Механико-математический факультет

Аналитическая геометрия, 1 семестр, 2 поток

Билеты

Москва
2024

Содержание

Билет 1. Векторные пространства и множества

1.1 Векторные пространства

Геометрические векторы в математике являются **свободными векторами** - классами эквивалентности направленных отрезков по уже известному нам отношению эквивалентности векторов.

Определение. Векторным (линейным) пространством (над полем $\mathbb{R}$) называется множество V с введенными на нем бинарными операциями "+": $V \times V \to V$ и "$*$": $\mathbb{R} \times V \to V$, отвечающие следующим свойствам (аксиомам):
$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность сложения);
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (ассоциативность сложения);
3. $\exists \bar{0} \in V : \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$ (существует нейтральный элемент по сложению - нулевой вектор);
4. $\exists (-\bar{a}) \in V : \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$ (существует противоположный элемент по сложению);
5. $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$ (ассоциативность умножения на числа);
6. $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ (дистрибутивность по умножению);
7. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (дистрибутивность по сложению);
8. $1 * \bar{a} = \bar{a}$.

Примеры. Векторные пр-ва:

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$:
- Функции;
- Многочлены;
- Многочлены степени $\leqslant n$.

Замечание. Св-ва векторных пространств:

1. $\bar{0}$ единственный.

   Пусть $\bar{0}_1, \bar{0}_2$ - нулевые векторы.

   Тогда $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2$, ч.т.д.

2. $-\bar{a}$ единственный.

   Пусть $-\bar{a}_1, -\bar{a}_2$ - противоположные к $\bar{a}$ векторы.

   Тогда $-\bar{a}_1 = -\bar{a}_1 + \bar{0} = -\bar{a}_1 + (\bar{a} + -\bar{a}_2) = (-\bar{a}_1 + \bar{a}) + (-\bar{a}_2) = \bar{0} + (-\bar{a}_2) = -\bar{a}_2$, ч.т.д.

3. $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$.

   $\lambda * \bar{0} = \lambda * (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda * \bar{0} + \lambda * \bar{0}$

   Прибавив к обеим частям вектор, противоположный к $\lambda * \bar{0}$, получим $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$, ч.т.д.

4. $-(\lambda \bar{a}) = (-\lambda)\bar{a} = \lambda(-\bar{a})$.

   Нетрудно видеть, что все три вектора противоположны $\lambda \bar{a}$, а далее из п.2.

5. $-\bar{a} = -1 * \bar{a}$

   Следует из п.4.

6. $\lambda \bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow$ либо $\lambda = 0$, либо $\bar{a} = \bar{0}$.

   Либо $\lambda = 0$, либо $\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} * \lambda * \bar{a} = \frac{1}{\lambda}\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0}$, ч.т.д.

1.2 Линейная комбинация векторов

Определение. Сумма вида $\lambda_1 \bar{x}_1 + ... + \lambda_n \bar{x}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$.

Определение. Если в линейной комбинации $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, то она называется тривиальной, а иначе - нетривиальной.

Определение. Если вектор $\bar{x}$ равен линейной комбинации $\lambda_1 \bar{x}_1 + ... + \lambda_n \bar{x}_n$, то говорят, что он линейно выражается (раскладывается) через векторы $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$. (Сама линейная комбинация $\lambda_1 \bar{x}_1 + ... + \lambda_n \bar{x}_n$ называется выражением (разложением) вектора $\bar{x}$ через $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$)

1.3 Линейно зависимые и линейно независимые множества и системы векторов

Определение. Упорядоченное множество векторов называется системой векторов. (В системе векторов элементы могут повторяться)

Определение. Множество векторов называется линейно зависимым, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов из этого множества. В противном случае оно называется линейно независимым.

Пример. Система из двух векторов $\bar{a}, \bar{b}$ линейно зависима $\Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}$.

Замечание. Множество векторов линейно зависимо $\Leftrightarrow$ один из векторов этого множества линейно выражается через некоторые другие векторы этого множества.

1.4 Полные множества и системы векторов

Определение. Множество (система) векторов из векторного пространства V называется полным(полной) в V, если любой вектор $\bar{x} \in V$ линейно выражается через векторы этого множества.

Замечание. $X \subset V$ полно в $V \Rightarrow \forall Y : X \subset Y$ полно в V.

Замечание. $X \subset V$ линейно независимо в $V \Rightarrow \forall Y \subset X$ линейно независимо в V.

Билет 2. Базис и размерность векторного пространства

2.1 Базис векторного пространства. Конечномерное векторное пространство.

Определение. Множество векторов E в векторном пространстве V называется базисом V, если E линейно независимо и полно в V.

Определение. Векторное пространство, в котором существует конечный (состоящий из конечного числа векторов) базис, называется конечномерным. В противном случае оно называется бесконечномерным.

2.2 Лемма о количестве векторов в ЛНЗ системе (аналог ОЛЛЗ)

Лемма. Если X - конечное полное множество из n векторов в векторном пространстве V и Y - линейно независимое множество векторов в V, то Y конечно и число векторов в $Y \leqslant n$.

Доказательство. (пер.) Произвольно занумеруем векторы в $X : (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$. Будем по одному добавлять в эту систему векторы из Y и одновременно выкидывать векторы из X так, чтобы система оставалась полной.

Пусть за k шагов ($0 \leqslant k \leqslant n$) мы добавили некоторые $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_k$ и выкинули какие-то k векторов из X - осталась система $(\bar{y_1}, ..., \bar{y_k}, \bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_{n-k}})$. Возьмём $\bar{y}_{k+1}$ из Y (если такого нет, то в $Y \leqslant n$ векторов, что нам и нужно), и добавим его в систему. Так как до этого система оставалась полной, $\bar{y}_{k+1}$ выражается через $(\bar{y_1}, ..., \bar{y_k}, \bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_{n-k}})$, причём какой-то $\bar{x}_{i_j}$ входит в это разложение с коэффициентом, не равным нулю (иначе противоречие с линейной независимостью Y - $\bar{y}_{k+1}$ выразился через $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_k$).

Тогда $\bar{x}_{i_j}$ выражается через другие векторы системы и $\bar{y}_{k+1}$ (в выражении $\bar{y}_{k+1}$ перенесём всё, кроме $\bar{x}_{i_j}$ в другую часть и разделим на коэффициент перед ним). А так как $(\bar{y_1}, ..., \bar{y_{k+1}}, \bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_{n-k}})$ - полная, эта же система без $\bar{x}_{i_j}$. очевидно, останется полной.

Пусть смогли проделать n таких шагов. Тогда имеем систему $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$. Если в Y есть ещё векторы, то они с одной стороны выражаются через векторы системы из её полноты, а с другой - не выражаются через них из линейной независимости Y. Противоречие, т.е. в Y не может оказаться больше n векторов, ч.т.д. □

2.3 Теорема о количестве векторов в базисе. Размерность векторного пространства.

Теорема. Если в векторном пространстве есть конечный базис, то все базисы в нём конечны и содержат одинаковое количество векторов.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - конечный базис в V. Любой другой базис V линейно независим, т.е. по лемме содержит $k \leqslant n$ векторов, а с другой стороны полон, т.е. первый базис по лемме содержит $n \leqslant k$ векторов. Отсюда $n = k$, ч.т.д. □

Определение. Количество векторов в любом базисе векторного пространства V называется размерностью V и обозначается $dimV$.

Примеры. $dim\ \bar{0} = 0, dim\ \pi(= dim\ \mathbb{R}^2) = 2, dim\ \mathbb{R}^3 = 3.$

Билет 3. Координаты в базисе

Теорема. В конечномерном векторном пространстве выражение любого вектора через базис определяется однозначно.

Доказательство. Если $\bar{x} = \lambda_1\bar{e}_1 + ... + \lambda_n\bar{e}_n = \lambda'_1\bar{e}_1 + ... + \lambda'_n\bar{e}_n$, то $\bar{x} - \bar{x} = \bar{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1)\bar{e}_1 + ... + (\lambda_n - \lambda'_n)\bar{e}_n$. Если эти два разложения различны, то равная нулю линейная комбинация базисных векторов нетривиальна, что противоречит линейной независимости базиса. То есть двух различных разложений быть не может, ч.т.д. $\square$

Определение. Пусть V - конечномерное векторное пространство и $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - базис в нём. Коэффициенты $\lambda_1, ..., \lambda_n$ в выражении любого вектора $x \in V$ через эти базисные векторы называются координатами вектора x в базисе $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$. ($\lambda_k$ называется k-й координатой)

Замечание. Векторы в n-мерном векторном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной строкой из n чисел из $\mathbb{R}$ (например, векторы ассоциированного с евклидовой плоскостью векторного пространства соответствуют парам чисел) Таким образом можно задать операции сложения и умножения на число векторов плоскости через операции над числами, проводимыми покоординатно.

Билет 4. Аффинные пространства

4.1 Аффинное пространство

Элементы плоскости (как множества) - точки, а не векторы, поэтому для работы непосредственно с плоскостью необходимо ввести данное определение.

Определение. Аффинное пространство - тройка $(X, V, +)$ (обычно обозначается $\mathbb{A}$), где X - множество (точек), V - векторное пространство, а $''+''$ операция: $X \times V \to X$, для которых выполнены аксиомы:

1. $\forall A \in X, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V : A + (\bar{a} + \bar{b}) = (A + \bar{a}) + \bar{b}$;

2. $\forall A \in X : A + \bar{0} = A$;

3. $\forall A, B \in X \ \ \exists! \ \bar{a} \in V : A + \bar{a} = B$. Обозначается $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$.

4.2 Радиус-векторы и репер

Если зафиксировать какую-нибудь точку $O \in X$, возникает взаимно однозначное соответствие между точками A и их радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$.

Определение. Репер (система координат) в аффинном пространстве $(X, V, +)$ - пара (O, E), где $O \in X$ и E - базис в V. Точка O называется началом координат (отсчёта). Координаты точки А в (O, E) - координаты её радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе E.

Замечание. Для аффинного пространства верно:

1. Если $A = (x_1, ..., x_n), \bar{a} = (y_1, ..., y_n)$, то $A + \bar{a} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
2. Если $A = (a_1, ..., a_n), B = (b_1, ..., b_n)$, то $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$.

(Следует из сложения векторов)

4.3 Конечномерное аффинные пространства и их размерность

Определение. Если $\mathbb{A} = (X, V, +)$ - аффинное пространство, то говорят, что V - векторное пространство, ассоциированное с $\mathbb{A}$.

Определение. $\mathbb{A}$ называется конечномерным, если ассоциированное с ним V конечномерно. В этом случае $dim\mathbb{A}$ (размерность $\mathbb{A}$) равна $dimV$.

Теперь точки аффинного пространства аналогично векторам можно ассоциировать с наборами чисел. Однако для ассоциирования евклидовой плоскости и её аксиом с двумерным аффинным пространством, необходимы отвечающие аксиомам понятия прямой и расстояния.

Билет 5. Подпространства

5.1 Векторное подпространство

Определение. Векторным подпространством векторного пространства V называется непустое множество $V_1 \subset V$ такое. что $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_1 : \bar{x} + \bar{y} \in V_1, \lambda\bar{x} \in V_1 (\forall \lambda \in \mathbb{R})$.

Замечание. Определение эквивалентно следующему: множество $V_1 \subset V$ - векторное подпространство V, если V_1 является векторным пространством относительно операций $+$ и $*$, определённых для V. (Доказательство осуществляется путём прямой проверки аксиом векторного пространства для V_1)

5.2 Аффинное подпространство

Введём несколько определений аффинного подпространства и докажем их эквивалентность.

Определение. Аффинным подпространством аффинного пространства $\mathbb{A} = (X, V, +)$ называется

1. его непустое подмножество вида $A+V_1 = A + \bar{a} : \bar{a} \in V_1$, где V_1 - векторное подпространство V и $A \in X$ - точка;

2. тройка $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$, где V_1 - векторное подпространство V и операция $+_1 = +$, для которой $\forall A, B \in X_1, \forall \bar{a} \in V_1 : A + \bar{a} \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1$;

3. тройка $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$, где V_1 - векторное подпространство V и операция $+_1 = +$, которая сама является аффинным пространством.

Утверждение. Приведённые определения эквивалентны.

Доказательство. Докажем следующие следствия:

1 $\Rightarrow$ 2 Пусть $P = A + \bar{a}, Q = A + \bar{b}$. Тогда $\overrightarrow{PQ} = \bar{b} - \bar{a}$ (в силу единственности такого вектора), т.е. $\overrightarrow{PQ} \in V_1$. Второе необходимое свойство 2 очевидно выполнено.

2 $\Rightarrow$ 1 Пусть X_1, V_1 удовлетворяют 2. Зафиксируем произвольную $A \in X_1$. $\forall B \in X_1$ имеем $B = A + \overrightarrow{AB}$, причём $A \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1 \Rightarrow B \in X_1$.

Эквивалентность 2 $\Leftrightarrow$ 3 очевидна из определения аффинного пространства. □

5.3 Прямая в аффинном пространстве

Определение. Прямая в аффинном пространстве - его одномерное аффинное подпространство.
Плоскость (двумерная) в аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

Определение. Единственный вектор в любом базисе векторного пространства, ассоциированного с одномерным аффинным пространством, называется направляющим вектором этого аффинного пространства.

Билет 6. Скалярное произведение

6.1 Скалярное произведение

Определение. Пусть V - векторное пространство. Скалярным произведением в V называется функция $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $(\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0\ \forall \bar{x} \in V$, причём $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (положительная определённость);

2. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ (коммутативность);

3. $(\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\bar{z}) = \alpha(\bar{x},\bar{z})+\beta(\bar{y},\bar{z})$ $\forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in V, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (линейность по первому аргументу)

Из коммутативности выполнена и линейность по второму аргументу, т.е. скалярное произведение - билинейная функция.

6.2 Евклидово векторное и точечно-евклидово аффинное пространство

Определение. Конечномерное аффинное (векторное) пространство вместе со скалярным произведением называется точечно-евклидовым (евклидовым) пространством. Двумерное точечно-евклидово пространство называется евклидовой плоскостью.

6.3 Длина вектора и расстояния между точками

Определение. Длиной вектора называется величина $\sqrt{(\bar{x},\bar{x})}$.

Определение. Расстоянием (евклидовым) между точками $A, B \in \mathbb{A}$ называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$. Будем обозначать $d(A,B)$ как $|\overrightarrow{AB}|$.

6.4 Выражение скалярного произведения через длины

Замечание. Зная длины всех векторов, скалярное произведение можно восстановить по формуле $(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}(|\bar{x}+\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2)$. Это несложно проверить: $\frac{1}{2}(|\bar{x}+\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2) = \frac{1}{2}((\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}) - (\bar{x},\bar{x}) - (\bar{y},\bar{y})) = \frac{1}{2}(2(\bar{x},\bar{y})) = (\bar{x},\bar{y})$.

Билет 7. Неравенство Коши-Буняковского

7.1 Неравенство Коши-Буняковского

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall\bar{a},\bar{b}\in V \quad (\bar{a},\bar{b}) \leqslant \sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})}$, причём равенство достигается только при $\bar{a} = \lambda\bar{b}$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $(\bar{a}+t\bar{b},\bar{a}+t\bar{b})$. Оно равно нулю $\Leftrightarrow \bar{a} = -t\bar{b}$, т.е. может быть равно нулю не более чем при одном t. С другой стороны $(\bar{a}+t\bar{b},\bar{a}+t\bar{b}) = (\bar{a},\bar{a}) + 2(\bar{a},\bar{b})t + (\bar{b},\bar{b})t^2$ - квадратный трёхчлен относительно t. Его дискриминант равен $4(\bar{a},\bar{b})^2 - 4(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})$, а из первого рассуждения знаем, что дискриминант $\leqslant 0$, причём равенство достигается только в случае коллинеарности $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Отсюда $(\bar{a},\bar{b}) \leqslant \sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})}$, ч.т.д. $\square$

7.2 Величина угла и ортогональные векторы

Определение. Величиной угла между ненулевыми векторами $\bar{a}, \bar{b}$ называется число $arccos\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ (из н. Коши-Буняковского $|\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}| \leqslant 1$).

Определение. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

Билет 8. Прямоугольная система координат

8.1 Ортонормированный базис и прямоугольная система координат

Определение. Базис векторного пространства V со скалярным произведением называется ортонормированным, если все его векторы попарно ортогональны и имеют длину 1.

Определение. Система координат в точечно-евклидовом пространстве называется прямоугольной, если её базис ортонормированный.

8.2 Выражение скалярного произведения через координаты векторов

Утверждение. В точечно-евклидовом пространстве верно следующее выражение скалярного произведения через координаты векторов: если в некотором базисе $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$.

Доказательство. $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + ... + y_n\bar{e}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i\bar{e}_i, y_1\bar{e}_1 + ... + y_n\bar{e}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(\bar{e}_i, y_1\bar{e}_1 + ... + y_n\bar{e}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ □

8.3 Выражение для прямоугольной системы координат

Замечание. В случае, когда базис ортонормированный, имеем $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ (здесь и далее используется символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$), т.е. $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$. То есть в прямоугольной системе координат длина вектора вычисляется по формуле $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, а расстояние между точками $P = (x_1, ..., x_n), Q = (y_1, ..., y_n)$ выражается как

$$\boxed{|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}}$$

Билет 9. Проектирование

Определение. Пусть задано два векторных подпространства V_1, V_2 векторного пространства V такие, что $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$ и $V_1 + V_2 = V$ (обозначается $V = V_1 \oplus V_2$). Тогда сумма $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x} \in V, \bar{x}_1 \in V_1, \bar{x}_2 \in V_2$, определена единственно. (Следует, например, из того, что в любом базисе V каждый его вектор лежит либо в V_1, либо в V_2, тогда разложение в эту сумму соответствует единственному разложению по базису). Проекцией вектора $\bar{x} \in V$ на V_1 параллельно V_2 называется слагаемое $\bar{x_1}$ этой суммы.

Определение. Пусть задано два аффинных подпространства $\mathbb{A}_1 = (X_1, V_1, +)$, $\mathbb{A}_2 = (X_2, V_2, +)$ аффинного пространства $\mathbb{A} = (X, V, +)$ такие, что $V = V_1 \oplus V_2$. Проекция точки $P \in \mathbb{A}$ на $\mathbb{A}_1$ параллельно $\mathbb{A}_2$ - точка $P_1 = A_1 + \bar{v}$, где A_1 - произвольная точка из X_1, а $\bar{v}$ - проекция $\overrightarrow{A_1P}$ на V_1 параллельно V_2. (Очевидно, что от выбора A_1 расположение проеции не зависит)

Пример. Рассмотрим координаты точки евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат.
Найдём проекцию точки $A = (x, y)$ на прямую Oy параллельно прямой Ox. По определению это точка (назовём её A_y), равная $O + \bar{v}$, где $\bar{v}$ - проекция $\overrightarrow{OP}$ на векторное пространство прямой Oy параллельно Ox. $\overrightarrow{OP} = \{x, y\} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$. Отсюда $\bar{v} = y\bar{e}_2 = \{0, y\}$, то есть $A_y = (0, y)$. Аналогично $A_x = (x, 0)$.

Билет 10. Ортонормированный базис

Определение смотри в пункте 8.1 Пусть $\mathbb{A}^n = (X, V^n, +)$ - n-мерное точечно-евклидово пространство.

10.1 Линейная независимость ортогональных векторов

Утверждение. В V^n любая линейно независимая система из n векторов образует базис.

Доказательство. Предположим, что в V^n существует неполная линейно независимая система из n векторов. Т.к. система не полная, существует вектор из

V^n, не выражающийся через векторы этой системы, т.е. этот вектор можно добавить в систему без потери линейной независимости. Но по лемме-аналогу ОЛЛЗ линейно независимая система в V^n не может иметь $> n$ векторов. Противоречие, т.е. любая линейно независимая система из n векторов является полной, а значит и базисом, ч.т.д. □

Утверждение. Если $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - попарно ортогональные ненулевые векторы в евклидовом пространстве, то $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ линейно независимы.

Доказательство. Предположим противное. Пусть один из векторов (без ограничения общности $\bar{e}_n$) линейно выражается через остальные: $\bar{e}_n = \lambda_1 \bar{e}_1 + ... + \lambda_{n-1}\bar{e}_{n-1}$. Тогда запишем квадрат его длины: $|\bar{e}_n|^2 = (\bar{e}_n, \bar{e}_n) = (\bar{e}_n, \lambda_1 \bar{e}_1 + ... + \lambda_{n-1}\bar{e}_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0$ (т.к. $\bar{e}_n$ ортогонален всем остальным векторам). Отсюда $|\bar{e}_n| = 0$, и притом $\bar{e}_n$ ненулевой. Противоречие, т.е. никакой вектор системы не выражается через остальные, а значит система линейно независима. ч.т.д. □

10.2 Теорема о существовании ортонормированного базиса

Теорема. В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. (пер.) Индукция по n - размерности пространства:

База: $n = 1$ - очевидно, что существует вектор длины 1, который составляет ортонормированный базис одномерного пространства;

Шаг: Пусть в любом n-мерном пространстве существует ортонормированный базис. Рассмотрим пространство V размерности $n + 1$ и выберем базис какого-то n-мерного подпространства W (пусть $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$). Найдём вектор, ортогональный всем выбранным векторам. Так как базис W не полон в V, к нему можно добавить ещё один вектор $x \in V$ без потери линейной независимости $\Rightarrow$ $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n, \bar{x})$ - базис в V (ЛНЗ система из $n + 1$ векторов).
Теперь необходимо представить $\bar{x}$ как следующую сумму: $\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + ... + \lambda_n \bar{e}_n + \bar{e}_{n+1}$, где $\bar{e}_{n+1}$ ортогонален $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$. Тогда $\bar{e}_{n+1} = \bar{x} - \lambda_1 \bar{e}_1 - ... - \lambda_n \bar{e}_n$. Рассмотрим $(\bar{e}_{n+1}, \bar{e}_k) = (\bar{x} - \lambda_1 \bar{e}_1 - ... - \lambda_n \bar{e}_n, \bar{e}_k) = (\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_k) - ... - \lambda_n(\bar{e}_n, \bar{e}_k)$. Так как $\bar{e}_k$ ортогонально всем этим векторам, кроме $\bar{e}_k$ и $\bar{x}$, это выражение равно $(\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_k(\bar{e}_k, \bar{e}_k)$. Отсюда при $\lambda_k = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_k)}{(\bar{e}_k, \bar{e}_k)}$ векторы $\bar{e}_{n+1}$ и $\bar{e}_k$ ортогональны (зависит только от λ_k). Составив таким образом все $\lambda_1, ..., \lambda_n$, получим выражение

вектора $\bar{e}_{n+1}$, ортогонального всем векторам базиса W. Таким образом, векторы полученной системы $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_{n+1}$ попарно ортогональны (по предположению индукции) $\Rightarrow$ линейно независимы $\Rightarrow$ образуют базис в V. Разделив $\bar{e}_{n+1}$ на его длину, получим, что все векторы базиса попарно ортогональны и имеют длину $1 \Rightarrow V$ имеет ортонормированный базис, ч.т.д. $\square$

Следствие. Любую систему ортогональных векторов длины 1 в векторном пространстве можно дополнить до ортонормированного базиса.

Билет 11. Прямые и их уравнения

11.1 Определения прямой и направляющего вектора

Смотри пункт 5.3

11.2 Уравнения прямой

Вывод формул (**уравнения прямой**). Пусть l - прямая на плоскости: $l = \{X : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\bar{v}\}$, где M - точка прямой, $\bar{v}$ - её направляющий вектор. Если $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, то из совпадения координат совпадающих векторов $\overrightarrow{OX}$ и $(\overrightarrow{OM} + t\bar{v})$ верно следующее: (**параметрические уравнения прямой**)

$$\boxed{X \in l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}}$$

Выразим t из первого уравнения и подставим во второе уравнение - получим **каноническое уравнение прямой**:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}}$$

(Заметим, что данное выражение не определено при нулевых a или b, но очевидно, что они не равны нулю одновременно, а запись, где одна из дробей имеет знаменатель 0, иногда используется, поэтому здесь и далее случай равенства нулю знаменателя может не рассматриваться как отдельный и будет означать, что числитель должен равняться 0)

Если известно, что прямой принадлежат $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, то $\overrightarrow{MN} =$

$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ - направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

(**уравнение прямой по двум точкам**).
Домножим каноническое уравнение прямой на знаменатели: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \Rightarrow bx - bx_0 = ay - ay_0 \Rightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$. Такое уравнение обычно называют **общим уравнением прямой** и записывают как

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Замечание. Для прямых в пространстве подобным образом выводятся параметрические и каноническое уравнения.

Замечание. Заметим также, что из итоговой формулы вывода общего уравнения ($bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$) следует, что для прямой $Ax + By + C = 0$ вектор $(B, -A)$ (а соответственно и $(-B, A)$) является направляющим.

11.3 Критерий уравнения прямой (нет в билете, важно)

Утверждение. $Ax + By + C = 0$ является уравнением прямой $\Leftrightarrow$ A и B не равны нулю одновременно.

Доказательство.
$\Rightarrow$ Если $Ax + By + C = 0$, то её направляющий вектор ненулевой, а значит вектор $(-B, A)$ ненулевой, то есть одна из его координат $\neq 0$.
$\Leftarrow$ Пусть без ограничения общности $A \neq 0$. Тогда этому уравнению удовлетворяет точка $(x_0, y_0) = (-\frac{C}{A}, 0)$, а значит (нетрудно проверить) все удовлетворяющие ему точки имеют вид $(x_0 + Bt, y_0 - At)$, что соответствует прямой с такими параметрическими уравнениями. □

Билет 12. Взаимное расположение прямых

12.1 Случай общих уравнений

Теорема. Прямые на плоскости параллельны (или совпадают) $\Leftrightarrow$ их направляющие векторы пропорциональны.

Доказательство. Пусть $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - данные прямые. Рассмотрим систему уравнений, которой удовлетворяют координаты точек, принадлежащих обоим прямым: $\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$

Из курса алгебры (формула Крамера) известно, что система не является определённой $\Leftrightarrow det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 0$. Таким образом, прямые параллельны или совпадают $\Leftrightarrow$ имеют 0 или бесконечно много общих точек $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$ пропорционален $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$, ч.т.д. □

Замечание. Из этого также видно, что прямые совпадают $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

12.2 Случай параметрических уравнений

Следствие. Прямые $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \end{cases}; l_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \end{cases}$ пересекаются $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Условие совпадения прямых также можно записать через параметрические уравнения (вектор $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \lambda(a, b)$).

Из этого также следует, что через две различные точки проходит ровно одна прямая (все такие прямые совпадают).

Билет 13. Пучки прямых

13.1 Определение пучка прямых

Определение. Собственным пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через данную точку, называемую центром пучка.

Несобственным пучком прямых называется множество всех прямых, параллельных данной прямой.

13.2 Уравнение собственного пучка прямых

Теорема. Пусть прямые $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая l принадлежит пучку $\Leftrightarrow l$ задаётся уравнением $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ $(*)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$\Leftarrow$ Пусть l задаётся уравнением $(*)$. Тогда, подставив в уравнение l центр пучка (x_0, y_0), получим $\lambda(0) + \mu(0) = 0$ (т.к. центр удовлетворяет уравнениям l_1, l_2).
$\Rightarrow$ Пусть $(x_0, y_0) \in l$. Возьмём произвольную точку $(x_1, y_1) \in l, (x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$. Рассмотрим прямую вида $(*)$ с $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2),\ \mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)$: $-(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$. Заметим, что это уравнение действительно задаёт прямую: в противном случае необходимы условия $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = 0$, но тогда (A_1, B_1) и (A_2, B_2) пропорциональны, а исходные прямые непараллельны. Такой прямой, очевидно, принадлежат точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Так как через две различные точки проходит ровно одна прямая, любая прямая из собственного пучка имеет вид $(*)$, ч.т.д. $\square$

13.3 Уравнение несобственного пучка прямых

Теорема. Пусть прямые $l_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$ задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая l принадлежит пучку $\Leftrightarrow$ l задаётся уравнением $\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2) = 0$ $(*)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$\Leftarrow$ Так как $l_1 \parallel l_2$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. Тогда если l имеет вид $(*)$, то $\frac{\lambda A_1+\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1+\mu B_2}{B_1} \Rightarrow l \parallel l_1$.
$\Rightarrow$ Пусть l принадлежит пучку. Так как направляющие векторы l, l_1 и l_2 пропорциональны, можем домножить уравнения на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть $l_1 : Ax+By+C_1 = 0;\ l_2 = Ax+By+C_2 = 0;\ l = Ax + By + C_3 = 0$.
Тогда возьмём λ, μ из следующей системы (получена из равенства коэффициентов $\lambda l_1 + \mu l_2$ и l): $\begin{cases} C_1\lambda + C_2\mu = C_3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{C_3-C_2}{C_1-C_2} \\ \mu = \frac{C_1-C_3}{C_1-C_2} \end{cases}$ $(C_1 \neq C_2$, иначе l_1 и l_2 совпадают). Очевидно, что для таких λ, μ уравнение l имеет вид $(*)$ (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д. $\square$

Билет 14. Отрезки

14.1 Отрезки на плоскости

Определение. Пусть l - прямая, $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in l$ и $X_1 \neq X_2$. Отрезком с концами X_1, X_2 на плоскости называется множество всех точек, лежащих между X_1 и X_2 (на прямой l). Обозначается $[X_1, X_2]$.

Вывод формулы (Уравнение отрезка)**.** Пусть $X \in [X_1, X_2]$. Тогда знаем, что $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (X \in l) \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $t\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_1X} \Rightarrow \overrightarrow{XX_2} = (1-t)\overrightarrow{X_1X_2}$. Отсюда видно, что $|\overrightarrow{X_1X}|$ и $|\overrightarrow{XX_2}| < |\overrightarrow{X_1X_2}| \Leftrightarrow t \in [0, 1]$. Отсюда

$$\boxed{X \in [X_1, X_2] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ t \in [0, 1] \end{cases}}$$

Определение. Отрезком в произвольном аффинном пространстве называется множество точек $[X_1, X_2] = \{X_1 + t\overrightarrow{X_1X_2}, t \in [0, 1]\}$

Билет 15. Полуплоскости

15.1 Выпуклые множества

Определение. Множество X в произвольном аффинном пространстве называется выпуклым, если $\forall\ X_1, X_2 \in X \quad [X_1, X_2] \subset X$.

15.2 Полуплоскости как выпуклые множества

Определение. Пусть в аффинной системе координат $l : Ax + By + C = 0$. Множества $\Pi_0^+ = \{X(x, y) : Ax + By + C \geqslant 0\}$ и $\Pi_0^- = \{X(x, y) : Ax + By + C \leqslant 0\}$ называются замкнутыми полуплоскостями, а множества $\Pi^+ = \{X(x, y) : Ax + By + C > 0\}$ и $\Pi^- = \{X(x, y) : Ax + By + C < 0\}$ - открытыми полуплоскостями.

Теорема. Для любой прямой $l : Ax + By + C = 0$ множества $\Pi_0^+, \Pi_0^-, \Pi^+, \Pi^-$ выпуклы.

Доказательство. Рассмотрим Π_0^+ (остальные аналогично).
Пусть $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in \Pi_0^+$. Знаем, что любая точка $X \in [X_1, X_2]$ имеет координаты $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2), 0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C \geqslant 0 \\ Ax_2 + By_2 + C \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tC \geqslant 0 \\ (1-t)Ax_2 + (1-t)By_2 + (1-t)C \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C \geqslant 0 \Rightarrow X \in \Pi_0^+$, ч.т.д. □

Билет 16. Углы между прямыми

16.1 Определение угла

Определение. Пусть l - прямая, $O \in l, \bar{v}$ - любой направляющий вектор l. Множества $l^+ = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \geqslant 0\}$ и $l^- = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \leqslant 0\}$ называются лучами, на которые O делит l.

Замечание. Если даны два луча с общим началом (обозначим их l_1^+, l_2^+), то они являются подмножествами однозначно определённых прямых l_1, l_2, для которых можно выбрать направляющие векторы так, чтобы лучи соответствовали формуле из определения (назовём эти векторы $\bar{v}_1, \bar{v}_2$).

Определение. Углом на плоскости называется объединение двух лучей с общим началом. Величиной угла $l_1^+ \cup l_2^+$ называется величина угла между векторами $\bar{v}_1, \bar{v}_2$, определёнными как в замечании. Говорят, что один угол меньше другого, если величина первого угла меньше величины второго.

Определение. Угол называется прямым, если его величина равна $\frac{\pi}{2}$($\Leftrightarrow$ направляющие векторы лучей ортогональны). Угол называется развёрнутым, если его величина равна π($\Leftrightarrow$ образующие угол лучи дополняют друг друга до прямой).

Замечание. В дальнейшем будем иногда называть углом величину угла. Также аналогичным образом можно говорить о величине угла между вектором и прямой

16.2 Определение угла между двумя прямыми

Определение. Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами с началом в их точке пересечения этих прямых и лежащих на этих прямых, если прямые пересекаются. Если прямые параллельны или совпадают, то угол между ними равен нулю. Обозначается $\angle(l_1 l_2)$.

Определение. Прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Определение. Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую, называется прямая, проходящая через точку и перпендикулярная прямой, либо отрезок этой прямой с концами в данной точке и точке пересечения прямой с данной.

16.3 Угол между прямыми в прямоугольной системе координат

Вывод формулы (Угол между прямыми в прямоугольной с.к.)**.** Пусть $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - прямые в прямоугольной системе координат. Тогда их направляющие векторы равны $\begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \bar{v}_1, \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \bar{v}_2$. Отсюда (выражение скалярного произведения): $\cos\angle(l_1, l_2) = |\cos\angle(\bar{v}_1, \bar{v}_2)| \Rightarrow$

$$\boxed{\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

(модуль в косинусе, а соответственно и в числителе формулы, позволяет сразу взять меньший угол).

16.4 Условие перпендикулярности. Нормаль

Следствие. Прямые $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ перпендикулярны $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Определение. Нетрудно проверить, что в прямоугольной системе координат вектор $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ перпендикулярен вектору $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$, а значит и прямой $l : Ax + By + C = 0$. Вектор $\bar{n}$ называется нормалью (нормальным вектором) прямой l (в прямоугольной с.к.)

Замечание. Любой вектор, коллинеарный нормали, также является нормалью, так как уравнения $Ax + By + C = 0$ и $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ задают одну и ту же прямую.

Билет 17. Расстояние от точки до прямой

17.1 Определение расстояния между множествами точек

Определение. Пусть A, B - множества в точечно-евклидовом пространстве. Расстоянием от A до B называется число $\inf\{|XY|, X \in A, Y \in B\}$ Расстояние от точки до прямой определяется аналогично. когда $A = \{X\}$ (его часто обозначают $d(X, l)$).

Замечание. У множества из определения существует нижняя грань, т.к. оно является ограниченным снизу подмножеством действительных чисел (принцип полноты Вейерштрасса из курса математического анализа).

17.2 Расстояние от точки до прямой

Теорема. Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Доказательство. Пусть заданы $l : Ax+By+C = 0$ и X_0 - произвольные прямая и точка. Выберем на l произвольную точку X_1. Проведём через X_0 прямую l' с направляющим вектором $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ - она будет перпендикулярна l, а значит имеет с ней единственную общую точку - назовём её X_2. Имеем: $|\overrightarrow{X_1X_0}|^2 = (\overrightarrow{X_1X_0}, \overrightarrow{X_1X_0}) = (\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_0}, \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_0}) = |\overrightarrow{X_1X_2}|^2 + |\overrightarrow{X_2X_0}|^2 \geqslant |\overrightarrow{X_2X_0}|^2$. Отсюда $|\overrightarrow{X_2X_0}|^2$ - минимум всех расстояний между X и точкой прямой, т.е. он достигается в точке пересечения l и l', ч.т.д. $\square$

Замечание. Расстояние между двумя прямыми на плоскости $\neq 0 \Leftrightarrow$ они параллельны и не совпадают (у них нет общих точек). В этом случае расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой.

Вывод формулы (Расстояние от точки до прямой в прямоугольной с.к.). Пусть $X_0 = (x_0, y_0), l : Ax+By+C = 0$. Посчитаем $d(X_0, l)$. Проведём через X_0 перпендикуляр l' к прямой l. Направляющий вектор l' - $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, то есть его параметрические уравнения - $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$. Найдём t_1, удовлетворяющее точке пересечения: имеем $A(x_0 + At_1) + B(y_0 + Bt_1) + C = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$. Отсюда точка пересечения X_1 имеет координаты $(x_0 + At_1, y_0 + Bt_1)$. Тогда

$\overrightarrow{X_0X_1} = \begin{pmatrix} At_1 \\ Bt_1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{X_0X_1}|^2 = A^2t_1^2 + B^2t_1^2 = (A^2+B^2)t_1^2 = \frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$, а значит

$$\boxed{d(X,l) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Билет 18. Преобразования координат векторов. Матрица перехода

Вывод формулы (Матрица перехода)**.** Пусть $E = (\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$ и $E' = (\bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n)$ - два базиса в одном и том же евклидовом пространстве V. Будем называть E старым базисом, а E' - новым. Получим формулу для координат в старом базисе вектора $\bar{x} \in V$, заданного в новом базисе координатами $(x'_1, ..., x'_n)$.
Итак, пусть в старом базисе $\bar{x}$ имеет координаты $(x_1, ..., x_n)$. Установим связь между базисами, выразив векторы нового базиса через старый: пусть
$\bar{e}'_i = c_{1i}\bar{e}_1 + ... + c_{ni}\bar{e}_n$, т.е. $\bar{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$. Подставляя эти выражения, получим:
$\bar{x} = x'_1\bar{e}'_1 + ... + x'_n\bar{e}'_n = x'_1(c_{11}\bar{e}_1 + ... + c_{n1}\bar{e}_n) + ... + x'_n(c_{1n}\bar{e}_1 + ... + c_{nn}\bar{e}_n) =$
$= (c_{11}x'_1 + ... + c_{1n}x'_n)\bar{e}_1 + ... + (c_{n1}x'_1 + ... + c_{nn}x'_n)\bar{e}_n \Rightarrow$ (из равенства координат)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

Определение. Такая матрица C называется матрицей перехода от базиса E к базису E'.

Замечание. Столбцы матрицы C являются координатами базисных векторов E' в базисе $E \Rightarrow$ столбцы C линейно независимы $\Rightarrow C$ невырожденная (из курса алгебры).

Билет 19. Матрица Грама. Формула скалярного произведения.

Вывод формулы. Рассмотрим также скалярное произведение векторов в случае, когда базис E ортонормированный. Если $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (в базисе E), имеем: $(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} C^T C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ (так как $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \left(C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right)^T$). Нетрудно видеть, что произведение матриц $C^T C$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} (\bar{e}'_1,\bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_1,\bar{e}'_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\bar{e}'_n,\bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_n,\bar{e}'_n) \end{pmatrix}$ (строки C^T и столбцы C - координаты векторов базиса E' в базисе E)

Такая матрица называется матрицей Грама (матрицей скалярных произведений) для базиса E'. Так как матрица G не зависит от базиса E, получаем формулу для скалярного произведения в произвольном базисе:

$$\boxed{(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}}$$

Билет 20. Выражения матриц перехода

Следствие (1)**.** Если C и C_1 - матрицы перехода от базиса E к E' и от E' к E'' соответственно, то матрица перехода от базиса E к E'' равна CC_1

Следствие (2)**.** Если C - матрица перехода от базиса E к E', то матрица перехода от базиса E' к E равна C^{-1}.

Билет 21. Критерий матрицы перехода

Замечание. Пусть $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - базис векторного пространства V. Тогда векторы $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n \in V$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ столбцы их координат линейно независимы. Это очевидно следует из представления линейной комбинации $\lambda_1\bar{x}_1 + ... + \lambda_n\bar{x}_n = 0$ через координаты.

Теорема. Для произвольного данного базиса матрица C является матрицей перехода к некоторому другому базису $\Leftrightarrow \det C \neq 0$.

Доказательство. Следует из утверждения из курса алгебры о том, что матрица невырожденна $\Leftrightarrow$ её столбцы линейно независимы ($\Leftrightarrow$ векторы-столбцы образуют базис). $\square$

Билет 22. Преобразования координат точек

Вывод формулы (Координаты точки при перемене с.к.)**.** Пусть заданы два репера $O\bar{e}_1...\bar{e}_n$ и $O'\bar{e}'_1...\bar{e}'_n$. Для этого необходимо задать новый репер через старый: пусть C - матрица перехода от $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ к $\bar{e}'_1...\bar{e}'_n$, а вектор $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$.

Пусть X - произвольная точка с координатами $(x_1, ..., x_n)$ в старой системе координат и $(x'_1, ..., x'_n)$ в новой. Тогда $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Также $\overrightarrow{O'X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в новой с.к. $\Rightarrow C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в старой. Осталось заметить, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$, а отсюда (через старую с.к.)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

Выразим новые координаты, умножив слева на C^{-1}:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = -C^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

(отметим также, что $-C^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ - новые координаты вектора $O'O$)

Билет 23. Ортогональные матрицы

23.1 Определение. Критерии ортогональности

Определение. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется ортогональной.

Теорема. Для $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ следующие утверждения равносильны:

1. C - ортогональная;
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}$ ("скалярное произведение"столбцов равно δ_{ij});
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}$ ("скалярное произведение"строк равно δ_{ij});
4. $CC^T = E$;
5. $C^TC = E$;
6. $C^T = C^{-1}$;

Доказательство. (в конспекте указан "прямой подсчёт")
Для начала заметим равносильность утверждений 4, 5, 6: 4 $\Leftrightarrow$ 6 $\Leftrightarrow$ 5 по определению обратной матрицы, т.к. из 4 и 5 очевидно следует обратимость матрицы C.
1 $\Rightarrow$ 2: Столбцы матрицы C - координаты векторов ортонормированного базиса E в другом ортонормированном базисе E'. Рассмотрим скалярное произведение $(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j)$: с одной стороны оно равно $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj}$ (так как базис E ортонормирован, можем применять формулу с матрицей Грама, причём $G = E$ из ортонормированности E_1), а с другой стороны - δ_{ij} (из ортонормированности E_1).
1 $\Leftarrow$ 2: Из 2 знаем, что векторы с координатами в столбцах попарно ортогональны и имеют длину 1 в базисе, в котором записаны эти координаты. Значит, применив такое преобразование к векторам ортонормированного базиса, получим также попарно ортогональные векторы длины 1, т.е. C - ортогональная.
2 $\Leftrightarrow$ 5: Оба условия равносильны тому, что элемент C^TC на позиции ij равен δ_{ij}.
Аналогично 3 $\Leftrightarrow$ 4.
Итого 1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 6 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 3. □

Следствие. Для ортогональной $C : |C^T| = |C|, \ |C^TC| = |E| = 1 \Rightarrow |C| = \pm 1$

Следствие. (Из определения ортогональной матрицы)
Произведение ортогональных матриц - ортогональная матрица.
Матрица, обратная ортогональной, ортогональна.

23.2 Двумерный случай

Вывод формулы. (Двумерный случай ортогональной матрицы)
$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ортогональна $\Rightarrow a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \varphi : a = \cos\varphi, c = \sin\varphi.$
Из теоремы $a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\sin\varphi,\ d = \pm\cos\varphi.$
Из ортогональности столбцов следует, что $ab + cd = 0$, поэтому остаются следующие случаи:

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};\ \ C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -cos\varphi \end{pmatrix}}$$

т.е. для любой ортогональной C найдётся φ такой, что C имеет один из видов выше. Несложно также убедиться, что любая матрица такого вида ортогональна: первая производит поворот на угол φ, а вторая - поворот с отражением.

Билет 24. Ориентация векторных пространств

Определение. Два базиса в конечномерном векторном пространстве называются одинаково ориентированными (одноимёнными), если матрица перехода от одного базиса к другому имеет положительный определитель. В противном случае базисы называются противоположно ориентированными (разноимёнными).

Теорема. Отношение одноимённости является отношением эквивалентности на множестве базисов.

Доказательство. По определению отношения эквивалентности:

- рефлексивность: матрица перехода от базиса в себя равна E, $|E| = 1$;
- симметричность: $C : E \to E' \Rightarrow C^{-1} : E' \to E$, причём $|CC^{-1}| = 1$, т.е. $|C|$ и $|C^{-1}|$ одного знака;
- транзитивность: $C : E \to E',\ C' : E' \to E'', C'' : E \to E'' \Rightarrow C'' = CC'$, т.е. из одноимённостей E с E' и E' с E'' следует одноимённость E с E''.

□

Определение. Ориентацией векторного пространства, а также любого аффинного пространства, с которым оно ассоциировано, называется выбор любого из двух классов эквивалентности по отношению одноимённости и объявления базисов в нём положительными (а остальных - отрицательными).
(Достаточно выбрать один базис и объявить его положительным)

Билет 25. Ориентация пар векторов. Углы с учётом ориентации

25.1 Ориентация на плоскости

Пример. Ориентация на плоскости: Достаточно выбрать пару неколлинеарных векторов (базис), и объявить его положительным. Заметим, что пары $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{b}, \bar{a}$ разноимённы ($C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

Посмотрим, когда пары $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}'$ одноимённые. Рассмотрим произвольную прямую l с направляющим вектором $\bar{a}$ и любую точку $O \in l$. В репере $O\bar{a}\bar{b}$ уравнение l имеет вид $y = 0$. Подставив в это уравнение координаты $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим 1.

Пусть $\bar{b}' = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \Rightarrow$ матрица перехода между парами C равна $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. $|C| > 0 \Leftrightarrow \mu > 0 \Leftrightarrow$ при подстановке координат $\bar{b}'$ в уравнение l результат будет $> 0 \Leftrightarrow$ точки B, B' с радиус-векторами $\bar{b}, \bar{b}'$ лежат в одной полуплоскости относительно l.

Получили **критерий одноимённости пар $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}'$: они одноимённы $\Leftrightarrow$ точки, полученные прибавлением векторов $\bar{b}$ и $\bar{b}'$ к произвольной точке произвольной прямой с направляющим вектором $\bar{a}$, лежат относительно неё в одной полуплоскости.**

25.2 Угол от вектора до вектора

Определение. Углом от вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, взятый со знаком плюс, если пара $\bar{a}, \bar{b}$ положительно ориентирована, и со знаком минус иначе.

25.3 Угол от прямой до прямой

Определение. Положительным углом от $\bar{a}$ до $\bar{b}$ называется угол φ от $\bar{a}$ до $\bar{b}$, если $\varphi > 0$, и угол $2\pi + \varphi$, если $\varphi < 0$.

Определение. Углом от прямой l_1 до прямой l_2 в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется наименьший положительный угол от направляющего вектора l_1 до направляющего вектора l_2.

25.4 Угол наклона

Вывод формулы. (Известное ранее уравнение прямой. Угол наклона)
Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и в ней прямая l определена уравнением $y = kx + b \Leftrightarrow kx - y + b = 0$. Прямая с направляющим вектором e_1 называется **осью абсцисс**, а угол от этой прямой до прямой l - **углом наклона** прямой l.

Подсчитаем угол наклона l. Направляющие векторы l имеют вид $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda k \end{pmatrix}$, причём φ, очевидно, зависит только от знака λ (так как углы при $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ различаются на π). Угол от $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ до $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm k \end{pmatrix}$ равен углу от $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ до $\begin{pmatrix} \mp 1 \\ \mp k \end{pmatrix}$, поэтому выбирать наименьший можем только из положительных углов от вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - наименьшим, как нетрудно видеть, будет угол до $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ при $k > 0$ и до $\begin{pmatrix} -1 \\ -k \end{pmatrix}$ иначе. Обозначив нужный вектор за $\bar{k}$, имеем:

$$\cos\varphi = \cos\angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sin\angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \pm k$$

(синус $>$ 0, т.к. угол от 0 до π).
Заметим, что при $k > 0$ необходимый угол должен иметь тангенс, больший нуля, а при $k < 0$ - меньший нуля(очевидно из расположения соответствующих векторов в координатных четвертях). Отсюда видно, что вне зависимости от нужного нам вектора верно:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = k}$$

Билет 26. Площади

26.1 Определение и следствия

Определение. Фигуры Φ_1, Φ_2 называются конгруэнтными, если $\exists$ отображение $f : \Pi \to \Pi$, сохраняющее расстояния ($|f(A)f(B)| = |AB|\ \forall A, B$) такое, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$.

Определение. Площадь(мера) на евклидовой плоскости - численная величина (обозначается S_Φ, Φ - фигура), соответствующая следующим свойствам:

1. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1;

2. Площади конгруэнтных фигур равны;
3. Если Φ_1, Φ_2 - фигуры, $\exists\ S_{\Phi_1}, S_{\Phi_2}$ и $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$, то $\exists S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}$;
4. Если Φ - фигура и существуют такие последовательности фигур $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\varphi_n \subset \varphi_{n+1} \subset \Phi \subset \Phi_{n+1} \subset \Phi_n\ \forall n \geqslant 1$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\varphi_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\Phi_n}$ существуют и равны, то $S_\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\varphi_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\Phi_n}$

Следствие. (Площади некоторых фигур:)

- Площадь отрезка равна 0.

  Доказательство. Из предельного перехода (Площадь отрезка с длиной 1 равна 0, иначе площадь квадрата со стороной 1 не была бы конечной, а из этого можно получить длину любого отрезка). □

- Площадь квадрата со стороной a равна a^2.

  Доказательство. Для $a = \frac{1}{n}$ разбиваем квадрат со стороной 1 на n^2 квадратиков, для $a \in \mathbb{Q}$ складываем квадрат со стороной $\frac{m}{n}$ из предыдущих, для $a \notin \mathbb{Q}$ приближаем квадрат сверху и снизу квадратами с рациональными сторонами и переходим к пределам (по 4 пункту определения). □

- Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab.

  Доказательство. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$. Его можно разбить на квадрат со стороной a, квадрат со стороной b и два нужных нам прямоугольника. Отсюда $2S = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab \Rightarrow S = ab$. □

Отсюда также выводятся формулы площади параллелограмма (перестановкой треугольника из параллелограмма получается прямоугольник) и треугольника (как половины параллелограмма).

26.2 Площадь параллелограмма

Определение. Говорят, что параллелограмм натянут на векторы $\bar{a}, \bar{b}$, если для одной из вершин A параллелограмма точки $A + \bar{a}$ и $A + \bar{b}$ также являются его вершинами. Площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\bar{a}, \bar{b}$, обозначается $S_{\bar{a},\bar{b}}$.

Вывод формулы. (Площадь параллелограмма в прямоугольной с.к.)
Нам уже известно, что $S_{\bar{a},\bar{b}} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$ (из выражения высоты параллелограмма через угол). В прямоугольной системе координат:

$$S^2_{\bar{a},\bar{b}} = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\varphi = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a},\bar{b})^2$$

Если $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, то $S^2_{\bar{a},\bar{b}} = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2)^2 = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \Rightarrow$

$$\boxed{S_{\bar{a},\bar{b}} = |\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}|}$$

При этом определитель $> 0 \Leftrightarrow \bar{a},\bar{b}$ одноимённа с базисом.

26.3 Ориентированная площадь

Определение. Ориентированной площадью параллелограмма, натянутого на $\bar{a},\bar{b}$, на ориентированной плоскости называется число, равное $S_{\bar{a},\bar{b}}$, если пара $\bar{a},\bar{b}$ положительно ориентирована, и $-S_{\bar{a},\bar{b}}$ иначе. Обозначается $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle$.

Следствие. В любом положительно ориентированном базисе $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Утверждение. Свойства ориентированной площади:

1. $\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = -\langle\bar{b},\bar{a}\rangle$
2. $\langle\bar{\lambda a},\bar{b}\rangle = \lambda\langle\bar{a},\bar{b}\rangle = \langle\bar{a},\bar{\lambda b}\rangle$
3. $\langle\bar{a}+\bar{b},\bar{c}\rangle = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle + \langle\bar{b},\bar{c}\rangle$
   $(\langle\bar{a},\bar{b}+\bar{c}\rangle = \langle\bar{a},\bar{b}\rangle + \langle\bar{a},\bar{c}\rangle; \langle\bar{a}-\bar{b},\bar{c}\rangle = \langle\bar{a},\bar{c}\rangle - \langle\bar{b},\bar{c}\rangle)$

Доказательство. Следует из свойств определителя. □

Билет 27. Плоскость в пространстве

Определение. Плоскость в (трёхмерном) аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

Вывод формулы (Уравнения плоскости)**.** Плоскость π - это множество $X_0 + V^2$, где X_0 - точка и V^2 - двумерное векторное подпространство пространства V, ассоциированного с трёхмерным аффинным пространством. Так как $\dim V^2 =$

$2 \Rightarrow$ в нём есть базис $\bar{a}, \bar{b} \Rightarrow \pi = \{X_0 + u\bar{a} + v\bar{b} : u, v \in \mathbb{R}\}$. Такие векторы $\bar{a}, \bar{b}$ называются **направляющими векторами плоскости**. В произвольной системе координат: если $X_0 = (x_0, y_0, z_0), \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, то π - мн-во точек с координатами: (**параметрические уравнения плоскости**)

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}}$$

Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ называются направляющими векторами плоскости π.
Выражая параметры u, v, получим **общее уравнение плоскости**:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0 \quad (|A| + |B| + |C| \neq 0)}$$

Билет 28. Взаимное расположение плоскостей

Определение. Говорят, что вектор $\bar{a}$ параллелен плоскости π (обозначается $\bar{a} \parallel \pi$), если он выражается через направляющие векторы этой плоскости ($\Leftrightarrow$ через любой базис ассоциированного с плоскостью векторного пространства).

Замечание. Ясно, что $X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{X_0X} \parallel \pi$ (для любой $X_0 \in \pi$). То же верно и для любой отличной от X_0 точки плоскости: $\overrightarrow{X_1X} = \overrightarrow{X_1X_0} + \overrightarrow{X_0X}$, т.е. $\overrightarrow{X_1X}$ выражается через направляющие векторы $\Leftrightarrow \overrightarrow{X_0X}$ выражается через направляющие векторы.

28.1 Взаимное расположение плоскостей

Вывод формулы. Рассмотрим две плоскости, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Эти плоскости пересекаются $\Leftrightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ имеет решения. Матрица коэффициентов системы $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, а её расширенная матрица $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$. По теореме Кронекера-Капелли из курса алгебры СЛУ совместна $\Leftrightarrow rkA = rk(A|B)$. Так как $1 \leqslant rkA \leqslant 2$, плоскости не пересекаются

$\Leftrightarrow$ строки A линейно зависимы ($rkA = 1$), а строки $(A|B)$ - нет. Таким образом, плоскости не пересекаются $\Leftrightarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$$

Очевидно, плоскости совпадают, если

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$$

Докажем, что плоскости совпадают только в этом случае. Пусть плоскости совпадают. Приведём матрицу $(A|B)$ к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{array}\right)$ (хотя бы один из коэффициентов первой плоскости $\neq 0$, без ограничения общности - A_1). Так как плоскости совпадают, любая точка, принадлежащая первой плоскости, принадлежит и второй. Тогда для a_{24} из принадлежности плоскости $(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$ следует $a_{24} = 0$, для a_{22} аналогично при $B \neq 0$, а при $B = 0$ - из принадлежности точки $(-\frac{D_1}{A_1}, 1, 0)$ (для a_{23} и C аналогично). Отсюда вторая строка ступенчатой матрицы нулевая, то есть строки $(A|B)$ пропорциональны, а отсюда плоскости совпадают $\Leftrightarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$$

Предположим, что плоскости пересекаются, но не совпадают. Тогда $rkA = 2$. Из курса алгебры знаем, что решение такой системы имеет вид $X_0 + V^1$ (частное решение СЛУ + одномерное пространство решений ОСЛУ). Таким образом:

Плоскости совпадают $\Leftrightarrow$ их уравнения (со свободными коэффициентами) пропорциональны;

Плоскости параллельны $\Leftrightarrow$ их уравнения пропорциональны, а свободные члены - нет;

Плоскости пересекаются и не совпадают (их уравнения не пропорциональны) $\Leftrightarrow$ пересечением плоскостей является множество вида $X_0 + V^1$, где X_0 - точка и $V^1 = \{\lambda\bar{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ($\bar{a}$ - решение ОСЛУ $AX = 0$), т.е. их пересечением является прямая.

Билет 29. Пучки плоскостей

29.1 Определения

Определение. Собственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую, называемую центром пучка. Несобственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

29.2 Собственные пучки

Теорема. Пусть плоскости $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда плоскость π принадлежит пучку $\Leftrightarrow$ π задаётся уравнением $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ $(*)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$\Leftarrow$ Пусть π задаётся уравнением $(*)$. Тогда, подставив в уравнение π любую точку прямой - центра пучка (назовём её l), получим $\lambda(0) + \mu(0) = 0$ (т.к. центр удовлетворяет уравнениям π_1, π_2).
$\Rightarrow$ Пусть $l \subset \pi$. Возьмём произвольную точку $(x_1, y_1, z_1) \in \pi, (x_1, y_1, z_1) \notin l$. Рассмотрим плоскость вида $(*)$ с $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)$, $\mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)$: $-(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$. Заметим, что это уравнение действительно задаёт плоскость: в противном случае необходимы условия $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$, но тогда (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) пропорциональны, а исходные плоскости непараллельны. Такой плоскости, очевидно, принадлежат точки l и (x_1, y_1, z_1). Так как через прямую и не лежащую на ней точку проходит ровно одна плоскость (она имеет вид $\{X_1 + \bar{v} = X_1 + \lambda\overrightarrow{X_1X_2} + \mu\overrightarrow{X_1X_3}\}$, где X_2, X_3 - произвольные точки на l), любая плоскость из собственного пучка имеет вид $(*)$, ч.т.д. $\square$

29.3 Несобственные пучки

Теорема. Пусть плоскости $\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$ задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда плоскость π принадлежит пучку $\Leftrightarrow$ π задаётся уравнением $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ $(*)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$\Leftarrow$ Так как $\pi_1 \parallel \pi_2$, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Тогда если π имеет вид $(*)$, то $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{B_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \lambda + \frac{\mu C_2}{C_1} = \frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{C_1} \Rightarrow \pi \parallel \pi_1$.
$\Rightarrow$ Пусть π принадлежит пучку. Так как уравнения π, π_1 и π_2; пропорциональны (без свободных коэффициентов), можем домножить их на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1' = 0$; $\pi_2 = Ax + By + Cz + D_2' = 0$; $\pi = Ax + By + Cz + D_3' = 0$.Тогда возьмём λ, μ из следующей системы: $\begin{cases} D_1'\lambda + D_2'\mu = D_3' \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{D_3' - D_2'}{D_1' - D_2'} \\ \mu = \frac{D_1' - D_3'}{D_1' - D_2'} \end{cases}$ $(D_1' \neq D_2',$

иначе π_1 и π_2 совпадают). Очевидно, что для таких λ, μ уравнение π имеет вид $(*)$ (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д. $\square$

Билет 30. Полупространства

Определение. Аналогично прямой на плоскости, каждая плоскость π в пространстве V^3 разбивает множество всех не принадлежащих ей точек пространства на два выпуклых подмножества $V_1, V_2 : V_1 \cup \pi \cup V_2 = V^3, V_1 \cap V_2 = V_1 \cap \pi = V_2 \cap \pi = \varnothing$. Такие подмножества называются полупространствами, ограниченными π и определяются однозначно с точностью до обозначения.

Также можем определить полупространства следующим образом: возьмём произвольную точку $X \notin \pi$ и скажем, что $V_1 = \{Y \in V^3 : [X, Y] \cap \pi = \varnothing\}$, а затем выберем $X' \notin \pi \cup V_1$ (такая точка всегда будет существовать) и определим $V_2 = \{Y' \in V^3 : [X', Y'] \cap \pi = \varnothing\}$.

Утверждение. Так определённые множества являются полупространствами и не зависят от выбора точек X, X'.

Доказательство. (Аналогично случаю прямой) Введём любую систему координат. Тогда полупространства $V^{\pm} = \{X(x, y, z) : Ax + By + Cz + D \gtreqless 0\}$. Рассмотрим V^+ (остальные аналогично).
Пусть $X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in V^+$. Знаем, что любая точка $X \in [X_1, X_2]$ имеет координаты $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2), 0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \geqslant 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tCz_1 + D \geqslant 0 \\ (1-t)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C(tz_1 + (1-t)z_2) + D \geqslant 0 \Rightarrow X \in V^+.$$

Таким образом, для $X_1, X_2 \in V^+$ $[X_1, X_2] \subset V^+$ из доказанной выше выпуклости, а для точек $X_1 \in V^+, X_2 \in V^-$ точку пересечения $[X_1, X_2]$ и π можно найти явно, но её существование очевидно. $\square$

Билет 31. Прямая в пространстве

Вывод формул. (Уравнения прямой) Пусть l - прямая в пространстве: $l = \{X_0 + t\bar{c}\}$, где X_0 - точка прямой, $\bar{c}$ - её направляющий вектор. Если $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, то координаты точек на прямой выражаются следующим образом: (**параметрические уравнения прямой**)

$$\boxed{X \in l : \begin{cases} x = x_0 + tc_1 \\ y = y_0 + tc_2 \\ z = z_0 + tc_3 \end{cases}}$$

Выразим t из всех уравнений и приравняем - получим **каноническое уравнение прямой**:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{c_1} = \frac{y - y_0}{c_2} = \frac{z - z_0}{c_3}}$$

Если известно, что прямой принадлежат $X_0 = (x_0, y_0, z_0), X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, то $\overrightarrow{X_0X_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$ - направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет следующий вид (**уравнение прямой по двум точкам**)

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}}$$

Следствие. Любая прямая является пересечением двух плоскостей. (Видно из канонического уравнения: например, плоскостей $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ и $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$)

Билет 32. Взаимное расположение плоскости и прямой

Вывод формул. (Случаи расположения) Пусть $l = \{X_0 + t\bar{c} : t \in \mathbb{R}\}, \pi = \{X_1 + u\bar{a} + v\bar{b}\}$. Уже знаем, что для любых других точек прямой и плоскости верны те же выражения множеств точек.

Предположим, что прямая и плоскость пересекаются хотя бы в двух точках: пусть X_0, X_1 - их различные общие точки. Имеем $\overrightarrow{X_0X_1} = t_0\bar{c} = u_0\bar{a} + v_0\bar{b}$ (для некоторых $t_0 \neq 0, u_0, v_0$, из принадлежности точек и прямой, и плоскости). Отсюда $\bar{c}$ выражается через $\bar{a}.\bar{b}$, а значит для любой $X \in l : X = X_0 + t\bar{c} = X_0 + t(\frac{u_0}{t_0}\bar{a} + \frac{v_0}{t_0}\bar{b}) \in \pi$. Таким образом,

$$\underline{l, \pi \text{ имеют 2 точки пересечения} \Leftrightarrow l \subset \pi \Leftrightarrow l \cap \pi \neq \varnothing,\ \bar{c} \text{ выражается через } \bar{a}, \bar{b}}$$

Заметим, что $X \in l \cap \pi \Leftrightarrow X = X_0 + t_0\bar{c} = X_1 + u_0\bar{a} + v_0\bar{b} \Rightarrow \overrightarrow{X_0X_1} = u_0\bar{a} + v_0\bar{b} - t_0\bar{c}$. В случае некомпланарности $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ вектор $\overrightarrow{X_0X_1}$ выражается через них единственным образом, то есть точка пересечения есть и единственная, т.е.

$\underline{l, \pi \text{ имеют одну т. пересечения} \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ линейно независимы}}$

(В случае, если $\bar{c}$ выражается через $\bar{a}, \bar{b}$: l, π имеют общую точку $\Rightarrow l \subset \pi$, поэтому т.пересечения одна только в этом случае)

Следствие. $\bar{c}$ выражается через $\bar{a}, \bar{b} \Leftrightarrow$ либо $l \subset \pi$, либо $l \cap \pi = \varnothing$ (в этом случае говорят, что **прямая параллельна плоскости**)
$\bar{c}$ не выражается через $\bar{a}, \bar{b} \Leftrightarrow l \cap \pi$ - одна точка.

Билет 33. Взаимное расположение двух прямых

Определение. Прямые l_1, l_2 в пространстве называются параллельными, если они либо совпадают, либо лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Определение. Прямые l_1, l_2 в пространстве скрещиваются, если они не пересекаются и не параллельны.

Замечание. Если прямые l_1, l_2 с направляющими векторами $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ пересекаются в точке X_0 и не совпадают, то $\bar{c}_1 \nparallel \bar{c}_2$ и $l_1, l_2 \subset \pi = \{X_0 + u\bar{c}_1 + v\bar{c}_2 : u, v \in \mathbb{R}\}$. Отсюда прямые скрещиваются $\Leftrightarrow$ они не лежат в одной плоскости.
Если направляющие векторы $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ прямых l_1, l_2 коллинеарны, то прямые либо параллельны, либо совпадают.

Следствие. Прямые l_1, l_2 скрещиваются $\Leftrightarrow$ они не пересекаются и $c_1 \nparallel c_2$.
$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow c_1 \parallel c_2$ (иначе прямые либо скрещиваются, либо пересекаются).

Билет 34. Плоскость в точечно-евклидовом пр-ве.

34.1 Нормаль к плоскости

Определение. Пусть $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ в прямоугольной с.к. Вектор $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ называется нормалью (нормальным вектором) к плоскости π.

Следствие. Вектор нормали $\bar{n}$ к плоскости π ортогонален любому вектору из π.

Доказательство. Пусть $X_0 = (x_0, y_0, z_0), X_1 = (x_1, y_1, z_1), X_0, X_1 \in \pi \Rightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0$ (вектор $\overrightarrow{X_0X_1} \parallel \pi$). Данное выражение также означает, что $\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \overrightarrow{X_0X_1}$. □

Следствие. Зная вектор нормали, за направляющие векторы плоскости можно взять любые два неколлинеарных вектора, ортогональных нормали.

34.2 Расстояние от точки до плоскости

Вывод формулы. (Расстояние от точки до плоскости)
$d(X_0, \pi) = \inf\{|\overrightarrow{X_0Y}| : Y \in \pi\}$. Из теоремы Пифагора (аналогично расстоянию от точки до прямой) следует, что это расстояние - длина отрезка перпендикуляра к π, проходящего через X_0, заключённого между X_0 и π (только в прямоугольной с.к.!) Найдём это расстояние. Перпендикуляр к π через точку X_0 имеет направляющий вектор $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ и проходит через (x_0, y_0, z_0), т.е.

$l : \begin{cases} x = x_0 + tA \\ y = y_0 + tB \\ z = z_0 + tC \end{cases}$. Точка пересечения l и π:

$$A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C(z_0 + tC) + D = 0 \Rightarrow t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

квадрат расстояния от X_0 до неё равен $(tA)^2 + (tB)^2 + (tC)^2 = (\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0+D)^2}{A^2+B^2+C^2})$

$$\boxed{\Rightarrow d(X_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

34.3 Иные формулы расстояния (нет в б.)

Величина расстояния от прямой l до плоскости π в пространстве имеет смысл только при $l \parallel \pi$. Пусть $\bar{a}$ - направляющий вектор l и $\bar{n}$ - нормаль к π. Проведём плоскость π' через l с направляющими векторами $\bar{a}, \bar{n}$. Тогда все перпендикуляры, опущенные из точки прямой l на π, будут лежать в π'. Кроме того, их основания будут лежать на $l' = \pi \cap \pi'$, а отсюда расстояния от всех точек l до π одинаковы. Поэтому **расстояние от прямой до плоскости, параллельной ей, равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости.**

Вывод формулы. (Расстояние от точки до прямой)
Пусть в прямоугольной с.к. даны $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ - точка и l - прямая, проходящая через $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

(ВОЗМОЖНО, ЗДЕСЬ БУДЕТ ЧЕРТЁЖ)
$d(X_1, l) = |X_0X_1| \cdot \sin\varphi$ (угол между $\overrightarrow{X_0X_1}$ и l) $= |X_0X_1| \cdot \sqrt{1-\cos^2\varphi} \Rightarrow$ $d(X_1, l)^2 =$ (после раскрытия скобок)

$$\boxed{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 - \frac{(a(x_1-x_0) + b(y_1-y_0) + c(z_1-z_0))^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

Вывод формулы. (Расстояние между скрещивающимися прямыми)
Пусть l_1, l_2 - скрещивающиеся прямые с направляющими векторами $\bar{a}, \bar{b}$ соотв., $X_1 \in l_1, X_2 \in l_2$. Из уже известных нам соображений расстояние между X_1 и X_2 минимально в случае, если $\overrightarrow{X_1X_2} \perp l_1, l_2$.
Покажем существование таких X_1, X_2: построим плоскость π через l_1 с направляющими векторами $\bar{a}, \bar{b}$ и построим перпендикуляры из точек l_2 на π. Их основания лежат на некоторой прямой $l \parallel l_2$, причём $l_1 \nparallel l$, потому что иначе $l_1 \parallel l_2$. Значит, существует точка пересечения l_1 и l, а следовательно существует перпендикуляр из точки l_2 на π, основание которого лежит на l_1, т.е. этот перпендикуляр общий для l_1, l_2.
Тогда для произвольных X_1, X_2 на прямых $d(l_1, l_2) = d(l_2, \pi)$ - длина перпендикуляра, опущенного на π из любой точки $l_2 =$ высота параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_1X_2} \Rightarrow$

$$\boxed{d(l_1, l_2) = \frac{V_{\bar{a},\bar{b},\overrightarrow{X_1X_2}}}{S_{\bar{a},\bar{b}}}}$$

Осталось только получить формулы для объёма.

Билет 35. Векторное, смешанное произведение. Объём

35.1 Векторное произведение

Определение. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\bar{a}, \bar{b}$ в ориентированном трёхмерном точечно-евклидовом пространстве называется вектор $\bar{v}$ такой, что

1. $|\bar{v}| = S_{\bar{a},\bar{b}} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$;

2. $\bar{v} \perp \bar{a}, \bar{v} \perp \bar{b}$;

3. Тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{v}$ имеет положительную ориентацию.

Обозначается $[\bar{a}, \bar{b}]$.
Для $\bar{a} \parallel \bar{b}$ $\;[\bar{a}, \bar{b}] = 0$.

35.2 Объём и ориентированный объём

Обычный объём определяется полностью аналогично площади на плоскости. Из свойств выводится, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ (т.е. для его вершины X_0 его вершинами также являются $X_0 + \bar{a}, X_0 + \bar{b}, X_0 + \bar{c}$), равен $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \cdot\; h$, где $h = \bar{c} \cdot \sin \varphi$ - высота параллелепипеда φ - угол между $\bar{c}$ и плоскостью $X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$. Запишем φ как $\frac{\pi}{2} - \psi$, где ψ - угол между $\bar{c}$ и нормалью к плоскости $X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$. Отсюда:

$$h = |\bar{c} \cdot \cos \psi| = \left| \frac{(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])}{|\bar{c}||[\bar{a}, \bar{b}]|} \cdot \bar{c} \right| = \frac{|(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|} = \frac{|(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])|}{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle} \Rightarrow V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = |([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})|$$

Определим ориентацию тройки $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$: рассмотрим базис $\bar{a}, \bar{b}, \bar{n}$. В нём $\bar{c}$ имеет координаты $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ (\cos \psi)|\bar{c}| \end{pmatrix}$ (c_1, c_2 неважны), т.е. матрица перехода от этого базиса к $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & (\cos \psi)|c| \end{pmatrix}$. Её определитель $> 0 \Leftrightarrow \cos \psi > 0 \Leftrightarrow ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) > 0$. Отсюда $\underline{([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) > 0 \Leftrightarrow \text{тройка } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ положительно ориентирована}}$.

Определение. Ориентированным объёмом параллелепипеда, натянутого на векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, называется число $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$. Также это число называется смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Следствие. $V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = |\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle|$;
$\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ положительно ориентирована.

35.3 Свойства смешанного произведения

Утверждение. 1. $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{a}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{b} \rangle = -\langle \bar{c}, \bar{b}, \bar{a} \rangle$ (очев);

2. $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 \rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_2 \rangle$;

3. $\langle \bar{a}, \bar{b}, \lambda\bar{c}\rangle = \lambda\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle$;

4. $\langle \bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2, \bar{c}\rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}_1, \bar{c}\rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}_2, \bar{c}\rangle$;

5. $\langle \bar{a}, \lambda\bar{b}, \bar{c}\rangle = \lambda\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle$;

6. $\langle \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}\rangle = \langle \bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}\rangle + \langle \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}\rangle$;

7. $\langle \lambda\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = \lambda\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle$;

8. $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\rangle = 1(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - ортонормированный базис)

1, 8 - очев, 2, 3 - из свойств скалярного произведения, 4 – 7 получаются из 2, 3 с помощью 1.

Билет 36. Объёмы в ортонормированном базисе

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ - ортонормированный положительно ориентированный базис. В курсе алгебры доказывается, что единственная функция от строк (столбцов) $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ со свойствами 1 – 8 (полилинейность, кососимметричность, единица в $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$) - определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ (или $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$)

Следовательно, $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, V_{\bar{a},\bar{b},\bar{c}} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$ (модуль).

(далее в курсе приведено доказательство утверждения про определитель, более полное доказательство ищите в конспекте алгебры у Viacheslavik122333)

Билет 37. Векторное произведение и расстояния в ортонормированном базисе

37.1 Выражение векторного произведения

Вывод формулы. (Векторное произведение в прямоугольной с.к.) Знаем, что в ортонормированном базисе вектор $\bar{x}$ имеет координаты

$$x = (\bar{x}, \bar{e}_1), \quad y = (\bar{x}, \bar{e}_2), \quad z = (\bar{x}, \bar{e}_3)$$

Вычислим: $([\bar{a},\bar{b}],\bar{e}_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Аналогично $([\bar{a},\bar{b}],\bar{e}_2) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$; $([\bar{a},\bar{b}],\bar{e}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ Данную формулу обычно записывают в виде определителя:

$$\boxed{[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}}$$

(не является определителем по сути, но считается по той же формуле)

Замечание. Прямые $l_1 = X_1 + t\bar{a}, l_2 = X_2 + t\bar{b}$ скрещиваются $\Leftrightarrow$ $\langle\overrightarrow{X_1X_2},\bar{a},\bar{b}\rangle \neq 0$.

37.2 Расстояния через векторное произведение

Расстояние от точки X_1 до прямой $l : X = X_0 + t\bar{a}$ - высота параллелограмма, натянутого на $\bar{a}, \overrightarrow{X_0X_1} = \frac{|S_{\bar{a},\overrightarrow{X_0X_1}}|}{|\bar{a}|} \Rightarrow$

$$\boxed{d(X,l) = \frac{|[\overrightarrow{X_0X_1},\bar{a}]|}{|\bar{a}|}}$$

Расстояние от точки X_1 до плоскости $\pi : X = X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$ - высота параллелепипеда, натянутого на $\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_0X_1} = \frac{|V_{\bar{a},\bar{b},\overrightarrow{X_0X_1}}|}{[\bar{a},\bar{b}]} \Rightarrow$

$$\boxed{d(X,\pi) = \frac{|\langle\overrightarrow{X_0X_1},\bar{a},\bar{b}\rangle|}{|[\bar{a},\bar{b}]|}}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми $l_1 = X_1 + t\bar{a},\ l_2 = X_2 + t\bar{b}$:

$$\boxed{d(l_1,l_2) = \frac{|\langle\overrightarrow{X_1X_2},\bar{a},\bar{b}\rangle|}{|[\bar{a},\bar{b}]|}}$$

(так как равно расстоянию от точки первой прямой до плоскости, параллельной первой прямой и проходящей через вторую)

Билет 38. Линии второго порядка

38.1 Определения

Далее рассматриваем аффинную систему координат на плоскости (как на аффинном или точечно-евклидовом пространстве).

Определение. Линией первого порядка называется множество точек $\{(x, y) : Ax+By+C = 0\}$, где A, B, C - вещественные числа и хотя бы одно из чисел A, B не равно нулю. Другими словами, это множество точек, координаты которых удовлетворяют фиксированному уравнению первой степени.

(Это прямая)

Определение. Линией второго порядка (кривой второго порядка) называется множество точек, координаты которых (в некоторой аффинной системе координат) удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$ - некоторые фиксированные числа и хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} не равно 0. Выражение для $F(x, y)$ называется многочленом второй степени от переменных x, y. Уравнение $F(x, y) = 0$ называется общим уравнением линии второго порядка.

Определение. Многочлен $F(x, y)$ ставит в соответствие каждой паре чисел (x, y) некоторое вещественное число. С ним связано отображение $f : \pi \to \mathbb{R}$ (вместо пары чисел f сопоставляет точку плоскости с такими координатами в заданной с.к.) Отображение f называется квадратичным отображением, представленным многочленом F.

Замечание. Соответствие $F \leftrightarrow f$ взаимно однозначно.
(Каждая точка однозначно определяется своими координатами $\Rightarrow f$ однозначно определяется F; подставив в общую формулу для $F(x, y)$ координаты шести различных точек, однозначно определим коэффициенты $\Rightarrow F$ однозначно определяется f).

Определение. Квадратичная часть $F_1(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ многочлена $F(x, y)$ называется его квадратичной формой.

Определение. Линия второго порядка в заданной системе координат однозначно определяется матрицей коэффициентов $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$. Она называется большой матрицей линии второго порядка.

Определение. Квадратичная форма линии второго порядка в заданной системе координат однозначно определяется матрицей коэффициентов $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$. Она называется малой матрицей линии второго порядка.

38.2 Формы записи

Имеют место равенства (несложно проверить):

$$\boxed{F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

В прямоугольной системе координат на евклидовой плоскости также имеет место следующее равенство (из выражения скалярного произведения):

$$\boxed{F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0}$$

38.3 Связь уравнений в разных системах координат

Далее работаем в прямоугольной системе координат. Цель - избавиться от слагаемого с xy, т.е. перейти в такую прямоугольную систему координат, что A_1 в ней - диагональная.
(Для произвольных аффинных систем координат задача упрощения уравнения простая - можно выделить полный квадрат в квадратичной форме и заменой избавиться сначала от члена с xy, а затем и от линейных членов за исключением нескольких простых случаев)

Сначала будем изменять только базис. Пусть старая система координат задана репером $O\bar{e}_1\bar{e}_2$, новая - $O\bar{e}_1'\bar{e}_2'$ и C - матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда старые координаты радиус-вектора точки $X = (x,y)$ выражаются через новые (x',y') так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T$$

Очевидно, многочлен линии второго порядка изменится, хоть линия и не меняется как множество точек. Назовём новый многочлен, полученный подстановкой новых координат в старый многочлен, F'. Тогда:

$$F'(x',y') = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T \cdot A_1 \cdot C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot A_1' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} + a_0$$

где $A'_1 = C^T A_1 C$ и $\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
Далее прямой подсчет показывает, что большая матрица изменяется так:

$$A' = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C}} & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь изменим ещё и начало координат. Тогда:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{где} \quad D = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C}} & x_0 \\ & & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подставляя в выражение $F(x, y)$, получим:

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{т.е.} \quad A' = D^T A D.$$

Несложно проверить, что при такой замене также верно равенство
$A'_1 = C^T A_1 C$.

Билет 39. Канонические уравнения линий второго порядка

39.1 Собственные векторы и значения

Итак, найдём необходимую матрицу C. Она должна являться матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому, т.е. она по определению ортогональна. Таким образом, необходимо найти такие векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ (новый базис), что:

1. $\bar{e}'_1 \perp \bar{e}'_2$;
2. $|\bar{e}'_1| = |\bar{e}'_2| = 1$;
3. Если $\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$, то матрица $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - искомая матрица C. Она уже будет ортогональной, т.е. достаточно условия, что $A'_1 = C^T A_1 C$ - диагональная (пусть равна $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$).

$$A_1' = C^{-1}A_1C \Leftrightarrow A_1C = CA_1' \Leftrightarrow A_1\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21}\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21}\end{pmatrix} \\ A_1\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22}\end{pmatrix} = \lambda_2\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22}\end{pmatrix}\end{cases}, \text{ т.е. } A_1\bar{e}_1 = \lambda_1\bar{e}_1 \text{ и } A_1\bar{e}_2 = \lambda_2\bar{e}_2.$$

Найдём ненулевые $\bar{x}$, для которых существует λ: $A_1\bar{x} = \lambda\bar{x}$, т.е. $(A_1 - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}$. Это уравнение относительно $\bar{x}$ имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow |A_1 - \lambda E| = 0$ (из курса алгебры). Это квадратное уравнение относительно λ (оно называется **характеристическим многочленом линии второго порядка**) :

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\mathcal{D} = (a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0,$$

то есть уравнение всегда имеет решения.

Пусть λ_1, λ_2 - корни этого уравнения (возможно, совпадающие). Занумеруем их так: если они разных знаков, то λ_1 - положительный корень, а если одного знака, то λ_1 - меньший по модулю корень.
Из построения λ_1, λ_2 следует, что существуют $\bar{a}, \bar{b}$ такие, что $A_1\bar{a} = \lambda_1\bar{a}, A_1\bar{b} = \lambda_2\bar{b}$ (они называются собственными векторами матрицы A_1, соответствующими собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно)

39.2 Переход к канонической системе координат

Рассмотрим случаи:

1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   Пусть $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$. Из того, что матрица A симметричная и изначальная система координат прямоугольная, получим:

$$\lambda_1(\bar{a}, \bar{b}) = (\lambda_1\bar{a}, \bar{b}) = (A_1\bar{a}, \bar{b}) = (A_1\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\end{pmatrix})^T\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2\end{pmatrix}A_1^T\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2\end{pmatrix}A_1\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix} = (\bar{a}, A_1\bar{b}) = (\bar{a}, \lambda_2\bar{b}) = \lambda_2(\bar{a}, \bar{b})$$

Притом $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а значит $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$. Тогда система координат $O\bar{e}_1'\bar{e}_2'$, где $\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \bar{e}_2 = \pm\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ является прямоугольной, причём A_1' в ней - диагональная ($= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$), что мы и хотели получить (можем выбрать знаки так, что ориентация положительна).

2. $\lambda_1 = \lambda_2 \ \ (= \lambda)$.

   Найдём $\bar{a}$ такой, что $A_1\bar{a} = \lambda\bar{a}$. Возьмём ненулевой вектор $\bar{b}$, ортогональный $\bar{a}$. Пусть $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Тогда:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow (A_1\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}) = 0$$

   С другой стороны,

$$(A_1\bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\bar{a}, A_1\bar{b}) \Rightarrow \bar{a} \perp A_1\bar{b}$$

   Отсюда $A_1\bar{b}$ пропорционален $\bar{b}$, т.е. $A_1\bar{b} = \lambda'\bar{b}$. А так как уже знаем, что такое уравнение имеет решение только при $\lambda' = \lambda$, получаем, что для любого $\bar{b} \perp \bar{a}$ верно $A_1\bar{b} = \lambda\bar{b}$. Тогда подойдёт система координат $O\bar{e}_1'\bar{e}_2'$, где $\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \bar{e}_2 = \pm\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ (знак для положительной ориентации).

Итак, для любого случая нашли прямоугольную систему координат $O\bar{e}_1'\bar{e}_2'$, в которой уравнение линии имеет вид:

$$F'(x', y') = \lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0 = 0$$

Вновь рассмотрим случаи:

1. $\lambda_1 \neq 0$

   Тогда из нашей нумерации и $\lambda_2 \neq 0$. Можем выделить полные квадраты: $x'' = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}, y'' = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}$ и перейти к системе координат $O''\bar{e}_1'\bar{e}_2'$, где $O'' = (\frac{a_1'}{\lambda_1}, \frac{a_2'}{\lambda_2})$ в системе координат $O\bar{e}_1'\bar{e}_2'$. Получим уравнение:

$$\lambda_1(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}) + a_0 - \frac{{a_1'}^2}{\lambda_1} - \frac{{a_2'}^2}{\lambda_2} = 0$$

   то есть в новейших координатах уравнение имеет вид $\lambda_1 {x''}^2 + \lambda_2 {y''}^2 = C$. Если $\lambda_1 > 0, C > 0$, разделим на C и получим уравнение вида

$$\boxed{\frac{{x''}^2}{a^2} \pm \frac{{y''}^2}{b^2} = 1 \text{ - эллипс (если } +\text{) или гипербола (если -)}}$$

Если $\lambda_1 > 0, C < 0$, посмотрим на λ_2:
Если $\lambda_2 > 0$, разделим на $-C$ и получим

$$\boxed{\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1 \text{ - пустое множество (уравнение мнимого эллипса)}}$$

Если $\lambda_2 < 0$, разделим на $-C$ и ещё раз заменим координаты, поменяв местами x и y (также надо развернуть одну из осей, чтобы сохранить ориентацию, поэтому матрица перехода имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$). Получим снова

$$\boxed{\frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 1 \text{ - гипербола}}$$

Случаи с $\lambda_1 < 0, C \neq 0$ рассматриваются аналогично - либо гипербола, либо эллипс, либо мнимый эллипс.

Если $C = 0$ и λ_1, λ_2 одного знака, то уравнение имеет вид (с точностью до домножения на -1):

$$\boxed{\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ - одна точка (пара мнимых пересекающихся прямых)}}$$

Если $C = 0$ и λ_1, λ_2 разных знаков, то уравнение имеет вид (с точностью до домножения на -1):

$$\boxed{\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \text{ - пара пересекающихся прямых}}$$

2. $\lambda_1 = 0$. Тогда $\lambda_2 \neq 0$ (иначе уравнение не второго порядка).

$$F'(x', y') = \lambda_2 {y'}^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a_0 = 0$$

Если $a_1' \neq 0$, то выделением полного квадрата избавимся от члена с y и сдвигом по оси Ox избавимся от константы: $x'' = x' + \frac{a_0}{2a_1'} - \frac{{a_2'}^2}{2a_1' \lambda_2^2}$, $y'' = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}$. Получим уравнение $\lambda_2 {y''}^2 + 2a_1' x'' = 0$, т.е. $\lambda_2 {y''}^2 = -2a_1' x''$. Можем сделать λ_2 и a_1' разного знака: если одного, заменим x на $-x$ и y на $-y$. Поделив на λ_2, получим

$$\boxed{{y''}^2 = 2px (p > 0) \text{ - парабола}}$$

Если $a_1' = 0$, то $F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2a_2' y' + a_0 = 0$, т.е. $\lambda_2 y''^2 + C = 0$. Поделив на λ_2, получим один из следующих случаев:

$$\boxed{\begin{aligned} y''^2 + a^2 = 0 \text{ - пара мнимых параллельных прямых} \\ y''^2 - a^2 = 0 \text{ - пара параллельных прямых} \\ y''^2 = 0 \text{ - пара совпадающих прямых} \end{aligned}}$$

39.3 Классификация линий второго порядка

Сформулируем то, что получили:

Теорема. (Классификация линий второго порядка)
Для любой линии второго порядка прямоугольная система координат (она называется канонической системой координат) такая, что в ней линия имеет один из следующих видов:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс);
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ (мнимый эллипс);
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара мнимых пересекающихся прямых);
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (гипербола);
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (пара пересекающихся прямых);
6. $y^2 = 2px$ (парабола);
7. $y^2 - a^2 = 0$ (пара параллельных прямых);
8. $y^2 + a^2 = 0$ (пара мнимых параллельных прямых);
9. $y^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Билет 40. Ортогональные инварианты

40.1 Основные инварианты

Пусть линия второго порядка задана в прямоугольной системе координат формулой $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$, A - её большая матрица,

A_1 - малая матрица. При переходе к новой прямоугольной системе координат:

$$A' = D^T A D, D = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\Large C}} & x_0 \\ & & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_1' = C^T A C$$

(C - матрица перехода, x_0, y_0 – новое начало отсчёта)

При таком преобразовании не меняются:

1. $\Delta = |A|$ (т.к. $|D| = |D^T| = |D^{-1}| = \pm 1$);
2. $\delta = |A_1|$ (аналогично);
3. $|A_1 - \lambda E|$;
4. $S = a_{11} + a_{22}$. (нетрудно проверить)

Заметим, что инварианты изменяются при домножении уравнения на число, но не меняются знаки δ и $\Delta \cdot S$.

40.2 Классификация

Запишем большие матрицы канонических уравнений:

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (эллипс) - $\delta > 0, \Delta S < 0$;
2. $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (мнимый эллипс) - $\delta > 0, \Delta S > 0$;
3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (пара мнимых пересекающихся прямых) - $\delta > 0, \Delta S = 0$;
4. $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (гипербола) - $\delta < 0, \Delta S \neq 0$;
5. $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (пара пересекающихся прямых) - $\delta < 0, \Delta S = 0$;

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & 0 \\ -2p & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (парабола) - $\delta = 0, \Delta S \neq 0$;

7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$ (пара параллельных прямых) - $\delta = \Delta = 0$;

8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ (пара мнимых параллельных прямых) - $\delta = \Delta = 0$;

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (пара совпадающих прямых) - $\delta = \Delta = 0$;

Итак, разберём случаи знаков ортогональных инвариантов:

1. $\delta \neq 0$ - центральный случай (кривые 1-5): $\delta > 0 \Rightarrow$ либо эллипс ($\Delta S < 0$), либо мнимый эллипс ($\Delta S > 0$), либо пара мнимых пересекающихся прямых ($\Delta S = 0$);
   $\delta < 0 \Rightarrow$ либо гипербола ($\Delta \neq 0$), либо пара пересекающихся прямых ($\Delta = 0$);

2. $\delta = 0$ - параболический случай (кривые 6-9): $\Delta \neq 0$ - парабола; $\Delta = 0$ - кривые 7-9.

40.3 Семиинвариант (нет в б., но полезно)

Для последнего случая необходим семиинвариант: $K = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}$.

Утверждение. K не изменяется при замене базиса (без сдвига)

Доказательство.

$$K = (a_{11} + a_{22})a_0 - a_1^2 - a_2^2 = S \cdot a_0 - |\bar{a}|^2$$

При переходе к новому ортонормированному базису a_0 не изменяется (очев.), S не изменяется (инвариант), а $\bar{a}$ умножается на транспонированную матрицу перехода, которую можно представить в виде матрицы поворота на некоторый угол (см. Билет 23), т.е. $|\bar{a}|$ не изменяется. $\square$

Утверждение. В случае $\delta = \Delta = 0$ K не изменяется и при сдвиге.

Доказательство. Пусть уравнение кривой $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$ задано в прямоугольной системе координат. Доказали, что существует прямоугольная система координат с тем же началом, в которой данная линия задаётся уравнением $\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 + a_1'x' + a_2'y' + a_0$, и притом K не изменяется при этом переходе. Из условия $\delta = 0$ следует, что $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Пусть $\lambda_1 = 0$ (в силу нашей нумерации). Тогда большая матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & a_2' \\ a_1' & a_2' & a_0 \end{pmatrix}$. Из условия $\Delta = 0$ имеем $\lambda_2 {a_1'}^2 = 0$. Причём знаем, что $\lambda_2 \neq 0$ (иначе линия не является линией второго порядка), то есть $a_1' = 0$. Тогда подстановкой получим, что $K = Sa_0 - |\bar{a}|^2 = \lambda_2 a_0 - {a_2'}^2$. Заменим начало координат: $x' = x'' + x_0, y' = y'' + y_0$. Подставим в уравнение линии:

$$\lambda_2(y'' + y_0)^2 + 2a_2'(y'' + y_0) + a_0 = \lambda_2 {y''}^2 + 2(\lambda_2 y_0 + a_2')y'' + \lambda_2 y_0^2 + 2a_2'y_0 + a_0 \Rightarrow$$
$$K' = \lambda_2(\lambda_2 y_0^2 + 2a_2'y_0 + a_0) - (\lambda_2 y_0 + a_2')^2 =$$
$$\lambda_2^2 y_0^2 + 2\lambda_2 a_2' y_0 + \lambda_2 a_0 - \lambda_2^2 y_0^2 + 2\lambda_2 a_2' y_0 + {a_2'}^2 = \lambda_2 a_0 - {a_2'}^2 = K$$

Отсюда $K' = K$, ч.т.д. □

Тогда в случае $\delta = \Delta = 0$:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$ (пара параллельных прямых) - $K < 0$;

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ (пара мнимых параллельных прямых) - $K > 0$;

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (пара совпадающих прямых) - $K = 0$;

40.4 Полная классификация

Отсюда получаем во-первых единственность канонического уравнения линии второго порядка (из инвариантности однозначно определяющих её величин), а также алгоритм определения линии по значениям инвариантов в её большой матрице:

$\delta \neq 0$					$\delta = 0$			
$\delta > 0$			$\delta < 0$		$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$		
$\Delta S < 0$	$\Delta S > 0$	$\Delta S = 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$		$K < 0$	$K > 0$	$K = 0$
эллипс	мн. эллипс	мн. $\times$	гипербола	$\times$	парабола	$\parallel$	мн. $\parallel$	совп. $\mid$

Билет 41. Центр линии второго порядка

41.1 Центр симметрии

Определение. Точка X_1 называется симметричной точке X_2 относительно точки O, если O - середина отрезка $[X_1 X_2]$

Определение. Точка O называется центром симметрии множества точек M (на плоскости), если для любой точки X из M точка, симметричная X относительно O, также принадлежит M.

41.2 Уравнение центра

Теорема. Пусть непустая линия второго порядка задана в некоторой системе координат (не обязательно прямоугольной) уравнением $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0 = 0$. Точка $O = (x_0, y_0)$ является центром симметрии этой линии $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$

Доказательство.

Лемма. Координаты точки $X(x_1, y_1)$ удовлетворяют или не удовлетворяют системе $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$ $(*)$ независимо от того, в какой аффинной системе координат записано уравнение и координаты.

Доказательство. (x_1, y_1) удовлетворяет $(*)$ $\Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha = a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_0$. Тогда в другой системе координат, переход к которой задан матрицей $D = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{C}} & x_0 \\ & & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, имеем $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix}$; $A' = D^T A D \Rightarrow A' \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} =$

$D^T AD \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = D^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & C & & 0 \\ & & & 0 \\ x_0 & & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$. Остюда в новой системе координат для координат точки X эта система уравнений также выполнена. $\square$

$\Rightarrow$ Сдвинем начало координат в точку $O: x = x' + x_0, y = y' + y_0$ и получим новое уравнение:

$$a_{11}'{x'}^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'{y'}^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0' = 0$$

Так как для этой системы координат точка $(0,0)$ в этой системе координат является центром симметрии линии, если ей принадлежит точка (x_1', y_1'), то принадлежит и точка $(-x_1', -y_1')$. Подставим точку $(-x_1', -y_1')$:

$$a_{11}'{x'}^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'{y'}^2 - 2a_1'x' - 2a_2'y' + a_0' = 0$$

Вычитая это уравнение из уравнения для точки (x_1', y_1'), получим:

$$4(a_1'x' + a_2'y') = 0 \Rightarrow a_1'x' + a_2'y' = 0$$

для любой точки (x_1, y_1) линии. Получаем следующее:

Либо $a_1' = a_2' = 0$ (тогда уравнение верно всегда), либо все точки линии удовлетворяют уравнению прямой $a_1'x' + a_2'y' = 0$. (*)

При этом можем выразить a_1' и a_2' через коэффициенты старого уравнения - получим $\begin{cases} a_1' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a_2' = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \end{cases}$. Из рассуждений выше либо $a_1' = a_2' = 0$, то есть теорема верна, либо все точки линии лежат на одной прямой - для непустых линий второго порядка это возможно только в случае точки (пара мнимых пересекающихся прямых) или совпадающих прямых, а у этих линий каждая точка является центром симметрии.

$\Leftarrow$ Сдвинем начало координат в точку $O: x = x' + x_0, y = y' + y_0$. В новой системе получим новое уравнение:

$$F'(x', y') = a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 + C_0 = 0$$

так как коэффициенты перед x', y' получаются равными нулю из системы. Очевидно, что это уравнение симметрично относительно начала координат. $\square$

Следствие. В центральном случае для непустой линии второго порядка (не мнимый эллипс) центр симметрии единственный.

Доказательство. Центральный случай $\Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение.
(Решение единственно и в случае мнимого эллипса, но у него нет действительных точек) $\square$

Отдельно рассмотрим случаи из утверждения (*). В первом случае имеем $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}$. После перехода к базису канонической системы координат получим уравнение вида $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$ - таким уравнением можно представить всё, кроме параболы. Справедливо и обратное утверждение: если линия задаётся уравнением вида $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$, то точка с координатами $(0, 0)$ в этой с.к. - её центр симметрии.

Во втором случае все точки линии второго порядка лежат на одной прямой. Покажем, когда такое возможно: $a'_1 x' + a'_2 y' = 0 \Leftrightarrow (a'_1 x' + a'_2 y')^2 = 0 \Leftrightarrow {a'_1}^2 x'^2 + 2a'_1 a'_2 x' y' + {a'_2}^2 y'^2 = 0$ - такое уравнение задаёт либо пару мнимых пересекающихся прямых, либо пару совпадающих прямых (либо пустое множество, для которого наши рассуждения о принадлежности всех точек одной прямой неприменимы, так что рассматриваем непустые линии) - то есть наша линия является либо точкой, либо прямой.
<u>У любой линии второго порядка, кроме параболы, есть центр симметрии.</u>

41.3 Определение центра

Итак, теперь можем определить центр линии второго порядка.

Определение. Точка $O(x_0, y_0)$ называется центром линии второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 x + 2a_2 y + a_0$, если её координаты удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$

Замечание. Из доказанного выше: O - центр линии $\Leftrightarrow$ уравнение линии симметрично относительно этой точки в любой с.к.
Для всех прямых, кроме параболы, центр канонической с.к. является её центром (несложно проверить).

Билет 42. Сопряжённые направления

42.1 Определение

Попробуем найти произвольный базис (не обязательно ортогональный), в котором матрица A_1 линии второго порядка станет диагональной. Пусть $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$ - координаты новых базисных векторов в старом базисе. Их новые координаты - $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Так как $A_1' = \begin{pmatrix}a_{11}' & a_{12}'\\ a_{12}' & a_{22}'\end{pmatrix}$ - диагональная, $a_{12}' = 0$. Выразим a_{12}' через малую матрицу : $a_{12}' = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} A_1' \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Также если C - матрица перехода к новому базису, то известны равенства: $A_1' = C^T A_1 C, \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$. Отсюда:

$$a_{12}' = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} A_1' \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} C^T A_1 C \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

Отсюда A_1' будет диагональной в случае $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = 0$.

Определение. Направления ненулевых векторов $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$ и сами эти векторы называются сопряжёнными относительно линии второго порядка, заданной в некоторой с.к. уравнением с малой матрицей A_1, если выполнено $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix} = 0$.

Замечание. Направления или векторы $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix}$ сопряжены $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix}$ сопряжены.

Утверждение. Направления являются или не являются сопряжёнными вне зависимости от системы координат.

Доказательство. Из размышлений до определения видно, что спряжённость не зависит от базиса, а также в уравнении линии второго порядка она зависит только от малой матрицы, т.е. не зависит от начала координат. А значит сопряженность не зависит от системы координат в целом. $\square$

42.2 Асимптотические направления

Определение. Направление (= ненулевой вектор) $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, сопряжённое самому себе, т.е. $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0$, называется асимптотическим.

Далее во всех связанных с асимптотическими направлениями рассуждениях можем считать, что линия задана уравнением вида $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ или $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$ - здесь и далее такй вид уравнения линии будем называть **простейшим**.

42.3 Пересечения линии и прямой

Теорема. 1. Если прямая l имеет асимптотическое направление относительно линии второго порядка L, то либо l имеет с L не более одной общей точки, либо l содержится в L.
2. Прямая l неасимптотического направления имеет с L не более двух общих точек (причём в случае ровно одной точки её обычно считают двумя совпадающими точками).

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ - любое направление. Рассмотрим прямую l с направляющим вектором $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$: $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ и подставим в простейшее уравнение линии $F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c$ или $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$. После приведения подобных слагаемых получим не более чем квадратное уравнение относительно t, в котором коэффициент перед t^2 будет равен $\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2$. Тогда уравнение не может иметь больше двух корней в случае, если этот коэффициент ненулевой, то есть при $\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \neq 0$ - в случае неасимптотического направления. В случае асимптотического направления наше уравнение линейно, а значит оно либо не имеет решений, либо решение единственно, либо любое t является решением, т.е. l целиком содержится в L. □

Следствие. Никакие три точки эллипса, параболы или гиперболы не лежат на одной прямой.

Доказательство. Предположим противное. Тогда по доказанной выше теореме имеем, что линия второго порядка содержит прямую, на которой лежат данные точки. Докажем, что это невозможно:

- Эллипс: в канонической системе координат для его точек выполнены неравенства $|x| \leqslant a, |y| \leqslant b$, т.к. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, поэтому эллипс ограничен и не может содержать прямую;

- Парабола: в канонической системе координат для её точек выполнено неравенство $x \geqslant 0$, т.к. $y^2 = 2px$. Отсюда парабола не может содержать никакую прямую, кроме прямой вида $x = c \geqslant 0$, но уравнение $y^2 = 2pc$ не может иметь более двух решений относительно y;

- Гипербола: в канонической системе координат для её точек выполнено неравенство $|x| \geqslant a$, т.к. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то есть она не может содержать точек прямой $x = 0$. Тогда она не может содержать никакую прямую, кроме прямой вида $x = c \neq 0$, но уравнение $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ не может иметь более двух решений относительно y.

□

Определение. Из следствия видно, что прямая может содержаться целиком только в линии, представляющей собой пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых или пару совпадающих прямых. Такие линии называются распадающимися, так как задающие их многочлены $F(x, y)$ распадаются в произведение двух линейных функций. (это свойство очевидно для этих линий в каноническом виде, а далее можем проделать обратные к приведению к каноническому виду операции, чтобы получить тот же результат для произвольного вида).

Билет 43. Диаметры

43.1 Определение и свойства

Вернёмся к пересечению $l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ с линией второго порядка L в системе координат, где L имеет уравнение простейшего вида. Пусть l пересекает L ровно в двух точках (это в частности означает, что направление $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - неасимптотическое), и точка (x_0, y_0) является серединой отрезка с концами в точках пересечения (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Тогда $\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha t' \\ y_1 = y_0 + \beta t' \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = x_0 - \alpha t' \\ y_2 = y_0 - \beta t' \end{cases}$

для некоторого $t' \in \mathbb{R}$, так как точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) симметричны относительно (x_0, y_0), которой соответствует значение $t = 0$.
Подставим выражения для x и y в уравнение линии L:

$$\lambda_1(x_0+\alpha t)^2 + \lambda_2(y_0+\beta t)^2 + c = 0 \text{ или } \lambda_2(y_0+\beta t)^2 + 2c(x_0+\alpha t) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2)t^2+2(\lambda_1 x_0\alpha+\lambda_2 y_0\beta)t+... = 0 \text{ или } \lambda_2\beta^2t^2+2t(\lambda_2y_0\beta+c\alpha)t+... = 0$$

Оба числа t' и $-t'$ являются корнями этого уравнения, так как точки X_1, X_2 принадлежат L. Из теоремы Виета это возможно только в случае

$$\lambda_1 x_0\alpha + \lambda_2 y_0\beta = 0 \text{ или } \lambda_2 y_0\beta + c\alpha = 0 \text{ (в зависимости от линии)}$$

Таким образом, середина (x_0, y_0) любого отрезка, концы которого являются точками пересечения любой прямой с направляющим вектором $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, лежит на прямой $\lambda_1 x\alpha + \lambda_2 y\beta = 0$ (направляющий вектор $\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ \lambda_1\alpha\end{pmatrix}$) или $\lambda_2 y\beta + c\alpha = 0$ (направляющий вектор $\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ 0\end{pmatrix}$). Несложно проверить, что это действительно прямые: в случае, если коэффициенты перед неизвестными равны нулю, направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ асимптотическое по определению, но уже известно, что это не так.
Направление прямой, содержащей эти середины, сопряжено направлению $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$:
В случае линии вида $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ \lambda_1\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\alpha & \lambda_2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ \lambda_1\alpha\end{pmatrix} = 0;$$

В случае линии вида $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} = 0.$$

Замечание. В случае, когда уравнение линии L можно привести к простейшему виду $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$, т.е. когда L - не парабола, полученная прямая проходит через начало координат, которое является центром L. Поэтому если L имеет центр, то полученная прямая обязательно через него проходит.
(Если центров больше одного, то за начало координат можно взять любой из них, поэтому прямая будет проходить через все центры)

Рассмотрим направление полученной прямой (это $\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ \lambda_1\alpha\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ 0\end{pmatrix}$). Посмотрим, когда это направление может быть асимптотическим: в первом случае $\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta & \lambda_1\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ \lambda_1\alpha\end{pmatrix} = \lambda_2^2\lambda_1\beta^2 + \lambda_1^2\lambda_2\alpha^2 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2)$. Это выражение равно нулю либо при $\lambda_1 = 0$, либо при $\lambda_2 = 0$, но в этом случае $\lambda_1 = 0$ из нумерации λ, либо при $\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2 = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0$, но тогда направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ должно быть асимптотическим, а это не так.

Во втором случае направление $\begin{pmatrix}-\lambda_2\beta\\ 0\end{pmatrix}$ совпадает с направлением $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ - тогда λ_1 также равно 0, а направление $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ - асимптотическое:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = 0$$

Те же рассуждения применимы и для случая, когда L - пара совпадающих прямых: ни для какого направления не встретится прямой, пересекающей L в двух различных точках, но если принять, что одна точка пересечения - совпавшие точки X_1 и X_2, то прямая, содержащая все середины отрезков, если принять $X_1 = X_0 = X_2$, совпадёт с L.

Аналогичный результат получается при работе с произвольной системой координат. Подставив $l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t\\ y = y_0 + \beta t\end{cases}$ в уравнение $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$ линии второго порядка L, получим:

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2))t+$$

$$+F(x_0, y_0) = 0$$

и из рассуждений, аналогичных приведённым выше, симметричные значения параметра t' и $-t'$ могут быть корнями этого уравнения только в случае

$$\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0 \quad (*)$$

Замечание. Полученное уравнение задаёт прямую, когда направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ неасимптотическое - это было показано для канонической с.к., а при изменении

с.к. прямая остаётся прямой. а неасимптотическое направление остаётся неасимптотическим.
Также из уравнения видно, что такой прямой принадлежат все центры L.

Определение. Прямая, заданная уравнением $(*)$, называется диаметром линии второго порядка L, сопряжённым данному неасимптотическому направлению $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$.

Теорема. (Свойства диаметров)
1. Любой диаметр линии L проходит через все центры этой линии, если они есть.
2. Если существует прямая неасимптотического направления $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, пересекающая L ровно в двух точках X_1 и X_2, то диаметр, сопряжённый направлению $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, проходит через середину отрезка $[X_1, X_2]$.

Доказательство. Из рассуждений выше. $\square$

Определение. Хордой называется отрезок, соединяющий две точки линии второго порядка и не имеющий других общих точек с линией.

Замечание. Уже показали, что диаметр имеет асимптотическое направление $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$ линия L относится к параболическому случаю и является либо параболой, либо парой параллельных, мнимых параллельных или совпадающих прямых. Во всех этих случаях, кроме параболы, диаметр (любой) является прямой центров. В случае параболы имеется ровно одно асимптотическое направление - ось симметрии параболы - и прямые этого и только этого направления являются диаметрами. В частности, для любой прямой такого направления можно подобрать такое направление хорд, что прямая будет пересекать хорды этого направления в их середине.

43.2 Сопряжённые диаметры

В центральном случае (т.е. $\delta \neq 0$ и линия имеет единственный центр) направление $\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\end{pmatrix}$ диаметра, сопряжённого данному неасимптотическому направлению $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$, является неасимптотическим (также уже показали выше), и в этом случае диаметр, сопряжённый направлению $\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{pmatrix}$, имеет направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, поэтому в центральном случае имеет место понятие сопряженности диаметров.

Определение. Диаметры линии второго порядка называются сопряжёнными, если их направления сопряжены относительно этой линии.

Теорема. Если линия второго порядка имеет единственный центр, то всякий её диаметр является прямой неасимптотического направления, проходящей через центр, и всякая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр, является её диаметром.

Доказательство. Утверждение про диаметр уже было доказано выше - он проходит через центр и в центральном случае (центр единственный) имеет неасимптотическое направление. Докажем обратное утверждение. Координаты центра удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases}$. В нашем случае эта система имеет единственное решение, то есть прямые $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$ и $a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0$ задают собственный пучок. Тогда если прямая проходит через центр, то она задаётся уравнением вида $\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$ для некоторых α, β, одновременно не равных 0. Покажем, что направление прямой l, проходящей через центр ($\begin{pmatrix}-\alpha a_{12} - \beta a_{22}\\ \alpha a_{11} + \beta a_{12}\end{pmatrix}$) сопряжено направлению $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha a_{12} - \beta a_{22}\\ \alpha a_{11} + \beta a_{12}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha a_{11} + \beta a_{12} & \alpha a_{12} + \beta a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha a_{12} - \beta a_{22}\\ \alpha a_{11} + \beta a_{12}\end{pmatrix} = 0$$

Итак, прямая l проходит через центр, и её направление сопряжено $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Если её направление неасимптотическое, то и направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ неасимптотическое, а значит l - диаметр, сопряжённый направлению $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. □

Билет 44. Касательная к линии второго порядка

44.1 Определение

В курсе математического анализа даны определения дифференциала и касательной к функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке. Дадим аналогичные определения для $f : \pi \to \mathbb{R}$ (от точки на евклидовой плоскости):

Определение. Функция $f : \pi \to \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке $X_0 \in \pi$, если

$$f(X_0 + \bar{h}) - f(X_0) = l(\bar{h}) + \bar{\bar{o}}(|\bar{h}|) \text{ при } |\bar{h}| \to 0,$$

где $l : V^2 \to \mathbb{R}$ - линейная функция на двумерном векторном пространстве, ассоциированном с π. Функция l называется дифференциалом f в точке X_0.

Как известно из курса алгебры, линейность функции l означает, что $l(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha l(\bar{u}) + \beta l(\bar{v})$ для любых $\bar{u}, \bar{v} \in V^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Таким образом:

$$f(X_0 + \bar{h}) - f(X_0) = l(\bar{h}) + \bar{\bar{o}}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \to 0 \ \Rightarrow$$

$$f(X) = l(\overrightarrow{X_0X}) + f(X_0) + \bar{\bar{o}}(|\overrightarrow{X_0X}|), \quad X \to X_0$$

Запишем в координатах: пусть задан репер $O\bar{e}_1\bar{e}_2$, и пусть $X_0 = (x_0, y_0), X = (x, y), \bar{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$. Тогда функции $f : \pi \to \mathbb{R}$ соответствует функция $F(x, y)$ от координат точки в данной с.к. Имеем:

$$f(X_0 + \bar{h}) = f(X_0) + l(\bar{h}) + \bar{\bar{o}}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \to 0 \Rightarrow$$

$$f(X_0 + \bar{h}) = f(X_0) + h_1 l(\bar{e}_1) + h_2 l(\bar{e}_2) + \bar{\bar{o}}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \to 0 \Rightarrow$$

$$F(x, y) = F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = h_1 l(\bar{e}_1) + h_2 l(\bar{e}_2) + F(x_0, y_0) + \bar{\bar{o}}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \to 0$$

В частности,

$$F(x_0 + h_1, y_0) = h_1 l(\bar{e}_1) + F(x_0, y_0) + \bar{\bar{o}}(h_1), \quad h_1 \to 0$$

$$F(x_0, y_0 + h_2) = h_2 l(\bar{e}_2) + F(x_0, y_0) + \bar{\bar{o}}(h_2), \quad h_2 \to 0$$

Отсюда:

$$l(\bar{e}_1) = \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0) + \bar{\bar{o}}(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0),$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ - частная производная F по x в точке (x_0, y_0), вычисляющаяся как производная $F(x)$, где y - фиксированный параметр.
По аналогичным рассуждениям $l(\bar{e}_2) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$. Рассмотрим график функции $z = F(x, y)$ - это некоторая поверхность в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Тогда $z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + F(x_0, y_0)$ - плоскость, наиболее точно приближающая эту поверхность в окрестности точки $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$. Эта плоскость называется касательной плоскостью к графику функции $F(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$. Она не зависит от выбора системы координат.

В случае, когда $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_2$$

Уравнение касательной плоскости в точке $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$:

$$z = (2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_1)(x - x_0) + (2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_2)(y - y_0) + F(x_0, y_0)$$

Так как нас интересует касательная на плоскости, необходимо найти касательную плоскость в точке $(x_0, y_0, 0) \in L$ $(F(x_0, y_0) = 0)$. Пересекая касательную плоскость в этой точке с плоскостью $z = 0$, получим прямую

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) \end{cases}$$

В плоскости $z = 0$ (с координатами (x, y)) она задаётся уравнением

$$\boxed{(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0}$$

Очевидно, что это уравнение задаёт прямую тогда и только тогда. когда точка (x_0, y_0) не является центром L.

Определение. Пусть линия второго порядка L задана в некоторой аффинной системе координат уравнением $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, и пусть $(x_0, y_0) \in L$, причём (x_0, y_0) не является центром L.
Касательной к L в точке (x_0, y_0) называется прямая, заданная уравнением

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0$$

или, что то же самое:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 = 0$$

(из условия $F(x_0, y_0) = 0$). Последнее уравнение имеет матричный вид:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0}$$

Касательные в центре линии не определены, даже если центр принадлежит линии.

44.2 Свойства

Утверждение. Определение касательной не зависит от системы координат.

Доказательство. Рассмотрим другую систему координат $O'\bar{e}_1'\bar{e}_2'$, где $O' = (x_1, y_1)$ - новое начало координат, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ - матрица перехода, $D = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{\Large C}} & x_1 \\ & & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Подставим в уравнение:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' & y_0' & 1 \end{pmatrix} D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' & y_0' & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда уравнение не зависит от системы координат. □

Теперь для удобства можем рассматривать уравнение в канонической системе координат - в ней оно имеет один из простейших видов. Рассмотрим случаи:

1. Уравнение имеет вид $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$.
   Уравнение касательной в точке $(x_0, y_0) \in L : \lambda_1 x_0 x + \lambda_2 y_0 y + c = 0$. Её направление - $\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_1 x_0 \end{pmatrix}$. Может ли оно быть асимптотическим?

   $$\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 & \lambda_1 x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_1 x_0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2)$$

   Так как $\lambda_2 \neq 0$, это число равно нулю либо при $\lambda_1 = 0$, либо при $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$.

   В случае $\lambda_1 = 0$ линия представляет собой пару параллельных, мнимых параллельных или совпадающих прямых. Для совпадающих прямых касательная не определена ни в одной точке, так как любая точка линии - её центр, случай мнимых параллельных прямых описывает пустую линию. В случае параллельных прямых касательная имеет асимптотическое направление и содержит точку на одной из прямых $\Rightarrow$ она совпадает с одной из прямых.

Остаётся случай $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$. Из условия $(x_0, y_0) \in L$ следует, что $c = 0$, т.е. линия задана уравнением $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$. Отсюда L - пара пересекающихся или мнимых пересекающихся прямых. В первом случае касательная совпадёт с одной из прямых, а во втором линия состоит из одной точки-центра, поэтому дня неё касательные не определены.

2. Уравнение имеет вид $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$.
   Уравнение касательной в точке $(x_0, y_0) \in L : cx + \lambda_2 y_0 y = 0$. Направляющий вектор - $\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ c \end{pmatrix}$. Когда он асимптотический?

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda_2 c^2$$

   Так как в случае параболы $\lambda_2 \neq 0$, $c \neq 0$, у параболы нет касательных с асимптотическим направлением.

Итого:

1. Для мнимого эллипса, пары мнимых пересекающися прямых, пары мнимых параллельных прямых и пары совпадающих прямых касательная не определена ни в одной точке.

2. Для пары пересекающихся прямых и пары параллельных прямых касательная в точке, не являющейся центром, совпадает с той прямой, на которой лежит точка касания.

3. Для эллипса, параболы и гиперболы касательная в любой точке существует и имеет неасимптотическое направление.

44.3 Случай эллипса, гиперболы и параболы

Рассмотрим подробнее касательные в случае эллипса, гиперболы и параболы. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение. Пусть L - эллипс, $(x_0, y_0) \in L$. Тогда на L существуют точки, сколь угодно близкие к (x_0, y_0). Более того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1. $\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ такой, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\ \exists \delta(\varepsilon) : (x_0+\varepsilon, y_0+\delta(\varepsilon)) \in L$, причём $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

2. $\forall \varepsilon_0 < 0\ \exists \varepsilon_1 : \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < 0$ такой, что $\forall \varepsilon \in (\varepsilon_1, 0)\ \exists \delta(\varepsilon) : (x_0+\varepsilon, y_0+\delta(\varepsilon)) \in L$, причём $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

(Проще говоря, либо справа, либо слева от x_0 есть сколь угодно малая полуокрестность, для любого ε из которой есть точка (x, y), где $x_0 + \varepsilon$ принадлежащая L, причём при $x \to x_0\ \ y \to y_0$)

Доказательство. Рассмотрим эллипс в канонической с.к., т.е. его уравнение имеет простейший вид $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$. Пусть для определённости $\lambda_1, \lambda_2 > 0, c < 0$ (иначе домножим на -1). Запишем условие на $\delta(\varepsilon)$, что точка $(x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon))$ принадлежит L:

$$\lambda_1(x_0+\varepsilon)^2 + \lambda_2(y_0+\delta(\varepsilon))^2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2 \cdot \delta(\varepsilon)^2 + 2\lambda_2 y_0 \cdot \delta(\varepsilon) + \lambda_1(x_0+\varepsilon)^2 + \lambda_2 y_0^2 + c = 0$$

Получили квадратное уравнение относительно $\delta(\varepsilon)$ ($\lambda_2 \neq 0$). Обозначим свободный член за A. Заметим, что $A \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$. Запишем дискриминант полученного квадратного уравнения:

$$D = 4\lambda_2^2 y_0^2 - 4\lambda_2 \cdot A \ \Rightarrow D \to 4\lambda_2^2 y_0^2, \ \ \varepsilon \to 0$$

Если $y_0 \neq 0$, то для достаточно малых (по модулю) ε выполнено $D \geqslant 0$, поэтому корни $\delta(\varepsilon)$ существуют и при $\varepsilon \to 0$ один из них стремится к 0, т.к. $A \to 0$
Если же $y_0 = 0$, то $D = -4\lambda_1\lambda_2(x_0+\varepsilon)^2 - 4\lambda_2 c$, и тогда

$$D \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda_1(x_0+\varepsilon)^2 \leqslant -c \Leftrightarrow |x_0+\varepsilon| < \sqrt{\frac{-c}{\lambda_1}}$$

Так как $y_0 = 0$, имеем $\lambda_1 x_0^2 + c = 0 \Rightarrow |x_0| = \sqrt{\frac{-c}{\lambda_1}}$. Отсюда для достаточно малого ε, имеющего противоположный знаку x_0 знак, будет выполнено $D \geqslant 0$, т.е. искомый ε_1 существует и в этом случае (но только для одной полуокрестности). Осталось заметить, что при $\varepsilon \to 0$

$$D = -4\lambda_2(\lambda_1(x_0+\varepsilon)^2 + c) \to 0 \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \frac{\pm\sqrt{D}}{2\lambda_2} \to 0$$

□

Утверждение. Пусть L - гипербола, $(x_0, y_0) \in L$. Тогда на L существуют точки, сколь угодно близкие к (x_0, y_0). Более того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1. $\forall\varepsilon_0 > 0\ \exists\varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ такой, что $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\ \exists\delta(\varepsilon) : (x_0+\varepsilon, y_0+\delta(\varepsilon)) \in L$, причём $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;
2. $\forall\varepsilon_0 < 0\ \exists\varepsilon_1 : \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < 0$ такой, что $\forall\varepsilon \in (\varepsilon_1, 0)\ \exists\delta(\varepsilon) : (x_0+\varepsilon, y_0+\delta(\varepsilon)) \in L$, причём $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$;

Доказательство. Абсолютно аналогично доказательству для эллипса с изменённым знаком λ_2. Этот знак повлияет только на знак неравенства в случае $y_0 = 0$, но одна и полуокрестностей по-прежнему будет подходить. □

Пусть L - эллипс или гипербола, $l_0 : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ - касательная в точке $(x_0, y_0) \in L$. В канонической системе координат известен её направляющий вектор: $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_2 x_0 \end{pmatrix}$. Возьмём произвольную точку $(x_1, y_1) \in L$, отличную от (x_0, y_0), и рассмотрим прямую, параллельную l_0, проходящую через (x_1, y_1) : $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + \alpha t \\ y = y_1 + \beta t \end{cases}$. Найдём точки пересечения l_1 и L:

$$\lambda_1(x_1 + \alpha t)^2 + \lambda_2(y_1 + \beta t)^2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2)t^2 + 2(\lambda_1\alpha x_1 + \lambda_2\beta y_1)t + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + c = 0$$

Заметим, что коэффициент перед t^2 не равен 0, т.к. направление касательной неасимптотическое, а свободный член $= 0$, т.к. $(x_0, y_0) \in L$. Тогда корень относительно t единственный $\Leftrightarrow \lambda_1\alpha x_1 + \lambda_2\beta y_1 = 0$.
Если для точки $(x_1, y_1 \in L)$ это условие не выполнено, то l_1 пересекает L в двух точках. Предположим, что для точки (x_1, y_1) условие выполнено. Тогда прямая $\lambda_1\alpha x + \lambda_2\beta y = 0$ уже имеет две точки пересечения с L - (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Тогда для любой точки $(x_2, y_2) \in L$, $|x_0 - x_2| < |x_0 - x_1|$ это же условие выполняться не может, т.к. прямая не может иметь более двух общих точек с L. Сформулируем доказанное утверждение:

Утверждение. Пусть L - эллипс или гипербола, $(x_0, y_0) \in L$. Тогда $\exists\varepsilon > 0$ такой, что для любой точки $(x_1, y_1) \in L : d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) < \varepsilon$ прямая, проходящая через (x_1, y_1) и параллельная касательной в точке (x_0, y_0), пересекает L в двух точках.

Докажем аналогичные утвержения для параболы.

Утверждение. Пусть L - парабола, $(x_0, y_0) \in L$. Тогда на L существуют точки, сколь угодно близкие к (x_0, y_0). Более того, выполнено условие:
$\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ такой, что $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1)\ \exists \delta(\varepsilon) : (x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon)) \in L$, причём $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а в случае $y_0 \neq 0$ дополнительно $\exists \gamma(\varepsilon) : (x_0 - \varepsilon, y_0 + \gamma(\varepsilon)) \in L$ и $\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим параболу в канонической с.к., т.е. её уравнение имеет простейший вид $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$. Пусть для определённости $\lambda_2 = 1, c < 0$ (иначе поделим на λ_2). Запишем условие на $\delta(\varepsilon)$, что точка $(x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon))$ принадлежит L:

$$(y_0 + \delta(\varepsilon))^2 + 2c(x_0 + \varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\delta(\varepsilon)^2 + 2y_0 \cdot \delta(\varepsilon) + 2c(x_0 + \varepsilon) + y_0^2 = 0$$

Получили квадратное уравнение относительно $\delta(\varepsilon)$ ($\lambda_2 \neq 0$). Обозначим свободный член за A. Заметим, что $A \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как $y_0^2 + 2cx = 0$. Запишем дискриминант полученного квадратного уравнения:

$$D = 4y_0^2 - 4A \ \Rightarrow D \to 4y_0^2, \ \ \varepsilon \to 0$$

Если $y_0 \neq 0$, то для достаточно малых ε (по модулю, поэтому будут существовать и $\delta(\varepsilon)$, и $\gamma(\varepsilon)$) выполнено $D \geqslant 0$, поэтому корни $\delta(\varepsilon)$ существуют и при $\varepsilon \to 0$ один из них стремится к 0, т.к. $A \to 0$
Если же $y_0 = 0$, то $x_0 = 0$ из принадлежности параболе, и уравнение имеет вид

$$\delta(\varepsilon)^2 + 2c\varepsilon = 0 \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \pm\sqrt{-2c\varepsilon} \Rightarrow \delta(\varepsilon) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

□

Утверждение. ПУсть L - парабола, $(x_0, y_0) \in L$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ такой, что для любой точки $(x_1, y_1) \in L : d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) < \varepsilon$ прямая, проходящая через (x_1, y_1) и параллельная касательной в точке (x_0, y_0), пересекает L в двух точках.

Доказательство. Рассуждения абсолютно аналогичны случаю эллипса и гиперболы. □

Теорема. Пусть L - эллипс, гипербола или парабола, l - диаметр, сопряжённый неасимптотическому направлению $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ и $(x_0, y_0) \in L \cap l$, причём (x_0, y_0) - не центр. Тогда касательная к L в точке (x_0, y_0) имеет направление $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Доказательство. Запишем условие $(x_0, y_0) \in l$ - точка принадлежит диаметру, сопряжённого $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$:

$$\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0 \quad (*)$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0):

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0,$$

её направляющий вектор - $\begin{pmatrix} -a_{12}x_0 - a_{22}y_0 - a_2 \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \end{pmatrix}$.

Если рассматривать $(*)$ как уравнение относительно α и β, то оно задаёт их с точностью до пропорциональности (коэффициенты не равны нулю одновременно, т.к. (x_0, y_0) - не центр). Очевидно, что направляющий вектор касательной удовлетворяет этому уравнению, а значит её направление совпадает с направлением $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. □

Теорема. Пусть L - линия второго порядка, l - прямая неасимптотического направления, $L \cap l = (x_0, y_0)$ и (x_0, y_0) - не центр L. Тогда l - касательная к L в точке (x_0, y_0).

Доказательство. Пусть $l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$. Подставим в уравнение линии:

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2))t+ \\ +F(x_0, y_0) = 0.$$

Коэффициент перед t^2 не равен нулю, т.к. (x_0, y_0) - не центр, а свободный член равен нулю, т.к. $(x_0, y_0) \in L$. Тогда точка пересечения единственна только в случае, когда коэффициент перед t нулевой, а из этого

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -a_{12}x_0 - a_{22}y_0 - a_2 \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \end{pmatrix}$$

Тогда l имеет с касательной к L в (x_0, y_0) общую точку и у них совпадают направления, а значит, эти прямые совпадают, т.е. l - касательная к L в точке (x_0, y_0). □

Билет 45. Особые и главные направления

45.1 Особые направления

Определение. Направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ называется особым для данной линии второго порядка, если относительно неё оно сопряжено любому направлению.

Замечание. Так как сопряжённость не зависит от выбора системы координат, направление является или не является особым вне зависимости от системы координат.

Утверждение. У линии L есть особое направление $\Leftrightarrow$ L параболического типа, причём в этом случае в канонической системе координат L особым является направление $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

Доказательство. Запишем условие, что направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ особое, в канонической системе координат:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Подставив $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, получим $\begin{cases}\lambda_1\alpha = 0\\ \lambda_2\beta = 0\end{cases}$. Из этого следует, что $\lambda_1 = \beta = 0$, так как $\lambda_2 \neq 0$ из нумерации, поэтому $\beta = 0$, а тогда $\alpha \neq 0$, иначе $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ - не направление. $\square$

Замечание. В параболическом случае простейшее уравнение линии имеет ось симметрии $y = 0$, поэтому особое направление всегда параллельно оси симметрии линии (одной из них, если их несколько).

Утверждение. В параболическом случае любое направление, сопряжённое неасимптотическому - особое.

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ - произвольное неасимптотическое направление для линии параболического типа, заданной в канонической с.к. Тогда $\beta \neq 0$

(иначе асимптотическое). Пусть $\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix}$ - любое сопряжённое ему направление. Тогда

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix} = \beta\beta'\lambda_2 = 0$$

Отсюда очевидно, что $\beta' = 0$, т.е. $\begin{pmatrix}\alpha' \\ \beta'\end{pmatrix}$ - особое. □

Следствие. В параболическом случае все диаметры линии имеют особое направление.

Замечание. В случае параболы уравнение линии имеет вид $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$, и уравнение диаметра, сопряжённого неасимптотическому направлению $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$, имеет вид $\beta\lambda_2 y + \alpha c = 0$, причём единственное условие на $\alpha, \beta - \beta \neq 0$. Отсюда можно сделать вывод, что все прямые, параллельные оси симметрии параболы, являются её диаметрами.

Если же линия параболического типа, но не является параболой, то уравнение линии имеет вид $\lambda_2 y^2 + c = 0$, и уравнение диаметра, сопряжённого неасимптотическому направлению $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$, имеет вид $\beta\lambda_2 y = 0$. Отсюда видно, что линия имеет единственный диаметр, в канонической с.к. заданный уравнением $y = 0$.

Найдём особое направление в произвольной системе координат. Оно опреелено условием

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Подставив $\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}$, получим $\begin{cases} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$

Отсюда видно, что вектор $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ является собственным вектором A_1 с собственным значением $0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow$ нормированный вектор с направлением $\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ является первым базисным вектором канонической с.к. (очевидно, что он всегда определён однозначно)

45.2 Главные направления

Определение. Направление $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ называется главным для данной линии второго порядка, если относительно этой линии оно сопряжено ортогональному ему направлению.

Определение. Диаметр с главным направлением называется главным диаметром.

Замечание. Направление является главным вне зависимости от системы координат, так как сопряжение и ортогональность не зависят от системы координат (прямоугольной, раз пользуемся ортогональностью).

Замечание. Главный диаметр является осью симметрии линии, т.к. он делит пополам все перпендикулярные ему хорды. Если у линии есть центр, то главные диаметры будет являться осями канонической с.к.

Утверждение. Если у линии есть главное направление, то оно является направлением оси координат в канонической с.к. (одной из них, если их много).

Доказательство. В канонической системе координат: если $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ - главное направление, то $\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ - ему ортогональное и сопряжённое, то есть:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix} = -\lambda_1\alpha\beta + \lambda_2\alpha\beta = \alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то либо $\alpha = 0$, либо $\beta = 0$, а значит векторы $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ параллельны базисным векторам канонической с.к.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то α и β могут быть любыми. Однако в этом случае $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$, и умножение вектора на эту матрицу слева равносильно умножению этого вектора на λ. Тогда любой вектор является собственным для матрицы $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, а значит можем перейти к новой канонической с.к., где базисные векторы сонаправлены с $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$. $\square$

Билет 46. Поляры и полюсы

Определение. Говорят, что точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) сопряжены относительно линии второго порядка, заданной уравнением $F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$, если $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

Замечание. В случае данного определения нельзя использовать направления - если равенство выполнено для $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, оно не обязано выполняться для $\begin{pmatrix} \mu\alpha_1 \\ \mu\beta_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \nu\alpha_2 \\ \nu\beta_2 \end{pmatrix}$.

Утверждение. Точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) сопряжены относительно линии второго порядка $L \Leftrightarrow$ точки (x_2, y_2) и (x_1, y_1) сопряжены относительно L.

Доказательство. Достаточно непосредственно проверить, что выполнено равенство $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ □

Зафиксируем точку (x_0, y_0) и рассмотрим множество всех сопряжённых ей относительно L точек (x, y):

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + ... = 0$$

Очевидно, что это уравнение задаёт прямую $\Leftrightarrow$ (x_0, y_0) - не центр L.

Определение. Пусть (x_0, y_0) - любая точка плоскости, не являющаяся центром линии второго порядка L, заданной уравнением $F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тогда прямая l, заданная уравнением $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, называется полярой точки (x_0, y_0), а точка (x_0, y_0) называется полюсом прямой l.

Утверждение. Поляра содержит свой полюс $\Leftrightarrow$ полюс принадлежит L и поляра является касательной к L в полюсе.

Доказательство.
$\Leftarrow$: Следует из уравнений касательной и поляры (совпадают для точки на L).

$\Rightarrow$: Поляра содержит свой полюс $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ из определения поляры $\Rightarrow$ $(x_0, y_0) \in L$, а для точки на L уравнения поляры и касательной совпадают. □

Утверждение. Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - точки, не являющиеся центром линии второго порядка L. и l_1, l_2 - их поляры. Тогда $(x_1, y_1) \in l_2 \Leftrightarrow (x_2, y_2) \in l_1$.

Доказательство. Следует из взаимности сопряжённоти точек. □

Следствие. Если (x_0, y_0) - не центр линии L, l_0 - её поляра и l_0 пересекает L в точке (x_1, y_1), не являющейся центром, то (x_0, y_0) принадлежит касательной к L в точке (x_1, y_1).

Теорема. Данная прямая является или не является полярой данной точки относительно L независимо от системы координат.

Доказательство. Пусть точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) сопряжены, (x_1', y_1') и (x_2', y_2') - их новые координаты. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{pmatrix}$, где $A' = D^T AD$ для перехода L в новую с.к. Тогда:

$$\begin{pmatrix} x_1' & y_1' & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' & y_1' & 1 \end{pmatrix} D^T AD \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда видно, что сопряжение точек не зависит от системы координат, а значит и поляра точки не зависит от системы координат. □

Утверждение. Пусть L - линия второго порядка, $(x_0, y_0) \notin L, (x_0, y_0)$ - не центр L. Тогда поляра l_0 точки (x_0, y_0) имеет асимптотическое направление $\Rightarrow$ либо L - гипербола, (x_0, y_0) принадлежит одной из её асимптот и поляра имеет направление этой асимптоты, либо L - пара параллельных или совпадающих прямых, а поляра им параллельна.

Доказательство. В канонической системе координат L имеет уравнение одного из простейших видов:

1. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$
   Уравнение поляры: $\lambda_1 x_0 x + \lambda_2 y_0 y + c = 0$.
   Её направляющий вектор - $\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_1 x_0 \end{pmatrix}$.
   Запишем условие асимтотичности:
   $$\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 & \lambda_1 x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_1 x_0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2) = 0$$
   Если $\lambda_1 = 0$, то L - пара параллельных, мнимых параллельных или совпадающих прямых, а вэтом случае поляра параллельна им, т.к. имеет асимптотическое направление.
   Если же $\lambda_1 \neq 0$, то $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$. Тогда $c \neq 0$ из условия $(x_0, y_0) \notin L$, а также λ_1 и λ_2 разных знаков, т.к. иначе $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 \neq 0$. Отсюда L - гипербола, $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$ - условие того, что (x_0, y_0) лежит на одной из её асимптот, а поляра имеет направление именно этой асимптоты (мы его уже считали).

2. $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0,\ c \neq 0$
   Уравнение поляры: $cx + \lambda_2 y_0 y = 0$.
   Её направляющий вектор - $\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Условие асимтотичности:
   $$\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_2 c^2 = 0$$
   не может выполняться.

□

Следствие. Если (x_0, y_0) - не центр L, причём L - не пара пересекающихся или совпадающих прямых, то либо поляра l_0 точки (x_0, y_0) не пересекает L, либо пересекает L ровно в двух точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2), причём в этих точках существуют касательные, пересекающиеся в точке (x_0, y_0), либо L - гипербола, (x_0, y_0) принадлежит одной из её асимптот, поляра параллельна этой асимптоте и пересекает L в одной точке (x_1, y_1), причём прямая через (x_0, y_0) и (x_1, y_1) - касательная в точке (x_1, y_1).

Итак, если L - эллипс, гипербола или парабола, $(x_0, y_0) \notin L$ и (x_0, y_0) не принадлеит асимптоте L (если L - гипербола), то из (x_0, y_0) либо нельзя провести касательной к L, либо можно провести ровно две касательные. Если (x_0, y_0) лежит на асимптоте гиперболы и не совпадает с её центр, то через (x_0, y_0) проходит ровно одна касательная к L (из количества пересечений поляры с линией).

Билет 47. Эллипс, гипербола и парабола

на этом месте я гордо сдаюсь и посылаю вас к Комбарову
вам на страничку 60

Билет 48. Оптические свойства

ну а вот это я наверное даже допишу
потому что Комбаров такой фигнёй страдал аж на страничке 89

Билет 49. Конические сечения

Определение. Конической поверхностью (конусом) называется поверхность, образованная множеством прямолинейных образующих, проходящих через одну точку, называемую вершиной этой поверхности. Если какая- нибудь плоскость, не проходящая через вершину конической поверхности и пересекающая все ее прямолинейные образующие, пересекает поверхность по линии C, то линия C называется направляющей конической поверхности.

Конус второго порядка с вершиной в начале координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Очевидно, конус образован прямолинейными образующими, проходящими через начало координат.
В случае $a = b$ конус называется конусом вращения или прямым круговым конусом. Прямой круговой конус удобнее записывать в виде

$$x^2 + y^2 - R^2z^2 = 0$$

Плоскость $z = 1$ пересекает этот конус по окружности радиуса R, которая и является направляющей конуса. Очевидно следующее утверждение:

Утверждение. Сечениями прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса, являются или точка (то есть мнимые пересекающиеся прямые), или пара пересекающихся прямых, или прямая (то есть пара совпадающих прямых).

Теорема. Сечением прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса, является

1. эллипс, если секущая плоскость не параллельна никакой прямолинейной образующей;

2. гипербола, если секущая плоскость параллельна двум прямолинейным образующим;

3. парабола, если секущая плоскость параллельна только одной прямолинейной образующей конуса.

Доказательство. Основным инструментом доказательства будут так называемые шары Данделена. Шар Данделена - это шар, вписанный в конус таким образом, что он касается всех прямолинейных образующих конуса и касается данной секущей плоскости π. Нетрудно заметить, что этими условиями шары Данделена определяются однозначно.

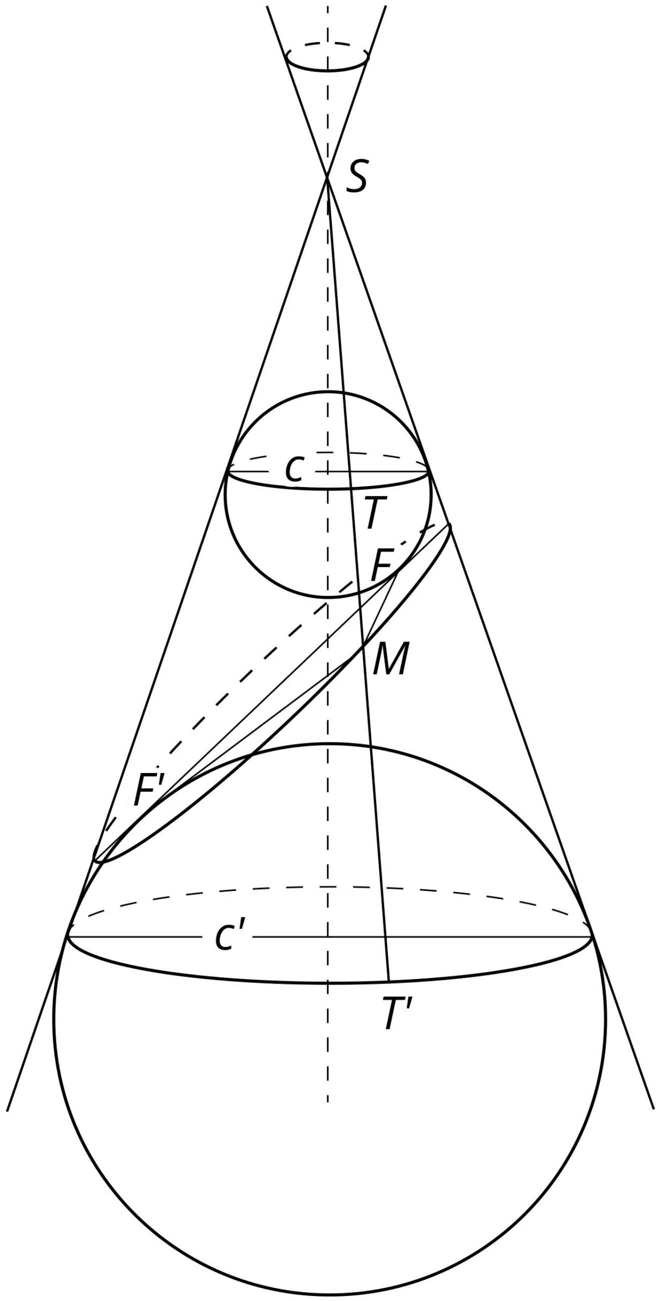
1. Пусть секущая плоскость π не параллельна никакой прямолинейной образующей. Заметим, что тогда эта плоскость пересекает только одну из половин конуса, а плоскость, проходящая через вершину и параллельная секущей плоскости, пересекается с конусом по вершине. В самом деле, если секущая плоскость пересекает обе половины конуса, то плоскость, параллельная секущей плоскости и проходящая через вершину конуса, очевидно, пересекает конус по двум пересекающимся прямолинейным образующим, которые будут параллельны секущей плоскости. Геометрически очевидно, что в этом случае возникают два шара Данделена. Обозначим через F и F' точки касания шаров Данделена с плоскостью π, а через C и C' окружности, состоящие из точек касания шаров с конусом. Пусть M - произвольная точка сечения. Пусть T и T' - точки пересечения прямолинейной образующей SM, проходящей через вершину конуса S и точку M, с окружностями C и C' соответственно. Тогда

$$\rho(M, F) = \rho(M, T) \text{ и } \rho(M, F') = \rho(M, T')$$

поскольку касательные, проведенные к шару из одной точки,равны. А отсюда:

$$\rho(M,F)+\rho(M,F')=\rho(M,T)+\rho(M,T')=\rho(T,T')=\text{const}.$$

Итак, согласно фокальному свойству эллипса сечение - эллипс с фокусами F, F'.



2. Пусть теперь секущая плоскость параллельна двум прямолинейным образующим. В этом случае плоскость π пересекает две половины конуса, и плоскость, проходящая через вершину и параллельная секущей плоскости,

пересекается с конусом по паре пересекающихся прямых. В этом случае также появляются два шара Данделена. Снова обозначим через F и F' точки касания шаров Данделена с плоскостью π, а через C и C' окружности, состоящие из точек касания шаров с конусом. Пусть M произвольная точка сечения. Пусть T и T' точки пересечения прямолинейной образующей SM с окружностями C и C', соответственно. Тогда:

$$\rho(M, F) = \rho(M, T) \text{ и } \rho(M, F') = \rho(M, T')$$

. А отсюда:

$$|\rho(M, F) - \rho(M, F')| = |\rho(M, T) - \rho(M, T')| = \rho(T, T') = \text{const}.$$

Итак, согласно фокальному свойству гиперболы сечение - гипербола с фокусами F, F'.

3. Если секущая плоскость π параллельна только одной прямолинейной образующей конуса, то она пересекает только одну половину конуса, а плоскость, проходящая через вершину конуса и параллельная секущей плоскости π, пересекается с конусом только по одной образующей.
Геометрически очевидно, что шар Данделена только один. Обозначим за С окружность, по которой шар касается конуса, и пусть π_1 - плоскость, которая содержит окружность С. Обозначим через d прямую, по которой пересекаются плоскости π и π_1. Заметим, что прямая d перпендикулярна той образующей, которой параллельна секущая плоскость π. В самом деле, рассмотрим плоскость π_2, проходящую через вершину и параллельную секущей плоскости π. Пусть плоскость π_2 пересекается с плоскостью π_1 по прямой l. Прямая l является касательной к окружности C, поскольку плоскость π_2 пересекается с конусом по одной образующей. Следовательно, прямая l перпендикулярна проекции этой образующей на плоскость π_1 и, значит, по теореме о трех перпендикулярах прямая l перпендикулярна самой образующей. Поскольку прямая l параллельна секущей плоскости π, прямая l параллельна прямой d. Поэтому прямая d перпендикулярна той образующей, которой параллельна секущая плоскость π.
Пусть теперь M - произвольная точка сечения. Обозначим через H основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую d, и пусть T - точка пересечения прямолинейной образующей SM, проходящей через вершину конуса S и точку M, с окружностью C. Пусть, далее, точка F является точкой касания шара Данделена и секущей плоскости π. Тогда:

$$\rho(M, F) = \rho(M, T)$$

поскольку касательные к шару, проведенные из одной точки, равны. Далее, отрезок прямолинейной образующей MT, и отрезок MH, параллельный той единственной прямолинейной образующей конуса, которой параллельна секущая плоскость π, наклонены к плоскости π_1 под углом $\pi - \alpha$, где α - угол между прямолинейной образующей конуса и его осью. Следовательно,

$$\rho(M, T) = \rho(M, H)$$

так как длины наклонных, проведенных из точки M к плоскости π_1 под одним и тем же углом, равны. Итак, по директориальному свойству параболы сечение - парабола с фокусом F и директрисой d.

$\square$

Билет 50. Поверхности второго порядка

50.1 Общее уравнение

Определение. Поверхностью второго порядка называется множество точек трёхмерного аффинного или точечно-евклидова пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0$$

причём хотя бы одно из чисел $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23}$ отлично от нуля. Выражение $F(x, y, z)$ - *многочлен второй степени* от переменных x, y, z. Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется *общим уравнением* поверхности второго порядка.

Замечание. Точно так же определяются повехности второго порядка в аффинном или точечно-евклидовом пространстве произвольной конечной размерности n; они задаются многочленами второй степени от n переменных.

Теория поверхностей второго порядка аналогична теории кривых второго порядка.

50.2 Квадратичная часть и матрицы

С каждым многочленом $F(x, y, z)$ связано *квадратичное отображение* пространства (с данной системой координат) $f : A^3 \to \mathbb{R}$, которое каждой точке X с координатами (x, y, z) ставит в соответствие число $F(x, y, z)$. Говорят, что это отображение представлено многочленом F в данной системе координат. В другой системе координат многочлен, представляющий ту же функцию, станет другим.

Как и в случае линий второго порядка:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + a_0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

– большая матрица,

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– малая матрица (квадратичной части).

Определение.

$$F_1(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

называется *квадратичной частью* многочлена F.

50.3 Закон изменения матриц при переходе к новой аффинной системе координат

Дословно так же, как в случае линий, доказывается, что при переходе к новой системе координат матрицы A и A_1 многочлена F, представляющие всё ту же функцию $f : A^3 \to \mathbb{R}$, меняются по закону $A_1^{'} = C^T A_1 C$ и $A^{'} = D^T A D$, где $A_1^{'}$ и $A^{'}$ – матрицы в новых координатах, C – матрица перехода от старого базиса к новому (её столбцы – координаты новых базисных векторов в старом базисе), $D = \begin{pmatrix} & & & x_0 \\ & C & & y_0 \\ & & & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где x_0, y_0, z_0 - координата нового начала координат в старой системе координат.

В новой системе координат:

$$F^{'}(x^{'},y^{'},z^{'}) = \begin{pmatrix} x^{'} & y^{'} & z^{'} & 1 \end{pmatrix} A^{'} \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x^{'} & y^{'} & z^{'} \end{pmatrix} A_1^{'} \begin{pmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{pmatrix} + a_0,$$

где буквы со штрихами – координаты, многочлен и матрицы в новой системе координат,

$$\begin{pmatrix} a_1^{'} \\ a_2^{'} \\ a_3^{'} \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Билет 51. Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду

51.1 Алгоритм приведения уравнения к каноническому виду

Будем считать, что дело происходит в точечно-евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ и многочлен F, представляющий квадратичное отображение $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, задан в прямоугольной системе координат. Это не умаляет общности: если задана не прямоугольная система координат, то мы всегда можем перейти в прямоугольную (по выписанным выше формулам), а если дело происходит в аффинном пространстве, то мы можем временно превратить его в евклидово, определив скалярное произведение в данной системе координат (в которой записана функция $F(x,y,z)$) по формуле $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Эта формула действительно задаёт некоторое скалярное произведение, и наша система координат прямоугольна относительно него.

Совершенно так же (и из тех же соображений), как в случае линий, мы можем найти каноническую систему координат (прямоугольную!), в которой уравнение поверхности имеет простейший вид:

1. Решаем характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, находим его корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - характеристические числа (собственные значения).

В этом месте отличие (от случая линии): если нулевых корней $\leqslant 1$, то первые номера даём положительным λ (упорядочиваем по возрастанию), следующие – отрицательным (по убыванию), потом идёт 0 (если есть). Если получилось два нулевых корня, то $\lambda_1 = \lambda_3 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$.

2. Для каждого $i = 1, 2, 3$ решаем однородную систему уравнений

$$(A - \lambda_i E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

,находим ненулевое решение (оно обязательно существует, так как $|A - \lambda_i E| = 0$). Если есть несколько линейно независимых решений (два или три), выбираем максимально возможное число линейно независимых решений так, чтобы они были взаимно ортогональны; другими словами, выбираем ортогональный базис в пространстве решений (мы знаем, что это возможно, поскольку какой-то базис есть всегда, а ортогонализировать базисы мы уже научились).

3. Нормируем полученные на предыдущем шаге решения (собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$): если $\bar{u}_i$ – решение, соответствующее числу λ_i, то полагаем $\bar{e}_i^{'} = \frac{\bar{u}_i}{|\bar{u}_i|}$. Векторы $\bar{e}_1^{'}, \bar{e}_2^{'}, \bar{e}_3^{'}$ будут базисными векторами канонической системы координат. По построению они образуют ортонормированный базис.

4. Избавляемся от линейной части, насколько возможно. Выделяя полные квадраты и меняя начало координат: в новом базисе матрица $A_1^{'}$ диагональна, и если в выражении $F^{'}(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ есть, скажем, $a_{11}^{'} x^{'2} + 2a_1^{'} x^{'}$, то меняем $x^{'}$ на $x^{''} + x_0^{'}$, где $x_0^{'}$ – число, первая координата нового начала координат в системе координат с новым базисом) так, чтобы было $a_{11}^{'} x^{'2} + 2a_1^{'} x^{'} = a_{11}^{'} x^{''2} + c_1$, где c_1 – константа.

5. Если удалось избавиться от всех линейных членов, то мы получили канонический вид уравнения, а заодно и каноническую систему координат: её базис – вектора $\bar{e}_1^{'}, \bar{e}_2^{'}, \bar{e}_3^{'}$, найденные на третьем шаге, а начало – точка $O^{'}$ с координатами $x_0^{'}, y_0^{'}, z_0^{'}$ (относительно системы координат со старым началом и новым базисом), найденным на четвёртом шаге. Если не удалось избавиться от, например, $a_3^{'} z^{'}$, то есть в квадратичной части $F^{'}(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ нет члена $a_{33}^{'} z^{'2}$ (это означает, что $\lambda_3 = 0$), но от других линейных членов избавиться удалось, то сдвигаем начало координат по оси $O^{'} z^{'}$ так, чтобы

избавиться от всех накопившихся при избавлении от других линейных членов констант: $z'' = z''' - \frac{c_1+c_2+a_0}{a_3'}$. Ничего себе, оказывается кавычку можно было не экранировать... Надо теперь всё переделывать(((Третьей координатой нового начала координат (в системе координат с новым базисом и старым началом) будет $-\frac{c_1+c_2+a_0}{a_3'}$, а первыми двумя координатами будут x_0' и y_0', найденные на шаге 4. Если не удалось избавиться от линейных членов с x и z (и тогда $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$), то на четвёртом шаге получилось уравнение $\lambda_2 y''^2 + 2a_1''x'' + 2a_3''z'' + c_2 + a_0 = 0$, где c_2 – константа, которая вылезла при избавлении от $2a_2'y'$. В этом случае ещё раз меняем базис: $\bar{e_1''} = \left(\frac{a_1''}{\sqrt{a_1''^2+a_3''^2}}, 0, \frac{a_3''}{\sqrt{a_1''^2+a_3''^2}}\right)$, $\bar{e_2''} = \bar{e_2'}$, $\bar{e_3''} = \left(\frac{a_3''}{\sqrt{a_1''^2+a_3''^2}}, 0, -\frac{a_3''}{\sqrt{a_1''^2+a_3''^2}}\right)$. Новый базис по-прежнему ортогональный, и после перехода к нему уравнение примет вид $\lambda_2 y'''^2 + 2a_1'''x''' + c = 0$. Остаётся избавиться от константы сдвигом по оси x'''.

6. В результате получим почти каноническую систему координат и *простейшее уравнение* поверхности. Его надо будет поделить на число (и, возможно, поменять направление некоторых базисных векторов и(или) поменять местами некоторые базисные векторы), чтобы получилось уравнение одного из семнадцати видов, перечисленных далее. Например, если получилось $y^2 = -2px$, для $p > 0$, надо поменять местами направления вектора $\bar{e_1''}$ (умножить его на -1), а если получилось $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, надо поменять местами $\bar{e_1''}$ и $\bar{e_2''}$.

Если есть цель сохранить ориентацию системы координат, то может понадобиться ещё один шаг: надо посмотреть, какой определитель у произведения всех матриц перехода (т.е. у матрицы перехода от самого первого к самому последнему базису) и если он -1, поменять направление (умножить на -1) вектор $\bar{e_2''}$ (линейных членов с y в каноническом уравнении не бывает, так что это ничего не испортит).

Обоснуем первый шаг.

Утверждение. Для любой симметричной матрицы A_1 размера 3×3 характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ имеет три корня.

Доказательство. Будем трактовать матрицу A_1, как матрицу квадратичной части многочлена второй степени, представляющего квадратичную функцию $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве в некотором ортонормированном базисе $\bar{e_1}, \bar{e_2}, \bar{e_3}$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Заметим, что $a_{ij} = \bar{e_i}^T A_1 \bar{e_j} = \bar{e_j}^T A_1 \bar{e_i}$ (потому что $\bar{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$). Пусть

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}$$

– матрица квадратичной части многочлена, представляющего ту же функцию f в другом базисе $\bar{e'_1}, \bar{e'_2}, \bar{e'_3}$. Заметим, что по-прежнему $a'_{ij} = \bar{e'_i}^T A'_1 \bar{e'_j} = \bar{e'_j}^T A'_1 \bar{e'_i}$, потому что $A'_1 = C^T A_1 C$ и $\bar{e_i} = C\bar{e'_i}$, где C – матрица перехода.

Отсюда вытекает, что, во-первых, матрица A'_1 по-прежнему симметрична, а во-вторых, если $\bar{e'_i}^T A_1 \bar{e'_j} = 0$, то $a'_{ij} = 0$.

Любой многочлен третьей степени имеет хотя бы один корень. Пусть λ_1 – корень многочлена $|A_1 - \lambda E|$. Тогда у матрицы A_1 существует собственный вектор $\bar{x}$ с собственным значением λ_1: $A_1\bar{x} = \lambda_1\bar{x}$. Заметим, что для любого вектора $\bar{y}$, ортогонального вектору $\bar{x}$, имеем $\bar{y}^T A_1 \bar{x} = \bar{y}^T \lambda_1 \bar{x} = \lambda_1(\bar{y}, \bar{x}) = 0$.

Выберем в пространстве любой ортонормированный базис $\bar{e'_1}, \bar{e'_2}, \bar{e'_3}$ с первым вектором $\bar{e'_1} = \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|}$. В этом базисе

$$A'_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & a'_{23} & a'_{33} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $|A'_1 - \lambda E| = (\lambda_1 - \lambda)((a'_{22} - \lambda)(a'_{33} - \lambda) - a'^2_{23})$ имеет три корня (мы уже проверяли, что дискриминант уравнения $(a'_{22} - \lambda)(a'_{33} - \lambda) - a'^2_{23} = 0$ неотрицателен для любых $a'_{22}, a'_{33}, a'_{23}$, когда рассматривали двумерный случай).

Осталось заметить, что $|A'_1 - \lambda E| = |A_1 - \lambda E|$, потому что матрица перехода

C ортогональна (т.е. $C^T = C^{-1}$) и $A_1' = C^T A_1 C$:

$$|A_1' - \lambda E| = |C^T A_1 C - \lambda E| = |C^{-1} C_1 C - C^{-1}(\lambda E) C| = |C^{-1}(A_1 - \lambda E) C| =$$
$$|C^{-1}||A_1 - \lambda E||C| = \frac{1}{|C|}|A_1 - \lambda E||C| = |A_1 - \lambda E|.$$

Следовательно, характеристический многочлен $|A_1 - \lambda E| = 0$ матрицы A_1 имеет те же три корня. $\square$

Как и в двумерном случае, при переходе к новой прямоугольной системе координат (при условии, что старая система, в которой задано уравнение поверхности, тоже прямоугольная) не меняются:

- Характеристический многочлен $|\chi_{A_i}(\lambda) = |A_1 - \lambda E|$ (мы это только что показали);
- Определитель $\delta = |A_1|$ (потому что $|A_1'| = |C^T A_1 C| = |C^T||A_1||C| = |C^{-1}||A_1||C| = \frac{1}{|C|}|A_1||C| = |A_1|$, а также потому, что это свободный член в характеристическом многочлене);
- след $S = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ матрицы A_1 (потому что это коэффициент при λ^2 в характеристическом многочлене);
- $\det A = |A|$ (потому что $A' = D^T A D$ и $|D| = 1 \cdot |C| = \pm 1$).

Из доказанного выше утверждения вытекает, что описанный алгоритм (6 шагов) действительно работает, и с его помощью можно привести любое *уравнение* поверхности второго порядка к одному из перечисленных на следующих страницах видов, называемых *каноническими уравнениями* поверхностей второго порядка. При этом мы сначала приводим уравнение к *простейшему виду* переходом к новой системе координат, которая называется *канонической*, а затем "причёсываем" простейшее уравнение (делим на подходящее число), чтобы привести его к каноническому виду.

Замечание. При "причёсывании" δ, Δ, S (а также $\chi_{A_i}(\lambda)$) могут измениться, но стать нулевыми, если были ненулевыми, они не могут.

Канонических уравнений – 17, а поверхностей – 1.

51.2 Канонические уравнения поверхностей второго порядка

1. $a \geqslant b \geqslant c > 0$, a, b, c - полуоси:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – эллипсоид;}$$

2. $a \geqslant b \geqslant c > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – мнимый эллипсоид;}$$

3. $a \geqslant b \geqslant c > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ – мнимый конус;}$$

4. $a, b, c > 0, \ a \geqslant b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – однополостный гиперболоид;}$$

5. $a, b, c > 0, \ a \geqslant b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – двуполостный гиперболоид;}$$

6. $a, b, c > 0, \ a \geqslant b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ – конус;}$$

7. $p \geqslant q > 0$:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \text{ – эллиптический параболоид;}$$

8. $p \geqslant q > 0$:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \text{ – гиперболический параболоид;}$$

9. $a \geqslant b > 0$, a, b - полуоси:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – эллиптический цилиндр;}$$

10. $a \geqslant b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ – мнимый эллиптический цилиндр;}$$

11.
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ – пара мнимых пересекающихся плоскостей;}$$

12.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ – гиперболический цилиндр;}$$

13.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ – пара пересекающихся плоскостей;}$$

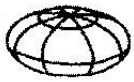
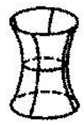
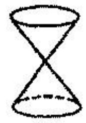
14. $p > 0$, p – фокальный параметр:
$$y^2 = 2px \text{ – параболический цилиндр;}$$

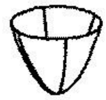
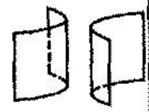
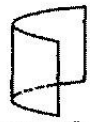
15. $a \neq 0$:
$$y^2 = a^2 \text{ – пара параллельных плоскостей;}$$

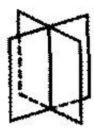
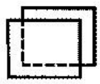
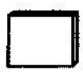
16. $a \neq 0$:
$$y^2 = -a^2 \text{ – пара мнимых параллельных плоскостей;}$$

17.
$$y^2 = 0 \text{ – пара совпадающих плоскостей.}$$

Пока что просто украдено из интернета:

Название поверхности	Каноническое уравнение	Схематическое изображение
Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Двухполостный гиперболоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	

Название поверхности	Каноническое уравнение	Схематическое изображение
Эллиптический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$	
Гиперболический параболоид	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$	
Эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Параболический цилиндр	$y^2 = 2px$	

Название поверхности	Каноническое уравнение	Схематическое изображение
Пара пересекающихся плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	
Пара параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	
Пара совпадающих плоскостей	$x^2 = 0$	
Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0; 0; 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$	
Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	

Название поверхности	Каноническое уравнение	Схематическое изображение
Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$	
Миимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	
Пара мнимых параллельных плоскостей	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	

Замечание. *Эллипсоид* – сплющенная поверхность, полученная вращением эллипса, нарисованного в плоскости Oxy, вокруг оси Ox.

Однополостный гиперболоид – сплющенная поверхность, полученная вращением гиперболы, нарисованной в плоскости Oxz, вокруг оси Oz.

Двуполостный гиперболоид – сплющенная поверхность, полученная вращением гиперболы, нарисованной в плоскости Oxy, вокруг оси Oz. *Конус* – сплющенная поверхность, полученная вращением пары пересекающихся прямых, нарисованных в плоскости Oxz, вокруг Oz. Вершина конуса в начале координат, направляющая кривая – эллипс с полуосями a и b в плоскости $z = c$.

Эллиптический параболоид – вращение параболы в плоскости Oxz вокруг Oz и сплющивание.

Гиперболический параболоид (дословно) – вешаем параболу рогами вниз на параболу рогами вверх и водим туда-сюда, оставляя в вертикальном положении. Сечения горизонтальными плоскостями – гиперболы, поэтому гиперболический.

Билет 52. Центры поверхностей второго порядка

Все дальнейшие определения и рассуждения аналогичны случаю линий.

52.1 Определение

Определение. Точка O аффинного или точечно-евклидова пространства называется *центром симметрии* множества M (в том же пространстве), если для любой точки $X \in M$ симметричная ей относительно O точка X' (т.е. такая точка, что O является серединой отрезка $[XX']$, т.е. $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX'}$) тоже принадлежит множеству M.

Определение. Точка O трёхмерного аффинного пространства, имеющая координаты
(x_0, y_0, z_0) в некоторой системе координат называется *центром* поверхности второго порядка, заданной уравнением $F(x, y, z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0$ в той же системе координат, если её координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1 = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2 = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3 = 0. \end{cases}$$

Замечание. Свойство точки пространства быть или не быть центром данной поверхности не зависит от выбора системы координат, в которой заданы координаты этой точки и уравнение поверхности.

52.2 Связь с центром симметрии

Теорема. Точка O трёхмерного аффинного (или точечно-евклидова) пространства является центром симметрии непустой поверхности второго порядка тогда и только тогда, когда она является центром этой поверхности.

Доказательство. $\Leftarrow$ Доказывается точно так же, как в двумерном случае (переносом начала координат в точку O). $\Rightarrow$ Аналогично двумерному случаю: переносим начало координат в O (центр симметрии) и видим, что многочлен $F(x,y,z)$ превращается в многочлен $F'(x',y',z') = \dots + 2a_1'x' + 2a_2'y' + 2a_3'z' + a_0'$, где

$$a_1' = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1,$$

$$a_2' = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2,$$

$$a_3' = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3,$$

$$a_0' = F(x_0, y_0, z_0).$$

Пусть (x',y',z') – любая точка на поверхности. Поскольку O (новое начало координат) – центр симметрии поверхности, видим, что $(-x',-y',-z')$ тоже принадлежит поверхности, т.е.

$$F'(x',y',z') = 0 \Leftrightarrow F'(-x',-y',-z') = 0,$$

откуда

$$F'(x',y',z') - F'(-x',-y',-z') = 4a_1'x' + 4a_2'y' + 4a_3'z' = 0.$$

Значит, либо $a_1' = a_2' = a_3' = 0$ (и тогда O - центр), либо вся поверхность лежит на плоскости $a_1'x' + a_2'y' + a_3'z' = 0$ (это плоскость, если $a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 \neq 0$).

(Доказывается рассмотрением пересечений плоскостей с поверхностями, примеры ниже) На плоскости лежит либо мнимый конус (точка), либо пара мнимых пересекающихся плоскостей (прямая), либо пара совпадающих плоскостей; пустое множество не рассматриваем (см. формулировку теоремы).

1. Мнимый конус состоит из одной точки, она же центр симметрии. В канонической системе координат она имеет координаты $(0,0,0)$. Вычисляя координаты центра в той же системе, снова получаем $(0,0,0)$.

2. Пара мнимых пересекающихся плоскостей $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Центры симметрии составляют прямую $x = y = 0$, все они являются центрами.

3. Пара совпадающих плоскостей: все точки поверхности – центры симметрии, и все удовлетворяют уравнениям центра.

□

Замечание. У поверхности есть ровно 1 центр тогда и только тогда, когда $\delta \neq 0$ (см. систему уравнений для центра).

Определение. Поверхности с $\delta = 0$ называются *центральными*, остальные называются *нецентральными*.

Замечание. Ни одного центра нет только у параболоидов и параболического цилиндра. Во всех остальных случаях любой центр можно взять за начало канонической системы координат.

Билет 53. Сечения поверхностей второго порядка плоскостями

Параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2, \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3. \end{cases}$$

Замечание. Для любой поверхности второго порядка пересечение с плоскостью задаётся во внутренних координатах плоскости уравнением линии второго порядка, или прямой (если коэффициенты при квадратах обнулятся), или всей плоскости (если уравнение будет иметь вид $0 = 0$), или пустое множество (если уравнение имеет вид $c = 0$, где $c \neq 0$, в этом случае уравнение не является уравнением линии второго порядка).

53.1 Конус

Мы уже рассматривали конические сечения плоскостями, не проходящими через начало канонической системы координат (центр). Сечения плоскостями, проходящими через центр – пары пересекающихся прямых, или прямые, или точка. Записав уравнение конуса в канонической системе координат, видим, что если плоскость π проходит через вершину конуса (точку $(0,0,0)$) и $(x,y,z) \in \pi\cap$ конус, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, то $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in \pi\cap$ конус $\Rightarrow$ если π пересекает конус не только в вершине, то π содержит прямую $\Rightarrow$ это пересекающиеся, или паралельные, или совпадающие прямые. Параллельные прямые не возможны, остальные варианты возможны.

53.2 Эллипсоид

Сечения эллипсоида – точки и эллипсы. Действительно, подставив выражения для x, y, z из параметрических уравнений плоскости в уравнение эллипсоида, видим, что во внутренних координатах u и v плоскости уравнение пересечения будет уравнением линии второго порядка. В случае эллипсоида эта линии ограничена, следовательно, это либо эллипс, либо точка, либо пустое множество. Все три варианта возможны (легко привести примеры соответствующих плоскостей).

53.3 Однополостный гиперболоид

Напомним, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Сечение плоскостью $z = 0$ – эллипс (внутренние координаты этой плоскости $u = x$, $v = y$). Сечения плоскостями (ТРЕБУЕТ ПРАВОК) $x = h \neq \pm a$ и $y = h \neq \pm b$ – гиперболы (внутренние координаты $u = y$ и $v = z$ или $u = x$ и $y = z$ соответственно), т.к. $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ – базис на плоскости и её параметрические уравнения: $\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 0. \end{cases}$ (т.к. за начало координат можно взять точку $(0,0,0)$ – она принадлежит плоскости). Сечение плоскостями $x = \pm a$ и $y = \pm b$ – пары пересекающихся прямых. Плоскость $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$: пересечение задаётся системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1, \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y^2}{b^2}. \end{cases}$$

Подставялем первое уравнение во второе: $\frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{z}{c}$. Поскольку $\frac{z}{c} = \frac{x}{a} + 1$, получаем $\frac{y^2}{b^2} = 2 + \frac{2x}{a}$. За направляющие векторы (базис) плоскости можно взять $\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$, $(0,1,0)$ (так сложно, потому что хотим, чтобы система координат была прямоугольной). Точка $(0,0,c)$ принадлежит плоскости.

Параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = u \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, \\ y = v, \\ z = c + u \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{cases}$$

Подставляем в $\frac{y^2}{b^2} = 2 + \frac{2x}{a}$, получаем уравнение параболы во внутренних координатах плоскости. Плоскость $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$: аналогично получаем $\frac{y^2}{b^2} = 1$ и пару параллельных прямых.

Итак, возможны пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, эллипс, гипербола, парабола.

Точка и прямая получиться не могут. Чтобы убедиться в этом, применим аффинную замену координат: $x = ax',\ y = by',\ z = cz'$. Уравнение превратится в $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (штрихи не пишем для простоты). Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ – любая точка. В другой аффинной системе координат, которая получается из нашей, заменой вида $x = x' \cos\varphi + y' \sin\varphi,\ y = -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,\ z = z'$. Это не поворот, т.к. система координат уже не прямоугольная! Здесь $\sin\varphi, \cos\varphi$ – просто какие-то числа A, B со свойством $A^2 + B^2 = 1$. Координаты этой же точки имеют вид $(x_1, 0, z_0)$. При этом уравнение поверхности остаётся тем же (проверяется подстановкой выражений для x, y, z). Штрихов снова не пишем. Если точка M лежит на поверхности, то $x_1^2 - z_0^2 = 1$. Снова заменим координаты:

$$\begin{cases} x = x_1 x' - z_0 z', \\ y = y', \\ z = -z_0 x' + x_1 z'. \end{cases}$$

В новой системе координат M имеет координаты $(1, 0, 0)$, а уравнение поверхности всё то же: $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 1$ (проверяется подстановкой).

Итак, нам надо доказать, что, во-первых, точка M, имеющая координаты $(1, 0, 0)$ в некоторой аффинной системе координат, не является пересечением множества точек, заданного в той же системе координат уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ с плоскостью и, во-вторых, (неразборчиво) прямая, проходящая через M, не является пересечением этого множества с плоскостью. Пусть

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha t, \\ y = \beta t, \\ z = \gamma t. \end{cases}$$

– параметрические уравнения прямой, проходящей через M (тогда (α, β, γ) – направляющий вектор). Подставив выражения для x, y, z в $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, получим $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t^2 + 2\alpha t = 0$. Это уравнение имеет решение $t = 0$. Она не имеет других решений тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \neq 0$. Следовательно, если любая прямая лежащая в плоскости и проходящая через M, пересекает поверхность только в точке M, то направляющие векторы всех прямых в плоскости имеют вид $(0, \beta, \gamma)$. Значит, сама плоскость должна иметь уравнение $x = 0$. Однако пересечение этой плоскости с поверхностью содержит все точки с координатами $(0, y, z)$, удовлетворяющими условию $y^2 - z^2 = 1$ (таких точек много).

(Дуайт Д. Эйзенхауэр) При подготовке к сражению я всегда находил, что планы бесполезны, но планирование – обязательно.

(Сипачёва) Если же мы хотим, чтобы наша прямая целиком содержалась в поверхности, то все t должны быть решениями уравнения

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 1)t^2 + 2\alpha t = 0.$$

Это так $\Leftrightarrow \alpha = \alpha^2 + \beta^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0, \\ b = \pm 1. \end{cases}$ Таким образом, если прямая (неразборчиво) с направляющим вектором (α, β, γ) содержится в поверхности, то и прямая с неколлинеарным ему направляющим вектором $(\alpha, -\beta, \gamma)$ тоже в ней содержится – получаем в пересечении две прямые, одна получиться не может.

Попутно доказали

Теорема. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят ровно две (пересекающиеся) прямые. Таким образом, однополостный гиперболоид является объединением прямых. Они называются прямолинейными образующими.

Замечание. Все прямолинейные образующие однополостного гиперболоида можно разделить на два класса так, что прямые из разных классов скрещиваются и гиперболоид является объединением прямых из одного (любого) класса.

53.4 Двуполостный гиперболоид

Напомним, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$. Сечения горизонтальными плоскостями $z = h$ – эллипсы, или точки, или пустое множество. Сечения плоскостями $x = h$ и $y = h$ – гиперболы.

Рассмотрим плоскость $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1$. Её пересечение с гиперболоидом:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = -1, \\ \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \frac{y^2}{b^2} = -1. \end{cases} \quad \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}.$$

Нормаль нашей плоскости: $\left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{c}\right)$. Значит, за её направляющие векторы (базис) можно взять $\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$, $(0,1,0)$. Точка $(0,0,c)$ принадлежит плоскости, следовательно, параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = u \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}, \\ y = v, \\ z = c + u \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{cases}$$

Подставляем в $\frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a}$, получаем уравнение параболы во внутренних координатах плоскости.

Прямые в двуполостном гиперболоиде не содержатся: если прямая пересекает плоскость $z = 0$, то она не содержится в гиперболоиде, т.к. гиперболоид не содержит точек с третьей координатой 0; если прямая параллельна плоскости $z = 0$, то она лежит в плоскости вида $z = h$, а пересечения таких плоскостей с гиперболоидом прямых не содержат.

53.5 Гиперболический параболоид

Напомним, $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 2z,\ p, q > 0$. Пересечение с плоскостью $y = 0$ – парабола (рогами вверх); с плоскостями вида $x = h$ – тоже параболы (рогами вниз).

Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$ – не вертикальная плоскость, т.е. $C \neq 0$. Тогда можно считать, что $C = 1$ (иначе поделим на C). Введём на плоскости координаты u, v:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -D - Au - Bv. \end{cases}$$

Получилась аффинная – не прямоугольная – система координат на плоскости, начало которой в точке $(0, 0, -D)$.

Подставляем в уравнение поверхности: $\frac{u^2}{p} - \frac{v^2}{q} + 2(D + Au + Bv) = 0$. Имеем $\delta < 0$, причём знак δ не меняется при аффинных заменах координат. Успех – не окончателен, неудачи – не фатальны, значение имеет лишь мужество продолжать. Следовательно, если мы перейдём к прямоугольной системе координат, в плоскости, по-прежнему, получим уравнение с $\delta < 0$ ($|A_1'| = |C^T||A_1||C| = |A_1||C|^2$). При этом D можно подобрать так, чтобы было $\Delta = 0$ или $|\Delta \neq 0$, следовательно, могут получиться и гиперболы, и пары пересекающихся прямых в пересечении.

Пусть теперь плоскость вертикальна. Тогда она имеет уравнение $Ax + By + D = 0$. Сечения плоскостями $x = h$ знаем, следовательно, считаем, что $B \neq 0$. Параметрические уравнения плоскости:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = -\frac{D}{B} - u \cdot \frac{A}{B}, \\ z = v. \end{cases}$$

Подставляем в уравнение поверхности, получаем $\frac{u^2}{p} - \frac{-\frac{D}{B} - u \cdot \frac{A}{B}}{q} = 2v$. Коэффициент при u^2: $\frac{1}{p} - \frac{\frac{A^2}{B^2}}{q}$. Если он не равен нулю, то получили уравнение с $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$ (в аффинных координатах плоскости). Знаки δ и Δ (и равенство или не равенство нулю определителя Δ) не меняются при аффинных заменах координат, поэтому если коэффициент при u^2 не равен нулю, то получили параболу, а если равен нулю, то получили прямую (не пару совпадающих прямых!).

Рассмотрели все возможные расположения секущей плоскости, следовательно, эллипс, точка, пустое множество и пара параллельных прямых получиться в пересечении не могут.

Теорема. Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две прямые, содержащиеся в нём (прямолинейные образующие).

Доказательство. Аффинной заменой координат приведём уравнение к виду $x^2 - y^2 = z$. Возьмём точку $M(x_0, y_0, z_0)$ на параболоиде (тогда $x_0^2 - y_0^2 = z_0$). Параметрические уравнения прямой, проходящей через M:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t. \end{cases}$$

(α, β, γ) - направляющий вектор прямой. Подставляем в уравнение параболоида, получаем:

$$(\alpha^2 - \beta^2)t^2 + (2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - \gamma)t = 0$$

Все t являются решениями (т.е. прямая целиком содержится в параболоиде) тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 0 \\ 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - \gamma = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем два неколлинеарных направляющих вектора (α, β, γ): $(1, 1, 2(x_0 - y_0))$ и $(1, -1, 2(x_0 + y_0))$ (и, конечно, пропорциональные им ненулевые векторы). □

53.6 Остальное

В случаях других поверхностей при рассмотрении сечений плоскостями вида $x = h$, $y = h$ и т.п. рассуждения аналогичны (надо рассматривать внутренние координаты плоскости).

Билет 54. Аффинная классификация линий

это к Комбарову, стр. 98

Билет 55. Аффинная классификация поверхностей

и это к Комбарову, стр. 123

Билет 56. Линейные отображения и преобразования

Определение. Преобразованием множества X называется биективное отображение $f : X \to X$.

Определение. Отображение $f : V \to V$ называется линейным, если $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ выполнено:

1. $f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$;
2. $f(\lambda \bar{a}) = \lambda f(\bar{a})$.

Определение. Пусть V - конечномерное векторное пространство. Отображение $f : V \to V$ называется линейным преобразованием пространства V, если существуют два базиса $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n$ такие, что образ $f(\bar{v})$ любого вектора $\bar{v} \in V$ имеет во втором базисе те же координаты, что и $\bar{v}$ в первом базисе. Базисы $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n$ называются ассоциированными с f.

Утверждение. Пусть V - конечномерное векторное пространство. Отображение $f : V \to V$ - линейное преобразование $\Leftrightarrow$ оно линейно и биективно.

Доказательство.
$\Rightarrow$: Биекция и линейность следует из разложений векторов через базисы (единственность разложения очевидна, свойства линейности несложно проверяются).

$\Leftarrow$: Пусть f биективно и линейно. Заметим, что $f(\bar{0}) = \bar{0}$ (из 2 пункта определения линейности). Тогда $\bar{v} \neq \bar{0} \Rightarrow f(\bar{v}) \neq \bar{0}$ (из биективности). Тогда если $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - базис в V, то $f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)$ - также базис в V (если она линейно зависима, то в силу линейности первый базис также линейно зависим, что невозможно, а тогда $f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)$ - максимальная линейно независимая система, т.е. базис). Далее очевидно, что любой вектор $\bar{v}$ имеет те же координаты в $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$, что и $f(\bar{v})$ в $f(\bar{e}_1), ..., f(\bar{e}_n)$, а значит f - линейное преобразование. □

Билет 57. Ортогональные преобразования

Определение. Пусть V - евклидово пространство. Отображение $f : V \to V$ называется изометрическим (ортогональным) преобразованием пространства V, если существуют два ортонормированных базиса $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n$ такие, что образ $f(\bar{v})$ любого вектора $\bar{v} \in V$ имеет во втором базисе те же координаты, что и $\bar{v}$ в первом базисе. Базисы $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n$ называются ассоциированными с f.

Замечание. Очевидно, что любое ортогональное преобразование является линейным преобразованием.

Утверждение. Для любого ортогонального преобразования верно: $(\bar{x}, \bar{y}) = (f(\bar{x}), f(\bar{y}))$.

Доказательство. Очевидно из формулы выражения скалярного произведения в ортонормированной с.к. (пункт 8.3) □

Утверждение. Преобразование евклидова пространства $f : V \to V$ ортогонально $\Leftrightarrow \forall \bar{v} \in V \quad |\bar{v}| = |f(\bar{v})|$.

Доказательство.

$\Rightarrow$: Очевидно из формулы длины вектора в прямоугольной системе координат.

$\Leftarrow$: Заметим, что если преобразование сохраняет длины векторов, то сохраняет и скалярные произведения, т.к. выводили формулу скалярного произведения через длины:

$$\frac{1}{2}(|\bar{x}+\bar{y}|^2-|\bar{x}|^2-|\bar{y}|^2)=\frac{1}{2}((\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y})-(\bar{x},\bar{x})-(\bar{y},\bar{y}))=\frac{1}{2}(2(\bar{x},\bar{y}))=(\bar{x},\bar{y})$$

Пусть $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ - любой ортонормированный базис. Тогда векторы $f(\bar{e}_1),...,f(\bar{e}_n)$ попарно ортогональны и имеют длину 1 (из сохранения длин и скалярного произведения). В пункте 8.1 доказывали, что в таком случае $f(\bar{e}_1),...,f(\bar{e}_n)$ - ортонормированный базис. Осталось заметить, что для любого $\bar{v}\in V$ его координата $v_i=(\bar{v},\bar{e}_i)$, а значит из сохранения скалярного произведения сохранятся и координаты вектора. Отсюда f - ортогональное преобразование. $\square$

Билет 58. Аффинные преобразования

Определение. Пусть A - конечномерное аффинное пространство. Отображение $f:A\to A$ называется аффинным преобразованием пространства A, если существуют два репера $O\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ и $O'\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$ такие, что образ $f(M)$ любой точки $M\in A$ имеет во втором репере те же координаты, что и M в первом репере. Реперы $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$ (и соответствующие системы координат) называются ассоциированными с f.

Замечание. Это, очевидно, биекция.

Определение. Пусть A - конечномерное аффинное пространство, V - ассоциированное с ним векторное пространство и $f:A\to A$ - аффинное преобразование. Отображение $df:V\to V$, определённое правилом: $df(\bar{v})=\overrightarrow{f(O)f(O+\bar{v})}$, называется дифференциалом аффинного преобразования f.

Утверждение. df - линейное преобразование пространства V.

Доказательство. Пусть $X=O+\bar{v}$. Тогда $\bar{v}=\overrightarrow{OX}$ и $df(\bar{v})=\overrightarrow{f(O)f(X)}$. Координаты точек X и X' в соответствующих базисах совпадают, точек O и O' - совпадают и равны $(0,...,0)$. Тогда координаты вектора $\bar{v}$ в базисе $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ совпадают с координатами точки X в репере $O\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$, аналогично с координатами $df(\bar{v})$ в базисе $\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$ и X' в репере $O'\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$. Отсюда координаты векторов $\bar{v}$ и $df(\bar{v})$ в соответствующих базисах совпадают, то есть df - линейное преобразование, и ассоциированные с ним базисы - $\bar{e}_1,...,\bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1,...,\bar{e}'_n$ $\square$

Замечание. $\forall X \in A$ выполнено $f(X) = f(O) + df(\overrightarrow{OX})$ (из определения дифференциала преобразования).

Утверждение. $\forall X, Y \in A$ выполнено $f(Y) = f(X) + df(\overrightarrow{XY})$

Доказательство. По определению df имеем $f(X) = f(O) + df(\overrightarrow{OX})$, $f(Y) = f(O) + df(\overrightarrow{OY})$. Также $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}$, и из линейности df следует $df(\overrightarrow{XY}) = df(\overrightarrow{OY}) - df(\overrightarrow{OX})$. Значит,

$$f(X) + df(\overrightarrow{XY}) = f(X) + df(\overrightarrow{OY}) - df(\overrightarrow{OX}) = f(O) + df(\overrightarrow{OY}) = f(y).$$

□

Следствие. Дифференциал аффинного преобразования не зависит от выбора точки O, т.е. однозначно определяется преобразованием f.

Теорема. Свойства аффинных преобразований:

1. Прямая переходит в прямую (а три точки не на одной прямой - в три точки не на одной прямой);
2. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые;
3. Сохраняется деление отрезка точкой в данном отношении;
4. Образом линии второго порядка на пло...

Билет 59. Движения точечно - евклидовых пространств

заработаешься тут
страница 96

Билет 60. Аналитическая запись линейного преобразования

ну ничего, всё заботаем

Билет 61. Запись аффинного преобразования

и переработаем
и это страничка 95

Билет 62. Движения евклидовой плоскости

ну а дальше проективка от Егора, наслаждайтесь

Билет 63. Проективная плоскость

(Сипачёва) Одна из возможных моделей проективной плоскости - связки прямых и плоскостей в трёхмерном аффинном (или точечно-евклидовом) пространстве.

Определение (Комбаров)**.** *Проективная плоскость* P - произвольное множество, элементы которого называются *точками*, и набор его подмножеств, именуемых *прямыми* вместе с отношением инцидентности, если при этом выполняются аксиомы П1-П4.
П1. Любые две различные точки плоскости инцидентны одной и только одной прямой.
П2. Любые две различные прямые плоскости инцидентны одной и только одной точке.
П3. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.
П4. Каждая прямая инцидентна по меньшей мере трём точкам.

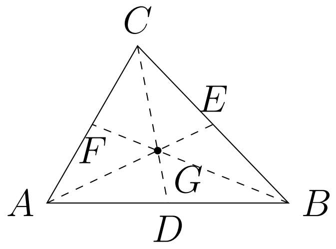
Определение (Комбаров)**.** Две проективные плоскости P_1 и P_2 называются *изоморфными*, если существует биекция $f : P_1 \to P_2$, которая переводит точки в точки, прямые в прямые и сохраняет отношение инцидентности.

(Сипачёва) Изоморфизмы между евклидовыми аффинными плоскостями тоже можно определить как биекции, сохраняющие структуры этих плоскостей: отображение одной евклидовой плоскости в другую является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно сохраняет расстояния между точками (и взаимно однозначно переводит прямые в прямые, но это можно не добавлять, так как эти условия выполнены автоматически, если сохраняются расстояния) - это мы доказали раньше; отображение одной аффинной плоскости в другую является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно и переводит прямые в прямые - это доказывается в курсе линейной алгебры.

В отличие от евклидовой и аффинной плоскостей, проективная плоскость определяется аксиомами неоднозначно: существуют неизоморфные проективные плоскости. Две проективные плоскости (точнее, две разные можели одной и той же проективной плоскости) мы уже построили и доказали, что они изоморфны. Ещё одну можно описать так:

63.1 Плоскость Фано

Точки - $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G$
Прямые - $\{A,B\},\ \{B,C\},\ \{C,A\},\ \{A,D\},\ \{B,E\},\ \{C,F\},\ \{D,E,F\}$
Все аксиомы выполнены. Это минимальная модель проективной плоскости.



Замечание. Проективная плоскость не может содержать меньше семи точек.

Определение (Сипачёва)**.** *Связка с центром O* - множество всех прямых и плоскостей трёхмерного пространства, проходящих через данную точку O. Прямые связки называются *точками*, а плоскости - *прямыми* проективной плоскости.

63.2 Перспективное соответствие

(Сипачёва) Возьмём в аффинном пространстве какую-нибудь плоскость π, не проходящую через центр связки O. Через каждую точку M плоскости π проходит единственная прямая OM связки (точка проективной плоскости), и через каждую прямую l на плоскости π проходит единственная плоскость связки (обозначим её Ol) (это прямая проективной плоскости).

Обратно, каждой прямой связки (если только она не параллельна π) соответствует единственная точка плоскости π, через которую она проходит. Каждой плоскости связки (не параллельной π) соответствует прямая на π.

Получилось почти биективное соответствие между точками (прямыми) проективной плоскости и точками (прямыми) на аффинной плоскости π. Чтобы сделать его совсем биективным, надо что-то поставить в соответствие прямым и плоскостям связки, которые параллельны π. Для этого плоскость π придётся пополнить.

63.3 Пополненная плоскость

(Сипачёва) К каждой прямой $l \subset \pi$ добавим одну бесконечно удалённую точку. Эта точка будет соответствовать прямой связки, параллельной прямой l. Таким образом, ко всем прямым из несобственного пучка всех прямых, параллельных прямой l, будет добавлена одна и та же бесконечно удалённая точка. Её можно отождествить с самим несобственным пучком прямых на π, параллельных прямой l.

Определение. *Пополненная плоскость* $\overline{\pi}$ - плоскость π вместе с добавленными бесконечно удалёнными точками.
Несобственные точки - добавленные (бесконечно удалённые) точки.
Несобственная прямая (бесконечно удалённая прямая) - множество всех несобственных точек.
Собственные прямые пополненной плоскости $\overline{\pi}$ - прямые $l \subset \pi$ вместе с добавленными точками.
Собственные точки плоскости π - точки плоскости π. Несобственная прямая соответствует плоскости связки, параллельной плоскости π.

Билет 64. Однородные координаты

(Сипачёва) Пусть в трёхмерном (аффинном) пространстве задана связка с центром O. Возьмём какой-нибудь репер $Oe_1e_2e_3$ (с началом в O). Для каждой прямой l из связки (точки проективной плоскости) координаты (x_1, x_2, x_3) любого её направляющего вектора пропорциональны координатам любого другого её направляющего вектора. Получается отношение эквивалентности между ненулевыми тройками координат:

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \exists \lambda (\neq 0) \in \mathbb{R}: \ (y_1, y_2, y_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3).$$

Класс эквивалентности всех ненулевых троек координат, пропорциональных данной тройке (x_1, x_2, x_3) (т.е. множество троек координат всех направляющих векторов прямой l) называется *однородными координатами прямой* l в репере $Oe_1e_2e_3$ и обозначается $(x_1 : x_2 : x_3)$. Ясно, что однородные координаты любой прямой однозначно определяются любой тройкой координат из класса троек, представляющего собой эти однородные координаты, поэтому запись $(x_1 : x_2 : x_3)$ удобна и однозначно определяет однородные координаты; двоеточия говорят о том, что она определена с точностью до пропорциональности, т.е.

$$(x_1 : x_2 : x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \ \forall \lambda \neq 0.$$

Однородные координаты точки проективной плоскости (связки), которая является прямой l связки, - это однородные координаты прямой l. Тем самым каждой точке проективной плоскости мы поставили во взаимно однозначное соответствие класс (множество) пропорциональных друг другу ненулевых троек чисел.

Каждая плоскость λ (это прямая проективной плоскости) из связки задаётся уравнением вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Тройки коэффициентов $\{a_1, a_2, a_3\}$ в разных уравнениях, задающих одну и ту же плоскость λ, пропорциональны друг другу.

Определение. Класс всех (ненулевых пропорциональных друг другу) троек коэффициентов $\{a_1, a_2, a_3\}$ уравнений, задающих плоскость λ в репере $Oe_1e_2e_3$, называется *однородными координатами плоскости* λ в репере $Oe_1e_2e_3$ и обозначается $\{a_1 : a_2 : a_3\}$.

Однородные координаты прямой проективной плоскости (т.е. плоскости в связке) - это однородные координаты соответствующей плоскости в связке.

Таким образом, каждой прямой проективной плоскости мы тоже поставили во взаимно однозначное соответствие класс пропорциональных друг другу ненулевых троек чисел.

Точка проективной плоскости с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ *инцидентна* прямой с однородными координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ тогда и только тогда, когда $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Таким образом, в отношении инцидентности точки и прямые равноправны.

Замечание. Точки и прямые проективной плоскости равноправны всегда, не только в модели связки: легко показать, что аксиомы П1-П4 равносильны тем же аксиомам, в которых слова "точка" и "прямая" поменяны местами. Единственное, что отличает точку от прямой - это то, что прямая является множеством точек. Однако с тем же успехом можно объявить точку множеством всех инцидентных ей прямых.

Билет 65. Арифметическая модель проективной плоскости

65.1 Арифметическая модель

(Сипачёва) Рассмотрим два (совершенно идентичных) множества всех классов ненулевых пропорциональных друг другу троек чисел. Назовём классы троек из первого множества точками и будем записывать их в виде $(x_1 : x_2 : x_3)$, а классы из второго множества назовём прямыми и будем записывать их в виде $\{a_1 : a_2 : a_3\}$. Скажем, что точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямая $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ инцидентны друг другу, если

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Получилась почти проективная плоскость - все аксиомы выполнены, и есть лишь одна беда: прямые не являются множествами точек. Однако каждая прямая однозначно определяется множеством точек, которые ей инцидентны. Поэтому окончательное определение таково:

Определение. *Точки* - классы пропорциональных друг другу ненулевых троек чисел, обозначаются $(x_1 : x_2 : x_3)$. *Прямая* - множество всех точек (классов троек), удовлетворяющих одному и тому же уравнению вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0.$$

Каждая прямая однозначно определяется ненулевой тройкой чисел, пропорциональной тройке a_1, a_2, a_3, т.е. классом ненулевых троек, пропорциональных a_1, a_2, a_3 (обозначается $\{a_1 : a_2 : a_3\}$), и наоборот - любой такой класс $\{a_1 : a_2 : a_3\}$ однозначно задаёт прямую. Таким образом, в рассуждениях прямые тоже можно отождествлять с тройками чисел, только надо помнить, что они другого сорта (однако если поменять местами роли прямых и точек, то ничего не изменится).

Получившаяся проективная плоскость называется *арифметической моделью проективной плоскости.*

Утверждение. Арифметическая модель проективной плоскости изоморфна и пополненной плоскости, и связке.

Доказательство. Изоморфизм между проективной плоскостью-связкой и её арифметической моделью строится очевидным образом с помощью однородных координат. Изоморфизм между пополненной плоскостью и арифметической моделью получается как композиция изоморфизмов между пополненной плоскостью и связкой и между связкой и арифметической моделью. □

В дальнейшем под проективной плоскостью мы будем иметь в виду одну (любую) из этих изоморфных моделей.

65.2 Принцип двойственности

(Сипачёва) Неоднократно отмечавшееся выше равноправие точек и прямых проективной плоскости формулируется в виде принципа так:

Теорема (Принцип двойственности)**.** Утверждение, касающееся точек и прямых проективной плоскости и отношения инцидентности между ними, верно тогда и только тогда, когда верно двойственное утверждение, которое получается из данного заменой слова "прямая" на "точка" и наоборот.

(Комбаров) В самом деле, числовое равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

выражающее условие инцидентности точки $(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямой $\{a_1 : a_2 : a_3\}$, не зависит от того, какую из троек мы заключаем в круглые, а какую - в фигурные скобки. Принцип двойственности иллюстрирует равноправие точек и прямых на проективной плоскости, представленной рассматриваемыми моделями.

Рассмотрим пример двойственных утверждений. Две точки инцидентны одной и только одной прямой. Двойственное утверждение: две прямые инцидентны одной и только одной точке. Иными словами, аксиомы П1 и П2 являются двойственными утверждениями.

Билет 66. Координаты точек и прямых на пополненной плоскости

в работе
а страничка примерно 139

Билет 67. Проективные координаты

67.1 Эквивалентные реперы

Определение (Комбаров)**.** Два репера $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ с общим началом O называются *эквивалентными*, если существует такое число λ, что

$$e'_i = \lambda e_i, \ i = 1, 2, 3.$$

Следующее утверждение необходимо для последующего определения проективных координат.

Утверждение. Реперы $Oe_1e_2e_3$ и $Oe'_1e'_2e'_3$ эквивалентны тогда и только тогда, когда каждая прямая связки O имеет одни и те же однородные координаты в этих реперах.

Доказательство. В книге А.П. Комбарова, Ю.В. Садовничего "Аналитическая геометрия". □

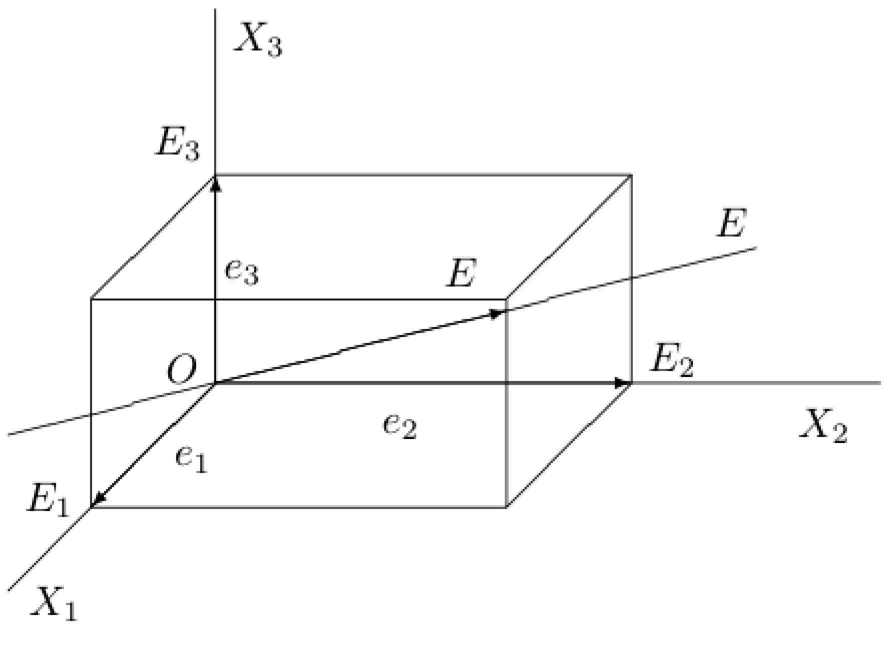
67.2 Проективный репер

Определение. *Проективная система координат в связке* O - класс эквивалентных между собой аффинных реперов (или, что то же самое, аффинных систем координат) с началом O.

Проективная система координат в связке O однозначно определяется упорядоченной четвёркой прямых X_1, X_2, X_3, E связки, таких что никакие три прямые не лежат в одной плоскости. Такая четвёрка прямых (точек проективной плоскости) называется *фундаментальной четвёркой*. Прямые X_1, X_2, X_3 называются координатными, а E - единичной.

67.3 Проективные координаты

Определение. Тройки однородных координат произвольной прямой связки O в аффинном репере $Oe_1e_2e_3$, или, что то же самое, в любом аффинном репере, эквивалентном реперу $Oe_1e_2e_3$, называются *тройками проективных координат* этой прямой в проективной системе X_1, X_2, X_3, E.



В частности, прямые X_1, X_2, X_3, E имеют в этой системе координат следующие координаты:

$$X_1 = (1:0:0),\ X_2 = (0:1:0),\ X_3 = (0:0:1),\ E = (1:1:1).$$

Билет 68. Переход от одной проективной системы координат к другой

Пусть на проективной плоскости P заданы две проективные системы координат - исходная, "старая" $X_1X_2X_3E$ и "новая" система $X_1'X_2'X_3'E'$. Выберем какой-нибудь параллелепипед, соответствующий "новой" системе координат, и запишем координаты векторов e_1', e_2', e_3', совпадающих со сторонами параллелепипеда, в "старой" системе координат $Oe_1e_2e_3$. То есть, "новая" система задана какими-то тройками проективных координат относительно "старой" системы:

$$\begin{cases} X_1' = (c_{11} : c_{21} : c_{31}), \\ X_2' = (c_{12} : c_{22} : c_{32}), \\ X_3' = (c_{13} : c_{23} : c_{33}), \\ X_1' = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3). \end{cases}$$

Нужно найти формулы преобразования координат, выражающие координаты x_1, x_2, x_3 любой точки m относительно "старой" системы координат через координаты x_1', x_2', x_3' той же точки в "новой" системе координат. Заметим, что, поскольку был выбран конкретный параллелепипед, тройки координат точек X_1', X_2', X_3', E' выбраны согласованными, т.е. подчинены условию

$$(c_{11} : c_{21} : c_{31}) + (c_{12} : c_{22} : c_{32}) + (c_{13} : c_{23} : c_{33}) = (\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3).$$

Тогда, возвращаясь к связке O и предполагая, что ("старая") проективная система $X_1X_2X_3E$ порождается аффинным репером $Oe_1e_2e_3$, видим, что векторы

$$e_1' = \{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\ e_2' = \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\},\ e_3' = \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\},$$

заданные координатами в базисе e_1, e_2, e_3, линейно независимы, поскольку прямые X_1, X_2, X_3 не лежат в одной плоскости. Заметим, что матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3', то есть

$$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot C.$$

Далее, каждая тройка x_1, x_2, x_3 проективных координат в системе $X_1X_2X_3E$ произвольной прямой m есть тройка координат в репере $Oe_1e_2e_3$ некоторого направляющего вектора a этой прямой. Аналогичным образом тройка координат x_1', x_2', x_3' прямой m в системе $X_1'X_2'X_3'E'$ есть тройка координат в репере $Oe_1'e_2'e_3'$ какого-то направляющего вектора $a' = \lambda a$ той же прямой m. Поэтому из формул преобразования аффинных координат получаем

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}.$$

Здесь λ - множитель, принимающий все отличные от нуля значения. Это и есть формула перехода от проективной системы $X_1X_2X_3E$ к проективной системе $X_1'X_2'X_3'E'$.

Билет 69. Линии второго порядка на проективной плоскости

(Сипачёва) Рассматриваем проективную плоскость как пополненную плоскость $\overline{\pi}$. При этом π задаётся уравнением $x_3 = 1$ в некотором аффинном репере $Oe_1e_2e_3$ в трёхмерном пространстве, а $\overline{\pi}$ получается из π добавлением бесконечно удалённых точек. Реперу $Oe_1e_2e_3$ соответствует репер Oe_1e_2 на π. Будем рассматривать однородные координаты точек $\overline{\pi}$, которые получаются с использованием этого же репера.

Линия второго порядка на π задаётся уравнением

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Перейдём к однородным координатам

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3}:$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{1}$$

т.е.

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Определение. Линией второго порядка на проективной плоскости называется множество точек проективной плоскости, проективные координаты которых удовлетворяют уравнению вида (1), где $A \neq 0$, в некоторой проективной системе координат.

На пополненной плоскости уравнению (1) удовлетворяют, во-первых, все собственные точки, однородные координаты которых удовлетворяют уравнению (1) (т.е. обычные координаты в репере Oe_1e_2 удовлетворяют уравнению $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$).

Замечание. Заметим, что это не обязательно линия второго порядка на π, так как ненулевая матрица A может иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$, а тогда это прямая вида $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$.

Несобственные точки (с однородными координатами $(x_1 : x_2 : 0)$), удовлетворяющие уравнению (1), т.е. такие, что $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$. Они отвечают асимптотическим направлениям линии второго порядка на π, заданной уравнением $\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, если не все элементы a_{11}, a_{12}, a_{22} матрицы A равны 0. Если же они все равны 0, то уравнению (1) удовлетворяют все несобственные точки пополненной плоскости $\overline{\pi}$, т.е. вся несобственная прямая.

Итак, всякая линия второго порядка на пополненной плоскости - это либо

- линия второго порядка на π, пополненная асимптотическим направлением, либо
- пара пересекающихся прямых, одна из которых несобственная (когда $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ и $a_{12}^2 + a_{23}^2 \neq 0$), либо
- пара совпадающих несобственных прямых (когда $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{22} = a_{23} = 0$, в этом случае $a_{33} \neq 0$, т.к. $A \neq 0$).

Определение. Уравнения вида (1) линий второго порядка на проективной плоскости *проективно эквивалентны*, если одно из них можно превратить в другое проективной заменой координат.

У нас есть соответствующие друг другу реперы $Oe_1e_2e_3$ в пространстве и Oe_1e_2 на π. Мы знаем, что если $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ (1 случай), то аффинной заменой координат матрицу A можено привести к виду $\begin{pmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}$ (не парабола) или $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (парабола), где $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} = \pm 1$ или 0; $a'_{22} = a'_{13} = 1$.

Рассмотрим возможные разновидности пересечения нашей проективной линии с π.

1. *Эллипс*: $x^2 + y^2 = 1$. В однородных координатах: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.
2. *Гипербола*: $x^2 - y^2 = 1$. В однородных координатах: $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \Leftrightarrow -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

   Проективная замена координат $\begin{cases} \lambda x_1 = x'_3, \\ \lambda x_2 = x'_1, \\ \lambda x_3 = x'_2 \end{cases}$ приводит это уравнение к виду: $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$.
3. *Парабола*: $y^2 - 2x = 0$. В однородных координатах: $x_2^2 - 2x_1x_3 = 0$. Проективная замена $\begin{cases} \lambda x_1 = x'_2, \\ \lambda x_2 = \frac{x'_3 + x'_1}{\sqrt{2}}, \\ \lambda x_3 = \frac{x'_3 - x'_1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ приводит это уравнение к виду $x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0$.

   Вывод: Уравнение линий второго порядка на проективной плоскости, собственные точки которой образуют эллипс, гиперболу или параболу, проективно эквивалентны.

   Определение. Линия второго порядка на проективной плоскости, которая в некоторой проективной системе координат описывается уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, называется *овалом*.
4. *Мнимый эллипс*: $x^2+y^2+1 = 0$. В однородных координатах: $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0$. Эта линия называется *мнимым овалом*. Это пустое множество.
5. *Пара пересекающихся прямых*: $x^2 - y^2 = 0$. В однородных координатах: $x_1^2 - x_2^2 = 0$. Это и в проективной плоскости пара пересекающихся прямых.

6. *Пара мнимых пересекающихся прямых (точка)*: $x^2+y^2=0$. В однородных координатах: $x_1^2+x_2^2=0$. Это, по-прежнему, точка.

7. *Пара совпадающих прямых*: $y^2=0$, т.е. $x_2^2=0$. Это уравнение проективно эквивалентно $x_1^2=0$.

8. *Параллельные прямые*: $y^2-1=0$. В однородных координатах: $x_2^2-x_3^2=0$. Проективно эквивалентно уравнению пары пересекающихся прямых.

9. *Мнимые параллельные прямые*: $y^2+1=0$, т.е. $x_2^2+x_3^2=0$. Проективно эквивалентно уравнению пары мнимых пересекающихся прямых.

Итак, существуют 5 классов проективной эквивалентности уравнений линий второго порядка на проективной плоскости:

1. $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ - овал;

2. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ - мнимый овал;

3. $x_1^2-x_2^2=0$ - пара пересекающихся прямых;

4. $x_1^2+x_2^2=0$ - пара мнимых пересекающихся прямых (точка);

5. $x_1^2=0$ - пара совпадающих прмяых.

Утверждение. Уравнения 1.-5. попарно НЕ проективно эквивалентны. Следует помнить, что с точки зрения проективной плоскости собственные и несобственные прямые на пополненной плоскости совершенно равноправны, т.к. их уравнения можно преобразовать друг в друга проективной заменой координат.

Билет 70. Проективные преобразования

(Сипачёва)

Определение. Отображение $f : P \to P$ проективной плоскости P в себя называется проективным преобразованием, если существуют две проективные системы координат $X_1X_2X_3E$ и $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3\tilde{E}$ такие, что $\forall M \in P$ точка $f(M)$ имеет во второй системе координат те же координаты, что M имела в первой.

Замечание. Очевидно, это биекция.

Ситуация совершенно аналогична случаю линейных преобразований. Если C - матрица перехода от $X_1X_2X_3E$ к $\tilde{X}_1\tilde{X}_2\tilde{X}_3\tilde{E}$, т.е. от аффинного репера (какого-нибудь из них), определяющего проективный репер $X_1X_2X_3E$, к аффинному реперу, определяющему $\tilde{X_1}\tilde{X_2}\tilde{X_3}\tilde{E}$, то координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ точки M относительно первого репера выражаются через её координаты $(\tilde{x_1} : \tilde{x_2} : \tilde{x_3})$ относительно второго так:

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{pmatrix}.$$

Пусть $(x_1' : x_2' : x_3')$ - координаты в $X_1X_2X_3E$ точки $f(M)$, где $M \simeq (x_1 : x_2 : x_3)$. Тогда

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \tilde{x_1} \\ \tilde{x_2} \\ \tilde{x_3} \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется *матрицей проективного преобразования f.*

Утверждение. Пусть l - прямая с координатами $a_1 : a_2 : a_3$ на проективной плоскости. Тогда $f(l)$ - прямая с координатами $\{a_1 : a_2 : a_3\}C^{-1}$.

Определение. Линии второго порядка на проективной плоскости *проективно эквиваленты*, если одну из них можно перевести в другую проективным преобразованием.

Замечание. В отличие от евклидова и аффинного случаев, линии второго порядка на проективной плоскости проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их уравнения проективно эквивалентны.