :

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \psi(\varphi(\psi^{-1}(\psi(x)))) = \psi(\varphi(x)) = \psi(y)$$

$\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $\sigma, \tilde{\sigma} \in S_n$ . Тогда  $\sigma, \tilde{\sigma}$  сопряжены в  $S_n \iff \sigma, \tilde{\sigma}$  имеют одинаковые цикловые структуры, т.е. наборы длин независимых циклов в разложении  $\sigma, \tilde{\sigma}$  совпадают.

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $\sigma, \tilde{\sigma}$  сопряжены в  $S_n \implies \exists \tau \in S_n : \tilde{\sigma} = \tau \sigma \tau^{-1}$ .

Пусть  $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_s)(j_1 j_2 \dots j_t) \dots$  — разложение  $\sigma$  в независимые циклы. Тогда  $\sigma : i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_s \mapsto i_1$ , а тогда по лемме 1  $\tau \sigma \tau^{-1} : \tau(i_1) \mapsto \tau(i_2), \tau(i_2) \mapsto \tau(i_3), \dots, \tau(i_s) \mapsto \tau(i_1)$ . Аналогичное рассуждение можно провести для всех независимых циклов  $\sigma$ , а значит,  $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \dots \tau(i_s))(\tau(j_1) \tau(j_2) \dots \tau(j_t)) \dots$  — длины циклов сохраняются.

$\impliedby$ : Пусть  $\sigma, \tilde{\sigma}$  имеют одинаковые цикловые структуры. Можем поменять порядок циклов так, чтобы длины  $i$ -х циклов в  $\sigma$  и  $\tilde{\sigma}$  совпадали, т.е.

$$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_s)(j_1 j_2 \dots j_t) \dots; \quad \tilde{\sigma} = (\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_s)(\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_t) \dots$$

Тогда если  $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s & j_1 & j_2 & \dots & j_t & \dots \\ \tilde{i}_1 & \tilde{i}_2 & \dots & \tilde{i}_s & \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & \dots & \tilde{j}_t & \dots \end{pmatrix}$ , то по лемме 1  $\tilde{\sigma} = \tau \sigma \tau^{-1}$ .  $\square$

**Примеры.**  $\sigma = (12)(345)(6)(7), \tilde{\sigma} = (15)(243)(6)(7)$  — сопряжены в  $S_7$ :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ (из построения в теореме);}$$

$$\sigma = (123)(45), \tau = (135) \implies \tau \sigma \tau^{-1} = (325)(41).$$

**Следствие.**  $Z(S_n) = \{\text{id}\}$  при  $n \geq 3$ .

*Доказательство.* Допустим, что в  $Z(S_n)$  есть  $\sigma \neq \text{id}$ . Разложим в независимые циклы:  $\sigma = (ij\dots)\dots$ . Так как  $n \geq 3, \exists k \neq i, j$ . Тогда при  $\tau = (jk) : \tau\sigma\tau^{-1} = (ik\dots)\dots$  — не совпадёт с  $\sigma$  ( $\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i)$ ) — противоречие.  $\square$

**Упражнение.** Докажите, что  $Z(A_n) = \{\text{id}\}$  при  $n \geq 4$ .

*Доказательство.* Допустим, что в  $Z(G)$  есть  $\sigma \neq \text{id}$ . Разложим в независимые циклы:  $\sigma = (ij\dots)\dots$ . Так как  $n \geq 4, \exists k, l : k, l, i, j$  попарно различны. Тогда при  $\tau = (jkl) : \tau\sigma\tau^{-1} = (ik\dots)\dots$  — не совпадёт с  $\sigma$  ( $\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i)$ ) — противоречие.  $\square$

**Утверждение.**

$$H \trianglelefteq G \iff \begin{cases} H \leq G \\ H \text{ — объединение нескольких классов сопряжённости } G \end{cases}$$

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $H \trianglelefteq G$ . Очевидно, что  $H \leq G$ .

Если  $h \in H$ , то  $\forall g \in G \ ghg^{-1} \in H$  —  $H$  содержит классы сопряжённости всех её элементов  $\implies H = \bigcup_{h \in H} h^G$ .

$\impliedby$ : Пусть  $H \leq G$  и  $H$  — объединение классов сопряжённости. Тогда  $\forall h \in H, g \in G : ghg^{-1} \in H$  ( $H$  содержит весь класс сопряжённости  $h^G$ )  $\implies H \trianglelefteq G$ .  $\square$

## 6 Теоремы Силова

Пусть  $G$  — конечная группа,  $|G| = p^s \cdot m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

**Определение.** Подгруппа  $H \leq G$  называется силовской  $p$ -подгруппой, если  $|H| = p^s$ .

*Замечание.* Несложно видеть, что определение корректно: если  $H$  — силовская  $p$ -подгруппа, то  $H$  —  $p$ -подгруппа; более того, это доказано в [упражнении](#) п. 4.4

**Теорема 1.** (Первая теорема Силова — о существовании)

*Силовская  $p$ -подгруппа существует.*

*Замечание.* Напомним, что более общее утверждение  $k \mid |G| \implies \exists H \leq G : |H| = k$  неверно — в  $A_4$  нет подгруппы порядка 6.

**Теорема 2.** (Вторая теорема Силова — о сопряжённости)

*Любая  $p$ -подгруппа лежит в некоторой силовской  $p$ -подгруппе.*

*Все силовские  $p$ -подгруппы сопряжены.*

**Теорема 3.** (Третья теорема Силова — о количестве)

Пусть  $N_p$  — число силовских  $p$ -подгрупп в  $G$ . Тогда 
$$\begin{cases} N_p \equiv 1 \pmod{p} \\ N_p \mid m \end{cases}$$

**Примеры.**

1.  $G = S_3$ ,  $|G| = 6 = 2 \cdot 3$ . Силовские 2-подгруппы:  $\langle(12)\rangle$ ,  $\langle(13)\rangle$ ,  $\langle(23)\rangle$ .

2.  $G = S_4$ ,  $|G| = 24 = 2^3 \cdot 3$ . Найдём силовские 2-подгруппы:

Доказывалось, что  $S_4 \simeq \text{Sym}^+ K$  — группа вращений куба. Можем рассмотреть сечение куба плоскостью, параллельной некоторой паре противоположных граней — вращения, оставляющие квадрат сечения на месте, образуют подгруппу, очевидно изоморфную  $D_4$  (по определению  $D_4$ ). Такая подгруппа будет иметь порядок 8, и таких подгрупп будет 3 — столько же, сколько пар противоположных граней — по *III* теореме Силова это все силовские  $p$ -подгруппы в  $G$ .

### 6.1 I теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ . Тогда  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа в  $G$ .



*Доказательство.* Рассмотрим случаи:

1.  $G$  — абелева  $\implies G \simeq \langle a_1 \rangle_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \langle a_k \rangle_{p_k^{s_k}}$ . Без ограничения общности  $p_1 = \dots = p_t = p$ ,  $p_{t+1}, \dots, p_k \neq p$ . Тогда  $H \simeq \langle a_1 \rangle_{p^{s_1}} \times \dots \times \langle a_t \rangle_{p^{s_t}}$  — искомая силовская  $p$ -подгруппа: очевидно, что  $H$  является  $p$ -подгруппой, а также  $p^s m = |G| = |H| \cdot |G/H|$ , где  $p \nmid |G/H| \implies p^s \mid |H| \implies |H| = p^s$ .

2. Общий случай ( $G$  — неабелева). Индукция по  $|G|$ :

База:  $|G| = 1$  — очевидно;

Шаг: Пусть  $G = Z(G) \sqcup x_1^G \sqcup \dots \sqcup x_k^G$  — разложение  $G$  на классы сопряжённости, где  $x_i \notin Z(G)$ , то есть  $|x_i^G| > 1$ . Вновь рассмотрим случаи:

(a)  $\exists i = \overline{1, \dots, k} : p \nmid |x_i^G|$ . Знаем, что  $|C(x_i)| = \frac{|G|}{|x_i^G|}$ . По предположению индукции в  $C(x_i)$   $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $H \implies |H| = p^s$  (так как степень вхождения  $p$  в порядок группы не уменьшилась), т.е.  $H$  — силовская  $p$ -подгруппа и для  $G$ ;

(b)  $\forall i = \overline{1, \dots, k} : p \mid |x_i^G|$ . Тогда  $p \mid |Z(G)| \implies |Z(G)| = p^{s_0} m_0$  ( $(p, m_0) = 1$ ). Так как  $Z(G)$  — абелева, по 1 случаю  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $S_0 \leq Z(G)$ ,  $|S_0| = p^{s_0}$ .

По свойству центра  $S_0 \leq Z(G) \implies S_0 \trianglelefteq G$  — можем рассмотреть  $G/S_0$ . Так как  $|G/S_0| < |G|$ , по предположению индукции  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $S \leq G/S_0$ .  $|G/S_0| = p^{s-s_0} m \implies |S| = p^{s-s_0}$

Рассмотрим натуральный гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/S_0$ , и  $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$  — полный прообраз  $S$  при этом гомоморфизме.

$S_0 \subset \tilde{S}$ , так как  $\forall s_0 \in S_0 : \pi(s_0) = eS_0$ , причём  $S_0 \trianglelefteq G \implies S_0 \trianglelefteq \tilde{S}$ , т.е. можем рассмотреть ограничение  $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/S_0$ .  $\pi|_{\tilde{S}}$  — натуральный гомоморфизм с ядром  $S_0$  и образом  $\pi(\tilde{S}) = S$ .

Натуральный гомоморфизм сюръективен, а отсюда по теореме о гомоморфизме  $|\tilde{S}| = |S_0| \cdot |S| = p^{s_0} \cdot p^{s-s_0} = p^s \implies \tilde{S}$  — искомая силовская  $p$ -подгруппа  $G$ .

□

**Следствие.** Пусть  $|G| < \infty$ . Тогда  $G$  —  $p$ -группа  $\iff |G| = p^s (s \in \mathbb{N})$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — доказано ранее;

$\implies$ : От противного: пусть  $|G|$  содержит простой множитель  $q \neq p$ . Тогда по I теореме Силова  $\exists$  силовская  $q$ -подгруппа в  $G$ , причём в ней хотя бы  $q$  элементов.

Значит, в ней есть элемент порядка  $q^k (k \geq 1)$ , что противоречит определению  $p$ -группы. Отсюда у  $|G|$  нет простых делителей, отличных от  $p \implies |G| = p^s$ .  $\square$

## 6.2 II теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

Тогда любая  $p$ -подгруппа группы  $G$  лежит в некоторой силовой  $p$ -подгруппе. Все силовые  $p$ -подгруппы группы  $G$  сопряжены.

*Доказательство.* Пусть  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

По I теореме Силова  $\exists$  силовая  $p$ -подгруппа  $S \leq G$ . Рассмотрим  $H \leq G$  — произвольную нетривиальную  $p$ -подгруппу (случай  $H = \{e\}$  очевиден).

Рассмотрим множество  $X = \{g_1 S, \dots, g_m S\}$  смежных классов  $G$  по  $S$  и действие  $H \curvearrowright X$ , заданное по правилу  $\alpha(h)g_i S = hg_i S$ .

$$|\text{Orb}(g_i S)| \mid |H| \implies \begin{cases} |\text{Orb}(g_i S)| = 1 \\ p \mid |\text{Orb}(g_i S)| \end{cases}$$

( $|H| = p^k (k \in \mathbb{Z})$  по следствию из I теоремы Силова)

Предположим, что  $\forall i = \overline{1, \dots, m} : p \mid |\text{Orb}(g_i S)|$ . Тогда  $p \mid |X|$ , так как  $|X|$  — сумма мощностей непересекающихся орбит. Однако  $|X| = m$  — взаимно просто с  $p$ . Противоречие.

Отсюда  $\exists i = \overline{1, \dots, m} : |\text{Orb}(g_i S)| = 1$ , т.е. точка  $g_i S$  неподвижна при  $H \curvearrowright X$ . Значит,  $\forall h \in H \quad hg_i S = g_i S \implies h \in g_i S g_i^{-1} \implies H \leq g_i S g_i^{-1}$ . Так как  $|g_i S g_i^{-1}| = |S|$ ,  $g_i S g_i^{-1}$  — силовая  $p$ -подгруппа, т.е.  $H$  лежит в силовой  $p$ -подгруппе  $G$ .

Заметим, что в доказательстве выше подгруппа  $S$  зафиксирована.

Если рассмотреть  $H$  — произвольную силовую  $p$ -подгруппу  $G$ , то  $|H| = p^s$ . Так как  $H \leq g_i S g_i^{-1}$ ,  $|g_i S g_i^{-1}| = p^s \implies H = g_i S g_i^{-1}$  — любая силовая  $p$ -подгруппа сопряжена с  $S$ . Значит, все силовые  $p$ -подгруппы сопряжены.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

Тогда силовая  $p$ -подгруппа в  $G$  единственна  $\iff$  эта подгруппа нормальна.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$ : Пусть  $S \trianglelefteq G$  — силовая  $p$ -подгруппа. По II теореме Силова все силовые  $p$ -подгруппы сопряжены с  $S$ , а из нормальности совпадают с  $S$ .

(из нормальности следует включение  $g S g^{-1} \subseteq S$ , а также  $|g S g^{-1}| = |S| = p^s$ )

$\Rightarrow$ : Если  $S$  — единственная, то  $\forall g \in G : g S g^{-1} = S$ , т.к. сопряженной к силовой  $p$ -подгруппе должна быть силовая  $p$ -подгруппа. Отсюда  $S \trianglelefteq G$ .  $\square$

### 6.3 Нормализатор. III теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $H \leq G$ ,  $X = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ .

Рассмотрим действие  $G \curvearrowright X : \alpha(\tilde{g})(gHg^{-1}) = \tilde{g}(gHg^{-1})\tilde{g}^{-1}$

Для точки  $H \in X : \text{Orb}(H) = X$ ,  $\text{St}(H) = \{\tilde{g} \in G \mid \tilde{g}H\tilde{g}^{-1} = H\} \leq G$

**Определение.** Стабилизатор  $H$  относительно этого действия называется нормализатором группы  $H$ . Обозначается  $N_G(H)$ .

**Утверждение 1.** Если  $|G| < \infty$ , то  $|G| = |X| \cdot |N_G(H)|$ , где  $X$  — число подгрупп, сопряжённых с  $H$ . В частности,  $|X| = |G : N_G(H)|$ .

*Доказательство.* Очевидно следует из утверждения  $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$ . □

**Утверждение 2.**  $N_G(H)$  — наибольшая (по включению) подгруппа  $G$ , содержащая  $H$  как нормальную подгруппу.

*Доказательство.* Из определения  $N_G(H)$  очевидно, что  $H \trianglelefteq N_G(H)$ .

Пусть  $H \trianglelefteq K \leq G$ . Тогда  $\forall g \in K \ gHg^{-1} = H \implies g \in N_G(H)$ .

Отсюда  $K \leq N_G(H)$ . □

#### III теорема Силова

Пусть  $G$  — группа,  $|G| = p^s m$ , где  $p$  — простое,  $(p, m) = 1$ .

Пусть  $N_p$  — число силовских  $p$ -подгрупп в  $G$ . Тогда  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $N_p \mid m$ .

*Доказательство.*

Пусть  $S$  — произвольная силовская  $p$ -подгруппа  $G$  (хотя бы одна существует по I теореме Силова). Рассмотрим  $X = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$ . По II теореме Силова все силовские  $p$ -подгруппы  $G$  сопряжены, а также порядок любой подгруппы вида  $gSg^{-1}$  равен  $|S|$ , т.е.  $gSg^{-1}$  — также силовская  $p$ -подгруппа. Отсюда  $X$  — множество всех силовских  $p$ -подгрупп  $G$ .

$|X| = N_p \implies$  по утверждению 1 получаем  $N_p \mid |G|$ . Осталось показать, что  $N_p \equiv 1 \pmod{p}$  (если это так, то  $N_p \mid |G| = p^s m \implies N_p \mid m$ ).

Рассмотрим действие  $S \curvearrowright X$  сопряжениями. Очевидно,  $S$  — неподвижная точка относительно него. Также  $N_p = |X| = \sum_{i=1}^k |\text{Orb}(x_i)|$ . При этом

$$|\text{Orb}(x_i)| \mid |S| = p^s \implies \begin{cases} |\text{Orb}(x_i)| = 1 \\ p \mid |\text{Orb}(x_i)| \end{cases}$$

Значит, достаточно показать, что  $S$  — единственная неподвижная точка относительно данного движения (тогда  $|X| = \sum_{i=1}^k |\text{Orb}(x_i)| \equiv |\text{Orb}(S)| = 1 \pmod{p}$ )

Допустим, что  $\tilde{S}$  — неподвижная точка  $\implies \forall g \in S \ g\tilde{S}g^{-1} = \tilde{S}$ .

Рассмотрим нормализатор  $N_G(\tilde{S})$ . Знаем, что  $\tilde{S} \subseteq N_G(\tilde{S})$ , а из неподвижности точки  $\tilde{S}$  имеем  $S \subseteq N_G(\tilde{S})$ . Также  $N_G(\tilde{S}) \leq G$ , то есть степень вхождения  $p$  в  $|N_G(\tilde{S})|$  также равна  $s$ . Значит,  $S, \tilde{S}$  — силовские  $p$ -подгруппы в  $N_G(\tilde{S})$ . Тогда по II теореме Силова  $S$  и  $\tilde{S}$  сопряжены в  $N_G(\tilde{S})$ , т.е.  $S = g\tilde{S}g^{-1}, g \in N_G(\tilde{S})$ , а тогда по определению нормализатора  $S = \tilde{S}$ . Значит,  $S$  — единственная неподвижная точка.  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что любая группа порядка 15 циклическая.

*Доказательство.* Пусть  $G$  — группа порядка 15. По I теореме Силова в ней есть силовские подгруппы порядка 3 и порядка 5. Притом по III теореме Силова:

$$N_3 \equiv 1 \pmod{3}, \ N_3 \mid 5 \implies N_3 = 1$$

$$N_5 \equiv 1 \pmod{5}, \ N_5 \mid 3 \implies N_5 = 1$$

Таким образом, в  $G$  есть по одной силовской подгруппе порядка 3 и 5, а по следствию из II теоремы Силова они обе нормальны в  $G$ . Так как их порядки простые, обе эти подгруппы циклические, т.е. изоморфны  $\mathbb{Z}_3$  и  $\mathbb{Z}_5$  соответственно.

Остаётся заметить, что эти подгруппы пересекаются тривиально (у остальных элементов разные порядки), т.е. некоторая подгруппа  $G$  раскладывается в их прямое произведение, а так как  $15 = 3 \cdot 5$ , эта подгруппа — вся  $G$ . Отсюда  $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{15}$  — циклическая.  $\square$

## 7 Коммутант

**Определение.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $x, y \in G$ .

Коммутатором элементов  $x, y$  называется элемент  $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ .

**Свойства.**

1.  $[x, y] = e \iff xy = yx$ ;
2.  $[x, y]^{-1} = [y, x]$ ;
3.  $\forall g \in G \quad g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$ .

*Доказательство.* 1, 2 — очевидно;

$$3 : [gxg^{-1}, gyg^{-1}] = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = g[x, y]g^{-1}$$

□

**Определение.** Коммутантом группы  $G$  называется подгруппа, порождённая всеми коммутаторами элементов группы  $G$ . Обозначается  $[G]$  или  $G'$ .

$$G' = \left\{ \prod_{i=1}^k [x_i, y_i] \mid x_i, y_i \in G \right\}.$$

**Утверждение.**  $G' = \{e\} \iff G$  — абелева.

*Доказательство.* Очевидно из свойства 1 коммутатора. □

**Утверждение.**  $G' \trianglelefteq G$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \forall g \in G, g' = [x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k] \in G' : gg'g^{-1} &= g[x_1, y_1][x_2, y_2] \dots [x_k, y_k]g^{-1} = \\ &= (g[x_1, y_1]g^{-1})(g[x_2, y_2]g^{-1}) \dots (g[x_k, y_k]g^{-1}) = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}] \dots [gx_kg^{-1}, gy_kg^{-1}] \end{aligned}$$

Отсюда  $\forall g \in G, g' \in G' : gg'g^{-1} \in G' \implies G' \trianglelefteq G$ . □

**Утверждение.** Если  $H \leq G$  и  $G' \leq H$ , то  $H \trianglelefteq G$ .

*Доказательство.*  $\forall g \in G, h \in H : ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in H$ . □

**Утверждение.** Пусть  $N \trianglelefteq G$ . Тогда  $G/N$  абелева  $\iff G' \subseteq N$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $G/N$  абелева. Тогда  $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N) \implies g_1g_2N = g_2g_1N \implies g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = [g_1, g_2] \in N$ . Значит, любой коммутатор  $\in N$ , а значит и все произведения коммутаторов  $\in N$ , то есть  $G' \subseteq N$ .

$\impliedby$ : Пусть  $G' \subseteq N$ . Тогда  $\forall g_1, g_2 \in G : [g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in N \implies g_1g_2N = g_2g_1N \implies (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N)$ . □

## 7.1 Коммутанты некоторых известных групп

**Лемма 1.**

1.  $A_n$  порождается циклами длины 3 ( $n \geq 3$ );
2. Если  $n \geq 5$ , то  $A_n$  порождается произведениями пар независимых транспозиций;

*Доказательство.*  $\forall \sigma \in A_n \sigma = \prod_{i=1}^k \tau_i$ , где  $\tau_i$  — транспозиции,  $k$  — чётное, т.е. транспозиции разбиваются на пары — рассмотрим случаи зависимых и независимых транспозиций в паре:

Если  $i, j, k, l$  — различные (случай  $n = 3$  очевиден), то

$$(ij)(jk) = (ijk); (ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl)$$

то есть  $\sigma$  представима как произведение тройных циклов.

Если  $n \geq 5$ , то  $\exists i, j, k, l, m$  — различные, а тогда  $(ij)(jk) = ((ij)(lm))((lm)(jk))$ . Таким образом можно избавиться от пар зависимых транспозиций, то есть  $\sigma$  представима как произведение пар независимых транспозиций.  $\square$

**Утверждение.**  $S'_n = A_n$ .

*Доказательство.*  $|S_n/A_n| = 2 \implies S_n/A_n$  — абелева  $\implies S'_n \subseteq A_n$ . Значит, достаточно доказать (по лемме 1), что  $\forall i, j, k$  (различных)  $(ikj) \in S'_n$ .

$$[(ij), (jk)] = (ij)(jk)(ij)^{-1}(jk)^{-1} = (ik)(kj) = (ikj)$$

$\square$

**Утверждение.**

1.  $n = 1, 2, 3 \implies A'_n = \{\text{id}\}$ ;
2.  $n = 4 \implies A'_n = V_4$ ;
3.  $n \geq 5 \implies A'_n = A_n$ .

*Доказательство.*

1.  $n = 1, 2, 3$  —  $A'_n = \{\text{id}\}$ , т.к.  $A_n$  — абелева;
2.  $n = 4$ :  $V_4 \trianglelefteq A_4, |V_4| = 4 \implies |A_4/V_4| = 3$  — абелева. Значит,  $A'_4 \subseteq V_4$ .

$$[(ijk), (ijm)] = (ijk)(ijm)(ijk)^{-1}(ijm)^{-1} = (jkm)(imj) = (ij)(km)$$

3.  $n \geq 5$ : По пункту 2 леммы 1  $A_n$  порождается парами независимых транспозиций. Аналогично  $[(ijk), (ijm)] = (ij)(km)$ , а значит, все элементы  $A_n$  принадлежат  $A'_n$ .

□

**Лемма 2.** *Группа  $SL_n(\mathbb{F})$  порождается элементарными матрицами, соответствующими преобразованиям  $I$  типа  $(a_i \mapsto a_i + \lambda a_j)$ .*

*Доказательство.* Покажем, что  $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$  приводится к  $E$  за конечное число операций  $I$  типа (над строками):

Индукция по  $n$ . База  $n = 1$  очевидна ( $\det A = a_{11} = 1 \implies A = E$ )

Шаг: Так как  $\det A \neq 0$ ,  $\exists i : a_{i1} \neq 0$ .

Если  $a_{11} = 0$ , то прибавим  $i$ -ю строку к первой — сделаем  $a_{11} \neq 0$ . Пусть  $n \geq 2$  (случай  $n = 1$ )

Если  $a_{11} \neq 1$ , то сделаем  $a_{21} \neq 0$  аналогично  $a_{11}$ , а далее прибавим к первой строке вторую, умноженную на  $\frac{1-a_{11}}{a_{21}}$  — сделаем  $a_{11} = 1$ . Далее с помощью первой строки сможем занулить оставшиеся элементы первого столбца. Тогда подматрица полученной матрицы без первой строки и первого столбца будет иметь определитель, равный определителю всей матрицы, то есть 1, а отсюда её можно привести к единичной по предположению индукции. Сделаем это, а далее с помощью  $i$ -й строки занулим  $a_{1i}$ .

Значит,  $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$  приводится к  $E$  за конечное число операций  $I$  типа над строками, то есть раскладывается в произведение соответствующих элементарных матриц.

□

**Утверждение.** *Пусть  $|\mathbb{F}| > 3$ . Тогда  $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$ .*

*Доказательство.* Заметим, что  $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^*$  из теоремы о гомоморфизме для  $\alpha : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}^*$  такого, что  $\alpha(A) = \det A$ . Отсюда  $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F})$  — абелева (как мультипликативная группа поля), т.е.  $GL_n(\mathbb{F})' \subseteq SL_n(\mathbb{F})$ .

Если  $|\mathbb{F}| > 3$ , то  $\exists \lambda \in \mathbb{F} : \lambda \neq 0, 1, -1$ .

$$n = 2 : \left[ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

Любое ур-е  $(\lambda^2 - 1)a = \mu$  решается для  $a$ , так как  $\lambda \neq \pm 1$  — отсюда все верхнетреугольные элементарные матрицы  $I$  типа принадлежат  $GL_n(\mathbb{F})'$ . Аналогично для нижнетреугольных — все элементарные матрицы  $I$  типа, а отсюда и  $SL_n(\mathbb{F})$ ,

принадлежат  $GL_n(\mathbb{F})'$ .

Случай  $n > 2$  аналогичен: необходимо рассмотреть коммутатор

$$[E + (\lambda - 1)E_{ii} + (\lambda^{-1} - 1)E_{jj}, E + aE_{ij}] = E + (\lambda^2 - 1)aE_{ij} \quad (i \neq j)$$

Все рассуждения верны и для доказательства  $SL_n(\mathbb{F}) \subseteq SL_n(\mathbb{F})'$ , т.к. определители всех рассматриваемых при взятии коммутаторов матриц равны 1.  $\square$



## 8 Разрешимые и простые группы

### 8.1 Разрешимые группы

**Определение.** Кратный коммутант группы  $G$ :

$$G^{(1)} = G'; \quad G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] = (G^{(k)})'$$

Очевидно, что  $G \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$

**Определение.** Группа  $G$  называется разрешимой, если  $\exists m \in \mathbb{N} : G^{(m)} = \{e\}$ .

**Утверждение.**  $G$  — абелева  $\implies G$  — разрешимая.

*Доказательство.*  $G$  — абелева  $\implies G' = \{e\}$ . □

**Утверждение.**

1.  $S_n$  — разрешимая  $\iff n \leq 4$ ;

2.  $A_n$  — разрешимая  $\iff n \leq 4$ .

*Доказательство.*  $S'_n = A_n$ , поэтому  $S_n$  — разрешимая  $\iff A_n$  — разрешимая.  $A_2 = \{\text{id}\}$ ,  $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$  — абелева,  $A'_4 = V_4$  — абелева  $\implies$  при  $n \leq 4$   $A_n$  разрешима. При  $n \geq 5$   $A'_n = A_n$ , то есть  $A_n$  — не разрешимая. □

**Утверждение.** Пусть  $\mathbb{F}$  — поле,  $|\mathbb{F}| > 3$ . Тогда  $GL_n(\mathbb{F})$  и  $SL_n(\mathbb{F})$  не разрешимы.

*Доказательство.*  $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$ . □

**Утверждение.**

1.  $G$  — разрешимая,  $H \leq G \implies H$  — разрешимая;

2.  $G$  — разрешимая,  $H \trianglelefteq G \implies G/H$  — разрешимая;

3.  $H \trianglelefteq G$ ,  $H$  и  $G/H$  — разрешимые  $\implies G$  — разрешимая.

*Доказательство.*

1. Для начала заметим, что  $H \leq G \implies H' \leq G'$ , так как любой коммутатор элементов из  $H$  — также коммутатор элементов из  $G$ . Значит,  $H^{(m)} \leq G^{(m)}$ .  
 $G$  разрешима  $\implies \exists m : G^{(m)} = \{e\} \implies H^{(m)} = \{e\} \implies H$  разрешима.

2. Рассмотрим натуральный гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/H$ . Очевидно, что образ коммутатора при гомоморфизме — коммутатор:

$$\alpha([x, y]) = \alpha(xy x^{-1} y^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1} = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

то есть  $\pi(G') \subseteq (G/H)'$ . При этом натуральный гомоморфизм сюръективен, а прообраз коммутатора — также коммутатор (аналогично), то есть  $\pi(G') = (G/H)'$ . Аналогично  $\pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)}$ .

$G$  разрешима  $\implies \exists m : G^{(m)} = \{e\} \implies \pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)} = \{e\}$ .

3.  $(G/H)$  разрешима  $\implies \exists k : (G/H)^{(k)} = \{e\} \implies \pi(G^{(k)}) = \{e\} \implies G^{(k)} \subseteq H$ .  
Также  $H$  разрешима  $\implies \exists l : H^{(l)} = \{e\} \implies (G^{(k)})^{(l)} = G^{(k+l)} = \{e\}$ .  
Значит,  $G$  разрешима.

□

**Утверждение.** Группа  $T_n(\mathbb{F})$  невырожденных верхнетреугольных матриц порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $\mathbb{F}$  разрешима.

*Доказательство.* Индукция по  $n$ :

База:  $n = 1 \implies T_1(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^*$  — абелева, а значит, разрешима;

Шаг: пусть  $T_{n-1}(\mathbb{F})$  разрешима. Рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : T_n \rightarrow T_{n-1}$ :

$$\varphi : \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & & * & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{2n} \\ 0 & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & & * & \\ & \ddots & & \\ 0 & & a_{n-1n-1} & \end{array} \right)$$

Этот гомоморфизм, очевидно, сюръективен, т.е. по теореме о гомоморфизме  $T_n/\text{Ker } \varphi \simeq T_{n-1}$ . Так как  $T_{n-1}$  разрешима по предположению индукции, по пункту 3 предыдущего утверждения достаточно доказать разрешимость группы

$$\text{Ker } \varphi = \left\{ \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n} \\ \text{E} & & & a_{2n} \\ & & & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{array} \right) : a_{in} \in \mathbb{F}, a_{nn} \neq 0 \right\}$$

Аналогично, рассмотрим гомоморфизм  $\psi : \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathbb{F}^*$ :

$$\psi : \left( \begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n} \\ \text{E} & & & a_{2n} \\ & & & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto a_{nn}$$

Заметим, что  $\text{Im } \psi = \mathbb{F}^*$  — абелева, а  $\text{Ker } \psi$  состоит из матриц  $\text{Ker } \varphi$  с  $a_{nn} = 1$ .

$$\left( \begin{array}{c|c} \text{E} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c|c} \text{E} & \begin{matrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n-1n} \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \text{E} & \begin{matrix} a_{1n} + b_{1n} \\ a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1n} + b_{n-1n} \end{matrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

Отсюда несложно видеть, что  $\text{Ker } \psi$  — также абелева, то есть разрешимая группа. Значит,  $\text{Ker } \varphi$  разрешима, а отсюда и  $T_n(\mathbb{F})$  — разрешимая группа.  $\square$

**Утверждение 1.** *Всякая конечная примарная группа  $G$  разрешима.*

*Доказательство.* Пусть  $p$  — простое, для которого  $G$  является  $p$ -группой.

Индукция по  $n = |G|$ :

База:  $n = 1 \implies G = \{e\}$  — разрешима;

Шаг:  $G \neq \{e\} \implies Z(G) \neq \{e\}$  (из примарности). Знаем, что  $Z(G) \trianglelefteq G$  — рассмотрим  $G/Z(G)$ . Это также  $p$ -группа, причём порядка  $\frac{|G|}{|Z(G)|}$ , что меньше  $n$ . Значит,  $G/Z(G)$  разрешима по предположению индукции, а также  $Z(G)$  разрешима, так как абелева. Отсюда  $G$  разрешима.  $\square$

**Утверждение 2.** *Всякая группа  $G$  порядка  $pq$ , где  $p, q$  простые, разрешима.*

*Доказательство.* Случай  $p = q$  очевиден из утверждения 1.

Пусть  $p \neq q$  — без ограничения общности  $p > q$ .

По I теореме Силова  $\exists$  силовская  $p$ -подгруппа  $H \leq G$ .

$$\text{По III теореме Силова } \begin{cases} N_p \mid q \\ N_p \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \implies N_p = 1$$

(не может равняться  $q$  в силу  $q < p$ )

Тогда по следствию из II теоремы Силова единственная силовская  $p$ -подгруппа  $H$  нормальна в  $G$ . Притом  $|H| = p \implies H \simeq \mathbb{Z}_p$  и  $|G/H| = q \implies G/H \simeq \mathbb{Z}_q$  — абелевы. Значит,  $H$  и  $G/H$  разрешимы, а отсюда  $G$  разрешима.  $\square$

## 8.2 Простые группы

**Определение.** Подгруппа  $H \leq G$  называется собственной, если  $H \neq \{e\}, G$ .

**Определение.** Группа  $G$  называется простой, если  $G \neq \{e\}$  и в  $G$  нет собственных нормальных подгрупп.

**Утверждение 1.** *Абелева группа  $G$  — простая  $\iff G \simeq \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  — простое.*

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — очевидно ( $\mathbb{Z}_p$  — циклическая, т.е. нет собственных подгрупп);

$\Rightarrow$ : Пусть  $G$  — абелева и простая группа.

Тогда  $G$  циклическая, так как  $\forall g \neq e : \langle g \rangle \trianglelefteq G$  (т.к. абелева) и  $g \notin \{e\}$ , т.е.  $\langle g \rangle = G$ . Теперь, если  $G$  бесконечна, то  $G \simeq \mathbb{Z}$ , но  $2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$  — противоречие, т.е.  $G$  конечна. А если  $|G|$  составное, то  $G \simeq \mathbb{Z}_{mn}$ , где  $\langle m \rangle \triangleleft \mathbb{Z}_{mn}$  ( $m, n \neq 1$ ). Значит,  $|G|$  простое, т.е.  $G \simeq \mathbb{Z}_p$ .  $\square$

**Утверждение 2.** Если  $G$  — разрешимая и простая, то  $G \simeq \mathbb{Z}_p$ , где  $p$  — простое.

*Доказательство.* Так как  $G$  разрешима,  $G' \neq G$ . Притом  $G' \trianglelefteq G$ , а отсюда из простоты  $G' = \{e\}$ . Значит,  $G$  — абелева, а тогда  $\simeq \mathbb{Z}_p$  из утверждения 1.  $\square$

*Замечание.* Таким образом, всякая простая группа либо изоморфна  $\mathbb{Z}_p$ , либо не абелева и не разрешима.

### 8.3 Значение простых групп

**Определение.** Субнормальной матрёшкой называется последовательность

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_m = \{e\}; \quad G_{i+1} \trianglelefteq G_i \quad (i = \overline{0 \dots m-1})$$

**Пример.**  $G = A_4, H = V_4, K = \langle (12)(34) \rangle$ . Тогда  $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq H$ , то есть  $G \geq H \geq K \geq \{\text{id}\}$  — субнормальная матрёшка.

**Теорема.** Группа  $G$  разрешима  $\iff G$  обладает субнормальной матрёшкой такой, что  $G_i/G_{i+1}$  — абелева ( $i = \overline{0 \dots m-1}$ ).

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Определение.** Композиционным рядом называется субнормальная матрёшка такая, что  $\forall i = \overline{0 \dots m-1} : G_i \neq G_{i+1}$  и  $G_i/G_{i+1}$  — простая группа.

**Утверждение 3.** Всякая конечная группа  $G$  обладает композиционным рядом.

*Доказательство.* Если  $G$  — простая, то  $G \geq \{e\}$  — композиционный ряд.

Если  $G$  — не простая, то  $\exists$  собственная подгруппа  $N \trianglelefteq G$ , т.е.  $G \geq N \geq \{e\}$  — субнормальная матрёшка. Будем уплотнять эту матрёшку следующим образом:

Предположим, что в субнормальной матрёшке  $G_0 \geq \dots \geq G_m$  группа  $G_i/G_{i+1}$  — не простая. Тогда  $\exists$  собственная  $\tilde{N} \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$ .

Рассмотрим натуральный гомоморфизм  $\pi : G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$ . Тогда  $\pi^{-1}(\tilde{N}) = \tilde{N}$  — собственная нормальная подгруппа  $G_i$ , содержащая  $G_{i+1}$ , то есть в матришке кусок "...  $\supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \dots$ " заменяем на "...  $\supseteq G_i \supseteq \tilde{N} \supseteq G_{i+1} \supseteq \dots$ ". Очевидно, что процесс таких уплотнений конечен, так как количество членов матришки явно не превышает  $|G|$  (порядок строго убывает). Значит, за конечное число уплотнений сможем построить композиционный ряд для  $G$ .  $\square$

**Теорема.** (*Жордана — Гёльдера*)

*Если группа  $G$  обладает композиционным рядом, то набор факторгрупп в нём определён однозначно (с точностью до перестановки).*

*Доказательство.* Без доказательства.  $\square$

**Пример.** Пусть  $G = \langle a \rangle_{12}$ . Композиционные ряды:

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a^2 \rangle_6 > \langle a^4 \rangle_3 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3;$$

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a^2 \rangle_6 > \langle a^6 \rangle_2 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2;$$

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a^3 \rangle_4 > \langle a^6 \rangle_2 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2;$$

*Замечание.* Группа  $G$  не задаётся однозначно набором простых факторов композиционного ряда: пусть набор факторов —  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$ , тогда возможны композиционные ряды  $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4$  и  $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq V_4$ .

## 8.4 Примеры простых групп

**Упражнение.** Если  $|G| < 60$  и  $|G|$  — не простое, то  $G$  — не простая группа.

*Доказательство.* (довольно объёмное и вряд ли пригодится)

Всё в лучших традициях — докажем несколько лемм:

**Лемма 1.** *Всякая неабелева примарная группа не является простой.*

*Доказательство.* Очевидно из нетривиальности центра — он не совпадает со всей группой из неабелевости, а значит является собственной нормальной подгруппой  $G$ .  $\square$

**Лемма 2.** *Пусть  $G$  — неабелева группа,  $|G| = p^l m$ , где  $p \nmid m$ ,  $p^l \nmid (m-1)!$ . Тогда  $G$  — не простая группа.*

*Доказательство.* Случай  $m = 1$  очевиден из леммы 1.

Пусть  $m > 1$ ,  $S$  — силовская  $p$ -подгруппа  $G$ . Рассмотрим действие  $G \curvearrowright G/S$  левыми сдвигами ( $G/S$  — множество левых смежных классов). Таких смежных классов ровно  $m$  (из теоремы Лагранжа), причём каждый элемент  $g$  переводит разные смежные классы в разные — отсюда каждый элемент  $G$  соответствует некоторой подстановке из  $S_m$ , то есть определён гомоморфизм  $\alpha : G \rightarrow S_m$ . Если  $G$  простая, то  $\text{Ker } \alpha = \{e\}$  либо  $G$  — второе, очевидно, невозможно (класс  $g_1S$  в класс  $g_2S$  переводит элемент  $g_2g_1^{-1}$ ). Значит,  $G \simeq \alpha(G) \leq S_m$  из теоремы о гомоморфизме. Отсюда  $|G| \mid |S_m| \implies p^l m \mid m! \implies p^l \mid (m-1)!$  — противоречие.  $\square$

*Замечание.* Данная лемма очень сильна при решении некоторых упражнений — например, из неё несложными рассуждениями следует непростота (а по индукции и разрешимость) неабелевых групп порядков  $2p^k, 3p^k, 4p^k$  ( $p$  — простое).

Остаётся лишь перебор случаев составных чисел  $< 60$  — целиком его несложно провести самому, поэтому здесь он приведён не будет в целях сохранения моего морального и физического благополучия.

В результате под лемму 2 не попадут порядки 30, 40 и 56 — разберём их:

- $|G| = 40 = 2^3 \cdot 5$ : По *III* теореме Силова в  $G$  единственная подгруппа порядка 5 ( $N_5 \mid 8, N_5 \equiv 1 \pmod{5}$ ) — она нормальна;
- $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ : По *III* теореме Силова число силовских 5-подгрупп в  $G$  либо 1, либо 6 ( $N_5 \mid 6, N_5 \equiv 1 \pmod{5}$ ). Если такая подгруппа единственна — то она нормальна, и  $G$  не простая. Аналогично силовских 3-подгрупп либо 1, либо 10 — случай единственности очевиден. Остаётся заметить, что порядки самих силовских подгрупп простые, то есть эти подгруппы циклические — значит, различные 3- и 5-подгруппы пересекаются тривиально. Значит, в  $G$  есть  $6 \cdot (5 - 1) = 24$  различных элементов порядка 5 и  $10 \cdot (3 - 1) = 20$  различных элементов порядка 3, что невозможно для группы порядка 30.
- $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$ : По *III* теореме Силова силовских 7-подгрупп в  $G$  либо 1, либо 8 ( $N_7 \mid 8, N_7 \equiv 1 \pmod{7}$ ). Случай  $N_7 = 1$  очевиден, а иначе по рассуждениям выше силовские 7-подгруппы пересекаются тривиально, а значит в  $G$  есть хотя бы  $8 \cdot (7 - 1) = 48$  различных элементов порядка 7. При этом в  $G$  есть силовская 2-подгруппа, которой принадлежат 8 элементов порядка  $2^k$  — либо она единственна, то есть нормальна, либо их больше одной, что невозможно в группе порядка  $56 = 48 + 8$ .

Все случаи разобраны. □

**Теорема.** Если  $G$  — простая и  $|G| = 60$ , то  $G \simeq A_5$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

**Пример.**  $A_2 = \{\text{id}\}$ ,  $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$  — простая,  $A_4$  — не простая ( $V_4 \trianglelefteq A_4$ ).

**Лемма.** Пусть  $n \geq 5$ ,  $N \leq A_n$ ,  $N \neq \{\text{id}\}$ ,  $N \trianglelefteq S_n$ . Тогда  $A_n = N$ .

*Доказательство.* Так как  $N \neq \{\text{id}\}$ , то  $\exists \sigma \in N, \sigma \neq \text{id}$ . Разложим  $\sigma$  в независимые циклы:  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ . Рассмотрим случаи:

1.  $\exists i$  такой, что длина  $c_i \geq 3$ , то можем считать, что  $c_1 = (i_1 \dots i_k), k \geq 3$ . Так как  $N \trianglelefteq S_n, \forall \tau \in S_n : \tau \sigma \tau^{-1} \in N$ . Рассмотрим  $\tau = (i_1 i_2)$ :

$$\tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} \in N; \tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} = \tau c_1 \tau^{-1} c_1^{-1} = (i_2 i_1 i_3 \dots i_k)(i_k \dots i_1) = (i_1 i_2 i_3)$$

( $\tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} = \tau c_1 \tau^{-1} c_1^{-1}$ , так как остальные циклы в  $\sigma$  независимы с  $\tau$ , т.е. коммутируют с  $\tau$ )

Тогда в  $N$  содержатся все тройные циклы —  $A_n = N$ .

2. Если же  $\forall i$  длина  $c_i$  равна 2, то  $k$  — чётно, т.е.  $\sigma = (i_1 i_2)(i_3 i_4) c_3 \dots c_k$ .

Тогда при аналогичных рассуждениях и  $\tau = (i_2 i_3)$ :

$$\begin{aligned} \tau \sigma \tau^{-1} \sigma^{-1} &= (i_2 i_3)(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_2 i_3)(i_1 i_2)(i_3 i_4) = \\ &= (i_1 i_3)(i_2 i_4)(i_1 i_2)(i_3 i_4) = (i_1 i_4)(i_2 i_3) \in N \end{aligned}$$

Так как в  $S_n$  все произведения пар независимых транспозиций сопряжены, все пары независимых транспозиций  $\in N$ . Так как  $n \geq 5$ ,  $A_n$  порождается парами независимых транспозиций, а значит,  $N = A_n$ . □

**Теорема.**  $A_n$  — простая при  $n \geq 5$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную нормальную подгруппу  $N \trianglelefteq A_n$ .

Если  $N \trianglelefteq S_n$ , то по лемме 1  $N = A_n$ . Иначе:  $|S_n : A_n| = 2, S_n = A_n \sqcup (12)A_n$ .

Пусть  $N$  не нормальна в  $S_n$ . Обозначим  $N_1 = N, N_2 = (12)N_1(12)$ .

Если  $N_1 = N_2$ , то  $N$  при сопряжении любой  $\sigma \in S_n$  не изменится (для  $\sigma \in A_n$  очевидно из  $N \trianglelefteq A_n$ , для  $\tau \in S_n$ :  $\tau = (12)\tau' \implies \tau N \tau^{-1} = (12)\tau' N \tau'^{-1}(12) = (12)N(12) = N$ ), т.е.  $N \trianglelefteq S_n$  — противоречие.

Поэтому  $N_1 \neq N_2$ , причём  $|N_1| = |N_2|$ .

Докажем, что  $A_n = N_1 \times N_2$  (отсюда получим, что  $|A_n| = |N|^2$ ):

1.  $N_1 \trianglelefteq A_n$  — уже имеем;

2.  $N_2 \trianglelefteq A_n$ :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in A_n : \sigma N_2 \sigma^{-1} &= \sigma(12)N_1(12)\sigma^{-1} = \underset{=\tilde{\sigma}}{(12)}(12)\underset{=\tilde{\sigma}^{-1}}{\sigma(12)}N_1(12)\sigma^{-1}(12)(12) = \\ &= (12)\tilde{\sigma}N_1\tilde{\sigma}^{-1}(12) = (12)N_1(12) = N_2 \end{aligned}$$

3.  $N_1 \cap N_2 = \{\text{id}\}$ : Пусть  $K = N_1 \cap N_2 \leq A_n$ . Тогда  $K \trianglelefteq S_n$ :

- $\forall \sigma \in A_n : \sigma K \sigma^{-1} \subseteq N_1, N_2$  из  $N_1, N_2 \trianglelefteq A_n$ , то есть  $\sigma K \sigma^{-1} \subseteq K$ ;
- $(12)K(12) \subseteq N_2$  из  $K \subseteq N_1$ ,  $(12)K(12) \subseteq N_1$  из  $K \subseteq N_2 \implies \implies (12)K(12) \subseteq K$

Значит,  $K$  не изменится при сопряжении любой подстановкой из  $S_n$ , то есть  $K \trianglelefteq S_n$ . Тогда по лемме 1 и  $K \neq A_n$  имеем  $K = \{\text{id}\}$ .

4.  $N_1 N_2 = A_n$ : Пусть  $L = N_1 N_2 \leq A_n$ . Тогда  $L \trianglelefteq S_n$ :

- $\forall \sigma \in A_n : \sigma L \sigma^{-1} = \sigma N_1 N_2 \sigma^{-1} = \sigma N_1 \sigma^{-1} \sigma N_2 \sigma^{-1} = N_1 N_2$ ;
- $(12)L(12) = (12)N_1 N_2(12) = (12)N_1(12)(12)N_2(12) = N_2 N_1 = N_1 N_2$

При этом  $L \neq \text{id}$  — по лемме 1  $L = A_n$ .

Теперь индукцией по  $n \geq 5$  докажем, что  $A_n$  — простая.

База:  $n = 5$  —  $|A_5| = 60$  — не точный квадрат, то есть невозможна ненормальность  $N$  в  $S_n$ , а отсюда  $A_n$  — простая;

Шаг: Пусть  $A_{n-1}$  — простая. Обозначим  $A_n \geq H = \{\sigma \in A_n \mid \sigma(n) = n\} \simeq A_{n-1}$ . Предположим, что  $N_1 \neq N_2 \implies A_n = N_1 \times N_2 \implies H \leq N_1 \times N_2$ . Тогда  $H \cap N_2 \trianglelefteq H$ , т.к.  $N_2 \trianglelefteq A_n$  и  $H \cap N_2 \subseteq H$ .

Так как  $H$  — простая, то  $H \cap N_2$  равно либо  $H$ , либо  $\text{id}$ .

Если  $H \cap N_2 = H$ , то  $H \subseteq N_2 \implies |H| \leq |N_2| = |N|$ .

Если  $H \cap N_2 = \{\text{id}\}$ , то рассмотрим гомоморфизм  $\varphi : A_n = N_1 \times N_2 \rightarrow N_1$ .

$\text{Ker } \varphi = N_2 \implies H \simeq \varphi(H) \leq N_1 \implies |H| \leq |N_1| = |N|$ .

В каждом случае  $|H| = |A_{n-1}| \leq |N|$ . Тогда из предположения

$$|A_n| = |N|^2 \geq |A_{n-1}|^2 \implies \frac{n!}{2} \geq \frac{((n-1)!)^2}{4} \implies 2n \geq (n-1)!$$

Последнее неравенство, очевидно, неверно при  $n \geq 5$ . □

**Теорема.**  $SO_3(\mathbb{R})$  — простая.

*Доказательство.* Без доказательства. □



## 9 Линейные представления

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $\mathbb{F}$ ,  $GL(V)$  — группа обратимых линейных операторов над  $V$ ,  $G$  — произвольная группа.

**Определение.** Произвольный гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется линейным представлением группы  $G$ .

$V$  называется пространством линейного представления,  $\dim V$  — размерность (степень) линейного представления. Если  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , то линейное представление называется рациональным, вещественным или комплексным соответственно.

Из определения  $\Phi(e) = I$  — тождественный оператор,  $\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1) \Phi(g_2)$ .

**Определение.**  $\forall g \in G$   $\Phi(g)$  называется оператором линейного представления. Обозначается  $\forall v \in V$   $\Phi(g)v := \Phi(g)(v)$ .

**Определение.** Если  $\text{Ker } \Phi = \{e\}$ , то линейное представление называется точным. В этом случае  $G \simeq \text{Im } \Phi \leq GL(V)$ .

**Определение.** Если  $G \leq GL(V)$ , то тождественное линейное представление  $\Phi = \text{id} : G \rightarrow GL(V)$  называется тавтологическим линейным представлением  $G$ .

### Примеры.

1.  $\dim V = 1 : GL(V) \simeq \mathbb{F}^*$ , то есть  $\Phi : G \rightarrow GL(V) \simeq \mathbb{F}^*$ ;
  - (a)  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, G = \mathbb{R} : \Phi(t) = e^t$ ;
  - (b)  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, G = S_n : \Phi(\sigma) = \text{sgn } \sigma$ ;
  - (c)  $G = GL_n(\mathbb{F}) : \Phi(A) = \det A$ .
2.  $V = M_n(\mathbb{C}), G = \mathbb{R}$ . Если зафиксировать матрицу  $B \in M_n(\mathbb{C})$ , то определено линейное представление  $\Phi(t) = e^{tB}$ .
3. Пусть задано линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  и задан гомоморфизм  $\Psi : H \rightarrow G$ . Тогда  $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \Psi : H \rightarrow GL(V)$  — линейное представление группы  $H$ .
4. Пусть  $X$  — некоторое множество, задано  $G \curvearrowright X$ .  
Рассмотрим векторное пространство функций  $\mathcal{F}(X, \mathbb{F}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{F}\} = V$ .  
Тогда  $\Phi : G \rightarrow GL(V) : \forall g \in G$   $\Phi(g)f = \tilde{f}$ , где  $\tilde{f}(x) = f(gx)$  — линейное представление группы  $G$ :

$$\forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1 g_2)f(x) = f(g_1 g_2 x) = \Phi(g_1)f(g_2 x) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)f(x)$$

## 9.1 Матричные представления группы

**Определение.** Произвольный гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$  называется матричным представлением группы  $G$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}$ .

Заметим, что линейные и матричные представления связаны между собой:

1. Если задано матричное представление  $G$ , то есть гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$ , то  $GL_n(\mathbb{F}) \underset{\psi}{\simeq} GL(\mathbb{F}^n) \implies \tilde{\Phi} = \psi \circ \Phi : G \rightarrow GL(\mathbb{F}^n)$  — линейное представление  $G$ .
2. Если задано  $n$ -мерное линейное представление  $G$ , то есть гомоморфизм  $\Phi : G \rightarrow GL(V) : \forall g \in G \ g \mapsto \Phi(g) = \varphi_g$  — линейный оператор. Если фиксировать базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , то  $\varphi_g \leftrightarrow A_g$  — матрица  $\varphi_g$  в базисе  $\mathcal{E}$ . Отсюда  $GL(V) \underset{\tilde{\psi}}{\simeq} GL_n(\mathbb{F})$  — получим матричное представление группы  $G$ .

Поэтому при фиксированном базисе  $V$  имеет место взаимно однозначное соответствие между линейными представлениями  $G \rightarrow GL(V)$  и матричными представлениями  $G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$ , где  $n = \dim V$ .

*Замечание.* Далее зачастую  $n$ -мерное линейное представление  $G \rightarrow GL(V)$  будет рассматриваться как матричное представление  $G \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$ , ему соответствующее.

**Напоминание.** Если  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор,  $A$  и  $\tilde{A}$  — его матрицы в базисах  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  соответственно, то  $\tilde{A} = C^{-1}AC$ , где  $C$  — матрица перехода от  $\mathcal{E}$  к  $\tilde{\mathcal{E}}$ .

Здесь и далее: если вдруг не упоминается — см. конспект линейной алгебры ([2]).

**Определение.** Матричные представления  $\Phi_1, \Phi_2$  группы  $G$  размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}$  называются эквивалентными (изоморфными, подобными), если  $\exists C \in GL_n(\mathbb{F}) : \forall g \in G : \Phi_1(g) = C^{-1}\Phi_2(g)C$ . Обозначается  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ .

*Замечание.* Эквивалентные матричные представления группы  $G$  соответствуют одному и тому же линейному представлению  $G$  относительно разных базисов.

**Определение.** Пусть  $V_1, V_2$  — векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ . Линейные представления  $\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$  и  $\Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  называются эквивалентными (изоморфными, подобными), если  $\exists \varphi : V_1 \rightarrow V_2$  — изоморфизм такой, что  $\forall g \in G : \Phi_1(g) = \varphi^{-1} \circ \Phi_2(g) \circ \varphi$ . Обозначается  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ .

*Замечание.* Если  $\Phi_1 \approx \Phi_2$  и  $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V_1$ , то в базисе  $\mathcal{E}_2 = \{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$  (где  $\varphi$  — изоморфизм  $V_1$  и  $V_2$  из определения  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ ) для любого  $g$  матрица линейного оператора  $\Phi_2(g)$  равна матрице оператора  $\Phi_1(g)$  в базисе  $\mathcal{E}_1$ .

## 9.2 Приводимость линейных представлений

**Напоминание.** Пусть  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор. Подпространство  $U \subseteq V$  называется инвариантным относительно  $\varphi$ , если  $\forall u \in U : \varphi(u) \in U$ .

**Определение.** Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление группы  $G$ . Подпространство  $U \subseteq V$  называется инвариантным относительно  $\Phi$ , если  $\forall g \in G$   $U$  инвариантно относительно оператора  $\Phi(g)$ , то есть  $\forall g \in G, u \in U : \Phi(g)u \in U$ .

*Замечание.* Подпространства  $\{0\}, V$ , очевидно, всегда инвариантны — они называются тривиальными инвариантными подпространствами.

**Утверждение.** Сумма и пересечение инвариантных подпространств — инвариантное подпространство (как для оператора, так и для линейного представления).

*Доказательство.* Очевидно из определений инвариантности. □

**Напоминание.** Если  $U \subseteq V$  — инвариантное подпространство относительно линейного оператора  $\varphi$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V$  такой, что  $\{e_1, \dots, e_m\}$  — базис  $U$ , то матрица линейного оператора в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  имеет вид  $A = \left( \begin{array}{c|c} A_u & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$ , где  $A_u$  — матрица  $\varphi|_U$  (ограничения на инвариантное подпространство).

**Утверждение.** Если  $U \subseteq V$  — инвариантное подпространство относительно линейного представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  и  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $V$  такой, что  $\{e_1, \dots, e_m\}$  — базис  $U$ , то  $\forall g \in G$  матрица линейного оператора  $\Phi(g)$  в базисе  $\{e_1, \dots, e_n\}$  имеет вид  $A_g = \left( \begin{array}{c|c} A_{g,u} & * \\ \hline 0 & * \end{array} \right)$ .

**Определение.** Если  $U \subseteq V$  — инвариантное подпространство относительно линейного представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ , то ограничением линейного представления  $\Phi$  на  $U$  называется линейное представление  $\Phi|_U : G \rightarrow GL(U)$  такое, что  $\forall g \in G : \Phi|_U(g) = \Phi(g)|_U$

**Определение.** Линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется неприводимым, если:

1.  $V \neq \{0\}$ ;
2.  $\Phi$  не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

В противном случае  $\Phi$  называется приводимым.

### Примеры.

1. Любое одномерное линейное представление неприводимо;
2. Пусть  $G = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathcal{E}^2$  — двумерное евклидово пространство;  
 $\Phi : G \rightarrow GL(\mathcal{E}^2)$  такое, что  $\Phi(g)$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  имеет матрицу  $\begin{pmatrix} \cos g & -\sin g \\ \sin g & \cos g \end{pmatrix}$  (т.е.  $\Phi(g)$  — поворот евклидова пространства).  
Над  $\mathbb{R}$  данное линейное представление неприводимо, так как не имеет одномерных инвариантных подпространств (геометрически очевидно).  
Однако над  $\mathbb{C}$  нетривиальные инвариантные подпространства есть: они будут собственными подпространствами  $\langle e_1 + ie_2 \rangle$ ,  $\langle e_1 - ie_2 \rangle$  — поэтому  $\Phi$  приводимо над  $\mathbb{C}$ .
3. Пусть  $G = \langle a \rangle_k$ ,  $V = \mathcal{E}^2$  — двумерное евклидово пространство;  
 $\Phi : G \rightarrow GL(\mathcal{E}^2)$  такое, что  $\Phi(a^m)$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2\}$  — поворот на  $\frac{2\pi m}{k}$ . Абсолютно аналогично примеру (2) доказывается, что  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$  и приводимо над  $\mathbb{C}$ ;
4. Пусть  $G = D_n (n \geq 3)$ ,  $V = \mathcal{E}^2$  — двумерное евклидово пространство;  
По определению  $D_n = \text{Sym } N \subset O_2 \subset GL(\mathcal{E}^2)$  (где  $N$  — правильный  $n$ -угольник) — можем задать тавтологическое линейное представление  $\Phi$ .  
 $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$ , так как нет одномерных инвариантных подпространств относительно поворотов.  
Также  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{C}$ , так как все одномерные инвариантные подпространства относительно поворотов — это  $\langle e_1 + ie_2 \rangle$ ,  $\langle e_1 - ie_2 \rangle$ , которые не инвариантны относительно симметрий.
5. Пусть  $G = S_4$ ,  $V = \mathcal{E}^3$  — трёхмерное евклидово пространство;  
Ранее доказывали, что  $S_4 \simeq \text{Sym}^+ K \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3)$  (где  $K$  — куб) — задали линейное представление  $\Phi$ .  
 $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$ , так как одномерных инвариантных подпространств

не может быть из геометрических соображений, а двумерных не может быть, так как если  $U$  — инвариантное, то  $U^\perp$  инвариантно из ортогональности  $\Phi(g)$  для всех  $g$ , а  $U^\perp$  одномерно.

Также  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{C}$ : любое одномерное инвариантное подпространство над  $\mathbb{C}$  соответствует двумерному инвариантному подпространству над  $\mathbb{R}$  (либо одномерному, если оно полностью вещественное) — значит, таковых нет; двумерных инвариантных подпространств не может быть из рассуждений об ортогональности (как выше).

6. Пусть  $G = S_4$ ,  $V = \mathcal{E}^3$  — трёхмерное евклидово пространство; Ранее доказывали, что  $S_4 \simeq \text{Sym } T \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3)$  (где  $T$  — правильный тетраэдр)- задали линейное представление  $\Phi$ .

Абсолютно аналогично примеру (5) доказывается, что  $\Phi$  неприводимо над  $\mathbb{R}$  и над  $\mathbb{C}$ . При этом данное представление неэквивалентно предыдущему, так как в образе данного представления есть несобственные движения, а в образе предыдущего — только собственные;

7. Пусть  $G = S_n$ ,  $V$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем  $\mathbb{F}$  ( $\text{char } \mathbb{F} = 0$ ). Зададим *мономиальное* линейное представление  $S_n$ : зафиксируем базис  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$  в  $V$  и определим  $M : G \rightarrow GL(V)$  так, что  $\forall \sigma \in G : M(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$  (очевидно, что для любой подстановки такой оператор существует и единственный)

Заметим, что  $M$  приводимо — оно имеет одномерное инвариантное подпространство  $U = \langle e_1 + \dots + e_n \rangle$  и  $n - 1$ -мерное инвариантное подпространство  $W = \{x = \sum_i x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$  (оно  $(n - 1)$ -мерно, т.к. любой его элемент однозначно задаётся первыми  $n - 1$  координатами).

Более того, докажем, что  $V = U \oplus W$ :

- $\dim V = \dim U + \dim W$ ;
- Если  $x \in U \cap W$ , то  $x = k(e_1 + \dots + e_n)$ , причём сумма его координат равна нулю, т.е.  $k = 0 \implies x = 0$ . Значит,  $U \cap W = \{0\}$ .

Однако ограничение  $M|_W = M_W$  неприводимо — докажем это:

Пусть  $\tilde{U} \subset W$  — нетривиальное инвариантное подпространство.

Тогда  $\exists x \in \tilde{U}, x \neq 0$ . Так как  $x \in W$ ,  $\sum x_i = 0 \implies \exists i, j : x_i \neq x_j$ .

Рассмотрим  $(ij) \in S_n$ :

$$M(ij)x \in \tilde{U} \implies x - M(ij)x = (x_i - x_j)(e_i - e_j) \in \tilde{U} \implies e_i - e_j \in \tilde{U}$$

Отсюда из инвариантности  $\tilde{U} \forall \sigma \in S_n : e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)} \in \tilde{U} \implies \forall k, m : e_k - e_m \in \tilde{U} \implies \tilde{U} = W$  (т.к.  $W = \langle e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n \rangle$ )

**Теорема.** (Лемма Шура).

Пусть  $\mathbb{F}$  — алгебраически замкнутое поле,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ ,  $G$  — произвольная группа,  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимое линейное представление. Тогда если  $\varphi : V \rightarrow V$  — линейный оператор такой, что  $\forall g \in G : \varphi \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \varphi$ , то  $\varphi$  — скалярный оператор (т.е.  $\varphi = \lambda I$ ).

*Доказательство.* Так как  $\mathbb{F}$  алгебраически замкнуто,  $\varphi$  имеет хотя бы одно собственное значение  $\lambda$  и собственное подпространство  $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ . Докажем, что  $V_\lambda$  — инвариантное подпространство, т.е. что  $\forall g \in G, v \in V_\lambda : \Phi(g)v \in V_\lambda$ , что равносильно  $\varphi(\Phi(g)v) = \lambda \Phi(g)v$ :

$$\varphi(\Phi(g)v) = (\varphi \circ \Phi(g))v = (\Phi(g) \circ \varphi)v = \Phi(g)(\varphi(v)) = \Phi(g)(\lambda v) = \lambda \Phi(g)v$$

Т.к.  $V_\lambda \neq \{0\}$  и  $\Phi$  неприводимо,  $V_\lambda = V \implies \forall v \in V : \varphi(v) = \lambda v \implies \varphi = \lambda I$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $\mathbb{F}$  — алгебраически замкнутое поле,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ ,  $G$  — абелева группа,  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимое линейное представление. Тогда  $\dim V = 1$ , т.е.  $\Phi$  — одномерное линейное представление.

*Доказательство.*  $\forall g, h \in G : gh = hg \implies \Phi(gh) = \Phi(hg) \implies \Phi(g)\Phi(h) = \Phi(h)\Phi(g)$ . Тогда если обозначить  $\Phi(h) = \varphi$ , то условия леммы Шура выполняются, а отсюда  $\forall h : \Phi(h)$  — скалярный оператор. Но для скалярного оператора любое подпространство  $V$  инвариантно, а значит, любое подпространство  $V$  инвариантно для  $\Phi$ . Тогда из неприводимости  $\Phi$  любое нетривиальное подпространство  $V$  совпадает с  $V$ , а отсюда  $\dim V = 1$ .  $\square$

### 9.2.1 Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп

Пусть  $G$  — конечная абелева группа,  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . По следствию из леммы Шура любое неприводимое линейное представление  $G$  имеет одномерное пространство представления, то есть  $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$ .

**Утверждение.** Для конечной абелевой группы  $G$  существует ровно  $|G|$  различных комплексных неприводимых линейных представлений  $G$ .

*Доказательство.* Опишем все гомоморфизмы  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ :

Так как  $G$  — конечная абелева, по основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах  $G \simeq \langle a_1 \rangle_{n_1} \times \dots \times \langle a_k \rangle_{n_k}$ . Пусть  $\Phi(a_i) = c_i$ . Тогда  $c_i^{n_i} = \Phi(a_i^{n_i}) = \Phi(e) = 1$ , то есть  $c_i$  — комплексный корень степени  $n_i$  из единицы. Так как  $a_1, \dots, a_k$  порождают  $G$ , очевидно, что гомоморфизм однозначно задаётся выбором  $c_1, \dots, c_k$ . Способов выбрать  $c_i$  ровно  $n_i$  (количество комплексных корней степени  $n_i$  из единицы) — отсюда гомоморфизмов  $n_1 \cdot \dots \cdot n_k = |G|$ .  $\square$

**Пример.**  $V_4 = \langle a \rangle_2 \times \langle b \rangle_2 \implies \Phi(a) = \pm 1, \Phi(b) = \pm 1$ .

	e	a	b	ab
$\Phi_1 = I$	1	1	1	1
$\Phi_2$	1	-1	1	-1
$\Phi_3$	1	1	-1	-1
$\Phi_4$	1	-1	-1	1

### 9.2.2 Одномерные комплексные представления группы

Пусть  $G$  — произвольная группа.

Знаем, что коммутант  $G' \trianglelefteq G$  — подгруппа такая, что  $G/G'$  абелева. Рассмотрим канонический гомоморфизм  $\pi : G \rightarrow G/G'$ :

**Утверждение.** Если  $\Psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^*$  — одномерное комплексное линейное представление  $G/G'$ , то  $\Phi = \psi \circ \pi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  — одномерное комплексное линейное представление  $G$ .

*Доказательство.* Очевидно (композиция гомоморфизмов — гомоморфизм).  $\square$

**Утверждение.** Пусть  $G$  — произвольная группа,  $\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$  — произвольное одномерное комплексное линейное представление  $G$ . Тогда  $\exists$  линейное представление  $\Psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^*$  такое, что  $\Phi = \Psi \circ \pi$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\text{Im } \Phi \leq \mathbb{C}^* \implies \text{Im } \Phi$  — абелева.

Из теоремы о гомоморфизме  $\text{Im } \Phi \simeq G/\text{Ker } \Phi$ , то есть  $G/\text{Ker } \Phi$  — абелева, а тогда  $G' \subseteq \text{Ker } \Phi$  (свойство коммутанта).

Отсюда  $\forall g \in G, h \in G' : \Phi(gh) = \Phi(g)$ , то есть значения  $\Phi$  на всех элементах левого смежного класса  $g$  по  $G'$  совпадают. Поэтому корректно отображение  $\Psi : G/G' \rightarrow \mathbb{C}^*$ , заданное по правилу  $gG' \mapsto \Phi(g)$ . Это гомоморфизм:

$$\Psi(g_1G' \cdot g_2G') = \Psi(g_1g_2G') = \Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Psi(g_1G')\Psi(g_2G')$$

При этом  $\forall g \in G : g \xrightarrow{\pi} gG' \xrightarrow{\Psi} \Phi(g)$ , то есть  $\Phi = \Psi \circ \pi$ .  $\square$

**Следствие.** Если  $G$  конечна, то одномерных комплексных линейных представлений  $G$  ровно  $|G/G'|$ .

*Доказательство.* Из двух предыдущих утверждений имеем взаимно однозначное соответствие между одномерными комплексными линейными представлениями  $G$  и  $G/G'$ . Если  $G$  конечна, то  $G/G'$  — конечная абелева, а тогда она имеет ровно  $|G/G'|$  представлений.  $\square$

### 9.3 Вполне приводимые линейные представления

**Определение.** Сумма линейных представлений:

#### 1. Внутренняя сумма линейных представлений

Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление  $G$ , и пусть  $V = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$  инвариантны относительно  $\Phi$ . Тогда говорят, что  $\Phi$  есть сумма (внутренняя) представлений  $\Phi|_U$  и  $\Phi|_W$ .

Заметим, что если выбрать базисы  $\mathcal{E}_U = \{e_1, \dots, e_m\}$  в  $U$ ,  $\mathcal{E}_W = \{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  в  $W$ , то в базисе  $\mathcal{E}_V = \{e_1, \dots, e_n\}$  пространства  $V$  матрица оператора  $\Phi(g)$  для любого  $g \in G$  имеет вид  $A_g = \left( \begin{array}{c|c} A_{U,g} & 0 \\ \hline 0 & A_{W,g} \end{array} \right)$ , где  $A_{U,g}$  — матрица  $\Phi|_U$  в базисе  $\mathcal{E}_U$ , а  $A_{W,g}$  — матрица  $\Phi|_W$  в базисе  $\mathcal{E}_W$ .

#### 2. Внешняя сумма линейных представлений

Пусть  $U, W$  — векторные пространства над полем  $\mathbb{F}$ , и пусть заданы линейные представления  $\Psi_1 : G \rightarrow GL(U)$  и  $\Psi_2 : G \rightarrow GL(W)$ . Обозначим  $V = U \oplus W$  — внешняя прямая сумма  $U$  и  $W$ . Тогда линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ , заданное по правилу  $\Phi(g)(u, w) = (\Psi_1(g)u, \Psi_2(g)w)$  (очевидно, что это гомоморфизм), называется (внешней) суммой линейных представлений  $\Psi_1, \Psi_2$  и обозначается  $\Phi = \Psi_1 + \Psi_2$ .

Аналогично, если выбрать базисы  $\mathcal{E}_U = \{e_1, \dots, e_m\}$  в  $U$ ,  $\mathcal{E}_W = \{e_{m+1}, \dots, e_n\}$  в  $W$ , то в базисе  $\mathcal{E}_V = \{(e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, e_{m+1}), \dots, (0, e_n)\}$  пространства  $V$  матрица оператора  $\Phi(g)$  для любого  $g \in G$  имеет вид  $\left( \begin{array}{c|c} A_{\Psi_1} & 0 \\ \hline 0 & A_{\Psi_2} \end{array} \right)$ , где  $A_{\Psi_1}$  — матрица  $\Psi_1$  в базисе  $\mathcal{E}_U$ , а  $A_{\Psi_2}$  — матрица  $\Psi_2$  в базисе  $\mathcal{E}_W$ .

**Определение.** Линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется вполне приводимым, если для любого подпространства  $U \subseteq V$ , инвариантного относительно  $\Phi$ , существует такое подпространство  $W \subseteq V$ , инвариантное относительно  $\Phi$ , что  $V = U \oplus W$ .



*Замечание.* Любое неприводимое линейное представление вполне приводимо — для него инвариантные подпространства — только  $V$  и  $\{0\}$ , причём  $V \oplus \{0\} = V$ .

**Примеры.** (Напомним, что при фиксированном базисе  $V$  линейные представления взаимно однозначно соответствуют матричным, где в соответствие каждому оператору поставлена его матрица).

$$1. \Phi : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} — \text{ вполне приводимо.}$$

(поворот унитарного пространства — ортогональный оператор, то есть если  $U$  инвариантно, то  $U^\perp$  инвариантно, причём  $V = U \oplus U^\perp$ )

$$2. \Phi : \mathbb{R} \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} — \text{ приводимо, но не вполне приводимо:}$$

Рассмотрим базис  $\tilde{C} = \{e_1, e_2\}$  двумерного пространства линейного представления  $V$ , в котором записаны матрицы операторов.

Заметим, что  $\langle e_1 \rangle$  — инвариантное подпространство относительно  $\Phi$ . Однако никакое подпространство  $W = \langle \mu e_1 + e_2 \rangle$  не инвариантно:

$$\forall t > 0 : \Phi(t) \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Определение.** Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — линейное представление  $G$ . Линейное представление  $\tilde{\Phi}$  называется подпредставлением  $\Phi$ , если  $\exists \tilde{V} \subseteq V$  — такое подпространство, инвариантное относительно  $\Phi$ , что  $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\tilde{V}} : G \rightarrow GL(\tilde{V})$ .

**Лемма 1.** Любое подпредставление вполне приводимого представления вполне приводимо.

*Доказательство.* Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — вполне приводимое линейное представление,  $\tilde{\Phi} : G \rightarrow GL(\tilde{V})$  — его подпредставление ( $\tilde{V}$  — подпространство  $V$ ). Рассмотрим произвольное подпространство  $U \subseteq \tilde{V}$ , инвариантное относительно  $\tilde{\Phi}$ .  $U$  является подпространством и для  $V$ , а тогда  $\exists$  инвариантное относительно  $\Phi$  подпространство  $W \subseteq V$  такое, что  $V = U \oplus W$  (т.к.  $\Phi$  вполне приводимо). Тогда если обозначить  $\tilde{W} = W \cap \tilde{V}$ , то  $\tilde{W}$  — подпространство  $\tilde{V}$ , инвариантное относительно  $\tilde{\Phi}$ .

Осталось показать, что  $\tilde{V} = U \oplus \tilde{W}$ , то есть что  $\forall x \in \tilde{V}$  единственным образом раскладывается как  $x = u + \tilde{w}, u \in U, \tilde{w} \in \tilde{W}$ . Действительно, из  $V = U \oplus W$  знаем, что  $x$  как элемент  $V$  единственно раскладывается в сумму  $x = u + w$ , где  $u \in U, w \in W$ , однако  $w = x - u \in \tilde{V}$ , то есть  $w \in \tilde{V} \cap W = \tilde{W}$ . Значит, такое разложение существует и единственно, что и требовалось.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — вполне приводимое линейное представление. Тогда  $\Phi$  раскладывается в сумму неприводимых линейных представлений (возможно, одного).

*Доказательство.* Индукция по  $n = \dim V$ :

База:  $n = 1 \implies \Phi$  неприводимо;

Шаг: Пусть  $V_1$  — минимальное ненулевое инвариантное подпространство линейного представления  $\Phi$ . Так как  $\Phi$  вполне приводимо,  $\exists$  инвариантное дополнение  $W : V = V_1 \oplus W \implies \Phi = \Phi_{V_1} + \Phi_W$ . При этом  $\Phi_{V_1}$  неприводимо из минимальности  $V_1$  (нет нетривиальных инвариантных подпространств меньшей размерности), а  $\Phi_W$  по лемме 1 вполне приводимо, и притом меньшей размерности — раскладывается в искомую сумму по предположению индукции. Значит,  $\Phi$  также раскладывается в искомую сумму.  $\square$

**Пример.** Если  $\dim V = n > 1$  и  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  такое, что  $\Phi(g) = I \forall g \in G$ , то все подпространства  $V$  являются инвариантными для  $\Phi$ , откуда  $\Phi$  вполне приводимо. Тогда  $\Phi$  раскладывается в сумму одномерных представлений, причём не единственным образом — в зависимости от выбора базиса:

$$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} \implies V = \langle e_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle e_n \rangle \implies \Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_n;$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\} \implies V = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle \implies \Phi = \tilde{\Phi}_1 + \dots + \tilde{\Phi}_n;$$

**Лемма 3.** Пусть  $V = V_1 + \dots + V_k$ , где  $V_i$  — минимальные ненулевые подпространства, инвариантные относительно линейного представления  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$ . Тогда  $\Phi$  вполне приводимо, причём для произвольного инвариантного подпространства  $U \subseteq V$  существует инвариантное дополнение вида  $W = \sum_{i \in I} V_i$  для некоторого  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $V_I = \sum_{i \in I} V_i$ , где  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ . Очевидно, что  $V_I$  — инвариантное подпространство (как сумма инвариантных). Рассмотрим произвольное инвариантное  $U \subseteq V$  и возьмём  $I$  максимальное (по включению) такое, что  $U \cap V_I = \{0\}$ . Докажем, что  $V = U \oplus V_I$  (по построению  $U \cap V_I = \{0\}$ , поэтому достаточно доказать  $V = U + V_I$ ):

Рассмотрим  $j \notin I$ . Тогда  $V_{I \cup \{j\}} = V_I + V_j$ , а также из максимальной  $I$   $U \cap V_{I \cup \{j\}} \neq 0 \implies \exists u \in U : u = \sum_{i \in I} v_i + v_j$ , причём  $v_j \neq 0$ .

Тогда  $v_j = u - \sum_{i \in I} v_i \in U + V_I$ , то есть  $V_j \cap (U + V_I) \neq \{0\}$ . При этом пересечение инвариантных подпространств инвариантно, то есть  $V_j \cap (U + V_I)$  — инвариантное подпространство в  $V_j$ . Тогда из минимальности  $V_j$  это подпространство

совпадает с  $V_j$ , а значит,  $V_j \subseteq U + V_I$ .

Проведя это рассуждение для всех  $j \in \{1, \dots, k\} \setminus I$ , получим  $V_1 + \dots + V_k \subseteq U + V_I$ , то есть  $V \subseteq U + V_I$  а отсюда  $V = U + V_I$ .  $\square$

**Пример.** Пусть  $\dim V = n, \text{char } \mathbb{F} = 0$ . Рассмотрим мономиальное линейное представление  $M : S_n \rightarrow GL(V)$  для некоторого базиса  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\} : M(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$ . Ранее доказывали, что относительно него инвариантны  $U = \langle e_1 + \dots + e_n \rangle$  и  $W = \{x = \sum_i x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$ , причём  $V = U \oplus W$ . Отсюда по лемме 3  $M$  вполне приводимо.

**Теорема.** (Машке)

Пусть  $G$  — произвольная конечная группа,  $\mathbb{F}$  — поле,  $\text{char } \mathbb{F} \nmid |G|$  (в частности, верно при  $\text{char } \mathbb{F} = 0$ ),  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$ . Тогда произвольное линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  вполне приводимо.

*Доказательство.* Пусть  $U$  — произвольное подпространство  $V$ , инвариантное относительно  $\Phi$ . Докажем, что к  $U$  существует инвариантное дополнение  $W \subseteq V : V = U \oplus W$ .

Рассмотрим произвольное дополнение  $U$  до  $V$  — подпространство  $U'$  такое, что  $V = U \oplus U'$ . Обозначим за  $\psi$  линейный оператор проектирования на  $U'$  вдоль  $U$ , то есть  $\psi : V \rightarrow V$  такой, что  $\forall v : v = u + u' \Rightarrow \psi(v) = u'$ .

Обозначим очевидные свойства  $\psi$  :

- (i)  $\forall u \in U : \psi(u) = 0$ ;
- (ii)  $\forall v \in V : v - \psi(v) \in U$ .

Построим новый линейный оператор  $\tilde{\psi}$  по правилу  $\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h) \circ \psi \circ \Phi(h^{-1})$  (из условия  $\text{char } \mathbb{F} \nmid |G|$  возможно деление на  $|G|$ , т.к. оно не соответствует  $0_{\mathbb{F}}$ ) и докажем, что  $W = \text{Im } \tilde{\psi}$  подойдёт под условие:

1. Инвариантность  $W$  относительно  $\Phi$ :

(a) Докажем, что  $\forall g \in G : \Phi(g)\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\Phi(g)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(g)\tilde{\psi}\Phi(g^{-1}) &= \Phi(g) \left( \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1}) \right) \Phi(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(g)\Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})\Phi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(gh)\psi\Phi((gh)^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Phi(t)\psi\Phi(t^{-1}) = \tilde{\psi} \end{aligned}$$

(b) Докажем инвариантность  $\text{Im } \tilde{\psi}$  относительно  $\Phi$ :

$$\forall w \in \text{Im } \tilde{\psi} : \exists v \in V : w = \tilde{\psi}(v)$$

$$\forall g \in G : \Phi(g)(w) = \Phi(g)(\tilde{\psi}(v)) = \tilde{\psi}(\Phi(g)(v)) \in \text{Im } \tilde{\psi}$$

Отсюда  $W$  инвариантно относительно  $\Phi$ ;

2. Докажем, что  $V = U + W$ :

Заметим, что  $\forall v \in V : v = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} v = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\Phi(h^{-1})v$ . Тогда:

$$\begin{aligned} v - \tilde{\psi}(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\Phi(h^{-1})v - \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})v = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)(\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v)) \end{aligned}$$

При этом  $\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v) \in U$  по свойству (ii), а в силу инвариантности  $U$   $\Phi(h)(\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v)) \in U$  для любого  $h \in G$ . Значит,  $\forall v \in V : v - \tilde{\psi}(v) \in U \implies v = u + \tilde{\psi}(v)$ . Отсюда  $V = U + W$ .

3.  $U \cap W = \{0\}$ :

(a) Заметим, что  $\forall u \in U : \tilde{\psi}(u) = 0$ :

$\tilde{\psi}(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})u$ . Из инвариантности  $U$   $\Phi(h^{-1})u \in U$ , а тогда  $\psi(\Phi(h^{-1})u) = 0 \quad \forall h \in G$ , то есть все слагаемые равны 0.

(b) Докажем, что  $\tilde{\psi}^2 = \tilde{\psi}$  :

$\forall v \in V$  по (2) имеем  $v - \tilde{\psi}(v) \in U$ , а тогда по (3a)  $\tilde{\psi}(v - \tilde{\psi}(v)) = 0 \implies \tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}^2(v) = 0 \implies \tilde{\psi}(v) = \tilde{\psi}^2(v)$ .

(c) Докажем, что  $U \cap W = \{0\}$ :

Рассмотрим  $v \in U \cap W$ . Тогда  $\tilde{\psi}(v) = 0$  по (3a), а также  $\exists v' : v = \tilde{\psi}(v')$ , т.к.  $v \in W = \text{Im } \tilde{\psi}$ . Отсюда  $\tilde{\psi}^2(v') = \tilde{\psi}(v) = 0$ , а тогда по (3b)  $\tilde{\psi}(v') = 0$ , то есть  $v = 0$ . Отсюда  $U \cap W = \{0\}$ .

Значит, для  $\Phi$  выполняется определение вполне приводимости. □

**Следствие 1.** Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является вполне приводимым.

**Следствие 2.** Любое комплексное линейное представление конечной абелевой группы раскладывается в сумму одномерных линейных представлений (то есть в  $V$  существует базис  $\mathcal{E}$  такой, что  $\forall g \in G$  матрица оператора  $\Phi(g)$  диагональна в  $\mathcal{E}$ ).

**Пример.** Найдём число неэквивалентных двумерных комплексных линейных представлений  $\mathbb{Z}_2$ .  $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle_2$  — конечная абелева группа, то есть по следствию 2 любое комплексное линейное представление  $\Phi$  представимо в виде суммы одномерных линейных представлений  $\Phi_1 + \Phi_2$ . Таким образом, матрица  $\Phi(a)$  имеет вид  $\begin{pmatrix} \Phi_1(a) & 0 \\ 0 & \Phi_2(a) \end{pmatrix}$ , а также  $\Phi_i(a) = \pm 1$ , т.к.  $a^2 = e$ . Значит,  $\Phi(a) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$  — 4 различные матрицы. Осталось заметить, что линейные представления неэквивалентны, если ЖНФ матриц  $\Phi(a)$  различны — отсюда случаи  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  эквивалентны, что оставляет нам 3 неэквивалентных (разные собственные значения) линейных представления.

### 9.3.1 Ортогональные (унитарные) представления

**Определение.** Вещественное (комплексное) линейное представление  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  называется ортогональным (унитарным), если в  $V$  можно ввести скалярное произведение так, что  $\forall g \in G : \Phi(g)$  — ортогональный (унитарный) оператор относительно этого скалярного произведения.

**Лемма.** Любое ортогональное (унитарное) линейное представление является вполне приводимым.

*Доказательство.* Пусть  $U$  — произвольное подпространство  $V$ , инвариантное относительно  $\Phi$ . Тогда из ортогональности  $\Phi(g)$  для всех  $g \in G$  получаем, что  $U^\perp$  также инвариантно относительно  $\Phi$ , причём  $V = U \oplus U^\perp$ . Значит,  $\Phi$  вполне приводимо.  $\square$

**Теорема.** Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является ортогональным (унитарным).

*Доказательство.* Рассмотрим случай  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

Рассмотрим произвольную симметрическую положительно определённую билинейную функцию  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ . Определим отображение

$$(x|y) := \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)y)$$

Докажем, что  $(x|y)$  — искомое скалярное произведение:

1. Симметричность и билинейность — очевидны из симметричности и билинейности  $\beta$ ;

2. Положительная определённость — докажем, что  $\forall x \neq 0 : (x|x) > 0$ :

По определению  $(x|x) = \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x)$ . Из положительной определённости  $\beta$  знаем, что  $\beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x) \geq 0$ , причём  $\beta(x, x) = 0 \iff x = 0$ . Остаётся заметить, что при  $h = e : \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x) = \beta(x, x) > 0$ , а значит,  $(x|x) > 0$  (все слагаемые  $\geq 0$ , причём хотя бы одно  $> 0$ ).

3. Докажем, что  $\forall g \in G : \Phi(g)$  ортогонально относительно  $(x|y)$ , то есть  $(\Phi(g)x | \Phi(g)y) = (x|y)$ :

$$\begin{aligned} (\Phi(g)x, \Phi(g)y) &= \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)\Phi(g)x, \Phi(h)\Phi(g)y) = \sum_{h \in G} \beta(\Phi(hg)x, \Phi(hg)y) = \\ &= \sum_{t \in G} \beta(\Phi(t)x, \Phi(t)y) = (x|y) \end{aligned}$$

Значит,  $\Phi$  — ортогональное линейное представление.

Случай  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ : рассмотрим произвольную эрмитову положительно определённую полуторалинейную функцию  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ . Тогда аналогично определим отображение  $(x|y)$  — его свойства и унитарность  $\Phi(g)$  проверяются аналогично свойствам  $\beta$  и ортогональности  $\Phi(g)$ .  $\square$

**Следствие.** Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является вполне приводимым.

*Замечание.* Данное следствие является случаем теоремы Машке для  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .

## 9.4 Неприводимые линейные представления над $\mathbb{C}$

Сформулируем две теоремы, описывающие поведение неприводимых комплексных представлений произвольной конечной группы. Они будут доказаны в разделе 9.5, а этот раздел посвящён их практическому применению.

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $r$  — количество классов сопряжённости в  $G$ . Тогда существует ровно  $r$  попарно неэквивалентных неприводимых комплексных линейных представлений  $G$  над  $\mathbb{C}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$  — все её попарно неэквивалентные неприводимые комплексные линейные представления,  $n_1, \dots, n_r$  — их размерности. Тогда  $|G| = n_1^2 + \dots + n_r^2$ .

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа. Тогда  $G$  имеет только одномерные неприводимые комплексные линейные представления  $\iff G$  абелева.

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  — было доказано как следствие леммы Шура;

$\Rightarrow$  — по теореме 2:  $|G| = \sum_{i=1}^r n_i = \sum_{i=1}^r 1 = r$  (где  $r$  — число классов сопряжённости по теореме 1), то есть все классы сопряжённости состоят из одного элемента. Значит,  $\forall g_1, g_2 \in G : g_2 g_1 g_2^{-1} = g_1 \Rightarrow g_2 g_1 = g_1 g_2$ , то есть  $G$  абелева.  $\square$

Опишем неприводимые линейные представления над  $\mathbb{C}$  некоторых групп:

1.  $G = S_3$ :

(a)  $\dim V = 1$ :  $|G/G'| = |S_3/A_3| = 2$

Одномерные комплексные представления  $G$  уже умеем классифицировать — они соответствуют представлениям  $G/G'$ . В данном случае их два —  $\forall \sigma \in S_3 : \Phi_1(\sigma) = I, \Phi_2(\sigma) = \text{sgn } \sigma \cdot I$ ;

(b)  $\dim V = 2$ : Заметим, что  $S_3 \simeq D_3 = \text{Sym } \Delta \subset GL_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{C})$ . Так зададим двумерное линейное представление  $\Phi_3$  — в примерах раздела 2 данной главы доказана неприводимость такого представления.

Остаётся заметить, что  $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$ , причём уже найдены одно двумерное и два неэквивалентных одномерных неприводимых комплексных линейных представления. Отсюда по теореме 2 других представлений быть не может, то есть любое неприводимое комплексное линейное представление  $S_3$  эквивалентно одному из представлений  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ;

2.  $G = S_4$ :

(a)  $\dim V = 1$ :  $|G/G'| = |S_4/A_4| = 2$

Одномерные комплексные представления  $S_4$ , аналогично  $S_3$ , имеют вид  $\forall \sigma \in S_4 : \tilde{\Phi}_1(\sigma) = I, \tilde{\Phi}_2(\sigma) = \text{sgn } \sigma \cdot I$ ;

(b)  $\dim V = 2$ : Для начала докажем, что  $S_4/V_4 \simeq S_3$ :

Рассмотрим произвольный элемент  $S_4/V_4$  — это смежный класс вида  $H = \sigma V_4$ . Заметим, что в  $V_4$  четыре элемента, причём все они переводят 4 в различные элементы — значит, для всех четырёх  $\tilde{\sigma} \in H$  значения  $\tilde{\sigma}(4)$  различны, то есть  $H$  содержит ровно один элемент  $\sigma'$  такой, что  $\sigma'(4) = 4$ . Отсюда каждый элемент можно единственным образом домножить справа на элемент из  $V_4$ , чтобы результат оставлял 4 на месте.

Рассмотрим отображение  $\varphi : S_4/V_4 \rightarrow S_3$ , которое переводит каждый

смежный класс в его элемент, оставляющий 4 на месте. Такое отображение биективно по соображениям выше, а также, очевидно, является гомоморфизмом ( $\varphi(\sigma V_4)\varphi(\tau V_4) = \sigma'\tau' = \varphi(\sigma\tau V_4)$ , так как  $\sigma'\tau' \in \sigma\tau V_4$  и оставляет 4 на месте). Значит,  $\varphi$  — изоморфизм.

Поэтому можем задать линейное представление  $\tilde{\Phi}_3 : S_4 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ :

$$S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/V_4 \xrightarrow{\varphi} S_3 \xrightarrow{\Phi_3} GL_2(\mathbb{C})$$

где  $\Phi_3$  — линейное представление из предыдущего пункта. Неприводимость  $\tilde{\Phi}_3$  очевидно следует из неприводимости  $\Phi_3$  (инвариантное подпространство для  $\tilde{\Phi}_3$  было бы инвариантно и для  $\Phi_3$ ).

(с)  $\dim V = 3$  : В разделе 2 данной главы (примеры 5,6) приводились два трёхмерных линейных представления  $S_4$ :

$$\tilde{\Phi}_4 : S_4 \simeq \text{Sym}^+ K \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3) \text{ (где } K \text{ — куб)}$$

$$\tilde{\Phi}_5 : S_4 \simeq \text{Sym} T \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3) \text{ (где } T \text{ — правильный тетраэдр)}$$

Там же была доказана неэквивалентность и неприводимость этих представлений.

Остаётся заметить, что  $|S_4| = 24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2$ , причём уже найдены два трёхмерных, одно двумерное и два неэквивалентных одномерных неприводимых комплексных линейных представления. Отсюда по теореме 2 других представлений быть не может, то есть любое неприводимое комплексное линейное представление  $S_3$  эквивалентно одному из представлений  $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_5$ .

**Лемма.** Пусть  $V_1, V_2$  — векторные пространства над  $\mathbb{C}$ , и  $\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ ,  $\Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  — неприводимые линейные представления произвольной группы  $G$ .

Пусть  $\exists \varphi : V_1 \rightarrow V_2$  — линейное отображение такое, что  $\forall g \in G : \Phi_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_1(g)$ . Тогда:

1. Если  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$ , то  $\varphi = 0$ ;
2. Если  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ , то либо  $\varphi = 0$ , либо  $\varphi$  — изоморфизм;
3. Если  $V_1 = V_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2$ , то  $\varphi = \lambda I$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Пункт 3 — частный случай леммы Шура для  $\mathbb{C}$ ;

2) Предположим, что  $\varphi \neq 0$ , то есть  $\text{Ker } \varphi \neq V_1$ ,  $\text{Im } \varphi \neq \{0\}$ .

$$\forall x \in \text{Ker } \varphi : \varphi(\Phi_1(g)x) = \Phi_2(g)\varphi(x) = 0 \implies \Phi_1(g)x \in \text{Ker } \varphi;$$



$$\forall y \in \text{Im } \varphi \ (y = \varphi(x)) : \Phi_2(g)y = \Phi_2(g)\varphi(x) = \varphi(\Phi_1(g)x) \implies \Phi_2(g)y \in \text{Im } \varphi$$

Отсюда  $\text{Ker } \varphi$  — инвариантное пространство для  $\Phi_1$ , а  $\text{Im } \varphi$  — для  $\Phi_2$ . Из их неприводимости и нетривиальности  $\varphi$  следует  $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ ,  $\text{Im } \varphi = V_2$ , то есть  $\varphi$  — изоморфизм.

1) Аналогично пункту 2, но если  $\varphi$  — изоморфизм, то  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ , что противоречит условию.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $V_1, V_2$  — векторные пространства над  $\mathbb{C}$ , и  $\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ ,  $\Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  — неприводимые линейные представления конечной группы  $G$ ,  $\psi : V_1 \rightarrow V_2$  — произвольное линейное отображение.

Рассмотрим "усреднённое" линейное отображение:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \Phi_2(g) \circ \psi \circ \Phi_1(g^{-1})$$

Тогда:

1. Если  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$ , то  $\tilde{\psi} = 0$ ;
2. Если  $V_1 = V_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2$ , то  $\tilde{\psi} = \lambda I$ , где  $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1}$ .

*Доказательство.* Докажем, что  $\forall g \in G : \Phi_2(g) \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi} \circ \Phi_1(g)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_2(g)\tilde{\psi}\Phi_1(g^{-1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi_2(g)\Phi_2(h)\psi\Phi_1(h^{-1})\Phi_1(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi_2(gh)\psi\Phi_1((gh)^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Phi_2(t)\psi\Phi_1(t^{-1}) = \tilde{\psi} \end{aligned}$$

Отсюда можем применить доказанную лемму.

Осталось показать, что  $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1}$ . Рассмотрим  $\text{tr } \tilde{\psi}$ :

С одной стороны,  $\tilde{\psi} = \lambda I$ , то есть  $\text{tr } \tilde{\psi} = \lambda \cdot \dim V_1$ ;

С другой стороны, из аддитивности следа  $\text{tr } \tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } (\Phi_1(g)\psi\Phi_1(g^{-1})) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr } \psi = \text{tr } \psi$ . Значит,  $\text{tr } \psi = \text{tr } \tilde{\psi} = \lambda \cdot \dim V_1$ , то есть  $\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1}$ .  $\square$

**Следствие 2.** (Следствие 1 в матричной форме)

$\Phi_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ ,  $\Phi_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  — неприводимые комплексные линейные представления конечной группы  $G$ ,  $\dim V_1 = n_1$ ,  $\dim V_2 = n_2$ ,  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  — некоторые базисы  $V_1, V_2$  соответственно. Обозначим для всех  $g \in G$  матрицу оператора  $\Phi_1(g)$  в  $\mathcal{E}_1$  как  $A(g) = (a_{ij}(g))$ , а матрицу  $\Phi_2(g)$  в  $\mathcal{E}_2$  — как  $B(g) = (b_{ij}(g))$

Тогда  $\forall i, j, i_0, j_0$ :

1. Если  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$ , то  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g) a_{j_0 j}(g^{-1}) = 0$ ;

2. Если  $V_1 = V_2$  и  $\Phi_1 = \Phi_2$ , то  $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g) a_{j_0 j}(g^{-1}) = \frac{\delta_{i_0}^{j_0} \delta_i^j}{\dim V_1}$ .

*Доказательство.* Для любых  $i_0, j_0$  возьмём в качестве  $\psi$  из следствия 1 линейное отображение, матрица  $C$  которого в базисах  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  равна  $E_{i_0, j_0}$  (матричная единица). Тогда матрица линейного отображения  $\tilde{\psi}$  в базисах  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  имеет вид

$$\tilde{C} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} B(g) C A(g^{-1})$$

При этом элемент на  $ij$ -ой позиции матрицы  $B(g) C A(g^{-1})$  равен

$$\sum_{k=1}^{n_2} b_{ik}(g) [C A(g^{-1})]_{kj} = \sum_{k=1}^{n_2} b_{ik}(g) \sum_{l=1}^{n_1} c_{kl} a_{lj}(g^{-1}) = \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{l=1}^{n_1} b_{ik}(g) c_{kl} a_{lj}(g^{-1})$$

Ненулевым будет только слагаемое при  $k = i_0, l = j_0$ , и оно равно  $b_{ii_0}(g) a_{j_0 j}(g^{-1})$ .  
Значит,  $\tilde{c}_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g) a_{j_0 j}(g^{-1})$ . По следствию 1:

1.  $\Phi_1 \not\approx \Phi_2 \implies \tilde{\psi} = 0 \implies \forall i, j : \tilde{c}_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} b_{ii_0}(g) a_{j_0 j}(g^{-1}) = 0$ ;

2.  $V_1 = V_2, \Phi_1 = \Phi_2 \implies \tilde{\psi} = \lambda I \implies \tilde{C} = \lambda E \implies \tilde{c}_{ij} = \lambda \delta_i^j$ .

$$\lambda = \frac{\text{tr } \psi}{\dim V_1} = \frac{\text{tr } C}{\dim V_1} = \frac{\delta_{i_0}^{j_0}}{\dim V_1} \implies \tilde{c}_{ij} = \frac{\delta_{i_0}^{j_0} \delta_i^j}{\dim V_1}.$$

□

## 9.5 Характеры комплексных линейных представлений

**Определение.** Пусть  $\Phi$  — комплексное линейное представление группы  $G$ .

Отображение  $\chi_\Phi : G \rightarrow \mathbb{C}$  такое, что  $\forall g \in G : \chi_\Phi(g) = \text{tr } \Phi(g)$ , называется характером линейного представления  $\Phi$ .

*Замечание.*

1. Если  $\lambda_1(g), \dots, \lambda_n(g)$  — все собственные значения  $\Phi(g)$  с учётом кратности, то  $\chi_\Phi(g) = \lambda_1(g) + \dots + \lambda_n(g)$  (в частности, характер не зависит от базиса);
2. Если  $\Phi_1 \approx \Phi_2$ , то  $\chi_{\Phi_1} = \chi_{\Phi_2}$ .

**Свойства.**

1.  $\chi_\Phi(e) = \dim V$ ;

2.  $\forall g, h \in G : \chi_{\Phi}(hgh^{-1}) = \chi_{\Phi}(g)$  (характер равен для всех элементов одного класса сопряжённости);
3. Если  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , то  $\chi_{\Phi} = \chi_{\Phi_1} + \chi_{\Phi_2}$ ;
4. Если  $\text{ord } g < \infty$ , то  $\chi_{\Phi}(g^{-1}) = \overline{\chi_{\Phi}(g)}$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно ( $\Phi(e) = I$ , то есть его матрица единичная);
2. В произвольном базисе  $\mathcal{E}$ :  $A(hgh^{-1}) = A(h)A(g)(A(h))^{-1}$  — след матрицы не меняется при сопряжении (так как не зависит от базиса);
3. Следует из того, что в некотором базисе  $\mathcal{E}$ :  $A_{\Phi} = \left( \begin{array}{c|c} A_{\Phi_1} & 0 \\ \hline 0 & A_{\Phi_2} \end{array} \right)$ ;
4. Пусть  $\text{ord } g = k$ . Тогда  $\text{ord } \Phi(g) = m \mid k$  (т.к.  $\Phi(g)^k = I$ ).

Рассмотрим матрицу  $A(g)$  в жордановом базисе. Так как  $A(g)^m = E$ , все собственные значения  $\lambda_i(g)$  — комплексные корни степени  $m$  из единицы. Также из определения линейного представления  $A(g^{-1}) = A(g)^{-1}$ , то есть на диагонали  $A(g^{-1})$  стоят  $\lambda_i(g^{-1}) = \frac{\overline{\lambda_i(g)}}{|\lambda_i(g)|^2} = \overline{\lambda_i(g)}$ , т.к. модуль корня из единицы равен 1. Тогда:

$$\chi_{\Phi}(g^{-1}) = \text{tr} A(g^{-1}) = \sum_i \lambda_i(g^{-1}) = \sum_i \overline{\lambda_i(g)} = \overline{\sum_i \lambda_i(g)} = \overline{\text{tr} A(g)} = \overline{\chi_{\Phi}(g)}$$

□

**Определение.** Множество всех функций  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  будем обозначать как  $\mathbb{C}^G$ .

**Утверждение.**  $\mathbb{C}^G$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Очевидно.

□

**Утверждение.** Пусть  $G$  — конечная группа. Тогда функция

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

задаёт на  $\mathbb{C}^G$  скалярное произведение, т.е.  $\mathbb{C}^G$  с данной функцией — эрмитово пространство.

*Доказательство.* Проверим определение:

1.  $\forall f \in \mathbb{C}^G : (f, f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 \geq 0$ , причём  
 $(f, f) = 0 \iff \forall g \in G : |f(g)| = 0 \iff f = 0$ ;
2.  $\overline{(f_1, f_2)} = \overline{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f_1(g)} f_2(g) = (f_2, f_1)$ ;
3.  $(\alpha f_1 + \beta f_2, f_3) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\alpha f_1 + \beta f_2)(g) \overline{f_3(g)} =$   
 $= \frac{\alpha}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_3(g)} + \frac{\beta}{|G|} \sum_{g \in G} f_2(g) \overline{f_3(g)} = \alpha(f_1, f_3) + \beta(f_2, f_3).$

Значит,  $(f_1, f_2)$  задаёт на  $\mathbb{C}^G$  скалярное произведение. □

**Теорема.** (*Свойство ортогональности характеров*)

Пусть  $\Phi_1, \Phi_2 : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимые комплексные линейные представления конечной группы  $G$ . Тогда  $(\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi_2}) = \begin{cases} 1, & \Phi_1 \approx \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases}$

*Доказательство.* Пусть  $\dim V = n$ . Зафиксируем базис  $\mathcal{E}$  пространства  $V$  — в нём  $\Phi_1(g) \leftrightarrow A(g) = (a_{ij}(g))$ ,  $\Phi_2(g) \leftrightarrow B(g) = (b_{ij}(g))$ . Так как  $G$  конечна,  $\forall g \in G : \text{ord } g < \infty$ , то есть по свойству 4  $\overline{\chi_{\Phi_1}(g)} = \chi_{\Phi_1}(g^{-1})$ . Тогда:

$$\begin{aligned} (\chi_{\Phi_2}, \chi_{\Phi_1}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\Phi_2}(g) \overline{\chi_{\Phi_1}(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\Phi_2}(g) \chi_{\Phi_1}(g^{-1}) = \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{i=1}^n b_{ii}(g) \right) \left( \sum_{j=1}^n a_{jj}(g^{-1}) \right) = \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (b_{ii}(g) a_{jj}(g^{-1})) \right) = \\ &= \begin{cases} \sum_{i,j=1}^n \frac{\delta_{ij}^j}{n}, & \Phi_1 = \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & \Phi_1 = \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Остаётся заметить, что  $\Phi_1 \approx \Phi_2 \implies \chi_{\Phi_1} = \chi_{\Phi_2}$ , т.е.  $(\chi_{\Phi_2}, \chi_{\Phi_1}) = (\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi_1}) = 1$ . Теорема доказана. □

*Замечание.* Далее в разложениях линейного представления в сумму неприводимых будут группироваться эквивалентные слагаемые — это записывается в виде

$$\Phi = m_1 \Phi_1 + \dots + m_s \Phi_s \iff \Phi = \underbrace{\Phi_1 + \dots + \Phi_1}_{m_1} + \dots + \underbrace{\Phi_s + \dots + \Phi_s}_{m_s}$$

В данной записи подразумевается, что  $\Phi_i \not\approx \Phi_j$  при  $i \neq j$ .

**Следствие.** Пусть  $\Phi = m_1\Phi_1 + \dots + m_s\Phi_s$ , где  $\Phi_1, \dots, \Phi_s$  — комплексные неприводимые линейные представления конечной группы  $G$ . Тогда:

1.  $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = m_i$ ;
2.  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = m_1^2 + \dots + m_s^2$ ;
3. Если  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1$ , то  $\Phi$  — неприводимое.

*Доказательство.* Заметим, что  $\Phi = \sum_i m_i \Phi_i \implies \chi_\Phi = \sum_i m_i \chi_{\Phi_i}$ . При этом  $\Phi_i \not\approx \Phi_j$  при  $i \neq j$ , а значит,  $(\chi_j, \chi_i) = \delta_i^j$  из теоремы. Тогда:

1.  $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = (\sum_j m_j \chi_{\Phi_j}, \chi_{\Phi_i}) = \sum_j m_j (\chi_j, \chi_i) = m_i$ ;
2.  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = (\sum_i m_i \chi_{\Phi_i}, \sum_j m_j \chi_{\Phi_j}) = \sum_{i,j} m_i m_j (\chi_i, \chi_j) = \sum_i m_i^2$ ;
3. Следует из пункта 2 — если  $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1$ , то ненулевой коэффициент может быть только один, и он равен единице. Пусть  $m_i = 1$  — тогда  $\Phi = \Phi_i$ , т.е.  $\Phi$  — неприводимое.

□

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $\Phi, \Psi$  — линейные представления группы  $G$ . Тогда если  $\chi_\Phi = \chi_\Psi$ , то  $\Phi \approx \Psi$ .

*Доказательство.* По теореме Машке  $\Phi$  и  $\Psi$  вполне приводимы, то есть

$$\Phi = m_1\Phi_1 + \dots + m_s\Phi_s, \quad \Psi = n_1\Psi_1 + \dots + n_t\Psi_t$$

При этом  $\forall i : (\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = m_i$  из 1 пункта предыдущего следствия, то есть

$$(\chi_\Psi, \chi_{\Phi_i}) = m_i \implies n_1(\chi_{\Psi_1}, \chi_{\Phi_i}) + \dots + n_t(\chi_{\Psi_t}, \chi_{\Phi_i}) = m_i$$

Так как эта сумма не равна нулю, среди слагаемых в разложении  $\Psi$  найдётся  $\Psi_j \approx \Phi_i$ , а также  $n_j = m_i$ . Аналогичными рассуждениями для всех слагаемых обоих разложений получим, что каждое из них имеет эквивалентное в другом разложении, причём с тем же коэффициентом. Таким образом, с точностью до нумерации  $\Psi = m_1\Psi_1 + \dots + m_s\Psi_s$ , где  $\Psi_i \approx \Phi_i$ . Отсюда очевидно, что  $\Phi \approx \Psi$ . □

### 9.5.1 Пространство центральных функций

**Определение.** Функция  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  называется центральной, если она постоянна на классах сопряжённости  $G$ . Множество всех центральных функций для группы  $G$  обозначается как  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .

**Пример.** Для произвольного комплексного линейного представления  $\Phi$  гр.  $G$   $\chi_{\Phi}$  — центральная функция.

**Утверждение.**  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$  — подпространство в  $\mathbb{C}^G$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $\forall \chi_1, \chi_2 \in \chi_{\mathbb{C}}(G), \lambda \in \mathbb{C}$  функции  $\chi_1 + \chi_2$  и  $\lambda \chi_1$  также являются центральными, так как постоянность на классах сопряжённости не нарушается. Также  $0 \in \chi_{\mathbb{C}}(G)$ , то есть определение подпространства выполнено.  $\square$

**Утверждение.** Если  $r$  — число классов сопряжённости в  $G$ , то  $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G) = r$ .

*Доказательство.* Если в группе  $G$  есть ровно  $r$  классов сопряжённости, то  $G = x_1^G \sqcup \dots \sqcup x_r^G$ . В таком случае функции

$$\Gamma_1, \dots, \Gamma_r, \text{ где } \Gamma_i = \begin{cases} 1, & g \in x_i^G \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

очевидно, образуют базис в  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .  $\square$

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{C}$ ,  $\Phi : G \rightarrow GL(V)$  — неприводимое линейное представление,  $\Gamma \in \chi_{\mathbb{C}}(G)$ .

Тогда оператор

$$\Psi_{\Gamma, \Phi} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \Phi(g) \text{ равен } \lambda I, \text{ где } \lambda = |G| \frac{(\chi_{\Phi}, \Gamma)}{\chi_{\Phi}(e)}$$

*Доказательство.* Докажем, что  $\forall g \in G : \Psi_{\Gamma, \Phi} \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \Psi_{\Gamma, \Phi}$ :

$$\begin{aligned} \Phi(g) \circ \Psi_{\Gamma, \Phi} \circ \Phi(g^{-1}) &= \Phi(g) \left( \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \Phi(h) \right) \Phi(g^{-1}) = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)} \Phi(ghg^{-1}) = \\ & \text{(из центральности } \Gamma) = \sum_{h \in G} \overline{\Gamma(ghg^{-1})} \Phi(ghg^{-1}) = \sum_{\tilde{g} \in G} \overline{\Gamma(\tilde{g})} \Phi(\tilde{g}) = \Psi_{\Gamma, \Phi} \end{aligned}$$

Отсюда по лемме Шура  $\Psi_{\Gamma, \Phi} = \lambda I$ . Рассмотрим след  $\Psi_{\Gamma, \Phi}$ :

$$\text{tr } \Psi_{\Gamma, \Phi} = \text{tr } \lambda I = \lambda \dim V = \lambda \chi_{\Phi}(e)$$

$$\mathrm{tr} \Psi_{\Gamma, \Phi} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \cdot \mathrm{tr} \Phi(g) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \chi_{\Phi}(g) = |G| \cdot (\chi_{\Phi}, \Gamma)$$

$$\text{Значит, } \lambda = \frac{\mathrm{tr} \Psi_{\Gamma, \Phi}}{\chi_{\Phi}(e)} = |G| \frac{(\chi_{\Phi}, \Gamma)}{\chi_{\Phi}(e)}.$$

□

**Определение.** Пусть  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ ,  $V$  — векторное пространство над  $\mathbb{F}$  такое, что  $\dim V = n$ ,  $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$  — базис  $V$ . Линейное представление  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , заданное по правилу  $\forall g \in G : \rho(g)e_{g_r} = e_{gg_r}$ , называется регулярным представлением группы  $G$  над полем  $\mathbb{F}$ .

**Лемма 2.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  — все попарно неэквивалентные неприводимые комплексные линейные представления группы  $G$ ,  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — их характеры. Тогда  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — ортонормированный базис в  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ .

*Доказательство.* Так как  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  неприводимы и попарно неэквивалентны,  $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}^j$ , то есть  $\chi_1, \dots, \chi_k$  линейно независимы как попарно ортогональные векторы. При этом  $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G) < \infty$  (равно числу классов сопряжённости в  $G$ ), то есть  $k < \infty$ . Осталось доказать, что  $\chi_{\mathbb{C}}(G) = \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ .

Докажем от противного: предположим, что  $\chi_{\mathbb{C}}(G) \neq \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ . Тогда  $\langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle^{\perp} \neq \{0\}$ , то есть  $\exists \Gamma \in \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle^{\perp}$ ,  $\Gamma \neq 0$ . Пусть  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ . Выберем произвольное векторное пространство  $V$  размерности  $n$  и произвольный базис  $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$  в нём. Рассмотрим регулярное представление  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  над  $\mathbb{C}$ . По теореме Машке оно вполне приводимо, то есть представимо в виде  $\rho = m_1 \tilde{\Phi}_1 + \dots + m_s \tilde{\Phi}_s$ , где  $\tilde{\Phi}_i$  неприводимы и попарно неэквивалентны. Рассмотрим линейный оператор  $\Psi_{\Gamma, \rho} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g)$  пр-ва  $V$ , как в лемме 1:

$$\Psi_{\Gamma, \rho} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} (m_1 \tilde{\Phi}_1 + \dots + m_s \tilde{\Phi}_s)(g) = m_1 \Psi_{\Gamma, \tilde{\Phi}_1} + \dots + m_s \Psi_{\Gamma, \tilde{\Phi}_s}$$

Из неприводимости  $\tilde{\Phi}_i$  по лемме 1  $\Psi_{\Gamma, \tilde{\Phi}_i} = \lambda_i I$ , где  $\lambda_i = |G| \frac{(\chi_{\tilde{\Phi}_i}, \Gamma)}{\chi_{\tilde{\Phi}_i}(e)}$ . Но при этом  $\tilde{\Phi}_i$  — неприводимое представление  $G$ , то есть оно эквивалентно одному из  $\Phi_i$ , а отсюда  $\chi_{\tilde{\Phi}_i} \in \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ . Значит,  $(\chi_{\tilde{\Phi}_i}, \Gamma) = 0 \implies \lambda_i = 0 \implies \Psi_{\Gamma, \rho} = 0$ .

С другой стороны,

$$\Psi_{\Gamma, \rho}(e_{g_1}) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} \rho(g)(e_{g_1}) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} e_{gg_1}$$

А так как  $\Psi_{\Gamma, \rho} = 0$ , имеем  $\sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)} e_{gg_1} = 0 \implies \forall g \in G : \Gamma(g) = 0 \implies \Gamma = 0$  — противоречие. Значит,  $\chi_{\mathbb{C}}(G) = \langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ , и  $\chi_1, \dots, \chi_k$  — ортонормированный базис в  $\chi_{\mathbb{C}}(G)$ . □

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $r$  — количество классов сопряжённости в  $G$ . Тогда существует ровно  $r$  попарно неэквивалентных неприводимых комплексных линейных представлений  $G$ .

*Доказательство.* Из леммы 2 количество попарно неэквивалентных комплексных линейных представлений  $G$  равно  $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G)$ , что равно количеству классов сопряжённости в  $G$ .  $\square$

**Следствие.** Пусть  $G$  — конечная группа,  $\Phi_1, \dots, \Phi_r$  — все попарно неэквивалентные комплексные линейные представления группы  $G$ ,  $n_1, \dots, n_r$  — их размерности. Тогда:

1.  $\rho = n_1\Phi_1 + \dots + n_r\Phi_r$ , где  $\rho$  — регулярное представление группы  $G$  над  $\mathbb{C}$ ;
2.  $|G| = n_1^2 + \dots + n_r^2$

*Доказательство.*

1. По теореме Машке  $\rho$  вполне приводимо, то есть  $\rho = m_1\Phi_1 + \dots + m_r\Phi_r$  ( $m \geq 0$ ). Пусть  $\chi_\rho$  и  $\chi_{\Phi_i}$  — характеры  $\rho$  и  $\Phi_i$  соответственно. Так как  $\chi_1, \dots, \chi_r$  — ортонормированный базис,  $(\chi_\rho, \chi_{\Phi_i}) = m_i$ . С другой стороны:

$$(\chi_\rho, \chi_{\Phi_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_{\Phi_i}(g)}$$

Посмотрим, какие значения принимает  $\chi_\rho$ . Выберем векторное пространство  $V$  размерности  $n$  и базис  $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, \dots, e_{g_n}\}$ . Так как  $\rho(g)e_{g_i} = e_{gg_i}$ , в базисе  $\mathcal{E}$  каждый столбец матрицы  $A_\rho(g)$  содержит одну единицу и  $n - 1$  ноль. При этом если  $g = 1$  в  $G$ , то  $A_\rho(g) = E$ , а иначе ни один базисный вектор не перейдёт в себя, то есть все элементы на главной диагонали  $A_\rho(g)$  равны нулю. Отсюда:

$$\chi_\rho(g) = \begin{cases} |G|, & g = 1 \\ 0, & g \neq 1 \end{cases}$$

Значит,

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_{\Phi_i}(g)} = \frac{1}{|G|} \cdot |G| \overline{\chi_{\Phi_i}(1)} = n_i$$

так как  $\Phi_i(1) = I$

2. Выразим  $|G|$ :

$$|G| = \dim V = \text{tr } \rho(1) = n_1 \text{tr } \Phi_1(1) + \dots + n_r \text{tr } \Phi_r(1) = n_1^2 + \dots + n_r^2$$



□

**Пример.** Построим таблицу характеров неприводимых комплексных представлений  $S_3$ : Сами представления уже были найдены:

- $\Phi_1(\sigma) = I$ ;
- $\Phi_2(\sigma) = \text{sgn } \sigma \cdot I$ ;
- $\Phi_3 : S_3 \simeq D_3 = \text{Sym } \triangle \subset GL_2(\mathbb{C})$

Классы сопр.	id	(12)	(123)
$\chi_{\Phi_1}$	1	1	1
$\chi_{\Phi_2}$	1	-1	1
$\chi_{\Phi_3}$	2	0	-1

Значения  $\chi_{\Phi_1}$  и  $\chi_{\Phi_2}$  ищутся очевидно. Опишем подробнее поиск значений  $\chi_{\Phi_3}$ :

- $\chi_{\Phi_3}(\text{id}) = I$  — в любом базисе матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , след равен 2;
- $\chi_{\Phi_3}((12))$  — симметрия относительно прямой, содержащей вершину 3 и середину стороны 1-2. Так как характер не зависит от базиса, можем выбрать удобный нам — в ортонормированном базисе, где первый базисный вектор параллелен оси симметрии, матрица примет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , след равен 0;
- $\chi_{\Phi_3}((123))$  — поворот на  $\frac{2\pi}{3}$  относительно центра треугольника. Матрица этого поворота имеет вид  $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , след равен -1.

Покажем с помощью характера, что  $\Phi_3$  — неприводимое представление:

$$(\chi_{\Phi_3}, \chi_{\Phi_3}) = \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} \chi_{\Phi_3}(g) \overline{\chi_{\Phi_3}(g)} = \frac{1}{6} (1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

## 10 Кольца и поля

**Определение.** Кольцо — множество  $K$ , на котором введены две бинарные операции — сложение и умножение — удовлетворяющие следующим условиям:

1.  $(K, +)$  — абелева группа;
2.  $\forall a, b, c \in K : (b + c)a = ba + ca$  и  $a(b + c) = ab + ac$  (дистрибутивность)

**Определение.** Кольцо называется коммутативным (ассоциативным), если в нём умножение коммутативно (ассоциативно).

**Определение.** Кольцо  $K$  называется кольцом с единицей, если

$$\exists 1 \in K : \forall a \in K \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Элемент 1 называется единицей.

**Определение.** Элемент кольца  $K$  с единицей называется обратимым, если

$$\exists b \in K : ab = ba = 1$$

Элемент  $b$  называется обратным к  $a$  и обозначается  $a^{-1}$ .

**Определение.** Поле — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $1 \neq 0$ , в котором любой ненулевой элемент обратим.

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x]$  — ассоциативное, коммутативное, с единицей;  
 $M_n(\mathbb{R})$  — некоммутативное, ассоциативное, с единицей;  
 $(V^3, +, \times)$  — некоммутативное, неассоциативное, без единицы ( $\times$  — векторное произведение);  
 $2\mathbb{Z}$  — ассоциативное, коммутативное, без единицы;
2.  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$  — поле;  
 $\mathbb{Z}_n$  — поле  $\iff n$  — простое;  
 $\mathbb{R}(x)$  (рациональные дроби над  $\mathbb{R}$ ) — поле.

**Определение.** Если  $a, b \in K$  такие, что  $a, b \neq 0$  и  $ab = 0$ , то  $a, b$  называются делителями нуля ( $a$  — левый делитель нуля,  $b$  — правый делитель нуля)

**Примеры.** Делители нуля в кольцах:

- $\mathbb{Z}_6 : 2, 3, 4$  — все делители нуля;

- $M_2(\mathbb{R})$ : например,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Утверждение.** Если  $a$  — обратимый элемент ассоциативного кольца  $K$  с единицей, то обратный элемент к  $a$  единственный.

*Доказательство.* Пусть  $b$  и  $c$  — обратные к  $a$ . Тогда:

$$b = b \cdot 1 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c = c$$

□

*Замечание.* В дальнейшем все рассматриваемые кольца — ассоциативные (свойства неассоциативных колец не такие общие и не рассматриваются в данном курсе).

**Утверждение.** Если элемент  $a$  кольца  $K$  обратим, то  $a$  — не делитель нуля.

*Доказательство.* От противного: пусть  $a$  обратим и  $a$  — делитель нуля. Тогда:

$$\exists b \neq 0 : ab = 0 \implies a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 \implies b = 0 \text{ — противоречие.}$$

□

**Следствие.** В поле нет делителей нуля.

**Определение.** Подмножество  $L$  кольца  $K$  называется подкольцом, если

1.  $(L, +)$  — подгруппа аддитивной группы кольца  $(K, +)$ ;
2.  $\forall a, b \in L : ab \in L$ .

**Утверждение.** Любое подкольцо  $L$  кольца  $K$  является кольцом относительно операций кольца  $K$ .

**Пример.**  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ .

**Определение.** Подмножество  $L$  поля  $K$  называется подполем, если

1.  $(L, +, \cdot)$  — подкольцо кольца  $(K, +, \cdot)$ ;
2.  $1 \in L$ ;
3.  $\forall a \in L : a^{-1} \in L$ .

**Утверждение.** Любое подполе  $L$  поля  $K$  является полем относительно операций поля  $K$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z}$  — подкольцо  $\mathbb{Q}$ , но не подполе  $\mathbb{Q}$ ;
2.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

## 10.1 Идеалы колец и факторкольца

**Определение.** Подмножество  $L$  кольца  $K$  называется левым (правым) идеалом, если:

1.  $(L, +)$  — подгруппа  $(K, +)$ ;
2.  $\forall a \in K, x \in L : ax \in L$  ( $xa \in L$ )

*Замечание.* Левый идеал замкнут относительно умножения на элементы кольца слева, правый — относительно умножения справа.

**Определение.** Подмножество  $L$  кольца  $K$  называется (двусторонним) идеалом, если:

1.  $(L, +)$  — подгруппа  $(K, +)$ ;
2.  $\forall a \in K, x \in L : ax, xa \in L$

**Утверждение.** (Левый, правый, двусторонний) идеал кольца  $K$  — подкольцо кольца  $K$ .

*Доказательство.* Очевидно из определения. □

*Замечание.* Идеалы в кольцах можно считать аналогом нормальных подгрупп в группах.

**Пример.** Пусть  $K = \mathbb{Z}$ . Тогда любое подкольцо  $K$  имеет вид  $H = m\mathbb{Z}$  — любое такое подкольцо является идеалом в  $\mathbb{Z}$

**Определение.** В любом кольце  $K$  есть идеалы  $\{0\}, K$  — они называются тривиальными идеалами.

**Утверждение.** В поле нет нетривиальных идеалов.

*Доказательство.* Пусть  $F$  — поле. Пусть  $I \subset F$  — идеал, причём  $I \neq 0$ . Тогда  $\exists x \in I : x \neq 0$ . Так как  $F$  — поле,  $\exists x^{-1} \in F$ , а отсюда  $1 = x^{-1}x \in I$  (т.к.  $x \in I$ ). Тогда для любого  $a \in F$ :  $a = a \cdot 1 \in I$  (т.к.  $1 \in I$ )  $\implies I = F$ . □

Пусть  $K$  — кольцо,  $I$  — идеал  $K$ . Рассмотрим множество

$$K/I = \{a + I \mid a \in K\}$$

и введём на нём операции:

1. Сложение:  $(a + I) + (b + I) = a + b + I$ ;
2. Умножение:  $(a + I) \cdot (b + I) = ab + I$ .

**Утверждение.** *Данные операции корректны (не зависят от представителей классов).*

*Доказательство.*

1. Сложение корректно из корректности сложения смежных классов в группах, так как  $(I, +)$  — подгруппа  $(K, +)$ , нормальная из абелевости;
2. Пусть  $a + I = \tilde{a} + I$ ,  $b + I = \tilde{b} + I$ . Докажем, что  $ab + I = \tilde{a}\tilde{b} + I$ :  
 $\tilde{a} = a + y_a$ ,  $\tilde{b} = b + y_b$ , где  $y_a, y_b \in I$ . Тогда:

$$\forall x \in \tilde{a}\tilde{b} + I : x = \tilde{a}\tilde{b} + y, y \in I$$

$$x = \tilde{a}\tilde{b} + y = (a + y_a)(b + y_b) + y = ab + \underbrace{y_ab + ay_b + y_ay_b}_{\in I} + y = ab + I$$

□

**Утверждение.** *Множество  $K/I$  с введёнными операциями — кольцо, причём если  $K$  ассоциативно (коммутативно), то  $K/I$  ассоциативно (коммутативно).*

*Доказательство.* Проверим определение кольца:

- $(K/I, +)$  — группа по сложению (как факторгруппа  $K/I$ );
- $(a + I) + (b + I) = a + b + I = b + a + I = (b + I) + (a + I)$  — коммутативность сложения;
- $(a + I)((b + I) + (c + I)) = (a + I)(b + c + I) = a(b + c) + I = ab + ac + I = (ab + I) + (ac + I) = (a + I)(b + I) + (a + I)(c + I)$ ;
- $((b + I) + (c + I))(a + I) = (b + c + I)(a + I) = (b + c)a + I = ba + ca + I = (ba + I) + (ca + I) = (b + I)(a + I) + (c + I)(a + I)$ ;

При этом:

- $K$  ассоциативно  $\implies (a + I)((b + I)(c + I)) = (a + I)(bc + I) = (a(bc) + I) = ((ab)c + I) = (ab + I)(c + I) = ((a + I)(b + I))(c + I) \implies K/I$  ассоциативно;
- $K$  коммутативно  $\implies (a + I)(b + I) = ab + I = ba + I = (b + I)(a + I) \implies K/I$  коммутативно.

**Определение.** Кольцо  $K/I$  с введёнными операциями называется фактор-кольцом  $K$  по идеалу  $I$ .

## 10.2 Гомоморфизмы колец

**Определение.** Пусть  $K, \tilde{K}$  — кольца. Отображение  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  называется гомоморфизмом колец, если:

1.  $\forall a, b \in K : \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b);$
2.  $\forall a, b \in K : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b);$

**Определение.** Изоморфизм колец — биективный гомоморфизм колец.

**Определение.** Кольца  $K, \tilde{K}$  называются изоморфными, если существует изоморфизм  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$ . Обозначается  $K \simeq \tilde{K}$ .

**Определение.** Пусть  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  — гомоморфизм.

Множество  $\text{Ker } \varphi = \{a \in K \mid \varphi(a) = 0\}$  называется ядром  $\varphi$ .

Множество  $\text{Im } \varphi = \{b \in \tilde{K} \mid \exists a \in K : \varphi(a) = b\}$  называется образом  $\varphi$ .

**Утверждение.** Пусть  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  — гомоморфизм. Тогда:

1.  $\text{Ker } \varphi$  — идеал  $K$ ;
2.  $\text{Im } \varphi$  — подкольцо  $\tilde{K}$ .

*Доказательство.*

1. Проверим определение идеала:

- $\text{Ker } \varphi$  — подгруппа  $(K, +)$ , так как  $\varphi$  — гомоморфизм  $(K, +) \rightarrow (\tilde{K}, +)$ ;
- $\forall a \in \text{Ker } \varphi, b \in K : \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0; \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = 0$ .  
Значит,  $ab, ba \in \text{Ker } \varphi$ .

Отсюда  $\text{Ker } \varphi$  — идеал кольца  $K$ .

2. Проверим определение подкольца:

- $\text{Im } \varphi$  — подгруппа  $(\tilde{K}, +)$ , так как  $\varphi$  — гомоморфизм  $(K, +) \rightarrow (\tilde{K}, +)$ ;
- $\forall a, b \in \text{Im } \varphi : \exists x_a, x_b \in K : \varphi(x_a) = a, \varphi(x_b) = b$ . Тогда  $\varphi(x_a x_b) = ab$ , то есть  $ab \in \text{Im } \varphi$ .

Отсюда  $\text{Im } \varphi$  — подкольцо  $\tilde{K}$ .

□

**Утверждение.** Пусть  $K$  — кольцо,  $I$  — идеал  $K$ . Тогда  $\exists$  гомоморфизм колец  $\varphi : K \rightarrow K/I$  такой, что  $\text{Ker } \varphi = I$ ,  $\text{Im } \varphi = K/I$ .

*Доказательство.* Подойдёт гомоморфизм  $\pi : a \mapsto a + I$ .

□

**Определение.** Приведённый выше гомоморфизм  $\pi : K \rightarrow K/I$  называется каноническим (естественным, натуральным) гомоморфизмом колец  $K$  и  $K/I$ .

**Теорема.** (О гомоморфизме колец)

Пусть  $K, \tilde{K}$  — кольца,  $\varphi : K \rightarrow \tilde{K}$  — гомоморфизм колец.

Тогда  $K/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$ .

*Доказательство.*  $\text{Ker } \varphi$  — идеал кольца  $K$ , то есть факторкольцо  $K/\text{Ker } \varphi$  определено. Рассмотрим отображение

$$\psi : K/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi \quad a + \text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(a)$$

В доказательстве теоремы о гомоморфизме групп было доказано, что это отображение корректно, биективно и сохраняет сложение. Проверим сохранение умножения:

$$\begin{aligned} \psi((a + \text{Ker } \varphi)(b + \text{Ker } \varphi)) &= \psi(ab + \text{Ker } \varphi) = \varphi(ab) = \\ &= \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a + \text{Ker } \varphi)\psi(b + \text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

Значит,  $\psi$  — изоморфизм колец.

□

### 10.3 Главный идеал

Пусть  $K$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей,  $S \subset K$  — произвольное подмножество. Рассмотрим множество

$$(S) = \left\{ \sum_{i=0}^k a_i s_i \mid a_i \in K, s_i \in S \right\}$$

**Утверждение.**

1.  $(S)$  — двусторонний идеал;
2.  $(S)$  — наименьший двусторонний идеал, содержащий  $S$ .

*Доказательство.*

1. Мы поверим, но проверим:

- $\forall x, y \in (S) : x + y = \sum_{i=0}^k x_i s_i + \sum_{i=0}^k y_i s_i = \sum_{i=0}^k (x_i + y_i) s_i \in (S);$
- $0 = \sum_{i=0}^k 0 \cdot s_i \in (S);$
- $\forall x \in (S) : -x = -\sum_{i=0}^k x_i s_i = \sum_{i=0}^k (-x_i) s_i \in (S);$
- $\forall x \in (S), a \in K : xa = ax = a \sum_{i=0}^k x_i s_i = \sum_{i=0}^k ax_i s_i \in (S).$

Значит,  $(S)$  — двусторонний идеал.

2. Пусть  $I$  — двусторонний идеал кольца  $K$  такой, что  $S \subset I$ . Тогда из определения идеала  $\forall a \in K, s \in S : as \in I$ , а так как идеал — подкольцо, любая сумма вида  $\sum_{i=0}^k a_i s_i$ , где  $a_i \in K, s_i \in S$ , лежит в  $I$ . Значит,  $(S) \subseteq I$ .

□

**Определение.** Если  $I = (S)$ , то говорят, что  $I$  порождается множеством  $S$ .

Если при этом  $|S| = 1$ , то  $I$  называется главным идеалом.

Иными словами,  $I$  — главный идеал кольца  $K$ , если  $\exists u \in K : \forall x \in I : x = ua$  для некоторого  $a \in K$ .

**Примеры.**

1.  $K = \mathbb{Z} : (m) = m\mathbb{Z};$
2.  $K = F[x] : (x + 1) = \{(x + 1)f \mid f \in F[x]\}.$

**Определение.** Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $1 \neq 0$ , в котором любой идеал является главным, называется кольцом главных идеалов.

**Пример.**  $\mathbb{Z}$  — кольцо главных идеалов.

**Определение.** Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей  $1 \neq 0$ , в котором нет делителей нуля, называется целостным кольцом.

**Примеры.**  $\mathbb{Z}, F[x]$  — целостные кольца.

Все напоминания данной главы из 1 семестра, их доказательства см. в [3].



**Напоминание.** Если  $K$  — целостное кольцо, то в  $K$  определены понятия  $a \mid b$ , НОД( $a, b$ ).

НОД бывает не определён, но если он существует — определён однозначно с точностью до ассоциированности (умножения на обратимые элементы).

**Определение.** Целостное кольцо  $K$ , не являющееся полем, называется евклидовым кольцом, если  $\exists$  функция  $N : K \setminus 0 \rightarrow \mathbb{Z}_+$  (она называется нормой) такая, что:

1.  $\forall a, b \in K : N(ab) \geq N(a)$ ;
2.  $\forall a, b \in K, b \neq 0 \exists q, r \in K : a = bq + r$ , где  $\begin{cases} r = 0 \\ N(r) < N(b) \end{cases}$

**Примеры.**

1.  $K = \mathbb{Z} : N(a) = |a|$ ;
2.  $K = F[x] : N(f) = \deg f$ ;
3.  $K = \mathbb{Z}[i]$  — кольцо гауссовых чисел  
 $N(a + bi) = a^2 + b^2$ .

**Упражнение.**  $\mathbb{Z}[x]$  — целостное, но не евклидово кольцо.

*Доказательство.* Покажем, что  $\mathbb{Z}[x]$  — целостное кольцо. Очевидно, что  $\mathbb{Z}[x]$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, то есть остаётся показать, что в нём нет делителей нуля: если  $P(x), Q(x) \neq 0$ , то, взяв произведение членов с максимальной степенью  $x$  в обоих многочленах, получим одночлен, степень которого больше, чем у всех других в произведении. Значит, коэффициент при нём останется ненулевым, то есть  $ab \neq 0$ .

Доказательство неевклидовости  $\mathbb{Z}[x]$  проведём после следующей теоремы.  $\square$

**Напоминание.** Пусть  $K$  — евклидово кольцо. Тогда  $\exists$  НОД( $a, b$ ) =  $d$  и  $\exists u, v \in K : d = ua + vb$ .

**Теорема.** Всякий идеал евклидова кольца  $K$  является главным.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный идеал  $I$  кольца  $K$ .

Если  $I = \{0\}$ , то  $I = (0)$ . Иначе рассмотрим наименьший по норме элемент в  $I$  — обозначим его  $u$ . Докажем, что  $I = (u)$ :

Пусть  $a \in I$  — произвольный элемент. Разделим  $a$  на  $u$  с остатком:  $\exists q, r \in K : a = uq + r$ , причём если  $r \neq 0$ , то  $N(r) < N(u)$ . При этом  $r = a - uq \in I$ , а

значит,  $r = 0$  из предположения, что  $u$  — наименьший по норме элемент в  $I$ .  
Значит,  $\forall a \in I \exists q \in K : a = uq$ , а значит,  $I = (u)$ .  $\square$

**Следствие.** Любое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

### Примеры.

1.  $F[x]$  — кольцо главных идеалов;
2.  $F[x, y]$  — не кольцо главных идеалов. Покажем это:  
Рассмотрим идеал  $I = (x, y)$ . Предположим, что  $I = (f)$  — тогда  $\exists q_1, q_2 \in F[x, y] : x = fq_1, y = fq_2$ . Из равенства многочленов  $x = fq_1$  имеем, что либо  $f \sim 1$ , либо  $f \sim x$ . Рассмотрим эти случаи:
  - $f \sim 1 \implies 1 = ax + by$  — очевидно невозможно (не можем получить ненулевую константу);
  - $f \sim x \implies f = cx \implies y = cxq_2$  — невозможно.

Значит,  $I$  — не главный идеал.

3. Докажем, что  $\mathbb{Z}[x]$  — не кольцо главных идеалов. Рассмотрим  $I = (2, x)$ . Предположим, что  $I = (f)$  — тогда  $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}[x] : 2 = fq_1, x = fq_2$ . Из первого равенства имеем, что либо  $f \sim 1$ , либо  $f \sim 2$ :
  - $f \sim 1 \implies 1 = 2a + xb$  — невозможно, т.к. коэффициенты целые;
  - $f \sim 2 \implies x = 2 \cdot q_2$  — невозможно по тем же соображениям.

Значит,  $\mathbb{Z}[x]$  — не кольцо главных идеалов, а отсюда и не евклидово кольцо.

**Определение.** Пусть  $K$  — целостное кольцо.

Элемент  $p \in K$  называется простым, если

1.  $p \neq 0$ ;
2.  $p$  — необратимый;
3. если  $p = ab$ , то либо  $a$ , либо  $b$  — обратимый элемент.

### Примеры.

1.  $K = \mathbb{Z}$ : простые элементы —  $\pm p$ , где  $p$  — простое число;
2.  $K = F[x]$ : простые элементы — неприводимые многочлены.

**Напоминание.** Любой элемент евклидова кольца раскладывается в произведение простых элементов этого кольца, причём это разложение единственно с точностью до домножения множителей на обратимые элементы и их порядка.

*Замечание.* Аналогичное утверждение верно для всех колец главных идеалов, однако в данном курсе оно рассматриваться не будет.

**Напоминание.**  $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$  — поле  $\iff n$  — простое.

Теперь можем доказать гораздо более общее утверждение:

**Теорема.** Пусть  $K$  — евклидово кольцо,  $u \in K$ . Тогда  $K/(u)$  — поле  $\iff u$  — простой элемент.

*Доказательство.*

$\implies$ : Пусть  $K/(u)$  — поле. Допустим, что  $u$  — не простой. Тогда возможны случаи:

1.  $u = 0 \implies K/(u) = K$  — не поле по определению евклидова кольца;
2.  $u$  обратим  $\implies 1 \in (u) \implies K/(u) = K/K = \{0\}$  — не поле;
3.  $u = ab$ , где  $a, b$  — необратимы. Тогда покажем, что  $a + (u) \neq (u)$ : иначе

$$a \in (u) \implies a = ud = abd \implies a(bd - 1) = 0 \implies bd = 1 \implies b \text{ — обратим}$$

Аналогично  $b + (u) \neq (u)$ . Тогда из  $u = ab$  следует, что  $(a + (u))(b + (u)) = (u)$ , то есть в поле  $K/(u)$  элементы  $a + (u)$  и  $b + (u)$  — делители нуля — противоречие.

Все случаи невозможны, а значит,  $u$  не может не быть простым.

$\impliedby$ : Пусть  $u$  — простой элемент.  $K/(u)$  — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей из соответствующих свойств  $K$ , причём единица в нём —  $1 + (u)$  ( $\neq (u)$ , так как иначе  $1 \in (u) \implies 1 = ua$  — противоречие с необратимостью  $u$ ). Пусть  $a$  — произвольный ненулевой элемент  $K/(u)$ . Тогда:

$$a + (u) \neq (u) \implies a \notin (u) \implies u \nmid a \xrightarrow{u\text{-простой}} \text{НОД}(u, a) = 1 \implies$$

$$\implies \exists x, y \in K : xa + yu = 1 \text{ в } K \implies (x + (u))(a + (u)) = 1 + (u) \text{ в } K/(u)$$

Значит,  $x + (u)$  — обратный к  $a + (u)$ . Отсюда любой ненулевой элемент  $K/(u)$  обратим, а тогда  $K/(u)$  — поле.  $\square$

**Следствие.** Пусть  $K = F[x]$  ( $F$  — поле),  $f \in F[x]$ . Тогда  $F[x]/(f)$  — поле  $\iff f$  — неприводимый многочлен.

**Пример.**  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$  — поле.

## 10.4 Расширения полей

**Утверждение.** Множество  $\{a + (f) \mid a \in F\}$  образует подкольцо в кольце  $F[x]/(f)$ , где  $F$  — поле.

В частности, если  $f$  неприводим, то это подкольцо — подполе поля  $F[x]/(f)$ . Более того, это подполе изоморфно полю  $F$  (изоморфизм  $a + (f) \mapsto a$ ).

*Доказательство.* Все пункты определения подкольца (подполя) очевидно следуют из аналогичных утверждений для поля  $F$ .  $\square$

*Замечание.* В дальнейшем такое подполе и поле  $F$  будут отождествляться.

**Определение.** Если  $L$  — подполе поля  $K$ , то  $K$  называется расширением  $L$ .

В таком случае  $K$  можно рассматривать как векторное пространство над  $L$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{C}$  — расширение  $\mathbb{R}$ ;
2. если  $f \in F[x]$  — неприводимый, то  $F[x]/(f)$  — расширение поля  $F$ .

### 10.4.1 Конечные расширения полей

**Определение.** Расширение  $K$  поля  $L$  называется конечным, если  $K$  — конечномерное векторное пространство над  $L$  (т.е.  $\dim_L K < \infty$ ).

В этом случае  $\dim_L K$  называется степенью расширения.

**Пример.**  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$  — базис  $\{1, i\}$ .

**Утверждение.**

Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[x]$  — неприводимый многочлен,  $\deg f = n$ . Тогда элементы  $1 + (f), x + (f), \dots, x^{n-1} + (f)$  — базис  $F[x]/(f)$  как векторного пространства над  $F$ , то есть  $F[x]/(f)$  — расширение поля  $F$  степени  $n$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный многочлен  $g \in F[x]$  и разделим его на  $f$  с остатком:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \quad \begin{cases} r = 0 \\ \deg r < \deg f \end{cases}$$

Если  $r = 0$ , то  $g(x) \in (f) \implies g + (f) = 0$ .

Иначе (далее обозначим  $(f)$  как  $I$ ):

$$g(x) + I = r(x) + I = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + I =$$

$$= (c_0 + I)(1 + I) + (c_1 + I)(x + I) + \dots + (c_{n-1} + I)(x^{n-1} + I) =$$

$$(\text{отождествление}) = c_0(1 + I) + c_1(x + I) + \dots + c_{n-1}(x^{n-1} + I)$$

— отсюда система  $\{1 + (f), x + (f), \dots, x^{n-1} + (f)\}$  порождает  $F[x]/(f)$ .

Покажем линейную независимость:

$$\lambda_0(1 + I) + \lambda_1(x + I) + \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} + I = I \implies \lambda_0 + \lambda_1x + \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1} \in I$$

Тогда  $f \mid (\lambda_0 + \dots + \lambda_{n-1}x^{n-1})$ , но  $\deg f > n - 1$ . Значит, такое возможно только в случае, когда все  $\lambda_i$  равны нулю, что и означает линейную независимость.  $\square$

Далее введём обозначения  $\alpha = x + I, \alpha^k = x^k + I$ . Тогда по утверждению  $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$  — базис  $F[x]/I$ . Посмотрим на значение  $f(\alpha)$ :

$$f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \implies f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n + I =$$

$$= a_0 + a_1(x + I) + \dots + a_n(x^n + I) + I = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + I = I$$

то есть в отождествлении  $f(\alpha) = 0$ , и  $\alpha$  — корень  $f$  в  $F[x]/(f)$ .

При этом в  $F$  у многочлена  $f$  не было корней, так как он неприводим над  $F$ .

**Определение.** Данный переход от поля  $F$  к расширению  $F[x]/(f)$  ( $f$  — неприводимый) называется присоединением к полю  $F$  корня  $\alpha$  многочлена  $f$ .

**Пример.** Пусть  $F = \mathbb{R}, f = x^2 + 1$  — неприводимый над  $\mathbb{R}$ .

$\mathbb{R}[x]/(f)$  — поле,  $\{1, \alpha\} = \{1 + (f), x + (f)\}$  — его базис как векторного пространства над  $\mathbb{R}$ . Тогда любой элемент этого пространства представим в виде

$$a + bx + (f) = a(1 + (f)) + b(x + (f)) = a + b\alpha$$

При этом  $f(\alpha) = 0 \implies \alpha^2 + 1 = 0 \implies \alpha^2 = -1$ . Значит, получили поле, в котором все элементы представляются в виде  $a + b\alpha$ , где  $\alpha^2 = -1$  — это в точности поле комплексных чисел. Значит,  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$ .

**Пример.** Построим поле, состоящее из 4 элементов:

Пусть  $F = \mathbb{Z}_2, f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$  — неприводимый над  $\mathbb{Z}_2$ . Тогда  $L = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$  — поле, причём (вновь обозначим  $(f) = I, x + I = \alpha$ ):

$$\forall g(x) \in L : g(x) = q(x)(x^2 + x + 1) + (a + bx) \implies \{g(x) + I\} =$$

$$= \{a + bx + I \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} = \{0 + I, 1 + I, x + I, x + 1 + I\} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

Полученное поле  $L$  — векторное пространство над  $Z_2$  размерности  $\deg f = 2$  (базис  $\{1, \alpha\}$ )

Таблицу сложения просто построить, рассматривая  $L$  как пространство над  $Z_2$ :

+	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
0	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
1	1	0	$\alpha + 1$	$\alpha$
$\alpha$	$\alpha$	$\alpha + 1$	0	1
$\alpha + 1$	$\alpha + 1$	$\alpha$	1	0

Умножение в  $L$  зависит от  $\alpha$ : знаем, что  $f(\alpha) = 0 \implies \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ , т.е.:

$$\alpha^2 = \alpha + 1; \quad \alpha(\alpha + 1) = \alpha^2 + \alpha = 1; \quad (\alpha + 1)^2 = \alpha^2 + 1 = \alpha$$

Отсюда таблица умножения для  $F$  имеет следующий вид:

$\times$	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
0	0	0	0	0
1	0	1	$\alpha$	$\alpha + 1$
$\alpha$	0	$\alpha$	$\alpha + 1$	1
$\alpha + 1$	0	$\alpha + 1$	1	$\alpha$

**Теорема.** (о башне расширений)

Пусть  $F$  — поле,  $L$  — конечное расширение  $F$ ,  $M$  — конечное расширение  $L$ . Тогда  $M$  — конечное расширение  $F$ , причём  $\dim_F M = \dim_L M \cdot \dim_F L$ .

*Доказательство.* Из конечности расширений можем выбрать:

$\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис  $L$  как векторного пространства над  $F$  ( $\dim_F L = n$ );

$\{g_1, \dots, g_m\}$  — базис  $M$  как векторного пространства над  $L$  ( $\dim_L M = m$ ).

Докажем, что  $\mathcal{E} = \{e_i g_j \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$  — базис  $M$  как векторного пространства над  $F$ :

1. Докажем, что  $\mathcal{E}$  — порождающая система  $M$  как пространства над  $F$ :

$$\begin{aligned} \forall x \in M : x &= \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j, \quad \lambda_j \in L; \quad \forall j : \lambda_j = \sum_{i=1}^n \mu_{ij} e_i, \quad \mu_{ij} \in F \implies \\ &\implies x = \sum_j \left( \sum_i \mu_{ij} e_i \right) g_j = \sum_{i,j} \mu_{ij} e_i g_j \end{aligned}$$

2. Докажем линейную независимость:

$$\sum_{i,j} \mu_{ij} e_i g_j = 0 \implies \sum_j \left( \sum_i \mu_{ij} e_i \right) g_j = 0 \xrightarrow{1} \forall j : \sum_i \mu_{ij} e_i = 0 \xrightarrow{2} \forall i, j : \mu_{ij} = 0$$

(1, 2 – т.к.  $\{g_j\}$  является базисом  $M$  над  $L$ , а  $\{e_i\}$  – базисом  $L$  над  $F$ )

Значит,  $M$  – конечное расширение размерности  $mn$ , что и требовалось.  $\square$

### 10.4.2 Алгебраические расширения полей

**Определение.** Пусть  $L$  – расширение поля  $F$ .

Элемент  $a \in L$  называется алгебраическим над  $F$ , если  $\exists h \in F[x], h \neq 0$  такой, что  $h(a) = 0$ . В противном случае  $a$  называется трансцендентным над  $F$ .

**Примеры.**

1.  $L = \mathbb{C}, F = \mathbb{Q}$  – привычные алгебраические и трансцендентные числа:

- $i, \sqrt{2}$  – алгебраические ( $i$  – корень  $x^2 + 1$ ,  $\sqrt{2}$  – корень  $x^2 - 2$ )
- $e, \pi$  – трансцендентные.

2. Если  $L$  – расширение  $F$ , то  $\forall a \in F$  – алгебраический над  $F$  (корень  $x - a$ )

**Определение.** Расширение  $L$  поля  $F$  называется алгебраическим, если любой элемент  $a \in L$  – алгебраический над  $F$ .

**Пример.**  $\mathbb{C}$  – алгебраическое расширение  $\mathbb{R}$ .

**Утверждение.** Конечное расширение  $L$  поля  $F$  является его алгебраическим расширением.

*Доказательство.* Пусть  $\dim_F L = n$ . Для произвольного  $a \in L$  рассмотрим элементы  $\{1, a, a^2, a^3, \dots, a^n\}$  поля  $L$  – всего их  $n + 1$ , а отсюда по ОЛЛЗ они линейно зависимы над  $F$ , т.е.

$$\exists c_i \in F : c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot a + \dots + c_n a^n = 0 \implies a - \text{корень } h(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \in F[x]$$

Отсюда любой  $a \in L$  – алгебраический над  $F$ , то есть  $L$  – алгебраическое расширение  $F$ .  $\square$

**Определение.** Пусть  $L$  – расширение поля  $F$ ,  $a \in L$  – произвольный алгебраический элемент. Минимальным многочленом элемента  $a$  называется многочлен  $\mu_a \in F[x]$  наименьшей степени такой, что  $\mu_a \neq 0, \mu_a(a) = 0$ .

**Свойства.** (минимального многочлена)

1.  $\mu_a$  – неприводимый над  $F$ ;

2. Для любого  $h \in F[x]$  такого, что  $h(a) = 0$ , верно  $\mu_a \mid h$ ;
3. Минимальный многочлен единственный с точностью до домножения на ненулевой элемент  $\mathbb{F}$  (обратимый элемент  $F[x]$ )

*Доказательство.*

1. Так как  $\mu_a$  имеет корень  $a$  и при этом не тождественно равен нулю,  $\mu_a$  — не константа, то есть необратим в  $F[x]$ . Также:

$$\mu_a(x) = p(x)q(x) \implies 0 = \mu_a(a) = p(a)q(a)$$

$p(a)$  и  $q(a)$  — элементы поля  $L$ , а раз в поле нет делителей нуля,

$$p(a)q(a) = 0 \implies \begin{cases} p(a) = 0 \\ q(a) = 0 \end{cases}$$

Тогда хотя бы один из многочленов  $p(x)$  и  $q(x)$  является константой — иначе у одного из них есть корень  $a$  и степень меньше степени  $\mu_a$ , что противоречит определению минимального многочлена.

Значит,  $\mu_a$  неприводим в  $F[x]$ ;

2. Разделим  $h$  на  $\mu_a$  с остатком:

$$h = \mu_a(x) \cdot q(x) + r(x), \begin{cases} r = 0 \\ \deg r < \deg \mu_a \end{cases}$$

При этом

$$0 = h(a) = \mu_a(a) \cdot q(a) + r(a) = r(a)$$

а тогда по определению минимального многочлена  $r(x) = 0$ . Значит,  $\mu_a \mid h$ ;

3. Очевидно следует из пункта 2 — если  $\mu_1$  и  $\mu_2$  минимальны для  $a$ , то

$$\mu_1(a) = 0 \implies \mu_2 \mid \mu_1; \quad \mu_2(a) = 0 \implies \mu_1 \mid \mu_2$$

а отсюда  $\mu_1 = c\mu_2$ , где  $c$  обратим в  $F[x]$ , то есть является элементом  $F$ .

□

**Определение.** Степень минимального многочлена  $\mu_a \in F[x]$  для алгебраического элемента  $a \in L$  называется степенью  $a$ .

**Пример.**  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}, a = \sqrt{2}$ :  $\mu_a(x) = x^2 - 2$ , степень  $\sqrt{2}$  равна 2.



**Определение.** Пусть  $S$  — подкольцо кольца  $T$ ,  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Кольцом, порождённым элементами  $a_1, \dots, a_n$  над  $S$ , называется наименьшее подкольцо кольца  $T$ , содержащее  $S$  и элементы  $a_1, \dots, a_n$ . Обозначается  $S[a_1, \dots, a_n]$ .

**Утверждение.**  $S[a_1, \dots, a_n] = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \in S[x_1, \dots, x_n]\}$

*Доказательство.* Очевидно, что  $S_0 = \{f(a_1, \dots, a_n) \mid f \in S[x_1, \dots, x_n]\}$  — подкольцо кольца  $T$ , содержащее  $S$  и  $a_1, \dots, a_n$ . При этом любое подкольцо  $T$ , содержащее  $S$  и  $a_1, \dots, a_n$ , обязано содержать все элементы вида  $f(a_1, \dots, a_n)$  в силу замкнутости относительно сложения и умножения, а значит,  $S_0$  — наименьшее подкольцо  $T$  с такими свойствами.  $\square$

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\};$
2.  $F \subset L = F[x]/(f), \alpha = x + (f) : F[\alpha] = L.$

**Теорема 1.** Пусть  $L$  — расширение поля  $F$ . Тогда:

1.  $a \in L$  — алгебраический над  $F \iff F[a]$  — конечномерное векторное пространство над  $F$ ;
2. если  $a \in L$  — алгебраический над  $F$ , то  $F[a]$  — поле, изоморфное  $F[x]/(\mu_a)$  (в частности,  $\dim_F F[a] = \dim F[x]/(\mu_a) = \deg \mu_a$ ).

*Доказательство.*  $F[u] = \{g(u) \mid g \in F[x]\}$

1.  $\Leftarrow$ : Пусть  $F[a]$  —  $n$ -мерное векторное пространство над  $F$ . Тогда аналогично рассуждениям о алгебраичности конечного расширения с помощью рассмотрения системы векторов  $\{1, a, \dots, a^n\}$ , линейно зависимой над  $F$ , найдём ненулевой многочлен с корнем  $a$ ;  
 $\Rightarrow$ : Пусть  $a$  — алгебраический элемент поля  $F$ , то есть

$$\exists h(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \in F[x], h \neq 0, h(a) = c_0 + c_1a + \dots + c_na^n = 0$$

Отсюда  $a^n = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1a + \dots + \tilde{c}_{n-1}a^{n-1}$ , где  $\tilde{c}_i \in F$ .

Покажем, что  $F[a]$  порождается множеством  $\{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ :

Пусть  $x \in F[a] \implies x = \sum_{j=0}^m \lambda_j a^j$ . Индукция по  $m$ :

База:  $m < n$  — уже имеем разложение по нужным элементам;

Шаг: Заметим, что

$$a^m = a^{m-n}a^n = a^{m-n}(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1a + \dots + \tilde{c}_{n-1}a^{n-1}) = \tilde{c}_0a^{m-n} + \dots + \tilde{c}_{n-1}a^{m-1}$$

Значит, в разложении  $x = \sum_{j=0}^m \lambda_j a^j$  можно представить слагаемое  $\lambda_m a^m$  как сумму меньших степеней  $a$ , а тогда после приведения подобных применимо предположение индукции. Отсюда  $F[a]$  конечно порождается как векторное пространство над  $F$ , а значит, имеет конечный базис.

2. Рассмотрим гомоморфизм колец  $\varphi : F[x] \rightarrow L$ , заданный по правилу  $f(x) \mapsto f(a)$ . Тогда  $\text{Im } \varphi = F[a]$ ,  $\text{Ker } \varphi = (\mu_a)$ , и по теореме о гомоморфизме колец  $F[a] \simeq F[x]/(\mu_a)$ .

Притом  $\mu_a$  — неприводимый над  $F$ , то есть  $F[x]/(\mu_a)$  — поле, а отсюда и  $F[a]$  — поле.

□

**Пример.**  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$  — поле.

### 10.4.3 Конечнопорождённые расширения полей

**Определение.** Пусть  $L$  — расширение поля  $F$ ,  $M = \{a_i \mid i \in I\} \subset L$ . Подполем, порождённым элементами из  $M$  над  $F$ , называется наименьшее подполе  $L$ , содержащее  $M$  и  $F$ . Обозначается  $F(M)$ .

**Утверждение.**

$$F(M) = \left\{ \frac{f(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})}{g(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})} \mid m \in \mathbb{N}, i_k \in I, f, g \in F[x_1, \dots, x_m], g(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$$

*Доказательство.* Аналогично выражению подкольца, порождённого элементами кольца (обратимость элементов в поле даёт возможность делить). □

**Определение.** Поле  $L$  называется конечнопорождённым расширением поля  $F$ , если  $\exists a_1, \dots, a_m \in L : L = F(a_1, \dots, a_m)$ .

**Утверждение.** (*Эффект уничтожения иррациональных знаменателей*)

Если  $a \in L$  — алгебраический элемент над  $F$ , то  $F[a] = F(a)$ .

*Доказательство.* Следует из п. 2 теоремы 1 ( $F[a]$  — поле). □

**Пример.**  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] : \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

**Теорема 2.** Следующие условия эквивалентны:

1.  $L$  — конечное расширение поля  $F$ ;
2.  $L$  — конечнопорождённое алгебраическое расширение поля  $F$ ;

3.  $L$  порождается конечным числом элементов, алгебраических над  $F$ .

*Доказательство.*

$1 \implies 2$  : Алгебраичность любого конечного расширения уже доказывалась.

Пусть  $\{e_1, \dots, e_n\}$  — базис векторного пространства  $L$  над  $F$ .

Тогда  $L = F[e_1, \dots, e_n] = F(e_1, \dots, e_n)$ , т.е.  $L$  — конечнопорождённое;

$2 \implies 3$  : Из конечнопорождённости  $L = F(a_1, \dots, a_n)$ . При этом  $a_1, \dots, a_n$  — алгебраические над  $F$  из алгебраичности расширения  $L$ , то есть  $L$  порождается конечным числом элементов, алгебраических над  $F$ ;

$3 \implies 1$  : Пусть  $L = F(a_1, \dots, a_n)$ , где  $a_i$  — алгебраические. Рассмотрим цепочку

$$F \subset F(a_1) \subset F(a_1, a_2) \subset \dots \subset F(a_1, \dots, a_n)$$

и обозначим  $L_k = F(a_1, \dots, a_k) = F(a_1, \dots, a_{k-1})(a_k) = L_{k-1}(a_k)$ .

Тогда  $L_{k+1}$  — конечное расширение  $L_k$ : так как  $a_{k+1} \in L_{k+1}$  является алгебраическим над  $F$ , он является алгебраическим и над  $L_k$ , а отсюда

$$L_{k+1} = L_k(a_{k+1}) = L_k[a_{k+1}] \text{ — конечномерное в.п. над } L_k \text{ по теореме 1}$$

Значит, все последовательные расширения в цепочке конечные, а тогда по теореме о башне расширений  $L$  — конечное расширение  $F$ .  $\square$

#### 10.4.4 Алгебраическое замыкание

**Теорема.** Пусть  $L$  — расширение поля  $F$ .

Обозначим  $\overline{F} = \{a \in L \mid a \text{ — алгебраический над } F\}$ . Тогда:

1.  $\overline{F}$  — подполе  $L$ ;
2. если  $b \in L$  — алгебраический над  $\overline{F}$ , то  $b$  — алгебраический над  $F$  (то есть  $b \in \overline{F}$ )

*Доказательство.*

1.  $\forall a, b \in \overline{F}$  рассмотрим  $F(a, b)$  — подполе, порождённое элементами  $a, b$ , алгебраическими над  $F$ . По теореме 2  $F(a, b)$  — алгебраическое расширение  $F$ , а отсюда  $F(a, b) \subset \overline{F}$ . Тогда  $\forall a, b \in \overline{F}$ :

- $a + b \in \overline{F}$ ,  $0 \in \overline{F}$ ,  $-a \in \overline{F} \implies \overline{F}$  — аддитивная подгруппа;
- $ab \in \overline{F} \implies \overline{F}$  — подкольцо;
- $1 \in \overline{F}$ ,  $a^{-1} \in \overline{F} (a \neq 0) \implies \overline{F}$  — подполе.

2. Пусть  $b \in L$  — алгебраический над  $\overline{F}$ , т.е.

$$\exists h \in \overline{F}[x] \ (h = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k, c_i \in \overline{F}) : h \neq 0, h(b) = 0$$

Рассмотрим в  $L$  подполе  $\tilde{F} = F(c_0, c_1, \dots, c_k)$ . Так как  $c_i \in \overline{F}$ ,  $c_i$  — алгебраические над  $F$ . Тогда  $\tilde{F}$  порождается над  $F$  конечным числом алгебраических элементов, а отсюда по теореме 2  $\tilde{F}$  — конечное расширение  $F$ .

При этом  $h \in \tilde{F}[x]$ , а значит,  $b$  является алгебраическим над  $\tilde{F}$ . Тогда по теореме 2  $\tilde{F}(b)$  — конечное расширение  $\tilde{F}$ , а отсюда по теореме о башне расширений  $\tilde{F}(b)$  — конечное расширение  $F$ . Так как любое конечное расширение является алгебраическим,  $\tilde{F}(b)$  — алгебраическое расширение  $F$ , а отсюда  $b$  является алгебраическим над  $F$ .

□

**Определение.**  $\overline{F}$  называется алгебраическим замыканием поля  $F$  в поле  $L$ .

*Замечание.*  $\overline{F}$  не обязано быть алгебраически замкнутым, так как поле  $L$  может быть не алгебраически замкнуто. Например, алгебраическое замыкание поля  $\mathbb{Q}$  в поле  $\mathbb{R}$  не алгебраически замкнуто, так как многочлен  $x^2 + 1$  не имеет корней в нём.

**Пример.** Пусть  $\overline{\mathbb{Q}}$  — алгебраическое замыкание  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{C}$ .  
( $\overline{\mathbb{Q}}$  называется полем всех алгебраических чисел)

**Упражнение.**

1. Доказать, что  $\overline{\mathbb{Q}}$  алгебраически замкнуто;
2. Доказать, что любое конечное расширение  $\mathbb{Q}$  — подполе  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

*Доказательство.*

1. Рассмотрим произвольный многочлен  $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$  положительной степени. Это многочлен с комплексными коэффициентами, а так как  $\mathbb{C}$  алгебраически замкнуто,  $f$  имеет корень  $a \in \mathbb{C}$ . Тогда  $a$  — алгебраический над  $\overline{\mathbb{Q}}$ , и по пункту 2 предыдущей теоремы  $a \in \overline{\mathbb{Q}}$ . Поэтому  $f$  имеет корень в  $\overline{\mathbb{Q}}$ , то есть  $\overline{\mathbb{Q}}$  алгебраически замкнуто;
2. Любое конечное расширение  $F$  поля  $\mathbb{Q}$  является алгебраическим расширением  $\mathbb{Q}$ . Рассмотрим произвольный  $b \in F$  — он является алгебраическим над  $\mathbb{Q}$ , а так как любой корень многочлена с рациональными коэффициентами является комплексным числом,  $b \in \mathbb{C}$ . Тогда по определению  $b \in \overline{\mathbb{Q}}$

( $b \in \mathbb{C}$  и  $b$  — алгебраический над  $\mathbb{Q}$ ), то есть  $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ . При этом все операции введены как операции над  $\mathbb{C}$ , то есть  $F$  — подполе  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

□

## 10.5 Поле разложения многочлена

**Определение.** Пусть  $F$  — поле,  $f \in F[x]$  — произвольный многочлен.

Расширение  $L$  поля  $F$  называется полем разложения многочлена  $f$ , если

1.  $f$  можно разложить на линейные множители над  $L$ ;
2.  $L$  порождается над  $F$  корнями многочлена  $f$ .

То есть  $L$  — наименьшее поле, содержащее  $F$  и все корни многочлена  $f$ .

**Примеры.**

1.  $f(x) = x - 5$ ,  $F = \mathbb{R} \implies L = \mathbb{R}$ ;
2.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $F = \mathbb{R} \implies L = \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$ ;
3.  $f(x) = x^3 - 2$ ,  $F = \mathbb{Q}$ .

Поле  $L_1 = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  — не поле разложения  $f$ , т.к.

$$f(x) = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$$

где корни  $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}$  комплексные.

Поэтому поле разложения  $f$  должно иметь вид  $L = L_1[x]/(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$ .

**Лемма.** Пусть  $P, \tilde{P}$  — поля,  $h(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  — неприводимый многочлен из  $P[x]$ ,  $P(\alpha)$  — поле, полученное из  $P$  присоединением корня  $\alpha$  многочлена  $h$ . Тогда если  $\varphi : P \rightarrow \tilde{P}$  — гомоморфизм полей, то количество способов продолжить его до гомоморфизма  $\psi : P(\alpha) \rightarrow \tilde{P}$  совпадает с числом корней  $\tilde{h}$  в  $\tilde{P}$ , где  $\tilde{h}(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1x + \dots + \tilde{c}_nx^n$ ,  $\tilde{c}_i = \varphi(c_i)$ .

*Доказательство.*  $P(\alpha) = P[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + \dots + a_k\alpha^k \mid a_i \in P\}$ .

Если  $\exists \psi : P(\alpha) \rightarrow \tilde{P}$ , то

$$\psi(a_0 + a_1\alpha + \dots + a_k\alpha^k) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1)\beta + \dots + \varphi(a_k)\beta^k, \text{ где } \beta = \psi(\alpha) \quad (1)$$

Применим это к  $h(\alpha) = 0$ :

$$0 = \psi(0) = \psi(h(\alpha)) = \psi(c_0 + c_1\alpha + \dots + c_n\alpha^n) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\beta + \dots + \tilde{c}_n\beta^n$$

Поэтому для любого продолжения  $\psi$  элемент  $\beta = \psi(\alpha)$  — корень  $\tilde{h}(x)$ .

С другой стороны, если  $\beta$  — произвольный корень  $\tilde{h}(x)$ , то правило (1) задаёт корректный гомоморфизм  $\psi : P(\alpha) \rightarrow \tilde{P}$ , причём все такие гомоморфизмы различны (различны их значения на  $\alpha$ ). Значит, искомым гомоморфизмов столько же, сколько и корней у  $\tilde{h}(x)$  в  $\tilde{P}$ .  $\square$

**Теорема.** *Поле разложения любого  $f \in F[x]$  существует и единственно с точностью до изоморфизма, тождественного на  $F$ .*

*Доказательство.* Построим одно из полей разложения  $L$  многочлена  $f$  с помощью цепочки расширений

$$F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_s = L, \quad L_{i+1} = L_i(\alpha_{i+1}), \quad \text{где } \alpha_1, \dots, \alpha_s \text{ — корни } f$$

Разложим  $f$  на неприводимые множители и докажем существование нужной цепочки индукцией по  $S$  — сумме степеней нелинейных многочленов в разложении  $f$  над  $L_i$ :

База:  $S = 0 \implies$  все множители линейны —  $L_i = L$ , цепочка завершена;

Шаг: Пусть в разложении есть неприводимый множитель  $f_i$  степени  $\geq 2$  — тогда  $L_{i+1} = L_i[x]/(f_i) = L_i(\alpha_{i+1})$ , где  $\alpha_{i+1}$  — корень  $f_i$ . В  $L_{i+1}$  у многочлена  $f(x)$  сохранились все имевшиеся корни и добавился хотя бы один новый корень  $\alpha_{i+1}$  — значит, в  $L_{i+1}$  сумма степеней нелинейных многочленов в разложении  $f$  уменьшилась хотя бы на 1, то есть к  $L_{i+1}$  применимо предположение индукции. Осталось заметить, что по построению  $L$  порождается над  $F$  корнями  $f$ , не принадлежащими  $F$ , что то же самое, что и всеми корнями  $f$ . Значит,  $L$  — поле разложения  $f$ .

Теперь докажем единственность. Пусть  $\tilde{L}$  — произвольное поле разложения многочлена  $f$  (из опр.  $F \subseteq \tilde{L}$ ). Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$\varphi_i : L_i \rightarrow \tilde{L} \text{ таких, что } \varphi_0 = \text{id}, \quad \varphi_{i+1}|_{L_i} = \varphi_i$$

По лемме при присоединении корня неприводимого  $f_i$  хотя бы одно продолжение  $\varphi_{i+1}$  существует тогда и только тогда, когда  $\varphi_i(f_i)$  имеет корень в  $\tilde{L}$ .

Для многочленов знаем, что  $f_i \mid f$  над  $L_i \implies \varphi_i(f_i) \mid \varphi_i(f)$  над  $\tilde{L}$ , а  $\varphi_i(f) = f$ , так как все  $\varphi_i$  тождественны на  $F$ . При этом  $f$  раскладывается на линейные множители над  $\tilde{L}$  — значит, у  $\varphi_i(f_i)$  не может не быть корней над  $\tilde{L}$ , и расширение возможно.

Так построим  $\varphi_s : L \rightarrow \tilde{L}$  — гомоморфизм полей, тождественный на  $F$ .

Ядро  $\text{Ker } \varphi_s$  — идеал в поле  $L$ , то есть оно равно либо  $\{0\}$ , либо  $L$  — второе

невозможно, так как  $\varphi_s$  тождественный на  $F$ , а в  $F$  есть  $1 \neq 0$ .

Образ  $\text{Im } \varphi_s$  — подполе  $\tilde{L}$ , содержащее все корни многочлена  $f$ , а тогда из минимальности поля разложения совпадающее с  $\tilde{L}$ . Значит,  $\varphi_s$  — биективный гомоморфизм полей, т.е. изоморфизм полей, тождественный на  $F$ .  $\square$

## 10.6 Конечные поля

**Определение.** Наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $\overbrace{1 + \dots + 1}^n = 0$  в  $F$ , называется характеристикой поля  $F$ . Если таких натуральных  $n$  не существует, то характеристика поля  $F$  равна 0. Обозначается как  $\text{char } F$ .

**Примеры.**  $\text{char } \mathbb{R} = 0$ ,  $\text{char } \mathbb{Z}_3 = 3$ .

**Утверждение 1.** Если  $n = \text{char } F > 0$ , то  $n$  — простое.

*Доказательство.* Доказывалось в курсе первого семестра.  $\square$

**Утверждение 2.** Пусть  $F$  — поле. Тогда

1. если  $\text{char } F = p > 0$ , то  $\exists M$  — подполе  $F$ , изоморфное  $\mathbb{Z}_p$ ;
2. если  $\text{char } F = 0$ , то  $\exists M$  — подполе  $F$ , изоморфное  $\mathbb{Q}$ ;

*Доказательство.*

1.  $M = \{0, 1, \overbrace{1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots}^{p-1}, 1 + \dots + 1\} \simeq \mathbb{Z}_p$  — подполе  $F$ ;

2.  $K = \{0, 1, (-1), 1 + 1, (-1) + (-1), \dots\} \simeq \mathbb{Z}$  — подкольцо  $F$ .

Значит, в  $F$  есть подполе  $M = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in K, b \neq 0\} \simeq \mathbb{Q}$ .  $\square$

**Утверждение 3.** Пусть  $F$  — поле,  $\text{char } F = p > 0$ ,  $\varphi : F \rightarrow F$  — отображение, заданное по правилу  $\varphi : x \mapsto x^p$ . Тогда  $\varphi$  — инъективный гомоморфизм, причём если  $|F| < \infty$ , то  $\varphi$  — изоморфизм.

*Доказательство.* Очевидно, что  $\varphi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \varphi(a)\varphi(b)$ .

$$\varphi(a + b) = (a + b)^p = \sum_{i=0}^p C_p^k a^k b^{p-k} = a^p + b^p = \varphi(a) + \varphi(b)$$

(так как  $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ , и при  $k \neq 0, p$  только числитель кратен  $p$ , т.е.  $p \mid C_p^k$ )

Также  $\varphi(a) = 0 \iff a^p = 0 \iff a = 0$  (в поле нет делителей нуля).

Отсюда  $\varphi$  — инъективный гомоморфизм.

При  $|F| < \infty$  он сюръективен, то есть является изоморфизмом.  $\square$

**Определение.**  $\varphi$  из утверждения 3 называется эндоморфизмом Фробениуса (автоморфизмом Фробениуса для конечного  $F$ ).

**Утверждение 4.**  $F$  — конечное поле  $\implies |F| = p^k$ , где  $p = \text{char } F$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

*Доказательство.* По утверждению 2 в поле  $F$  есть подполе  $M \simeq \mathbb{Z}_p$ .

Тогда  $F$  можно рассматривать как векторное пространство над  $M$ . Из конечности поля  $F$  конечна его размерность как векторного пространства над  $M$ . Пусть она равна  $k$  — тогда  $|F| = p^k$ .

(каждый элемент однозначно задаётся  $k$  координатами из  $\mathbb{Z}_p$ ) □

**Лемма.** Пусть  $\varphi$  — автоморфизм поля  $F$ . Тогда множество  $S$  неподвижных точек  $\varphi$  — подполе в  $F$ .

*Доказательство.* Если  $a, b$  неподвижны относительно  $\varphi$ , то из определения изоморфизма очевидно, что и неподвижны и точки  $a + b$ ,  $-a$ ,  $ab$ ,  $a^{-1}$ . Также  $\varphi(0) = 0$  по свойству гомоморфизмов групп,  $\varphi(1) = 1$  по аналогичным рассуждениям для мультипликативной группы поля. Значит,  $S$  — подполе  $F$ . □

**Теорема.** Для любого простого  $p$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  существует единственное с точностью до изоморфизма поле  $F$  из  $p^n$  элементов.

*Доказательство.* Построим поле порядка  $p^n$ : рассмотрим поле  $F$  разложения многочлена  $f(x) = x^{p^n} - x$  над  $\mathbb{Z}_p$ . Его производная  $f' = p^n x^{p^n-1} - 1 = -1$ , то есть у  $f$  нет кратных корней. Значит, в  $F$  есть  $p^n$  различных корней  $f$ .

Рассмотрим подмножество  $S \subseteq F$  этих корней:

$$S = \{a \in F \mid a^{p^n} = a\} \quad (|S| = p^n)$$

— это множество неподвижных точек автоморфизма  $\varphi^n$ , где  $\varphi$  — автоморфизм Фробениуса. По лемме множество неподвижных точек автоморфизма поля является подполем, и при этом  $S$  содержит все корни  $f$  — из минимальности поля разложения  $S = F \implies |F| = p^n$ .

Единственность: пусть  $\tilde{F}$  — произвольное поле из  $p^n$  элементов. Тогда

$$|\tilde{F}^*| = p^n - 1 \implies \forall a \in \tilde{F}^* : a^{p^n-1} = 1 \implies \forall a \in F : a^{p^n} - a = 0$$

то есть  $\tilde{F}$  состоит из корней многочлена  $f(x) = x^{p^n} - x$ , которых ровно  $p^n$ . Значит,  $\tilde{F}$  — поле разложения  $f$  над  $\mathbb{Z}_p$ , то есть  $\tilde{F} \simeq F$ . □

**Определение.** Поле из  $p^n$  элементов обозначается  $\mathbb{F}_{p^n}$ .



**Следствие.** Для любого простого  $p$  и любого  $n \in \mathbb{N}$  существует неприводимый многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$ .

*Доказательство.* Рассмотрим поле  $F$  из  $p^n$  элементов. В конце раздела 4.4 доказывалось, что мультипликативная группа конечного поля — циклическая  $\implies F^* = \langle \alpha \rangle$ . Тогда  $F$  порождается над  $\mathbb{Z}_p$  элементом  $\alpha$ , то есть  $F = \mathbb{Z}_p(\alpha) = \mathbb{Z}_p[x]/(\mu_\alpha)$ , где  $\deg \mu_\alpha = \dim_{\mathbb{Z}_p} F = n$ , и при этом  $\mu_\alpha$  неприводим по свойству минимального многочлена. Значит,  $\mu_\alpha$  — искомый многочлен.  $\square$

**Упражнение.** Доказать, что в  $\mathbb{F}_{p^n}$  есть подполе, изоморфное  $\mathbb{F}_{p^m} \iff m \mid n$ .

*Доказательство.*

$\implies$ : Если в  $F_1 \simeq \mathbb{F}_{p^n}$  есть подполе  $F_2 \simeq \mathbb{F}_{p^m}$ , то  $F_1$  можно рассматривать как векторное пространство над  $F_2$ . Тогда  $|F_1| = |F_2|^k$ , где  $k$  — размерность  $F_1$  как пространства над  $F_2$ , то есть  $p^n = p^{km} \implies m \mid n$ ;

$\impliedby$ : Заметим, что если  $n = km$ , то многочлен  $x^{p^n} - x$  делится на  $x^{p^m} - x$ :

$$\begin{aligned} p^n - 1 &= (p^m)^k - 1^k = (p^m - 1)(p^{m(k-1)} + p^{m(k-2)} + \dots + p^m + 1) = (p^m - 1)Q \implies \\ \implies x^{p^n} - x &= x(x^{p^n-1} - 1) = x(x^{(p^m-1)Q} - 1^Q) = x(x^{p^m-1} - 1)P(x) = (x^{p^m} - x)P(x) \end{aligned}$$

Таким образом, все корни многочлена  $x^{p^n} - x$  являются корнями  $x^{p^m} - x$ , то есть в  $\mathbb{F}_{p^n}$  как в поле разложения  $x^{p^n} - x$  над  $\mathbb{Z}_p$  есть все  $p^m$  корней многочлена  $x^{p^m} - x$ , которые образуют поле, изоморфное  $\mathbb{F}_{p^m}$ , относительно тех же операций. Значит, в  $\mathbb{F}_{p^n}$  есть подполе, изоморфное  $\mathbb{F}_{p^m}$   $\square$

# 11 Материал для самостоятельного изучения

Материал для данной главы взят из [4], лекции 18-19.

## 11.1 Алгебры над полем

**Определение.** Алгеброй над полем  $F$  называется множество  $A$  с операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля  $K$ , обладающими следующими свойствами:

1.  $(A, +, \lambda \cdot)$  — векторное пространство над  $F$ ;
2.  $(A, +, \cdot)$  — кольцо;
3.  $\forall a, b \in A, \lambda \in F : \lambda(ab) = (\lambda a)b$ .

**Определение.** Для алгебры над полем определены следующие понятия:

- как для векторного пространства — размерность;
- как для кольца — ассоциативность, коммутативность, наличие единицы.

**Примеры.**

1. Если  $L$  — расширение поля  $F$ , то  $L$  — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над  $F$ ;
2. Множество  $F(X, K)$  функций  $f : X \rightarrow K$ , где  $X$  — произвольное множество,  $K$  — поле, является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей над  $K$ ;
3.  $M_n(F)$  — некоммутативная ассоциативная алгебра с единицей над  $F$ .

**Определение.** Тело — ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный.

**Примеры.**

1. Любое поле является телом (поле — коммутативное тело)
2.  $Q_8$  — тело, не являющееся полем (любой элемент имеет обратный, но умножение некоммутативно)

**Определение.** Алгебра, являющаяся телом относительно сложения и умножения, называется алгеброй с делением.

## Примеры.

1. Любая алгебра, являющаяся полем, является алгеброй с делением (например, поле  $L$  как алгебра над подполем  $F$ );
2. Любое тело  $D$  можно рассматривать как алгебру с делением над своим центром  $Z(D) = \{z \in D \mid \forall a \in D : za = az\}$ , который является коммутативным телом, то есть полем.

*Замечание.* Если  $D$  — алгебра с делением над полем  $F$ , то элементы вида  $\lambda \cdot 1$  образуют в ней подкольцо, содержащееся в  $Z(D)$  и изоморфное  $F$ .

## 11.2 Алгебра кватернионов

Рассмотрим ассоциативную алгебру  $\mathbb{H}$  над  $\mathbb{R}$ , порождаемую элементами  $i, j$  такими, что

$$i^2 = j^2 = -1; \quad ij = -ji$$

Тогда базисом  $\mathbb{H}$  как векторного пространства над  $\mathbb{R}$  будут элементы  $\{1, i, j, k\}$ , где  $k = ij$ . Тогда:

$$k^2 = (ij)^2 = ijij = i(-ij)j = -(-1)(-1) = -1;$$

$$ki = (ij)i = i(-ij) = -ik; \quad kj = (ij)j = (-ji)j = -jk$$

и любой элемент (кватернион)  $q \in \mathbb{H}$  можно записать в виде  $q = a + bi + cj + dk$ .

**Определение.** Пусть  $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$  — произвольный кватернион. Тогда кватернион  $\bar{q} = a - bi - cj - dk$  называется сопряжённым кватернионом к  $q$ .

**Свойства.**  $\forall q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ :

1.  $\bar{\bar{q}} = q$ ;
2.  $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$ ;
3.  $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ .

*Доказательство.*

1. Очевидно из определения;

2. В силу линейности  $\mathbb{H}$  как векторного пространства достаточно проверить данное равенство на базисных элементах. Равенства с участием единицы очевидны ( $\bar{1} = 1$ ) — рассмотрим остальные:

$$\overline{ij} = \bar{k} = -k = ji = (-j)(-i) = \bar{j} \cdot \bar{i}$$

$$\overline{jk} = \bar{i} = -i = kj = (-k)(-j) = \bar{k} \cdot \bar{j}$$

$$\overline{ki} = \bar{j} = -j = ik = (-i)(-k) = \bar{i} \cdot \bar{k}$$

3.

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 - (bi + cj + dk)^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bcij - bcji - bdik - bdk i - cdjk - cdkj = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

Равенство  $q\bar{q} = \bar{q}q$  получается из данного подстановкой  $\bar{q}$  вместо  $q$ .

□

**Определение.** Число  $q\bar{q} \in \mathbb{R}$  называется нормой  $q \in \mathbb{H}$  и обозначается  $N(q)$ .

**Утверждение.**  $\mathbb{H}$  — алгебра с делением.

*Доказательство.* Уже знаем, что  $\mathbb{H}$  — ассоциативная алгебра с единицей.

Докажем, что любой ненулевой элемент  $H$  обратим: если  $q \neq 0$ , то  $N(q) \neq 0$ , а тогда  $q^{-1} = \frac{1}{N(q)} \cdot \bar{q}$ , так как  $q\bar{q} = \bar{q}q = N(q)$ . Значит,  $\mathbb{H}$  — алгебра с делением. □

**Теорема.** (Фробениуса)

Над полем  $\mathbb{R}$  с точностью до изоморфизма существует только три конечномерные ассоциативные алгебры с делением:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ .

*Доказательство.* Без доказательства. □

## 12 Заключение и источники

**Утверждение 1.** *Если вы дочитали этот конспект до конца и всё поняли — вы круты!*

**Утверждение 2.** *Если вы дочитали этот конспект до конца и не всё поняли — прошу не стесняться задавать мне вопросы, большинство опечаток и ошибок в моём понимании обнаруживаются именно так, да и помочь я всегда буду рад)*

**Утверждение 3.** *Если вы не дочитали этот конспект до конца — да пребудет с вами удачный билет на экзамене)*

*Доказательство.* Остаётся читателю в качестве упражнения. □

Без следующих людей конспект не состоялся бы, а потому благодарю:

- Куликову Ольгу Викторовну - за прекрасные лекции, тщательное изучение которых не мешало мне редко на них просыпаться;
- Техающую команду 208 группы:
  - Кирилл Яковлев (*мастер спорта по пупуну*);
  - Вячеслав Молчанов (*знаток ангема*);
  - Егор Цыбулин (*самый главный алгебраист*);
  - Ярослав Светлаков (*любитель запятых*);
- с вами никогда не было ощущения, что я одинок в своих страданиях;
- Людей, без чьих конспектов я бы не выжил:
  - Сергей Криворученко (209 гр.) — за живые и подробные конспекты;
  - Евгения Ковтун (212 гр.) — за аккуратные и читаемые конспекты;
  - я мог спать, зная, что эти герои проснутся;
- Всех, кто присылал (и будет присылать) мне вопросы, ошибки и опечатки — благодаря вам конспект становится понятнее, правильнее и чище;
- И наконец, всех, кто нашёл в себе силы открыть алгебру — благодаря вам моя работа имела смысл)

На этом всё, всем удачи и до встречи в новых конспектах!

## Список литературы

- [1] “Спецкурс по теории групп”, Клячко А.А., 2022, <https://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/lect21.pdf>
- [2] “Линейная алгебра, 2 семестр, 2 поток, лектор Чубаров И.А.”, команда 108 группы, 2025, <https://github.com/Viacheslavik122333/Linear-algebra/blob/main/linal.pdf>
- [3] “Алгебра, 1 семестр, 2 поток, лектор Куликова О.В.”, команда 108 группы, 2024, <https://github.com/Viacheslavik122333/Halgebra1sem/blob/main/lecture.pdf>
- [4] “Лекции по высшей алгебре, 2 курс, 1 поток”, Бунина Е.И., 2016, <https://halgebra.math.msu.su/wiki/doku.php/staff:bunina>