1 Определение вектора. Свободный вектор. Сложение векторов, умножение вектора на число, свойства этих операций.

Вектором $\overrightarrow{MN}$ с началом в точке M и концом в точке N называется направленный отрезок MN (или упорядоченная пара точек (M,N)), причем точка M объявляется началом, а точка N — концом вектора. Векторы, у которых начало и конец совпадают, называются *нулевыми. Длиной вектора* $\overrightarrow{MN}$ называется длина отрезка MN.

1.1 Определение. (Равенство векторов.) $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$, если выполнено одно из следующих условий:

1) Нулевые векторы объявляются равными.

2)Если ненулевые векторы $\overrightarrow{M_1N_1}$ и $\overrightarrow{M_2N_2}$ лежат на одной прямой, причем их длины равны и векторы направлены в одну сторону, что означает, что лучи M_1N_1 и M_2N_2 пересекаются по лучу.

...

3) Если ненулевые векторы $\overrightarrow{M_1N_1}$ и $\overrightarrow{M_2N_2}$ лежат на параллельных прямых, причем прямые M_1M_2 (соединяет начала векторов!) и N_1N_2 (соединяет концы векторов!) параллельны (то есть четырехугольник $M_1N_1N_2M_2$ является параллелограммом).

Возможны и другие определения равенства векторов. Более красивые. Например.

Задача о равенстве векторов. Доказать, что векторы $\overrightarrow{M_1N_1}$ и $\overrightarrow{M_2N_2}$ равны тогда и только тогда, когда совпадают середины отрезков M_1N_2 и M_2N_1.

1.2 Предложение. (О приложении вектора.) *Для любого вектора a и любой точки M существует единственная такая точка N, что $a = \overrightarrow{MN}$.*

Доказательство. Если вектор a ненулевой, то проведем через точку M прямую, параллельную вектору $a = \overrightarrow{M_1N_1}$, На прямой выберем точку N такую, чтобы $|MN| = |M_1N_1|$ и четырехугольник MNN_1M_1 являлся параллелограммом. Очевидно, такое всегда возможно. □

Для определения свободного вектора нам понадобится конструкция, называемая отношением эквивалентности.

1.1 Отношение эквивалентности

Отношение эквивалентности – это общематематическая конструкция, используемая практически во всех разделах математики.

Пусть задано отображение $f : X \to Y$. Будем говорить, что x_1 эквивалентно x_2, и записывать $x_1 \sim x_2$, если $f(x_1) = f(x_2)$. Докажем, что так определенное отношение удовлетворяет следующим трем свойствам:

1) *рефлексивность*: $x \sim x$ для любого элемента $x \in X$;

2) *симметричность*: если $x_1 \sim x_2$, то $x_2 \sim x_1$;

3) *транзитивность*: если $x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$, то и $x_1 \sim x_3$.

Обратно, пусть на множестве X задано отношение $\sim$, удовлетворяющее условиям 1) — 3). Тогда будем называть такое отношение отношением эквивалентности. Легко доказать, что каждое отношение эквивалентности на множестве X порождается некоторым отображением $f : X \to Y$. В самом деле, для $a \in X$ обозначим $C_a = \{x \in X : x \sim a\}$ и назовем это множество *классом эквивалентности* элемента a.

1.3 Теорема. *Если $x_1, x_2 \in C_a$, то $x_1 \sim x_2$. Если $C_a \cap C_b \neq \emptyset$, то $C_a = C_b$.*

Таким образом, теорема 1.3 может быть переформулирована следующим образом. *Если на множестве задано отношение эквивалентности, то это множество разбивается на непустые классы эквивалентности, которые либо попарно не пересекаются, либо совпадают.* Множество Y — это и есть множество классов эквивалентности.

Обязательная задача. Доказать теорему 1.3.

1.4 Предложение. *Равенство векторов является отношением эквивалентности:*

1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}$ *(рефлексивность);*

2) *Если* $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$, *то* $\overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_1N_1}$ *(симметричность);*

3) *Если* $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$, *а* $\overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_3N_3}$, *то* $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_3N_3}$ *(транзитивность).*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность очевидны. Рассмотрим один случай свойства транзитивности. Пусть, ненулевые векторы $\overrightarrow{M_1N_1}$, $\overrightarrow{M_2N_2}$ и $\overrightarrow{M_3N_3}$ лежат на трех различных прямых. Очевидно, эти прямые параллены. Так как $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_2N_2}$, $\overrightarrow{M_2N_2} = \overrightarrow{M_3N_3}$, то четырехугольники $M_1N_1N_2M_2$ и $M_2N_2N_3M_2$ являются параллелограммами. Отсюда следует, что $M_2M_1 = N_2N_1$, $M_2M_3 = N_2N_3$ и $\angle M_1M_2M_3 = \angle N_1N_2N_3$, то есть $\triangle M_1M_2M_3 = \triangle N_1N_2N_3$. Поэтому $\angle M_2M_1M_3 = \angle N_2N_1N_3$ и, следовательно, прямые M_1M_3 и N_1N_3 параллельны. Следовательно, $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_3N_3}$. Все остальные случаи предлагается разобрать самостоятельно. □

Класс равных векторов (класс эквивалентности) называется *свободным вектором*, или просто *вектором.* В дальнейшем слово „свободный“, как правило, опускаем и понимаем под вектором $\overrightarrow{MN}$ как направленный отрезок MN, так и свободный вектор a, определенный вектором $\overrightarrow{MN}$, т.е. класс эквивалентности, состоящий из всех векторов, равных $\overrightarrow{MN}$. Нулевые векторы образуют класс эквивалентности, назывемый *нулевым (свободным) вектором* и обозначаемый $\Theta = \overrightarrow{MM}$ для любой точки M.

1.2 Сложение векторов, умножение вектора на число

Сумма двух векторов a и b определяется по правилу треугольника: приложим вектор a к какой-нибудь точке M. Пусть N — конец этого вектора, т.е. $a = \overrightarrow{MN}$. Затем приложим вектор b к точке N. Пусть $b = \overrightarrow{NP}$. Теперь положим $a + b$ равным свободному вектору, содержащему $\overrightarrow{MP}$ в качестве своего представителя, т.е. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Необходимо доказывать *корректность* этого определения, т.е. независимость результата от выбора точки M. Пусть $\overrightarrow{M_1N_1} = a$ и $\overrightarrow{N_1P_1} = b$. Покажем, что $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M_1P_1}$, причем разберем только один случай, когда $MNPM_1N_1P_1$ — „призма“. Остальные случаи еще проще и оставляются в качестве **обязательной задачи.**

Так как четырехугольники MNN_1M_1 и NPP_1N_1 являются параллелограммами, то NN_1 параллельно MM_1 и $NN_1 = MM_1$, а также NN_1 параллельно PP_1 и $NN_1 = PP_1$. Следовательно, MM_1 параллельно PP_1 и $MM_1 = PP_1$, и значит четырехугольник MPP_1M_1 — также параллелограмм, откуда и следует равенство векторов $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{M_1P_1}$.

Произведение вектора a на число λ определяется следующим образом: если $\overrightarrow{MN} = a$, то полагаем вектор λa равным свободному вектору, содержащему такой вектор MP, что: 1) $\overrightarrow{MP}$ лежит на прямой MN; 2) $|\overrightarrow{MP}| = |\lambda| \cdot |\overrightarrow{MN}|$, и, в частности, $\overrightarrow{MP} = \Theta$, если $\lambda = 0$. 3) $\overrightarrow{MP}$ направлен также, как и вектор $\overrightarrow{MN}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$; Этими условиями вектор $\overrightarrow{MP}$ определен однозначно. Корректность определения операции умножения вектора на число проверяется также, как и для операции сложения векторов.

Справедлива следующая

1.5 Теорема. (О восьми свойствах.)

Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) $a + b = b + a$ *(коммутативность сложения);*
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(ассоциативность сложения);*
3) *существует такой вектор* Θ*, что* $a + \Theta = a$ *для любого вектора* a *(нулевой вектор);*
4) *для каждого вектора* a *существует такой вектор* $(-a)$*, что* $a + (-a) = \Theta$ *(противоположный вектор);*
5) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$ *для любых чисел* λ*,* μ *и любого вектора* a *(ассоциативность умножения на числа);*
6) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ *для любых чисел* λ *и* μ *и любого вектора* a *(дистрибутивность по сложению чисел);*
7) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ *для любого числа* λ *и любых векторов* a *и* b *(дистрибутивность по сложению векторов);*
8) $1 \cdot a = a$ *для любого вектора* a*.*

Доказательство. Свойства 1) и 2) доказываются рассматриванием соответствующих рисунков. Свойства 3) и 8) также очевидны. Если $a = \overrightarrow{MN}$, то в качестве вектора $-a$ можно взять вектор $\overrightarrow{NM}$. Свойства 5) и 6) проверяются перебором различных вариантов знаков и абсолютных значений чисел λ и μ.

Докажем свойство 7). Пусть $a = \overrightarrow{MN}$, $b = \overrightarrow{NP}$. Тогда $a + b = \overrightarrow{MP}$. Отложим на прямой MN вектор $\overrightarrow{MN_1} = \lambda a$ и проведем через точку N_1 прямую, параллельную прямой NP, до пересечения ее с прямой MP в точке P_1 Треугольники MNP и MN_1P_1 подобны, следовательно $\lambda = \dfrac{MN_1}{MN} = \dfrac{MP_1}{MP} = \dfrac{N_1P_1}{NP}$. Отсюда получаем, что $\overrightarrow{N_1P_1} = \lambda b$ и вектор $\overrightarrow{MP_1} = \lambda(a + b)$. Следовательно, $\lambda(a + b) = \overrightarrow{MP_1} = \overrightarrow{MN_1} + \overrightarrow{N_1P_1} = \lambda a + \lambda b$. □

Таким образом из теоремы о восьми свойствах следует, что с векторными суммами можно поступать также, как и с числовыми: произвольно расставлять скобки, переставлять слагаемые, к обеим частям векторного равенства можно прибавлять одинаковые векторы, переносить слагаемое, меняя его знак, из одной части векторного равенства в другую и т.д. Что и называется использованием *векторной алгебры* при решении геометрических задач.

Приведем пример использования *векторной алгебры*, то есть использования свойств 1) — 8).

Задача. *Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ (плоского или пространственного). Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.*

2 Векторы на прямой. Лемма Шаля.

Прямую l с выбранным на ней ненулевым вектором e будем называть *осью* (l, e). Вектор e по определению задает положительное направление оси. Следующее предложение непосредственно следует из определения умножения вектора на число и оставляется в качестве обязательной задачи.

2.1 Предложение. (О двух векторах на оси.) *На оси (l, e) каждый вектор a может быть однозначно записан в виде $a = \alpha e$.*

Число α, для которого $a = \alpha e$, называется *алгебраическим значением* вектора a на векторе e. Обозначение: $\alpha = \text{аз}_e(a)$. Итак, $a = \text{аз}_e(a)e$ по определению алгебраического значения вектора a на векторе e!

Если произведение двух чисел равно нулю, то по крайней мере одно из чисел является нулем, то есть в множестве действительных чисел отсутствуют делители нуля.

Из определения операции умножения вектора на число следует

2.2 Лемма. (Об отсутствии делителей нуля.) *Если $\alpha a = \Theta$, то или $\alpha = 0$ или $a = \Theta$.*

2.3 Предложение. (О линейности алгебраического значения.) *Алгебраическое значение обладает следующими свойствами:*
1) $\text{аз}_e(\lambda a) = \lambda \text{аз}_e(a)$;
2) $\text{аз}_e(a + b) = \text{аз}_e(a) + \text{аз}_e(b)$.

Доказательство. $(\text{аз}_e(\lambda a))e = \lambda a = \lambda(\text{аз}_e(a)e) = (\lambda \text{аз}_e(a))e$, откуда помощью леммы об отсутствии делителей нуля получаем равенство 1). Аналогично, $\text{аз}_e(a + b)e = a + b = \text{аз}_e(a)e + \text{аз}_e(b)e = (\text{аз}_e(a) + \text{аз}_e(b))e$, откуда с помощью леммы об отсутствии делителей нуля получаем равенство 2). □

Вторая часть предложения 2.3 может быть сформулирована следующим образом.

2.4 Лемма Шаля. *При любом расположении точек M, N и P на оси имеет место равенство*

$$\text{аз}_e(\overrightarrow{MN}) + \text{аз}_e(\overrightarrow{NP}) = \text{аз}_e(\overrightarrow{MP}).$$

Будем называть леммой Шаля и предложение 2.3.

3 Линейная зависимость векторов. Геометрический смысл линейной зависимости.

Ассоциативность сложения векторов позволяет говорить о сумме трех векторов $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$. По индукции может быть определена сумма любого КОНЕЧНОГО числа векторов $a_1 + \cdots + a_n$. При этом в силу коммутативности сложения можно произвольно менять порядок слагаемых. Выражение $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $a_1 \dots a_n$ с коэффициентами $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, то есть линейная комбинация имеет вид $0 \cdot a_1 + \cdots + 0 \cdot a_n$. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*. Если вектор a равен линейной комбинации векторов $a_1, \dots, a_n$, то говорят, что вектор a *линейно выражается* через векторы $a_1, \dots, a_n$.

3.1 Определение. Система векторов $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Иными словами, система векторов $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю, такие, что $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = \Theta$.

Система векторов $\mathcal{A}$ называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой.

Иными словами, система векторов $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ линейно независима, если из того, что $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = \Theta$ следует, что все числа λ_i равны нулю.

Система векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ линейно независима, если любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не равна нулю.

Система векторов $\{a_1, \dots a_{,n}\}$ линейно независима, если ТОЛЬКО тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю.

Линейная зависимость и независимость — это свойства систем (множеств) векторов, однако, допуская некоторую вольность речи, мы будем говорить „линейно зависимые векторы“ и „линейно независимые векторы“ вместо „линейно зависимая система векторов“ и „линейно независимая система векторов“.

3.2 Предложение. *Система векторов, состоящая из одного вектора a, линейно зависима тогда и только тогда, когда $a = \Theta$.*

Доказательство. Из равенства $1 \cdot \Theta = \Theta$ вытекает линейная зависимость системы, состоящей из одного нулевого вектора. Предположим теперь, что $\lambda a = \Theta$. Если $\lambda \neq 0$, то по лемме об отсутствии делителей нуля получаем $a = \Theta$. □

3.3 Предложение. *Если подсистема $\mathcal{A}$ некоторой системы $\mathcal{B}$ векторов линейно зависима, то и вся система $\mathcal{B}$ линейно зависима.*

Доказательство. Предположим, что подсистема $a_1 \dots a_k$ системы векторов $a_1 \dots a_n$ линейно зависима. Возьмем нетривиальную линейную комбинацию

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \Theta.$$

Прибавим к обеим частям этого равенства нулевой вектор

$$0 \cdot a_{k+1} + \dots + 0 \cdot a_n = \Theta.$$

Получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $a_1 \dots a_n$, равную нулевому вектору. Значит, система векторон $a_1 \dots a_n$ линейно зависима. □

3.4 Следствие. *Всякая подсистема $\mathcal{B}$ линейно независимой системы $\mathcal{A}$ векторов линейно независима.*

Из предложений 3.2 и 3.3 вытекает

3.5 Предложение. *Всякая система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.*

3.6 Предложение. *Система линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-нибудь вектор этой системы линейно выражается через остальные.*

Доказательство. Пусть система содержит не менее двух векторов. Предположим, что вектор a_n линейно выражается через векторы $a_1 \dots a_{n-1}$:

$$a_n = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1}.$$

Разумеется, этого всегда можно добиться, перенумеровав векторы так, чтобы линейно выражающийся вектор имел номер n. Тогда

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1} - a_n = \Theta,$$

или, что тоже самое,

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1} + (-1) \cdot a_n = \Theta.$$

Таким образом, нетривиальная линейная комбинация векторов $a_1 \dots a_n$ равна нулевому вектору, т.е. эти векторы линейно зависимы. Наоборот, пусть

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-1} a_{n-1} + \lambda_n a_n = \Theta,$$

где, например, $\lambda_n \neq 0$. Тогда

$$a_n = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right) \cdot a_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) \cdot a_{n-1}.$$

Если линейно зависимая система состоит из одного вектора, то этот вектор нулевой, а нулевой вектор является линейной комбинацией пустого множества векторов ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ, чтобы избежать частого рассмотрения в дальнейшем частных случаев. "Если нет индексао, по которым происходит суммирование, то вполне естественно считать, что значением такой пустой суммы считается Θ"(„Это невозможно понять, это нужно запомнить.“) Таким образом и в этом случае предложение остается верным. □

Задача. *Доказать, что пустая система векторов линейно независима.*

Доказательство. Система векторов $a_1 \dots a_n$ линейно зависима, если существует множество чисел λ_i, не все из которых равны нулю, такое, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \Theta$. В частности, линейно зависимая система векторов является непустым множеством. Поэтому пустая система векторов является линейно независимой. По-другому: если нет никаких векторов, то невозможно выбрать какие-нибудь из них и сопоставить им числа так, чтобы соответствующая сумма стала равной нулю. Простейший способ освоиться с утверждением, что „$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \Theta$ влечет, что все коэффициенты равны 0“ в том случае, когда коэффициентов просто нет, состоит в следующей переформулировке: „если $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = \Theta$, то нет ни одного коэффициента, который бы не равнялся нулю“.

3.1 Геометрический смысл линейной зависимости

Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой.

3.7 Предложение. *Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Можно считать, что два вектора a и e находятся на одной прямой. Выберем один из этих векторов, например, e, тем самым превратим прямую в ось, и как мы уже знаем по предложению 2.1 о векторах на оси, $a = \alpha e$, что и означает линейную зависимость. □

3.8 Предложение. *На плоскости существуют два линейно независимых вектора.*

В самом деле, возьмем в плоскости три точки O, M, N, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ неколлинеарны, и, следовательно, линейно независимы.

Ненулевые векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

3.9 Предложение. *Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть векторы a, b и c компланарны. Можно считать, что они лежат в одной плоскости. Если среди них имеется коллинеарная пара, то они линейно зависимы. Предположим, что векторы a, b и c попарно неколлинеарны. Тогда, отложив их от одной точки O: $a = \overrightarrow{OM}, b = \overrightarrow{ON}, c = \overrightarrow{OP}$, получим три различные прямые OM, ON и OP. Проведем через точку P прямую l_1, параллельную прямой OM Прямая ON, пересекая прямую OM, будет пересекать и параллельную ей прямую l_1. Пусть N_1 — точка пересечения прямых ON и l_1. Аналогично прямая l_2, проведенная через точку P параллельно прямой ON, будет пересекать прямую OM в некоторой точке M_1. Четырехугольник OM_1PN_1 — параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{ON_1} = \overrightarrow{M_1P}$. Поэтому, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1P} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{ON_1}$. Поскольку векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ — ненулевые, и пары векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON_1}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарны, то существуют такие числа λ и μ, что $\overrightarrow{OM_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON_1} = \mu \cdot \overrightarrow{ON}$. Значит, $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM} + \mu \cdot \overrightarrow{ON}$ или $c = \lambda a + \mu b$, т.е. векторы a, b и c линейно зависимы.

Пусть теперь векторы a, b и c линейно зависимы. Тогда один из них, например c, линейно выражается через остальные: $c = \lambda a + \mu b$. Отложив векторы a, b и c от одной точки O: $a = \overrightarrow{OM}$, $b = \overrightarrow{ON}$, $c = \overrightarrow{OP}$, видим, что вектор $\overrightarrow{OP}$ является суммой векторов, лежащих на прямых OM и ON. Значит, вектор OP лежит в плоскости, проходящей через эти прямые, и векторы a, b и c компланарны. □

Ясно, что любая система векторов в плоскости, состоящая более чем из трех векторов, также линейно зависима.

3.10 Предложение. *В пространстве существуют три линейно независимых вектора.*

В качестве таких векторов можно взять любую тройку векторов $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$, где точки O, M, N, P не лежат в одной плоскости.

3.11 Предложение. *Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.*

Доказательство. Если какие-либо три вектора компланарны, то они линейно зависимы по предложению 3.9, и следовательно, линейно зависимы все четыре вектора. Если же таких трех векторов среди векторов a, b, c, d, нет, то пары векторов a и b, c и d не являются коллинеарными, и, следовательно, определяют с точностью до параллельного переноса две плоскости, которые не параллельны (иначе все четыре вектора были бы компланарны). Тогда вектор f, лежащий на прямой, по которой пересекаются эти плоскости, раскладывается, с одной стороны, в линейную комбинацию векторов a и b, а с другой стороны — в линейную комбинацию векторов c и d: $\alpha a + \beta b = f = \gamma c + \delta d$. Если при этом хотя бы один из коэффициентов, скажем α, равен 0, то векторы b, c и d компланарны, что не так. Таким образом, $\alpha a + \beta b - \gamma c - \delta d = 0$ — нетривиальная линейная комбинация. Предложение 3.11 доказано. □

Ясно, что любая система векторов в пространстве, состоящая более чем из четырех векторов, также линейно зависима.

Множества свободных векторов на прямой, на плоскости, в пространстве с операциями сложения векторов и умножения вектора на число будем обозначать через R^1, R^2 и R^3 соответственно. Тогда результаты этого параграфа можно суммировать следующим образом:

3.12 Теорема. *Для $n = 1, 2, 3$ в R^n существует система из n линейно независимых векторов, в то время как любая система, содержащая более n векторов, линейно зависима.*

4 Базисы и координаты.

4.1 Определение. Множество V называется *векторным (или линейным) пространством*, а его элементы называются векторами, если на V заданы две операции: „сложения“ векторов и „умножения“ вектора на число, причем эти операции удовлетворяют восьми условиям (аксиомам!!), перечисленным в теореме о восьми свойствах.
Примеры линейных пространств: R^1, R^2, R^3, пространство матриц, и, в частности, пространство строк R_n, пространство столбцов, пространство многочленов, пространство непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций с естественными операциями сложения и умножения на число.

Задача. *Доказать, что линейное пространство не может быть пустым множеством.*

Задача. *Доказать, что в линейном пространстве* $0 \cdot a = \Theta$ *для любого вектора* a.

4.2 Лемма. (Об отсутствии делителей нуля.) *В линейном пространстве если* $\alpha a = \Theta$, *то или* $\alpha = 0$ *или* $a = \Theta$.

Доказательство. Если $\alpha \neq 0$, то $a = 1 \cdot a = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) \cdot a = \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha a) = \frac{1}{\alpha} \cdot \Theta = \Theta$. Поскольку $\frac{1}{\alpha} \cdot \Theta = \frac{1}{\alpha} \cdot (\Theta + \Theta) = 2\frac{1}{\alpha} \cdot \Theta$, откуда $\frac{1}{\alpha} \cdot \Theta = \Theta$. □

4.3 Определение. Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ — некоторая система векторов пространства V. Эта система называется *полной*, если любой вектор пространства V линейно выражается через векторы $a_1, \ldots, a_n$.

4.4 Определение. Если в линейном пространстве есть КОНЕЧНАЯ полная система векторов, то это линейное пространство называется *конечномерным.*

Для того, чтобы хорошо усвоить понятия линейной независимости, полноты, необходимо прорешать следующие задачи, первая из которых является уточнением предложения 3.6.

Задача. *Доказать, что система векторов* $\{b_1, \ldots, b_m\}$ *линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-нибудь вектор этой системы линейно выражается через предыдущие, то есть через векторы с меньшими номерами.*

Задача.(Лемма Халмоша.) *В полной системе число векторов не меньше, чем в линейно независимой, то есть если система* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *полна, а система* $\{b_1, \ldots, b_m\}$ *линейно независима, то* $n \geq m$. *Доказать.*

4.5 Определение. Система векторов $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ называется *базисом* пространства V, если она линейно независима и полна.

Задача. *Доказать, что в конечномерном пространстве есть базис.*

Задача. *Доказать, что в конечномерном пространстве все базисы содержат одинаковое количество векторов.*

Переформулировкой теоремы 3.12 является

4.6 Предложение. *Любой базис пространства* R^n, $n = 1, 2, 3$, *состоит из* n *векторов.*

Задача. *Может ли линейное пространство состоять из одного вектора? Есть ли в таком пространстве базис?*

Переходим к определению координат вектора. Итак, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V и $a \in V$. Так как базис является полной системой, то

$$a = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Числа $x_1, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора a в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Равенство $a = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ будем записывать и так:

$$a = \{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Докажем, что координаты $x_1, \ldots, x_n$ определены однозначно и что за единственность координат „отвечает“ свойство линейной независимости.

Возьмем два выражения

$$a = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

$$a = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n.$$

Тогда, вычитая из одного равенства другое и приводя подобные члены, получаем

$$\Theta = (x_1 - y_1) \cdot e_1 + \cdots + (x_n - y_n) \cdot e_n.$$

Из линейной независимости векторов $e_1 \dots e_n$ следует, что

$$x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0, \quad \text{т.е.} \quad x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n.$$

Таким образом, существование координат вектора следует из свойства полноты базиса, а единственность координат гарантируется линейной независимостью базиса.

Из свойств операций над векторами следует

4.7 Предложение. *Координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат, а координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующих координат на это число, т.е.*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_2 \end{pmatrix}; \qquad t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ . \\ tx_n \end{pmatrix}.$$

5 Скалярное произведение и его свойства. Неравенство Коши-Буняковского.

5.1 Ортогональные проекции

Пусть даны два ненулевых вектора a и b. Отложим их от одной точки O: $a = \overrightarrow{OM}$, $b = \overrightarrow{ON}$. В плоскости, проходящей через точки O,M и N, опустим из точки N перпендикуляр на прямую OM, и обозначим основание этого перпендикуляра как точку N_1. Обозначим через $\text{пр}_a b$ вектор $\overrightarrow{ON_1}$, который будем называть ортогональной проекцией вектора b на вектор a. (рис. 1).

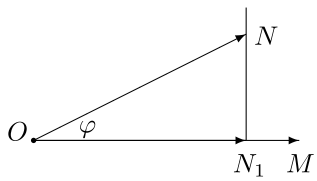

Рис. 1:

5.1 Лемма. (О линейности проектирования.) *Для любых векторов $a \neq \Theta$, b, c и любого числа λ справедливы равенства*

1) $\text{пр}_a(\lambda b) = \lambda \text{пр}_a(b)$;

2) $\text{пр}_a(b + c) = \text{пр}_a(b) + \text{пр}_a(c)$.

Доказательство. Доказательство пункта 2) сводится к рассматриванию двух вариантов следующей картинки (рис. 2) Доказательство пункта 1) аналогично. □

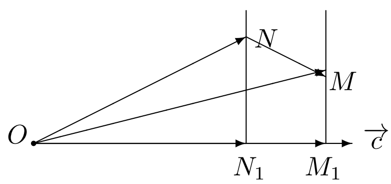

Рис. 2:

Пусть теперь вектор e является вектором единичной длины, имеющим то же направление, что и вектор a. Тогда справедливо следствие 5.2 из леммы 5.1.

5.2 Следствие. *Для любых векторов $a \neq \Theta$, b, c и любого числа λ выполняются равенства*

1) $\text{аз}_e(\text{пр}_a(\lambda b)) = \lambda \text{аз}_e(\text{пр}_a(b))$;

2) $\text{аз}_e(\text{пр}_a(b + c)) = \text{аз}_e(\text{пр}_a(b)) + \text{аз}_e(\text{пр}_a(c))$.

Доказательство. Следствие получается с помощью леммы Шаля. □

5.2 Угол между векторами

Пусть в пространстве (или на плоскости) даны два ненулевых вектора a и b. Отложим их от одной точки O: $a = \overrightarrow{OM}$, $b = \overrightarrow{ON}$. В плоскости, проходящей через точки O,M и N, определены два угла между лучами OM и ON. Эти углы принимают неотрицательные значения α и $2\pi - \alpha$. Если эти углы не равны, то наименьший из этих углов назовем *углом* между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ и обозначим через φ. Если углы α и $2\pi - \alpha$ равны, то угол между векторами равен $\pi = \varphi$. Разумеется, не имеет значения, в каком порядке рассматривать векторы. Нетрудно заметить, что угол между векторами находится в отрезке $[0, \pi]$.

Равенство $\overrightarrow{ON_1} = \lambda e$, где e — единичный вектор оси, на которой лежит вектор a и имеющий то же направление, что и вектор a, означает, что $\lambda = \text{аз}(\text{пр}_a b)$. Знак λ, очевидно, совпадает со знаком $\cos\varphi$. Во всех случаях (в том числе и в случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$)получаем формулу

$$\text{аз}(\text{пр}_a(b)) = |b|\cos\varphi \qquad \text{(значок единичного вектора} \quad e \quad \text{пропускаем!)}$$

5.3 Определение скалярного произведения

5.3 Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов a и b называется число (a, b), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos\varphi$. Далее, $(a, \Theta) = (\Theta, a) = 0$ для любого вектора a по определению.

Из формулы $|b|\cos\varphi = \text{аз}(\text{пр}_a(b))$ следует

5.4 Предложение. $(a, b) = |a| \cdot \textit{аз}(\text{пр}_a(b)) = |b| \cdot \textit{аз}(\text{пр}_b(a))$.

5.4 Свойства скалярного произведения

Справедлива следующая

5.5 Теорема. (О четырех свойствах скалярного произведения.) *Для любых векторов a, b и c и любого числа λ*

1) $(a, b) = (b, a)$;
2) $(a, \lambda b) = \lambda(a, b)$;
3) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$;
4) *если* $a \neq \Theta$, *то* $(a, a) > 0$.

Доказательство. Свойства 1) и 4) очевидны. Проверим свойство 3) с помощью предложения 5.4. В самом деле, $(a, b + c) = |a| \cdot \text{аз}(\text{пр}_a(b + c)) = |a| \cdot (\text{аз}(\text{пр}_a(b)) + \text{аз}(\text{пр}_a(c))) = |a| \cdot (\text{аз}(\text{пр}_a(b)) + |a| \cdot (\text{аз}(\text{пр}_a(c)) = (a, b) + (a, c)$. Аналогично проверяется свойство 2). □

Пример использования свойств скалярного произведения в задачах.
Задача*. *Доказать, что при любом расположении точек A, B,C,D на плоскости или в пространстве имеет место равенство* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

Доказательство. $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \Theta) = 0$ □

В качестве следствия получаем, что если в тетраэдре (тетраэдр — это треугольная пирамида!) два ребра перпендикулярны к противоположным ребрам, то перпендикулярны и противоположные ребра третьей пары.
Задача*. *Доказать, что для тетраэдра следующие условия эквивалентны:*

1) Все скрещивающиеся ребра перпендикулярны;
2) Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке;
3) Все высоты тетраэдра проходят через точку пересечения высот основания;
4) Одна из высот тетраэдра проходит через точку пересечения высот основания;
5) Суммы квадратов длин скрещивающихся ребер равны.

Тетраэдры, удовлетворящий свойствам 1) — 5), называются *ортоцентрическими.*

5.5 Неравенство Коши-Буняковского

5.6 Теорема (Неравенство Коши-Буняковского). *Для любых векторов a и b справедливо неравенство*

$$(a,b)^2 \leqslant (a,a)\cdot(b,b).$$

При этом равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы a и b коллинеарны.

Доказательство. Пусть φ — угол между векторами a и b. Тогда $\varphi \in [0;\pi]$. Из определения скалярного произведения следует, что для ненулевых векторов

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}.$$

Поскольку $|\cos\varphi| \leqslant 1$, , получаем неравенство $|(a,b)| \leqslant |a|\cdot|b|$, что равносильно $(a,b)^2 \leqslant (a,a)\cdot(b,b)$. При этом $|\cos\varphi| = 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$, то есть векторы a и b коллинеарны, и неравенство превращается в равенство. Теорема доказана. □

Необязательная задача.* *Вывести неравенство Коши-Буняковского из четырех свойств скалярного произведения, не обращаясь непосредственно к определению скалярного произведения.*

6 Скалярное произведение в координатах

Из свойств скалярного произведения 1), 2) и 3) вытекает, что линейные комбинации векторов можно скалярно перемножать так, как мы привыкли перемножать многочлены.

Возьмем в пространстве R^2 базис e_1, e_2. Разложим векторы a и b по этому базису:

$$a = x_1e_1 + x_2e_2, \quad b = y_1e_1 + y_2e_2$$

Перемножим эти выражения скалярно:

$$(a,b) = x_1y_1(e_1,e_1) + x_1y_2(e_1,e_2) + x_2y_1(e_2,e_1) + x_2y_2(e_2,e_2).$$

Положим $(e_i, e_j) = g_{ij}$ и назовем числа g_{ij} *метрическими коэффициентами базиса.* Тогда, учитывая, что $g_{ij} = g_{ji}$, получаем

$$(a,b) = x_1y_1g_{11} + (x_1y_2 + x_2y_1)g_{12} + x_2y_2g_{22}.$$

Или, в более компактной форме

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_iy_jg_{ij}.$$

Аналогично в пространстве R^3 взяв базис e_1, e_2, e_3, для векторов

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \quad b = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$$

получаем

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_iy_jg_{ij}.$$

Равенства

$$|a| = \sqrt{(a,a)}, \quad \cos\varphi = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|}$$

позволяют по координатам векторов и метрическим коэффициентам базиса находить длины векторов и углы между ними.

Базис $e_1, \ldots, e_n$ (на прямой, на плоскости или в пространстве) называется *ортонормированным*, если $g_{ij} = 1$ при $i = j$ и $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Длины векторов ортонормированного базиса равны единице:

$$|e_i| = \sqrt{g_{ii}} = 1,$$

а равенство $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$ означает, что различные векторы ортонормированного базиса попарно перпендикулярны. Справедлива

6.1 Теорема. *Базис $e_1, \dots, e_n$ является ортонормированным тогда и только тогда, когда скалярное произведение в этом базисе задается формулой*

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Обязательная задача. Доказать теорему 6.1.

В частности, получаем для векторов в пространстве с ортонормированным базисом

$$(a, b) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

$$|a| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$\cos\phi = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Отбрасывая всюду третье слагаемое, получим соответствующие формулы для векторов плоскости.

1 Системы координат

1.1 Аффинные координаты

1.1 Определение. *Репером или системой координат* (на прямой, на плоскости, в пространстве) называется пара $Oe_1, \dots, e_n$, где O— точка, а $e_1, \dots, e_n$ — базис.

1.2 Определение. *Радиус-вектором* (относительно O) точки M называется вектор $\overrightarrow{OM}$, который обозначается через r_M.

1.3 Определение. Если $r_M = \overrightarrow{OM} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$, то числа $x_1, \dots, x_n$ называются *(аффинными) координатами* точки M в репере $Oe_1, \dots, e_n$.

Будем говорить и о координатах вектора в репере $Oe_1, \dots, e_n$, подразумевая под этим его координаты в базисе $e_1, \dots, e_n$. Таким образом, координаты точки M в репере $Oe_1, \dots, e_n$ — это координаты ее радиус-вектора в этом репере.

Систему координат, определяемую репером $Oe_1 \dots e_n$, также обозначают символом $Ox_1 \dots x_n$.

Прямая с заданным на ней репером Oe_1 называется *осью координат* Ox с началом в точке O. Задание системы координат на плоскости эквивалентно заданию двух осей координат Ox и Oy с общим началом. Эти оси называются соответственно ось абсцисс и ось ординат. Задание системы координат в пространстве эквивалентно заданию трех осей координат Ox, Oy и Oz с общим началом. Эти оси называются соответственно осью абсцисс, осью ординат и осью аппликат. Систему координат на плоскости часто обозначают символом Oxy, а в пространстве — $Oxyz$.

1.4 Предложение. *Для любых точек* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *выполняется* $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

1.2 Прямоугольные координаты

Система координат $Ox_1 \dots x_n$ называется *прямоугольной*, если она определяется ортонормированным репером $Oe_1, \dots, e_n$, т.е. репером, в котором базис $e_1, \dots, e_n$ является ортонормированным. Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат $Oxyz$. Возьмем две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между ними равно длине соединяющего их вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.$$

Поэтому,

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

В частности, уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

где $R > 0$, описывает геометрическое место всех точек $M(x, y, z)$, находящихся на расстоянии R от данной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, т.е. сферу радиуса R с центром в точке M_0.

На плоскости с прямоугольной системой координат Oxy расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ определяется равенством

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Вопрос.Уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ описывает окружность радиуса R с центром в точке $M_0(0, 0)$. Почему?

1.3 Полярные координаты на плоскости

Зафиксируем на плоскости точку O и назовем ее *полюсом*. Луч с началом в точке O назовем *полярной осью*. Выберем также положительное направление вращения в плоскости. Как правило, положительное направление вращения задается против часовой стрелки. Теперь для каждой точки $M \neq O$ плоскости можно определить ее полярные координаты, а именно: 1) расстояние r от точки M до начала O; 2) угол наклона φ радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M к полярной оси, $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$. У точки O только одна координата $r = 0$.

Если на плоскости задана полярная система координат (r, φ), то по ней естественно определяется и прямоугольная система координат (рис. 1).

Начало этой прямоугольной системы координат совпадает с полюсом полярной системы координат, положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью, а направление вращения от положительной полуоси абсцисс к положительной полуоси ординат является положительным. Полученную таким образом прямоугольную систему координат Oxy назовем *системой, определенной полярной системой координат* (r, φ).

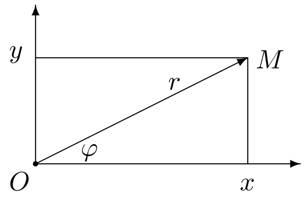

Рис. 1:

Наоборот, если дана прямоугольная система координат Oxy, то однозначно определяем полярную систему координат (r, φ), выбирая в качестве полюса точку O, а в качестве полярной оси положительную полуось абсцисс. Направление вращения от положитетельной полуоси абсцисс к положительной полуоси ординат объявляется положительным.

Имеют место очевидные формулы, связывающие прямоугольные координаты (x, y) произвольной точки M с ее полярными координатами (r, φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Задача. *Выразить угол φ через координаты x и y.*

1.4 Сферические координаты в пространстве

В пространстве имеется естественное обобщение полярных координат на плоскости: сферические координаты.

Выберем в пространстве (рис. 2):

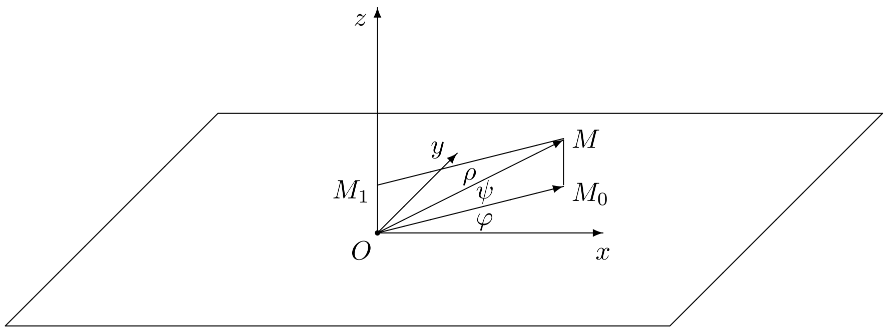

Рис. 2:

1) Плоскость (называемую далее *экваториальной*) с выбранной в ней полярной системой координат: полюс O, полярная ось Oe_1, положительное направление вращения.

2) Выберем на прямой, проходящей через точку O и перпендикулярной к экваториальной плоскости, одно из двух направлений путем задания вектора e_3 единичной длины, т.е. выберем ось Oe_3, которая называется *зенитной* осью.

Экваториальная плоскость разбивает пространство на два полупространства; то из них, которое содержит вектор e_3, считаем положительным. Обозначим через M_0 ортогональную проекцию точки M на экваториальную плоскость, а через M_1 — ортогональную проекцию точки M на зенитную ось.

Теперь для каждой точки M пространства (не лежащей на прямой Oe_3) определяются ее *сферические* координаты (ρ, φ, ψ) следующим образом:

а) *полярный радиус* ρ точки M, т.е. расстояние от точки O до точки M;

б) *долгота* φ точки M — это полярный угол ортогональной проекции M_0 точки M на экваториальную плоскость относительно данной в этой плоскости полярной системы координат, $\varphi \in [0; 2\pi)$;

в) *широта* ψ точки M — это угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и его проекцией $\overrightarrow{OM_0}$ на экваториальную плоскость, считаемый положительным $\psi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ для точек M положительного полупространства и отрицательным $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ для точек отрицательного полупространства.

Заметим, что для точек зенитной оси широта равна $\pm\dfrac{\pi}{2}$, а долгота не определена. Для точки O $\rho = 0$, а долгота и широта не определены.

Сферическая система координат в пространстве определяет прямоугольную систему координат, состоящую из прямоугольной системы Oxy, порожденной в экваториальной плоскости заданной в ней полярной системой, и оси Oz, порожденной осью Oe_3. Очевидны следующие соотношения, связывающие сферические координаты ρ, φ, ψ и прямоугольные координаты x, y, z в пространстве:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\psi\cos\varphi, \\ y = \rho\cos\psi\sin\varphi, \\ z = \rho\sin\psi. \end{cases}$$

2 Деление отрезка в данном отношении

2.1 Определение. Точка $M \neq M_1$ делит невырожденный отрезок M_0M_1 в отношении λ, если $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_1}$.

Пусть r_0, r_1 и r — радиус-векторы точек M_0, M_1 и M соответственно. Тогда

$$r - r_0 = \lambda(r_1 - r), \quad \text{или} \quad r = \frac{r_0 + \lambda r_1}{1 + \lambda}.$$

Это уравнение при всяком $\lambda \neq -1$ определяет радиус-вектор точки M на прямой M_0M_1. Расписывая равенство по координатам, получаем

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_0 + \lambda z_1}{1 + \lambda}.$$

При $\lambda = 1$ точка M является серединой отрезка M_0M_1 и формулы имеют вид

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2}, \quad y = \frac{y_0 + y_1}{2}, \quad z = \frac{z_0 + z_1}{2}.$$

Задача. *Построить график зависимости λ от точки M в системе координат, изображенной на рис. 3.*

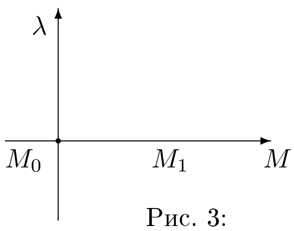

Рис. 3:

Задача. *Найти центр тяжести проволочного треугольника.*

Весьма часто при решении конкретных задач более удобным является видоизменение классического определения деления отрезка в данном отношении, а именно $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_0M_1}$. Например,

Задача. *Доказать, что четырехугольник с вершинами* $(1, 2)$, $(-3, 1)$, $(-1, -5)$, $(3, -1)$ *выпуклый. Найти точку пересечения диагоналей. Система координат аффинная.*

Матрицы и определители*.

Матрицы и действия с ними.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, из которых состоит матрица, называются ***элементами*** матрицы и нумеруются двумя индексами, первый из которых означает номер строки, в которой стоит элемент, а второй — номер столбца. Матрицами размера $1 \times n$ являются строки $(a_1, \ldots, a_n)$, а матрицами размера $n \times 1$ являются столбцы $\begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$. Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

одинакового размера $m \times n$ складываются поэлементно:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & . & a_{1n} + b_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & . & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением числа λ на матрицу A называется матрица

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & . & \lambda a_{1n} \\ . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & . & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы размера $m \times n$ можно умножать на матрицы размера $n \times p$. Произведением строки $A = (a_1, \ldots, a_n)$ на столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ называется матрица $AB = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ размера 1×1, т.е. число. В общем случае произведением матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1p} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & . & b_{np} \end{pmatrix}$ называется матрица C размера $m \times p$, у которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен произведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Умножение матриц *ассоциативно*, т.е. если A, B, C — матрицы, имеющие соответственно размеры $m \times n$, $n \times p$, $p \times q$, то $(AB)C = A(BC)$. Операция умножения *дистрибутивна* по отношению к сложению, то есть

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC,$$

где A, B, C — любые матрицы, для которых левые и правые части этих равенств имеют смысл. Но умножение матриц не является *коммутативным*, то есть, вообще говоря, $AB \neq BA$.
Для матрицы A размера $m \times n$ определена матрица A^T размера $n \times m$, называемая матрицей, *транспонированной* к матрице A. Она определяется равенством $a^T_{ij} = a_{ji}$. Операции транспонирования и умножения матриц связаны следующим образом:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

При $m = n$ матрица называется *квадратной*. Квадратные матрицы размера $n \times n$ называются *матрицами порядка* n. Среди квадратных матриц имеется *единичная* матрица E, которая обладает тем свойством, что для любой квадратной матрицы A того же порядка верны равенства $AE = EA = A$.
Задачи. 1) Умножить столбец на строку. 2) Привести примеры матриц A и B, таких что $AB \neq BA$. 3) Представить скалярное произведение $(a, b) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i y_j g_{ij}$ в виде произведения трех матриц.

Определители и их свойства.

Каждой квадратной матрице A сопоставляется число $|A|$, называемое ее *определителем.* Определитель $|A|$ может быть найден с помощью следующего свойства 1.

1. Пусть $i(j)$ —номер строки (столбца) матрицы A, где $i, j = 1, \ldots, n$. Тогда определитель этой матрицы равен сумме произведений элементов, стоящих в i-ой строке (j-ом столбце), умноженных на их алгебраические дополнения, т.е.
$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \qquad \text{— разложение определителя по } i\text{-ой строке, и}$$
$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \qquad \text{— разложение определителя по } j\text{-ому столбцу.}$$
Алгебраическим дополнением к элементу a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, где M_{ij} — минор элемента a_{ij}. Если a_{ij} — элемент матрицы A порядка n, то *минором* M_{ij} *элемента* a_{ij} называется определитель матрицы порядка $n-1$, которая получается из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, в которых стоит этот элемент a_{ij}. При этом миноры порядка 1 — это просто числа. В частности, для матрицы порядка 2 получается
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Следующие свойства определителей позволяют упростить вычисление определителей с помощью *элементарных преобразований*, которые и определяются этими свойствами.

2. При транспонировании матрицы определитель не меняется, т.е. $|A^T| = |A|$.
3. Если каждый элемент какого-либо столбца (строки) матрицы представляется в виде суммы двух слагаемых, то определитель матрицы равен сумме определителей двух матриц, в первой из которых в соответствующем столбце (строке) стоят первые слагаемые, а во второй — вторые.
4. При умножении всех элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на какое-нибудь число λ на это же число умножается и определитель.
5. Если какая-нибудь строка или столбец матрицы состоит из нулей, то определитель матрицы равен нулю.
6. При перестановке двух каких-либо строк (столбцов) матрицы определитель меняет знак.
7. Если в матрице имеются две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то определитель равен нулю.
8. Если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на какое-нибудь число λ, то определитель не изменится.

Лемма о „фальшивом“ разложении. *Сумма произведений элементов строки (столбца) на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки (столбца) равна нулю, т.е.*
$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0,$$
$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0.$$
для любых $i, j, k = 1, \ldots, n, i \neq k, j \neq k$.

Теорема. Определитель произведения двух матриц равен произведению их определителей: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Обратная матрица.

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной.* Матрица A не вырождена тогда и только тогда, когда для неё существует матрица, называемая *обратной матрицей* и обозначаемая символом A^{-1}, такая что
$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Задачи. Докажите, что
1) *обратная матрица единственна* ; 2) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; 3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; 5) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(A_{ij})^T$, *где* (A_{ij}) — *матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения к элементам матрицы* A.

Теорема о ранге матрицы.

Рангом $r(A)$ *матрицы* A называется наибольшее число линейно независимых столбцов матрицы A. *Минором порядка* k матрицы A называется определитель составленный из элементов, которые находятся на пересечении произвольно выбранных k столбцов и k строк матрицы A. Следствием леммы о „фальшивом" разложении является

Теорема о ранге матрицы. *Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличных от нуля миноров.*

Следствие. *Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк матрицы.*

Системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... & +a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... & +a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{или в матричном виде} \quad Ax = b.$$

Система может быть *несовместной* или *совместной*. Совместная система может быть *определенной* или *неопределенной*. Если b — нулевой столбец, то система называется системой линейных однородных уравнений (С.Л.О.У.). С.Л.О.У. всегда совместна.

Расширенная матрица $\overline{A}$ получается прибавлением к матрице A столбца b.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейный уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы.*

Все решения С.Л.О.У. образуют подпространство пространства столбцов или, что то же самое, подпространство пространства строк R_n. *Фундаментальной системой (или набором) решений* С.Л.О.У. называется полная линейно независимая система решений С.Л.О.У., то есть такая линейно независимая система решений, линейные комбинации элементов которой дают все решения С.Л.О.У.Число решений в фундаментальной системе решений равно $n - r(A)$. Любое решение системы линейных уравнений может быть получено прибавлением к частному решению системы некоторого решения соответствующей С.Л.О.У.

1 Переход от одного базиса к другому. Преобразование координат векторов.

1.1 Матрица перехода

1.1 Теорема. *Любые два базиса пространства R^n, $n = 1, 2, 3$ имеют одинаковое количество векторов.*

Теорема 1.1 справедлива и в общем случае конечномерного пространства. (Пространство называется конечномерным, если оно содержит конечную полную систему.) В случае R^n, $n = 1, 2, 3$, эта теорема доказана ранее.

Мы будем использовать матричную запись совершенно свободно. Например, отдельные элементы матрицы могут оказаться и векторами.

Пусть на плоскости R^2 даны два базиса e_1, e_2 (старый) и e'_1, e'_2 (новый). Тогда старый базис выражается через новый с помощью следующего матричного равенства:

$$(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

В самом деле, здесь записано только то, что каждый вектор нового базиса выражается в виде линейной комбинации векторов старого базиса:

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2, \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases}.$$

И это действительно так, поскольку базис является полной системой векторов. Матрица $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса e_1, e_2 к базису e'_1, e'_2.

Геометрический смысл столбцов матрицы перехода: столбцами матрицы являются координаты векторов нового базиса e'_1, e'_2 в старом базисе. Заметим, что из единственности разложения вектора по векторам базиса вытекает единственность матрицы C перехода от одного базиса к другому.

В общем случае, пусть в пространстве R^n, $n = 1, 2, 3$, даны два базиса $e_1, \ldots, e_n$ (старый) и $e'_1, \ldots, e'_n$ (новый). Выразим каждый вектор нового базиса в виде линейной комбинации векторов старого базиса. Получим

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdot & c_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, \ldots, e'_n$. Столбцами этой матрицы являются координаты векторов нового базиса $e'_1, \ldots, e'_n$ в старом базисе. Из единственности разложения вектора по векторам базиса вытекает единственность матрицы C перехода от одного базиса к другому.

Введем более короткие обозначения базисов $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Тогда формула перехода от старого базиса к новому примет более компактный вид

$$e' = eC.$$

1.2 Предложение. *Если C — матрица перехода от базиса e к базису e', а D — матрица перехода от базиса e' к базису e'', то матрица CD является матрицей перехода от базиса e к базису e''.*

Доказательство. Из ассоциативности умножения матриц $e'' = e'D = (eC)D = e(CD)$. □

1.3 Следствие. *Если C — матрица перехода от базиса e к базису e', то матрицей перехода от базиса e' к базису e является обратная матрица C^{-1}.*

1.4 Предложение. *Матрица C является матрицей перехода от одного базиса к другому в том и только в том случае, когда матрица C является невырожденной.*

Доказательство. Невырожденность матрицы перехода от одного базиса к другому вытекает из следствия 1.3.

Докажем теперь, что любая невырожденная матрица является матрицей перехода от одного бызиса к другому. Для простоты ограничимся случаем плоскости. Пусть (e_1, e_2) — некоторый базис и

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

— невырожденная матрица. Докажем, что векторы e_1', e_2', получаемые из векторов e_1, e_2 по формуле

$$(e_1', e_2') = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

линейно независимы. От противного. Пусть существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору:

$$\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2' = \Theta.$$

Перепишем это равенство следующим образом

$$\lambda_1 (e_1, e_2) \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + \lambda_2 (e_1, e_2) \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Используя дистрибутивность умножения матриц, получаем

$$(e_1, e_2) \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому (поскольку координаты единственны!)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили нетривиальную линейную комбинацию столбцов матрицы, равную нулевому столбцу, что противоречит условию невырожденности матрицы. Итак, система e_1', e_2' линейно независима. Но в пространстве R^2 всякие два линейно независимых векторов образуют его базис. Поэтому e_1', e_2' — базис. Предложение 1.4 доказано. □

Обязательная задача. *Записать доказательство в общем виде, то есть в* R^n.

1.2 Преобразование координат векторов

Найдем зависимость между координатами векторов в двух базисах e и e'. Пусть вектор a в базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ имеет координаты $x_1, \ldots, x_n$, а в базисе $e' = (e_1', \ldots, e_n')$ — координаты $x_1', \ldots, x_n'$. В матричной форме это означает, что

$$a = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = e \cdot x = e' \cdot x' = eC \cdot x'$$

Здесь C — матрица перехода от базиса e к базису e', а

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Переходя от равенства векторов к равенству их координат, получаем

$$x = Cx'.$$

или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ . \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

2 Переход от одной аффинной системы координат к другой аффинной системе координат

Пусть даны две аффинные системы координат $Ox_1, \dots, x_n$ (старая) и $O'x'_1, \dots, x'_n$ (новая), определяемые реперами $Oe_1, \dots, e_n$ и $O'e'_1, \dots, e'_n$ соответственно. Пусть C — матрица перехода от базиса e к базису e', и пусть координаты нового начала O' в старой системе координат:

$$\overrightarrow{OO'} = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Предположим, что точка M имеет в старой и новой системах координат соответственно координаты

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = x \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ . \\ x'_n \end{pmatrix} = x'.$$

Векторное равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

можно переписать в виде

$$e \cdot x = e \cdot a + e' \cdot x' = e \cdot a + eC \cdot x' = e(C \cdot x' + a)$$

Переходя от равенства векторов к равенству их координат, получаем

$$x = C \cdot x' + a.$$

3 Ортогональные матрицы. Преобразования прямоугольных координат

Транспонирование матрицы

Для матрицы A размера $m \times n$ определена матрица A^T размера $n \times m$, называемая матрицей, *транспонированной* к матрице A. Она определяется равенством $a^T_{ij} = a_{ji}$. Операции транспонирования и умножения матриц связаны следующим образом:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Определитель транспонированной квадратной матрицы равен определителю исходной матрицы:

$$|A^T| = |A|.$$

Задача. *Докажите, что* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3.1 Теорема. (О пяти условиях на матрицу.)

Для квадратной матрицы $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & c_{nn} \end{pmatrix}$ *следующие пять условий эквивалентны:*

1) формальные скалярные произведения различных строк равны нулю, а формальные скалярные квадраты строк равны единице, т.е. $\sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j; \end{cases} \quad i, j = 1 \dots n;$

2) $CC^T = E;$

3) $C^T = C^{-1};$

4) $C^T C = E;$

5) формальные скалярные произведения различных столбцов равны нулю, а формальные скалярные квадраты столбцов равны единице, т.е. $\sum_{k=1}^n c_{ki}c_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j; \end{cases} \quad i, j = 1 \dots n.$

Доказательство. 1) $\iff$ 2) $\iff$ 3) $\iff$ 4) $\iff$ 5). $\square$

3.2 Определение. Квадратная матрица C называется *ортогональной*, если она удовлетворяет любому из условий 1)—5) теоремы 3.1.

Задача. *Доказать, что определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1.*

Задача. *Привести пример матрицы с определителем 1 и не являющейся ортогональной.*

3.3 Предложение. *Произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей, и матрица, обратная к ортогональной, также ортогональна.*

Доказательство. Пусть матрицы A и B ортогональны. Проверяем условие ортогональности: $(AB)(AB)^T = ABB^TA^T = AEA^T = AA^T = E$. Аналогично, для $C = A^{-1}$ получаем $(A^{-1})(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^TA)^{-1} = E^{-1} = E$. $\square$

Непустое множество G с бинарной операцией ($a \in G$, $b \in G \to ab \in G$) называется группой, если эта операция ассоциативна ((ab)c=a(bc)), если есть нейтральный элемент e ($ae = a$) (называемый иногда единицей, иногда нулем), и в G выполнима обратная операция ($aa^{-1} = e$). Если операция коммутативна ($ab = ba$), то группа называется коммутативной или абелевой.

Заметим, что предложение 3.3 означает, что множество всех ортогональных матриц порядка n образует группу относительно операции умножения. Эту группу обычно называют *ортогональной* и обозначают $O(n)$. Ортогональные матрицы, определитель которых равен $+1$, называются *специальными ортогональными* матрицами. Они образуют подгруппу группы $O(n)$. Эта подгруппа обозначается $SO(n)$.

Задача. *Проверить, что $SO(n)$ является группой.*

Задача. *Является ли группа $O(n)$ абелевой?*

Задача. *Как устроена группа $O(1)$?*

3.1 Преобразования прямоугольных координат

3.4 Теорема. *Матрица C является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому тогда и только тогда, когда матрица C ортогональна.*

Доказательство. Пусть C — матрица перехода от ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$ к ортонормированному базису $e'_1, \dots, e'_n$. Докажем, что матрица C ортогональна. Сначала разберем случай $n = 2$. Поскольку

$$(e'_1, e'_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} e'_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2, \\ e'_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases},$$

а в ортонормированном базисе e_1, e_2 скалярное произведение $({e_i}', {e_j}')$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов в базисе e_1, e_2, и, по условию, базис $({e_1}', {e_2}')$ также ортонормирован, получаем

$$0 = ({e_1}', {e_2}') = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22},$$

$$1 = ({e_1}', {e_1}') = c_{11}^2 + c_{21}^2.$$

$$1 = ({e_2}', {e_2}') = c_{12}^2 + c_{22}^2.$$

Но это и есть условие ортогональности матрицы C по столбцам.

В общем случае аналогично

$$(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & c_{1n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & . & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

поэтому получаем, что

$$e_i{}' = (e_1, \ldots, e_n) \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \cdot \\ c_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} e_k.$$

В ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ скалярное произведение $(e_i{}', e_j{}')$ равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ki} c_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j; \end{cases} \qquad i, j = 1 \ldots n.$$

Но это и есть условие ортогональности матрицы C по столбцам.

Если же C — ортогональная матрица и $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис, то, во-первых, $e'_1, \ldots, e'_n$ — базис, так как матрица перехода C является ортогональной и, следовательно, не является вырожденной, а, во-вторых, базис $e'_1, \ldots, e'_n$ ортонормированный, поскольку из формулы (*) следует, что условие ортогональности матрицы C превращается в условие ортонормированности базиса $e'_1, \ldots, e'_n$. □

3.5 Следствие. *Формула $x = Cx' + a$ задает переход от прямоугольной системы координат $Ox_1, \ldots, x_n$ к прямоугольной системе координат $O'x'_1, \ldots, x'_n$ в том и только в том случае, когда матрица C ортогональна.*

1 Ортогональные матрицы второго порядка

Группу $O(2)$ описывает следующее

1.1 Предложение. *Если $C \in O(2)$, то*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{\textit{или}} \qquad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

является ортогональной. По условию 5) теоремы о пяти условиях на матрицу формальный скалярный квадрат первого столбца равен единице: $c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$. Поэтому существует такой угол φ, что

$$c_{11} = \cos\varphi, \quad c_{21} = \sin\varphi.$$

Условие ортогональности по столбцам $c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$ перепишем в виде $\cos\varphi c_{12} + \sin\varphi c_{22} = 0$. В этом уравнении c_{12} и c_{22} являются неизвестными. Ясно, что

$$c_{12} = t\sin\varphi \quad c_{22} = -t\cos\varphi.$$

Из условия $c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$ получаем, что $t = \pm 1$. Если $t = -1$, получаем первый случай, а если $t = 1$, получаем случай второй. □

Заметим, что группа $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}$ является группой всевозможных поворотов плоскости.

2 Прямоугольные координаты с общим началом на плоскости

Пусть Oe_1e_2 и $Oe_1'e_2'$ — два ортонормированных репера с общим началом O. Соответствующие системы координат обозначим Oxy и $Ox'y'$. Поскольку начала координат совпадают, справедлива формула перехода

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

в которой матрица C осуществляет переход от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2', следовательно, имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В первом случае

$$e_1' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}, \quad e_2' = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\}.$$

Видим, что репер $Oe_1'e_2'$ получается из репера Oe_1e_2 поворотом на угол φ (рис. 1).

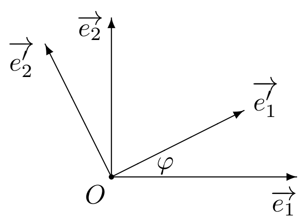

Рис. 1:

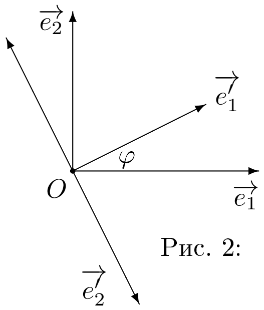

Рис. 2:

Во втором случае

$$e_1' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}, \quad e_2' = \{\sin\varphi, -\cos\varphi\}.$$

Поэтому репер $Oe_1'e_2'$ получается из репера Oe_1e_2 поворотом на угол φ с последующим отражением второго базисного вектора относительно первого (рис. 2).

Таким образом, на плоскости две прямоугольные системы координат Oxy и $Ox'y'$ с общим началом связаны между собой либо формулами поворота осей координат на угол φ:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases},$$

либо формулами поворота осей координат на угол φ с последующим отражением второй оси координат относительно первой:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \end{cases}.$$

При этом положительным поворотом считается (как в тригонометрии) поворот от оси Ox к оси Oy.

3 Ориентация прямой, плоскости, пространства

3.1 Одинаково ориентированные базисы и ориентация

На прямой каждый ненулевой вектор образует базис, и переход от одного базисного вектора к другому осуществляется путем умножения вектора на отличное от нуля число c: $e' = c \cdot e$. Последнюю запись перепишем следующим образом: $e' = ec$, понимая эту запись как матричное умножение строки длины 1 на матрицу размером 1×1.

3.1 Определение. Два базиса на прямой e и e' называются *одинаково ориентированными*, если существует такое положительное число c, такое что $e' = ec$.

Одинаковая ориентированность является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно). Поэтому множество всех базисов на прямой распадается на классы эквивалентности, которых ровно два. Задать ориентацию прямой означает выбрать один из этих классов. Итак *ориентированная прямая* — это прямая с выбранным базисом e, ориентация которого объявляется положительной. Заметим, что ориентированная прямая — это новое название того, что раньше называлось осью. Вектор имеет положительную ориентацию, если он одинаково ориентирован с выбранным базисным вектором e. Интуитивный (физический) смысл задания ориентации на прямой означает выбор направления движения на прямой.

Определение ориентации распространяется на пространства R^n при $n > 1$ следующим образом.

3.2 Определение. Два базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e_1', \dots, e_n')$ называются *одинаково ориентированными*, если матрица C перехода от одного базиса к другому ($e' = eC$) имеет положительный определитель.

3.3 Предложение. *Отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства R^n.*

Доказательство. Рефлексивность отношения одинаковой ориентированности вытекает из того, что переход от базиса к самому себе осуществляется посредством единичной матрицы, симметричность — из соотношения $|C^{-1}| = \dfrac{1}{|C|}$, транзитивность — из формулы $|CD| = |C| \cdot |D|$. □

Поскольку определитель матрицы перехода от одного базиса к другому либо положителен, либо отрицателен, в пространстве существуют ровно два класса одинаково ориентированных базисов. *Заданием ориентации* называется выбор одного из этих классов. Пространство с заданной ориентацией будем называть *ориентированным пространством.* Иными словами, задать ориентацию пространства означает выбрать один из этих классов и объявить все базисы, попавшие в выбранный класс, положительно ориентированными. Интуитивный (физический) смысл задания ориентации на плоскости — это задание направления вращения на плоскости, а в пространстве — выбор винта (правило буравчика). Так, например, правая ориентация пространства определяется таким базисом e_1, e_2, e_3, что вектор e_1 кратчайшим способом совмещается с вектором e_2 при вращении против часовой стрелки, если смотреть на плоскость векторов e_1, e_2 с конца вектора e_3. Повторим еще раз, что ориентированное пространство — это пространство с выбранным базисом (точнее, с выбранным классом одинаковой ориентированности на множестве базисов).

Из того, что при перестановке пары столбцов или при умножения столбца на (-1) определитель матрицы меняет знак, вытекает

3.4 Лемма. *Базисы, получающиеся друг из друга перестановкой пары векторов, а также изменением одного из векторов на противоположный, не являются одинаково ориентированными, то есть имеют разную ориентацию.*

Как определить знак ориентации системы векторов $(a_1, \ldots, a_n)$ в пространстве R^n?

(Совпадает со знаком определителя $|C|$ матрицы C, такой что $(a_1, \ldots, a_n) = (e_1, \ldots, e_n)C$, где $(e_1, \ldots, e_n)$ — выбранный базис, задающий ориентацию пространства. Иными словами, знак ориентации совпадает со знаком определителя, столбцами которого являются координаты соответствующих векторов. Если же $|C| = 0$, то говорят, что ориентация отсутствует.)

4 Ориентированная длина. Ориентированная площадь параллелограмма и её свойства.

4.1 Ориентированная длина и её свойства.

Пусть дан отрезок AB на ориентированной прямой. *Ориентированная длина* отрезка $< AB >$ — это длина этого отрезка со знаком ориентации вектора $a = \overrightarrow{AB}$. Пусть e — вектор единичной длины положительной ориентации. Очевидно, справедлива

4.1 Лемма. (α)

$$< a >= аз_e(a).$$

4.2 Теорема. (О двух свойствах ориентированной длины.)

Ориентированная длина обладает следующими свойствами:

1) $< \lambda a >= \lambda < a >$;

2) $< a' + a'' >=< a' > + < a'' >$.

Очевидно, теорема 4.2 является переформулировкой леммы Шаля (о линейности алгебраического значения).

4.2 Ориентированная площадь параллелограмма и её свойства.

Пусть на плоскости выбрана ориентация. Базисы, задающие эту ориентацию, объявляются *положительными.* Для упорядоченной пары векторов (a_1, a_2) определим число $< a_1, a_2 >$.

Это число равно нулю тогда и только тогда, когда векторы a_1, a_2 коллинеарны.

Если же векторы a_1, a_2 не коллинеарны, то отложив их от одной точки O, получим параллелограмм, двумя сторонами которого являются векторы a_1, a_2.

В этом случае число $< a_1, a_2 >$, называется *ориентированной площадью параллелограмма*, построенного на векторах a_1, a_2. *Ориентированная площадь $< a_1, a_2 >$, по определению, равна площади этого параллелограмма, взятой со знаком ориентации упорядоченной пары векторов (a_1, a_2).*

Ясно, что

$$| < a_1, a_2 > | = |a_1| \cdot h,$$

где h — высота параллелограмма. Проведем через точку O прямую l, перпендикулярную вектору a_1 и обозначим через n тот из двух единичных векторов этой прямой, для которого упорядоченная пара векторов (a_1, n) имеет положительную ориентацию.

Ясно, что

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta n$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса a_1, n к базису a_1, a_2, и $|C| = \beta$.

Рассматриваем две картинки (!) и видим, что

$$h = |\text{аз}_n(\text{пр}_n a_2)|,$$

где через пр_n обозначается ортогональная проекция на прямую, содержащую вектор n. На одной из картинок векторы a_2 и n „смотрят" в одну полуплоскость, а на другой — в разные полуплоскости. Ясно также, что в любом случае

$$\beta = \text{аз}_n(\text{пр}_n a_2).$$

Векторы a_2 и n „смотрят" в одну полупроскость тогда и только тогда, когда $\beta > 0$. Следовательно, базисы a_1, n и a_1, a_2 одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда $\beta > 0$. Таким образом заключаем, что знак ориентации упорядоченной пары (a_1, a_2) совпадает со знаком $\text{аз}_n(\text{пр}_n a_2)$, что и доказывает формулу из нижеследующей леммы 4.3.

4.3 Лемма. (β)

$$< a_1, a_2 >= |a_1| \cdot \textit{аз}_n(\text{пр}_n a_2).$$

Из доказанной формулы, а также из линейности алгебраического значения проекций и леммы 3.4 вытекает следующая

4.4 Теорема. (О трех свойствах ориентированной площади.)

Ориентированная площадь параллелограмма обладает следующими свойствами:

1) $< a_1, a_2 >= - < a_2, a_1 >$;

2) $< a_1, \lambda a_2 >= \lambda < a_1, a_2 >$;

3) $< a_1, a_2' + a_2'' >=< a_1, a_2' > + < a_1, a_2'' >$.

Доказательство. 3) $< a_1, a_2'+a_2'' >= |a_1| \cdot \text{аз}_n(\text{пр}_n(a_2'+a_2'')) = |a_1| \cdot \text{аз}_n(\text{пр}_n a_2' + \text{пр}_n a_2'') = |a_1| \cdot (\text{аз}_n(\text{пр}_n a_2') + \text{аз}_n(\text{пр}_n a_2'')) = |a_1| \cdot \text{аз}_n(\text{пр}_n a_2') + |a_1| \cdot \text{аз}_n(\text{пр}_n a_2'') =< a_1, a_2' > + < a_1, a_2'' >$. □

Пусть теперь на плоскости зафиксирован базис e_1, e_2, а векторы a_1, a_2 даны своими координатами в этом базисе: $a_i = \{x_i, y_i\}$, $i = 1, 2$. Тогда

$$< a_1, a_2 > =< x_1 e_1 + y_1 e_2, x_2 e_1 + y_2 e_2 > .$$

Раскрывая скобки в правой части в соответствии с теоремой о трех свойствах ориентированной площади и, учитывая, что для коллинеарных векторов ориентированная площадь равна нулю, получаем

$$< a_1, a_2 >= x_1 y_2 < e_1, e_2 > + y_1 x_2 < e_2, e_1 > = x_1 y_2 < e_1, e_2 > - y_1 x_2 < e_1, e_2 >,$$

следовательно,

$$< a_1, a_2 > = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot < e_1, e_2 > = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot < e_1, e_2 >.$$

Если базис e_1, e_2 ортонормирован и положителен, то формула принимает вид

$$< a_1, a_2 > = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

1 Ориентированная площадь треугольника

Пусть на ориентированной плоскости задан треугольник ABC. *Ориентированной площадью* $< S_{ABC} >$ *треугольника* ABC будем называть площадь треугольника ABC, взятой со знаком ориентации пары векторов $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Задача.*Доказать, что* $< S_{ABC} >= - < S_{ACB} >$.

Если **в прямоугольной системе координат** вершины имеют координаты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, то

$$< S_{ABC} >= \frac{1}{2} < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} > = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

В частности, получаем формулу для площади треугольника, координаты вершин которого даны в некоторой прямоугольной системе координат:

$$S_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|.$$

2 Угол от первого вектора до второго

Пусть на плоскости выбран (положительный) ортонормированный базис (e_1, e_2) и задана упорядоченная пара **неколлинеарных** векторов $a_1 = \{x_1, y_1\}$ и $a_2 = \{x_2, y_2\}$. *Ориентированным углом* между векторами a_1 и a_2 или *углом от первого вектора до второго* назовем угол ϕ между векторами a_1, a_2, взятый со знаком ориентации упорядоченной пары векторов (a_1, a_2). Определенный таким образом угол будем обозначать $\phi_{1,2}$. Очевидно, **ориентированная площадь параллелограмма выражается с помощью ориентированного угла следующим образом**:

$$< a_1, a_2 >= |a_1| \cdot |a_2| \sin \phi_{1,2},$$

откуда $\sin \phi_{1,2} = \dfrac{< a_1, a_2 >}{|a_1| \cdot |a_2|}$. Далее, $\cos \phi = \dfrac{(a_1, a_2)}{|a_1| \cdot |a_2|} = \cos \phi_{1,2}$, в силу четности функции cos (угол ϕ — это угол между векторами). Поэтому

$$\operatorname{tg} \phi_{1,2} = \frac{\sin \phi_{1,2}}{\cos \phi_{1,2}} = \frac{\sin \phi_{1,2}}{\cos \phi} = \frac{< a_1, a_2 >}{(a_1, a_2)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}{x_1 x_2 + y_1 y_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2}.$$

3 Ориентированный объем параллелепипеда, его свойства

Пусть в пространстве выбрана ориентация. Базисы, задающие эту ориентацию, объявляются *положительными*. Для упорядоченной тройки векторов (a_1, a_2, a_3) определим число $< a_1, a_2, a_3 >$.

Это число равно нулю тогда и только тогда, когда векторы a_1, a_2, a_3 *компланарны.*

Если же векторы a_1, a_2, a_3 не компланарны, то отложив их от одной точки O, построим параллелепипед, тремя ребрами которого являются векторы a_1, a_2, a_3. В этом случае число $< a_1, a_2, a_3 >$, называется *ориентированным объемом параллелепипеда*, построенного на векторах a_1, a_2, a_3. *Ориентированный объем* $< a_1, a_2, a_3 >$, *по определению, равен объему этого параллелепипеда, взятому со знаком ориентации упорядоченной тройки векторов* (a_1, a_2, a_3).

Обозначим через S площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы a_1 и a_2. Тогда

$$| < a_1, a_2, a_3 > | = S \cdot h,$$

где h — высота параллелепипеда. Проведем через точку O прямую l, перпендикулярную плоскости векторов a_1 и a_2 и обозначим через n тот из двух единичных векторов этой прямой, для которого упорядоченная тройка векторов (a_1, a_2, n) имеет положительную ориентацию. Ясно, что

$$a_3 = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma n$$

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса a_1, a_2, n к базису a_1, a_2, a_3, и $|C| = \gamma$.

Снова рассматриваем две картинки (!) и видим, что на каждой из картинок

$$h = |\text{аз}_n(\text{пр}_n a_3)|.$$

На одной из картинок векторы a_3 и n „смотрят“ в одно полупространство, а на другой — в разные полупространства. Ясно также, что в любом случае

$$\gamma = \text{аз}_n(\text{пр}_n a_3).$$

Векторы a_3 и n „смотрят“ в одно полупространство тогда и только тогда, когда $\gamma > 0$. Следовательно, базисы (a_1, a_2, a_3) и (a_1, a_2, n) одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда $\gamma > 0$. Таким образом заключаем, что знак ориентации упорядоченной тройки (a_1, a_2, a_3) совпадает со знаком $\text{аз}_n(\text{пр}_n a_3)$, что и доказывает формулу из нижеследующей леммы 3.1.

3.1 Лемма. (γ)

$$< a_1, a_2, a_3 > = S \cdot \text{аз}_n(\text{пр}_n a_3).$$

Из доказанной формулы, а также из линейности алгебраического значения проекций вытекает

3.2 Теорема. (О трех свойствах ориентированного объема.)

Ориентированный объем параллелепипеда обладает следующими свойствами:

1) $< a_1, a_2, a_3 >= - < a_2, a_1, a_3 >=< a_2, a_3, a_1 >= - < a_3, a_2, a_1 >=$
$=< a_3, a_1, a_2 >= - < a_1, a_3, a_2 >$, *то есть ориентированный объем меняет знак при перестановке любых двух векторов;*

2) $< a_1, a_2, \lambda a_3 >= \lambda < a_1, a_2, a_3 >$;

3) $< a_1, a_2, a_3' + a_3'' >=< a_1, a_2, a_3' > + < a_1, a_2, a_3'' >$.

Задача. *Написать подробное доказательство теоремы о трех свойствах ориентированного объема,* совершенно аналогичное доказательству ранее доказанной теоремы о трех свойствах ориентированной площади.

Задача. *Используя свойство* 1), *доказать линейность ориентированного объема (то есть свойства* 2) *и* 3)) *по первому и второму вектору*

Пусть теперь в пространстве зафиксирован базис e_1, e_2, e_3, а векторы a_1, a_2, a_3 даны своими координатами в этом базисе: $a_i = \{x_i, y_i, z_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$< a_1, a_2, a_3 > =< x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3, x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3, x_3e_1 + y_3e_2 + z_3e_3 >.$$

Раскрывая скобки в правой части, и, учитывая, что для компланарных векторов ориентированный объем равен нулю, получим

$$< a_1, a_2, a_3 >= x_1y_2z_3 < e_1, e_2, e_3 > + x_1y_3z_2 < e_1, e_3, e_2 > + x_2y_1z_3 < e_2, e_1, e_3 > +$$
$$+ x_2y_3z_1 < e_3, e_1, e_2 > + x_3y_1z_2 < e_2, e_3, e_1 > + x_3y_2z_1 < e_3, e_2, e_1 > =$$
$$= x_1y_2z_3 < e_1, e_2, e_3 > - x_1y_3z_2 < e_1, e_2, e_3 > - x_2y_1z_3 < e_1, e_2, e_3 > +$$
$$+ x_2y_3z_1 < e_1, e_2, e_3 > + x_3y_1z_2 < e_1, e_2, e_3 > - x_3y_2z_1 < e_1, e_2, e_3 >,$$

следовательно,

$$< a_1, a_2, a_3 > = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot < e_1, e_2, e_3 > .$$

Если базис e_1, e_2, e_3 ортонормирован и положителен, то формула принимает вид $< a_1, a_2, a_3 > = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$.

4 Векторное и смешанное произведения и их свойства

Векторное произведение определяется в ориентированном пространстве, в котором дополнительно выбрана единица длины и, тем самым, единица площади, которой является площадь квадрата со стороной единица.

4.1 Определение. I. *Векторным произведением* **неколлинеарных** векторов a и b называется вектор $v = [a, b]$, такой что

1) длина вектора v численно равна произведению длин векторов a и b на синус угла между ними;
2) вектор v перпендикулярен каждому из векторов a и b;
3) вектор v направлен так, что упорядоченная тройка a, b, v имеет положительную ориентацию.

II. *Векторное произведение* **коллинеарных** векторов по определению равно нулевому вектору Θ.

4.2 Определение. *Смешанным произведением* векторов a, b и c называется число $([a, b], c)$, равное скалярному произведению векторного произведения векторов a и b на вектор c.

4.3 Предложение. *Смешанное произведение векторов a, b и c численно совпадает с ориентированным объемом*

$$([a, b], c) =< a, b, c > .$$

Доказательство. Обозначим через S площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b. По лемме (γ) 3.1

$$< a, b, c >= S \cdot \text{аз}_n(\text{пр}_n c),$$

где единичный вектор n перпендикулярен плоскости векторов a и b и направлен так, что тройка векторов (a, b, n) имеет положительную ориентацию. Напомним предложение: $(a, b) = |a| \cdot \text{аз}_e(\text{пр}_a(b)))$, где единичный вектор e коллинеарен и имеет одинаковое направление с вектором a. Таким образом, получаем

$$([a, b], c) = |[a, b]| \cdot \text{аз}_e(\text{пр}_{[a,b]} c),$$

где единичный вектор e коллинеарен и имеет одинаковое направление с векторным произведением $[a, b]$. Следовательно, $e = n$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $|[a, b]| = S$ и $\text{аз}_n(\text{пр}_n c) = \text{аз}_e(\text{пр}_{[a,b]} c)$. Предложение 4.3 доказано. □

Задача. *Случаи, когда правая или левая часть равенства равны нулю, разобрать самостоятельно.*

4.4 Следствие. $([a, b], c) = (a, [b, c])$.

Доказательство. $([a, b], c) =< a, b, c >=< b, c, a >= ([b, c], a) = (a, [b, c])$. □

Справедлива следующая

4.5 Теорема. (О четырех свойствах векторного произведения.)
Векторное произведение обладает следующими свойствами:
1) $[a, b] = \Theta$ *тогда и только тогда, когда векторы a и b коллинеарны;*
2) $[a, b] = -[b, a]$;
3) $[a, \lambda b] = \lambda[a, b]$;
4) $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$.

Доказательство. Свойства 1), 2) и 3) следуют непосредственно из определения. Проверим свойство 4). Равенство 4) эквивалентно тому, что вектор $d = [a, b+c]-[a, b]-[a, c]$ нулевой. Таким образом достаточно показать, что $(d, d) = 0$. Но $(d, d) = ([a, b+c]-[a, b]-[a, c], d) = ([a, b+c], d)-([a, b], d)-([a, c], d) =< a, b+c, d > - < a, b, d > - < a, c, d >=< a, b, d > + < a, c, d > - < a, b, d > - < a, c, d >= 0$. □

Задача. *Доказать, что если $[a, b] + [b, c] + [c, a] = \Theta$, то векторы a, b, c компланарны.*

Доказательство. Первый способ. Векторы a, b, c перпендикулярны вектору $N = [a, b - c] = -[b, c]$. Второй способ. Умножим обе части данного равенства скалярно на вектор c. Получим $([a, b], c) + 0 + 0 = 0 =< a, b, c >$. □

Задача. *Проверить тождество Лагранжа: $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$ (для запоминания:"бац минус цаб"!).*

Доказательство. Вектор $[a, [b, c]]$ перпендикулярен вектору $[b, c]$, поэтому $[a, [b, c]] = \lambda b + \mu c$. Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор $a : 0 = \lambda(a, b) + \mu(a, c)$, откуда $\lambda = t(a, c)$ и $\mu = -t(a, b)$. Чтобы найти параметр t, выберем ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 и при $a = e_1 = c$ и $b = e_2$ тождество переходит в равенство $e_2 = te_2$, откуда $t = 1$. □

Задача. *Проверить тождество Якоби: $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = \Theta$.*

5 Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах

Нам понадобится следующее вспомогательное

5.1 Предложение. *Координатами произвольного вектора a в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 являются скалярные произведения (a, e_1), (a, e_2), (a, e_3).*

5.2 Теорема. (Об условном определителе.) *Пусть векторы a и b заданы своими координатами в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3:*

$$a = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad b = \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Тогда справедливы формулы

$$[a, b] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3 =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\},$$

Доказательство. В самом деле, пусть $[a, b] = \{X, Y, Z\}$. Тогда, по предложению 5.1, имеем $X = ([a, b], e_1)$, $\quad Y = ([a, b], e_2)$, $\quad Z = ([a, b], e_3)$. Поэтому

$$X = ([a, b], e_1) =< a, b, e_1 >= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 0 \\ z_1 & z_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично,

$$Y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Итак,

$$[a, b] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\},$$

что можно записать и в виде вышеприведенного условного определителя. □

Задача. *Получить другим способом тот же условный определитель, используя четыре свойства векторного произведения и следующую табличку умножения:* $[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_2, e_3] = e_1 \qquad [e_3, e_1] = e_2$.

Поскольку смешанное произведение совпадает с ориентированным объемом,

$$([a_1, a_2], a_3) = < a_1, a_2, a_3 > = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot < e_1, e_2, e_3 > .$$

Если базис e_1, e_2, e_3 ортонормирован (и, естественно, положителен), то формула принимает вид

$$< a_1, a_2, a_3 > = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

1 Векторные уравнения прямой и плоскости. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Возьмем прямую l, лежащую в плоскости или в пространстве. **Ненулевой** вектор p, параллельный прямой l, называется *направляющим вектором* этой прямой. Пусть точка M_1 с радиус-вектором r_1 лежит на прямой l. Тогда для любой точки M с радиусом-вектором r на этой прямой векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и a коллинеарны. Значит, существует такое число t, что

$$\overrightarrow{M_1M} = tp.$$

Наоборот, всякая точка M, для которой выполнено это условие, лежит на прямой l по определению произведения вектора на число. Тогда

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} \quad \text{или} \quad r = r_1 + tp.$$

Последнее равенство называется *векторным уравнением прямой* .

Пусть теперь дана плоскость π в пространстве, пусть в плоскости π дана точка M_1 с радиус-вектором r_1 и два неколлинеарных вектора a и b. Тогда точка M с радиус-вектором r принадлежит плоскости π в том и только в том случае, когда существуют такие числа u и v, что

$$\overrightarrow{M_1M} = ua + vb.$$

Действительно, точка M лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_1M}$ параллелен плоскости. Это по определению означает компланарность векторов a, b, $\overrightarrow{M_1M}$. А последнее, в силу неколлинеарности векторов a и b эквивалентно тому, что вектор $\overrightarrow{M_1M}$ линейно выражается через векторы a и b. Значит,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M} \quad \text{или} \quad r = r_1 + ua + vb.$$

Это и есть *векторное уравнение плоскости.* Векторные уравнения прямой и плоскости фактически определяют прямую и плоскость и поэтому теоретически очень важны, но при решении задач, как правило, используются другие уравнения, которые будут выведены из векторных чуть позже.

1.1 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Из школьной программы мы знаем, что две прямые в пространстве могут совпадать, быть параллельными, пересекаться, скрещиваться. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы векторными уравнениями

$$r = r_1 + tp_1, \quad r = r_2 + tp_2.$$

Условием их параллельности является коллинеарность векторов p_1 и p_2, а условием их совпадения — коллинеарность тройки векторов p_1, p_2, $r_2 - r_1$. Для того, чтобы прямые l_1 и l_2 пересекались, необходимо и достаточно, чтобы три вектора p_1, p_2, $r_2 - r_1$ были компланарны, т.е.

$$< r_2 - r_1, p_1, p_2 >= 0,$$

и при этом векторы p_1, p_2 не являлись коллинеарными. Очевидно теперь, что условие

$$< r_2 - r_1, p_1, p_2 >\neq 0$$

эквивалентно тому, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

2 Вычисление расстояний в пространстве через операции над векторами

2.1 Предложение. *Расстояние от точки M_2 с радиус-вектором r_2 до прямой l, заданной уравнением*

$$r = r_1 + tp,$$

определяется по формуле

$$\rho(M_2, l) = \frac{|[r_1 - r_2, p]|}{|p|}.$$

В самом деле, это расстояние равно высоте параллелограмма, построенного на векторах p и $r_1 - r_2$. Формула дает эту высоту, поскольку высота равна площади параллелограмма, деленной на длину основания. Пусть теперь в прямоугольных координатах $Oxyz$:

$$r_2 = \{x_2, y_2, z_2\}, \quad r_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \quad p = \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Тогда равенство примет следующий вид

$$\rho(M_2, l) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_2 & x_1 - x_2 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

2.2 Предложение. *Расстояние от точки M_2 с радиус-вектором r_2 до плоскости π, заданной уравнением*

$$r = r_1 + ua + vb,$$

определяется по формуле

$$\rho(M_2, \pi) = \frac{|< r_1 - r_2, a, b >|}{|[a, b]|}.$$

В самом деле, это расстояние равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $a, b, r_2 - r_1$. Высота равна объему параллелепипеда, деленному на площадь основания. Если в прямоугольных координатах $r_i = \{x_i, y_i, z_i\}, \quad a_i = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}, \quad i = 1, 2$, то равенство примет следующий вид

$$\rho(M_2, \pi) = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_2 - y_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ z_2 - z_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

2.3 Предложение. *Расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями $r = r_1 + tp_1$ и $r = r_2 + tp_2$, определяется по формуле*

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|< r_2 - r_1, p_1, p_2 >|}{|[p_1, p_2]|}.$$

В самом деле, это расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат прямые l_1 и l_2. Таким образом, предложение2.3 является следствием предыдущего предложения2.2! То есть искомое расстояние равно высоте параллелепипеда, построенного на векторах $p_1, p_2, r_2 - r_1$. В прямоугольных координатах, если $r_i = \{x_i, y_i, z_i\}, \quad p_i = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\}, \quad i = 1, 2$, получаем ту же формулу, что и в предложении 2.2:

$$\rho(l_1, l_2) = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_2 - y_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ z_2 - z_1 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}} \right|.$$

ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

3 Уравнения прямой на плоскости. Линии первого порядка.

Выберем на плоскости аффинную систему координат Oxy. Возьмем прямую l с точкой $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на этой прямой и направляющим вектором $p = \{\alpha, \beta\}$, и запишем ее уравнение в векторном виде:

$$r = r_0 + tp.$$

Здесь r — радиус-вектор произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на прямой l, r_0 — радиус-вектор точки M_0; t — число. Переходя в этом уравнении от равенства векторов к равенству их координат, то есть переписав векторное уравнение по системе „координаты в столбик", получим

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha, \\ y = y_0 + t\beta. \end{cases}$$

Это *параметрические* уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) с направляющим вектором $\{\alpha, \beta\}$. Исключая из системы параметр t, получаем *каноническое* уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}.$$

Если, например, $\alpha = 0$, то уравнение превращается в равенство $x = x_0$. Разновидностью канонического уравнения является полезное *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Параметрические и канонические уравнения прямой очень удобны в том смысле, что позволяют сразу увидеть точку, через которую проходит прямая, а также её направляющий вектор.

Приведем теперь каноническое ,уравнение прямой к общему знаменателю. Получим эквивалентное уравнение

$$\beta x - \alpha y - \beta x_0 + \alpha y_0 = 0,$$

которое, полагая $A = \beta$, $B = -\alpha$, $C = -\beta x_0 + \alpha y_0$ запишем в виде

$$Ax + By + C = 0.$$

Это уравнение называется *общим* уравнением прямой на плоскости.

3.1 Определение. Линией первого порядка называется множество $L = \{(x, y) : Ax + By + C = 0\}$, где хотя бы одно из чисел A или B не равно нулю. Иными словами, это множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению первой степени.

Таким образом, мы доказали, что координаты (x, y) любой точки прямой l с направляющим вектором $p = \{-B, A\} = \{\alpha, \beta\}$ удовлетворяют уравнению $Ax + By + C = 0$, то есть $l \subset L$, где $L = \{(x, y) : Ax + By + C = 0\}$.

Докажем обратное включение, то есть, что $L = \{(x, y) : \quad Ax + By + C = 0\} \subset l$. Поскольку хотя бы одно из чисел A или B не равно нулю, предположим, что, например, $B \neq 0$. Тогда уравнение легко приводится к виду $y = kx + b$, которое называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом* и упоминается в в школьной программе. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = b + kt. \end{cases}$$

Получили параметрические уравнения прямой, проходящей через точку с радиус-вектором $r_0 = \{0, b\}$ и направляющим вектором $p = \{1, k\}$. Таким образом, любая точка $M = (x, y) \in L = \{(x, y) : \quad Ax + By + C = 0\}$ с радиус-вектором $r = \{x, y\}$ удовлетворяет равенству $r = r_0 + ta$, которое является векторным уравнением прямой на плоскости. Следовательно, точка M лежит на прямой l, и $L \subset l$. Таким образом доказана следующая

3.2 Теорема. *Прямые на плоскости — это в точности линии первого порядка, то есть множества точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям первой степени.*

Замечание. Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то из общего уравнения получаем *уравнение в отрезках*:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Задачи. 1) $2x - y + 1 = 0$. Написать параметрические уравнения прямой. 2) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2023 + 2024t. \end{cases}$ Написать общее уравнение прямой.

4 Взаимное расположение двух прямых, заданных общими уравнениями

Из школьной программы мы знаем, что две прямые на плоскости могут пересекаться (в единственной точке), могут быть параллельными и могут совпадать. Нашей задачей является определение по коэффициентам **общих уравнений**, какой случай имеет место.

4.1 Лемма. (О направляющем векторе.)

Вектор $p = \{-B, A\}$ *является направляющим вектором прямой, заданной в аффинной системе координат общим уравнением* $Ax + By + C = 0$.

Доказательство. Вектор является направляющим тогда и только тогда, когда вместе с его началом прямой принадлежит и его конец. Отложим вектор $p = \{-B, A\}$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямой l. Тогда его конец имеет координаты $M_1(x_0 - B, y_0 + A)$. Таким образом, параллельность вектора прямой эквивалентна тому, что точка $M_1(x_0 - B, y_0 + A)$ принадлежит прямой l, то есть эквивалентна равенству $A(x_0 - B) + B(y_0 + A) + C = 0$, которое, с учетом условия $Ax_0 + By_0 + C = 0$, дает нам эквивалентное равенство $-AB + BA = 0$. □

4.2 Предложение. (О пересекающихся прямых.) *Для того, чтобы прямые* l_1 *и* l_2, *заданные соответственно уравнениями* $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2 = 0$, *пересекались, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Доказательство. Направляющие векторы $\{-B_1, A_1\}$ и $\{-B_2, A_2\}$ не коллинеарны. □

4.3 Следствие. *Для того, чтобы прямые* l_1 *и* l_2, *заданные соответственно уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, *были параллельны или совпадали необходимо и достаточно выполнения следующего условия*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Доказательство. Следствие получается отрицанием неравенства в предложении. Но можно доказать и непосредственно: в самом деле, $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-B_1}{-B_2} = \dfrac{A_1}{A_2}$. Последнее условие равносильно коллинеарности векторов $p_1 = \{-B_1, A_1\}$ и $p_2 = \{-B_2, A_2\}$. □

4.4 Предложение. (О совпадении прямых.) *Для того, чтобы прямые* l_1 *и* l_2, *заданные соответственно уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, *совпадали, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что прямые совпадают. Тогда векторы $\{-B_1, A_1\}$ и $\{-B_2, A_2\}$ являются направляющими для прямых l_1 и l_2, следовательно, они коллинеарны. Следовательно, существует такое число λ, что

$$\begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

Возьмем точку $(x_0, y_0) \in l_1 = l_2$. Тогда

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0.$$

Умножая второе из этих уравнений на λ и вычитая его из первого, получим

$$C_1 = \lambda C_2.$$

А это и означает, что

$$\lambda = \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Достаточность. Из пропорциональности коэффициентов вытекает, что

$$A_1x + B_1y + C_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2)$$

для некоторого λ, т.е. уравнения, задающие прямые l_1 и l_2 равносильны. □

4.5 Следствие. *Для того, чтобы прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, были параллельны и не совпадали необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Доказательство. Необходимость вытекает из коллинеарности направляющих векторов $\{-B_1, A_1\}$ и $\{-B_2, A_2\}$ прямых l_1 и l_2 и предложения 4.4 о совпадающих прямых. Достаточность. Пропорциональность коэффициентов при x и y дает нам коллинеарность направляющих векторов прямых l_1 и l_2, а непропорциональность их свободным членам вместе с предложением 4.4 о совпадающих прямых — несовпадение прямых l_1 и l_2. □

В зависимости от того как заданы прямые, способы определения их взаимного расположения могут быть условно подраздены на АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ и на ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ. Алгебраические способы — это способы, в которых исследуется соответствующая система уравнений, поскольку прямые на плоскости — это в точности линии первого порядка по теореме 3.2. Если система является определенной (то есть имеет единственное решение), то прямые пересекаются. Если эта система не является совместной (решений нет), то прямые параллельны. Если эта система является неопределенной (то есть система имеет бесконечно много решений), то прямые совпадают. Геометрические способы — это способы, в которых рассматриваются направляющие векторы прямых и вектор, начало которого на одной прямой, а конец на другой прямой (вектор „из точки в точку“). Геометрический подход удобен, когда прямые заданы,например, параметрическими или каноническими уравнениями. Возможны и комбинации этих способов.

Задача. *Определить условия при которых прямые $Ax+By+C=0$ и $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha, \\ y = y_0 + t\beta. \end{cases}$ соответственно 1) пересекаются, 2) параллельны (и не совпадают), 3) совпадают.*

1 Пучок прямых

1.1 Определение. *Собственным пучком прямых* называется множество прямых, проходящих через данную точку, которую называют *центром пучка.*

Очевидно, собственный пучок задается любыми двумя своими прямыми.

1.2 Теорема. *(***Уравнение пучка.***) Пусть прямые l_1 и l_2, задаваемые уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \textit{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, являющейся центром пучка Π, задаваемого прямыми l_1 и l_2. Тогда прямая l_3 проходит через точку M_0, то есть $l_3 \in \Pi$, в том и только в том случае, когда прямая l_3 задается уравнением

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Доказательство. Достаточность очевидна. Проверим необходимость. Пусть прямая l_3 проходит через точку M_0. Мы хотим подобрать числа λ и μ так, чтобы уравнение $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ задавало прямую l_3. Возьмем на прямой l_3 какую-нибудь точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точки M_0, и сначала подберем числа λ_1 и μ_1 так, чтобы выполнялось равенство $\lambda_1(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu_1(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$. Положим, например,

$$\lambda_1 = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2), \quad \mu_1 = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1.$$

Поскольку точка M_1 не может одновременно принадлежать прямым l_1 и l_2, по крайней мере одно из чисел λ_1 и μ_1 отлично от нуля. Тогда уравнение

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \mu_1(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

является уравнением линии первого порядка. В самом деле, если это не так, то выполняются равенства

$$\begin{cases} \lambda_1 B_1 + \mu_1 B_2 = 0 \\ \lambda_1 A_1 + \mu_1 A_2 = 0 \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что означает коллинеарность направляющих векторов прямых l_1 и l_2. Но это невозможно, так как прямые l_1 и l_2 пересекаются. Поэтому уравнение

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \mu_1(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

определяет некоторую прямую l. Она очевидно проходит через точку M_0. Подставляя координаты точки M_1 в уравнение прямой l, получаем

$$\lambda_1(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu_1(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = \lambda_1\mu_1 + \mu_1(-\lambda_1) = 0,$$

т.е. точка M_1 также принадлежит прямой l. Значит, прямые l и l_3 совпадают. Теорема доказана. □

1.3 Определение. *Несобственным пучком* называется множество всех прямых плоскости параллельных между собой.

Несобственный пучок задается одной прямой.

1.4 Теорема. *(***Уравнение пучка.***) Пусть прямые l_1 и l_2, задаваемые уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \textit{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

параллельны, то есть принадлежат несобственному пучку Π. Тогда прямая l_3 принадлежит пучку Π (то есть параллельна прямым l_1 и l_2), в том и только в том случае, когда прямая l_3 задается уравнением

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Доказательство. .

Важное замечание. *Если прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, то можно считать, что все прямые, входящие в несобственный пучок, задаваемый этой прямой, имеют уравнения вида $Ax + By + C_1 = 0$.*

Итак, пусть прямая l_3 параллельна прямым l_1 и l_2, то есть $l_3 \in \Pi$. По важному замечанию уравнения трех данных параллельных прямых можно записать в виде

$$l_1 : Ax + By + C_1 = 0, \quad l_2 : Ax + By + C_2 = 0, \quad l_3 : Ax + By + C_3 = 0.$$

Подберем теперь коэффициенты λ и μ таким образом, что

$$\lambda(Ax + By + C_1) + \mu(Ax + By + C_2) = Ax + By + C_3.$$

Для этого приравняем коэффициенты при x, y и свободные члены, получаем

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ \lambda C_1 + \mu C_2 = C_3. \end{cases}$$

Так как $C_1 \neq C_2$, данная система имеет единственное (ненулевое) решение.

Обратно, пусть прямая l_3 задана уравнением, являющимся линейной комбинацией уравнений прямых l_1 и l_2, причем по важному замечанию можно считать, что коэффициенты при x и при y в уравнениях прямых l_1 и l_2 совпадают.

$$\lambda(Ax + By + C_1) + \mu(Ax + By + C_2) = 0.$$

Тогда эта линейная комбинация задает прямую, параллельную прямым l_1 и l_2, то есть $l_3 \in \Pi$. $\square$

Допуская некоторую вольность речи, доказанные теоремы можно переформулировать следующим образом: *все прямые пучка и только они являются линейными комбинациями любых двух из них.* Очевидным следствием доказанных теорем является следующая теорема.

1.5 Теорема. *Три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$, принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение пучка является важным технических приемом, позволяющим решать задачи, не находя точек пересечения прямых.

Задача. *Стороны треугольника заданы уравнениями $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 7 = 0$, $3x + y + 15 = 0$. Написать уравнение высоты, проведенной из точки пересечения первой и второй стороны. Система координат прямоугольная.*

Решение. Уравнение высоты имеет вид

$$\lambda(x + y - 1) + \mu(2x - y + 7 = 0) = 0 \quad \iff \quad (\lambda + 2\mu)x + (\lambda - \mu)y + (-\lambda + 7\mu) = 0.$$

Поэтому направляющий вектор высоты равен $\{-(\lambda - \mu), (\lambda + 2\mu)\}$. Этот вектор должен быть перпендикулярным направляющему вектору третьей прямой: $\{-1, 3\}$. Получаем уравнение для нахождения λ, μ:

$$0 = \lambda - \mu + 3\lambda + 6\mu = 4\lambda + 5\mu.$$

Полагая $\lambda = -5, \mu = 4$, получаем уравнение высоты:

$$3x - 9y + 33 = 0 \quad \iff \quad x - 3y + 11 = 0.$$

Задача. *Стороны треугольника заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$. Написать уравнение медианы, проведенной из точки пересечения первой и второй стороны.*

Решение. Уравнение медианы имеет вид

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

или

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2) = 0.$$

Поэтому направляющий вектор равен

$$\{-(\lambda B_1 + \mu B_2), (\lambda A_1 + \mu A_2)\} = \lambda \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Нарисуем параллелограмм и, рассматривая картинку, поймем, что для того, чтобы прямая была медианой, надо подобрать параметры λ и μ так, чтобы

$$\lambda \begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -B_3 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

Домножив первое уравнение на $-A_3$, а второе уравнение на B_3, и вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$\lambda(A_3 B_1 - B_3 A_1) - \mu(A_2 B_3 - A_3 B_2) = 0$$

.

Пусть

$$\lambda = (A_2 B_3 - A_3 B_2) \quad \text{и} \quad \mu = (A_3 B_1 - B_3 A_1),$$

и тогда уравнение медианы приобретает вид

$$(A_2 B_3 - A_3 B_2)(A_1 x + B_1 y + C_1) + (A_3 B_1 - B_3 A_1)(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0.$$

2 Полуплоскости

Задача. *Даны две точки $A(-3,1)$ и $B(5,4)$ и прямая $x - 2y + 1 = 0$. Установить , пересекает ли данная прямая отрезок AB или его продолжение за точку A или за точку B.*

(Ответ: пересекает продолжение AB за точку B)

2.1 Теорема. *Пусть прямая l задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда множества X^- и X^+ всех точек $M(x, y)$ плоскости, для которых соответственно $Ax+By+C < 0$ и $Ax+By+C > 0$, являются полуплоскостями, ограниченными прямой l.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что множество $X^- \cup l \cup X^+$ — вся плоскость, причем множества X^-, l и X^+ попарно не пересекаются. С другой стороны, вся плоскость разбивается на полуплоскости P_1, P_2 и прямую l: $P_1 \cup l \cup P_2$. Заметим также,что $P_1 \cup P_2 = X^- \cup X^+$.

2.2 Лемма. *Множества X^- и X^+ выпуклые, то есть вместе с любыми двумя своими точками содержат отрезок, их соединяющий.*

Доказательство. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат, например, во множестве X^-, то есть $Ax_1 + By_1 + C < 0$ и $Ax_2 + By_2 + C < 0$. Возьмем произвольную внутреннюю точку M отрезка $M_1 M_2$. Пусть координаты точки $M(x, y)$ Эта точка делит отрезок $M_1 M_2$ в некотором положительном отношении λ. Следовательно,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Поэтому

$$Ax + By + C = \frac{1}{1 + \lambda}(Ax_1 + By_1 + C) + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(Ax_2 + By_2 + C) < 0,$$

так как обе точки M_1 и M_2 принадлежат X^-. Следовательно, $M \in X^-$ и, в частности, $M \notin l$. □

Пусть теперь точка $M_1 \in X^-$, и точки M_1 и M_2 лежат в разных полуплоскостях. Например, предположим, что $M_1 \in P_1$, а $M_2 \in P_2$. Тогда отрезок $M_1 M_2$ пересекается с прямой l и, следовательно, точка пересечения M отрезка $M_1 M_2$ с прямой l не принадлежит множеству X^-. Поэтому по лемме 2.2 произвольная точка M_2 полуплоскости P_2 принадлежит множеству X^+, то есть $P_2 \subset X^+$, что означает также, что P_2 не содержит точек множества X^-. То есть $X^- \subset P_1$.

Зафиксируем теперь точку $M_2 \in P_2$. Уже доказано, что $M_2 \in X^+$. Возьмем произвольную точку M_1 полуплоскости P_1. Отрезок $M_1 M_2$ пересекается с прямой l и, следовательно, точка пересечения M отрезка $M_1 M_2$ с прямой l не принадлежит множеству X^+. Поэтому произвольная точка M_1 полуплоскости P_1 принадлежит множеству X^-, то есть $P_1 \subset X^-$, что означает также, что P_1 не содержит точек множества X^+. То есть $X^+ \subset P_2$. Таким образом, полуплоскости P_1 и P_2 совпадают соответственно с множествами X^- и X^+. Теорема доказана. □

Множество X^- называется *отрицательной полуплоскостью* по отношению к уравнению $Ax+By+C=0$ прямой l, а множество X^+ — *положительной полуплоскостью.*

2.3 Предложение. *Конец вектора с координатами $\{A,B\}$, началом которого является любая точка прямой $Ax+By+C=0$, всегда лежит в положительной полуплоскости.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0,y_0)\in l$, $\overrightarrow{M_0M}=\{A,B\}$. Тогда конец этого вектора точка M имеет координаты $M=(x_0+A,y_0+B)$. Подставив координаты точки M в уравнение прямой l, получим

$$A(x_0+A)+B(y_0+B)+C=(Ax_0+By_0+C)+(A^2+B^2)=A^2+B^2>0,$$

так как $M_0\in l$, и по крайней мере одно из чисел A и B отлично от нуля. □

3 Угол между прямыми и угол от первой прямой до второй.

Угол между двумя прямыми l_1 и l_2 — это наименьший из двух углов, которые образуют прямые l_1 и l_2, если эти углы не равны, или $\dfrac{\pi}{2}$, если эти углы равны. Угол φ между прямыми, очевидно, удовлетворяет неравенству $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Заметим, что это определение не связано с ориентацией плоскости.

Пусть теперь на плоскости дана прямоугольная система координат Oxy. Мы знаем, что вектор $p=\{-B,A\}$ является направляющим вектором прямой l, заданной уравнением $Ax+By+C=0$. Угол φ между прямыми l_1 и l_2, заданными общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, равен углу φ между их направляющими векторами $p_1=\{-B_1,A_1\}$ и $p_2=\{-B_2,A_2\}$, если $(p_1,p_2)>0$, и дополняет этот угол до π, если $(p_1,p_2)<0$. Следовательно,

$$\cos\varphi=\frac{|(p_1,p_2)|}{|p_1|\cdot|p_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Из формулы, в частности, следует, что прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $A_1A_2+B_1B_2=0$.

3.1 Угол от первой прямой до второй.

Пусть теперь **первая** прямая l_1 задана уравнением $y=k_1x+b_1$, **вторая** прямая l_2 — уравнением $y=k_2x+b_2$ в некоторой прямоугольной системе координат Oxy, определяемой ортонормированным репером Oe_1e_2. То есть на плоскости выбран (положительный) ортонормированный базис e_1,e_2, следовательно задана ориентация плоскости. Положительное направление вращения плоскости — это кратчайшее вращение от оси Ox, задаваемой вектором e_1, к оси Oy, задаваемой вектором e_2 то есть вращение в том направлении, в котором производится кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму.

Углом от первой прямой до второй назовем наименьший угол, на который необходимо повернуть первую прямую в положительном направлении до совмещения со второй прямой. Обозначим таким образом определенный угол от прямой l_1 до прямой l_2 через $\varphi_{1,2}$. Итак, определение угла $\varphi_{1,2}$ существенно зависит от ориентации плоскости, которая задается выбором системы координат Oxy. Угол от первой прямой до второй, очевидно, удовлетворяет неравенству $0\le\varphi_{1,2}<\pi$. **В прямоугольной системе координат** тангенс угла $\varphi_{1,2}$ можно найти как тангенс разности углов, которые прямые l_1 и l_2 составляют с осью абсцисс, а тангенсы этих углов в прямоугольной системе координат равны угловым коэффициентам k_1 и k_2, поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi_{1,2}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Следует отметить, что эта формула не имеет смысла, когда знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае $1+k_1k_2=0$. Но $k_1=-\dfrac{A_1}{B_1}$ и $k_2=-\dfrac{A_2}{B_2}$ — угловые коэффициенты прямых, найденные из общих уравнений $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$. Получаем уже известную нам формулу $A_1A_2+B_1B_2=0$. Поэтому прямые в этом случае перпендикулярны. Итак, прямые l_1 и l_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $1+k_1k_2=0$.

Обязательная задача.*Рассмотреть отдельно случаи, когда угловые коэффициеты k_1 или k_2 не существуют.*

3.1 Лемма. *(об углах треугольника) Если три прямые, образующие треугольник, занумерованы числами 1,2,3, то три угла — угол от первой прямой до второй, угол от второй прямой до третьей и угол от третьей прямой до первой — являются одновременно либо внутренними углами треугольника, либо внешними его углами.*

Задачи.

1. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x-y+6=0$, $x-y+4=0$, $x+2y=0$. (В частности, получаем равенство $\operatorname{arctg}7+\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\pi$!)

2. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x - 5y + 1 = 0$, а боковой стороной — прямая $12x - y - 23 = 0$. Составить уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(3, 1)$.

1 Расстояние от точки до прямой, заданной общим уравнением.

1.1 Предложение. *В прямоугольной системе координат вектор $n = \{A, B\}$ перпендикулярен прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$.*

Доказательство. Мы знаем, что вектор $p = \{-B, A\}$ является направляющим вектором прямой l. Рассмотрим вектор $n = \{A, B\}$. Поскольку $(p, n) = -BA + AB = 0$, вектор n перпендикулярен вектору p. $\square$

Замечания:
1)В аффинной системе координат вектор $\{A, B\}$, вообще говоря, не является перпендикулярным к прямой l!
2)В прямоугольной системе координат вектор $n = \{A, B\}$ называется *нормальным* вектором прямой $Ax+By+C = 0$.
Как известно, расстоянием от точки M_0 до прямой l называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

1.2 Предложение. *Расстояние от точки M_0 с координатами (x_0, y_0) до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ в прямоугольной системе координат выражается формулой*

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Доказательство. **Первое доказательство.**Пусть точка M с координатами (x, y) лежит на прямой l, заданной уравнением $Ax+By+C = 0$. Вектор $\overrightarrow{MM_0}$ имеет координаты $\{x_0-x, y_0-y\}$. Очевидно, длина перпендикуляра, опущенного на прямую l из точки M_0 равна длине вектора $\overrightarrow{MM_0}$, умноженной на $|\cos\varphi|$, где угол φ – это угол между вектором $\overrightarrow{MM_0}$ и нормалью $n = \{A, B\}$ к прямой l. Таким образом,

$$\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{MM_0}||\cos\varphi| = |\overrightarrow{MM_0}| \cdot \left|\frac{(n, \overrightarrow{MM_0})}{|\overrightarrow{MM_0}||n|}\right| = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

так как $-Ax - By = C$.

Второе доказательство.Проведем через точку M_0 прямую l_1 перпендикулярно прямой l. Точка M_1 пересечения этих прямых и будет основанием перпендикуляра, опущенного из M_0 на l. Параметрические уравнения прямой l_1 имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tA, \\ y = y_0 + tB. \end{cases}$$

Найдем параметр t_1, соответствующий точке пересечения прямых l и l_1, для чего подставим правые части параметрических уравнений прямой l_1 в общее уравнение прямой l. Получим

$$A(x_0 + t_1A) + B(y_0 + t_1B) + C = 0,$$

откуда

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$, соединяющий точку $M_0(x_0, y_0)$ с точкой

$$M_1(x_0 + t_1A, y_0 + t_1B),$$

имеет координаты $\{t_1A, t_1B\}$. Так как расстояние от точки M_0 до прямой l рано длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, получаем

$$\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |t_1| \cdot \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

$\square$

Замечание. Выражение $\dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ (расстояние со знаком $+$ или $-$) называется отклонением.

2 Уравнения плоскости. Взаимное расположение двух плоскостей.

Выберем в пространстве аффинную систему координат $Oxyz$. Пусть плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и пусть векторы $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ лежат в этой плоскости и образуют базис плоскости, то есть являются направляющими векторами плоскости. Запишем уравнение плоскости π в векторном виде

$$r = r_0 + ua + vb.$$

Здесь r — радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости π, r_0 — радиус-вектор точки M_0; u, v — числа (параметры). Переходя в этом уравнении от равенства векторов к равенству их координат, получим

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2, \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3. \end{cases}$$

параметрические уравнения плоскости. Эквивалентная система

$$\begin{cases} x - x_0 = ua_1 + vb_1, \\ y - y_0 = ua_2 + vb_2, \\ z - z_0 = ua_3 + vb_3 \end{cases}$$

выражает линейную зависимость столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{pmatrix},$$

что в свою очередь эквивалентно компланарности векторов $r - r_0$, a, b, и эквивалентно равенству

$$< r - r_0,\, a,\, b >= \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0,$$

которое будем называть *уравнением через определитель.* После раскрытия этого определителя по первой строке, получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Последнее равенство является уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$. Полагая,

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

получим

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Это уравнение называется *общим уравнением плоскости.*

2.1 Определение. Поверхностью первого порядка называется множество $\Pi = \{(x, y, z) : Ax + By + Cz + D = 0\}$, где хотя бы одно из чисел A, B или C не равно нулю.

Обязательная задача. *Доказать, что векторы $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $b = \{b_1, b_2, b_3\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$.

Таким образом, мы доказали, что координаты (x, y, z) любой точки поверхности π с направляющими векторами a и b удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, то есть $\pi \subset \Pi$, где $\Pi = \{(x, y, z) : Ax + By + Cz + D = 0\}$.

Докажем обратное включение, то есть, что $\Pi = \{(x,y,z) : Ax + By + Cz + D = 0\} \subset \pi$.

Пусть, например, $A \neq 0$. Приведем уравнение к виду $x = -\frac{D}{A} - \frac{B}{A}y - \frac{C}{A}z$. Теперь параметризуем это уравнение, то есть запишем уравнение в следующем виде:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{D}{A} - \dfrac{B}{A}u - \dfrac{C}{A}v, \\ y = u, \\ z = v \end{cases}$$

Получили параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку с радиус-вектором $r_0 = \{-\frac{D}{A}, 0, 0\}$ и направляющими векторами $a = \{-\frac{B}{A}, 1, 0\}$ $b = \{-\frac{C}{A}, 0, 1\}$. Таким образом, любая точка $M = (x,y,z) \in \Pi = \{(x,y,z) : Ax + By + Cz + D = 0\}$ с радиус-вектором $r = \{x,y,z\}$ удовлетворяет равенству $r = r_0 + ua + va$, которое является векторным уравнением плоскости в пространстве. Следовательно, точка M лежит на плоскости π, и $\Pi \subset \pi$. Таким образом доказана следующая теорема 2.2.

2.2 Теорема. *Плоскости в пространстве — это в точности поверхности первого порядка.*

Задача. *Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям*

$$\begin{cases} x = 2 + 3u - 4v, \\ y = 4 - v, \\ z = 2 + 3u. \end{cases}$$

(Ответ: $\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 4y - z + 16 = 0$)

Задача. *Составить уравнение плоскости, проходящей через точку* $(-2, 3, 0)$ *и через прямую, заданную векторным уравнением* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t$. *Система координат аффинная.* (Ответ: $x - 3y - 3z + 11 = 0$)

3 Взаимное расположение двух плоскостей

3.1 Лемма. (О параллельном векторе.)

Вектор $a = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ *параллелен плоскости* π, *задаваемой общим уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *тогда и только тогда, когда* $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$.

Доказательство. Вектор параллелен плоскости тогда и только тогда, когда вместе с его началом плоскости принадлежит е его конец. Отложим вектор $a = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости π. Тогда его конец имеет координаты $M_1(x_0 + \alpha, y_0 + \beta, z_0 + \gamma)$. Таким образом, параллельность вектора плоскости эквивалентна равенству $A(x_0+\alpha) + B(y_0+\beta) + C(z_0+\gamma) + D = 0$, которое, с учетом условия $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, дает нам эквивалентное равенство $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. □

3.2 Предложение. (О пересекающихся плоскостях.) *Плоскости* π_1 *и* π_2, *заданные уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\{A_1, B_1, C_1\}$ *и* $\{A_2, B_2, C_2\}$ *неколлинеарны.*

Доказательство. Из геометрических соображений ясно, что если плоскости пересекаются, то существует единственный линейно независимый вектор, параллельный каждой из плоскостей и, следовательно, параллельный линии их пересечения. Обозначим этот вектор $a = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. По лемме 3.1 о параллельном векторе координаты вектора a удовлетворяют следующей системе двух уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0 \\ A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0 \end{array} \right. .$$

Хорошо известно, что эта система двух уравнений с тремя неизвестными имеет с точностью до пропорциональности только одно решение в том и только в том случае, когда хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 A_1 \\ C_2 A_2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Если, например,

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2},$$

координаты векторов $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ не являются пропорциональными и, следовательно, эти векторы неколлинеарны.

Обратно, если векторы $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$ не являются коллинеарными, то по крайней мере один из вышеприведенных определителей не равен нулю, и следовательно, по лемме 3.1 о параллельном векторе найдется не более одного линейно независимого вектора, параллельного одновременно двум плоскостям. Опять же из геометрических соображений заключаем, что в этом случае плоскости обязаны пересекаться. Предложение 3.2 доказано. □

3.3 Следствие. (О параллельных или совпадающих плоскостях.) *Плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

3.4 Предложение. (О совпадении плоскостей.)

Плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Проверим необходимость. Согласно предложению 3.3 существует такое число λ, что

$$\{A_1, B_1, C_1\} = \lambda\{A_2, B_2, C_2\}.$$

Возьмем точку $(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1 = \pi_2$. Тогда

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0,$$

$$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0.$$

Умножая второе из этих числовых равенств на λ и вычитая первое, получим $D_1 = \lambda D_2$, что и требовалось доказать. □

Из предложений 3.3 и 3.4 вытекает

3.5 Следствие. *Плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$, параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

4 Пучок плоскостей

4.1 Определение. *Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Очевидно, собственный пучок задается любыми двумя своими плоскостями.

4.2 Предложение. (Уравнение пучка.) *Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad и \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

определяют собственный пучок. Тогда плоскость π_3 принадлежит тому же пучку в том и только в том случае, когда она задается уравнением

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Это уравнение называется *уравнением пучка плоскостей*, задаваемого плоскостями π_1 и π_2. Доказательство предложения совершенно аналогично доказательству соответствующих предложений для прямых на плоскости.

Доказательство. Достаточность очевидна. Проверим необходимость. Пусть плоскость π_3, задаваемая уравнением

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

проходит через прямую l, по которой пересекаются плоскости π_1 и π_2. Возьмем на плоскости π_3 какую-нибудь точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не лежащую на прямой l. Сначала подберем числа λ_1 и μ_1 только для точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Положим

$$\lambda_1 = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2), \quad \mu_1 = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1.$$

Поскольку точка M_1 не может одновременно принадлежать плоскостям π_1 и π_2, по крайней мере одно из чисел λ_1 и μ_1 отлично от нуля.

Уравнение

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

задает поверхность первого порядка. В самом деле, если

$$\begin{cases} \lambda_1A_1 + \mu_1A_2 = 0 \\ \lambda_1B_1 + \mu_1B_2 = 0 \\ \lambda_1C_1 + \mu_1C_2 = 0 \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что означает коллинеарность векторов $\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}$, а это невозможно по предложению 3.2, так как плоскости π_1 и π_2 пересекаются. Поэтому уравнение

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu_1(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

определяет некоторую плоскость π. Она проходит через прямую l. Подставляя координаты точки M_1 в уравнение плоскости π, получаем

$$\lambda_1(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + \mu_1(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = \lambda_1\mu_1 + \mu_1(-\lambda_1) = 0,$$

т.е. точка M_1 также принадлежит плоскости π. Значит, плоскости π и π_3 совпадают. Необходимость доказана. □

4.3 Определение. *Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных между собой.

Несобственный пучок, очевидно, задается одной плоскостью. В отношении несобственного пучка плоскостей справедлива та же самая теорема, что и для собственного пучка.

4.4 Предложение. (**Уравнение пучка.**) *Пусть плоскости π_1 и π_2, задаваемые уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad и \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

параллельны , то есть принадлежат несобственному пучку Π. Тогда плоскость π_3 принадлежит пучку Π (то есть параллельна плоскостям π_1 и π_2) в том и только в том случае, когда плоскость π_3 задается уравнением

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Доказательство. **Важное замечание.** *Если несобственный пучок задается плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$, то все плоскости, входящие в этот несобственный пучок параллельны и поэтому в силу предложения 3.3 имеют уравнения $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, где коэффициент D_1 меняется.*

Докажем необходимость. Действительно, в силу пропорциональности коэффициентов при x, y и z по предложению 3.3 уравнения трех данных параллельных плоскостей можно записать в виде

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad \pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0, \quad \pi_3 : Ax + By + Cz + D_3 = 0.$$

Подберем теперь коэффициенты λ и μ таким образом, что

$$\lambda(Ax + By + Cz + D_1) + \mu(Ax + By + Cz + D_2) = Ax + By + Cz + D_3.$$

Приравнивая коэффициенты при x, y, z и свободные члены, получаем систему

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1, \\ \lambda D_1 + \mu D_2 = D_3. \end{cases}$$

Так как $D_1 \neq D_2$, данная система имеет единственное (ненулевое) решение, и, следовательно, любая плоскость несобственного пучка задается уравнением, которой является линейной комбинацией уравнений двух других плоскостей. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. В самом деле, пусть есть линейная комбинация уравнений

$$\lambda(Ax + By + Cz + D_1) + \mu(Ax + By + Cz + D_2) = 0.$$

Тогда по предложению 3.3 эта линейная комбинация задает плоскость, параллельную плоскостям π_1 и π_2 и следовательно, принадлежащую данному несобственному пучку. Достаточность доказана. $\square$

1 Полупространства

1.1 Теорема. *Пусть плоскость π задана своим общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда множества X^- и X^+ всех точек $M(x, y, z)$ пространства, для которых соответственно*

$$Ax + By + Cz + D < 0 \quad и \quad Ax + By + Cz + D > 0,$$

являются полупространствами, ограниченными плоскостью π.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $X^- \cup \pi \cup X^+$ — всё полупространство, причем множества X^-, π и X^+ попарно не пересекаются. С другой стороны, пространство разбивается на полупространства P_1, P_2 и плоскость π: $P_1 \cup \pi \cup P_2$. Заметим,что $P_1 \cup P_2$=$X^- \cup X^+$.

1.2 Лемма. *Множества X^- и X^+ выпуклые, то есть вместе с любыми двумя своими точками содержат отрезок, их соединяющий.*

Доказательство. Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат, например, во множестве X^-, то есть $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 < 0$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D_2 < 0$. Возьмем произвольную внутреннюю точку M отрезка M_1M_2. Пусть координаты точки $M(x, y)$ Эта точка делит отрезок M_1M_2 в некотором положительном отношении λ. Следовательно,

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Поэтому

$$Ax + By + Cz + D = \frac{1}{1 + \lambda}(Ax_1 + By_1 + C_1z + D_1) + \frac{\lambda}{1 + \lambda}(Ax_2 + By_2 + C_2z_2 + D_2) < 0,$$

так как обе точки M_1 и M_2 принадлежат X^-. Следовательно, $M \in X^-$ и, в частности, $M \notin \pi$. □

Пусть теперь точка $M_1 \in X^-$, и точки M_1 и M_2 лежат в разных полупространствах. Например, предположим, что $M_1 \in P_1$, а $M_2 \in P_2$. Тогда отрезок M_1M_2 пересекается с плоскостью π и, следовательно, точка пересечения M отрезка M_1M_2 с плоскостью π не принадлежит множеству X^-. Поэтому по лемме 1.2 произвольная точка M_2 полуплоскости P_2 принадлежит множеству X^+, то есть $P_2 \subset X^+$, что означает также, что P_2 не содержит точек множества X^-. То есть $X^- \subset P_1$.

Зафиксируем теперь точку $M_2 \in P_2$. Уже доказано, что $M_2 \in X^+$. Возьмем произвольную точку M_1 полуплоскости P_1. Отрезок M_1M_2 пересекается с плоскостью π и, следовательно, точка пересечения M отрезка M_1M_2 с плоскостью π не принадлежит множеству X^+. Поэтому произвольная точка M_1 полуплоскости P_1 принадлежит множеству X^-, то есть $P_1 \subset X^-$, что означает также, что P_1 не содержит точек множества X^+. То есть $X^+ \subset P_2$. Таким образом, полупространства P_1 и P_2 совпадают соответственно с множествами X^- и X^+. Теорема доказана. □

Множество X^- называется *отрицательным полупространством по отношению к уравнению* $Ax+By+Cz+D = 0$ плоскости π, а множество X^+ — *положительным полупространством по отношению к уравнению* $Ax+By+Cz+D = 0$ плоскости π.

1.3 Предложение. *Пусть дан вектор с координатами $\{A, B, C\}$, началом которого является любая точка плоскости π, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда конец этого вектора всегда лежит в положительном полупространстве по отношению к уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$.*

Доказательство. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$, $\overrightarrow{M_0M} = \{A, B, C\}$. Тогда конец этого вектора точка M имеет координаты $M = (x_0 + A, y_0 + B, z_0 + C)$. Подставив координаты точки M в уравнение плоскости π, получим

$$A(x_0 + A) + B(y_0 + B) + C(z_0 + C) + D = (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + (A^2 + B^2 + C^2) = A^2 + B^2 + C^2 > 0,$$

поскольку $M_0 \in \pi$, и по крайней мере одно из чисел A и B отлично от нуля. □

2 Прямая в пространстве. Прямая как пересечение двух плоскостей.

2.1 Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве

Зафиксируем в пространстве аффинную систему координат $Oxyz$. Возьмем прямую l с точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой и направляющим вектором $p = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Напишем векторное уравнение прямой

$$r = r_0 + tp.$$

Здесь r — радиус-вектор произвольной точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой l, r_0 — радиус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Перейдем в этом уравнении от равенства векторов к равенству их координат:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha, \\ y = y_0 + t\beta, \\ z = z_0 + t\gamma. \end{cases}$$

Получили *параметрические* уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $p = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Исключая из системы параметр t, получаем *каноническое* уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Если, например, $\alpha = 0$, то $x - x_0 = 0$. Это означает, что прямая лежит в плоскости $x = x_0$ и удовлетворяет каноническому уравнению

$$\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Если же, например, $\alpha = \beta = 0$, то прямая лежит в плоскостях $x - x_0 = 0$ и $y - y_0 = 0$, т.е. является линией их пересечения.

Разновидностью канонического уравнения является полезное *уравнение прямой, проходящей через две точки*:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве очень удобны в том смысле, что позволяют сразу увидеть точку, через которую проходит прямая, а также её направляющий вектор.

2.2 Прямая как пересечение двух плоскостей

Каноническое уравнение прямой равносильно системе из двух уравнений первой степени, каждое из которых является уравнением плоскости. Таким образом каждая прямая в пространстве может быть представлена как линия пересечения двух плоскостей.

2.1 Предложение. *Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ в аффинной пересекаются по прямой l. Тогда вектор*

$$p = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

является направляющим вектором этой прямой.

Доказательство. Отметим, прежде всего, неколлинеарность векторов $\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\{A_2, B_2, C_2\}$. Это вытекает из следствия **??**, по которому получалось бы, что плоскости параллельны или совпадают. Поэтому по крайней мере одна из координат вектора p отлична от нуля. Рассмотрим два определителя:

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Эти определители равны нулю, так как имеют одинаковые строки. Раскрывая по первой строке, получаем при $i = 1, 2$

$$A_i \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_i \cdot \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_i \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Но это равенство является условием параллельности вектора p плоскостям π_i, $i = 1, 2$, по лемме о параллельном векторе. Итак, ненулевой вектор p параллелен каждой из плоскостей π_1 и π_2, следовательно, он является направляющим вектором линии их пересечения. □

Задача. *Даны три прямые*

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4t. \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}.$$

Написать уравнение прямой, пересекающей первые две из данных прямых и параллельной третьей прямой. Система координат аффинная.

(Ответ: $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$)

Задача. *Составить уравнение прямой проходящей через точку* $(2, 3, 1)$ *и пересекающей прямые*

$$\left\{ \begin{array}{rr} x + y = & 0 \\ x - y + z + 4 = & 0 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{rr} x + 3y - 1 = & 0 \\ y + z - 2 = & 0. \end{array} \right.$$

(Ответ: $\left\{ \begin{array}{rr} x - 9y + 5z + 20 = & 0 \\ x - 2y - 5z + 9 = 0 = & 0 \end{array} \right.$.)

3 Угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью.

Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$, пересекаются по прямой l. Проведем плоскость π перпендикулярную прямой l. Плоскость π пересекает плоскости π_1 и π_2 по прямым l_1 и l_2. Будем считать величиной угла между плоскостями π_1 и π_2 величину угла между прямыми l_1 и l_2.

Пусть в пространстве дана **прямоугольная система координат** $Oxyz$. Лемма **??** о параллельном векторе показывает, что вектор n с координатами $n = \{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости π, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор $n = \{A, B, C\}$ называют *нормальным вектором* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Замечание к предыдущему разделу. Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$, пересекаются по прямой l. Тогда направляющий вектор p прямой l (**в прямоугольной системе координат!**) может быть найден по формуле векторного произведения $p = [n_1, n_2]$, где $n_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Поскольку векторы $n_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $n_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ перпендикулярны прямой l, эти векторы лежат в секущей плоскости π, перпендикулярны прямым l_1 и l_2 соответственно, и по школьной теореме об углах с соответственно перпендикулярными сторонами *угол между плоскостями* π_1 и π_2 равен углу φ между их нормальными векторами, если этот угол не превосходит $\pi/2$, и равен дополнительному до π углу в противном случае.

Поэтому угол φ между плоскостями π_1 и π_2, заданными **в прямоугольной системе координат** уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

находится из формулы

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Угол ψ *между прямой* l *и плоскостью* π есть по определению угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Угол этот заключен в пределах от 0 до $\pi/2$. Пусть $p = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор прямой l, а $n = \{A, B, C\}$ — нормальный вектор плоскости π. Тогда

$$\sin\psi = |\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)| = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

4 Расстояние от точки до плоскости, заданной общим уравнением.

Вывод формулы расстояния от точки до плоскости, использующий перпендикулярность вектора $n = \{A, B, C\}$ плоскости π, аналогичен выводу формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости.

4.1 Предложение. *Расстояние от точки* M_0 *с координатами* (x_0, y_0, z_0) *до плоскости* π, *заданной уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *в прямоугольной системе координат определяется по формуле*

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Доказательство. **Первое доказательство.** Пусть точка M с координатами (x, y, z) лежит на плоскости π, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор $\overrightarrow{MM_0}$ имеет координаты $\{x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z\}$. Очевидно, длина перпендикуляра, опущенного на плоскость π из точки M_0 равна длине вектора $\overrightarrow{MM_0}$, умноженной на $|\cos\varphi|$, где угол φ – это угол между вектором $\overrightarrow{MM_0}$ и нормалью $n = \{A, B, C\}$ к плоскости π. Таким образом,

$$\rho(M_0, \pi) = |\overrightarrow{MM_0}||\cos\varphi| = |\overrightarrow{MM_0}| \cdot \left|\frac{(n, \overrightarrow{MM_0})}{|n||\overrightarrow{MM_0}|}\right| = \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

так как $-Ax - By - Cz = D$.

Второе доказательство. Проведем через точку M_0 прямую l_1 перпендикулярно плоскости π. Точка M_1 пересечения прямой и плоскости и будет основанием перпендикуляра, опущенного из M_0 на π. Параметрические уравнения прямой l_1 имеют вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tA, \\ y = y_0 + tB \\ z = z_0 + tC. \end{cases}$$

Найдем параметр t_1, соответствующий точке пересечения прямой l_1 и плоскости π, для чего подставим правые части параметрических уравнений прямой l_1 в общее уравнение плоскости π. Получим

$$A(x_0 + t_1 A) + B(y_0 + t_1 B) + C(z_0 + tC) + D = 0,$$

откуда

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$, соединяющий точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с точкой $M_1(x_0 + t_1A, y_0 + t_1B, z_0 + t_1C)$, имеет координаты $\{t_1A, t_1B, t_1C\}$. Так как расстояние от точки M_0 до прямой l рано длине вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, получаем

$$\rho(M_0, \pi) = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |t_1| \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

□

Задача. *Составить уравнения ортогональной проекции прямой* $x = 3 + 5t, \quad y = -1 + t, \quad z = 4 + t$ *на плоскость* $2x - 2y + 3z - 5 = 0$. (Ответ: $\begin{cases} 2x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ 5x - 13y - 12z + 20 = 0. \end{cases}$)

Задача. *Даны прямые*

$$\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 4t. \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t. \end{cases}$$

Написать уравнение их общего перпендикуляра. Система координат прямоугольная. (Ответ: $\begin{cases} 64x - 14y - 17z - 206 = 0, \\ 13x + 20y + 39z - 110 = 0. \end{cases}$)

1 Линии второго порядка и их матрицы

1.1 Определение. *Линией второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой системе координат Oxy удовлетворяют уравнению $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$. Это уравнение называется *общим уравнением* линии второго порядка.

Заметим, что линии второго порядка также называются кривыми второго порядка.

1.2 Определение. *Матрицей линии второго порядка* называется (большая) матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$.

1.3 Определение. *Квадратичной формой* называется квадратичная часть многочлена $F(x,y)$, то есть многочлен

$$F_1(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

1.4 Определение. *Матрицей квадратичной формы* называется матрица (малая матрица) $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Поскольку степень многочлена $F(x,y)$ равна двум, малая матрица A_1 не является нулевой. Квадратичная форма может быть записана в матричной форме:

$$F_1(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x,y)\, A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Задача.*Проверить, что многочлен $F(x,y)$ в матричной форме можно записать так:*

$$F(x,y) = (x,y,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $O'x'y'$ — некоторая другая (новая) аффинная система координат, и переход от старой системы Oxy к системе $O'x'y'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2. \end{cases}$$

После замены переменных получим другое уравнение линии второго порядка $G(x',y') \equiv F(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, c_{21}x' + c_{22}y' + c_2) = 0$ в новой системе координат $O'x'y'$. Найдем большую матрицу A' линии второго порядка в новой системе координат $O'x'y'$. Для этого дополним формулы перехода очевидным равенством $1 = 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + 1$. Получим

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2, \\ 1 = 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + 1, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y,1) = (x',y',1)\, D^T, \text{ где } D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть точка M имеет координаты (x,y) и (x',y') в системах Oxy и $O'x'y'$. Тогда

$$(x,y,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x',y',1)\, D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x',y',1)\, A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, равенство

$$D^T A D = A'$$

показывает, как меняется большая матрица A при переходе к новой системе координат.

Докажем, что малая матрица A_1 меняется аналогичным образом:

$$A_1' = C^T A_1 C.$$

Для этого наряду с реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$, определяющими системы координат Oxy и $O'x'y'$, рассмотрим репер $Oe_1'e_2'$. Пусть он определяет систему координат $Ox''y''$. Тогда формулы перехода от системы Oxy к системе $Ox''y''$ принимают следующий вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (x, y) = (x'', y'')\, C^T, \ \text{где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Сначала найдем малую матрицу A_1'' квадратичной формы в системе координат $Ox''y''$. Получим

$$(x, y)\, A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x'', y'')\, C^T A_1 C \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = (x'', y'')\, A_1'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix},$$

то есть

$$C^T A_1 C = A_1''.$$

Поскольку реперы $O'e_1'e_2'$ и $Oe_1'e_2'$ отличаются только началом, соответствующие системы координат получаются одна из другой параллельным сдвигом, т.е.

$$\begin{cases} x'' = x' + c_1, \\ y'' = y' + c_2. \end{cases}$$

Очевидно, что при параллельном переносе системы координат квадратичная форма не меняется. Поэтому, если обозначить через A_1' матрицу квадратичной формы в системе координат $O'x'y'$, то $A_1' = A_1''$ и, следовательно, формула $A_1' = C^T A_1 C$ доказана.

2 Ортогональные инварианты линий второго порядка

Рассмотрим определитель большой матрицы A : $\quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$

2.1 Предложение. *Если переход от системы координат Oxy к системе координат $O'x'y'$ происходит с помощью формул* $\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2, \end{cases}$ *с ортогональной матрицей* $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, *то* $\Delta' = \Delta$.

Доказательство. В самом деле,

$$\Delta' = |A'| = |D^T A D| = |D^T| \cdot |A| \cdot |D| = |A| \cdot |D|^2 = |A| \cdot |C|^2 = |A| = \Delta.$$

□

В частности, для линии второго порядка число Δ не меняется при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой. Поэтому число Δ называют *ортогональным инвариантом* линии второго порядка.

2.2 Определение. *Характеристическим многочленом* матрицы квадратичной формы $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется многочлен $|A_1 - \lambda E|$.

2.3 Предложение. *Характеристический многочлен является ортогональным инвариантом, то есть не меняется при переходе от одной прямоугольной системе координат к другой прямоугольной системе координат.*

Доказательство. $|A_1' - \lambda E| = |C^T A_1 C - \lambda C^T E C| = |C^T (A_1 - \lambda E) C| = |C^T||A_1 - \lambda E||C| = |A_1 - \lambda E|$, так как определитель ортогональной матрицы равен единице. □

2.4 Следствие. *Ортогональными инвариантами являются след* $S = a_{11} + a_{22}$ *и определитель* $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ *матрицы A_1 квадратичной формы.*

Доказательство. $|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - S\lambda + \delta.$ □

Поскольку характеристический многочлен является ортогональным инвариантом, то ортогональными инвариантами являются и корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена.

Задача. *Доказать, что корни характеристического многочлена являются действительными числами.*

3 Преобразование уравнения линии второго порядка при повороте осей координат

Пусть $L = \{(x, y) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0\}$ — линия второго порядка, заданная в некоторой **прямоугольной системе координат** Oxy.

От прямоугольной системы координат Oxy перейдем к новой прямоугольной системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$, поворачивая оси исходной системы координат на угол φ. Тогда

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену (при этом достаточно следить только за произведением $\widetilde{x}\widetilde{y}$!)

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}\cos\varphi - \widetilde{y}\sin\varphi, \\ y = \widetilde{x}\sin\varphi + \widetilde{y}\cos\varphi, \end{cases}$$

в квадратичной форме

$$F_1(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$

Найдем

$$\widetilde{a}_{12} = (-a_{11} + a_{22})\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Итак, если $a_{12} \neq 0$ то, поворачивая систему координат на угол φ такой, что

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

получим систему координат, в которой уравнение линии второго порядка в системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$ примет вид

$$\widetilde{a}_{11}\widetilde{x}^2 + \widetilde{a}_{22}\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1\widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2\widetilde{y} + a_0 = 0.$$

Итак, мы доказали существование такого угла φ, что после поворота системы координат на этот угол в общем уравнении линии второго порядка исчезает член, содержащий произведение xy. Разумеется, из уравнения $\operatorname{ctg} 2\varphi = \dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$ можно определить угол φ, но возникающие при этом формулы громоздки и трудны для запоминания.

При решении конкретных задач угол φ удобнее находить с помощью другой формулы, которую необходимо помнить:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

Эту формулу можно вывести двумя способами.

Первый способ. Считая $\widetilde{a}_{12} = 0$, получаем

$$\lambda_1\cos\varphi = \lambda_1\cos\varphi + 0 = \lambda_1\cos\varphi - \widetilde{a}_{12}\sin\varphi = (a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi)\cos\varphi -$$

$$-((-a_{11} + a_{22})\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))\sin\varphi = a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi,$$

так как

$$\lambda_1 = \widetilde{a}_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi.$$

Из уравнения

$$\lambda_1\cos\varphi = a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi$$

получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

Второй способ.(Матричный вывод.)

Напомним, что уравнение линии второго порядка после поворота в системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$ имеет вид

$$\widetilde{a}_{11}\widetilde{x}^2 + \widetilde{a}_{22}\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1\widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2\widetilde{y} + a_0 = 0.$$

Поэтому

$$\widetilde{A_1} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & 0 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что числа $\widetilde{a}_{11}$ и $\widetilde{a}_{22}$ являются корнями λ_1 и λ_2 характеристического многочлена. В самом деле, характеристический многочлен является ортогональным инвариантом. Если мы напишем характеристический многочлен в системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$, то, очевидно, получим $(\widetilde{a}_{11}-\lambda)(\widetilde{a}_{22}-\lambda)$, следовательно, числа $\widetilde{a}_{11}$ и $\widetilde{a}_{22}$ являются корнями λ_1 и λ_2 характеристического многочлена.

Теперь напишем очевидное матричное равенство:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, что то же самое,

$$\widetilde{A}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что выписывая это равенство, мы уже предполагаем существование угла φ и, следовательно, существование матрицы $\widetilde{A}_1$! Это равенство написано в системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$. Вернемся в исходную систему координат Oxy. Поскольку $\widetilde{A}_1 = C^TA_1C$, а $E = C^TC$ (так как матрица C ортогональна), получим

$$C^TA_1C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C^TC\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Умножим это равенство слева на матрицу C — обратную к C^T.

$$A_1C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

А теперь заметим, что

$$C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},$$

поэтому получаем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\cos\varphi \\ \lambda_1\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad A_1\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Приравнивая по первой строке, находим

$$a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi = \lambda_1\cos\varphi \quad\Longleftrightarrow\quad a_{12}\sin\varphi = (\lambda_1 - a_{11})\cos\varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

Задача. *Какая формула получится, если* $(*)$ *приравнять по второй строке?* $\left(\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{22}}{a_{12}}\right)$.

Заметим, что матричный способ позволяет сразу находить координаты новых базисных векторов в старой системе координат Oxy, то есть направления осей координат системы, повернутой на угол, обнуляющий коэффициент при произведении xy. Обозначим эти новые базисные векторы через e_1' и e_2'. В самом деле, пусть $e_1' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда $A_1e_1' = \lambda_1e_1'$ и $|e_1'| = 1$. В развернутом виде получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda_1x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Задача. *Доказать равносильность*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad\Longleftrightarrow\quad a_{11}x + a_{12}y = \lambda_1x \quad\Longleftrightarrow\quad a_{12}x + a_{22}y = \lambda_1y.$$

Второй базисный вектор e_2' можно найти из аналогичной системы: $\begin{cases} A_1e_2' = \lambda_2e_2' \\ |e_2'| = 1 \end{cases}$, но на практике проще повернуть уже найденный первый вектор $e_1' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ на 90°, то есть $e_2' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

Важное замечание. Линия L может быть задана и в аффинной системе координат. В точности те же самые рассуждения показывают, что существует другая аффинная система координат, в которой $a'_{12} = 0$. Переход к новой системе координат осуществляется с помощью формул "поворота". Слово поворот взято в кавычки потому, что при переходе от одной аффинной системы координат к другой преобразование задаваемое этими формулами не обязано быть поворотом.

4 Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Пусть линия второго порядка задана общим уравнением в некоторой **прямоугольной системе координат**. Справедлива следующая

4.1 Теорема. (Основная теорема о линиях второго порядка.)

Для любой линии второго порядка $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0 = 0$, *заданной в некоторой прямоугольной системе координат* Oxy, *существует прямоугольная система координат* $O'x'y'$, *в которой уравнение этой линии имеет один из следующих видов:*

1) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$ *эллипс;*
2) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1, \quad a \geq b > 0,$ *мнимый эллипс;*
3) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0,$ *мнимые пересекающиеся прямые;*
4) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1,$ *гипербола;*
5) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0,$ *пересекающиеся прямые;*
6) $y'^2 = 2px', \quad p > 0,$ *парабола;*
7) $y'^2 - a^2 = 0, \quad a \neq 0,$ *пара параллельных прямых;*
8) $y'^2 + a^2 = 0, \quad a \neq 0,$ *пара мнимых параллельных прямых;*
9) $y'^2 = 0,$ *пара совпадающих прямых.*

Замечание. Уравнения 1)–9) называются *каноническими уравнениями* линий второго порядка, а соответствующая прямоугольная система координат $O'x'y'$ *канонической системой координат.*

4.1 Доказательство основной теоремы. Простейшие уравнения

Доказательство. Поворотом системы координат можно добиться, чтобы коэффициент a_{12} общем уравнении $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, будет равен нулю. Теперь параллельным переносом полученной системы, то есть выделением полных квадратов будем добиваться, чтобы в уравнении

$$\widetilde{a}_{11}\widetilde{x}^2 + \widetilde{a}_{22}\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1\widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2\widetilde{y} + a_0 = 0$$

исчезли члены первой степени. При этом $\widetilde{a}_{11} = \lambda_1, \quad \widetilde{a}_{22} = \lambda_2$ — корни характеристического уравнения, поэтому перепишем уравнение следующим образом:

$$\lambda_1\widetilde{x}^2 + \lambda_2\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1\widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2\widetilde{y} + a_0 = 0$$

Случай 1. $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0$. Выделяя полные квадраты, запишем уравнение в следующем виде

$$\lambda_1\left(\widetilde{x} + \frac{\widetilde{a}_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(\widetilde{y} + \frac{\widetilde{a}_2}{\lambda_2}\right)^2 + a_0 - \frac{\widetilde{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widetilde{a}_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Это уравнение после замены переменных

$$x' = \widetilde{x} + \frac{\widetilde{a}_1}{\lambda_1}, \quad y' = \widetilde{y} + \frac{\widetilde{a}_2}{\lambda_2}$$

и обозначения

$$C = a_0 - \frac{\widetilde{a}_1^2}{\lambda_1} - \frac{\widetilde{a}_2^2}{\lambda_2}$$

превращается в уравнение

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0,$$

которое будем называть *простейшим* уравнением. Простейшее уравнение $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0$, очевидно, пропорционально уравнениям 1) — 5). От простейшего уравнения до канонического один шаг! При этом если мы хотим получить каноническое уравнение эллипса (с условием $a \geq b > 0$) достаточно переименовать, если это необходимо, оси координат.

Случай 2. $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1 \widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2 \widetilde{y} + a_0 = 0$. Тогда

$$\lambda_2 \left(\widetilde{y} + \frac{\widetilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2\widetilde{a}_1 \widetilde{x} + a_0 - \frac{\widetilde{a}_2^2}{\lambda_2} = 0.$$

Пусть

$$D = a_0 - \frac{\widetilde{a}_2^2}{\lambda_2}.$$

Случай 2.1. Если $\widetilde{a}_1 \neq 0$, то

$$\lambda_2 \left(\widetilde{y} + \frac{\widetilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2\widetilde{a}_1 \left(\widetilde{x} + \frac{D}{2\widetilde{a}_1} \right) = 0.$$

После замены

$$x' = \widetilde{x} + \frac{D}{2\widetilde{a}_1} \quad y' = \widetilde{y} + \frac{\widetilde{a}_2}{\lambda_2} \quad ,$$

получим *простейшее* уравнение

$$\lambda_2 y'^2 + 2\widetilde{a}_1 x' = 0,$$

которое пропорционально уравнению 6).

Случай 2.2. Если же $\widetilde{a}_1 = 0$, то уравнение будет иметь вид

$$\lambda_2 \left(\widetilde{y} + \frac{\widetilde{a}_2}{\lambda_2} \right)^2 + D = 0,$$

или после замены получаем *простейшее* уравнение

$$\lambda_2 y'^2 + D = 0,$$

которое пропорционально уравнениям 7)–9). Теорема 4.1 доказана. □

Важное замечание. Линия L может быть задана и в аффинной системе координат. В точности те же самые рассуждения показывают, что существует другая аффинная система координат, в которой уравнение линии будет каноническим. Переход к новой системе координат осуществляется с помощью формул “поворота” и параллельного переноса.

1 Определение канонического уравнения по ортогональным инвариантам в центральном случае

Итак, мы показали, что переходя от одной прямоугольной системы координат Oxy к другой прямоугольной системе координат $O'x'y'$ с помощью поворота и параллельного переноса, можно от общего уравнения $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ линии второго порядка перейти к одному из трех видов простеших уравнений:

1. $\lambda_1 {x'}^2+\lambda_2 {y'}^2+C=0$, где $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2\neq 0$;
2.1. $\lambda_2 {y'}^2+2a_1'x'=0$, где через a_1' обозначен коэффициент $\widetilde{a}_1\neq 0$.
2.2. $\lambda_2 {y'}^2+D=0$.

Соответственно, на три группы разбиваются уравнения линий второго порядка. Оказывается, каноническое уравнение линии второго порядка и, следовательно, ее вид полностью определяются ортогональными инвариантами. С одним исключением, которым является случай параллельных прямых и который мы рассмотрим потом отдельно. Итак, будем искать канонические уравнения по ортогональным инвариантам, вычисленным в исходной системе координат Oxy. То есть не находя формул перехода к канонической системе координат!

1.1 Центральный случай, $\delta\neq 0$.

Рассмотрим первый случай, когда $\delta\neq 0$, и который будем называть центральным, а линии второго порядка, рассматриваемые в этом случае — центральными.

1.

$$\lambda_1 {x'}^2+\lambda_2 {y'}^2+C=0 \qquad A'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}.$$

Приравнивая ортогональные инварианты простейшего уравнения в канонической системе координат и в исходной системе координат, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\lambda_1\lambda_2 C=\Delta\\ \lambda_1\lambda_2=\delta\\ \lambda_1+\lambda_2=S\end{cases}$$

Очевидно, простейшее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\lambda_1 {x'}^2+\lambda_2 {y'}^2+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

Если $\delta>0$, то знаки λ_1 и λ_2 совпадают и совпадают, очевидно, со знаком S. Поэтому, если знак S не совпадает со знаком $C=\Delta/\delta$, то из простейшего уравнения получается каноническое уравнение эллипса $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. Чтобы полученное уравнение было именно каноническим ($a\geqslant b$), необходимо выполнение неравенства $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|$. Но лучше не запоминать такого рода правила, а занумеровав корни характеристического уравнения произвольным образом, перейти от простейшего уравнения к каноническому и в случае неудачи (не получилось каноническое уравнение!) вернуться на шаг назад и поменять нумерацию корней характеристического уравнения.

Эллипс $\iff$ $\delta>0,\quad S\Delta<0.$
Мнимый эллипс $\iff$ $\delta>0,\quad S\Delta>0.$
мнимые пересекающиеся прямые $\iff$ $\delta>0,\quad \Delta=0.$

Если же $\delta<0$, то знаки λ_1 и λ_2 различаются, и если при этом $\Delta\neq 0$, из простейшего уравнения получаем каноническое уравнение гиперболы $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ при соответствующе выбранной нумерации корней характеристического уравнения.

Гипербола $\iff$ $\delta<0,\quad \Delta\neq 0.$
пересекающиеся прямые $\iff$ $\delta<0,\quad \Delta=0.$

Задача. *Определить вид и расположение относительно прямоугольной системы координат Oxy линии второго порядка $x^2+x-6=0$.* (пара параллельных прямых $x=2$ и $x=-3$.)

Задача. *Доказать, что если $S=0$, то $\delta<0$.*

Задача. *Является ли число $a_{11}^2+a_{22}^2$ ортогональным инвариантом?*
Задача. *Является ли число $a_{11}+a_{22}+a_0$ ортогональным инвариантом?*

2 Определение канонического уравнения параболы по ортогональным инвариантам.

2.1 Парабола: $\delta = 0, \Delta \neq 0$.

Заметим, что если мы попытаемся выписать простейшее уравнение для центрального случая $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0$, то условие $\delta = 0, \Delta \neq 0$, очевидно, не позволит нам найти C, поэтому мы вынуждены перейти к следующему виду **2.1.**

$$\lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' = 0 \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае в соответствии с основной теоремой **??** получаем параболу. Приравнивая ортогональные инварианты в канонической системе координат и в исходной системе координат, получаем

$$\begin{cases} -\lambda_2 (a_1')^2 = \Delta \\ \lambda_1 \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = S \end{cases} \iff \begin{cases} -\lambda_2 (a_1')^2 = \Delta \\ \lambda_2 = S \end{cases}$$

Заметим, что из уравнения $-S(a_1')^2 = \Delta$ следует, что знаки S и Δ противоположны. Далее, $a_1' = \pm\sqrt{-\frac{\Delta}{S}}$ и уравнение 2.1 принимает вид

$$S y'^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}} \cdot x' = 0.$$

При этом знак перед корнем должен быть противоположен знаку S, то есть совпадать со знаком Δ. Тогда получим для параболы каноническое уравнение

$$y'^2 = 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}} \cdot x'.$$

Парабола $\iff \delta = 0, \quad \Delta \neq 0.$

3 Семиинвариант линии второго порядка.

пара параллельных прямых: $y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 1.$

пара мнимых параллельных прямых: $y^2 + 1 = 0 \Rightarrow \delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 1.$

пара совпадающих прямых: $y^2 = 0 \Rightarrow \delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad S = 1.$

Как же различить эти случаи?

3.1 Определение. *Семиинвариантом* линии второго порядка называется число

$$K = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Число K является суммой миноров элементов a_{11} и a_{22} большой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$,:

$$K = (a_{22} + a_{11})a_0 - (a_1)^2 - (a_2)^2 = S a_0 - (a_1)^2 - (a_2)^2$$

3.2 Предложение. *Семиинвариант K линии второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0$ является одинаковым во всех прямоугольных системах координат с общим началом.*

Доказательство. Сначала докажем, что при повороте осей прямоугольной системы координат число K не меняется. Подставим (достаточно только в линейные члены!) в многочлен $F(x, y)$ вместо переменных x и y их выражения через $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ по формулам

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}\cos\varphi - \widetilde{y}\sin\varphi, \\ y = \widetilde{x}\sin\varphi + \widetilde{y}\cos\varphi, \end{cases}$$

получим, что $\widetilde{a}_1 = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi, \quad \widetilde{a}_2 = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi, \quad \widetilde{a}_0 = a_0$. Тогда

$$\widetilde{K} = \widetilde{S}\widetilde{a}_0 - (\widetilde{a}_1)^2 - (\widetilde{a}_2)^2 = Sa_0 - (a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi)^2 - (-a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi)^2 = Sa_0 - a_1^2 - a_2^2 = K.$$

Теперь докажем, что число K не меняется и при отражении одной оси координат относительно другой. В самом деле, в этом случае $x = \widetilde{x}, \quad y = -\widetilde{y}$, поэтому $\widetilde{a}_1 = a_1, \quad \widetilde{a}_2 = -a_2, \quad \widetilde{a}_0 = a_0$. Следовательно,

$$\widetilde{K} = Sa_0 - (a_1)^2 - (-a_2)^2 = K.$$

Итак, число K является одинаковым во всех прямоугольных системах координат с общим началом. □

3.3 Предложение. *Пусть линия второго порядка в некоторой прямоугольной системе координат Oxy задана своим общим уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$. Тогда, если $\delta = \Delta = 0$, то семиинвариант*

$$K = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}$$

является ортогональным инвариантом.

Доказательство. Надо показать, что K не меняется при замене переменных, связывающих прямоугольные системы координат Oxy и $O'x'y'$. Для этого введем две вспомогательные системы координат $Ox''y''$ и $O'x'''y'''$. Система $Ox''y''$ получается поворотом системы Oxy на некоторый угол, а система $O'x'''y'''$ получается параллельным переносом системы $Ox''y''$. Из предложения 3.2 вытекает, что при переходах $Oxy \to Ox''y''$ и $O'x'''y''' \to O'x'y'$ семиинвариант не меняется. Поэтому достаточно показать, что семиинвариант не меняется при параллельном переносе $Ox''y'' \to O'x'''y'''$. Мы покажем это прямым вычислением семиинварианта. Чтобы вычисления были попроще, мы выберем прямоугольную систему координат $Ox''y''$ так, чтобы система $Ox''y''$ получалась из Oxy поворотом на такой угол, при котором коэффициент a''_{12} в общем уравнении линии второго порядка обращался бы в нуль. Такое всегда возможно. Таким образом, в системе координат $Ox''y''$ матрица A''_1 квадратичной формы диагональна

$$A''_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\lambda_1\lambda_2 = \delta = 0$. Поэтому одно из чисел λ_1 и λ_2 равно нулю. Будем считать, что $\lambda_1 = 0$. Тогда в системе $Ox''y''$ большая матрица A имеет вид

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a''_1 \\ 0 & \lambda_2 & a''_2 \\ a''_1 & a''_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

(Коэффициент a_0 при подстановке формул поворота, очевидно, не изменяется.) Но из условия $\Delta = 0$ вытекает, что $a''_1 = 0$. Следовательно,

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a''_2 \\ 0 & a''_2 & a_0 \end{pmatrix}, \quad K'' = \lambda_2 a_0 - (a''_2)^2,$$

и в системе координат $Ox''y''$ линия имеет уравнение $\lambda_2 {y''}^2 + 2a''_2 y'' + a_0 = 0$. При параллельном переносе

$$\begin{cases} x'' = x''' + b \\ y'' = y''' + c \end{cases}$$

получаем

$$\lambda_2(y''' + c)^2 + 2a''_2(y''' + c) + a_0 = \lambda_2 {y'''}^2 + 2(\lambda_2 c + a''_2)y''' + \lambda_2 c^2 + 2a''_2 c + a_0 = 0.$$

Поэтому в системе координат $O'x'''y'''$ число K имеет вид

$$K''' = \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 c + a''_2 \\ \lambda_2 c + a''_2 & \lambda_2 c^2 + 2a''_2 c + a_0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$K''' = \lambda_2(\lambda_2 c^2 + 2a''_2 c + a_0) - (\lambda_2 c + a''_2)^2 = \lambda_2 a_0 - (a''_2)^2 = K''.$$

Предложение 3.3 доказано. □

Задача. *Доказать, что семиинвариант K не является ортогональным инвариантом.*

3.1 Пары параллельных или совпадающих прямых: $\delta = \Delta = 0$.

Осталось рассмотреть последнюю логическую возможность, а именно, случай, когда $\delta = \Delta = 0$. В этом случае ортогональные инварианты Δ, δ, S, вообще говоря, не определяют однозначно линию второго порядка.

Таким образом, уравнение
2.2.

$$\lambda_2 y'^2 + D = 0 \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix},$$

для которого

$$K = K' = \lambda_2 D, \quad S = S' = \lambda_2,$$

можно переписать в виде

$$Sy'^2 + \frac{K}{S} = 0.$$

Поэтому каноническое уравнение линии второго порядка группы **2.2** имеет вид

$$y'^2 + \frac{K}{S^2} = 0.$$

Отсюда получаем:

пара параллельных прямых: $\iff$ $\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad K < 0.$
пара мнимых параллельных прямых: $\iff$ $\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad K > 0.$
пара совпадающих прямых: $\iff$ $\delta = 0, \quad \Delta = 0, \quad K = 0.$

Задача. *Нарисовать табличку „Девять линий“.*

"Девять линий " (вид линий в зависимости от Δ, δ, S, K)

Эллипс	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	$\delta > 0, \quad S\Delta < 0$
Мнимый эллипс	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$	$\delta > 0, \quad S\Delta > 0$
Пара мнимых пересекающихся прямых	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$	$\delta > 0, \quad \Delta = 0$
Гипербола	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$	$\delta < 0, \quad \Delta \neq 0$
Пара пересекающихся прямых	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$	$\delta < 0, \quad \Delta = 0$
Парабола	$y^2 = 2px$	$\delta = 0, \quad \Delta \neq 0$
Пара параллельных прямых	$y^2 - a^2 = 0$	$\delta = \Delta = 0, \quad K < 0$
Пара мнимых параллельных прямых	$y^2 + a^2 = 0$	$\delta = \Delta = 0, \quad K > 0$
Пара совпадающих прямых	$y^2 = 0$	$\delta = \Delta = 0, \quad K = 0$

Задача. *С помощью ортогональных инвариантов охарактеризовать окружность.* ($S^2 = 4\delta$, $S\Delta < 0.$)

Задача. *С помощью ортогональных инвариантов S, δ, Δ выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы линия второго порядка была парой взаимно перпендикулярных прямых.* ($S = 0 = \Delta$.)

1 Центры линий второго порядка

1.1 Определение. Точка $M(x_0, y_0)$ называется *центром* линии второго порядка, заданной в аффинной системе координат,

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

если её координаты (x_0, y_0) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0, \end{cases} \qquad \text{(две строчки матрицы!!)}$$

1.2 Теорема. (О корректности определения центра.)

Центр не зависит от выбора аффинной системы координат, в которой рассматривается уравнение линии второго порядка.

Доказательство. То, что точка $M(x_0, y_0)$ удовлетворяет системе уравнений для определения центра, в матричной форме можно переписать следующим образом:

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad d = a_1x_0 + a_2y_0 + a_0.$$

Пусть теперь $O'x'y'$ — другая аффинная система координат и переход от системы Oxy к системе $O'x'y'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2. \end{cases}$$

Тогда, если

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В системе координат $O'x'y'$ напишем систему для нахождения центра и воспользуемся известными формулами перехода

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d' \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D^TAD\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D^TA\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если координаты (x_0, y_0) точки M в системе координат Oxy удовлетворяют системе уравнений для определения центра, то координаты (x'_0, y'_0) этой же точки в системе координат $O'x'y'$ удовлетворяют аналогичной системе уравнений

$$\begin{cases} a'_{11}x'_0 + a'_{12}y'_0 + a'_1 = 0, \\ a'_{12}x'_0 + a'_{22}y'_0 + a'_2 = 0 \end{cases}$$

Отметим также, что попутно доказано, что

$$d' = a'_1x'_0 + a'_2y'_0 + a'_0 = d = a_1x_0 + a_2y_0 + a_0.$$

□

1.1 Центры симметрии

Напомним, что точка M_1 симметрична точке M_2 относительно точки O, если точка O является серединой отрезка M_1M_2. Точка O называется *центром симметрии* линии L, если для любой точки $M_1 \in L$ симметричная ей точка M_2 также принадлежит линии L. Заметим, что центром симметрии пустого множества является любая точка плоскости.

1.3 Предложение. *Всякий центр линии второго порядка является центром ее симметрии.*

Доказательство. Пусть $M(x_0, y_0)$ — центр линии второго порядка L, описываемой в аффинной системе координат Oxy своим общим уравнением. Тогда, осуществив параллельный перенос начала координат в точку $M(x_0, y_0)$,

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0,$$

получим, что

$$\begin{cases} a'_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a'_2 = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, $a'_1 = a'_2 = 0$, и это означает, что для многочлена $G(x', y')$, получающегося из многочлена $F(x, y)$ заменой переменных $x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0$, в системе $O'x'y'$ получим равенство $G(x', y') = G(-x', -y')$, что и означает, что новое начало координат (то есть центр) является центром симметрии нашей линии второго порядка. Если же линия задает пустое множество, то теорема справедлива тривиальным образом, поскольку центром симметрии пустого множества является любая точка плоскости. □

1.4 Теорема. *Всякий центр симметрии непустой линии второго порядка является центром.*

Доказательство. Пусть точка $O(x_0, y_0)$ является центром симметрии линии второго порядка L, содержащей по крайней мере одну точку, и определяемой в некоторой аффинной системе координат общим уравнением

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Надо доказать, что

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Перенесем начало координат в центр симметрии $O' = O(x_0, y_0)$, т.е (снова) перейдем к новым координатам x', y' по формулам

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0.$$

Тогда в новой системе координат $O'x'y'$ получим

$$G(x', y') = F(x' + x_0, y' + y_0) \quad \text{и} \quad \begin{cases} a'_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1, \\ a'_2 = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2. \end{cases}$$

Докажем, что $a'_1 = a'_2 = 0$.

Так как линия L не является пустым множеством, можно взять произвольную точку $M_1(x', y') \in L$. Поскольку в новой системе координат центр симметрии O' имеет координаты $(0, 0)$, то $M_2(-x', -y') \in L$. Следовательно,

$$0 = G(x', y') - G(-x', -y') = 4a'_1x' + 4a'_2y'.$$

Предположим, что $a'_1 \neq 0$ или $a'_2 \neq 0$. Тогда вся линия L лежит на прямой, заданной уравнением $a'_1x' + a'_2y' = 0$. Но из линий второго порядка, содержащих хотя бы одну точку, на прямой могут лежать либо пара совпадающих прямых, либо пара мнимых пересекающихся прямых (то есть точка). Таким образом, если линия второго порядка не является парой совпадающих прямых или парой мнимых пересекающихся прямых, то $a'_1 = a'_2 = 0$, и центр симметрии является центром. Осталось доказать теорему для пары совпадающих прямых и пары мнимых пересекающихся прямых.

1)Пара совпадающих прямых. Центром симметрии, очевидно, является любая точка прямой и других центров симметрии нет. В канонической системе координат пара совпадающих прямых записывается уравнением $y^2 = 0$. Уравнение для центра: $y_0 = 0$. Очевидно, что любой центр симметрии удовлетворяет этому уравнению и, следовательно, является центром. Так как определение центра не зависит от выбора системы координат, теорема в случае пары совпадающих прямых доказана.

2) Пара мнимых пересекающихся прямых. Центром симметрии, очевидно, является единственная точка линии второго порядка и других точек нет. В канонической системе координат пара мнимых пересекающихся прямых записывается каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Уравнение для центра:

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{a^2} = 0, \\ \dfrac{y_0}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что центр симметрии удовлетворяет этому уравнению и, следовательно, является центром. Так как определение центра не зависит от выбора системы координат, теорема в случае пары мнимых пересекающихся прямых доказана. □

Заметим, что пример пары мнимых параллельных прямых показывает, что предположение непустоты линии L в теореме 1.4 существенно.

1.2 Классификация по количеству центров

1.5 Теорема. 1) $\delta \neq 0 \iff$ *единственный центр ;*
2) $\delta = \Delta = 0 \iff$ *прямая центров;*
3) $\delta = 0,\ \Delta \neq 0 \iff$ *центров нет.*

Доказательство. 1) $\delta \neq 0$ тогда и только тогда, когда система $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0, \end{cases}$ имеет единственное решение, то есть прямые $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$ и $a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0$ пересекаются в одной точке.

2) Пусть теперь $\delta = 0 = \Delta$. Тогда в соответствие с табличкой " Девять линий" линия второго порядка является либо парой параллельных прямых, либо парой мнимых параллельных прямых, либо парой совпадающих прямых. Поскольку уже доказана независимость определения центра от выбора системы координат будем искать центры в канонической системе координат, используя канонические уравнения и соответствующие матрицы. Во всех трех случаях обнаруживаем прямую центров. В случае пары мнимых параллельных прямых прямая центров есть. Заметим, что поскольку пара мнимых параллельных прямых является пустым множеством, любая точка плоскости является центром симметрии пустого множества.

Приведем еще одно, более **формальное доказательство*.** Из условия $\delta = 0$ вытекает, что по крайней мере один из коэффициентов a_{11} и a_{22} отличен от нуля. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Тогда в силу пропорциональности строк матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ существует такое число k, что $a_{12} = ka_{11}, \quad a_{22} = ka_{12}$. Раскроем определитель Δ по третьей строке:

$$0 = \Delta = a_1 \begin{vmatrix} a_{12} & a_1 \\ a_{22} & a_2 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix} + a_0\delta = a_1 \begin{vmatrix} ka_{11} & a_1 \\ ka_{12} & a_2 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix} = (ka_1 - a_2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда, если $ka_1 - a_2 = 0$, то уравнения системы пропорциональны. Если же

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{12} & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то с учетом неравенства $a_{11} \neq 0$ вторая строчка этого определителя получается из первой умножением на некоторое число, которое в силу равенства $a_{12} = ka_{11}$ равно k. Следовательно, снова $ka_1 = a_2$ и уравнения системы пропорциональны. Второе, более формальное доказательство закончено.

Обратно, если имеется прямая центров, то уравнения системы для определения центров пропорциональны, значит пропорциональны первые две строки матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $\delta = 0 = \Delta$.

3) Если $\delta = 0 \neq \Delta$, то линия является параболой в соответствии с табличкой "9 линий". Будем искать центры в канонической системе координат с помощью матрицы канонического уравнения $y^2 = 2px$. Получаем, что центров нет. Обратно, если центров нет, то из пунктов 1) и 2) следует, что $\delta = 0 \neq \Delta$. □

1.6 Определение. Линия второго порядка называется *центральной.*, если у неё единственный центр.

Задача.*Доказать, что в простейшем уравнении $\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + C = 0$ число C можно находить следующим образом: $C = F(x_0, y_0)$, где (x_0, y_0) — центр линии второго порядка.*

В самом деле, заметим, что, если на плоскости π задана система координат Oxy, и задан многочлен второй степени

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0,$$

то этот многочлен определяет некоторое отображение $f : \pi \to \mathbb{R}$ плоскости π во множество всех чисел. Будем называть заданное таким образом отображение *квадратичным отображением*, а про многочлен $F(x, y)$ будем говорить, что он представляет квадратичное отображение $f : \pi \to \mathbb{R}$. Но значения функции двух переменных не зависят от выбора системы координат! Такое функциональное нахождение C позволяет не считать определитель Δ!

Задача. *Доказать единственность многочлена второй степени $F(x, y)$, представляющего в данной системе координат Oxy квадратичное отображение $f : \pi \to \mathbb{R}$.*

2 Директориальное свойство параболы, эллипса и гиперболы

Пусть на плоскости даны прямая l и не принадлежащая прямой l точка F. Решим следующую задачу: найти на плоскости множество L точек M (геометрическое место точек M) таких, что

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)} = \varepsilon > 0.$$

Число ε называется эксцентриситетом.

Рассмотрим три случая: $\varepsilon = 1$, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$.

1) Пусть $\varepsilon = 1$. Обозначим расстояние между точкой F и прямой l через p. Введем такую прямоугольную систему координат Oxy на плоскости, что ось Ox перпендикулярна прямой l и проходит через точку F, а ось Oy делит пополам перпендикуляр, опущенный из точки F на прямую l (рис. 1).

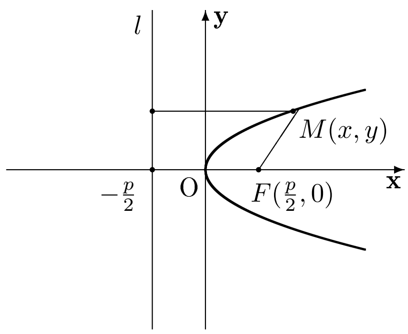

Рис. 1:

В этой системе координат точка F имеет координаты $(p/2, 0)$, а прямая l описывается уравнением $x = -p/2$. Обозначим через (x, y) координаты произвольной точки M нашего множества L. Тогда

$$1 = \frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)} = \frac{\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}}{\left|x+\frac{p}{2}\right|}.$$

Поскольку $F \notin l$, ни числитель, ни знаменатель в нуль не обращаются. Поэтому данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

которое после приведения подобных членов превращается в каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px.$$

Итак, множество точек M (геометрическое место точек M), равноудаленных от точки F с координатами $(p/2, 0)$ и от прямой l, задаваемой уравнением $x = -p/2$, является парабола $y^2 = 2px$ (в смысле формулировки основной теоремы **??**). Поскольку все переходы выше являются равносильными, то доказана эквивалентность следующих двух различных определений параболы.

Директориальное определение. *Параболой называется множество точек, расстояние от которых до некоторой фиксированной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.*

Каноническое определение. *Параболой называется множество точек, координаты (x, y) которых в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению $y^2 = 2px$, $\quad p > 0$. Точка F с координатами $(p/2, 0)$ называется фокусом, прямая $x = -p/2$ — директрисой.*

Рассмотрим каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$. Ясно, что вместе с каждой точкой (x, y) парабола содержит точку $(x, -y)$. Поэтому парабола является фигурой симметричной относительно оси абсцисс, которая и называется *осью параболы*. Пересечение оси параболы с параболой называется *вершиной параболы*.

2) Пусть $\varepsilon < 1$. Обозначим расстояние между точкой F и прямой l через d. Существует такое число $a > 0$, что

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - a\varepsilon = a\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}d.$$

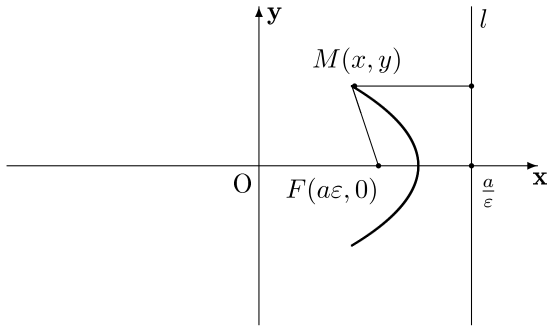

Рис. 2:

Введем прямоугольную систему координат Oxy, такую что ось Ox проходит через точку F перпендикулярно прямой l, а точка F имеет координаты $(a\varepsilon, 0)$. Тогда прямая l задается уравнением $x = a/\varepsilon$ (рис. 2).

Обозначим через (x, y) координаты произвольной точки M множества L. Тогда

$$\varepsilon = \frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)} = \frac{\sqrt{(x-a\varepsilon)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|}.$$

После возведения в квадрат обеих частей уравнения получаем

$$(\varepsilon x - a)^2 = (x - a\varepsilon)^2 + y^2,$$

или, что то же самое,

$$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2(1-\varepsilon^2).$$

Положив $b^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$ и разделив последнее равенство на правую часть, получаем каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, множество точек L является эллипсом (в смысле формулировки основной теоремы **??**), при этом

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad b < a, \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Точка F с координатами $(a\varepsilon, 0)$ называется *фокусом* эллипса, прямая l с уравнением $x = a/\varepsilon$ — его *директрисой*, число ε — *эксцентриситетом*.

Рассмотрим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Ясно, что вместе с каждой точкой (x, y) эллипс содержит точки $(-x, y)$ $(x, -y)$. Поэтому эллипс является фигурой симметричной относительно осей координат. Поэтому отражая точку F и прямую l относительно оси Oy, получаем точку $F'(-a\varepsilon, 0)$ и прямую l', заданную уравнением $x = -a/\varepsilon$. Точка F' также является фокусом, а прямая l' — директрисой, соответствующей фокусу F'. Итак, в отличие от параболы, у эллипса два фокуса и две директрисы. Фокусы располагаются на оси Ox, которая называется *фокальной осью* эллипса. Поскольку эксцентриситет эллипса $\varepsilon < 1$, его директрисы пересекают ось Ox, в точках расположенных дальше от начала координат, чем *вершины* эллипса $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, расположенные на фокальной оси. Поэтому директрисы лежат вне *основного прямоугольника* $\quad -a \le x \le a, \quad -b \le y \le b, \quad$ в котором лежит эллипс.

Поскольку все переходы выше являются равносильными, то, если эллипс задан своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и не является окружностью (т.е. $a > b$), полагая

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad (\iff b^2 = a^2(1-\varepsilon^2))$$

получаем, что этот эллипс является множеством точек, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon = \frac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)},$$

где точка F имеет координаты $(a\varepsilon, 0)$, а прямая l задана уравнением $x = a/\varepsilon$.

Таким образом, доказана эквивалентность следующих двух различных определений эллипса.

Директориальное определение. *Эллипсом называется множество точек, отношение ε расстояния от которых до некоторой фиксированной точки, называемой фокусом, к расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой, постоянно и меньше единицы. Отношение ε называется эксцентриситетом.*

Каноническое определение. *Эллипсом называется множество точек, координаты (x, y) которых в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0.$$

Число $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$ называется эксцентриситетом, точки $F'(-a\varepsilon, 0)$ и $F(a\varepsilon, 0)$ называются фокусами, прямые $l' : \quad (x = -a/\varepsilon)$ и $\ l : \quad (x = a/\varepsilon)$ — директрисами.

Является ли окружность эллипсом? Окружность не является эллипсом в смысле сформулированных выше определений!! Но разумеется окружность является эллипсом в смысле канонического определения, если в нем мы заменим условие $a > b > 0$ на условие $a \geq b > 0$. Заметим, что окружность $x^2 + y^2 = a^2$ получается из эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ предельным переходом при $b \to a$. При этом $\varepsilon \to 0$, фокус стремится к центру окружности, а директриса „уходит“ в бесконечность. Последнее означает, что у окружности директрисы нет, и говорить о директориальном определении окружности не имеет смысла.

3) Пусть $\varepsilon > 1$. Как и в предыдущем случае обозначим расстояние между точкой F и прямой l через d. Существует такое число $a > 0$, что

$$d = a\varepsilon - \frac{a}{\varepsilon} = a\left(\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{d}{\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}d.$$

Вводим прямоугольную систему координат Oxy, в которой фокус F имеет координаты $(a\varepsilon, 0)$, а директриса l задается уравнением $x = a/\varepsilon$ (рис. 1). Повторяя выкладки предыдущего случая для нового геометрического места точек L,

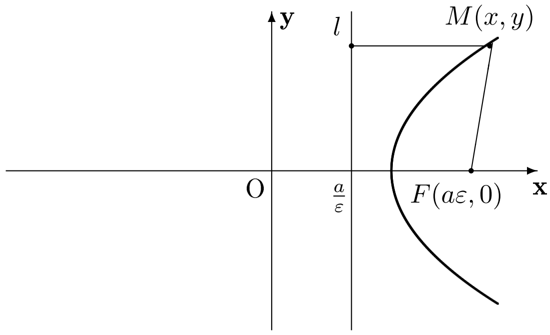

Рис. 1:

получаем то же уравнение

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = a^2(1 - \varepsilon^2).$$

Но теперь $1 - \varepsilon^2 < 0$. Поэтому умножив обе части уравнения на (-1), получим

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1).$$

Положив $b^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2$ и разделив последнее равенство на правую часть, получаем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, множество точек L является гиперболой (в смысле основной теоремы **??**), при этом

$$a = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Точка $F(a\varepsilon, 0)$ называется *фокусом* гиперболы, прямая $x = a/\varepsilon$ — ее *директрисой*, число ε — *эксцентриситетом.*

Если гипербола задана своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

то, полагая

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad (\Longleftrightarrow \; b^2 = (\varepsilon^2 - 1)a^2),$$

получаем, что эта гипербола является множеством точек, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon = \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, l)},$$

где точка F имеет координаты $(a\varepsilon, 0)$, а прямая l задана уравнением $x = a/\varepsilon$.

Из канонического уравнения гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ясно, что гипербола симметрична относительно осей канонической системы координат. Таким образом, у гиперболы также два фокуса и две директрисы. Для гиперболы $\varepsilon > 1$, поэтому ее директрисы удалены от начала координат на расстояние, меньшее a, и проходят между началом координат и соответствующими вершинами гиперболы $(\pm a, 0)$.

Таким образом, доказана эквивалентность следующих двух различных определений гиперболы.

Директориальное определение. *Гиперболой называется множество точек, отношение ε расстояния от которых до некоторой фиксированной точки, называемой фокусом, к расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой, постоянно и больше единицы. Отношение ε называется эксцентриситетом.*

Каноническое определение. *Гиперболой называется множество точек, координаты (x, y) в некоторой прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Число $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$ *называется эксцентриситетом, точки* $F'(-a\varepsilon, 0)$ *и* $F(a\varepsilon, 0)$ *называются фокусами, прямые* $l' : \quad (x = -a/\varepsilon)$ *и* $l : \quad (x = a/\varepsilon)$ *— директрисами.*

Итак, линии второго порядка, являющиеся эллипсами (кроме окружности), параболами или гиперболами, может быть определен следующим образом: каждая такая линия является геометрическим местом точек M, для которых отношение $\varepsilon = \dfrac{\rho(M,F)}{\rho(M,l)}$ до некоторой фиксированной точки F (до фокуса) к расстоянию до некоторой фиксированной прямой l (до директрисы, соответствующей этому фокусу) является постоянным положительным числом ε (называемым эксцентриситетом), при этом линия второго порядка является эллипсом, если $\varepsilon < 1$, гиперболой, если $\varepsilon > 1$, параболой, если $\varepsilon = 1$.

Задача. *Является ли постоянным отношение* $\dfrac{\rho(M,F)}{\rho(M,l')}$ *(отношение к расстоянию до "чужой"директрисы)?*

1 Фокальное свойство эллипса и гиперболы

1.1 Фокальные радиусы

1) Пусть эллипс задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в канонической системе координат, в которой фокусы F' и F имеют координаты $(-a\varepsilon, 0)$ и $(a\varepsilon, 0)$, где

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1.$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. *Фокальными радиусами* называются отрезки MF' и MF. Получим удобные выражения длин $r' = |MF'|$ и $r = |MF|$ фокальных радиусов через a, ε, x. В самом деле, используя директориальное свойство эллипса, получаем

$$\varepsilon = \frac{\rho(M,F')}{\rho(M,l')},$$

откуда

$$\rho(M,F') = \varepsilon\rho(M,l') = \varepsilon\left|-\frac{a}{\varepsilon} - x\right| = \varepsilon\frac{|a+\varepsilon x|}{\varepsilon} = |a+\varepsilon x|.$$

Поскольку $a \geqslant |x|$, а $\varepsilon < 1$, то получаем длину фокального радиуса MF':

$$r' = \rho(M,F') = |a+\varepsilon x| = a + \varepsilon x,$$

Аналогично получаем длину второго фокального радиуса MF:

$$r = \rho(M,F) = a - \varepsilon x.$$

2) Пусть гипербола задана каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в канонической системе координат, в которой фокусы F' и F имеют координаты $(-a\varepsilon, 0)$ и $(a\varepsilon, 0)$, где

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1.$$

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка гиперболы. Как и в случае эллипса, *фокальными радиусами* называются отрезки MF' и MF. Так же как и в случае эллипса, получаем, что если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то

$$r' = \rho(M,F') = |a+\varepsilon x|, \quad r = \rho(M,F) = |a-\varepsilon x|.$$

1.2 Фокальное свойство

Фокальное определение эллипса. *Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек F' и F постоянна и больше расстояния между этими точками. Точки F' и F называются фокусами. Прямая $F'F$ называется фокальной осью.*

Заметим, что в случае совпадения точек F' и F получаем окружность.

1.1 Теорема. *Фокальное определение эллипса эквивалентно каноническому определению.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Рассмотрим множество точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F' и F постоянна и равна $2a > \rho(F', F)$. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпала с фокальной осью $F'F$, а точки F' и F имели координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Еще раз возводим в квадрат

$$a^2(x^2-2cx+a^2\varepsilon^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2 \iff (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как $c < a$, то число $b^2 = a^2 - c^2$ положительно. Теперь равенство можно переписать в виде

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Итак, искомое множество точек является эллипсом с эксцентриситетом $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{c}{a}$.

Задача.*Доказать, что вышеприведенные выкладки обратимы, то есть* **все** *переходы равносильны.*

($\Leftarrow$) Другое доказательство: поскольку в канонической системе координат $\rho(M, F') = a + \varepsilon x$ и $\rho(M, F) = a - \varepsilon x$, получаем, что всякая точка эллипса удовлетворяет условию $\rho(M, F') + \rho(M, F) = 2a$. $\square$

Задача. *Найти фокус и директрису линии* $3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0$ $\left((-2, \frac{1}{6}),\ y = \frac{17}{6}.\right)$

Задача. *На плоскости нарисованы эллипс с отмеченными двумя вершинами. Циркулем и линейкой построить фокусы эллипса.*

Фокальное определение гиперболы. *Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек F' и F постоянен и меньше расстояния между этими точками. Точки F' и F называются фокусами. Прямая $F'F$ называется фокальной осью.*

1.2 Теорема. *Фокальное определение гиперболы эквивалентно каноническому определению.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Рассмотрим множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F' и F постоянен и равен $2a < \rho(F', F)$. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпала с фокальной осью $F'F$, а точки F' и F имели координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$. Итак, если точка $M(x, y)$ принадлежит искомому множеству, то

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a \quad \iff$$

$$\iff \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

или после очевидных преобразований

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=cx-a^2.$$

Еще раз возводим в квадрат

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 \iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Так как $c > a$, то число $b^2 = c^2 - a^2$ положительно. Теперь равенство можно переписать в виде

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \iff$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, искомое множество точек является гиперболой с эксцентриситетом

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{c}{a} > 1.$$

($\Leftarrow$) Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то в канонической системе координат $\rho(M, F') = |a + \varepsilon x|$, $\rho(M, F) = |a - \varepsilon x|$. Но теперь, в отличие от эллипса, $|x| \geqslant a$ и $\varepsilon > 1$. Поэтому при $x \geqslant a$

$$\rho(M, F') = a + \varepsilon x, \qquad \rho(M, F) = -a + \varepsilon x,$$

откуда $|\rho(M, F') - \rho(F, M_2)| = 2a$. Если же $x \leqslant -a$, то

$$\rho(M, F') = -a - \varepsilon x, \quad \rho(M, F) = a - \varepsilon x,$$

и снова $|\rho(M, F') - \rho(F, M_2)| = 2a$. Теорема 1.2 доказана. □

2 Фокальный параметр. Уравнение при вершине.

Пусть L — эллипс, гипербола или парабола. В канонической системе координат фокусы этих кривых второго порядка лежат на оси Ox, которая называется фокальной осью соответствующей линии. Проведем через какой-нибудь фокус F линии L прямую, перпендикулярную к ее фокальной оси. Эта прямая пересечет линию L в двух точках, расстояние между которыми обозначим через $2p$. Отрезок, соединяющий точки пересечения, называется *фокальной хордой*. Число p называется *фокальным параметром* линии L. Иными словами, *половина длины фокальной хорды и есть фокальный параметр.*

Для параболы фокальный параметр совпадает с ее параметром p. В самом деле, найдем в канонической системе координат фокальный радиус перпендикулярный оси абсцисс. Для этого в каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$ подставим абсциссу фокуса $x = \frac{p}{2}$. Получим $y^2 = p^2$, поэтому фокальный параметр параболы равен p

Теперь найдем фокальный параметр эллипса и гиперболы Подставив в формулу $r = |a - \varepsilon x|$ длины фокального радиуса (одинаковую для эллипса и гиперболы, см. стр.64) $x = a\varepsilon$, получим $p = a\left|1 - \varepsilon^2\right|$. Учитывая, что и для эллипса и для гиперболы $b^2 = a^2|1 - \varepsilon^2|$, получаем $p = a\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a}$.

2.1 Уравнение при вершине

Оказывается, что для эллипса, гиперболы и параболы имеются прямоугольные системы координат, в которых уравнения этих линий второго порядка имеют одинаковый вид. Воспользуемся фокальным параметром для того, чтобы найти такие прямоугольные системы координат. Начало каждой из таких систем координат будет совпадать с вершиной соответствующей линии второго порядка, а ось Ox будет совпадать с фокальной осью.

Парабола. Для параболы система координат „при вершине" совпадает с канонической системой координат. В самом деле, начало канонической системы координат в этом случае находится в вершине параболы, и каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Эллипс. В случае эллипса примем за начало координат „левую" вершину эллипса $A'(-a, 0)$ и сохраним базисные векторы e_1 и e_2 канонической системы координат. Формулы перехода от канонических координат (x, y) к координатам „при вершине" (x', y') выглядят следующим образом

$$x = x' - a \quad \text{и} \quad y = y'$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x'-a)^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

и получим после очевидных преобразований

$$-2\frac{x'}{a}+\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=0$$

или

$$y'^2=2\frac{b^2}{a}x'-\frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

Но $\dfrac{b^2}{a}=p$, так что уравнение можно переписать в виде

$$y'^2=2px'-\frac{b^2}{a^2}x'^2$$

или, полагая

$$q=-\frac{b^2}{a^2}=\varepsilon^2-1,$$

в виде

$$y'^2=2px'+qx'^2$$

.

Гипербола. В случае гиперболы примем за начало координат „правую“ вершину гиперболы $A(a,0)$ и сохраним базисные векторы e_1 и e_2 канонической системы координат. Формулы перехода от канонических координат (x,y) к координатам „при вершине“ (x',y') выглядят следующим образом

$$x=x'+a \quad \text{и} \quad y=y'$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x'+a)^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$$

и получим после очевидных преобразований

$$y'^2=2\frac{b^2}{a}x'+\frac{b^2}{a^2}x'^2.$$

Но $\dfrac{b^2}{a}=p$, так что уравнение можно переписать в виде

$$y'^2=2px'+\frac{b^2}{a^2}x'^2$$

или, полагая

$$q=\frac{b^2}{a^2}=\varepsilon^2-1,$$

в виде

$$y'^2=2px'+qx'^2.$$

Итак, в системе координат „при вершине“ уравнения эллипса, гиперболы и параболы выглядят совершенно одинаково:

$$y'^2=2px'+qx'^2,$$

где p — фокальный параметр линии, а $q=\varepsilon^2-1$, где ε — эксцентриситет линии второго порядка. Из этих обозначений следует, что для эллипса $q<0$, для параболы $q=0$, для гиперболы $q>0$.

Геометры Древней Греции не знали аналитической геометрии и не владели методом координат, но свойства линий второго порядка знали хорошо, определяя эллипс, гиперболу и параболу — как конические сечения, то есть как плоские сечения прямого кругового конуса, и используя замысловатые геометрические построения. Название „парабола“ ввел Апполоний Пергский 2200 лет назад. Парабола по-гречески означает „приложение“. Древние греки называли „приложением“ данного квадрата к данному отрезку построение прямоугольника с данным основанием, равновеликого данному квадрату (то есть фактически построение высоты этого прямоугольника.) Формула $y^2 = 2px$ и решает задачу приложения квадрата y^2 к основанию $2p$, то есть к фокальной хорде параболы. Эллипс и гипербола отличаются от параболы добавочным членом qx^2, положительным в случае гиперболы и отрицательным в случае эллипса. Слова „гипербола“ и „эллипс“ и означают соответственно „избыток“ и „недостаток“.

Задача.*Дан квадрат со стороной, длина которой равна y и отрезок длины $2p$. Циркулем и линейкой построить прямоугольник со стороной $2p$, площадь которого равна площади квадрата.*

Задача.*Дан прямоугольник со сторонами $2p$ и x. Циркулем и линейкой построить квадрат, площадь которого равна площади прямоугольника.*

Задача. *Найти радиус наибольшего круга, лежащего внутри линии второго порядка и касающегося этой линии в ее вершине, принадлежащей фокальной оси. В частности, найти наибольший радиус круга, лежащего внутри параболы $y = x^2$ и касающегося параболы в ее вершине.*

1 Эллипс, гипербола и парабола в полярных координатах

Фокальный параметр используется в уравнениях параболы, эллипса и гиперболы в полярных координатах. Эти уравнения полезны в астрономии и при решении многих прикладных задач математики и механики. Поучительна история уравнения в полярных координатах. Как известно, в итоге многолетней кропотливейшей обработки наблюдений за движениями планет, произведенных Тихо Браге, Кеплер пришел к заключению, что планета Земля в Солнечной системе движется по окружности (и это показалось Кеплеру замечательным открытием, ведь окружность — основная геометрическая линия античной математики), но само Солнце не было расположено в центре этой окружности!! Этот факт не лез ни в какие ворота,Кеплер был огорчен и стал пересчитывать все заново более тщательно. И тогда у него получилось, что Земля на самом деле движется по эллипсу, но с очень маленьким эксцентриситетом — всего около двух процентов и потому он первоначально принял орбиту за окружность. Кеплер напрасно огорчался. Такой маленький эксцентриситет – это большое везение. В смысле возникновения жизни на Земле. Если бы эксцентриситет был близок к единице, то наши океаны закипали бы в ближайшей к Солнцу точке (в перигелии) и замерзали бы при максимальном удалении (в афелии) от Солнца, которое находится в одном из фокусов. Орбиты с большими эксцентриситетами не способствуют жизни, поэтому нам повезло оказаться на планете, у которой эксцентриситет близок к нулю. Утверждение о том, что Солнце находится в одном из фокусов эллиптической орбиты любой планеты, обращающейся вокруг Солнца, ныне известно, как *первый закон Кеплера.* Первый закон (вместе со *вторым законом*, так называемым *законом площадей, а именно, что радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равновеликие площади, и третьим законом, который гласит, что квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит*) был опубликован Кеплером в 1609 году. Кеплер открыл свои законы эмпирическим путем. Ньютон вывел законы Кеплера из своих законов механики и закона всемирного тяготения и получил при этом уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах!!)

Парабола. Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, заданной в прямоугольной системе координат Oxy каноническим уравнением $y^2 = 2px$, а полярную ось направим в положительную сторону оси Ox (рис. 1).

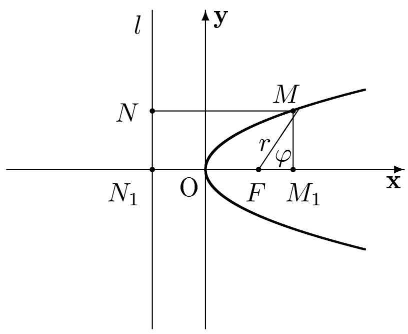

Рис. 1:

Эллипс. Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса (по Кеплеру „Солнце в фокусе“!!), заданного уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, а полярную ось направим в положительную сторону оси Ox (рис. 2).

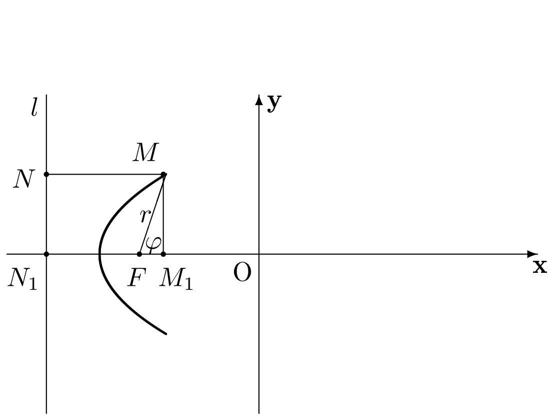

Рис. 2:

Гипербола. Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, заданной уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, а полярную ось направим в положительную сторону оси Ox (рис. 3).

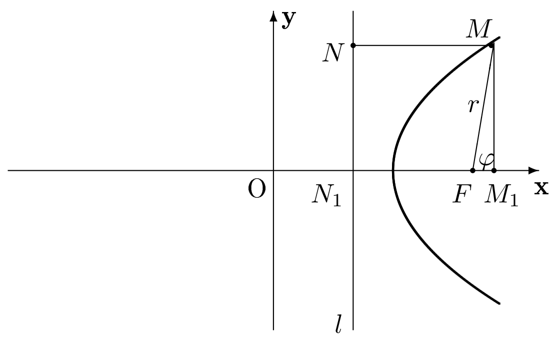

Рис. 3:

Из директориального свойства получаем сразу для трех линий

$$\frac{r}{\rho(M,l)} = \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r}{d + r\cos\phi} = \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{r}{\frac{p}{\varepsilon} + r\cos\phi} = \varepsilon,$$

откуда

$$r = p + \varepsilon r \cos\phi \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}.$$

Итак, в полярной системе координат эллипс, гипербола (к сожалению, только одна ветвь!) и парабола записываются одним уравнением

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}.$$

Отсюда получаем уравнение в полярных координатах параболы с эксцентриситетом $\varepsilon = 1$:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\phi}, \quad \text{где} \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

Уравнение эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon < 1$:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}, \quad \text{где} \quad 0 \le \phi < 2\pi.$$

Уравнение (одной ветви, ближайшей к полюсу) гиперболы с эксцентриситетом $\varepsilon > 1$:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}, \quad \text{где} \quad \cos\phi < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Задача. *На плоскости нарисованы парабола и две прямые, образующие каноническую систему координат. Циркулем и линейкой построить фокус параболы.*
Задача. *Доказать, что если уравнение (одной ветви, ближайшей к полюсу) гиперболы с эксцентриситетом $\varepsilon > 1$ имеет вид*

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\phi}, \quad \textit{где} \quad \cos\phi < \frac{1}{\varepsilon},$$

то другая ветвь гиперболы в той же системе координат задается уравнением

$$r = -\frac{p}{1 + \varepsilon\cos\phi}, \quad \textit{где} \quad \cos\phi < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

$$\left(\frac{r}{\rho(M',l)} = \varepsilon \iff \frac{r}{-r\cos\phi - d} = \varepsilon \iff \frac{r}{-r\cos\phi - \frac{p}{\varepsilon}} = \varepsilon \iff r = -\varepsilon r\cos\phi - p \iff r = -\frac{p}{1+\varepsilon\cos\phi}\right).$$

2 Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления

Пусть линия второго порядка L, задана в некоторой аффинной системе координат Oxy общим уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

Прямая l задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t. \end{cases}$$

Найдем точки пересечения прямой l с линией L. Для этого надо подставить координаты точек прямой l в уравнение линии L. Сделав это, получаем относительно параметра t уравнение не более чем второй степени

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2))t + F(x_0, y_0) = 0.$$

Возможности: 1) Кв. уравнение. 2) Не кв. уравнение.
Разберем вторую возможность.

2.1 Асимптотические направления

2.1 Определение. *Асимптотическим направлением линии второго порядка* L называется направление такого (ненулевого) вектора $a = \{\alpha, \beta\}$, для которого выполнено следующее равенство:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

Такой вектор $a = \{\alpha, \beta\}$ называется *вектором асимптотического направления* относительно линии L.

Докажем теперь, что вектор асимптотического направления не зависит от того, в какой аффинной системе координат мы его вычисляем. В самом деле,

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = (\alpha, \beta)A_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

где A_1 — матрица квадратичной формы линии второго порядка. Пусть теперь $O'x'y'$ — новая аффинная система координат, и переход от старой системы Oxy к системе $O'x'y'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')C^T \quad \text{и} \quad A_1' = C^T A_1 C,$$

где A_1' — матрица квадратичной формы в системе координат $O'x'y'$, а $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ — матрица преобразования координат вектора. Поэтому в новой системе координат выполняется равенство

$$(\alpha', \beta')A_1' \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = (\alpha', \beta')C^T A_1 C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)A_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

и, следовательно, координаты вектора a удовлетворяют аналогичному уравнению в системе координат $O'x'y'$

$$a_{11}'\alpha'^2 + 2a_{12}'\alpha'\beta' + a_{22}'\beta'^2 = 0,$$

то есть вектор a является вектором асимптотического направления и в новой системе координат.

Как же искать асимптотические направления? Заметим, что если вектор a является вектором асимптотического направления, то и любой ненулевой вектор, коллинеарный с вектором a, также является вектором асимптотического направления. Поэтому каждый вектор $a = \{\alpha, \beta\}$ асимптотического направления однозначно определяется отношением координат α/β или β/α. Из условия

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$$

вытекает, что всякая линия второго порядка имеет не более двух асимптотических направлений. В самом деле, по крайней мере один из трех коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля. Если $a_{11} \neq 0$, то разделив данное уравнение на β^2, для определения асимптотических направлений получим квадратное уравнение

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0,$$

откуда

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Если же $a_{22} \neq 0$ — то можно выписать уравнение

$$a_{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + a_{11} = 0,$$

корни которого

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

И, наконец, если $a_{11} = a_{22} = 0$, то уравнение примет вид

$$2a_{12}\alpha\beta = 0,$$

откуда получаем два различных направления $\{\alpha, \beta\} = \{0, 1\}$ или $\{\alpha, \beta\} = \{1, 0\}$.

2.2 Определение. Линия второго порядка называется *линией эллиптического, гиперболического или параболического типа*, если соответственно $\delta > 0$, $\delta < 0$, $\delta = 0$.

Замечание. Число $\delta = |A_1|$ является ортогональным инвариантом, но может изменяться при переходе от одной аффинной системы координат к другой. Но из формулы $A_1' = C^T A_1 C$ получаем $\delta' = |C|^2\delta$, то есть при таких переходах не меняется знак этого числа. Таким образом знак числа δ является ***аффинным инвариантом*** линии L.

2.3 Теорема. 1) *Линии эллиптического типа* ($\delta > 0$**: эллипс, мнимый эллипс, мнимые пересекающиеся прямые**) *не имеют асимптотических направленияй;*

2) *Линии гиперболического типа* ($\delta < 0$**: гипербола, пересекающиеся прямые**) *имеют два различных асимптотических направления.*

3) *Линии параболического типа* ($\delta = 0$**: парабола, пара параллельных прямых, пара мнимых параллельных прямых, пара совпадающих прямых**) *имеют два совпадающих асимптотических направления.*

Эта теорема фактически уже доказана, поскольку дискриминант квадратного уравнения

$$a_{11}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + a_{22} = 0 \quad \text{или} \quad a_{22}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + a_{11} = 0$$

равен $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\delta$. Если $a_{11} = a_{22} = 0$, то $\delta = -a_{12}^2 < 0$ и существуют два различных асимптотических направления.

2.4 Определение. Прямая l имеет *асимптотическое направление* относительно линии второго порядка L, если ее направляющий вектор $a = \{\alpha, \beta\}$ имеет *асимптотическое направление* относительно L.

В зависимости от количества корней уравнения для параметра t получаем соответствующее количество точек пересечения прямой l и линии L. Таким образом, справедлива следующая теорема 2.5.

2.5 Теорема. 1) *Если прямая l имеет неасимптотическое направление относительно линии второго порядка L, то прямая l пересекает линию L в двух точках (различных или совпадающих) или не имеет с ней общих точек.*

2) *Если прямая l имеет асимптотическое направление относительно линии L, то прямая l либо имеет с L не более одной общей точки, либо содержится в линии L.*

Таким образом, в частности, получаем *геометрическую характеристику* асимтотического направления: *направление является асимптотическим относительно линии второго порядка L тогда и только тогда, когда любая прямая l этого направления либо имеет с линией L не более одной общей точки, либо содержится в линии L.* Например, из этой характеристики сразу следует, что эллипс не имеет асимптотических направлений.

Какие линии второго порядка содержат прямые? По основной теореме **??** о линиях второго порядка (см. также табличку „Девять линий“), очевидно, это: пересекающиеся прямые, параллельные прямые и совпавшие прямые. Эти линии второго порядка называются *распадающимися* Мнимые линии, очевидно, прямых не содержат. Покажем, что эллипс, гипербола и парабола не являются распадающимися линиями.

2.6 Предложение. *Эллипс, гипербола и парабола не являются распадающимися линиями.*

Доказательство. Достаточно доказать, что эти линии не содержат прямых. Перейдем к канонической системе координат. Эллипс фигура ограниченная, так как для точек эллипса выполняется $|x| \le a \quad |y| \le b$, поэтому эллипс не может содержать прямую, так как прямая — неограниченное множество. Для точек параболы $y^2 = 2px$ в канонической системе координат выполняется условие $x \ge 0$, которое для точек прямой выполняется лишь в случае $x = c \ge 0$, но такие прямые пересекаются с параболой не более чем в двух точках и не лежат в параболе. Для точек гиперболы невозможно выполнение условия $|x| \le a$, но на любой прямой вида $y = kx + b$ есть точка $(0, b)$, поэтому искомая прямая, целиком лежащая в гиперболе, в канонической системе координат должна иметь вид $x = c$, но прямая такого вида, очевидно, пересекает гиперболу не более чем в двух точках и не может лежать в ней. □

2.7 Следствие. *Никакие три точки эллипса, гиперболы или параболы не лежат на одной прямой.*

Доказательство. Если три точки линии второго порядка L лежат на одной прямой l, то согласно теореме 2.5 прямая l имеет асимптотическое направление и целиком содержится в L. □

3 Асимптоты. Уравнение гиперболы в асимптотах.

3.1 Определение. *Асимптотой* линии второго порядка L называется прямая асимптотического направления, проходящая через центр линии L.

3.2 Предложение. 1) *Гипербола и пересекающиеся прямые имеют по две асимптоты.*
2) *параллельные прямые, мнимые параллельные прямые и совпадающие прямые имеют по одной асимптоте.*
3) *Остальные линии второго порядка асимптот не имеют.*

Доказательство. 1) У гиперболы и у пересекающихся прямых два различных асимптотических направления и один центр (напомним, что это особенно легко это обосновать, проводя вычисления в канонической системе координат). 2) У параллельных прямых, мнимых параллельных прямых и совпадающих прямых одно асимптотическое направление и линия центров имеет асимптотическое направление и следовательно является асимптотой. 3) У эллипса, мнимого эллипса и мнимых пересекающихся прямых нет асимптотических направлений, а у параболы нет центра. □

3.3 Предложение. (Задача.)*Для гиперболы и пересекающихся прямых определение асимптоты эквивалентно следующему определению:* **асимптотами называются прямые, которые в канонической системе координат записываются уравнениями**

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим гиперболу, заданную каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в некоторой системе координат Oxy. Асимптотические направления $\{\alpha, \beta\}$ этой гиперболы находятся из уравнения

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 0,$$

откуда получаем два решения

$$\{\alpha, \beta\} = \{a, b\}, \quad \{\alpha, \beta\} = \{a, -b\}.$$

Центр гиперболы находится в начале координат. Следовательно, асимптоты гиперболы имеют уравнения

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Обратно, если прямые заданы уравнениями

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

то замечаем, что эти прямые имеют асимптотические направления относительно гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и проходят через ее центр, то есть являются асимптотами.

Доказательство для пересекающихся прямых получается повторением рассуждения для гиперболы. □

Задача. *Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку* $(1, 0)$, *асимптотами которой являются прямые* $x = 0, \quad y = 1$.

3.1 Уравнение гиперболы в асимптотах

3.4 Предложение. *Пересекающиеся прямые* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *являются асимптотами гиперболы*

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = D \neq 0$$

Доказательство. В самом деле, перейдем к новой системе координат $O'x'y'$, полагая

$$x' = A_1x + B_1y + C_1, \quad y' = A_2x + B_2y + C_2.$$

Заметим, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то есть это действительно переход к новой системе координат. Тогда уравнение

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = D$$

в новых координатах записывается следующим образом: $x'y' = D$. Определяем по инвариантам, что это гипербола. Находим асимптотические направления и центр. Получаем, что оси новой системы координат являются асимптотами. Но центр и асимптотические направления и в исходной системе координат Oxy являются центром и асимптотическими направлениями, поскольку находить центр и асимптотические направления можно в любой системе координат. Поэтому асимптотами в системе координат Oxy являеются прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. □

Уравнение $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = D \neq 0$ называется *уравнением гиперболы в асимптотах.*

3.2 Асимптоты в смысле математического анализа*

Асимптоты гиперболы являются асимптотами в смысле математического анализа, то есть в том смысле, что точка M гиперболы, перемещаясь по одной из ее ветвей в бесконечность, становится сколь угодно близкой к одной из ее асимптот. В самом деле, покажем, что когда точка $M(x_0, y_0)$ перемещается по верхней части правой ветви гиперболы в бесконечность, ее расстояние до асимптоты l

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

стремится к нулю. Согласно формуле расстояния от точки до прямой на плоскости имеем

$$\rho(M, l) = \frac{\left|\dfrac{x_0}{a} - \dfrac{y_0}{b}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}}}.$$

Но в то же время, из равенства

$$\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right) = 1$$

вытекает, что

$$\left|\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right|}.$$

Поэтому, поскольку $x_0 > 0, \quad y_0 > 0$, расстояние

$$\rho(M, l) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}} \cdot \left|\dfrac{x_0}{a} + \dfrac{y_0}{b}\right|}$$

от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l стремится к нулю при $x_0, y_0 \to +\infty$.

4 Диаметры линий второго порядка

Из школьной планиметрии известно, что середины параллельных хорд окружности лежат на диаметре этой окружности. При этом *диаметр окружности — это хорда, проходящая через центр.*

Пусть $\{\alpha, \beta\}$ — некоторое неасимптотическое направление линии второго порядка L, заданной в аффинной системе координат Oxy общим уравнением

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

и пусть прямая l, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t,$$

пересекается с линией L. Поскольку направление $\{\alpha, \beta\}$ не является асимптотическим, то прямая l пересекает линию L в двух точках M_1 и M_2 (различных или совпадающих). Пусть M — середина отрезка M_1M_2. Найдем геометрическое место середин хорд, параллельных данному неасимптотическому направлению. Предположим, что точка $M(x_0, y_0)$ является серединой хорды M_1M_2, высекаемой линией L на прямой l. Найдем координаты точек M_1 и M_2, подставляя уравнения прямой l в общее уравнение линии второго порядка.

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2))t + F(x_0, y_0) = 0.$$

Координаты точек M_1 и M_2 получаются из уравнений прямой l при значениях параметра t_1 и t_2, равным корням этого уравнения. Поскольку точка M является серединой хорды M_1M_2, и ее координаты (x_0, y_0) соответствуют значению параметра $t = 0$, получаем

$$t_1 + t_2 = 0.$$

По теореме Виета это условие равносильно тому, что

$$\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0.$$

Опуская индексы, получаем, что всякая середина $M(x, y)$ хорды неасимптотического направления $\{\alpha, \beta\}$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

Это уравнение является уравнением линии первого порядка. В самом деле, если

$$\alpha a_{11} + \beta a_{12} = 0 \quad \text{и} \quad \alpha a_{12} + \beta a_{22} = 0,$$

то

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = (\alpha, \beta)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (0, 0)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

и, следовательно, направление $\{\alpha, \beta\}$ асимптотическое, что не так.

Таким образом, доказано

4.1 Предложение. *Все середины $M(x, y)$ хорд данного неасимптотического направления $\{\alpha, \beta\}$ линии второго порядка L, заданной своим общим уравнением*

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

в аффинной системе координат Oxy, лежат на прямой, заданной в этой же системе координат уравнением

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

(линейная комбинация двух первых строк матрицы!)

4.2 Определение. Прямая, задаваемая уравнением $\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$ называется *диаметром линии второго порядка L, сопряженным данному неасимптотическому направлению $\{\alpha, \beta\}$.*

Диаметр, очевидно, **проходит через все центры линии второго порядка** L, если таковые имеются. Заметим, что если это определение применить к окружности, то мы получим прямую, на которой лежит диаметр окружности в смысле школьного определения.

Покажем, что диаметр не зависит от того, в какой аффинной системе координат мы рассматриваем уравнение данной линии. В системе координат Oxy уравнение диаметра можно записать в матричном виде

$$(\alpha, \beta, 0)\ A\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $O'x'y'$ — другая аффинная система координат и переход от системы Oxy к системе $O'x'y'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2. \end{cases}$$

Пусть

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\alpha, \beta, 0) = (\alpha', \beta', 0) D^T.$$

Далее,

$$(\alpha', \beta', 0)\, A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha', \beta', 0)\, D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (\alpha, \beta, 0)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, в системе координат $O'x'y'$ мы получаем аналогичное уравнение.

Вопрос. Может ли диаметр иметь асимптотическое направление?

1 Сопряженные направления. Особые направления.

1.1 Определение. Направления (или векторы) $a_1 = \{\alpha_1, \beta_1\}$ и $a_2 = \{\alpha_2, \beta_2\}$ называются *сопряженными* относительно линии второго порядка L, заданной в аффинной системе координат Oxy общим уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

если

$$(\alpha_1, \beta_1)\ A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{где} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Заметим, что асимптотические направления — это направления, которые сопряжены самим себе, т.е. это *самосопряженные* направления.

Отношение сопряженности симметрично, в чем можно убедиться, транспонируя матричное равенство в определении. Покажем, что определение сопряженных направлений не зависит от выбора системы координат. В самом деле, при переходе

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2. \end{cases}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

к новой системе координат $O'x'y'$ координаты векторов и матрица квадратичной формы изменяются по правилу

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')\ C^T, \quad A_1' = C^T AC,$$

поэтому

$$(\alpha_1', \beta_1')\ A_1' \begin{pmatrix} \alpha_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = (\alpha_1', \beta_1')\ C^T A_1 C \begin{pmatrix} \alpha_2' \\ \beta_2' \end{pmatrix} = (\alpha_1, \beta_1)\ A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, определение сопряженности направлений a_1 и a_2 относительно линии второго порядка L не зависит от аффинной системы координат, в которой мы рассматриваем уравнение линии L.

Задача. *В прямоугольной системе координат найти все сопряженные относительно окружности направления.*

1.1 Особые направления

Направление, сопряженное любому направлению, называется *особым* направлением данной линии второго порядка.

1.2 Предложение. *Особое направление $\{\alpha, \beta\}$ задаётся матричным уравнением*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и является асимптотическим направлением линии параболического типа, то есть такой линии, для которой $\delta = 0$.

Доказательство. Поскольку особое направление является сопряженным любому другому направлению, то в частности, особое направление сопряжено самому себе, то есть *особое направление является самосопряженным и, следовательно, асимптотическим направлением.* Возьмем теперь направление $\{\alpha, \beta\}$ и будем искать сопряженные ему направления $\{x, y\}$ относительно данной линии второго порядка L из уравнения

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha a_{11} + \beta a_{12} \quad , \quad \alpha a_{12} + \beta a_{22}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Если направление (α, β) является особым, то последнее уравнение справедливо для любых векторов $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Подставим $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Получим

$$\begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{12} = 0 \\ \alpha a_{12} + \beta a_{22} = 0. \end{cases}$$

Поскольку ненулевой вектор (α, β) является решением линейной однородной системы, отсюда следует, что $\delta = 0$. Следовательно, если у линии второго порядка есть особое направление, то эта линия является линией параболического типа. Очевидно, выписанная линейная однородная система равносильна матричному уравнению в условии предложения. Предложение 1.2 доказано. □

2 Диаметры центральных линий.Сопряженные диаметры.

2.1 Предложение. *Направление* **прямой**

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$$

сопряжено направлению $\{\alpha, \beta\}$.

Доказательство. Найдем координаты направляющего вектора p этой прямой.

$$p = \{-\alpha a_{12} - \beta a_{22}, \alpha a_{11} + \beta a_{12}\}.$$

Вычислим произведение трех матриц:

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha a_{12} - \beta a_{22} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{12} \end{pmatrix} = (\alpha a_{11} + \beta a_{12}, \alpha a_{12} + \beta a_{22}) \begin{pmatrix} -\alpha a_{12} - \beta a_{22} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{12} \end{pmatrix} = 0,$$

поэтому вектор p сопряжен вектору $\{\alpha, \beta\}$. □

2.2 Следствие. *Направление диаметра, сопряженного (неасимптотическому) направлению* $\{\alpha, \beta\}$*, сопряжено этому направлению.*

Задача. *Привести пример линии второго порядка и направления* $\{\alpha, \beta\}$*, для которого множество*

$$\{(x, y) : \alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0\}$$

не является прямой.

2.3 Лемма. *Направление, сопряженное относительно центральной линии неасимптотическому направлению, не является асимптотическим.*

Доказательство. От противного. Пусть $\{\alpha_1, \beta_1\}$ — неасимптотическое направление и ему сопряжено относительно центральной линии ($|A_1| = \delta \neq 0$) асимптотическое направление $\{\alpha_2, \beta_2\}$. То есть

$$(\alpha_1, \beta_1)\ A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad (\alpha_2, \beta_2)\ A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Направления $\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\{\alpha_1, \beta_1\}$ различны, так как направление $\{\alpha_1, \beta_1\}$ не является асимптотическим, а направление $\{\alpha_2, \beta_2\}$ асимптотическое. Заметим, что направление $\{\alpha_2, \beta_2\}$ сопряжено любой линейной комбинации векторов $\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\{\alpha_1, \beta_1\}$. Поскольку векторы $\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\{\alpha_1, \beta_1\}$ образуют базис плоскости, вектор $\{\alpha_2, \beta_2\}$ сопряжен любому вектору плоскости. Поэтому направление $\{\alpha_2, \beta_2\}$ является особым. Применяя предложение 1.2, согласно которому особые направления есть только у линий параболического типа, получаем $\delta = 0$, что по условию не так. □

Напомним, что линия второго порядка называется центральной, если у нее единственный центр, то есть $\delta \neq 0$. Например, центральной линией является окружность. У окружности нет асимптотических направлений, и любая прямая, проходящая через центр, является диаметром. Справедлива более общая

2.4 Теорема. *Если линия второго порядка является центральной, то любая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр, является диаметром этой линии.*

Доказательство. **Первое доказательство.**

Напомним, что координаты центра (x_0, y_0) находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Если эта система имеет единственное решение, то прямые, уравнения которых входят в систему, образуют собственный пучок. Поэтому любая прямая l, проходящая через единственный центр, задается уравнением

$$\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$$

при некоторых α и β. По предложению 2.1 направление этой прямой сопряжено с направлением $\{\alpha, \beta\}$. Поскольку отношение сопряженности симметрично, то и направление $\{\alpha, \beta\}$ сопряжено неасимптотическому (по условию!) направлению прямой l, проходящей через единственный центр. Следовательно, по лемме 2.3 направление, сопряженное относительно центральной линии неасимптотическому направлению, не является асимптотическим. Таким образом, прямая l является диаметром по определению диаметра, сопряженного данному неасимтотическому направлению $\{\alpha, \beta\}$.

Второе доказательство.

2.5 Лемма. *Направление, сопряженное неасимптотическому направлению, единственно.*

Доказательство. От противного. Пусть $\{\alpha_1, \beta_1\}$ — неасимптотическое направление и ему сопряжены два различных направления: $\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\{\alpha_3, \beta_3\}$. То есть

$$(\alpha_1, \beta_1)\ A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad (\alpha_1, \beta_1)\ A_1 \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = 0.$$

И, значит, любая линейная комбинация векторов $\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\{\alpha_3, \beta_3\}$ также сопряжена направлению $\{\alpha_1, \beta_1\}$. Но векторы $\{\alpha_2, \beta_2\}$ и $\{\alpha_3, \beta_3\}$ по условию различны и поэтому образуют базис плоскости и, следовательно, вектор $\{\alpha_1, \beta_1\}$ также является линейной комбинацией этих векторов и поэтому самосопряжен, что по условию не так. □

Пусть теперь некоторая прямая l проходит через единственный центр линии второго порядка L. Пусть a — направляющий вектор прямой l, по условию, a — вектор неасимптотического направления, поэтому по лемме 2.5 о единственности направления, сопряженного неасимптотическому направлению, существует единственный (с точностью до пропорциональности) вектор b, сопряженный вектору a. При этом $b \neq a$, поскольку a — вектор неасимптотического направления, то есть несамосопряженный вектор. По лемме 2.3 вектор b не может быть вектором асимптотического направления. Транспонируя матричное уравнение сопряженности векторов b и a, получаем что вектор a — единственный вектор, сопряженный вектору b. Рассмотрим диаметр m, сопряженный направлению b. Тогда по следствию 2.2 вектор a является направляющим вектором для прямой m. Кроме того, диаметр m проходит через центр линии L и, поскольку центр единственный, диаметр m совпадает с прямой l. □

Задача. *Привести пример линии второго порядка и прямой неасимптотического направления, проходящей через центр и не являющейся диаметром.*

Рассмотрим эллипс и последовательно построим два сопряженнх диаметра. Третий совпадет с первым. Вот это и установим.

2.6 Определение. Два диаметра **центральной линии** называются *сопряженными*, если сопряжены их направления.

Задача. *Доказать, что направления сопряженных диаметров не являются асимптотическими.*

Задача. *Привести пример линии второго порядка и двух её различных диаметров, направления которых являются асимптотическими.*

Поскольку сопряженность — понятие симметричное, то справедлива *геометрическая характеристика* сопряженных диаметров : *“Два диаметра сопряжены тогда и только тогда, когда каждый из этих двух диаметров делит пополам хорды, параллельные другому диаметру.”*

Задача. *Как связаны угловые коэффициенты k_1 и k_2 сопряженных диаметров гиперболы $xy = 1$?*

3 Главные направления линий второго порядка

3.1 Определение. Направление $\{\alpha, \beta\}$ называется *главным направлением* линии второго порядка L, если оно перпендикулярно некоторому сопряженному ему направлению.

Например, особое направление всегда главное.

В этом и следующих разделах 19, 20, 21 будем рассматривать **только прямоугольные системы координат**. Нетрудно заметить, что определение главного направления не зависит от выбора прямоугольной системы координат, в которой это главное направление вычисляется. Поэтому будем искать главные направления в канонической системе координат, в которой квадратичная форма имеет вид

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2.$$

Если вектор $\{\alpha', \beta'\}$ имеет главное направление, то он сопряжен с перпендикулярным вектором $\{-\beta', \alpha'\}$, поскольку скалярное произведение в системах координат Oxy и $O'x'y'$ считается по одной и той же формуле. Тогда условие сопряженности этих перпендикулярных направлений в канонической системе координат выглядит следующим образом:

$$(\alpha', \beta') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha'\beta' = 0,$$

поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то в этом случае уравнение превращается в уравнение $\alpha'\beta' = 0$, которое имеет с точностью до пропорциональности два решения $\{\alpha', \beta'\} = \{1, 0\}$ и $\{\alpha', \beta'\} = \{0, 1\}$. Полученные главные направления совпадают с направлениями базисных векторов канонической системы координат. Итак, главные направления в этом случае — это направления координатных осей канонической системы координат.

Если же $\lambda_1 = \lambda_2$ (обобщенная окружность), то любое направление, очевидно, является главным.

Таким образом, доказано

3.2 Предложение. *Главные направления линии второго порядка, не являющейся обобщенной окружностью, — это направления осей канонической системы координат.*

Замечание. Поскольку главные направления — это направления осей канонической системы координат, то главные направления в исходной системе координат Oxy можно находить из матричного уравнения, выведенного ранее. А именно, пусть $\{\alpha, \beta\}$ — направляющий вектор оси $O'x'$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{12}\beta = 0,$$

где λ_1 — корень характеристического уравнения $|A_1 - \lambda E| = 0$. Находим направляющий вектор $\alpha = a_{12}$, $\beta = \lambda_1 - a_{11}$. Тогда направляющим вектором оси $O'y'$, является, соответственно, вектор $\{a_{11} - \lambda_1, a_{12}\}$.

4 Главные диаметры линий второго порядка

4.1 Определение. Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он сопряжен перпендикулярному ему направлению, которое не является асимптотическим в соответствие с определением диаметра.

Из определения главного диаметра и из следствия 2.2, очевидно, следует, что *направление главного диаметра является главным.* Обратное неверно, то есть главное направление может не быть направлением главного диаметра.

Задача. *Доказать, что главное направление оси $O'y'$ канонической системы координат для параболы $y'^2 = 2px'$ не является направлением главного диаметра.*

4.2 Предложение. *Для центральной линии всякое главное направление является направлением главного диаметра.*

Доказательство. Поскольку определения главного направления и главного диаметра не зависят от выбора прямоугольной системы координат, перейдем к канонической системе координат, в которой центральная линия второго порядка задается простейшим уравнением $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0$, где $\lambda_1\lambda_2 = \delta \neq 0$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то линия является обобщенной окружностью $x'^2 + y'^2 + C' = 0$, относительно которой любое направление $\{\alpha', \beta'\}$ является главным. Выпишем диаметр, сопряженный перпендикулярному направлению $\{-\beta', \alpha'\}$: $-\beta' x' + \alpha' y' = 0$. Получили диаметр с направляющим вектором $\{\alpha', \beta'\}$, то есть главный диаметр.

Если же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из предложения 3.2 следует, что главные направления — это направления осей канонической системы координат, то есть сопряженные и взаимно перпендикулярные направления $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$. Выписывая уравнения диаметров, сопряженных этим направлениям относительно линии второго порядка $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0$, убеждаемся, что это оси канонической системы координат, которые и являются главными диаметрами. □

4.3 Предложение. *Главный диаметр является осью симметрии линии второго порядка,* *Доказательство.* Если линия второго порядка содержит более одной точки, то на главном диаметре лежат все середины хорд перпендикулярного направления. Поэтому главный диаметр и является осью симметрии линии второго порядка. Если линия второго порядка является парой мнимых пересекающихся прямых, то эта линия состоит из одной точки, которая является центром линии и через которую проходит любой диаметр. Очевидно, и в этом случае любой диаметр является осью симметрии. Если же линия второго порядка является пустым множеством, то любая прямая является осью симметрии пустого множества. Предложение 4.3 доказано. $\square$

Задача. *Верно ли утверждение, обратное к предложению* 4.3?

Задача. *Является ли равносильным определению* 4.1 *следующее определение: главным диаметром называется диаметр, направление которого является главным?*

Задача. *На плоскости нарисован эллипс. Циркулем и линейкой построить его фокусы.*

5 Ось и вершина параболы, выбор угла поворота

Пусть парабола в некоторой прямоугольной системе координат Oxy задана своим общим уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

а в канонической системе координат $O'x'y'$ каноническим уравнением

$$y'^2 = 2px', \quad p > 0.$$

Найдем уравнение оси параболы, то есть уравнение оси $O'x'$ в системе координат Oxy. Сначала найдем направляющий вектор $\{\alpha, \beta\}$ оси $O'x'$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \lambda_1 = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0,$$

откуда видно, что вектор $\{-a_{12}, a_{11}\}$ является направляющим вектором оси параболы $O'x'$, а перпендикулярный ему вектор $\{a_{11}, a_{12}\}$ является направляющим вектором оси $O'y'$. Теперь найдем уравнение оси и координаты вершины. Это можно сделать по крайней мере двумя способами.

Первый способ(изящный: сначала ось, а потом вершина!). Очевидно, в канонической системе координат ось параболы $O'x'$ делит пополам хорды, параллельные оси $O'y'$, и следовательно, является главным диаметром, сопряженным перпендикулярному ему направлению оси $O'y'$. Поскольку $\{a_{11}, a_{12}\}$ — направляющий вектор оси $O'y'$, поэтому уравнение диаметра сопряженного направлению вектора $\{a_{11}, a_{12}\}$ имеет вид

$$a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0.$$

Теперь находим вершину параболы (то есть начало O' канонической системы координат) как точку пересечения оси параболы с параболой. Таким образом, координаты вершины являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + a_{12}(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что эта система уравнений должна иметь единственное решение.

Второй способ(примитивный: сначала вершина, а потом ось). Напишем уравнение прямой, параллельной оси $O'y'$: $-a_{12}x + a_{11}y + C = 0$. Найдем параметр C из условия единственности точки пересечения прямой и параболы, то есть единственности решения системы

$$\begin{cases} -a_{12}x + a_{11}y + C = 0 \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$$

После чего найдем это единственное решение, то есть координаты вершины параболы, а затем напишем уравнение оси параболы как прямой, проходящей через вершину параллельно вектору $\{-a_{12}, a_{11}\}$.

И в первом и во втором случае остается указать направление оси внутрь параболы, то есть правильно определить угол поворота φ или вектор $e_1' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$. Угол **с точностью до** π можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a_{11}}{a_{12}}.$$

Но можно выбрать в качестве направляющего вектора один из векторов $\{-a_{12}, a_{11}\}$ или $\{a_{12}, -a_{11}\}$ оси $O'x'$, поделив выбранны вектор на длину $\sqrt{a_{12}^2 + a_{11}^2}$ этого вектора. Вопрос в том, какой из этих двух векторов надо выбрать?

Повернем оси системы координат Oxy на угол φ, то есть подставим в $F(x, y)$ вместо переменных x и y их выражения через $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ по формулам:

$$\begin{cases} x = \widetilde{x}\cos\varphi - \widetilde{y}\sin\varphi \\ y = \widetilde{x}\sin\varphi + \widetilde{y}\cos\varphi \end{cases}$$

В системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$ получаем

$$\widetilde{a}_1 = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi.$$

Уравнение параболы в системе координат $O\widetilde{x}\widetilde{y}$ имеет вид

$$\lambda_2\widetilde{y}^2 + 2\widetilde{a}_1\widetilde{x} + 2\widetilde{a}_2\widetilde{y} + a_0 = 0.$$

Далее, заметим, что при параллельном переносе начала координат в вершину параболы:

$$\begin{cases} \widetilde{x} = x' + x_0 \\ \widetilde{y} = y' + y_0 \end{cases}$$

коэффициент $\widetilde{a}_1$ не меняется, а уравнение параболы в канонической системе координат $O'x'y'$ становится простейшим:

$$\lambda_2 {y'}^2 + 2a_1'x' = 0, \quad \text{где} \quad a_1' = \widetilde{a}_1 = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi.$$

Для того, чтобы простейшее уравнение стало каноническим ${y'}^2 = 2px'$, $p > 0$, необходимо и достаточно выполнение условия $\lambda_2 \cdot a_1' < 0$. Так как $\lambda_2 = S$, окончательно получаем условие

$$S\cdot(a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad S\cdot((a_1, a_2)e_1') < 0.$$

Найденный таким образом угол φ или вектор e_1' и даст нам положительное направление оси параболы, то есть направление в сторону ветвей параболы.

Задача. *На плоскости нарисована парабола (без осей координат). Циркулем и линейкой построить вершину и фокус параболы.*

Задача. *Доказать, что четыре точки пересечения двух парабол, оси которых взаимно перпендикулярны, лежат на одной окружности.*

6 Решение задач на определение вида и расположения линий второго порядка**

№ 807, 1): $F(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0 \quad \to \quad \lambda_1{x'}^2 + \lambda_2{y'}^2 + C = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Приравниваем ортогональные инварианты, считаем Δ — тяжелая работа!

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -(36)^2 = \lambda_1\lambda_2 C = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 = \lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$S = 5 + 8 = 13 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$C = \frac{\Delta}{\delta} = -36$$

Проблема выбора λ_1 и λ_2: допускаем возможность ошибки и немедленно исправляемся, переходя к каноническому уравнению ($a \geq b$) !!

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 9 \quad \to \quad 4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Находим угол поворота

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2} \quad (\text{катеты 1 и 2!}) \quad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Или находим $\{\alpha, \beta\}$ — направляющий вектор оси $O'x'$. В этом случае

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha + 2\beta = 0,$$

откуда $e_1' = \{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\}$, поэтому $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Находим центр:} \quad \begin{cases} 5x_0 + 2y_0 - 16 = 0 \\ 2x_0 + 8y_0 - 28 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

$$\textbf{Ответ: } \text{Эллипс} \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1, \quad \begin{cases} x = x'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + y'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2 \\ y = -x'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + y'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 3 \end{cases}$$

Важное замечание. Можно обойти громоздкое вычисление Δ и найти C, подставляя координаты центра в $F(x, y)$: $C = F(x_0, y_0) = F(2, 3) = -36$, поскольку значения квадратичного отображения не зависят от выбора системы координат!

Дополнительно найдем фокусы и директрисы эллипса.

Полуоси:

$$a = 3, \quad b = 2.$$

Эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Координаты фокусов и уравнения директрис в канонической системе координат $O'x'y'$:

$$(\varepsilon a, 0) = (\sqrt{5}, 0), \quad (-\varepsilon a, 0) = (-\sqrt{5}, 0),$$

$$x' = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{9}{\sqrt{5}}, \quad x' = -\frac{a}{\varepsilon} = -\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Перейдем в исходную систему координат Oxy, подставив в формулы перехода:

$$\begin{cases} x = x'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + y'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2 \\ y = -x'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + y'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 3 \end{cases}$$

$$F_1(4, 2), \qquad F_2(0, 4),$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{18}{5} + y'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2 \\ y = -\dfrac{9}{5} + y'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \; 10x - 5y - 62 = 0$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{18}{5} + y'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2 \\ y = \dfrac{9}{5} + y'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \; 2x - y + 8 = 0$$

№ 807, 3): $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \quad \to \quad$ пусть сначала: $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0$

но $\delta = 0$, поэтому $C = \dfrac{\Delta}{\delta}$ найти нельзя. Изменяем простейшее уравнение:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -7 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приравниваем ортогональные инварианты!

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4} = -\lambda_2 (a_1')^2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 = \lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$S = 1 + 4 = 5 = \lambda_1 + \lambda_2$$

Проблемы выбора λ_1 и λ_2 нет: $\lambda_1 = 0 \quad$ и $\quad \lambda_2 = 5$

$$\frac{25}{4} = 5(a_1')^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1' = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Выбор знака коэффициента a_1': допускаем возможность ошибки и немедленно исправляемся, переходя к каноническому уравнению $(p > 0)$!!

$$a_1' = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \to \quad 5y'^2 - \sqrt{5}x' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'^2 = \frac{\sqrt{5}}{5}x'$$

Находим угол поворота

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{0-1}{-2} = \frac{1}{2} \quad \text{(катеты 1 и 2!)} \quad \cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Или находим $\{\alpha, \beta\}$ — направляющий вектор оси $O'x'$. В этом случае

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha - 2\beta = 0,$$

откуда $e_1' = \{-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\}$, поэтому $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Проверка правильности выбора знаков:

$$a_1' = a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} = 2\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Если равенство нарушается, то меняем знаки!
Теперь ищем уравнение оси и координаты вершины параболы. Находим перпендикулярное к оси $O'x'$ направление

$$\{1,\, -2\} = \{a_{11},\, a_{12}\}.$$

Уравнение сопряженного с вектором $\{1,\, -2\}$ диаметра, то есть уравнение оси $O'x'$

$$1\cdot(x - 2y + 2) - 2\cdot(-2x + 4y - 3/2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x - 10y + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 2y + 1 = 0$$

решаем совместно с уравнением параболы:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{(только одно решение! Почему?)}$$

Другой способ нахождения вершины. Направление оси $O'x'$: $\{-2,\, -1\}$, то есть $2x + y + C = 0$ — уравнение прямой, параллельной оси $O'y'$. Подставляя в уравнение линии, получаем

$$25x^2 + 10x(2C+1) + 4C^2 + 3C - 7 = 0,\ D = 25C + 200 = 0,\ C = -8,\ 25x^2 - 150x + 225 = 0,\ x = 3,\ y = 2.$$

Ответ: Парабола $\quad y'^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{5}x', \quad \begin{cases} x = -x'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + y'\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 3 \\ y = -x'\dfrac{1}{\sqrt{5}} - y'\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2 \end{cases}$

№ 809, 1): Найти фокусы и соответствующие им директрисы линии второго порядка

$$F(x,y) = 6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + C = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & -8 & -13 \\ 6 & -13 & -11 \end{pmatrix}$$

Сразу находим центр: $\begin{cases} 3y_0 + 6 = 0 \\ 3x_0 - 8y_0 - 13 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$

Находим C, подставляя координаты центра $O(-1,-2)$ в $F(x,y)$: $C = F(x_0, y_0) = F(-1,-2) = 9$.
Приравниваем ортогональные инварианты δ и S:

$$\delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = -9 = \lambda_1\lambda_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}$$

$$S = -8 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_1 = -9 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 1 \quad \to \quad -9x'^2 + y'^2 + 9 = 0 \quad \iff \quad \frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{9} = 1$$

$a = 1$, $b = 3$, поэтому эксцентриситет: $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{10}$.

Находим $e_1' = \{\alpha, \beta\}$ — направляющий вектор оси $O'x'$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad 9\alpha + 3\beta = 0,$$

откуда

$$e_1' = \{\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\}.$$

$$\overrightarrow{OF_1} = \varepsilon \cdot a \cdot e_1' = \{1, -3\} = -\overrightarrow{OF_2}.$$

Находим координаты фокусов:

$$F_1: \quad (-1+1, -2-3) = (0,-5) \qquad F_2: \quad (-1-1, -2+3) = (-2,1).$$

Уравнения директрис

$$l: \quad x - 3y + D = 0.$$

Коэффициент D находим из условия $\rho(O,l) = \dfrac{a}{\varepsilon} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$:

$$\rho(O,l) = \frac{|-1-3\cdot(-2)+D|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \iff |5+D| = 1 \iff D = -5 \pm 1.$$

$$l_1: \quad x - 3y - 4 = 0 \qquad l_2: \quad x - 3y - 6 = 0$$

Ответ: Гипербола: $\dfrac{x'^2}{1} - \dfrac{y'^2}{9} = 1$. Фокусы:$F_1(0,-5), F_2(-2,1)$. Директрисы:$l_1: x - 3y - 4 = 0, l_2: x - 3y - 6 = 0$.

1 Касательные к линиям второго порядка

Будем искать условия, при выполнении которых линия второго порядка и прямая имеют **двукратную** общую точку. Пусть линия L второго порядка задана в произвольной аффинной системе координат уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

пусть прямая l задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases}$$

Направляющий вектор прямой l равен $\{\alpha, \beta\}$, и пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на линии L, то есть $F(x_0, y_0) = 0$.

Подставляя в уравнение линии L вместо переменных x, y их параметрические выражения из уравнений прямой l, получим относительно t уравнение

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2\left(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)\right)t = 0.$$

Одним из корней этого уравнения является $t = 0$, при этом значению параметра $t = 0$ соответствует точка $M(x_0, y_0)$. Рассмотрим случай, когда и второй корень этого уравнения равен нулю, т.е. прямая l пересекает линию L в двукратной точке. Для этого необходимо и достаточно выполнение двух условий

$$1) \quad a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 \neq 0 \qquad 2) \quad \alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0,$$

то есть прямая l имеет неасимптотическое направление, причем из второго условия следует, что координаты ее направляющего вектора можно найти по следующим формулам:

$$\alpha = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \quad \beta = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1.$$

Так как направляющий вектор прямой должен быть ненулевым, то по крайней мере одно из чисел

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1, \quad a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2$$

не должно равняться нулю, иными словами, точка $M(x_0, y_0)$ не должна быть центром линии L. Итак, в этом случае **прямая l неасимптотического направления пересекает линию L в двукратной точке, не являющейся центром**. Если же

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0.$$

то есть вектор $\{\alpha, \beta\}$ имеет асимптотическое направление, и

$$\alpha = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \quad \beta = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1,$$

причем, по-прежнему, точка $M(x_0, y_0)$ не является центром линии L, то прямая l, очевидно, содержится в линии L.

Итак, уравнение прямой l имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 - (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)t, \\ y = y_0 + (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)t, \end{cases}$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0,$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y - a_{11}x_0^2 - 2a_{12}x_0y_0 - a_{22}y_0^2 - a_1x_0 - a_2y_0 = 0,$$

а так как

$$a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 = 0,$$

то окончательно

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 = 0.$$

Заметим, что теперь это уравнение можно переписать и в матричном виде:

$$(x_0, y_0, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Если точка $M(x_0, y_0)$, принадлежащая линии L, является центром этой линии, то есть

$$\alpha = -(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0, \quad \beta = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0,$$

то уравнение

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 = 0.$$

перестает быть уравнением прямой, так как оба коэффициента при x и при y равны нулю.

1.1 Определение. (Аналитическое определение касательной) Пусть линия второго порядка L в некоторой аффинной системе координат задана своим общим уравнением с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

и точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит линии L и не является центром. **Линию первого порядка**

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 = 0$$

или

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0$$

будем называть *касательной* к линии L в точке M.

Замечание. Выписанные уравнения задают **линию первого порядка** тогда и только тогда, когда точка $M(x_0, y_0)$ не является центром. Заметим, что среди линий эллиптического типа ($\delta > 0$) только линия, распадающаяся на две мнимые пересекающиеся прямые, содержит центр; среди линий гиперболического типа ($\delta < 0$) центр содержат пересекающиеся прямые (это точка их пересечения) и, наконец, среди линий параболического типа ($\delta = 0$) центр содержат совпадающие прямые (центрами являются все точки прямой, с которой совпадают рассматриваемые прямые). Поэтому в этих центрах отсутствуют касательные к соответствующим линиям второго порядка.

Покажем, что аналитическое определение касательной не зависит от аффинной системы, в которой мы рассматриваем уравнение данной линии. В системе координат Oxy уравнение касательной, как мы знаем, можно записать в виде

$$(x_0, y_0, 1)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $O'x'y'$ — другая аффинная система координат и переход от системы Oxy к системе $O'x'y'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2. \end{cases}$$

Тогда, если

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

получаем

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (x_0, y_0, 1) = (x'_0, y'_0, 1)D^T.$$

Имеем далее

$$(x'_0, y'_0, 1)\, A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x'_0, y'_0, 1)\, D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = (x_0, y_0, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, в системе координат $O'x'y'$ мы получаем аналогичное уравнение.

Отдельно рассмотрим **нераспадающиеся** линии второго порядка, то есть гиперболу, параболу и эллипс. Все эти линии не содержат центров. У эллипса нет асимптотических направлений. Поэтому снова рассматривая уравнение

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2\left(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)\right)t = 0,$$

убеждаемся, что справедливо следующее предложение 1.2.

1.2 Предложение. *Касательная к* **гиперболе** *или* **параболе** *— это в точности прямая неасимптотического направления, имеющая с гиперболой или параболой единственную общую точку (то есть пересекающая ее в двух совпадающих точках). Касательная к* **эллипсу** *— это в точности прямая, имеющая с эллипсом единственную общую точку (то есть пересекающая ее в двух совпадающих точках).*

В случае пересекающихся прямых касательная существует в любой точке, лежащей на линии, кроме точки пересечения этих прямых, и совпадает с одной из этих прямых, следовательно, имеет асимптотическое направление. В случае параллельных прямых касательная существует в любой точке, лежащей на линии, и совпадает с одной из этих прямых и также имеет асимптотическое направление. И, наконец, в случае совпадающих прямых касательная не существует ни в одной точке, лежащей на линии, поскольку каждая такая точка является центром.

Обязательная задача.*Доказать, что в канонической системе координат, если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на линии второго порядка, то уравнение касательной в точке M*

$$\text{для эллипса} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{имеет вид} \quad \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

$$\text{для гиперболы} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{имеет вид} \quad \frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1,$$

$$\text{для параболы} \quad y^2=2px \quad \text{имеет вид} \quad y_0y=p(x+x_0).$$

Задача. *На плоскости нарисована парабола (без осей координат). На параболе отмечена точка. Циркулем и линейкой построить касательную в отмеченной точке.*

1.1 Касательная и диаметр, проведенный в точку касания

Известно, что диаметр окружности, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Обобщением этого утверждения является следующее

1.3 Предложение. *Направления касательной и диаметра, проведенного в точку касания, сопряжены.*

Доказательство. Пусть диаметр

$$\alpha(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+\beta(a_{12}x+a_{22}y+a_2)=0,$$

сопряженный неасимптотическому направлению $\{\alpha,\beta\}$, пересекает линию второго порядка в точке $M(x_0, y_0)$, не являющейся центром. Так как диаметр проходит через точку $M(x_0, y_0)$, то верно следующее числовое равенство

$$\alpha(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)+\beta(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2)=0,$$

поэтому можно считать, что

$$\alpha=-(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2), \quad \beta=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1,$$

причем по крайней мере одно из этих чисел не равно нулю, так как точка $M(x_0, y_0)$ не является центром рассматриваемой линии. Видим, что вектор $\{\alpha,\beta\}$ является направляющим вектором касательной в точке $M(x_0, y_0)$:

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_1)x+(a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_2)y+a_1x_0+a_2y_0+a_0=0.$$

Из следствия **??** вытекает, что направляющий вектор диаметра сопряжен направлению $\{\alpha,\beta\}$ касательной в точке $M(x_0, y_0)$, что и доказывает предложение 1.3. □

Задача. *На плоскости нарисована эллипс (без осей координат). На эллипсе отмечена точка. Циркулем и линейкой построить касательную к эллипсу в отмеченной точке.*

1.2 Касательная и производная*.

Задача (необязательная!).

Аналитическое определение касательной к линии второго порядка в её точке $M(x_0, y_0)$, не являющейся центром, совпадает с известным из курса математического анализа определением касательной

$$y-y_0=y'(x_0)(x-x_0).$$

В самом деле, пусть линия второго порядка задана общим уравнением

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

причем точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит линии и не является центром. Общее уравнение определяет y как неявную функцию от x, или, наоборот, x как неявную функцию от y. Рассмотрим случай $y = y(x)$. Итак, функция $F(x,y)$ при $x = x_0$, $y = y_0$ обращается в нуль, а частные производные от нее по x и y, т.е., соответственно, $F'_x(x_0,y_0) = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)$ и $F'_y(x_0,y_0) = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)$ одновременно в нуль не обращаются, поскольку точка (x_0, y_0) не является центром. Предположим, что $F'_y(x_0,y_0) = 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) \neq 0$. Тогда из курса математического анализа известно, что неявная функция $y = y(x)$ дифференцируема. Продифференцируем тождество

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy(x) + a_{22}y^2(x) + 2a_1x + 2a_2y(x) + a_0 = 0.$$

$$2a_{11}x + 2a_{12}(y(x) + xy'(x)) + 2a_{22}y(x)y'(x) + 2a_1 + 2a_2y'(x) = 0.$$

Найдем из этого уравнения $y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = \frac{2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_1}{2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_2}.$$

Подставив это значение в уравнение $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, после преобразований получим

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0.$$

Таким образом, аналитическое определение касательной к линии второго порядка в точке (x_0, y_0), принадлежащей линии и не являющейся центром, совпадает с определением касательной к линии, которое дается в курсах математического анализа:

$$F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) = 0.$$

2 Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы*

Предположим, что эллипс, гипербола и парабола представляют собой зеркальные линии. И пусть в фокусе расположен источник света. Тогда лучи от этого источника в случае эллипса будут собираться в другом фокусе, в случае гиперболы лучи будут отражаться так, как если бы источник находился в другом фокусе, в случае параболы отраженные лучи параллельны оси параболы. Последнее свойство используется в прожекторах и в телескопах. И это объясняет, почему точки F' и F называются фокусами. В переводе с латыни слово “фокус” означает “очаг” (источник света). Итак, дадим точные формулировки и доказательства. Начнем со следующей вспомогательной задачи.

Задача. *На плоскости даны прямая l и две точки A и B, лежащие в одной полуплоскости. Найти на прямой l такую точку M, что сумма расстояний $\rho(M,A) + \rho(M,B)$ минимальна.*

В частности, минимум достигается в такой точке M, что равны острые углы, образуемые AM и BM с прямой l. В оптике это соответствует правилу “угол падения равен углу отражения”, поскольку согласно принципу Ферма свет минимизирует время, а следовательно, (в однородной среде) и расстояние. То же правило действует и для “кривых” зеркал, но в этом случае необходимо рассматривать углы с касательной к линии второго порядка в точке отражения.

2.1 Теорема. *Касательная к эллипсу является биссектрисой внешнего угла при вершине M треугольника $F'MF$, в котором вершины F' и F являются фокусами, а вершина M — точкой касания.*

Доказательство. Уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0.$$

Координаты фокусов: $F'(-a\varepsilon, 0)$, $F(a\varepsilon, 0)$. Покажем, что фокусы расположены по одну сторону от касательной. Для этого найдем *отклонения* (см. замечание к предложению **??**) фокусов:

$$-\frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} < 0; \quad \frac{\varepsilon x_0 - a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} < 0.$$

Опустим из фокусов F' и F перпендикуляры $F'P'$ и FP на касательную и найдем отношение расстояний от фокусов до касательной.

$$\frac{|F'P'|}{|FP|} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{|\varepsilon x_0 - a|} = \frac{a + \varepsilon x_0}{a - \varepsilon x_0} = \frac{r'}{r} = \frac{|F'M|}{|FM|},$$

поскольку длины фокальных радиусов соответственно равны $r' = a + \varepsilon x_0$ и $r = a - \varepsilon x_0$ (см. стр.**??**). Таким образом, треугольник $F'MP'$ подобен треугольнику FMP, и следовательно $\angle F'MP' = \angle FMP$, откуда и следует утверждение теоремы 2.1. □

2.2 Следствие. *Лучи, выходящие из одного фокуса эллипса, после отражения собираются в другом фокусе.*

2.3 Теорема. *Касательная к гиперболе является биссектрисой внутреннего угла M треугольника $F'MF$, в котором вершины F' и F являются фокусами, а вершина M — точкой касания.*

Доказательство. Уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0.$$

Координаты фокусов: $F'(-a\varepsilon, 0)$, $F(a\varepsilon, 0)$. Фокусы расположены по разные стороны от касательной. В самом деле, найдем отклонения фокусов:

$$-\frac{\varepsilon x_0 + a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}; \quad \frac{\varepsilon x_0 - a}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Произведение отклонений:

$$-\frac{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}{a^2(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4})} < 0.$$

Опустим из фокусов F' и F перпендикуляры $F'P'$ и FP на касательную. Тогда

$$\frac{|F'P'|}{|FP|} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{|\varepsilon x_0 - a|} = \frac{r'}{r} = \frac{|F'M|}{|FM|},$$

то есть треугольник $F'MP'$ подобен треугольнику FMP, и следовательно $\angle F'MP' = \angle FMP$, что и доказывает теорему 2.3. □

2.4 Следствие. *Лучи, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от неё "исходят" из другого фокуса, то есть продолжение отраженного луча попадает в другой фокус.*

Задача. *Доказать, что эллипс и гипербола с общими фокусами пересекаются под прямым углом.*

2.5 Теорема. *Касательная к параболе является биссектрисой угла FMP между фокальным радиусом MF точки касания M и перпендикуляром MP, опущенным на директрису.*

Доказательство. Координаты фокуса параболы: $F(\frac{p}{2}, 0)$. Точка касания: $M(x_0, y_0)$. Уравнение касательной: $y_0 y = p(x + x_0)$, Тогда $A(-x_0, 0)$ — точка пересечения касательной с осью Ox. Следовательно, расстояние от точки A до начала координат O: $|AO| = x_0$. $|AF| = |AO| + |OF| = x_0 + \frac{p}{2}$. Опустим перпендикуляр MP на директрису $x = -\frac{p}{2}$. Тогда $|MP| = x_0 + \frac{p}{2}$. Следовательно, $|AF| = |MP|$, и четырехугольник $APMF$ — параллелограмм. Но $|MP| = |MF|$ из директориального свойства параболы. Поэтому параллелограмм $APMF$ — ромб, диагональ MA которого является биссектрисой угла PMF. Теорема 2.5 доказана. □

2.6 Следствие. *Лучи, выходящие из фокуса параболы, после отражения от неё становятся параллельными оси параболы.*

3 Теоремы единственности для линий второго порядка

3.1 Теорема. *Пусть на плоскости даны пять различных точек M_i, $i = 1, \dots, 5$, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой, Тогда существует единственная линия второго порядка, проходящая через эти точки.*

Доказательство. Покажем, что существует единственный с точностью до пропорциональности такой многочлен $F(x, y)$ второй степени, что координаты точек M_i, $i = 1, \dots, 5$, удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$. Пусть точки M_i имеют координаты (x_i, y_i). Тогда для нахождения коэффициентов многочлена F получаем систему из пяти однородных уравнений с шестью неизвестными

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_1x_i + 2a_2y_i + a_0 = 0, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Покажем, что полученные пять уравнений системы линейно независимы. Предположим, что это не так. Тогда одно из уравнений системы, например пятое, линейно выражается через остальные. Это означает, что всякая линия второго порядка, проходящая через точки $M_1, \dots, M_4$, проходит и через точку M_5.

Покажем сначала, что в этом случае три точки из числа четырех $M_1, \dots, M_4$ лежат на одной прямой. В самом деле, в противном случае мы могли бы провести через точки $M_1, \dots, M_4$ две пары прямых, то есть две распадающиеся линии второго порядка:

во-первых, M_1M_2 и M_3M_4, во-вторых, M_1M_3 и M_2M_4.

Обе эти линии проходят через четыре точки $M_1, \dots, M_4$ и не имеют других общих точек; между тем у них должна была бы быть еще и пятая общая точка, а именно точка M_5. Противоречие! Итак, утверждение доказано: из четырех точек $M_1, \dots, M_4$ три, пусть $M_1, \dots, M_3$, лежат на одной прямой l.

Докажем, что на той же прямой l лежит и четвертая точка (M_4 или M_5). Пусть ни M_4, ни M_5 не лежат на прямой l. Проведем через M_4 произвольную прямую l', не проходящую через точку M_5. Снова получаем линию второго порядка, а именно пару прямых l и l', не проходящую через точку M_5, — опять получили противоречие.

Итак, мы доказали: если уравнения зависимы, то из точек $M_1, \dots, M_5$ четыре точки лежат на одной прямой. Полученное противоречие с условием теоремы показывает, что система линейных однородных уравнений содержит пять линейно независимых уравнений. Таким образом, если мы будем искать фундаментальную систему решений, например, приводя матрицу системы элементарными преобразованиями к ступенчатому виду, то поскольку ранг матрицы системы равен пяти, а число неизвестных равно шести, то получим с точностью до пропорциональности одно решение системы, что и требовалось доказать. □

Заметим, что если какие-либо четыре точки из пяти лежат на одной прямой, то теорема единственности не выполняется, что легко показывается с помощью двух различных пар пересекающихся прямых.

3.2 Теорема. *Пусть в системе координат Oxy множества точек, удовлетворяющих уравнениям второй степени $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$, совпадают и содержат более одной точки. Тогда многочлены F и G пропорциональны.*

$$L = \{(x, y) : F(x, y) = 0\} = \{(x, y) : G(x, y) = 0\}, \quad |L| > 1 \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \lambda G(x, y)$$

Доказательство. Рассмотрим все линии второго порядка, которые содержат более одной точки: эллипс, гипербола, парабола, пересекающиеся прямые, параллельные прямые, совпадающие прямые. Легко видеть, что на эллипсе, гиперболе, параболе, паре пересекающихся и паре параллельных прямых существуют пять различных точек, никакие четыре из которых не лежат на одной прямой. Поэтому для этих линий второго порядка теорема единственности вытекает из предыдущей теоремы единственности 3.1.

Остается рассмотреть случай, когда линия L является парой совпадающих прямых. В некоторой системе координат $O'x'y'$ линия L записывается уравнением $(y')^2 = 0$. Формулы перехода от исходной системы координат Oxy к системе координат $O'x'y'$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - C^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

В частности, $y' = \alpha x + \beta y + \gamma$ при каких-то $\alpha, \quad \beta, \quad \gamma$. Получаем в исходной системе координат уравнение

$$(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 = 0.$$

Поэтому единственность (с точностью до пропорциональности) немедленно вытекает из единственности (с точностью до пропорциональности) уравнения прямой. □

Задача. *Привести пример, показывающий, что условие „множество корней содержит более одной точки“ является существенным.*

4 Пучок линий второго порядка

Пусть M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре точки, не лежащие на одной прямой. *Пучком линий второго порядка,* определяемым точками M_1, M_2, M_3, M_4, называется множество линий второго порядка, проходящих через эти точки. Это множество бесконечно, поскольку по теореме единственности, если на плоскости даны пять различных точек M_i, $i = 1, \ldots, 5$, из которых никакие четыре не лежат на одной прямой, то существует единственная линия второго порядка, проходящая через эти точки. В самом деле, добавляя к точкам M_1, M_2, M_3, M_4 многими способами еще одну точку, по теореме единственности получаем линию второго порядка, которая проходит через эти пять точек. Пусть теперь линия L_1 задается уравнением $F_1(x, y) = 0$, а линия L_2 задается уравнением $F_2(x, y) = 0$, и пусть

$$F(x, y) = \lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_1(x, y).$$

Тогда линия L, задаваемая уравнением $F(x, y) = 0$, называется *линейной комбинацией* (с коэффициентами λ_1 и λ_2) линий L_1 и L_2. Следующая теорема 4.1 очевидна.

4.1 Теорема. *Всякая линия, являющаяся линейной комбинацией двух (или более) линий, принадлежащих данному пучку, принадлежит этому пучку.*

Докажем обратную к теореме 4.1 теорему 4.2.

4.2 Теорема. *Пусть в пучке линий второго порядка выбраны две различные линии: L_1, заданная уравнением $F_1(x, y) = 0$, и линия L_2 заданная уравнением $F_2(x, y) = 0$. Тогда всякая линия L данного пучка есть линейная комбинация этих двух линий L_1 и L_2.*

Доказательство. Пусть пучок определен четверкой точек M_1, M_2, M_3, M_4. Через эти четыре точки проходит линия L. Выберем на линии L какую-нибудь точку M_5, отличную от точек M_1, M_2, M_3, M_4. Тогда в силу теоремы единственности линия L является единственной линией второго порядка, проходящей через эти пять точек. Поэтому для доказательства теоремы достаточно найти такую линейную комбинацию $\lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_1(x, y)$, чтобы линия, задаваемая уравнением

$$\lambda_1 F_1(x, y) + \lambda_2 F_1(x, y) = 0,$$

проходила через точку $M_5(x_5, y_5)$, то есть достаточно определить числа λ_1 и λ_2 из соотношения

$$\lambda_1 F_1(x_5, y_5) + \lambda_2 F_1(x_5, y_5) = 0,$$

что, разумеется, всегда возможно. □

Задача. *Доказать, что нетривиальая линейная комбинация двух различных линий второго порядка из пучка является линией второго порядка.*

Замечание. Понятие пучка линий второго порядка позволяет очень просто находить уравнение линии второго порядка, проходящей через заданные пять точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, при условии, что никакие четыре из этих точек не лежат на одной прямой. В самом деле, возьмем четыре точки M_1, M_2, M_3, M_4 и напишем уравнения прямых M_1M_2, M_3M_4 и M_1M_3, M_2M_4. Затем перемножив уравнения этих прямых (условно запишем так!) $(M_1M_2) \cdot (M_3M_4) = 0$ и $(M_1M_3) \cdot (M_2M_4) = 0$, получим уравнения двух распадающихся линий из пучка. Требуемое уравнение находится в виде линейной комбинации этих двух линий в соответствие с доказательством теоремы 4.2.

Олимпиадная задача для механиков. *Выяснить условия, при выполнении которых четыре точки пересечения эллипса и параболы лежат на окружности.*

Решение. Можно считать, что эллипс задан некоторым общим уравнением $F(x, y) = 0$, а парабола задана уравнением $y^2 - 2px = 0$, так как всегда можно перейти в каноническую систему координат для параболы. Тогда уравнение окружности можно искать в виде $F(x, y) + \lambda(y^2 - 2px) = 0$. Матрица квадратичной формы этого уравнения имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} + \lambda \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы линия второго порядка являлась окружностью необходимо, чтобы

$$S^2 = 4\delta \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{11} + a_{22} + \lambda)^2 = 4(a_{11}a_{22} + \lambda a_{11} - a_{12}^2) \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda - a_{11} + a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0,$$

откуда $a_{12} = 0$ (необходимое условие!), $\lambda = a_{11} - a_{22}$, и получаем линейную комбинацию вида $a_{11}x^2 + a_{11}y^2 + \ldots\ldots = 0$. После выделения полных квадратов получаем уравнение окружности. Таким образом четыре точки пересечения любой линии второго порядка (то, что линия является эллипсом, никак не использовалось) и параболы лежат на окружности в том и только в том случае, когда оси канонических систем координат (главные направления) линии второго порядка и параболы параллельны.

1 Определение и свойства аффинных преобразований

1.1 Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если для любых различных элементов $x_1, x_2 \in X$ их образы $f(x_1)$, $f(x_2)$ также различны. Отображение $f : X \to Y$ называется *сюръективным* или *отображением „на“*, если для каждого элемента $y \in Y$ существует такой элемент $x \in X$, что $y = f(x)$. Если выполнены оба эти условия, то отображение f называется *биективным* или *биекцией* или *взаимно однозначным отображением „на“*.

1.2 Определение. *Преобразованием* множества X называется биективное отображение $f : X \to X$.

Обозначим через $\mathcal{P}^1$ множество точек прямой, через $\mathcal{P}^2$ множество точек плоскости, через $\mathcal{P}^3$ множество точек пространства.

1.3 Определение. (**аффинного преобразования „по равенству координат“.**) Отображение $f : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$; $n = 1, 2, 3$, прямой, плоскости или пространства называется *аффинным преобразованием*, если существуют две аффинные системы координат $Ox_1 \dots x_n$ („старая“) и $O'x'_1 \dots x'_n$ („новая“) такие, что координаты любой точки $M \in \mathcal{P}^n$ в старой системе координат совпадают с координатами ее образа $f(M)$ в новой системе координат. В этом случае говорят, что аффинное преобразование f *ассоциировано или связано* с двумя системами координат $Ox_1 \dots x_n$ и $O'x'_1 \dots x'_n$ или с двумя реперами $Oe_1 \dots e_n$ и $O'e'_1 \dots e'_n$.

1.4 Предложение. *Аффинное преобразование является преобразованием!*

1.5 Предложение. *Обратное к аффинному преобразованию преобразование является аффинным преобразованием.*

Действительно, поскольку аффинное преобразование является преобразованием, то есть биекцией, то существует обратное отображение, которое также является аффинным преобразованием. В самом деле, если преобразование f ассоциировано с реперами $Oe_1 \dots e_n$ и $O'e'_1 \dots e'_n$, то обратное преобразование ассоциировано с реперами $O'e'_1 \dots e'_n$ и $Oe_1 \dots e_n$. Тождественное преобразование, разумеется, ассоциировано с любой парой совпадающих реперов.

1.6 Определение. (**линейного отображения векторных пространств**) Пусть даны два векторных пространства V и W над полем $\mathbb{K}$. Отображение $g : V \to W$ называется линейным, если

1) $g(a + b) = g(a) + g(b)$ для любых $a, b \in V$; 2) $g(\lambda a) = \lambda g(a)$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in V$.

Линейное отображение $g : V \to W$ называется *изоморфизмом*, если g биективно.

1.7 Определение. Пусть $f : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$, — аффинное преобразование (прямой, плоскости или пространства). Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN} \in R^n$. Отображение $\widehat{f} : R^n \to R^n$ определяется равенством $\widehat{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}$.

1.8 Предложение. $\widehat{f} : R^n \to R^n$, *— изоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$. Поскольку координаты вектора получаются вычитанием координат его начальной точки из координат конечной точки, координаты вектора $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ относительно нового репера те же, что и координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ относительно старого репера. Иными словами, отображение $\widehat{f}$ определяется равенством координат вектора a и его образа $\widehat{f}(a)$ в разных реперах, и поскольку любая координата суммы двух векторов является суммой соответствующих координат слагаемых и аналогично для произведения вектора на число, получаем, что отображение $\widehat{f}$ является линейным взаимно однозначным отображением „на“, то есть изоморфизмом векторного пространства R^n на себя. Более точно, отображение $\widehat{f}$ является композицией двух отображений $g : R^n \to R_n$ и $h : R_n \to R^n$. Первое отображение g ставит в соответствие вектору $a \in R^n$ набор $(x_1, \dots x_n) \in R_n$ его координат в старом репере, а второе отображение h переводит набор чисел $(x_1, \dots x_n) \in R_n$ в вектор с координатами $\{x_1, \dots, x_n\}$ в новом репере. □

Изоморфизм $\widehat{f}$ называется *изоморфизмом, порожденным аффинным отображением f.*

1.9 Предложение. *При аффинном преобразовании плоскости*

1) *прямая переходит в прямую, а три точки, не лежащие на одной прямой переходят в три точки, не лежащие на одной прямой;*

2) *сохраняется параллельность прямых;*

3) *сохраняется деление отрезка в данном отношении.*

Доказательство. 1) Заметим, что аффинное преобразование f сохраняет уравнения, то есть, если линия L задавалась уравнением $F(x, y) = 0$ в старой системе координат, то её образ $f(L)$ задается тем же самым уравнением $F(x', y') = 0$ в новой системе координат. В частности, прямая l есть множество всех точек пространства, задаваемых уравнением $Ax + By + C = 0$ в некоторой аффинной системе координат Oxy. Пусть аффинное преобразование f ассоциировано с парой систем координат Oxy и $O'x'y'$. Тогда образ прямой l описывается тем же уравнением в системе координат $O'x'y'$, а именно, $Ax' + By' + C = 0$, т.е. является прямой. Поскольку обратное отображение к аффинному преобразованию

f является аффинным преобразованием, никакие три точки, не лежащие на одной прямой, не могут перейти в три точки, лежащие на одной прямой.

2) Параллельность прямых l и l' равносильна тому, что они не пересекаются. Из биективности преобразования f вытекает, что прямые $f(l)$ и $f(l')$ также не пересекаются.

3) Точка P делит отрезок MN в отношении λ, если $\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PN}$. Поскольку $\widehat{f}$ является изоморфизмом, то $\widehat{f}(\overrightarrow{MP}) = \lambda \cdot \widehat{f}(\overrightarrow{PN})$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что $\overrightarrow{f(M)f(P)} = \lambda \cdot \overrightarrow{f(P)f(N)}$. □

1.10 Теорема. *Аффинное преобразование плоскости полностью определяется образами любых данных трех точек, не лежащих на одной прямой, то есть существует единственное аффинное преобразование плоскости, переводящее данную тройку не лежащих на одной прямой точек O, P, Q в другую тройку не лежащих на одной прямой точек O', P', Q' той же плоскости.*

Доказательство. Для проверки существования достаточно взять аффинное преобразование f, ассоциированное с реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$, где
$$e_1 = \overrightarrow{OP}, \quad e_2 = \overrightarrow{OQ}, \quad e_1' = \overrightarrow{O'P'}, \quad e_2' = \overrightarrow{O'Q'}.$$
Для доказательства единственности достаточно проверить, что если аффинное преобразование переводит точки O, P, Q в точки O', P', Q', то оно ассоциировано с описанными выше реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$. Пусть M — произвольная точка с координатами (x, y) в репере Oe_1e_2. Это означает, что
$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2.$$
Поскольку отображение $\widehat{f}$ линейно, получаем
$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = \widehat{f}(\overrightarrow{OM}) = x\widehat{f}(e_1) + y\widehat{f}(e_2).$$
Но это равенство равносильно тому, что точка $f(M)$ имеет координаты (x, y) в репере $f(O)\widehat{f}(e_1)\widehat{f}(e_2)$. Это означает, что отображение f является аффинным преобразованием, ассоциированным с реперами Oe_1e_2 и $f(O)f(e_1)f(e_2)$. Теорема 1.10 доказана. □

1.11 Следствие. *Если f и g — аффинные преобразования плоскости, первое из которых ассоциировано с реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$, то композиция $g \circ f$ ассоциирована с парой Oe_1e_2 и $g(O')\widehat{g}(e_1'), \widehat{g}(e_2')$.*

Задача.*Доказать, что аффинные преобразования образуют группу с композицией в качестве умножения.*

1.12 Предложение. *При аффинном преобразовании пространства*

1) *плоскость переходит в плоскость, а четыре точки, не лежащие в одной плоскости переходят в четыре точки, не лежащие в одной плоскости;*

2) *сохраняется параллельность плоскостей;*

3) *прямая переходит в прямую;*

4) *сохраняется параллельность прямых;*

5) *сохраняется деление отрезка в данном отношении.*

Доказательство. 1) Плоскость π задается уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$ в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$. Пусть аффинное преобразование f ассоциировано с парой систем координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Тогда образ плоскости $f(\pi)$ описывается тем же уравнением в системе координат $O'x'y'z'$, т.е. является плоскостью. Четыре точки, не лежащие в одной плоскости не могут перейти в четыре точки, лежащие в одной плоскости, поскольку обратное отображение также является аффинным преобразованием;

2) Параллельность плоскостей π и π' равносильна тому, что они не пересекаются. Из биективности преобразования f вытекает, что плоскости $f(\pi)$ и $f(\pi')$ также не пересекаются.

3) В пространстве прямая l является линией пересечения двух различных плоскостей π_1 и π_2, то есть $l = \pi_1 \cap \pi_2$. Поскольку афинное отображение взаимнооднозначно, то $f(l) = f(\pi_1) \cap f(\pi_2)$.

4) Прямые в пространстве параллельны, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. Поэтому утверждение вытекает из пунктов 1 и 3 и биективности преобразования f.

5) Точка P делит отрезок MN в отношении λ, если $\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PN}$. Поскольку отображение $\widehat{f}$ является изоморфизмом, получаем, что $\widehat{f}(\overrightarrow{MP}) = \lambda \cdot \widehat{f}(\overrightarrow{PN})$, а это равносильно тому, что $\overrightarrow{f(M)f(P)} = \lambda \cdot \overrightarrow{f(P)f(N)}$. □

1.13 Теорема. *Аффинное преобразование пространства полностью определяется образами любых данных четырех точек, не лежащих в одной плоскости, то есть существует единственное аффинное преобразование пространства, переводящее данную четверку не лежащих в одной плоскости точек O, M, N, P в другую четверку не лежащих в одной плоскости точек O', M', N', P' того же пространства.*

Задача.Доказать самостоятельно теорему 1.13.

Задача. *Дан треугольник ABC. Рассматривается аффинное преобразование, переводящее точку A в точку B, точку B в точку C, точку C в точку A. Есть ли у этого аффинного преобразования неподвижная точка?*

2 Аналитическая запись аффинного преобразования

Пусть аффинное преобразование f плоскости ассоциировано с реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{— матрица перехода от базиса} \quad e_1, e_2 \quad \text{к базису} \quad e_1', e_2' \quad \text{т.е.} \quad (e_1', e_2') = (e_1, e_2)C.$$

Пусть, кроме того, известны координаты (c_1, c_2) нового начала O' в исходной („старой") системе координат Oxy. Тогда координаты (x, y) произвольной точки M и координаты (x', y') ее образа $M' = f(M)$ в исходном („старом") репере связаны соотношениями

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2. \end{cases}$$

В самом деле, найдем координаты (x', y') образа $M' = f(M)$ в системе координат Oxy:

$$(e_1, e_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (e_1', e_2')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (e_1, e_2)\, C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (e_1, e_2)\left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) \iff \begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2. \end{cases}$$

Наоборот, пусть на плоскости фиксирована система координат Oxy, порожденная репером Oe_1e_2. Пусть отображение f переводит точку $M(x, y)$ в точку $f(M) = M'(x', y')$, где x', y' определяются равенствами

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2 \end{cases}, \quad \text{причем} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда отображение f является аффинным преобразованием, ассоциированным с реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$, где точка O' имеет координаты (c_1, c_2) и

$$(e_1', e_2') = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = (e_1, e_2)\, C.$$

В самом деле, проделаем выкладки в обратном порядке:

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2 \end{cases} \iff \overrightarrow{OM'} = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (e_1, e_2)\left(C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= (e_1, e_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (e_1, e_2)\, C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (e_1', e_2')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} \iff$$

$$\iff \overrightarrow{O'M'} = (e_1', e_2')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \overrightarrow{O'M'} = xe_1' + ye_2' \iff M' = (x, y)$$

в репере $O'e_1'e_2'$. Итак, точка M с координатами (x, y) в репере Oe_1e_2 отображением f переводится в точку $f(M)$ с координатами (x, y) в репере $O'e_1'e_2'$, т.е. отображение f является аффинным преобразованием, ассоциированным с реперами Oe_1e_2 и $O'e_1'e_2'$.

Так как координаты вектора равны разности координат конца и начала вектора, то формулы

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y \end{cases}$$

представляют собой аналитическую запись (в базисе e_1, e_2) изоморфизма $\widehat{f}$, порожденного аффинным преобразованием f. Иными словами,. вектор a с координатами $\{x, y\}$ переходит в вектор $\widehat{f}(a)$ с координатами $\{x', y'\}$. Полезно помнить *геометрический смысл* столбцов в формулах аффинных преобразований: столбцы — это координаты образов векторов исходного („старого") базиса в том же самом („старом") базисе.

Аналогичные формулы

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + c_1, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + c_2, \\ z' = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + c_3 \end{cases}$$

справедливы для аффинного преобразования пространства.

3 Движения и изометрии

3.1 Определение. Аффинное преобразование $f : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$; $n = 1, 2, 3$, называется *движением*, если оно ассоциировано с двумя прямоугольными системами координат. Если реперы, с которыми ассоциировано движение, одинаково ориентированы, то движение называется *собственным*, в противном случае — *несобственным*.

3.2 Предложение. *Аффинное преобразование f, записанное в прямоугольной системе координат формулами*

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1 \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2 \end{cases},$$

является движением тогда и только тогда, когда матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональна.

Доказательство. Пусть система координат Oxy задается ортонормированным репером Oe_1e_2. Если аффинное преобразование является движением, то матрица C является матрицей перехода от ортонормированного базиса e_1, e_2 к ортонормированному базису $\widehat{f}(e_1), \widehat{f}(e_2)$. Поэтому матрица C является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису и, следовательно, ортогональна.

Если же матрица C ортогональна, то базис $\widehat{f}(e_1), \widehat{f}(e_2)$ ортонормированный. И преобразование , очевидно ассоциировано с двуми ортонормированными реперами, то есть является движением. □

3.3 Определение. Отображение $f : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$; $n = 1, 2, 3$, называется изометрическим или изометрией, если оно сохраняет расстояние между точками, т.е. когда $\rho(M_1, M_2) = \rho(f(M_1), f(M_2))$ для любых точек $M_1, M_2 \in \mathcal{P}^n$.

Определим отображение $\widehat{f}$ вектора $\overrightarrow{MN}$ с помощью изометрии $f : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$; $n = 1, 2, 3$:

$$\widehat{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}.$$

3.4 Лемма. *Изометрия сохраняет скалярные произведения в следующем смысле: пусть $\overrightarrow{OM} = m$, $\overrightarrow{OA} = a$; тогда $(m, a) = (\widehat{f}(m), \widehat{f}(a))$.*

Доказательство.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = m - a$$

. Так как равны векторы, то равны и их скалярные квадраты:

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM}) = (m - a, m - a) = (m, m) - 2(m, a) + (a, a),$$

то есть

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = |m|^2 - 2(m, a) + |a|^2,$$

или

$$2(m, a) = |m|^2 + |a|^2 - |\overrightarrow{AM}|^2.$$

Аналогично получаем равенство

$$2(\widehat{f}(m), \widehat{f}(a)) = |\widehat{f}(m)|^2 + |\widehat{f}(a)|^2 - |\widehat{f}(\overrightarrow{AM})|^2.$$

Поскольку f — изометрия, $|m| = |\widehat{f}(m)|$, $|a| = |\widehat{f}(a)|$, $|\overrightarrow{AM}| = |\widehat{f}(\overrightarrow{AM})|$. Лемма 3.4 доказана. □

3.5 Теорема. *Отображение $f : \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n$; $n = 1, 2, 3$, является движением тогда и только тогда, когда f является изометрией.*

Доказательство. Проведём доказательство для плоскости $\mathcal{P}^2$. Пусть f — движение, то есть аффинное преобразование, ассоциированное с прямоугольными системами координат Oxy и $O'x'y'$. Пусть точки M_1 и M_2 имеют в „старой“ системе координат Oxy координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда, в силу прямоугольности „старой“ системы координат расстояние между точками вычисляется по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Точки $f(M_1)$ и $f(M_2)$ имеют те же координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2), но уже в „новой“ системе координат $O'x'y'$, которая также является прямоугольной. Поэтому

$$\rho(f(M_1), f(M_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Следовательно, f — изометрическое преобразование.

Пусть теперь f является изометрией, то есть сохраняет расстояние между точками. Возьмем теперь в плоскости какой-нибудь ортонормированный репер Oe_1e_2, определяющий „старую“ систему коодинат. Из леммы 3.4 о сохранении скалярного произведения при изометрии следует, что репер $\widehat{f}(O)\widehat{f}(e_1)\widehat{f}(e_2)$, определяющий “новую” систему координат, также ортонормирован. Теперь заметим, что координаты точки M в ортонормированном базисе равны скалярным произведениям радиус вектора $\overrightarrow{OM}$ на соответствующие базисные векторы. Из той же леммы 3.4 о сохранении скалярного произведения получаем, что координаты точки M в „старой“ и в „новой“ системе координат совпадают, то есть изометрия f является аффинным преобразованием, ассоциированным с ортонормированными реперами Oe_1e_2 и $\widehat{f}(O)\widehat{f}(e_1)\widehat{f}(e_2)$, поэтому является движением. Теорема 3.5 доказана. □

Задача. *Теорема 3.5 доказана для плоскости $\mathcal{P}^2$. Повторить доказательство теоремы 3.5 для прямой $\mathcal{P}^1$ и для пространства $\mathcal{P}^3$.*

Задача. *Доказать, что изометрия является биекцией.*

1 Аффинная классификация линий второго порядка

1.1 Определение. Две линии называются *аффинно эквивалентными*, если одна из них переходит в другую при некотором аффинном преобразовании.

Из сохранения уравнений линий при аффинном преобразовании вытекает

1.2 Предложение. *При аффинном преобразовании плоскости линия второго порядка переходит в линию второго порядка.*

1.3 Предложение. *Центры, асимптотические направления, асимптоты, сопряженные направления, сопряженные диаметры линий второго порядка являются инвариантами аффинных преобразований.*

Доказательство. Прежде всего расшифруем формулировку предложения 1.3. То есть, если $f : \mathcal{P}^2 \to \mathcal{P}^2$ — аффинное преобразование, L — линия второго порядка, точка P, вектор a, прямая l, векторы p и q, прямые l_1 и l_2 являются соответственно центром, вектором асимптотического направления, асимптотой, сопряженными направлениями, сопряженными диаметрами линии L, то $f(P)$, $\widehat{f}(a)$, $f(l)$, $\widehat{f}(p)$ и $\widehat{f}(q)$, прямые $f(l_1)$ и $f(l_2)$ будут соответственно центром, вектором асимптотического направления, асимптотой, сопряженными направлениями, сопряженными диаметрами линии $f(L)$. Теперь ясно, что предложение 1.3 непосредственно вытекает из предложения 1.2, поскольку упомянутые элементы выражаются уравнениями, однозначно задаваемыми уравнением данной линии второго порядка. □

Задача. *Переходит ли ось симметрии в ось симметрии при аффинном преобразовании?*

Нетрудно заметить, что отношение аффинной эквивалентности рефлексивно (так как тождественное преобразование является аффинным), симметрично (так как обратное к аффинному преобразованию является аффинным преобразованием) и транзитивно(так как суперпозиция аффинных преобразования является аффинным преобразованием), то есть является отношением эквивалентности. Линии второго порядка разбиваются на девять классов аффинной эквивалентности в соответствии со следующей классификационной теоремой.

1.4 Теорема. *Произвольная линия второго порядка посредством аффинного преобразования переводится в одну и только в одну из следующих линий, заданных в некоторой (аффинной) системе координат уравнениями*

1) $x^2 + y^2 = 1$, *эллипс;*
2) $x^2 + y^2 = -1$, *мнимый эллипс;*
3) $x^2 + y^2 = 0$, *пара мнимых пересекающихся прямых;*
4) $x^2 - y^2 = 1$, *гипербола;*
5) $x^2 - y^2 = 0$, *пара пересекающихся прямых;*
6) $y^2 = x$, *парабола;*
7) $y^2 - 1 = 0$, *пара параллельных прямых;*
8) $y^2 + 1 = 0$, *пара мнимых параллельных прямых;*
9) $y^2 = 0$, *пара совпадающих прямых.*

При этом линии, имеющие одинаковые названия, аффинно эквивалентны, а линии разных названий аффинно неэквивалентны.

Доказательство. Пусть линия второго порядка задана общим уравнением в некоторой (вообще говоря, аффинной) системе координат Oxy. Без ограничения общности можно считать, что система координат является прямоугольной. В самом деле, возьмем „новую“ прямоугольную систему координат и рассмотрим аффинное отображение, ассоциированное с двумя системами координат. Аффинный образ линии будет записываться тем же самым уравнением.

Из основной теоремы следует, что найдется другая прямоугольная система координат $O'x'y'$, в которой уравнение линии второго порядка становится каноническим:

1) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, эллипс;
2) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$, мнимый эллипс;
3) $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$, пара мнимых пересекающихся прямых;
4) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, гипербола;
5) $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$, пара пересекающихся прямых;

6) $y'^2 = 2px'$, парабола;

7) $y'^2 - a^2 = 0$, пара параллельных прямых;

8) $y'^2 + a^2 = 0$, пара мнимых параллельных прямых;

9) $y'^2 = 0$, пара совпадающих прямых.

Для определенности дальнейшие рассуждения проведем для эллипса:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

С помощью аффинного преобразования перейдем к совсем простому виду, упомянутому в условии. Для этого рассмотрим следующую аналитическую запись еще одного аффинного преобразования:

$$x'' = \frac{x'}{a}, \quad y'' = \frac{y'}{b}.$$

Тогда эллипс перейдет в окружность, задаваемую уравнением

$$x''^2 + y''^2 = 1,$$

или, так как x'' и y'' суть координаты (произвольной!) точки относительно той же системы координат $O'x'y'$, то, можно считать,что эллипс перейдет в окружность, задаваемую уравнением

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

поскольку нам все равно какими буквами обозначать координаты произвольной точки линии. Теперь рассмотрим аффинное преобразование, ассоциированное с системами координат $O'x'y'$ и Oxy. Поскольку уравнения линий сохраняются, получаем, что композиция рассмотренных аффинных преобразований дает необходимый результат.

Теперь докажем, что линии второго порядка, имеющие различные названия, аффинно неэквивалентны. Сначала различим между собой линии второго порядка, имеющие более одной точки. Линии, содержащие прямую, неэквивалентны эллипсу, гиперболе и параболе, поскольку никакие три точки любой из этих кривых не лежат на одной прямой. Предложение 1.3 позволяет различить между собой эллипс, гиперболу и параболу: парабола не имеет центра, эллипс не имеет асимптотических направлений. Линии, распадающиеся на прямые, можно различить по количеству центров. Пересекающиеся прямые имеют единственный центр, а параллельные и совпадающие прямые — прямую центров. Любой центр совпадающих прямых лежит на них, а для параллельных прямых это не так. Единственная линия, содержащая только одну точку (пара мнимых пересекающихся прямых) очевидно не может быть аффинным преобразованием переведена ни в какую другую линию. Если точек совсем нет (мнимый эллипс или пара мнимых параллельных прямых), то такую линию нельзя перевести аффинным преобразованием в линию, у которой есть точки. Остается различить мнимый эллипс и пару мнимых параллельных прямых. Их можно различить по числу центров или по наличию асимптот. Но можно различить эти линии, рассматривая переход от одного уравнения к другому как формальное изменения с помощью формул аффинного преобразования.

$$\begin{cases} x' = c_{11}x + c_{12}y + c_1, \\ y' = c_{21}x + c_{22}y + c_2. \end{cases}$$

В самом деле, рассуждаем от противного: пусть $y'^2 + 1 = 0$ — пара мнимых параллельных прямых, тогда $(c_{21}x + c_{22}y + c_2)^2 + 1 = 0$ — мнимый эллипс, и, значит, $(c_{21}x + c_{22}y + c_2)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1$ — тождество. Подставляя различные значения x и y, получаем $c_{21} = c_{22} = c_2 = 0$. Полученное противоречие доказывает невозможность аффинного перехода. □

Задача. *Почему парабола аффинно не эквивалентна одной ветви гиперболы?*

Задача. *Является ли вершина параболы аффинным инвариантом?*

2 Основная теорема об аффинных преобразованиях плоскости

2.1 Теорема. *Всякое аффинное преобразование плоскости является композицией движения и двух сжатий (или растяжений) плоскости в двух взаимно перпендикулярных направлениях.*

Доказательство. Рассмотрим аффинное преобразование f^{-1}, обратное к данному преобразованию f, и рассмотрим какую-нибудь окружность L' радиуса 1 с центром O'. При аффинном преобразовании f^{-1} окружность L' переходит, вообще говоря, в эллипс L, а центр O' окружности L' переходит в центр O эллипса L. При отображении f эллипс L переходит в окружность L', центр O эллипса L переходит в центр O' окружности L', а всякая пара сопряженных диаметров эллипса L переходит в пару сопряженных, то есть взаимно перпендикулярных, диаметров окружности L' по лемме 1.3. Возьмем пару главных диаметров эллипса L, то есть оси эллипса. Сделаем эти оси осями координат прямоугольной системы Oxy, При аффинном преобразовании f пара главных осей эллипса перейдет в пару сопряженных, то есть взаимно перпендикулярных диаметров окружности, которые примем за оси координат прямоугольной системы координат $O'x'y'$. При аффинном преобразовании f пара взаимно перпендикулярных прямых Ox и Oy переходит в пару взаимно перпендикулярных прямых $O'x'$ и $O'y'$, а отрезки OA и OB, длины которых соответственно равны a и b, лежат на прямых Ox и Oy и переходят в отрезки длины 1, лежащие на $O'x'$ и $O'y'$. Теперь рассмотрим композицию движения (собственного или несобственного), ассоциированого с прямоугольными системами координат Oxy и $O'x'y'$, и сжатия или растяжения вдоль осей координат $O'x'$ и $O'y'$ в отношении $a:1$ и $b:1$. В результате этой композиции эллипс L переходит в окружность L'. При этом три не лежащие на одной прямой точки O, A и B переходят в три не лежащие на одной прямой точки O', A' и B', при этом $f(O) = O'$, $f(A) = A'$ и $f(B) = B'$. Поскольку аффинное преобразование плоскости задается образами любых трех точек, не лежащих на одной прямой, получаем, что эта композиция совпадает с исходным аффинным преобразованием f. Теорема доказана. □

3 Поверхности второго порядка и их матрицы.

3.1 Определение. *Поверхностью второго порядка* называется множество Φ точек пространства, которое в некоторой системе координат $Oxyz$ задается уравнением второй степени

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz+$$

$$+2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a_{ij} не равен нулю.

Многочлен

$$F_1(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

называется *квадратичной формой* поверхности Φ.

Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A будем называть матрицей поверхности $F(x,y,z) = 0$ (большой матрицей), а матрицу A_1 — матрицей квадратичной формы $F_1(x,y,z)$ (малой матрицей). Матрица квадратичной формы поверхности второго порядка не может быть нулевой матрицей. Определители матриц A и A_1 будем обозначать через Δ и δ соответственно. Квадратичная форма

$$F_1(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

может быть записана в матричной форме следующим образом:

$$F_1(x,y,z) = (x,y,z)\, A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

а сам многочлен $F(x,y,z)$ в матричной форме можно записать так:

$$F(x,y,z) = (x,y,z,1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $O'x'y'z'$ — другая аффинная система координат, и переход от системы $Oxyz$ к системе $O'x'y'z'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_2, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3. \end{cases}$$

Дополним формулы перехода очевидным равенством

$$1 = 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + 0 \cdot z' + 1.$$

Получим

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + c_2, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3, \\ 1 = 0 \cdot x' + 0 \cdot y' + 0 \cdot z' + 1 \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (x, y, z, 1) = (x', y', z', 1)\, D^T,$$

где

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть точка M имеет координаты (x, y, z) и (x', y', z') в системах $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Тогда

$$F(x, y, z) = (x, y, z, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x', y', z', 1)\, D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = (x', y', z', 1)\, A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, равенство

$$A' = D^T A D$$

выражает матрицу A' квадратичного отображения F в новой системе координат $O'x'y'z'$ через ее матрицу A в старой системе координат $Oxyz$ и через матрицу перехода D. Аналогично, как и в случае линий второго порядка на плоскости, матрица квадратичной формы $F_1(x, y, z)$ при переходе к новой системе координат изменяется по формуле

$$A_1' = C^T A_1 C,$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Докажем последнюю формулу. Для этого наряду с реперами $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$, определяющими системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, рассмотрим репер $Oe_1'e_2'e_3'$. Пусть он определяет систему координат $Ox''y''z''$. Тогда формулы перехода от системы $Oxyz$ к системе $Ox''y''z''$ принимают следующий вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad (x, y, z) = (x'', y'', z'')\, C^T,$$

$$\text{где } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A_1'' малую матрицу квадратичной формы в системе координат $Ox''y''z''$. Получим

$$(x'', y'', z'')\, A_1'' \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = (x, y, z)\, A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x'', y'', z'')\, C^T A_1 C \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix},$$

то есть
$$A_1'' = C^T A_1 C.$$
Поскольку реперы $O'e_1'e_2'e_3'$ и $Oe_1'e_2'e_3'$ отличаются только началом, соответствующие системы координат получаются одна из другой параллельным сдвигом, т. е.
$$\begin{cases} x'' = x' + c_1, \\ y'' = y' + c_2, \\ z'' = z' + c_3. \end{cases}$$
Очевидно, что при параллельном переносе системы координат квадратичная форма не меняется. Поэтому если обозначить через A_1' матрицу квадратичной формы в системе координат $O'x'y'z'$, то $A_1' = A_1''$ и, следовательно, формула $A_1' = C^T A_1 C$ доказана.

4 Характеристический многочлен поверхности второго порядка

4.1 Определение. Характеристическим многочленом называется многочлен
$$|A_1 - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$
Здесь
$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$
— матрица квадратичной формы $F_1(x, y, z)$ поверхности Φ.

4.2 Теорема. *Характеристический многочлен не меняется при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной системе координат, т. е. является ортогональным инвариантом. В частности, ортогональными инвариантами являются корни характеристического многочлена, а также числа*
$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad S = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$
Доказательство. Поскольку при параллельном переносе системы координат квадратичная форма не меняется, то без ограничения общности можно считать, что происходит переход от одной прямоугольной системы координат $Oxyz$ к другой прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$, причем эти системы координат имеют общее начало O. Тогда формулы перехода имеют вид
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$
где Γ — ортогональная матрица и $A_1' = \Gamma^T A_1 \Gamma$. Тогда
$$|A_1' - \lambda E| = |\Gamma^T A_1 \Gamma - \lambda \Gamma^T E \Gamma| = |\Gamma^T (A_1 - \lambda E)\Gamma| =$$
$$= |\Gamma^T||A_1 - \lambda E||\Gamma| = |A_1 - \lambda E|,$$
так как $\Gamma^T\Gamma = E$ по определению ортогональной матрицы. □

5 Цилиндрические поверхности.

Рассмотрим, например, поверхность $x^2 + y^2 - 1 = 0$ или плоскость $Ax + By + C = 0$. Эти поверхности являются цилиндрическими поверхностями или цилиндрами в смысле следующего определения из книги П.С.Александрова

5.1 Определение. *Цилиндрической поверхностью* или *цилиндром* называется поверхность, удовлетворяющая в некоторой аффинной системе координат уравнению $F(x, y) = 0$, не содержащему координату z.

Если уравнение $F(x, y) = 0$ в определении 5.1 задает линию второго порядка, то и цилиндр называется цилиндром второго порядка. В определении 5.1 линия, задаваемая уравнением $F(x, y) = 0$ в плоскости $z = 0$, называется *направляющей* .

5.2 Определение. Прямая l называется *прямолинейной образующей* какой-нибудь поверхности Φ, если $l \subset \Phi$.

Из определения цилиндрических поверхностей следует, что они состоят из прямолинейных образующих, параллельных оси Oz. Если какая-нибудь плоскость, пересекающая **все** прямолинейные образующие цилиндрической поверхности, пересекает эту поверхность по линии L, то эта линия L также называется *направляющей* цилиндрической поверхности. Часто цилиндрическую поверхность называют *цилиндром над направляющей линией.* Если эта направляющая является эллипсом, вещественным или мнимым, гиперболой или параболой, то цилиндр над ней называется соответственно *эллиптическим цилиндром, мнимым эллиптическим цилиндром, гиперболическим цилиндром* или *параболическим цилиндром.* Если направляющая линия есть пара прямых, то цилиндрическая поверхность распадается на пару плоскостей (совпадающих, параллельных или пересекающихся, вещественных или мнимых).

В дальнейшем плоскости, параллельные оси Oz, будем называть *вертикальными.* Вертикальные плоскости записываются уравнениями вида $Ax + By + C = 0$. Плоскости, параллельные плоскости $z = 0$, будем называть *горизонтальными.* Уравнения горизонтальных плоскостей имеют вид $Cz + D = 0$

5.3 Предложение. *Всякое сечение цилиндра второго порядка*

$$F(x, y) = 0$$

плоскостью, не являющейся вертикальной, является линией второго порядка, имеющей то же название, что и направляющая цилиндра.

Доказательство. Всякая такая плоскость может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = u, \quad y = v, \quad z = -D - Au - Bv.$$

Подставляя эти выражения в уравнение цилиндра, получаем уравнение

$$F(u, v) = 0,$$

выражающее плоское сечение в аффинных координатах u, v на секущей плоскости. Получили то же самое уравнение, но в других координатах. Следовательно, название сохранилось. $\square$

5.4 Предложение. *Произвольная вертикальная плоскость либо не пересекает цилиндр второго порядка* $F(x, y) = 0$*, либо целиком в нем содержится, либо пересекает его по двум параллельным прямым, либо по одной прямой (возможно, интерпретируемой как пара совпадающих).*

Доказательство. Вертикальная плоскость имеет уравнение $Ax + By + C = 0$. Точка $M(x, y.z)$ принадлежит пересечению плоскости и цилиндра Φ, задаваемого уравнением $F(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда точка (x, y) является точкой пересечения прямой $Ax + By + C = 0$ и линии второго порядка $F(x, y) = 0$. Таким образом утверждение предложения 5.4 вытекает из результатов о пересечении прямой с линией второго порядка. $\square$

Задача. *Всегда ли пересечение плоскости и поверхности второго порядка является линией второго порядка?*

1 Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

1.1 Теорема. *Для любой поверхности второго порядка,заданной в прямоугольной системе координат общим уравнением, существует прямоугольная система координат $Oxyz$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих 17 видов:*

1) *эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

2) *мнимый эллипсоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1;$$

3) *мнимый конус*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

4) *однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

5) *двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$$

6) *конус*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

7) *эллиптический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0);$$

8) *гиперболический параболоид*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0);$$

9) *эллиптический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

10) *мнимый эллиптический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1;$$

11) *пара мнимых пересекающихся плоскостей*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

12) *гиперболический цилиндр*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

13) *пара пересекающихся плоскостей*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0;$$

14) *параболический цилиндр*

$$y^2 = 2px;$$

15) *пара параллельных плоскостей*

$$y^2 - a^2 = 0;$$

16) *пара мнимых параллельных плоскостей*

$$y^2 + a^2 = 0;$$

17) *пара совпадающих плоскостей*

$$y^2 = 0.$$

Уравнения 1 – 17 называются *каноническими* уравнениями поверхностей второго порядка. Поверхности, задаваемые уравнениями 1 – 8 называются *основными.* Отметим также, что девять уравнений 9 – 17 описывают цилиндры над девятью линиями второго порядка.

Доказательство. Теорема будет доказана в следующем семестре. □

2 Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.

Однополостной гиперболоид задается каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2.1 Теорема. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят ровно две прямолинейные образующие.*

Доказательство. Для упрощения вычислений заметим, что однополостной гиперболоид аффинным преобразованием переводится в простейший однополостной гиперболоид

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

причем соответствующее аффинное преобразование переводит прямолинейные образующие в прямолинейные образующие.

2.2 Лемма. *Аффинным преобразованием, оставляющим гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$ на месте, произвольную точку $M(x_0,y_0,z_0)$ можно перевести в точку $M_0(1,0,0)$.*

Доказательство. Гиперболоид $x^2+y^2-z^2=1$ является гиперболоидом вращения. Поэтому вращением вокруг оси Oz переводим точку $M(x_0,y_0,z_0)$ в некоторую точку $M_1(x_1,0,z_0)$, для которой $x_1^2-z_0^2=1$. Далее, с помощью аффинного преобразования f, задаваемого формулами

$$\begin{cases} x' = x_1 x - z_0 z, \\ y' = y, \\ z' = -z_0 x + x_1 z. \end{cases} \qquad \text{с матрицей} \qquad \begin{pmatrix} x_1 & 0 & -z_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -z_0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

определитель которой $x_1^2 - z_0^2 = 1 \neq 0$, переводим точку $M(x_1,0,z_0)$ в точку $M_0(1,0,0)$. При этом

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = (x_1 x - z_0 z)^2 + y^2 - (-z_0 x + x_1 z)^2 =$$

$$= (x_1^2 - z_0^2)x^2 + y^2 - (x_1^2 - z_0^2)z^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

То есть преобразование f отображает гиперболоид на себя.

Композиция вращения и аффинного отображения f и является искомым аффинным преобразованием, переводящим точку $M(x_0,y_0,z_0)$ в точку $M_0(1,0,0)$ и оставляющим гиперболоид на месте. Лемма 2.2 доказана. □

Таким образом, достаточно доказать теорему 2.1 в простейшем случае однополостного гиперболоида

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

и конкретной точки $M_0(1,0,0)$ на окружности горлового сечения. Заметим, что все горизонтальные сечения (то есть сечения плоскостями, параллельными плоскости Oxy) гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ являются окружностями и, следовательно, не содержат прямых. Поэтому можно считать, что направляющий вектор прямолинейной образующей l имеет вид $(\alpha, \beta, 1)$. Запишем в параметрическом виде уравнение прямой l, проходящей через точку M_0:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha t \\ y = \beta t \\ z = t \end{cases}.$$

Решим эту систему совместно с уравнением гиперболоида:

$$(1+\alpha t)^2 + (\beta t)^2 - (t)^2 = 1 \quad \iff \quad (\alpha^2 + \beta^2 - 1)t^2 + 2\alpha t = 0.$$

Поэтому прямая l целиком содержится в гиперболоиде тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \beta = \pm 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}.$$

Итак, получаем ровно два направляющих вектора вида $\{0, \pm 1, 1\}$ для прямой l, причем эти векторы очевидно, неколлинеарны. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Замечание. Каждую из двух прямолинейных образующих, проходящих через точку (x_0, y_0, z_0), лежащую на гиперболоиде, можно просто предъявить в виде пересечения двух плоскостей следующим очень полезным для решения конкретных задач способом.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (*)$$

Коэффициенты λ и μ легко находятся из системы, получающейся после подстановки координат данной точки, лежащей на поверхности, в выписанные системы. Заметим здесь, что возможны случаи $\lambda = 1, \mu = 0$ и $\lambda = 0, \mu = 1$.

Задача. *Доказать, что направляющие векторы прямых $(*)$ неколлинеарны.*

Таким образом, получаем ровно два различных направляющих вектора прямолинейных образующих. Заметим также, что разлагать на множители с последующим приравниванием скобок можно не только в каноническом уравнении, но и в любом другом уравнении, для которого такое разложение возможно.

Замечание к замечанию. Заметим также, что разлагать на множители с последующим приравниванием скобок можно не только в каноническом уравнении, но и в любом другом уравнении, для которого такое разложение возможно.

Задача. *Доказать, что коэффициенты λ и μ можно находить из одного уравнения системы, получающейся после подстановки координат соответствующей точки, поскольку из другого уравнения получаются с точностью до пропорциональности те же самые коэффициенты.*

3 Прямолинейные образующие гиперболического параболоида.

Гиперболический параболоид имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где} \quad p, q > 0.$$

3.1 Теорема. *Через любую точку гиперболического параболоида проходит ровно две прямолинейные образующие.*

Доказательство. Для упрощения вычислений заметим, что гиперболический параболоид аффинно эквивалентен простейшему гиперболическому параболоиду $x^2 - y^2 = z$, причем прямолинейные образующие переходят в прямолинейные образующие. Поэтому достаточно доказать теорему для параболоида

$$x^2 - y^2 = z.$$

Возьмем точку $M(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности, что означает

$$x_0^2 - y_0^2 = z_0.$$

Запишем в параметрическом виде уравнение прямой проходящей через точку M:

$$\begin{cases} x = x_o + \alpha t \\ y = y_o + \beta t \\ z = z_o + \gamma t \end{cases}$$

и решим эту систему совместно с уравнением параболоида:

$$(x_o + \alpha t)^2 - (y_o + \beta t)^2 = z_o + \gamma t.$$

После преобразований получим

$$(\alpha^2 - \beta^2)t^2 + (2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - \gamma)t = 0.$$

Прямая целиком содержится в поверхности в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - \gamma = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем $\alpha = \pm\beta$. В первом случае $\alpha = \beta$, и из второго уравнения системы получаем $\gamma = 2\alpha(x_0 - y_0)$, и, следовательно, первый направляющий вектор имеет вид: $\{1, 1, 2(x_0 - y_0)\}$. Во втором случае $\alpha = -\beta$, и из второго уравнения системы получаем $\gamma = 2\alpha(x_0 + y_0)$, и, следовательно, второй направляющий вектор имеет вид: $\{1, -1, 2(x_0 + y_0)\}$. Эти векторы не являются коллинеарными и, следовательно, через любую точку гиперболического параболоида проходят две различные прямолинейные образующие. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Замечание. Можно легко предъявить две различные прямолинейные образующие в виде пересечения двух плоскостей каждую следующим способом.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z$$

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu \\ \mu\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = z \cdot \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = z \cdot \mu \\ \mu\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\lambda \end{cases}$$

Коэффициенты λ и μ легко находятся из системы, получающейся после подстановки координат данной точки, лежащей на поверхности, в выписанные системы. Заметим, что возможны случаи $\lambda = 1, \mu = 0$ и $\lambda = 0, \mu = 1$. Заметим также, что разлагать на множители с последующим приравниванием скобок можно не только каноническое уравнение, но и любое другое уравнение, для которого такое разложение возможно.

Задача. *Найти подмножество точек гиперболического параболоида, в которых прямолинейные образующие пересекаются под прямым углом.*

1 Конические сечения.Теорема Аполлония.

1.1 Определение. *Конической поверхностью* или *конусом* называется поверхность , образованная множеством прямолинейных образующих, проходящих через одну точку, называемую *вершиной* этой поверхности. Если какая-нибудь плоскость, не проходящая через вершину конической поверхности и пересекающая **все** ее прямолинейные образующие, пересекает поверхность по линии C, то эта линия C называется *направляющей* конической поверхности.

Задача. *Определить вид поверхности* $xy + yz + zx = 0$.

Конус второго порядка с вершиной в начале координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Очевидно, конус образован прямолинейными образующими, проходящими через начало координат. Если $a = b$, то конус называется конусом вращения или *прямым круговым конусом.* Прямой круговой конус удобнее записывать в виде

$$x^2 + y^2 - R^2 z^2 = 0.$$

Плоскость $z = 1$ пересекает этот конус по окружности радиуса R, которая и является направляющей конуса. Справедливо следующее очевидное

1.2 Предложение. *Сечениями прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, являются или точка (то есть мнимые пересекающиеся прямые), или пара пересекающихся прямых, или прямая (то есть пара совпадающих прямых).*

1.3 Теорема. (Аполлоний Пергский, III век до н. э.)
Сечением прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса, является
а) *эллипс, если секущая плоскость не параллельна никакой прямолинейной образующей;*
б) *гипербола, если секущая плоскость параллельна двум прямолинейным образующим;*
в) *парабола, если секущая плоскость параллельна только одной прямолинейной образующей конуса.*

Доказательство. (Жорж Данделен (1794–1847) — бельгийский геометр) Основным инструментом доказательства будут так называемые шары Данделена. *Шар Данделена — это шар, вписанный в конус таким образом, что он касается всех прямолинейных образующих конуса и касается данной секущей плоскости* π. Нетрудно заметить, что этими условиями шары Данделена определяются однозначно.

а) Пусть секущая плоскость π не параллельна никакой прямолинейной образующей. Заметим, что тогда эта плоскость пересекает только одну половинку конуса, а плоскость, проходящая через вершину и параллельная секущей плоскости, пересекается с конусом по вершине. В самом деле, если секущая плоскость пересекает две половинки конуса, то плоскость, параллельная секущей плоскости и проходящая через вершину конуса, очевидно, пересекает конус по двум пересекающимся прямолинейным образующим, которые будут параллельны секущей плоскости.

Геометрически очевидно, что в этом случае возникают два шара Данделена . Обозначим через F_1 и F_2 точки касания шаров Данделена с плоскостью π, а через C_1 и C_2 — окружности, состоящие из точек касания шаров с конусом. Пусть M — произвольная точка сечения. Пусть T_1 и T_2 — точки пересечения прямолинейной образующей OM, проходящей через вершину конуса O и точку M, с окружностями C_1 и C_2, соответственно. Тогда

$$\rho(M, F_1) = \rho(M, T_1) \quad \text{и} \quad \rho(M, F_2) = \rho(M, T_2),$$

поскольку касательные, проведенные к шару из одной точки,равны. Далее,

$$\rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = \rho(M, T_1) + \rho(M, T_2) = \rho(T_1, T_2) = \text{const}.$$

Итак, согласно фокальному свойству эллипса (фокальное определение, теорема **??**), сечение является эллипсом. Точки F_1 и F_2 — фокусы.

б) Пусть теперь секущая плоскость параллельна двум прямолинейным образующим. В этом случае плоскость π пересекает две половинки конуса, и плоскость, проходящая через вершину и параллельная секущей плоскости, пересекается с конусом по паре пересекающихся прямых.

В этом случае также появляются два шара Данделена . Снова обозначим через F_1 и F_2 точки касания шаров Данделена с плоскостью π, а через C_1 и C_2 — окружности, состоящие из точек касания шаров с конусом. Пусть M — произвольная точка сечения. Пусть T_1 и T_2 — точки пересечения прямолинейной образующей OM с окружностями C_1 и C_2, соответственно. Тогда

$$\rho(M, F_1) = \rho(M, T_1) \quad \text{и} \quad \rho(M, F_2) = \rho(M, T_2),$$

поскольку касательные, проведенные к шару из одной точки,равны. Далее,

$$|\rho(M, F_1) - \rho(M, F_2)| = |\rho(M, T_1) - \rho(M, T_2)| = \rho(T_1, T_2) = \text{const}.$$

Итак, согласно фокальному свойству гиперболы (фокальное определение, теорема **??**), сечение является гиперболой. Точки F_1 и F_2 — фокусы.

в) Если секущая плоскость π параллельна только одной прямолинейной образующей конуса, то она пересекает только одну половинку конуса, а плоскость, проходящая через вершину конуса и параллельная секущей плоскости π, пересекается с конусом только по одной образующей.

Геометрически очевидно, что шар Данделена только один Пусть C — окружность, по которой шар касается конуса, и пусть π_1 — плоскость, которая содержит окружность C.

Обозначим через d прямую, по которой пересекаются плоскости π и π_1. Заметим, что прямая d перпендикулярна той образующей, которой параллельна секущая плоскость π. В самом деле, рассмотрим плоскость π_2, проходящую через вершину и параллельную секущей плоскости π. Пусть плоскость π_2 пересекается с плоскостью π_1 по прямой l. Прямая l является касательной к окружности C, поскольку плоскость π_2 пересекается с конусом по одной образующей. Следовательно, прямая l перпендикулярна проекции этой образующей на плоскость π_1 и, значит, по теореме о трех перпендикулярах прямая l перпендикулярна самой образующей. Поскольку прямая l параллельна секущей плоскости π, прямая l параллельна прямой d. Поэтому прямая d перпендикулярна той образующей, которой параллельна секущая плоскость π.

Пусть теперь M — произвольная точка сечения. Обозначим через H основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую d, и пусть T — точка пересечения прямолинейной образующей OM, проходящей через вершину конуса O и точку M, с окружностью C. Пусть, далее, точка F является точкой касания шара Данделена и секущей плоскости π. Тогда

$$\rho(M, F) = \rho(M, T),$$

поскольку касательные к шару, проведенные из одной точки, равны. Далее, отрезок прямолинейной образующей MT, и отрезок MH, параллельный той единственной прямолинейной образующей конуса, которой параллельна секущая плоскость π, наклонены к плоскости π_1 под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α — угол между прямолинейной образующей конуса и его осью. Следовательно,

$$\rho(M, T) = \rho(M, H),$$

так как длины наклонных, проведенных из точки M к плоскости π_1 под одним и тем же углом, равны. Таким образом,

$$\rho(M, F) = \rho(M, T) = \rho(M, H).$$

Итак, сечение является параболой в соответствие с директориальным определением параболы (см. 4.7). Точка F — фокус, а прямая d — директриса этой параболы. □

Таким образом, все возможные сечения конуса второго порядка: *точка, пара пересекающихся прямых, прямая (пара совпадающих прямых), эллипс, гипербола, парабола.*

Задача. *Доказать, что в случаях а) и б) секущая плоскость пересекается с плоскостями, содержащими окружности C_1 и C_2, по директрисам.* (Подсказка: длины наклонных, проведенных из одной и той же точки к плоскости, относятся как синусы углов, образованных наклонными с плоскостью.)

2 Сечения эллипсоида

В дальнейшем под сечением поверхности всегда понимается плоское сечение, то есть пересечение поверхности с плоскостью. Заметим, что для того, чтобы представить себе как выглядит поверхность второго порядка, необходимо изучить сечения этой поверхности. Предварительно докажем одно общее утверждение.

2.1 Предложение. *Пересечение плоскости с поверхностью второго порядка — это*
или линия второго порядка, лежащая в секущей плоскости,
или линия первого порядка, лежащая в секущей плоскости,
или сама секущая плоскоть,
или пустое множество.

Доказательство. Возьмем такую систему координат $Oxyz$, в которой секущая плоскость имеет уравнение $z = 0$. И пусть в этой системе координат поверхность второго порядка имеет уравнение $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$. При подстановке $z = 0$ в уравнение поверхности возможны варианты:

или общее уравнение линии второго порядка в координатах x и y на этой плоскости $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, если хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} не равен нулю;

или уравнение линии первого порядка, если $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ и при этом, хотя бы один из коэффициентов a_1, a_2 не равен нулю;

или плоскость $z = 0$, если $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_1 = a_2 = a_0 = 0$;

или пустое множество, если $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_1 = a_2 = 0$ и $a_0 \neq 0$. □

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Положительные числа a, b, c называются полуосями эллипсоида. Поскольку $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$, то эллипсоид является ограниченным множеством.

Если $a = b$, то окружности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \quad z = h;$$

с радиусом $r_h = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$ являются сечениями эллипсоида, вырождающимися в точки при $h = \pm c$. Поэтому такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения.* Его можно получить вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

вокруг оси Oz. Наконец, при $a = b = c$ эллипсоид является сферой радиуса a. Произвольный эллипсоид получается из сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

посредством аффинного преобразования, являющегося композицией двух сжатий вдоль осей Oy и Oz. Это аффинное преобразование записывается следующим образом:

$$x' = x, \quad y' = \frac{b}{a}\, y, \quad z' = \frac{c}{a}\, z.$$

2.2 Предложение. *Любое непустое сечение эллипсоида есть либо эллипс, либо пара мнимых пересекающихся прямых, то есть точка.*

Доказательство. В самом деле, этими двумя линиями исчерпываются непустые ограниченные линии второго порядка. А линии или поверхности первого порядка не ограничены и, следовательно, не могут быть сечениями эллипсоида. Доказательство закончено! □

Таким образом, все возможные непустые сечения эллипсоида: *точка, эллипс.*

2.1 Прямоугольная параметризация секущей плоскости*.

Но если мы хотим вычислить какие-то метрические параметры сечения (например, расстояние между его фокусами!), то приходится прибегать к громоздким вычисления. В качестве примера приведем еще одно доказательство предложения 2.2.

Доказательство. Итак, пусть эллипсоид задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

а плоскость π — параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0+\alpha_1 u+\beta_1 v,\\ y = y_0+\alpha_2 u+\beta_2 v,\\ z = z_0+\alpha_3 u+\beta_3 v \end{cases}$$

так, что векторы $m_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ и $m_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве всех векторов, лежащих в этой плоскости. Тогда параметры u и v будут прямоугольными координатами переменной точки этой плоскости. При подстановке в уравнение эллипсоида вместо переменных x,y,z их выражения через параметры u и v получим уравнение плоского сечения в координатах u,v. Квадратичная часть этого уравнения будет иметь вид

$$\left(\frac{\alpha_1^2}{a^2}+\frac{\alpha_2^2}{b^2}+\frac{\alpha_3^2}{c^2}\right)u^2+2\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{a^2}+\frac{\alpha_2\beta_2}{b^2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{c^2}\right)uv+\left(\frac{\beta_1^2}{a^2}+\frac{\beta_2^2}{b^2}+\frac{\beta_3^2}{c^2}\right)v^2.$$

Рассмотрим вспомогательные векторы

$$n_1=\left\{\frac{\alpha_1}{a},\frac{\alpha_2}{b},\frac{\alpha_3}{c}\right\},\quad n_2=\left\{\frac{\beta_1}{a},\frac{\beta_2}{b},\frac{\beta_3}{c}\right\}.$$

С их помощью полученное выражение принимает более простой вид

$$|n_1|^2u^2+2(n_1,n_2)uv+|n_2|^2v^2.$$

Подсчитаем инвариант δ уравнения нашего плоского сечения. Имеем

$$\delta=\begin{vmatrix} |n_1|^2 & (n_1,n_2)\\ (n_1,n_2) & |n_2|^2 \end{vmatrix}=|n_1|^2|n_2|^2-(n_1,n_2)^2=$$

$$=|n_1|^2|n_2|^2(1-\cos^2\varphi)=|n_1|^2|n_2|^2\sin^2\varphi,$$

где φ — угол между векторами n_1 и n_2. Но векторы n_1 и n_2 линейно независимы, поскольку их пропорциональность означает

$$\frac{\dfrac{\alpha_1}{a}}{\dfrac{\beta_1}{a}}=\frac{\dfrac{\alpha_2}{b}}{\dfrac{\beta_2}{b}}=\frac{\dfrac{\alpha_3}{c}}{\dfrac{\beta_3}{c}},$$

что, очевидно, влечет пропорциональность векторов m_1 и m_2, но эти векторы перпендикулярны и, следовательно, не могут быть пропорциональными. Поэтому $\sin\varphi\neq 0$, и, следовательно, $\delta>0$. Последнее условие и характеризует линии эллиптического типа. Таким образом, никаких других линий в плоском сечении эллипсоида быть не может. В то же время сечение плоскостями $z=h$ эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

показывает, что все возможности реализуются. □

Заметим, что способ прямоугольной параметризации секущей плоскости является очень удобным и эффективным для решения задач.

2.3 Предложение. *Для любого эллипсоида*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a>b>c>0$, существует плоскость, пересекающая этот эллипсоид по окружности.

Доказательство. Согласно доказательству предложения 2.2 необходимо найти такие векторы

$$n_1 = \left\{ \frac{\alpha_1}{a}, \frac{\alpha_2}{b}, \frac{\alpha_3}{c} \right\}, \quad n_2 = \left\{ \frac{\beta_1}{a}, \frac{\beta_2}{b}, \frac{\beta_3}{c} \right\},$$

что $|n_1| = |n_2|$ и $(n_1, n_2) = 0$. При этом векторы $m_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $m_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ должны быть перпендикулярны и равны по длине единице. В качестве вектора m_1 возьмем вектор $m_1 = \{0, 1, 0\}$, тогда $n_1 = \{0, 1/b, 0\}$. В качестве вектора m_2 возьмем любой единичный вектор, перпендикулярный вектору m_1, т.е $m_2 = \{\alpha, 0, \beta\}$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; тогда $n_2 = \{\alpha/a, 0, \beta/c\}$. Проверим условие $|n_1| = |n_2|$. Это условие порождает систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = 1, \\ \dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{c^2} = \dfrac{1}{b^2}. \end{cases}$$

Выразив из первого уравнения β^2 и подставив во второе, получим

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{1 - \alpha^2}{c^2} = \frac{1}{b^2},$$

или

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}.$$

Так как $a > b > c > 0$, это уравнение имеет решение. Аналогично, выразив из первого уравнения α^2, убеждаемся в том, что уравнение относительно β также имеет решение. □

3 Сечения однополостного гиперболоида.

Напомним, что однополостный гиперболоид определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Сечения однополостного гиперболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ являются эллипсами. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

являющийся пересечением однополостного гиперболоида с плоскостью $z = 0$, называется *горловым эллипсом.* Сечения гиперболоида плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются гиперболами, кроме случаев $x = \pm a$, $y = \pm b$, когда сечением является пара пересекающихся прямых — прямолинейных образующих.

3.1 Предложение. *Плоскость*

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$$

пересекает однополостной гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

по параболе, а плоскость

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

пересекает однополостной гиперболоид по паре параллельных прямых.

Доказательство. Рассмотрим линию пересечения гиперболоида плоскостью, как множество точек пространства, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = -1, \\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} \right) \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} \right) = 1 - \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

Подставив выражение из первого уравнения во второе, получим

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{z}{c},$$

и так как из уравнения плоскости

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} + 1,$$

окончательно получаем уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} = 2 + \frac{2x}{a}.$$

Теперь параметризуем плоскость

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1,$$

приняв за локальные координаты x и y. Тогда $z = c\left(\frac{x}{a} + 1\right)$. В этих координатах уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} = 2 + \frac{2x}{a},$$

очевидно, определяет параболу.

Если же мы возьмем плоскость

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

и пересечем ее с гиперболоидом, то есть рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

то совершенно аналогично получим

$$\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

то есть пару параллельных прямых. Впрочем, это уравнение можно рассматривать как уравнение двух параллельных плоскостей, пересечение которых с секущей плоскостью является парой параллельных прямых. □

Таким образом, доказано, что возможны следующие сечения однополостного гиперболоида: *пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, эллипс, гипербола, парабола.*

Задача. *Доказать, что сечение однополостного гиперболоида не может быть точкой или прямой.*

Решение. От противного. Пусть плоскость π пересекается с однополостным гиперболоидом по точке. Прежде всего заметим, что аффинное преобразование, задаваемае формулами

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c}$$

переводит гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в гиперболоид

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1.$$

При этом плоскость π переходит в плоскость π' с сохранением вида сечения. Учитывая лемму **??**, достаточно решить задачу в случае гиперболоида $x^2+y^2-z^2 = 1$ и точки $M_0(1, 0, 0)$, которая является единственной точкой одновременно принадлежащей и гиперболоиду и секущей плоскости π. Рассмотрим прямую l_1, являющуюся пересечением плоскости π и плоскости Oxy. Прямая l_1 имеет только одну общую точку с горловой окружностью, следовательно, является касательной к горловой окружности $x^2 + y^2 = 1$. Теперь рассмотрим прямую l_2, являющуюся пересечением плоскости π и плоскости Oxz. Прямая l_2 имеет только одну общую точку $M_0(1, 0, 0)$ с гиперболой $x^2 - z^2 = 1$, поэтому прямая l_2

является касательной к гиперболе в этой точке. Отсюда делаем вывод, что секущая плоскость задается уравнением $x = 1$ и, следовательно,пересекается с гиперболоидом по двум прямым

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm z \end{cases}.$$

Получили противоречие.

Пусть теперь $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор прямой l, проходящей через точку $M_0(1, 0, 0)$ и лежащей в секущей плоскости. Переменная точка M_t этой прямой имеет координаты $(1+\alpha t, \beta t, \gamma t)$. Точка M_t принадлежит гиперболоиду в том и только в том случае, когда

$$(1+\alpha t)^2 + \beta^2 t^2 - \gamma^2 t^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t^2 + 2\alpha t = 0.$$

Прямая l содержится в гиперболоиде в том и только в том случае, когда

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0, \quad \alpha = 0.$$

Отсюда получаем два направляющие вектора для прямой l: $\{0, \pm 1, 1\}$. Следовательно, только одной прямой в пересечении быть не может.

4 Сечения двуполостного гиперболоида

Двуполостный гиперболоид имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Сечения двуполостного гиперболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ являются эллипсами. Если $z = \pm c$, то сечениями являются точки. Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $x = h$ и $y = h$ являются гиперболами.

В плоских сечениях двуполостного гиперболоида кроме эллипсов, гипербол и точек имеются и параболы.

4.1 Предложение. *Плоскость*

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$$

пересекает двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

по параболе.

Доказательство. Рассмотрим линию пересечения гиперболоида плоскостью, как множество точек пространства, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = -1, \\ \left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = -1 - \dfrac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

Подставив выражение из первого уравнения во второе, получим

$$\frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{x}{a} + \frac{z}{c},$$

и так как из уравнения плоскости

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a} + 1,$$

окончательно получаем уравнение

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}.$$

В локальных координатах x и y в плоскости

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$$

это уравнение определяет параболу. $\square$

Задача. *Доказать, что фокальный параметр параболы, являющейся пересечением плоскости*

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$$

и двуполостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

равен

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Доказательство. Разумеется, в этом случае понадобится прямоугольная параметризация секущей плоскости. В самом деле, плоскость

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$$

проходит через точку $M_0(0, 0, c)$ и параллельна векторам

$$m_1 = \{0, 1, 0\}, \quad m_2 = \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}},\ 0,\ \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right\}.$$

Второй вектор можно найти, исходя из векторного произведения первого вектора и вектора, перпендикулярного к плоскости. Параметрически эту плоскость можно задать следующим образом:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}\ v, \\ y = u, \\ z = c + \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\ v. \end{cases}$$

Параметры u и v являются прямоугольными координатами на плоскости, так как векторы m_1 и m_2 имеют единичную длину и перпендикулярны между собой. При подстановке в уравнение двуполостного гиперболоида вместо переменных x, y, z их выражения через u и v получим уравнение плоского сечения в координатах u, v:

$$\frac{u^2}{b^2} - \frac{2v}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 0,$$

или

$$u^2 = 2\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}\ v.$$

Это и есть каноническое уравнение параболы с параметром $p = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ в прямоугольных координатах u, v. □

4.2 Предложение. *Двуполостный гиперболоид не имеет прямолинейных образующих.*

Доказательство. Все прямые можно разделить на прямые, пересекающие плоскость $z = 0$, и прямые, параллельные этой плоскости. Прямые, пересекающие плоскость $z = 0$, не могут быть прямолинейными образующими, поскольку эта плоскость не пересекается с гиперболоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Остальные прямые лежат в плоскостях $z = h$, пересечение которых с гиперболоидом либо пусто ($|h| < c$), либо состоит из одной точки ($|h| = c$), либо является эллипсом ($|h| > c$). □

Итак, перечислим все возможные непустые сечения двуполостного гиперболоида: *точка, эллипс, гипербола, парабола.*

1 Сечения гиперболического параболоида

Каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где} \quad p, q > 0.$$

Плоскость $y = 0$ пересекает этот параболоид по параболе

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0.$$

Плоскости $x = h$ пересекают его по параболам

$$y^2 = -2qz + qh^2/p, \quad x = h.$$

Но оси этих парабол, в отличие от параболы, лежащей в плоскости $y = 0$, направлены в отрицательную сторону оси Oz. Таким образом гиперболический параболоид может быть получен параллельным перемещением одной подвижной параболы, когда ее вершина скользит по другой неподвижной параболе. При этом параболы находятся в перпендикулярных плоскостях, их оси параллельны, но направлены в разные стороны. Из этого построения ясно, что гиперболический параболоид имеет вид седла.

1.1 Предложение. *Любое сечение плоскостью, не являющейся вертикальной, гиперболического параболоида*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

— гипербола или пара пересекающихся прямых.

Доказательство. Произвольную невертикальную плоскость π можно записать в виде

$$Ax + By + z + D = 0.$$

Вводим **аффинные** координаты u, v, параметризуя уравнение этой плоскости

$$x = u, \quad y = v, \quad z = -D - Au - Bv.$$

Эти параметрические уравнения позволяют записать уравнение плоского сечения гиперболоида в аффинных координатах u, v на плоскости π:

$$\frac{u^2}{p} - \frac{v^2}{q} + 2(D + Au + Bv) = 0.$$

При фиксированных A и B и при изменении D (т.е. при параллельном перемещении плоскости π) полученное уравнение представляет собой уравнение гиперболы, которая ровно при одном значении D превращается в пару пересекающихся прямых. В этом можно убедиться, выписав матрицу A и рассматривая инварианты δ и Δ. Напомним, что линия второго порядка называется *линией эллиптического, гиперболического или параболического типа*, если соответственно $\delta > 0$, $\delta < 0$ или $\delta = 0$. Заметим также, что число $\delta = |A_1|$ является ортогональным инвариантом, но может изменяться при переходе от одной аффинной системы координат к другой. Но из формулы $A_1' = C^T A_1 C$ получаем $\delta' = |C|^2\delta$, то есть при таких переходах не меняется знак этого числа. Таким образом знак числа δ является *аффинным инвариантом* линии L. □

1.2 Предложение. *Любое вертикальное сечение гиперболического параболоида*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

является параболой или прямой.

Доказательство. Произвольную вертикальную плоскость π можно записать в виде

$$Ax + By + C = 0,$$

где можно предполагать, что $B \neq 0$, поскольку сечения плоскостями вида $x = h$ мы уже рассмотрели и убедились, что соответствующие сечения являются параболами. Введем локальные координаты (u, v) в плоскости π, параметризуя уравнение плоскости π:

$$x = u, \quad y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}u, \quad z = v.$$

Из параметрических уравнений плоскости получаем уравнение плоского сечения параболоида в координатах (u, v):

$$\frac{u^2}{p} - \frac{\left(-\frac{C}{B} - \frac{A}{B}u\right)^2}{q} = 2v.$$

Коэффициент при u^2, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных членов, равен

$$\frac{1}{p} - \frac{(\frac{A}{B})^2}{q},$$

поэтому если

$$\frac{1}{p} - \frac{(\frac{A}{B})^2}{q} \neq 0,$$

то полученное уравнение является уравнением параболы. Если же

$$\frac{1}{p} - \frac{(\frac{A}{B})^2}{q} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{A}{B} = \pm\sqrt{\frac{q}{p}},$$

то такая плоскость пересекает гиперболоид по прямой. □

Таким образом, все возможные сечения гиперболического параболоида: *пара пересекающихся прямых, гипербола, прямая, парабола.*

Задача. *Найти плоскости, пересекающие поверхность* $x^2 - 4z^2 = y$ *по прямой.*

2 Сечения эллиптического параболоида

Эллиптический параболоид имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad \text{где пусть} \quad p \geqslant q > 0.$$

Плоскость $y = 0$ пересекает этот параболоид по параболе

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0$$

параметра p. Плоскости $x = h$ пересекают его по параболам

$$y^2 = 2qz - qh^2/p, \quad x = h$$

параметра q. Поэтому эллиптический параболоид может быть получен параллельным перемещением одной подвижной параболы, когда ее вершина скользит по другой неподвижной параболе. При этом параболы находятся в перпендикулярных плоскостях, а их оси параллельны и направлены в одну сторону.

Сечения эллиптического параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ являются эллипсами. Если $z = 0$, то сечением является точка.

Прямолинейных образующих эллиптический параболоид не имеет. Доказательство такое же, как и для двуполостного гиперболоида.

2.1 Предложение. *Вертикальное сечение эллиптического параболоида*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

является параболой.

Доказательство. Произвольную вертикальную плоскость π можно записать в виде

$$Ax + By + C = 0,$$

где можно предполагать, что $B \neq 0$, поскольку сечения плоскостями вида $x = h$ мы уже рассмотрели и убедились, что соответствующие сечения являются параболами. Снова введем локальные координаты (u, v) в плоскости π, параметризуя уравнение плоскости π:

$$x = u, \quad y = -\frac{C}{B} - \frac{A}{B}u, \quad z = v.$$

Из параметрических уравнений плоскости получаем уравнение плоского сечения параболоида в координатах (u, v):

$$\frac{u^2}{p} + \frac{\left(-\frac{C}{B} - \frac{A}{B}u\right)^2}{q} = 2v.$$

Коэффициент при u^2, получающийся после раскрытия скобок и приведения подобных членов, равен

$$\frac{1}{p} + \frac{(\frac{A}{B})^2}{q},$$

поэтому

$$\frac{1}{p} + \frac{(\frac{A}{B})^2}{q} \neq 0,$$

и полученное уравнение является уравнением параболы. $\square$

Задача. *Доказать, что сечение плоскостью, не являющейся вертикальной, эллиптического параболоида* $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ *— эллипс или точка.*

Таким образом, все возможные непустые сечения эллиптического параболоида: *точка, эллипс, парабола.*

3 Центры поверхностей второго порядка.

3.1 Определение. *Центром поверхности второго порядка* называется точка $M(x_0, y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 = 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что система уравнений для определения центра поверхности имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Поверхности, удовлетворяющие этому условию, называются *центральными*: это те поверхности второго порядка, которые имеют единственный центр симметрии.

В нецентральном случае, т.е. когда $\delta = 0$, уравнения системы для определения центра либо несовместны, и тогда поверхность не имеет ни одного центра, либо система этих уравнений совместна, и тогда точки, являющиеся решениями заполняют целую прямую или целую плоскость.

Задача. *Доказать, что определение центра поверхности второго порядка не зависит от аффинной системы координат, в которой рассматривается уравнение поверхности второго порядка, то есть определение корректно.*

Доказательство. То, что точка $M(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет данной системе уравнений, в матричной форме можно переписать следующим образом:

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}, \quad d = a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0.$$

Пусть теперь $O'x'y'z'$ — другая аффинная система координат и переход от системы $Oxyz$ к системе $O'x'y'z'$ осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}y' + c_1, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}y' + c_2, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + c_3. \end{cases}$$

Тогда, если

$$D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В системе координат $O'x'y'z'$ напишем левую часть системы для нахождения центра и воспользуемся известными формулами перехода

$$A'\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \\ 1 \end{pmatrix} = D^TAD\begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \\ z_0' \\ 1 \end{pmatrix} = D^TA\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если координаты (x_0, y_0, z_0) точки M в системе $Oxyz$ удовлетворяют системе уравнений для определения центра, то координаты (x_0', y_0', z_0') этой же точки в системе $O'x'y'z'$ удовлетворяют аналогичной системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}'x_0' + a_{12}'y_0' + a_{13}'y_0' + a_1' = 0, \\ a_{12}'x_0' + a_{22}'y_0' + a_{23}'y_0' + a_2' = 0, \\ a_{13}'x_0' + a_{23}'y_0' + a_{33}'y_0' + a_3' = 0. \end{cases}$$

Отметим также, что попутно доказано равенство

$$a_1'x_0' + a_2'y_0' + a_3'z_0' + a_0' = a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_0.$$

□

3.1 Центры симметрии.

3.2 Теорема. *Центр поверхности второго порядка является центром симметрии этой поверхности*

Доказательство. Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ является центром непустой поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Перенесем начало координат в центр симметрии $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0.$$

Многочлен $F(x,y,z)$ преобразуется в многочлен $G(x',y',z')$, квадратичная форма которого совпадает с квадратичной формой многочлена $F(x,y,z)$, а коэффициенты a'_1, a'_2, a'_3 линейной части и свободный член a'_0 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
a'_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1,\\
a'_2 &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2,\\
a'_3 &= a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3,\\
a'_0 &= F(x_0,y_0,z_0).
\end{aligned}$$

Коэффициенты a'_1, a'_2, a'_3, по условию равны нулю. Таким образом, уравнение поверхности в новой системе координат будет иметь вид

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a'_0 = 0.$$

Из этого уравнения ясно, что начало координат есть центр симметрии этой поверхности. Если же уравнение поверхности задает пустое множество, то поскольку центром симметрии пустого множества является любая точка пространства, теорема остается верной и в этом случае. □

3.3 Теорема. *Центр симметрии непустой поверхности второго порядка является центром.*

Доказательство. Пусть точка $M(x_0,y_0,z_0)$ является центром симметрии поверхности второго порядка Φ, содержащей по крайней мере одну точку, и определяемой в некоторой аффинной системе координат общим уравнением

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Надо доказать, что

$$\begin{cases}
a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 = 0,\\
a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 = 0,\\
a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 = 0.
\end{cases}$$

Перенесем начало координат в центр симметрии $O' = M(x_0,y_0,z_0)$, т.е перейдем к новым координатам x', y', z' по формулам:

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0.$$

Многочлен $F(x,y,z)$ преобразуется в многочлен $G(x',y',z')$, квадратичная форма которого совпадает с квадратичной формой многочлена $F(x,y,z)$, а коэффициенты a'_1, a'_2, a'_3 линейной части и свободный член a'_0 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
a'_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1,\\
a'_2 &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2,\\
a'_3 &= a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3,\\
a'_0 &= F(x_0,y_0,z_0).
\end{aligned}$$

Докажем, что $a'_1 = a'_2 = a'_3 = 0$. Возьмем произвольную точку $M_1(x',y',z') \in \Phi$. Поскольку в новой системе координат центр симметрии O' имеет координаты $(0,0,0)$, то $M_2(-x',-y',-z') \in \Phi$. Следовательно,

$$0 = G(x',y',z') - G(-x',-y',-z') = 4a'_1x' + 4a'_2y' + 4a'_3z'.$$

Предположим, что хотя бы один из коэффициентов a'_1, a'_2, a'_3 не равен нулю. Тогда вся поверхность Φ лежит на плоскости, заданной уравнением $a'_1x' + a'_2y' + a'_3z' = 0$. Но из поверхностей второго порядка, содержащих хотя бы одну точку, на плоскости могут лежать либо мнимый конус (то есть точка), либо пара мнимых пересекающихся плоскостей (то есть прямая), либо пара совпадающих плоскостей. Таким образом, если поверхность второго порядка не является мнимым конусом, или парой мнимых пересекающихся плоскостей, или парой совпадающих плоскостей, то $a'_1 = a'_2 = a'_3 = 0$, и центр симметрии в этом случае является центром. Осталось доказать теорему для мнимого конуса, для пары мнимых пересекающихся плоскостей, для пары совпадающих плоскостей. Так как определение центра не зависит от выбора системы координат, достаточно проверить совпадение центра симметрии с центром прямым вычислением в канонической системе координат.

1)Мнимый конус: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$. Мнимый конус состоит из одной точки $(0,0,0)$, являющейся центром симметрии. Вычисляя центр, получаем ту же самую точку $(0,0,0)$.

2) Пара мнимых пересекающихся плоскостей: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$. Центры симметрии образуют прямую. Находим центры и убеждаемся, что любой центр симметрии удовлетворяет уравнениям центра и, следовательно, является центром.

3) Пара совпадающих плоскостей $y^2=0$. Центры симметрии образуют плоскость. Очевидно, что любой центр симметрии удовлетворяет уравнениям центра и, следовательно, является центром. □

Заметим, что в доказательстве предыдущей теоремы использовались все хорды поверхности второго порядка, проходящие через центр симметрии. Разумеется, все эти хорды делятся в центре симметрии пополам. На самом деле, достаточно трех некомпланарных хорд, как показывает следующая задача.

Задача. *Доказать, что если три некомпланарные хорды поверхности второго порядка проходят через одну точку и делятся в ней пополам, то эта точка является центром поверхности.*

Доказательство. Пусть точка $M(x_0,y_0,z_0)$ является серединой трех некомпланарных хорд с направляющими векторами $\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}$, $\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}$, $\{\alpha_3,\beta_3,\gamma_3\}$. Рассмотрим общее уравнение поверхности второго порядка Φ в произвольной аффинной системе координат $Oxyz$:

$$F(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz++2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0$$

с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$a_1'=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_1,$$

$$a_2'=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_2,$$

$$a_3'=a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_3.$$

Пусть прямая l задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t,\\ y=y_0+\beta t,\\ z=z_0+\gamma t.\end{cases}$$

Для нахождения точек пересечения поверхности и прямой подставим правые части параметрических уравнений прямой в уравнение поверхности. После преобразований получим уравнение не более чем второй степени относительно t, а именно

$$F_2t^2+2F_1t+F_0=0,$$

где

$$F_2=a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+a_{33}\gamma^2+2a_{12}\alpha\beta+2a_{13}\alpha\gamma+2a_{23}\beta\gamma;$$
$$F_1=\alpha a_1'+\beta a_2'+\gamma a_3';$$
$$F_0=F(x_0,y_0,z_0).$$

Заметим, что точка $M(x_0,y_0,z_0)$ является серединой хорды тогда и только тогда, когда для корней квадратного уравнения выполняется : $t_1+t_2=0$, т.е. тогда и только тогда, когда, согласно теореме Виета,

$$F_1=\alpha a_1'+\beta a_2'+\gamma a_3'=0.$$

Уравнение в самом деле является квадратным, поскольку прямые, содержащие хорды, пересекают поверхность в двух точках, и следовательно, $F_2\neq 0$ (иначе был бы один корень). Итак, проводим через точку $M(x_0,y_0,z_0)$ три прямые с направляющими векторами $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$. Для каждого из этих трех векторов должно выполняться равенство $F_1 = 0$, т.е. должно быть одновременно

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1' + \beta_1 a_2' + \gamma_1 a_3' = 0, \\ \alpha_2 a_1' + \beta_2 a_2' + \gamma_2 a_3' = 0, \\ \alpha_3 a_1' + \beta_3 a_2' + \gamma_3 a_3' = 0. \end{cases}$$

Но векторы $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ некомпланарны, т.е. в матрице

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

строки, а значит, и столбцы линейно независимы, следовательно, определитель матрицы этой системы не равен нулю, и, значит, система имеет только нулевое решение. Поэтому точка $M(x_0, y_0, z_0)$ поверхности Φ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} a_1' = 0, \\ a_2' = 0, \\ a_3' = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 = 0, \\ a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 = 0, \end{cases}$$

и, следовательно, является центром. □

Заметим, что условие некомпланарности трех хорд существенно, как показывает, например, следующая задача, решение которой использует прием, применявшийся при доказательстве предыдущих теорем.

Задача. *Написать общее уравнение плоскости, пересекающей однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{5} = 1$$

по линии, центр которой находится в точке $(6, 6, 5)$.
Ответ. $3x + 2y - z - 25 = 0$. **Решение.** Если точка (x, y, z) лежит на поверхности, то точка $(12 - x, 12 - y, 10 - z)$ также лежит на поверхности, поэтому

$$\frac{(12 - x)^2}{2} + \frac{(12 - y)^2}{3} - \frac{(10 - z)^2}{5} = 1.$$

Вычитая это уравнение из уравнения гиперболоида, получаем ответ.

4 Аффинная классификация поверхностей второго порядка.

4.1 Теорема. *Произвольная поверхность второго порядка посредством аффинного преобразования может быть переведена в одну из следующих 17 поверхностей, заданных в некоторой прямоугольной системе координат уравнениями*

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
2) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$;
5) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$;
6) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
7) $x^2 + y^2 = z$;
8) $x^2 - y^2 = z$;
9) $x^2 + y^2 = 1$;
10) $x^2 + y^2 = -1$;

11) $x^2 + y^2 = 0$;
12) $x^2 - y^2 = 1$;
13) $x^2 - y^2 = 0$;
14) $y^2 = x$;
15) $y^2 = 1$;
16) $y^2 = -1$.
17) $y^2 = 0$;

При этом поверхности, имеющие одинаковые названия, аффинно эквивалентны, а поверхности разных названий аффинно неэквивалентны.

Доказательство. Пусть поверхность второго порядка задана общим уравнением в некоторой (вообще говоря, аффинной) системе координат $Oxyz$. Без ограничения общности можно считать, что система координат является прямоугольной. В самом деле, возьмем "новую" прямоугольную систему координат и рассмотрим аффинное отображение, ассоциированное с двумя системами координат. Аффинный образ поверхности будет записываться тем же самым уравнением.

Из теоремы **??** (пока не доказанной!) следует, что с помощью перехода к другой прямоугольной системе координат $O'x'y'z'$ получаем одно из 17 канонических уравнений. Дальнейшее доказательство проведем для эллипсоида, каноническое уравнение которого имеет вид

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1.$$

Рассмотрим следующую аналитическую запись еще одного аффинного преобразования:

$$x'' = \frac{x'}{a}, \quad y'' = \frac{y'}{b}, \quad z'' = \frac{z'}{c}.$$

Эллипсоид переходит в сферу, задаваемую уравнением

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1,$$

или, поскольку, x'', y'' и z'' суть координаты (произвольной!) точки относительно всё той же системы координат $O'x'y'z'$, можно считать, что эллипсоид переходит в сферу, задаваемую уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Теперь рассмотрим аффинное преобразование, ассоциированной с системами координат $O'x'y'z'$ и $Oxyz$. Поскольку уравнения сохраняются, получаем необходимый результат. Первая часть утверждения теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы **??** необходимо следующее

4.2 Предложение. *Пусть аффинное преобразование $f : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^3$ переводит поверхность второго порядка Φ в поверхность второго порядка Φ', плоскость π — в плоскость π'. Если плоскость π не содержится в поверхности Φ, то линии $\pi \cap \Phi$ и $\pi' \cap \Phi'$ имеют одинаковые названия.*

Доказательство. Возьмем в пространстве аффинную систему координат $Oxyz$, для которой плоскость π является координатной плоскостью Oxy, то есть имеет уравнение $z = 0$. Существует единственная аффинная система координат $O'x'y'z'$ такая, что преобразование f ассоциировано с системами координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Поскольку $f(\pi) = \pi'$, плоскость π' будет координатной плоскостью $O'x'y'$ и соответственно задаваться уравнением $z' = 0$, поскольку преобразование по равенству координат сохраняет уравнения. Пусть поверхность Φ в системе координат $Oxyz$ задается уравнением второго порядка $F(x, y, z) = 0$. Тогда поверхность Φ' в системе координат $O'x'y'z'$ будет задана тем же уравнением $F(x', y', z') = 0$. Поэтому сечения $\pi \cap \Phi$ и $\pi' \cap \Phi'$ имеют одинаковые уравнения $F(x, y, 0) = 0$ и $F(x', y', 0) = 0$ в системах координат Oxy и $O'x'y'$ соответственно. Но мы знаем, что линии второго порядка, задаваемые одинаковыми уравнениями (в разных аффинных системах координат) аффинно эквивалентны и, следовательно, имеют одинаковые названия. ☐

Теперь докажем вторую часть теоремы, а именно, что поверхности разных названий аффинно неэквивалентны. Заметим, что из сохранения уравнений при аффинном преобразовании (ассоциированным с двумя реперами) следует, что наличие и количество центров является аффинными инвариантами.

Таким образом, поверхности, не имеющие действительных точек (мнимый эллипсоид, мнимый эллиптический цилиндр, пара мнимых параллельных плоскостей) можно различить с помощью центров.

Мнимый конус — это единственная поверхность, состоящая из одной (действительной) точки. Пара мнимых пересекающихся плоскостей — это единственная поверхность, точки которой образуют прямую.

Цилиндры различаются между собой своими направляющими. Отличить цилиндры от основных поверхностей можно как по наличию бесконечного числа параллельных между собой прямолинейных образующих, так и по возможным плоским сечениям.

Далее, основные поверхности разных названий будем различать с помощью центров, прямолинейных образующих и плоских сечений. Шесть основных поверхностей (эллипсоид, однополостный гиперболоид, конус, двуполостный гиперболоид, гиперболический параболоид, эллиптический параболоид) делятся на группы наличием или отсутствием центра. Центральными являются эллипсоид, однополостный гиперболоид, конус, двуполостный гиперболоид. Конус выделяется тем, что содержит центр. Среди оставшихся поверхностей этой группы однополостный гиперболоид выделяется наличием прямолинейных образующих. Эллипсоид и двуполостный гиперболоид различаются плоскими сечениями: сечения эллипсоида — только эллипсы, а двуполостный гиперболоид имеет в плоском сечении и гиперболу.

Нецентральные основные поверхности: гиперболический параболоид и эллиптический параболоид различаются наличием прямолинейных образующих у гиперболического параболоида. Теорема **??** полностью доказана. $\square$

Задача. *Определить вид поверхности*

$$(x - y + 2z - 1)^2 + (2x + z - 2)^2 - (x + y)^2 = 17.$$

1 Модели проективной плоскости. Перспективное соответствие.

1.1 Общее определение проективной плоскости

Современный подход — это теоретико-множественное и аксиоматическое изложение проективной геометрии. Основная идея определения проективной плоскости — сделать прямые и точки равноправными. Как известно, в евклидовой геометрии мы говорим:

«Точка лежит на прямой.»

«Прямая проходит через точку.»

Заметим, что симметричное выражение «Прямая лежит на точке.» — хотя и непривычно на слух, но не противоречит наглядным представлениям. В настоящее время общепринятой является следующая терминология:

«Прямая и точка *инцидентны.*»

Отношение инцидентности вводится для того, чтобы записать аксиомы проективной плоскости в симметричном виде. Итак, точка называется инцидентной прямой, если точка лежит на этой прямой. Прямая называется инцидентной точке, если прямая проходит через эту точку.

Проективной плоскостью P называется произвольное множество, элементы которого называются *точками*, и набор его подмножеств, именуемых *прямыми* вместе с отношением инцидентности, если при этом выполняются аксиомы П1—П4.

П1. Любые две различные точки плоскости инцидентны одной и только одной прямой.

П2. Любые две различные прямые плоскости инцидентны одной и только одной точке.

П3. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.

П4. Каждая прямая инцидентна по меньшей мере трем точкам.

Определение. Две проективные плоскости P_1 и P_2 называются *изоморфными*, если существует биекция $f : P_1 \to P_2$, которая переводит точки в точки, прямые в прямые и сохраняет отношение инцидентности.

Задача. *Доказать, что любая проективная плоскость содержит по меньшей мере семь точек. Построить проективную плоскость из семи точек.*

1.2 Пополненная плоскость

Для данной прямой l обычной плоскости π обозначим через $[l]$ несобственный пучок прямых, параллельных прямой l. Этот пучок $[l]$ назовем *несобственной точкой* плоскости π. Остальные ее точки будем называть *собственными.* Добавим к плоскости π все ее несобственные точки и обозначим это новое множество через $\overline{\pi}$. Прямые l плоскости π, к каждой из которых добавлена несобственная точка $[l]$, называются *собственными прямыми* в множестве $\overline{\pi}$. Эти прямые обозначаются теми же символами l. Несобственная точка $[l]$ называется *несобственной точкой прямой* l. Множество $\overline{\pi} \setminus \pi$ всех несобственных точек называется *несобственной прямой* расширенной плоскости $\overline{\pi}$. Множество $\overline{\pi}$ с выделенными в нем собственными и несобственными прямыми называется *пополненной плоскостью.* Напомним, что выражения «точка инцидентна прямой» и «прямая инцидентна точке» означают, что данная точка принадлежит данной прямой.

Задача. *Доказать, что пополненная плоскость удовлетворяет четырем аксиомам* П1—П4.

Пополненную плоскость можно воспринимать и как множество всех пучков на плоскости как собственных, так и несобственных. Если мы поставим в соответствие каждому собственному пучку прямых на плоскости центр этого пучка, то мы получим взаимно однозначное соответствие между всеми точками плоскости и всеми собственными пучками. Каждый несобственный пучок мы отождествляем с несобственной точкой. Собственные прямые пополняются несобственными точками. При этом множество всех несобственных пучков объявляется несобственной прямой.

Итак, на проективной плоскости всякие две различные прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке: собственной, если прямые l_1 и l_2 на обычной плоскости не параллельны, и несобственной, если параллельны. Если одна из двух прямых несобственная, то она пересекается со второй прямой в единственной несобственной точке последней. Легко видеть, что на проективной плоскости (так же как и на обыкновенной) через всякие две различные точки M и N проходит ровно одна прямая. Это очевидно, если обе точки собственные. Если M — собственная, а N — несобственная, то прямая MN проходит через точку M и принадлежит несобственному пучку, соответствующему точке N. Наконец, если обе точки несобственные, то прямая MN — несобственная прямая проективной плоскости.

1.3 Связка

Множество всех прямых и плоскостей трехмерного пространства, проходящих через данную точку O, называется *связкой с центром* O или *связкой* O. Назовем прямую и плоскость связки O *инцидентными* между собой, если данная прямая лежит в данной плоскости. Назовем теперь прямые связки «*точками*», а ее плоскости — «*прямыми*».

Задача. *Проверить, что связка удовлетворяет аксиомам П1–П4, т. е. является проективной плоскостью.*

1.4 Изоморфизм проективных плоскостей. Перспективное соответствие

Докажем, что пополненная плоскость и связка изоморфны. Возьмем какую-нибудь плоскость π, не проходящую через центр связки O. Тогда через каждую точку M плоскости π проходит единственная прямая связки O. Таким образом, установлено соответствие, называемое *перспективным соответствием*, между всеми точками плоскости π и некоторыми прямыми связки O. При этом соответствии каждой прямой l, лежащей в плоскости π, сопоставляется принадлежащая связке O плоскость, проходящая через точку O и прямую l. Очевидно, что при перспективном соответствии между плоскостью π и связкой O сохраняется отношение инцидентности: если на плоскости π точка M инцидентна прямой l, то соответствующие прямая OM и плоскость Ol связки также будут инцидентны, и наоборот. Но перспективное соответствие между плоскостью π и связкой O не является взаимно однозначным: прямые связки, параллельные плоскости π, не соответствуют никакой точке плоскости π, а плоскость связки, параллельная плоскости π, не соответствует никакой прямой плоскости π.

Поставим в соответствие всякому несобственному пучку параллельных прямых, лежащих в плоскости π, параллельную этим прямым прямую связки O, а несобственной прямой плоскости $\overline{\pi}$ — плоскость связки O, параллельную плоскости π. Таким образом биекция продолжается до биекции между всеми точками и прямыми пополненной плоскости $\overline{\pi}$ и всеми прямыми и плоскостями связки O. Эта биекция также называется *перспективным соответствием*. Очевидно, что перспективное соответствие сохраняет отношение инцидентности. Следовательно, перспективное соответствие является изоморфизмом двух моделей проективной плоскости: пополненной плоскости и связки.

2 Однородные координаты

2.1 Однородные координаты в связке

Пусть дана связка O. Возьмем в пространстве какой-нибудь репер $Oe_1e_2e_3$ с началом в центре связки O. Для произвольной прямой m связки тройку координат x_1, x_2, x_3 любого направляющего вектора этой прямой назовем тройкой однородных координат прямой m в данном репере $Oe_1e_2e_3$. Обозначим класс всех пропорциональных данной тройке ненулевых троек через $(x_1 : x_2 : x_3)$. Каждая тройка из класса $(x_1 : x_2 : x_3)$ также будет тройкой однородных координат прямой m. Класс троек назовем *однородными координатами прямой* m (в репере $Oe_1e_2e_3$).

Пусть теперь дана принадлежащая связке плоскость λ. В репере $Oe_1e_2e_3$ она может быть записана уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Тройку a_1, a_2, a_3 назовем тройкой однородных координат плоскости λ. Тройки однородных координат также определены с точностью до пропорциональности. Класс всех пропорциональных данной тройке ненулевых троек обозначим через $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ и назовем *однородными координатами плоскости* λ в репере $Oe_1e_2e_3$.

Любую ненулевую тройку x_1, x_2, x_3, удовлетворяющую данному уравнению, можно рассматривать и как тройку координат принадлежащей плоскости λ точки M, и как тройку однородных координат инцидентной плоскости λ прямой $m = OM$. Таким образом, уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

представляет собой условие инцидентности прямой с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ и плоскости с однородными координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}$.

2.2 Однородные координаты на плоскости

Предположим, что на обычной плоскости π выбран репер $O_1e_1e_2$. Пусть M — произвольная точка плоскости, x, y — ее координаты в этом репере. Тогда всякая ненулевая тройка чисел x_1, x_2, x_3, пропорциональная тройке $x, y, 1$, называется тройкой однородных координат точки M в репере $O_1e_1e_2$. Ясно, что переход от тройки однородных координат x_1, x_2, x_3 к ее аффинным координатам x, y осуществляется по формулам

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Такой переход возможен, поскольку для ненулевой тройки x_1, x_2, x_3, пропорциональной тройке $x, y, 1$, всегда $x_3 \neq 0$. Класс всех троек однородных координат x_1, x_2, x_3 точки M обозначается через $(x_1 : x_2 : x_3)$ и называется *однородными координатами* точки M (в репере $O_1e_1e_2$).

Возьмем теперь на плоскости π некоторую прямую l, заданную в репере $O_1e_1e_2$ общим уравнением

$$Ax + By + C = 0.$$

Мы знаем, что коэффициенты уравнения данной прямой определены с точностью до пропорциональности, т. е. для любой ненулевой тройки a_1, a_2, a_3, пропорциональной тройке A, B, C, уравнение

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0$$

описывает ту же прямую l. Класс всех ненулевых троек a_1, a_2, a_3, пропорциональных тройке A, B, C, обозначается через $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ и называется *однородными координатами прямой* l в репере $O_1e_1e_2$.

Найдем теперь, как прямая l описывается в однородных координатах своих точек. Если аффинные координаты x, y точки M удовлетворяют уравнению

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0,$$

то ее однородные координаты x_1, x_2, x_3 удовлетворяют уравнению

$$a_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right) + a_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + a_3 = 0,$$

или

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

При этом ясно, что если $x_3 \neq 0$, то тройка x_1, x_2, x_3, удовлетворяющая полученному уравнению, является тройкой однородных координат точки M, принадлежащей прямой l. Но важно отметить, что этому уравнению удовлетворяют не только ненулевые тройки x_1, x_2, x_3, являющиеся однородными координатами точек прямой l. При $x_3 = 0$ уравнению удовлетворяют тройки, пропорциональные тройке $a_2, -a_1, 0$. Естественно предположить, что класс $(a_2 : -a_1 : 0)$ представляет собой однородные координаты бесконечно удаленной точки $[l]$ прямой l. Сейчас мы убедимся, что это и в самом деле так.

2.3 Связь однородных координат на плоскости с однородными координатами в связке

Возьмем в пространстве какой-нибудь репер $Oe_1e_2e_3$. Конец вектора e_3, отложенного от точки O, обозначим O_1. Проведем через точку O_1 плоскость π параллельно векторам e_1, e_2 (рис. 1).

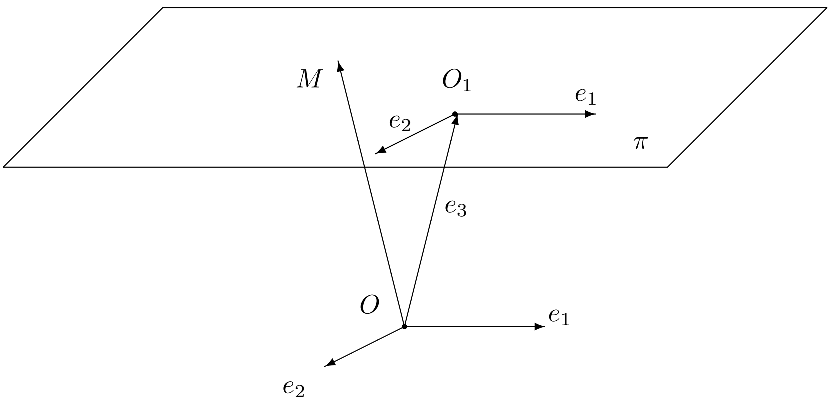

Рис. 1: связь однородных координат.

В репере $Oe_1e_2e_3$ плоскость π имеет уравнение $x_3 = 1$. Поэтому всякая точка M плоскости π, имеющая в репере $O_1e_1e_2$ координаты x, y, в репере $Oe_1e_2e_3$ имеет координаты $x, y, 1$, и наоборот. Следовательно, всякая собственная (по отношению к плоскости π) прямая связки O, проходящая через точку $M(x, y)$, имеет в связке однородные координаты $(x : y : 1)$. При перспективном соответствии всякой несобственной точке пополненной плоскости $\overline{\pi}$ (множеству $[l]$ параллельных прямых на плоскости π) ставится в соответствие прямая связки, параллельная этим прямым $[l]$. Такая прямая является несобственной и лежит в плоскости $x_3 = 0$. Следовательно, несобственные точки пополненной плоскости соответствуют прямым связки с однородными координатами вида $(x_1 : x_2 : 0)$.

Пусть теперь прямая l в плоскости π имеет уравнение

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0.$$

Один из направляющих векторов этой прямой в базисе e_1, e_2 на плоскости имеет координаты $\{a_2, -a_1\}$. Тогда в пространстве в базисе e_1, e_2, e_3 этот вектор имеет координаты $\{a_2, -a_1, 0\}$. Но это и есть направляющий вектор прямой связки, соответствующей несобственной точке $[l]$ прямой l. Таким образом, при перспективном соответствии несобственная точка $[l]$ прямой l, заданной уравнением

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0,$$

переходит в прямую связки с однородными координатами $(a_2 : -a_1 : 0)$. Это позволяет распространить определение однородных координат на несобственные точки: класс ненулевых троек $(a_2 : -a_1 : 0)$ является однородными координатами несобственной точки данной прямой (в репере $O_1e_1e_2$) на пополненной плоскости $\overline{\pi}$.

При таком определении любое уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

первой степени относительно переменных x_1, x_2, x_3 можно рассматривать как уравнение прямой (на пополненной плоскости $\overline{\pi}$) с однородными координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}$. Собственные прямые характеризуются условием $a_1^2 + a_2^2 > 0$, несобственная прямая имеет уравнение $x_3 = 0$, т. е. ее однородные координаты равны $\{0 : 0 : 1\}$. Итак, мы определили однородные координаты точек и прямых на пополненной плоскости $\overline{\pi}$. При этом перспективное соответствие определяется равенством однородных координат соответствующих друг другу точки и прямой, прямой и плоскости. Уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

представляет собой условие инцидентности точки $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямой $\{a_1 : a_2 : a_3\}$.

2.4 Арифметическая модель проективной плоскости

Арифметической проективной плоскостью называется множество P элементов двух родов, называемых соответственно «*арифметическими точками*» и «*арифметическими прямыми*». И те и другие есть классы пропорциональных между собой ненулевых троек чисел. Точки обозначаются, например, через $(x_1 : x_2 : x_3)$, а прямые — через $\{a_1 : a_2 : a_3\}$. При этом между точками и прямыми установлено отношение инцидентности: точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямая $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ называются *инцидентными* между собой, если

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Такое симметричное определение, в котором точки и прямые полностью равноправны, не совсем согласуется с определением проективной плоскости, в котором прямыми назывались множества точек. Но эту несогласованность легко ликвидировать, если арифметическую прямую $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ отождествить с множеством всех арифметических точек $(x_1 : x_2 : x_3)$, инцидентных этой прямой.

Задача. *Доказать, что арифметическая проективная плоскость изоморфна и пополненной плоскости и связке.*

1 Принцип двойственности. Теорема Дезарга.

Первым сформулировал принцип двойственности Жан-Викто́р Понселе́ (1788–1867) — французский инженер и математик. В своем «Трактате о проективных свойствах фигур» (1822) он писал:

Пусть верно какое-нибудь утверждение, касающееся точек и прямых на проективной плоскости и отношения инцидентности между ними. Тогда будет верно и двойственное утверждение, получаемое из данного утверждения заменой слов «прямая» на слово «точка» и наоборот.

В самом деле, числовое равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

выражающее условие инцидентности точки $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямой $\{a_1 : a_2 : a_3\}$, не зависит от того, какую из двух троек x_1, x_2, x_3 и a_1, a_2, a_3 мы заключаем в круглые, а какую — в фигурные скобки, т. е. не зависит от того, считаем ли мы тройки x_1, x_2, x_3 и a_1, a_2, a_3 тройками однородных координат точки и прямой или, наоборот, прямой и точки. Принцип двойственности иллюстрирует равноправие точек и прямых на проективной плоскости, представленной рассматриваемыми моделями.

Рассмотрим пример двойственных утверждений. Две точки инцидентны одной и только одной прямой. Двойственное утверждение: две прямые инцидентны одной и только одной точке. Иными словами, аксиомы П1 и П2 являются двойственными утверждениями.

1.1 Теорема Дезарга

Жерар Дезарг (1591–1661) — французский архитектор, инженер и математик.

В формулировке теоремы Дезарга фигурируют треугольники. Треугольником в проективной геометрии называется совокупность трех точек, не инцидентных одной прямой. Но можно сказать и так: треугольником называется совокупность трех прямых, не инцидентных одной и той же точке (то есть не принадлежащих одному пучку), и трех точек, каждая из которых инцидентна двум каким-либо из данных трех прямых. Сторонами треугольника называем прямые, инцидентные парам его вершин. Прямую, инцидентную точкам M и N, будем обозначать через MN, точку, инцидентную прямым MN и $M'N'$, будем обозначать через $(MN \cdot M'N')$.

1.1 Теорема. *Пусть на проективной плоскости даны два треугольника LMN и $L'M'N'$ так, что не совпадают соответственные вершины и стороны этих треугольников. Тогда три прямые LL', MM', NN' инцидентны одной и той же точке в том и только в том случае, когда три точки $(MN \cdot M'N')$, $(NL \cdot N'L')$, $(LM \cdot L'M')$ инцидентны одной и той же прямой.*

Доказательство. Заметим, что прямое и обратное утверждения теоремы Дезарга двойственны друг другу, поэтому в силу принципа двойственности достаточно проверить, например, необходимость условий этой теоремы. Иными словами, пусть три прямые LL', MM', NN' инцидентны одной и той же точке W. И надо доказать, что три точки $(MN \cdot M'N')$, $(NL \cdot N'L')$, $(LM \cdot L'M')$ инцидентны одной и той же прямой.

В качестве модели проективной плоскости выбираем связку, в которой вводим однородные координаты. Обозначим тройки однородных координат точек L, M, N, L', M', N' соответственно через $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{l}'$, $\mathbf{m}'$, $\mathbf{n}'$. По условию, три прямые LL', MM', NN' инцидентны одной точке W. Пусть $\mathbf{w}$ — какая-нибудь тройка однородных координат этой точки. Поскольку три точки L, L', W коллинеарны, три тройки $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'$, $\mathbf{w}$ линейно зависимы. Это легко заметить, поскольку в качестве модели проективной плоскости мы выбрали связку. В самом деле, точки — это прямые, а выбранные однородные координаты — это координаты направляющих векторов трех прямых, лежащих в одной плоскости, след которой — прямая LL'. Но тройки $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$, будучи тройками координат различных точек L и L' (то есть различных прямых, проходящих через точку O), не пропорциональны. Поэтому тройка $\mathbf{w}$ есть линейная комбинация троек $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$. По тем же соображениям тройка $\mathbf{w}$ является линейной комбинацией троек $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}'$, а также $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. Следовательно, существуют такие ненулевые пары чисел (α, α'), (β, β'), (γ, γ'), что

$$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{l} + \alpha'\mathbf{l}' = \beta\mathbf{m} + \beta'\mathbf{m}' = \gamma\mathbf{n} + \gamma'\mathbf{n}',$$

откуда получаем

$$\beta\mathbf{m} - \gamma\mathbf{n} = \gamma'\mathbf{n}' - \beta'\mathbf{m}',$$

$$\gamma\mathbf{n} - \alpha\mathbf{l} = \alpha'\mathbf{l}' - \gamma'\mathbf{n}',$$

$$\alpha\mathbf{l} - \beta\mathbf{m} = \beta'\mathbf{m}' - \alpha'\mathbf{l}'.$$

Эти равенства являются равенствами ненулевых троек, которые обозначим через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ соответственно:

$$\mathbf{p} = \beta\mathbf{m} - \gamma\mathbf{n} = \gamma'\mathbf{n}' - \beta'\mathbf{m}',$$

$$\mathbf{q} = \gamma\mathbf{n} - \alpha\mathbf{l} = \alpha'\mathbf{l}' - \gamma'\mathbf{n}',$$

$$\mathbf{r} = \alpha\mathbf{l} - \beta\mathbf{m} = \beta'\mathbf{m}' - \alpha'\mathbf{l}'.$$

Обозначим через P, Q, R точки, тройками однородных координат которых служат тройки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$. Первое равенство означает, что $P = (MN \cdot M'N')$, что опять же очевидно, если рассматривать точку P как прямую связки и представлять ее как пересечение двух плоскостей. Аналогично $Q = (NL \cdot N'L')$, $R = (LM \cdot L'M')$. С другой стороны, складывая эти три равенства, получаем

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = (0, 0, 0).$$

Следовательно, точки P, Q, R инцидентны одной прямой. Теорема Дезарга доказана. □

Задача. *Показать, что прямая и обратная теоремы Дезарга являются двойственными утверждениями.*

Решение. Переформулируем доказанную теорему.

(Треугольники LMN и $L'M'N'$ заданы вершинами.) *Если три* **прямые** *LL', MM', NN' инцидентны одной и той же* **точке**, *то три* **точки** *$(MN \cdot M'N')$, $(NL \cdot N'L')$, $(LM \cdot L'M')$ инцидентны одной и той же* **прямой**.

Двойственное утверждение:

(Треугольники LMN и $L'M'N'$ заданы сторонами.) *Если три* **точки** *$(MN \cdot M'N')$, $(NL \cdot N'L')$, $(LM \cdot L'M')$ инцидентны одной и той же* **прямой**, *то три* **прямые** *LL', MM', NN' инцидентны одной и той же* **точке**.

Заметим, что теорема Дезарга была известна Паппу (III в н. э.), поскольку содержится в его сочинении «Математическое собрание». Иными словами, эта теорема была переоткрыта Дезаргом и носит его имя.

2 Проективные системы координат

2.1 Проективная система координат в связке

2.1 Определение. Два репера $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_1'e_2'e_3'$ с общим началом O называются *эквивалентными*, если существует такое число λ, что $e_i' = \lambda e_i$, $i = 1, 2, 3$.

Следующее предложение 2.2 необходимо для последующего определения проективных координат.

2.2 Предложение. *Реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_1'e_2'e_3'$ эквивалентны тогда и только тогда, когда каждая прямая связки O имеет одни и те же однородные координаты в этих реперах.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe_1'e_2'e_3'$ эквивалентны, и пусть направляющий вектор какой-то прямой связки в репере $Oe_1'e_2'e_3'$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3). Тогда в репере $Oe_1e_2e_3$ этот же вектор имеет координаты $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$. Следовательно, однородные координаты в этих реперах одинаковы.

Докажем достаточность. Предположим теперь, что однородные координаты каждой из прямых связки в этих реперах одинаковы. Тогда прямая, несущая вектор e_1', имеет в обоих реперах по условию одинаковые однородные координаты $(1 : 0 : 0)$, откуда $e_1' = \lambda_1 e_1$ для некоторого $\lambda_1 \neq 0$. Аналогично $e_2' = \lambda_2 e_2$, $e_3' = \lambda_3 e_3$. Осталось показать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. Прямая с направляющим вектором $e' = e_1' + e_2' + e_3'$ имеет в репере $Oe_1'e_2'e_3'$ однородные координаты $(1 : 1 : 1)$. По предположению и в репере $Oe_1e_2e_3$ эта прямая имеет те же однородные координаты $(1 : 1 : 1)$, откуда $e' = \lambda e_1 + \lambda e_2 + \lambda e_3$ при некотором $\lambda \neq 0$. Но, с другой стороны, $e' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$. Следовательно, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. □

2.3 Определение. *Проективной системой координат в связке O* называется класс эквивалентных между собой аффинных реперов (или, что то же самое, аффинных систем координат) с началом O.

Из доказательства предложения 2.2 вытекает, что проективная система координат в связке O однозначно определяется упорядоченной четверкой прямых X_1, X_2, X_3, E связки, таких что никакие три прямые не лежат в одной плоскости. Такая четверка прямых (точек проективной плоскости) называется фундаментальной четверкой. Прямые X_1, X_2, X_3 называются координатными, а прямая E — единичной. Координатные прямые являются осями координат эквивалентных аффинных систем координат, а единичная прямая E содержит диагональ OE параллелепипеда, построенного на единичных векторах $e_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OE_2}$, $e_3 = \overrightarrow{OE_3}$ любой аффинной системы координат, принадлежащей данной проективной системе координат (рис. 1).

Поэтому фундаментальную четверку X_1, X_2, X_3, E также можно назвать проективной системой координат, или, более точно, проективным репером, определяющим данную проективную систему координат. Можно также интерпретировать проективную систему координат проективной плоскости как множество гомотетичных параллелепипедов с центром гомотетии в точке O.

2.4 Определение. Тройки однородных координат произвольной прямой связки O в аффинном репере $Oe_1e_2e_3$, или, что то же самое, в любом аффинном репере, эквивалентном реперу $Oe_1e_2e_3$, называются *тройками проективных координат* этой прямой в проективной системе $X_1\ X_2\ X_3\ E$.

В частности, прямые X_1, X_2, X_3, E имеют в этой системе координат следующие координаты

$$X_1 = (1 : 0 : 0), \quad X_2 = (0 : 1 : 0), \quad X_3 = (0 : 0 : 1), \quad E = (1 : 1 : 1).$$

При описанных выше изоморфизмах проективных плоскостей проективные координаты в связке переносятся и на пополненную плоскость, и на арифметическую проективную плоскость.

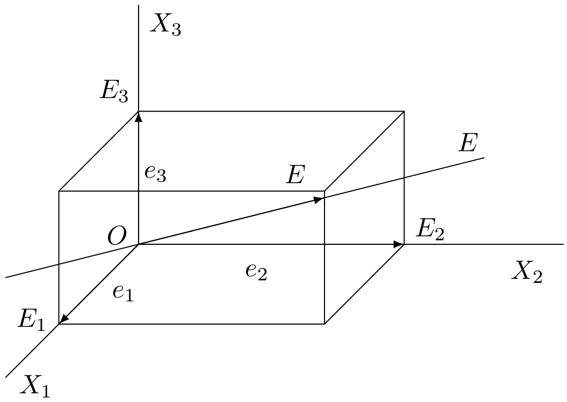

Рис. 1: проективная система координат.

2.2 Переход от одной проективной системы координат к другой

Пусть на проективной плоскости P заданы две проективные системы коорлинат — исходная, «старая» $X_1X_2X_3E$ и «новая» система $X_1'X_2'X_3'E'$. Выберем какой нибудь параллелепипед, соответствующий «новой» системе координат, и запишем координаты векторов e_1', e_2', e_3', совпадающих со сторонами параллелепипеда, в «старой» системе координат $Oe_1e_2e_3$. То есть «новая» система задана какими-то тройками проективных координат относительно «старой» системы:

$$\begin{cases} X_1' = (c_{11} : c_{21} : c_{31}), \\ X_2' = (c_{12} : c_{22} : c_{32}), \\ X_1' = (c_{13} : c_{23} : c_{33}), \\ E' = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3). \end{cases}$$

Надо найти формулы преобразования координат, выражающие координаты x_1, x_2, x_3 любой точки m относительно «старой» системы координат через координаты x_1', x_2', x_3' той же точки в «новой» системе координат. Заметим, что, поскольку был выбран конкретный параллелепипед, тройки координат точек X_1', X_2', X_3', E' выбраны согласованными, т. е. подчинены условию

$$(c_{11} : c_{21} : c_{31}) + (c_{12} : c_{22} : c_{32}) + (c_{13} : c_{23} : c_{33}) = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3).$$

Тогда, возвращаясь к связке O и предполагая, что («старая») проективная система $X_1X_2X_3E$ порождается аффинным репером $Oe_1e_2e_3$, видим, что векторы

$$e_1' = \{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \quad e_2' = \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \quad e_3' = \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\},$$

заданные координатами в базисе e_1, e_2, e_3, линейно независимы, поскольку прямые X_1, X_2, X_3 не лежат в одной плоскости. Заметим, что матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3', то есть

$$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C.$$

Далее, каждая тройка x_1, x_2, x_3 проективных координат в системе $X_1X_2X_3E$ произвольной прямой m есть тройка координат в репере $Oe_1e_2e_3$ некоторого направляющего вектора a этой прямой. Аналогичным образом тройка координат x_1', x_2', x_3' прямой m в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ есть тройка координат в репере $Oe_1'e_2'e_3'$ какого-то направляющего вектора $a' = \lambda a$ той же прямой m. Поэтому из формул преобразования аффинных координат получаем

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Здесь λ — множитель, принимающий все отличные от нуля значения. Это и есть формула перехода от проективной системы $X_1X_2X_3E$ к проективной системе $X_1'X_2'X_3'E'$.

1 Проективные преобразования

1.1 Определение. Отображение $f : P \to P$ проективной плоскости называется *проективным преобразованием*, если существуют две такие проективные системы координат $X_1X_2X_3E$ («старая») и $X_1'X_2'X_3'E'$ («новая»), что отображение является отображением по равенству проективных координат, то есть точка $m' = f(m)$ в «новой» системе $X_1'X_2'X_3'E'$ имеет те же координаты, что и точка m в «старой» системе координат $X_1X_2X_3E$. Говорят, что проективное преобразование ассоциировано с двумя системами координат $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$.

Предположим, что проективное преобразование f ассоциировано с системами координат $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$, связанными между собой формулами перехода

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Найдем, как связаны между собой координаты x_1, x_2, x_3 произвольной точки m в системе $X_1X_2X_3E$ и координаты x_1', x_2', x_3' ее образа $m' = f(m)$ в той же системе $X_1X_2X_3E$. Заметим, что координаты точки $m' = f(m)$ в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ совпадают с координатами точки m в системе $X_1X_2X_3E$, то есть это те же самые координаты x_1, x_2, x_3. Воспользуемся уже выписанными формулами перехода и выясним, как в системе координат $X_1X_2X_3E$ выражаются координаты точки с координатами x_1, x_2, x_3 в системе координат $X_1'X_2'X_3'E'$. В результате получим

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Это и есть аналитическая запись проективного преобразования в проективных координатах. Иными словами, проективное преобразование проективной плоскости является в некотором смысле аффинным преобразованием связки, центр O которой является неподвижной точкой этого аффинного преобразования.

Наоборот, для каждой невырожденной матрицы C и проективной системы координат $X_1X_2X_3E$ существует единственное проективное преобразование, записываемое полученными формулами.

Если в системе координат $X_1X_2X_3E$ проективное преобразование f задается матрицей C, а проективное преобразование g — матрицей D, то их композиция $g \circ f$ задается матрицей DC и, следовательно, также является проективным преобразованием. Аналогично матрица C^{-1} задает преобразование f^{-1}, т. е. преобразование, обратное к проективному, также будет проективным.

1.2 Предложение. *При проективном преобразовании f с матрицей C прямая с координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ переходит в прямую с координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}\, C^{-1}$.*

Доказательство. Итак, пусть проективное преобразование f ассоциировано с системами координат $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$ и прямая l задана в первой системе уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Тогда ее образ $f(l)$ в новой системе координат задается таким же уравнением или с учетом нового обозначения координат точек

$$\{a_1, a_2, a_3\} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = 0.$$

Из равенства

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

вытекает, что в исходной системе координат прямая $f(l)$ задается уравнением

$$\{a_1, a_2, a_3\}\, C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

□

1.3 Предложение. *Любая пара l_1, l_2 (пересекающихся) прямых на проективной плоскости может быть посредством проективного преобразования переведена в любую другую пару (пересекающихся) прямых l_1', l_2' на проективной плоскости.*

Доказательство. Пусть X_3 — точка пересечения прямых l_1 и l_2, а X_1, X_2 — точки на прямых l_1, l_2, не совпадающие с точкой X_3, и пусть точка E не принадлежит ни одной из прямых l_1, l_2, X_1X_2. Аналогично, отправляясь от прямых l_1', l_2', построим точки X_1', X_2', X_3', E'. Тогда проективное преобразование, ассоциированное с проективными реперами $X_1X_2X_3E$ и $X_1'X_2'X_3'E'$, очевидно, и будет искомым. □

1.4 Следствие. *Любая прямая l_1 (в том числе и несобственная) на проективной плоскости может быть посредством проективного преобразования переведена в любую другую прямую l_1' проективной плоскости.*

1.5 Следствие. *Еще одно доказательство теоремы Дезарга.*

Доказательство. Итак, пусть три прямые LL', MM', NN' инцидентны одной и той же точке W. Надо доказать, что три точки $P = (MN \cdot M'N')$, $Q = (NL \cdot N'L')$, $R = (LM \cdot L'M')$ инцидентны одной и той же прямой.

Существует проективное преобразование плоскости, переводящее прямую PQ в несобственную прямую. Поэтому можно считать, что прямые MN и $M'N'$ параллельны, так же как и прямые NL и $N'L'$. Будем считать, что точка W не принадлежит несобственной прямой PQ. Из подобия треугольников WMN, $W'M'N'$ и WNL, $W'N'L'$, очевидно, следует подобие треугольников WLM, $W'L'M'$ и, следовательно, параллельность прямых LM и $L'M'$. Последнее означает, что точка R принадлежит прямой PQ.

Задача. *Проведите доказательство в случае, когда точка W принадлежит несобственной прямой PQ.* □

2 Теорема Паппа

3 Линии второго порядка в однородных координатах

Пусть на плоскости с аффинными координатами x, y задана линия второго порядка L общим уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

или в матричном виде

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Перейдем от аффинных координат к однородным: $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$. Тогда общее уравнение примет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1x_3 + 2a_2x_2x_3 + a_0x_3^2 = 0.$$

Заметим, что в проективном случае, возможно, являются более удачными следующие обозначения:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

В матричном виде

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Это уравнение на множестве всех собственных точек плоскости ($x_3 \neq 0$), очевидно, эквивалентно исходному. Если же рассматривать последнее уравнение на пополненной плоскости $\overline{\pi}$, то ему, кроме всех собственных точек, принадлежащих данной линии второго порядка на обычной плоскости, то есть точек линии L, удовлетворяют также несобственные точки, у которых $x_3 = 0$, то есть получаем в этом случае уравнение

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0,$$

которое задает асимптотические направления линии L. Таким образом, линия $\overline{L}$, заданная уравнением

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

получается из линии L добавлением к ней ее асимптотических направлений (если таковые имеются). Здесь мы рассматриваем асимптотическое направление как несобственную точку, то есть как несобственный пучок прямых этого асимптотического направления.

3.1 Определение. *Линией второго порядка на проективной плоскости* называется множество $\overline{L}$ точек, проективные координаты которых в некоторой проективной системе координат удовлетворяют однородному уравнению второй степени

$$a_{11}x_1^2 + +a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

При этом матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

не является нулевой.

Заметим, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

может быть нулевой. Предположим, что $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. Тогда линия второго порядка на проективной плоскости задается уравнением

$$x_3(2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3) = 0.$$

Это уравнение двух прямых

$$x_3 = 0 \quad \text{и} \quad 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0.$$

Первая из этих двух прямых несобственная, а вторая может быть как собственной, так и несобственной. Таким образом, всякая линия второго порядка на пополненной плоскости есть

1) либо обычная линия второго порядка, пополненная асимптотическими направлениями;
2) либо пара пересекающихся прямых, одна из которых несобственная;
3) либо пара совпадающих несобственных прямых.

1 Проективная классификация линий второго порядка

1.1 Определение. Две линии второго порядка на проективной плоскости называются *проективно эквивалентными*, если одну можно перевести в другую посредством проективного преобразования.

1.2 Предложение. *Эллипс, гипербола и парабола проективно эквивалентны, т. е. переводятся друг в друга посредством проективного преобразования.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что эллипсом, гиперболой и параболой мы называем здесь обычные эллипс, гиперболу и параболу, пополненные своими асимптотическими направлениями, т. е. к гиперболе добавляется пара точек, а к параболе — одна. Покажем, что эти три линии проективно эквивалентны *овалу*, т. е. линии, имеющей в некоторой проективной системе координат уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

В самом деле, эллипс в некоторой аффинной системе координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 1,$$

которое, будучи записано в однородных координатах, совпадает с уравнением овала. Гипербола может быть записана уравнением

$$x^2 - y^2 - 1 = 0,$$

или в однородных координатах

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$x_2^2 + x_3^2 - x_1^2 = 0.$$

Очевидно, что проективное преобразование

$$\begin{cases} \lambda x_1' = x_2, \\ \lambda x_2' = x_3, \\ \lambda x_3' = x_1 \end{cases}$$

переводит эту линию в овал

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Наконец, парабола может быть записана уравнением

$$x^2 - y = 0,$$

или в однородных координатах

$$x_1^2 - x_2 x_3 = 0.$$

Проективное преобразование, обратное к которому записывается формулами

$$\begin{cases} \lambda x_1 = x_1', \\ \lambda x_2 = -x_2' + x_3', \\ \lambda x_3 = x_2' + x_3', \end{cases}$$

переводит эту линию в тот же овал. □

1.3 Теорема. *Существуют 5 классов проективной эквивалентности линий второго порядка на проективной плоскости, а именно:*

1. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ — *овал;*
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — *мнимый овал;*
3. $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — *пара пересекающихся прямых;*
4. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — *пара мнимых пересекающихся прямых;*
5. $x_1^2 = 0$ — *пара совпадающих прямых.*

Доказательство. Будем рассматривать проективную плоскость как пополненную плоскость с однородными координатами x_1, x_2, x_3, порожденными аффинными координатами x, y, с несобственной прямой $x_3 = 0$. Тогда любая линия второго порядка есть либо одна из девяти обычных линий второго порядка, пополненных асимптотическими направлениями; либо пара пересекающихся прямых, одна из которых несобственная; либо пара совпадающих несобственных прямых. Пара пересекающихся прямых, одна из которых несобственная, по предложению **??** может быть проективным преобразованием переведена в любую другую пару пересекающихся прямых (пункт 3 условия теоремы). Несобственная прямая также проективно эквивалентна любой другой прямой на проективной плоскости (пункт 5 условия теоремы).

Теперь осталось доказать, что каждая из девяти обычных пополненных линий второго порядка проективно эквивалентна одной из пяти перечисленных в формулировке теоремы линий.

В предложении 1.2 доказано, что эллипс, гипербола и парабола проективно эквивалентны овалу $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Ясно также, что мнимый эллипс $x^2 + y^2 + 1 = 0$ проективно эквивалентен мнимому овалу $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$; пара пересекающихся прямых $x^2 - y^2 = 0$ эквивалентна линии $x_1^2 - x_2^2 = 0$, пара мнимых пересекающихся прямых $x^2 + y^2 = 0$ проективно эквивалентна линии $x_1^2 + x_2^2 = 0$ и пара совпадающих прямых $y^2 = 0$ проективно эквивалентна линии $x_2^2 = 0$, а эта линия проективно эквивалентна линии в пункте 5: $x_1^2 = 0$. Параллельные прямые $y^2 - 1 = 0$ в однородных координатах записываются уравнением $x_2^2 - x_3^2 = 0$. Эти прямые пересекаются в несобственной точке $(1 : 0 : 0)$. Уравнение $x_2^2 - x_3^2 = 0$ проективно не отличается от уравнения в пункте 3. Наконец, мнимые параллельные прямые $y^2 + 1 = 0$ в однородных координатах записываются уравнением $x_2^2 + x_3^2 = 0$ и пересекаются в той же несобственной точке $(1 : 0 : 0)$. Уравнение $x_2^2 + x_3^2 = 0$ проективно эквивалентно уравнению в пункте 4.

Остается показать, что линии 1–5 попарно проективно неэквивалентны.

Овал $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ проективно эквивалентен эллипсу, следовательно, никакие три его точки не лежат на одной прямой, а также овал содержит бесконечно много действительных точек. Эти два условия отличают овал от линий 2–5.

Мнимый овал $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — это единственная из пяти линий, не имеющая действительных точек.

Пара пересекающихся прямых $x_1^2 - x_2^2 = 0$ при проективном преобразовании может перейти только в пару пересекающихся прямых, поскольку любые три точки пары совпадающих прямых лежат на одной прямой, а для пары пересекающихся прямых это невозможно.

Пара мнимых пересекающихся прямых $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — это единственная линия, имеющая только одну действительную точку. Теорема 1.3 доказана. □

2 Проективно-аффинные преобразования

Проективная плоскость с выделенной на ней несобственной прямой называется *проективно-аффинной плоскостью*. Точки несобственной прямой называются *несобственными*, остальные точки — *собственными*. Проективное преобразование проективно-аффинной плоскости называется *проективно-аффинным*, если оно отображает несобственную прямую на себя. В качестве проективно-аффинной плоскости возьмем арифметическую проективную плоскость с несобственной прямой $x_3 = 0$, или, что то же самое, пополненную плоскость с однородными координатами x_1, x_2, x_3, порожденными аффинными координатами x, y.

2.1 Теорема. 1) *Для того, чтобы проективное преобразование, заданное формулами*

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

было проективно-аффинным, необходимо и достаточно, чтобы $c_{31} = c_{32} = 0$, а $c_{33} \neq 0$.

2) *Всякое проективно-аффинное преобразование, рассматриваемое на множестве собственных точек плоскости, является аффинным преобразованием, имеющим аналитическую запись*

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \end{cases} \quad \text{где} \quad a_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}.$$

3) *Всякое аффинное преобразование*

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$$

продолжается до проективно-аффинного преобразования, имеющего аналитическую запись

$$\begin{cases} \lambda x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \lambda x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \lambda x_3' = x_3. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Необходимость. Несобственная точка $(1 : 0 : 0)$ проективным преобразованием переводится в точку $(c_{11} : c_{21} : c_{31})$, которая является несобственной, только если $c_{31} = 0$. Аналогично, если взять несобственную точку $(0 : 1 : 0)$, получим $c_{32} = 0$. Поскольку матрица перехода является невырожденной, получаем, что $c_{33} \neq 0$. Достаточность очевидна, поскольку в этом случае $x_3 = 0$ тогда и только тогда, когда $x_3' = 0$.

2) Если первое и второе из равенств, получающихся из первой и второй строчки матричного равенства

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

разделить на третью строчку, то с учетом того, что $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$, получим требуемые равенства, которые определяют аффинное преобразование, поскольку

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}}{c_{33}^2} \neq 0.$$

3) Данное (проективное) преобразование, очевидно, оставляет несобственную прямую $x_3 = 0$ на месте и, следовательно, проективно-аффинно (см. также пункт 1)) и является продолжением данного аффинного преобразования, поскольку также как и равенства пункта 2) равенства аффинного преобразования получаются из первого и второго равенств проективно-аффинного преобразования делением их на третье равенство. □

Задача. *Движение продолжается до проективно-аффинного преобразования. Доказать.*

Иными словами группа движений является подгруппой групы проективно-аффинных преобразований и, следовательно, евклидова геометрия погружается в проективную геометрию.

3 Проективно-аффинная классификация линий второго порядка

3.1 Определение. Две линии второго порядка на проективно-аффинной плоскости называются *проективно-аффинно эквивалентными*, если одну можно перевести в другую посредством проективно-аффинного преобразования.

3.2 Теорема. *Существуют 11 классов проективно-аффинной эквивалентности линий второго порядка на проективной плоскости, а именно:*

1) *девять обычных пополненных линий второго порядка;*
2) *пара пересекающихся прямых, одна из которых несобственная;*
3) *пара совпадающих несобственных прямых.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 вытекает, что аффинно эквивалентные линии будут проективно-аффинно эквивалентными. Далее, возьмем две пары пересекающихся прямых, одна из которых в каждой паре несобственная. Можно применить предложение **??** так, чтобы проективным преобразованием одну пару перевести в другую таким образом, чтобы несобственная прямая перешла в несобственную прямую, т. е. это проективное преобразование будет проективно-аффинным. Таким образом, существует не более одиннадцати перечисленных выше классов проективно-аффинной эквивалентности.

Остается доказать, что линии из разных классов не являются проективно-аффинно эквивалентными. Основной инструмент доказательства — число точек пересечения с несобственной прямой. В силу теоремы 1.3 надо различать только линии, попавшие в один из пяти классов проективной эквивалентности.

Овалом являются эллипс, гипербола и парабола. Они проективно-аффинно не эквивалентны между собой, поскольку пересекаются с несобственной прямой по разному количеству точек: 0, 2, 1.

Мнимому овалу принадлежит только мнимый эллипс. Мнимый овал не содержит действительных точек собственных или несобственных.

В пересекающиеся прямые попали три линии: собственные пересекающиеся прямые, параллельные прямые и пересекающиеся прямые, одна из которых несобственная. Эти линии также пересекаются с несобственной прямой по разному количеству точек: 2, 1, ∞.

Мнимые пересекающиеся прямые пересекаются в некоторой собственной точке.

Мнимые параллельные прямые пересекаются в несобственной точке. Этим мнимые параллельные прямые отличаются от мнимых пересекающихся прямых.

Наконец, совпадающие прямые могут быть собственными и несобственными. Собственная прямая пересекается с несобственной прямой в одной точке, а несобственная прямая содержит бесконечно много несобственных точек. Поэтому они проективно-аффинно не эквивалентны. □

1 Проективная прямая. Двойное отношение

Проективная прямая — это прямая на проективной плоскости. Модели проективной прямой: 1) пополненная одной точкой обычная прямая; 2) собственный пучок, то есть по аналогии с моделью проективной плоскости в виде связки рассматриваем на обычной плоскости собственный пучок прямых с центром в точке O. Прямые объявляем точками и получаем модель проективной прямой. Проведем в этой плоскости прямую, не проходящую через точку O, и получим проективное соответствие между собственным пучком прямых и пополненной прямой.

1.1 Однородные координаты в пучке

Пусть дан пучок O. Возьмем на плоскости какой-нибудь репер Oe_1e_2 с началом в точке O. Для произвольной прямой m пучка пару координат x_1, x_2 любого направляющего вектора этой прямой назовем парой однородных координат прямой m в данном репере Oe_1e_2. Обозначим класс всех пропорциональных данной паре ненулевых пар через $(x_1 : x_2)$. Каждая пара из класса $(x_1 : x_2)$ также будет парой однородных координат прямой m. Класс всех пар назовем *однородными координатами прямой* m в репере Oe_1e_2.

1.2 Однородные координаты на прямой

Предположим, что на обычной прямой l выбран репер O_1e_1. Пусть M — произвольная точка прямой, x — ее координата в этом репере. Тогда всякая ненулевая пара чисел (x_1, x_2), пропорциональная паре $(x, 1)$, называется парой однородных координат точки M в репере O_1e_1. Ясно, что переход от пары однородных координат (x_1, x_2) к ее координате x осуществляется по формуле

$$x = \frac{x_1}{x_2}.$$

Такой переход возможен, поскольку для ненулевой пары (x_1, x_2), пропорциональной паре $(x, 1)$, всегда $x_2 \neq 0$. Класс всех пар однородных координат (x_1, x_2) точки M обозначается через $(x_1 : x_2)$ и называется *однородными координатами* точки M (в репере O_1e_1). Заметим, что естественно предположить, что класс точек $(x_1 : 0)$ представляет собой однородные координаты бесконечно удаленной точки прямой l. Сейчас мы убедимся, что это и в самом деле так.

1.3 Связь однородных координат на прямой с однородными координатами в пучке

Возьмем в плоскости какой-нибудь репер Oe_1e_2. Конец вектора e_2, отложенного от точки O, обозначим O_1. Проведем через точку O_1 прямую l параллельно вектору e_1.

В репере Oe_1e_2 прямая l имеет уравнение $x_2 = 1$. Поэтому всякая точка M прямой l, имеющая в репере O_1e_1 координату x, в репере Oe_1e_2 имеет координаты $x, 1$, и наоборот. Следовательно, всякая собственная (по отношению к прямой l) прямая пучка O, проходящая через точку $M(x)$, имеет в пучке однородные координаты $(x : 1)$. При перспективном соответствии несобственной точке пополненной прямой $\bar{l}$ ставится в соответствие прямая пучка, параллельная прямой l. Такая прямая имеет уравнение $x_2 = 0$. Следовательно, несобственная точка пополненной прямой соответствует прямой пучка с однородными координатами вида $(x_1 : 0)$.

1.4 Проективная система координат на проективной прямой

Введем теперь проективную систему координат непосредственно на проективной прямой. В качестве модели проективной прямой выбираем собственный пучок.

1.1 Определение. Два репера Oe_1e_2 и $Oe'_1e'_2$ с общим началом O называются *эквивалентными*, если существует такое число λ, что $e'_i = \lambda e_i$, $i = 1, 2$.

Однородными координатами прямой пучка называется класс координат направляющих векторов прямой.

1.2 Предложение. *Реперы Oe_1e_2 и $Oe'_1e'_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда каждая прямая пучка O имеет одни и те же однородные координаты в этих реперах.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть реперы Oe_1e_2 и $Oe'_1e'_2$ эквивалентны, и пусть направляющий вектор какой-то прямой пучка в репере $Oe'_1e'_2$ имеет координаты (x_1, x_2). Тогда в репере Oe_1e_2 этот вектор имеет координаты $(\lambda x_1, \lambda x_2)$. Следовательно, однородные координаты в этих реперах одинаковы.

Докажем достаточность. Предположим теперь, что однородные координаты каждой из прямых пучка в этих реперах одинаковы. Тогда прямая, несущая вектор e'_1, имеет в обоих реперах одинаковые однородные координаты $(1 : 0)$, откуда $e'_1 = \lambda_1 e_1$ для некоторого $\lambda_1 \neq 0$. Аналогично $e'_2 = \lambda_2 e_2$. Осталось показать, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Прямая с направляющим вектором $e' = e'_1 + e'_2$ имеет по предположению в обоих реперах одинаковые однородные координаты $(1 : 1)$, откуда $e' = \lambda(e_1 + e_2)$ при некотором $\lambda \neq 0$. Но, с другой стороны, $e' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. Следовательно, $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. □

1.3 Определение. *Проективной системой координат в пучке* O называется класс эквивалентных между собой аффинных реперов (или, что то же самое, аффинных систем координат) с началом O.

Из доказательства предложения 1.2 вытекает, что проективная система координат в собственном пучке O однозначно определяется упорядоченной тройкой попарно несовпадающих прямых X_1, X_2, E пучка. Эти прямые (точки проективной прямой) называются фундаментальной тройкой. Прямые (то есть точки проективной прямой) X_1, X_2 называются координатными, а прямая E — единичной прямой. Координатные прямые являются осями координат эквивалентных аффинных систем координат, а единичная прямая E содержит диагональ OE параллелограмма, построенного на единичных векторах $e_1 = \overrightarrow{OE_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OE_2}$ любой аффинной системы координат, принадлежащей данной проективной системе координат. Можно также интерпретировать проективную систему координат проективной прямой как множество гомотетичных параллелограммов с центром гомотетии в точке O.

1.4 Определение. Пары однородных координат произвольной прямой пучка O в аффинном репере Oe_1e_2, или, что то же самое, в любом аффинном репере, эквивалентном реперу Oe_1e_2, называются *парами проективных координат* этой прямой в проективной системе X_1X_2E.

В частности, точки X_1, X_2, E имеют в этой системе координат следующие координаты

$$X_1 = (1:0), \quad X_2 = (0:1), \quad E = (1:1).$$

1.5 Переход от одной проективной системы координат к другой

Пусть на проективной прямой заданы две проективные системы координат — исходная («старая») X_1X_2E и «новая» система $X_1'X_2'E'$. Выберем какой нибудь параллелограмм, соответствующий «новой» системе координат и запишем координаты векторов e_1', e_2', совпадающих со сторонами параллелограмма, в «старой» системе координат Oe_1e_2. То есть «новая» система задана какими-то тройками проективных координат относительно «старой» системы:

$$\begin{cases} X_1' = (c_{11} : c_{21}), \\ X_2' = (c_{12} : c_{22}), \\ E' = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2). \end{cases}$$

Надо найти формулы преобразования координат, выражающие пару координат (x_1, x_2) любой точки m относительно «старой» системы координат через пару координат (x_1', x_2') той же точки в «новой» системе координат. Заметим, что, поскольку был выбран конкретный параллелограмм, тройки координат точек X_1', X_2', E' выбраны согласованными, т. е. подчинены условию

$$(c_{11} : c_{21}) + (c_{12} : c_{22}) = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2).$$

Тогда, возвращаясь к пучку O и предполагая, что «старая» проективная система X_1X_2E порождается аффинным репером Oe_1e_2, видим, что векторы

$$e_1' = \{c_{11}, c_{21}\}, \quad e_2' = \{c_{12}, c_{22}\},$$

заданные координатами в базисе e_1, e_2, линейно независимы, поскольку прямые X_1, X_2 не совпадают. Заметим, что матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

является (невырожденной) матрицей перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2', то есть

$$(e_1', e_2') = (e_1, e_2) \cdot C.$$

Далее, каждая пара (x_1, x_2) проективных координат в системе X_1X_2E произвольной прямой m есть пара однородных координат в репере Oe_1e_2 некоторого направляющего вектора a этой прямой. Аналогичным образом пара координат (x_1', x_2') прямой m в системе $X_1'X_2'E'$ есть пара координат в репере $Oe_1'e_2'$ какого-то направляющего вектора $a' = \lambda a$ той же прямой m. Поэтому из формул преобразования аффинных координат получаем

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Здесь λ — множитель, принимающий все отличные от нуля значения. Это и есть формула перехода от проективной системы X_1X_2E к проективной системе $X_1'X_2'E'$.

1.6 Проективные преобразования проективной прямой

1.5 Определение. Отображение f проективной прямой l называется *проективным преобразованием* или *проективным отображением* , если существуют две такие проективные системы координат X_1X_2E («старая») и $X_1'X_2'E'$ («новая»), что отображение является отображением по равенству проективных координат, то есть точка $m' = f(m)$ в «новой» системе $X_1'X_2'E'$ имеет те же координаты, что и точка m в «старой» системе координат X_1X_2E. Говорят, что проективное преобразование ассоциировано с двумя системами координат X_1X_2E и $X_1'X_2'E'$.

Предположим, что проективное преобразование f ассоциировано с двумя системами координат X_1X_2E и $X'_1X'_2E'$, связанными между собой формулами перехода

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем, как связаны между собой пара координат (x_1, x_2) произвольной точки m в системе X_1X_2E и пара координат (x'_1, x'_2) ее образа $m' = f(m)$ в той же системе X_1X_2E. Заметим, что координаты точки $m' = f(m)$ в системе $X'_1X'_2E'$ совпадают с координатами точки m в системе X_1X_2E, то есть это та же самая пара координат (x_1, x_2). Воспользуемся уже выписанными формулами перехода и получим

$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

(То есть точка $(x'_1 : x'_2)$ является той единственной точкой, которая при переходе от проективной системы координат X_1X_2E к другой проективной системе координат $X'_1X'_2E'$ переходит именно в точку $(x_1 : x_2)$!) Это и есть аналитическая запись проективного преобразования в проективных координатах. Обратно, для невырожденной матрицы C и проективной системы координат X_1X_2E существует единственное проективное преобразование, записываемое полученными формулами.

1.7 Простое отношение

Возьмем на прямой упорядоченную тройку попарно различных собственных точек A, B, C. Напомним, что точка C делит невырожденный отрезок AB в отношении λ, если $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$. Число λ называется *простым отношением* и обозначается (ABC).

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$$

Простое отношение, как известно, сохраняется аффинными преобразованиями.

Задача. *Доказать, что простое отношение не сохраняется проективными преобразованиями.*

Доказательство. Пусть точка C не принадлежит отрезку AB. Тогда $(ABC) < 0$. Возьмем точку C' принадлежащей отрезку AB. Тогда $(ABC') > 0$. Рассмотрим проективное преобразование, ассоциированное с системами координат A,B,C и A,B,C'. Очевидно, простое отношение поменяло знак. □

1.8 Двойное отношение

Двойным отношением упорядоченной четверки попарно различных (собственных) точек A, B, C, D называется число, равное частному от деления простых отношений (ABC) и (ABD):

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{AD}}.$$

Двойное отношение также называют сложным или ангармоническим отношением четырех точек.

Если одна из точек, например точка D, несобственная, то по определению двойное отношение $(ABCD)$ принимается равным пределу двойного отношения $(ABCD_1)$, где D_1 — собственная точка, не совпадающая с точками A, B, C, причем предел берется в предположении, что точка D_1 неограниченно удаляется по прямой. Нетрудно заметить, что в этом случае

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Аналогично если A — несобственная точка, то

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{CB}};$$

если B — несобственная точка, то

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}};$$

и если C — несобственная точка, то

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{AD}}.$$

1.6 Теорема. *Проективные преобразования сохраняют двойные отношения.*

Доказательство. В качестве модели проективной прямой выбираем пополненную прямую. Аффинные координаты собственных точек в некотором репере: $A = (a)$, $B = (b)$, $C = (c)$, $D = (d)$. Тогда

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{c-a}{b-c}, \qquad (ABD) = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \frac{d-a}{b-d}$$

$$(ABCD) = \frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{c-a}{b-c} : \frac{d-a}{b-d}.$$

Напомним, что аффинная координата (x) выражается через однородные координаты $(x_1 : x_2)$ той же собственной точки следующим образом:

$$x = \frac{x_1}{x_2}.$$

Однородные координаты точек: $A = (a_1 : a_2)$, $B = (b_1 : b_2)$, $C = (c_1 : c_2)$, $D = (d_1 : d_2)$. В однородных координатах получаем

$$(ABCD) = \frac{\frac{c_1}{c_2} - \frac{a_1}{a_2}}{\frac{b_1}{b_2} - \frac{c_1}{c_2}} : \frac{\frac{d_1}{d_2} - \frac{a_1}{a_2}}{\frac{b_1}{b_2} - \frac{d_1}{d_2}} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}.$$

Правая часть равенства определена корректно, так как при замене одной пары координат на другую, ей пропорциональную, это выражение не меняется. Возьмем проективное преобразование, заданное формулами

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda_c \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_a \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\lambda_c \lambda_a \begin{pmatrix} c_1' & a_1' \\ c_2' & a_2' \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Откуда получаем следующее равенство для определителей:

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \frac{\lambda_c \lambda_a}{|C|} \begin{vmatrix} c_1' & a_1' \\ c_2' & a_2' \end{vmatrix}.$$

Выписав аналогичные равенства для остальных определителей, фигурирующих в двойном отношении $(ABCD)$ выше, и подставив выражения этих определителей в двойное отношение $(ABCD)$, обнаружим, что множители λ_a, λ_b, λ_c, λ_d, $|C|$ сократятся и, следовательно, двойное отношение не изменилось.

Задача. *Доказать, что формула*

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}$$

справедлива и в случае, когда одна из точек A, B, C, D *несобственная.*

Таким образом теорема 1.6 полностью доказана. □

Задача. *Доказать, что двойное отношение* $(ABCD)$ *равно неоднородной проективной координате точки* D *в системе проективных координат* ABC.

Доказательство. Пусть точки A и B являются координатными точками, а точка C — единичная фундаментальная точка. В однородных координатах $A = (1 : 0)$, $B = (0 : 1)$, $C = (1 : 1)$, $D = (d_1 : d_2)$.

$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} d_1 & 1 \\ d_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & d_1 \\ 1 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{d_1}{d_2}.$$

□

Задача. *Найти двойное отношение* $(ABCD)$, *если точка* C *является серединой отрезка* AB, *а точка* D *— несобственная.*