



Lomonosov Moscow
State University

Механико-математический факультет

АЛГЕБРА, 3 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Авторы: Соколов Егор

Группа: 208

Контакт: [Мой телеграм для связи](#)

Москва

Последняя компиляция: 3 ноября 2025 г.

Содержание

1 Группы	2
1.1 Основные понятия	2
1.2 Циклические группы	9
1.3 Смежные классы	11
1.4 Факторгруппа	16
1.5 Гомоморфизмы групп	17
2 Свободные группы	20
2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями	23
3 Прямое произведение групп	27
3.1 Внешнее прямое произведение	27
3.2 Внутреннее прямое произведение	28
3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением	31
4 Конечнопорождённые абелевы группы	33
4.1 Связь между базисами свободной абелевой группы	37
4.2 Элементарные преобразования свободных абелевых групп	38
4.3 Согласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы	41
4.4 Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах	43
5 Действия группы на множестве	51
5.1 Орбиты и стабилизаторы	52
5.2 Действия группы на себе	56
5.3 Классы сопряжённости и централизаторы	58
6 Теоремы Силова	62
6.1 I теорема Силова	62
6.2 II теорема Силова	63
6.3 Нормализатор. III теорема Силова	64
7 Коммутант	67
7.1 Коммутанты некоторых известных групп	68
8 Разрешимые и простые группы	71
8.1 Разрешимые группы	71
8.2 Простые группы	73
8.3 Значение простых групп	74

1 Группы

1.1 Основные понятия

Определение. Пусть G - множество. Бинарной операцией на G называется отображение $* : G \times G \rightarrow G$.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall a, b, c \in G \quad a * (b * c) = (a * b) * c;$
2. $\exists e \in G : \forall a \in G \quad a * e = e * a = a;$
3. $\forall a \in G \quad \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Различные формы записи группы:

1. Мультипликативная форма (терминология):
Операция - "·" (умножение);
Нейтральный элемент - единичный (1);
Элемент из аксиомы 3 - обратный (a^{-1} для $a \in G$);
2. Аддитивная форма (терминология):
Операция - "+" (сложение);
Нейтральный элемент - нулевой (0);
Элемент из аксиомы 3 - противоположный ($-a$ для $a \in G$);

Определение. Если G - группа и $\forall a, b \in G \quad a \cdot b = b \cdot a$, то G - абелева (коммутативная) группа.

Замечание. Обычно для обозначения абелевых групп будем использовать аддитивную форму записи, для иных - мультипликативную.

Утверждение (Простейшие свойства групп).

1. Единичный элемент единственный;
2. $\forall a \in G$ обратный к a элемент единственный;
3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;
4. Если $a, b \in G$, то решение уравнения $ax = b$ ($xa = b$) единственно.

Доказательство.

1. (От противного) Допустим, что $\exists e_1, e_2 \in A$ - единичные. Тогда $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ по определению единичного элемента.
2. Допустим $\exists b_1, b_2$ - обратные к a элементы: $b_1 \neq b_2$
В силу ассоциативности:

$$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$

$$b_1 * e = e * b_2$$

$$b_1 = b_2$$

3. $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e;$
 $b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = e \implies (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
4. $ax = b \iff a^{-1}ax = a^{-1}b \iff x = a^{-1}b;$
 $xa = b \iff xaa^{-1} = ba^{-1} \iff x = ba^{-1};$

□

Определение. Мощность множества G называется порядком группы G .
Обозначается $|G|$.

Если $|G| < \infty$, то группа называется конечной, иначе бесконечной.

Примеры.

1. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_n, +);$
2. $GL_n(F)$ - группа невырожденных матриц порядка n с коэффициентами из поля F ;
3. Пусть Ω - множество. Преобразованиями Ω назовём биекции $f : \Omega \rightarrow \Omega$.
 $S(\Omega)$ - множество всех преобразований Ω - образует группу относительно композиции.
Если $\Omega = \{1, \dots, n\}$, то $S(n) = S_n$ - группа подстановок.
4. Если $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ - конечная группа, то её можно задать с помощью таблицы умножения (таблицы Кэли).
Например, для $Z_2 = \{0, 1\}$:

	0	1
0	0	1
1	1	0

5. Группа кватернионов: $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Таблица Кэли для кватернионов:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Определение. Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой группы G , если:

1. $\forall a, b \in H \ ab \in H;$
2. $\forall a \in H \ a^{-1} \in H;$
3. $1 \in H$ (можно заменить на $H \neq \emptyset$)

Обозначается $H \leq G$.

Утверждение. Подгруппа H группы G является группой относительно бинарной операции группы G .

Примеры.

1. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ ($\mathbb{N} \not\leq \mathbb{Z}$, т.к. не группа);
2. $GL_n(F) \geq SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid \det A = 1\}$ - унимодулярная группа.
3. $GL_n(F) \geq O_n(F) \geq SO_n(F)$ ($O_n(F)$ - ортогональная группа, $SO_n(F)$ - специальная ортогональная группа);
4. $GL_n(F) \geq$ группа строго треугольных матриц.

Определение. Любая подгруппа группы $S(\Omega)$ называется группой преобразований множества Ω .

Примеры.

1. $GL(V)$ ($\leq S(V)$) - группа всех невырожденных линейных операторов векторного пространства V ;
2. $Aff(\mathbb{A})$ - группа всех невырожденных аффинных преобразований аффинного пространства \mathbb{A} ;

3. \mathcal{E}^2 - аффинно-евклидово двумерное пространство.
 $\text{Isom } \mathcal{E}^2$ - группа изометрий (движений) на \mathcal{E}^2 .
 $\text{Isom } \mathcal{E}^2 \geq O_2 \geq SO_2$, где O_2 - группа движений, сохраняющих точку O , SO_2 - группа поворотов вокруг точки O .
4. $T \subseteq \mathcal{E}^2$ - некоторая фигура.
 $\text{Sym } T = \{f \in \text{Isom } \mathcal{E}^2 \mid f(T) = T\}$ - группа симметрий фигуры T .
 - Если T - окружность с центром в точке O , то $\text{Sym } T = O_2$;
 - Если T - правильный n -угольник с центром в точке O , то $\text{Sym } T = D_n$ - группа Диэдра.
 $|D_n| = 2n$, т.к. n поворотов и n симметрий.

Определение. Пусть $(G_1, *, e_1), (G_2, \circ, e_2)$ - группы. Отображение $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ - изоморфизм, если

1. φ - биекция;
2. $\forall a, b \in G_1 \quad \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Если между G_1 и G_2 существует изоморфизм, то G_1 и G_2 называются изоморфными. Обозначается $G_1 \simeq G_2$.

Пример. $D_3 \simeq S_3$.

Доказательство. D_3 - группа движений, переводящая равносторонний треугольник в себя. Если пронумеровать вершины изначального треугольника, то каждый элемент группы D_3 будет соответствовать подстановке, переводящей старый порядок вершин в новый. Определение изоморфизма проверяется очевидно. \square

Утверждение. Изоморфность групп - отношение эквивалентности на множестве групп.

Утверждение (Свойства изоморфизмов).

1. $\varphi(e_1) = e_2$;
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$;
3. $G_1 \simeq G_2 \implies |G_1| = |G_2|$.

Замечание. Обратное утверждение неверно (например, $S_3 \not\simeq \mathbb{Z}_6$).

Пример. $SO_2 \simeq (U, \cdot)$, где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Определение. Пусть (G, \cdot, e) - группа, $k \in \mathbb{Z}, g \in G$.
Мультипликативный термин - элемент g в степени k :

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \cdot \dots \cdot g}_k, & k > 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot \dots \cdot g^{-1}}_{-k}, & k < 0 \\ e, & k = 0 \end{cases}$$

Определение. Пусть $(G, +, e)$ - группа, $k \in \mathbb{Z}, g \in G$.

Аддитивный термин - кратное элемента g :

$$kg = \begin{cases} \underbrace{g + g + \dots + g}_k, & k > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \dots + (-g)}_{-k}, & k < 0 \\ e, & k = 0 \end{cases}$$

Утверждение (Свойства $(k, m \in \mathbb{Z}, g \in G)$).

$$1. \ g^k \cdot g^m = g^{k+m};$$

$$2. \ (g^k)^m = g^{km};$$

$$3. \ (g^k)^{-1} = g^{-k}.$$

Утверждение. Множество всех элементов g^k , где $k \in \mathbb{Z}, g \in G$, образует подгруппу в G . Обозначается $\langle g \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, \dots\}$.

Определение. $\langle g \rangle$ - циклическая подгруппа, порождённая элементом g .

Примеры.

$$1. \ G = \mathbb{Z} : \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z} - \text{чётные целые числа};$$

$$2. \ G = \mathbb{Z}_6 : \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\};$$

$$3. \ G = \mathbb{C} : \langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$$

Пусть (G, \cdot, e) - группа, $g \in G$. Если $\forall k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m \implies g^k \neq g^m$, то $\langle g \rangle$ - бесконечная (элемент g имеет бесконечный порядок).

Если $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m, g^k = g^m \implies g^{k-m} = e \implies$ существует наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $g^n = e$ (элемент g имеет порядок n)

Определение. Порядком элемента $g \in G$ называется наименьшее натуральное число n такое, что $g^n = e$, если такое существует. Иначе говорят, что элемент g имеет бесконечный порядок. Обозначается $\text{ord } g$.

Примеры.

1. $G = \mathbb{Z} : \text{ord } 2 = \infty;$
2. $G = \mathbb{Z}_{12} : \text{ord } 2 = 6;$
3. $G = \mathbb{C}^* : \text{ord } 2 = \infty$
(\mathbb{C}^* - мультипликативная группа поля, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ относительно умножения).

Утверждение 1 (Свойства элементов конечного порядка).

1. $g^m = e \iff \text{ord } g \mid m;$
2. $g^m = g^l \iff m \equiv l \pmod{\text{ord } g}$

Доказательство.

1. Разделим m на $n = \text{ord } g$ с остатком: $m = nq + r$, где $0 \leq r < n$. Тогда:

$$e = g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r \implies r = 0$$

так как $r < n$, где n - минимальное натуральное число такое, что $g^n = 0$.

2. Следует из 1.

□

Следствие. $\text{ord } g = |\langle g \rangle|$

Доказательство. Если $\text{ord } g = \infty : \forall k \neq l, g^k \neq g^l \implies$ подгруппа $\langle g \rangle = \{e, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, \dots\}$ бесконечна.

Если $\text{ord } g = n : \langle g \rangle = \{e, g^1, \dots, g^{n-1}\}$ - все эти элементы различны из пункта 2 утверждения, а других нет по определению порядка. □

Примеры.

1. $i \in \mathbb{C}^*$ - $\text{ord } i = 4$;

2. $\sigma \in S_n$:

Если $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ - цикл длины k , то $\text{ord } \sigma = k$.

Так как любая подстановка раскладывается в произведение независимых циклов и независимые циклы коммутируют, если $\sigma = \tau_1 \dots \tau_n$, где τ_i - независимые циклы, то верно: $\text{ord } \sigma = \text{НОК } \{|\tau_1|, \dots, |\tau_n|\}$.

Например, $\sigma = (23)(145) \implies \text{ord } \sigma = 6$.

Утверждение 2. Пусть $n = \text{ord } g$. Тогда $\text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$.

Доказательство. Пусть $\text{ord } g^k = m$. Из утверждения 1: $g^{mk} = e \iff n|mk$, откуда $\frac{n}{\text{НОД}(n,k)}|m$, т.е. $m \geq \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$. Очевидно, что при $m = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ $n|mk$. \square

Определение. Множество $S \subseteq G$ называется порождающим множеством для группы G , если $\forall g \in G \exists s_1, \dots, s_k \in S : g = s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ (s_i не обязательно различны).

При этом говорят, что G порождается множеством S .

Если \exists конечное множество S такое, что S порождает G , то G называется конечно порождённой, и бесконечно порождённой иначе.

Обозначается $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} | \varepsilon_i = \pm 1\}$ - группа, порождённая S .

Примеры.

1. $S_n = \langle$ все транспозиции \rangle ;

2. $GL_n(F) = \langle$ все элементарные матрицы \rangle

3. $Q_8 = \langle i, j \rangle$;

4. $D_n = \langle \alpha, s \rangle$, где α - поворот на $\frac{2\pi}{n}$, а s - любая из симметрий.

5. Группа Клейна: $H = \{\text{id}, a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)\} \leq S_4$

Это группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом: a, c - симметрии относительно средних линий, b - поворот на π вокруг центра.

Таблица Кэли для группы Клейна:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Отсюда $\{e, a, b, c\} = \langle a, b \rangle$.

6. \mathbb{Q} - бесконечно порождённая.

1.2 Циклические группы

Определение. Группа G называется циклической, если G порождается одним элементом, т.е. $\exists g \in G : \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$. Элемент g также называется образующим элементом группы G .

Примеры.

1. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle, \mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle;$

2. U_n - множество всех комплексных корней степени n из 1.

U_n - группа относительно умножения, причём $U_n = \langle \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \rangle$.

Утверждение 3. Если $G = \langle g \rangle$, то $|G| = \text{ord } g$.

Доказательство. Очевидно из определения порождающего множества. \square

Замечание. Для групп конечного порядка, очевидно, выполняется и обратное утверждение: если $\text{ord } g = |G| < \infty$, то $G = \langle g \rangle$.

Далее циклическую группу порядка n будем обозначать $\langle g \rangle_n$.

Утверждение 4. Пусть $G = \langle g \rangle_n$. Тогда $G = \langle g^k \rangle \iff \text{НОД}(k, n) = 1$.

Доказательство. Из утверждения 3 $|G| = \text{ord } g$. Тогда:

$$G = \langle g^k \rangle \iff \text{ord } g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n, k)} = n \iff \text{НОД}(n, k) = 1$$

\square

Теорема 1 (Классификация циклических групп).

1. Если циклическая группа G бесконечна, то $G \simeq \mathbb{Z}$;

2. Если циклическая группа G конечна и имеет порядок n , то $G \simeq \mathbb{Z}_n$.

Доказательство.

1. Пусть $\text{ord } g = \infty, \forall h \in G \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$

Рассмотрим отображение $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ такого вида: $\varphi : g^k \mapsto k$. Очевидно, что φ - сюръекция (в $k \in \mathbb{Z}$ перешёл $g^k \in G$).

$\varphi(g^k) = \varphi(g^m) \implies k = m \implies g^k = g^m$ - отсюда φ - инъекция.

Проверим сохранение операции:

$$\varphi(g^k \cdot g^m) = \varphi(g^{k+m}) = k + m = \varphi(g^k) + \varphi(g^m)$$

Отсюда φ - изоморфизм.

2. Пусть $\text{ord } g = n$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_n \rightarrow G$ такого вида: $\varphi : k \mapsto g^k$. Очевидно, что φ - сюръекция (в $g^k \in G$ перешёл $k \in \mathbb{Z}_n$).
 $k \equiv m \pmod{n} \iff g^k = g^m$ - отсюда φ - инъекция.

Сохранение операции - аналогично пункту 1.

Отсюда φ - изоморфизм.

□

Следствие. Если G_1, G_2 - циклические группы, то $G_1 \simeq G_2 \iff |G_1| = |G_2|$.

Доказательство.

\implies : верно всегда;

\impliedby : из теоремы: если G_1 бесконечна, то $G_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq G_2$, иначе $G_1 \simeq \mathbb{Z}_n \simeq G_2$, где $n = |G_1| = |G_2|$. □

Теорема 2.

1. Любая подгруппа циклической группы является циклической.
2. Подгруппы циклической группы G порядка n находятся во взаимно однозначном соответствии с делителями n , т.е.

$$\forall H \leq G \quad |H| \mid n \quad \text{и} \quad \forall d \mid n \quad \exists! \quad H \leq G : |H| = d$$

3. Подгруппы группы \mathbb{Z} исчерпываются группами $k\mathbb{Z} = \langle k \rangle$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство.

1. Пусть $G = \langle g \rangle, H \leq G$. Если $H = \{e\}$, то $H = \langle e \rangle$.

При $H \neq \{e\} : \forall h \in H \quad \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$. Так как $g^k \in H \implies g^{-k} \in H$ и в H есть элемент, отличный от e , \exists наименьшее $k \in \mathbb{N} : g^k \in H$.

Докажем, что $H = \langle g^k \rangle$. Рассмотрим произвольный $g^m \in H$. Разделим m на k с остатком: $m = kq + r, 0 \leq r < k$. Тогда:

$$g^m = (g^k)^q \cdot g^r \implies g^r = (g^k)^{-q} \cdot g^m$$

то есть $g^r \in H$, а в силу того, что k - наименьшее натуральное число такое, что $g^k \in H$, имеем $r = 0$. Значит, $g^m = (g^k)^q$, а отсюда $H = \langle g^k \rangle$.

$$2. G = \langle g \rangle_n, H \leq G \xrightarrow{1} H = \langle g^k \rangle.$$

Так как $g^n = e \in H$, то в силу рассуждений пункта 1 при $m = n$ получаем $k|n \Rightarrow n = kq$.

Отсюда $H = \{e, g^k, g^{2k}, \dots, g^{(q-1)k}\} \Rightarrow |H| = q$, где $q|n$.

Обратно, $\forall d|n \exists! H = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$ (в силу описания выше других подгрупп такого порядка нет).

$$3. \text{ Из пункта 1 в аддитивной форме получаем, что } H \leq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \Rightarrow H = \langle k \cdot 1 \rangle$$

□

Следствие. В циклической группе простого порядка существуют ровно две подгруппы - тривиальная и сама группа.

Примеры.

$$1. H \leq \mathbb{Z}_5 \Rightarrow H = \{0\}, H = \mathbb{Z}_5;$$

$$2. H \leq \mathbb{Z}_6 \Rightarrow H = \{0\}, H = \langle 2 \rangle, H = \langle 3 \rangle, H = \mathbb{Z}_6.$$

1.3 Смежные классы

Определение. Пусть (G, \cdot, e) - произвольная группа, $H \leq G, g \in G$.

Рассмотрим множества:

$gH = \{gh | h \in H\}$ - левый смежный класс G по H с представителем g

$Hg = \{hg | h \in H\}$ - правый смежный класс G по H с представителем g

Утверждение (Свойства смежных классов).

$$1. \forall a \in G a \in aH;$$

2. если $a \in bH$, то $bH = aH$; в частности, любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

$$3. aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H;$$

(Верны аналогичные утверждения для правых смежных классов)

Доказательство.

1. Очевидно;

$$2. a \in bH \Rightarrow \exists h \in H : a = bh \Rightarrow \forall \tilde{h} \in H a\tilde{h} = b\tilde{h} \in bH \Rightarrow aH \subseteq bH.$$

Аналогично $bH \subseteq aH \Rightarrow aH = bH$.

3. \Rightarrow : $aH = bH \Rightarrow a \in bH (a \in aH) \Rightarrow \exists h \in H : a = bh \Rightarrow b^{-1}a = h \in H$
 \Leftarrow : $b^{-1}a = h \in H \Rightarrow a = bh \Rightarrow aH = bH$ по пункту 2.

□

Утверждение. Отношение $a \equiv b \pmod{H} \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ является отношением эквивалентности, причём классы эквивалентности совпадают с левыми смежными классами (аналогично $ab^{-1} \in H$ для правых).

Доказательство.

- Рефлексивность: $a^{-1}a = e \in H \Rightarrow a \equiv a \pmod{H}$;
- Симметричность: $a \equiv b \pmod{H} \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv a \pmod{H}$;
- Транзитивность: $a \equiv b, b \equiv c \pmod{H} \Rightarrow c^{-1}b, b^{-1}a \in H \Rightarrow c^{-1}b \cdot b^{-1}a = c^{-1}a \in H \Rightarrow a \equiv c \pmod{H}$.

Совпадение классов эквивалентности с левыми смежными классами следует из пункта 3 предыдущего утверждения. □

Утверждение. Если G - абелева, то $\forall a \in G : aH = Ha$.

(В общем случае данное утверждение неверно).

Доказательство. $\forall a \in G : \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} \Rightarrow aH = Ha$. □

Примеры.

1. $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$ ($H = \{id, (12)\}$), $g = (13)$.
 $(13)(12) = (123)$; $(12)(13) = (132)$.
Тогда $\{(13), (123)\} = gH \neq Hg = \{(13), (132)\}$.
2. $H = 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Смежные классы - $3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}$.
3. $H = \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$. Смежные классы - $a + bi + \mathbb{R} = bi + \mathbb{R}$.

Утверждение. Множество $\{aH : a \in G\}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\{Ha : a \in G\}$.

Доказательство. $gH \leftrightarrow Hg^{-1} : x = gh \in gH \leftrightarrow x^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}$. □

Следствие. $|\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$

Определение. Мощность множества левых смежных классов группы G по подгруппе H называется индексом H в G . Обозначение: $|G : H|$

Пример. $|\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}| = 3$, т.к. смежные классы - $\{3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}\}$.

Теорема. (*Теорема Лагранжа*)

Пусть G - конечная группа, $H \leq G$. Тогда $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Доказательство. Так как $|G| < \infty$, то $|H| < \infty$, т.е. $H = \{h_1, \dots, h_k\}$.

$\forall g \in G, gH = \{gh_1, \dots, gh_k\}$, причем $gh_i = gh_j \Rightarrow h_i = h_j \Rightarrow |gH| = |H|$.

Отсюда, если $|G : H| = n$:

$$G = \bigsqcup_{i=1}^n a_i H \implies |G| = \sum_{i=1}^n |a_i H| = |G : H| \cdot |H|$$

□

Следствие 1. Если G - конечная группа, $H \leq G$, то $|H| \mid |G|$.
(Обратное утверждение неверно).

Упражнение. Пусть $G = A_4$ (группа чётных перестановок).

$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. Докажем, что в A_4 нет подгруппы порядка 6.

Предположим, что $H \leq A_4$ и $|H| = 6$. A_4 состоит из элемента id , 3 элементов вида $(ab)(cd)$ и восьми элементов вида (abc) . Значит, H содержит хотя бы один элемент вида (abc) (с точностью до перенумерования - (123)). Тогда H содержит и $(123)^{-1} = (132)$. Также знаем, что группа чётного порядка содержит элемент порядка 2 (иначе в группе все элементы, кроме e , разбиваются на пары обратных, и элементов нечётное число), поэтому H содержит $\sigma = (**)(**)$.

Рассмотрим $\omega = \sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ (это равенство легко проверить, подставив в него $\sigma(1), \dots, \sigma(4)$). Очевидно, что это цикл длины 3, не оставляющий на месте 4 (т.к. σ не оставляет на месте 4). Значит, ω и ω^{-1} принадлежат H и не совпадают с предыдущими элементами (и друг с другом), т.е.

$$H = \{id, (123), (132), \sigma, \omega, \omega^{-1}\}$$

Осталось перебрать возможные значения σ :

- $\sigma = (12)(34) \implies (123)(12)(34)(132) = (14)(23) \notin H$;
- $\sigma = (13)(24) \implies (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \notin H$;
- $\sigma = (14)(23) \implies (123)(14)(23)(132) = (13)(24) \notin H$;

Отсюда таких H не существует.

Следствие 2. Если G - конечная группа, то $\forall g \in G : \text{ord } g \mid |G|$

Доказательство. $\text{ord } g = |\langle g \rangle| \mid |G|$. □

Следствие 3. Если G - конечная группа порядка n , то $\forall g \in G : g^n = e$ в G .

Доказательство. По следствию 2: $n = \text{ord } g \cdot k \Rightarrow g^n = g^{(\text{ord } g) \cdot k} = e^k = e$. □

Пример. Пусть $G = \mathbb{Z}_p^*$, p - простое, $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$. По следствию 3:

$\forall a \in \mathbb{Z}_p^* : a^{p-1} = 1$ в \mathbb{Z}_p^* , отсюда $\forall a \in \mathbb{Z}, p \nmid a : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ - малая теорема Ферма.

Следствие 4. Любая группа G простого порядка p является циклической.

Доказательство. $\forall a \in G, a \neq e : \text{ord } a \neq 1, \text{ord } a \mid |G| = p \Rightarrow \text{ord } a = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$. □

Упражнение. Доказать, что с точностью до изоморфизма существует ровно две группы порядка 4 - \mathbb{Z}_4 и V_4 .

Доказательство. Пусть G - группа порядка 4. Заметим, что по следствию 2 порядок неединичного элемента в G может быть равен либо 2, либо 4. Если в G есть элемент порядка 4, то G циклическая, а тогда по теореме о классификации циклических групп $G \simeq \mathbb{Z}_4$.

Пусть $G = \{e, a, b, c\}$, $\text{ord } a = \text{ord } b = \text{ord } c = 2$. Посмотрим, чему может быть равно ab :

- $ab = e \Rightarrow aab = a \Rightarrow b = a$ - противоречие;
- $ab = a \Rightarrow aab = aa \Rightarrow b = e$ - противоречие;
- $ab = b \Rightarrow abb = bb \Rightarrow a = e$ - противоречие.

Отсюда $ab = c$ - аналогично произведение любых двух различных неединичных элементов равно третьему. Отсюда таблица Кэли для G имеет вид

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

откуда видно, что $G \simeq V_4$. □

Упражнение. Доказать, что если в группе G все неединичные элементы имеют порядок 2, то G - абелева.

Доказательство. $\text{ord } a = 2 \implies a = a^{-1} \implies \forall a, b \in G : ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$. \square

Пример. $H = \langle (12) \rangle \leq S_3$, $g = (13) \Rightarrow gH \neq Hg$

Определение. Подгруппа H группы G называется нормальной, если

$$\begin{aligned} \forall g \in G : gH = Hg &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} = H \iff \\ &\iff \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H \iff \forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H \end{aligned}$$

Обозначение: $H \trianglelefteq G$.

Эквивалентность определений:

- 1 \iff 2 - очевидно;
- 2 \iff 3:
 $\iff: gHg^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$ - из условия на всевозможные g получаем равенство;
 \implies - очевидно;
- 3 \iff 4 - из определения смежного класса.

\square

Примеры.

1. $A_n \trianglelefteq S_n$, так как $\forall \sigma \in S_n, \forall \tau \in A_n : \sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$.
2. $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$, так как $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall B \in SL_n(\mathbb{R}) : \det(ABA^{-1}) = \det B = 1 \Rightarrow ABA^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$.

Утверждение. В абелевой группе любая подгруппа является нормальной.

Упражнение. Докажите, что если $|G : H| = 2$, то $H \trianglelefteq G$ для произвольной группы G и произвольной подгруппы $H \leq G$.

Доказательство. Если $|G : H| = 2$, то G разбивается на два непересекающихся левых (правых) смежных классов по H . Очевидно, что один из этих классов в обоих случаях - сама подгруппа H . Тогда $\forall g \in G \setminus H$ группа G разбивается на левые смежные классы H и gH , а также на правые смежные классы H и Hg , откуда $gH = Hg$. Также очевидно, что $\forall h \in H : hH = H = Hh$. Значит, $\forall g \in G : gH = Hg \implies H \trianglelefteq G$. \square

1.4 Факторгруппа

Утверждение. Пусть G - группа, $H \trianglelefteq G$. Тогда множество всех смежных классов G по H : $G/H = \{eH, aH, \dots\}$ образует группу относительно операции $aH \cdot bH = abH$.

Доказательство.

1. Проверим корректность операции, т.е. $\begin{cases} aH = \tilde{a}H \\ bH = \tilde{b}H \end{cases} \implies abH = \tilde{a}\tilde{b}H$.

Действительно, если $\begin{cases} a = \tilde{a}h_a \\ b = \tilde{b}h_b \end{cases}$ из равенства смежных классов, то:

$$\forall x \in abH \implies \exists h \in H : x = abh = \tilde{a}h_a \tilde{b}h_b h = \tilde{a}\tilde{b}h'h_b h \in \tilde{a}\tilde{b}H$$

$$(H \trianglelefteq G \implies Hb = bH \implies \exists h' \in H : h_a \tilde{b} = \tilde{b}h')$$

2. Проверим, что это группа:

- Ассоциативность:

$$aH(bH \cdot cH) = aH(bcH) = a(bc)H = (ab)cH = (abH)cH = (aH \cdot bH)cH$$

- Нейтральный элемент:

$$eH = H : aH \cdot eH = aeH = aH = eaH = eH \cdot aH$$

- Обратный элемент:

$$\forall aH \exists a^{-1}H : aH \cdot a^{-1}H = eH = a^{-1}H \cdot aH$$

□

Определение. Группа G/H называется факторгруппой G по H .

Замечание. Если $H \not\trianglelefteq G$, то операция $aH \cdot bH = abH$ некорректна:

$$\langle(12)\rangle \leq S_3 : (13)H = (132)H, (23)H = (123)H;$$

$$(13)(23)H = (132)H \neq H = (123)(123)H$$

Примеры.

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$;
2. $A_n \trianglelefteq S_n, S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$ (по чётности);
3. $\mathbb{R} \trianglelefteq \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ ($bi + \mathbb{R} \mapsto b$).

1.5 Гомоморфизмы групп

Определение. Пусть $(G, \cdot, e), (\tilde{G}, \cdot, \tilde{e})$ - группы. Отображение $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ называется гомоморфизмом групп G и \tilde{G} , если $\forall a, b \in G \quad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Замечание. В частности, изоморфизм - биективный гомоморфизм.

Утверждение (Свойства гомоморфизмов).

1. $\varphi(e) = \tilde{e}$;
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Определение. Множество $\text{Im } \varphi = \{b \in \tilde{G} \mid \exists a \in G : \varphi(a) = b\}$ - образ гомоморфизма. Множество $\text{Ker } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = \tilde{e}\}$ - ядро гомоморфизма.

Утверждение 1.

1. $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$;
2. $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$.

Доказательство.

1. $\text{Im } \varphi \subseteq \tilde{G}$

- $x, y \in \text{Im } \varphi \Rightarrow \exists a, b \in G : x = \varphi(a), y = \varphi(b) \Rightarrow xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \text{Im } \varphi$;
- $\tilde{e} = \varphi(e) \in \text{Im } \varphi$;
- $\forall x \in \text{Im } \varphi \exists a \in G : \varphi(a) = x \Rightarrow x^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \text{Im } \varphi$

Отсюда $\text{Im } \varphi \leq \tilde{G}$.

2. $\text{Ker } \varphi \subseteq G$

- $\forall a, b \in \text{Ker } \varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \tilde{e} \Rightarrow ab \in \text{Ker } \varphi$;
- $\tilde{e} = \varphi(e) \Rightarrow e \in \text{Ker } \varphi$;
- $\forall a \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = \tilde{e}^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow a^{-1} \in \text{Ker } \varphi$

Отсюда $\text{Ker } \varphi \leq G$.

$$\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow ghg^{-1} \in \text{Ker } \varphi \Rightarrow \text{Ker } \varphi \trianglelefteq G.$$

□

Утверждение 2. $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$.

В частности, φ инъективно $\iff \text{Ker } \varphi = \{e\}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) &\iff \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \tilde{e} \iff \varphi(ab^{-1}) = \tilde{e} \iff \\ ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi &\iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi \end{aligned}$$

□

Пример. $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^* : \varphi(A) = \det A$.

$\text{Ker } \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^* \implies R^* \simeq GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$.

Теорема (О гомоморфизме). Пусть G, \tilde{G} - группы, $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ - гомоморфизм. Тогда $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

Доказательство. Для начала заметим, что $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$, поэтому факторгруппа $G/\text{Ker } \varphi$ определена.

Рассмотрим $\psi : g\text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(g)$:

- Корректность:

По утверждению 2: $g_1\text{Ker } \varphi = g_2\text{Ker } \varphi \implies \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$;

- Биективность:

Сюръективность: $\forall b \in \text{Im } \varphi \exists a \in G : \varphi(a) = b \implies \psi(a\text{Ker } \varphi) = b$;

Инъективность: по утверждению 2: $\psi(a\text{Ker } \varphi) = \psi(b\text{Ker } \varphi) \implies \varphi(a) = \varphi(b) \implies a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$;

- Сохранение операции:

$$\begin{aligned} \psi((g_1\text{Ker } \varphi)(g_2\text{Ker } \varphi)) &= \psi(g_1g_2\text{Ker } \varphi) = \varphi(g_1g_2) = \\ &= \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1\text{Ker } \varphi)\psi(g_2\text{Ker } \varphi) \end{aligned}$$

Отсюда $\psi : G/\text{Ker } \varphi \rightarrow \text{Im } \varphi$ - изоморфизм.

□

Пример. Пусть $G = S_n, \tilde{G} = \mathbb{R}^*, \varphi(\sigma) = \text{sgn } \sigma$.

Тогда из теоремы о гомоморфизме:

$$\text{Im } \varphi = \{\pm 1\}, \text{Ker } \varphi = A_n \implies S_n/A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Следствие 1. Гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ - изоморфизм $\iff \begin{cases} \text{Ker } \varphi = \{e\} \\ \text{Im } \varphi = \tilde{G} \end{cases}$

Доказательство.

\implies - очевидно из биективности;

\impliedby - изоморфизм из теоремы совпадёт с φ . \square

Следствие 2. Если $|G| < \infty$, то $|G| = |\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Im } \varphi|$.

Доказательство. $|G| = |G/\text{Ker } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi| = |\text{Im } \varphi| \cdot |\text{Ker } \varphi|$. \square

Утверждение. Пусть G - группа, $H \trianglelefteq G$. Тогда \exists такая группа \tilde{G} , что \exists сюръективный гомоморфизм $\pi : G \rightarrow \tilde{G}$, причём $\text{Ker } \pi = H$.

Доказательство. Подходят $\tilde{G} = G/H$, $\pi : g \mapsto gH$. \square

Определение. Приведённый выше гомоморфизм $\pi : G \rightarrow G/H$ называется естественным (натуральным) гомоморфизмом из G в G/H .

Определение. Эпиморфизм - сюръективный гомоморфизм.

Утверждение. Пусть $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ - произвольный эпиморфизм с ядром H . Тогда \exists изоморфизм $\psi : G/H \rightarrow \tilde{G}$ такой, что $\varphi = \psi \circ \pi$, где π - натуральный гомоморфизм из G в G/H .

Доказательство. По теореме о гомоморфизме $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

Так как φ - сюръекция, $\text{Im } \varphi = \tilde{G}$, также по условию $\text{Ker } \varphi = H$. Тогда $\psi : G/H \rightarrow \tilde{G}$ - изоморфизм, заданный в доказательстве теоремы о гомоморфизме: $\psi : gH \mapsto \varphi(g)$.

Взяв этот изоморфизм, получим $\varphi = \psi \circ \pi$ (так как $g \xrightarrow{\pi} gH \xrightarrow{\psi} \varphi(g)$). \square

2 Свободные группы

Определение. Тривиальные (групповые) соотношения - соотношения, которые выводятся из аксиом группы (и, соответственно, есть в любой группе).

Построим группу, в которой нет других соотношений.

Определение. Пусть A - множество символов (букв), A^{-1} - множество символов (букв) a^{-1} , где $a \in A$.

Условия на эти множества:

$$1. \forall a^{-1} \in A^{-1} \Rightarrow a^{-1} \notin A;$$
$$\forall a \in A \Rightarrow a \notin A^{-1};$$

$$2. (a^{-1})^{-1} = a;$$

Буквы a, a^{-1} назовём взаимно обратными.

Множество $A^{\pm 1} = A \sqcup A^{-1}$ называется алфавитом.

Слово в алфавите $A^{\pm 1}$ - конечная последовательность букв $X = x_1 \dots x_k$, где $x_i \in A^{\pm 1}$.

Длина слова X (обозначается $|X|$) - количество букв в X .

Пример. $A = \{a, b\} : X = abaab^{-1} \Rightarrow |X| = 5$.

Определение. Слово $X = x_1 \dots x_k$ - сократимое, если $\exists i \in \overline{1, \dots, k-1} : x_i = x_{i+1}^{-1}$. Сокращением взаимно обратных букв назовём вычёркивание пары x_i, x_{i+1} из X (получим слово длины $|X| - 2$).

За конечное число сокращений получим слово \tilde{X} , не являющееся сократимым - такое \tilde{X} называется результатом полного сокращения слова X .

Определение. Рассмотрим множество $F(A)$ всех несократимых слов в $A^{\pm 1}$.

Введём бинарную операцию на $F(A)$: пусть $X = x_1 \dots x_k, Y = y_1 \dots y_m$.

Если $x_k \neq y_1^{-1}$, то XY - конкатенация (приписывание) X и Y :

$$XY = x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m, |XY| = k + m.$$

Если $x_k = y_1^{-1}$, то XY - результат полного сокращения слова $x_1 \dots x_k y_1 \dots y_m$.

Пример. $(abcda^{-1}b)(b^{-1}ad^{-1}aab) = abcaab$.

Определение. Если $|X| = 0$, то X называется пустым словом (обозначим λ). Пустое слово по определению несократимо и лежит в $F(A)$.

Теорема. $F(A)$ с приведённой выше бинарной операцией - группа.

Доказательство.

1. Ассоциативность:

Пусть $X = x_1 \dots x_k, Z = z_1 \dots z_m$.

Случай $|Y| = 0 \implies Y = \lambda$ очевиден ($XZ = XZ$);

Индукция по длине слова Y :

База индукции: $|Y| = 1 \implies Y = a \in A^{\pm 1}$. Индукция по $|X| + |Z|$:

База внутренней индукции:

$|X| + |Z| = 0$ - очевидно ($a = a$);

$|X| + |Z| = 1$ - очевидно (одно из слов X, Z пустое);

Шаг внутренней индукции ($k + m - 2 \rightarrow k + m$) - рассмотрим случаи:

- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(YZ) = x_1 \dots x_k a z_1 \dots z_m = (XY)Z;$

- $a^{-1} = x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(aZ) = X(az_1 \dots z_m) =$
= результат полного сокращения $x_1 \dots x_{k-1} a^{-1} a z_1 \dots z_m =$
= результат полного сокращения $x_1 \dots x_{k-1} z_1 \dots z_m = (Xa)Z;$

- $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} = z_1$ - аналогично предыдущему;

- $a^{-1} = x_k, a^{-1} = z_1$: пусть $X = X'a^{-1}, Z = a^{-1}Z'$. Тогда:

$$X(aZ) = X(a(a^{-1}Z')) = XZ' = (X'a^{-1})Z'$$

$$(Xa)Z = (X'a^{-1}a)Z = X'Z = X'(a^{-1}Z')$$

При этом $|X'| + |Z'| = k + m - 2$, то есть $X'(a^{-1}Z') = (X'a^{-1})Z'$ по предположению внутренней индукции.

Во всех случаях $X(aZ) = (Xa)Z \implies$ база доказана.

Шаг индукции: Пусть $Y = y_1 \dots y_l$. Тогда:

$$\begin{aligned} X(YZ) &= X(y_1 \dots y_l \cdot Z) = X((y_1 \dots y_{l-1} \cdot y_l)Z) \stackrel{1}{=} X((y_1 \dots y_{l-1}) \cdot (y_l Z)) \stackrel{2}{=} \\ &\stackrel{2}{=} (X \cdot y_1 \dots y_{l-1})(y_l Z) \stackrel{3}{=} (X \cdot y_1 \dots y_l)Z = (XY)Z \end{aligned}$$

1, 3 - из утверждения базы индукции; 2 - по предположению индукции.

2. λ - нейтральный элемент;

3. обратный элемент к $x_1 \dots x_k$ - элемент $x_k^{-1} \dots x_1^{-1}$.

□

Определение. Построенная группа $F(A)$ называется свободной группой с базисом A . (A также называется свободной порождающей системой группы).

Любая группа, изоморфная $F(A)$, также называется свободной.

Утверждение. Пусть $H \leq SL_2(\mathbb{Z}) : H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Тогда $H \simeq F(A)$ с базисом $A = \{a, b\}$.

Доказательство. Без доказательства. □

Утверждение. Все базисы свободной группы равномощны.

Доказательство. Без доказательства. □

Определение. Ранг свободной группы - мощность её базиса.

Замечание. Заметим, что в $F(A)$ результат умножения определён однозначно \implies однозначно определён элемент $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, где $x_i \in A^{\pm 1}$.

Тогда если считать слово $x_1 \dots x_k$ результатом умножения $x_1 \cdot \dots \cdot x_k$, то можно опускать знак умножения, и в этом смысле работать и с сократимыми словами.

Пример. $abb^{-1}ba^{-1}a = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a = ab \in F(A)$.

Теорема 1 (Универсальное свойство свободной группы).

Пусть G - группа, $\{g_i \mid i \in I\} \subset G$ - произвольное множество её элементов.

Рассмотрим свободную группу $F(A)$ с базисом $A = \{a_i \mid i \in I\}$.

Тогда отображение $\varphi : a_i \mapsto g_i$ продолжается до гомоморфизма $\varphi : F(A) \rightarrow G$, причём единственным образом.

Доказательство. Пусть $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ - несократимое слово из $F(A)$, где $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_{i_j} \in A$. Зададим $\varphi : F(A) \rightarrow G$ по правилу $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$.

Проверим, что φ - гомоморфизм ($W, \tilde{W} \in F(A)$, $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$, $\tilde{W} = a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}$):

$$\begin{aligned} \varphi(W\tilde{W}) &= \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{j_1}^{\tau_1} \dots a_{j_m}^{\tau_m}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m} = \\ &= (g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}) \cdot (g_{j_1}^{\tau_1} \dots g_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(W)\varphi(\tilde{W}) \end{aligned}$$

Единственность такого гомоморфизма очевидна:

$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varphi(a_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots \varphi(a_{i_k})^{\varepsilon_k} = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k}$ - определено однозначно. □

Пример. (несвободной группы)

$S_3 = \langle (12), (123) \rangle : \forall g \in S_3 \quad g^6 = id$. Попытаемся продолжить до гомоморфизма $S_3 \rightarrow Q_8$ отображение $\varphi : (12) \mapsto i, (123) \mapsto j$:

$-1 = i^2 = \varphi((12))^2 = \varphi((12)^2) = \varphi(id) = 1$ - противоречие.

Следствие 1. Пусть G - группа, $M = \{g_i \mid i \in I\}$ - порождающее множество G , $F(A)$ - свободная группа с базисом $A = \{a_i \mid i \in I\}$.

Тогда $\exists!$ сюръективный гомоморфизм $\varphi : F(A) \rightarrow G$ такой, что $\forall i \in I : \varphi(a_i) = g_i$.

Доказательство. Достаточно показать, что в этом случае гомоморфизм из доказательства теоремы сюръективен - это следует из того, что множество $\{g_i \mid i \in I\}$ порождает группу G (каждый элемент представим как $g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k})$). \square

Следствие 2. Любая группа G изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы по некоторой её нормальной подгруппе.

Доказательство. Пусть $\varphi : F(A) \rightarrow G$ - гомоморфизм из следствия 1.

Так как $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq F(A)$, из теоремы о гомоморфизме $G = \text{Im } \varphi \simeq F(A)/\text{Ker } \varphi$. \square

Определение. Сюръективный гомоморфизм $\varphi : F(A) \rightarrow G$ - из следствия 1 называется копредставлением группы G .

Замечание. Копредставление зависит от выбора порождающего множества M .

2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями

По следствию 2: $G \simeq F(A)/N$, где $N \trianglelefteq F(A)$. Отсюда задание группы G сводится к заданию A и N .

$$N \text{ - нормальная} \implies \forall f \in F(A), \forall h \in N : fhf^{-1} \in N.$$

Определение. Пусть $\mathcal{R} \subseteq F(A)$. Нормальным замыканием множества \mathcal{R} в группе $F(A)$ называется наименьшая (по включению) нормальная подгруппа, содержащая \mathcal{R} . Обозначается $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$

Утверждение.

$$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} = \{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\}$$

Доказательство.

Пусть $\{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\} = H$. Тогда:

$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \trianglelefteq F(A) \implies \forall r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i \in \{\pm 1\} : f_i r_i^{\varepsilon_i} f_i^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies H \subseteq \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$. Осталось показать, что $H \trianglelefteq F(A)$:

$$\begin{aligned} \forall h \in H, g \in F(A) : ghg^{-1} &= g(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) g^{-1} = \\ &= ((gf_1)r_1^{\varepsilon_1}(f_1^{-1}g^{-1})) \dots ((gf_k)r_k^{\varepsilon_k}(f_k^{-1}g^{-1})) = \\ &= ((gf_1)r_1^{\varepsilon_1}(gf_1)^{-1}) \dots ((gf_k)r_k^{\varepsilon_k}(gf_k)^{-1}) \in H \end{aligned}$$

Отсюда минимальная группа, содержащая \mathcal{R} , в точности равна H . \square

Утверждение. Любой нормальной подгруппы $N \trianglelefteq F(A)$ можно задать как $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ для подходящего $\mathcal{R} \subset F(A)$.

Доказательство. Очевидно, подойдёт $\mathcal{R} = N$. □

Элементарные преобразования над словами в $F(A)$:

(под словами в $F(A)$ подразумеваются любые произведения букв, а не только элементы $F(A)$)

- ЭП1: $W = W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$, где $a \in A, \varepsilon = \pm 1$;
- ЭП2: $W = W_1 r^\varepsilon W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$, где $r \in \mathcal{R}, \varepsilon = \pm 1$;
- ЭП1' - обратное к ЭП1;
- ЭП2' - обратное к ЭП2;

Определение. Назовём слова W и \tilde{W} \mathcal{R} -эквивалентными, если от W можно с помощью ЭП перейти к \tilde{W} .

Утверждение. \mathcal{R} -эквивалентность - отношение эквивалентности.

Доказательство.

- Рефлексивность - очевидно;
- Симметричность - следует из обратимости каждого ЭП;
- Транзитивность - очевидно;

□

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны:

1. $W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$;
2. W \mathcal{R} -эквивалентно пустому слову λ ;
3. Если для произвольной группы G с порождающим множеством $M = \{g_i \mid i \in I\}$ (т.е. заданным копредставлением $\varphi : F(A) \rightarrow G$) верно, что $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в G , то $\varphi(W) = 1$ в G .

Доказательство.

- $1 \implies 2 : W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \implies W = (f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \dots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \stackrel{\text{ЭП2}}{\implies} W \sim \tilde{W} = (f_1 f_1^{-1}) \dots (f_k f_k^{-1}) \stackrel{\text{ЭП1}}{\implies} \lambda$;

- $2 \implies 3$ Пусть $\varphi : F(A) \rightarrow G$ взят из условия теоремы. Покажем, что при ЭП образ слова не меняется:

1. $\varphi(W_1 a^\varepsilon a^{-\varepsilon} W_2) = \varphi(W_1) \varphi(a)^\varepsilon \varphi(a)^{-\varepsilon} \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2);$
2. $\varphi(W_1 r^\varepsilon W_2) = \varphi(W_1) \varphi(r)^\varepsilon \varphi(W_2) = \varphi(W_1) \cdot 1^\varepsilon \cdot \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2);$

При ЭП, обратных этим, образ слова аналогично не изменяется.

Тогда если $W \underset{\text{ЭП}}{\sim} \lambda$, то $\varphi(W) = \varphi(\lambda) = 1$.

- $3 \implies 1 : \forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1 \implies r \in \text{Ker } \varphi; \varphi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \varphi.$

Рассмотрим в качестве G группу $F(A)/N$, где $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$, а в качестве $\varphi - \pi$ (естественный гомоморфизм $F(A) \rightarrow F(A)/N$).

$r \in N \implies \pi(r) = 1$. Тогда по условию 3: $\pi(W) = 1 \implies W \in \text{Ker } \varphi = N$.

□

Определение. Если $W \in F(A)$ удовлетворяет любому из условий теоремы 2, то говорят, что соотношение $W = 1$ следует из соотношений $\{r = 1 \mid r \in \mathcal{R}\}$ или является следствием соотношений \mathcal{R} .

Определение. Рассмотрим копредставление произвольной группы G , т.е. $\varphi : F(A) \rightarrow G$, где $A = \{a_i \mid i \in I\}$. Пусть слово $W \in F(A)$ ($W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$) такое, что $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots g_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$ в G .

Тогда говорят о соотношении $W = 1$.

(Для упрощения записи вместо g_i пишут a_i).

Определение. Множество $\mathcal{R} \subset F(A)$ называется определяющим множеством соотношений группы G , если любое соотношение группы G следует из \mathcal{R} .

При этом элементы \mathcal{R} называются определяющими соотношениями G . Обозначается $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$ (данная запись также называется копредставлением G).

Примеры.

1. $\mathbb{Z}_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle; a^{12} = 1$ - следствие;
2. $V_4 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle; (ab)^2 = 1$ - следствие.

Теорема (Теорема Дика).

Пусть G - группа, заданная копредставлением $\langle A \mid R \rangle$, где $A = \{a_i \mid i \in I\}$.

Пусть H - произвольная группа, $\{h_i \mid i \in I\} \subset H$ - произвольное множество её элементов.

Тогда отображение φ на порождающих $\varphi : a_i \mapsto h_i \forall i \in I$ продолжается до

гомоморфизма $\varphi : G \rightarrow H$ тогда и только тогда, когда $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в H .

Доказательство. Если $\varphi : a_i \mapsto h_i$ и φ - гомоморфизм, то должно выполняться $\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = h_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots h_{i_k}^{\varepsilon_k}$. Если это отображение корректно, то очевидно, что оно является искомым гомоморфизмом. Покажем корректность:

Пусть $W = \tilde{W}$ в G . Тогда $\tilde{W}W^{-1} = 1$ в $G \implies \tilde{W}W^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ (так как по определению копредставления соотношение $\tilde{W}^{-1}W = 1$ следует из R).

Отсюда $\tilde{W}W^{-1} \sim \lambda \implies W \sim \tilde{W}W^{-1}W = \tilde{W}$. Из размышлений доказательства перехода 2 \implies 3 теоремы 2 видно, что из условия $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в H следует, что образ не изменяется при ЭП, то есть $\varphi(W) = \varphi(\tilde{W})$, т.е. отображение корректно. \square

3 Прямое произведение групп

3.1 Внешнее прямое произведение

Пусть G_1, \dots, G_k - группы.

$$G = G_1 \times \dots \times G_k = \{(g_1, \dots, g_k) | g_i \in G_i\}.$$

$$(g_1, \dots, g_k) \cdot (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = (g_1 \tilde{g}_1, \dots, g_k \tilde{g}_k)$$

($g_i \tilde{g}_i$ перемножаются по правилу бинарной операции на G_i).

Утверждение. (G, \cdot) - группа.

Доказательство.

1. $(a_1, \dots, a_k)((b_1, \dots, b_k)(c_1, \dots, c_k)) = (a_1(b_1 c_1), \dots, a_k(b_k c_k)) = ((a_1 b_1)c_1, \dots, (a_k b_k)c_k) = ((a_1, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_k))(c_1, \dots, c_k)$
2. Нейтральный элемент - (e_1, \dots, e_k) (e_i - нейтральный в G_i)
3. $(g_1, \dots, g_k)^{-1} = (g_1^{-1}, \dots, g_k^{-1})$

□

Определение. Данная группа (G, \cdot) называется прямым произведением групп G_1, \dots, G_k . Обозначается $G = G_1 \times \dots \times G_k$; G_i называются множителями.

В аддитивной терминологии те же рассуждения определяют прямую сумму $G = G_1 \oplus \dots \oplus G_k$, где G_i - слагаемые.

Примеры.

1. $G_1 = \mathbb{Z}_3, G_2 = S_3, G = G_1 \times G_2$.
 $(1, (12)) \cdot (2, (13)) = (1 + 2, (12)(13)) = (0, (132)).$
2. $D_n(\mathbb{F}) \simeq \underbrace{\mathbb{F}^* \times \dots \times \mathbb{F}^*}_n$ ($D_n(\mathbb{F})$ - группа диагональных матриц порядка n).

Утверждение.

1. Если $(m, n) = 1$, то $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq Z_{nm}$ - циклическая группа;
2. Если $(m, n) \neq 1$, то $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ - не циклическая.

Доказательство.

1. Обозначим за $[a]_s \in \mathbb{Z}_s$ класс вычетов по модулю s , содержащий a .

Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ такое, что $\varphi : [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$. Очевидно, что это гомоморфизм:

$$\varphi([a]_{mn} \cdot [b]_{mn}) = ([ab]_m, [ab]_n) = ([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) = \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})$$

Найдём $\text{Ker } \varphi$:

$$\varphi([a]_{mn}) = ([0]_m, [0]_n) \iff \begin{cases} m \mid a \\ n \mid a \end{cases} \stackrel{(m,n)=1}{\implies} mn \mid a \implies \text{Ker } \varphi = \{[0]_{mn}\}$$

По теореме о гомоморфизме $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_{mn}/\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_{mn} \implies |\text{Im } \varphi| = mn$.

Так как $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$ и $\text{Im } \varphi \leq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, $\text{Im } \varphi = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.

Отсюда φ - биекция (инъекция из $\text{Ker } \varphi = \{e\}$), т.е. φ -изоморфизм.

2. Пусть $(m, n) = d \neq 1$ ($m = dk_1, n = dk_2$). Тогда $\forall g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$:

$$(g_1, g_2)^{dk_1 k_2} = (g_1^{dk_1 k_2}, g_2^{dk_1 k_2}) = (0^{k_2}, 0^{k_1}) = (0, 0)$$

Отсюда $\text{ord } (g_1, g_2) = dk_1 k_2 = \frac{mn}{d} < mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n|$. Значит, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ не является циклической.

□

Следствие. Пусть $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ - разложение на простые множители. Тогда $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$.

Доказательство. Очевидно следует из теоремы. □

Следствие. (Китайская теорема об остатках) Если числа a_1, \dots, a_n попарно взаимно просты, то для любых целых r_1, \dots, r_n ($0 \leq r_i < n$) $\exists! N$ ($0 \leq N < a_1 \cdot \dots \cdot a_n$) такой, что $N \equiv r_i \pmod{a_i}$

Доказательство. Из теоремы следует, что $\mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n} \simeq \mathbb{Z}_a$ ($a = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$). Это означает, что набор остатков $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}_{a_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{a_n}$ изоморфизм из теоремы однозначно переводит в элемент $N \in \mathbb{Z}_a$ такой, что $r_i = [N]_{a_i}$, что и требовалось. □

3.2 Внутреннее прямое произведение

Определение. Пусть G - группа, $H_1, \dots, H_k \leq G$.

G раскладывается в прямое произведение подгрупп H_1, \dots, H_k , если:

1. $\forall g \in G \exists! h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k;$
2. $\forall i \neq j : \forall h_i \in H_i, h_j \in H_j \quad h_i h_j = h_j h_i.$

Обозначается $G = H_1 \times \dots \times H_k$ ($G = H_1 \oplus \dots \oplus H_k$ в аддитивной терминологии).

Замечание. Из определения следует, что $(h_1 \dots h_k)(\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) = (h_1 \tilde{h}_1) \dots (h_k \tilde{h}_k)$.

Определение. Пусть $H, N \leq G$. Обозначим $NH = \{nh | n \in N, h \in H\}$

Утверждение. Пусть $N \trianglelefteq G, H \leq G$. Тогда NH - подгруппа в G , причём $NH = HN$.

Доказательство. Рассмотрим $(n_1 h_1)(n_2 h_2) = \underbrace{n_1(h_1 n_2 h_1^{-1})}_{= \tilde{n}} h_1 h_2 = \tilde{n} \tilde{h} \in NH$.
 $e \in N \cap H \implies e \cdot e = e \in NH$.
 $(nh)^{-1} = h^{-1} n^{-1} = (h^{-1} n^{-1} h) h^{-1} \in NH$.

Отсюда NH - подгруппа. Покажем, что $NH = HN$:

$$\forall nh \in NH : nh = (hh^{-1})nh = h(h^{-1}nh) \in HN \implies NH \subseteq HN$$

$$\forall hn \in HN : hn = hn(h^{-1}h) = (hn h^{-1})h \in NH \implies HN \subseteq NH$$

Отсюда $NH = HN$. □

Лемма 1. Пусть $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{e\}$. Тогда $\forall h \in H, n \in N \quad nh = hn$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $(hn)(nh)^{-1} = hn h^{-1} n^{-1}$:

$$hn h^{-1} n^{-1} = h(nh^{-1} n^{-1}) \in H; \quad hn h^{-1} n^{-1} = (hn h^{-1})n^{-1} \in N$$

Значит, $hn h^{-1} n^{-1} \in H \cap N = \{e\} \implies (hn)(nh)^{-1} = e \implies hn = nh$ □

Теорема 1. Пусть $H_1, H_2 \leq G$. Тогда $G = H_1 \times H_2 \iff \begin{cases} (1) \quad H_1, H_2 \trianglelefteq G \\ (2) \quad H_1 \cap H_2 = \{e\} \\ (3) \quad G = H_1 H_2 \end{cases}$

Доказательство.

\implies : Пусть $G = H_1 \times H_2$.

(3) - очевидно из пункта 1 определения.

(1): $\forall h_1 \in H_1, g \in G : g = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$ ($\tilde{h}_1 \in H_1, \tilde{h}_2 \in H_2$) \implies

$$gh_1g^{-1} = \tilde{h}_1(\tilde{h}_2 h_1 \tilde{h}_2^{-1})\tilde{h}_1^{-1} \stackrel{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_1 h_1 \tilde{h}_1^{-1} \in H_1$$

Отсюда $H_1 \trianglelefteq G$ (аналогично $H_2 \trianglelefteq G$).

(2): Пусть $\exists h \in H_1 \cap H_2$. Тогда $h = he = eh$ - два разложения на произведение

элементов подгрупп. Они совпадают только в случае $h = e$, т.е. $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

\Leftarrow : Пусть даны условия (1) - (3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3): $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 h_2$.

Допустим, что это разложение не единственное, т.е. $h_1 h_2 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$.

Тогда $\tilde{h}_1^{-1} h_1 = \tilde{h}_2 h_2^{-1}$, а так как $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, имеем $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_2$. \square

Теорема 2. Пусть $H_1, \dots, H_k \leq G$.

$$\text{Тогда } G = H_1 \times \dots \times H_k \iff \begin{cases} (1) & H_1, \dots, H_k \trianglelefteq G \\ (2) & \forall i \ H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\} \\ (3) & G = H_1 \dots H_k \end{cases}$$

Доказательство.

\Rightarrow : Пусть $G = H_1 \times \dots \times H_k$.

(3) - очевидно из пункта 1 определения.

(1): $\forall h_i \in H_i, g \in G : g = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k$ ($\tilde{h}_i \in H_i$) \Rightarrow

$$g h_1 g^{-1} = (\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k) h_i (\tilde{h}_k^{-1} \dots \tilde{h}_1^{-1}) \underset{(2 \text{ из опр})}{=} \tilde{h}_i h_i \tilde{h}_i^{-1} \in H_i$$

Отсюда $H_i \trianglelefteq G$.

(2): Пусть $\exists h \in H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle$. Тогда $h = he = eh$ - два разложения на произведение элементов подгрупп. Они совпадают только в случае $h = e$, т.е. $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$.

\Leftarrow : Пусть даны условия (1) - (3).

По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.

Из (3): $\forall g \in G \exists h_i \in H_i : g = h_1 \dots h_k$.

Допустим, что это разложение не единственное, т.е. $h_1 \dots h_k = \tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_k$.

Тогда $\forall i : \tilde{h}_i^{-1} h_i = \prod_{j \neq i} \tilde{h}_j h_j^{-1}$, а так как $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$, имеем $h_i = \tilde{h}_i$. \square

Примеры.

$$1. V_4 = \{e, a, b, c\} = \{e, a\} \times \{e, b\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2;$$

$$2. \mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \times U (z = r \cdot e^{iy}).$$

3. \mathbb{Z} не раскладывается в произведение нетривиальных подгрупп.

Предположим противное, т.е. $\mathbb{Z} = H_1 \times \dots \times H_m$. Подгруппы \mathbb{Z} имеют вид $k\mathbb{Z}$, т.е. $\mathbb{Z} = k_1\mathbb{Z} \times \dots \times k_m\mathbb{Z}, k_i \neq 0$. Но тогда $k_1 k_2 \in H_1 \cap H_2$ и $k_1 k_2 \neq 0$, что противоречит теореме 2.

3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением

Теорема 3.

1. Если группа G раскладывается в прямое произведение подгрупп H_1, \dots, H_k , то G изоморфна прямому произведению групп G_1, \dots, G_k , где $\forall i G_i \simeq H_i$;
2. Если группа G изоморфна прямому произведению групп G_1, \dots, G_k , то $\exists H_i \leq G$ такие, что $G_i \simeq H_i$ и G раскладывается в прямое произведение H_1, \dots, H_k .

Доказательство.

1. Имеем: $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k$.

Рассмотрим отображение $\varphi : G \rightarrow G_1 \times \dots \times G_k$, где $G_i = H_i$, такое, что $\forall g = h_1 \dots h_k \in G \quad \varphi(h_1 \dots h_k) \mapsto (h_1, \dots, h_k)$. Это изоморфизм:

- Биекция - очевидна;
- Гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \varphi((h_1 \dots h_k) \cdot (h'_1 \dots h'_k)) &= \varphi(h_1 h'_1 \dots h_k h'_k) = (h_1 h'_1, \dots, h_k h'_k) = \\ &= (h_1, \dots, h_k) \cdot (h'_1, \dots, h'_k) = \varphi(h_1 \dots h_k) \cdot \varphi(h'_1 \dots h'_k) \end{aligned}$$

2. Имеем: G_1, \dots, G_k - группы, $G = \{(g_1, \dots, g_k) \mid g_i \in G_i\}$.

Тогда $H_i = \{(e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) \mid g_i \in G_i\}$ очевидно является подгруппой G , изоморфной G_i .

Покажем, что $G = H_1 \times \dots \times H_k$:

- $\forall g = (g_1, \dots, g_k) \in G \exists! h_i = (e, \dots, e, g_i, e, \dots, e) : g = h_1 \dots h_k$;
- $\forall i \neq j, h_i = ((e, \dots, e, a_i, e, \dots, e)) \in H_i, h_j = (e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) \in H_j :$

$$h_i h_j = (e, \dots, e, a_i, e, \dots, e, b_j, e, \dots, e) = h_j h_i$$

□

Теорема 4. Пусть $H_i \leq G, G = H_1 \times \dots \times H_k, N_i \trianglelefteq H_i$. Тогда:

1. $N_1 \times \dots \times N_k \trianglelefteq G$;
2. $G/(N_1 \times \dots \times N_k) \simeq (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$.

Доказательство.

1. Очевидно, что $N_1 \times \dots \times N_k = N \leq G$.

Покажем нормальность: $\forall g = h_1 \dots h_k \in G, n = n_1 \dots n_k \in N$

$$gng^{-1} = (h_1 \dots h_k)(n_1 \dots n_k)(h_k^{-1} \dots h_1^{-1}) \underset{(n_i \in H_i)}{\stackrel{\in N_1}{=}} (h_1 n_1 h_1^{-1}) \dots (h_k n_k h_k^{-1}) \in N$$

2. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow (H_1/N_1) \times \dots \times (H_k/N_k)$ такой, что $\varphi : h_1 \dots h_k \mapsto (h_1 N_1, \dots, h_k N_k)$. Это сюръективный гомоморфизм, причём $\text{Ker } \varphi = N_1 \times \dots \times N_k$. Отсюда по теореме о гомоморфизме получаем необходимое утверждение.

□

Следствие. Если $G = H_1 \times H_2$, то $G/H_1 \simeq H_2, G/H_2 \simeq H_1$.

4 Конечнопорождённые абелевы группы

Замечание. В данном разделе используется аддитивная терминология:
 $(A, +)$ - абелева группа, $\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}$:

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_n, & n > 0; \\ 0, & a = 0; \\ \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{|n|}, & n < 0 \end{cases}$$

Свойства. ($\forall a, b \in A, n, m \in \mathbb{Z}$)

1. $(n + m)a = na + ma;$
2. $n(a + b) = na + nb;$
3. $(nm)a = n(ma)$

Доказательство. Непосредственный разбор случаев - знаков m, n . \square

Определение. (Целочисленной) линейной комбинацией элементов $a_1, \dots, a_k \in A$ называется выражение $n_1a_1 + \dots + n_ka_k$ ($n_i \in \mathbb{Z}$).

Если элемент $b \in A$ равен некоторой линейной комбинации $a_1, \dots, a_k \in A$, то говорят, что b выражается через a_1, \dots, a_k .

Определение. Система элементов a_1, \dots, a_k называется линейно зависимой, если $\exists n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, не все равные 0, такие, что $n_1a_1 + \dots + n_ka_k = 0$.

В противном случае система a_1, \dots, a_k называется линейно независимой.

Пример. $A = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$. Система из одного элемента $(1, 1)$ - линейно зависима: $12 \cdot (1, 1) = (0, 0)$

Определение. Пусть A - абелева группа, $a_1, \dots, a_k \in A$.

Будем обозначать $\langle a_1, \dots, a_k \rangle = \{n_1a_1 + \dots + n_ka_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$

(для бесконечного числа a_k - всевозможные конечные линейные комбинации)

Утверждение. $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ - наименьшая подгруппа A , содержащая a_1, \dots, a_k .

Доказательство. Пусть H - наименьшая подгруппа, содержащая a_1, \dots, a_k . Тогда с одной стороны $\langle a_1, \dots, a_k \rangle \subseteq H$ по определению подгруппы, а с другой стороны $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, очевидно, подгруппа в A . Значит, $H = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ \square

Определение. Если $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, то говорят, что A порождается a_1, \dots, a_k . Элементы a_1, \dots, a_k называются порождающими (образующими).

Определение. Если \exists конечное множество элементов $a_1, \dots, a_k \in A$, что $A = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, то A называется конечнопорождённой.

Примеры.

1. \mathbb{Q} - не конечнопорождённая;
2. U (комплексные корни из 1) - не конечнопорождённая;
3. \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n - конечнопорождённые (циклические);
4. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ - конечнопорождённая, не циклическая (примеры систем порождающих - $(1, 0), (0, 1)$ или $(3, 0), (4, 5), (0, 1)$)

Определение. Линейно независимая система порождающих группы A называется базисом (или свободной системой порождающих).

Утверждение. (*не было в лекции*)

a_1, \dots, a_k - базис \iff любой элемент A выражается через a_1, \dots, a_k единственным образом.

Доказательство.

\implies : Из определения базиса любой элемент имеет разложение по базису.

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = a = \alpha'_1 e_1 + \dots + \alpha'_n e_n \implies (\alpha_1 - \alpha'_1) e_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) e_n = 0$$

Отсюда из линейной независимости $\alpha_i = \alpha'_i \forall i$, т.е. разложение единствено.

\impliedby : Любой элемент $a \in A$ имеет разложение по a_1, \dots, a_n - система a_1, \dots, a_n порождает A . Разложение любого элемента единственно $\implies 0$ имеет только тривиальное разложение $\implies a_1, \dots, a_n$ линейно независимы. \square

Пример. $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$ - не имеет базиса: любая система элементов в ней линейно зависима ($12 \cdot a = 0 \forall a \in A$).

Определение. Конечнопорождённая абелева группа, имеющая базис, называется свободной абелевой группой. По определению $A = \{0\}$ - свободная абелева группа.

Пример. $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_n$ - свободная абелева группа;

Базис - $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$. Проверим это:

1. Линейная независимость:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0 \implies (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0) \implies \alpha_i = 0 \ \forall i$$

2. Порождаемость группы:

$$\forall a \in \mathbb{Z}^n : a = (a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Лемма. (*Основная лемма о линейной зависимости для абелевых групп*)

Если абелева группа A обладает базисом из n элементов, то любая система из $m > n$ элементов линейно зависима.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n - базис группы A , $a_1, \dots, a_m \in A$ - произвольные элементы. Тогда из определения базиса:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1n}e_n \longrightarrow (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ a_m = \alpha_{m1}e_1 + \dots + \alpha_{mn}e_n \longrightarrow (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn}) \end{cases}$$

Строки $\bar{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$ можно рассматривать как векторы из пр-ва \mathbb{Q}^n над \mathbb{Q} . Так как $m > n$, по ОЛЛЗ для векторных пространств система $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_m$ линейно зависима, т.е. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{Q}$, не все равные нулю, что $\lambda_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + \lambda_m \bar{\alpha}_m = 0$. Тогда если d - НОК знаменателей ненулевых λ_i , то $(d\lambda_1)\bar{\alpha}_1 + \dots + (d\lambda_m)\bar{\alpha}_m = 0$ - нетривиальная целочисленная линейная комбинация, равная нулю.

Тогда $(d\lambda_1)a_1 + \dots + (d\lambda_m)a_m = 0$, т.е. a_1, \dots, a_m линейно зависимы. \square

Теорема 1. Все базисы свободной абелевой группы A равномощны.

Доказательство. Очевидно следует из ОЛЛЗ для абелевых групп. \square

Определение. Число элементов в базисе свободной абелевой группы A называется рангом группы A . Обозначается $\text{rk } A$. По определению $A = \{0\} \implies \text{rk } A = 0$.

Теорема 2. Все свободные абелевые группы ранга n изоморфны между собой (в частности, изоморфны \mathbb{Z}^n).

Доказательство.

Пусть A - свободная абелева группа, $\text{rk } A = n$, e_1, \dots, e_n - базис. Рассмотрим отображение $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}^n$ такое, что $\forall a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in A \ \varphi(a) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Покажем, что φ - изоморфизм:

1. Биекция - следует из единственности разложения по базису;
2. Гомоморфизм: пусть $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n, b = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$. Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi(a+b) &= \varphi((\alpha_1 + \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)e_n) = ((\alpha_1 + \beta_1), \dots, (\alpha_n + \beta_n)) = \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = \varphi(a) + \varphi(b)\end{aligned}$$

Отсюда $A \simeq \mathbb{Z}^n$.

Если $\text{rk } A = \text{rk } B = n$, то $A \simeq \mathbb{Z}^n \simeq B \implies A \simeq B$. \square

Теорема 3. Любая подгруппа B свободной абелевой группы A ранга n является свободной абелевой, причём $\text{rk } B \leq n$.

Доказательство. Случай $n = 0$ очевиден. Индукция по n :

База: $n = 1 \implies A \simeq \mathbb{Z} \implies A = \langle e \rangle$.

Знаем, что любая подгруппа циклической группы - циклическая.

Пусть $B = \langle ke \rangle, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда:

$$k = 0 \implies B = \{0\} \implies \text{rk } B = 0 < 1 = \text{rk } A$$

$$k \neq 0 \implies B = \langle ke \rangle \simeq \mathbb{Z} \implies \text{rk } B = 1 = \text{rk } A$$

Шаг: пусть e_1, \dots, e_n - базис свободной абелевой группы A .

Рассмотрим $\tilde{A} = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle \leq A$ - свободная абелева ранга $n-1$.

Рассмотрим $\tilde{B} = B \cap \tilde{A}$ - подгруппу B , которая содерится в \tilde{A} (очевидно, что это подгруппа). По предположению индукции \tilde{B} - свободная абелева, причём $\text{rk } \tilde{B} \leq \text{rk } \tilde{A} = n-1$.

Если $B = \tilde{B}$, то теорема доказана.

Иначе рассмотрим гомоморфизм (проекцию на $\langle e_n \rangle$)

$$\pi : A \rightarrow \mathbb{Z} : \forall a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n \in A \quad \pi(a) = \alpha_n \quad (\text{Ker } \pi = \tilde{A}, \text{Im } \pi = \mathbb{Z}).$$

Знаем, что $\pi(B)$ - подгруппа в $\mathbb{Z} \implies \pi(B) = \langle k \rangle$ ($k \neq 0$ из $B \neq \tilde{B}$).

Рассмотрим $b_0 \in B$ такой, что $\pi(b_0) = k$, т.е. $b_0 = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-1} e_{n-1} + k e_n$. Докажем, что если b_1, \dots, b_s - базис \tilde{B} , то b_0, b_1, \dots, b_s - базис B (тогда B - свободная абелева, $\text{rk } B \leq n$)

1. Проверим линейную независимость:

$$\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_s b_s = 0 \implies \pi(\lambda_0 b_0 + \dots + \lambda_s b_s) = 0 \implies \lambda_0 \pi(b_0) + \dots + \lambda_s \pi(b_s) = 0 \implies$$

$$\lambda_0 k = 0 \implies \lambda_0 = 0$$

Линейная комбинация $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_s b_s = 0$ тривиальна, так как b_1, \dots, b_s - базис \tilde{B} . Отсюда b_0, b_1, \dots, b_s линейно независимы.

2. $\langle b_0, b_1, \dots, b_s \rangle \stackrel{?}{=} B$:

Рассмотрим произвольный $b \in B$. $\pi(b) \in \langle k \rangle \implies \pi(b) = tk, t \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\tilde{b} = b - tb_0$. Тогда $\pi(\tilde{b}) = \pi(b) - t\pi(b_0) = tk - tk = 0 \implies \tilde{b} \in \text{Ker } \pi = \tilde{A} \implies \tilde{b} \in \tilde{A} \cap B = \tilde{B} \implies \tilde{b} = t_1 b_1 + \dots + t_s b_s \implies b = tb_0 + t_1 b_1 + \dots + t_s b_s$.

□

4.1 Связь между базисами свободной абелевой группы

Определение. Пусть A - свободная абелева группа, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ - базисы A .

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = c_{11}e_1 + \dots + c_{n1}e_n \\ \vdots \\ \tilde{e}_n = c_{1n}e_1 + \dots + c_{nn}e_n \end{cases} \implies (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Такая $C \in M_n(\mathbb{Z})$ называется матрицей перехода от \mathcal{E} к $\tilde{\mathcal{E}}$.

Утверждение.

Пусть $C \in M_n(\mathbb{Z})$. Тогда C - матрица перехода $\iff \det C = \pm 1$.

Доказательство.

\implies : Пусть C - матрица перехода от \mathcal{E} к $\tilde{\mathcal{E}}$, D - от $\tilde{\mathcal{E}}$ к \mathcal{E} . Тогда:

$$\begin{cases} (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C \\ (e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)D \end{cases} \implies CD = DC = E \implies D = C^{-1}$$

$$\det C \cdot \det D = \det CD = \det E = 1$$

Так как $C, D \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det C, \det D \in \mathbb{Z} \implies \det C = \pm 1$.

\iff : $C \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det C = \pm 1$. Рассмотрим некоторый базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ и докажем, что $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ - базис.

1. Проверим линейную независимость:

Если $\lambda_1 \tilde{e}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{e}_n = 0$, то линейная комбинация столбцов C с теми же λ_i также равна 0. Из $\det C \neq 0$ столбцы линейно независимы, т.е. $\lambda_i = 0 \forall i$.

2. $\langle \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \rangle \stackrel{?}{=} A$:

Так как $\det C = \pm 1$, $\exists D = C^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ (из формулы явного выражения элементов обратной матрицы элементы D целые) $\implies (e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)D$.

$\forall a \in A$ целочисленно выражается через e_1, \dots, e_n , каждый e_i целочисленно выражается через $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n \implies a$ целочисленно выражается через $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$

□

4.2 Элементарные преобразования свободных абелевых групп

Определение. (ЭП свободных абелевых групп)

Пусть A - свободная абелева группа, e_1, \dots, e_n - базис A .

- **ЭП1:** $\tilde{e}_i = e_i + ke_j$, $i \neq j, k \in \mathbb{Z}$; $\tilde{e}_s = e_s$, $s \neq i$;
- **ЭП2:** $\tilde{e}_i = e_j$; $\tilde{e}_j = e_i$; $\tilde{e}_s = e_s$, $s \neq i, j$ ($i \neq j$);
- **ЭП3:** $\tilde{e}_i = -e_i$; $\tilde{e}_s = e_s$, $s \neq i$;

Матрицы перехода при этих ЭП:

ЭП1:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \vdots & & & \\ i & & & \\ & & & \\ j & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda \\ \vdots & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ЭП2:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ \vdots & & & \\ i & & & \\ & & & \\ j & & & \\ & & & \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

ЭП3:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

называются (целочисленными) элементарными матрицами.

Определение. (ЭП строк целочисленных матриц)

- **ЭП1:** $\bar{a}_i \rightarrow \bar{a}_i + \lambda \bar{a}_j, \quad i \neq j, k \in \mathbb{Z};$
- **ЭП2:** $\bar{a}_i \leftrightarrow \bar{a}_j, \quad i \neq j;$
- **ЭП3:** $\bar{a}_i \rightarrow (-1)\bar{a}_i;$

(Аналогично определены ЭП над столбцами матрицы)

Приведение целочисленной матрицы с помощью целочисленных ЭП к "диагональному" виду

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$. Будем говорить, что матрица A имеет "диагональный" вид, если либо $A = 0$, либо $a_{ii} = \alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, l}$ и $a_{ij} = 0$ иначе.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_l & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Лемма. Любую матрицу $M \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$ за конечное число целочисленных ЭП над строками и столбцами можно привести к "диагональному" виду.

Доказательство. Индукция по n - числу строк матрицы. При фиксированном n индукция по $\nu(M)$ - наименьшему по модулю ненулевому элементу M .

Если $M = 0$, то утверждение доказано, поэтому далее $M \neq 0$.

База индукции: $n = 1 \implies M = (a_{11}, \dots, a_{1m})$.

База внутренней индукции: $\nu(M) = 1$ - очевидна (если в строке есть 1, то с помощью неё можно занулить все оставшиеся элементы).

Шаг внутренней индукции: Пусть $\nu(M) = |a_{1j}|$. Если $a_{1j} < 0$, то применим ЭП3 к столбцу j ; если $j > 1$, то применением ЭП2 поменяем 1-й и j -й столбцы местами. После этих операций $\nu(M) = a_{11}$.

$\forall j > 1 : a_{1j} = a_{11}q_j + r_j$, где $0 \leq r_j < a_{11}$. Вычитая с помощью ЭП1 из j -го столбца 1-й, умноженный на q_j , получим строку $\tilde{M} = (a_{11}, r_2, \dots, r_m)$.

Если все $r_j = 0$, то диагональный вид получен, иначе можно воспользоваться предположением индукции ($\nu(\tilde{M}) < \nu(M)$).

Шаг индукции: Пусть $\nu(M) = |a_{ij}|$. Сначала сделаем a_{ij} положительным (ЭП3), затем переставим его в верхний левый угол (ЭП2).

Случай 1: $M = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & C & \\ 0 & & & \end{array} \right)$ - по предположению индукции приводим

C к диагональному виду;

Случай 2: $\exists j > 1 : a_{1j} \neq 0$. Тогда, аналогично базе индукции, с помощью ЭП1 приводим верхнюю строчку к виду: $\forall j > 1 : a_{1j} = 0$.

Случай 3: $\exists j > 1 : a_{j1} \neq 0$ - аналогично случаю 2 (ЭП строк вместо столбцов). \square

Упражнение. Доказать, что с помощью конечного числа целочисленных ЭП над строками и столбцами

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_l & \\ \hline 0 & & 0 & 0 \end{array} \right)$$

где $\alpha_l \mid \alpha_{l-1}, \alpha_{l-1} \mid \alpha_{l-2}, \dots, \alpha_2 \mid \alpha_1$.

Доказательство. По лемме можем с помощью ЭП привести M к диагональному виду. Индукция по l - числу ненулевых α в диагональном виде:

База: $l = 0, 1$ - очевидно;

Шаг: Из теории чисел знаем, что для чисел α_1, α_i существуют $a, b \in \mathbb{Z}$, что $a\alpha_1 + b\alpha_i = d_i = \text{НОД}(\alpha_1, \alpha_i)$. Значит, с помощью ЭП1 можно сделать $a_{1i} = d_i$. Тогда следующими операциями:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} k\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & d_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{array} \right) \end{aligned}$$

можем сделать так, чтобы $\alpha_i \mid \alpha_1$. Причём α_1 при этих операциях домножается на $k \in \mathbb{Z}$, а значит, делимость на все предыдущие α_j сохраняется. Тогда за $l - 1$ таких наборов операций можно сделать α_1 общим кратным всех α , а матрица без первой строки и первого столбца приводится к нужному виду по предположению индукции. \square

Пример. $(12, 10, 6) \sim (6, 10, 12) \sim (6, 4, 0) \sim (4, 6, 0) \sim (4, 2, 0) \sim (2, 4, 0) \sim (2, 0, 0)$.

(По сути - обобщённый алгоритм Евклида, остаётся НОД чисел 12, 10 и 6).

4.3 Согласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы

Теорема 1.

Пусть A - свободная абелева группа ранга n , $B \leq A$ - подгруппа ранга m .

Тогда \exists базисы $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ группы A и $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ подгруппы B такие, что $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть e_1, \dots, e_n и f_1, \dots, f_m - некоторые базисы A и B соответственно. Так как $f_i \in A$, $(f_1, \dots, f_m) = (e_1, \dots, e_n)C$, где $C \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})$.

Если $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m$ - другой базис B , то $(f_1, \dots, f_m) = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)T$, где $T \in M_{m \times m}(\mathbb{Z})$

Если $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ - другой базис A , то $(e_1, \dots, e_n) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)S$, где $S \in M_{n \times n}(\mathbb{Z})$ ($\det S = \pm 1$). Отсюда

$$(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m)T = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)SC \implies (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_m) = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)\tilde{C}, \quad \tilde{C} = SCT^{-1}$$

Тогда если S, T^{-1} - элементарные матрицы, то SC - ЭП над строками C , а CT^{-1} - ЭП над столбцами C . По лемме 1 C с помощью ЭП можно привести к виду

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \alpha_m \\ \hline & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{нулей среди } \alpha_i \text{ не будет, т.к. векторы базиса } f \text{ ЛНЗ}). \quad \text{Отсюда}$$

и получаем требуемое равенство $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$. □

Замечание. Для абелевых групп из теоремы 4 прямого произведения получим следующее утверждение: Пусть $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$, $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_n$, причём $B \leq A$, $B_i \leq A_i$

Тогда $A/B = (A_1 \oplus \dots \oplus A_n)/(B_1 \oplus \dots \oplus B_n) \simeq A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_n/B_n$

Следствие 1. В условиях теоремы 1:

$$A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

Доказательство. По теореме 1: $\tilde{f}_1 = \alpha_1 \tilde{e}_1, \dots, \tilde{f}_m = \alpha_m \tilde{e}_m$.

$$A = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle; \quad B = \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 0 \rangle$$

Тогда из замечания выше:

$$A/B \simeq \langle \tilde{e}_1 \rangle / \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle / \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle / \langle 0 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle / \langle 0 \rangle \simeq$$

$$\simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

□

Следствие 2. В условиях теоремы 1: $\text{rk } A = \text{rk } B \iff |A : B| < \infty$.

Доказательство. По определению $|A : B| = |A/B|$.

Из следствия 1 видно, что если $\text{rk } A = \text{rk } B$, то $A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_n}$, и $|A/B| < \infty$, а иначе в прямой сумме встретится слагаемое \mathbb{Z} , то есть найдётся элемент бесконечного порядка. \square

Утверждение 1. (*Универсальное свойство абелевой группы*)

Пусть $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ - система порождающих абелевой группы A .

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A - свободная с базисом S ;
2. \forall абелевой группы D , $\forall d_1, \dots, d_n \in D \exists!$ гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow D$ т.ч. $\varphi : a_i \mapsto d_i \forall i$.

Доказательство.

1 \implies 2 : S - базис $A \implies \forall a \in A \exists! \alpha_i \in \mathbb{Z} : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$.

Рассмотрим отображение $\varphi : A \rightarrow D$, заданное как $a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \mapsto \alpha_1 d_1 + \dots + \alpha_n d_n$. Оно корректно вследствие единственности разложения по базису, а также очевидно является гомоморфизмом с нужным свойством.

2 \implies 1. Рассмотрим свободную группу D ранга n , в ней рассмотрим базис d_1, \dots, d_n . По условию $\exists!$ гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow D$, причём $a_i \mapsto d_i$.

Предположим, что a_1, \dots, a_n линейно зависимы. Тогда

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \implies \varphi(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_n d_n = 0$$

Противоречие с линейной независимостью d_1, \dots, d_n . Значит, a_1, \dots, a_n - базис. \square

Следствие 3. Любая конечнопорождённая абелева группа изоморфна свободной абелевой группе по некоторой её подгруппе B .

Доказательство. Пусть $D = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$. Рассмотрим свободную абелеву группу A ранга n с базисом a_1, \dots, a_n .

По утверждению 1 \exists гомоморфизм $\varphi : A \rightarrow D$ такой, что $\varphi(a_i) = d_i$.

Из порождаемости гомоморфизм сюръективен, а значит, по теореме о гомоморфизме $D = \text{Im } \varphi \simeq A/\text{Ker } \varphi$, где $\text{Ker } \varphi \leq A$. \square

Следствие 4. Любая конечнопорождённая абелева группа раскладывается в сумму циклических подгрупп.

Доказательство. $D \simeq A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$ \square

Следствие 5. Любая конечнопорождённая абелева группа D раскладывается в прямую сумму конечной абелевой группы и свободной абелевой группы.

Доказательство. $D \simeq (\mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m}) \oplus \mathbb{Z}^{n-m}$ □

Определение. Группа, в которой каждый неединичный элемент имеет бесконечный порядок, называется группой без кручения.

Упражнение. Если A - свободная абелева, то A - без кручения.

Доказательство. Предположим, что $b \in A$ - элемент конечного порядка m . По определению свободной группы $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, причём не все α_i равны 0. Тогда $m\alpha_1 a_1 + \dots + m\alpha_n a_n = mb = 0$ - противоречие с линейной независимостью базиса. □

Следствие 6. Если A - конечнопорождённая абелева группа без кручения, то A - свободная абелева группа.

Доказательство. В обозначениях следствия 5 $m = 0$. □

4.4 Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах

Определение. Группа G называется периодической, если $\forall g \in G$ g имеет конечный порядок.

Определение. Периодическая группа G называется p -группой, где p - простое, если $\forall g \in G \exists s \in \mathbb{N} : \text{ord } g = p^s$.

Упражнение.

Доказать, что конечная группа G является p -группой $\iff |G| = p^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Доказательство.

\Leftarrow - очевидно, т.к. $\forall g \in G : \text{ord } g \mid p^m = |G|$;

\Rightarrow : на будущих лекциях будет доказательство в терминах силовских подгрупп. □

Определение. Группа G называется примарной, если G является p -группой для некоторого простого p .

Утверждение. Существуют конечнопорождённые (не абелевы) бесконечные p -группы.

Доказательство. Без доказательства. □

Пример. Не конечнопорождённая примарная абелева группа:

\mathbb{C}_{p^∞} - группа комплексных корней степеней p^m из 1.

Лемма 1. Пусть A - конечнопорождённая абелева группа, $B \leq A$ такая, что A/B - свободная абелева группа. Тогда $\exists C \leq A$ - свободная абелева группа такая, что $A \simeq B \oplus C$.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ - базис $\mathbb{Z}^n \simeq A/B$, и пусть $\varphi : A/B \rightarrow \mathbb{Z}^n$ - изоморфизм. Тогда $\varphi^{-1}(\bar{e}_i) = e_i + B$, где $e_i \in A$.

Рассмотрим $C = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.

Покажем, что e_1, \dots, e_n - базис C , т.е. докажем линейную независимость e_1, \dots, e_n :

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 &\implies \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + B = B \implies \varphi(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + B) = \\ &= \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n = 0 \implies \forall i \quad \lambda_i = 0 \quad \text{т.к. } \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \text{ - базис } \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Покажем, что $A = B \oplus C$, или, что равносильно, что $A = B + C$ и $B \cap C = \{0\}$:

- $B \cap C = \{0\}$: Рассмотрим $b \in B \cap C$. Тогда:

$$\begin{aligned} b = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n &\implies \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + B = b + B = B \implies \\ &\implies \varphi(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n + B) = \mu_1 \bar{e}_1 + \dots + \mu_n \bar{e}_n = 0 \implies \forall i \quad \mu_i = 0 \end{aligned}$$

- $A = B + C$: Рассмотрим произвольный $a \in A$.

$\varphi(a + B) = \bar{a} \in \mathbb{Z}^n$, где $\bar{a} = \mu_1 \bar{e}_1 + \dots + \mu_n \bar{e}_n$. Тогда

$$\varphi(a - \sum_i \mu_i e_i + B) = 0 \implies a - \sum_i \mu_i e_i + B = B \implies \exists b \in B : a = b + \sum_i \mu_i e_i$$

□

Лемма 2. Все элементы конечного порядка абелевой группы A образуют подгруппу в A .

Доказательство. Обозначим за $\text{Tor } A$ множество всех элементов конечного порядка группы A .

1. $a, b \in \text{Tor } A \implies \exists n, m \in \mathbb{N} : na = mb = 0 \implies (n \cdot m)(a + b) = (n \cdot m)a + (n \cdot m)b = 0 \implies (a + b)$ имеет конечный порядок.
2. $0 \in \text{Tor } A$ - очевидно.

3. $\forall a \in \text{Tor } A \implies -a \in \text{Tor } A$, т.к. $n(-a) = -na = 0$.

□

Определение. Подгруппа $\text{Tor } A$ ("torsion subgroup") называется подгруппой кручения группы A .

Упражнение. Доказать, что в группе $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ все элементы конечного порядка не образуют подгруппу.

Замечание. Группа Диэдра D_n отлична от D_∞ наличием соотношения $b^n = 1$, (a - любая симметрия правильного n -угольника, b - поворот на $\frac{2\pi}{n}$).

Доказательство. Заметим, что $\text{ord } ba = 2$:

$$a = a^{-1} \implies baba = b(aba^{-1}) = bb^{-1} = 1$$

Также $\text{ord } a = 2 : a^2 = 1$. При этом $\text{ord } (ba)a = \text{ord } b = \infty$. Значит, произведение элементов конечного порядка может быть элементом бесконечного порядка, т.е. все элементы конечного порядка не образуют подгруппу в D_∞ . □

Лемма 3. Пусть A - абелева группа. Тогда $A/\text{Tor } A$ - группа без кручения.

Доказательство. От противного: пусть $\bar{a} \in A/\text{Tor } A$, $\bar{a} \neq 0$, $\text{ord } \bar{a} = n$.

Тогда $\bar{a} = a + \text{Tor } A$, $a \in A$.

$$n\bar{a} = 0 \implies n(a + \text{Tor } A) = \text{Tor } A \implies na \in \text{Tor } A \implies$$

$$\implies \exists m \in \mathbb{N} : m(na) = 0 \implies (mn)a = 0 \implies a \in \text{Tor } A \implies \bar{a} = 0$$

- противоречие с $\bar{a} \neq 0$. Значит, $A/\text{Tor } A$ - группа без кручения. □

Лемма 4. Пусть A - конечнопорождённая абелева группа. Тогда $A = \text{Tor } A \oplus C$, где $C \leq A$ - свободная абелева группа, $\text{Tor } A$ - конечная.

Доказательство. Пусть $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Тогда $A/\text{Tor } A = \langle a_1 + \text{Tor } A, \dots, a_n + \text{Tor } A \rangle$. Кроме того, по лемме 3 $A/\text{Tor } A$ - группа без кручения, а отсюда по следствию 6 из универсального свойства абелевой группы - свободная. Отсюда по лемме 1 $\exists C \leq A$ - свободная абелева группа такая, что $A \simeq \text{Tor } A \oplus C$.

Осталось показать, что $\text{Tor } A$ - конечная: $\text{Tor } A \simeq A/C = \langle a_1 + C, \dots, a_n + C \rangle \implies \text{Tor } A = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ - конечнопорождённая. Тогда если $k_i = \text{ord } b_i$, то $\forall b \in \text{Tor } A$

$$b = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq \lambda_i < k_i \implies |\text{Tor } A| \leq k_1 \dots k_n$$

□

Лемма 5. Пусть A - конечная абелева группа. Тогда A раскладывается в прямую сумму своих p -подгрупп A_p , причём набор этих подгрупп определён однозначно.

Доказательство.

- Существование разложения:

Рассмотрим произвольное простое p и обозначим за A_p множество всех элементов A порядков p^m . Проверим, что A_p - подгруппа A :

1. $a, b \in A_p, p^{m_1}a = p^{m_2}b = 0 \implies p^{m_1+m_2}(a+b) = p^{m_2} \cdot p^{m_1}a + p^{m_1} \cdot p^{m_2}b = 0$
Отсюда $a, b \in A_p \implies a+b \in A_p$;
2. $0 \in A_p$ - очевидно;
3. $p^m a = 0 \implies p^m(-a) = -p^m a = 0$. Отсюда $a \in A_p \implies -a \in A_p$.

Докажем, что $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$:

1. $A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$ - прямая сумма.

По критерию прямой суммы достаточно показать, что $A_{p_i} \cap \langle \bigcup_{j \neq i} A_{p_j} \rangle = \{0\}$. Рассмотрим $a \in A_{p_i} \cap \langle \bigcup_{j \neq i} A_{p_j} \rangle$. Так как $a \in A_{p_i}$, то $p_i^{m_i}a = 0$. С

другой стороны, $a = \sum_{j \neq i} a_j$, то есть $(\prod_{j \neq i} p_j^{m_j})a = 0$.

Так как $\prod_{j \neq i} p_j^{m_j}$ и $p_i^{m_i}$ взаимно прости, имеем $1 \cdot a = a = 0$.

2. $A = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$. Рассмотрим произвольный $a \in A$. Пусть $\text{ord } a = n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Обозначим $n_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$.

Так как $\text{НОД}(n_1, \dots, n_s) = 1, \exists l_i \in \mathbb{Z} : l_1 n_1 + \dots + l_s n_s = 1$. Отсюда $a = l_1 n_1 a + \dots + l_s n_s a$. Так как $p_i^{\alpha_i}(l_i n_i a) = l_i n a = 0$, имеем $l_i n_i a \in A_{p_i}$.

Значит, a раскладывается в линейную комбинацию элементов A_{p_i} .

- Единственность разложения - от противного: пусть

$$A = \tilde{A}_{p_1} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{p_s} = A_{p_1} \oplus \dots \oplus A_{p_s}$$

Очевидно, что (возможно, после переупорядочивания) $p_i = \tilde{p}_i$, так как порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы. Так как A_{p_i} - максимальная p_i -подгруппа в A (содержит все элементы A порядка p_i^m), $\tilde{A}_{p_i} \subseteq A_{p_i}$.

Предположим, что $\exists a \in A_{p_i} : a \notin \tilde{A}_{p_i}$. Так как $a \in A = \tilde{A}_{p_1} \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{p_s}$,

$a = \tilde{a}_{p_i} + b$, где $\tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$, $b \in \langle \bigcup_{j \neq i} A_{p_j} \rangle$. Тогда $\text{ord } a = p_i^{m_1}$, $\text{ord } \tilde{a}_{p_i} = p_i^{m_2} \implies$

$$p_i^{m_1+m_2}a = p_i^{m_1+m_2}\tilde{a}_{p_i} + p_i^{m_1+m_2}b \implies p_i^{m_1+m_2}b = 0, \text{ а также } \prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}b = 0$$

$\prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$ и $p_i^{m_1+m_2}$ взаимно просты $\implies b = 0$, т.е. $a = \tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$ - противоречие.

Значит, такого a не существует, то есть $A_{p_i} \subseteq \tilde{A}_{p_i}$. Отсюда $A_{p_i} = \tilde{A}_{p_i}$.

□

Лемма 6. Пусть A - конечная абелева p -группа. Тогда если $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_s = B_1 \oplus \dots \oplus B_t$, где A_i, B_i - примарные циклические подгруппы, то $s = t$ и набор порядков $|A_1|, \dots, |A_s|$ совпадает с набором порядков $|B_1|, \dots, |B_t|$ (т.е. разложение единственно с точностью до порядка слагаемых).

Доказательство. Индукция по $|A|$:

База: $|A| = p \implies A \simeq \mathbb{Z}_p$ - такое разложение единственno;

Шаг: Пусть $|A_i| = p^{n_i}, |B_i| = p^{m_i}$. Упорядочим их: пусть

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_{\tilde{s}} \geq n_{\tilde{s}+1} = \dots = n_s = 1$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{\tilde{t}} \geq m_{\tilde{t}+1} = \dots = m_t = 1$$

Пусть $A_i = \langle a_i \rangle_{p^{n_i}}, B_i = \langle b_i \rangle_{p^{m_i}}$. Рассмотрим множество $pA = \{pa \mid a \in A\}$.

Очевидно, что $pA \leq A$. Тогда:

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_{\tilde{s}} \rangle \oplus \langle a_{\tilde{s}+1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle a_s \rangle$$

$$\forall a \in A : a = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{\tilde{s}} a_{\tilde{s}} + \alpha_{\tilde{s}+1} a_{\tilde{s}+1} + \dots + \alpha_s a_s \implies pa = \alpha_1 pa_1 + \dots + \alpha_{\tilde{s}} pa_{\tilde{s}}$$

($A_{\tilde{s}+1}, \dots, A_s$ - циклические порядка p , поэтому $\alpha_{\tilde{s}+1} pa_{\tilde{s}+1} + \dots + \alpha_s pa_s = 0$)

Тогда $pA = \langle pa_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle pa_{\tilde{s}} \rangle$. При этом $\text{ord } (pa_1) = p^{n_1-1}, \dots, \text{ord } (pa_{\tilde{s}}) = p^{n_{\tilde{s}}-1}$.

Значит, $|pA| = p^{n_1+\dots+n_{\tilde{s}}-\tilde{s}} < |A|$.

Аналогично $pA = \langle pb_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle pb_{\tilde{t}} \rangle, |pA| = p^{m_1+\dots+m_{\tilde{t}}-\tilde{t}} < |A|$.

Тогда по предположению индукции разложения pA совпадают (порядок слагаемых одинаковый в силу упорядоченности), то есть

$$\tilde{s} = \tilde{t}; \quad \forall i = \overline{1 \dots \tilde{s}} : n_i - 1 = m_i - 1 \implies n_i = m_i$$

При этом $|A| = |A_1| \cdot \dots \cdot |A_{\tilde{s}}| \cdot |A_{\tilde{s}+1}| \cdot \dots \cdot |A_s| = p^{n_1+\dots+n_{\tilde{s}}+s-\tilde{s}}$, а с другой стороны $|A| = |B_1| \cdot \dots \cdot |B_{\tilde{t}}| \cdot |B_{\tilde{t}+1}| \cdot \dots \cdot |B_t| = p^{m_1+\dots+m_{\tilde{t}}+t-\tilde{t}}$. Отсюда

$$n_1 + \dots + n_{\tilde{s}} + s - \tilde{s} = m_1 + \dots + m_{\tilde{t}} + t - \tilde{t}; \quad \tilde{s} = \tilde{t}; \quad n_i = m_i \implies s = t$$

□

Теорема. (Основная т. о конечнопорождённых абелевых группах)

Пусть A - конечнопорождённая абелева группа. Тогда A изоморфна прямой сумме (конечных) примарных циклических подгрупп и бесконечных циклических подгрупп:

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$$

причём число m и набор $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$ определены однозначно для группы A .

Доказательство.

- **Существование разложения**

Из следствия 4 универсального свойства абелевой группы для A имеем:

$$A \simeq A_0/B_0 \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

Также из аналога китайской теоремы об остатках знаем, что если $\alpha = q_1^{\nu_1} \dots q_\mu^{\nu_\mu}$, где q_i - различные простые, то $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}_{q_1^{\nu_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{q_\mu^{\nu_\mu}}$. Отсюда из разложения выше получаем искомое разложение.

- **Единственность разложения**

По лемме 4 для A имеет место разложение $A = \text{Tor } A \oplus C$, где $\text{Tor } A$ - конечная, C - свободная. Заметим, что $\text{rk } C = \text{rk } A/\text{Tor } A$. Так как $\text{Tor } A$ - инвариант A , то $A/\text{Tor } A$, а тогда и $\text{rk } C$ - инварианты A .

Так как $C \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ - конечная, имеем $C = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_m$, то есть $m = \text{rk } C$, а отсюда m однозначно определено для A .

Пусть $B = \text{Tor } A$. По лемме 5 $B \simeq A_{\tilde{p}_1} \oplus \dots \oplus A_{\tilde{p}_l}$, причём это разложение на примарные подгруппы единственно с точностью до порядка слагаемых. А из леммы 6 каждая $A_{\tilde{p}_i}$ раскладывается на циклические примарные однозначно с точностью до порядка слагаемых. Значит, набор порядков $p_1^{s_1}, \dots, p_k^{s_k}$ определён однозначно для A .

□

Пример. Все абелевы группы порядка 8 с точностью до изоморфизма:

$$8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \implies A_1 \simeq \mathbb{Z}_8; A_2 \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2; A_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

Пример. $V_4 = \{e, a, b, c\}$

$V_4 = \langle a \rangle_2 \oplus \langle b \rangle_2 = \langle b \rangle_2 \oplus \langle c \rangle_2$, но разложение из теоремы единствено: $V = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Замечание. Для не конечнопорождённых абелевых групп утверждение теоремы неверно, контрпримером служит следующее упражнение:

Упражнение. Доказать, что \mathbb{Q} не раскладывается в прямую сумму циклических (вообще говоря, произвольных) подгрупп.

Доказательство. Пусть $H_1, H_2 \trianglelefteq \mathbb{Q}$ - нетривиальные нормальные подгруппы \mathbb{Q} . Тогда $\exists h_1 = \in H_1, h_2 \in H_2 : h_1, h_2 \neq 0$. Тогда:

$$h_1 = \frac{m_1}{n_1}, h_2 = \frac{m_2}{n_2} \implies m_2 n_1 h_1 = m_1 n_2 h_2 \in H_1 \cap H_2$$

то есть $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. Отсюда \mathbb{Q} не раскладывается в прямую сумму подгрупп. \square

Определение. Экспонентой (периодом, показателем) конечной группы G называется наименьшее общее кратное порядков элементов группы G . Обозначается $\exp G$.

Утверждение. Если G конечна, то $\exp G \mid |G|$

Доказательство. Для конечных групп знаем, что порядок группы является общим кратным всех порядков элементов группы. Так как наименьшее общее кратное набора чисел делит любое общее кратное этого набора, получаем необходимое утверждение. \square

Утверждение. Конечная абелева группа A циклическая $\iff \exp A = |A|$.

Доказательство.

$\implies: A = \langle a \rangle \implies \text{ord } a = |A| \implies \exp A \geq |A| \implies \exp A = |A|$ (т.к. $\exp A \mid |A|$).

$\Leftarrow:$ От противного: пусть $\exp A = |A|$, но A - не циклическая. По основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{s_m}}$. Если все p_1, \dots, p_m различны, то A циклическая по аналогу китайской теоремы об остатках - противоречие. Если среди них есть совпадающие, то можем без ограничения общности считать, что $p_1 = p_2, s_1 \leq s_2$. Обозначим $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}} = \langle a_i \rangle \implies \forall a \in A : a = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$. Тогда если в равенстве $|A| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$ обозначить $t = p_2^{s_2} \dots p_m^{s_m}$,

то $\forall a \in A : ta = \sum_{i=1}^m \alpha_i t a_i = 0$.

(очевидно, что $ta_i = 0$ для $a \neq 1$, а $ta_1 = 0$ в силу $p_1 = p_2, s_1 \leq s_2$)

Тогда t - общее кратное всех порядков элементов A , то есть $\exp A \mid t$, но $t < A = \exp A$ - противоречие. Значит, A - циклическая. \square

Теорема. Пусть \mathbb{F} - произвольное поле, A - конечная подгруппа в \mathbb{F}^* . Тогда A - циклическая.

Доказательство. (мультипликативная терминология)

Из определения поля F^* - абелева группа, а значит A также абелева.

От противного: пусть A не циклическая, т.е. $\exp A < |A|$. Тогда если $\exp A = n$, то $\forall a \in A \ a^n = 1$. Рассмотрим многочлен $x^n - 1$ над полем \mathbb{F} . Его степень равна n , а число его корней в \mathbb{F} хотя бы $|A|$, что больше n по предположению - противоречие. \square

Пример. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p : A = F^* -$ циклическая. Например, $\mathbb{Z}_5^* = \langle 3 \rangle_4$.

Следствие. Мультипликативная группа любого конечного поля - циклическая.

5 Действия группы на множестве

Определение. Пусть X - произвольное множество. Биективное отображение $f : X \rightarrow X$ называется преобразованием множества X .

Множество всех преобразований X обозначается $S(X)$.

Утверждение. $S(X)$ - группа относительно композиции.

Доказательство.

1. Ассоциативность - очевидно;
2. Нейтральный элемент - тождественное преобразование;
3. Обратный элемент - обратное преобразование (существует, т.к. биекция)

□

Определение. Группа $S(X)$ называется группой всех преобразований X .

Произвольная $H \leq S(X)$ называется группой преобразований множества X .

Пример. $GL(V)$ - группа невырожденных линейных операторов векторного пространства V : $GL(V) \leq S(V)$.

Определение. Пусть G - произвольная группа, X - произвольное множество.

Действием группы G на множестве X называется гомоморфизм $\alpha : G \rightarrow S(X)$.

Обозначается $G \curvearrowright X$ (или $G : H$)

Элементы множества X при этом называются точками.

$\forall g \in G : g \mapsto \alpha(g)$ - преобразование множества X , т.е. биекция $X \rightarrow X$.

Равенство $\alpha(g)(x) = y (\in X)$ записывают как $\alpha(g)x = y$ или $gx = y$.

Так как α - гомоморфизм, имеем:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2) \implies \alpha(g_1g_2)x = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))x = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)x)$$

Отсюда $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$. Аналогично:

$$\forall g \in G : \alpha(g^{-1}) = (\alpha(g))^{-1} \implies \alpha(g^{-1})x = (\alpha(g)x)^{-1}$$

Отсюда $g^{-1}x = y \iff gy = x$.

Если $H \leq S(X)$, то определено "тавтологическое" действие H на X : $\alpha(h) = h$ - вложение $H \rightarrow S(X)$.

Пример. $GL(V) \curvearrowright V$: $\alpha(g)x = x \quad \forall g \in G, x \in X$

В общем случае: $\alpha: G \rightarrow S(X)$ - гомоморфизм, то есть $\text{Im } \alpha \leq S(X)$, $\text{Ker } \alpha \trianglelefteq G$.

Определение. $\text{Ker } \alpha$ называется ядром неэффективности действия группы G на X .

Если $\text{Ker } \alpha = \{e\}$, то действие называется эффективным.

Замечание. Всякое действие группы G на множестве X индуцирует и другие действия. Например:

1. $G \curvearrowright 2^X$;
2. Если $Y \subset X$ - инвариантное подмножество относительно G , то $G \curvearrowright Y$.

Пример. Пусть K - равносторонний треугольник, $G = \text{Sym } K \leq S(X)$, где X - множество точек треугольника.

Тогда если $Y = \{v_1, v_2, v_3\}$ - вершины треугольника, а $Z = \{e_1, e_2, e_3\}$ - стороны треугольника, то действие $G \curvearrowright X$ индуцирует также и действия $G \curvearrowright Y, G \curvearrowright Z$

Пример. Пусть задано $G \curvearrowright X$, \mathbb{F} - поле, $Y = \{f : X \rightarrow \mathbb{F}\}$ - алгебра всех функций $X \rightarrow \mathbb{F}$. Рассмотрим $\alpha : G \rightarrow S(Y) : \forall g \in G \alpha(g)f = \tilde{f}$ такое, что $\tilde{f}(x) = f(g^{-1}x) \forall x \in X$. Покажем, что α - гомоморфизм:

$$\begin{aligned} \forall g_1, g_2 \in G : (\alpha(g_1g_2)f)(x) &= f((g_1g_2)^{-1}(x)) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (\alpha(g_2)f)(g_1^{-1}x) = \\ &= \alpha(g_1)(\alpha(g_2)f)(x) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2)f)(x) \end{aligned}$$

Замечание. Если $G \curvearrowright X, H \leq G$, то определено также действие $H \curvearrowright X$ - ограничение действия на подгруппу.

Пример. $G = S_3 \curvearrowright X$, где $X = \{1, 2, 3\}$ - действуют как подстановки.

$H = \langle (1, 2, 3) \rangle \leq G$ - определено действие $H \curvearrowright X$ как ограничение $G \curvearrowright X$.

5.1 Орбиты и стабилизаторы

Утверждение. Отношение, заданное правилом $x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$, является отношением эквивалентности.

Доказательство.

- Рефлексивность: $\forall x \in X : ex = x \implies x \sim x$;
- Симметричность:

$$x \sim y \implies \exists g \in G : gx = y \implies g^{-1}gx = g^{-1}y \implies g^{-1}y = x \implies y \sim x$$

- Транзитивность:

$$\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \implies \exists g_1, g_2 \in G : \begin{cases} y = g_1 x \\ z = g_2 y \end{cases} \implies z = g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x \implies x \sim z$$

□

Определение. Классы эквивалентности относительно этого отношения называются орбитами относительно действия $G \curvearrowright X$.

Обозначается $\text{Orb}(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\}$

Пример. Пусть G - группа поворотов плоскости \mathcal{E}^2 вокруг точки o .

Тогда при $G \curvearrowright E^2$ $\text{Orb}(x)$ - окружность с центром в точке o радиуса $|ox|$.

Определение. Если $\text{Orb}(x) = \{x\}$, то x называется неподвижной точкой.

Определение. Если $\text{Orb}(x) = X$, то действие называется транзитивным.

Замечание. Это именно характеристика действия, так как $\exists x : \text{Orb}(x) = X \Rightarrow \forall x \in X \text{ Orb}(x) = X$.

Пример. G - группа сдвигов (параллельных переносов) \mathcal{E}^2 .

Тогда $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$ - транзитивное (из любой точки можно получить любую другую сдвигом на вектор, их соединяющий).

Утверждение. Если $y \in \text{Orb}(x)$, то $\text{Orb}(y) = \text{Orb}(x)$.

Доказательство. Напрямую следует из определения орбиты.

Определение. Стабилизатором (стационарной подгруппой) точки x называется множество $\text{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$.

Утверждение. $\text{St}(x) \leq G$.

Доказательство.

- $g_1, g_2 \in \text{St}(x) \implies g_1 x = g_2 x = x$
 $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x \implies g_1 g_2 \in \text{St}(x);$
- $e x = x \implies e \in \text{St}(x);$
- Пусть $g \in \text{St}(x)$. Тогда $g(x) = x$, а также $g(g^{-1}x) = ex = x$. Так как образ g при действии - биекция, имеем $x = g^{-1}x$, то есть $g^{-1} \in \text{St}(x)$

□

Утверждение. Если $y = gx$, то множество $M_y = \{h \in G \mid y = hx\}$ совпадает с множеством $g\text{St}(x)$.

Доказательство. Покажем оба включения:

$g\text{St}(x) \subset M_y : \forall \tilde{g} \in \text{St}(x) : \tilde{g} = g \cdot g'$, где $g' \in \text{St}(x)$. Тогда: $\tilde{g}x = (gg')x = g(g'x) = gx = y \implies \tilde{g} \in M_y$. Отсюда $g\text{St}(x) \subset M_y$.

$M_y \subset g\text{St}(x) : \forall h \in M_y : y = hx$. Также $y = gx \implies gx = hx \implies (g^{-1}h)x = g^{-1}(hx) = x \implies g^{-1}h \in \text{St}(x) \implies h \in g\text{St}(x)$. Отсюда $M_y \subset g\text{St}(x)$. \square

Теорема. Отображение $\psi : \text{Orb}(x) \rightarrow G/\text{St}(x)$ (множество левых смежных классов, не факторгруппа!) такое, что $gx \mapsto g\text{St}(x)$, является биекцией.

Доказательство.

- Корректность: Пусть $y = g_1x = g_2x$. Тогда:

$$\begin{aligned} g_1x = g_2x &\implies g_2^{-1}(g_1x) = (g_2^{-1}g_1)x = x \implies g_2^{-1}g_1 \in \text{St}(x) \implies \\ &\implies g_1 \in g_2\text{St}(x) \implies g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x) \implies \psi(g_1x) = \psi(g_2x) \end{aligned}$$

- Сюръективность - очевидна ($\forall g \in G g\text{St}(x)$ будет образом точки gx);
- Инъективность: Пусть $\psi(g_1) = \psi(g_2)$. Тогда:

$$g_1\text{St}(x) = g_2\text{St}(x) \implies g_2^{-1}g_1 \in \text{St}(x) \implies (g_2^{-1}g_1)x = x \implies g_1x = g_2x$$

\square

Следствие 1. $|\text{Orb}(x)| = |G/\text{St}(x)| = |G : \text{St}(x)|$.

Следствие 2. Если G - конечная группа, то $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$.

Пример. Пусть $K \in \mathcal{E}^3$ - куб, $G = \text{Sym}^+(K) = \{g \in \text{Isom}^+(\mathcal{E}^3) \mid gK = K\}$ - группа вращений K .

Найдём $|G|$. Так как $G \leq S(X)$, где $X = \{v_1, \dots, v_8\}$ - множество вершин куба, $|G| < \infty$. Значит, если рассмотреть индуцированное действие $G \curvearrowright X$, то $|G| = |\text{Orb}(v_1)| \cdot |\text{St}(v_1)|$.

$\text{Orb}(v_1) = X$ (вершина может перейти в любую) $\implies |\text{Orb}(v_1)| = 8$;

$|\text{St}(v_1)| = 3$ (id и два поворота вокруг большой диагонали, содержащей v_1);

Отсюда $|G| = 8 \cdot 3 = 24$.

Более того, покажем, что $G \simeq S_4$. Рассмотрим множество диагоналей куба $Y = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$. Так как при собственном движении диагонали переходят в диагонали, можем рассмотреть действие $G \curvearrowright Y \implies \exists \alpha : G \rightarrow S(Y) \simeq S_4$ -

гомоморфизм. Из $|G| = |S_4| = 24$ для доказательства того, что α - изоморфизм, достаточно показать сюръективность, а для этого достаточно показать, что все транспозиции диагоналей можно получить вращениями (достаточно, т.к. S_4 порождается транспозициями, а $\text{Im } \alpha \leq S(Y)$).

Такая транспозиция - это поворот на π относительно прямой, проходящей через середины двух рёбер, соединяющих концы диагоналей.

Упражнение. Доказать, что если L - правильный тетраэдр, то $\text{Sym}(L) \simeq S_4$.

Доказательство. Будем действовать аналогично - пусть $X = \{v_1, \dots, v_4\}$ - множество вершин тетраэдра, тогда действие $\text{Sym}(L) \curvearrowright E^3$ индуцирует действие $\text{Sym}(L) \curvearrowright X$, а отсюда $|\text{Sym}(L)| = |\text{Orb}(v_1)| \cdot |\text{St}(v_1)|$.

$\text{Orb}(v_1) = X$ (вершина может перейти в любую) $\implies |\text{Orb}(v_1)| = 4$;
 $|\text{St}(v_1)| = 6$ (любые перестановки вершин на грани, не содержащей v_1);
(проверка существования всех этих движений непосредственная)
Отсюда $|G| = 4 \cdot 6 = 24$.

Так как $S(X) \simeq S_4$, достаточно показать, что гомоморфизм действия - изоморфизм, а из равенства порядков достаточно сюръективности. Транспозиция любых двух вершин может быть получена симметрией относительно плоскости, проходящей через середину ребра, соединяющего вершины, и противоположное ребро. \square

Определение. Элементы $a, b \in G$ называются сопряжёнными, если $\exists g \in G$ такой, что $b = g^{-1}ag$. Обозначается $b = a^g$.

Замечание. Такое обозначение не случайно: многие свойства возведения в степень присущи и операции сопряжения. Однако в данном курсе эти свойства пока не понадобятся.

Определение. Подгруппы $L, K \leq G$ называются сопряжёнными, если $\exists g \in G$ такой, что $K = g^{-1}Lg = \{g^{-1}lg \mid l \in L\}$.

Утверждение. Пусть $y = gx$. Тогда $g\text{St}(x)g^{-1} = \text{St}(y)$.

Доказательство.

- $g\text{St}(x)g^{-1} \stackrel{?}{\subseteq} \text{St}(y)$:
 $\forall h \in \text{St}(x) : ghg^{-1}(y) = ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}g)x = ghx = gx = y \implies ghg^{-1} \in \text{St}(y)$;

- $\text{St}(y) \stackrel{?}{\subseteq} g\text{St}(x)g^{-1}$: (аналогичные рассуждения, т.к. $y = gx \iff x = g^{-1}y$)
 $\forall h \in \text{St}(y) : g^{-1}hg(x) = g^{-1}hg(g^{-1}y) = g^{-1}h(gg^{-1})y = g^{-1}hy = g^{-1}y = x \implies g^{-1}hg \in \text{St}(x) \implies h \in g\text{St}(x)g^{-1}$.

□

5.2 Действия группы на себе

Пусть G - группа, $X = G$. Рассмотрим основные действия $G \curvearrowright G$ и покажем некоторые их свойства:

1. Действие $G \curvearrowright G$ левыми сдвигами:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$ такое, что $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = gh$.

Покажем, что α - гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h = g_1(g_2h) = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

$g \in \text{Ker } \alpha \implies \forall h \in G : gh = h \implies g = e \implies \text{Ker } \alpha = \{e\}$ - действие эффективно.

Значит, по теореме о гомоморфизме $G \simeq \text{Im } \alpha \leq S(G)$.

Следствие. (Теорема Кэли)

Пусть $|G| = n$. Тогда G изоморфна некоторой подгруппе S_n .

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha : G \rightarrow S(G)$, приведённый выше. Тогда $G \simeq \text{Im } \alpha \leq S(G) \simeq S_n$, т.к. $|G| = n$. □

2. Действие $G \curvearrowright G$ правыми сдвигами:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$ такое, что $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = hg^{-1}$.

Покажем, что α - гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = hg_2^{-1}g_1^{-1} = \alpha(g_1)(hg_2^{-1}) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

$g \in \text{Ker } \alpha \implies \forall h \in G : hg^{-1} = h \implies g = e \implies \text{Ker } \alpha = \{e\}$ - действие эффективно.

3. Действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями:

$\alpha : G \rightarrow S(G)$ такое, что $\forall g \in G, h \in G : \alpha(g)h = ghg^{-1}$.

Покажем, что α - гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h(g_1g_2)^{-1} = g_1(g_2hg_2^{-1})g_1^{-1} = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h)$$

Утверждение. $\forall g \in G : \alpha(g) : G \rightarrow G$ - автоморфизм, т.е. изоморфизм G на себя.

Доказательство. Биективность $\alpha(g)$ следует из $\alpha(g) \in S(G)$. Докажем, что $\alpha(g)$ - гомоморфизм:

$$\alpha(g)(h_1 h_2) = gh_1 h_2 g^{-1} = (gh_1 g^{-1})(gh_2 g^{-1}) = (\alpha(g)h_1)(\alpha(g)h_2)$$

Значит, $\alpha(g)$ - автоморфизм G . □

Определение. Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом группы G (относительно элемента g).

Утверждение.

1. Множество $\text{Aut } G$ всех автоморфизмов группы G - группа относительно композиции, причём $\text{Aut } G \leq S(G)$.
2. Множество $\text{Int } G$ всех внутренних автоморфизмов группы G - группа относительно композиции, причём $\text{Int } G \trianglelefteq \text{Aut } G$.

Доказательство.

1. Достаточно проверить, что $\text{Aut } G \leq S(G)$:

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Aut } G \implies (\alpha_1 \alpha_2) \in \text{Aut } G$;
- $\text{id} \in \text{Aut } G$;
- $\alpha \in \text{Aut } G \implies \alpha^{-1} \in \text{Aut } G$ (изоморфизм обратим).

2. Для определения группы достаточно проверить, что $\text{Int } G \leq \text{Aut } G$:

- $\alpha_1, \alpha_2 \in \text{Int } G \implies \exists g_1, g_2 \in G : \alpha_i$ - сопряжение относительно g_i . Тогда $(\alpha_1 \alpha_2)$ - сопряжение относительно $g_1 g_2$, т.е. $(\alpha_1 \alpha_2) \in \text{Aut } G$;
- $\text{id} \in \text{Int } G$ - сопряжение относительно e ;
- $\alpha \in \text{Int } G \implies \alpha$ - сопряжение относительно $g \in G \implies \alpha^{-1}$ - сопряжение относительно $g^{-1} \implies \alpha^{-1} \in \text{Aut } G$.

Проверим, что $\text{Int } G \trianglelefteq \text{Aut } G$, т.е. $\forall \varphi \in \text{Aut } G, g \in G : \varphi \alpha(g) \varphi^{-1} \in \text{Int } G$:

$$\begin{aligned} (\varphi \alpha(g) \varphi^{-1})(h) &= \varphi(\alpha(g)(\varphi^{-1}(h))) = \varphi(g \varphi^{-1}(h) g^{-1}) = \varphi(g) \varphi(\varphi^{-1}(h)) \varphi(g^{-1}) \\ &= \varphi(g) h (\varphi(g))^{-1} = \alpha(\varphi(g))(h) \implies \varphi \alpha(g) \varphi^{-1} = \alpha(\varphi(g)) \in \text{Int } G \end{aligned}$$

□

Определение. $\text{Aut } G$ называется группой аутоморфизмов группы G .

$\text{Int } G$ называется группой внутренних автоморфизмов группы G .

Пусть α - действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями. Тогда $\text{Ker } \alpha = \{g \in G \mid \alpha(g)h = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h \forall h \in G\} = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$, а $\text{Im } \alpha = \text{Int } G$.

Определение. Множество $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in G\}$ называется центром группы G .

Свойства.

1. $Z(G) = \text{Ker } \alpha$, где α - действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями;
2. $Z(G) \trianglelefteq G$;
3. $\forall H \leq Z(G) : H \trianglelefteq G$;
4. $Z(G) = G \iff G$ - абелева

Доказательство.

1. Доказано выше;
2. Следует из (1) ($\text{Ker } \alpha \trianglelefteq G$ - свойство гомоморфизма);
3. $\forall h \in H \leq Z(G), g \in G : ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H \implies H \trianglelefteq G$;
4. Очевидно из определения абелевой группы.

□

5.3 Классы сопряжённости и централизаторы

Определение. Пусть α - действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями.

Классом сопряжённости $x \in G$ называется орбита x относительно α .

Централизатором элемента $x \in G$ называется стабилизатор x относительно α .

Класс сопряжённости обозначается как $x^G = \{y \in G \mid \exists g \in G : y = gxg^{-1}\}$.

Централизатор обозначается как $C(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$.

Утверждение 1. Если $|G| < \infty$, то $|x^G| = \frac{|G|}{|C(x)|}$.

Доказательство. Очевидно следует из утверждения $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|C(x)|}$. □

Утверждение 2. $x^G = \{x\} \iff x \in Z(G)$.

Доказательство. Очевидно следует из свойства 1 центра группы. □

Определение. Группа G называется тривиальной, если $G = \{e\}$.

Теорема. Центр любой конечной нетривиальной p -группы нетривиален (p - простое).

Доказательство. Пусть $|G| = p^s$. Рассмотрим случаи:

1. G - абелева $\implies Z(G) = G$.

2. G - неабелева. Тогда G разбивается на несколько непересекающихся классов сопряжённости: $G = \bigsqcup_{i=1}^k x_i^G$.

По утверждению 2 $|x_i^G| = 1 \iff x_i \in Z(G)$, а по утверждению 1 $|x_i^G| = \frac{|G|}{|C(x_i)|}$

Так как G - p -группа, для $x_i \notin Z(G)$: $|x_i^G| = p^{s_i}, s_i \geq 1$.

Без ограничения общности пусть только $x_1, \dots, x_m \in Z(G)$ (всегда будет хотя бы один, так как $e \in Z(G)$). Тогда:

$$|G| = \underbrace{|x_1^G| + \dots + |x_m^G|}_{|Z(G)|} + |x_{m+1}^G| + \dots + |x_k^G| \implies p^s = |Z(G)| + p^{s_{m+1}} + \dots + p^{s_k}$$

Отсюда $p \mid |Z(G)|$, а значит, $|Z(G)| \geq p > 1$ - центр нетривиален. □

Замечание. \exists бесконечная (конечнопорождённая) p -группа с тривиальным центром (монстр Тарского).

Следствие. Если $|G| = p^2$, где p - простое, то G - абелева.

Доказательство. G - p -группа $\implies Z(G) \neq \{e\}$.

Предположим, что G неабелева, т.е. что $Z(G) \neq G$.

Тогда, так как $|Z(G)| \mid |G| = p^2$ и $|Z(G)| \neq 1, p^2$, имеем $|Z(G)| = p$.

Рассмотрим группу $G/Z(G)$. Её порядок равен $\frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^2}{p} = p \implies G/Z(G)$ - циклическая, а значит, $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$. Тогда $\forall g \in G \ \exists t \in \mathbb{Z} : g \in a^t Z(G)$.

Рассмотрим два произвольных элемента $g_1, g_2 \in G$ и докажем, что $g_1 g_2 = g_2 g_1$:

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : g_1 = a^{t_1} Z(G), g_2 = a^{t_2} Z(G) \implies \exists z_1, z_2 \in Z(G) : g_1 = a^{t_1} z_1, g_2 = a^{t_2} z_2$$

Так как элементы центра коммутируют со всеми элементами G , имеем:

$$g_1g_2 = a^{t_1}z_1a^{t_2}z_2 = a^{t_1+t_2}z_1z_2 = a^{t_2+t_1}z_2z_1 = a^{t_2}z_2a^{t_1}z_1 = g_2g_1$$

а значит, G - абелева, что противоречит предположению.

Отсюда G не может быть неабелевой, т.е. G - абелева. \square

Лемма 1. Пусть X - произвольное множество, $G \leq S(X)$. Тогда если $\varphi \in G$ т.ч. $\varphi : x \mapsto y$, то $\forall \psi \in G : \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(x) \mapsto \psi(y)$.

Доказательство. Применим преобразование $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$:

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \psi(\varphi(\psi^{-1}(\psi(x)))) = \psi(\varphi(x)) = \psi(y)$$

\square

Утверждение 3. Пусть $\sigma, \tilde{\sigma} \in S_n$. Тогда $\sigma, \tilde{\sigma}$ сопряжены в $S_n \iff \sigma, \tilde{\sigma}$ имеют одинаковые цикловые структуры, т.е. наборы длин независимых циклов в разложении $\sigma, \tilde{\sigma}$ совпадают.

Доказательство.

\implies : Пусть $\sigma, \tilde{\sigma}$ сопряжены в $S_n \implies \exists \tau \in S_n : \tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$.

Пусть $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_s)(j_1 j_2 \dots j_t) \dots$ - разложение σ в независимые циклы. Тогда $\sigma : i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots, i_s \mapsto i_1$, а тогда по лемме 1 $\tau\sigma\tau^{-1} : \tau(i_1) \mapsto \tau(i_2), \tau(i_2) \mapsto \tau(i_3), \dots, \tau(i_s) \mapsto \tau(i_1)$. Аналогичное рассуждение можно провести для всех независимых циклов σ , а значит, $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\tau(i_2)\dots\tau(i_s))(\tau(j_1)\tau(j_2)\dots\tau(j_t))\dots$ - длины циклов сохраняются.

\iff : Пусть $\sigma, \tilde{\sigma}$ имеют одинаковые цикловые структуры. Можем поменять порядок циклов так, чтобы длины i -х циклов в σ и $\tilde{\sigma}$ совпадали, т.е.

$$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_s)(j_1 j_2 \dots j_t) \dots; \quad \tilde{\sigma} = (\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 \dots \tilde{i}_s)(\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 \dots \tilde{j}_t) \dots$$

Тогда если $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_s & j_1 & j_2 & \dots & j_t & \dots \\ \tilde{i}_1 & \tilde{i}_2 & \dots & \tilde{i}_s & \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & \dots & \tilde{j}_t & \dots \end{pmatrix}$, то по лемме 1 $\tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$. \square

Примеры. $\sigma = (12)(345)(6)(7), \tilde{\sigma} = (15)(243)(6)(7)$ - сопряжены в S_7 :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix} \text{ (из построения в теореме);}$$

$$\sigma = (123)(45), \tau = (135) \implies \tau\sigma\tau^{-1} = (325)(41).$$

Следствие. $Z(S_n) = \{\text{id}\}$ при $n \leq 3$.

Доказательство. Допустим, что в $Z(G)$ есть $\sigma \neq \text{id}$. Разложим в независимые циклы: $\sigma = (ij\dots)\dots$. Так как $n \geq 3, \exists k \neq i, j$. Тогда при $\tau = (jk) : \tau\sigma\tau^{-1} = (ik\dots)\dots$ - не совпадёт с σ ($\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i)$) - противоречие. \square

Упражнение. Докажите, что $Z(A_n) = \{\text{id}\}$ при $n \geq 4$.

Доказательство. Допустим, что в $Z(G)$ есть $\sigma \neq \text{id}$. Разложим в независимые циклы: $\sigma = (ij\dots)\dots$. Так как $n \geq 4, \exists k, l : k, l, i, j$ попарно различны. Тогда при $\tau = (jkl) : \tau\sigma\tau^{-1} = (ik\dots)\dots$ - не совпадёт с σ ($\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i)$) - противоречие. \square

Утверждение.

$$H \trianglelefteq G \iff \begin{cases} H \leq G \\ H - \text{объединение нескольких классов сопряжённости } G \end{cases}$$

Доказательство.

\implies : Пусть $H \trianglelefteq G$. Очевидно, что $H \leq G$.

Если $h \in H$, то $\forall g \in G \quad ghg^{-1} \in H$ - H содержит классы сопряжённости всех её элементов $\implies H = \bigcup_{h \in H} h^G$.

\impliedby : Пусть $H \leq G$ и H - объединение классов сопряжённости. Тогда $\forall h \in H, g \in G : ghg^{-1} \in H$ (H содержит весь класс сопряжённости h^G) $\implies H \trianglelefteq G$. \square

6 Теоремы Силова

Пусть G - конечная группа, $|G| = p^s \cdot m$, где p - простое, $(p, m) = 1$.

Определение. Подгруппа $H \leq G$ называется силовской p -подгруппой, если $|H| = p^s$.

Замечание. Несложно видеть, что определение корректно: если H - силовская p -подгруппа, то H - p -подгруппа; более того, это доказано в [упражнении](#) п. 4.4

Теорема 1. (*Первая теорема Силова - о существовании*)

Силовская p -подгруппа существует.

Замечание. Напомним, что более общее утверждение $k \mid |G| \implies \exists H \leq G : |H| = k$ неверно - в A_4 нет подгруппы порядка 6.

Теорема 2. (*Вторая теорема Силова - о сопряжённости*)

Любая p -подгруппа лежит в некоторой силовской p -подгруппе.

Все силовские p -подгруппы сопряжены.

Теорема 3. (*Третья теорема Силова - о количестве*)

Пусть N_p - число силовских p -подгрупп в G . Тогда $\begin{cases} N_p \equiv 1 \pmod{p} \\ N_p \mid m \end{cases}$

Примеры.

1. $G = S_3, |G| = 6 = 2 \cdot 3$. Силовские 2-подгруппы: $\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle$.

2. $G = S_4, |G| = 24 = 2^3 \cdot 3$. Найдём силовские 2-подгруппы:

Доказывалось, что $S_4 \simeq \text{Sym}^+ K$ - группа вращений куба. Можем рассмотреть сечение куба плоскостью, параллельной некоторой паре противоположных граней - вращения, оставляющие квадрат сечения на месте, образуют подгруппу, очевидно изоморфную D_4 (по определению D_4). Такая подгруппа будет иметь порядок 8, и таких подгрупп будет 3 - столько же, сколько пар противоположных граней - по III теореме Силова это все силовские p -подгруппы в G .

6.1 I теорема Силова

Пусть G - группа, $|G| = p^s m$, где p - простое, $(p, m) = 1$. Тогда \exists силовская p -подгруппа в G .

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. G - абелева $\implies G \simeq \langle a_1 \rangle_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \langle a_k \rangle_{p_k^{s_k}}$. Без ограничения общности $p_1 = \dots = p_t = p$, $p_{t+1}, \dots, p_k \neq p$. Тогда $H \simeq \langle a_1 \rangle_{p^{s_1}} \times \dots \times \langle a_t \rangle_{p^{s_t}}$ - искомая силовская p -подгруппа: очевидно, что H является p -подгруппой, а также $p^s m = |G| = |H| \cdot |G/H|$, где $p \nmid |G/H| \implies p^s \mid |H| \implies |H| = p^s$.
2. Общий случай (G - неабелева). Индукция по $|G|$:

База: $n = 1$ - очевидно;

Шаг: Пусть $G = Z(G) \sqcup x_1^G \sqcup \dots \sqcup x_k^G$ - разложение G на классы сопряжённости, где $x_i \notin Z(G)$, то есть $|x_i^G| > 1$. Вновь рассмотрим случаи:

- (a) $\exists i = \overline{1, \dots, k} : p \nmid |x_i^G|$. Знаем, что $|C(x_i)| = \frac{|G|}{|x_i^G|}$. По предположению индукции в $C(x_i)$ \exists силовская p -подгруппа $H \implies |H| = p^s$ (так как степень вхождения p в порядок группы не уменьшилась), т.е. H - силовская p -подгруппа и для G ;
- (b) $\forall i = \overline{1, \dots, k} : p \mid |x_i^G|$. Тогда $p \mid |Z(G)| \implies |Z(G)| = p^{s_0} m_0$ ($(p, m_0) = 1$). Так как $Z(G)$ - абелева, по 1 случаю \exists силовская p -подгруппа $S_0 \leq Z(G)$, $|S_0| = p^{s_0}$.

По свойству центра $S_0 \leq Z(G) \implies S_0 \trianglelefteq G$ - можем рассмотреть G/S_0 . Так как $|G/S_0| < |G|$, по предположению индукции \exists силовская p -подгруппа $S \leq G/S_0$. $|G/S_0| = p^{s-s_0} m \implies |S| = p^{s-s_0}$

Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G \rightarrow G/S_0$, и $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$ - полный прообраз S при этом гомоморфизме.

$S_0 \subset \tilde{S}$, так как $\forall s_0 \in S_0 : \pi(s_0) = eS_0$, причём $S_0 \trianglelefteq G \implies S_0 \trianglelefteq \tilde{S}$, т.е. можем рассмотреть ограничение $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}/S_0$. $\pi|_{\tilde{S}}$ - натуральный гомоморфизм с ядром S_0 и образом $\pi(\tilde{S}) = S$.

Натуральный гомоморфизм сюръективен, а отсюда по теореме о гомоморфизме $|\tilde{S}| = |S_0| \cdot |S| = p^{s_0} \cdot p^{s-s_0} = p^s \implies \tilde{S}$ - искомая силовская p -подгруппа G .

□

6.2 II теорема Силова

Пусть G - группа, $|G| = p^s m$, где p - простое, $(p, m) = 1$.

Тогда любая p -подгруппа группы G лежит в некоторой силовской p -подгруппе. Все силовские p -подгруппы группы G сопряжены.

Доказательство. Пусть $|G| = p^s m$, где p - простое, $(p, m) = 1$.

По I теореме Силова \exists силовская p -подгруппа $S \leq G$. Рассмотрим $H \leq G$ - произвольную нетривиальную p -подгруппу (случай $H = \{e\}$ очевиден).

Рассмотрим множество $X = \{g_1S, \dots, g_mS\}$ смежных классов G по S и действие $H \curvearrowright X$, заданное по правилу $\alpha(h)g_iS = hg_iS$.

$$|\text{Orb}(g_iS)| \mid |H| \implies \begin{cases} |\text{Orb}(g_iS)| = 1 \\ p \mid |\text{Orb}(g_iS)| \end{cases}.$$

Предположим, что $\forall i = \overline{1, \dots, m} : p \mid |\text{Orb}(g_iS)|$. Тогда $p \mid \sum_i |\text{Orb}(g_iS)| = |X|$.

Однако $|X| = m$ - взаимно просто с p . Противоречие.

Отсюда $\exists i = \overline{1, \dots, m} : |\text{Orb}(g_iS)| = 1$, т.е. точка g_iS неподвижна при $H \curvearrowright X$. Значит, $\forall h \in H \quad hg_iS = g_iS \implies h \in g_iSg_i^{-1} \implies H \leq g_iSg_i^{-1}$. Так как $|g_iSg_i^{-1}| = |S|$, $g_iSg_i^{-1}$ - силовская p -подгруппа, т.е. H лежит в силовской p -подгруппе G .

Заметим, что в доказательстве выше подгруппа S зафиксирована.

Если рассмотреть H - произвольную силовскую p -подгруппу G , то $|H| = p^s$. Так как $H \leq g_iSg_i^{-1}$, $|g_iSg_i^{-1}| = p^s \implies H = g_iSg_i^{-1}$ - любая силовская p -подгруппа сопряжена с S . Значит, все силовские p -подгруппы сопряжены. \square

Следствие. Пусть $|G| < \infty$. Тогда G - p -группа $\iff |G| = p^s (s \in \mathbb{N})$.

Доказательство.

\Leftarrow - доказано ранее;

\Rightarrow : Пусть $|G| = p^s m, (p, m) = 1$. По I теореме Силова \exists силовская p -подгруппа в G (порядка p^s), а по II теореме Силова G как своя p -подгруппа содержится в своей силовской p -подгруппе. Значит, $|G| \mid p^s$, а отсюда $|G| = p^s$. \square

6.3 Нормализатор. III теорема Силова

Пусть G - группа, $H \leq G, X = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$.

Рассмотрим действие $G \curvearrowright X : \alpha(\tilde{g})(gHg^{-1}) = \tilde{g}(gHg^{-1})\tilde{g}^{-1}$

Для точки $H \in X$: $\text{Orb}(H) = X, \text{St}(H) = \{\tilde{g} \in G \mid \tilde{g}H\tilde{g}^{-1} = H\} \leq G$

Определение. Стабилизатор H относительно этого действия называется нормализатором группы H . Обозначается $N_G(H)$.

Утверждение 1. Если $|G| < \infty$, то $|G| = |X| \cdot |N_G(H)|$, где X - число подгрупп, сопряжённых с H . В частности, $|X| = |G : N_G(H)|$.

Доказательство. Очевидно следует из утверждения $|\text{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}$. \square

Утверждение 2. $N_G(H)$ - наибольшая (по включению) подгруппа G , содержащая H как нормальную подгруппу.

Доказательство. Из определения $N_G(H)$ очевидно, что $H \trianglelefteq N_G(H)$.

Пусть $H \trianglelefteq K \leq G$. Тогда $\forall g \in K \ gHg^{-1} = H \implies g \in N_G(H)$.

Отсюда $K \leq N_G(H)$. □

III теорема Силова

Пусть G - группа, $|G| = p^s m$, где p - простое, $(p, m) = 1$.

Пусть N_p - число силовских p -подгрупп в G . Тогда $N_p \equiv 1 \pmod{p}$, $N_p \mid m$.

Доказательство.

Пусть S - произвольная силовская p -подгруппа G (хотя бы одна существует по III теореме Силова). Рассмотрим $X = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$. По II теореме Силова все силовские p -подгруппы G сопряжены, а также порядок любой подгруппы вида gSg^{-1} равен $|S|$, т.е. gSg^{-1} - также силовская p -подгруппа. Отсюда X - множество всех силовских подгрупп G .

$|X| = N_p \implies$ по утверждению 1 получаем $N_p \mid |G|$. Осталось показать, что $N_p \equiv 1 \pmod{p}$ (если это так, то $N_p \mid |G| = p^s m \implies N_p \mid m$).

Рассмотрим действие $S \curvearrowright X$ сопряжениями. Очевидно, S - неподвижная точка относительно него. Также $N_p = |X| = \sum_{i=1}^k |\text{Orb}(x_i)|$. При этом

$$|\text{Orb}(x_i)| \mid |S| = p^s \implies \begin{cases} |\text{Orb}(x_i)| = 1 \\ p \mid |\text{Orb}(x_i)| \end{cases}$$

Значит, достаточно показать, что S - единственная неподвижная точка относительно данного движения (тогда $|X| = \sum_{i=1}^k |\text{Orb}(x_i)| \equiv |\text{Orb}(S)| = 1 \pmod{p}$)

Допустим, что \tilde{S} - неподвижная точка $\implies \forall g \in S \ g\tilde{S}g^{-1} = \tilde{S}$.

Рассмотрим нормализатор $N_G(\tilde{S})$. Знаем, что $\tilde{S} \subseteq N_G(\tilde{S})$, а из неподвижности точки \tilde{S} имеем $S \subseteq N_G(\tilde{S})$. Так же $N_G(\tilde{S}) \leq G$, то есть степень вхождения p в $|N_G(\tilde{S})|$ также равна s . Значит, S, \tilde{S} - силовские p -подгруппы в $N_G(\tilde{S})$. Тогда по II теореме Силова S и \tilde{S} сопряжены в $N_G(\tilde{S})$, т.е. $S = g\tilde{S}g^{-1}, g \in N_G(\tilde{S})$, а тогда по определению нормализатора $S = \tilde{S}$. Значит, S - единственная неподвижная точка. □

Следствие. Пусть G - группа, $|G| = p^s m$, где p - простое, $(p, m) = 1$.

Тогда силовская p -подгруппа в G единственна \iff эта подгруппа нормальна.

Доказательство.

\Leftarrow : Пусть $S \trianglelefteq G$ - силовская p -подгруппа. По II теореме Силова все силовские p -подгруппы сопряжены с S , а из нормальности совпадают с S .

\Rightarrow : Если S - единственная, то $\forall g \in G : gSg^{-1} = S$

(используется, что из конечности G : $gSg^{-1} \subseteq S \Rightarrow gSg^{-1} = S$). \square

Упражнение. Доказать, что любая группа порядка 15 циклическая.

Доказательство. Пусть G - группа порядка 15. По I теореме Силова в ней есть силовские подгруппы порядка 3 и порядка 5. Притом по III теореме Силова:

$$N_3 \equiv 1 \pmod{3}, \quad N_3 \mid 5 \implies N_3 = 1$$

$$N_5 \equiv 1 \pmod{5}, \quad N_5 \mid 3 \implies N_5 = 1$$

Таким образом, в G есть по одной силовской подгруппе порядка 3 и 5, а по следствию из III теоремы Силова они обе нормальны в G . Так как их порядки простые, обе эти подгруппы циклические, т.е. изоморфны \mathbb{Z}_3 и \mathbb{Z}_5 соответственно.

Остаётся заметить, что эти подгруппы пересекаются тривиально (у остальных элементов разные порядки), т.е. некоторая подгруппа G раскладывается в их прямое произведение, а так как $15 = 3 \cdot 5$, эта подгруппа - вся G . Отсюда $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{15}$ - циклическая. \square

7 Коммутант

Определение. Пусть G - произвольная группа, $x, y \in G$.

Коммутатором элементов x, y называется элемент $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Свойства.

1. $[x, y] = e \iff xy = yx;$
2. $[x, y]^{-1} = [y, x];$
3. $\forall g \in G \ g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$.

Доказательство. 1, 2 - очевидно;

$$3 : [gxg^{-1}, gyg^{-1}] = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = g[x, y]g^{-1}$$

□

Определение. Коммутантом группы G называется подгруппа, порождённая всеми коммутаторами элементов группы G . Обозначается $[G]$ или G' .

$$G' = \left\{ \prod_{i=1}^k [x_i, y_i] \mid x_i, y_i \in G \right\}.$$

Утверждение. $G' = \{e\} \iff G$ - абелева.

Доказательство. Очевидно из свойства 1 коммутатора. □

Утверждение. $G' \trianglelefteq G$

Доказательство.

$$\forall g \in G, [x, y] \in G' : g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}] \in G' \implies G' \trianglelefteq G$$

□

Утверждение. Если $H \leq G$ и $G' \leq H$, то $H \trianglelefteq G$.

Доказательство. $\forall g \in G, h \in H : ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in H$. □

Утверждение. Пусть $N \trianglelefteq G$. Тогда G/N абелева $\iff G' \subseteq N$.

Доказательство.

\implies : Пусть G/N абелева. Тогда $\forall g_1, g_2 \in G : (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N) \implies g_1g_2N = g_2g_1N \implies g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 = [g_2, g_1] \in N$;

\impliedby : Пусть $G' \subseteq N$. Тогда $\forall g_1, g_2 \in G : [g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in N \implies g_1g_2N = g_2g_1N \implies (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N)$ □

7.1 Коммутанты некоторых известных групп

Лемма 1.

1. A_n порождается циклами длины 3;
2. Если $n \geq 5$, то A_n порождается произведениями пар независимых транспозиций;

Доказательство. $\forall \sigma \in A_n \quad \sigma = \prod_{i=1}^k \tau_i$, где τ_i - транспозиции, k - чётное, т.е. транспозиции разбиваются на пары - в паре транспозиции могут быть зависимы либо независимы.

Если i, j, k, l - различные (случай $n \leq 3$ очевиден), то

$$(ij)(jk) = (ijk); \quad (ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl)$$

то есть σ представима как произведение тройных циклов.

Если $n \geq 5$, то $\exists i, j, k, l, m$ - различные, а тогда $(ij)(jk) = ((ij)(lm))((lm)(jk))$. Таким образом можно избавиться от пар зависимых транспозиций, то есть σ представима как произведение пар независимых транспозиций. \square

Утверждение. $S'_n = A_n$.

Доказательство. $|S_n/A_n| = 2 \implies S_n/A_n$ - абелева $\implies S'_n \subseteq A_n$. Значит, достаточно доказать (по лемме 1), что $\forall i, j, k$ (различных) $(ikj) \in S'_n$.

$$[(ij), (jk)] = (ij)(jk)(ij)^{-1}(jk)^{-1} = (ik)(kj) = (ikj)$$

\square

Утверждение.

$$1. \ n = 1, 2, 3 \implies A'_n = \{\text{id}\};$$

$$2. \ n = 4 \implies A'_n = V_4;$$

$$3. \ n \geq 5 \implies A'_n = A_n.$$

Доказательство.

$$1. \ n = 1, 2, 3 - A'_n = \{\text{id}\}, \text{ т.к. } A_n - \text{абелева};$$

$$2. \ n = 4: V_4 \trianglelefteq A_4, |V_4| = 4 \implies |A_4/V_4| = 3 - \text{абелева}. \text{ Значит, } A'_4 \subseteq V_4.$$

$$[(ijk), (ijm)] = (ijk)(ijm)(ijk)^{-1}(ijm)^{-1} = (jkm)(imj) = (ij)(km)$$

3. $n \geq 5$: По пункту 2 леммы 1 A_n порождается парами независимых транспозиций. Аналогично $[(ijk), (ijm)] = (ij)(km)$, а значит, все элементы A_n принадлежат A'_n .

□

Лемма 2. Группа $SL_n(\mathbb{F})$ порождается элементарными матрицами, соответствующими преобразованиям I типа ($a_i \mapsto a_i + \lambda a_j$).

Доказательство. Покажем, что $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$ приводится к E за конечное число операций I типа (над строками):

Индукция по n . База $n = 1$ очевидна ($\det A = a_{11} = 1 \implies A = E$)

Шаг: Так как $\det A \neq 0$, $\exists i : a_{i1} \neq 0$.

Если $a_{11} = 0$, то прибавим i -ю строку к первой - сделаем $a_{11} \neq 0$. Пусть $n \geq 2$ (случай $n = 1$)

Если $a_{11} \neq 1$, то сделаем $a_{12} \neq 0$ аналогично a_{11} , а далее прибавим к первой строке вторую, умноженную на $\frac{1-a_{11}}{a_{12}}$ - сделаем $a_{11} = 1$. Далее с помощью первой строки сможем занулить оставшиеся элементы первого столбца. По предположению индукции подматрицу полученной матрицы без первой строки и первого столбца можно привести к единичному виду. Сделаем это, а далее с помощью i -й строки занулим a_{1i} .

Значит, $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$ приводится к E за конечное число операций I типа над строками, то есть раскладывается в произведение соответствующих элементарных матриц. □

Утверждение. Пусть $|\mathbb{F}| > 3$. Тогда $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$.

Доказательство. Заметим, что $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^*$ из теоремы о гомоморфизме для $\alpha : GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow F^*$ такого, что $\alpha(A) = \det A$. Отсюда $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F})$ - абелева (как мультиликативная группа поля), т.е. $GL_n(\mathbb{F})' \subseteq SL_n(\mathbb{F})$.

Если $|\mathbb{F}| > 3$, то $\exists \lambda \in \mathbb{F} : \lambda \neq 0, 1, -1$.

$$n = 2 : \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

Любое ур-е $(\lambda^2 - 1)a = \mu$ решается для a , так как $\lambda \neq \pm 1$ - отсюда все верхнетреугольные элементарные матрицы I типа принадлежат $GL_n(\mathbb{F})'$. Аналогично для нижнетреугольных - все элементарные матрицы I типа, а отсюда и $SL_n(\mathbb{F})$, принадлежат $GL_n(\mathbb{F})'$.

Случай $n > 2$ аналогичен: необходимо рассмотреть коммутатор

$$[E + (\lambda - 1)E_{ii} + (\lambda^{-1} - 1)E_{jj}, E + aE_{ij}] = E + (\lambda^2 - 1)aE_{ij} \quad (i \neq j)$$

Все рассуждения верны и для доказательства $SL_n(\mathbb{F}) \subseteq SL_n(\mathbb{F})'$, т.к. определители всех рассматриваемых при взятии коммутаторов матриц равны 1. \square

8 Разрешимые и простые группы

8.1 Разрешимые группы

Определение. Кратный коммутант группы G :

$$G^{(1)} = G; \quad G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] = (G^{(k)})'$$

Очевидно, что $G \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots$.

Определение. Группа G называется разрешимой, если $\exists m \in \mathbb{N} : G^{(m)} = \{e\}$.

Утверждение. G - абелева $\implies G$ - разрешимая.

Доказательство. G - абелева $\implies G' = \{e\}$. □

Утверждение.

1. S_n - разрешимая $\iff n \leq 4$;

2. A_n - разрешимая $\iff n \leq 4$.

Доказательство. $S'_n = A_n$, поэтому S_n - разрешимая $\iff A_n$ - разрешимая. $A_2 = \{\text{id}\}$, $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ - абелева, $A'_4 = V_4$ - абелева \implies при $n \leq 4$ A_n разрешима. При $n \geq 5$ $A'_n = A_n$, то есть A_n - не разрешимая. □

Утверждение. Пусть \mathbb{F} - поле, $|\mathbb{F}| > 3$. Тогда $GL_n(\mathbb{F})$ и $SL_n(\mathbb{F})$ не разрешимы.

Доказательство. $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$. □

Утверждение.

1. G - разрешимая, $H \leq G \implies H$ - разрешимая;

2. G - разрешимая, $H \trianglelefteq G \implies G/H$ - разрешимая;

3. $H \trianglelefteq G$, H и G/H - разрешимые $\implies G$ - разрешимая.

Доказательство.

1. Для начала заметим, что $H \leq G \implies H' \leq G'$, так как любой коммутатор элементов из H - также коммутатор элементов из G . Значит, $H^{(m)} \leq G^{(m)}$. G разрешима $\implies \exists m : G^{(m)} = \{e\} \implies H^{(m)} = \{e\} \implies H$ разрешима.

2. Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G \rightarrow G/H$. Очевидно, что образ коммутатора при гомоморфизме - коммутатор:

$$\alpha([x, y]) = \alpha(xyx^{-1}y^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1} = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

то есть $\pi(G') \subseteq (G/H)'$. При этом натуральный гомоморфизм сюръективен, а прообраз коммутатора - также коммутатор (аналогично), то есть $\pi(G') \subseteq (G/H)'$. Аналогично $\pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)}$.

G разрешима $\Rightarrow \exists m : G^{(m)} = \{e\} \Rightarrow \pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)} = \{e\}$.

3. (G/H) разрешима $\Rightarrow \exists k : (G/H)^{(k)} = \{e\} \Rightarrow \pi(G^{(k)}) = \{e\} \Rightarrow G^{(k)} \subseteq H$.

Также H разрешима $\Rightarrow \exists l : H^{(l)} = \{e\} \Rightarrow (G^{(k)})^{(l)} = G^{(k+l)} = \{e\}$.

Значит, G разрешима.

□

Утверждение. Группа $T_n(\mathbb{F})$ невырожденных верхнетреугольных матриц порядка n с коэффициентами из поля \mathbb{F} разрешима.

Доказательство. Индукция по n :

База: $n = 1 \Rightarrow T_1(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^*$ - абелева, а значит разрешима;

Шаг: пусть $T_{n-1}(\mathbb{F})$ разрешима. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : T_n \rightarrow T_{n-1}$:

$$\varphi : \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & * & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{2n} \\ 0 & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & & * \\ & \ddots & & a_{n-1n-1} \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Этот гомоморфизм, очевидно, сюръективен, т.е по теореме о гомоморфизме $T_n/\text{Ker } \varphi \simeq T_{n-1}$. Так как T_{n-1} разрешима по предположению индукции, по пункту 3 предыдущего утверждения достаточно доказать разрешимость группы

$$\text{Ker } \varphi = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} E & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{2n} \\ \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & a_{nn} \end{array} \right) : a_{in} \in \mathbb{F}, a_{nn} \neq 0 \right\}$$

Аналогично, рассмотрим гомоморфизм $\psi : \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathbb{F}^*$:

$$\psi : \left(\begin{array}{c|c} E & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{2n} \\ \cdots & a_{n-1n} \\ 0 & a_{nn} \end{array} \right) \mapsto a_{nn}$$

Заметим, что $\text{Im } \psi = \mathbb{F}^*$ - абелева, а $\text{Ker } \psi$ состоит из матриц $\text{Ker } \varphi$ с $a_{nn} = 1$.

$$\left(\begin{array}{c|cc} E & a_{1n} & \\ & a_{2n} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} E & b_{1n} & \\ & b_{2n} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|cc} E & a_{1n} + b_{1n} & \\ & a_{2n} + b_{2n} & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

Отсюда несложно видеть, что $\text{Ker } \psi$ - также абелева, то есть разрешимая группа. Значит, $\text{Ker } \varphi$ разрешима, а отсюда и $T_n(\mathbb{F})$ - разрешимая группа. \square

Утверждение 1. *Всякая конечная примарная группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть p - простое, для которого G является p -группой.

Индукция по $n = |G|$:

База: $n = 1 \implies G = \{e\}$ - разрешима;

Шаг: $G \neq \{e\} \implies Z(G) \neq \{e\}$ (из примарности). Знаем, что $Z(G) \trianglelefteq G$ - рассмотрим $G/Z(G)$. Это также p -группа, причём порядка $\frac{|G|}{|Z(G)|}$, что меньше n . Значит, $G/Z(G)$ разрешима по предположению индукции, а также $Z(G)$ разрешима, так как абелева. Отсюда G разрешима. \square

Утверждение 2. *Всякая группа G порядка pq , где p, q простые, разрешима.*

Доказательство. Случай $p = q$ очевиден из утверждения 1.

Пусть $p \neq q$ - без ограничения общности $p > q$.

По I теореме Силова \exists силовская p -подгруппа $H \leq G$.

По III теореме Силова $\begin{cases} N_p \mid q \\ N_p \equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \implies N_p = 1$

(не может равняться q в силу $q < p$)

Тогда по следствию из II теоремы Силова единственная силовская p -подгруппа H нормальна в G . Притом $|H| = p \implies H \simeq \mathbb{Z}_p$ и $|G/H| = q \implies G/H \simeq \mathbb{Z}_q$ - абелевы. Значит, H и G/H разрешимы, а отсюда G разрешима. \square

8.2 Простые группы

Определение. Подгруппа $H \leq G$ называется собственной, если $H \neq \{e\}, G$.

Определение. Группа G называется простой, если $G \neq \{e\}$ и в G нет собственных нормальных подгрупп.

Утверждение 1. Абелева группа G - простая $\iff G \simeq \mathbb{Z}_p$, где p - простое.

Доказательство.

\Leftarrow - очевидно (\mathbb{Z}_p - циклическая, т.е. нет собственных подгрупп);

\Rightarrow : Пусть G - абелева и простая группа.

Тогда G циклическая, так как $\forall g \neq e : \langle g \rangle \trianglelefteq G$ (т.к. абелева) и $g \neq \{e\}$, т.е. $\langle g \rangle = G$. Теперь, если G бесконечна, то $G \simeq \mathbb{Z}$, но $2\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$ - противоречие, т.е. G конечна. А если $|G|$ составное, то $G \simeq \mathbb{Z}_{mn}$, где $\langle m \rangle \triangleleft \mathbb{Z}_{mn}$ ($m, n \neq 1$). Значит, $|G|$ простое, т.е. $G \simeq \mathbb{Z}_p$. \square

Утверждение 2. Если G - разрешимая и простая, то $G \simeq \mathbb{Z}_p$, где p - простое.

Доказательство. Так как G разрешима, $G' \neq G$. Притом $G' \trianglelefteq G$, а отсюда из простоты $G' = \{e\}$. Значит, G - абелева, а тогда $\simeq \mathbb{Z}_p$ из утверждения 1. \square

Замечание. Таким образом, всякая простая группа либо изоморфна \mathbb{Z}_p , либо не абелева и не разрешима.

8.3 Значение простых групп

Определение. Субнормальной матрёшкой называется последовательность

$$G = G_0 \geq G_1 \geq \dots \geq G_m = \{e\}; \quad G_{i+1} \trianglelefteq G_i \quad \forall i = \overline{0 \dots m-1}$$

Пример. $G = A_4, H = V_4, K = \langle (12)(34) \rangle$. Тогда $H \trianglelefteq G, K \trianglelefteq H$, то есть $G \geq H \geq K \geq \{\text{id}\}$ - субнормальная матрёшка.

Теорема. Группа G разрешима $\iff G$ обладает субнормальной матрёшкой такой, что G_i/G_{i+1} - абелева $\forall i = \overline{0 \dots m-1}$.

Доказательство. Без доказательства. \square

Определение. Композиционным рядом называется субнормальная матрёшка такая, что $\forall i = \overline{0 \dots m-1} : G_i \neq G_{i+1}$ и G_i/G_{i+1} - простая группа.

Утверждение 3. Всякая конечная группа G обладает композиционным рядом.

Доказательство. Если G - простая, то $G \not\geq \{e\}$ - композиционный ряд.

Если G - не простая, то \exists собственная подгруппа $N \trianglelefteq G$, т.е. $G \not\geq N \not\geq \{e\}$ - субнормальная матрёшка. Будем уплотнять эту матрёшку следующим образом:

Предположим, что в субнормальной матрёшке $G_0 \not\geq \dots \not\geq G_m$ группа G_i/G_{i+1} - не простая. Тогда \exists собственная $\tilde{N} \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$.

Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G_i \rightarrow G_i/G_{i+1}$. Тогда $\pi^{-1}(\tilde{N}) = \tilde{N}$

- собственная нормальная подгруппа G_i , содержащая G_{i+1} , то есть в матрёшке кусок "... $\geq G_i \geq G_{i+1} \geq ...$ " заменяем на "... $\geq G_i \geq \tilde{N} \geq G_{i+1} \geq ...$ ". Очевидно, что процесс таких уплотнений конечен, так как количество членов матрёшки явно не превышает $|G|$ (порядок строго убывает). Значит, за конечное число уплотнений сможем построить композиционный ряд для G . \square

Теорема. (Жордана - Гёльдера)

Если группа G обладает композиционным рядом, то набор факторгрупп в нём определён однозначно с точностью до перестановки.

Доказательство. Без доказательства. \square

Пример. Пусть $G = \langle a \rangle_{12}$. Композиционные ряды:

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a_6 \rangle > \langle a_3 \rangle > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3;$$

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a_6 \rangle > \langle a_2 \rangle > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2;$$

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a_4 \rangle > \langle a_2 \rangle > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2;$$

Замечание. Группа G не задаётся однозначно набором простых факторов композиционного ряда: пусть набор факторов - $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$, тогда возможны композиционные ряды $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4$ и $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq V_4$.