Механико-математический факультет

Алгебра, 3 семестр, 2 поток

Преподаватель: Куликова Ольга Викторовна

Авторы: Соколов Егор

Группа: 208

Контакт: Мой телеграм для связи

Наши конспекты: Телеграм-канал с конспектами

Москва
Последняя компиляция: 26 декабря 2025 г.

Содержание

1 Группы

1.1 Основные понятия

Определение. Пусть G — множество. Бинарной операцией на G называется отображение $* : G \times G \to G$.

Определение. Множество G с бинарной операцией $*$ называется группой, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall a, b, c \in G \;\; a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. $\exists e \in G : \forall a \in G \;\; a * e = e * a = a$;
3. $\forall a \in G \; \exists b \in G : a * b = b * a = e$

Различные формы записи группы:

1. Мультипликативная форма (терминология):
   Операция — " $\cdot$ " (умножение);
   Нейтральный элемент — единичный (1);
   Элемент из аксиомы 3 — обратный (a^{-1} для $a \in G$);
2. Аддитивная форма (терминология):
   Операция — " $+$ " (сложение);
   Нейтральный элемент — нулевой (0);
   Элемент из аксиомы 3 — противоположный ($-a$ для $a \in G$);

Определение. Если G — группа и $\forall a, b \in G \; a \cdot b = b \cdot a$, то G — абелева (коммутативная) группа.

Замечание. Обычно для обозначения абелевых групп будем использовать аддитивную форму записи, для иных — мультипликативную.

Утверждение (Простейшие свойства групп)**.**

1. *Единичный элемент единственный;*
2. *$\forall a \in G$ обратный к a элемент единственный;*
3. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$*;*
4. *Если $a, b \in G$, то решение уравнения $ax = b$ $(xa = b)$ единственно.*

Доказательство.

1. (От противного) Допустим, что $\exists\ e_1, e_2 \in A$ — единичные. Тогда $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ по определению единичного элемента.

2. Допустим $\exists\ b_1, b_2$ — обратные к a элементы: $b_1 \neq b_2$
   В силу ассоциативности:
   $$b_1 * (a * b_2) = (b_1 * a) * b_2$$
   $$b_1 * e = e * b_2$$
   $$b_1 = b_2$$

3. $abb^{-1}a^{-1} = aea^{-1} = e$;
   $b^{-1}a^{-1}ab = b^{-1}eb = e \Longrightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

4. $ax = b \Longleftrightarrow a^{-1}ax = a^{-1}b \Longleftrightarrow x = a^{-1}b$;
   $xa = b \Longleftrightarrow xaa^{-1} = ba^{-1} \Longleftrightarrow x = ba^{-1}$;

□

Определение. Мощность множества G называется порядком группы G. Обозначается $|G|$.
Если $|G| < \infty$, то группа называется конечной, иначе бесконечной.

Примеры.

1. $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}_n, +)$;

2. $GL_n(F)$ — группа невырожденных матриц порядка n с коэффициентами из поля F;

3. Пусть Ω — множество. Преобразованиями Ω назовём биекции $f : \Omega \to \Omega$.
   $S(\Omega)$ — множество всех преобразований Ω — образует группу относительно композиции.
   Если $\Omega = \{1, ..., n\}$, то $S(n) = S_n$ — группа подстановок.

4. Если $G = \{a_1, ..., a_n\}$ — конечная группа, то её можно задать с помощью таблицы умножения (таблицы Кэли).
   Например, для $Z_2 = \{0, 1\}$:

	0	1
0	0	1
1	1	0

5. Группа кватернионов: $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$
   Таблица Кэли для кватернионов:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Определение. Подмножество $H \subseteq G$ называется подгруппой группы G, если:

1. $\forall a, b \in H \ ab \in H$;
2. $\forall a \in H \ a^{-1} \in H$;
3. $1 \in H$ (можно заменить на $H \neq \varnothing$)

Обозначается $H \leq G$.

Утверждение. *Подгруппа H группы G является группой относительно бинарной операции группы G.*

Примеры.

1. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$ ($\mathbb{N} \not\leq \mathbb{Z}$, т.к. не группа);
2. $GL_n(F) \geq SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) | \det A = 1\}$ — унимодулярная группа.
3. $GL_n(F) \geq O_n(F) \geq SO_n(F)$ ($O_n(F)$ — ортогональная группа, $SO_n(F)$ — специальная ортогональная группа);
4. $GL_n(F) \geq$ группа строго треугольных матриц.

Определение. Любая подгруппа группы $S(\Omega)$ называется группой преобразований множества Ω.

Примеры.

1. $GL(V)$ ($\leq S(V)$) — группа всех невырожденных линейных операторов векторного пространства V;
2. $Aff(\mathbb{A})$ — группа всех невырожденных аффинных преобразований аффинного пространства $\mathbb{A}$;

3. $\mathcal{E}^2$ — аффинно-евклидово двумерное пространство.
   Isom $\mathcal{E}^2$ — группа изометрий (движений) на $\mathcal{E}^2$.
   Isom $\mathcal{E}^2 \geq O_2 \geq SO_2$, где O_2 — группа движений, сохраняющих точку O, SO_2 — группа поворотов вокруг точки O.

4. $T \subseteq \mathcal{E}^2$ — некоторая фигура.
   Sym $T = \{f \in \text{Isom } \mathcal{E}^2 \mid f(T) = T\}$ — группа симметрий фигуры T.

   - Если T — окружность с центром в точке O, то Sym $T = O_2$;
   - Если T — правильный n-угольник с центром в точке O, то Sym $T = D_n$ — группа Диэдра.
     $|D_n| = 2n$, т.к. n поворотов и n симметрий.

Определение. Пусть $(G_1, *, e_1), (G_2, \circ, e_2)$ — группы. Отображение $\varphi : G_1 \to G_2$ — изоморфизм, если

1. φ — биекция;
2. $\forall a, b \in G_1 \ \varphi(a * b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$

Если между G_1 и G_2 существует изоморфизм, то G_1 и G_2 называются изоморфными. Обозначается $G_1 \simeq G_2$.

Пример. $D_3 \simeq S_3$.

Доказательство. D_3 — группа движений, переводящая равносторонний треугольник в себя. Если пронумеровать вершины изначального треугольника, то каждый элемент группы D_3 будет соответствовать подстановке, переводящей старый порядок вершин в новый. Определение изоморфизма проверяется очевидно. □

Утверждение. *Изоморфность групп — отношение эквивалентности на множестве групп.*

Утверждение (Свойства изоморфизмов)**.**

1. $\varphi(e_1) = e_2$;
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$;
3. $G_1 \simeq G_2 \Longrightarrow |G_1| = |G_2|$.

   Замечание. Обратное утверждение неверно (например, $S_3 \ncong \mathbb{Z}_6$).

Пример. $SO_2 \simeq (U, \cdot)$, где $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Определение. Пусть $(G, \cdot, e)$ — группа, $k \in \mathbb{Z}, g \in G$.
Мультипликативный термин — элемент g в степени k:

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{g \cdot g \cdot ... \cdot g}_{k}, k > 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot ... \cdot g^{-1}}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

Определение. Пусть $(G, +, e)$ — группа, $k \in \mathbb{Z}, g \in G$.
Аддитивный термин — кратное элемента g:

$$kg = \begin{cases} \underbrace{g + g + ... + g}_{k}, k > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + ... + (-g)}_{-k}, k < 0 \\ e, k = 0 \end{cases}$$

Утверждение (Свойства $(k, m \in \mathbb{Z}, g \in G)$)**.**

1. $g^k \cdot g^m = g^{k+m}$;
2. $(g^k)^m = g^{km}$;
3. $(g^k)^{-1} = g^{-k}$.

Утверждение. *Множество всех элементов g^k, где $k \in \mathbb{Z}$, $g \in G$, образует подгруппу в G. Обозначается $\langle g \rangle = \{e, g, g^{-1}, g^2, g^{-2}, ...\}$.*

Определение. $\langle g \rangle$ — циклическая подгруппа. порождённая элементом g.

Примеры.

1. $G = \mathbb{Z} : \langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$ — чётные целые числа;
2. $G = \mathbb{Z}_6 : \langle 2 \rangle = \{0, 2, 4\}$;
3. $G = \mathbb{C} : \langle i \rangle = \{\pm 1, \pm i\}$

Пусть $(G, \cdot, e)$ — группа, $g \in G$. Если $\forall k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m \Longrightarrow g^k \neq g^m$, то $\langle g \rangle$ — бесконечная (элемент g имеет бесконечный порядок).
Если $\exists k, m \in \mathbb{Z} : k \neq m, g^k = g^m \Longrightarrow g^{k-m} = e \Longrightarrow$ существует наименьшее $n \in \mathbb{N}$ такое, что $g^n = e$ (элемент g имеет порядок n)

Определение. Порядком элемента $g \in G$ называется наименьшее натуральное число n такое, что $g^n = e$, если такое существует. Иначе говорят, что элемент g имеет бесконечный порядок. Обозначается $\operatorname{ord} g$.

Примеры.

1. $G = \mathbb{Z} : \operatorname{ord} 2 = \infty$;
2. $G = \mathbb{Z}_{12} : \operatorname{ord} 2 = 6$;
3. $G = \mathbb{C}^* : \operatorname{ord} 2 = \infty$
   ($\mathbb{C}^*$ — мультипликативная группа поля, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ относительно умножения).

Утверждение 1 (Свойства элементов конечного порядка)**.**

1. $g^m = e \Longleftrightarrow \operatorname{ord} g \mid m$;

2. $g^m = g^l \Longleftrightarrow m \equiv l (\operatorname{mod} \operatorname{ord} g)$

Доказательство.

1. Разделим m на $n = \operatorname{ord} g$ с остатком: $m = nq + r$, где $0 \leqslant r < n$. Тогда:

$$e = g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r \Longrightarrow r = 0$$

   так как $r < n$, где n — минимальное натуральное число такое, что $g^n = e$.

2. Следует из 1.

□

Следствие. $\operatorname{ord} g = |\langle g \rangle|$

Доказательство. Если $\operatorname{ord} g = \infty : \ \forall k \neq l \ g^k \neq g^l \Longrightarrow$ подгруппа $\langle g \rangle = \{e, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, ...\}$ бесконечна.
Если $\operatorname{ord} g = n : \langle g \rangle = \{e, g^1, ...g^{n-1}\}$ — все эти элементы различны из пункта 2 утверждения, а других нет по определению порядка. □

Примеры.

1. $i \in \mathbb{C}^*$ — ord $i = 4$;

2. $\sigma \in S_n$:
   Если $\sigma = (i_1, ..., i_k)$ — цикл длины k, то ord $\sigma = k$.
   Так как любая подстановка раскладывается в произведение независимых циклов и независимые циклы коммутируют, если $\sigma = \tau_1 ... \tau_n$, где τ_i — независимые циклы, то верно: ord $\sigma =$ НОК $\{|\tau_1|, ..., |\tau_n|\}$.
   Например, $\sigma = (23)(145) \Longrightarrow$ ord $\sigma = 6$.

Утверждение 2. *Пусть* $n =$ ord g. *Тогда* ord $g^k = \frac{n}{НОД(n,k)}$.

Доказательство. Пусть ord $g^k = m$. Из утверждения 1: $g^{mk} = e \iff n | mk$, откуда $\frac{n}{\text{НОД}(n,k)} | m$, т.е. $m \geqslant \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$. Очевидно, что при $m = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)}$ $n | mk$. $\square$

Определение. Множество $S \subseteq G$ называется порождающим множеством для группы G, если $\forall g \in G \ \exists s_1, ..., s_k \in S : \ g = s_1^{\varepsilon_1} ... s_k^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ (s_i не обязательно различны).
При этом говорят, что G порождается множеством S.
Если $\exists$ конечное множество S такое, что S порождает G, то G называется конечно порождённой, и бесконечно порождённой иначе.
Обозначается $\langle S \rangle = \{ s_1^{\varepsilon_1} ... s_k^{\varepsilon_k} | \varepsilon_i = \pm 1 \}$ — группа, порождённая S.

Примеры.

1. $S_n = \langle$все транспозиции$\rangle$;

2. $GL_n(F) = \langle$все элементарные матрицы$\rangle$

3. $Q_8 = \langle i, j \rangle$;

4. $D_n = \langle \alpha, s \rangle$, где α — поворот на $\frac{2\pi}{n}$, а s — любая из симметрий.

5. Группа Клейна: $H = \{\text{id}, a = (12)(34), b = (13)(24), c = (14)(23)\} \leq S_4$
   Это группа симметрий прямоугольника, не являющегося квадратом: a, c — симметрии относительно средних линий, b — поворот на π вокруг центра.
   Таблица Кэли для группы Клейна:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

   Отсюда $\{e, a, b, c\} = \langle a, b \rangle$.

6. $\mathbb{Q}$ — бесконечно порождённая.

1.2 Циклические группы

Определение. Группа G называется циклической, если G порождается одним элементом, т.е. $\exists g \in G : \forall h \in G\ \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$. Элемент g также называется образующим элементом группы G.

Примеры.

1. $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$, $\mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$;
2. U_n — множество всех комплексных корней степени n из 1.
   U_n — группа относительно умножения, причём $U_n = \langle \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \rangle$.

Утверждение 3. *Если $G = \langle g \rangle$, то $|G| = \operatorname{ord} g$.*

Доказательство. Очевидно из определения порождающего множества. □

Замечание. Для групп конечного порядка, очевидно, выполняется и обратное утверждение: если $\operatorname{ord} g = |G| < \infty$, то $G = \langle g \rangle$.

Далее циклическую группу порядка n будем обозначать $\langle g \rangle_n$.

Утверждение 4. *Пусть $G = \langle g \rangle_n$. Тогда $G = \langle g^k \rangle \iff \text{НОД}(k, n) = 1$.*

Доказательство. Из утверждения 3 $|G| = \operatorname{ord} g$. Тогда:

$$G = \langle g^k \rangle \iff \operatorname{ord} g^k = \frac{n}{\text{НОД}(n,k)} = n \iff \text{НОД}(n,k) = 1$$

□

Теорема 1 (Классификация циклических групп)**.**

1. *Если циклическая группа G бесконечна, то $G \simeq \mathbb{Z}$;*
2. *Если циклическая группа G конечна и имеет порядок n, то $G \simeq \mathbb{Z}_n$.*

Доказательство.

1. Пусть $\operatorname{ord} g = \infty, \forall h \in G\ \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$
   Рассмотрим отображение $\varphi : G \to \mathbb{Z}$ такого вида: $\varphi : g^k \mapsto k$. Очевидно, что φ — сюръекция (в $k \in \mathbb{Z}$ перешёл $g^k \in G$).

$\varphi(g^k) = \varphi(g^m) \Longrightarrow k = m \Longrightarrow g^k = g^m$ — отсюда φ — инъекция.
Проверим сохранение операции:

$$\varphi(g^k \cdot g^m) = \varphi(g^{k+m}) = k + m = \varphi(g^k) + \varphi(g^m)$$

Отсюда φ — изоморфизм.

2. Пусть $\operatorname{ord} g = n$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_n \to G$ такого вида: $\varphi : k \mapsto g^k$. Очевидно, что φ — сюръекция (в $g^k \in G$ перешёл $k \in \mathbb{Z}_n$).
$k \equiv m (\mathrm{mod}\ n) \Longleftrightarrow g^k = g^m$ — отсюда φ — инъекция.
Сохранение операции — аналогично пункту 1.
Отсюда φ — изоморфизм.

□

Следствие. *Если G_1, G_2 — циклические группы, то $G_1 \simeq G_2 \Longleftrightarrow |G_1| = |G_2|$.*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: верно всегда;
$\Longleftarrow$: из теоремы: если G_1 бесконечна, то $G_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq G_2$, иначе $G_1 \simeq \mathbb{Z}_n \simeq G_2$, где $n = |G_1| = |G_2|$. □

Теорема 2.

1. *Любая подгруппа циклической группы является циклической.*
2. *Подгруппы циклической группы G порядка n находятся во взаимно однозначном соответствии с делителями n, т.е.*

$$\forall H \leq G\ |H| \mid n \text{ и } \forall d|n\ \exists!\ H \leq G : |H| = d$$

3. *Подгруппы группы $\mathbb{Z}$ исчерпываются группами $k\mathbb{Z} = \langle k \rangle$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Доказательство.

1. Пусть $G = \langle g \rangle, H \leq G$. Если $H = \{e\}$, то $H = \langle e \rangle$.
При $H \neq \{e\} : \forall h \in H\ \exists k \in \mathbb{Z} : h = g^k$. Так как $g^k \in H \Longrightarrow g^{-k} \in H$ и в H есть элемент, отличный от e, $\exists$ наименьшее $k \in \mathbb{N} : g^k \in H$.
Докажем, что $H = \langle g^k \rangle$. Рассмотрим произвольный $g^m \in H$. Разделим m на k с остатком: $m = kq + r, 0 \leqslant r < k$. Тогда:

$$g^m = (g^k)^q \cdot g^r \Longrightarrow g^r = (g^k)^{-q} \cdot g^m$$

то есть $g^r \in H$, а в силу того, что k — наименьшее натуральное число такое, что $g^k \in H$, имеем $r = 0$. Значит, $g^m = (g^k)^q$, а отсюда $H = \langle g^k \rangle$.

2. $G = \langle g \rangle_n, H \leq G \overset{1}{\Longrightarrow} H = \langle g^k \rangle$.
   Так как $g^n = e \in H$, то в силу рассуждений пункта 1 при $m = n$ получаем $k|n \Longrightarrow n = kq$.
   Отсюда $H = \{e, g^k, g^{2k}, ..., g^{(q-1)k}\} \Longrightarrow |H| = q$, где $q|n$.
   Обратно, $\forall d|n \; \exists! H = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$ (в силу описания выше других подгрупп такого порядка нет).

3. Из пункта 1 в аддитивной форме получаем, что $H \leq \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \Longrightarrow H = \langle k \cdot 1 \rangle$

□

Следствие. *В циклической группе простого порядка существуют ровно две подгруппы — тривиальная и сама группа.*

Примеры.

1. $H \leq \mathbb{Z}_5 \Longrightarrow H = \{0\}, H = \mathbb{Z}_5$;
2. $H \leq \mathbb{Z}_6 \Longrightarrow H = \{0\}, H = \langle 2 \rangle, H = \langle 3 \rangle, H = \mathbb{Z}_6$.

1.3 Смежные классы

Определение. Пусть $(G, \cdot, e)$ — произвольная группа, $H \leq G, g \in G$.
Рассмотрим множества:

$gH = \{gh | h \in H\}$ — левый смежный класс G по H с представителем g

$Hg = \{hg | h \in H\}$ — правый смежный класс G по H с представителем g

Утверждение (Свойства смежных классов)**.**

1. $\forall a \in G \; a \in aH$;
2. *если* $a \in bH$, *то* $bH = aH$; *в частности, любые два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.*
3. $aH = bH \Longleftrightarrow b^{-1}a \in H$;
   (Верны аналогичные утверждения для правых смежных классов)

Доказательство.

1. Очевидно;
2. $a \in bH \Longrightarrow \exists h \in H : a = bh \Longrightarrow \forall \tilde{h} \in H \; a\tilde{h} = bh\tilde{h} \in bH \Longrightarrow aH \subseteq bH$.
   Аналогично $bH \subseteq aH \Longrightarrow aH = bH$.

3. $\Longrightarrow$: $aH = bH \Longrightarrow a \in bH (a \in aH) \Longrightarrow \exists h \in H : a = bh \Longrightarrow b^{-1}a = h \in H$
   $\Longleftarrow$: $b^{-1}a = h \in H \Longrightarrow a = bh \Longrightarrow aH = bH$ по пункту 2.

□

Утверждение. *Отношение $a \equiv b \pmod H \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$ является отношением эквивалентности, причём классы эквивалентности совпадают с левыми смежными классами (аналогично $ab^{-1} \in H$ для правых).*

Доказательство.

- Рефлексивность: $a^{-1}a = e \in H \Longrightarrow a \equiv a \pmod H$;
- Симметричность: $a \equiv b \pmod H \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H \Rightarrow b \equiv a \pmod H$;
- Транзитивность: $a \equiv b, b \equiv c \pmod H \Longrightarrow c^{-1}b, b^{-1}a \in H \Longrightarrow c^{-1}b \cdot b^{-1}a = c^{-1}a \in H \Longrightarrow a \equiv c \pmod H$.

Совпадение классов эквивалентности с левыми смежными классами следует из пункта 3 предыдущего утверждения. □

Утверждение. *Если G — абелева, то $\forall a \in G : aH = Ha$.*
(В общем случае данное утверждение неверно).

Доказательство. $\forall a \in G : \ \{ah : h \in H\} = \{ha : h \in H\} \Longrightarrow aH = Ha.$ □

Примеры.

1. $H = \langle (12) \rangle \leq S_3 \ \ (H = \{id, (12)\}), \ g = (13)$.
   $(13)(12) = (123); \ (12)(13) = (132)$.
   Тогда $\{(13), (123)\} = gH \neq Hg = \{(13), (132)\}$.
2. $H = 3\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$. Смежные классы — $3\mathbb{Z}, 1 + 3\mathbb{Z}, 2 + 3\mathbb{Z}$.
3. $H = \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$. Смежные классы — $a + bi + \mathbb{R} = bi + \mathbb{R}$.

Утверждение. *Множество $\{aH : a \in G\}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\{Ha : a \in G\}$.*

Доказательство. $gH \leftrightarrow Hg^{-1} : x = gh \in gH \leftrightarrow x^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in Hg^{-1}.$ □

Следствие. $|\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$

Определение. Мощность множества левых смежных классов группы G по подгруппе H называется индексом H в G. Обозначение: $|G : H|$

Пример. $|\mathbb{Z} : 3\mathbb{Z}| = 3$, т.к. смежные классы — $\{3\mathbb{Z},\ 1 + 3\mathbb{Z},\ 2 + 3\mathbb{Z}\}$.

Теорема. *(Теорема Лагранжа)*
Пусть G — конечная группа, $H \leq G$. Тогда $|G| = |H| \cdot |G : H|$.

Доказательство. Так как $|G| < \infty$, то $|H| < \infty$, т.е. $H = \{h_1, \ldots, h_k\}$.
$\forall g \in G,\ gH = \{gh_1, \ldots, gh_k\}$, причем $gh_i = gh_j \Rightarrow h_i = h_j \Rightarrow |gH| = |H|$.
Отсюда, если $|G : H| = n$:

$$G = \bigsqcup_{i=1}^{n} a_i H \Longrightarrow |G| = \sum_{i=1}^{n} |a_i H| = |G : H| \cdot |H|$$

□

Следствие 1. *Если G — конечная группа, $H \leq G$, то $|H| \mid |G|$.*
(Обратное утверждение неверно).

Упражнение. Пусть $G = A_4$ (группа чётных перестановок).
$|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. Докажем, что в A_4 нет подгруппы порядка 6.
Предположим, что $H \leq A_4$ и $|H| = 6$. A_4 состоит из элемента id, 3 элементов вида $(ab)(cd)$ и восьми элементов вида (abc). Значит, H содержит хотя бы один элемент вида (abc) (с точностью до перенумерования — (123)). Тогда H содержит и $(123)^{-1} = (132)$. Также знаем, что группа чётного порядка содержит элемент порядка 2 (иначе в группе все элементы, кроме e, разбиваются на пары обратных, и элементов нечётное число), поэтому H содержит $\sigma = (**)(**)$. Рассмотрим $\omega = \sigma(123)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ (это равенство легко проверить, подставив в него $\sigma(1), ..., \sigma(4)$). Очевидно, что это цикл длины 3, не оставляющий на месте 4 (т.к. σ не оставляет на месте 4). Значит, ω и ω^{-1} принадлежат H и не совпадают с предыдущими элементами (и друг с другом), т.е.

$$H = \{id, (123), (132), \sigma, \omega, \omega^{-1}\}$$

Осталось перебрать возможные значения σ:

- $\sigma = (12)(34) \Longrightarrow (123)(12)(34)(132) = (14)(23) \notin H$;
- $\sigma = (13)(24) \Longrightarrow (123)(13)(24)(132) = (12)(34) \notin H$;
- $\sigma = (14)(23) \Longrightarrow (123)(14)(23)(132) = (13)(24) \notin H$;

Отсюда таких H не существует.

Следствие 2. *Если G — конечная группа, то $\forall g \in G : \operatorname{ord} g \mid |G|$*

Доказательство. $\operatorname{ord} g = |\langle g \rangle| \mid |G|$. □

Следствие 3. *Если G — конечная группа порядка n, то $\forall g \in G : g^n = e$ в G.*

Доказательство. По следствию 2: $n = \operatorname{ord} g \cdot k \Rightarrow g^n = g^{(\operatorname{ord} g) \cdot k} = e^k = e$. □

Пример. Пусть $G = \mathbb{Z}_p^*$, p — простое, $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$. По следствию 3:
$\forall a \in \mathbb{Z}_p^* : a^{p-1} = 1$ в $\mathbb{Z}_p^*$, отсюда $\forall a \in \mathbb{Z},\ p \nmid a : a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ — малая теорема Ферма.

Следствие 4. *Любая группа G простого порядка p является циклической.*

Доказательство. $\forall a \in G,\ a \neq e : \operatorname{ord} a \neq 1,\ \operatorname{ord} a \mid |G| = p \Rightarrow \operatorname{ord} a = |G| \Rightarrow G = \langle a \rangle$. □

Упражнение. Доказать, что с точностью до изоморфизма существует ровно две группы порядка 4 — $\mathbb{Z}_4$ и V_4.

Доказательство. Пусть G — группа порядка 4. Заметим, что по следствию 2 порядок неединичного элемента в G может быть равен либо 2, либо 4. Если в G есть элемент порядка 4, то G циклическая, а тогда по теореме о классификации циклических групп $G \simeq \mathbb{Z}_4$.
Пусть $G = \{e, a, b, c\}, \operatorname{ord} a = \operatorname{ord} b = \operatorname{ord} c = 2$. Посмотрим, чему может быть равно ab:

- $ab = e \Longrightarrow aab = a \Longrightarrow b = a$ — противоречие;
- $ab = a \Longrightarrow aab = aa \Longrightarrow b = e$ — противоречие;
- $ab = b \Longrightarrow abb = bb \Longrightarrow a = e$ — противоречие.

Отсюда $ab = c$ — аналогично произведение любых двух различных неединичных элементов равно третьему. Отсюда таблица Кэли для G имеет вид

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

откуда видно, что $G \simeq V_4$. □

Упражнение. Доказать, что если в группе G все неединичные элементы имеют порядок 2, то G — абелева.

Доказательство. $\operatorname{ord} a = 2 \Longrightarrow a = a^{-1} \Longrightarrow \forall a, b \in G : ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$. □

Пример. $H = \langle (12) \rangle \leq S_3,\ g = (13) \Rightarrow gH \neq Hg$

Определение. Подгруппа H группы G называется нормальной, если

$$\forall g \in G : gH = Hg \Longleftrightarrow \forall g \in G : gHg^{-1} = H \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall g \in G : gHg^{-1} \subseteq H \Longleftrightarrow \forall g \in G,\ \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$$

Обозначение: $H \trianglelefteq G$.

Эквивалентность определений:

- $1 \Longleftrightarrow 2$ — очевидно;
- $2 \Longleftrightarrow 3$:
  $\Longleftarrow$: $gHg^{-1} \subseteq H \Leftrightarrow H \subseteq g^{-1}Hg$ — из условия на всевозможные g получаем равенство;
  $\Longrightarrow$ — очевидно;
- $3 \Longleftrightarrow 4$ — из определения смежного класса.

□

Примеры.

1. $A_n \trianglelefteq S_n$, так как $\forall \sigma \in S_n,\ \forall \tau \in A_n : \sigma\tau\sigma^{-1} \in A_n$.
2. $SL_n(\mathbb{R}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{R})$, так как $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in SL_n(\mathbb{R}) : \det(ABA^{-1}) = \det B = 1 \Rightarrow ABA^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$.

Утверждение. *В абелевой группе любая подгруппа является нормальной.*

Упражнение. Докажите, что если $|G : H| = 2$, то $H \trianglelefteq G$ для произвольной группы G и произвольной подгруппы $H \leq G$.

Доказательство. Если $|G : H| = 2$, то G разбивается на два непересекающихся левых (правых) смежных класса по H. Очевидно, что один из этих классов в обоих случаях — сама подгруппа H. Тогда $\forall g \in G \setminus H$ группа G разбивается на левые смежные классы H и gH, а также на правые смежные классы H и Hg, откуда $gH = Hg$. Также очевидно, что $\forall h \in H : hH = H = Hh$. Значит, $\forall g \in G : gH = Hg \Longrightarrow H \trianglelefteq G$. □

1.4 Факторгруппа

Утверждение. *Пусть G — группа, $H \trianglelefteq G$. Тогда множество всех смежных классов G по H : $G/H = \{eH, aH, ...\}$ образует группу относительно операции $aH \cdot bH = abH$.*

Доказательство.

1. Проверим корректность операции, т.е. $\begin{cases} aH = \tilde{a}H \\ bH = \tilde{b}H \end{cases} \implies abH = \tilde{a}\tilde{b}H.$

   Действительно, если $\begin{cases} a = \tilde{a}h_a \\ b = \tilde{b}h_b \end{cases}$ из равенства смежных классов, то:

   $$\forall x \in abH \implies \exists h \in H : x = abh = \tilde{a}h_a\tilde{b}h_bh = \tilde{a}\tilde{b}h'h_bh \in \tilde{a}\tilde{b}H$$

   $(H \trianglelefteq G \implies Hb = bH \implies \exists h' \in H : h_a\tilde{b} = \tilde{b}h')$

2. Проверим, что это группа:

   - Ассоциативность:

     $aH(bH \cdot cH) = aH(bcH) = a(bc)H = (ab)cH = (abH)cH = (aH \cdot bH)cH$

   - Нейтральный элемент:

     $$eH = H : aH \cdot eH = aeH = aH = eaH = eH \cdot aH$$

   - Обратный элемент:

     $$\forall\ aH\ \exists\ a^{-1}H : aH \cdot a^{-1}H = eH = a^{-1}H \cdot aH$$

□

Определение. Группа G/H называется факторгруппой G по H.

Замечание. Если $H \not\trianglelefteq G$, то операция $aH \cdot bH = abH$ некорректна:

$$\langle(12)\rangle \leq S_3 :\ (13)H = (132)H, (23)H = (123)H;$$

$$(13)(23)H = (132)H \neq H = (123)(123)H$$

Примеры.

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$;
2. $A_n \trianglelefteq S_n, S_n/A_n \simeq \mathbb{Z}_2$ (по чётности);
3. $\mathbb{R} \trianglelefteq \mathbb{C}, \mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ $(bi + \mathbb{R} \mapsto b)$.

1.5 Гомоморфизмы групп

Определение. Пусть $(G, \cdot, e), (\tilde{G}, \cdot, \tilde{e})$ — группы. Отображение $\varphi : G \to \tilde{G}$ называется гомоморфизмом групп G и $\tilde{G}$, если $\forall a, b, \in G\ \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Замечание. В частности, изоморфизм — биективный гомоморфизм.

Утверждение (Свойства гомоморфизмов)**.**

1. $\varphi(e) = \tilde{e}$;
2. $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$

Определение. Множество $\operatorname{Im} \varphi = \{b \in \tilde{G} \mid \exists a \in G : \varphi(a) = b\}$ — образ гомоморфизма. Множество $\operatorname{Ker} \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = \tilde{e}\}$ — ядро гомоморфизма.

Утверждение 1.

1. $\operatorname{Im} \varphi \leq \tilde{G}$;
2. $\operatorname{Ker} \varphi \trianglelefteq G$.

Доказательство.

1. $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \tilde{G}$
   - $x, y \in \operatorname{Im} \varphi \Rightarrow \exists a, b \in G : x = \varphi(a), y = \varphi(b) \Longrightarrow xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \operatorname{Im} \varphi$;
   - $\tilde{e} = \varphi(e) \in \operatorname{Im} \varphi$;
   - $\forall x \in \operatorname{Im} \varphi\ \exists a \in G : \varphi(a) = x \Longrightarrow x^{-1} = (\varphi(a))^{-1} = \varphi(a^{-1}) \in \operatorname{Im} \varphi$

   Отсюда $\operatorname{Im} \varphi \leq \tilde{G}$.
2. $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq G$
   - $\forall a, b \in \operatorname{Ker} \varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = \tilde{e} \Longrightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \tilde{e} \Longrightarrow ab \in \operatorname{Ker} \varphi$;
   - $\tilde{e} = \varphi(e) \Longrightarrow e \in \operatorname{Ker} \varphi$;
   - $\forall a \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = \tilde{e}^{-1} = \tilde{e} \Longrightarrow a^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi$

   Отсюда $\operatorname{Ker} \varphi \leq G$.
   $\varphi(ghg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1} = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = \tilde{e} \Rightarrow ghg^{-1} \in \operatorname{Ker} \varphi \Longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \trianglelefteq G$.

□

Утверждение 2. $\varphi(a) = \varphi(b) \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$.
В частности, φ *инъективно* $\iff \text{Ker } \varphi = \{e\}$.

Доказательство.

$$\varphi(a) = \varphi(b) \iff \varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \tilde{e} \iff \varphi(ab^{-1}) = \tilde{e} \iff$$

$$ab^{-1} \in \text{Ker } \varphi \iff a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$$

□

Пример. $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* : \varphi(A) = \det A$.
$\text{Ker } \varphi = SL_n(\mathbb{R}), \text{Im } \varphi = \mathbb{R}^* \Longrightarrow R^* \simeq GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R})$.

Теорема (О гомоморфизме)**.** *Пусть* $G, \tilde{G}$ *— группы,* $\varphi : G \to \tilde{G}$ *— гомоморфизм.*
Тогда $G/\text{Ker } \varphi \simeq \text{Im } \varphi$.

Доказательство. Для начала заметим, что $\text{Ker } \varphi \trianglelefteq G$, поэтому факторгруппа $G/\text{Ker } \varphi$ определена.
Рассмотрим $\psi :\ g\text{Ker } \varphi \mapsto \varphi(g)$:

- Корректность:
  По утверждению 2: $g_1\text{Ker } \varphi = g_2\text{Ker } \varphi \Longrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$;
- Биективность:
  Сюръективность: $\forall b \in \text{Im } \varphi\ \exists a \in G : \varphi(a) = b \Longrightarrow \psi(a\text{Ker } \varphi) = b$;
  Инъективность: по утверждению 2: $\psi(a\text{Ker } \varphi) = \psi(b\text{Ker } \varphi) \Longrightarrow \varphi(a) = \varphi(b) \Longrightarrow a\text{Ker } \varphi = b\text{Ker } \varphi$;
- Сохранение операции:

$$\psi((g_1\text{Ker } \varphi)(g_2\text{Ker } \varphi)) = \psi(g_1g_2\text{Ker } \varphi) = \varphi(g_1g_2) =$$

$$= \varphi(g_1)\varphi(g_2) = \psi(g_1\text{Ker } \varphi)\psi(g_2\text{Ker } \varphi)$$

Отсюда $\psi : G/\text{Ker } \varphi \to \text{Im } \varphi$ — изоморфизм. □

Пример. Пусть $G = S_n, \tilde{G} = \mathbb{R}^*, \varphi(\sigma) = \text{sgn}\,\sigma$.
Тогда из теоремы о гомоморфизме:

$$\text{Im } \varphi = \{\pm 1\}, \text{Ker } \varphi = A_n \Longrightarrow S_n/A_n \simeq \{\pm 1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

Следствие 1. *Гомоморфизм $\varphi : G \to \tilde{G}$ — изоморфизм* $\iff \begin{cases} \mathrm{Ker}\ \varphi = \{e\} \\ \mathrm{Im}\ \varphi = \tilde{G} \end{cases}$

Доказательство.
$\Longrightarrow$ — очевидно из биективности;
$\Longleftarrow$ — изоморфизм из теоремы совпадёт с φ. □

Следствие 2. *Если $|G| < \infty$, то $|G| = |\mathrm{Ker}\ \varphi| \cdot |\mathrm{Im}\ \varphi|$.*

Доказательство. $|G| = |G/\mathrm{Ker}\ \varphi| \cdot |\mathrm{Ker}\ \varphi| = |\mathrm{Im}\ \varphi| \cdot |\mathrm{Ker}\ \varphi|$. □

Утверждение. *Пусть G — группа, $H \trianglelefteq G$. Тогда $\exists$ такая группа $\tilde{G}$, что $\exists$ сюръективный гомоморфизм $\pi : G \to \tilde{G}$, причём* $\mathrm{Ker}\ \pi = H$.

Доказательство. Подходят $\tilde{G} = G/H, \pi : g \mapsto gH$. □

Определение. Приведённый выше гомоморфизм $\pi : G \mapsto G/H$ называется каноническим (естественным, натуральным) гомоморфизмом из G в G/H.

Определение. Эпиморфизм — сюръективный гомоморфизм.

Утверждение. *Пусть $\varphi : G \to \tilde{\tilde{G}}$ — произвольный эпиморфизм с ядром H. Тогда $\exists$ изоморфизм $\psi : G/H \to \tilde{\tilde{G}}$ такой, что $\varphi = \psi \circ \pi$, где π — натуральный гомоморфизм из G в G/H.*

Доказательство. По теореме о гомоморфизме $G/\mathrm{Ker}\ \varphi \simeq \mathrm{Im}\ \varphi$.
Так как φ — сюръекция, $\mathrm{Im}\ \varphi = \tilde{\tilde{G}}$, также по условию $\mathrm{Ker}\ \varphi = H$. Тогда $\psi : G/H \to \tilde{\tilde{G}}$ — изоморфизм, заданный в доказательстве теоремы о гомоморфизме: $\psi : gH \mapsto \varphi(g)$.
Взяв этот изоморфизм, получим $\varphi = \psi \circ \pi$ (так как $g \overset{\pi}{\mapsto} gH \overset{\psi}{\mapsto} \varphi(g)$). □

2 Свободные группы

Определение. Тривиальные (групповые) соотношения — соотношения, которые выводятся из аксиом группы (и, соответственно, есть в любой группе).

Построим группу, в которой нет других соотношений.

Определение. Пусть A — множество символов (букв), A^{-1} — множество символов (букв) a^{-1}, где $a \in A$.
Условия на эти множества:

1. $\forall a^{-1} \in A^{-1} \Longrightarrow a^{-1} \notin A$;
   $\forall a \in A \Longrightarrow a \notin A^{-1}$;
2. $(a^{-1})^{-1} = a$;
   Буквы a, a^{-1} назовём взаимно обратными.

Множество $A^{\pm 1} = A \sqcup A^{-1}$ называется алфавитом.
Слово в алфавите $A^{\pm 1}$ — конечная последовательность букв $X = x_1...x_k$, где $x_i \in A^{\pm 1}$.
Длина слова X (обозначается $|X|$) — количество букв в X.

Пример. $A = \{a, b\} : X = abaab^{-1} \Rightarrow |X| = 5$.

Определение. Слово $X = x_1...x_k$ — сократимое, если $\exists i \in \overline{1, .., k-1} : x_i = x_{i+1}^{-1}$.
Сокращением взаимно обратных букв назовём вычёркивание пары x_i, x_{i+1} из X (получим слово длины $|X| - 2$).
За конечное число сокращений получим слово $\tilde{X}$, не являющееся сократимым — такое $\tilde{X}$ называется результатом полного сокращения слова X.

Определение. Рассмотрим множество $F(A)$ всех несократимых слов в $A^{\pm 1}$.
Введём бинарную операцию на $F(A)$: пусть $X = x_1...x_k, Y = y_1...y_m$.
Если $x_k \neq y_1^{-1}$, то XY — конкатенация (приписывание) X и Y:
$XY = x_1...x_k y_1...y_m, |XY| = k + m$.
Если $x_k = y_1^{-1}$, то XY — результат полного сокращения слова $x_1...x_k y_1...y_m$.

Пример. $(abcda^{-1}b)(b^{-1}ad^{-1}aab) = abcaab$.

Определение. Если $|X| = 0$, то X называется пустым словом (обозначим λ).
Пустое слово по определению несократимо и лежит в $F(A)$.

Теорема. *$F(A)$ с приведённой выше бинарной операцией — группа.*

Доказательство.

1. Ассоциативность:
   Пусть $X = x_1...x_k, Z = z_1...z_m$.
   Случай $|Y| = 0 \Longrightarrow Y = \lambda$ очевиден $(XZ = XZ)$;
   Индукция по длине слова Y:
   База индукции: $|Y| = 1 \Longrightarrow Y = a \in A^{\pm 1}$. Индукция по $|X| + |Z|$:
   База внутренней индукции:
   $|X| + |Z| = 0$ — очевидно $(a = a)$;
   $|X| + |Z| = 1$ — очевидно (одно из слов X, Z пустое);
   Шаг внутренней индукции $(k + m - 2 \to k + m)$ — рассмотрим случаи:
   - $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(YZ) = x_1...x_k a z_1...z_m = (XY)Z$;
   - $a^{-1} = x_k, a^{-1} \neq z_1 : X(aZ) = X(az_1...z_m) =$
     $=$ результат полного сокращения $x_1...x_{k-1}a^{-1}az_1...z_m =$
     $=$ результат полного сокращения $x_1...x_{k-1}z_1...z_m = (Xa)Z$;
   - $a^{-1} \neq x_k, a^{-1} = z_1$ — аналогично предыдущему;
   - $a^{-1} = x_k, a^{-1} = z_1$: пусть $X = X'a^{-1}, Z = a^{-1}Z'$. Тогда:
     $X(aZ) = X(a(a^{-1}Z')) = XZ' = (X'a^{-1})Z'$
     $(Xa)Z = (X'a^{-1}a)Z = X'Z = X'(a^{-1}Z')$
     При этом $|X'| + |Z'| = k + m - 2$, то есть $X'(a^{-1}Z') = (X'a^{-1})Z'$ по предположению внутренней индукции.

   Во всех случаях $X(aZ) = (Xa)Z \Longrightarrow$ база доказана.
   Шаг индукции: Пусть $Y = y_1...y_l$. Тогда:

$$X(YZ) = X(y_1...y_l \cdot Z) = X((y_1...y_{l-1} \cdot y_l)Z) \overset{1}{=} X((y_1...y_{l-1}) \cdot (y_l Z)) \overset{2}{=}$$
$$\overset{2}{=} (X \cdot y_1...y_{l-1})(y_l Z) \overset{3}{=} (X \cdot y_1...y_l)Z = (XY)Z$$

   1, 3 — из утверждения базы индукции; 2 — по предположению индукции.

2. λ — нейтральный элемент;

3. обратный элемент к $x_1...x_k$ — элемент $x_k^{-1}...x_1^{-1}$.

□

Определение. Построенная группа $F(A)$ называется свободной группой с базисом A. (A также называется свободной порождающей системой группы). Любая группа, изоморфная $F(A)$, также называется свободной.

Утверждение. *Пусть* $H \leq SL_2(\mathbb{Z}) : H = \langle \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Тогда $H \simeq F(A)$ *с базисом* $A = \{a, b\}$.

Доказательство. Без доказательства. □

Утверждение. *Все базисы свободной группы равномощны.*

Доказательство. Без доказательства. □

Определение. Ранг свободной группы — мощность её базиса.

Замечание. Заметим, что в $F(A)$ результат умножения определён однозначно $\Longrightarrow$ однозначно определён элемент $x_1 \cdot ... \cdot x_k$, где $x_i \in A^{\pm 1}$.
Тогда если считать слово $x_1...x_k$ результатом умножения $x_1 \cdot ... \cdot x_k$, то можно опускать знак умножения, и в этом смысле работать и с сократимыми словами.

Пример. $abb^{-1}ba^{-1}a = a \cdot b \cdot b^{-1} \cdot b \cdot a^{-1} \cdot a = ab \in F(A)$.

Теорема 1 (Универсальное свойство свободной группы)**.**
Пусть G *— группа,* $\{g_i \mid i \in I\} \subset G$ *— произвольное множество её элементов.*
Рассмотрим свободную группу $F(A)$ *с базисом* $A = \{a_i \mid i \in I\}$.
Тогда отображение $\varphi : a_i \mapsto g_i$ *продолжается до гомоморфизма* $\varphi : F(A) \to G$*, причём единственным образом.*

Доказательство. Пусть $W = a_{i_1}^{\varepsilon_1}...a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ — несократимое слово из $F(A)$, где $\varepsilon_i = \pm 1, a_{i_j} \in A$. Зададим $\varphi : F(A) \to G$ по правилу $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1}...g_{i_k}^{\varepsilon_k}$.
Проверим, что φ — гомоморфизм ($W, \tilde{W} \in F(A), W = a_{i_1}^{\varepsilon_1}...a_{i_k}^{\varepsilon_k}, \tilde{W} = a_{j_1}^{\tau_1}...a_{j_m}^{\tau_m}$):

$$\varphi(W\tilde{W}) = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1}...a_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot a_{j_1}^{\tau_1}...a_{j_m}^{\tau_m}) = g_{i_1}^{\varepsilon_1}...g_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdot g_{j_1}^{\tau_1}...g_{j_m}^{\tau_m} =$$

$$= (g_{i_1}^{\varepsilon_1}...g_{i_k}^{\varepsilon_k}) \cdot (g_{j_1}^{\tau_1}...g_{j_m}^{\tau_m}) = \varphi(W)\varphi(\tilde{W})$$

Единственность такого гомоморфизма очевидна:
$\varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1}...a_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varphi(a_{i_1})^{\varepsilon_1}...\varphi(a_{i_k})^{\varepsilon_k} = g_{i_1}^{\varepsilon_1}...g_{i_k}^{\varepsilon_k}$ — определено однозначно. □

Пример. (несвободной группы)
$S_3 = \langle (12), (123) \rangle : \forall g \in S_3 \; g^6 = id$. Попытаемся продолжить до гомоморфизма $S_3 \to Q_8$ отображение $\varphi : (12) \mapsto i, (123) \mapsto j$:
$-1 = i^2 = \varphi((12))^2 = \varphi((12)^2) = \varphi(id) = 1$ — противоречие.

Следствие 1. *Пусть* G *— группа,* $M = \{g_i \mid i \in I\}$ *— порождающее множество* G*,* $F(A)$ *— свободная группа с базисом* $A = \{a_i \mid i \in I\}$.
Тогда $\exists!$ *сюръективный гомоморфизм* $\varphi : F(A) \to G$ *такой, что* $\forall i \in I : \varphi(a_i) = g_i$.

Доказательство. Достаточно показать, что в этом случае гомоморфизм из доказательства теоремы сюръективен — это следует из того, что множество $\{g_i \mid i \in I\}$ порождает группу G (каждый элемент представим как $g_{i_1}^{\varepsilon_1}...g_{i_k}^{\varepsilon_k} = \varphi(a_{i_1}^{\varepsilon_1}...a_{i_k}^{\varepsilon_k})$). □

Следствие 2. *Любая группа G изоморфна факторгруппе некоторой свободной группы по некоторой её нормальной подгруппе.*

Доказательство. Пусть $\varphi : F(A) \to G$ — гомоморфизм из следствия 1.
Так как $\mathrm{Ker}\ \varphi \trianglelefteq F(A)$, из теоремы о гомоморфизме $G = \mathrm{Im}\ \varphi \simeq F(A)/\mathrm{Ker}\ \varphi$. □

Определение. Сюръективный гомоморфизм $\varphi : F(A) \to G$ — из следствия 1 называется копредставлением группы G.

Замечание. Копредставление зависит от выбора порождающего множества M.

2.1 Задание группы порождающими и определяющими соотношениями

По следствию 2: $G \simeq F(A)/N$, где $N \trianglelefteq F(A)$. Отсюда задание группы G сводится к заданию A и N.
N — нормальная $\Longrightarrow \forall f \in F(A), \forall h \in N : fhf^{-1} \in N$.

Определение. Пусть $\mathcal{R} \subseteq F(A)$. Нормальным замыканием множества $\mathcal{R}$ в группе $F(A)$ называется наименьшая (по включению) нормальная подгруппа, содержащая $\mathcal{R}$. Обозначается $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$

Утверждение.
$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} = \{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1})...(f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\}$

Доказательство.
Пусть $\{(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1})...(f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \mid r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i = \pm 1\} = H$. Тогда:
$\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \trianglelefteq F(A) \Longrightarrow \forall r_i \in \mathcal{R}, f_i \in F(A), \varepsilon_i \in \{\pm 1\} : f_i r_i^{\varepsilon_i} f_i^{-1} \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \Longrightarrow H \subseteq \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$. Осталось показать, что $H \trianglelefteq F(A)$:

$$\forall h \in H, g \in F(A) : ghg^{-1} = g(f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1})...(f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1})g^{-1} =$$

$$= ((gf_1) r_1^{\varepsilon_1} (f_1^{-1} g^{-1}))...((gf_k) r_k^{\varepsilon_k} (f_k^{-1} g^{-1})) =$$

$$= ((gf_1) r_1^{\varepsilon_1} (gf_1)^{-1})...((gf_k) r_k^{\varepsilon_k} (gf_k)^{-1}) \in H$$

Отсюда минимальная группа, содержащая $\mathcal{R}$, в точности равна H. □

Утверждение. *Любую нормальную подгруппу $N \trianglelefteq F(A)$ можно задать как $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ для подходящего $\mathcal{R} \subset F(A)$.*

Доказательство. Очевидно, подойдёт $\mathcal{R} = N$. □

Элементарные преобразования над словами в $F(A)$:
(под словами в $F(A)$ подразумеваются любые произведения букв, а не только элементы $F(A)$)

- ЭП1: $W = W_1 a^{\varepsilon} a^{-\varepsilon} W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$, где $a \in A, \varepsilon = \pm 1$;
- ЭП2: $W = W_1 r^{\varepsilon} W_2 \mapsto \tilde{W} = W_1 W_2$, где $r \in \mathcal{R}, \varepsilon = \pm 1$;
- ЭП1′ — обратное к ЭП1;
- ЭП2′ — обратное к ЭП2;

Определение. Назовём слова W и $\tilde{W}$ $\mathcal{R}$-эквивалентными, если от W можно с помощью ЭП перейти к $\tilde{W}$.

Утверждение. *$\mathcal{R}$-эквивалентность — отношение эквивалентности.*

Доказательство.

- Рефлексивность — очевидно;
- Симметричность — следует из обратимости каждого ЭП;
- Транзитивность — очевидно;

□

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1. $W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$;
2. *W $\mathcal{R}$-эквивалентно пустому слову λ;*
3. *Если для произвольной группы G с порождающим множеством $M = \{g_i \mid i \in I\}$ (т.е. заданным копредставлением $\varphi : F(A) \to G$) верно, что $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ в G, то $\varphi(W) = 1$ в G.*

Доказательство.

- $1 \Longrightarrow 2:\quad W \in \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \Longrightarrow W = (f_1 r_1^{\varepsilon_1} f_1^{-1}) \ldots (f_k r_k^{\varepsilon_k} f_k^{-1}) \underset{\text{ЭП2}}{\Longrightarrow} W \sim \tilde{W} = (f_1 f_1^{-1}) \ldots (f_k f_k^{-1}) \underset{\text{ЭП1}}{\Longrightarrow} \lambda$;

- $2 \Longrightarrow 3$ Пусть $\varphi : F(A) \to G$ взят из условия теоремы. Покажем, что при ЭП образ слова не меняется:

  1. $\varphi(W_1 a^{\varepsilon} a^{-\varepsilon} W_2) = \varphi(W_1)\varphi(a)^{\varepsilon}\varphi(a)^{-\varepsilon}\varphi(W_2) = \varphi(W_1)\varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2)$;
  2. $\varphi(W_1 r^{\varepsilon} W_2) = \varphi(W_1)\varphi(r)^{\varepsilon}\varphi(W_2) = \varphi(W_1) \cdot 1^{\varepsilon} \cdot \varphi(W_2) = \varphi(W_1 W_2)$;

  При ЭП, обратных этим, образ слова аналогично не изменяется.
  Тогда если $W \underset{\text{ЭП}}{\sim} \lambda$, то $\varphi(W) = \varphi(\lambda) = 1$.

- $3 \Longrightarrow 1$: $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1 \Longrightarrow r \in \text{Ker } \varphi$; $\varphi(W) = 1 \Longrightarrow W \in \text{Ker } \varphi$.
  Рассмотрим в качестве G группу $F(A)/N$, где $N = \langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$, а в качестве $\varphi - \pi$ (естественный гомоморфизм $F(A) \to F(A)/N$).
  $r \in N \Longrightarrow \pi(r) = 1$. Тогда по условию 3: $\pi(W) = 1 \Longrightarrow W \in \text{Ker } \pi = N$.

□

Определение. Если $W \in F(A)$ удовлетворяет любому из условий теоремы 2, то говорят, что соотношение $W = 1$ следует из соотношений $\{r = 1 \mid r \in \mathcal{R}\}$ или является следствием соотношений $\mathcal{R}$.

Определение. Рассмотрим копредставление произвольной группы G, т.е. $\varphi : F(A) \to G$, где $A = \{a_i \mid i \in I\}$. Пусть слово $W \in F(A) (W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} ... a_{i_k}^{\varepsilon_k})$ такое, что $\varphi(W) = g_{i_1}^{\varepsilon_1} ... g_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$ в G.
Тогда говорят о соотношении $W = 1$.
(Для упрощения записи вместо g_i пишут a_i).

Определение. Множество $\mathcal{R} \subset F(A)$ называется определяющим множеством соотношений группы G, если любое соотношение группы G следует из $\mathcal{R}$.
При этом элементы $\mathcal{R}$ называются определяющими соотношениями G. Обозначается $G = \langle A \mid \mathcal{R} \rangle$ (данная запись также называется копредставлением G).

Примеры.

1. $\mathbb{Z}_3 = \langle a | a^3 = 1 \rangle; a^{12} = 1$ — следствие;
2. $V_4 = \langle a, b | a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle; (ab)^2 = 1$ — следствие.

Теорема (Теорема Дика)**.**
Пусть G — группа, заданная копредставлением $\langle A \mid R \rangle$, где $A = \{a_i \mid i \in I\}$. Пусть H — произвольная группа, $\{h_i \mid i \in I\} \subset H$ — произвольное множество её элементов.

Тогда отображение $\varphi : a_i \mapsto h_i \ \forall i \in I$ *на порождающих группы* G *продолжается до гомоморфизма* $\varphi : G \to H$ *тогда и только тогда, когда* $\forall r \in \mathcal{R} : \varphi(r) = 1$ *в* H.

Доказательство.
Я устал пытаться починить доказательство, которое было здесь ранее, поэтому теперь оно в корне изменено — данный вариант взят из материалов спецкурса А.А. Клячко ([1]) и кажется мне значительно более наглядным.
$\Longrightarrow$: По определению определяющих соотношений любое соотношение $r = g_{i_1}^{\varepsilon_1} ... g_{i_k}^{\varepsilon_k} \in \mathcal{R}$ равно 1 в G. Тогда если φ продолжается до гомоморфизма, то $\forall r \in \mathcal{R} : \ \varphi(r) = \varphi(1) = 1$ в H.
$\Longleftarrow$: Рассмотрим свободную группу $F(A)$. По универсальному свойству свободной группы отображение $\varphi : a_i \mapsto h_i$ продолжается до гомоморфизма $\varphi : F(A) \to H$. Знаем, что $\varphi(r) = 1 \ \forall r \in \mathcal{R}$, т.е. $\mathcal{R} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Также $\operatorname{Ker} \varphi \trianglelefteq F(A)$ по свойству гомоморфизма, а так как $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)}$ — наименьшая по включению нормальная подгруппа, содержащая $\mathcal{R}$, получаем $\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$. Значит, корректно рассматривать φ как гомоморфизм $F(A)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \to H$ (образ не зависит от представителя класса), а из определения копредставления $F(A)/\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle^{F(A)} \simeq G$. Отсюда получили гомоморфизм $\varphi : G \to H$, являющийся продолжением исходного отображения, что и требовалось. $\square$

3 Прямое произведение групп

3.1 Внешнее прямое произведение

Пусть $G_1, ..., G_k$ — группы.
$G = G_1 \times ... \times G_k = \{(g_1, ..., g_k) | g_i \in G_i\}$.
$(g_1, ..., g_k) \cdot (\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_k) = (g_1\tilde{g}_1, ..., g_k\tilde{g}_k)$
($g_i\tilde{g}_i$ перемножаются по правилу бинарной операции на G_i).

Утверждение. $(G, \cdot)$ — *группа.*

Доказательство.

1. $(a_1, ..., a_k)((b_1, ..., b_k)(c_1, ..., c_k)) = (a_1(b_1c_1), ..., a_k(b_kc_k)) =$
   $= ((a_1b_1)c_1, ..., (a_kb_k)c_k) = ((a_1, ..., a_k)(b_1, ..., b_k))(c_1, ..., c_k)$
2. Нейтральный элемент — $(e_1, ..., e_k)$ (e_i — нейтральный в G_i)
3. $(g_1, ..., g_k)^{-1} = (g_1^{-1}, ..., g_k^{-1})$

□

Определение. Данная группа $(G, \cdot)$ называется (внешним) прямым произведением групп $G_1, ..., G_k$. Обозначается $G = G_1 \times ... \times G_k$; G_i называются множителями.
В аддитивной терминологии те же рассуждения определяют прямую сумму $G = G_1 \oplus ... \oplus G_k$, где G_i — слагаемые.

Примеры.

1. $G_1 = \mathbb{Z}_3, G_2 = S_3, G = G_1 \times G_2$.
   $(1, (12)) \cdot (2, (13)) = (1 + 2, (12)(13)) = (0, (132))$.
2. $D_n(\mathbb{F}) \simeq \underbrace{\mathbb{F}^* \times ... \times \mathbb{F}^*}_{n}$ ($D_n(\mathbb{F})$ — группа диагональных матриц порядка n).

Утверждение.

1. *Если* $(m, n) = 1$, *то* $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \simeq Z_{nm}$ — *циклическая группа;*
2. *Если* $(m, n) \neq 1$, *то* $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ — *не циклическая.*

Доказательство.

1. Обозначим за $[a]_s \in \mathbb{Z}_s$ класс вычетов по модудю s, содержащий a.
   Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ такое, что $\varphi : [a]_{mn} \mapsto ([a]_m, [a]_n)$. Очевидно, что это гомоморфизм:

   $$\varphi([a]_{mn} \cdot [b]_{mn}) = ([ab]_m, [ab]_n) = ([a]_m, [a]_n)([b]_m, [b]_n) = \varphi([a]_{mn})\varphi([b]_{mn})$$

   Найдём Ker φ :

   $$\varphi([a]_{mn}) = ([0]_m, [0]_n) \iff \begin{cases} m \mid a \\ n \mid a \end{cases} \underset{(m,n)=1}{\Longrightarrow} mn \mid a \Longrightarrow \text{Ker } \varphi = \{[0]_{mn}\}$$

   По теореме о гомоморфизме Im $\varphi \simeq \mathbb{Z}_{mn}/\text{Ker } \varphi = \mathbb{Z}_{mn} \Longrightarrow |\text{Im } \varphi| = mn$.
   Так как $|\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n| = mn$ и Im $\varphi \leq \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$, Im $\varphi = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$.
   Отсюда φ — биекция (инъекция из Ker $\varphi = \{e\}$), т.е. φ — изоморфизм.

2. Пусть $(m, n) = d \neq 1$ ($m = dk_1, n = dk_2$). Тогда $\forall g = (g_1, g_2) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$:

   $$(g_1, g_2)^{dk_1k_2} = (g_1^{dk_1k_2}, g_2^{dk_1k_2}) = (0^{k_2}, 0^{k_1}) = (0, 0)$$

   Отсюда ord $(g_1, g_2) \mid dk_1k_2 = \frac{mn}{d} < mn = |\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n|$. Значит, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ не является циклической.

□

Следствие. *Пусть $n = p_1^{s_1}...p_k^{s_k}$ — разложение на простые множители. Тогда $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times ... \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$.*

Доказательство. Очевидно следует из теоремы. □

Следствие. *(Китайская теорема об остатках) Если числа $a_1, ..., a_n$ попарно взаимно просты, то для любых целых $r_1, ..., r_n$ $(0 \leq r_i < a_i)$ $\exists! N$ $(0 \leq N < a_1 \cdot ... \cdot a_n)$ такой, что $N \equiv r_i (\text{mod } a_i)$*

Доказательство. Из теоремы следует, что $\mathbb{Z}_{a_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{a_n} \simeq \mathbb{Z}_a$ $(a = a_1 \cdot ... \cdot a_n)$. Это означает, что набор остатков $(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{Z}_{a_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{a_n}$ изоморфизм из теоремы однозначно переводит в элемент $N \in \mathbb{Z}_a$ такой, что $r_i = [N]_{a_i}$, что и требовалось. □

3.2 Внутреннее прямое произведение

Определение. Пусть G — группа, $H_1, ..., H_k \leq G$.
G раскладывается в (внутреннее) прямое произведение подгрупп $H_1, ..., H_k$, если:

1. $\forall g \in G\ \exists!\ h_i \in H_i : g = h_1 ... h_k$;

2. $\forall i \neq j : \forall h_i \in H_i, h_j \in H_j\ h_i h_j = h_j h_i$.

Обозначается $G = H_1 \times ... \times H_k$ ($G = H_1 \oplus ... \oplus H_k$ в аддитивной терминологии).

Замечание. Из определения следует, что $(h_1 ... h_k)(\tilde{h}_1 ... \tilde{h}_k) = (h_1\tilde{h}_1)...(h_k\tilde{h}_k)$.

Определение. Пусть $H, N \leq G$. Обозначим $NH = \{nh | n \in N, h \in H\}$

Утверждение. *Пусть $N \trianglelefteq G, H \leq G$. Тогда NH — подгруппа в G, причём $NH = HN$.*

Доказательство. Рассмотрим $(n_1h_1)(n_2h_2) = \underbrace{n_1(h_1n_2h_1^{-1})}_{=\tilde{n}}\underbrace{h_1h_2}_{=\tilde{h}} = \tilde{n}\tilde{h} \in NH$.
$e \in N \cap H \Longrightarrow e \cdot e = e \in NH$.
$(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1} = (h^{-1}n^{-1}h)h^{-1} \in NH$.
Отсюда NH — подгруппа. Покажем, что $NH = HN$:

$$\forall nh \in NH :\ nh = (hh^{-1})nh = h(h^{-1}nh) \in HN \Longrightarrow NH \subseteq HN$$

$$\forall hn \in HN :\ hn = hn(h^{-1}h) = (hnh^{-1})h \in NH \Longrightarrow HN \subseteq NH$$

Отсюда $NH = HN$. □

Лемма 1. *Пусть $H, N \trianglelefteq G, H \cap N = \{e\}$. Тогда $\forall h \in H, n \in N\ nh = hn$.*

Доказательство. Рассмотрим выражение $(hn)(nh)^{-1} = hnh^{-1}n^{-1}$:

$$hnh^{-1}n^{-1} = h(nh^{-1}n^{-1}) \in H;\quad hnh^{-1}n^{-1} = (hnh^{-1})n^{-1} \in N$$

Значит, $hnh^{-1}n^{-1} \in H \cap N = \{e\} \Longrightarrow (hn)(nh)^{-1} = e \Longrightarrow hn = nh$ □

Теорема 1. *Пусть $H_1, H_2 \leq G$. Тогда* $G = H_1 \times H_2 \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ H_1, H_2 \trianglelefteq G \\ (2)\ H_1 \cap H_2 = \{e\} \\ (3)\ G = H_1H_2 \end{cases}$

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть $G = H_1 \times H_2$.
(3) — очевидно из пункта 1 определения.
(1): $\forall h_1 \in H_1, g \in G :\ g = \tilde{h}_1\tilde{h}_2$ ($\tilde{h}_1 \in H_1, \tilde{h}_2 \in H_2$) $\Longrightarrow$

$$gh_1g^{-1} = \tilde{h}_1(\tilde{h}_2h_1\tilde{h}_2^{-1})\tilde{h}_1^{-1} \underset{\text{(2 из опр)}}{=} \tilde{h}_1h_1\tilde{h}_1^{-1} \in H_1$$

Отсюда $H_1 \trianglelefteq G$ (аналогично $H_2 \trianglelefteq G$).
(2): Пусть $\exists h \in H_1 \cap H_2$. Тогда $h = he = eh$ — два разложения на произведение

элементов подгрупп. Они совпадают только в случае $h = e$, т.е. $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.
$\Longleftarrow$: Пусть даны условия (1)-(3).
По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.
Из (3): $\forall g \in G\ \exists h_i \in H_i : g = h_1 h_2$.
Допустим, что это разложение не единственно, т.е. $h_1 h_2 = \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$.
Тогда $\tilde{h}_1^{-1} h_1 = \tilde{h}_2 h_2^{-1}$, а так как $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, имеем $h_1 = \tilde{h}_1, h_2 = \tilde{h}_2$. $\square$

Теорема 2. *Пусть* $H_1, ..., H_k \leq G$.

$$\textit{Тогда } G = H_1 \times ... \times H_k \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\ H_1, ..., H_k \trianglelefteq G \\ (2)\ \forall i\ H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\} \\ (3)\ G = H_1 ... H_k \end{cases}$$

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть $G = H_1 \times ... \times H_k$.
(3) — очевидно из пункта 1 определения.
(1): $\forall h_i \in H_i, g \in G :\ g = \tilde{h}_1 ... \tilde{h}_k\ (\tilde{h}_i \in H_i) \Longrightarrow$

$$g h_i g^{-1} = (\tilde{h}_1 ... \tilde{h}_k) h_i (\tilde{h}_k^{-1} ... \tilde{h}_1^{-1}) \underset{\text{(2 из опр)}}{=} \tilde{h}_i h_i \tilde{h}_i^{-1} \in H_i$$

Отсюда $H_i \trianglelefteq G$.
(2): Пусть $\exists h \in H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle$. Тогда $h = he = eh$ — два разложения на произведение элементов подгрупп. Они совпадают только в случае $h = e$, т.е. $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$.
$\Longleftarrow$: Пусть даны условия (1)-(3).
По лемме 1 из (1), (2) очевидно следует пункт 2 определения.
Из (3): $\forall g \in G\ \exists h_i \in H_i : g = h_1 ... h_k$.
Допустим, что это разложение не единственно, т.е. $h_1 ... h_k = \tilde{h}_1 ... \tilde{h}_k$.
Тогда $\forall i : \tilde{h}_i^{-1} h_i = \prod\limits_{j \neq i} \tilde{h}_j h_j^{-1}$, а так как $H_i \cap \langle H_j \mid j \neq i \rangle = \{e\}$, имеем $h_i = \tilde{h}_i$. $\square$

Примеры.

1. $V_4 = \{e, a, b, c\} = \{e, a\} \times \{e, b\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
2. $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+ \times U\ (z = r \cdot e^{iy})$.
3. $\mathbb{Z}$ не раскладывается в произведение нетривиальных подгрупп.
   Предположим противное, т.е. $\mathbb{Z} = H_1 \times ... \times H_m$. Подгруппы $\mathbb{Z}$ имеют вид $k\mathbb{Z}$, т.е. $\mathbb{Z} = k_1\mathbb{Z} \times ... \times k_m\mathbb{Z}, k_i \neq 0$. Но тогда $k_1 k_2 \in H_1 \cap H_2$ и $k_1 k_2 \neq 0$, что противоречит теореме 2.

3.3 Связь между внутренним и внешним прямым произведением

Теорема 3.

1. *Если группа G раскладывается в прямое произведение подгрупп $H_1, ..., H_k$, то G изоморфна прямому произведению групп $G_1, ..., G_k$, где $\forall i\ G_i \simeq H_i$;*
2. *Если группа G изоморфна прямому произведению групп $G_1, ..., G_k$, то $\exists H_i \leq G$ такие, что $G_i \simeq H_i$ и G раскладывается в прямое произведение $H_1, ..., H_k$.*

Доказательство.

1. Имеем: $H_i \leq G, G = H_1 \times ... \times H_k$.
   Рассмотрим отображение $\varphi : G \to G_1 \times ... \times G_k$, где $G_i = H_i$, такое, что $\forall g = h_1...h_k \in G :\ \varphi(h_1...h_k) = (h_1, ..., h_k)$. Это изоморфизм:
   - Биекция — очевидна;
   - Гомоморфизм:
   $$\varphi((h_1...h_k) \cdot (h'_1...h'_k)) = \varphi(h_1h'_1...h_kh'_k) = (h_1h'_1, ..., h_kh'_k) =$$
   $$= (h_1, ..., h_k) \cdot (h'_1, ..., h'_k) = \varphi(h_1...h_k) \cdot \varphi(h'_1...h'_k)$$
2. Имеем: $G_1, ..., G_k$ — группы, $G = \{(g_1, ..., g_k) \mid g_i \in G_i\}$.
   Тогда $H_i = \{(e, ..., e, g_i, e, ..., e) \mid g_i \in G_i\}$ очевидно является подгруппой G, изоморфной G_i.
   Покажем, что $G = H_1 \times ... \times H_k$:
   - $\forall g = (g_1, ..., g_k) \in G\ \exists!\ h_i = (e, ..., e, g_i, e, ..., e) : g = h_1...h_k$;
   - $\forall i \neq j, h_i = ((e, ..., e, a_i, e, ..., e)) \in H_i, h_j = (e, ..., e, b_j, e, ..., e) \in H_j :$
   $$h_ih_j = (e, ..., e, a_i, e, ..., e, b_j, e, ..., e) = h_jh_i$$

□

Теорема 4. *Пусть $H_i \leq G, G = H_1 \times ... \times H_k, N_i \trianglelefteq H_i$. Тогда:*

1. *$N_1 \times ... \times N_k \trianglelefteq G$;*
2. *$G/(N_1 \times ... \times N_k) \simeq (H_1/N_1) \times ... \times (H_k/N_k)$.*

Доказательство.

1. Очевидно, что $N_1 \times ... \times N_k = N \leq G$.
   Покажем нормальность: $\forall g = h_1...h_k \in G, n = n_1...n_k \in N$

$$gng^{-1} = (h_1...h_k)(n_1...n_k)(h_k^{-1}...h_1^{-1}) \underset{(n_i \in H_i)}{=} (h_1 \overset{\in N_1}{n_1} h_1^{-1})...(h_k \overset{\in N_k}{n_k} h_k^{-1}) \in N$$

2. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : G \to (H_1/N_1) \times ... \times (H_k/N_k)$ такой, что $\varphi : h_1...h_k \mapsto (h_1N_1, ..., h_kN_k)$. Это сюръективный гомоморфизм, причём $\operatorname{Ker} \varphi = N_1 \times ... \times N_k$. Отсюда по теореме о гомоморфизме получаем необходимое утверждение.

□

Следствие. *Если* $G = H_1 \times H_2$, *то* $G/H_1 \simeq H_2, G/H_2 \simeq H_1$.

4 Конечнопорождённые абелевы группы

Замечание. В данном разделе используется аддитивная терминология:
$(A, +)$ — абелева группа, $\forall a \in A, n \in \mathbb{Z}$:

$$na = \begin{cases} \underbrace{a + ... + a}_{n}, \ n > 0; \\ 0, \ a = 0; \\ \underbrace{(-a) + ... + (-a)}_{|n|}, \ n < 0 \end{cases}$$

Свойства. *($\forall a, b, \in A, \ n, m, \in \mathbb{Z}$)*

1. $(n + m)a = na + ma$;
2. $n(a + b) = na + nb$;
3. $(nm)a = n(ma)$

Доказательство. Непосредственный разбор случаев — знаков m, n. □

Определение. (Целочисленнной) линейной комбинацией элементов $a_1, ..., a_k \in A$ называется выражение $n_1a_1 + ... + n_ka_k$ ($n_i \in \mathbb{Z}$).
Если элемент $b \in A$ равен некоторой линейной комбинации $a_1, ..., a_k \in A$, то говорят, что b выражается через $a_1, ..., a_k$.

Определение. Система элементов $a_1, ..., a_k$ называется линейно зависимой, если $\exists n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, не все равные 0, такие, что $n_1a_1 + ... + n_ka_k = 0$.
В противном случае система $a_1, ..., a_k$ называется линейно независимой.

Пример. $A = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$. Система из одного элемента $(1, 1)$ — линейно зависима: $12 \cdot (1, 1) = (0, 0)$

Определение. Пусть A — абелева группа, $a_1, ..., a_k \in A$.
Будем обозначать $\langle a_1, ..., a_k \rangle = \{n_1a_1 + ... + n_ka_k \mid n_i \in \mathbb{Z}\}$
(для бесконечного числа a_k — всевозможные конечные линейные комбинации)

Утверждение. $\langle a_1, ..., a_k \rangle$ — *наименьшая подгруппа A, содержащая $a_1, ..., a_k$.*

Доказательство. Пусть H — наименьшая подгруппа, содержащая $a_1, ..., a_k$. Тогда с одной стороны $\langle a_1, ..., a_k \rangle \subseteq H$ по определению подгруппы, а с другой стороны $\langle a_1, ..., a_k \rangle$, очевидно, подгруппа в A. Значит, $H = \langle a_1, ..., a_k \rangle$ □

Определение. Если $A = \langle a_1, ..., a_k \rangle$, то говорят, что A порождается $a_1, ..., a_k$. Элементы $a_1, ..., a_k$ называются порождающими (образующими).

Определение. Если $\exists$ конечное множество элементов $a_1, ..., a_k \in A$, что $A = \langle a_1, ..., a_k \rangle$, то A называется конечнопорождённой.

Примеры.

1. $\mathbb{Q}$ — не конечнопорождённая;
2. U (комплексные корни из 1) — не конечнопорождённая;
3. $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n$ — конечнопорождённые (циклические);
4. $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ — конечнопорождённая, не циклическая (примеры систем порождающих — $(1,0),(0,1)$ или $(3,0),(4,5),(0,1)$)

Определение. Линейно независимая система порождающих группы A называется базисом (или свободной системой порождающих).

Утверждение. *(не было в лекции)*
$a_1, ..., a_k$ — базис $\Longleftrightarrow$ любой элемент A выражается через $a_1, ..., a_k$ единственным образом.

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Из определения базиса любой элемент имеет разложение по базису.

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = a = \alpha_1' e_1 + ... + \alpha_n' e_n \Longrightarrow (\alpha_1 - \alpha_1')e_1 + ... + (\alpha_n - \alpha_n')e_n = 0$$

Отсюда из линейной независимости $\alpha_i = \alpha_i' \ \forall i$, т.е. разложение единственно.
$\Longleftarrow$: Любой элемент $a \in A$ имеет разложение по $a_1, ..., a_n$ — система $a_1, ..., a_n$ порождает A. Разложение любого элемента единственно $\Longrightarrow$ 0 имеет только тривиальное разложение $\Longrightarrow a_1, ..., a_n$ линейно независимы. $\square$

Пример. $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$ — не имеет базиса: любая система элементов в ней линейно зависима ($12 \cdot a = 0 \ \forall a \in A$).

Определение. Конечнопорождённая абелева группа, имеющая базис, называется свободной абелевой группой. По определению $A = \{0\}$ — свободная абелева группа.

Пример. $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ — свободная абелева группа;

Базис — $(1,0,...0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)$. Проверим это:

1. Линейная независимость:

$$\alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0 \Longrightarrow (\alpha_1, ..., \alpha_n) = (0, ..., 0) \Longrightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$$

2. Порождаемость группы:

$$\forall a \in \mathbb{Z}^n : a = (a_1, ..., a_n) = a_1 e_1 + ... + a_n e_n$$

Лемма. *(Основная лемма о линейной зависимости для абелевых групп) Если абелева группа A обладает базисом из n элементов, то любая система из $m > n$ элементов линейно зависима.*

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_n$ — базис группы A, $a_1, ..., a_m \in A$ — произвольные элементы. Тогда из определения базиса:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_{11} e_1 + ... + \alpha_{1n} e_n \longrightarrow (\alpha_{11}, ..., \alpha_{1n}) \\ \vdots \\ a_m = \alpha_{m1} e_1 + ... + \alpha_{mn} e_n \longrightarrow (\alpha_{m1}, ..., \alpha_{mn}) \end{cases}$$

Строки $\overline{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, ..., \alpha_{in})$ можно рассматривать как векторы из пр-ва $\mathbb{Q}^n$ над $\mathbb{Q}$. Так как $m > n$, по ОЛЛЗ для векторных пространств система $\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_m$ линейно зависима, т.е. $\exists \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{Q}$, не все равные нулю, что $\lambda_1 \overline{\alpha}_1 + ... + \lambda_m \overline{\alpha}_m = 0$. Тогда если d — НОК знаменателей ненулевых λ_i, то $(d\lambda_1)\overline{\alpha}_1 + ... + (d\lambda_m)\overline{\alpha}_m = 0$ — нетривиальная целочисленная линейная комбинация, равная нулю.
Тогда $(d\lambda_1)a_1 + ... + (d\lambda_m)a_m = 0$, т.е. $a_1, ..., a_m$ линейно зависимы. □

Теорема 1. *Все базисы свободной абелевой группы A равномощны.*

Доказательство. Очевидно следует из ОЛЛЗ для абелевых групп. □

Определение. Число элементов в базисе свободной абелевой группы A называется рангом группы A. Обозначается $\mathrm{rk}\ A$. По определению $A = \{0\} \Longrightarrow \mathrm{rk}\ A = 0$.

Теорема 2. *Все свободные абелевы группы ранга n изоморфны между собой (в частности, изоморфны $\mathbb{Z}^n$).*

Доказательство.
Пусть A — свободная абелева группа, $\mathrm{rk}\ A = n$, $e_1, ..., e_n$ — базис. Рассмотрим отображение $\varphi : A \to \mathbb{Z}^n$ такое, что $\forall a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \in A \ \varphi(a) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Покажем, что φ — изоморфизм:

1. Биекция — следует из единственности разложения по базису;

2. Гомоморфизм: пусть $a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n, b = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$. Тогда:

$$\varphi(a+b) = \varphi((\alpha_1+\beta_1)e_1 + ... + (\alpha_n+\beta_n)e_n) = ((\alpha_1+\beta_1), ..., (\alpha_n+\beta_n)) =$$

$$= (\alpha_1, ..., \alpha_n) + (\beta_1, ..., \beta_n) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

Отсюда $A \simeq \mathbb{Z}^n$.
Если $\text{rk } A = \text{rk } B = n$, то $A \simeq \mathbb{Z}^n \simeq B \Longrightarrow A \simeq B$. □

Теорема 3. *Любая подгруппа B свободной абелевой группы A ранга n является свободной абелевой, причём* $\text{rk } B \leqslant n$.

Доказательство. Случай $n = 0$ очевиден. Индукция по n:

База: $n = 1 \Longrightarrow A \simeq \mathbb{Z} \Longrightarrow A = \langle e \rangle$.
Знаем, что любая подгруппа циклической группы — циклическая.
Пусть $B = \langle ke \rangle, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда:

$$k = 0 \Longrightarrow B = \{0\} \Longrightarrow \text{rk } B = 0 < 1 = \text{rk } A$$

$$k \neq 0 \Longrightarrow B = \langle ke \rangle \simeq \mathbb{Z} \Longrightarrow \text{rk } B = 1 = \text{rk } A$$

Шаг: пусть $e_1, ..., e_n$ — базис свободной абелевой группы A.
Рассмотрим $\tilde{A} = \langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle \leq A$ — свободная абелева ранга $n-1$.
Рассмотрим $\tilde{B} = B \cap \tilde{A}$ — подгруппу B, которая содержится в $\tilde{A}$ (очевидно, что это подгруппа). По предположению индукции $\tilde{B}$ — свободная абелева, причём $\text{rk } \tilde{B} \leqslant \text{rk } \tilde{A} = n-1$.
Если $B = \tilde{B}$, то теорема доказана.
Иначе рассмотрим гомоморфизм (проекцию на $\langle e_n \rangle$)
$\pi : A \to \mathbb{Z} : \forall a = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \in A \ \pi(a) = \alpha_n$ ($\text{Ker } \pi = \tilde{A}, \text{Im } \pi = \mathbb{Z}$).
Знаем, что $\pi(B)$ — подгруппа в $\mathbb{Z} \Longrightarrow \pi(B) = \langle k \rangle$ ($k \neq 0$ из $B \neq \tilde{B}$).
Рассмотрим $b_0 \in B$ такой, что $\pi(b_0) = k$, т.е. $b_0 = \beta_1 e_1 + ... + \beta_{n-1} e_{n-1} + k e_n$.
Докажем, что если $b_1, ..., b_s$ — базис $\tilde{B}$, то $b_0, b_1, ..., b_s$ — базис B (тогда B — свободная абелева, $\text{rk } B \leqslant n$)

1. Проверим линейную независимость:

$$\lambda_0 b_0 + ... + \lambda_s b_s = 0 \Rightarrow \pi(\lambda_0 b_0 + ... + \lambda_s b_s) = 0 \Rightarrow \lambda_0 \pi(b_0) + ... + \lambda_s \pi(b_s) = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda_0 k = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$$

Линейная комбинация $\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_s b_s = 0$ тривиальна, так как $b_1, ..., b_s$ — базис $\tilde{B}$. Отсюда $b_0, b_1, ..., b_s$ линейно независимы.

2. $\langle b_0, b_1 ..., b_s \rangle \stackrel{?}{=} B$:
   Рассмотрим произвольный $b \in B$. $\pi(b) \in \langle k \rangle \Longrightarrow \pi(b) = tk,\ t \in \mathbb{Z}$.
   Пусть $\tilde{b} = b - tb_0$. Тогда $\pi(\tilde{b}) = \pi(b) - t\pi(b_0) = tk - tk = 0 \Longrightarrow \tilde{b} \in \operatorname{Ker}\pi = \tilde{A} \Longrightarrow \tilde{b} \in \tilde{A} \cap B = \tilde{B} \Longrightarrow \tilde{b} = t_1 b_1 + ... + t_s b_s \Longrightarrow b = tb_0 + t_1 b_1 + ... + t_s b_s$.

□

4.1 Связь между базисами свободной абелевой группы

Определение. Пусть A — свободная абелева группа, $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$, $\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n\}$ — базисы A.

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = c_{11}e_1 + ... + c_{n1}e_n \\ \vdots \\ \tilde{e}_n = c_{1n}e_1 + ... + c_{nn}e_n \end{cases} \Longrightarrow (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n) = (e_1, ..., e_n)C,\ C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Такая $C \in M_n(\mathbb{Z})$ называется матрицей перехода от $\mathcal{E}$ к $\tilde{\mathcal{E}}$.

Утверждение.
Пусть $C \in M_n(\mathbb{Z})$. Тогда C — матрица перехода $\Longleftrightarrow \det C = \pm 1$.

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть C — матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\tilde{\mathcal{E}}$, D — от $\tilde{\mathcal{E}}$ к $\mathcal{E}$. Тогда:

$$\begin{cases} (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n) = (e_1, ..., e_n)C \\ (e_1, ..., e_n) = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)D \end{cases} \Longrightarrow CD = DC = E \Longrightarrow D = C^{-1}$$

$$\det C \cdot \det D = \det CD = \det E = 1$$

Так как $C, D \in M_n(\mathbb{Z})$, $\det C, \det D \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \det C = \pm 1$.
$\Longleftarrow$: $C \in M_n(\mathbb{Z}), \det C = \pm 1$. Рассмотрим некоторый базис $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ и докажем, что $(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n) = (e_1, ..., e_n)C$ — базис.

1. Проверим линейную независимость:
   Если $\lambda_1 \tilde{e}_1 + ... + \lambda_n \tilde{e}_n = 0$, то линейная комбинация столбцов C с теми же λ_i также равна 0. Из $\det C \neq 0$ столбцы линейно независимы, т.е. $\lambda_i = 0\ \forall i$.

2. $\langle \tilde{e}_1 ..., \tilde{e}_n \rangle \stackrel{?}{=} A$:
   Так как $\det C = \pm 1$, $\exists D = C^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ (из формулы явного выражения элементов обратной матрицы элементы D целые) $\Longrightarrow (e_1, ..., e_n) = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)D$.

$\forall a \in A$ целочисленно выражается через $e_1, ..., e_n$, каждый e_i целочисленно выражается через $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n \Longrightarrow a$ целочисленно выражается через $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n$

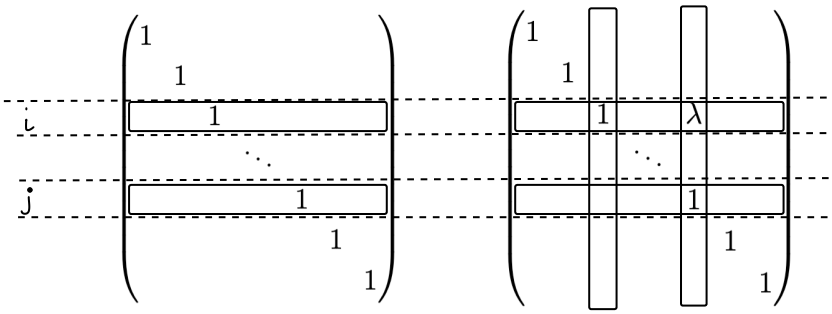
□

4.2 Элементарные преобразования свободных абелевых групп

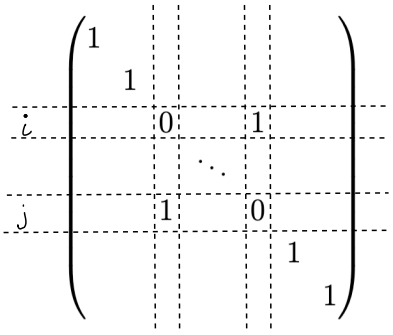
Определение. (ЭП свободных абелевых групп)
Пусть A — свободная абелева группа, $e_1, ..., e_n$ — базис A.

- **ЭП1**: $\tilde{e}_i = e_i + ke_j,\ i \neq j, k \in \mathbb{Z}; \quad \tilde{e}_s = e_s,\ s \neq i;$
- **ЭП2**: $\tilde{e}_i = e_j; \quad \tilde{e}_j = e_i; \quad \tilde{e}_s = e_s,\ s \neq i, j\ (i \neq j);$
- **ЭП3**: $\tilde{e}_i = -e_i; \quad \tilde{e}_s = e_s,\ s \neq i;$

Матрицы перехода при этих ЭП:
ЭП1:



ЭП2:



ЭП3:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

называются (целочисленными) элементарными матрицами.

Определение. (ЭП строк целочисленных матриц)

- **ЭП1**: $\overline{a_i} \to \overline{a_i} + \lambda\overline{a_j}, \quad i \neq j, \lambda \in \mathbb{Z}$;
- **ЭП2**: $\overline{a_i} \leftrightarrow \overline{a_j}, \quad i \neq j$;
- **ЭП3**: $\overline{a_i} \to (-1)\overline{a_i}$;

(Аналогично определены ЭП над столбцами матрицы)

Приведение целочисленной матрицы с помощью целочисленных ЭП к "диагональному" виду

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$. Будем говорить, что матрица A имеет "диагональный" вид, если либо $A = 0$, либо $a_{ii} = \alpha_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1,l}$ и $a_{ij} = 0$ иначе.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \alpha_l & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Лемма. *Любую матрицу $M \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ за конечное число целочисленных ЭП над строками и столбцами можно привести к "диагональному"виду.*

Доказательство. Индукция по n — числу строк матрицы. При фиксированном n индукция по $\nu(M)$ — наименьшему по модулю ненулевому элементу M.
Если $M = 0$, то утверждение доказано, поэтому далее $M \neq 0$.
База индукции: $n = 1 \Longrightarrow M = (a_{11}, ..., a_{1m})$.

База внутренней индукции: $\nu(M) = 1$ — очевидна (если в строке есть 1, то с помощью неё можно занулить все оставшиеся элементы).

Шаг внутренней индукции: Пусть $\nu(M) = |a_{1j}|$. Если $a_{1j} < 0$, то применим ЭП3 к стоблцу j; если $j > 1$, то применением ЭП2 поменяем 1-й и j-й столбцы местами. После этих операций $\nu(M) = a_{11}$.
$\forall j > 1 : a_{1j} = a_{11}q_j + r_j$, где $0 \leqslant r_j < a_{11}$. Вычитая с помощью ЭП1 из j-го столбца 1-й, умноженный на q_j, получим строку $\tilde{M} = (a_{11}, r_2, ..., r_m)$.
Если все $r_j = 0$, то диагональный вид получен, иначе можно воспользоваться предположением индукции ($\nu(\tilde{M}) < \nu(M)$).
Шаг индукции: Пусть $\nu(M) = |a_{ij}|$. Сначала сделаем a_{ij} положительным (ЭП3), затем переставим его в верхний левый угол (ЭП2).

Случай 1: $M = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \text{C} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ — по предположению индукции приводим

C к диагональному виду;

Случай 2: $\exists j > 1 : a_{1j} \neq 0$. Тогда, аналогично базе индукции, с помощью ЭП1 приводим верхнюю строчку к виду: $\forall j > 1 : a_{1j} = 0$.

Случай 3: $\exists j > 1 : a_{j1} \neq 0$ — аналогично случаю 2 (ЭП строк вместо столбцов). □

Упражнение. Доказать, что с помощью конечного числа целочисленных ЭП над строками и столбцами

$$M \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \alpha_l & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

где $\alpha_l \mid \alpha_{l-1}, \alpha_{l-1} \mid \alpha_{l-2}, ..., \alpha_2 \mid \alpha_1$.

Доказательство. По лемме можем с помощью ЭП привести M к диагональному виду. Индукция по l — числу ненулевых α в диагональном виде:

База: $l = 0, 1$ — очевидно;

Шаг: Из теории чисел знаем, что для чисел α_1, α_i существуют $a, b \in \mathbb{Z}$, что $a\alpha_1 + b\alpha_i = d_i = \text{НОД}(\alpha_1, \alpha_i)$. Значит, с помощью ЭП1 можно сделать $a_{1i} = d_i$. Тогда следующими операциями:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \alpha_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \cdots & d_i & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ k\alpha_1 & & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} k\alpha_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & d_i & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \alpha_l \end{pmatrix}$$

можем сделать так, чтобы $\alpha_i \mid \alpha_1$. Причём α_1 при этих операциях домножается на $k \in \mathbb{Z}$, а значит, делимость на все предыдущие α_j сохраняется. Тогда за $l - 1$ таких наборов операций можно сделать α_1 общим кратным всех α, а матрица без первой строки и первого столбца приводится к нужному виду по предположению индукции. □

Пример. $(12, 10, 6) \sim (6, 10, 12) \sim (6, 4, 0) \sim (4, 6, 0) \sim (4, 2, 0) \sim (2, 4, 0) \sim (2, 0, 0)$.

(По сути — обобщённый алгоритм Евклида, остаётся НОД чисел 12, 10 и 6).

4.3 Согласованные базисы свободной абелевой группы и её подгруппы

Теорема 1.
Пусть A — свободная абелева группа ранга $n, B \leq A$ — подгруппа ранга m. Тогда $\exists$ базисы $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n$ группы A и $\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_m$ подгруппы B такие, что $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i,\ \alpha_i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $e_1, ..., e_n$ и $f_1, ..., f_m$ — некоторые базисы A и B соответственно. Так как $f_i \in A$, $(f_1, ..., f_m) = (e_1, ..., e_n)C$, где $C \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$.
Если $\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_m$ — другой базис B, то $(f_1, ..., f_m) = (\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_m)T$, где $T \in M_{m\times m}(\mathbb{Z})$
Если $\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n$ — другой базис A, то $(e_1, ..., e_n) = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)S$, где $S \in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ $(\det T, S = \pm 1)$. Отсюда

$$(\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_m)T = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)SC \Longrightarrow (\tilde{f}_1, ..., \tilde{f}_m) = (\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n)\tilde{C},\quad \tilde{C} = SCT^{-1}$$

Тогда если S, T^{-1} — элементарные матрицы, то SC — ЭП над строками C, а CT^{-1} — ЭП над столбцами C. По лемме 1 C с помощью ЭП можно привести к виду $\tilde{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}$ (нулей среди α_i не будет, т.к. векторы базиса f ЛНЗ).
Отсюда и получаем требуемое равенство $\tilde{f}_i = \alpha_i \tilde{e}_i,\ \alpha_i \in \mathbb{N}$. □

Замечание. Для абелевых групп из теоремы 4 прямого произведения получим следующее утверждение: Пусть $A = A_1 \oplus ... \oplus A_n$, $B = B_1 \oplus ... \oplus B_n$, причём $B \leq A, B_i \leq A_i$
Тогда $A/B = (A_1 \oplus ... \oplus A_n)/(B_1 \oplus ... \oplus B_n) \simeq A_1/B_1 \oplus ... \oplus A_n/B_n$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1:*

$$A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

Доказательство. По теореме 1: $\tilde{f}_1 = \alpha_1 \tilde{e}_1, ..., \tilde{f}_m = \alpha_m \tilde{e}_m$.

$A = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle \oplus ... \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle;\quad B = \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle 0 \rangle \oplus ... \oplus \langle 0 \rangle$

Тогда из замечания выше:

$$A/B \simeq \langle \tilde{e}_1 \rangle / \langle \alpha_1 \tilde{e}_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle \tilde{e}_m \rangle / \langle \alpha_m \tilde{e}_m \rangle \oplus \langle \tilde{e}_{m+1} \rangle / \langle 0 \rangle \oplus ... \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle / \langle 0 \rangle \simeq$$

$$\simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

□

Следствие 2. *В условиях теоремы 1:* $\text{rk } A = \text{rk } B \iff |A : B| < \infty$.

Доказательство. По определению $|A : B| = |A/B|$.
Из следствия 1 видно, что если $\text{rk } A = \text{rk } B$, то $A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_n}$, и $|A/B| < \infty$, а иначе в прямой сумме встретится слагаемое $\mathbb{Z}$, то есть найдётся элемент бесконечного порядка. □

Утверждение 1. *(Универсальное свойство абелевой группы)*
Пусть $S = \{a_1, ..., a_n\}$ *— система порождающих абелевой группы* A.
Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. A *— свободная с базисом* S;
2. $\forall$ *абелевой группы* D, $\forall\ d_1, ..., d_n \in D\ \exists!$ *гомоморфизм* $\varphi : A \to D$ *т.ч.* $\varphi : a_i \mapsto d_i\ \forall i$.

Доказательство.
$1 \Longrightarrow 2 : S$ — базис $A \Longrightarrow \forall a \in A\ \exists! \alpha_i \in \mathbb{Z} : a = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$.
Рассмотрим отображение $\varphi : A \to D$, заданное как $a = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n \mapsto \alpha_1 d_1 + ... + \alpha_n d_n$. Оно корректно вследствие единственности разложения по базису, а также очевидно является гомоморфизмом с нужным свойством.
$2 \Longrightarrow 1$. Рассмотрим свободную группу D ранга n, в ней рассмотрим базис $d_1, ..., d_n$. По условию $\exists!$ гомоморфизм $\varphi : A \to D$, причём $a_i \mapsto d_i$.
Предположим, что $a_1, ..., a_n$ линейно зависимы. Тогда

$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0 \Longrightarrow \varphi(\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n) = \lambda_1 d_1 + ... + \lambda_n d_n = 0$$

Противоречие с линейной независимостью $d_1, ..., d_n$. Значит, $a_1, ..., a_n$ — базис. □

Следствие 3. *Любая конечнопорождённая абелева группа изоморфна факторгруппе некоторой свободной абелевой группы по некоторой её подгруппе.*

Доказательство. Пусть $D = \langle d_1, ..., d_n \rangle$. Рассмотрим свободную абелеву группу A ранга n с базисом $a_1, ..., a_n$.
По утверждению 1 $\exists$ гомоморфизм $\varphi : A \to D$ такой, что $\varphi(a_i) = d_i$.
Из порождаемости гомоморфизм сюръективен, а значит, по теореме о гомоморфизме $D = \text{Im } \varphi \simeq A/\text{Ker } \varphi$, где $\text{Ker } \varphi \leq A$. □

Следствие 4. *Любая конечнопорождённая абелева группа раскладывается в сумму циклических подгрупп.*

Доказательство. $D \simeq A/B \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$ □

Следствие 5. *Любая конечнопорождённая абелева группа D раскладывается в прямую сумму конечной абелевой группы и свободной абелевой группы.*

Доказательство. $D \simeq (\mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m}) \oplus \mathbb{Z}^{n-m}$ □

Определение. Группа, в которой каждый неединичный элемент имеет бесконечный порядок, называется группой без кручения.

Упражнение. Если A — свободная абелева, то A — без кручения.

Доказательство. Предположим, что $b \in A$ — элемент конечного порядка m. По определению свободной группы $b = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$, причём не все α_i равны 0. Тогда $m\alpha_1 a_1 + ... + m\alpha_n a_n = mb = 0$ — противоречие с линейной независимостью базиса. □

Следствие 6. *Если A — конечнопорождённая абелева группа без кручения, то A — свободная абелева группа.*

Доказательство. В обозначениях следствия 5 $m = 0$. □

4.4 Основная теорема о конечнопорождённых абелевых группах

Определение. Группа G называется периодической, если $\forall g \in G$ g имеет конечный порядок.

Определение. Периодическая группа G называется p-группой, где p — простое, если $\forall g \in G\ \exists s \in \mathbb{N} : \text{ord } g = p^s$.

Упражнение.
Доказать, что конечная группа G является p-группой $\iff |G| = p^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Доказательство.
$\Longleftarrow$ — очевидно, т.к. $\forall g \in G :\ \text{ord } g \mid p^m = |G|$;
$\Longrightarrow$: на будущих лекциях будет доказательство в терминах силовских подгрупп. □

Определение. Группа G называется примарной, если G является p-группой для некоторого простого p.

Утверждение. *Существуют конечнопорождённые (не абелевы) бесконечные p-группы.*

Доказательство. Без доказательства. □

Пример. Не конечнопорождённая примарная абелева группа:
$\mathbb{C}_{p^\infty}$ — группа комплексных корней степеней p^m из 1.

Лемма 1. *Пусть A — конечнопорождённая абелева группа, $B \leq A$ такая, что A/B — свободная абелева группа. Тогда $\exists\ C \leq A$ — свободная абелева группа такая, что $A \simeq B \oplus C$.*

Доказательство. Пусть $\overline{e}_1, ...\overline{e}_n$ — базис $\mathbb{Z}^n \simeq A/B$, и $\varphi : A/B \to \mathbb{Z}^n$ — изоморфизм. Тогда $\varphi^{-1}(\overline{e}_i) = e_i + B$, где $e_i \in A$.
Рассмотрим $C = \langle e_1, ..., e_n \rangle$.
Покажем, что $e_1, ..., e_n$ – базис C, т.е. докажем линейную независимость $e_1, ..., e_n$:

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n + B = B \Longrightarrow \varphi(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n + B) =$$

$$= \lambda_1 \overline{e}_1 + ... + \lambda_n \overline{e}_n = 0 \Longrightarrow \forall i\ \lambda_i = 0 \quad \text{т.к. } \overline{e}_1, ...\overline{e}_n \text{ — базис } \mathbb{Z}^n$$

Покажем, что $A = B \oplus C$, или, что равносильно, что $A = B + C$ и $B \cap C = \{0\}$:

- $B \cap C = \{0\}$: Рассмотрим $b \in B \cap C$. Тогда:

$$b = \mu_1 e_1 + ... + \mu_n e_n \Longrightarrow \mu_1 e_1 + ... + \mu_n e_n + B = b + B = B \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \varphi(\mu_1 e_1 + ... + \mu_n e_n + B) = \mu_1 \overline{e}_1 + ... + \mu_n \overline{e}_n = 0 \Longrightarrow \forall i\ \mu_i = 0$$

- $A = B + C$: Рассмотрим произвольный $a \in A$.
  $\varphi(a + B) = \overline{a} \in \mathbb{Z}^n$, где $\overline{a} = \mu_1 \overline{e}_1 + ... + \mu_n \overline{e}_n$. Тогда
  $\varphi(a - \sum\limits_i \mu_i e_i + B) = 0 \Longrightarrow a - \sum\limits_i \mu_i e_i + B = B \Longrightarrow \exists\, b \in B : a = b + \sum\limits_i \mu_i e_i$

□

Лемма 2. *Все элементы конечного порядка абелевой группы A образуют подгруппу в A.*

Доказательство. Обозначим за Tor A множество всех элементов конечного порядка группы A.

1. $a, b \in \text{Tor } A \Longrightarrow \exists\ n, m \in \mathbb{N} : na = mb = 0 \Longrightarrow$
   $\Longrightarrow (n \cdot m)(a + b) = (n \cdot m)a + (n \cdot m)b = 0 \Longrightarrow (a + b)$ имеет конечный порядок.

2. $0 \in \text{Tor } A$ — очевидно.

3. $\forall a \in \text{Tor } A \Longrightarrow -a \in \text{Tor } A$, т.к. $n(-a) = -na = 0$.

□

Определение. Подгруппа Tor A ("torsion subgroup") называется подгруппой кручения группы A.

Упражнение. Доказать, что в группе $D_\infty = \langle a, b \mid a^2 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$ все элементы конечного порядка не образуют подгруппу.

Замечание. Группа Диэдра D_n отлична от D_∞ наличием соотношения $b^n = 1$, (a — любая симметрия правильного n-угольника, b — поворот на $\frac{2\pi}{n}$).

Доказательство. Заметим, что ord $ba = 2$:

$$a = a^{-1} \Longrightarrow baba = b(aba^{-1}) = bb^{-1} = 1$$

Также ord $a = 2 : a^2 = 1$. При этом ord $(ba)a = \text{ord } b = \infty$. Значит, произведение элементов конечного порядка может быть элементом бесконечного порядка, т.е. все элементы конечного порядка не образуют подгруппу в D_∞. □

Лемма 3. *Пусть A — абелева группа. Тогда $A/\text{Tor } A$ — группа без кручения.*

Доказательство. От противного: пусть $\overline{a} \in A/\text{Tor } A, \overline{a} \neq 0, \text{ord } \overline{a} = n$.
Тогда $\overline{a} = a + \text{Tor } A,\ a \in A$.

$$n\overline{a} = 0 \Longrightarrow n(a + \text{Tor } A) = \text{Tor } A \Longrightarrow na \in \text{Tor } A \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists\, m \in \mathbb{N} : m(na) = 0 \Longrightarrow (mn)a = 0 \Longrightarrow a \in \text{Tor } A \Longrightarrow \overline{a} = 0$$

— противоречие с $\overline{a} \neq 0$. Значит, $A/\text{Tor } A$ — группа без кручения. □

Лемма 4. *Пусть A — конечнопорождённая абелева группа. Тогда $A = \text{Tor } A \oplus C$, где $C \leq A$ — свободная абелева группа,* Tor A *— конечная.*

Доказательство. Пусть $A = \langle a_1, ..., a_n \rangle$.
Тогда $A/\text{Tor } A = \langle a_1 + \text{Tor } A, ..., a_n + \text{Tor } A \rangle$. Кроме того, по лемме 3 $A/\text{Tor } A$ — группа без кручения, а отсюда по следствию 6 из универсального свойства абелевой группы — свободная. Отсюда по лемме 1 $\exists\, C \leq A$ — свободная абелева группа такая, что $A \simeq \text{Tor } A \oplus C$.
Осталось показать, что Tor A — конечная: $\text{Tor } A \simeq A/C = \langle a_1 + C, ..., a_n +$

$C\rangle \Longrightarrow \text{Tor } A = \langle b_1, ..., b_n\rangle$ — конечнопорождённая. Тогда если $k_i = \text{ord } b_i$, то $\forall b \in \text{Tor } A$

$$b = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant \lambda_i < k_i \Longrightarrow |\text{Tor } A| \leqslant k_1 ... k_n$$

□

Лемма 5. *Пусть A — конечная абелева группа, $|A| = p_1^{k_1} ... p_s^{k_s}$ Тогда A раскладывается в прямую сумму $A_{p_1} \oplus ... \oplus A_{p_s}$, где A_{p_i} — p_i-подгруппа, причём набор этих подгрупп определён однозначно.*

Доказательство.

- Существование разложения:
  Рассмотрим произвольное простое p и обозначим за A_p множество всех элементов A порядков p^m. Проверим, что A_p — подгруппа A:

  1. $a, b \in A_p, p^{m_1}a = p^{m_2}b = 0 \Longrightarrow p^{m_1+m_2}(a+b) = p^{m_2} \cdot p^{m_1}a + p^{m_1} \cdot p^{m_2}b = 0$
     Отсюда $a, b \in A_p \Longrightarrow a + b \in A_p$;
  2. $0 \in A_p$ — очевидно;
  3. $p^m a = 0 \Longrightarrow p^m(-a) = -p^m a = 0$. Отсюда $a \in A_p \Longrightarrow -a \in A_p$.

  Докажем, что $A = A_{p_1} \oplus ... \oplus A_{p_s}$:

  1. $A_{p_1} \oplus ... \oplus A_{p_s}$ — прямая сумма.
     Из критерия прямой суммы достаточно показать, что $A_{p_i} \cap \langle A_{p_j} | j \neq i\rangle = \{0\}$. Рассмотрим $a \in A_{p_i} \cap \langle A_{p_j} |\ j \neq i\rangle$. Так как $a \in A_{p_i}$, то $p_i^{m_i}a = 0$. С другой стороны, $a = \sum\limits_{j \neq i} a_j$, то есть $(\prod\limits_{j \neq i} p_j^{m_j})a = 0$.
     Так как $\prod\limits_{j \neq i} p_j^{m_j}$ и $p_i^{m_i}$ взаимно просты, имеем $1 \cdot a = a = 0$.
  2. $A = A_{p_1} \oplus ... \oplus A_{p_s}$. Рассмотрим произвольный $a \in A$. Пусть $\text{ord } a = n = p_1^{\alpha_1} ... p_s^{\alpha_s}$. Обозначим $n_i = \frac{n}{p_i^{\alpha_i}}$.
     Так как $\text{НОД}(n_1, ..., n_s) = 1, \exists\ l_i \in \mathbb{Z} : l_1 n_1 + ... + l_s n_s = 1$. Отсюда $a = l_1 n_1 a + ... + l_s n_s a$. Так как $p_i^{\alpha_i}(l_i n_i a) = l_i n a = 0$, имеем $l_i n_i a \in A_{p_i}$. Значит, a раскладывается в линейную комбинацию элементов A_{p_i}.

- Единственность разложения — от противного: пусть

  $$A = \tilde{A}_{p_1} \oplus ... \oplus \tilde{A}_{p_s} = A_{p_1} \oplus ... \oplus A_{p_s}$$

  Так как A_{p_i} — максимальная p_i-подгруппа в A (содержит все элементы A порядка p_i^m), $\tilde{A}_{p_i} \subseteq A_{p_i}$.

Предположим, что $\exists a \in A_{p_i} : a \notin \tilde{A}_{p_i}$. Так как $a \in A = \tilde{A}_{p_1} \oplus ... \oplus \tilde{A}_{p_s}$, $a = \tilde{a}_{p_i} + b$, где $\tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}, b \in \langle \tilde{A}_{p_j} \mid j \neq i \rangle$. Тогда ord $a = p_i^{m_1}$, ord $\tilde{a}_{p_i} = p_i^{m_2} \Longrightarrow$

$$p_i^{m_1+m_2} a = p_i^{m_1+m_2} \tilde{a}_{p_i} + p_i^{m_1+m_2} b \Longrightarrow p_i^{m_1+m_2} b = 0, \text{а также } \prod_{j \neq i} p_j^{\alpha_j} b = 0$$

$\prod\limits_{j \neq i} p_j^{\alpha_j}$ и $p_i^{m_1+m_2}$ взаимно просты $\Longrightarrow b = 0$, т.е. $a = \tilde{a}_{p_i} \in \tilde{A}_{p_i}$ — противоречие.

Значит, такого a не существует, то есть $A_{p_i} \subseteq \tilde{A}_{p_i}$. Отсюда $A_{p_i} = \tilde{A}_{p_i}$.

□

Лемма 6. *Пусть A — конечная абелева p-группа. Тогда если $A = A_1 \oplus ... \oplus A_s = B_1 \oplus ... \oplus B_t$, где A_i, B_i — примарные циклические подгруппы, то $s = t$ и набор порядков $|A_1|, ..., |A_s|$ совпадает с набором порядков $|B_1|, ..., |B_t|$ (т.е. разложение единственно с точностью до порядка слагаемых).*

Доказательство. Индукция по $|A|$:
База: $|A| = p \Longrightarrow A \simeq \mathbb{Z}_p$ — такое разложение единственно;
Шаг: Пусть $|A_i| = p^{n_i}, |B_i| = p^{m_i}$. Упорядочим их: пусть

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant ... \geqslant n_{\tilde{s}} > n_{\tilde{s}+1} = ... = n_s = 1$$

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant ... \geqslant m_{\tilde{t}} > m_{\tilde{t}+1} = ... = m_t = 1$$

Пусть $A_i = \langle a_i \rangle_{p^{n_i}}, B_i = \langle b_i \rangle_{p^{m_i}}$. Рассмотрим множество $pA = \{pa \mid a \in A\}$. Очевидно, что $pA \leq A$. Тогда:

$$A = \langle a_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle a_{\tilde{s}} \rangle \oplus \langle a_{\tilde{s}+1} \rangle \oplus ... \oplus \langle a_s \rangle$$

$$\forall a \in A : \ a = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_{\tilde{s}} a_{\tilde{s}} + \alpha_{\tilde{s}+1} a_{\tilde{s}+1} + ... + \alpha_s a_s \Longrightarrow pa = \alpha_1 p a_1 + ... + \alpha_{\tilde{s}} p a_{\tilde{s}}$$

($A_{\tilde{s}+1}, ..., A_s$ — циклические порядка p, поэтому $\alpha_{\tilde{s}+1} p a_{\tilde{s}+1} + ... + \alpha_s p a_s = 0$)
Тогда $pA = \langle pa_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle pa_{\tilde{s}} \rangle$. При этом ord $(pa_1) = p^{n_1 - 1}, ...,$ ord $(pa_{\tilde{s}}) = p^{n_{\tilde{s}} - 1}$.
Значит, $|pA| = p^{n_1 + ... + n_{\tilde{s}} - \tilde{s}} < |A|$.
Аналогично $pA = \langle pb_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle pb_{\tilde{t}} \rangle, |pA| = p^{m_1 + ... + m_{\tilde{t}} - \tilde{t}}$.
Тогда по предположению индукции разложения pA совпадают (порядок слагаемых одинаковый в силу упорядоченности), то есть

$$\tilde{s} = \tilde{t}; \ \ \forall i = \overline{1 ... \tilde{s}} : \ n_i - 1 = m_i - 1 \Longrightarrow n_i = m_i$$

При этом $|A| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_{\tilde{s}}| \cdot |A_{\tilde{s}+1}| \cdot ... \cdot |A_s| = p^{n_1 + ... + n_{\tilde{s}} + s - \tilde{s}}$, а с другой стороны $|A| = |B_1| \cdot ... \cdot |B_{\tilde{t}}| \cdot |B_{\tilde{t}+1}| \cdot ... \cdot |B_t| = p^{m_1 + ... + m_{\tilde{t}} + t - \tilde{t}}$. Отсюда

$$n_1 + ... + n_{\tilde{s}} + s - \tilde{s} = m_1 + ... + m_{\tilde{t}} + t - \tilde{t}; \ \tilde{s} = \tilde{t}; \ n_i = m_i \Longrightarrow s = t$$

□

Теорема. ***(Основная т. о конечнопорождённых абелевых группах)*** *Пусть A — конечнопорождённая абелева группа. Тогда A изоморфна прямой сумме (конечных) примарных циклических подгрупп и бесконечных циклических подгрупп:*

$$A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{m}$$

причём число m и набор $p_1^{s_1}, ..., p_k^{s_k}$ определены однозначно для группы A.

Доказательство.

- **Существование разложения**
  Из следствия 4 универсального свойства абелевой группы для A имеем:

  $$A \simeq A_0/B_0 \simeq \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_m} \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{n-m}$$

  Также из аналога китайской теоремы об остатках знаем, что если $\alpha = q_1^{\nu_1}...q_\mu^{\nu_\mu}$, где q_i — различные простые, то $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}_{q_1^{\nu_1}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{q_\mu^{\nu_\mu}}$. Отсюда из разложения выше получаем искомое разложение.

- **Единственность разложения**
  По лемме 4 для A имеет место разложение $A = \text{Tor } A \oplus C$, где Tor A — конечная, C — свободная. Заметим, что rk $C =$ rk $A/$Tor A. Так как Tor A — инвариант A, то $A/$Tor A, а тогда и rk C — инварианты A.
  Так как $C \simeq \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ — конечная, имеем $C = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{m}$, то есть $m =$ rk C, а отсюда m однозначно определено для A.
  Пусть $B =$ Tor A. По лемме 5 $B \simeq A_{\tilde{p}_1} \oplus ... \oplus A_{\tilde{p}_l}$, причём это разложение на примарные подгруппы единственно с точностью до порядка слагаемых. А из леммы 6 каждая $A_{\tilde{p}_i}$ раскладывается на циклические примарные однозначно с точностью до порядка слагаемых. Значит, набор порядков $p_1^{s_1}, ..., p_k^{s_k}$ определён однозначно для A.

□

Пример. Все абелевы группы порядка 8 с точностью до изоморфизма:
$8 = 2^3 = 2^2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Longrightarrow A_1 \simeq \mathbb{Z}_8;\ A_2 \simeq \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2;\ A_3 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Пример. $V_4 = \{e, a, b, c\}$
$V_4 = \langle a \rangle_2 \oplus \langle b \rangle_2 = \langle b \rangle_2 \oplus \langle c \rangle_2$, но разложение из теоремы единственно: $V = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Замечание. Для не конечнопорождённых абелевых групп утверждение теоремы неверно, контрпримером служит следующее упражнение:

Упражнение. Доказать, что $\mathbb{Q}$ не раскладывается в прямую сумму циклических (вообще говоря, произвольных) подгрупп.

Доказательство. Пусть $H_1, H_2 \trianglelefteq \mathbb{Q}$ — нетривиальные нормальные подгруппы $\mathbb{Q}$. Тогда $\exists\ h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 : h_1, h_2 \neq 0$. Тогда:

$$h_1 = \frac{m_1}{n_1}, h_2 = \frac{m_2}{n_2} \Longrightarrow m_2 n_1 h_1 = m_1 n_2 h_2 \in H_1 \cap H_2$$

то есть $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. Отсюда $\mathbb{Q}$ не раскладывается в прямую сумму подгрупп. □

Определение. Экспонентой (периодом, показателем) конечной группы G называется наименьшее общее кратное порядков элементов группы G.
Обозначается $\exp G$.

Утверждение. *Если G конечна, то* $\exp G \mid |G|$

Доказательство. Для конечных групп знаем, что порядок группы является общим кратным всех порядков элементов группы. Так как наименьшее общее кратное набора чисел делит любое общее кратное этого набора, получаем необходимое утверждение. □

Утверждение. *Конечная абелева группа A циклическая* $\Longleftrightarrow \exp A = |A|$.

Доказательство.
$\Longrightarrow$: $A = \langle a \rangle \Longrightarrow \operatorname{ord} a = |A| \Longrightarrow \exp A \geqslant |A| \Longrightarrow \exp A = |A|$ (т.к. $\exp A \mid |A|$).
$\Longleftarrow$: От противного: пусть $\exp A = |A|$, но A — не циклическая. По основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах $A \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{s_m}}$. Если все $p_1, ..., p_m$ различны, то A циклическая по аналогу китайской теоремы об остатках — противоречие. Если среди них есть совпадающие, то можем без ограничения общности считать, что $p_1 = p_2, s_1 \leqslant s_2$. Обозначим $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}} = \langle a_i \rangle \Longrightarrow \forall a \in A : a = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$. Тогда если в равенстве $|A| = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_m^{s_m}$ обозначить $t = p_2^{s_2} ... p_m^{s_m}$, то $\forall a \in A :\ ta = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i t a_i = 0$.
(очевидно, что $ta_i = 0$ для $i \neq 1$, а $ta_1 = 0$ в силу $p_1 = p_2, s_1 \leqslant s_2$)
Тогда t — общее кратное всех порядков элементов A, то есть $\exp A \mid t$, но $t < |A| = \exp A$ — противоречие. Значит, A — циклическая. □

Теорема. *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, A — конечная подгруппа в $\mathbb{F}^*$. Тогда A — циклическая.*

Доказательство. (мультипликативная терминология)
Из определения поля F^* — абелева группа, а значит, A также абелева.
От противного: пусть A не циклическая, т.е. $\exp A < |A|$. Тогда если $\exp A = n$, то $\forall a \in A\ a^n = 1$. Рассмотрим многочлен $x^n - 1$ над полем $\mathbb{F}$. Его степень равна n, а число его корней в $\mathbb{F}$ хотя бы $|A|$, что больше n по предположению — противоречие. □

Пример. $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p:\ A = F^*$ — циклическая. Например, $\mathbb{Z}_5^* = \langle 3 \rangle_4$.

Следствие. *Мультипликативная группа любого конечного поля — циклическая.*

5 Действия группы на множестве

Определение. Пусть X — произвольное множество. Биективное отображение $f : X \to X$ называется преобразованием множества X.
Множество всех преобразований X обозначается $S(X)$.

Утверждение. *$S(X)$ — группа относительно композиции.*

Доказательство.

1. Ассоциативность — очевидно;
2. Нейтральный элемент — тождественное преобразование;
3. Обратный элемент — обратное преобразование (существует, т.к. биекция)

□

Определение. Группа $S(X)$ называется группой всех преобразований X.
Произвольная $H \leq S(X)$ называется группой преобразований множества X.

Пример. $GL(V)$ — группа невырожденных линейных операторов векторного пространства V : $GL(V) \leq S(V)$.

Определение. Пусть G — произвольная группа, X — произвольное множество.
Действием группы G на множестве X называется гомоморфизм $\alpha : G \to S(X)$.
Обозначается $G \curvearrowright X$ (или $G : H$)
Элементы множества X при этом называются точками.
$\forall g \in G : g \mapsto \alpha(g)$ — преобразование множества X, т.е. биекция $X \to X$.
Равенство $\alpha(g)(x) = y (\in X)$ записывают как $\alpha(g)x = y$ или $gx = y$.

Так как α — гомоморфизм, имеем:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2) \Longrightarrow \alpha(g_1 g_2)x = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))x = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)x)$$

Отсюда $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$. Аналогично:

$$\forall g \in G : \alpha(g^{-1}) = (\alpha(g))^{-1} \Longrightarrow \alpha(g^{-1})x = (\alpha(g))^{-1}(x)$$

Отсюда $g^{-1}x = y \Longleftrightarrow gy = x$.
Если $H \leq S(X)$, то определено "тавтологическое" действие H на $X : \alpha(h) = h$ — вложение $H \to S(X)$.

Пример. $GL(V) \curvearrowright V$: $\alpha(g)x = g(x)$ $\forall g \in GL(V), x \in X$

В общем случае $\alpha : G \to S(X)$ — гомоморфизм, то есть $\mathrm{Im}\ \alpha \leq S(X), \mathrm{Ker}\ \alpha \trianglelefteq G$.

Определение. $\mathrm{Ker}\ \alpha$ называется ядром неэффективности действия группы G на X.
Если $\mathrm{Ker}\ \alpha = \{e\}$, то действие называется эффективным.

Замечание. Всякое действие группы G на множестве X индуцирует и другие действия. Например:

1. $G \curvearrowright 2^X$;
2. Если $Y \subset X$ — инвариантное подмножество относительно G, то $G \curvearrowright Y$.

Пример. Пусть K — равносторонний треугольник, $G = \mathrm{Sym}\ K \leq S(X)$, где X — множество точек треугольника.
Тогда если $Y = \{v_1, v_2, v_3\}$ — вершины треугольника, а $Z = \{e_1, e_2, e_3\}$ — стороны треугольника, то действие $G \curvearrowright X$ индуцирует также и действия $G \curvearrowright Y, G \curvearrowright Z$

Пример. Пусть задано $G \curvearrowright X$, $\mathbb{F}$ — поле, $Y = \{f : X \to \mathbb{F}\}$ — алгебра всех функций $X \to \mathbb{F}$. Рассмотрим $\alpha : G \to S(Y) : \forall g \in G\ \alpha(g)f = \tilde{f}$ такое, что $\tilde{f}(x) = f(g^{-1}x)\ \forall x \in X$. Покажем, что α — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G: \ (\alpha(g_1g_2)f)(x) = f((g_1g_2)^{-1}(x)) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}x)) = (\alpha(g_2)f)(g_1^{-1}x) =$$

$$= \alpha(g_1)(\alpha(g_2)f)(x) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2)f)(x)$$

Замечание. Если $G \curvearrowright X, H \leq G$, то определено также действие $H \curvearrowright X$ — ограничение действия на подгруппу.

Пример. $G = S_3$; $G \curvearrowright X$, где $X = \{1, 2, 3\}$ — действуют как подстановки.
$H = \langle (1, 2, 3) \rangle \leq G$ — определено действие $H \curvearrowright X$ как ограничение $G \curvearrowright X$.

5.1 Орбиты и стабилизаторы

Утверждение. *Отношение, заданное правилом $x \sim y \iff \exists g \in G : gx = y$, является отношением эквивалентности.*

Доказательство.

- Рефлексивность: $\forall x \in X : ex = x \Longrightarrow x \sim x$;

- Симметричность:

$$x \sim y \Longrightarrow \exists g \in G : gx = y \Longrightarrow g^{-1}gx = g^{-1}y \Longrightarrow g^{-1}y = x \Longrightarrow y \sim x$$

- Транзитивность:

$$\begin{cases} x \sim y \\ y \sim z \end{cases} \Longrightarrow \exists g_1, g_2 \in G : \begin{cases} y = g_1 x \\ z = g_2 y \end{cases} \Longrightarrow z = g_2(g_1 x) = (g_2 g_1)x \Longrightarrow x \sim z$$

□

Определение. Классы эквивалентности относительно этого отношения называются орбитами относительно действия $G \curvearrowright X$.
Обозначается $\mathrm{Orb}(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G : y = gx\}$

Пример. Пусть G — группа поворотов плоскости $\mathcal{E}^2$ вокруг точки o.
Тогда при $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$ $\mathrm{Orb}(x)$ — окружность с центром в точке o радиуса $|ox|$.

Определение. Если $\mathrm{Orb}(x) = \{x\}$, то x называется неподвижной точкой.

Определение. Если $\mathrm{Orb}(x) = X$, то действие называется транзитивным.

Замечание. Это именно характеристка действия, так как $\exists x : \mathrm{Orb}(x) = X \Rightarrow \forall x \in X\ \mathrm{Orb}(x) = X$.

Пример. G — группа сдвигов (параллельных переносов) $\mathcal{E}^2$.
Тогда $G \curvearrowright \mathcal{E}^2$ — транзитивное (из любой точки можно получить любую другую сдвигом на вектор, их соединяющий).

Утверждение. *Если* $y \in \mathrm{Orb}(x)$, *то* $\mathrm{Orb}(y) = \mathrm{Orb}(x)$.

Доказательство. Напрямую следует из определения орбиты. □

Определение. Стабилизатором (стационарной подгруппой) точки x называется множество $\mathrm{St}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$.

Утверждение. $\mathrm{St}(x) \leq G$.

Доказательство.

- $g_1, g_2 \in St(x) \Longrightarrow g_1 x = g_2 x = x$
  $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x \Longrightarrow g_1 g_2 \in \mathrm{St}(x)$;
- $ex = x \Longrightarrow e \in \mathrm{St}(x)$;

- Пусть $g \in \mathrm{St}(x)$. Тогда $g(x) = x$, а также $g(g^{-1}x) = ex = x$. Так как образ g при действии — биекция, имеем $x = g^{-1}x$, то есть $g^{-1} \in \mathrm{St}(x)$

□

Утверждение. *Если $y = gx$, то множество $M_y = \{h \in G \mid y = hx\}$ совпадает с множеством $g\mathrm{St}(x)$.*

Доказательство. Покажем оба включения:

$g\mathrm{St}(x) \subset M_y$: $\forall \tilde{g} \in g\mathrm{St}(x)$: $\tilde{g} = g \cdot g'$, где $g' \in \mathrm{St}(x)$. Тогда: $\tilde{g}x = (gg')x = g(g'x) = gx = y \Longrightarrow \tilde{g} \in M_y$. Отсюда $g\mathrm{St}(x) \subset M_y$.

$M_y \subset g\mathrm{St}(x)$: $\forall h \in M_y$: $y = hx$. Также $y = gx \Longrightarrow gx = hx \Longrightarrow (g^{-1}h)x = g^{-1}(hx) = x \Longrightarrow g^{-1}h \in \mathrm{St}(x) \Longrightarrow h \in g\mathrm{St}(x)$. Отсюда $M_y \subset g\mathrm{St}(x)$. □

Теорема. *Отображение $\psi : \mathrm{Orb}(x) \to G/\mathrm{St}(x)$ (множество левых смежных классов, не факторгруппа!) такое, что $gx \mapsto g\mathrm{St}(x)$, является биекцией.*

Доказательство.

- Корректность: Пусть $y = g_1x = g_2x$. Тогда:

$$g_1x = g_2x \Longrightarrow (g_2^{-1}g_1)x = (g_2^{-1}g_2)x = x \Longrightarrow g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{St}(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow g_1 \in g_2\mathrm{St}(x) \Longrightarrow g_1\mathrm{St}(x) = g_2\mathrm{St}(x) \Longrightarrow \psi(g_1x) = \psi(g_2x)$$

- Сюръективность — очевидна ($\forall g \in G$ $g\mathrm{St}(x)$ будет образом точки gx);

- Инъективность: Пусть $\psi(g_1x) = \psi(g_2x)$. Тогда:

$$g_1\mathrm{St}(x) = g_2\mathrm{St}(x) \Longrightarrow g_2^{-1}g_1 \in \mathrm{St}(x) \Longrightarrow (g_2^{-1}g_1)x = x \Longrightarrow g_1x = g_2x$$

□

Следствие 1. $|\mathrm{Orb}(x)| = |G/\mathrm{St}(x)| = |G : \mathrm{St}(x)|$.

Следствие 2. *Если G — конечная группа, то $|\mathrm{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\mathrm{St}(x)|}$.*

Пример. Пусть $K \in \mathcal{E}^3$ — куб, $G = \mathrm{Sym}^+(K) = \{g \in \mathrm{Isom}^+(\mathcal{E}^3) \mid gK = K\}$ — группа вращений K.

Найдём $|G|$. Так как $G \leq S(X)$, где $X = \{v_1, ..., v_8\}$ — множество вершин куба, $|G| < \infty$. Значит, если рассмотреть индуцированное действие $G \curvearrowright X$, то $|G| = |\mathrm{Orb}(v_1)| \cdot |\mathrm{St}(v_1)|$.

$\mathrm{Orb}(v_1) = X$ (вершина может перейти в любую) $\Longrightarrow |\mathrm{Orb}(v_1)| = 8$;

$|\mathrm{St}(v_1)| = 3$ (id и два поворота вокруг большой диагонали, содержащей v_1);

Отсюда $|G| = 8 \cdot 3 = 24$.
Более того, покажем, что $G \simeq S_4$. Рассмотрим множество диагоналей куба $Y = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$. Так как при собственном движении диагонали переходят в диагонали, можем рассмотреть действие $G \curvearrowright Y \Longrightarrow \exists \alpha : G \to S(Y) \simeq S_4$ — гомоморфизм. Из $|G| = |S_4| = 24$ для доказательства того, что α — изоморфизм, достаточно показать сюръективность, а для этого достаточно показать, что все транспозиции диагоналей можно получить вращениями (достаточно, т.к. S_4 порождается транспозициями, а $\mathrm{Im}\ \alpha \leq S(Y)$).
Такая транспозиция — это поворот на π относительно прямой, проходящей через середины двух рёбер, соединяющих концы диагоналей.

Упражнение. Доказать, что если L — правильный тетраэдр, то $\mathrm{Sym}(L) \simeq S_4$.

Доказательство. Будем действовать аналогично — пусть $X = \{v_1, ..., v_4\}$ — множество вершин тетраэдра, тогда действие $\mathrm{Sym}(L) \curvearrowright E^3$ индуцирует действие $\mathrm{Sym}(L) \curvearrowright X$, а отсюда $|\mathrm{Sym}(L)| = |\mathrm{Orb}(v_1)| \cdot |\mathrm{St}(v_1)|$.
$\mathrm{Orb}(v_1) = X$ (вершина может перейти в любую) $\Longrightarrow |\mathrm{Orb}(v_1)| = 4$;
$|\mathrm{St}(v_1)| = 6$ (любые перестановки вершин на грани, не содержащей v_1);
(проверка существования всех этих движений непосредственная)
Отсюда $|G| = 4 \cdot 6 = 24$.
Так как $S(X) \simeq S_4$, достаточно показать, что гомоморфизм действия — изоморфизм, а из равенства порядков достаточно сюръективности. Транспозиция любых двух вершин может быть получена симметрией относительно плоскости, проходящей через середину ребра, соединяющего вершины, и противоположное ребро. □

Определение. Элементы $a, b \in G$ называются сопряжёнными, если $\exists g \in G$ такой, что $b = g^{-1}ag$. Обозначается $b = a^g$.

Замечание. Такое обозначение не случайно: многие свойства возведения в степень присущи и операции сопряжения. Однако в данном курсе эти свойства пока не понадобятся.

Определение. Подгруппы $L, K \leq G$ называются сопряжёнными, если $\exists g \in G$ такой, что $K = g^{-1}Lg = \{g^{-1}lg \mid l \in L\}$.

Утверждение. *Пусть $y = gx$. Тогда $g\mathrm{St}(x)g^{-1} = \mathrm{St}(y)$.*

Доказательство.

- $g\mathrm{St}(x)g^{-1} \overset{?}{\subseteq} \mathrm{St}(y)$:
  $\forall h \in \mathrm{St}(x) : \ ghg^{-1}(y) = ghg^{-1}(gx) = gh(g^{-1}g)x = ghx = gx = y \Longrightarrow ghg^{-1} \in \mathrm{St}(y)$;

- $\mathrm{St}(y) \overset{?}{\subseteq} g\mathrm{St}(x)g^{-1}$: (аналогичные рассуждения, т.к. $y = gx \Longleftrightarrow x = g^{-1}y$)
  $\forall h \in \mathrm{St}(y) : \ g^{-1}hg(x) = g^{-1}hg(g^{-1}y) = g^{-1}h(gg^{-1})y = g^{-1}hy = g^{-1}y = x \Longrightarrow g^{-1}hg \in \mathrm{St}(x) \Longrightarrow h \in g\mathrm{St}(x)g^{-1}$.

□

5.2 Действия группы на себе

Пусть G — группа, $X = G$. Рассмотрим основные действия $G \curvearrowright G$ и покажем некоторые их свойства:

1. Действие $G \curvearrowright G$ левыми сдвигами:
   $\alpha : G \to S(G)$ такое, что $\forall g \in G, h \in G : \ \alpha(g)h = gh$.
   Покажем, что α — гомоморфизм:

   $$\forall g_1, g_2 \in G : \ \alpha(g_1g_2)h = (g_1g_2)h = g_1(g_2h) = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

   $g \in \mathrm{Ker}\ \alpha \Longrightarrow \forall h \in G : \ gh = h \Longrightarrow g = e \Longrightarrow \mathrm{Ker}\ \alpha = \{e\}$ — действие эффективно.
   Значит, по теореме о гомоморфизме $G \simeq \mathrm{Im}\ \alpha \leq S(G)$.

   Следствие. *(Теорема Кэли)*
   Пусть $|G| = n$. Тогда G изоморфна некоторой подгруппе S_n.

   Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha : G \to S(G)$, приведённый выше. Тогда $G \simeq \mathrm{Im}\ \alpha \leq S(G) \simeq S_n$, т.к. $|G| = n$. □

2. Действие $G \curvearrowright G$ правыми сдвигами:
   $\alpha : G \to S(G)$ такое, что $\forall g \in G, h \in G : \ \alpha(g)h = hg^{-1}$.
   Покажем, что α — гомоморфизм:

   $$\forall g_1, g_2 \in G : \ \alpha(g_1g_2)h = hg_2^{-1}g_1^{-1} = \alpha(g_1)(hg_2^{-1}) = (\alpha(g_1)\alpha(g_2))h$$

   $g \in \mathrm{Ker}\ \alpha \Longrightarrow \forall h \in G : \ hg^{-1} = h \Longrightarrow g = e \Longrightarrow \mathrm{Ker}\ \alpha = \{e\}$ — действие эффективно.

3. Действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями:
   $\alpha : G \to S(G)$ такое, что $\forall g \in G, h \in G : \ \alpha(g)h = ghg^{-1}$.
   Покажем, что α — гомоморфизм:

$$\forall g_1, g_2 \in G : \ \alpha(g_1 g_2)h = (g_1 g_2)h(g_1 g_2)^{-1} = g_1(g_2 h g_2^{-1})g_1^{-1} = \alpha(g_1)(\alpha(g_2)h)$$

   Утверждение. *$\forall g \in G : \ \alpha(g) : G \to G$ — автоморфизм, т.е. изоморфизм G на себя.*

   Доказательство. Биективность $\alpha(g)$ следует из $\alpha(g) \in S(G)$. Докажем, что $\alpha(g)$ — гомоморфизм:

$$\alpha(g)(h_1 h_2) = g h_1 h_2 g^{-1} = (g h_1 g^{-1})(g h_2 g^{-1}) = (\alpha(g)h_1)(\alpha(g)h_2)$$

   Значит, $\alpha(g)$ — автоморфизм G. □

   Определение. Такой автоморфизм называется внутренним автоморфизмом группы G (относительно элемента g).

Утверждение.

1. *Множество* $\mathrm{Aut}\, G$ *всех автоморфизмов группы* G *— группа относительно композиции, причём* $\mathrm{Aut}\, G \leq S(G)$.
2. *Множество* $\mathrm{Int}\, G$ *всех внутренних автоморфизмов группы* G *— группа относительно композиции, причём* $\mathrm{Int}\, G \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, G$.

Доказательство.

1. Достаточно проверить, что $\mathrm{Aut}\, G \leq S(G)$:
   - $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Aut}\, G \Longrightarrow (\alpha_1 \alpha_2) \in \mathrm{Aut}\, G$;
   - $\mathrm{id} \in \mathrm{Aut}\, G$;
   - $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G \Longrightarrow \alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}\, G$ (изоморфизм обратим).
2. Для определения группы достаточно проверить, что $\mathrm{Int}\, G \leq \mathrm{Aut}\, G$:
   - $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Int}\, G \Longrightarrow \exists g_1, g_2 \in G : \ \alpha_i$ — сопряжение относительно g_i. Тогда $(\alpha_1 \alpha_2)$ — сопряжение относительно $g_1 g_2$, т.е. $(\alpha_1 \alpha_2) \in \mathrm{Int}\, G$;
   - $\mathrm{id} \in \mathrm{Int}\, G$ — сопряжение относительно e;
   - $\alpha \in \mathrm{Int}\, G \Longrightarrow \alpha$ — сопряжение относительно $g \in G \Longrightarrow \alpha^{-1}$ — сопряжение относительно $g^{-1} \Longrightarrow \alpha^{-1} \in \mathrm{Int}\, G$.

Проверим, что $\mathrm{Int}\ G \trianglelefteq \mathrm{Aut}\ G$, т.е. $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}\ G,\ g \in G:\ \varphi\alpha(g)\varphi^{-1} \in \mathrm{Int}\ G$:

$$(\varphi\alpha(g)\varphi^{-1})(h) = \varphi(\alpha(g)(\varphi^{-1}(h))) = \varphi(g\varphi^{-1}(h)g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(\varphi^{-1}(h))\varphi(g^{-1})$$

$$= \varphi(g)h(\varphi(g))^{-1} = \alpha(\varphi(g))(h) \Longrightarrow \varphi\alpha(g)\varphi^{-1} = \alpha(\varphi(g)) \in \mathrm{Int}\ G$$

□

Определение.
$\mathrm{Aut}\ G$ называется группой ~~аутизмов~~[1] автоморфизмов группы G.
$\mathrm{Int}\ G$ называется группой внутренних автоморфизмов группы G.

Пусть α — действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями. Тогда $\mathrm{Ker}\ \alpha = \{g \in G \mid \alpha(g)h = h\ \forall h \in G\} = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h\ \forall h \in G\} = \{g \in G \mid gh = hg\ \forall h \in G\}$, а $\mathrm{Im}\ \alpha = \mathrm{Int}\ G$.

Определение. Множество $Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg\ \forall h \in G\}$ называется центром группы G.

Свойства.

1. $Z(G) = \mathrm{Ker}\ \alpha$, *где* α *— действие* $G \curvearrowright G$ *сопряжениями;*
2. $Z(G) \trianglelefteq G$*;*
3. $\forall H \leq Z(G):\ H \trianglelefteq G$*;*
4. $Z(G) = G \Longleftrightarrow G$ *— абелева*

Доказательство.

1. Доказано выше;
2. Следует из (1) ($\mathrm{Ker}\ \alpha \trianglelefteq G$ — свойство гомоморфизма);
3. $\forall h \in H \leq Z(G),\ g \in G : ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H \Longrightarrow H \trianglelefteq G$;
4. Очевидно из определения абелевой группы.

□

5.3 Классы сопряжённости и централизаторы

Определение. Пусть α — действие $G \curvearrowright G$ сопряжениями.
Классом сопряжённости $x \in G$ называется орбита x относительно α.
Централизатором элемента $x \in G$ называется стабилизатор x относительно α.
Класс сопряжённости обозначается как $x^G = \{y \in G \mid \exists g \in G : y = gxg^{-1}\}$.
Централизатор обозначается как $C(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$.

Утверждение 1. *Если* $|G| < \infty$, *то* $|x^G| = \frac{|G|}{|C(x)|}$.

Доказательство. Очевидно следует из утверждения $|\mathrm{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\mathrm{St}(x)|}$. □

Утверждение 2. $x^G = \{x\} \iff x \in Z(G)$.

Доказательство. $\forall g \in G : gxg^{-1} = x \iff gx = xg$. □

Определение. Группа G называется тривиальной, если $G = \{e\}$.

Теорема. *Центр любой конечной нетривиальной p-группы нетривиален (p — простое).*

Доказательство. Пусть $|G| = p^s$. Рассмотрим случаи:

1. G — абелева $\Longrightarrow Z(G) = G$.
2. G — неабелева. Тогда G разбивается на несколько непересекающихся классов сопряжённости: $G = \bigsqcup_{i=1}^{k} x_i^G$.
   По утверждению 2 $|x_i^G| = 1 \iff x_i \in Z(G)$, а по утверждению 1 $|x_i^G| = \frac{|G|}{|C(x_i)|}$
   Так как G — p-группа, для $x_i \notin Z(G)$: $|x_i^G| = p^{s_i}, s_i \geqslant 1$.
   Без ограничения общности пусть только $x_1, ..., x_m \in Z(G)$ (всегда будет хотя бы один, так как $e \in Z(G)$). Тогда:

   $$|G| = \underbrace{|x_1^G| + ... + |x_m^G|}_{|Z(G)|} + |x_{m+1}^G| + ... + |x_k^G| \Longrightarrow p^s = |Z(G)| + p^{s_{m+1}} + ... + p^{s_k}$$

   Отсюда $p \mid |Z(G)|$, а значит, $|Z(G)| \geqslant p > 1$ — центр нетривиален.

□

Замечание. ∃ бесконечная (конечнопорождённая) p-группа с тривиальным центром (монстр Тарского).

Следствие. *Если $|G| = p^2$, где p — простое, то G — абелева.*

Доказательство. G — p-группа $\Longrightarrow Z(G) \neq \{e\}$.
Предположим, что G неабелева, т.е. что $Z(G) \neq G$.
Тогда, так как $|Z(G)| \mid |G| = p^2$ и $|Z(G)| \neq 1, p^2$, имеем $|Z(G)| = p$.
Рассмотрим группу $G/Z(G)$. Её порядок равен $\frac{|G|}{|Z(G)|} = \frac{p^2}{p} = p \Longrightarrow G/Z(G)$ — циклическая, а значит, $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$. Тогда $\forall g \in G\ \exists t \in \mathbb{Z} : g \in a^t Z(G)$.
Рассмотрим два произвольных элемента $g_1, g_2 \in G$ и докажем, что $g_1 g_2 = g_2 g_1$:

$$\exists t_1, t_2 \in \mathbb{Z} : g_1 = a^{t_1} Z(G), g_2 = a^{t_2} Z(G) \Longrightarrow \exists z_1, z_2 \in Z(G) : g_1 = a^{t_1} z_1, g_2 = a^{t_2} z_2$$

Так как элементы центра коммутируют со всеми элементами G, имеем:

$$g_1 g_2 = a^{t_1} z_1 a^{t_2} z_2 = a^{t_1+t_2} z_1 z_2 = a^{t_2+t_1} z_2 z_1 = a^{t_2} z_2 a^{t_1} z_1 = g_2 g_1$$

а значит, G — абелева, что противоречит предположению.
Отсюда G не может быть неабелевой, т.е. G — абелева. □

Лемма 1. *Пусть X — произвольное множество, $G \leq S(X)$. Тогда если $\varphi \in G$ т.ч. $\varphi : x \mapsto y$, то $\forall \psi \in G :\ \psi \circ \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(x) \mapsto \psi(y)$.*

Доказательство. Применим преобразование $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$:

$$(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \psi(\varphi(\psi^{-1}(\psi(x)))) = \psi(\varphi(x)) = \psi(y)$$

□

Утверждение 3. *Пусть $\sigma, \tilde{\sigma} \in S_n$. Тогда $\sigma, \tilde{\sigma}$ сопряжены в $S_n \Longleftrightarrow \sigma, \tilde{\sigma}$ имеют одинаковые цикловые структуры, т.е. наборы длин независимых циклов в разложении $\sigma, \tilde{\sigma}$ совпадают.*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть $\sigma, \tilde{\sigma}$ сопряжены в $S_n \Longrightarrow \exists \tau \in S_n : \tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$.
Пусть $\sigma = (i_1 i_2 ... i_s)(j_1 j_2 ... j_t)...$ — разложение σ в независимые циклы. Тогда $\sigma : i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, ..., i_s \mapsto i_1$, а тогда по лемме 1 $\tau\sigma\tau^{-1} : \tau(i_1) \mapsto \tau(i_2), \tau(i_2) \mapsto \tau(i_3), ..., \tau(i_s) \mapsto \tau(i_1)$. Аналогичное рассуждение можно провести для всех независимых циклов σ, а значит, $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i_1)\tau(i_2)...\tau(i_s))(\tau(j_1)\tau(j_2)...\tau(j_t))...$ — длины циклов сохраняются.
$\Longleftarrow$: Пусть $\sigma, \tilde{\sigma}$ имеют одинаковые цикловые структуры. Можем поменять порядок циклов так, чтобы длины i-х циклов в σ и $\tilde{\sigma}$ совпадали, т.е.

$$\sigma = (i_1 i_2 ... i_s)(j_1 j_2 ... j_t)...; \quad \tilde{\sigma} = (\tilde{i}_1 \tilde{i}_2 ... \tilde{i}_s)(\tilde{j}_1 \tilde{j}_2 ... \tilde{j}_t)...$$

Тогда если $\tau = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & ... & i_s & j_1 & j_2 & ... & j_t & ... \\ \tilde{i}_1 & \tilde{i}_2 & ... & \tilde{i}_s & \tilde{j}_1 & \tilde{j}_2 & ... & \tilde{j}_t & ... \end{pmatrix}$, то по лемме 1 $\tilde{\sigma} = \tau\sigma\tau^{-1}$. □

Примеры. $\sigma = (12)(345)(6)(7), \tilde{\sigma} = (15)(243)(6)(7)$ — сопряжены в S_7:
$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (из построения в теореме);
$\sigma = (123)(45), \tau = (135) \Longrightarrow \tau\sigma\tau^{-1} = (325)(41)$.

Следствие. $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$ *при* $n \geqslant 3$.

Доказательство. Допустим, что в $Z(S_n)$ есть $\sigma \neq \mathrm{id}$. Разложим в независимые циклы: $\sigma = (ij...)....$ Так как $n \geqslant 3, \exists k \neq i, j$. Тогда при $\tau = (jk)$: $\tau\sigma\tau^{-1} = (ik...)...$ — не совпадёт с σ $(\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i))$ — противоречие. □

Упражнение. Докажите, что $Z(A_n) = \{\mathrm{id}\}$ при $n \geqslant 4$.

Доказательство. Допустим, что в $Z(G)$ есть $\sigma \neq \mathrm{id}$. Разложим в независимые циклы: $\sigma = (ij...)....$ Так как $n \geqslant 4, \exists k, l : k, l, i, j$ попарно различны. Тогда при $\tau = (jkl)$: $\tau\sigma\tau^{-1} = (ik...)...$ — не совпадёт с σ $(\tau\sigma\tau^{-1}(i) \neq \sigma(i))$- противоречие. □

Утверждение.
$$H \trianglelefteq G \Longleftrightarrow \begin{cases} H \leq G \\ H \text{ — } \textit{объединение нескольких классов сопряжённости } G \end{cases}$$

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть $H \trianglelefteq G$. Очевидно, что $H \leq G$.
Если $h \in H$, то $\forall g \in G$ $ghg^{-1} \in H$ — H содержит классы сопряжённости всех её элементов $\Longrightarrow H = \bigcup\limits_{h \in H} h^G$.
$\Longleftarrow$: Пусть $H \leq G$ и H — объединение классов сопряжённости. Тогда $\forall h \in H, g \in G : ghg^{-1} \in H$ (H содержит весь класс сопряжённости h^G) $\Longrightarrow H \trianglelefteq G$. □

6 Теоремы Силова

Пусть G — конечная группа, $|G| = p^s \cdot m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.

Определение. Подгруппа $H \leq G$ называется силовской p-подгруппой, если $|H| = p^s$.

Замечание. Несложно видеть, что определение корректно: если H — силовская p-подгруппа, то H — p-подгруппа; более того, это доказано в упражнении п. 4.4

Теорема 1. *(Первая теорема Силова — о существовании)*
Силовская p-подгруппа существует.

Замечание. Напомним, что более общее утверждение $k \mid |G| \Longrightarrow \exists H \leq G : |H| = k$ неверно — в A_4 нет подгруппы порядка 6.

Теорема 2. *(Вторая теорема Силова — о сопряжённости)*
Любая p-подгруппа лежит в некоторой силовской p-подгруппе.
Все силовские p-подгруппы сопряжены.

Теорема 3. *(Третья теорема Силова — о количестве)*
Пусть N_p — число силовских p-подгрупп в G. Тогда $\begin{cases} N_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p) \\ N_p \mid m \end{cases}$

Примеры.

1. $G = S_3, |G| = 6 = 2 \cdot 3$. Силовские 2-подгруппы: $\langle (12) \rangle, \langle (13) \rangle, \langle (23) \rangle$.
2. $G = S_4, |G| = 24 = 2^3 \cdot 3$. Найдём силовские 2-подгруппы:
   Доказывалось, что $S_4 \simeq \mathrm{Sym}^+ K$ — группа вращений куба. Можем рассмотреть сечение куба плоскостью, параллельной некоторой паре противоположных граней — вращения, оставляющие квадрат сечения на месте, образуют подгруппу, очевидно изоморфную D_4 (по определению D_4). Такая подгруппа будет иметь порядок 8, и таких подгрупп будет 3 — столько же, сколько пар противоположных граней — по III теореме Силова это все силовские p-подгруппы в G.

6.1 I теорема Силова

Пусть G — группа, $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$. Тогда $\exists$ силовская p-подгруппа в G.

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. G — абелева $\Longrightarrow G \simeq \langle a_1 \rangle_{p_1^{s_1}} \times ... \times \langle a_k \rangle_{p_k^{s_k}}$. Без ограничения общности $p_1 = ... = p_t = p,\ p_{t+1}, ..., p_k \neq p$. Тогда $H \simeq \langle a_1 \rangle_{p^{s_1}} \times ... \times \langle a_t \rangle_{p^{s_t}}$ — искомая силовская p-подгруппа: очевидно, что H является p-подгруппой, а также $p^s m = |G| = |H| \cdot |G/H|$, где $p \nmid |G/H| \Longrightarrow p^s \mid |H| \Longrightarrow |H| = p^s$.

2. Общий случай (G — неабелева). Индукция по $|G|$:
   База: $n = 1$ — очевидно;
   Шаг: Пусть $G = Z(G) \sqcup x_1^G \sqcup ... \sqcup x_k^G$ — разложение G на классы сопряжённости, где $x_i \notin Z(G)$, то есть $|x_i^G| > 1$. Вновь рассмотрим случаи:

   (a) $\exists i = \overline{1, ..., k} : p \nmid |x_i^G|$. Знаем, что $|C(x_i)| = \frac{|G|}{|x_i^G|}$. По предположению индукции в $C(x_i)$ $\exists$ силовская p-подгруппа $H \Longrightarrow |H| = p^s$ (так как степень вхождения p в порядок группы не уменьшилась), т.е. H — силовская p-подгруппа и для G;

   (b) $\forall i = \overline{1, ..., k} : p \mid |x_i^G|$. Тогда $p \mid |Z(G)| \Longrightarrow |Z(G)| = p^{s_0} m_0$ $((p, m_0) = 1)$. Так как $Z(G)$ — абелева, по 1 случаю $\exists$ силовская p-подгруппа $S_0 \leq Z(G),\ |S_0| = p^{s_0}$.
   По свойству центра $S_0 \leq Z(G) \Longrightarrow S_0 \trianglelefteq G$ — можем рассмотреть G/S_0. Так как $|G/S_0| < |G|$, по предположению индукции $\exists$ силовская p-подгруппа $S \leq G/S_0$. $|G/S_0| = p^{s-s_0} m \Longrightarrow |S| = p^{s-s_0}$
   Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G \to G/S_0$, и $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$ — полный прообраз S при этом гомоморфизме.
   $S_0 \subset \tilde{S}$, так как $\forall s_0 \in S_0 : \pi(s_0) = eS_0$, причём $S_0 \trianglelefteq G \Longrightarrow S_0 \trianglelefteq \tilde{S}$, т.е. можем рассмотреть ограничение $\pi|_{\tilde{S}} : \tilde{S} \to \tilde{S}/S_0$. $\pi|_{\tilde{S}}$ — натуральный гомоморфизм с ядром S_0 и образом $\pi(\tilde{S}) = S$.
   Натуральный гомоморфизм сюръективен, а отсюда по теореме о гомоморфизме $|\tilde{S}| = |S_0| \cdot |S| = p^{s_0} \cdot p^{s-s_0} = p^s \Longrightarrow \tilde{S}$ — искомая силовская p-подгруппа G.

□

Следствие. *Пусть $|G| < \infty$. Тогда G — p-группа $\Longleftrightarrow |G| = p^s (s \in \mathbb{N})$.*

Доказательство.
$\Longleftarrow$ — доказано ранее;
$\Longrightarrow$: От противного: пусть $|G|$ содержит простой множитель $q \neq p$. Тогда по I теореме Силова $\exists$ силовская q-подгруппа в G, причём в ней хотя бы q элементов.

Значит, в ней есть элемент порядка $q^k (k \geqslant 1)$, что противоречит определению p-группы. Отсюда у $|G|$ нет простых делителей, отличных от $p \Longrightarrow |G| = p^s$. $\square$

6.2 II теорема Силова

Пусть G — группа, $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.
Тогда любая p-подгруппа группы G лежит в некоторой силовской p-подгруппе. Все силовские p-подгруппы группы G сопряжены.

Доказательство. Пусть $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.
По I теореме Силова $\exists$ силовская p-подгруппа $S \leq G$. Рассмотрим $H \leq G$ — произвольную нетривиальную p-подгруппу (случай $H = \{e\}$ очевиден).
Рассмотрим множество $X = \{g_1 S, ..., g_m S\}$ смежных классов G по S и действие $H \curvearrowright X$, заданное по правилу $\alpha(h) g_i S = h g_i S$.

$$|\mathrm{Orb}(g_i S)| \mid |H| \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} |\mathrm{Orb}(g_i S)| = 1 \\ p \mid |\mathrm{Orb}(g_i S)| \end{array} \right. \quad (|H| = p^m \text{по следствию из I т. Силова})$$

Предположим, что $\forall i = \overline{1, ..., m} : p \mid |\mathrm{Orb}(g_i S)|$. Тогда $p \mid |X|$, так как $|X|$ — сумма мощностей непересекающихся орбит. Однако $|X| = m$ — взаимно просто с p. Противоречие.
Отсюда $\exists i = \overline{1, ..., m} : |\mathrm{Orb}(g_i S)| = 1$, т.е. точка $g_i S$ неподвижна при $H \curvearrowright X$. Значит, $\forall h \in H \; h g_i S = g_i S \Longrightarrow h \in g_i S g_i^{-1} \Longrightarrow H \leq g_i S g_i^{-1}$. Так как $|g_i S g_i^{-1}| = |S|$, $g_i S g_i^{-1}$ — силовская p-подгруппа, т.е. H лежит в силовской p-подгруппе G.

Заметим, что в доказательстве выше подгруппа S зафиксирована.
Если рассмотреть H — произвольную силовскую p-подгруппу G, то $|H| = p^s$. Так как $H \leq g_i S g_i^{-1}$, $|g_i S g_i^{-1}| = p^s \Longrightarrow H = g_i S g_i^{-1}$ — любая силовская p-подгруппа сопряжена с S. Значит, все силовские p-подгруппы сопряжены. $\square$

Следствие. *Пусть G — группа, $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.*
Тогда силовская p-подгруппа в G единственна $\Longleftrightarrow$ эта подгруппа нормальна.

Доказательство.
$\Longleftarrow$: Пусть $S \trianglelefteq G$ — силовская p-подгруппа. По II теореме Силова все силовские p-подгруппы сопряжены с S, а из нормальности совпадают с S.
(из нормальности следует включение $gSg^{-1} \subseteq S$, а также $|gSg^{-1}| = |S| = p^s$)
$\Longrightarrow$: Если S — единственная, то $\forall g \in G : gSg^{-1} = S$, т.к. сопряженной к силовской p-подгруппе должна быть силовская p-подгруппа. Отсюда $S \trianglelefteq G$. $\square$

6.3 Нормализатор. III теорема Силова

Пусть G — группа, $H \leq G, X = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$.
Рассмотрим действие $G \curvearrowright X : \alpha(\tilde{g})(gHg^{-1}) = \tilde{g}(gHg^{-1})\tilde{g}^{-1}$
Для точки $H \in X:\ \mathrm{Orb}(H) = X,\ \mathrm{St}(H) = \{\tilde{g} \in G \mid \tilde{g}H\tilde{g}^{-1} = H\} \leq G$

Определение. Стабилизатор H относительно этого действия называется нормализатором группы H. Обозначается $N_G(H)$.

Утверждение 1. *Если $|G| < \infty$, то $|G| = |X| \cdot |N_G(H)|$, где X — число подгрупп, сопряжённых с H. В частности, $|X| = |G : N_G(H)|$.*

Доказательство. Очевидно следует из утверждения $|\mathrm{Orb}(x)| = \frac{|G|}{|\mathrm{St}(x)|}$. □

Утверждение 2. *$N_G(H)$ — наибольшая (по включению) подгруппа G, содержащая H как нормальную подгруппу.*

Доказательство. Из определения $N_G(H)$ очевидно, что $H \trianglelefteq N_G(H)$.
Пусть $H \trianglelefteq K \leq G$. Тогда $\forall g \in K\ gHg^{-1} = H \Longrightarrow g \in N_G(H)$.
Отсюда $K \leq N_G(H)$. □

***III* теорема Силова**
Пусть G — группа, $|G| = p^s m$, где p — простое, $(p, m) = 1$.
Пусть N_p — число силовских p-подгрупп в G. Тогда $N_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p),\ N_p \mid m$.

Доказательство.
Пусть S — произвольная силовская p-подгруппа G (хотя бы одна существует по *I* теореме Силова). Рассмотрим $X = \{gSg^{-1} \mid g \in G\}$. По *II* теореме Силова все силовские p-подгруппы G сопряжены, а также порядок любой подгруппы вида gSg^{-1} равен $|S|$, т.е. gSg^{-1} — также силовкая p-подгруппа. Отсюда X — множество всех силовских p-подгрупп G.
$|X| = N_p \Longrightarrow$ по утверждению 1 получаем $N_p \mid |G|$. Осталось показать, что $N_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ (если это так, то $N_p \mid |G| = p^s m \Longrightarrow N_p \mid m$).
Рассмотрим действие $S \curvearrowright X$ сопряжениями. Очевидно, S — неподвижная точка относительно него. Также $N_p = |X| = \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathrm{Orb}(x_i)|$. При этом

$$|\mathrm{Orb}(x_i)| \mid |S| = p^s \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} |\mathrm{Orb}(x_i)| = 1 \\ p \mid |\mathrm{Orb}(x_i)| \end{array}\right.$$

Значит, достаточно показать, что S — единственная неподвижная точка относительно данного движения (тогда $|X| = \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathrm{Orb}(x_i)| \equiv |\mathrm{Orb}(S)| = 1 (\mathrm{mod}\ p)$)

Допустим, что $\tilde{S}$ — неподвижная точка $\Longrightarrow \forall g \in S\ g\tilde{S}g^{-1} = \tilde{S}$.
Рассмотрим нормализатор $N_G(\tilde{S})$. Знаем, что $\tilde{S} \subseteq N_G(\tilde{S})$, а из неподвижности точки $\tilde{S}$ имеем $S \subseteq N_G(\tilde{S})$. Также $N_G(\tilde{S}) \leq G$, то есть степень вхождения p в $|N_G(\tilde{S})|$ также равна s. Значит, $S, \tilde{S}$ — силовские p-подгруппы в $N_G(\tilde{S})$. Тогда по II теореме Силова S и $\tilde{S}$ сопряжены в $N_G(\tilde{S})$, т.е. $S = g\tilde{S}g^{-1}, g \in N_G(\tilde{S})$, а тогда по определению нормализатора $S = \tilde{S}$. Значит, S — единственная неподвижная точка. □

Упражнение. Доказать, что любая группа порядка 15 циклическая.

Доказательство. Пусть G — группа порядка 15. По I теореме Силова в ней есть силовские подгруппы порядка 3 и порядка 5. Притом по III теореме Силова:

$$N_3 \equiv 1(\text{mod } 3),\ N_3 \mid 5 \Longrightarrow N_3 = 1$$

$$N_5 \equiv 1(\text{mod } 5),\ N_5 \mid 3 \Longrightarrow N_5 = 1$$

Таким образом, в G есть по одной силовской подгруппе порядка 3 и 5, а по следствию из II теоремы Силова они обе нормальны в G. Так как их порядки простые, обе эти подгруппы циклические, т.е. изоморфны $\mathbb{Z}_3$ и $\mathbb{Z}_5$ соответственно.
Остаётся заметить, что эти подгруппы пересекаются тривиально (у остальных элементов разные порядки), т.е. некоторая подгруппа G раскладывается в их прямое произведение, а так как $15 = 3 \cdot 5$, эта подгруппа — вся G. Отсюда $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{15}$ — циклическая. □

7 Коммутант

Определение. Пусть G — произвольная группа, $x, y \in G$.
Коммутатором элементов x, y называется элемент $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Свойства.

1. $[x, y] = e \iff xy = yx$;
2. $[x, y]^{-1} = [y, x]$;
3. $\forall g \in G\ g[x, y]g^{-1} = [gxg^{-1}, gyg^{-1}]$.

Доказательство. 1, 2 — очевидно;

$3 : [gxg^{-1}, gyg^{-1}] = gxg^{-1}gyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = g[x, y]g^{-1}$

□

Определение. Коммутантом группы G называется подгруппа, порождённая всеми коммутаторами элементов группы G. Обозначается $[G]$ или G'.
$G' = \{\prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i] \mid x_i, y_i \in G\}$.

Утверждение. $G' = \{e\} \iff G$ — *абелева.*

Доказательство. Очевидно из свойства 1 коммутатора. □

Утверждение. $G' \trianglelefteq G$

Доказательство.

$\forall g \in G, g' = [x_1, y_1][x_2, y_2]...[x_k, y_k] \in G' : gg'g^{-1} = g[x_1, y_1][x_2, y_2]...[x_k, y_k]g^{-1} =$
$(g[x_1, y_1]g^{-1})(g[x_2, y_2]g^{-1})...(g[x_k, y_k]g^{-1}) = [gx_1g^{-1}, gy_1g^{-1}]...[gx_kg^{-1}, gy_kg^{-1}]$

Отсюда $\forall g \in G, g' \in G' : gg'g^{-1} \in G' \Longrightarrow G' \trianglelefteq G$. □

Утверждение. *Если* $H \leq G$ *и* $G' \leq H$, *то* $H \trianglelefteq G$.

Доказательство. $\forall g \in G, h \in H :\ ghg^{-1} = (ghg^{-1}h^{-1})h \in H$. □

Утверждение. *Пусть* $N \trianglelefteq G$. *Тогда* G/N *абелева* $\iff G' \subseteq N$.

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть G/N абелева. Тогда $\forall g_1, g_2 \in G :\ (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N) \Longrightarrow g_1g_2N = g_2g_1N \Longrightarrow g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} = [g_1, g_2] \in N$. Значит, любой коммутатор $\in N$, а значит и все произведения коммутаторов $\in N$, то есть $G' \subseteq N$.
$\Longleftarrow$: Пусть $G' \subseteq N$. Тогда $\forall g_1, g_2 \in G :\ [g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1} \in N \Longrightarrow g_1g_2N = g_2g_1N \Longrightarrow (g_1N)(g_2N) = (g_2N)(g_1N)$. □

7.1 Коммутанты некоторых известных групп

Лемма 1.

1. *A_n порождается циклами длины 3 ($n \geqslant 3$);*
2. *Если $n \geqslant 5$, то A_n порождается произведениями пар независимых транспозиций;*

Доказательство. $\forall \sigma \in A_n \ \sigma = \prod\limits_{i=1}^{k} \tau_i$, где τ_i — транспозиции, k — чётное, т.е. транспозиции разбиваются на пары — рассмотрим случаи зависимых и независимых транспозиций в паре:
Если i, j, k, l — различные (случай $n = 3$ очевиден), то

$$(ij)(jk) = (ijk); \ (ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl)$$

то есть σ представима как произведение тройных циклов.
Если $n \geqslant 5$, то $\exists i, j, k, l, m$ — различные, а тогда $(ij)(jk) = ((ij)(lm))((lm)(jk))$.
Таким образом можно избавиться от пар зависимых транспозиций, то есть σ представима как произведение пар независимых транспозиций. □

Утверждение. $S_n' = A_n$.

Доказательство. $|S_n/A_n| = 2 \Longrightarrow S_n/A_n$ — абелева $\Longrightarrow S_n' \subseteq A_n$. Значит, достаточно доказать (по лемме 1), что $\forall i, j, k$ (различных) $(ikj) \in S_n'$.

$$[(ij), (jk)] = (ij)(jk)(ij)^{-1}(jk)^{-1} = (ik)(kj) = (ikj)$$

□

Утверждение.

1. *$n = 1, 2, 3 \Longrightarrow A_n' = \{\mathrm{id}\}$;*
2. *$n = 4 \Longrightarrow A_n' = V_4$;*
3. *$n \geqslant 5 \Longrightarrow A_n' = A_n$.*

Доказательство.

1. $n = 1, 2, 3$ — $A_n' = \{\mathrm{id}\}$, т.к. A_n — абелева;
2. $n = 4$: $V_4 \trianglelefteq A_4, |V_4| = 4 \Longrightarrow |A_4/V_4| = 3$ — абелева. Значит, $A_4' \subseteq V_4$.

$$[(ijk), (ijm)] = (ijk)(ijm)(ijk)^{-1}(ijm)^{-1} = (jkm)(imj) = (ij)(km)$$

3. $n \geqslant 5$: По пункту 2 леммы 1 A_n порождается парами независимых транспозиций. Аналогично $[(ijk),(ijm)] = (ij)(km)$, а значит, все элементы A_n принадлежат A'_n.

□

Лемма 2. *Группа $SL_n(\mathbb{F})$ порождается элементарными матрицами, соответствующими преобразованиям I типа ($a_i \mapsto a_i + \lambda a_j$).*

Доказательство. Покажем, что $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$ приводится к E за конечное число операций I типа (над строками):
Индукция по n. База $n = 1$ очевидна ($\det A = a_{11} = 1 \Longrightarrow A = E$)
Шаг: Так как $\det A \neq 0,\ \exists i : a_{i1} \neq 0$.
Если $a_{11} = 0$, то прибавим i-ю строку к первой — сделаем $a_{11} \neq 0$. Пусть $n \geqslant 2$ (случай $n = 1$)
Если $a_{11} \neq 1$, то сделаем $a_{21} \neq 0$ аналогично a_{11}, а далее прибавим к первой строке вторую, умноженную на $\frac{1-a_{11}}{a_{21}}$ — сделаем $a_{11} = 1$. Далее с помощью первой строки сможем занулить оставшиеся элементы первого столбца. По предположению индукции подматрицу полученной матрицы без первой строки и первого столбца можно привести к единичному виду. Сделаем это, а далее с помощью i-й строки занулим a_{1i}.
Значит, $\forall A \in SL_n(\mathbb{F})$ приводится к E за конечное число операций I типа над строками, то есть раскладывается в произведение соответствующих элементарных матриц. □

Утверждение. *Пусть $|\mathbb{F}| > 3$. Тогда $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$.*

Доказательство. Заметим, что $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) = \mathbb{F}^*$ из теоремы о гомоморфизме для $\alpha : GL_n(\mathbb{F}) \to F^*$ такого, что $\alpha(A) = \det A$. Отсюда $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F})$ — абелева (как мультипликативная группа поля), т.е. $GL_n(\mathbb{F})' \subseteq SL_n(\mathbb{F})$.
Если $|\mathbb{F}| > 3$, то $\exists \lambda \in \mathbb{F} : \lambda \neq 0, 1, -1$.

$$n = 2 : \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & (\lambda^2 - 1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (\lambda \neq 0)$$

Любое ур-е $(\lambda^2 - 1)a = \mu$ решается для a, так как $\lambda \neq \pm 1$ — отсюда все верхнетреугольные элементарные матрицы I типа принадлежат $GL_n(\mathbb{F})'$. Аналогично для нижнетреугольных — все элементарные матрицы I типа, а отсюда и $SL_n(\mathbb{F})$, принадлежат $GL_n(\mathbb{F})'$.
Случай $n > 2$ аналогичен: необходимо рассмотреть коммутатор

$$[E + (\lambda - 1)E_{ii} + (\lambda^{-1} - 1)E_{jj}, E + aE_{ij}] = E + (\lambda^2 - 1)aE_{ij} \ (i \neq j)$$

Все рассуждения верны и для доказательства $SL_n(\mathbb{F}) \subseteq SL_n(\mathbb{F})'$, т.к. определители всех рассматриваемых при взятии коммутаторов матриц равны 1. $\square$

8 Разрешимые и простые группы

8.1 Разрешимые группы

Определение. Кратный коммутант группы G:

$$G^{(1)} = G'; \quad G^{(k+1)} = [G^{(k)}, G^{(k)}] = (G^{(k)})'$$

Очевидно, что $G \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq ....$

Определение. Группа G называется разрешимой, если $\exists m \in \mathbb{N} : G^{(m)} = \{e\}$.

Утверждение. *G — абелева $\Longrightarrow$ G — разрешимая.*

Доказательство. G — абелева $\Longrightarrow$ $G' = \{e\}$. □

Утверждение.

1. *S_n — разрешимая $\Longleftrightarrow$ $n \leqslant 4$;*
2. *A_n — разрешимая $\Longleftrightarrow$ $n \leqslant 4$.*

Доказательство. $S_n' = A_n$, поэтому S_n — разрешимая $\Longleftrightarrow$ A_n — разрешимая. $A_2 = \{\mathrm{id}\}$, $A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ — абелева, $A_4' = V_4$ — абелева $\Longrightarrow$ при $n \leqslant 4$ A_n разрешима. При $n \geq 5$ $A_n' = A_n$, то есть A_n — не разрешимая. □

Утверждение. *Пусть $\mathbb{F}$ — поле, $|\mathbb{F}| > 3$. Тогда $GL_n(\mathbb{F})$ и $SL_n(\mathbb{F})$ не разрешимы.*

Доказательство. $GL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})' = SL_n(\mathbb{F})$. □

Утверждение.

1. *G — разрешимая, $H \leq G \Longrightarrow H$ — разрешимая;*
2. *G — разрешимая, $H \trianglelefteq G \Longrightarrow G/H$ — разрешимая;*
3. *$H \trianglelefteq G$, H и G/H — разрешимые $\Longrightarrow G$ — разрешимая.*

Доказательство.

1. Для начала заметим, что $H \leq G \Longrightarrow H' \leq G'$, так как любой коммутатор элементов из H — также коммутатор элементов из G. Значит, $H^{(m)} \leq G^{(m)}$. G разрешима $\Longrightarrow \exists m : G^{(m)} = \{e\} \Longrightarrow H^{(m)} = \{e\} \Longrightarrow H$ разрешима.

2. Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G \to G/H$. Очевидно, что образ коммутатора при гомоморфизме — коммутатор:

$$\alpha([x,y]) = \alpha(xyx^{-1}y^{-1}) = \alpha(x)\alpha(y)\alpha(x)^{-1}\alpha(y)^{-1} = [\alpha(x), \alpha(y)]$$

то есть $\pi(G') \subseteq (G/H)'$. При этом натуральный гомоморфизм сюръективен, а прообраз коммутатора — также коммутатор (аналогично), то есть $\pi(G') = (G/H)'$. Аналогично $\pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)}$.
G разрешима $\Longrightarrow \exists m : G^{(m)} = \{e\} \Longrightarrow \pi(G^{(m)}) = (G/H)^{(m)} = \{e\}$.

3. (G/H) разрешима $\Longrightarrow \exists k : (G/H)^{(k)} = \{e\} \Longrightarrow \pi(G^{(k)}) = \{e\} \Rightarrow G^{(k)} \subseteq H$. Также H разрешима $\Longrightarrow \exists l : H^{(l)} = \{e\} \Longrightarrow (G^{(k)})^{(l)} = G^{(k+l)} = \{e\}$. Значит, G разрешима.

□

Утверждение. *Группа $T_n(\mathbb{F})$ невырожденных верхнетреугольных матриц порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$ разрешима.*

Доказательство. Индукция по n:
База: $n = 1 \Longrightarrow T_n(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^*$ — абелева, а значит, разрешима;
Шаг: пусть $T_{n-1}(\mathbb{F})$ разрешима. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi : T_n \to T_{n-1}$:

$$\varphi : \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & * & a_{1n} \\ & \ddots & & a_{2n} \\ 0 & & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

Этот гомоморфизм, очевидно, сюръективен, т.е по теореме о гомоморфизме $T_n/\mathrm{Ker}\ \varphi \simeq T_{n-1}$. Так как T_{n-1} разрешима по предположению индукции, по пункту 3 предыдущего утверждения достаточно доказать разрешимость группы

$$\mathrm{Ker}\ \varphi = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n} \\ & \mathrm{E} & & a_{2n} \\ & & & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array}\right) : a_{in} \in \mathbb{F}, a_{nn} \neq 0 \right\}$$

Аналогично, рассмотрим гомоморфизм ψ: $\mathrm{Ker}\ \varphi \to \mathbb{F}^*$:

$$\psi : \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1n} \\ & \mathrm{E} & & a_{2n} \\ & & & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{array}\right) \mapsto a_{nn}$$

Заметим, что $\operatorname{Im}\psi = \mathbb{F}^*$ — абелева, а $\operatorname{Ker}\psi$ состоит из матриц $\operatorname{Ker}\varphi$ с $a_{nn} = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \mathrm{E} & & a_{1n} \\ & & & a_{2n} \\ & & & a_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|c} & \mathrm{E} & & b_{1n} \\ & & & b_{2n} \\ & & & b_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} & \mathrm{E} & & a_{1n}+b_{1n} \\ & & & a_{2n}+b_{2n} \\ & & & a_{n-1n}+b_{n-1n} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Отсюда несложно видеть, что $\operatorname{Ker}\psi$ — также абелева, то есть разрешимая группа. Значит, $\operatorname{Ker}\varphi$ разрешима, а отсюда и $T_n(\mathbb{F})$ — разрешимая группа. □

Утверждение 1. *Всякая конечная примарная группа G разрешима.*

Доказательство. Пусть p — простое, для которого G является p-группой.
Индукция по $n = |G|$:
База: $n = 1 \Longrightarrow G = \{e\}$ — разрешима;
Шаг: $G \neq \{e\} \Longrightarrow Z(G) \neq \{e\}$ (из примарности). Знаем, что $Z(G) \trianglelefteq G$ — рассмотрим $G/Z(G)$. Это также p-группа, причём порядка $\frac{|G|}{|Z(G)|}$, что меньше n. Значит, $G/Z(G)$ разрешима по предположению индукции, а также $Z(G)$ разрешима, так как абелева. Отсюда G разрешима. □

Утверждение 2. *Всякая группа G порядка pq, где p, q простые, разрешима.*

Доказательство. Случай $p = q$ очевиден из утверждения 1.
Пусть $p \neq q$ — без ограничения общности $p > q$.
По I теореме Силова $\exists$ силовская p-подгруппа $H \leq G$.
По III теореме Силова $\begin{cases} N_p \mid q \\ N_p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p) \end{cases} \Longrightarrow N_p = 1$
(не может равняться q в силу $q < p$)
Тогда по следствию из II теоремы Силова единственная силовская p-подгруппа H нормальна в G. Притом $|H| = p \Longrightarrow H \simeq \mathbb{Z}_p$ и $|G/H| = q \Longrightarrow G/H \simeq \mathbb{Z}_q$ — абелевы. Значит, H и G/H разрешимы, а отсюда G разрешима. □

8.2 Простые группы

Определение. Подгруппа $H \leq G$ называется собственной, если $H \neq \{e\}, G$.

Определение. Группа G называется простой, если $G \neq \{e\}$ и в G нет собственных нормальных подгрупп.

Утверждение 1. *Абелева группа G — простая $\Longleftrightarrow G \simeq \mathbb{Z}_p$, где p — простое.*

Доказательство.
$\Longleftarrow$ — очевидно ($\mathbb{Z}_p$ — циклическая, т.е. нет собственных подгрупп);
$\Longrightarrow$: Пусть G — абелева и простая группа.
Тогда G циклическая, так как $\forall g \neq e : \langle g \rangle \trianglelefteq G$ (т.к. абелева) и $g \neq \{e\}$, т.е. $\langle g \rangle = G$. Теперь, если G бесконечна, то $G \simeq \mathbb{Z}$, но $2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$ — противоречие, т.е. G конечна. А если $|G|$ составное, то $G \simeq \mathbb{Z}_{mn}$, где $\langle m \rangle \lhd \mathbb{Z}_{mn} (m, n \neq 1)$. Значит, $|G|$ простое, т.е. $G \simeq \mathbb{Z}_p$. □

Утверждение 2. *Если G — разрешимая и простая, то $G \simeq \mathbb{Z}_p$, где p — простое.*

Доказательство. Так как G разрешима, $G' \neq G$. Притом $G' \trianglelefteq G$, а отсюда из простоты $G' = \{e\}$. Значит, G — абелева, а тогда $\simeq \mathbb{Z}_p$ из утверждения 1. □

Замечание. Таким образом, всякая простая группа либо изоморфна $\mathbb{Z}_p$, либо не абелева и не разрешима.

8.3 Значение простых групп

Определение. Субнормальной матрёшкой называется последовательность

$$G = G_0 \geq G_1 \geq ... \geq G_m = \{e\}; \quad G_{i+1} \trianglelefteq G_i \ \forall i = \overline{0....m-1}$$

Пример. $G = A_4, H = V_4, K = \langle (12)(34) \rangle$. Тогда $H \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq H$, то есть $G \geq H \geq K \geq \{\mathrm{id}\}$ — субнормальная матрёшка.

Теорема. *Группа G разрешима $\Longleftrightarrow$ G обладает субнормальной матрёшкой такой, что G_i/G_{i+1} — абелева $\forall i = \overline{0....m-1}$.*

Доказательство. Без доказательства. □

Определение. Композиционным рядом называется субнормальная матрёшка такая, что $\forall i = \overline{0....m-1} : G_i \neq G_{i+1}$ и G_i/G_{i+1} — простая группа.

Утверждение 3. *Всякая конечная группа G обладает композиционным рядом.*

Доказательство. Если G — простая, то $G \gneq \{e\}$ — композиционный ряд.
Если G — не простая, то $\exists$ собственная подгруппа $N \trianglelefteq G$, т.е. $G \gneq N \gneq \{e\}$ — субнормальная матрёшка. Будем уплотнять эту матрёшку следующим образом:

Предположим, что в субнормальной матрёшке $G_0 \gneq ... \gneq G_m$ группа G_i/G_{i+1} — не простая. Тогда $\exists$ собственная $\tilde{N} \trianglelefteq G_i/G_{i+1}$.

Рассмотрим натуральный гомоморфизм $\pi : G_i \to G_i/G_{i+1}$. Тогда $\pi^{-1}(\tilde{N}) = \tilde{\tilde{N}}$ — собственная нормальная подгруппа G_i, содержащая G_{i+1}, то есть в матрёшке кусок "$... \gneq G_i \gneq G_{i+1} \gneq ...$" заменяем на "$... \gneq G_i \gneq \tilde{\tilde{N}} \gneq G_{i+1} \gneq ...$". Очевидно, что процесс таких уплотнений конечен, так как количество членов матрёшки явно не превышает $|G|$ (порядок строго убывает). Значит, за конечное число уплотнений сможем построить композиционный ряд для G. □

Теорема. *(Жордана — Гёльдера)*
Если группа G обладает композиционным рядом, то набор факторгрупп в нём определён однозначно (с точностью до перестановки).

Доказательство. Без доказательства. □

Пример. Пусть $G = \langle a \rangle_{12}$. Композиционные ряды:

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a^2 \rangle_6 > \langle a^4 \rangle_3 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3;$$

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a^2 \rangle_6 > \langle a^6 \rangle_2 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2;$$

$$\langle a \rangle_{12} > \langle a^3 \rangle_4 > \langle a^6 \rangle_2 > \{e\} \quad - \quad \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2;$$

Замечание. Группа G не задаётся однозначно набором простых факторов композиционного ряда: пусть набор факторов — $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2$, тогда возможны композиционные ряды $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_4$ и $0 < \mathbb{Z}_2 < \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \simeq V_4$.

8.4 Примеры простых групп

Упражнение. Если $|G| < 60$ и $|G|$ — не простое, то G — не простая группа.

Доказательство. (довольно объёмное и вряд ли пригодится)
Всё в лучших традициях — докажем несколько лемм:

Лемма 1. *Всякая неабелева примарная группа не является простой.*

Доказательство. Очевидно из нетривиальности центра — он не совпадает со всей группой из неабелевости, а значит является собственной нормальной подгруппой G □

Лемма 2. *Пусть G — неабелева группа, $|G| = p^l m$, где $p \nmid m$, $p^l \nmid (m-1)!$*
Тогда G — не простая группа.

Доказательство. Случай $m = 1$ очевиден из леммы 1.
Пусть $m > 1$, S — силовская p-подгруппа G. Рассмотрим действие $G \curvearrowright G/S$ левыми сдвигами (G/S — множество левых смежных классов). Таких смежных классов ровно m (из теоремы Лагранжа), причём каждый элемент g переводит разные смежные классы в разные — отсюда каждый элемент G соответствует некоторой подстановке из S_m, то есть определён гомоморфизм $\alpha : G \to S_m$. Если G простая, то $\operatorname{Ker} \alpha = \{e\}$ либо G — второе, очевидно, невозможно (класс $g_1 S$ в класс $g_2 S$ переводит элемент $g_2 g_1^{-1}$). Значит, $G \simeq \alpha(G) \leq S_m$ из теоремы о гомоморфизме. Отсюда $|G| \mid |S_m| \Longrightarrow p^l m \mid m! \Longrightarrow p^l \mid (m-1)!$ — противоречие. □

Замечание. Данная лемма очень сильна при решении некоторых упражнений — например, из неё несложными рассуждениями следует непростота (а по индукции и разрешимость) неабелевых групп порядков $2p^k, 3p^k, 4p^k$ (p — простое).

Остаётся лишь перебор случаев составных чисел < 60 — целиком его несложно провести самому, поэтому здесь он приведён не будет в целях сохранения моего морального и физического благополучия.
В результате под лемму 2 не попадут порядки $30, 40$ и 56 — разберём их:

- $|G| = 40 = 2^3 \cdot 5$: По III теореме Силова в G единственная подгруппа порядка 5 ($N_5 \mid 8, N_5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$) — она нормальна;
- $|G| = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$: По III теореме Силова число силовских 5-подгрупп в G либо 1, либо 6 ($N_5 \mid 6, N_5 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$). Если такая подгруппа единственна — то она нормальна, и G не простая. Аналогично силовских 3-подгрупп либо 1, либо 10 — случай единственности очевиден. Остаётся заметить, что порядки самих силовских подгрупп простые, то есть эти подгруппы циклические — значит, различные 3- и 5-подгруппы пересекаются тривиально. Значит, в G есть $6 \cdot (5-1) = 24$ различных элементов порядка 5 и $10 \cdot (3-1) = 20$ различных элементов порядка 3, что невозможно для группы порядка 30.
- $|G| = 56 = 2^3 \cdot 7$: По III теореме Силова силовских 7-подгрупп в G либо 1, либо 8 ($N_7 \mid 8, N_7 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$). Случай $N_7 = 1$ очевиден, а иначе по рассуждениям выше силовские 7-подгруппы пересекаются тривиально, а значит в G есть хотя бы $8 \cdot (7-1) = 48$ различных элементов порядка 7. При этом в G есть силовская 2-подгруппа, которой принадлежат 8 элементов порядка 2^k — либо она единственна, то есть нормальна, либо их больше одной, что невозможно в группе порядка $56 = 48 + 8$.

Все случаи разобраны. □

Теорема. *Если G — простая и $|G| = 60$, то $G \simeq A_5$.*

Доказательство. Без доказательства. □

Пример. $A_2 = \{\mathrm{id}\}, A_3 \simeq \mathbb{Z}_3$ — простая, A_4 — не простая ($V_4 \trianglelefteq A_4$).

Лемма. *Пусть $n \geqslant 5, N \leq A_n, N \neq \{\mathrm{id}\}, N \trianglelefteq S_n$. Тогда $A_n = N$.*

Доказательство. Так как $N \neq \{\mathrm{id}\}$, то $\exists \sigma \in N, \sigma \neq \mathrm{id}$. Разложим σ в независимые циклы: $\sigma = c_1 c_2 ... c_k$. Рассмотрим случаи:

1. $\exists i$ такой, что длина $c_i \geqslant 3$, то можем считать, что $c_1 = (i_1 ... i_k), k \geqslant 3$. Так как $N \trianglelefteq S_n$, $\forall \tau \in S_n : \tau\sigma\tau^{-1} \in N$. Рассмотрим $\tau = (i_1 i_2)$:

   $$\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} \in N; \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \tau c_1 \tau^{-1} c_1^{-1} = (i_2 i_1 i_3 ... i_k)(i_k ... i_1) = (i_1 i_2 i_3)$$

   ($\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \tau c_1 \tau^{-1} c_1^{-1}$, так как остальные циклы в σ независимы с τ, т.е. коммутируют с τ)
   Тогда в N содержатся все тройные циклы — $A_n = N$.

2. Если же $\forall i$ длина c_i равна 2, то k — чётно, т.е. $\sigma = (i_1 i_2)(i_3 i_4) c_3 ... c_k$.
   Тогда при аналогичных рассуждениях и $\tau = (i_2 i_3)$:

   $$\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (i_2 i_3)(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_2 i_3)(i_1 i_2)(i_3 i_4) =$$

   $$= (i_1 i_3)(i_2 i_4)(i_1 i_2)(i_3 i_4) = (i_1 i_4)(i_2 i_3) \in N$$

   Так как в S_n все произведения пар независимых транспозиций сопряжены, все пары независимых транспозиций $\in N$. Так как $n \geqslant 5$, A_n порождается парами независимых транспозиций, а значит, $N = A_n$.

□

Теорема. *A_n — простая при $n \geqslant 5$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную нормальную подгруппу $N \trianglelefteq A_n$. Если $N \trianglelefteq S_n$, то по лемме 1 $N = A_n$. Иначе: $|S_n : A_n| = 2, S_n = A_n \sqcup (12)A_n$.
Пусть N не нормальна в S_n. Обозначим $N_1 = N, N_2 = (12)N_1(12)$.
Если $N_1 = N_2$, то N при сопряжении любой $\sigma \in S_n$ не изменится (для $\sigma \in A_n$ очевидно из $N \trianglelefteq A_n$, для $\tau \in S_n$: $\tau = (12)\tau' \Longrightarrow \tau N \tau^{-1} = (12)\tau' N \tau'^{-1}(12) = (12)N(12) = N$), т.е. $N \trianglelefteq S_n$ — противоречие.
Поэтому $N_1 \neq N_2$, причём $|N_1| = |N_2|$.
Докажем, что $A_n = N_1 \times N_2$ (отсюда получим, что $|A_n| = |N|^2$):

1. $N_1 \trianglelefteq A_n$ — уже имеем;

2. $N_2 \trianglelefteq A_n$:

$$\forall \sigma \in A_n : \sigma N_2 \sigma^{-1} = \sigma(12)N_1(12)\sigma^{-1} = (12)(12)\underbrace{\sigma(12)}_{=\tilde{\sigma}}N_1(12)\underbrace{\sigma^{-1}}_{=\tilde{\sigma}^{-1}}(12)(12) =$$

$$= (12)\tilde{\sigma}N_1\tilde{\sigma}^{-1}(12) = (12)N_1(12) = N_2$$

3. $N_1 \cap N_2 = \{\mathrm{id}\}$: Пусть $K = N_1 \cap N_2 \leq A_n$. Тогда $K \trianglelefteq S_n$:

   - $\forall \sigma \in A_n : \sigma K \sigma^{-1} \subseteq N_1, N_2$ из $N_1, N_2 \trianglelefteq A_n$, то есть $\sigma K \sigma^{-1} \subseteq K$;
   - $(12)K(12) \subseteq N_2$ из $K \subseteq N_1$, $(12)K(12) \subseteq N_1$ из $K \subseteq N_2 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (12)K(12) \subseteq K$

   Значит, K не изменится при сопряжении любой подстановкой из S_n, то есть $K \trianglelefteq S_n$. Тогда по лемме 1 и $K \neq A_n$ имеем $K = \{\mathrm{id}\}$.

4. $N_1N_2 = A_n$: Пусть $L = N_1N_2 \leq A_n$ Тогда $L \trianglelefteq S_n$:

   - $\forall \sigma \in A_n : \sigma L \sigma^{-1} = \sigma N_1 N_2 \sigma^{-1} = \sigma N_1 \sigma^{-1} \sigma N_2 \sigma^{-1} = N_1N_2$;
   - $(12)L(12) = (12)N_1N_2(12) = (12)N_1(12)(12)N_2(12) = N_2N_1 = N_1N_2$

   При этом $L \neq id$ — по лемме 1 $L = A_n$.

Теперь индукцией по $n \geqslant 5$ докажем, что A_n — простая.
База: $n = 5$ — $|A_5| = 60$ — не точный квадрат, то есть невозможна ненормальность N в S_n, а отсюда A_n — простая;
Шаг: Пусть A_{n-1} — простая. Обозначим $A_n \geq H = \{\sigma \in A_n \mid \sigma(n) = n\} \simeq A_{n-1}$.
Предположим, что $N_1 \neq N_2 \Longrightarrow A_n = N_1 \times N_2 \Longrightarrow H \leq N_1 \times N_2$. Тогда $H \cap N_2 \trianglelefteq H$, т.к. $N_2 \trianglelefteq A_n$ и $H \cap N_2 \subseteq H$.
Так как H — простая, то $H \cap N_2$ равно либо H, либо id.
Если $H \cap N_2 = H$, то $H \subseteq N_2 \Longrightarrow |H| \leqslant |N_2| = |N|$.
Если $H \cap N_2 = \{id\}$, то рассмотрим гомоморфизм $\varphi : A_n = N_1 \times N_2 \to N_1$. $\mathrm{Ker}\ \varphi = N_2 \Longrightarrow H \simeq \varphi(H) \leq N_1 \Longrightarrow |H| \leqslant |N_1| = |N|$.
В каждом случае $|H| = |A_{n-1}| \leqslant |N|$. Тогда из предположения

$$|A_n| = |N|^2 \geqslant |A_{n-1}|^2 \Longrightarrow \frac{n!}{2} \geqslant \frac{((n-1)!)^2}{4} \Longrightarrow 2n \geqslant (n-1)!$$

Последнее неравенство, очевидно, неверно при $n \geqslant 5$. □

Теорема. *SO_3 — простая.*

Доказательство. Без доказательства. □

9 Линейные представления

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, $GL(V)$ — группа обратимых линейных операторов над V, G — произвольная группа.

Определение. Произвольный гомоморфизм $\Phi : G \to GL(V)$ (действие $G \curvearrowright V$) называется линейным представлением группы G.
V называется пространством линейного представления, $\dim V$ — размерность (степень) линейного представления. Если $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, то линейное представление называется рациональным, вещественным или комплексным соответственно.

Из определения $\Phi(e) = I$ — тождественный оператор, $\Phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)$.

Определение. $\forall g \in G\ \Phi(g)$ называется оператором линейного представления. Обозначается $\forall v \in V \quad \Phi(g)v := \Phi(g)(v)$.

Определение. Если $\operatorname{Ker} \Phi = \{e\}$, то линейное представление называется точным. В этом случае $G \simeq \operatorname{Im} \Phi \leq GL(V)$.

Определение. Если $G \leq GL(V)$, то тождественное линейное представление $\Phi = \mathrm{id} : G \to GL(V)$ называется тавтологическим линейным представлением G.

Примеры.

1. $\dim V = 1 : GL(V) \simeq \mathbb{F}^*$, то есть $\Phi : G \to GL(V) \simeq \mathbb{F}^*$;
   (a) $\mathbb{F} = \mathbb{R}, G = \mathbb{R} : \Phi(t) = e^t$;
   (b) $\mathbb{F} = \mathbb{R}, G = S_n : \Phi(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma$;
   (c) $G = GL_n(\mathbb{F}) : \Phi(A) = \det A$.
2. $V = M_n(\mathbb{C}), G = \mathbb{R}$. Если зафиксировать матрицу $B \in M_n(\mathbb{C})$, то определено линейное представление $\Phi(t) = e^{tB}$.
3. Пусть задано линейное представление $\Phi : G \to GL(V)$ и задан гомоморфизм $\Psi : H \to G$. Тогда $\tilde{\Phi} = \Phi \circ \Psi : H \to GL(V)$ — линейное представление группы H.
4. Пусть X — некоторое множество, задано $G \curvearrowright X$.
   Рассмотрим векторное пространство функций $\mathcal{F}(X, \mathbb{F}) = \{f : X \to \mathbb{F}\} = V$
   Тогда $\Phi : G \to GL(V)$: $\forall g \in G\ \Phi(g)f = \tilde{f}$, где $\tilde{f}(x) = f(gx)$ — линейное представление группы G:
   $$\forall g_1, g_2 \in G : \Phi(g_1 g_2)f(x) = f(g_1 g_2 x) = \Phi(g_1)f(g_2 x) = \Phi(g_1)\Phi(g_2)f(x)$$

9.1 Матричные представления группы

Определение. Произвольный гомоморфизм $\Phi : G \to GL_n(\mathbb{F})$ называется матричным представлением группы G размерности n над полем $\mathbb{F}$.

Заметим, что линейные и матричные представления связаны между собой:

1. Если задано матричное представление G, то есть гомоморфизм $\Phi : G \to GL_n(\mathbb{F})$, то $GL_n(\mathbb{F}) \underset{\psi}{\simeq} GL(\mathbb{F}^n) \Longrightarrow \tilde{\Phi} = \psi \circ \Phi : G \to GL(\mathbb{F}^n)$ — линейное представление G.

2. Если задано n-мерное линейное представление G, то есть гомоморфизм $\Phi : G \to GL(V) : \forall g \in G \; g \mapsto \Phi(g) = \varphi_g$ — линейный оператор. Если фиксировать базис $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$, то $\varphi_g \leftrightarrow A_g$ — матрица φ_g в базисе $\mathcal{E}$. Отсюда $GL(V) \underset{\tilde{\psi}}{\simeq} GL_n(\mathbb{F})$ — получим матричное представление группы G.

Поэтому при фиксированном базисе V имеет место взаимно однозначное соответствие между линейными представлениями $G \to GL(V)$ и матричными представлениями $G \to GL_n(\mathbb{F})$, где $n = \dim V$.

Замечание. Далее зачастую n-мерное линейное представление $G \to GL(V)$ будет рассматриваться как матричное представление $G \to GL_n(\mathbb{F})$, ему соответствующее.

Напоминание. *Если $\varphi : V \to V$ — линейный оператор, A и $\tilde{A}$ — его матрицы в базисах $\mathcal{E}$ и $\tilde{\mathcal{E}}$ соответственно, то $\tilde{A} = C^{-1}AC$, где C — матрица перехода от $\mathcal{E}$ к $\tilde{\mathcal{E}}$.*

Здесь и далее: если вдруг не вспоминается — см. конспект линейной алгебры ([2]).

Определение. Матричные представления Φ_1, Φ_2 группы G размерности n над полем $\mathbb{F}$ называются эквивалентными (изоморфными, подобными), если $\exists C \in GL_n(\mathbb{F}) : \forall g \in G : \; \Phi_1(g) = C^{-1}\Phi_2(g)C$. Обозначается $\Phi_1 \approx \Phi_2$.

Замечание. Эквивалентные матричные представления группы G соответствуют одному и тому же линейному представлению G относительно разных базисов.

Определение. Пусть V_1, V_2 — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$. Линейные представления $\Phi_1 : G \to GL(V_1)$ и $\Phi_2 : G \to GL(V_2)$ называются эквивалентными (изоморфными, подобными), если $\exists \varphi : V_1 \to V_2$ — изоморфизм такой, что $\forall g \in G : \; \Phi_1(g) = \varphi^{-1} \circ \Phi_2(g) \circ \varphi$. Обозначается $\Phi_1 \approx \Phi_2$.

Замечание. Если $\Phi_1 \approx \Phi_2$ и $\mathcal{E}_1 = \{e_1, ..., e_n\}$ — базис V_1, то в базисе $\mathcal{E}_2 = \{\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)\}$ (где φ — изоморфизм V_1 и V_2 из определения $\Phi_1 \approx \Phi_2$) для любого g матрица линейного оператора $\Phi_2(g)$ равна матрице оператора $\Phi_1(g)$ в базисе $\mathcal{E}_1$.

9.2 Приводимость линейных представлений

Напоминание. *Пусть $\varphi : V \to V$ — линейный оператор. Подпространство $U \subseteq V$ называется инвариантным относительно φ, если $\forall u \in U : \ \varphi(u) \in U$.*

Определение. Пусть $\Phi : G \to GL(V)$ — линейное представление группы G. Подпространство $U \subseteq V$ называется инвариантным относительно Φ, если $\forall g \in G$ U инвариантно относительно оператора $\Phi(g)$, то есть $\forall g \in G, u \in U : \ \Phi(g)u \in U$.

Замечание. Подпространства $\{0\}, V$, очевидно, всегда инвариантны — они называются тривиальными инвариантными подпространствами.

Утверждение. *Сумма и пересечение инвариантных подпространств — инвариантное подпространство (как для оператора, так и для линейного представления).*

Доказательство. Очевидно из определений инвариантности. □

Напоминание. *Если $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство относительно линейного оператора φ и $\{e_1, ..., e_n\}$ — базис V такой, что $\{e_1, ..., e_m\}$ — базис U, то матрица линейного оператора в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$ имеет вид $A = \left(\begin{array}{c|c} A_u & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, где A_u — матрица $\varphi|_U$ (ограничения на инвариантное подпространство).*

Утверждение. *Если $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство относительно линейного представления $\Phi : G \to GL(V)$ и $\{e_1, ..., e_n\}$ — базис V такой, что $\{e_1, ..., e_m\}$ — базис U, то $\forall g \in G$ матрица линейного оператора $\Phi(g)$ в базисе $\{e_1, ..., e_n\}$ имеет вид $A_g = \left(\begin{array}{c|c} A_{g,u} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$.*

Определение. Если $U \subseteq V$ — инвариантное подпространство относительно линейного представления $\Phi : G \to GL(V)$, то ограничением линейного представления Φ на U называется линейное представление $\Phi|_U : G \to GL(U)$ такое, что $\forall g \in G : \ \Phi|_U(g) = \Phi(g)|_U$

Определение. Линейное представление $\Phi : G \to GL(V)$ называется неприводимым, если:

1. $V \neq \{0\}$;
2. Φ не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

В противном случае Φ называется приводимым.

Примеры.

1. Любое одномерное линейное представление неприводимо;
2. Пусть $G = \mathbb{R}, V = \mathcal{E}^2$ — двумерное евклидово пространство;
   $\Phi : G \to GL(\mathcal{E}^2)$ такое, что $\Phi(g)$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \cos g & -\sin g \\ \sin g & \cos g \end{pmatrix}$ (т.е. $\Phi(g)$ — поворот евклидова пространства).
   Над $\mathbb{R}$ данное линейное представление неприводимо, так как не имеет одномерных инвариантных подпространств (геометрически очевидно).
   Однако над $\mathbb{C}$ нетривиальные инвариантные подпространства есть: они будут собственными подпространствами $\langle e_1 + ie_2 \rangle$, $\langle e_1 - ie_2 \rangle$ — поэтому Φ приводимо над $\mathbb{C}$.
3. Пусть $G = \langle a \rangle_k$, $V = \mathcal{E}^2$ — двумерное евклидово пространство;
   $\Phi : G \to GL(\mathcal{E}^2)$ такое, что $\Phi(a^m)$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ — поворот на $\frac{2\pi m}{k}$. Абсолютно аналогично примеру (2) доказывается, что Φ неприводимо над $\mathbb{R}$ и приводимо над $\mathbb{C}$;
4. Пусть $G = D_n (n \geqslant 3)$, $V = \mathcal{E}^2$ — двумерное евклидово пространство;
   По определению $D_n = \mathrm{Sym}\ N \subset O_2 \subset GL(\mathcal{E}^2)$ (где N — правильный n-угольник) — можем задать тавтологическое линейное представление Φ.
   Φ неприводимо над $\mathbb{R}$, так как нет одномерных инвариантных подпространств относительно поворотов.
   Также Φ неприводимо над $\mathbb{C}$, так как все одномерные инвариантные подпространства относительно поворотов — это $\langle e_1 + ie_2 \rangle$, $\langle e_1 - ie_2 \rangle$, которые не инвариантны относительно симметрий.
5. Пусть $G = S_4$, $V = \mathcal{E}^3$ — трёхмерное евклидово пространство;
   Ранее доказывали, что $S_4 \simeq \mathrm{Sym}^+ K \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3)$ (где K — куб) — задали линейное представление Φ.
   Φ неприводимо над $\mathbb{R}$, так как одномерных инвариантных подпространств

не может быть из геометрических соображений, а двумерных не может быть, так как если U — инвариантное, то $U^\perp$ инвариантно из ортогональности $\Phi(g)$ для всех g, а $U^\perp$ одномерно.
Также Φ неприводимо над $\mathbb{C}$: любое одномерное инвариантное подпространство над $\mathbb{C}$ соответствует двумерному инвариантному подпространству над $\mathbb{R}$ (либо одномерному, если оно полностью вещественное) — значит, таковых нет; двумерных инвариантных подпространств не может быть из рассуждений об ортогональности (как выше).

6. Пусть $G = S_4$, $V = \mathcal{E}^3$ — трёхмерное евклидово пространство;
Ранее доказывали, что $S_4 \simeq \mathrm{Sym}\ T \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3)$ (где T — правильный тетраэдр)- задали линейное представление Φ.
Абсолютно аналогично примеру (5) доказывается, что Φ неприводимо над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$. При этом данное представление неэквивалентно предыдущему, так как в образе данного представления есть несобственные движения, а в образе предыдущего — только собственные;

7. Пусть $G = S_n$, V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$ ($\mathrm{char}\ \mathbb{F} = 0$). Зададим *мономиальное* линейное представление S_n: зафиксируем базис $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$ в V и определим $M : G \to GL(V)$ так, что $\forall \sigma \in G : \ M(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$ (очевидно, что для любой подстановки такой оператор существует и единственный)
Заметим, что M приводимо — оно имеет одномерное инвариантное подпространство $U = \langle e_1 + ... + e_n \rangle$ и $n-1$-мерное инвариантное подпространство $W = \{x = \sum\limits_i x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$ (оно $(n-1)$-мерно, т.к. любой его элемент однозначно задаётся первыми $n-1$ координатами).
Более того, докажем, что $V = U \oplus W$:

- $\dim V = \dim U + \dim W$;
- Если $x \in U \cap W$, то $x = k(e_1 + ... + e_n)$, причём сумма его координат равна нулю, т.е. $k = 0 \Longrightarrow x = 0$. Значит, $U \cap W = \{0\}$.

Однако ограничение $M|_W = M_W$ неприводимо — докажем это:
Пусть $\tilde{U} \subset W$ — нетривиальное инвариантное подпространство.
Тогда $\exists x \in \tilde{U}, x \neq 0$. Так как $x \in W$, $\sum x_i = 0 \Longrightarrow \exists i, j : x_i \neq x_j$.
Рассмотрим $(ij) \in S_n$:

$$M(ij)x \in \tilde{U} \Longrightarrow x - M(ij)x = (x_i - x_j)(e_i - e_j) \in \tilde{U} \Longrightarrow e_i - e_j \in \tilde{U}$$

Отсюда из инвариантности $\tilde{U}\ \forall\sigma \in S_n : e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)} \in \tilde{U} \Longrightarrow \forall k, m : e_k - e_m \in \tilde{U} \Longrightarrow \tilde{U} = W$ (т.к. $W = \langle e_1 - e_2, ..., e_1 - e_n \rangle$)

Теорема. *(Лемма Шура).*
Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, V — векторное пространство над $\mathbb{F}$, G — произвольная группа, $\Phi : G \to GL(V)$ — неприводимое линейное представление. Тогда если $\varphi : V \to V$ — линейный оператор такой, что $\forall g \in G : \varphi \circ \Phi(g) = \Phi(g) \circ \varphi$, то φ — скалярный оператор (т.е. $\varphi = \lambda I$).

Доказательство. Так как $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, φ имеет хотя бы одно собственное значение λ и собственное подпространство $V_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$. Докажем, что V_λ — инвариантное подпространство, т.е. что $\forall g \in G, v \in V_\lambda :\ \Phi(g)v \in V_\lambda$, что равносильно $\varphi(\Phi(g)v) = \lambda\Phi(g)v$:

$$\varphi(\Phi(g)v) = (\varphi \circ \Phi(g))v = (\Phi(g) \circ \varphi)v = \Phi(g)(\varphi(v)) = \Phi(g)(\lambda v) = \lambda\Phi(g)v$$

Т.к. $V_\lambda \neq \{0\}$ и Φ неприводимо, $V_\lambda = V \Longrightarrow \forall v \in V :\ \varphi(v) = \lambda v \Longrightarrow \varphi = \lambda I$. □

Следствие. *Пусть $\mathbb{F}$ — алгебраически замкнутое поле, V — векторное пространство над $\mathbb{F}$, G — абелева группа, $\Phi : G \to GL(V)$ — неприводимое линейное представление. Тогда $\dim V = 1$, т.е. Φ — одномерное линейное представление.*

Доказательство. $\forall g, h \in G :\ gh = hg \Longrightarrow \Phi(gh) = \Phi(hg) \Longrightarrow \Phi(g)\Phi(h) = \Phi(h)\Phi(g)$. Тогда если обозначить $\Phi(h) = \varphi$, то условия леммы Шура выполняются, а отсюда $\forall h :\ \Phi(h)$ — скалярный оператор. Но для скалярного оператора любое подпространство V инвариантно, а значит, любое подпространство V инвариантно для Φ. Тогда из неприводимости Φ любое нетривиальное подпространство V совпадает с V, а отсюда $\dim V = 1$. □

9.2.1 Неприводимые комплексные представления конечных абелевых групп

Пусть G — конечная абелева группа, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. По следствию из леммы Шура любое неприводимое линейное представление G имеет одномерное пространство представления, то есть $GL(V) \simeq \mathbb{C}^*$.

Утверждение. *Для конечной абелевой группы G существует ровно $|G|$ различных комплексных неприводимых линейных представлений G.*

Доказательство. Опишем все гомоморфизмы $\Phi : G \to \mathbb{C}^*$:
Так как G — конечная абелева, по основной теореме о конечнопорождённых абелевых группах $G \simeq \langle a_1 \rangle_{n_1} \times ... \times \langle a_k \rangle_{n_k}$. Пусть $\Phi(a_i) = c_i$. Тогда $c_i^{n_i} = \Phi(a_i^{n_i}) = \Phi(e) = 1$, то есть c_i — комплексный корень степени n_i из единицы. Так как $a_1, ..., a_k$ порождают G, очевидно, что гомоморфизм однозначно задаётся выбором $c_1, ..., c_k$. Способов выбрать c_i ровно n_i (количество комплексных корней степени n_i из единицы) — отсюда гомоморфизмов $n_1 \cdot ... \cdot n_k = |G|$. □

Пример. $V_4 = \langle a \rangle_2 \times \langle b \rangle_2 \Longrightarrow \Phi(a) = \pm 1, \Phi(b) = \pm 1$.

	e	a	b	ab
$\Phi_1 = I$	1	1	1	1
Φ_2	1	-1	1	-1
Φ_3	1	1	-1	-1
Φ_4	1	-1	-1	1

9.2.2 Одномерные комплексные представления группы

Пусть G — произвольная группа.
Знаем, что коммутант $G' \trianglelefteq G$ — подгруппа такая, что G/G' абелева. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\pi : G \to G/G'$:

Утверждение. *Если $\Psi : G/G' \to \mathbb{C}^*$ — одномерное комплексное линейное представление G/G', то $\Phi = \psi \circ \pi : G \to \mathbb{C}^*$ — одномерное комплексное линейное представление G.*

Доказательство. Очевидно (композиция гомоморфизмов – гомоморфизм). □

Утверждение. *Пусть G — произвольная группа, $\Phi : G \to \mathbb{C}^*$ — произвольное одномерное комплексное линейное представление G. Тогда $\exists$ линейное представление $\Psi : G/G' \to \mathbb{C}^*$ такое, что $\Phi = \Psi \circ \pi$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Im}\ \Phi \leq \mathbb{C}^* \Longrightarrow \mathrm{Im}\ \Phi$ — абелева.
Из теоремы о гомоморфизме $\mathrm{Im}\ \Phi \simeq G/\mathrm{Ker}\ \Phi$, то есть $G/\mathrm{Ker}\ \Phi$ — абелева, а тогда $G' \subseteq \mathrm{Ker}\ \Phi$ (свойство коммутанта).
Отсюда $\forall g \in G, h \in G' :\ \Phi(gh) = \Phi(g)$, то есть значения Φ на всех элементах левого смежного класса g по G' совпадают. Поэтому корректно отображение $\Psi : G/G' \to \mathbb{C}^*$, заданное по правилу $gG' \mapsto \Phi(g)$. Это гомоморфизм:

$$\Psi(g_1G' \cdot g_2G') = \Psi(g_1g_2G') = \Phi(g_1g_2) = \Phi(g_1)\Phi(g_2) = \Psi(g_1G')\Psi(g_2G')$$

При этом $\forall g \in G :\ g \overset{\pi}{\mapsto} gG' \overset{\Psi}{\mapsto} \Phi(g)$, то есть $\Phi = \Psi \circ \pi$. □

Следствие. *Если G конечна, то одномерных комплексных линейных представлений G ровно $|G/G'|$.*

Доказательство. Из двух предыдущих утверждений имеем взаимно однозначное соответствие между одномерными комплексными линейными представлениями G и G/G'. Если G конечна, то G/G' — конечная абелева, а тогда она имеет ровно $|G/G'|$ представлений. □

9.3 Вполне приводимые линейные представления

Определение. Сумма линейных представлений:

1. **Внутренняя сумма линейных представлений**
   Пусть $\Phi : G \to GL(V)$ — линейное представление G, и пусть $V = U \oplus W$, где U и W инвариантны относительно Φ. Тогда говорят, что Φ есть сумма (внутренняя) представлений $\Phi|_U$ и $\Phi|_W$.
   Заметим, что если выбрать базисы $\mathcal{E}_U = \{e_1, ..., e_m\}$ в U, $\mathcal{E}_W = \{e_{m+1}, ..., e_n\}$ в W, то в базисе $\mathcal{E}_V = \{e_1, ..., e_n\}$ пространства V матрица оператора $\Phi(g)$ для любого $g \in G$ имеет вид $A_g = \left(\begin{array}{c|c} A_{U,g} & 0 \\ \hline 0 & A_{W,g} \end{array}\right)$, где $A_{U,g}$ — матрица $\Phi|_U$ в базисе $\mathcal{E}_U$, а $A_{W,g}$ — матрица $\Phi|_W$ в базисе $\mathcal{E}_W$.

2. **Внешняя сумма линейных представлений**
   Пусть U, W — векторные пространства над полем $\mathbb{F}$, и пусть заданы линейные представления $\Psi_1 : G \to GL(U)$ и $\Psi_2 : G \to GL(W)$. Обозначим $V = U \oplus W$ — внешняя прямая сумма U и W. Тогда линейное представление $\Phi : G \to GL(V)$, заданное по правилу $\Phi(g)(u, w) = (\Psi_1(g)u, \Psi_2(g)w)$ (очевидно, что это гомоморфизм), называется (внешней) суммой линейных представлений Ψ_1, Ψ_2 и обозначается $\Phi = \Psi_1 + \Psi_2$.
   Аналогично, если выбрать базисы $\mathcal{E}_U = \{e_1, ..., e_m\}$ в U, $\mathcal{E}_W = \{e_{m+1}, ..., e_n\}$ в W, то в базисе $\mathcal{E}_V = \{(e_1, 0), ..., (e_m, 0), (0, e_{m+1}), ..., (0, e_n)\}$ пространства V матрица оператора $\Phi(g)$ для любого $g \in G$ имеет вид $\left(\begin{array}{c|c} A_{\Psi_1} & 0 \\ \hline 0 & A_{\Psi_2} \end{array}\right)$, где A_{Ψ_1} — матрица Ψ_1 в базисе $\mathcal{E}_U$, а A_{Ψ_2} — матрица Ψ_2 в базисе $\mathcal{E}_W$.

Определение. Линейное представление $\Phi : G \to GL(V)$ называется вполне приводимым, если для любого подпространства $U \subseteq V$, инвариантного относительно Φ, существует такое подпространство $W \subseteq V$, инвариантное относительно Φ, что $V = U \oplus W$.

Замечание. Любое неприводимое линейное представление вполне приводимо — для него инвариантные подпространства — только V и $\{0\}$, причём $V \oplus \{0\} = V$.

Примеры. (Напомним, что при фиксированном базисе V линейные представления взаимно однозначно соответствуют матричным, где в соответствие каждому оператору поставлена его матрица).

1. $\Phi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{C})$ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}$ — вполне приводимо.

   (поворот унитарного пространства — ортогональный оператор, то есть если U инвариантно, то $U^\perp$ инвариантно, причём $V = U \oplus U^\perp$)

2. $\Phi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{C})$ $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — приводимо, но не вполне приводимо:

   Рассмотрим базис $\tilde{C} = \{e_1, e_2\}$ двумерного пространства линейного представления V, в котором записаны матрицы операторов.

   Заметим, что $\langle e_1 \rangle$ — инвариантное подпространство относительно Φ. Однако никакое подпространство $W = \langle \mu e_1 + e_2 \rangle$ не инвариантно:

$$\forall t > 0 : \ \Phi(t) \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu + t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Пусть $\Phi : G \to GL(V)$ — линейное представление G. Линейное представление $\tilde{\Phi}$ называется подпредставлением Φ, если $\exists \tilde{V} \subseteq V$ — такое подпространство, инвариантное относительно Φ, что $\tilde{\Phi} = \Phi|_{\tilde{V}} : G \to GL(\tilde{V})$.

Лемма 1. *Любое подпредставление вполне приводимого представления вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть $\Phi : G \to GL(V)$ — вполне приводимое линейное представление, $\tilde{\Phi} : G \to GL(\tilde{V})$ — его подпредставление ($\tilde{V}$ — подпространство V). Рассмотрим произвольное подпространство $U \subseteq \tilde{V}$, инвариантное относительно $\tilde{\Phi}$. U является подпространством и для V, а тогда $\exists$ инвариантное относительно Φ подпространство $W \subseteq V$ такое, что $V = U \oplus W$ (т.к. Φ вполне приводимо). Тогда если обозначить $\tilde{W} = W \cap \tilde{V}$, то $\tilde{W}$ — подпространство $\tilde{V}$, инвариантное относительно $\tilde{\Phi}$.

Осталось показать, что $\tilde{V} = U \oplus \tilde{W}$, то есть что $\forall x \in \tilde{V}$ единственным образом раскладывается как $x = u + \tilde{w}, u \in U, \tilde{w} \in \tilde{W}$. Действительно, из $V = U \oplus W$ знаем, что x как элемент V единственно раскладывается в сумму $x = u + w$, где $u \in U, w \in W$, однако $w = x - u \in \tilde{V}$, то есть $w \in \tilde{V} \cap W = \tilde{W}$. Значит, такое разложение существует и единственно, что и требовалось. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\Phi : G \to GL(V)$ *— вполне приводимое линейное представление. Тогда* Φ *раскладывается в сумму неприводимых линейных представлений (возможно, одного).*

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$:
База: $n = 1 \Longrightarrow \Phi$ неприводимо;
Шаг: Пусть V_1 — минимальное ненулевое инвариантное подпространство линейного представления Φ. Так как Φ вполне приводимо, $\exists$ инвариантное дополнение $W : V = V_1 \oplus W \Longrightarrow \Phi = \Phi_{V_1} + \Phi_W$. При этом Φ_{V_1} неприводимо из минимальности V_1 (нет нетривиальных инвариантных подпространств меньшей размерности), а Φ_W по лемме 1 вполне приводимо, и притом меньшей размерности — раскладывается в искомую сумму по предположению индукции. Значит, Φ также раскладывается в искомую сумму. □

Пример. Если $\dim V = n > 1$ и $\Phi : G \to GL(V)$ такое, что $\Phi(g) = I \ \forall g \in G$, то все подпространства V являются инвариантными для Φ, откуда Φ вполне приводимо. Тогда Φ раскладывается в сумму одномерных представлений, причём не единственным образом — в зависимости от выбора базиса:

$$\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\} \Longrightarrow V = \langle e_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle e_n \rangle \Longrightarrow \Phi = \Phi_1 + ... + \Phi_n;$$

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_n\} \Longrightarrow V = \langle \tilde{e}_1 \rangle \oplus ... \oplus \langle \tilde{e}_n \rangle \Longrightarrow \Phi = \tilde{\Phi}_1 + ... + \tilde{\Phi}_n;$$

Лемма 3. *Пусть* $V = V_1 + ... + V_k$*, где* V_i *— минимальные ненулевые подпространства, инвариантные относительно линейного представления* $\Phi : G \to GL(V)$*. Тогда* Φ *вполне приводимо, причём для произвольного инвариантного подпространства* $U \subseteq V$ *существует инвариантное дополнение вида* $W = \sum\limits_{i \in I} V_i$ *для некоторого* $I \subseteq \{1, ..., k\}$*.*

Доказательство. Обозначим $V_I = \sum\limits_{i \in I} V_i$, где $I \subseteq \{1, ..., k\}$. Очевидно, что V_I — инвариантное подпространство (как сумма инвариантных). Рассмотрим произвольное инвариантное $U \subseteq V$ и возьмём I максимальное (по включению) такое, что $U \cap V_i = \{0\}$. Докажем, что $V = U \oplus V_I$ (по построению $U \cap V_I = \{0\}$, поэтому достаточно доказать $V = U + V_I$):
Рассмотрим $j \notin I$. Тогда $V_{I \cup \{j\}} = V_I + V_j$, а также из максимальности I $U \cap V_{I \cup \{j\}} \neq 0 \Longrightarrow \exists u \in U : u = \sum\limits_{i \in I} v_i + v_j$, причём $v_j \neq 0$.
Тогда $v_j = u - \sum\limits_{i \in I} v_i \in U + V_I$, то есть $V_j \cap (U + V_I) \neq \{0\}$. При этом пересечение инвариантных подпространств инвариантно, то есть $V_j \cap (U + V_I)$ — инвариантное подпространство в V_j. Тогда из минимальности V_j это подпространство

совпадает с V_j, а значит, $V_j \subseteq U + V_I$.
Проведя это рассуждение для всех $j \in \{1, ..., k\} \backslash I$, получим $V_1 + ... + V_k \subseteq U + V_I$, то есть $V \subseteq U + V_I$ а отсюда $V = U + V_I$. □

Пример. Пусть $\dim V = n, \text{char } \mathbb{F} = 0$. Рассмотрим мономиальное линейное представление $M : S_n \to GL(V)$ для некоторого базиса $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_n\}$: $M(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$. Ранее доказывали, что относительно него инвариантны $U = \langle e_1 + ... + e_n \rangle$ и $W = \{x = \sum\limits_i x_i e_i \mid \sum x_i = 0\}$, причём $V = U \oplus W$. Отсюда по лемме 3 M вполне приводимо.

Теорема. *(Машке)*
Пусть G — произвольная конечная группа, $\mathbb{F}$ — поле, $\text{char } \mathbb{F} \nmid |G|$ *(в частности, верно при* $\text{char } \mathbb{F} = 0$*), V — векторное пространство над $\mathbb{F}$. Тогда произвольное линейное представление $\Phi : G \to GL(V)$ вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть U — произвольное подпространство V, инвариантное относительно Φ. Докажем, что к U существует инвариантное дополнение $W \subseteq V : \ V = U \oplus W$.
Рассмотрим произвольное дополнение U до V — подпространство U' такое, что $V = U \oplus U'$. Обозначим за ψ линейный оператор проектирования на U' вдоль U, то есть $\psi : V \to V$ такой, что $\forall v : \ v = u + u' \Rightarrow \psi(v) = u'$.
Обозначим очевидные свойства ψ :

(i) $\forall u \in U : \ \psi(u) = 0$;

(ii) $\forall v \in V : \ v - \psi(v) \in U$.

Построим новый линейный оператор $\tilde{\psi}$ по правилу $\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{h \in G} \Phi(h) \circ \psi \circ \Phi(h^{-1})$ (из условия $\text{char } \mathbb{F} \nmid |G|$ возможно деление на $|G|$, т.к. оно не соответствует $0_{\mathbb{F}}$) и докажем, что $W = \text{Im } \tilde{\psi}$ подойдёт под условие:

1. Инвариантность W относительно Φ:

   (a) Докажем, что $\forall g \in G : \ \Phi(g)\tilde{\psi} = \tilde{\psi}\Phi(g)$:

$$\Phi(g)\tilde{\psi}\Phi(g^{-1}) = \Phi(g) \left(\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(h)\psi\Phi(h^{-1}) \right) \Phi(g^{-1}) =$$
$$\frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(g)\Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})\Phi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \Phi(gh)\psi\Phi((gh)^{-1}) =$$
$$\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \Phi(t)\psi\Phi(t^{-1}) = \tilde{\psi}$$

   (b) Докажем инвариантность $\text{Im } \tilde{\psi}$ относительно Φ:

$$\forall w \in \operatorname{Im}\tilde{\psi} : \exists v \in V : w = \tilde{\psi}(v)$$

$$\forall g \in G : \ \Phi(g)(w) = \Phi(g)(\tilde{\psi}(v)) = \tilde{\psi}(\Phi(g)(v)) \in \operatorname{Im}\tilde{\psi}$$

Отсюда W инвариантно относительно Φ;

2. Докажем, что $V = U + W$:
Заметим, что $\forall v \in V : \ v = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{h\in G} v = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{h\in G}\Phi(h)\Phi(h^{-1})v$. Тогда:

$$v - \tilde{\psi}(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\Phi(h)\Phi(h^{-1})v - \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})v = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\Phi(h)(\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v))$$

При этом $\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v) \in U$ по свойству (ii), а в силу инвариантности U $\Phi(h)(\Phi(h^{-1})v - \psi(\Phi(h^{-1})v)) \in U$ для любого $h \in G$. Значит, $\forall v \in V : \ v - \tilde{\psi}(v) \in U \Longrightarrow v = u + \tilde{\psi}(v)$. Отсюда $V = U + W$.

3. $U \cap W = \{0\}$:

   (a) Заметим, что $\forall u \in U : \ \tilde{\psi}(u) = 0$:
   $\tilde{\psi}(u) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{h\in G}\Phi(h)\psi\Phi(h^{-1})u$. Из инвариантности U $\Phi(h^{-1})u \in U$, а тогда $\psi(\Phi(h^{-1})u) = 0 \ \ \forall h \in G$, то есть все слагаемые равны 0.

   (b) Докажем, что $\tilde{\psi}^2 = \tilde{\psi}$:
   $\forall v \in V$ по (2) имеем $v - \tilde{\psi}(v) \in U$, а тогда по (3a) $\tilde{\psi}(v - \tilde{\psi}(v)) = 0 \Longrightarrow \tilde{\psi}(v) - \tilde{\psi}^2(v) = 0 \Longrightarrow \tilde{\psi}(v) = \tilde{\psi}^2(v)$.

   (c) Докажем, что $U \cap W = \{0\}$:
   Рассмотрим $v \in U \cap W$. Тогда $\tilde{\psi}(v) = 0$ по (3a), а также $\exists v' : \ v = \tilde{\psi}(v')$, т.к. $v \in W = \operatorname{Im}\tilde{\psi}$. Отсюда $\tilde{\psi}^2(v') = \tilde{\psi}(v) = 0$, а тогда по (3b) $\tilde{\psi}(v') = 0$, то есть $v = 0$. Отсюда $U \cap W = \{0\}$.

Значит, для Φ выполняется определение вполне приводимости. □

Следствие 1. *Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является вполне приводимым.*

Следствие 2. *Любое комплексное линейное представление конечной абелевой группы раскладывается в сумму одномерных линейных представлений (то есть в V существует базис $\mathcal{E}$ такой, что $\forall g \in G$ матрица оператора $\Phi(g)$ диагональна в $\mathcal{E}$).*

Пример. Найдём число неэквивалентных двумерных комплексных линейных представлений $\mathbb{Z}_2$. $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle_2$ — конечная абелева группа, то есть по следствию 2 любое комплексное линейное представление Φ представимо в виде суммы одномерных линейных представлений $\Phi_1 + \Phi_2$. Таким образом, матрица $\Phi(a)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \Phi_1(a) & 0 \\ 0 & \Phi_2(a) \end{pmatrix}$, а также $\Phi_i(a) = \pm 1$, т.к. $a^2 = e$. Значит, $\Phi(a) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ — 4 различные матрицы. Осталось заметить, что линейные представления неэквивалентны, если ЖНФ матриц $\Phi(a)$ различны — отсюда случаи $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ эквивалентны, что оставляет нам 3 неэквивалентных (разные собственные значения) линейных представления.

9.3.1 Ортогональные (унитарные) представления

Определение. Вещественное (комплексное) линейное представление $\Phi : G \to GL(V)$ называется ортогональным (унитарным), если в V можно ввести скалярное произведение так, что $\forall g \in G : \Phi(g)$ — ортогональный (унитарный) оператор относительно этого скалярного произведения.

Лемма. *Любое ортогональное (унитарное) линейное представление является вполне приводимым.*

Доказательство. Пусть U — произвольное подпространство V, инвариантное относительно Φ. Тогда из ортогональности $\Phi(g)$ для всех $g \in G$ получаем, что $U^\perp$ также инвариантно относительно Φ, причём $V = U \oplus U^\perp$. Значит, Φ вполне приводимо. □

Теорема. *Любое вещественное (комплексное) линейное представление конечной группы является ортогональным (унитарным).*

Доказательство. Рассмотрим случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.
Рассмотрим произвольную симметрическую положительно определённую билинейную функцию $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$. Определим отображение

$$(x|y) := \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)y)$$

Докажем, что $(x|y)$ — искомое скалярное произведение:

1. Симметричность и билинейность — очевидны из симметричности и билинейности β;

2. Положительная определённость — докажем, что $\forall x \neq 0 : \ (x|x) > 0$:
   По определению $(x|x) = \sum\limits_{h \in G} \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x)$. Из положительной определённости β знаем, что $\beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x) \geqslant 0$, причём $\beta(x,x) = 0 \iff x = 0$. Остаётся заметить, что при $h = e : \ \beta(\Phi(h)x, \Phi(h)x) = \beta(x,x) > 0$, а значит, $(x|x) > 0$ (все слагаемые $\geqslant 0$, причём хотя бы одно > 0).

3. Докажем, что $\forall g \in G : \Phi(g)$ ортогонально относительно $(x|y)$, то есть $(\Phi(g)x, \Phi(g)y) = (x|y)$:

$$(\Phi(g)x, \Phi(g)y) = \sum_{h \in G} \beta(\Phi(h)\Phi(g)x, \Phi(h)\Phi(g)y) = \sum_{h \in G} \beta(\Phi(hg)x, \Phi(hg)y) =$$

$$= \sum_{t \in G} \beta(\Phi(t)x, \Phi(t)y) = (x|y)$$

Значит, Φ — ортогональное линейное представление.
Случай $\mathbb{F} = \mathbb{C}$: рассмотрим произвольную эрмитову положительно определённую полуторалинейную функцию $\gamma : V \times V \to \mathbb{C}$. Тогда аналогично определим отображение $(x|y)$ — его свойства и унитарность $\Phi(g)$ проверяются аналогично свойствам β и ортогональности $\Phi(g)$. □

9.4 Неприводимые линейные представления над $\mathbb{C}$

Сформулируем две теоремы, описывающие поведение неприводимых комплексных представлений произвольной конечной группы. Они будут доказаны в разделе 9.5 (а именно здесь), а этот раздел посвящён их практическому применению.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, r — количество классов сопряжённости в G. Тогда существует ровно r попарно неэквивалентных неприводимых комплексных линейных представлений G над $\mathbb{C}$.*

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа, $\Phi_1, ..., \Phi_r$ — все её попарно неэквивалентные неприводимые комплексные линейные представления, $n_1, ..., n_r$ — их размерности. Тогда $|G| = n_1^2 + ... + n_r^2$.*

Следствие. *Пусть G — конечная группа. Тогда G имеет только одномерные неприводимые комплексные линейные представления $\iff G$ абелева.*

Доказательство.
$\Longleftarrow$ — было доказано как следствие леммы Шура;

$\Longrightarrow$ — по теореме 2: $|G| = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i = \sum\limits_{i=1}^{r} 1 = r$ (где r — число классов сопряжённости по теореме 1), то есть все классы сопряжённости состоят из одного элемента. Значит, $\forall g_1, g_2 \in G : g_2 g_1 g_2^{-1} = g_1 \Longrightarrow g_2 g_1 = g_1 g_2$, то есть G абелева. $\square$

Опишем неприводимые линейные представления над $\mathbb{C}$ некоторых групп:

1. $G = S_3$:

   (a) $\dim V = 1$: $|G/G'| = |S_3/A_3| = 2$
   Одномерные комплексные представления G уже умеем классифицировать — они соответствуют представлениям G/G'. В данном случае их два — $\forall \sigma \in S_3 : \Phi_1(\sigma) = I, \Phi_2(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot I$;

   (b) $\dim V = 2$: Заметим, что $S_3 \simeq D_3 = \operatorname{Sym} \triangle \subset GL_2(\mathbb{R}) \subset GL_2(\mathbb{C})$. Так зададим двумерное линейное представление Φ_3 — в примерах раздела 2 данной главы доказана неприводимость такого представления.

   Остаётся заметить, что $|S_3| = 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$, причём уже найдены одно двумерное и два неэквивалентных одномерных неприводимых комплексных линейных представления. Отсюда по теореме 2 других представлений быть не может, то есть любое неприводимое комплексное линейное представление S_3 эквивалентно одному из представлений Φ_1, Φ_2, Φ_3;

2. $G = S_4$:

   (a) $\dim V = 1$: $|G/G'| = |S_4/A_4| = 2$
   Одномерные комплексные представления S_4, аналогично S_3, имеют вид $\forall \sigma \in S_3 : \tilde{\Phi}_1(\sigma) = I, \tilde{\Phi}_2(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot I$;

   (b) $\dim V = 2$: Для начала докажем, что $S_4/V_4 \simeq S_3$:
   Рассмотрим произвольный элемент S_4/V_4 — это смежный класс вида $H = \sigma V_4$. Заметим, что в V_4 четыре элемента, причём все они переводят 4 в различные элементы — значит, для всех четырёх $\tilde{\sigma} \in H$ значения $\tilde{\sigma}(4)$ различны, то есть H содержит ровно один элемент σ' такой, что $\sigma'(4) = 4$. Отсюда каждый элемент можно единственным образом домножить справа на элемент из V_4, чтобы результат оставлял 4 на месте.
   Рассмотрим отображение $\varphi : S_4/V_4 \to S_3$, которое переводит каждый смежный класс в его элемент, оставляющий 4 на месте. Такое отображение биективно по соображениям выше, а также, очевидно, является

гомоморфизмом $(\varphi(\sigma V_4)\varphi(\tau V_4) = \sigma'\tau' = \varphi(\sigma\tau V_4)$, так как $\sigma'\tau' \in \sigma\tau V_4$ и оставляет 4 на месте). Значит, φ — изоморфизм.
Поэтому можем задать линейное представление $\tilde{\Phi}_3 : S_4 \to GL_2(\mathbb{C})$:

$$S_4 \xrightarrow{\pi} S_4/V_4 \xrightarrow{\varphi} S_3 \xrightarrow{\Phi_3} GL_2(\mathbb{C})$$

где Φ_3 — линейное представление из предылущего пункта. Неприводимость $\tilde{\Phi}_3$ очевидно следует из неприводимости Φ_3 (инвариантное подпространство для $\tilde{\Phi}_3$ было бы инвариантно и для Φ_3).

(c) $\dim V = 3$: В разделе 2 данной главы (примеры 5,6) приводились два трёхмерных линейных представления S_4:

$$\tilde{\Phi}_4 : \ S_4 \simeq \mathrm{Sym}^+ K \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3) \text{ (где K — куб)}$$

$$\tilde{\Phi}_5 : \ S_4 \simeq \mathrm{Sym} T \subset O_3 \subset GL(\mathcal{E}^3) \text{ (где T — правильный тетраэдр)}$$

Там же была доказана неэквивалентность и неприводимость этих представлений.

Остаётся заметить, что $|S_4| = 24 = 1^2+1^2+2^2+3^2+3^2$, причём уже найдены два трёхмерных, одно двумерное и два неэквивалентных одномерных неприводимых комплексных линейных представления. Отсюда по теореме 2 других представлений быть не может, то есть любое неприводимое комплексное линейное представление S_3 эквивалентно одному из представлений $\tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}_5$.

Лемма. *Пусть V_1, V_2 — векторные пространства над $\mathbb{C}$, и $\Phi_1 : G \to GL(V_1)$, $\Phi_2 : G \to GL(V_2)$ — неприводимые линейные представления произвольной группы G.*
Пусть $\exists \varphi : V_1 \to V_2$ — линейное отображение такое, что $\forall g \in G : \Phi_2(g) \circ \varphi = \varphi \circ \Phi_1(g)$. Тогда:

1. *Если $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$, то $\varphi = 0$;*
2. *Если $\Phi_1 \approx \Phi_2$, то либо $\varphi = 0$, либо φ — изоморфизм;*
3. *Если $V_1 = V_2$ и $\Phi_1 = \Phi_2$, то $\varphi = \lambda I$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пункт 3 — частный случай леммы Шура для $\mathbb{C}$;
2) Предположим, что $\varphi \neq 0$, то есть $\mathrm{Ker}\ \varphi \neq V_1, \mathrm{Im}\ \varphi \neq \{0\}$.

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\ \varphi : \ \varphi(\Phi_1(g)x) = \Phi_2(g)\varphi(x) = 0 \Longrightarrow \Phi_1(g)x \in \mathrm{Ker}\ \varphi;$$

$$\forall y \in \operatorname{Im}\varphi\ (y = \varphi(x)):\ \Phi_2(g)y = \Phi_2(g)\varphi(x) = \varphi(\Phi_1(g)x) \Longrightarrow \Phi_2(g)y \in \operatorname{Im}\varphi$$

Отсюда $\operatorname{Ker}\varphi$ — инвариантное пространство для Φ_1, а $\operatorname{Im}\varphi$ — для Φ_2. Из их неприводимости и нетривиальности φ следует $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, $\operatorname{Im}\varphi = V_2$, то есть φ — изоморфизм.

1) Аналогично пункту 2, но если φ — изоморфизм, то $\Phi_1 \approx \Phi_2$, что противоречит условию. □

Следствие 1. *Пусть V_1, V_2 — векторные пространства над $\mathbb{C}$, и $\Phi_1 : G \to GL(V_1)$, $\Phi_2 : G \to GL(V_2)$ — неприводимые линейные представления конечной группы G, $\psi : V_1 \to V_2$ — произвольное линейное отображение.*
Рассмотрим "усреднённое" линейное отображение:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \Phi_2(g) \circ \psi \circ \Phi_1(g^{-1})$$

Тогда:

1. *Если $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$, то $\tilde{\psi} = 0$;*
2. *Если $V_1 = V_2$ и $\Phi_1 = \Phi_2$, то $\tilde{\psi} = \lambda I$, где $\lambda = \frac{\operatorname{tr}\psi}{\dim V_1}$.*

Доказательство. Докажем, что $\forall g \in G : \Phi_2(g) \circ \tilde{\psi} = \tilde{\psi} \circ \Phi_1(g)$:

$$\Phi_2(g)\tilde{\psi}\Phi_1(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} \Phi_2(g)\Phi_2(h)\psi\Phi_1(h^{-1})\Phi_1(g^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} \Phi_2(gh)\psi\Phi_1((gh)^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} \Phi_2(t)\psi\Phi_1(t^{-1}) = \tilde{\psi}$$

Отсюда можем применить доказанную лемму.
Осталось показать, что $\lambda = \frac{\operatorname{tr}\psi}{\dim V_1}$. Рассмотрим $\operatorname{tr}\tilde{\psi}$:
С одной стороны, $\tilde{\psi} = \lambda I$, то есть $\operatorname{tr}\tilde{\psi} = \lambda \cdot \dim V_1$;
С другой стороны, из аддитивности следа $\operatorname{tr}\tilde{\psi} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} \operatorname{tr}\left(\Phi_1(g)\psi\Phi_1(g^{-1})\right) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} \operatorname{tr}\psi = \operatorname{tr}\psi$. Значит, $\operatorname{tr}\psi = \operatorname{tr}\tilde{\psi} = \lambda \cdot \dim V_1$, то есть $\lambda = \frac{\operatorname{tr}\psi}{\dim V_1}$. □

Следствие 2. *(Следствие 1 в матричной форме)*
$\Phi_1 : G \to GL(V_1)$, $\Phi_2 : G \to GL(V_2)$ — неприводимые комплексные линейные представления конечной группы G, $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — некоторые базисы V_1, V_2 соответственно. Обозначим для всех $g \in G$ матрицу оператора $\Phi_1(g)$ в $\mathcal{E}_1$ как $A(g) = (a_{ij}(g))$, а матрицу $\Phi_2(g)$ в $\mathcal{E}_2$ — как $B(g) = (b_{ij}(g))$
Тогда $\forall i, j, i_0, j_0$:

1. *Если* $\Phi_1 \not\approx \Phi_2$, *то* $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1}) = 0$;

2. *Если* $V_1 = V_2$ *и* $\Phi_1 = \Phi_2$, *то* $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1}) = \frac{\delta_{i_0}^{j_0}\delta_i^j}{\dim V_1}$.

Доказательство. Для любых i_0, j_0 возьмём в качестве ψ из следствия 1 линейное отображение, матрица C которого в базисах $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ равна E_{i_0,j_0} (матричная единица). Тогда матрица линейного отображения $\tilde{\psi}$ в базисах $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ имеет вид

$$\tilde{C} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} B(g)CA(g^{-1})$$

При этом элемент на ij-ой позиции матрицы $B(g)CA(g^{-1})$ равен

$$\sum_{k=1}^{n_2} b_{ik}(g)[CA(g^{-1})]_{kj} = \sum_{k=1}^{n_2} b_{ik}(g)\sum_{l=1}^{n_1} c_{kl}a_{lj}(g^{-1}) = \sum_{k=1}^{n_2}\sum_{l=1}^{n_1} b_{ik}(g)c_{kl}a_{lj}(g^{-1})$$

Ненулевым будет только слагаемое при $k = i_0, l = j_0$, и оно равно $b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1})$. Значит, $\tilde{c}_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1})$. По следствию 1:

1. $\Phi_1 \not\approx \Phi_2 \Longrightarrow \tilde{\psi} = 0 \Longrightarrow \forall i,j:\ \tilde{c}_{ij} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} b_{ii_0}(g)a_{j_0j}(g^{-1}) = 0$;

2. $V_1 = V_2, \Phi_1 = \Phi_2 \Longrightarrow \tilde{\psi} = \lambda I \Longrightarrow \tilde{C} = \lambda E \Longrightarrow \tilde{c}_{ij} = \lambda\delta_i^j$.
   $\lambda = \frac{\operatorname{tr}\psi}{\dim V_1} = \frac{\operatorname{tr} C}{\dim V_1} = \frac{\delta_{i_0}^{j_0}}{\dim V_1} \Longrightarrow \tilde{c}_{ij} = \frac{\delta_{i_0}^{j_0}\delta_i^j}{\dim V_1}$.

□

9.5 Характеры комплексных линейных представлений

Определение. Пусть Φ — комплексное линейное представление группы G. Отображение $\chi_\Phi : G \to \mathbb{C}$ такое, что $\forall g \in G:\ \chi_\Phi(g) = \operatorname{tr}\Phi(g)$, называется характером линейного представления Φ.

Замечание.

1. Если $\lambda_1(g), ..., \lambda_n(g)$ — все собственные значения $\Phi(g)$ с учётом кратности, то $\chi_\Phi(g) = \lambda_1(g) + ... + \lambda_n(g)$ (в частности, характер не зависит от базиса);

2. Если $\Phi_1 \approx \Phi_2$, то $\chi_{\Phi_1} = \chi_{\Phi_2}$.

Свойства.

1. $\chi_\Phi(e) = \dim V$;

2. $\forall g, h \in G : \chi_\Phi(hgh^{-1}) = \chi_\Phi(g)$ *(характер равен для всех элементов одного класса сопряжённости);*

3. *Если* $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, *то* $\chi_\Phi = \chi_{\Phi_1} + \chi_{\Phi_2}$;

4. *Если* ord $g < \infty$, *то* $\chi_\Phi(g^{-1}) = \overline{\chi_\Phi(g)}$.

Доказательство.

1. Очевидно ($\Phi(e) = I$, то есть его матрица единичная);

2. В произвольном базисе $\mathcal{E}$: $A(hgh^{-1}) = A(h)A(g)(A(h))^{-1}$ — след матрицы не меняется при сопряжении (так как не зависит от базиса);

3. Следует из того, что в некотором базисе $\mathcal{E}$: $A_\Phi = \left(\begin{array}{c|c} A_{\Phi_1} & 0 \\ \hline 0 & A_{\Phi_2} \end{array}\right)$;

4. Пусть ord $g = k$. Тогда ord $\Phi(g) = m \mid k$ (т.к. $\Phi(g)^k = I$).
   Рассмотрим матрицу $A(g)$ в жордановом базисе. Так как $A(g)^m = E$, все собственные значения $\lambda_i(g)$ — комплексные корни степени m из единицы. Также из определения линейного представления $A(g^{-1}) = A(g)^{-1}$, то есть на диагонали $A(g^{-1})$ стоят $\lambda_i(g^{-1}) = \frac{\overline{\lambda_i(g)}}{|\lambda_i(g)|} = \overline{\lambda_i(g)}$, т.к. модуль корня из единицы равен 1. Тогда:

$$\chi_\Phi(g^{-1}) = \mathrm{tr}A(g^{-1}) = \sum_i \lambda_i(g^{-1}) = \sum_i \overline{\lambda_i(g)} = \overline{\sum_i \lambda_i(g)} = \overline{\mathrm{tr}A(g)} = \overline{\chi_\Phi(g)}$$

□

Определение. Множество всех функций $f : G \to \mathbb{C}$ будем обозначать как $\mathbb{C}^G$.

Утверждение. $\mathbb{C}^G$ *— векторное пространство над* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение. *Пусть* G *— конечная группа. Тогда функция*

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

задаёт на $\mathbb{C}^G$ *скалярное произведение, т.е.* $\mathbb{C}^G$ *с данной функцией — эрмитово пространство.*

Доказательство. Проверим определение:

1. $\forall f \in \mathbb{C}^G:\ (f,f) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f(g)\overline{f(g)} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}|f(g)|^2 \geqslant 0$, причём $(f,f) = 0 \Longleftrightarrow \forall g \in G : |f(g)| = 0 \Longleftrightarrow f = 0$;
2. $\overline{(f_1,f_2)} = \overline{\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}} = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\overline{f_1(g)}f_2(g) = (f_2,f_1)$;
3. $(\alpha f_1 + \beta f_2, f_3) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}(\alpha f_1 + \beta f_2)(g)\overline{f_3(g)} =$
$= \frac{\alpha}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f_1(g)\overline{f_3(g)} + \frac{\beta}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f_2(g)\overline{f_3(g)} = \alpha(f_1,f_3) + \beta(f_2,f_3)$.

Значит, (f_1,f_2) задаёт на $\mathbb{C}^G$ скалярное произведение. □

Теорема. *(Свойство ортогональности характеров)*
Пусть $\Phi_1, \Phi_2 : G \to GL(V)$ *— неприводимые комплексные линейные представления конечной группы* G. *Тогда* $(\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi_2}) = \begin{cases} 1, & \Phi_1 \approx \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases}$

Доказательство. Пусть $\dim V = n$. Зафиксируем базис $\mathcal{E}$ пространства V — в нём $\Phi_1(g) \leftrightarrow A(g) = (a_{ij}(g))$, $\Phi_2(g) \leftrightarrow B(g) = (b_{ij}(g))$. Так как G конечна, $\forall g \in G : \operatorname{ord} g < \infty$, то есть по свойству 4 $\overline{\chi_{\Phi_1}(g)} = \chi_{\Phi_1}(g^{-1})$. Тогда:

$$(\chi_{\Phi_2}, \chi_{\Phi_1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\Phi_2}(g)\overline{\chi_{\Phi_1}(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\Phi_2}(g)\chi_{\Phi_1}(g^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}(g))(\sum_{j=1}^{n} a_{jj}(g^{-1})) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(b_{ii}(g)a_{jj}(g^{-1}))\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\delta_i^j}{n}, & \Phi_1 = \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases} \quad = \begin{cases} 1, & \Phi_1 = \Phi_2 \\ 0, & \Phi_1 \not\approx \Phi_2 \end{cases}$$

Остаётся заметить, что $\Phi_1 \approx \Phi_2 \Longrightarrow \chi_{\Phi_1} = \chi_{\Phi_2}$, т.е. $(\chi_{\Phi_2}, \chi_{\Phi_1}) = (\chi_{\Phi_1}, \chi_{\Phi_1}) = 1$.
Теорема доказана. □

Замечание. Далее в разложениях линейного представления в сумму неприводимых будут группироваться эквивалентные слагаемые — это записывается в виде

$$\Phi = m_1\Phi_1 + ... + m_s\Phi_s \Longleftrightarrow \Phi = \underbrace{\Phi_1 + ... + \Phi_1}_{m_1} + ... + \underbrace{\Phi_s + ... + \Phi_s}_{m_s}$$

В данной записи подразумевается, что $\Phi_i \not\approx \Phi_j$ при $i \neq j$.

Следствие. *Пусть* $\Phi = m_1\Phi_1 + ... + m_s\Phi_s$, *где* $\Phi_1, ..., \Phi_s$ — *комплексные неприводимые линейные представления конечной группы* G. *Тогда:*

1. $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = m_i$;
2. $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = m_1^2 + ... + m_s^2$;
3. *Если* $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1$, *то* Φ — *неприводимое.*

Доказательство. Заметим, что $\Phi = \sum\limits_i m_i\Phi_i \Longrightarrow \chi_\Phi = \sum\limits_i m_i\chi_{\Phi_i}$. При этом $\Phi_i \not\approx \Phi_j$ при $i \neq j$, а значит, $(\chi_j, \chi_i) = \delta_i^j$ из теоремы. Тогда:

1. $(\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = (\sum\limits_j m_j\chi_{\Phi_j}, \chi_{\Phi_i}) = \sum\limits_j m_j(\chi_j, \chi_i) = m_i$;
2. $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = (\sum\limits_i m_i\chi_{\Phi_i}, \sum\limits_j m_j\chi_{\Phi_j}) = \sum\limits_{i,j} m_im_j(\chi_i, \chi_j) = \sum\limits_i m_i^2$;
3. Следует из пункта 2 — если $(\chi_\Phi, \chi_\Phi) = 1$, то ненулевой коэффициент может быть только один, и он равен единице. Пусть $m_i = 1$ — тогда $\Phi = \Phi_i$, т.е. Φ — неприводимое.

□

Следствие. *Пусть* G — *конечная группа,* V — *векторное пространство над* $\mathbb{C}$, Φ, Ψ — *линейные представления группы* G. *Тогда если* $\chi_\Phi = \chi_\Psi$, *то* $\Phi \approx \Psi$.

Доказательство. По теореме Машке Φ и Ψ вполне приводимы, то есть

$$\Phi = m_1\Phi_1 + ... + m_s\Phi_s, \quad \Psi = n_1\Psi_1 + ... + n_t\Psi_t$$

При этом $\forall i : (\chi_\Phi, \chi_{\Phi_i}) = m_i$ из 1 пункта предыдущего следствия, то есть

$$(\chi_\Psi, \chi_{\Phi_i}) = m_i \Longrightarrow n_1(\chi_{\Psi_1}, \chi_{\Phi_i}) + ... + n_t(\chi_{\Psi_t}, \chi_{\Phi_i}) = m_i$$

Так как эта сумма не равна нулю, среди слагаемых в разложении Ψ найдётся $\Psi_j \approx \Phi_i$, а также $n_j = m_i$. Аналогичными рассуждениями для всех слагаемых обоих разложений получим, что каждое из них имеет эквивалентное в другом разложении, причём с тем же коэффициентом. Таким образом, с точностью до нумерации $\Psi = m_1\Psi_1 + ... + m_s\Psi_s$, где $\Psi_i \approx \Phi_i$. Отсюда очевидно, что $\Phi \approx \Psi$. □

9.5.1 Пространство центральных функций

Определение. Функция $f : G \to \mathbb{C}$ называется центральной, если она постоянна на классах сопряжённости G. Множество всех центральных функций для группы G обозначается как $\chi_{\mathbb{C}}(G)$.

Пример. Для произвольного комплексного линейного представления Φ гр. G χ_Φ — центральная функция.

Утверждение. *$\chi_{\mathbb{C}}(G)$ — подпространство в $\mathbb{C}^G$.*

Доказательство. Очевидно, что $\forall \chi_1, \chi_2 \in \chi_{\mathbb{C}}(G), \lambda \in \mathbb{C}$ функции $\chi_1 + \chi_2$ и $\lambda\chi_1$ также являются центральными, так как постоянность на классах сопряжённости не нарушается. Также $0 \in \chi_{\mathbb{C}}(G)$, то есть определение подпространства выполнено. □

Утверждение. *Если r — число классов сопряжённости в G, то* $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G) = r$.

Доказательство. Если в группе G есть ровно r классов сопряжённости, то $G = x_1^G \sqcup ... \sqcup x_r^G$. В таком случае функции

$$\Gamma_1, ..., \Gamma_r, \text{ где } \Gamma_i = \begin{cases} 1, \ g \in x_i^G \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

очевидно, образуют базис в $\chi_{\mathbb{C}}(G)$. □

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, V — векторное пространство над $\mathbb{C}$, $\Phi : G \to GL(V)$ — неприводимое линейное представление, $\Gamma \in \chi_{\mathbb{C}}(G)$.*
Тогда оператор

$$\Psi_{\Gamma,\Phi} = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(g)}\Phi(g) \text{ равен } \lambda I, \text{ где } \lambda = |G|\frac{(\chi_\Phi, \Gamma)}{\chi_\Phi(e)}$$

Доказательство. Докажем, что $\forall g \in G: \ \Psi_{\Gamma,\Phi} \circ \Phi(G) = \Phi(g) \circ \Psi_{\Gamma,\Phi}$:

$$\Phi(g) \circ \Psi_{\Gamma,\Phi} \circ \Phi(g^{-1}) = \Phi(g)(\sum_{h \in G} \overline{\Gamma(h)}\Phi(h))\Phi(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(h)}\Phi(ghg^{-1}) =$$

$$(\text{из центральности } \Gamma) \quad = \sum_{g \in G} \overline{\Gamma(ghg^{-1})}\Phi(ghg^{-1}) = \sum_{\tilde{g} \in G} \overline{\Gamma(\tilde{g})}\Phi(\tilde{g}) = \Psi_{\Gamma,\Phi}$$

Отсюда по лемме Шура $\Psi_{\Gamma,\Phi} = \lambda I$. Рассмотрим след $\Psi_{\Gamma,\Phi}$:

$$\text{tr } \Psi_{\Gamma,\Phi} = \text{tr } \lambda I = \lambda \dim V = \lambda\chi_\Phi(e)$$

$$\text{tr } \Psi_{\Gamma,\Phi} = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)} \cdot \text{tr } \Phi(g) = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}\chi_\Phi(g) = |G| \cdot (\chi_\Phi, \Gamma)$$

Значит, $\lambda = \frac{\text{tr } \Psi_{\Gamma,\Phi}}{\chi_\Phi(e)} = |G|\frac{(\chi_\Phi,\Gamma)}{\chi_\Phi(e)}$. □

Определение. Пусть $G = \{g_1, ..., g_n\}$, V — векторное пространство над $\mathbb{F}$ такое, что $\dim V = n$, $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, ..., e_{g_n}\}$ — базис V. Линейное представление $\rho : G \to GL(V)$, заданное по правилу $\forall g \in G : \ \rho(g)e_{g_r} = e_{gg_r}$, называется регулярным представлением группы G над полем $\mathbb{F}$.

Лемма 2. *Пусть G — конечная группа, $\Phi_1, ..., \Phi_k$ — все попарно неэквивалентные неприводимые комплексные линейные представления группы G, $\chi_1, ..., \chi_k$ — их характеры. Тогда $\chi_1, ..., \chi_k$ — ортонормированный базис в $\chi_{\mathbb{C}}(G)$.*

Доказательство. Так как $\Phi_1, ..., \Phi_k$ неприводимы и попарно неэквивалентны, $(\chi_i, \chi_j) = \delta_i^j$, то есть $\chi_1, ..., \chi_k$ линейно независимы как попарно ортогональные векторы. При этом $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G) < \infty$ (равно числу классов сопряжённости в G), то есть $k < \infty$. Осталось доказать, что $\chi_{\mathbb{C}}(G) = \langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle$.

Докажем от противного: предположим, что $\chi_{\mathbb{C}}(G) \neq \langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle$. Тогда $\langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle^\perp \neq \{0\}$, то есть $\exists \Gamma \in \langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle^\perp$, $\Gamma \neq 0$. Пусть $G = \{g_1, ..., g_n\}$. Выберем произвольное векторное пространство V размерности n и произвольный базис $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, ..., e_{g_n}\}$ в нём. Рассмотрим регулярное представление $\rho : G \to GL(V)$ над $\mathbb{C}$. По теореме Машке оно вполне приводимо, то есть представимо в виде $\rho = m_1\tilde{\Phi}_1 + ... + m_s\tilde{\Phi}_s$, где $\tilde{\Phi}_i$ неприводимы и попарно неэквивалентны. Рассмотрим линейный оператор $\Psi_{\Gamma,\rho} = \sum\limits_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}\rho(g)$ пр-ва V, как в лемме 1:

$$\Psi_{\Gamma,\rho} = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}\rho(g) = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}(m_1\tilde{\Phi}_1 + ... + m_s\tilde{\Phi}_s)(g) = m_1\Psi_{\Gamma,\tilde{\Phi}_1} + ... + m_s\Psi_{\Gamma,\tilde{\Phi}_s}$$

Из неприводимости $\tilde{\Phi}_i$ по лемме 1 $\Psi_{\Gamma,\tilde{\Phi}_i} = \lambda_i I$, где $\lambda_i = |G|\frac{(\chi_{\tilde{\Phi}_i},\Gamma)}{\chi_{\tilde{\Phi}_i}(e)}$. Но при этом $\tilde{\Phi}_i$ — неприводимое представление G, то есть оно эквивалентно одному из Φ_i, а отсюда $\chi_{\tilde{\Phi}_i} \in \langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle$. Значит, $(\chi_{\tilde{\Phi}_i}, \Gamma) = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \Longrightarrow \Psi_{\Gamma,\rho} = 0$.
С другой стороны,

$$\Psi_{\Gamma,\rho}(e_{g_1}) = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}\rho(g)(e_{g_1}) = \sum_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}e_{gg_1}$$

А так как $\Psi_{\Gamma,\rho} = 0$, имеем $\sum\limits_{g\in G} \overline{\Gamma(g)}e_{gg_1} = 0 \Longrightarrow \forall g \in G : \Gamma(g) = 0 \Longrightarrow \Gamma = 0$ — противоречие. Значит, $\chi_{\mathbb{C}}(G) = \langle \chi_1, ..., \chi_k \rangle$, и $\chi_1, ..., \chi_k$ — ортонормированный базис в $\chi_{\mathbb{C}}(G)$. □

Следствие. *Пусть G — конечная группа, r — количество классов сопряжённости в G. Тогда существует ровно r попарно неэквивалентных неприводимых комплексных линейных представлений G над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Из леммы 2 количество попарно неэквивалентных комплексных линейных представлений G равно $\dim \chi_{\mathbb{C}}(G)$, что равно количеству классов сопряжённости в G. □

Следствие. *Пусть G — конечная группа, $\Phi_1, ..., \Phi_r$ — все попарно неэквивалентные комплексные линейные представления группы G, $n_1, ..., n_r$ — их размерности. Тогда:*

1. *$\rho = n_1\Phi_1 + ... + n_r\Phi_r$, где ρ — регулярное представление группы G над $\mathbb{C}$;*
2. *$|G| = n_1^2 + ... + n_r^2$*

Доказательство.

1. По теореме Машке ρ вполне приводимо, то есть $\rho = m_1\Phi_1 + ... + m_r\Phi_r$ ($m \geqslant 0$). Пусть χ_ρ и χ_{Φ_i} — характеры ρ и Φ_i соответственно. Так как $\chi_1, ..., \chi_r$ — ортонормированный базис, $(\chi_\rho, \chi_{\Phi_i}) = m_i$. С другой стороны:

$$(\chi_\rho, \chi_{\Phi_i}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\overline{\chi_{\Phi_i}(g)}$$

   Посмотрим, какие значения принимает χ_ρ. Выберем векторное пространство V размерности n и базис $\mathcal{E} = \{e_{g_1}, ..., e_{g_n}\}$. Так как $\rho(g)e_{g_i} = e_{gg_i}$, в базисе $\mathcal{E}$ каждый столбец матрицы $A_\rho(g)$ содержит одну единицу и $n-1$ ноль. При этом если $g = 1$ в G, то $A_\rho(g) = E$, а иначе ни один базисный вектор не перейдёт в себя, то есть все элементы на главной диагонали $A_\rho(g)$ равны нулю. Отсюда:

$$\chi_\rho(g) = \begin{cases} |G|, \ g = 1 \\ 0, \ g \neq 1 \end{cases}$$

   Значит,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho(g)\overline{\chi_{\Phi_i}(g)} = \frac{1}{|G|}\cdot|G|\overline{\chi_{\Phi_i}(1)} = n_i$$

   так как $\Phi_i(1) = I$

2. Выразим $|G|$:

$$|G| = \dim V = \text{tr } \rho(1) = n_1\text{tr } \Phi_1 + ... + n_r\text{tr } \Phi_r = n_1^2 + ... + n_r^2$$

□

Пример. Построим таблицу характеров неприводимых комплексных представлений S_3: Сами представления уже были найдены:

- $\Phi_1(\sigma) = I$;
- $\Phi_2(\sigma) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot I$;
- $\Phi_3 : S_3 \simeq D_3 = \operatorname{Sym} \triangle \subset GL_2(\mathbb{C})$

Классы сопр.	id	(12)	(123)
χ_{Φ_1}	1	1	1
χ_{Φ_2}	1	-1	1
χ_{Φ_3}	2	0	-1

Значения χ_{Φ_1} и χ_{Φ_2} ищутся очевидно. Опишем подробнее поиск значений χ_{Φ_3}:

- $\chi_{\Phi_3}(\mathrm{id}) = I$ — в любом базисе матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, след равен 2;
- $\chi_{\Phi_3}((12))$ — симметрия относительно прямой, содержащей вершину 3 и середину стороны 1-2. Так как характер не зависит от базиса, можем выбрать удобный нам — в ортонормированном базисе, где первый базисный вектор параллелен оси симметрии, матрица примет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, след равен 0;
- $\chi_{\Phi_3}((123))$ — поворот на $\frac{2\pi}{3}$ относительно центра треугольнка. Матрица этого поворота имеет вид $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & \sin(\frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, след равен -1.

Покажем с помощью характера, что Φ_3 — неприводимое представление:

$$(\chi_{\Phi_3}, \chi_{\Phi_3}) = \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} \chi_{\Phi_3}(g)\overline{\chi_{\Phi_3}(g)} = \frac{1}{6}(1 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1)^2) = 1$$

10 Кольца и поля

Определение. Кольцо — множество K, на котором введены две бинарные операции — сложение и умножение — удовлетворяющие следующим условиям:

1. $(K, +)$ — абелева группа;
2. $\forall a, b, c \in K: \ (b + c)a = ba + ca$ и $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)

Определение. Кольцо называется коммутативным (ассоциативным), если в нём умножение коммутативно (ассоциативно).

Определение. Кольцо K называется кольцом с единицей, если

$$\exists 1 \in K : \forall a \in K \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Элемент 1 называется единицей.

Определение. Элемент кольца K с единицей называется обратимым, если

$$\exists b \in K : ab = ba = 1$$

Элемент b называется обратным к a и обозначается a^{-1}.

Определение. Поле — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором любой ненулевой элемент обратим.

Примеры.

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x]$ — ассоциативное, коммутативное, с единицей;
   $M_n(\mathbb{R})$ — некоммутативное, ассоциативное, с единицей;
   $(V^3, +, \times)$ — некоммутативное, неассоциативное, без единицы ($\times$ — векторное произведение);
   $2\mathbb{Z}$ — ассоциативное, коммутативное, без единицы;
2. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ — поле;
   $\mathbb{Z}_n$ — поле $\iff n$ — простое;
   $\mathbb{R}(x)$ (рациональные дроби над $\mathbb{R}$) — поле.

Определение. Если $a, b \in K$ такие, что $a, b \neq 0$ и $ab = 0$, то a, b называются делителями нуля (a — левый делитель нуля, b — правый делитель нуля)

Примеры. Делители нуля в кольцах:

- $\mathbb{Z}_6 : 2, 3, 4$ — все делители нуля;

- $M_2(\mathbb{R})$: например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Утверждение. *Если a — обратимый элемент ассоциативного кольца K с единицей, то обратный элемент к a единственный.*

Доказательство. Пусть b и c — обратные к a. Тогда:

$$b = b \cdot 1 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c = c$$

□

Замечание. В дальнейшем все рассматриваемые кольца — ассоциативные (свойства неассоциативных колец не такие общие и не рассматриваются в данном курсе).

Утверждение. *Если элемент a кольца K обратим, то a — не делитель нуля.*

Доказательство. От противного: пусть a обратим и a — делитель нуля. Тогда:

$$\exists b \neq 0 : ab = 0 \Longrightarrow a^{-1}ab = a^{-1} \cdot 0 \Longrightarrow b = 0 \text{ — противоречие.}$$

□

Следствие. *В поле нет делителей нуля.*

Определение. Подмножество L кольца K называется подкольцом, если

1. $(L, +)$ — подгруппа аддитивной группы кольца $(K, +)$;
2. $\forall a, b \in L : \ ab \in L$.

Утверждение. *Любое подкольцо L кольца K является кольцом относительно операций кольца K.*

Пример. $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Определение. Подмножество L поля K называется подполем, если

1. $(L, +, \cdot)$ — подкольцо кольца $(K, +, \cdot)$;
2. $1 \in L$;
3. $\forall a \in L : \ a^{-1} \in L$.

Утверждение. *Любое подполе L поля K является полем относительно операций поля K.*

Примеры.

1. $\mathbb{Z}$ — подкольцо $\mathbb{Q}$, но не подполе $\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

10.1 Идеалы колец и факторкольца

Определение. Подмножество L кольца K называется левым (правым) идеалом, если:

1. $(L, +)$ — подгруппа $(K, +)$;
2. $\forall a \in K, x \in L : ax \in L$ $(xa \in L)$

Замечание. Левый идеал замкнут относительно умножения на элементы кольца слева, правый — относительно умножения справа.

Определение. Подмножество L кольца K называется (двусторонним) идеалом, если:

1. $(L, +)$ — подгруппа $(K, +)$;
2. $\forall a \in K, x \in L : ax, xa \in L$

Утверждение. *(Левый, правый, двусторонний) идеал кольца K — подкольцо кольца K.*

Доказательство. Очевидно из определения. □

Замечание. Идеалы в кольцах можно считать аналогом нормальных подгрупп в группах.

Пример. Пусть $K = \mathbb{Z}$. Тогда любое подкольцо K имеет вид $H = m\mathbb{Z}$ — любое такое подкольцо является идеалом в $\mathbb{Z}$

Определение. В любом кольце K есть идеалы $\{0\}, K$ — они называются тривиальными идеалами.

Утверждение. *В поле нет нетривиальных идеалов.*

Доказательство. Пусть F — поле. Пусть $I \subset F$ — идеал, причём $I \neq 0$. Тогда $\exists x \in I : x \neq 0$. Так как F — поле, $\exists x^{-1} \in F$, а отсюда $1 = x^{-1}x \in I$ (т.к. $x \in I$). Тогда для любого $a \in F$: $a = a \cdot 1 \in I$ (т.к. $1 \in F$) $\Longrightarrow I = F$. □

Пусть K — кольцо, I — идеал K. Рассмотрим множество

$$K/I = \{a + I \mid a \in K\}$$

и введём на нём операции:

1. Сложение: $(a+I)+(b+I)=a+b+I$;
2. Умножение: $(a+I)\cdot(b+I)=ab+I$.

Утверждение. *Данные операции корректны (не зависят от представителей классов).*

Доказательство.

1. Сложение корректно из корректности сложения смежных классов в группах, так как $(I,+)$ — подгруппа $(K,+)$, нормальная из абелевости;
2. Пусть $a+I=\tilde{a}+I$, $b+I=\tilde{b}+I$. Докажем, что $ab+I=\tilde{a}\tilde{b}+I$:
   $\tilde{a}=a+y_a$, $\tilde{b}=b+y_b$, где $y_a,y_b\in I$. Тогда:

$$\forall x\in\tilde{a}\tilde{b}+I:\ x=\tilde{a}\tilde{b}+y, y\in I$$

$$x=\tilde{a}\tilde{b}+y=(a+y_a)(b+y_b)+y=ab+\underbrace{y_ab+ay_b+y_ay_b+y}_{\in I}=ab+I$$

□

Утверждение. *Множество K/I с введёнными операциями — кольцо, причём если K ассоциативно (коммутативно), то K/I ассоциативно (коммутативно).*

Доказательство. Проверим определение кольца:

- $(K/I,+)$ — группа по сложению (как факторгруппа K/I);
- $(a+I)+(b+I)=a+b+I=b+a+I=(b+I)+(a+I)$ — коммутативность сложения;
- $(a+I)((b+I)+(c+I))=(a+I)(b+c+I)=a(b+c)+I=ab+ac+I=$
  $=(ab+I)+(ac+I)=(a+I)(b+I)+(a+I)(c+I)$;
- $((b+I)+(c+I))(a+I)=(b+c+I)(a+I)=(b+c)a+I=ba+ca+I=$
  $=(ba+I)+(ca+I)=(b+I)(a+I)+(c+I)(a+I)$;

При этом:

- K ассоциативно $\Longrightarrow(a+I)((b+I)(c+I))=(a+I)(bc+I)=(a(bc)+I)=$
  $((ab)c+I)=(ab+I)(c+I)=((a+I)(b+I))(c+I)\Longrightarrow K/I$ ассоциативно;
- K коммутативно $\Longrightarrow(a+I)(b+I)=ab+I=ba+I=(b+I)(a+I)\Longrightarrow K/I$ коммутативно.

□

Определение. Кольцо K/I с введёнными операциями называется факторкольцом K по идеалу I.

10.2 Гомоморфизмы колец

Определение. Пусть $K, \tilde{K}$ — кольца. Отображение $\varphi : K \to \tilde{K}$ называется гомоморфизмом колец, если:

1. $\forall a, b \in K : \ \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$;
2. $\forall a, b \in K : \ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$;

Определение. Изоморфизм колец — биективный гомоморфизм колец.

Определение. Кольца $K, \tilde{K}$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi : K \to \tilde{K}$. Обозначается $K \simeq \tilde{K}$.

Определение. Пусть $\varphi : K \to \tilde{K}$ — гомоморфизм.
Множество $\operatorname{Ker} \varphi = \{a \in K \mid \varphi(a) = 0\}$ называется ядром φ.
Множество $\operatorname{Im} \varphi = \{b \in \tilde{K} \mid \exists a \in K : \varphi(a) = b\}$ называется образом φ.

Утверждение. *Пусть $\varphi : K \to \tilde{K}$ — гомоморфизм. Тогда:*

1. $\operatorname{Ker} \varphi$ *— идеал K;*
2. $\operatorname{Im} \varphi$ *— подкольцо $\tilde{K}$.*

Доказательство.

1. Проверим определение идеала:
   - $\operatorname{Ker} \varphi$ — подгруппа $(K, +)$, так как φ — гомоморфизм $(K, +) \to (\tilde{K}, +)$;
   - $\forall a \in \operatorname{Ker} \varphi, b \in K : \ \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = 0; \ \varphi(ba) = \varphi(b)\varphi(a) = 0$. Значит, $ab, ba \in \operatorname{Ker} \varphi$.

   Отсюда $\operatorname{Ker} \varphi$ — идеал кольца K.

2. Проверим определение подкольца:
   - $\operatorname{Im} \varphi$ — подгруппа $(\tilde{K}, +)$, так как φ — гомоморфизм $(K, +) \to (\tilde{K}, +)$;
   - $\forall a, b \in \operatorname{Im} \varphi : \exists x_a, x_b \in K : \varphi(x_a) = a, \varphi(x_b) = b$. Тогда $\varphi(x_a x_b) = ab$, то есть $ab \in \operatorname{Im} \varphi$.

Отсюда $\mathrm{Im}\ \varphi$ — подкольцо $\tilde{K}$.

□

Утверждение. *Пусть K — кольцо, I — идеал K. Тогда $\exists$ гомоморфизм колец $\varphi : K \to K/I$ такой, что* $\mathrm{Ker}\ \varphi = I, \mathrm{Im}\ \varphi = K/I$.

Доказательство. Подойдёт гомоморфизм $\pi : a \mapsto a + I$. □

Определение. Приведённый выше гомоморфизм $\pi : K \to K/I$ называется каноническим (естественным, натуральным) гомоморфизмом колец K и K/I.

Теорема. *(О гомоморфизме колец)*
Пусть $K, \tilde{K}$ — кольца, $\varphi : K \to \tilde{K}$ — гомоморфизм колец.
Тогда $K/\mathrm{Ker}\ \varphi \simeq \mathrm{Im}\ \varphi$.

Доказательство. $\mathrm{Ker}\ \varphi$ — идеал кольца K, то есть факторкольцо $K/\mathrm{Ker}\ \varphi$ определено. Рассмотрим отображение

$$\psi : K/\mathrm{Ker}\ \varphi \to \mathrm{Im}\ \varphi \quad a + \mathrm{Ker}\ \varphi \mapsto \varphi(a)$$

В доказательстве теоремы о гомоморфизме групп было доказано, что это отображение корректно, биективно и сохраняет сложение. Проверим сохранение умножения:

$$\psi((a + \mathrm{Ker}\ \varphi)(b + \mathrm{Ker}\ \varphi)) = \psi(ab + \mathrm{Ker}\ \varphi) = \varphi(ab) =$$

$$= \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a + \mathrm{Ker}\ \varphi)\psi(b + \mathrm{Ker}\ \varphi)$$

Значит, ψ — изоморфизм колец. □

10.3 Главный идеал

Пусть K — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $S \subset K$ — произвольное подмножество. Рассмотрим множество

$$(S) = \{\sum_{i=0}^{k} a_i s_i \mid a_i \in K, s_i \in S\}$$

Утверждение.

1. (S) — *двусторонний идеал;*
2. (S) — *наименьший двусторонний идеал, содержащий S.*

Доказательство.

1. Мы поверим, но проверим:

   - $\forall x, y \in (S) : \ x + y = \sum\limits_{i=0}^{k} x_i s_i + \sum\limits_{i=0}^{k} y_i s_i = \sum\limits_{i=0}^{k} (x_i + y_i) s_i \in (S)$;
   - $0 = \sum\limits_{i=0}^{k} 0 \cdot s_i \in (S)$;
   - $\forall x \in (S) : \ -x = -\sum\limits_{i=0}^{k} x_i s_i = \sum\limits_{i=0}^{k} (-x_i) s_i \in (S)$;
   - $\forall x \in (S), a \in K : \ xa = ax = a \sum\limits_{i=0}^{k} x_i s_i = \sum\limits_{i=0}^{k} a x_i s_i \in (S)$.

   Значит, (S) — двусторонний идеал.

2. Пусть I — двусторонний идеал кольца K такой, что $S \subset I$. Тогда из определения идеала $\forall a \in K, s \in S : \ as \in I$, а так как идеал — подкольцо, любая сумма вида $\sum\limits_{i=0}^{k} a_i s_i$, где $a_i \in K, s_i \in S$, лежит в I. Значит, $(S) \subseteq I$.

□

Определение. Если $I = (S)$, то говорят, что I порождается множеством S. Если при этом $|S| = 1$, то I называется главным идеалом.
Иными словами, I — главный идеал кольца K, если $\exists u \in K : \ \forall x \in I : \ x = ua$ для некоторого $a \in K$.

Примеры.

1. $K = \mathbb{Z}$: $(m) = m\mathbb{Z}$;
2. $K = F[x]$: $(x + 1) = \{(x + 1)f \mid f \in F[x]\}$.

Определение. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей $1 \neq 0$, в котором любой идеал является главным, называется кольцом главных идеалов.

Пример. $\mathbb{Z}$ — кольцо главных идеалов.

Определение. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей $1 \neq 0$, в котором нет делителей нуля, называется целостным кольцом.

Примеры. $\mathbb{Z}, F[x]$ — целостные кольца.

Все напоминания данной главы из 1 семестра, их доказательства см. в [3].

Напоминание. *Если K — целостное кольцо, то в K определены понятия* $a \mid b$, НОД(a, b).
НОД *бывает не определён, но если он существует — определён однозначно с точностью до ассоциированности (умножения на обратимые элементы).*

Определение. Целостное кольцо K, не являющееся полем, называется евклидовым кольцом, если $\exists$ функция $N : K \setminus 0 \to \mathbb{Z}_+$ (она называется нормой) такая, что:

1. $\forall a, b \in K : N(ab) > N(a)$;
2. $\forall a, b \in K, b \neq 0 \ \exists q, r \in K : \ a = bq + r$, где $\left[\begin{array}{l} r = 0 \\ N(r) < N(b) \end{array}\right.$

Примеры.

1. $K = \mathbb{Z}$: $N(a) = |a|$;
2. $K = F[x]$: $N(f) = \deg f$;
3. $K = \mathbb{Z}[i]$ — кольцо гауссовых чисел
   $N(a + bi) = a^2 + b^2$.

Упражнение. $\mathbb{Z}[x]$ — целостное, но не евклидово кольцо.

Доказательство. Покажем, что $\mathbb{Z}[x]$ — целостное кольцо. Очевидно, что $\mathbb{Z}[x]$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, то есть остаётся показать, что в нём нет делителей нуля: если $P(x), Q(x) \neq 0$, то, взяв произведение членов с максимальной степенью x в обоих многочленах, получим одночлен, степень которого больше, чем у всех других в произведении. Значит, коэффициент при нём останется ненулевым, то есть $ab \neq 0$.
Доказательство неевклидовости $\mathbb{Z}[x]$ проведём после следующей теоремы. $\square$

Напоминание. *Пусть K — евклидово кольцо. Тогда* $\exists$ НОД$(a, b) = d$ *и* $\exists u, v \in K : d = ua + vb$.

Теорема. *Всякий идеал евклидова кольца K является главным.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный идеал I кольца K.
Если $I = \{0\}$, то $I = (0)$. Иначе рассмотрим наименьший по норме элемент в I — обозначим его u. Докажем, что $I = (u)$:
Пусть $a \in I$ — произвольный элемент. Разделим a на u с остатком: $\exists q, r \in K : a = uq + r$, причём если $r \neq 0$, то $N(r) < N(u)$. При этом $r = a - uq \in I$, а

значит, $r = 0$ из предположения, что u — наименьший по норме элемент в I. Значит, $\forall a \in I\ \exists q \in K : a = uq$, а значит, $I = (u)$. $\square$

Следствие. *Любое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.*

Примеры.

1. $F[x]$ — кольцо главных идеалов;
2. $F[x, y]$ — не кольцо главных идеалов. Покажем это:
   Рассмотрим идеал $I = (x, y)$. Предположим, что $I = (f)$ — тогда $\exists q_1, q_2 \in F[x, y] : x = fq_1, y = fq_2$. Из равенства многочленов $x = fq_1$ имеем, что либо $f \sim 1$, либо $f \sim x$. Рассмотрим эти случаи:
   - $f \sim 1 \Longrightarrow 1 = ax + by$ — очевидно невозможно (не можем получить ненулевую константу);
   - $f \sim x \Longrightarrow f = cx \Longrightarrow y = cxq_2$ — невозможно.

   Значит, I — не главный идеал.
3. Докажем, что $\mathbb{Z}[x]$ — не кольцо главных идеалов. Рассмотрим $I = (2, x)$. Предположим, что $I = (f)$ — тогда $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{Z}[x] : 2 = fq_1, x = fq_2$. Из первого равенства имеем, что либо $f \sim 1$, либо $f \sim 2$:
   - $f \sim 1 \Longrightarrow 1 = 2a + xb$ — невозможно, т.к. коэффициенты целые;
   - $f \sim 2 \Longrightarrow x = 2 \cdot q_2$ — невозможно по тем же соображениям.

   Значит, $\mathbb{Z}[x]$ — не кольцо главных идеалов, а отсюда и не евклидово кольцо.

Определение. Пусть K — целостное кольцо.
Элемент $p \in K$ называется простым, если

1. $p \neq 0$;
2. p — необратимый;
3. если $p = ab$, то либо a, либо b — обратимый элемент.

Примеры.

1. $K = \mathbb{Z}$: простые элементы — $\pm p$, где p — простое число;
2. $K = F[x]$: простые элементы — неприводимые многочлены.

Напоминание. *Любой элемент евклидова кольца раскладывается в произведение простых элементов этого кольца, причём это разложение единственно с точностью до домножения множителей на обратимые элементы и их порядка.*

Замечание. Аналогичное утверждение верно для всех колец главных идеалов, однако в данном курсе оно рассматриваться не будет.

Напоминание. $\mathbb{Z}/(n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ *— поле* $\iff n$ *— простое.*

Теперь можем доказать гораздо более общее утверждение:

Теорема. *Пусть* K *— евклидово кольцо,* $u \in K$*. Тогда* $K/(u)$ *— поле* $\iff u$ *— простой элемент.*

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Пусть $K/(u)$ — поле. Допустим, что u — не простой. Тогда возможны случаи:

1. $u = 0 \Longrightarrow K/(u) = K$ — не поле по определению евклидова кольца;
2. u обратим $\Longrightarrow 1 \in (u) \Longrightarrow K/(u) = K/K = \{0\}$ — не поле;
3. $u = ab$, где a, b — необратимы. Тогда покажем, что $a + (u) \neq (u)$: иначе

   $$a \in (u) \Longrightarrow a = ud = abd \Longrightarrow a(bd - 1) = 0 \Longrightarrow bd = 1 \Longrightarrow b \text{ — обратим}$$

   Аналогично $b + (u) \neq (u)$. Тогда из $u = ab$ следует, что $(a + (u))(b + (u)) = (u)$, то есть в поле $K/(u)$ элементы $a + (u)$ и $b + (u)$ — делители нуля — противоречие.

Все случаи невозможны, а значит, u не может не быть простым.
$\Longleftarrow$: Пусть u — простой элемент. $K/(u)$ — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей из соответствующих свойств K, причём единица в нём — $1 + (u)$ ($\neq (u)$, так как иначе $1 \in (u) \Longrightarrow 1 = ua$ — противоречие с необратимостью u) Пусть a — произвольный ненулевой элемент $K/(u)$. Тогда:

$$a + (u) \neq (u) \Longrightarrow a \notin (u) \Longrightarrow u \nmid a \overset{u\text{-простой}}{\Longrightarrow} \text{НОД}(u, a) = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists x, y \in K : xa + yu = 1 \text{ в } K \Longrightarrow (x + (u))(a + (u)) = 1 + (u) \text{ в } K/(u)$$

Значит, $x + (u)$ — обратный к $a + (u)$. Отсюда любой ненулевой элемент $K/(u)$ обратим, а тогда $K/(u)$ — поле. □

Следствие. *Пусть* $K = F[x]$ *(*F *— поле),* $f \in F[x]$*. Тогда* $F[x]/(f)$ *— поле* $\iff f$ *— неприводимый многочлен.*

Пример. $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ — поле.

10.4 Расширения полей

Утверждение. *Множество* $\{a + (f) \mid a \in F\}$ *образует подкольцо в кольце* $F[x]/(f)$, *где* F — *поле.*
В частности, если f *неприводим, то это подкольцо — подполе поля* $F[x]/(f)$.
Более того, это подполе изоморфно полю F *(изоморфизм* $a + (f) \mapsto a$*).*

Доказательство. Все пункты определения подкольца (подполя) очевидно следуют из аналогичных утверждений для поля F. □

Замечание. В дальнейшем такое подполе и поле F будут отождествляться.

Определение. Если L — подполе поля K, то K называется расширением L.

В таком случае K можно рассматривать как векторное пространство над L.

Примеры.

1. $\mathbb{C}$ — расширение $\mathbb{R}$;
2. если $f \in F[x]$ — неприводимый, то $F(x)/(f)$ — расширение поля F.

10.4.1 Конечные расширения полей

Определение. Расширение K поля L называется конечным, если K — конечномерное векторное пространство над L (т.е. $\dim_L K < \infty$).
В этом случае $\dim_L K$ называется степенью расширения.

Пример. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ — базис $\{1, i\}$.

Утверждение.
Пусть F — *поле,* $f \in F[x]$ — *неприводимый многочлен,* $\deg f = n$. *Тогда элементы* $1 + (f), x + (f), ..., x^{n-1} + (f)$ — *базис* $F[x]/(f)$ *как векторного пространства над* F, *то есть* $F[x]/(f)$ — *расширение поля* F *степени* n.

Доказательство. Рассмотрим произвольный многочлен $g \in F[x]$ и разделим его на f с остатком:

$$g(x) = f(x)q(x) + r(x), \quad \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ \deg r < \deg f \end{array}\right.$$

Если $r = 0$, то $g(x) \in (f) \Longrightarrow g + (f) = 0$.
Иначе (далее обозначим (f) как I):

$$g(x) + I = r(x) + I = c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1} x^{n-1} + I =$$

$$= (c_0 + I)(1 + I) + (c_1 + I)(x + I) + ... + (c_{n-1} + I)(x^{n-1} + I) =$$

$$(\text{отождествление}) \ = c_0(1 + I) + c_1(x + I) + ... + c_{n-1}(x^{n-1} + I)$$

— отсюда система $\{1 + (f), x + (f), ..., x^{n-1} + (f)\}$ порождает $F[x]/(f)$.
Покажем линейную независимость:

$$\lambda_0(1 + I) + \lambda_1(x + I) + ... + \lambda_{n-1}x^{n-1} + I = I \Longrightarrow \lambda_0 + \lambda_1 x + ... + \lambda_{n-1}x^{n-1} \in I$$

Тогда $f \mid (\lambda_0 + ... + \lambda_{n-1}x^{n-1})$, но $\deg f > n - 1$. Значит, такое возможно только в случае, когда все λ_i равны нулю, что и означает линейную независимость. $\square$

Далее введём обозначения $\alpha = x + I, \alpha^k = x^k + I$. Тогда по утверждению $\{1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}\}$ — базис $F[x]/I$. Посмотрим на значение $f(\alpha)$:

$$f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \Longrightarrow f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + ... + a_n\alpha^n + I =$$

$$= a_0 + a_1(x + I) + ... + a_n(x^n + I) + I = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + I = I$$

то есть в отождествлении $f(\alpha) = 0$, и α — корень f в $F[x]/(f)$.
При этом в F у многочлена f не было корней, так как он неприводим над F.

Определение. Данный переход от поля F к расширению $F[x]/(f)$ (f — неприводимый) называется присоединением к полю F корня α многочлена f.

Пример. Пусть $F = \mathbb{R}, f = x^2 + 1$ — неприводимый над $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}[x]/(f)$ — поле, $\{1, \alpha\} = \{1 + (f), x + (f)\}$ — его базис как векторного пространства над $\mathbb{R}$. Тогда любой элемент этого пространства представим в виде

$$a + bx + (f) = a(1 + (f)) + b(x + (f)) = a + b\alpha$$

При этом $f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \alpha^2 = -1$. Значит, получили поле, в котором все элементы представляются в виде $a + b\alpha$, где $\alpha^2 = -1$ — это в точности поле комплексных чисел. Значит, $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$.

Пример. Построим поле, состоящее из 4 элементов:
Пусть $F = \mathbb{Z}_2, f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ — неприводимый над $\mathbb{Z}_2$. Тогда $L = \mathbb{Z}_2[x]/(f)$ — поле, причём (вновь обозначим $(f) = I$, $x + I = \alpha$):

$$\forall g(x) \in L: \ g(x) = q(x)(x^2 + x + 1) + (a + bx) \Longrightarrow \{g(x) + I\} =$$

$$= \{a + bx + I \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} = \{0 + I, 1 + I, x + I, x + 1 + I\} = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

Полученное поле L — векторное пространство над Z_2 размерности $\deg f = 2$ (базис $\{1, \alpha\}$)
Таблицу сложения просто построить, рассматривая L как пространство над $\mathbb{Z}_2$:

$+$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

Умножение в L зависит от α: знаем, что $f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, т.е.:

$$\alpha^2 = \alpha + 1; \quad \alpha(\alpha+1) = \alpha^2 + \alpha = 1; (\alpha+1)^2 = \alpha^2 + 1 = \alpha$$

Отсюда таблица умножения для F имеет следующий вид:

$\times$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	1	α

Теорема. *(о башне расширений)*
Пусть F — поле, L — конечное расширение F, M — конечное расширение L. Тогда M — конечное расширение F, причём $\dim_F M = \dim_L M \cdot \dim_F L$.

Доказательство. Из конечности расширений можем выбрать:
$\{e_1, ..., e_n\}$ — базис L как векторного пространства над F $(\dim_F L = n)$;
$\{g_1, ..., g_m\}$ — базис M как векторного пространства над L $(\dim_L M = m)$.
Докажем, что $\mathcal{E} = \{e_i g_i \mid i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\}$ — базис M как векторного пространства над F:

1. Докажем, что $\mathcal{E}$ - порождающая система M как пространства над F:

$$\forall x \in M : x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j,\ \lambda_j \in L; \quad \forall j :\ \lambda_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} e_i,\ \mu_{ij} \in F \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \sum_j (\sum_i \mu_{ij} e_i) g_j = \sum_{i,j} \mu_{ij} e_i g_j$$

2. Докажем линейную независимость:

$$\sum_{i,j} \mu_{ij} e_i g_j = 0 \Longrightarrow \sum_j (\sum_i \mu_{ij} e_i) g_j = 0 \overset{1}{\Longrightarrow} \forall j: \ \sum_i \mu_{ij} e_i = 0 \overset{2}{\Longrightarrow} \forall i,j: \ \mu_{ij} = 0$$

(1, 2 – т.к. $\{g_j\}$ является базисом M над L, а $\{e_i\}$ – базисом L над F)
Значит, M — конечное расширение размерности mn, что и требовалось. □

10.4.2 Алгебраические расширения полей

Определение. Пусть L — расширение поля F.
Элемент $a \in L$ называется алгебраическим над F, если $\exists h \in F[x], h \neq 0$ такой, что $h(a) = 0$. В противном случае a называется трансцендентным над F.

Примеры.

1. $L = \mathbb{C}, F = \mathbb{Q}$ — привычные алгебраические и трансцендентные числа:
   - $i, \sqrt{2}$ — алгебраические (i — корень $x^2 + 1$, $\sqrt{2}$ — корень $x^2 - 2$)
   - e, π — трансцендентные.
2. Если L — расширение F, то $\forall a \in F$ — алгебраический над F (корень $x - a$)

Определение. Расширение L поля F называется алгебраическим, если любой элемент $a \in L$ — алгебраический над F.

Пример. $\mathbb{C}$ — алгебраическое расширение $\mathbb{R}$.

Утверждение. *Конечное расширение L поля F является его алгебраическим расширением.*

Доказательство. Пусть $\dim_F L = n$. Для произвольного $a \in L$ рассмотрим элементы $\{1, a, a^2, a^3, ..., a^n\}$ поля L — всего их $n + 1$, а отсюда по ОЛЛЗ они линейно зависимы над F, т.е.

$\exists c_i \in F : c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot a + ... + c_n a^n = 0 \Longrightarrow a$ – корень $h(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n \in F[x]$

Отсюда любой $a \in L$ — алгебраический над F, то есть L — алгебраическое расширение F. □

Определение. Пусть L — расширение поля F, $a \in L$ — произвольный алгебраический элемент. Минимальным многочленом элемента a называется многочлен $\mu_a \in F[x]$ наименьшей степени такой, что $\mu_a \neq 0, \mu_a(a) = 0$.

Свойства. *(минимального многочлена)*

1. *μ_a — неприводимый над F;*

2. *Для любого $h \in F[x]$ такого, что $h(a) = 0$, верно $\mu_a \mid h$;*

3. *Минимальный многочлен единственный с точностью до домножения на ненулевой элемент $\mathbb{F}$ (обратимый элемент $F[x]$)*

Доказательство.

1. Так как μ_a имеет корень a и при этом не тождественно равен нулю, μ_a — не константа, то есть необратим в $F[x]$. Также:

$$\mu_a(x) = p(x)q(x) \Longrightarrow 0 = \mu_a(a) = p(a)q(a)$$

   $p(a)$ и $q(a)$ — элементы поля L, а раз в поле нет делителей нуля,

$$p(a)q(a) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} p(a) = 0 \\ q(a) = 0 \end{array}\right.$$

   Тогда хотя бы один из многочленов $p(x)$ и $q(x)$ является константой — иначе у одного из них есть корень a и степень меньше степени μ_a, что противоречит определению минимального многочлена.
   Значит, μ_a неприводим в $F[x]$;

2. Разделим h на μ_a с остатком:

$$h = \mu_a(x) \cdot q(x) + r(x), \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ \deg r < \deg f \end{array}\right.$$

   При этом

$$0 = h(a) = \mu_a(a) \cdot q(a) + r(a) = r(a)$$

   а тогда по определению минимального многочлена $r(x) = 0$. Значит, $\mu_a \mid h$;

3. Очевидно следует из пункта 2 — если μ_1 и μ_2 минимальны для a, то

$$\mu_1(a) = 0 \Longrightarrow \mu_2 \mid \mu_1;\ \mu_2(a) = 0 \Longrightarrow \mu_1 \mid \mu_2$$

   а отсюда $\mu_1 = c\mu_2$, где c обратим в $F[x]$, то есть является элементом F.

□

Определение. Степень минимального многочлена $\mu_a \in F[x]$ для алгебраического элемента $a \in L$ называется степенью a.

Пример. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}, a = \sqrt{2}:\ \mu_a(x) = x^2 - 2$, степень $\sqrt{2}$ равна 2.

Определение. Пусть S — подкольцо кольца T, $a_1, ..., a_n \in T$. Кольцом, порождённым элементами $a_1, ..., a_n$ над S, называется наименьшее подкольцо кольца T, содержащее S и элементы $a_1, ..., a_n$. Обозначается $S[a_1, ..., a_n]$.

Утверждение. $S[a_1, ..., a_n] = \{f(a_1, ..., a_n) \mid f \in S[x_1, ..., x_n]\}$

Доказательство. Очевидно, что $S_0 = \{f(a_1, ..., a_n) \mid f \in S[x_1, ..., x_n]\}$ — подкольцо кольца T, содержащее S и $a_1, ..., a_n$. При этом любое подкольцо T, содержащее S и $a_1, ..., a_n$, обязано содержать все элементы вида $f(a_1, ..., a_n)$ в силу замкнутости относительно сложения и умножения, а значит, S_0 — наименьшее подкольцо T с такими свойствами. □

Примеры.

1. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}: \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
2. $F \subset L = F[x]/(f),\ \alpha = x + (f): \quad F[\alpha] = L$.

Теорема 1. *Пусть L — расширение поля F. Тогда:*

1. *$a \in L$ — алгебраический над $\mathbb{F} \iff F[a]$ — конечномерное векторное пространство над F;*
2. *если $a \in L$ — алгебраический над F, то $F[a]$ — поле, изоморфное $F[x]/(\mu_a)$ (в частности, $\dim_F F[a] = \dim F[x]/(\mu_a) = \deg \mu_a$).*

Доказательство. $F[u] = \{g(u) \mid g \in F[x]\}$

1. $\Longleftarrow$: Пусть $F[a]$ — n-мерное векторное пространство над F. Тогда аналогично рассуждениям о алгебраичности конечного расширения с помощью рассмотрения системы векторов $\{1, a, ..., a^n\}$, линейно зависимой над F, найдём ненулевой многочлен с корнем a;
   $\Longrightarrow$: Пусть a — алгебраический элемент поля F, то есть

   $$\exists h(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n \in F[x],\ h \neq 0, h(a) = c_0 + c_1 a + ... + c_n a^n = 0$$

   Отсюда $a^n = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 a + ... + \tilde{c}_{n-1} a^{n-1}$, где $\tilde{c}_i \in F$.
   Покажем, что $F[a]$ порождается множеством $\{1, a, ..., a^{n-1}\}$:
   Пусть $x \in F[a] \Longrightarrow x = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda_j a^j$. Индукция по m:
   База: $m < n$ — уже имеем разложение по нужным элементам;
   Шаг: Заметим, что

   $$a^m = a^{m-n} a^n = a^{m-n}(\tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 a + ... + \tilde{c}_{n-1} a^{n-1}) = \tilde{c}_0 a^{m-n} + ... + \tilde{c}_{n-1} a^{m-1}$$

Значит, в разложении $x = \sum\limits_{j=0}^{m} \lambda_j a^j$ можно представить слагаемое $\lambda_m a^m$ как сумму меньших степеней a, а тогда после приведения подобных применимо предположение индукции. Отсюда $F[a]$ конечно порождается как векторное пространство над F, а значит, имеет конечный базис.

2. Рассмотрим гомоморфизм колец $\varphi : F[x] \to L$, заданный по правилу $f(x) \mapsto f(a)$. Тогда $\mathrm{Im}\ \varphi = F[a], \mathrm{Ker}\ \varphi = (\mu_a)$, и по теореме о гомоморфизме колец $F[a] \simeq F[x]/(\mu_a)$.
Притом μ_a — неприводимый над F, то есть $F[x]/(\mu_a)$ — поле, а отсюда и $F[a]$ — поле.

□

Пример. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \simeq \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$ — поле.

10.4.3 Конечнопорождённые расширения полей

Определение. Пусть L — расширение поля F, $a_1, ..., a_m \in L$. Подполем, порождённым элементами $a_1, ..., a_m$ над F, называется наименьшее подполе L, содержащее $a_1, ..., a_m$ и F. Обозначается $F(a_1, ..., a_m)$.

Утверждение.

$$F(a_1, ..., a_m ...) = \left\{ \frac{f(a_1, ..., a_m)}{g(a_1, ..., a_m)} \mid m \in \mathbb{N}\ f, g \in F[x_1, ..., x_m],\ g(a_1, ..., a_n) \neq 0 \right\}$$

Доказательство. Аналогично выражению подкольца, порождённого элементами кольца (обратимость элементов в поле даёт возможность делить). □

Определение. Поле L называется конечнопорождённым расширением поля F, если $\exists a_1, ..., a_m \in L :\ L = F(a_1, ..., a_m)$.

Утверждение. *(Эффект уничтожения иррациональных знаменателей)*
Если $a \in L$ — алгебраический элемент над F, то $F[a] = F(a)$.

Доказательство. Следует из п. 2 теоремы 1 ($F[a]$ — поле). □

Пример. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] :\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

Теорема 2. *Следующие условия эквивиалентны:*

1. *L — конечное расширение поля F;*
2. *L — конечнопорождённое алгебраическое расширение поля F;*

3. L порождается конечным числом элементов, алгебраических над F.

Доказательство.
$1 \Longrightarrow 2$: Алгебраичность любого конечного расширения уже доказывалась.
Пусть $\{e_1, ..., e_n\}$ — базис векторного пространства L над F.
Тогда $L = F[e_1, ..., e_n] = F(e_1, ..., e_n)$, т.е. L - конечнопорождённое;
$2 \Longrightarrow 3$: Из конечнопорождённости $L = F(a_1, ..., a_n)$. При этом $a_1, ..., a_n$ — алгебраические над F из алгебраичности расширения L, то есть L порождается конечным числом элементов, алгебраических над F;
$3 \Longrightarrow 1$: Пусть $L = F(a_1, ..., a_n)$, где a_i — алгебраические. Рассмотрим цепочку

$$F \subset F(a_1) \subset F(a_1, a_2) \subset ... \subset F(a_1, ..., a_n)$$

и обозначим $L_k = F(a_1, ..., a_k) = F(a_1, ..., a_{k-1})(a_k) = L_{k-1}(a_k)$.
Тогда L_{k+1} — конечное расширение L_k: так как $a_{k+1} \in L_{k+1}$ является алгебраическим над F, он является алгебраическим и над L_k, а отсюда

$$L_{k+1} = L_k(a_{k+1}) = L_k[a_{k+1}] \ - \text{ конечномерное в.п. над } L_k \text{ по теореме 1}$$

Значит, все последовательные расширения в цепочке конечные, а тогда по теореме о башне расширений L — конечное расширение F. □

10.4.4 Алгебраическое замыкание

Теорема. *Пусть L — расширение поля F.*
Обозначим $\overline{F} = \{a \in L \mid a - \text{алгебраический над } F\}$. Тогда:

1. *$\overline{F}$ — подполе L;*
2. *если $b \in L$ — алгебраический над $\overline{F}$, то b — алгебраический над F (то есть $b \in \overline{F}$)*

Доказательство.

1. $\forall a, b \in \overline{F}$ рассмотрим $F(a, b)$ — подполе, порождённое элементами a, b, алгебраическими над F. По теореме 2 $F(a, b)$ — алгебраическое расширение F, а отсюда $F(a, b) \subset \overline{F}$. Тогда $\forall a, b \in \overline{F}$:
   - $a + b \in \overline{F},\ 0 \in \overline{F},\ -a \in \overline{F} \Longrightarrow \overline{F}$ — аддитивная подгруппа;
   - $ab \in \overline{F} \Longrightarrow \overline{F}$ — подкольцо;
   - $1 \in \overline{F},\ a^{-1} \in \overline{F} (a \neq 0) \Longrightarrow \overline{F}$ — подполе.

2. Пусть $b \in L$ — алгебраический над $\overline{F}$, т.е.

$$\exists h \in \overline{F}[x]\ (h = c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k, c_i \in \overline{F}) :\ h \neq 0,\ h(b) = 0$$

Рассмотрим в L подполе $\tilde{F} = F(c_0, c_1, ..., c_k)$. Так как $c_i \in \overline{F}$, c_i — алгебраические над F. Тогда $\tilde{F}$ порождается над F конечным числом алгебраических элементов, а отсюда по теореме 2 $\tilde{F}$ — конечное расширение F.
При этом $h \in \tilde{F}[x]$, а значит, b является алгебраическим над $\tilde{F}$. Тогда по теореме 2 $\tilde{F}(b)$ — конечное расширение $\tilde{F}$, а отсюда по теореме о башне расширений $\tilde{F}(b)$ — конечное расширение F. Так как любое конечное расширение является алгебраическим, $\tilde{F}(b)$ — алгебраическое расширение F, а отсюда b является алгебраическим над F.

□

Определение. $\overline{F}$ называется алгебраическим замыканием поля F в поле L.

Замечание. $\overline{F}$ не обязано быть алгебраически замкнутым, так как поле L может быть не алгебраически замкнуто. Например, алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$ в поле $\mathbb{R}$ не алгебраически замкнуто, так как многочлен $x^2 + 1$ не имеет корней в нём.

Пример. Пусть $\overline{\mathbb{Q}}$ — алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{C}$.
($\overline{\mathbb{Q}}$ называется полем всех алгебраических чисел)

Упражнение.

1. Доказать, что $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраически замкнуто;
2. Доказать, что любое конечное расширение $\mathbb{Q}$ — подполе $\overline{\mathbb{Q}}$.

Доказательство.

1. Рассмотрим произвольный многочлен $f \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ положительной степени. Это многочлен с комплексными коэффициентами, а так как $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, f имеет корень $a \in \mathbb{C}$. Тогда a — алгебраический над $\overline{\mathbb{Q}}$, и по пункту 2 предыдущей теоремы $a \in \overline{\mathbb{Q}}$. Поэтому f имеет корень в $\overline{\mathbb{Q}}$, то есть $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраически замкнуто;
2. Любое конечное расширение F поля $\mathbb{Q}$ является алгебраическим расширением $\mathbb{Q}$. Рассмотрим произвольный $b \in F$ — он является алгебраическим над $\mathbb{Q}$, а так как любой корень многочлена с рациональными коэффициентами является комплексным числом, $b \in \mathbb{C}$. Тогда по определению $b \in \overline{\mathbb{Q}}$

($b \in \mathbb{C}$ и b — алгебраический над $\mathbb{Q}$), то есть $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$. При этом все операции введены как операции над $\mathbb{C}$, то есть F — подполе $\overline{\mathbb{Q}}$.

□

10.5 Поле разложения многочлена

Определение. Пусть F — поле, $f \in F[x]$ — произвольный многочлен. Расширение L поля F называется полем разложения многочлена f, если

1. f можно разложить на линейные множители над L;
2. L порождается над F корнями многочлена f.

То есть L — наименьшее поле, содержащее F и все корни многочлена f.

Примеры.

1. $f(x) = x - 5,\ F = \mathbb{R} \Longrightarrow L = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^2 + 1,\ F = \mathbb{R} \Longrightarrow L = R[x]/(x^2+1) \simeq \mathbb{C}$;
3. $f(x) = x^3 - 2,\ F = \mathbb{Q}$.
   Поле $L_1 = \mathbb{Q}[x]/(x^3-2) \simeq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ — не поле разложения f, т.к.
   $$f(x) = (x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$$
   где корни $x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}$ комплексные.
   Поэтому поле разложения f должно иметь вид $L = L_1[x]/(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$.

Лемма. *Пусть $P, \tilde{P}$ — поля, $h(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$ — неприводимый многочлен из $P[x]$, $P(\alpha)$ — поле, полученное из P присоединением корня α многочлена h. Тогда если $\varphi : P \to \tilde{P}$ — гомоморфизм полей, то количество способов продолжить его до гомоморфизма $\psi : P(\alpha) \to \tilde{P}$ совпадает с числом корней $\tilde{h}$ в $\tilde{P}$, где $\tilde{h}(x) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1x + ... + \tilde{c}_nx^n$, $\tilde{c}_i = \varphi(c_i)$.*

Доказательство. $P(\alpha) = P[\alpha] = \{a_0 + a_1\alpha + ... + a_k\alpha^k \mid a_i \in P\}$.
Если $\exists \psi : P(\alpha) \to \tilde{P}$, то

$$\psi(a_0 + a_1\alpha + ... + a_k\alpha^k) = \varphi(a_0) + \varphi(a_1)\beta + ... + \varphi(a_k)\beta^k, \text{ где } \beta = \psi(\alpha) \quad (1)$$

Применим это к $h(\alpha) = 0$:

$$0 = \psi(0) = \psi(h(\alpha)) = \psi(c_0 + c_1\alpha + ... + c_n\alpha^n) = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1\beta + ... + \tilde{c}_n\beta^n$$

Поэтому для любого продолжения ψ элемент $\beta = \psi(\alpha)$ — корень $\tilde{h}(x)$.
С другой стороны, если β — произвольный корень $\tilde{h}(x)$, то правило (1) задаёт корректный гомоморфизм $\psi : P(\alpha) \to \tilde{P}$, причём все такие гомоморфизмы различны (различны их значения на α). Значит, искомых гомоморфизмов столько же, сколько и корней у $\tilde{h}(x)$ в $\tilde{P}$. □

Теорема. *Поле разложения любого $f \in F[x]$ существует и единственно с точностью до изоморфизма, тождественного на F.*

Доказательство. Построим одно из полей разложения L многочлена f с помощью цепочки расширений

$$F = L_0 \subseteq L_1 \subseteq ... \subseteq L_s = L,\ L_{i+1} = L_i(\alpha_{i+1}),\ \text{где } \alpha_1, ..., \alpha_s - \text{корни } f$$

Разложим f на неприводимые множители и докажем существование нужной цепочки индукцией по S — сумме степеней нелинейных многочленов в разложении f над L_i:
База: $S = 0 \Longrightarrow$ все множители линейны — $L_i = L$, цепочка завершена;
Шаг: Пусть в разложении есть неприводимый множитель f_i степени $\geqslant 2$ — тогда $L_{i+1} = L_i[x]/(f_i) = L_i(\alpha_{i+1})$, где α_{i+1} — корень f_i. В L_{i+1} у многочлена $f(x)$ сохранились все имевшиеся корни и добавился хотя бы один новый корень α_{i+1} — значит, в L_{i+1} сумма степеней нелинейных многочленов в разложении f уменьшилась хотя бы на 1, то есть к L_{i+1} применимо предположение индукции.
Осталось заметить, что по построению L порождается над F корнями f, не принадлежащими F, что то же самое, что и всеми корнями f. Значит, L — поле разложения f.

Теперь докажем единственность. Пусть $\tilde{L}$ — произвольное поле разложения многочлена f (из опр. $F \subseteq \tilde{L}$). Рассмотрим последовательность гомоморфизмов

$$\varphi_i : L_i \to \tilde{L} \text{ таких, что } \varphi_0 = \mathrm{id},\ \varphi_{i+1}|_{L_i} = \varphi_i$$

По лемме при присоединении корня неприводимого f_i хотя бы одно продолжение φ_{i+1} существует тогда и только тогда, когда $\varphi_i(f_i)$ имеет корень в $\tilde{L}$.
Для многочленов знаем, что $f_i \mid f$ над $L_i \Longrightarrow \varphi_i(f_i) \mid \varphi_i(f)$ над $\tilde{L}$, а $\varphi_i(f) = f$, так как все φ_i тождественны на F. При этом f раскладывается на линейные множители над $\tilde{L}$ — значит, у $\varphi_i(f_i)$ не может не быть корней над $\tilde{L}$, и расширение возможно.
Так построим $\varphi_s : L \to \tilde{L}$ — гомоморфизм полей, тождественный на F.
Ядро $\mathrm{Ker}\ \varphi_s$ — идеал в поле L, то есть оно равно либо $\{0\}$, либо L — второе

невозможно, так как φ_s тождественный на F, а в F есть $1 \neq 0$.
Образ $\operatorname{Im} \varphi_s$ — подполе $\tilde{L}$, содержащее все корни многочлена f, а тогда из минимальности поля разложения совпадающее с $\tilde{L}$. Значит, φ_s — биективный гомоморфизм полей, т.е. изоморфизм полей, тождественный на F. □

10.6 Конечные поля

Определение. Наименьшее натуральное число n такое, что $\overbrace{1+...+1}^{n} = 0$ в F, называется характеристикой поля F. Если таких натуральных n не существует, то характеристика поля F равна 0. Обозначается как $\operatorname{char} F$.

Примеры. $\operatorname{char} \mathbb{R} = 0,\ \operatorname{char} \mathbb{Z}_3 = 3.$

Утверждение 1. *Если $n = \operatorname{char} F > 0$, то n — простое.*

Доказательство. Доказывалось в курсе первого семестра. □

Утверждение 2. *Пусть F — поле. Тогда*

1. *если $\operatorname{char} F = p > 0$, то $\exists M$ — подполе F, изоморфное $\mathbb{Z}_p$;*
2. *если $\operatorname{char} F = 0$, то $\exists M$ — подполе F, изоморфное $\mathbb{Q}$;*

Доказательство.

1. $M = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, ..., \overbrace{1+...+1}^{p-1}\} \simeq \mathbb{Z}_p$ — подполе F;
2. $K = \{0, 1, (-1), 1+1, (-1)+(-1), ...\} \simeq \mathbb{Z}$ — подкольцо F.
   Значит, в F есть подполе $M = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in K, b \neq 0\} \simeq \mathbb{Q}$.

□

Утверждение 3. *Пусть F — поле, $\operatorname{char} F = p > 0$, $\varphi : F \to F$ — отображение, заданное по правилу $\varphi : x \mapsto x^p$. Тогда φ — инъективный гомоморфизм, причём если $|F| < \infty$, то φ — изоморфизм.*

Доказательство. Очевидно, что $\varphi(ab) = (ab)^p = a^p b^p = \varphi(a)\varphi(b)$.

$$\varphi(a+b) = (a+b)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^k a^k b^{p-k} = a^p + b^p = \varphi(a) + \varphi(b)$$

(так как $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$, и при $k \neq 0, p$ только числитель кратен p, т.е. $p \mid C_p^k$)
Также $\varphi(a) = 0 \iff a^p = 0 \iff a = 0$ (в поле нет делителей нуля).
Отсюда φ — инъективный гомоморфизм.
При $|F| < \infty$ он сюръективен, то есть является изоморфизмом. □

Определение. φ из утверждения 3 называется эндоморфизмом Фробениуса (автоморфизмом Фробениуса для конечного F).

Утверждение 4. *F — конечное поле* $\Longrightarrow |F| = p^k$, *где* $p = \text{char } F$, $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. По утверждению 2 в поле F есть подполе $M \simeq \mathbb{Z}_p$.
Тогда F можно рассматривать как векторное пространство над M. Из конечности поля F конечна его размерность как векторного пространства над M. Пусть она равна k — тогда $|F| = p^k$.
(каждый элемент однозначно задаётся k координатами из $\mathbb{Z}_p$) □

Лемма. *Пусть φ — автоморфизм поля F. Тогда множество S неподвижных точек φ — подполе в F.*

Доказательство. Если a, b неподвижны относительно φ, то из определения изоморфизма очевидно, что и неподвижны и точки $a + b$, $-a$, ab, a^{-1}. Также $\varphi(0) = 0$ по свойству гомоморфизмов групп, $\varphi(1) = 1$ по аналогичным рассуждениям для мультипликативной группы поля. Значит, S — подполе F. □

Теорема. *Для любого простого p и любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное с точностью до изоморфизма поле F из p^n элементов.*

Доказательство. Построим поле порядка p^n: рассмотрим поле F разложения многочлена $f(x) = x^{p^n} - x$ над $\mathbb{Z}_p$. Его производная $f' = p^n x^{p^n - 1} - 1 = -1$, то есть у f нет кратных корней. Значит, в F есть p^n различных корней f.
Рассмотрим подмножество $S \subseteq F$ этих корней:

$$S = \{a \in F \mid a^{p^n} = a\} \quad (|S| = p^n)$$

— это множество неподвижных точек автоморфизма φ^n, где φ — автоморфизм Фробениуса. По лемме множество неподвижных точек автоморфизма поля является подполем, и при этом S содержит все корни f — из минимальности поля разложения $S = F \Longrightarrow |F| = p^n$.
Единственность: пусть $\tilde{F}$ — произвольное поле из p^n элементов. Тогда

$$|\tilde{F}^*| = p^n - 1 \Longrightarrow \forall a \in \tilde{F}^* : \ a^{p^n - 1} = 1 \Longrightarrow \forall a \in F : \ a^{p^n} - a = 0$$

то есть $\tilde{F}$ состоит из корней многочлена $f(x) = x^{p^n} - x$, которых ровно p^n. Значит, $\tilde{F}$ — поле разложения f над $\mathbb{Z}_p$, то есть $\tilde{F} \simeq F$. □

Определение. Поле из p^n элементов обозначается $\mathbb{F}_{p^n}$.

Следствие. *Для любого простого p и любого $n \in \mathbb{N}$ существует неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Рассмотрим поле F из p^n элементов. В конце раздела 4.4 доказывалось, что мультипликативная группа конечного поля — циклическая $\Longrightarrow F^* = \langle\alpha\rangle$. Тогда F порождается над $\mathbb{Z}_p$ элементом α, то есть $F = \mathbb{Z}_p(\alpha) = \mathbb{Z}_p[x]/(\mu_\alpha)$, где $\deg \mu_\alpha = \dim_{\mathbb{Z}_p} F = n$, и при этом μ_α неприводим по свойству минимального многочлена. Значит, μ_α — искомый многочлен. □

Упражнение. Доказать. что в $\mathbb{F}_{p^n}$ есть подполе, изоморфное $\mathbb{F}_{p^m} \Longleftrightarrow m \mid n$.

Доказательство.
$\Longrightarrow$: Если в $F_1 \simeq \mathbb{F}_{p^n}$ есть подполе $F_2 \simeq \mathbb{F}_{p^m}$, то F_1 можно рассматривать как векторное пространство над F_2. Тогда $|F_1| = |F_2|^k$, где k — размерность F_1 как пространства над F_2, то есть $p^n = p^{km} \Longrightarrow m \mid n$;
$\Longleftarrow$: Заметим, что если $n = km$, то многочлен $x^{p^n} - x$ делится на $x^{p^m} - x$:

$$p^n - 1 = (p^m)^k - 1^k = (p^m - 1)(p^{m(k-1)} + p^{m(k-2)} + ... + p^m + 1) = (p^m - 1)Q \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^{p^n} - x = x(x^{p^n - 1} - 1) = x(x^{(p^m-1)Q} - 1^Q) = x(x^{p^m-1} - 1)P(x) = (x^{p^m} - x)P(x)$$

Таким образом, все корни многочлена $x^{p^m} - x$ являются корнями $x^{p^n} - x$, то есть в $\mathbb{F}_{p^n}$ как в поле разложения $x^{p^n} - x$ над $\mathbb{Z}_p$ есть все p^m корней многочлена $x^{p^m} - x$, которые образуют поле, изоморфное $\mathbb{F}_{p^m}$, относительно тех же операций. Значит, в $\mathbb{F}_{p^n}$ есть подполе, изоморфное $\mathbb{F}_{p^m}$ □

11 Материал для самостоятельного изучения

Материал для данной главы взят из [4], лекции 18-19.

11.1 Алгебры над полем

Определение. Алгеброй над полем F называется множество A с операциями сложения, умножения и умножения на элементы поля K, обладающими следующими свойствами:

1. $(A, +, \lambda\cdot)$ — векторное пространство над F;
2. $(A, +, \cdot)$ — кольцо;
3. $\forall a, b \in A, \lambda \in F: \ \lambda(ab) = (\lambda a)b$.

Определение. Для алгебры над полем определены следующие понятия:

- как для векторного пространства — размерность;
- как для кольца — ассоциативность, коммутативность, наличие единицы.

Примеры.

1. Если L — расширение поля F, то L - коммутативная ассоциативная алгебра с единицей над F;
2. Множество $F(X, K)$ функций $f : X \to K$, где X — произвольное множество, K — поле, является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей над K;
3. $M_n(F)$ — некоммутативная ассоциативная алгебра с единицей над F.

Определение. Тело — ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный.

Примеры.

1. Любое поле является телом (поле — коммутативное тело)
2. Q_8 — тело, не являющееся полем (любой элемент имеет обратный, но умножение некоммутативно)

Определение. Алгебра, являющаяся телом относительно сложения и умножения, называется алгеброй с делением.

Примеры.

1. Любая алгебра, являющаяся полем, является алгеброй с делением (например, поле L как алгебра над подполем F);

2. Любое тело D можно рассматривать как алгебру с делением над своим центром $Z(D) = \{z \in D \mid \forall a \in D : \ za = az\}$, который является коммутативным телом, то есть полем.

Замечание. Если D — алгебра с делением над полем F, то элементы вида $\lambda \cdot 1$ образуют в ней подкольцо, содержащееся в $Z(D)$ и изоморфное F.

11.2 Алгебра кватернионов

Рассмотрим ассоциативную алгебру $\mathbb{H}$ над $\mathbb{R}$, порождаемую элементами i, j такими, что

$$i^2 = j^2 = -1; \quad ij = -ji$$

Тогда базисом $\mathbb{H}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$ будут элементы $\{1, i, j, k\}$, где $k = ij$. Тогда:

$$k^2 = (ij)^2 = ijij = i(-ij)j = -(-1)(-1) = -1;$$

$$ki = (ij)i = i(-ij) = -ik; \ kj = (ij)j = (-ji)j = -jk$$

и любой элемент (кватернион) $q \in \mathbb{H}$ можно записать в виде $q = a + bi + cj + dk$.

Определение. Пусть $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ — произвольный кватернион. Тогда кватернион $\overline{q} = a - bi - cj - dk$ называется сопряжённым кватернионом к q.

Свойства. $\forall q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$*:*

1. $\overline{\overline{q}} = q$;

2. $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$;

3. $q\overline{q} = \overline{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Доказательство.

1. Очевидно из определения;

2. В силу линейности $\mathbb{H}$ как векторного пространства достаточно проверить данное равенство на базисных элементах. Равенства с участием единицы очевидны ($\overline{1} = 1$) — рассмотрим остальные:

$$\overline{ij} = \overline{k} = -k = ji = (-j)(-i) = \overline{j} \cdot \overline{i}$$

$$\overline{jk} = \overline{i} = -i = kj = (-k)(-j) = \overline{k} \cdot \overline{j}$$

$$\overline{ki} = \overline{j} = -j = ik = (-i)(-k) = \overline{i} \cdot \overline{k}$$

3. $$q\overline{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 - (bi + cj + dk)^2 =$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bcij - bcji - bdik - bdki - cdjk - cdkj = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Равенство $q\overline{q} = \overline{q}q$ получается из данного подстановкой $\overline{q}$ вместо q.

□

Определение. Число $q\overline{q} \in \mathbb{R}$ называется нормой $q \in \mathbb{H}$ и обозначается $N(q)$.

Утверждение. $\mathbb{H}$ — *алгебра с делением.*

Доказательство. Уже знаем, что $\mathbb{H}$ — ассоциативная алгебра с единицей. Докажем, что любой ненулевой элемент H обратим: если $q \neq 0$, то $N(q) \neq 0$, а тогда $q^{-1} = \frac{1}{N(q)} \cdot \overline{q}$, так как $q\overline{q} = \overline{q}q = N(q)$. Значит, $\mathbb{H}$ — алгебра с делением. □

Теорема. *(Фробениуса)*
Над полем $\mathbb{R}$ с точностью до изоморфизма существует только три конечномерные ассоциативные алгебры с делением: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Доказательство. Без доказательства. □

12 Заключение и источники

Утверждение 1. *Если вы дочитали этот конспект до конца и всё поняли — вы круты!*

Утверждение 2. *Если вы дочитали этот конспект до конца и не всё поняли — прошу не стестняться задавать мне вопросы, большинство опечаток и ошибок в моём понимании обнаруживаются именно так, да и помочь я всегда буду рад)*

Утверждение 3. *Если вы не дочитали этот конспект до конца — да пребудет с вами удачный билет на экзамене)*

Доказательство. Остаётся читателю в качестве упражнения. □

Без следующих людей конспект не состоялся бы, а потому благодарю:

- Куликову Ольгу Викторовну - за прекрасные лекции, тщательное изучение которых не мешало мне редко на них просыпаться;
- Техающую команду 208 группы:
  - Кирилл Яковлев (*мастер спорта по пупупу*);
  - Вячеслав Молчанов (*знаток ангема*);
  - Егор Цыбулин (*самый главный алгебраист*);
  - Ярослав Светлаков (*любитель запятых*);

  — с вами никогда не было ощущения, что я одинок в своих страданиях;
- Людей, без чьих конспектов я бы не выжил:
  - Сергей Криворученко (209 гр.) — за живые и подробные конспекты;
  - Евгения Ковтун (212 гр.) — за аккуратные и читаемые коспекты;

  — я мог спать, зная, что эти герои проснутся;
- Всех, кто присылал (и будет присылать) мне вопросы, ошибки и опечатки — благодаря вам конспект становится понятнее, правильнее и чище;
- И наконец, всех, кто нашёл в себе силы открыть алгебру — благодаря вам моя работа имела смысл)

На этом всё, всем удачи и до встречи в новых конспектах!

Список литературы

[1] “Спецкурс по теории групп”, Клячко А.А., 2022, https://halgebra.math.msu.su/staff/klyachko/lect21.pdf

[2] “Линейная алгебра, 2 семестр, 2 поток, лектор Чубаров И.А.”, команда 108 группы, 2025, https://github.com/Viacheslavik122333/Linear-algebra/blob/main/linal.pdf

[3] “Алгебра, 1 семестр, 2 поток, лектор Куликова О.В.”, команда 108 группы, 2024, https://github.com/Viacheslavik122333/Halgebra1sem/blob/main/lecture.pdf

[4] “Лекции по высшей алгебре, 2 курс, 1 поток”, Бунина Е.И., 2016, https://halgebra.math.msu.su/wiki/doku.php/staff:bunina