

Механико-математический факультет

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, 1 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

**БИЛЕТЫ**

Москва  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Векторные пространства и множества</b>	<b>5</b>
1.1	Векторные пространства . . . . .	5
1.2	Линейная комбинация векторов . . . . .	6
1.3	Линейно зависимые и линейно независимые множества и системы векторов . .	6
1.4	Полные множества и системы векторов . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Базис и размерность векторного пространства</b>	<b>7</b>
2.1	Базис векторного пространства. Конечномерное векторное пространство. . . .	7
2.2	Лемма о количестве векторов в ЛНЗ системе (аналог ОЛЛЗ) . . . . .	7
2.3	Теорема о количестве векторов в базисе. Размерность векторного пространства.	8
<b>3</b>	<b>Координаты в базисе</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Аффинные пространства</b>	<b>9</b>
4.1	Аффинное пространство . . . . .	9
4.2	Радиус-векторы и репер . . . . .	9
4.3	Конечномерные аффинные пространства и их размерность . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Подпространства</b>	<b>10</b>
5.1	Векторное подпространство . . . . .	10
5.2	Аффинное подпространство . . . . .	10
5.3	Прямая в аффинном пространстве . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Скалярное произведение</b>	<b>11</b>
6.1	Скалярное произведение . . . . .	11
6.2	Евклидово векторное и точечно-евклидово аффинное пространство . . . . .	12
6.3	Длина вектора и расстояния между точками . . . . .	12
6.4	Выражение скалярного произведения через длины . . . . .	12
<b>7</b>	<b>Неравенство Коши-Буняковского</b>	<b>12</b>
7.1	Неравенство Коши-Буняковского . . . . .	12
7.2	Величина угла и ортогональные векторы . . . . .	13
<b>8</b>	<b>Прямоугольная система координат</b>	<b>13</b>
8.1	Ортонормированный базис и прямоугольная система координат . . . . .	13
8.2	Выражение скалярного произведения через координаты векторов . . . . .	13
8.3	Выражение для прямоугольной системы координат . . . . .	13
<b>9</b>	<b>Проектирование</b>	<b>14</b>
<b>10</b>	<b>Ортонормированный базис</b>	<b>14</b>
10.1	Линейная независимость ортогональных векторов . . . . .	14
10.2	Теорема о существовании ортонормированного базиса . . . . .	15
<b>11</b>	<b>Прямые и их уравнения</b>	<b>16</b>
11.1	Определения прямой и направляющего вектора . . . . .	16
11.2	Уравнения прямой . . . . .	16
11.3	Критерий уравнения прямой (нет в билете, важно) . . . . .	17

<b>12 Взаимное расположение прямых</b>	<b>17</b>
12.1 Случай общих уравнений . . . . .	17
12.2 Случай параметрических уравнений . . . . .	18
<b>13 Пучки прямых</b>	<b>18</b>
13.1 Определение пучка прямых . . . . .	18
13.2 Уравнение собственного пучка прямых . . . . .	18
13.3 Уравнение несобственного пучка прямых . . . . .	19
<b>14 Отрезки</b>	<b>20</b>
14.1 Отрезки на плоскости . . . . .	20
<b>15 Полуплоскости</b>	<b>20</b>
15.1 Выпуклые множества . . . . .	20
15.2 Полуплоскости как выпуклые множества . . . . .	20
<b>16 Углы между прямыми</b>	<b>21</b>
16.1 Определение угла . . . . .	21
16.2 Определение угла между двумя прямыми . . . . .	21
16.3 Угол между прямыми в прямоугольной системе координат . . . . .	22
16.4 Условие перпендикулярности. Нормаль . . . . .	22
<b>17 Расстояние от точки до прямой</b>	<b>23</b>
17.1 Определение расстояния между множествами точек . . . . .	23
17.2 Расстояние от точки до прямой . . . . .	23
<b>18 Преобразования координат векторов. Матрица перехода</b>	<b>24</b>
<b>19 Матрица Грама. Формула скалярного произведения.</b>	<b>24</b>
<b>20 Выражения матриц перехода</b>	<b>25</b>
<b>21 Критерий матрицы перехода</b>	<b>25</b>
<b>22 Преобразования координат точек</b>	<b>26</b>
<b>23 Ортогональные матрицы</b>	<b>26</b>
23.1 Определение. Критерии ортогональности . . . . .	26
23.2 Двумерный случай . . . . .	28
<b>24 Ориентация векторных пространств</b>	<b>28</b>
<b>25 Ориентация пар векторов. Углы с учётом ориентации</b>	<b>29</b>
25.1 Ориентация на плоскости . . . . .	29
25.2 Угол от вектора до вектора . . . . .	29
25.3 Угол от прямой до прямой . . . . .	29
25.4 Угол наклона . . . . .	30
<b>26 Площади</b>	<b>30</b>
26.1 Определение и следствия . . . . .	30
26.2 Площадь параллелограмма . . . . .	31
26.3 Ориентированная площадь . . . . .	32

<b>27 Плоскость в пространстве</b>	<b>32</b>
<b>28 Взаимное расположение плоскостей</b>	<b>33</b>
28.1 Взаимное расположение плоскостей . . . . .	33
<b>29 Пучки плоскостей</b>	<b>34</b>
29.1 Определения . . . . .	34
29.2 Собственные пучки . . . . .	35
29.3 Несобственные пучки . . . . .	35
<b>30 Полупространства</b>	<b>36</b>
<b>31 Прямая в пространстве</b>	<b>36</b>
<b>32 Взаимное расположение плоскости и прямой</b>	<b>37</b>
<b>33 Взаимное расположение двух прямых</b>	<b>38</b>
<b>34 Плоскость в точечно-евклидовом пр-ве.</b>	<b>38</b>
34.1 Нормаль к плоскости . . . . .	38
34.2 Расстояние от точки до плоскости . . . . .	39
34.3 Иные формулы расстояния (нет в б.) . . . . .	39
<b>35 Векторное, смешанное произведение. Объём</b>	<b>40</b>
35.1 Векторное произведение . . . . .	40
35.2 Объём и ориентированный объём . . . . .	41
35.3 Свойства смешанного произведения . . . . .	41
<b>36 Объёмы в ортонормированном базисе</b>	<b>42</b>
<b>37 Векторное произведение и расстояния в ортонормированном базисе</b>	<b>42</b>
37.1 Выражение векторного произведения . . . . .	42
37.2 Расстояния через векторное произведение . . . . .	43
<b>38 Линии второго порядка</b>	<b>43</b>
38.1 Определения . . . . .	43
38.2 Формы записи . . . . .	45
38.3 Связь уравнений в разных системах координат . . . . .	45
<b>39 Канонические уравнения линий второго порядка</b>	<b>46</b>
39.1 Собственные векторы и значения . . . . .	46
39.2 Переход к канонической системе координат . . . . .	47
39.3 Классификация линий второго порядка . . . . .	50
<b>40 Ортогональные инварианты</b>	<b>50</b>
40.1 Основные инварианты . . . . .	50
40.2 Классификация . . . . .	51
40.3 Семиинвариант (нет в б., но полезно) . . . . .	52
40.4 Полная классификация . . . . .	53

<b>41 Центр линии второго порядка</b>	<b>54</b>
41.1 Центр симметрии . . . . .	54
41.2 Уравнение центра . . . . .	54
41.3 Определение центра . . . . .	56
<b>42 Сопряжённые направления</b>	<b>57</b>
42.1 Определение . . . . .	57
42.2 Асимптотические направления . . . . .	58
42.3 Пересечения линии и прямой . . . . .	58
<b>43 Диаметры</b>	<b>59</b>
43.1 Определение . . . . .	59
43.2 Свойства . . . . .	59
43.3 Сопряжённые диаметры . . . . .	59

# Билет 1. Векторные пространства и множества

## 1.1 Векторные пространства

Геометрические векторы в математике являются **свободными векторами** - классами эквивалентности направленных отрезков по уже известному нам отношению эквивалентности векторов.

**Определение.** Векторным (линейным) пространством (над полем  $\mathbb{R}$ ) называется множество  $V$  с введенными на нем бинарными операциями "+" :  $V \times V \rightarrow V$  и "\*" :  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , отвечающие следующим свойствам (аксиомам):

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$$

1.  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$  (коммутативность сложения);
2.  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$  (ассоциативность сложения);
3.  $\exists \bar{0} \in V : \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$  (существует нейтральный элемент по сложению - нулевой вектор);
4.  $\exists (-\bar{a}) \in V : \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$  (существует противоположный элемент по сложению);
5.  $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$  (ассоциативность умножения на числа);
6.  $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$  (дистрибутивность по умножению);
7.  $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$  (дистрибутивность по сложению);
8.  $1 * \bar{a} = \bar{a}$ .

**Примеры.** Векторные пр-ва:

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ ;
- Функции;
- Многочлены;
- Многочлены степени  $\leq n$ .

**Замечание.** Св-ва векторных пространств:

1.  $\bar{0}$  единственный.

Пусть  $\bar{0}_1, \bar{0}_2$  - нулевые векторы.

Тогда  $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2$ , ч.т.д.

2.  $-\bar{a}$  единственный.

Пусть  $-\bar{a}_1, -\bar{a}_2$  - противоположные к  $\bar{a}$  векторы.

Тогда  $-\bar{a}_1 = -\bar{a}_1 + \bar{0} = -\bar{a}_1 + (\bar{a} + -\bar{a}_2) = (-\bar{a}_1 + \bar{a}) + (-\bar{a}_2) = \bar{0} + (-\bar{a}_2) = -\bar{a}_2$ , ч.т.д.

3.  $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$ .

$$\lambda * \bar{0} = \lambda * (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda * \bar{0} + \lambda * \bar{0}$$

Прибавив к обеим частям вектор, противоположный к  $\lambda * \bar{0}$ , получим  $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$ , ч.т.д.

4.  $-(\lambda \bar{a}) = (-\lambda) \bar{a} = \lambda(-\bar{a})$ .

Нетрудно видеть, что все три вектора противоположны  $\lambda \bar{a}$ , а далее из п.2.

5.  $-\bar{a} = -1 * \bar{a}$

Следует из п.4.

6.  $\lambda \bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow$  либо  $\lambda = 0$ , либо  $\bar{a} = \bar{0}$ .

Либо  $\lambda = 0$ , либо  $\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} * \lambda * \bar{a} = \frac{1}{\lambda} \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0}$ , ч.т.д.

## 1.2 Линейная комбинация векторов

**Определение.** Сумма вида  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$  называется линейной комбинацией векторов  $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ .

**Определение.** Если в линейной комбинации  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , то она называется тривиальной, а иначе - нетривиальной.

**Определение.** Если вектор  $\bar{x}$  равен линейной комбинации  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$ , то говорят, что он линейно выражается (раскладывается) через векторы  $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ . (Сама линейная комбинация  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$  называется выражением (разложением) вектора  $\bar{x}$  через  $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$ )

## 1.3 Линейно зависимые и линейно независимые множества и системы векторов

**Определение.** Упорядоченное множество векторов называется системой векторов. (В системе векторов элементы могут повторяться)

**Определение.** Множество векторов называется линейно зависимым, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов из этого множества. В противном случае оно называется линейно независимым.

**Пример.** Система из двух векторов  $\bar{a}, \bar{b}$  линейно зависима  $\Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}$ .

**Замечание.** Множество векторов линейно зависимо  $\Leftrightarrow$  один из векторов этого множества линейно выражается через некоторые другие векторы этого множества.

## 1.4 Полные множества и системы векторов

**Определение.** Множество (система) векторов из векторного пространства  $V$  называется полным (полной) в  $V$ , если любой вектор  $\bar{x} \in V$  линейно выражается через векторы этого множества.

**Замечание.**  $X \subset V$  полно в  $V \Rightarrow \forall Y : X \subset Y$  полно в  $V$ .

**Замечание.**  $X \subset V$  линейно независимо в  $V \Rightarrow \forall Y \subset X$  линейно независимо в  $V$ .

## Билет 2. Базис и размерность векторного пространства

### 2.1 Базис векторного пространства. Конечномерное векторное пространство.

**Определение.** Множество векторов  $E$  в векторном пространстве  $V$  называется базисом  $V$ , если  $E$  линейно независимо и полно в  $V$ .

**Определение.** Векторное пространство, в котором существует конечный (состоящий из конечного числа векторов) базис, называется конечномерным. В противном случае оно называется бесконечномерным.

### 2.2 Лемма о количестве векторов в ЛНЗ системе (аналог ОЛЛЗ)

**Лемма.** Если  $X$  - конечное полное множество из  $n$  векторов в векторном пространстве  $V$  и  $Y$  - линейно независимое множество векторов в  $V$ , то  $Y$  конечно и число векторов в  $Y \leq n$ .

*Доказательство.* (пер.) Произвольно занумеруем векторы в  $X : (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Будем по одному добавлять в эту систему векторы из  $Y$  и одновременно выкидывать векторы из  $X$  так, чтобы система оставалась полной.



Пусть за  $k$  шагов ( $0 \leq k \leq n$ ) мы добавили некоторые  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  и выкинули какие-то  $k$  векторов из  $X$  - осталась система  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-k}})$ . Возьмём  $\bar{y}_{k+1}$  из  $Y$  (если такого нет, то в  $Y \leq n$  векторов, что нам и нужно), и добавим его в систему. Так как до этого система оставалась полной,  $\bar{y}_{k+1}$  выражается через  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-k}})$ , причём какой-то  $\bar{x}_{i_j}$  входит в это разложение с коэффициентом, не равным нулю (иначе противоречие с линейной независимостью  $Y$  -  $\bar{y}_{k+1}$  выразился через  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$ ).

Тогда  $\bar{x}_{i_j}$  выражается через другие векторы системы и  $\bar{y}_{k+1}$  (в выражении  $\bar{y}_{k+1}$  перенесём всё, кроме  $\bar{x}_{i_j}$  в другую часть и разделим на коэффициент перед ним). А так как  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k+1}, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-k}})$  - полная, эта же система без  $\bar{x}_{i_j}$  очевидно, останется полной.

Пусть смогли проделать  $n$  таких шагов. Тогда имеем систему  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ . Если в  $Y$  есть ещё векторы, то они с одной стороны выражаются через векторы системы из её полноты, а с другой - не выражаются через них из линейной независимости  $Y$ . Противоречие, т.е. в  $Y$  не может оказаться больше  $n$  векторов, ч.т.д.  $\square$

## 2.3 Теорема о количестве векторов в базисе. Размерность векторного пространства.

**Теорема.** Если в векторном пространстве есть конечный базис, то все базисы в нём конечны и содержат одинаковое количество векторов.

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - конечный базис в  $V$ . Любой другой базис  $V$  линейно независим, т.е. по лемме содержит  $k \leq n$  векторов, а с другой стороны полон, т.е. первый базис по лемме содержит  $n \leq k$  векторов. Отсюда  $n = k$ , ч.т.д.  $\square$

**Определение.** Количество векторов в любом базисе векторного пространства  $V$  называется размерностью  $V$  и обозначается  $\dim V$ .

**Примеры.**  $\dim \bar{0} = 0$ ,  $\dim \pi (= \dim \mathbb{R}^2) = 2$ ,  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

## Билет 3. Координаты в базисе

**Теорема.** В конечномерном векторном пространстве выражение любого вектора через базис определяется однозначно.

*Доказательство.* Если  $\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n = \lambda'_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda'_n \bar{e}_n$ , то  $\bar{x} - \bar{x} = \bar{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1) \bar{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) \bar{e}_n$ . Если эти два разложения различны, то равная

нулю линейная комбинация базисных векторов нетривиальна, что противоречит линейной независимости базиса. То есть двух различных разложений быть не может, ч.т.д.  $\square$

**Определение.** Пусть  $V$  - конечномерное векторное пространство и  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - базис в нём. Коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  в выражении любого вектора  $x \in V$  через эти базисные векторы называются координатами вектора  $x$  в базисе  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ . ( $\lambda_k$  называется  $k$ -й координатой)

**Замечание.** Векторы в  $n$ -мерном векторном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной строкой из  $n$  чисел из  $\mathbb{R}$  (например, векторы ассоциированного с евклидовой плоскостью векторного пространства соответствуют парам чисел) Таким образом можно задать операции сложения и умножения на число векторов плоскости через операции над числами, проводимыми по координатам.

## Билет 4. Аффинные пространства

### 4.1 Аффинное пространство

Элементы плоскости (как множества) - точки, а не векторы, поэтому для работы непосредственно с плоскостью необходимо ввести данное определение.

**Определение.** Аффинное пространство - тройка  $(X, V, +)$  (обычно обозначается  $\mathbb{A}$ ), где  $X$  - множество (точек),  $V$  - векторное пространство, а "+" операция:  $X \times V \rightarrow X$ , для которых выполнены аксиомы:

1.  $\forall A \in X, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V : A + (\bar{a} + \bar{b}) = (A + \bar{a}) + \bar{b}$ ;
2.  $\forall A \in X : A + \bar{0} = A$ ;
3.  $\forall A, B \in X \exists! \bar{a} \in V : A + \bar{a} = B$ . Обозначается  $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$ .

### 4.2 Радиус-векторы и репер

Если зафиксировать какую-нибудь точку  $O \in X$ , возникает взаимно однозначное соответствие между точками  $A$  и их радиус-векторами  $\overrightarrow{OA}$ .

**Определение.** Репер (система координат) в аффинном пространстве  $(X, V, +)$  - пара  $(O, E)$ , где  $O \in X$  и  $E$  - базис в  $V$ . Точка  $O$  называется началом координат (отсчёта). Координаты точки  $A$  в  $(O, E)$  - координаты её радиус-вектора  $\overrightarrow{OA}$  в базисе  $E$ .

**Замечание.** Для аффинного пространства верно:

1. Если  $A = (x_1, \dots, x_n), \bar{a} = (y_1, \dots, y_n)$ , то  $A + \bar{a} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .
2. Если  $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$ , то  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ .

(Следует из сложения векторов)

## 4.3 Конечномерные аффинные пространства и их размерность

**Определение.** Если  $\mathbb{A} = (X, V, +)$  - аффинное пространство, то говорят, что  $V$  - векторное пространство, ассоциированное с  $\mathbb{A}$ .

**Определение.**  $\mathbb{A}$  называется конечномерным, если ассоциированное с ним  $V$  конечномерно. В этом случае  $\dim \mathbb{A}$  (размерность  $\mathbb{A}$ ) равна  $\dim V$ .

Теперь точки аффинного пространства аналогично векторам можно ассоциировать с наборами чисел. Однако для ассоциирования евклидовой плоскости и её аксиом с двумерным аффинным пространством, необходимы отвечающие аксиомам понятия прямой и расстояния.

## Билет 5. Подпространства

### 5.1 Векторное подпространство

**Определение.** Векторным подпространством векторного пространства  $V$  называется непустое множество  $V_1 \subset V$  такое, что  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_1 : \bar{x} + \bar{y} \in V_1, \lambda \bar{x} \in V_1 (\forall \lambda \in \mathbb{R})$ .

**Замечание.** Определение эквивалентно следующему: множество  $V_1 \subset V$  - векторное подпространство  $V$ , если  $V_1$  является векторным пространством относительно операций  $+$  и  $*$ , определённых для  $V$ . (Доказательство осуществляется путём прямой проверки аксиом векторного пространства для  $V_1$ )

### 5.2 Аффинное подпространство

Введём несколько определений аффинного подпространства и докажем их эквивалентность.

**Определение.** Аффинным подпространством аффинного пространства  $\mathbb{A} = (X, V, +)$  называется

1. его непустое подмножество вида  $A + V_1 = A + \bar{a} : \bar{a} \in V_1$ , где  $V_1$  - векторное подпространство  $V$  и  $A \in X$  - точка;
2. тройка  $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$ , где  $V_1$  - векторное подпространство  $V$  и операция  $+_1 = +$ , для которой  $\forall A, B \in X_1, \forall \bar{a} \in V_1 : A + \bar{a} \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1$ ;
3. тройка  $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$ , где  $V_1$  - векторное подпространство  $V$  и операция  $+_1 = +$ , которая сама является аффинным пространством.

**Утверждение.** Приведённые определения эквивалентны.

*Доказательство.* Докажем следующие следствия:

①  $\Rightarrow$  ② Пусть  $P = A + \bar{a}, Q = A + \bar{b}$ . Тогда  $\overrightarrow{PQ} = \bar{b} - \bar{a}$  (в силу единственности такого вектора), т.е.  $\overrightarrow{PQ} \in V_1$ . Второе необходимое свойство ② очевидно выполнено.

②  $\Rightarrow$  ① Пусть  $X_1, V_1$  удовлетворяют ②. Зафиксируем произвольную  $A \in X_1$ .  $\forall B \in X_1$  имеем  $B = A + \overrightarrow{AB}$ , причём  $A \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1 \Rightarrow B \in X_1$ .

Эквивалентность ②  $\Leftrightarrow$  ③ очевидна из определения аффинного пространства.  $\square$

## 5.3 Прямая в аффинном пространстве

**Определение.** Прямая в аффинном пространстве - его одномерное аффинное подпространство.

Плоскость (двумерная) в аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

**Определение.** Единственный вектор в любом базисе векторного пространства, ассоциированного с одномерным аффинным пространством, называется направляющим вектором этого аффинного пространства.

## Билет 6. Скалярное произведение

### 6.1 Скалярное произведение

**Определение.** Пусть  $V$  - векторное пространство. Скалярным произведением в  $V$  называется функция  $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

1.  $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0 \forall \bar{x} \in V$ , причём  $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$  (положительная определённость);
2.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x}) \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$  (коммутативность);

3.  $(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{z}) = \alpha(\bar{x}, \bar{z}) + \beta(\bar{y}, \bar{z}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (линейность по первому аргументу)

Из коммутативности выполнена и линейность по второму аргументу, т.е. скалярное произведение - билинейная функция.

## 6.2 Евклидово векторное и точечно-евклидово аффинное пространство

**Определение.** Конечномерное аффинное (векторное) пространство вместе со скалярным произведением называется точечно-евклидовым (евклидовым) пространством. Двумерное точечно-евклидово пространство называется евклидовой плоскостью.

## 6.3 Длина вектора и расстояния между точками

**Определение.** Длиной вектора называется величина  $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ .

**Определение.** Расстоянием (евклидовым) между точками  $A, B \in \mathbb{A}$  называется длина вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Будем обозначать  $d(A, B)$  как  $|\overrightarrow{AB}|$ .

## 6.4 Выражение скалярного произведения через длины

**Замечание.** Зная длины всех векторов, скалярное произведение можно восстановить по формуле  $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(|\bar{x} + \bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2)$ . Это несложно проверить:  $\frac{1}{2}(|\bar{x} + \bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2) = \frac{1}{2}((\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) - (\bar{x}, \bar{x}) - (\bar{y}, \bar{y})) = \frac{1}{2}(2(\bar{x}, \bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y})$ .

# Билет 7. Неравенство Коши-Буняковского

## 7.1 Неравенство Коши-Буняковского

**Теорема** (Неравенство Коши-Буняковского).  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V \quad (\bar{a}, \bar{b}) \leq \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})}$ , причём равенство достигается только при  $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим выражение  $(\bar{a} + t\bar{b}, \bar{a} + t\bar{b})$ . Оно равно нулю  $\Leftrightarrow \bar{a} = -t\bar{b}$ , т.е. может быть равно нулю не более чем при одном  $t$ . С другой стороны  $(\bar{a} + t\bar{b}, \bar{a} + t\bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + 2(\bar{a}, \bar{b})t + (\bar{b}, \bar{b})t^2$  - квадратный трёхчлен относительно  $t$ . Его дискриминант равен  $4(\bar{a}, \bar{b})^2 - 4(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})$ , а из первого рассуждения знаем, что дискриминант  $\leq 0$ , причём равенство достигается только в случае коллинеарности  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Отсюда  $(\bar{a}, \bar{b}) \leq \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})}$ , ч.т.д.  $\square$

## 7.2 Величина угла и ортогональные векторы

**Определение.** Величиной угла между ненулевыми векторами  $\bar{a}, \bar{b}$  называется число  $\arccos \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$  (из н. Коши-Буняковского  $|\frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}| \leq 1$ ).

**Определение.** Векторы  $\bar{a}, \bar{b}$  называются ортогональными (перпендикулярными), если  $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ .

## Билет 8. Прямоугольная система координат

### 8.1 Ортонормированный базис и прямоугольная система координат

**Определение.** Базис векторного пространства  $V$  со скалярным произведением называется ортонормированным, если все его векторы попарно ортогональны и имеют длину 1.

**Определение.** Система координат в точечно-евклидовом пространстве называется прямоугольной, если её базис ортонормированный.

### 8.2 Выражение скалярного произведения через координаты векторов

**Утверждение.** В точечно-евклидовом пространстве верно следующее выражение скалярного произведения через координаты векторов: если в некотором

базисе  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$   $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ , то  $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n y_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ .

*Доказательство.*  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n, y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n) = \sum_{i=1}^n (x_i \bar{e}_i, y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n) = \sum_{i=1}^n x_i (\bar{e}_i, y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n y_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$  □

### 8.3 Выражение для прямоугольной системы координат

**Замечание.** В случае, когда базис ортонормированный, имеем  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

(здесь и далее используется символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ ), т.е.  $(\bar{x}, \bar{y}) =$

$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . То есть в прямоугольной системе координат длина вектора

вычисляется по формуле  $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , а расстояние между точками  $P = (x_1, \dots, x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$  выражается как

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

## Билет 9. Проектирование

**Определение.** Пусть задано два векторных подпространства  $V_1, V_2$  векторного пространства  $V$  такие, что  $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$  и  $V_1 + V_2 = V$  (обозначается  $V = V_1 \oplus V_2$ ). Тогда сумма  $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ , где  $\bar{x} \in V, \bar{x}_1 \in V_1, \bar{x}_2 \in V_2$ , определена единственно. (Следует, например, из того, что в любом базисе  $V$  каждый его вектор лежит либо в  $V_1$ , либо в  $V_2$ , тогда разложение в эту сумму соответствует единственному разложению по базису). Проекцией вектора  $\bar{x} \in V$  на  $V_1$  параллельно  $V_2$  называется слагаемое  $\bar{x}_1$  этой суммы.

**Определение.** Пусть задано два аффинных подпространства  $\mathbb{A}_1 = (X_1, V_1, +), \mathbb{A}_2 = (X_2, V_2, +)$  аффинного пространства  $\mathbb{A} = (X, V, +)$  такие, что  $V = V_1 \oplus V_2$ . Проекция точки  $P \in \mathbb{A}$  на  $\mathbb{A}_1$  параллельно  $\mathbb{A}_2$  - точка  $P_1 = A_1 + \bar{v}$ , где  $A_1$  - произвольная точка из  $X_1$ , а  $\bar{v}$  - проекция  $\overrightarrow{A_1 P}$  на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . (Очевидно, что от выбора  $A_1$  расположение проекции не зависит)

**Пример.** Рассмотрим координаты точки евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат.

Найдём проекцию точки  $A = (x, y)$  на прямую  $Oy$  параллельно прямой  $Ox$ . По определению это точка (назовём её  $A_y$ ), равная  $O + \bar{v}$ , где  $\bar{v}$  - проекция  $\overrightarrow{OP}$  на векторное пространство прямой  $Oy$  параллельно  $Ox$ .  $\overrightarrow{OP} = \{x, y\} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ . Отсюда  $\bar{v} = y\bar{e}_2 = \{0, y\}$ , то есть  $A_y = (0, y)$ . Аналогично  $A_x = (x, 0)$ .

## Билет 10. Ортонормированный базис

Определение смотри в пункте 8.1 Пусть  $\mathbb{A}^n = (X, V^n, +)$  -  $n$ -мерное точечно-евклидово пространство.

### 10.1 Линейная независимость ортогональных векторов

**Утверждение.** В  $V^n$  любая линейно независимая система из  $n$  векторов образует базис.

*Доказательство.* Предположим, что в  $V^n$  существует неполная линейно независимая система из  $n$  векторов. Т.к. система не полная, существует вектор из

$V^n$ , не выражающийся через векторы этой системы, т.е. этот вектор можно добавить в систему без потери линейной независимости. Но по лемме-аналогу ОЛЛЗ линейно независимая система в  $V^n$  не может иметь  $> n$  векторов. Противоречие, т.е. любая линейно независимая система из  $n$  векторов является полной, а значит и базисом, ч.т.д.  $\square$

**Утверждение.** Если  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - попарно ортогональные ненулевые векторы в евклидовом пространстве, то  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  линейно независимы.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть один из векторов (без ограничения общности  $\bar{e}_n$ ) линейно выражается через остальные:  $\bar{e}_n = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \bar{e}_{n-1}$ . Тогда запишем квадрат его длины:  $|\bar{e}_n|^2 = (\bar{e}_n, \bar{e}_n) = (\bar{e}_n, \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \bar{e}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0$  (т.к.  $\bar{e}_n$  ортогонален всем остальным векторам). Отсюда  $|\bar{e}_n| = 0$ , и притом  $\bar{e}_n$  нулевой. Противоречие, т.е. никакой вектор системы не выражается через остальные, а значит система линейно независима. ч.т.д.  $\square$

## 10.2 Теорема о существовании ортонормированного базиса

**Теорема.** В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

*Доказательство.* (пер.) Индукция по  $n$  - размерности пространства:

База:  $n = 1$  - очевидно, что существует вектор длины 1, который составляет ортонормированный базис одномерного пространства;

Шаг: Пусть в любом  $n$ -мерном пространстве существует ортонормированный базис. Рассмотрим пространство  $V$  размерности  $n + 1$  и выберем базис какого-то  $n$ -мерного подпространства  $W$  (пусть  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ ). Найдём вектор, ортогональный всем выбранным векторам. Так как базис  $W$  не полон в  $V$ , к нему можно добавить ещё один вектор  $x \in V$  без потери линейной независимости  $\Rightarrow (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, \bar{x})$  - базис в  $V$  (ЛНЗ система из  $n + 1$  векторов).

Теперь необходимо представить  $\bar{x}$  как следующую сумму:  $\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n + \bar{e}_{n+1}$ , где  $\bar{e}_{n+1}$  ортогонален  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ . Тогда  $\bar{e}_{n+1} = \bar{x} - \lambda_1 \bar{e}_1 - \dots - \lambda_n \bar{e}_n$ . Рассмотрим  $(\bar{e}_{n+1}, \bar{e}_k) = (\bar{x} - \lambda_1 \bar{e}_1 - \dots - \lambda_n \bar{e}_n, \bar{e}_k) = (\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_k) - \dots - \lambda_n (\bar{e}_n, \bar{e}_k)$ . Так как  $\bar{e}_k$  ортогонально всем этим векторам, кроме  $\bar{e}_k$  и  $\bar{x}$ , это выражение равно  $(\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_k (\bar{e}_k, \bar{e}_k)$ . Отсюда при  $\lambda_k = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_k)}{(\bar{e}_k, \bar{e}_k)}$  векторы  $\bar{e}_{n+1}$  и  $\bar{e}_k$  ортогональны (зависит только от  $\lambda_k$ ). Составив таким образом все  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , получим выражение



вектора  $\bar{e}_{n+1}$ , ортогонального всем векторам базиса  $W$ . Таким образом, векторы полученной системы  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+1}$  попарно ортогональны (по предположению индукции)  $\Rightarrow$  линейно независимы  $\Rightarrow$  образуют базис в  $V$ . Разделив  $\bar{e}_{n+1}$  на его длину, получим, что все векторы базиса попарно ортогональны и имеют длину 1  $\Rightarrow V$  имеет ортонормированный базис, ч.т.д.  $\square$

**Следствие.** Любую систему ортогональных векторов длины 1 в векторном пространстве можно дополнить до ортонормированного базиса.

## Билет 11. Прямые и их уравнения

### 11.1 Определения прямой и направляющего вектора

Смотри пункт 5.3

### 11.2 Уравнения прямой

**Вывод формул (уравнения прямой).** Пусть  $l$  - прямая на плоскости:  $l = \{X : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\bar{v}\}$ , где  $M$  - точка прямой,  $\bar{v}$  - её направляющий вектор. Если  $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , то из совпадения координат совпадающих векторов  $\overrightarrow{OX}$  и  $(\overrightarrow{OM} + t\bar{v})$  верно следующее: (**параметрические уравнения прямой**)

$$X \in l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Выразим  $t$  из первого уравнения и подставим во второе уравнение - получим **каноническое уравнение прямой**:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

(Заметим, что данное выражение не определено при нулевых  $a$  или  $b$ , но очевидно, что они не равны нулю одновременно, а запись, где одна из дробей имеет знаменатель 0, иногда используется, поэтому здесь и далее случай равенства нулю знаменателя может не рассматриваться как отдельный и будет означать, что числитель должен равняться 0)

Если известно, что прямой принадлежат  $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $N = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ , то  $\overrightarrow{MN} =$

$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$  - направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

(уравнение прямой по двум точкам).

Домножим каноническое уравнение прямой на знаменатели:  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \Rightarrow bx - bx_0 = ay - ay_0 \Rightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$ . Такое уравнение обычно называют **общим уравнением прямой** и записывают как

$$Ax + By + C = 0$$

**Замечание.** Для прямых в пространстве подобным образом выводятся параметрические и каноническое уравнения.

**Замечание.** Заметим также, что из итоговой формулы вывода общего уравнения ( $bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$ ) следует, что для прямой  $Ax + By + C = 0$  вектор  $(B, -A)$  (а соответственно и  $(-B, A)$ ) является направляющим.

### 11.3 Критерий уравнения прямой (нет в билете, важно)

**Утверждение.**  $Ax + By + C = 0$  является уравнением прямой  $\Leftrightarrow A$  и  $B$  не равны нулю одновременно.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Если  $Ax + By + C = 0$ , то её направляющий вектор ненулевой, а значит вектор  $(-B, A)$  ненулевой, то есть одна из его координат  $\neq 0$ .

$\Leftarrow$  Пусть без ограничения общности  $A \neq 0$ . Тогда этому уравнению удовлетворяет точка  $(x_0, y_0) = (-\frac{C}{A}, 0)$ , а значит (нетрудно проверить) все удовлетворяющие ему точки имеют вид  $(x_0 + Bt, y_0 - At)$ , что соответствует прямой с такими параметрическими уравнениями.  $\square$

## Билет 12. Взаимное расположение прямых

### 12.1 Случай общих уравнений

**Теорема.** Прямые на плоскости параллельны (или совпадают)  $\Leftrightarrow$  их направляющие векторы пропорциональны.

*Доказательство.* Пусть  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ;  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  - данные прямые. Рассмотрим систему уравнений, которой удовлетворяют координаты точек, принадлежащих обоим прямым: 
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

Из курса алгебры (формула Крамера) известно, что система не является определённой  $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 0$ . Таким образом, прямые параллельны или совпадают  $\Leftrightarrow$  имеют 0 или бесконечно много общих точек  $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$  пропорционален  $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , ч.т.д.  $\square$

**Замечание.** Из этого также видно, что прямые совпадают  $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

## 12.2 Случай параметрических уравнений

**Следствие.** Прямые  $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \end{cases}$ ;  $l_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \end{cases}$  пересекаются

$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ . Условие совпадения прямых также можно записать через параметрические уравнения (вектор  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \lambda(a, b)$ ).

Из этого также следует, что через две различные точки проходит ровно одна прямая (все такие прямые совпадают).

## Билет 13. Пучки прямых

### 13.1 Определение пучка прямых

**Определение.** Собственным пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через данную точку, называемую центром пучка.

Несобственным пучком прямых называется множество всех прямых, параллельных данной прямой.

### 13.2 Уравнение собственного пучка прямых

**Теорема.** Пусть прямые  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая  $l$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow l$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Пусть  $l$  задаётся уравнением (\*). Тогда, подставив в уравнение  $l$  центр пучка  $(x_0, y_0)$ , получим  $\lambda(0) + \mu(0) = 0$  (т.к. центр удовлетворяет уравнениям  $l_1, l_2$ ).

$\Rightarrow$  Пусть  $(x_0, y_0) \in l$ . Возьмём произвольную точку  $(x_1, y_1) \in l, (x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$ . Рассмотрим прямую вида (\*) с  $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)$ ,  $\mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) : -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ . Заметим, что это уравнение действительно задаёт прямую: в противном случае необходимы условия  $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = 0$ , но тогда  $(A_1, B_1)$  и  $(A_2, B_2)$  пропорциональны, а исходные прямые непараллельны. Такой прямой, очевидно, принадлежат точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ . Так как через две различные точки проходит ровно одна прямая, любая прямая из собственного пучка имеет вид (\*), ч.т.д.  $\square$

### 13.3 Уравнение несобственного пучка прямых

**Теорема.** Пусть прямые  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая  $l$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow l$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Так как  $l_1 \parallel l_2$ ,  $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ . Тогда если  $l$  имеет вид (\*), то  $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{B_1} \Rightarrow l \parallel l_1$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $l$  принадлежит пучку. Так как направляющие векторы  $l, l_1$  и  $l_2$  пропорциональны, можем домножить уравнения на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть  $l_1 : Ax + By + C_1 = 0$ ;  $l_2 : Ax + By + C_2 = 0$ ;  $l : Ax + By + C_3 = 0$ .

Тогда возьмём  $\lambda, \mu$  из следующей системы (получена из равенства коэффициентов  $\lambda l_1 + \mu l_2$  и  $l$ ):

$$\begin{cases} C_1\lambda + C_2\mu = C_3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{C_3 - C_2}{C_1 - C_2} \\ \mu = \frac{C_1 - C_3}{C_1 - C_2} \end{cases} \quad (C_1 \neq C_2, \text{ иначе } l_1 \text{ и } l_2 \text{ совпадают}).$$

Очевидно, что для таких  $\lambda, \mu$  уравнение  $l$  имеет вид (\*) (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д.  $\square$

## Билет 14. Отрезки

### 14.1 Отрезки на плоскости

**Определение.** Пусть  $l$  - прямая,  $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in l$  и  $X_1 \neq X_2$ . Отрезком с концами  $X_1, X_2$  на плоскости называется множество всех точек, лежащих между  $X_1$  и  $X_2$  (на прямой  $l$ ). Обозначается  $[X_1, X_2]$ .

**Вывод формулы** (Уравнение отрезка). Пусть  $X \in [X_1, X_2]$ . Тогда знаем, что

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (X \in l) \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$t \overrightarrow{X_1 X_2} = \overrightarrow{X_1 X} \Rightarrow \overrightarrow{X X_2} = (1 - t) \overrightarrow{X_1 X_2}. \text{ Отсюда видно, что } |\overrightarrow{X_1 X}| \text{ и } |\overrightarrow{X X_2}| < |\overrightarrow{X_1 X_2}| \Leftrightarrow t \in [0, 1]. \text{ Отсюда}$$

$$X \in [X_1, X_2] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

**Определение.** Отрезком в произвольном аффинном пространстве называется множество точек  $[X_1, X_2] = \{X_1 + t \overrightarrow{X_1 X_2}, t \in [0, 1]\}$

## Билет 15. Полуплоскости

### 15.1 Выпуклые множества

**Определение.** Множество  $X$  в произвольном аффинном пространстве называется выпуклым, если  $\forall X_1, X_2 \in X \quad [X_1, X_2] \subset X$ .

### 15.2 Полуплоскости как выпуклые множества

**Определение.** Пусть в аффинной системе координат  $l : Ax + By + C = 0$ . Множества  $\Pi_0^+ = \{X(x, y) : Ax + By + C \geq 0\}$  и  $\Pi_0^- = \{X(x, y) : Ax + By + C \leq 0\}$  называются замкнутыми полуплоскостями, а множества  $\Pi^+ = \{X(x, y) : Ax + By + C > 0\}$  и  $\Pi^- = \{X(x, y) : Ax + By + C < 0\}$  - открытыми полуплоскостями.

**Теорема.** Для любой прямой  $l : Ax + By + C = 0$  множества  $\Pi_0^+, \Pi_0^-, \Pi^+, \Pi^-$  выпуклы.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\Pi_0^+$  (остальные аналогично).

Пусть  $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in \Pi_0^+$ . Знаем, что любая точка  $X \in [X_1, X_2]$  имеет координаты  $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2), 0 \leq t \leq 1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C \geq 0 \\ Ax_2 + By_2 + C \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tC \geq 0 \\ (1-t)Ax_2 + (1-t)By_2 + (1-t)C \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C \geq 0 &\Rightarrow X \in \Pi_0^+, \text{ ч.т.д.} \quad \square \end{aligned}$$

## Билет 16. Углы между прямыми

### 16.1 Определение угла

**Определение.** Пусть  $l$  - прямая,  $O \in l, \bar{v}$  - любой направляющий вектор  $l$ . Множества  $l^+ = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \geq 0\}$  и  $l^- = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \leq 0\}$  называются лучами, на которые  $O$  делит  $l$ .

**Замечание.** Если даны два луча с общим началом (обозначим их  $l_1^+, l_2^+$ ), то они являются подмножествами однозначно определённых прямых  $l_1, l_2$ , для которых можно выбрать направляющие векторы так, чтобы лучи соответствовали формуле из определения (назовём эти векторы  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ).

**Определение.** Углом на плоскости называется объединение двух лучей с общим началом. Величиной угла  $l_1^+ \cup l_2^+$  называется величина угла между векторами  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ , определёнными как в замечании. Говорят, что один угол меньше другого, если величина первого угла меньше величины второго.

**Определение.** Угол называется прямым, если его величина равна  $\frac{\pi}{2}$  ( $\Leftrightarrow$  направляющие векторы лучей ортогональны). Угол называется развёрнутым, если его величина равна  $\pi$  ( $\Leftrightarrow$  образующие угол лучи дополняют друг друга до прямой).

**Замечание.** В дальнейшем будем иногда называть углом величину угла. Также аналогичным образом можно говорить о величине угла между вектором и прямой

### 16.2 Определение угла между двумя прямыми

**Определение.** Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами с началом в их точке пересечения этих прямых и лежащих на этих прямых, если прямые пересекаются. Если прямые параллельны или совпадают, то угол между ними равен нулю. Обозначается  $\angle(l_1 l_2)$ .

**Определение.** Прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $\frac{\pi}{2}$ .

**Определение.** Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую, называется прямая, проходящая через точку и перпендикулярная прямой, либо отрезок этой прямой с концами в данной точке и точке пересечения прямой с данной.

### 16.3 Угол между прямыми в прямоугольной системе координат

**Вывод формулы** (Угол между прямыми в прямоугольной с.к.). Пусть  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  - прямые в прямоугольной системе координат. Тогда их направляющие векторы равны  $\begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \bar{v}_1, \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \bar{v}_2$ . Отсюда (выражение скалярного произведения):  $\cos \angle(l_1, l_2) = |\cos \angle(\bar{v}_1, \bar{v}_2)| \Rightarrow$

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

(модуль в косинусе, а соответственно и в числителе формулы, позволяет сразу взять меньший угол).

### 16.4 Условие перпендикулярности. Нормаль

**Следствие.** Прямые  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  перпендикулярны  $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .

**Определение.** Нетрудно проверить, что в прямоугольной системе координат вектор  $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  перпендикулярен вектору  $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ , а значит и прямой  $l : Ax + By + C = 0$ . Вектор  $\bar{n}$  называется нормалью (нормальным вектором) прямой  $l$  (в прямоугольной с.к.)

**Замечание.** Любой вектор, коллинеарный нормали, также является нормалью, так как уравнения  $Ax + By + C = 0$  и  $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$  задают одну и ту же прямую.

## Билет 17. Расстояние от точки до прямой

### 17.1 Определение расстояния между множествами точек

**Определение.** Пусть  $A, B$  - множества в точечно-евклидовом пространстве. Расстоянием от  $A$  до  $B$  называется число  $\inf\{|XY|, X \in A, Y \in B\}$ . Расстояние от точки до прямой определяется аналогично, когда  $A = \{X\}$  (его часто обозначают  $d(X, l)$ ).

**Замечание.** У множества из определения существует нижняя грань, т.к. оно является ограниченным снизу подмножеством действительных чисел (принцип полноты Вейерштрасса из курса математического анализа).

### 17.2 Расстояние от точки до прямой

**Теорема.** Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

*Доказательство.* Пусть заданы  $l : Ax + By + C = 0$  и  $X_0$  - произвольные прямая и точка. Выберем на  $l$  произвольную точку  $X_1$ . Проведём через  $X_0$  прямую  $l'$  с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  - она будет перпендикулярна  $l$ , а значит имеет с ней единственную общую точку - назовём её  $X_2$ . Имеем:  $|\overrightarrow{X_1 X_0}|^2 = (\overrightarrow{X_1 X_0}, \overrightarrow{X_1 X_0}) = (\overrightarrow{X_1 X_2} + \overrightarrow{X_2 X_0}, \overrightarrow{X_1 X_2} + \overrightarrow{X_2 X_0}) = |\overrightarrow{X_1 X_2}|^2 + |\overrightarrow{X_2 X_0}|^2 \geq |\overrightarrow{X_2 X_0}|^2$ . Отсюда  $|\overrightarrow{X_2 X_0}|^2$  - минимум всех расстояний между  $X$  и точкой прямой, т.е. он достигается в точке пересечения  $l$  и  $l'$ , ч.т.д.  $\square$

**Замечание.** Расстояние между двумя прямыми на плоскости  $\neq 0 \Leftrightarrow$  они параллельны и не совпадают (у них нет общих точек). В этом случае расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой.

**Вывод формулы** (Расстояние от точки до прямой в прямоугольной с.к.). Пусть  $X_0 = (x_0, y_0)$ ,  $l : Ax + By + C = 0$ . Посчитаем  $d(X_0, l)$ . Проведём через  $X_0$  перпендикуляр  $l'$  к прямой  $l$ . Направляющий вектор  $l'$  -  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ , то есть его пара-

метрические уравнения -  $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$ . Найдём  $t_1$ , удовлетворяющее точке

пересечения: имеем  $A(x_0 + At_1) + B(y_0 + Bt_1) + C = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$ .

Отсюда точка пересечения  $X_1$  имеет координаты  $(x_0 + At_1, y_0 + Bt_1)$ . Тогда



$$\overrightarrow{X_0X_1} = \begin{pmatrix} At_1 \\ Bt_1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{X_0X_1}|^2 = A^2t_1^2 + B^2t_1^2 = (A^2 + B^2)t_1^2 = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}, \text{ а значит}$$

$$d(X, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## Билет 18. Преобразования координат векторов. Матрица перехода

**Вывод формулы** (Матрица перехода). Пусть  $E = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  и  $E' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$  - два базиса в одном и том же евклидовом пространстве  $V$ . Будем называть  $E$  старым базисом, а  $E'$  - новым. Получим формулу для координат в старом базисе вектора  $\bar{x} \in V$ , заданного в новом базисе координатами  $(x'_1, \dots, x'_n)$ .

Итак, пусть в старом базисе  $\bar{x}$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ . Установим связь между базисами, выразив векторы нового базиса через старый: пусть

$$\bar{e}'_i = c_{1i}\bar{e}_1 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n, \text{ т.е. } \bar{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}. \text{ Подставляя эти выражения, получим:}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x'_1\bar{e}'_1 + \dots + x'_n\bar{e}'_n = x'_1(c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n) + \dots + x'_n(c_{1n}\bar{e}_1 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n) = \\ &= (c_{11}x'_1 + \dots + c_{1n}x'_n)\bar{e}_1 + \dots + (c_{n1}x'_1 + \dots + c_{nn}x'_n)\bar{e}_n \Rightarrow (\text{из равенства координат}) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

**Определение.** Такая матрица  $C$  называется матрицей перехода от базиса  $E$  к базису  $E'$ .

**Замечание.** Столбцы матрицы  $C$  являются координатами базисных векторов  $E'$  в базисе  $E \Rightarrow$  столбцы  $C$  линейно независимы  $\Rightarrow C$  невырожденная (из курса алгебры).

## Билет 19. Матрица Грама. Формула скалярного произведения.

**Вывод формулы.** Рассмотрим также скалярное произведение векторов в слу-

чае, когда базис  $E$  ортонормированный. Если  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  (в ба-

зисе  $E$ ), имеем:  $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x'_1 \dots x'_n) C^T C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$  (так

как  $(x_1 \dots x_n) = \left( C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right)^T$ ). Нетрудно видеть, что произведение матриц

$C^T C$  имеет вид  $G = \begin{pmatrix} (\bar{e}'_1, \bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_1, \bar{e}'_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\bar{e}'_n, \bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_n, \bar{e}'_n) \end{pmatrix}$  (строки  $C^T$  и столбцы  $C$  - координаты векторов базиса  $E'$  в базисе  $E$ )

натy векторов базиса  $E'$  в базисе  $E$ )

Такая матрица называется матрицей Грама (матрицей скалярных произведений) для базиса  $E'$ . Так как матрица  $G$  не зависит от базиса  $E$ , получаем формулу для скалярного произведения в произвольном базисе:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (x'_1 \dots x'_n) G \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

## Билет 20. Выражения матриц перехода

**Следствие (1).** Если  $C$  и  $C_1$  - матрицы перехода от базиса  $E$  к  $E'$  и от  $E'$  к  $E''$  соответственно, то матрица перехода от базиса  $E$  к  $E''$  равна  $CC_1$

**Следствие (2).** Если  $C$  - матрица перехода от базиса  $E$  к  $E'$ , то матрица перехода от базиса  $E'$  к  $E$  равна  $C^{-1}$ .

## Билет 21. Критерий матрицы перехода

**Замечание.** Пусть  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - базис векторного пространства  $V$ . Тогда векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  линейно независимы  $\Leftrightarrow$  столбцы их координат линейно независимы. Это очевидно следует из представления линейной комбинации  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n = 0$  через координаты.

**Теорема.** Для произвольного данного базиса матрица  $C$  является матрицей перехода к некоторому другому базису  $\Leftrightarrow \det C \neq 0$ .

*Доказательство.* Следует из утверждения из курса алгебры о том, что матрица невырожденна  $\Leftrightarrow$  её столбцы линейно независимы ( $\Leftrightarrow$  векторы-столбцы образуют базис).  $\square$

## Билет 22. Преобразования координат точек

**Вывод формулы** (Координаты точки при перемене с.к.). Пусть заданы два репера  $O\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$  и  $O'\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n$ . Для этого необходимо задать новый репер через

старый: пусть  $C$  - матрица перехода от  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  к  $\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n$ , а вектор  $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ .

Пусть  $X$  - произвольная точка с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  в старой системе координат и  $(x'_1, \dots, x'_n)$  в новой. Тогда  $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Также  $\overrightarrow{O'X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  в

новой с.к.  $\Rightarrow C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  в старой. Осталось заметить, что  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$ , а отсюда (через старую с.к.)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Выразим новые координаты, умножив слева на  $C^{-1}$ :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = -C^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(отметим также, что  $-C^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$  - новые координаты вектора  $O'O$ )

## Билет 23. Ортогональные матрицы

### 23.1 Определение. Критерии ортогональности

**Определение.** Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется ортогональной.

**Теорема.** Для  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$  следующие утверждения равносильны:

1.  $C$  - ортогональная;
2.  $\sum_{k=1}^n c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}$  ("скалярное произведение" столбцов равно  $\delta_{ij}$ );
3.  $\sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}$  ("скалярное произведение" строк равно  $\delta_{ij}$ );
4.  $CC^T = E$ ;
5.  $C^TC = E$ ;
6.  $C^T = C^{-1}$ ;

*Доказательство.* (в конспекте указан "прямой подсчёт")

Для начала заметим равносильность утверждений ④, ⑤, ⑥: ④  $\Leftrightarrow$  ⑤ (получаются друг из друга транспонированием обеих частей равенства), а ⑥ равносильно им по определению обратной матрицы.

①  $\Rightarrow$  ②: Столбцы матрицы  $C$  - координаты векторов ортонормированного базиса  $E$  в другом ортонормированном базисе  $E'$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$ : с одной стороны оно равно  $\sum_{k=1}^n c_{ki}c_{kj}$  (так как базис  $E$  ортонормирован, можем применять формулу с матрицей Грама, причём  $G = E$  из ортонормированности  $E_1$ ), а с другой стороны -  $\delta_{ij}$  (из ортонормированности  $E_1$ ).

①  $\Leftarrow$  ②: Из ② знаем, что векторы с координатами в столбцах попарно ортогональны и имеют длину 1 в базисе, в котором записаны эти координаты. Значит, применив такое преобразование к векторам ортонормированного базиса, получим также попарно ортогональные векторы длины 1, т.е.  $C$  - ортогональная.

②  $\Leftrightarrow$  ⑤: Оба условия равносильны тому, что элемент  $C^TC$  на позиции  $ij$  равен  $\delta_{ij}$ .

Аналогично ③  $\Leftrightarrow$  ④.

Итого ①  $\Leftrightarrow$  ②  $\Leftrightarrow$  ⑤  $\Leftrightarrow$  ⑥  $\Leftrightarrow$  ④  $\Leftrightarrow$  ③. □

**Следствие.** Для ортогональной  $C$  :  $|C^T| = |C|$ ,  $|C^TC| = |E| = 1 \Rightarrow |C| = \pm 1$

**Следствие.** (Из определения ортогональной матрицы)

Произведение ортогональных матриц - ортогональная матрица.

Матрица, обратная ортогональной, ортогональна.

## 23.2 Двумерный случай

**Вывод формулы.** (Двумерный случай ортогональной матрицы)

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ортогональна} \Rightarrow a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \varphi : a = \cos \varphi, c = \sin \varphi.$$

Из теоремы  $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b = \pm \sin \varphi, d = \pm \cos \varphi$ .

Из ортогональности столбцов следует, что  $ab + cd = 0$ , поэтому остаются следующие случаи:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

т.е. для любой ортогональной  $C$  найдётся  $\varphi$  такой, что  $C$  имеет один из видов выше. Несложно также убедиться, что любая матрица такого вида ортогональна: первая производит поворот на угол  $\varphi$ , а вторая - поворот с отражением.

## Билет 24. Ориентация векторных пространств

**Определение.** Два базиса в конечномерном векторном пространстве называются одинаково ориентированными (одноимёнными), если матрица перехода от одного базиса к другому имеет положительный определитель. В противном случае базисы называются противоположно ориентированными (разноимёнными).

**Теорема.** Отношение одноимённости является отношением эквивалентности на множестве базисов.

*Доказательство.* По определению отношения эквивалентности:

- рефлексивность: матрица перехода от базиса в себя равна  $E$ ,  $|E| = 1$ ;
- симметричность:  $C : E \rightarrow E' \Rightarrow C^{-1} : E' \rightarrow E$ , причём  $|CC^{-1}| = 1$ , т.е.  $|C|$  и  $|C^{-1}|$  одного знака;
- транзитивность:  $C : E \rightarrow E', C' : E' \rightarrow E'', C'' : E \rightarrow E'' \Rightarrow C'' = CC'$ , т.е. из одноимённостей  $E$  с  $E'$  и  $E'$  с  $E''$  следует одноимённость  $E$  с  $E''$ .

□

**Определение.** Ориентацией векторного пространства, а также любого аффинного пространства, с которым оно ассоциировано, называется выбор любого из двух классов эквивалентности по отношению одноимённости и объявления базисов в нём положительными (а остальных - отрицательными).

(Достаточно выбрать один базис и объявить его положительным)

## Билет 25. Ориентация пар векторов. Углы с учётом ориентации

### 25.1 Ориентация на плоскости

**Пример.** Ориентация на плоскости: Достаточно выбрать пару неколлинеарных векторов (базис), и объявить его положительным. Заметим, что пары  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{b}, \bar{a}$  разноимённы ( $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ).

Посмотрим, когда пары  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{a}, \bar{b}'$  одноимённые. Рассмотрим произвольную прямую  $l$  с направляющим вектором  $\bar{a}$  и любую точку  $O \in l$ . В репере  $O\bar{a}\bar{b}$  уравнение  $l$  имеет вид  $y = 0$ . Подставив в это уравнение координаты  $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , получим 1.

Пусть  $\bar{b}' = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \Rightarrow$  матрица перехода между парами  $C$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .  
 $|C| > 0 \Leftrightarrow \mu > 0 \Leftrightarrow$  при подстановке координат  $\bar{b}'$  в уравнение  $l$  результат будет  $> 0 \Leftrightarrow$  точки  $B, B'$  с радиус-векторами  $\bar{b}, \bar{b}'$  лежат в одной полуплоскости относительно  $l$ .

Получили **критерий одноимённости пар  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{a}, \bar{b}'$** : они одноимённые  $\Leftrightarrow$  точки, полученные прибавлением векторов  $\bar{b}$  и  $\bar{b}'$  к произвольной точке произвольной прямой с направляющим вектором  $\bar{a}$ , лежат относительно неё в одной полуплоскости.

### 25.2 Угол от вектора до вектора

**Определение.** Углом от вектора  $\bar{a}$  до вектора  $\bar{b}$  в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется угол между  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , взятый со знаком плюс, если пара  $\bar{a}, \bar{b}$  положительно ориентирована, и со знаком минус иначе.

### 25.3 Угол от прямой до прямой

**Определение.** Положительным углом от  $\bar{a}$  до  $\bar{b}$  называется угол  $\varphi$  от  $\bar{a}$  до  $\bar{b}$ , если  $\varphi > 0$ , и угол  $2\pi + \varphi$ , если  $\varphi < 0$ .

**Определение.** Углом от прямой  $l_1$  до прямой  $l_2$  в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется наименьший положительный угол от направляющего вектора  $l_1$  до направляющего вектора  $l_2$ .

## 25.4 Угол наклона

**Вывод формулы.** (Известное ранее уравнение прямой. Угол наклона)

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат  $O\bar{e}_1\bar{e}_2$  и в ней прямая  $l$  определена уравнением  $y = kx + b \Leftrightarrow kx - y + b = 0$ . Прямая с направляющим вектором  $e_1$  называется **осью абсцисс**, а угол от этой прямой до прямой  $l$  - **углом наклона** прямой  $l$ .

Подсчитаем угол наклона  $l$ . Направляющие векторы  $l$  имеют вид  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda k \end{pmatrix}$ , причём  $\varphi$ , очевидно, зависит только от знака  $\lambda$  (так как углы при  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$  различаются на  $\pi$ ). Угол от  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  до  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm k \end{pmatrix}$  равен углу от  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  до  $\begin{pmatrix} \mp 1 \\ \mp k \end{pmatrix}$ , поэтому выбирать наименьший можем только из положительных углов от вектора  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  - наименьшим, как нетрудно видеть, будет угол до  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$  при  $k > 0$  и до  $\begin{pmatrix} -1 \\ -k \end{pmatrix}$  иначе. Обозначив нужный вектор за  $\bar{k}$ , имеем:

$$\cos \varphi = \cos \angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sin \angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm k$$

(синус  $> 0$ , т.к. угол от 0 до  $\pi$ ).

Заметим, что при  $k > 0$  необходимый угол должен иметь тангенс, больший нуля, а при  $k < 0$  - меньший нуля (очевидно из расположения соответствующих векторов в координатных четвертях). Отсюда видно, что вне зависимости от нужного нам вектора верно:

$\operatorname{tg} \varphi = k$

## Билет 26. Площади

### 26.1 Определение и следствия

**Определение.** Фигуры  $\Phi_1, \Phi_2$  называются конгруэнтными, если  $\exists$  отображение  $f: \Pi \rightarrow \Pi$ , сохраняющее расстояния ( $|f(A)f(B)| = |AB| \forall A, B$ ) такое, что  $f(\Phi_1) = \Phi_2$ .

**Определение.** Площадь (мера) на евклидовой плоскости - численная величина (обозначается  $S_\Phi, \Phi$  - фигура), соответствующая следующим свойствам:

1. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1;

2. Площади конгруэнтных фигур равны;
3. Если  $\Phi_1, \Phi_2$  - фигуры,  $\exists S_{\Phi_1}, S_{\Phi_2}$  и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ , то  $\exists S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}$ ;
4. Если  $\Phi$  - фигура и существуют такие последовательности фигур  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , что  $\varphi_n \subset \varphi_{n+1} \subset \Phi \subset \Phi_{n+1} \subset \Phi_n \forall n \geq 1$ , причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\varphi_n}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Phi_n}$  существуют и равны, то  $S_{\Phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Phi_n}$

**Следствие.** (Площади некоторых фигур:)

- Площадь отрезка равна 0.

*Доказательство.* Из предельного перехода (Площадь отрезка с длиной 1 равна 0, иначе площадь квадрата со стороной 1 не была бы конечной, а из этого можно получить длину любого отрезка).  $\square$

- Площадь квадрата со стороной  $a$  равна  $a^2$ .

*Доказательство.* Для  $a = \frac{1}{n}$  разбиваем квадрат со стороной 1 на  $n^2$  квадратов, для  $a \in \mathbb{Q}$  складываем квадрат со стороной  $\frac{m}{n}$  из предыдущих, для  $a \notin \mathbb{Q}$  приближаем квадрат сверху и снизу квадратами с рациональными сторонами и переходим к пределам (по 4 пункту определения).  $\square$

- Площадь прямоугольника со сторонами  $a, b$  равна  $ab$ .

*Доказательство.* Рассмотрим квадрат со стороной  $a + b$ . Его можно разбить на квадрат со стороной  $a$ , квадрат со стороной  $b$  и два нужных нам прямоугольника. Отсюда  $2S = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab \Rightarrow S = ab$ .  $\square$

Отсюда также выводятся формулы площади параллелограмма (перестановкой треугольника из параллелограмма получается прямоугольник) и треугольника (как половины параллелограмма).

## 26.2 Площадь параллелограмма

**Определение.** Говорят, что параллелограмм натянут на векторы  $\bar{a}, \bar{b}$ , если для одной из вершин  $A$  параллелограмма точки  $A + \bar{a}$  и  $A + \bar{b}$  также являются его вершинами. Площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\bar{a}, \bar{b}$ , обозначается  $S_{\bar{a}, \bar{b}}$ .



**Вывод формулы.** (Площадь параллелограмма в прямоугольной с.к.)

Нам уже известно, что  $S_{\bar{a}, \bar{b}} = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi$  (из выражения высоты параллелограмма через угол). В прямоугольной системе координат:

$$S_{\bar{a}, \bar{b}}^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$$

Если  $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , то  $S_{\bar{a}, \bar{b}}^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Rightarrow$

$$S_{\bar{a}, \bar{b}} = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right|$$

При этом определитель  $> 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$  одноимённа с базисом.

### 26.3 Ориентированная площадь

**Определение.** Ориентированной площадью параллелограмма, натянутого на  $\bar{a}, \bar{b}$ , на ориентированной плоскости называется число, равное  $S_{\bar{a}, \bar{b}}$ , если пара  $\bar{a}, \bar{b}$  положительно ориентирована, и  $-S_{\bar{a}, \bar{b}}$  иначе. Обозначается  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ .

**Следствие.** В любом положительно ориентированном базисе  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

**Утверждение.** Свойства ориентированной площади:

1.  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$
2.  $\langle \lambda \bar{a}, \bar{b} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{a}, \lambda \bar{b} \rangle$
3.  $\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$   
 $(\langle \bar{a}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle; \langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle - \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle)$

*Доказательство.* Следует из свойств определителя. □

## Билет 27. Плоскость в пространстве

**Определение.** Плоскость в (трёхмерном) аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

**Вывод формулы** (Уравнения плоскости). Плоскость  $\pi$  - это множество  $X_0 + V^2$ , где  $X_0$  - точка и  $V^2$  - двумерное векторное подпространство пространства  $V$ , ассоциированного с трёхмерным аффинным пространством. Так как  $\dim V^2 =$

$2 \Rightarrow$  в нём есть базис  $\bar{a}, \bar{b} \Rightarrow \pi = \{X_0 + u\bar{a} + v\bar{b} : u, v \in \mathbb{R}\}$ . Такие векторы  $\bar{a}, \bar{b}$  называются **направляющими векторами плоскости**. В произвольной системе координат: если  $X_0 = (x_0, y_0, z_0), \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ , то  $\pi$  - мн-во точек с координатами: (**параметрические уравнения плоскости**)

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}$$

Векторы  $\bar{a}, \bar{b}$  называются направляющими векторами плоскости  $\pi$ .  
Выражая параметры  $u, v$ , получим **общее уравнение плоскости**:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (|A| + |B| + |C| \neq 0)$$

## Билет 28. Взаимное расположение плоскостей

**Определение.** Говорят, что вектор  $\bar{a}$  параллелен плоскости  $\pi$  (обозначается  $\bar{a} \parallel \pi$ ), если он выражается через направляющие векторы этой плоскости ( $\Leftrightarrow$  через любой базис ассоциированного с плоскостью векторного пространства).

**Замечание.** Ясно, что  $X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{X_0X} \parallel \pi$  (для любой  $X_0 \in \pi$ ). То же верно и для любой отличной от  $X_0$  точки плоскости:  $\overrightarrow{X_1X} = \overrightarrow{X_1X_0} + \overrightarrow{X_0X}$ , т.е.  $\overrightarrow{X_1X}$  выражается через направляющие векторы  $\Leftrightarrow \overrightarrow{X_0X}$  выражается через направляющие векторы.

### 28.1 Взаимное расположение плоскостей

**Вывод формулы.** Рассмотрим две плоскости, заданные уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Эти плоскости пересекаются  $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$  имеет решения. Матрица коэффициентов системы  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ , а её расширенная матрица  $(A|B) =$

$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$ . По теореме Кронекера-Капелли из курса алгебры СЛУ совместна  $\Leftrightarrow rkA = rk(A|B)$ . Так как  $1 \leq rkA \leq 2$ , плоскости не пересекаются

$\Leftrightarrow$  строки  $A$  линейно зависимы ( $rk A = 1$ ), а строки  $(A|B)$  - нет. Таким образом, плоскости не пересекаются  $\Leftrightarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$$

Очевидно, плоскости совпадают  $\Leftarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$$

Докажем, что плоскости совпадают только в этом случае. Пусть плоскости совпадают. Приведём матрицу  $(A|B)$  к ступенчатому виду:  $\left( \begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{array} \right)$  (хотя бы один из коэффициентов первой плоскости  $\neq 0$ , без ограничения общности -  $A_1$ ). Так как плоскости совпадают, любая точка, принадлежащая первой плоскости, принадлежит и второй. Тогда для  $a_{24}$  из принадлежности плоскости  $(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$  следует  $a_{24} = 0$ , для  $a_{22}$  аналогично при  $B \neq 0$ , а при  $B = 0$  - из принадлежности точки  $(-\frac{D_1}{A_1}, 1, 0)$  (для  $a_{23}$  и  $C$  аналогично). Отсюда вторая строка ступенчатой матрицы нулевая, то есть строки  $(A|B)$  пропорциональны, а отсюда плоскости совпадают  $\Leftrightarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$$

Предположим, что плоскости пересекаются, но не совпадают. Тогда  $rk A = 2$ . Из курса алгебры знаем, что решение такой системы имеет вид  $X_0 + V^1$  (частное решение СЛУ + одномерное пространство решений ОСЛУ). Таким образом:

Плоскости совпадают  $\Leftrightarrow$  их уравнения (со свободными коэффициентами) пропорциональны;

Плоскости параллельны  $\Leftrightarrow$  их уравнения пропорциональны, а свободные члены - нет;

Плоскости пересекаются и не совпадают (их уравнения не пропорциональны)  $\Leftrightarrow$  пересечением плоскостей является множество вида  $X_0 + V^1$ , где  $X_0$  - точка и  $V^1 = \{\lambda \bar{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  ( $\bar{a}$  - решение ОСЛУ  $AX = 0$ ), т.е. их пересечением является прямая.

## Билет 29. Пучки плоскостей

### 29.1 Определения

**Определение.** Собственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую, называемую центром пучка. Несобственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

## 29.2 Собственные пучки

**Теорема.** Пусть плоскости  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда плоскость  $\pi$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow \pi$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Пусть  $\pi$  задаётся уравнением (\*). Тогда, подставив в уравнение  $\pi$  любую точку прямой - центра пучка (назовём её  $l$ ), получим  $\lambda(0) + \mu(0) = 0$  (т.к. центр удовлетворяет уравнениям  $\pi_1, \pi_2$ ).

$\Rightarrow$  Пусть  $l \subset \pi$ . Возьмём произвольную точку  $(x_1, y_1, z_1) \in \pi, (x_1, y_1, z_1) \notin l$ . Рассмотрим плоскость вида (\*) с  $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)$ ,  $\mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) : -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ . Заметим, что это уравнение действительно задаёт плоскость: в противном случае необходимы условия  $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ , но тогда  $(A_1, B_1, C_1)$  и  $(A_2, B_2, C_2)$  пропорциональны, а исходные плоскости непараллельны. Такой плоскости, очевидно, принадлежат точки  $l$  и  $(x_1, y_1, z_1)$ . Так как через прямую и не лежащую на ней точку проходит ровно одна плоскость (она имеет вид  $\{X_1 + \bar{v} = X_1 + \lambda \overrightarrow{X_1 X_2} + \mu \overrightarrow{X_1 X_3}\}$ , где  $X_2, X_3$  - произвольные точки на  $l$ ), любая плоскость из собственного пучка имеет вид (\*), ч.т.д.  $\square$

## 29.3 Несобственные пучки

**Теорема.** Пусть плоскости  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда плоскость  $\pi$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow \pi$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Так как  $\pi_1 \parallel \pi_2$ ,  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ . Тогда если  $\pi$  имеет вид (\*), то  $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{B_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \lambda + \frac{\mu C_2}{C_1} = \frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{C_1} \Rightarrow \pi \parallel \pi_1$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $\pi$  принадлежит пучку. Так как уравнения  $\pi, \pi_1$  и  $\pi_2$  пропорциональны (без свободных коэффициентов), можем домножить их на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть  $\pi_1 : Ax + By + Cz + D'_1 = 0$ ;  $\pi_2 : Ax + By + Cz + D'_2 = 0$ ;  $\pi : Ax + By + Cz + D'_3 = 0$ . Тогда возьмём

$$\lambda, \mu \text{ из следующей системы: } \begin{cases} D'_1\lambda + D'_2\mu = D'_3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{D'_3 - D'_2}{D'_1 - D'_2} \\ \mu = \frac{D'_1 - D'_3}{D'_1 - D'_2} \end{cases} \quad (D'_1 \neq D'_2,$$

иначе  $\pi_1$  и  $\pi_2$  совпадают). Очевидно, что для таких  $\lambda, \mu$  уравнение  $\pi$  имеет вид  $(*)$  (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д.  $\square$

## Билет 30. Полупространства

**Определение.** Аналогично прямой на плоскости, каждая плоскость  $\pi$  в пространстве  $V^3$  разбивает множество всех не принадлежащих ей точек пространства на два выпуклых подмножества  $V_1, V_2 : V_1 \cup \pi \cup V_2 = V^3, V_1 \cap V_2 = V_1 \cap \pi = V_2 \cap \pi = \emptyset$ . Такие подмножества называются полупространствами, ограниченными  $\pi$  и определяются однозначно с точностью до обозначения.

Также можем определить полупространства следующим образом: возьмём произвольную точку  $X \notin \pi$  и скажем, что  $V_1 = \{Y \in V^3 : [X, Y] \cap \pi = \emptyset\}$ , а затем выберем  $X' \notin \pi \cup V_1$  (такая точка всегда будет существовать) и определим  $V_2 = \{Y' \in V^3 : [X', Y'] \cap \pi = \emptyset\}$ .

**Утверждение.** Так определённые множества являются полупространствами и не зависят от выбора точек  $X, X'$ .

*Доказательство.* (Аналогично случаю прямой) Введём любую систему координат. Тогда полупространства  $V^\pm = \{X(x, y, z) : Ax + By + Cz + D \gtrless 0\}$ . Рассмотрим  $V^+$  (остальные аналогично).

Пусть  $X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in V^+$ . Знаем, что любая точка  $X \in [X_1, X_2]$  имеет координаты  $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2), 0 \leq t \leq 1$ . Тогда:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \geq 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tCz_1 + D \geq 0 \\ (1-t)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C(tz_1 + (1-t)z_2) + D \geq 0 \Rightarrow X \in V^+.$$

Таким образом, для  $X_1, X_2 \in V^+ \quad [X_1, X_2] \subset V^+$  из доказанной выше выпуклости, а для точек  $X_1 \in V^+, X_2 \in V^-$  точку пересечения  $[X_1, X_2]$  и  $\pi$  можно найти явно, но её существование очевидно.  $\square$

## Билет 31. Прямая в пространстве

**Вывод формул.** (Уравнения прямой) Пусть  $l$  - прямая в пространстве:  $l = \{X_0 + t\bar{c}\}$ , где  $X_0$  - точка прямой,  $\bar{c}$  - её направляющий вектор. Если  $X_0 =$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \text{ то координаты точек на прямой выражаются следующим}$$

образом: (параметрические уравнения прямой)

$$X \in l : \begin{cases} x = x_0 + tc_1 \\ y = y_0 + tc_2 \\ z = z_0 + tc_3 \end{cases}$$

Выразим  $t$  из всех уравнений и приравняем - получим **каноническое уравнение прямой**:

$$\frac{x - x_0}{c_1} = \frac{y - y_0}{c_2} = \frac{z - z_0}{c_3}$$

Если известно, что прямой принадлежат  $X_0 = (x_0, y_0, z_0), X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , то

$$\overrightarrow{X_0 X_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} - \text{направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет}$$

следующий вид (**уравнение прямой по двум точкам**)

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

**Следствие.** Любая прямая является пересечением двух плоскостей. (Видно из канонического уравнения: например, плоскостей  $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$  и  $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$ )

## Билет 32. Взаимное расположение плоскости и прямой

**Вывод формул.** (Случаи расположения) Пусть  $l = \{X_0 + t\bar{c} : t \in \mathbb{R}\}, \pi = \{X_1 + u\bar{a} + v\bar{b}\}$ . Уже знаем, что для любых других точек прямой и плоскости верны те же выражения множеств точек.

Предположим, что прямая и плоскость пересекаются хотя бы в двух точках: пусть  $X_0, X_1$  - их различные общие точки. Имеем  $\overrightarrow{X_0 X_1} = t_0 \bar{c} = u_0 \bar{a} + v_0 \bar{b}$  (для некоторых  $t_0 \neq 0, u_0, v_0$ , из принадлежности точек и прямой, и плоскости). Отсюда  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$ , а значит для любой  $X \in l : X = X_0 + t\bar{c} = X_0 + t(\frac{u_0}{t_0} \bar{a} + \frac{v_0}{t_0} \bar{b}) \in \pi$ . Таким образом,

$l, \pi$  имеют 2 точки пересечения  $\Leftrightarrow l \subset \pi \Leftrightarrow l \cap \pi \neq \emptyset$ ,  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$

Заметим, что  $X \in l \cap \pi \Leftrightarrow X = X_0 + t_0 \bar{c} = X_1 + u_0 \bar{a} + v_0 \bar{b} \Rightarrow \overrightarrow{X_0 X_1} = u_0 \bar{a} + v_0 \bar{b} - t_0 \bar{c}$ . В случае некомпланарности  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  вектор  $\overrightarrow{X_0 X_1}$  выражается через них единственным образом, то есть точка пересечения есть и единственная, т.е.

$l, \pi$  имеют одну т. пересечения  $\Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  линейно независимы

(В случае, если  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$ :  $l, \pi$  имеют общую точку  $\Rightarrow l \subset \pi$ , поэтому т. пересечения одна только в этом случае)

**Следствие.**  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b} \Leftrightarrow$  либо  $l \subset \pi$ , либо  $l \cap \pi = \emptyset$  (в этом случае говорят, что **прямая параллельна плоскости**)

$\bar{c}$  не выражается через  $\bar{a}, \bar{b} \Leftrightarrow l \cap \pi$  - одна точка.

## Билет 33. Взаимное расположение двух прямых

**Определение.** Прямые  $l_1, l_2$  в пространстве называются параллельными, если они либо совпадают, либо лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**Определение.** Прямые  $l_1, l_2$  в пространстве скрещиваются, если они не пересекаются и не параллельны.

**Замечание.** Если прямые  $l_1, l_2$  с направляющими векторами  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  пересекаются в точке  $X_0$  и не совпадают, то  $\bar{c}_1 \nparallel \bar{c}_2$  и  $l_1, l_2 \subset \pi = \{X_0 + u\bar{c}_1 + v\bar{c}_2 : u, v \in \mathbb{R}\}$ . Отсюда прямые скрещиваются  $\Leftrightarrow$  они не лежат в одной плоскости.

Если направляющие векторы  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  прямых  $l_1, l_2$  коллинеарны, то прямые либо параллельны, либо совпадают.

**Следствие.** Прямые  $l_1, l_2$  скрещиваются  $\Leftrightarrow$  они не пересекаются и  $c_1 \nparallel c_2$ .  
 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow c_1 \parallel c_2$  (иначе прямые либо скрещиваются, либо пересекаются).

## Билет 34. Плоскость в точечно-евклидовом пр-ве.

### 34.1 Нормаль к плоскости

**Определение.** Пусть  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  в прямоугольной с.к. Вектор  $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  называется нормалью (нормальным вектором) к плоскости  $\pi$ .

**Следствие.** Вектор нормали  $\bar{n}$  к плоскости  $\pi$  ортогонален любому вектору из  $\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $X_0, X_1 \in \pi \Rightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0$  (вектор  $\overrightarrow{X_0X_1} \parallel \pi$ ). Данное выражение также означает, что  $\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \overrightarrow{X_0X_1}$ .  $\square$

**Следствие.** Зная вектор нормали, направляющие векторы плоскости можно найти как любые два неколлинеарных вектора, ортогональных нормали.

## 34.2 Расстояние от точки до плоскости

**Вывод формулы.** (Расстояние от точки до плоскости)

$d(X_0, \pi) = \inf\{|\overrightarrow{X_0Y}| : Y \in \pi\}$ . Из теоремы Пифагора (аналогично расстоянию от точки до прямой) следует, что это расстояние - длина отрезка перпендикуляра к  $\pi$ , проходящего через  $X_0$ , заключённого между  $X_0$  и  $\pi$  (только в прямоугольной с.к.!) Найдём это расстояние. Перпендикуляр к  $\pi$  через точку  $X_0$  имеет направляющий вектор  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  и проходит через  $(x_0, y_0, z_0)$ , т.е.

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tA \\ y = y_0 + tB \\ z = z_0 + tC \end{cases} \quad . \text{ Точка пересечения } l \text{ и } \pi:$$

$$A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C(z_0 + tC) + D = 0 \Rightarrow t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

квадрат расстояния от  $X_0$  до неё равен  $(tA)^2 + (tB)^2 + (tC)^2 = \left(\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$

$$\Rightarrow d(X_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 34.3 Иные формулы расстояния (нет в б.)

Величина расстояния от прямой  $l$  до плоскости  $\pi$  в пространстве имеет смысл только при  $l \parallel \pi$ . Пусть  $\bar{a}$  - направляющий вектор  $l$  и  $\bar{n}$  - нормаль к  $\pi$ . Проведём плоскость  $\pi'$  через  $l$  с направляющими векторами  $\bar{a}, \bar{n}$ . Тогда все перпендикуляры, опущенные из точки прямой  $l$  на  $\pi$ , будут лежать в  $\pi'$ . Кроме того, их основания будут лежать на  $l' = \pi \cap \pi'$ , а отсюда расстояния от всех точек  $l$  до  $\pi$  одинаковы. Поэтому **расстояние от прямой до плоскости, параллельной ей, равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости.**



**Вывод формулы.** (Расстояние от точки до прямой)

Пусть в прямоугольной с.к. даны  $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$  - точка и  $l$  - прямая, проходящая через  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

(ВОЗМОЖНО, ЗДЕСЬ БУДЕТ ЧЕРТЁЖ)

$d(X_1, l) = |X_0X_1| \cdot \sin \varphi$  (угол между  $\overrightarrow{X_0X_1}$  и  $l$ )  $= |X_0X_1| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \Rightarrow d(X_1, l)^2 =$  (после раскрытия скобок)

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \frac{(a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0))^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

**Вывод формулы.** (Расстояние между скрещивающимися прямыми)

Пусть  $l_1, l_2$  - скрещивающиеся прямые с направляющими векторами  $\bar{a}, \bar{b}$  соотв.,  $X_1 \in l_1, X_2 \in l_2$ . Из уже известных нам соображений расстояние между  $X_1$  и  $X_2$  минимально в случае, если  $\overrightarrow{X_1X_2} \perp l_1, l_2$ .

Покажем существование таких  $X_1, X_2$ : построим плоскость  $\pi$  через  $l_1$  с направляющими векторами  $\bar{a}, \bar{b}$  и построим перпендикуляры из точек  $l_2$  на  $\pi$ . Их основания лежат на некоторой прямой  $l \parallel l_2$ , причём  $l_1 \nparallel l$ , потому что иначе  $l_1 \parallel l_2$ . Значит, существует точка пересечения  $l_1$  и  $l$ , а следовательно существует перпендикуляр из точки  $l_2$  на  $\pi$ , основание которого лежит на  $l_1$ , т.е. этот перпендикуляр общий для  $l_1, l_2$ .

Тогда для произвольных  $X_1, X_2$  на прямых  $d(l_1, l_2) = d(l_2, \pi)$  - длина перпендикуляра, опущенного на  $\pi$  из любой точки  $l_2$  = высота параллелепипеда, построенного на векторах  $\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_1X_2} \Rightarrow$

$$d(l_1, l_2) = \frac{V_{\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_1X_2}}}{S_{\bar{a}, \bar{b}}}$$

Осталось только получить формулы для объёма.

## Билет 35. Векторное, смешанное произведение. Объём

### 35.1 Векторное произведение

**Определение.** Векторным произведением неколлинеарных векторов  $\bar{a}, \bar{b}$  в ориентированном трёхмерном точечно-евклидовом пространстве называется вектор  $\bar{v}$  такой, что

1.  $|\bar{v}| = S_{\bar{a}, \bar{b}} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ ;
2.  $\bar{v} \perp \bar{a}, \bar{v} \perp \bar{b}$ ;
3. Тройка  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{v}$  имеет положительную ориентацию.

Обозначается  $[\bar{a}, \bar{b}]$ .

Для  $\bar{a} \parallel \bar{b}$   $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$ .

## 35.2 Объём и ориентированный объём

Обычный объём определяется полностью аналогично площади на плоскости. Из свойств выводится, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  (т.е. для его вершины  $X_0$  его вершинами также являются  $X_0 + \bar{a}, X_0 + \bar{b}, X_0 + \bar{c}$ ), равен  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \cdot h$ , где  $h = \bar{c} \cdot \sin \varphi$  - высота параллелепипеда  $\varphi$  - угол между  $\bar{c}$  и плоскостью  $X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$ . Запишем  $\varphi$  как  $\frac{\pi}{2} - \psi$ , где  $\psi$  - угол между  $\bar{c}$  и нормалью к плоскости  $X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$ . Отсюда:

$$h = |\bar{c} \cdot \cos \psi| = \left| \frac{(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])}{|\bar{c}| |[\bar{a}, \bar{b}]|} \cdot \bar{c} \right| = \frac{|(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|} = \frac{|(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])|}{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle} \Rightarrow V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = |([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})|$$

Определим ориентацию тройки  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ : рассмотрим базис  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{n}$ . В нём  $\bar{c}$  имеет координаты

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ (\cos \psi)|\bar{c}| \end{pmatrix}$  ( $c_1, c_2$  неважны), т.е. матрица перехода от этого базиса к  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & (\cos \psi)|\bar{c}| \end{pmatrix}$ . Её определитель  $> 0 \Leftrightarrow \cos \psi > 0 \Leftrightarrow ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) > 0$ .

Отсюда  $[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c} > 0 \Leftrightarrow$  тройка  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  положительно ориентирована.

**Определение.** Ориентированным объёмом параллелепипеда, натянутого на векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , называется число  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$ . Также это число называется смешанным произведением векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

**Следствие.**  $V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = |\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle|$ ;

$\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  положительно ориентирована.

## 35.3 Свойства смешанного произведения

**Утверждение.** 1.  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{a}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{b} \rangle = -\langle \bar{c}, \bar{b}, \bar{a} \rangle$  (очев);

2.  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 \rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_2 \rangle$ ;

$$3. \langle \bar{a}, \bar{b}, \lambda \bar{c} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle;$$

$$4. \langle \bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}_1, \bar{c} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}_2, \bar{c} \rangle;$$

$$5. \langle \bar{a}, \lambda \bar{b}, \bar{c} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle;$$

$$6. \langle \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c} \rangle;$$

$$7. \langle \lambda \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle;$$

$$8. \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = 1 (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 - \text{ортонормированный базис})$$

①, ⑧ - очев, ②, ③ - из свойств скалярного произведения, ④ - ⑦ получаются из ②, ③ с помощью ①.

## Билет 36. Объёмы в ортонормированном базисе

Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  - ортонормированный положительно ориентированный базис. В курсе алгебры доказывается, что единственная функция от строк (столбцов)  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$  со свойствами ① - ⑧ (поли-линейность, кососимметричность, единица в  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ) - определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (\text{или} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix})$$

$$\text{Следовательно, } \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right| \quad (\text{модуль}).$$

(далее в курсе приведено доказательство утверждения про определитель, более полное доказательство ищите в конспекте алгебры у [Viacheslavik122333](#))

## Билет 37. Векторное произведение и расстояния в ортонормированном базисе

### 37.1 Выражение векторного произведения

**Вывод формулы.** (Векторное произведение в прямоугольной с.к.) Знаем, что в ортонормированном базисе вектор  $\bar{x}$  имеет координаты

$$x = (\bar{x}, \bar{e}_1), \quad y = (\bar{x}, \bar{e}_2), \quad z = (\bar{x}, \bar{e}_3)$$

Вычислим:  $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{e}_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$

Аналогично  $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{e}_2) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \quad ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  Данную формулу обычно записывают в виде определителя:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(не является определителем по сути, но считается по той же формуле)

**Замечание.** Прямые  $l_1 = X_1 + t\bar{a}, l_2 = X_2 + t\bar{b}$  скрещиваются  $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{X_1 X_2}, \bar{a}, \bar{b} \rangle \neq 0$ .

## 37.2 Расстояния через векторное произведение

Расстояние от точки  $X_1$  до прямой  $l : X = X_0 + t\bar{a}$  - высота параллелограмма, натянутого на  $\bar{a}, \overrightarrow{X_0 X_1} = \frac{|S_{\bar{a}, \overrightarrow{X_0 X_1}}|}{|\bar{a}|} \Rightarrow$

$$d(X, l) = \frac{|\overrightarrow{[X_0 X_1, \bar{a}]}|}{|\bar{a}|}$$

Расстояние от точки  $X_1$  до плоскости  $\pi : X = X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$  - высота параллелепипеда, натянутого на  $\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_0 X_1} = \frac{|V_{\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_0 X_1}}|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|} \Rightarrow$

$$d(X, \pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{X_0 X_1}, \bar{a}, \bar{b} \rangle|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми  $l_1 = X_1 + t\bar{a}, l_2 = X_2 + t\bar{b}$ :

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{X_1 X_2}, \bar{a}, \bar{b} \rangle|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|}$$

(так как равно расстоянию от точки первой прямой до плоскости, параллельной первой прямой и проходящей через вторую)

## Билет 38. Линии второго порядка

### 38.1 Определения

Далее рассматриваем аффинную систему координат на плоскости (как на аффинном или точечно-евклидовом пространстве).

**Определение.** Линией первого порядка называется множество точек  $\{(x, y) : Ax + By + C = 0\}$ , где  $A, B, C$  - вещественные числа и хотя бы одно из чисел  $A, B$  не равно нулю. Другими словами, это множество точек, координаты которых удовлетворяют фиксированному уравнению первой степени.

(Это прямая)

**Определение.** Линией второго порядка (кривой второго порядка) называется множество точек, координаты которых (в некоторой аффинной системе координат) удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = 0$ , где

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$  - некоторые фиксированные числа и хотя бы одно из чисел  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ . Выражение для  $F(x, y)$  называется многочленом второй степени от переменных  $x, y$ . Уравнение  $F(x, y) = 0$  называется общим уравнением линии второго порядка.

**Определение.** Многочлен  $F(x, y)$  ставит в соответствие каждой паре чисел  $(x, y)$  некоторое вещественное число. С ним связано отображение  $f : \pi \rightarrow \mathbb{R}$  (вместо пары чисел  $f$  сопоставляет точку плоскости с такими координатами в заданной с.к.) Отображение  $f$  называется квадратичным отображением, представленным многочленом  $F$ .

**Замечание.** Соответствие  $F \leftrightarrow f$  взаимно однозначно.

(Каждая точка однозначно определяется своими координатами  $\Rightarrow f$  однозначно определяется  $F$ ; подставив в общую формулу для  $F(x, y)$  координаты шести различных точек, однозначно определим коэффициенты  $\Rightarrow F$  однозначно определяется  $f$ ).

**Определение.** Квадратичная часть  $F_1(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  многочлена  $F(x, y)$  называется его квадратичной формой.

**Определение.** Линия второго порядка в заданной системе координат однозначно определяется матрицей коэффициентов  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ . Она называется большой матрицей линии второго порядка.

**Определение.** Квадратичная форма линии второго порядка в заданной системе координат однозначно определяется матрицей коэффициентов  $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Она называется малой матрицей линии второго порядка.

## 38.2 Формы записи

Имеют место равенства (несложно проверить):

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F_1(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

В прямоугольной системе координат на евклидовой плоскости также имеет место следующее равенство (из выражения скалярного произведения):

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0$$

## 38.3 Связь уравнений в разных системах координат

Далее работаем в прямоугольной системе координат. Цель - избавиться от слагаемого с  $xy$ , т.е. перейти в такую прямоугольную систему координат, что  $A_1$  в ней - диагональная.

(Для произвольных аффинных систем координат задача упрощения уравнения простая - можно выделить полный квадрат в квадратичной форме и заменой избавиться сначала от члена с  $xy$ , а затем и от линейных членов за исключением нескольких простых случаев)

Сначала будем изменять только базис. Пусть старая система координат задана репером  $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ , новая -  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$  и  $C$  - матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда старые координаты радиус-вектора точки  $X = (x, y)$  выражаются через новые  $(x', y')$  так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T$$

Очевидно, многочлен линии второго порядка изменится, хоть линия и не меняется как множество точек. Назовём новый многочлен, полученный подстановкой новых координат в старый многочлен,  $F'$ . Тогда:

$$\begin{aligned} F'(x', y') &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T \cdot A_1 \cdot C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0 = \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot A'_1 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} + a_0 \end{aligned}$$

где  $A'_1 = C^T A C$  и  $\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ .

Далее прямой подсчет показывает, что большая матрица изменяется так:

$$A' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь изменим ещё и начало координат. Тогда:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подставляя в выражение  $F(x, y)$ , получим:

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } A' = D^T A D.$$

Несложно проверить, что при такой замене также верно равенство  $A'_1 = C^T A C$ .

## Билет 39. Канонические уравнения линий второго порядка

### 39.1 Собственные векторы и значения

Итак, найдём необходимую матрицу  $C$ . Она должна являться матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому, т.е. она по определению ортогональна. Таким образом, необходимо найти такие векторы  $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$  (новый базис), что:

1.  $\vec{e}'_1 \perp \vec{e}'_2$ ;
2.  $|\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = 1$ ;
3. Если  $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ , то матрица  $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  - искомая матрица  $C$ .

Она уже будет ортогональной, т.е. достаточно условия, что  $A'_1 = C^T A_1 C$  - диагональная (пусть равна  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ).

$$A'_1 = C^{-1}A_1C \Leftrightarrow A_1C = CA'_1 \Leftrightarrow A_1 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \\ A_1 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ т.е. } A_1 \bar{e}_1 = \lambda_1 \bar{e}_1 \text{ и } A_1 \bar{e}_2 = \lambda_2 \bar{e}_2.$$

Найдём ненулевые  $\bar{x}$ , для которых существует  $\lambda$ :  $A_1 \bar{x} = \lambda \bar{x}$ , т.е.  $(A_1 - \lambda E) \bar{x} = \bar{0}$ . Это уравнение относительно  $\bar{x}$  имеет нетривиальное решение  $\Leftrightarrow |A_1 - \lambda E| = 0$  (из курса алгебры). Это квадратное уравнение относительно  $\lambda$  (оно называется **характеристическим многочленом линии второго порядка**) :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

то есть уравнение всегда имеет решения.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - корни этого уравнения (возможно, совпадающие). Занумеруем их так: если они разных знаков, то  $\lambda_1$  - положительный корень, а если одного знака, то  $\lambda_1$  - меньший по модулю корень.

Из построения  $\lambda_1, \lambda_2$  следует, что существуют  $\bar{a}, \bar{b}$  такие, что  $A_1 \bar{a} = \lambda_1 \bar{a}$ ,  $A_1 \bar{b} = \lambda_2 \bar{b}$  (они называются собственными векторами матрицы  $A_1$ , соответствующими собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно)

## 39.2 Переход к канонической системе координат

Рассмотрим случаи:

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Пусть  $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . Из того, что матрица  $A$  симметричная и изначальная система координат прямоугольная, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\bar{a}, \bar{b}) &= (\lambda_1 \bar{a}, \bar{b}) = (A_1 \bar{a}, \bar{b}) = (A_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix})^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\bar{a}, A_1 \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda_2 \bar{b}) = \lambda_2(\bar{a}, \bar{b}) \end{aligned}$$



Притом  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , а значит  $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ . Тогда система координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где  $\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \bar{e}_2 = \pm \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$  является прямоугольной, причём  $A'_1$  в ней - диагональная  $(= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix})$ , что мы и хотели получить (можем выбрать знаки так, что ориентация положительна).

## 2. $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ .

Найдём  $\bar{a}$  такой, что  $A_1\bar{a} = \lambda\bar{a}$ . Возьмём ненулевой вектор  $\bar{b}$ , ортогональный  $\bar{a}$ . Пусть  $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . Тогда:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow (A_1\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}) = 0$$

С другой стороны,

$$(A_1\bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\bar{a}, A_1\bar{b}) \Rightarrow \bar{a} \perp A_1\bar{b}$$

Отсюда  $A_1\bar{b}$  пропорционален  $\bar{b}$ , т.е.  $A_1\bar{b} = \lambda'\bar{b}$ . А так как уже знаем, что такое уравнение имеет решение только при  $\lambda' = \lambda$ , получаем, что для любого  $\bar{b} \perp \bar{a}$  верно  $A_1\bar{b} = \lambda\bar{b}$ . Тогда подойдёт система координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где  $\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \bar{e}_2 = \pm \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$  (знак для положительной ориентации).

Итак, для любого случая нашли прямоугольную систему координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , в которой уравнение линии имеет вид:

$$F'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0$$

Вновь рассмотрим случаи:

### 1. $\lambda_1 \neq 0$

Тогда из нашей нумерации и  $\lambda_2 \neq 0$ . Можем выделить полные квадраты:  $x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}, y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$  и перейти к системе координат  $O''\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где  $O'' = (\frac{a'_1}{\lambda_1}, \frac{a'_2}{\lambda_2})$  в системе координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ . Получим уравнение:

$$\lambda_1(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}) + a_0 - \frac{a_1'^2}{\lambda_1} - \frac{a_2'^2}{\lambda_2} = 0$$

то есть в новейших координатах уравнение имеет вид  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = C$ .

Если  $\lambda_1 > 0, C > 0$ , разделим на  $C$  и получим уравнение вида

$$\frac{x''^2}{a^2} \pm \frac{y''^2}{b^2} = 1 \text{ - эллипс (если +) или гипербола (если -)}$$

Если  $\lambda_1 > 0, C < 0$ , посмотрим на  $\lambda_2$ :

Если  $\lambda_2 > 0$ , разделим на  $-C$  и получим

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1 \text{ - пустое множество (уравнение мнимого эллипса)}$$

Если  $\lambda_2 < 0$ , разделим на  $-C$  и ещё раз заменим координаты, поменяв местами  $x$  и  $y$  (также надо развернуть одну из осей, чтобы сохранить ориентацию, поэтому матрица перехода имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ). Получим снова

$$\frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 1 \text{ - гипербола}$$

Случаи с  $\lambda_1 < 0, C \neq 0$  рассматриваются аналогично - либо гипербола, либо эллипс, либо мнимый эллипс.

Если  $C = 0$  и  $\lambda_1, \lambda_2$  одного знака, то уравнение имеет вид (с точностью до домножения на -1):

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ - одна точка (пара мнимых пересекающихся прямых)}$$

Если  $C = 0$  и  $\lambda_1, \lambda_2$  разных знаков, то уравнение имеет вид (с точностью до домножения на -1):

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ - пара пересекающихся прямых}$$

2.  $\lambda_1 = 0$ . Тогда  $\lambda_2 \neq 0$  (иначе уравнение не второго порядка).

$$F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0$$

Если  $a'_1 \neq 0$ , то выделением полного квадрата избавимся от члена с  $y$  и сдвигом по оси  $Ox$  избавимся от константы:  $x'' = x' + \frac{a_0}{2a'_1} - \frac{a_2'^2}{2a_1'^2 \lambda_2}$ ,  $y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$ . Получим уравнение  $\lambda_2 y''^2 + 2a'_1 x'' = 0$ , т.е.  $\lambda_2 y''^2 = -2a'_1 x''$ . Можем сделать  $\lambda_2$  и  $a'_1$  разного знака: если одного, заменим  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ . Поделив на  $\lambda_2$ , получим

$$y''^2 = 2px (p > 0) \text{ - парабола}$$

Если  $a'_1 = 0$ , то  $F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2a'_2 y' + a_0 = 0$ , т.е.  $\lambda_2 y''^2 + C = 0$ .  
 Поделив на  $\lambda_2$ , получим один из следующих случаев:

$$y''^2 + a^2 = 0 \text{ - пара мнимых параллельных прямых}$$

$$y''^2 - a^2 = 0 \text{ - пара параллельных прямых}$$

$$y''^2 = 0 \text{ - пара совпадающих прямых}$$

### 39.3 Классификация линий второго порядка

Сформулируем то, что получили:

**Теорема.** (Классификация линий второго порядка)

Для любой линии второго порядка прямоугольная система координат (она называется канонической системой координат) такая, что в ней линия имеет один из следующих видов:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (эллипс);
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  (мнимый эллипс);
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  (пара мнимых пересекающихся прямых);
4.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (гипербола);
5.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  (пара пересекающихся прямых);
6.  $y^2 = 2px$  (парабола);
7.  $y^2 - a^2 = 0$  (пара параллельных прямых);
8.  $y^2 + a^2 = 0$  (пара мнимых параллельных прямых);
9.  $y^2 = 0$  (пара совпадающих прямых).

## Билет 40. Ортогональные инварианты

### 40.1 Основные инварианты

Пусть линия второго порядка задана в прямоугольной системе координат формулой  $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$ ,  $A$  - её большая матрица,

$A_1$  - малая матрица. При переходе к новой прямоугольной системе координат:

$$A' = D^T A D, D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A'_1 = C^T A C$$

( $C$  - матрица перехода,  $x_0, y_0$  - новое начало отсчёта)

При таком преобразовании не меняются:

1.  $\Delta = |A|$  (т.к.  $|D| = |D^T| = |D^{-1}| = \pm 1$ );
2.  $\delta = |A_1|$  (аналогично);
3.  $|A_1 - \lambda E|$ ;
4.  $S = a_{11} + a_{22}$ . (нетрудно проверить)

Заметим, что инварианты изменяются при домножении уравнения на число, но не меняются знаки  $\delta$  и  $\Delta \cdot S$ .

## 40.2 Классификация

Запишем большие матрицы канонических уравнений:

1.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (эллипс) -  $\delta > 0, \Delta S < 0$ ;
2.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (мнимый эллипс) -  $\delta > 0, \Delta S > 0$ ;
3.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара мнимых пересекающихся прямых) -  $\delta > 0, \Delta S = 0$ ;
4.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (гипербола) -  $\delta < 0, \Delta S \neq 0$ ;
5.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара пересекающихся прямых) -  $\delta < 0, \Delta S = 0$ ;

$$6. \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & 0 \\ -2p & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (парабола) - } \delta = 0, \Delta S \neq 0;$$

$$7. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix} \text{ (пара параллельных прямых) - } \delta = \Delta = 0;$$

$$8. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \text{ (пара мнимых параллельных прямых) - } \delta = \Delta = 0;$$

$$9. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (пара совпадающих прямых) - } \delta = \Delta = 0;$$

Итак, разберём случаи знаков ортогональных инвариантов:

1.  $\delta \neq 0$  - центральный случай (кривые 1-5):  $\delta > 0 \Rightarrow$  либо эллипс ( $\Delta S < 0$ ), либо мнимый эллипс ( $\Delta S > 0$ ), либо пара мнимых пересекающихся прямых ( $\Delta S = 0$ );  
 $\delta < 0 \Rightarrow$  либо гипербола ( $\Delta \neq 0$ ), либо пара пересекающихся прямых ( $\Delta = 0$ );
2.  $\delta = 0$  - параболический случай (кривые 6-9):  $\Delta \neq 0$  - парабола;  $\Delta = 0$  - кривые 7-9.

### 40.3 Семиинвариант (нет в б., но полезно)

Для последнего случая необходим семиинвариант:  $K = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$

**Утверждение.**  $K$  не изменяется при замене базиса (без сдвига)

*Доказательство.*

$$K = (a_{11} + a_{22})a_0 - a_1^2 - a_2^2 = S \cdot a_0 - |\bar{a}|^2$$

При переходе к новому ортонормированному базису  $a_0$  не изменяется (очев.),  $S$  не изменяется (инвариант), а  $\bar{a}$  умножается на транспонированную матрицу перехода, которую можно представить в виде матрицы поворота на некоторый угол (см. Билет 23), т.е.  $|\bar{a}|$  не изменяется.  $\square$

**Утверждение.** В случае  $\delta = \Delta = 0$   $K$  не изменяется и при сдвиге.

*Доказательство.* Пусть уравнение кривой  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$  задано в прямоугольной системе координат. Доказали, что существует прямоугольная система координат с тем же началом, в которой данная линия задаётся уравнением  $\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + a'_1x' + a'_2y' + a_0$ , и притом  $K$  не изменяется при этом переходе. Из условия  $\delta = 0$  следует, что  $\lambda_1\lambda_2 = 0$ . Пусть  $\lambda_1 = 0$  (в силу нашей нумерации). Тогда большая матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_1 \\ 0 & \lambda_2 & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a_0 \end{pmatrix}$ . Из условия

$\Delta = 0$  имеем  $\lambda_2a_1'^2 = 0$ . Причём знаем, что  $\lambda_2 \neq 0$  (иначе линия не является линией второго порядка), то есть  $a'_1 = 0$ . Тогда подстановкой получим, что  $K = Sa_0 - |\bar{a}|^2 = \lambda_2a_0 - a_2'^2$ . Заменим начало координат:  $x' = x'' + x_0, y' = y'' + y_0$ . Подставим в уравнение линии:

$$\begin{aligned} \lambda_2(y'' + y_0)^2 + 2a_2'(y'' + y_0) + a_0 &= \lambda_2y''^2 + 2(\lambda_2y_0 + a_2')y'' + \lambda_2y_0^2 + 2a_2'y_0 + a_0 \Rightarrow \\ K' &= \lambda_2(\lambda_2y_0^2 + 2a_2'y_0 + a_0) - (\lambda_2y_0 + a_2')^2 = \\ &= \lambda_2^2y_0^2 + 2\lambda_2a_2'y_0 + \lambda_2a_0 - \lambda_2^2y_0^2 - 2\lambda_2a_2'y_0 - a_2'^2 = \lambda_2a_0 - a_2'^2 = K \end{aligned}$$

Отсюда  $K' = K$ , ч.т.д. □

Тогда в случае  $\delta = \Delta = 0$ :

1.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$  (пара параллельных прямых) -  $K < 0$ ;
2.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$  (пара мнимых параллельных прямых) -  $K > 0$ ;
3.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара совпадающих прямых) -  $K = 0$ ;

## 40.4 Полная классификация

Отсюда получаем во-первых единственность канонического уравнения линии второго порядка (из инвариантности однозначно определяющих её величин), а также алгоритм определения линии по значениям инвариантов в её большой матрице:

$\delta \neq 0$					$\delta = 0$			
$\delta > 0$			$\delta \neq 0$		$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$		
$\Delta S < 0$	$\Delta S > 0$	$\Delta S = 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$		$K < 0$	$K > 0$	$K = 0$
эллипс	мн. эллипс	мн. $\times$	гипербола	$\times$	парабола	$\parallel$	мн. $\parallel$	совп. $ $

## Билет 41. Центр линии второго порядка

### 41.1 Центр симметрии

**Определение.** Точка  $X_1$  называется симметричной точке  $X_2$  относительно точки  $O$ , если  $O$  - середина отрезка  $[X_1X_2]$

**Определение.** Точка  $O$  называется центром симметрии множества точек  $M$  (на плоскости), если для любой точки  $X$  из  $M$  точка, симметричная  $X$  относительно  $O$ , также принадлежит  $M$ .

### 41.2 Уравнение центра

**Теорема.** Пусть непустая линия второго порядка задана в некоторой системе координат (не обязательно прямоугольной) уравнением  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ . Точка  $O = (x_0, y_0)$  является центром симметрии этой линии  $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$

*Доказательство.*

**Лемма.** Координаты точки  $X(x_1, y_1)$  удовлетворяют или не удовлетворяют системе  $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$  (\*) независимо от того, в какой аффинной системе координат записано уравнение и координаты.

*Доказательство.*  $(x_1, y_1)$  удовлетворяет (\*)  $\Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_0$ . Тогда в другой системе координат, переход к которой задан матрицей  $D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , имеем  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $A' = D^T A D \Rightarrow A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$$D^T A D \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$
 Остюда в новой системе координат для координат точки  $X$  эта система уравнений также выполнена.  $\square$

$\Rightarrow$  Сдвинем начало координат в точку  $O : x = x' + x_0, y = y' + y_0$  и получим новое уравнение:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0$$

Так как для этой системы координат точка  $(0, 0)$  в этой системе координат является центром симметрии линии, если ей принадлежит точка  $(x'_1, y'_1)$ , то принадлежит и точка  $(-x'_1, -y'_1)$ . Подставим точку  $(-x'_1, -y'_1)$ :

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 - 2a'_1x' - 2a'_2y' + a'_0 = 0$$

Вычитая это уравнение из уравнения для точки  $(x'_1, y'_1)$ , получим:

$$4(a'_1x' + a'_2y') = 0 \Rightarrow a'_1x' + a'_2y' = 0$$

для любой точки  $(x_1, y_1)$  линии. Получаем следующее:

Либо  $a'_1 = a'_2 = 0$  (тогда уравнение верно всегда), либо все точки линии удовлетворяют уравнению прямой  $a'_1x' + a'_2y' = 0$ . (\*)

При этом можем выразить  $a'_1$  и  $a'_2$  через коэффициенты старого уравнения - получим  $\begin{cases} a'_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a'_2 = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \end{cases}$ . Из рассуждений выше либо  $a'_1 = a'_2 = 0$ ,

то есть теорема верна, либо все точки линии лежат на одной прямой - для непустых линий второго порядка это возможно только в случае точки (пара мнимых пересекающихся прямых) или совпадающих прямых, а у этих линий каждая точка является центром симметрии.

$\Leftarrow$  Сдвинем начало координат в точку  $O : x = x' + x_0, y = y' + y_0$ . В новой системе получим новое уравнение:

$$F'(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + C_0 = 0$$

так как коэффициенты перед  $x', y'$  получаются равными нулю из системы. Очевидно, что это уравнение симметрично относительно начала координат.  $\square$



**Следствие.** В центральном случае для непустой линии второго порядка (не мнимый эллипс) центр симметрии единственный.

*Доказательство.* Центральный случай  $\Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow$  система имеет единственное решение.

(Решение единственно и в случае мнимого эллипса, но у него нет действительных точек)  $\square$

Отдельно рассмотрим случаи из утверждения (\*). В первом случае имеем  $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$ . После перехода к базису канонической

системы координат получим уравнение вида  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$  - таким уравнением можно представить всё, кроме параболы. Справедливо и обратное утверждение: если линия задаётся уравнением вида  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$ , то точка с координатами  $(0, 0)$  в этой с.к. - её центр симметрии.

Во втором случае все точки линии второго порядка лежат на одной прямой. Покажем, когда такое возможно:  $a'_1 x' + a'_2 y' = 0 \Leftrightarrow (a'_1 x' + a'_2 y')^2 = 0 \Leftrightarrow a_1'^2 x'^2 + a_1' a_2' x' y' + a_2'^2 y'^2 = 0$  - такое уравнение задаёт либо пару мнимых пересекающихся прямых, либо пару совпадающих прямых (либо пустое множество, для которого наши рассуждения о принадлежности всех точек одной прямой неприменимы, так что рассматриваем непустые линии) - то есть наша линия является либо точкой, либо прямой.

У любой линии второго порядка, кроме параболы, есть центр симметрии.

### 41.3 Определение центра

Итак, теперь можем определить центр линии второго порядка.

**Определение.** Точка  $O(x_0, y_0)$  называется центром линии второго порядка  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$ , если её координаты удовлетворяют системе уравнений 
$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$$

**Замечание.** Из доказанного выше:  $O$  - центр линии  $\Leftrightarrow$  уравнение линии симметрично относительно этой точки в любой с.к.

Для всех прямых, кроме параболы, центр канонической с.к. является её центром (несложно проверить).

## Билет 42. Сопряжённые направления

### 42.1 Определение

Попробуем найти произвольный базис (не обязательно ортогональный), в котором матрица  $A_1$  линии второго порядка станет диагональной. Пусть  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  - координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Их новые координаты -  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Так как  $A'_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}$  - диагональная,  $a'_{12} = 0$ . Выразим  $a'_{12}$  через малую матрицу :  $a'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A'_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Также если  $C$  - матрица перехода к новому базису, то известны равенства:  $A'_1 = C^T A_1 C$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Отсюда:

$$a'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A'_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} C^T A_1 C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Отсюда  $A'_1$  будет диагональной в случае  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$ .

**Определение.** Направления ненулевых векторов  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  и сами эти векторы называются сопряжёнными относительно линии второго порядка, заданной в некоторой с.к. уравнением с малой матрицей  $A_1$ , если выполнено  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$ .

**Замечание.** Направления или векторы  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  сопряжены  $\Leftrightarrow$   $\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  сопряжены.

**Утверждение.** Направления являются или не являются сопряжёнными вне зависимости от системы координат.

*Доказательство.* Из размышлений до определения видно, что сопряжённость не зависит от базиса, а также в уравнении линии второго порядка она зависит только от малой матрицы, т.е. не зависит от начала координат. А значит сопряжённость не зависит от системы координат в целом.  $\square$

## 42.2 Асимптотические направления

**Определение.** Направление (= ненулевой вектор)  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , сопряжённое самому себе, т.е.  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ , называется асимптотическим.

Далее во всех связанных с асимптотическими направлениями рассуждениях можем считать, что линия задана уравнением вида  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$  или  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$  - здесь и далее такой вид уравнения линии будем называть **простейшим**.

## 42.3 Пересечения линии и прямой

**Теорема.** 1. Если прямая  $l$  имеет асимптотическое направление относительно линии второго порядка  $L$ , то либо  $l$  имеет с  $L$  не более одной общей точки, либо  $l$  содержится в  $L$ .

2. Прямая  $l$  неасимптотического направления имеет с  $L$  не более двух общих точек (причём в случае ровно одной точки её обычно считают двумя совпадающими точками).

*Доказательство.* Пусть  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  - любое направление. Рассмотрим прямую  $l$  с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ :  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$  и подставим в простейшее уравнение линии  $F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c$  или  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$ . После приведения подобных слагаемых получим не более чем квадратное уравнение относительно  $t$ , в котором коэффициент перед  $t^2$  будет равен  $\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2$ . Тогда уравнение не может иметь больше двух корней в случае, если этот коэффициент ненулевой, то есть при  $\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$  - в случае неасимптотического направления. В случае асимптотического направления наше уравнение линейно, а значит оно либо не имеет решений, либо решение единственно, либо любое  $t$  является решением, т.е.  $l$  целиком содержится в  $L$ .  $\square$

**Следствие.** Никакие три точки эллипса, параболы или гиперболы не лежат на одной прямой.

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда по доказанной выше теореме имеем, что линия второго порядка содержит прямую, на которой лежат данные

точки. Докажем, что это невозможно:

- Эллипс: в канонической системе координат для его точек выполнены неравенства  $|x| \leq a, |y| \leq b$ , т.к.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , поэтому эллипс ограничен и не может содержать прямую;
- Парабола: в канонической системе координат для её точек выполнено неравенство  $x \geq 0$ , т.к.  $y^2 = 2px$ . Отсюда парабола не может содержать никакую прямую, кроме прямой вида  $x = c \geq 0$ , но уравнение  $y^2 = 2pc$  не может иметь более двух решений относительно  $y$ ;
- Гипербола: в канонической системе координат для её точек выполнено неравенство  $|x| \geq a$ , т.к.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , то есть она не может содержать точек прямой  $x = 0$ . Тогда она не может содержать никакую прямую, кроме прямой вида  $x = c \neq 0$ , но уравнение  $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  не может иметь более двух решений относительно  $y$ .

□

**Определение.** Из следствия видно, что прямая может содержаться целиком только в линии, представляющей собой пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых или пару совпадающих прямых. Такие линии называются распадающимися, так как задающие их многочлены  $F(x, y)$  распадаются в произведение двух линейных функций. (это свойство очевидно для этих линий в каноническом виде, а далее можем проделать обратные к приведению к каноническому виду операции, чтобы получить тот же результат для произвольного вида).

## Билет 43. Диаметры

### 43.1 Определение

Вернёмся к пересечению

### 43.2 Свойства

### 43.3 Сопряжённые диаметры

Мораль в том, что пупу...