



Механико-математический факультет

**АЛГЕБРА, 3 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Авторы: Соколов Егор

Группа: 208

Контакт: [Мой телеграм для связи](#)

Москва

Последняя компиляция: 2 сентября 2025 г.

# Содержание

## 1 Группы

2

# 1 Группы

**Определение.** Пусть  $G$  - множество. Бинарной операцией на  $G$  называется отображение  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$ .

**Определение.** Множество  $G$  с бинарной операцией  $*$  называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

1.  $\forall a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c$ ;
2.  $\exists e \in G : \forall a \in G \quad a * e = e * a = a$ ;
3.  $\forall a \in G \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Различные формы записи группы:

1. Мультипликативная форма (терминология):  
Операция - "  $\cdot$  " (умножение);  
Нейтральный элемент - единичный (1);  
Элемент из аксиомы 3 - обратный ( $a^{-1}$  для  $a \in G$ );
2. Аддитивная форма (терминология):  
Операция - "  $+$  " (сложение);  
Нейтральный элемент - нулевой (0);  
Элемент из аксиомы 3 - противоположный ( $-a$  для  $a \in G$ );

**Определение.** Если  $G$  - группа и  $\forall a, b \in G \quad a \cdot b = b \cdot a$ , то  $G$  - абелева (коммутативная) группа.

*Замечание.* Обычно для обозначения абелевых групп будем использовать аддитивную форму записи, для иных - мультипликативную.

**Утверждение** (Простейшие свойства групп).

1. Единичный элемент единственный;
2.  $\forall a \in G$  обратный к  $a$  элемент единственный;
3.  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ ;
4. Если  $a, b \in G$ , то решение уравнения  $ax = b$  ( $xa = b$ ) единственно.

*Доказательство.*

1. (От противного) Допустим, что  $\exists e_1, e_2 \in A$  - единичные. Тогда  $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$  по определению единичного элемента.
2. Допустим  $\exists b_1, b_2$  - обратные к  $a$  элементы:  $b_1 \neq b_2$   
В силу ассоциативности:

$$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$

$$b_1 * e = e * b_2$$

$$b_1 = b_2$$

3.  $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e;$   
 $b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = e \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
4.  $ax = b \iff a^{-1}ax = a^{-1}b \iff x = a^{-1}b;$   
 $xa = b \iff xaa^{-1} = ba^{-1} \iff x = ba^{-1};$

□

**Определение.** Мощность множества  $G$  называется порядком группы  $G$ .  
Обозначается  $|G|$ .

Если  $|G| < \infty$ , то группа называется конечной, иначе бесконечной.

### Примеры.

1.  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_n, +);$
2.  $GL_n(F)$  - группа невырожденных матриц порядка  $n$  с коэффициентами из поля  $F$ ;
3. Пусть  $\Omega$  - множество. Преобразованиями  $\Omega$  назовём биекции  $f : \Omega \rightarrow \Omega$ .  
 $S(\Omega)$  - множество всех преобразований  $\Omega$  - образует группу относительно композиции.  
Если  $\Omega = \{1, \dots, n\}$ , то  $S(n) = S_n$  - группа подстановок.
4. Если  $G = \{a_1, \dots, a_n\}$  - конечная группа, то её можно задать с помощью таблицы умножения (таблицы Кэли).  
Например, для  $Z_2 = \{0, 1\}$ :

	0	1
0	0	1
1	1	0

5. Группа кватернионов:  $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Таблица Кэли для кватернионов:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	i	-1

**Определение.** Подмножество  $H \subseteq G$  называется подгруппой группы  $G$ , если:

1.  $\forall a, b \in H \quad ab \in H$ ;
2.  $\forall a \in H \quad a^{-1} \in H$ ;
3.  $1 \in H$  (можно заменить на  $H \neq \emptyset$ )

Обозначается  $H \leq G$ .

**Утверждение.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  является группой относительно бинарной операции группы  $G$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$  ( $\mathbb{N} \not\leq \mathbb{Z}$ , т.к. не группа);
2.  $GL_n(F) \geq SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$  - унимодулярная группа.
3.  $GL_n(F) \geq O_n(F) \geq SO_n(F)$  ( $O_n(F)$  - ортогональная группа,  $SO_n(F)$  - специальная ортогональная группа);
4.  $GL_n(F) \geq$  группа строго треугольных матриц.

**Определение.** Любая подгруппа группы  $S(\Omega)$  называется группой преобразований множества  $\Omega$ .

**Примеры.**

1.  $GL(V) (\leq S(V))$  - группа всех невырожденных линейных операторов векторного пространства  $V$ ;
2.  $Aff(\mathbb{A})$  - группа всех невырожденных аффинных преобразований аффинного пространства  $\mathbb{A}$ ;

3.  $\mathcal{E}^2$  - аффинно-евклидово двумерное пространство.

$\text{Isom } \mathcal{E}^2$  - группа изометрий (движений) на  $\mathcal{E}^2$ .

$\text{Isom } \mathcal{E}^2 \supseteq O_2 \supseteq SO_2$ , где  $O_2$  - группа движений, сохраняющих точку  $O$ ,  $SO_2$  - группа поворотов вокруг точки  $O$ .

4.  $T \subseteq \mathcal{E}^2$  - некоторая фигура.

$\text{Sym } T = \{f \in \text{Isom } \mathcal{E}^2 \mid f(T) = T\}$  - группа симметрий фигуры  $T$ .

- Если  $T$  - окружность с центром в точке  $O$ , то  $\text{Sym } T = O_2$ ;
- Если  $T$  - правильный  $n$ -угольник с центром в точке  $O$ , то  $\text{Sym } T = D_n$   
- группа Диэдра.  
 $|D_n| = 2n$  -  $n$  поворотов и  $n$  симметрий.

**Определение.** Пусть  $(G_1, *, e_1), (G_2, \circ, e_2)$  - группы. Отображение  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  - изоморфизм, если

1.  $\varphi$  - биекция;
2.  $\forall a, b \in G_1 \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$

Если между  $G_1$  и  $G_2$  существует изоморфизм, то  $G_1$  и  $G_2$  называются изоморфными. Обозначается  $G_1 \cong G_2$ .

**Пример.**  $D_3 \cong S_3$ .

*Доказательство.*  $D_3$  - группа движений, переводящая равносторонний треугольник в себя. Если пронумеровать вершины изначального треугольника, то каждый элемент группы  $D_3$  будет соответствовать подстановке, переводящей старый порядок вершин в новый. Определение изоморфизма проверяется очевидно.  $\square$

**Утверждение.** *Изоморфность групп - отношение эквивалентности на множестве групп.*

**Утверждение** (Свойства изоморфизмов).

1.  $\varphi(e_1) = e_2$ ;
2.  $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ ;
3.  $G_1 \cong G_2 \implies |G_1| = |G_2|$ .

*Замечание.* Обратное утверждение неверно (например,  $S_3 \not\cong \mathbb{Z}_6$ ).

**Пример.**  $SO_2 \cong (U, \cdot)$ , где  $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Определение.** Пусть  $(G, \cdot, e)$  - группа,  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ .

Мультипликативный термин - элемент  $g$  в степени  $k$ :

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_k, k > 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

**Определение.** Пусть  $(G, +, e)$  - группа,  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ .

Аддитивный термин - кратное элемента  $g$ :

$$kg = \begin{cases} \underbrace{g + g + \dots + g}_k, k > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

**Утверждение** (Свойства  $(k, m \in \mathbb{Z}, g \in G)$ ).

1.  $g^k \cdot g^m = g^{k+m}$ ;
2.  $(g^k)^m = g^{km}$ ;
3.  $(g^k)^{-1} = g^{-k}$ .

**Утверждение.** Множество всех элементов  $g^k$ , где  $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ , образует подгруппу в  $G$ . Обозначается  $\langle g \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$ .

**Определение.**  $\langle g \rangle$  - циклическая подгруппа, порождённая элементом  $g$ .

**Примеры.**

1.  $G = \mathbb{Z} : \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$  - чётные целые числа;
2.  $G = \mathbb{Z}_6 : \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$ ;
3.  $G = \mathbb{C} : \langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$

Пусть  $(G, \cdot, e)$  - группа,  $g \in G$ . Если  $\forall k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m \implies g^k \neq g^m$ , то  $\langle g \rangle$  - бесконечная (элемент  $g$  имеет бесконечный порядок).

Если  $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m, g^k = g^m \implies g^{k-m} = e \implies$  существует наименьшее  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $g^n = e$  (элемент  $g$  имеет порядок  $n$ )

**Определение.** Порядком элемента  $g \in G$  называется наименьшее натуральное число  $n$  такое, что  $g^n = e$ , если такое существует. Иначе говорят, что элемент  $g$  имеет бесконечный порядок. Обозначается  $\text{ord } g$ .

**Примеры.**

$$1. G = \mathbb{Z} : \text{ord } 2 = \infty;$$

$$2. G = \mathbb{Z}_{12} : \text{ord } 2 = 6;$$

$$3. G = \mathbb{C}^* : \text{ord } 2 = \infty$$

( $\mathbb{C}^*$  - мультипликативная группа поля,  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  относительно умножения).

**Утверждение** (Свойства).

$$1. g^m = e \iff \text{ord } g \mid m;$$

$$2. g^m = g^l \iff k \equiv l \pmod{\text{ord } g}$$

*Доказательство.*

1. Разделим  $m$  на  $n = \text{ord } g$  с остатком:  $m = nq + r$ , где  $0 \leq r < n$ . Тогда:

$$e = g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r \implies r = 0$$

так как  $r < n$ , где  $n$  - минимальное натуральное число такое, что  $g^n = e$ .

2. Следует из 1.

□