

Механико-математический факультет

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ, 1 СЕМЕСТР, 2 ПОТОК**

Москва  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Общие понятия (нет в билетах)</b>	<b>3</b>
1.1	Постулаты	3
1.2	Аксиомы (общие понятия) по Евклиду	3
1.3	Современная аксиоматика	4
<b>2</b>	<b>Векторы и операции над ними</b>	<b>6</b>
2.1	Векторные пространства	6
2.2	Линейная зависимость векторов	7
2.3	Базис векторного пространства	8
2.4	Аффинные пространства	10
2.5	Подпространства	11
2.6	Скалярное произведение. Расстояния и углы	13
2.7	Проектирование точек и векторов	14
2.8	Ортонормированный базис и прямоугольная система координат	15
<b>3</b>	<b>Прямые</b>	<b>17</b>
3.1	Уравнение прямой	17
3.2	Взаимное расположение прямых	19
3.3	Пучки прямых	19
3.4	Отрезки	20
3.5	Полуплоскости	21
3.6	Угол между двумя прямыми	22
3.7	Расстояние от точки до прямой	23
<b>4</b>	<b>Преобразования координат</b>	<b>24</b>
4.1	Преобразования координат векторов. Матрица перехода	24
4.2	Преобразования координат точек	26
4.3	Ортогональные матрицы	27
4.4	Ориентация	28
4.5	Угол от вектора до вектора	30
4.6	Площади фигур на плоскости	31
<b>5</b>	<b>Трёхмерное аффинное пространство</b>	<b>32</b>
5.1	Плоскость в пространстве	32
5.2	Взаимное расположение плоскостей	33
5.3	Пучки плоскостей	34
5.4	Полупространства	36
<b>6</b>	<b>Прямая в пространстве</b>	<b>36</b>
6.1	Уравнения прямой в пространстве	36
6.2	Взаимное расположение прямой и плоскости	37
6.3	Взаимное расположение двух прямых	38
<b>7</b>	<b>Плоскость в точечно-евклидовом пр-ве.</b>	<b>38</b>
7.1	Расстояния	39
7.2	Векторное и смешанное произведение. Объём	40
7.3	Векторное и смешанное произведение в ортонормированном базисе	41
7.4	Расстояния через векторное произведение	42

<b>8</b>	<b>Линии второго порядка</b>	<b>43</b>
8.1	Определения . . . . .	43
8.2	Связь уравнений линий второго порядка в разных с.к. . . . .	44
8.3	Ортогональные инварианты . . . . .	50
8.4	Центр линии второго порядка . . . . .	53
8.5	Сопряжённые направления . . . . .	55
8.6	Диаметры . . . . .	58
8.7	Сопряжённые диаметры . . . . .	61
8.8	Касательная к линии второго порядка . . . . .	62

# 1 Общие понятия (нет в билетах)

Уже известные нам понятия:

- Точка - то, что не имеет частей;
- Линия - длина без ширины;
- Прямая - линия, равно расположенная по отношению к точкам на ней;
- Поверхность - то, что имеет длину и ширину;
- ...

(Эти определения, как и последующие постулаты и аксиомы, были даны Евклидом.)

И определяемые понятия - аналогично школьным учебникам.

## 1.1 Постулаты

1. От всякой точки до всякой можно провести прямую.
2. Ограниченную часть прямой можно непрерывно продолжать.
3. Из всякой точки можно описать окружность со всяким радиусом.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая  $l$  образует с двумя другими прямыми  $l_1$  и  $l_2$  внутренние и лежащие по одну сторону углы, меньшие прямых, то  $l_1$  и  $l_2$  пересекутся с той стороны от  $l$ , где углы меньше прямых.

## 1.2 Аксиомы (общие понятия) по Евклиду

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавляются равные, то суммы равны.
3. Если из равных вычитаются равные, то разности равны.
4. Если к неравным прибавляются равные, то суммы неравны.
5. Удвоенные равные равны.
6. Половины равных равны.

7. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. Целое больше части.
9. Две прямые не образуют пространство.

Сейчас используется более строгая аксиоматика (Гильберт)

### 1.3 Современная аксиоматика

**Определение.** Плоскость (по Колмогорову) - тройка  $(X, L, d)$ , где  $X$  - множество (точек),  $L$  - выделенная совокупность его подмножеств (прямых) и  $d$  - отображение, сопоставляющее паре точек  $x, y \in X$  неотрицательное  $d(x, y) \in \mathbb{R}$  - расстояние от  $x$  до  $y$ .

Аксиомы делятся на 5 групп:

#### I. Аксиомы принадлежности:

1. Каждая прямая есть множество точек.
2. Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.
3. Существует хотя бы одна прямая.
4. Каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.
5. Вне каждой прямой существует хотя бы одна точка.

#### II. Аксиомы расстояния:

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. (Неравенство треугольника)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Пространство  $X$  с выполненными аксиомами принадлежности и расстояния называется метрическим.

**Определение.** Точка  $y$  лежит между  $x$  и  $z$ , если  $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ . Множество точек между  $x$  и  $z$  называется отрезком  $[x, z]$ , а  $d(x, z)$  - его длиной.

#### III. Аксиомы порядка:

1. Три точки лежат на одной прямой  $\Leftrightarrow$  одна из них лежит между двумя другими.
2. Любая точка  $x$  прямой  $l$  разбивает множество отличных от  $x$  точек, лежащих на  $l$ , на два непустых подмножества так, что  $x$  лежит между любыми двумя точками из разных подмножеств.

**Определение.** Одно из таких подмножеств точек прямой, взятое вместе с точкой  $x$ , называется лучом с началом в точке  $x$ .

3.  $\forall a \geq 0 \exists! y$  на луче с началом в  $x$  такая, что  $d(x, y) = a$ .

**Определение.** Множество точек  $A$  плоскости называется выпуклым, если  $\forall x, y \in A \quad [x, y] \in A$ .

4. Любая прямая  $l$  разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два непустых выпуклых подмножества.

**Определение.** Одно из таких подмножеств точек плоскости, взятое вместе с прямой  $l$ , называется полуплоскостью. Прямая  $l$  называется граничной для этой полуплоскости. Если  $l$  содержит луч, то эта полуплоскость примыкает к данному лучу.

#### IV. Аксиомы подвижности:

**Определение.** Взаимно однозначное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния, называется движением (изометрией).

1. Для любой пары лучей  $l_1, l_2$  и примыкающих к ним полуплоскостей  $\pi_1, \pi_2$  существует единственное движение  $\varphi$  такое, что  $\varphi(l_1) = l_2, \varphi(\pi_1) = \pi_2$ .
2. Для любой пары отрезков  $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$  равной ненулевой длины существуют ровно два движения  $\varphi_1, \varphi_2$  таких, что  $\varphi_{1,2}([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$ .

#### V. Аксиома параллельных прямых:

Через любую точку вне прямой  $l$  можно провести ровно одну прямую, не пересекающуюся с  $l$  (такая прямая называется параллельной к  $l$ ).

Данная аксиома разделяет евклидову и неевклидову геометрии.

Методы аналитической геометрии основаны на том, что, задавая точки парами чисел (через координаты), мы можем получать разнообразные зависимости

(например, уравнения множеств точек). Причем точку можно переопределить как пару чисел вместо абстрактного объекта, и все аксиомы останутся выполнены. То есть, рассматривая точки как арифметический объект, мы получим неотличимую по свойствам от абстрактной геометрии геометрию арифметическую, с которой уже можно работать по известным нам принципам.

## 2 Векторы и операции над ними

### 2.1 Векторные пространства

Геометрические векторы в математике являются **свободными векторами** - классами эквивалентности направленных отрезков по уже известному нам отношению эквивалентности векторов.

**Определение.** Векторным (линейным) пространством (над полем  $\mathbb{R}$ ) называется множество  $V$  с введенными на нем бинарными операциями "+" :  $V \times V \rightarrow V$  и "\*" :  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , отвечающие следующим свойствам (аксиомам):

$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$$

1.  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$  (коммутативность сложения);
2.  $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$  (ассоциативность сложения);
3.  $\exists \bar{0} \in V : \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$  (существует нейтральный элемент по сложению - нулевой вектор);
4.  $\exists (-\bar{a}) \in V : \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$  (существует противоположный элемент по сложению);
5.  $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$  (ассоциативность умножения на числа);
6.  $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$  (дистрибутивность по умножению);
7.  $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$  (дистрибутивность по сложению);
8.  $1 * \bar{a} = \bar{a}$ .

**Примеры.** Векторные пр-ва:

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ ;
- Функции;
- Многочлены;

- Многочлены степени  $\leq n$ .

**Замечание.** Св-ва векторных пространств:

1.  $\bar{0}$  единственный.

Пусть  $\bar{0}_1, \bar{0}_2$  - нулевые векторы.

Тогда  $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2$ , ч.т.д.

2.  $-\bar{a}$  единственный.

Пусть  $-\bar{a}_1, -\bar{a}_2$  - противоположные к  $\bar{a}$  векторы.

Тогда  $-\bar{a}_1 = -\bar{a}_1 + \bar{0} = -\bar{a}_1 + (\bar{a} + -\bar{a}_2) = (-\bar{a}_1 + \bar{a}) + (-\bar{a}_2) = \bar{0} + (-\bar{a}_2) = -\bar{a}_2$ , ч.т.д.

3.  $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$ .

$$\lambda * \bar{0} = \lambda * (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda * \bar{0} + \lambda * \bar{0}$$

Прибавив к обеим частям вектор, противоположный к  $\lambda * \bar{0}$ , получим  $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$ , ч.т.д.

4.  $-(\lambda \bar{a}) = (-\lambda) \bar{a} = \lambda(-\bar{a})$ .

Нетрудно видеть, что все три вектора противоположны  $\lambda \bar{a}$ , а далее из п.2.

5.  $-\bar{a} = -1 * \bar{a}$

Следует из п.4.

6.  $\lambda \bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow$  либо  $\lambda = 0$ , либо  $\bar{a} = \bar{0}$ .

Либо  $\lambda = 0$ , либо  $\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} * \lambda * \bar{a} = \frac{1}{\lambda} \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0}$ , ч.т.д.

## 2.2 Линейная зависимость векторов

**Определение.** Сумма вида  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$  называется линейной комбинацией векторов  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ .

**Определение.** Если в линейной комбинации  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , то она называется тривиальной, а иначе - нетривиальной.

**Определение.** Если вектор  $\bar{x}$  равен линейной комбинации  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$ , то говорят, что он линейно выражается (раскладывается) через векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ . (Сама линейная комбинация  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n$  называется выражением (разложением) вектора  $\bar{x}$  через  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ )



**Определение.** Множество векторов называется линейно зависимым, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов из этого множества. В противном случае оно называется линейно независимым.

**Пример.** Система из двух векторов  $\bar{a}, \bar{b}$  линейно зависима  $\Leftrightarrow \bar{a} = \lambda \bar{b}$ .

**Замечание.** Множество векторов линейно зависимо  $\Leftrightarrow$  один из векторов этого множества линейно выражается через некоторые другие векторы этого множества.

**Определение.** Упорядоченное множество векторов называется системой векторов. (В системе векторов элементы могут повторяться)

**Определение.** Множество (система) векторов из векторного пространства  $V$  называется полным (полной) в  $V$ , если любой вектор  $\bar{x} \in V$  линейно выражается через векторы этого множества.

**Замечание.**  $X \subset V$  полно в  $V \Rightarrow \forall Y : X \subset Y$  полно в  $V$ .

**Замечание.**  $X \subset V$  линейно независимо в  $V \Rightarrow \forall Y \subset X$  линейно независимо в  $V$ .

## 2.3 Базис векторного пространства

**Определение.** Множество векторов  $E$  в векторном пространстве  $V$  называется базисом  $V$ , если  $E$  линейно независимо и полно в  $V$ .

**Определение.** Векторное пространство, в котором существует конечный (состоящий из конечного числа векторов) базис, называется конечномерным. В противном случае оно называется бесконечномерным.

**Лемма.** Если  $X$  - конечное полное множество из  $n$  векторов в векторном пространстве  $V$  и  $Y$  - линейно независимое множество векторов в  $V$ , то  $Y$  конечно и число векторов в  $Y \leq n$ .

*Доказательство.* (пер.) Произвольно занумеруем векторы в  $X : (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Будем по одному добавлять в эту систему векторы из  $Y$  и одновременно выкидывать векторы из  $X$  так, чтобы система оставалась полной.

Пусть за  $k$  шагов ( $0 \leq k \leq n$ ) мы добавили некоторые  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$  и выкинули какие-то  $k$  векторов из  $X$  - осталась система  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-k}})$ . Возьмём  $\bar{y}_{k+1}$  из  $Y$  (если такого нет, то в  $Y \leq n$  векторов, что нам и нужно), и добавим его в систему. Так как до этого система оставалась полной,  $\bar{y}_{k+1}$  выражается через

$(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-k}})$ , причём какой-то  $\bar{x}_{i_j}$  входит в это разложение с коэффициентом, не равным нулю (иначе противоречие с линейной независимостью  $Y - \bar{y}_{k+1}$  выразился через  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$ ).

Тогда  $\bar{x}_{i_j}$  выражается через другие векторы системы и  $\bar{y}_{k+1}$  (в выражении  $\bar{y}_{k+1}$  перенесём всё, кроме  $\bar{x}_{i_j}$  в другую часть и разделим на коэффициент перед ним). А так как  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k+1}, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_{n-k}})$  - полная, эта же система без  $\bar{x}_{i_j}$  очевидно, останется полной.

Пусть смогли проделать  $n$  таких шагов. Тогда имеем систему  $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ . Если в  $Y$  есть ещё векторы, то они с одной стороны выражаются через векторы системы из её полноты, а с другой - не выражаются через них из линейной независимости  $Y$ . Противоречие, т.е. в  $Y$  не может оказаться больше  $n$  векторов, ч.т.д.  $\square$

**Теорема.** Если в векторном пространстве есть конечный базис, то все базисы в нём конечны и содержат одинаковое количество векторов.

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - конечный базис в  $V$ . Любой другой базис  $V$  линейно независим, т.е. по лемме содержит  $k \leq n$  векторов, а с другой стороны полон, т.е. первый базис по лемме содержит  $n \leq k$  векторов. Отсюда  $n = k$ , ч.т.д.  $\square$

**Определение.** Количество векторов в любом базисе векторного пространства  $V$  называется размерностью  $V$  и обозначается  $\dim V$ .

**Примеры.**  $\dim \bar{0} = 0, \dim \pi (= \dim \mathbb{R}^2) = 2, \dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

**Теорема.** В конечномерном векторном пространстве выражение любого вектора через базис определяется однозначно.

*Доказательство.* Если  $\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n = \lambda'_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda'_n \bar{e}_n$ , то  $\bar{x} - \bar{x} = \bar{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1) \bar{e}_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) \bar{e}_n$ . Если эти два разложения различны, то равная нулю линейная комбинация базисных векторов нетривиальна, что противоречит линейной независимости базиса. То есть двух различных разложений быть не может, ч.т.д.  $\square$

**Определение.** Пусть  $V$  - конечномерное векторное пространство и  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - базис в нём. Коэффициенты  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  в выражении любого вектора  $x \in V$  через эти базисные векторы называются координатами вектора  $x$  в базисе  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ . ( $\lambda_k$  называется  $k$ -й координатой)

**Замечание.** Векторы в  $n$ -мерном векторном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной строкой из  $n$  чисел из  $\mathbb{R}$  (например, векторы ассоциированного с евклидовой плоскостью векторного пространства соответствуют парам чисел). Таким образом можно задать операции сложения и умножения на число векторов плоскости через операции над числами, проводимыми по координатам.

Однако элементы плоскости (как множества) - точки, а не векторы, поэтому для работы непосредственно с плоскостью необходимо ввести ещё одно определение.

## 2.4 Аффинные пространства

**Определение.** Аффинное пространство - тройка  $(X, V, +)$  (обычно обозначается  $\mathbb{A}$ ), где  $X$  - множество (точек),  $V$  - векторное пространство, а  $+$  - операция:  $X \times V \rightarrow X$ , для которых выполнены аксиомы:

1.  $\forall A \in X, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V : A + (\bar{a} + \bar{b}) = (A + \bar{a}) + \bar{b}$ ;
2.  $\forall A \in X : A + \bar{0} = A$ ;
3.  $\forall A, B \in X \exists! \bar{a} \in V : A + \bar{a} = B$ . Обозначается  $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$ .

Если зафиксировать какую-нибудь точку  $O \in X$ , возникает взаимно однозначное соответствие между точками  $A$  и их радиус-векторами  $\overrightarrow{OA}$ .

**Определение.** Репер (система координат) в аффинном пространстве  $(X, V, +)$  - пара  $(O, E)$ , где  $O \in X$  и  $E$  - базис в  $V$ . Точка  $O$  называется началом координат (отсчёта). Координаты точки  $A$  в  $(O, E)$  - координаты её радиус-вектора  $\overrightarrow{OA}$  в базисе  $E$ .

**Замечание.** Для аффинного пространства верно:

1. Если  $A = (x_1, \dots, x_n), \bar{a} = (y_1, \dots, y_n)$ , то  $A + \bar{a} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .
2. Если  $A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n)$ , то  $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$ .

(Следует из сложения векторов)

**Определение.** Если  $\mathbb{A} = (X, V, +)$  - аффинное пространство, то говорят, что  $V$  - векторное пространство, ассоциированное с  $\mathbb{A}$ .

**Определение.**  $\mathbb{A}$  называется конечномерным, если ассоциированное с ним  $V$  конечномерно. В этом случае  $\dim \mathbb{A}$  (размерность  $\mathbb{A}$ ) равна  $\dim V$ .

Теперь точки аффинного пространства аналогично векторам можно ассоциировать с наборами чисел. Однако для ассоциирования евклидовой плоскости и её аксиом с двумерным аффинным пространством, необходимы отвечающие аксиомам понятия прямой и расстояния.

## 2.5 Подпространства

**Определение.** Векторным подпространством векторного пространства  $V$  называется непустое множество  $V_1 \subset V$  такое, что  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_1 : \bar{x} + \bar{y} \in V_1, \lambda \bar{x} \in V_1 (\forall \lambda \in \mathbb{R})$ .

**Замечание.** Определение эквивалентно следующему: множество  $V_1 \subset V$  - векторное подпространство  $V$ , если  $V_1$  является векторным пространством относительно операций  $+$  и  $*$ , определённых для  $V$ . (Доказательство осуществляется путём прямой проверки аксиом векторного пространства для  $V_1$ )

Введём несколько определений аффинного подпространства и докажем их эквивалентность.

**Определение.** Аффинным подпространством аффинного пространства  $\mathbb{A} = (X, V, +)$  называется

1. его непустое подмножество вида  $A + V_1 = A + \bar{a} : \bar{a} \in V_1$ , где  $V_1$  - векторное подпространство  $V$  и  $A \in X$  - точка;
2. тройка  $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$ , где  $V_1$  - векторное подпространство  $V$  и операция  $+_1 = +$ , для которой  $\forall A, B \in X_1, \forall \bar{a} \in V_1 : A + \bar{a} \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1$ ;
3. тройка  $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$ , где  $V_1$  - векторное подпространство  $V$  и операция  $+_1 = +$ , которая сама является аффинным пространством.

**Утверждение.** Приведённые определения эквивалентны.

*Доказательство.* Докажем следующие следствия:

①  $\Rightarrow$  ② Пусть  $P = A + \bar{a}, Q = A + \bar{b}$ . Тогда  $\overrightarrow{PQ} = \bar{b} - \bar{a}$  (в силу единственности такого вектора), т.е.  $\overrightarrow{PQ} \in V_1$ . Второе необходимое свойство ② очевидно выполнено.

②  $\Rightarrow$  ① Пусть  $X_1, V_1$  удовлетворяют ②. Зафиксируем произвольную  $A \in X_1$ .  $\forall B \in X_1$  имеем  $B = A + \overrightarrow{AB}$ , причём  $A \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1 \Rightarrow B \in X_1$ .

Эквивалентность ②  $\Leftrightarrow$  ③ очевидна из определения аффинного пространства. □

**Определение.** Прямая в аффинном пространстве - его одномерное аффинное подпространство.

Плоскость (двумерная) в аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

**Определение.** Единственный вектор в любом базисе векторного пространства, ассоциированного с одномерным аффинным пространством, называется направляющим вектором этого аффинного пространства.

**Замечание.** У любой прямой множество точек имеет вид  $A + V^1$ , где  $A$  - фиксированная точка.

*Доказательство.* Направляющий вектор  $\bar{e}$  любой прямой ненулевой, т.к. базис одномерного векторного пространства линейно независим.

Так как любой вектор  $V^1$  выражается через базис,  $\forall \bar{x} \in V^1 \exists \lambda \in \mathbb{R} : \bar{x} = \lambda \bar{e}$ .

Также  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda \bar{e} \in V^1$ , так как  $V^1$  - векторное пространство.

Отсюда любое ассоциированное с прямой векторное пространство имеет вид  $\{\lambda \bar{e} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , где  $\bar{e}$  - фиксированный ненулевой вектор, а тогда, взяв любую точку одномерного аффинного пространства, получим, что всё его множество точек имеет необходимый вид.  $\square$

**Утверждение.** Для прямых в двумерном аффинном пространстве выполнены евклидовы аксиомы принадлежности.

*Доказательство.* Пусть  $\mathbb{A}^2 = (X^2, V^2, +)$  - данное двумерное аффинное пространство,  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  - некоторый базис  $V^2$ .  $l = \{O + \bar{e}_1\}$  - некоторая прямая (из предыдущего замечания). Тогда в  $\mathbb{A}^2$  существует прямая, являющаяся множеством точек, на которой есть хотя бы одна точка -  $O$ , а вне её есть хотя бы одна точка -  $O + \bar{e}_2$ . (не на прямой, т.к. иначе  $\bar{e}_2 = \lambda \bar{e}_1$ )

Через любые две точки можно провести прямую ( $\forall A, B \in X^2$  возьмём  $\{A + \overrightarrow{AB}\}$  - прямую, проходящую через  $A, B$ ), и притом только одну: если  $l = \{O + \lambda \bar{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  - прямая и  $A, B \in l$ , то  $A = O + \lambda \bar{x}, B = O + \mu \bar{x} \Rightarrow B = A + (\mu - \lambda) \bar{x} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\mu - \lambda) \bar{x}$ . Тогда для любой  $C \in l$  имеем  $C = O + \eta \bar{x} = A + \overrightarrow{AO} + \eta \bar{x} = A + (\eta - \lambda) \bar{x} = A + \frac{\eta - \lambda}{\mu - \lambda} \overrightarrow{AB}$ , т.е. любая проходящая через две точки прямая совпадает с этой.  $\square$

**Теорема.** Любые два не пропорциональных вектора  $\bar{a}, \bar{b} \in V^2$  образуют базис двумерного векторного пространства  $V_2$ .

*Доказательство.* Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$  - произвольный базис  $V^2$ . Тогда  $\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, b = x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2$ . Пусть без ограничения общности  $x \neq 0$  (т.к. вектор  $\bar{a} \neq \bar{0}$ , хотя бы один коэффициент в его разложении  $\neq 0$ ). Тогда  $\bar{e}_1 = \frac{1}{x}\bar{a} - \frac{y}{x}\bar{e}_2$ . Подставим во второе выражение:  $\bar{b} = x'(\frac{1}{x}\bar{a} - \frac{y}{x}\bar{e}_2) + y'\bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}_2 = \frac{x}{xy'-yx'}\bar{b} - \frac{x'}{xy'-yx'}\bar{a}$ . Подставив это в первое выражение, получим, что  $\bar{e}_1$  также выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$ . Тогда система  $\bar{a}, \bar{b}$  - полная (из полноты базиса), а тогда  $\bar{a}, \bar{b}$  - базис по определению, ч.т.д.  $\square$

**Утверждение.** Для прямых в двумерном аффинном пространстве выполнена аксиома параллельных прямых.

*Доказательство.* Если  $l = \{O + \lambda\bar{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  - прямая и  $O_1 \notin l$ , то докажем, что  $l_1 = \{O_1 + \lambda\bar{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  - единственная прямая, проходящая через  $O_1$  и параллельная  $l$ . Предположим, что у них есть общая точка: пусть  $X = O + \lambda\bar{x} = O_1 + \mu\bar{x}$ . Тогда  $O_1 = O + (\lambda - \mu)\bar{x} \Rightarrow O_1 \in l$ . Противоречие, т.е. прямая  $l_1$  действительно параллельна  $l$ .

Пусть  $l_2$  - другая прямая, проходящая через  $O_1$ . Тогда  $l_2 = \{O_1 + \lambda\bar{y} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , причём  $\bar{y}$  не пропорционален  $\bar{x}$  (иначе прямые совпадают). Тогда  $\bar{x}, \bar{y}$  - базис  $V^2$ , то есть  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OO_1} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ . Отсюда  $O_1 = O + \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \Rightarrow O + \alpha\bar{x} = O_1 - \beta\bar{y}$ , причём  $O + \alpha\bar{x} \in l$  и  $O_1 - \beta\bar{y} \in l_2$ , т.е.  $l$  и  $l_2$  имеют общую точку. Отсюда параллельная  $l$  прямая, проходящая через  $O_1$ , единственная, ч.т.д.  $\square$

## 2.6 Скалярное произведение. Расстояния и углы

**Определение.** Пусть  $V$  - векторное пространство. Скалярным произведением в  $V$  называется функция  $(\ , \ ) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  со свойствами:

1.  $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0 \ \forall \bar{x} \in V$ , причём  $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$  (положительная определённость);
2.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x}) \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$  (коммутативность);
3.  $(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{z}) = \alpha(\bar{x}, \bar{z}) + \beta(\bar{y}, \bar{z}) \ \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (линейность по первому аргументу)

Из коммутативности выполнена и линейность по второму аргументу, т.е. скалярное произведение - билинейная функция.

**Определение.** Длиной вектора называется величина  $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ .

**Определение.** Расстоянием (евклидовым) между точками  $A, B \in \mathbb{A}$  называется длина вектора  $\overrightarrow{AB}$ . Будем обозначать  $d(A, B)$  как  $|\overrightarrow{AB}|$ .

**Замечание.** Зная длины всех векторов, скалярное произведение можно восстановить по формуле  $(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(|\bar{x} + \bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2)$ . Это несложно проверить:  $\frac{1}{2}(|\bar{x} + \bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2) = \frac{1}{2}((\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) - (\bar{x}, \bar{x}) - (\bar{y}, \bar{y})) = \frac{1}{2}(2(\bar{x}, \bar{y})) = (\bar{x}, \bar{y})$ .

**Теорема** (Неравенство Коши-Буняковского).  $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V \quad (\bar{a}, \bar{b}) \leq \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})}$ , причём равенство достигается только при  $\bar{a} = \lambda \bar{b}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим выражение  $(\bar{a} + t\bar{b}, \bar{a} + t\bar{b})$ . Оно равно нулю  $\Leftrightarrow \bar{a} = -t\bar{b}$ , т.е. может быть равно нулю не более чем при одном  $t$ . С другой стороны  $(\bar{a} + t\bar{b}, \bar{a} + t\bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + 2(\bar{a}, \bar{b})t + (\bar{b}, \bar{b})t^2$  - квадратный трёхчлен относительно  $t$ . Его дискриминант равен  $4(\bar{a}, \bar{b})^2 - 4(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})$ , а из первого рассуждения знаем, что дискриминант  $\leq 0$ , причём равенство достигается только в случае коллинеарности  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Отсюда  $(\bar{a}, \bar{b}) \leq \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})}$ , ч.т.д.  $\square$

**Утверждение.** Точки  $A, B, C$  лежат на одной прямой  $\Leftrightarrow$  одна из них лежит между двумя другими.

*Доказательство.*

$(\Rightarrow)$  Пусть  $A, B, C$  лежат на одной прямой. Тогда  $\exists O \in X^2, \bar{v} \in V^2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : A = O + \alpha\bar{v}, B = O + \beta\bar{v}, C = O + \gamma\bar{v}$ . Пусть без ограничения общности  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ . Тогда  $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = (\beta - \alpha)|\bar{v}|, d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = (\gamma - \beta)|\bar{v}|, d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = (\gamma - \alpha)|\bar{v}|$ . Отсюда видно, что  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ .

$(\Leftarrow)$  Пусть  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ . Обозначим  $\bar{a} = \overrightarrow{AB}, \bar{b} = \overrightarrow{BC}, \bar{c} = \overrightarrow{AC}$ . Тогда  $\sqrt{(\bar{c}, \bar{c})} = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b})} = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} + \sqrt{(\bar{b}, \bar{b})} \Rightarrow (\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{a}) + 2\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})} + (\bar{b}, \bar{b}) \Rightarrow 2(\bar{a}, \bar{b}) = 2\sqrt{(\bar{a}, \bar{a})(\bar{b}, \bar{b})}$ . Из неравенства Коши-Буняковского знаем, что равенство достигается при  $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ , т.е.  $\overrightarrow{AB}$  коллинеарен  $\overrightarrow{BC}$ , то есть  $A, B, C$  лежат на одной прямой.  $\square$

**Определение.** Величиной угла между ненулевыми векторами  $\bar{a}, \bar{b}$  называется число  $\arccos \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$  (из н. Коши-Буняковского  $|\frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}| \leq 1$ ).

**Определение.** Конечномерное аффинное (векторное) пространство вместе со скалярным произведением называется точечно-евклидовым (евклидовым) пространством. Двумерное точечно-евклидово пространство называется евклидовой плоскостью.

## 2.7 Проектирование точек и векторов

**Определение.** Пусть задано два векторных подпространства  $V_1, V_2$  векторного пространства  $V$  такие, что  $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$  и  $V_1 + V_2 = V$  (обозначается  $V = V_1 \oplus V_2$ ). Тогда сумма  $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ , где  $\bar{x} \in V, \bar{x}_1 \in V_1, \bar{x}_2 \in V_2$ , определена единственно.

(Следует, например, из того, что в любом базисе  $V$  каждый его вектор лежит либо в  $V_1$ , либо в  $V_2$ , тогда разложение в эту сумму соответствует единственному разложению по базису). Проекцией вектора  $\bar{x} \in V$  на  $V_1$  параллельно  $V_2$  называется слагаемое  $\bar{x}_1$  этой суммы.

**Определение.** Пусть задано два аффинных подпространства  $\mathbb{A}_1 = (X_1, V_1, +)$ ,  $\mathbb{A}_2 = (X_2, V_2, +)$  аффинного пространства  $\mathbb{A} = (X, V, +)$  такие, что  $V = V_1 \oplus V_2$ . Проекция точки  $P \in \mathbb{A}$  на  $\mathbb{A}_1$  параллельно  $\mathbb{A}_2$  - точка  $P_1 = A_1 + \bar{v}$ , где  $A_1$  - произвольная точка из  $X_1$ , а  $\bar{v}$  - проекция  $\overrightarrow{A_1 P}$  на  $V_1$  параллельно  $V_2$ . (Очевидно, что от выбора  $A_1$  расположение проекции не зависит)

**Пример.** Рассмотрим координаты точки евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат.

Найдём проекцию точки  $A = (x, y)$  на прямую  $Oy$  параллельно прямой  $Ox$ . По определению это точка (назовём её  $A_y$ ), равная  $O + \bar{v}$ , где  $\bar{v}$  - проекция  $\overrightarrow{OP}$  на векторное пространство прямой  $Oy$  параллельно  $Ox$ .  $\overrightarrow{OP} = \{x, y\} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ . Отсюда  $\bar{v} = y\bar{e}_2 = \{0, y\}$ , то есть  $A_y = (0, y)$ . Аналогично  $A_x = (x, 0)$ .

## 2.8 Ортонормированный базис и прямоугольная система координат

**Определение.** Векторы  $\bar{a}, \bar{b}$  называются ортогональными (перпендикулярными), если  $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ .

**Определение.** Базис векторного пространства  $V$  со скалярным произведением называется ортонормированным, если все его векторы попарно ортогональны и имеют длину 1.

**Определение.** Система координат в точечно-евклидовом пространстве называется прямоугольной, если её базис ортонормированный.

**Утверждение.** В точечно-евклидовом пространстве верно следующее выражение скалярного произведения через координаты векторов: если в некотором

$$\text{базисе } (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n) \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ то } (\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n y_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j).$$

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } (\bar{x}, \bar{y}) &= (x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = \sum_{i=1}^n (x_i\bar{e}_i, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (\bar{e}_i, y_1\bar{e}_1 + \dots + y_n\bar{e}_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{j=1}^n y_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j) \end{aligned} \quad \square$$



**Замечание.** В случае, когда базис ортонормированный, имеем  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$  (здесь и далее используется символ Кронекера:  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ ), т.е.  $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ . То есть в прямоугольной системе координат длина вектора вычисляется по формуле  $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , а расстояние между точками  $P = (x_1, \dots, x_n), Q = (y_1, \dots, y_n)$  выражается как

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

Пусть  $\mathbb{A}^n = (X, V^n, +)$  -  $n$ -мерное точечно-евклидово пространство.

**Утверждение.** В  $V^n$  любая линейно независимая система из  $n$  векторов образует базис.

*Доказательство.* Предположим, что в  $V^n$  существует неполная линейно независимая система из  $n$  векторов. Т.к. система не полная, существует вектор из  $V^n$ , не выражающийся через векторы этой системы, т.е. этот вектор можно добавить в систему без потери линейной независимости. Но по лемме-аналогу ОЛЛЗ линейно независимая система в  $V^n$  не может иметь  $> n$  векторов. Противоречие, т.е. любая линейно независимая система из  $n$  векторов является полной, а значит и базисом, ч.т.д.  $\square$

**Утверждение.** Если  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - попарно ортогональные ненулевые векторы в евклидовом пространстве, то  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  линейно независимы.

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть один из векторов (без ограничения общности  $\bar{e}_n$ ) линейно выражается через остальные:  $\bar{e}_n = \lambda_1\bar{e}_1 + \dots + \lambda_{n-1}\bar{e}_{n-1}$ . Тогда запишем квадрат его длины:  $|\bar{e}_n|^2 = (\bar{e}_n, \bar{e}_n) = (\bar{e}_n, \lambda_1\bar{e}_1 + \dots + \lambda_{n-1}\bar{e}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0$  (т.к.  $\bar{e}_n$  ортогонален всем остальным векторам). Отсюда  $|\bar{e}_n| = 0$ , и притом  $\bar{e}_n$  ненулевой. Противоречие, т.е. никакой вектор системы не выражается через остальные, а значит система линейно независима. ч.т.д.  $\square$

**Теорема.** В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

*Доказательство.* (пер.) Индукция по  $n$  - размерности пространства:

База:  $n = 1$  - очевидно, что существует вектор длины 1, который составляет ортонормированный базис одномерного пространства;

Шаг: Пусть в любом  $n$ -мерном пространстве существует ортонормированный базис. Рассмотрим пространство  $V$  размерности  $n + 1$  и выберем базис какого-то  $n$ -мерного подпространства  $W$  (пусть  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ ). Найдём вектор, ортогональный всем выбранным векторам. Так как базис  $W$  не полон в  $V$ , к нему можно добавить ещё один вектор  $x \in V$  без потери линейной независимости  $\Rightarrow (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, \bar{x})$  - базис в  $V$  (ЛНЗ система из  $n + 1$  векторов).

Теперь необходимо представить  $\bar{x}$  как следующую сумму:  $\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \bar{e}_n + \bar{e}_{n+1}$ , где  $\bar{e}_{n+1}$  ортогонален  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ . Тогда  $\bar{e}_{n+1} = \bar{x} - \lambda_1 \bar{e}_1 - \dots - \lambda_n \bar{e}_n$ . Рассмотрим  $(\bar{e}_{n+1}, \bar{e}_k) = (\bar{x} - \lambda_1 \bar{e}_1 - \dots - \lambda_n \bar{e}_n, \bar{e}_k) = (\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_k) - \dots - \lambda_n (\bar{e}_n, \bar{e}_k)$ . Так как  $\bar{e}_k$  ортогонально всем этим векторам, кроме  $\bar{e}_k$  и  $\bar{x}$ , это выражение равно  $(\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_k (\bar{e}_k, \bar{e}_k)$ . Отсюда при  $\lambda_k = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_k)}{(\bar{e}_k, \bar{e}_k)}$  векторы  $\bar{e}_{n+1}$  и  $\bar{e}_k$  ортогональны (зависит только от  $\lambda_k$ ). Составив таким образом все  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , получим выражение вектора  $\bar{e}_{n+1}$ , ортогонального всем векторам базиса  $W$ . Таким образом, векторы полученной системы  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n+1}$  попарно ортогональны (по предположению индукции)  $\Rightarrow$  линейно независимы  $\Rightarrow$  образуют базис в  $V$ . Разделив  $\bar{e}_{n+1}$  на его длину, получим, что все векторы базиса попарно ортогональны и имеют длину 1  $\Rightarrow V$  имеет ортонормированный базис, ч.т.д.  $\square$

**Следствие.** Любую систему ортогональных векторов длины 1 в векторном пространстве можно дополнить до ортонормированного базиса.

## 3 Прямые

### 3.1 Уравнение прямой

**Определение.** Уравнением (либо уравнениями) множества точек будем называть уравнение со следующим свойством: точка принадлежит множеству тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнению.

**Вывод формул (уравнения прямой).** Пусть  $l$  - прямая на плоскости:  $l = \{X : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\bar{v}\}$ , где  $M$  - точка прямой,  $\bar{v}$  - её направляющий вектор. Если  $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , то из совпадения координат совпадающих векторов  $\overrightarrow{OX}$  и  $(\overrightarrow{OM} + t\bar{v})$  верно следующее: (**параметрические уравнения прямой**)

$$X \in l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Выразим  $t$  из первого уравнения и подставим во второе уравнение - получим

**каноническое уравнение прямой:**

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}}$$

(Заметим, что данное выражение не определено при нулевых  $a$  или  $b$ , но очевидно, что они не равны нулю одновременно, а запись, где одна из дробей имеет знаменатель 0, иногда используется, поэтому здесь и далее случай равенства нулю знаменателя может не рассматриваться как отдельный и будет означать, что числитель должен равняться 0)

Если известно, что прямой принадлежат  $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ , то  $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$  - направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

**(уравнение прямой по двум точкам).**

Домножим каноническое уравнение прямой на знаменатели:  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \Rightarrow bx - bx_0 = ay - ay_0 \Rightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$ . Такое уравнение обычно называют **общим уравнением прямой** и записывают как

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

**Замечание.** Заметим также, что из итоговой формулы вывода общего уравнения ( $bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$ ) следует, что для прямой  $Ax + By + C = 0$  вектор  $(B, -A)$  (а соответственно и  $(-B, A)$ ) является направляющим.

**Утверждение.**  $Ax + By + C = 0$  является уравнением прямой  $\Leftrightarrow A$  и  $B$  не равны нулю одновременно.

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Если  $Ax + By + C = 0$ , то её направляющий вектор ненулевой, а значит вектор  $(-B, A)$  ненулевой, то есть одна из его координат  $\neq 0$ .

$\Leftarrow$  Пусть без ограничения общности  $A \neq 0$ . Тогда этому уравнению удовлетворяет точка  $(x_0, y_0) = (-\frac{C}{A}, 0)$ , а значит (нетрудно проверить) все удовлетворяющие ему точки имеют вид  $(x_0 + Bt, y_0 - At)$ , что соответствует прямой с такими параметрическими уравнениями.  $\square$

## 3.2 Взаимное расположение прямых

**Теорема.** Прямые на плоскости параллельны (или совпадают)  $\Leftrightarrow$  их направляющие векторы пропорциональны.

*Доказательство.* Пусть  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ;  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  - данные прямые. Рассмотрим систему уравнений, которой удовлетворяют координаты точек, принадлежащих обоим прямым: 
$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

Из курса алгебры (формула Крамера) известно, что система не является определённой  $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 0$ . Таким образом, прямые параллельны или совпадают

$\Leftrightarrow$  имеют 0 или бесконечно много общих точек  $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$  пропорционален  $\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , ч.т.д.  $\square$

**Замечание.** Из этого также видно, что прямые совпадают  $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .

**Следствие.** Прямые  $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \end{cases}$ ;  $l_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \end{cases}$  пересекаются  $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ . Условие совпадения прямых также можно записать через параметрические уравнения (вектор  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \lambda(a, b)$ ).

**Следствие.** Через две различные точки проходит ровно одна прямая (все такие прямые совпадают).

## 3.3 Пучки прямых

**Определение.** Собственным пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через данную точку, называемую центром пучка.

Несобственным пучком прямых называется множество всех прямых, параллельных данной прямой.

**Теорема.** Пусть прямые  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая  $l$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow l$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Пусть  $l$  задаётся уравнением (\*). Тогда, подставив в уравнение  $l$  центр пучка  $(x_0, y_0)$ , получим  $\lambda(0) + \mu(0) = 0$  (т.к. центр удовлетворяет уравнениям  $l_1, l_2$ ).

$\Rightarrow$  Пусть  $(x_0, y_0) \in l$ . Возьмём произвольную точку  $(x_1, y_1) \in l, (x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$ . Рассмотрим прямую вида (\*) с  $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)$ ,  $\mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) : -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ . Заметим, что это уравнение действительно задаёт прямую: в противном случае необходимы условия  $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = 0$ , но тогда  $(A_1, B_1)$  и  $(A_2, B_2)$  пропорциональны, а исходные прямые непараллельны. Такой прямой, очевидно, принадлежат точки  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ . Так как через две различные точки проходит ровно одна прямая, любая прямая из собственного пучка имеет вид (\*), ч.т.д.  $\square$

**Теорема.** Пусть прямые  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая  $l$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow l$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Так как  $l_1 \parallel l_2$ ,  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ . Тогда если  $l$  имеет вид (\*), то  $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{B_1} \Rightarrow l \parallel l_1$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $l$  принадлежит пучку. Так как направляющие векторы  $l, l_1$  и  $l_2$  пропорциональны, можем домножить уравнения на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть  $l_1 : Ax + By + C'_1 = 0$ ;  $l_2 : Ax + By + C'_2 = 0$ ;  $l : Ax + By + C'_3 = 0$ .

Тогда возьмём  $\lambda, \mu$  из следующей системы (получена из равенства коэффициентов  $\lambda l_1 + \mu l_2$  и  $l$ ): 
$$\begin{cases} C'_1\lambda + C'_2\mu = C'_3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{C'_3 - C'_2}{C'_1 - C'_2} \\ \mu = \frac{C'_1 - C'_3}{C'_1 - C'_2} \end{cases} \quad (C'_1 \neq C'_2, \text{ иначе } l_1 \text{ и } l_2 \text{ совпадают}).$$
 Очевидно, что для таких  $\lambda, \mu$  уравнение  $l$  имеет вид (\*) (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д.  $\square$

### 3.4 Отрезки

**Определение.** Пусть  $l$  - прямая,  $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in l$  и  $X_1 \neq X_2$ . Отрезком с концами  $X_1, X_2$  на плоскости называется множество всех точек, лежащих между  $X_1$  и  $X_2$  (на прямой  $l$ ). Обозначается  $[X_1, X_2]$ .

**Вывод формулы** (Уравнение отрезка). Пусть  $X \in [X_1, X_2]$ . Тогда знаем, что

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad (X \in l) \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$t \overrightarrow{X_1 X_2} = \overrightarrow{X_1 X} \Rightarrow \overrightarrow{X X_2} = (1 - t) \overrightarrow{X_1 X_2}. \text{ Отсюда видно, что } |\overrightarrow{X_1 X}| \text{ и } |\overrightarrow{X X_2}| < |\overrightarrow{X_1 X_2}| \Leftrightarrow t \in [0, 1]. \text{ Отсюда}$$

$$X \in [X_1, X_2] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

**Утверждение.** На плоскости выполняются вторая и третья аксиомы порядка.

*Доказательство.* Формульно зададим множества, на которые точка  $(x, y)$  делит прямую  $l$  (лучи без начала):  $\{X : X(x, y) + \lambda \bar{v}, \lambda > 0\} (\lambda < 0)$ , где  $\bar{v}$  - произвольный направляющий вектор  $l$ . Без ограничения общности, пусть у  $\bar{v}$  первая координата ненулевая (хотя бы одна ненулевая, т.к. вектор ненулевой). Тогда эти множества можно представить так:  $\{X(x_1, y_1) : x_1 > x\} (x_1 < x)$ . Тогда  $(x, y)$  лежит на отрезке между любыми двумя точками из разных множеств (несложно проверить), т.е. вторая аксиома порядка выполнена.

Для третьей аксиомы необходимо в одном из этих множеств найти точку на расстоянии  $d$  от  $(x, y)$ . Тогда из условия на расстояние имеем:  $|\lambda \bar{v}| = a$ , т.е.  $|\lambda| = \frac{a}{|\bar{v}|}$ . Так как знак  $\lambda$  определяет, какому множеству принадлежит точка, в каждом из множеств такая точка существует и единственная, т.е. третья аксиома выполнена.  $\square$

**Определение.** Отрезком в произвольном аффинном пространстве называется множество точек  $[X_1, X_2] = \{X_1 + t \overrightarrow{X_1 X_2}, t \in [0, 1]\}$

### 3.5 Полуплоскости

**Определение.** Множество  $X$  в произвольном аффинном пространстве называется выпуклым, если  $\forall X_1, X_2 \in X \quad [X_1, X_2] \subset X$ .

**Определение.** Пусть в аффинной системе координат  $l : Ax + By + C = 0$ . Множества  $\Pi_0^+ = \{X(x, y) : Ax + By + C \geq 0\}$  и  $\Pi_0^- = \{X(x, y) : Ax + By + C \leq 0\}$  называются замкнутыми полуплоскостями, а множества  $\Pi^+ = \{X(x, y) : Ax + By + C > 0\}$  и  $\Pi^- = \{X(x, y) : Ax + By + C < 0\}$  - открытыми полуплоскостями.

**Теорема.** Для любой прямой  $l : Ax + By + C = 0$  множества  $\Pi_0^+, \Pi_0^-, \Pi^+, \Pi^-$  выпуклы.

*Доказательство.* Рассмотрим  $\Pi_0^+$  (остальные аналогично).

Пусть  $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in \Pi_0^+$ . Знаем, что любая точка  $X \in [X_1, X_2]$  имеет координаты  $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2), 0 \leq t \leq 1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \begin{cases} Ax_1 + By_1 + C \geq 0 \\ Ax_2 + By_2 + C \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tC \geq 0 \\ (1-t)Ax_2 + (1-t)By_2 + (1-t)C \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C \geq 0 \Rightarrow X \in \Pi_0^+, \text{ ч.т.д.} \quad \square \end{aligned}$$

**Следствие.** На плоскости выполняется четвёртая аксиома порядка.

### 3.6 Угол между двумя прямыми

**Определение.** Пусть  $l$  - прямая,  $O \in l, \bar{v}$  - любой направляющий вектор  $l$ . Множества  $l^+ = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \geq 0\}$  и  $l^- = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \leq 0\}$  называются лучами, на которые  $O$  делит  $l$ .

**Замечание.** Если даны два луча с общим началом (обозначим их  $l_1^+, l_2^+$ ), то они являются подмножествами однозначно определённых прямых  $l_1, l_2$ , для которых можно выбрать направляющие векторы так, чтобы лучи соответствовали формуле из определения (назовём эти векторы  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ).

**Определение.** Углом на плоскости называется объединение двух лучей с общим началом. Величиной угла  $l_1^+ \cup l_2^+$  называется величина угла между векторами  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ , определёнными как в замечании. Говорят, что один угол меньше другого, если величина первого угла меньше величины второго.

**Определение.** Угол называется прямым, если его величина равна  $\frac{\pi}{2}$  ( $\Leftrightarrow$  направляющие векторы лучей ортогональны). Угол называется развёрнутым, если его величина равна  $\pi$  ( $\Leftrightarrow$  образующие угол лучи дополняют друг друга до прямой).

**Замечание.** В дальнейшем будем иногда называть углом величину угла. Также аналогичным образом можно говорить о величине угла между вектором и прямой

**Определение.** Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами с началом в их точке пересечения этих прямых и лежащих на этих прямых, если прямые пересекаются. Если прямые параллельны или совпадают, то угол между ними равен нулю. Обозначается  $\angle(l_1 l_2)$ .

**Определение.** Прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $\frac{\pi}{2}$ .

**Определение.** Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую, называется прямая, проходящая через точку и перпендикулярная прямой, либо отрезок этой прямой с концами в данной точке и точке пересечения прямой с данной.

**Вывод формулы** (Угол между прямыми в прямоугольной с.к.). Пусть  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  - прямые в прямоугольной системе координат. Тогда их направляющие векторы равны  $\begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \bar{v}_1, \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \bar{v}_2$ . Отсюда (выражение скалярного произведения):  $\cos \angle(l_1, l_2) = |\cos \angle(\bar{v}_1, \bar{v}_2)| \Rightarrow$

$$\cos \angle(l_1, l_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

(модуль в косинусе, а соответственно и в числителе формулы, позволяет сразу взять меньший угол).

**Следствие.** Прямые  $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$  перпендикулярны  $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ .

### 3.7 Расстояние от точки до прямой

**Определение.** Нетрудно проверить, что в прямоугольной системе координат вектор  $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  перпендикулярен вектору  $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$ , а значит и прямой  $l : Ax + By + C = 0$ . Вектор  $\bar{n}$  называется нормалью (нормальным вектором) прямой  $l$  (в прямоугольной с.к.)

**Замечание.** Любой вектор, коллинеарный нормали, также является нормалью, так как уравнения  $Ax + By + C = 0$  и  $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$  задают одну и ту же прямую.

**Определение.** Пусть  $A, B$  - множества в точечно-евклидовом пространстве. Расстоянием от  $A$  до  $B$  называется число  $\inf\{|XY|, X \in A, Y \in B\}$ . Расстояние от точки до прямой определяется аналогично, когда  $A = \{X\}$  (его часто обозначают  $d(X, l)$ ).

**Замечание.** У множества из определения существует нижняя грань, т.к. оно является ограниченным снизу подмножеством действительных чисел (принцип полноты Вейерштрасса из курса математического анализа).

**Теорема.** Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.



*Доказательство.* Пусть заданы  $l : Ax + By + C = 0$  и  $X_0$  - произвольные прямая и точка. Выберем на  $l$  произвольную точку  $X_1$ . Проведём через  $X_0$  прямую  $l'$  с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  - она будет перпендикулярна  $l$ , а значит имеет с ней единственную общую точку - назовём её  $X_2$ . Имеем:  $|\overrightarrow{X_1 X_0}|^2 = (\overrightarrow{X_1 X_0}, \overrightarrow{X_1 X_0}) = (\overrightarrow{X_1 X_2} + \overrightarrow{X_2 X_0}, \overrightarrow{X_1 X_2} + \overrightarrow{X_2 X_0}) = |\overrightarrow{X_1 X_2}|^2 + |\overrightarrow{X_2 X_0}|^2 \geq |\overrightarrow{X_2 X_0}|^2$ . Отсюда  $|\overrightarrow{X_2 X_0}|^2$  - минимум всех расстояний между  $X$  и точкой прямой, т.е. он достигается в точке пересечения  $l$  и  $l'$ , ч.т.д.  $\square$

**Замечание.** Расстояние между двумя прямыми на плоскости  $\neq 0 \Leftrightarrow$  они параллельны и не совпадают (у них нет общих точек). В этом случае расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой.

**Вывод формулы** (Расстояние от точки до прямой в прямоугольной с.к.). Пусть  $X_0 = (x_0, y_0)$ ,  $l : Ax + By + C = 0$ . Посчитаем  $d(X_0, l)$ . Проведём через  $X_0$  перпендикуляр  $l'$  к прямой  $l$ . Направляющий вектор  $l'$  -  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ , то есть его пара-

метрические уравнения -  $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$ . Найдём  $t_1$ , удовлетворяющее точке

пересечения: имеем  $A(x_0 + At_1) + B(y_0 + Bt_1) + C = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{A^2 + B^2}$ .

Отсюда точка пересечения  $X_1$  имеет координаты  $(x_0 + At_1, y_0 + Bt_1)$ . Тогда  $\overrightarrow{X_0 X_1} = \begin{pmatrix} At_1 \\ Bt_1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{X_0 X_1}|^2 = A^2 t_1^2 + B^2 t_1^2 = (A^2 + B^2) t_1^2 = \frac{(Ax_0 + By_0 + C)^2}{A^2 + B^2}$ , а значит

$$d(X, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## 4 Преобразования координат

### 4.1 Преобразования координат векторов. Матрица перехода

**Вывод формулы** (Матрица перехода). Пусть  $E = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$  и  $E' = (\bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_n)$  - два базиса в одном и том же евклидовом пространстве  $V$ . Будем называть  $E$  старым базисом, а  $E'$  - новым. Получим формулу для координат в старом базисе вектора  $\bar{x} \in V$ , заданного в новом базисе координатами  $(x'_1, \dots, x'_n)$ .

Итак, пусть в старом базисе  $\bar{x}$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)$ . Установим связь между базисами, выразив векторы нового базиса через старый: пусть

$\bar{e}'_i = c_{1i}\bar{e}_1 + \dots + c_{ni}\bar{e}_n$ , т.е.  $\bar{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$ . Подставляя эти выражения, получим:

$$\bar{x} = x'_1\bar{e}'_1 + \dots + x'_n\bar{e}'_n = x'_1(c_{11}\bar{e}_1 + \dots + c_{n1}\bar{e}_n) + \dots + x'_n(c_{1n}\bar{e}_1 + \dots + c_{nn}\bar{e}_n) = \\ = (c_{11}x'_1 + \dots + c_{1n}x'_n)\bar{e}_1 + \dots + (c_{n1}x'_1 + \dots + c_{nn}x'_n)\bar{e}_n \Rightarrow (\text{из равенства координат})$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

**Определение.** Такая матрица  $C$  называется матрицей перехода от базиса  $E$  к базису  $E'$ .

**Замечание.** Столбцы матрицы  $C$  являются координатами базисных векторов  $E'$  в базисе  $E \Rightarrow$  столбцы  $C$  линейно независимы  $\Rightarrow C$  невырожденная (из курса алгебры).

**Вывод формулы.** Рассмотрим также скалярное произведение векторов в слу-

чае, когда базис  $E$  ортонормированный. Если  $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$  (в ба-

зисе  $E$ ), имеем:  $(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} C^T C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$  (так

как  $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \left( C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right)^T$ ). Нетрудно видеть, что произведение матриц

$C^T C$  имеет вид  $G = \begin{pmatrix} (\bar{e}'_1, \bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_1, \bar{e}'_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\bar{e}'_n, \bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_n, \bar{e}'_n) \end{pmatrix}$  (строки  $C^T$  и столбцы  $C$  - координаты векторов базиса  $E'$  в базисе  $E$ )

Такая матрица называется матрицей Грама (матрицей скалярных произведений) для базиса  $E'$ . Так как матрица  $G$  не зависит от базиса  $E$ , получаем формулу для скалярного произведения в произвольном базисе:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}}$$

**Следствие (1).** Если  $C$  и  $C_1$  - матрицы перехода от базиса  $E$  к  $E'$  и от  $E'$  к  $E''$  соответственно, то матрица перехода от базиса  $E$  к  $E''$  равна  $CC_1$

**Следствие (2).** Если  $C$  - матрица перехода от базиса  $E$  к  $E'$ , то матрица перехода от базиса  $E'$  к  $E$  равна  $C^{-1}$ .

**Замечание.** Пусть  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  - базис векторного пространства  $V$ . Тогда векторы  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in V$  линейно независимы  $\Leftrightarrow$  столбцы их координат линейно независимы. Это очевидно следует из представления линейной комбинации  $\lambda_1 \bar{x}_1 + \dots + \lambda_n \bar{x}_n = 0$  через координаты.

**Теорема.** Для произвольного данного базиса матрица  $C$  является матрицей перехода к некоторому другому базису  $\Leftrightarrow \det C \neq 0$ .

*Доказательство.* Следует из утверждения из курса алгебры о том, что матрица невырождена  $\Leftrightarrow$  её столбцы линейно независимы ( $\Leftrightarrow$  векторы-столбцы образуют базис).  $\square$

## 4.2 Преобразования координат точек

**Вывод формулы** (Координаты точки при перемене с.к.). Пусть заданы два репера  $O\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n$  и  $O'\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n$ . Для этого необходимо задать новый репер через

старый: пусть  $C$  - матрица перехода от  $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$  к  $\bar{e}'_1 \dots \bar{e}'_n$ , а вектор  $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ .

Пусть  $X$  - произвольная точка с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$  в старой системе координат и  $(x'_1, \dots, x'_n)$  в новой. Тогда  $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Также  $\overrightarrow{O'X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  в

новой с.к.  $\Rightarrow C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$  в старой. Осталось заметить, что  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$ , а

отсюда (через старую с.к.)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

Выразим новые координаты, умножив слева на  $C^{-1}$ :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = -C^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

(отметим также, что  $-C^{-1} \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$  - новые координаты вектора  $O'O$ )

### 4.3 Ортогональные матрицы

**Определение.** Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется ортогональной.

**Теорема.** Для  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$  следующие утверждения равносильны:

1.  $C$  - ортогональная;
2.  $\sum_{k=1}^n c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}$  ("скалярное произведение" столбцов равно  $\delta_{ij}$ );
3.  $\sum_{k=1}^n c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}$  ("скалярное произведение" строк равно  $\delta_{ij}$ );
4.  $CC^T = E$ ;
5.  $C^TC = E$ ;
6.  $C^T = C^{-1}$ ;

*Доказательство.* (в конспекте указан "прямой подсчёт")

Для начала заметим равносильность утверждений (4), (5), (6): (4)  $\Leftrightarrow$  (6)  $\Leftrightarrow$  (5) по определению обратной матрицы, т.к. из 4 и 5 очевидно следует обратимость матрицы  $C$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2): Столбцы матрицы  $C$  - координаты векторов ортонормированного базиса  $E$  в другом ортонормированном базисе  $E'$ . Рассмотрим скалярное произведение  $(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j)$ : с одной стороны оно равно  $\sum_{k=1}^n c_{ki}c_{kj}$  (так как базис  $E$  ортонормирован, можем применять формулу с матрицей Грама, причём  $G = E$  из ортонормированности  $E_1$ ), а с другой стороны -  $\delta_{ij}$  (из ортонормированности  $E_1$ ).

①  $\Leftrightarrow$  ②: Из ② знаем, что векторы с координатами в столбцах попарно ортогональны и имеют длину 1 в базисе, в котором записаны эти координаты. Значит, применив такое преобразование к векторам ортонормированного базиса, получим также попарно ортогональные векторы длины 1, т.е.  $C$  - ортогональная.

②  $\Leftrightarrow$  ⑤: Оба условия равносильны тому, что элемент  $C^T C$  на позиции  $ij$  равен  $\delta_{ij}$ .

Аналогично ③  $\Leftrightarrow$  ④.

Итого ①  $\Leftrightarrow$  ②  $\Leftrightarrow$  ⑤  $\Leftrightarrow$  ⑥  $\Leftrightarrow$  ④  $\Leftrightarrow$  ③. □

**Следствие.** Для ортогональной  $C$  :  $|C^T| = |C|$ ,  $|C^T C| = |E| = 1 \Rightarrow |C| = \pm 1$

**Следствие.** (Из определения ортогональной матрицы)

Произведение ортогональных матриц - ортогональная матрица.

Матрица, обратная ортогональной, ортогональна.

**Вывод формулы.** (Двумерный случай ортогональной матрицы)

$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ортогональна  $\Rightarrow a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \varphi : a = \cos \varphi, c = \sin \varphi$ .

Из теоремы  $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b = \pm \sin \varphi, d = \pm \cos \varphi$ .

Из ортогональности столбцов следует, что  $ab + cd = 0$ , поэтому остаются следующие случаи:

$$C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

т.е. для любой ортогональной  $C$  найдётся  $\varphi$  такой, что  $C$  имеет один из видов выше. Несложно также убедиться, что любая матрица такого вида ортогональна: первая производит поворот на угол  $\varphi$ , а вторая - поворот с отражением.

## 4.4 Ориентация

**Определение.** Два базиса в конечномерном векторном пространстве называются одинаково ориентированными (одноимёнными), если матрица перехода от одного базиса к другому имеет положительный определитель. В противном случае базисы называются противоположно ориентированными (разноимёнными).

**Теорема.** Отношение одноимённости является отношением эквивалентности на множестве базисов.

*Доказательство.* По определению отношения эквивалентности:

- рефлексивность: матрица перехода от базиса в себя равна  $E$ ,  $|E| = 1$ ;

- симметричность:  $C : E \rightarrow E' \Rightarrow C^{-1} : E' \rightarrow E$ , причём  $|CC^{-1}| = 1$ , т.е.  $|C|$  и  $|C^{-1}|$  одного знака;
- транзитивность:  $C : E \rightarrow E', C' : E' \rightarrow E'', C'' : E \rightarrow E'' \Rightarrow C'' = CC'$ , т.е. из одноимённости  $E$  с  $E'$  и  $E'$  с  $E''$  следует одноимённость  $E$  с  $E''$ .

□

**Определение.** Ориентацией векторного пространства, а также любого аффинного пространства, с которым оно ассоциировано, называется выбор любого из двух классов эквивалентности по отношению одноимённости и объявления базисов в нём положительными (а остальных - отрицательными).  
(Достаточно выбрать один базис и объявить его положительным)

**Примеры.** Ориентации различных пространств:

1. **Прямая:** Достаточно выбрать направляющий вектор (базис), и объявить его положительным. Матрица перехода на прямой - число (любые два вектора коллинеарны), и сонаправленность векторов (одноимённость базисов) зависит от знака этого числа.
2. **Плоскость:** Достаточно выбрать пару неколлинеарных векторов (базис), и объявить его положительным. Заметим, что пары  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{b}, \bar{a}$  разноимённы ( $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ).

Посмотрим, когда пары  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{a}, \bar{b}'$  одноимённые. Рассмотрим произвольную прямую  $l$  с направляющим вектором  $\bar{a}$  и любую точку  $O \in l$ . В репере  $O\bar{a}\bar{b}$  уравнение  $l$  имеет вид  $y = 0$ . Подставив в это уравнение координаты  $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , получим 1.

Пусть  $\bar{b}' = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \Rightarrow$  матрица перехода между парами  $C$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ .

$|C| > 0 \Leftrightarrow \mu > 0 \Leftrightarrow$  при подстановке координат  $\bar{b}'$  в уравнение  $l$  результат будет  $> 0 \Leftrightarrow$  точки  $B, B'$  с радиус-векторами  $\bar{b}, \bar{b}'$  лежат в одной полуплоскости относительно  $l$ .

Получили **критерий одноимённости пар  $\bar{a}, \bar{b}$  и  $\bar{a}, \bar{b}'$ : они одноимённы  $\Leftrightarrow$  точки, полученные прибавлением векторов  $\bar{b}$  и  $\bar{b}'$  к произвольной точке произвольной прямой с направляющим вектором  $\bar{a}$ , лежат относительно неё в одной полуплоскости.**

## 4.5 Угол от вектора до вектора

**Определение.** Углом от вектора  $\bar{a}$  до вектора  $\bar{b}$  в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется угол между  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , взятый со знаком плюс, если пара  $\bar{a}, \bar{b}$  положительно ориентирована, и со знаком минус иначе.

**Определение.** Положительным углом от  $\bar{a}$  до  $\bar{b}$  называется угол  $\varphi$  от  $\bar{a}$  до  $\bar{b}$ , если  $\varphi > 0$ , и угол  $2\pi + \varphi$ , если  $\varphi < 0$ .

**Определение.** Углом от прямой  $l_1$  до прямой  $l_2$  в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется наименьший положительный угол от направляющего вектора  $l_1$  до направляющего вектора  $l_2$ .

**Вывод формулы.** (Известное ранее уравнение прямой. Угол наклона)

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат  $O\bar{e}_1\bar{e}_2$  и в ней прямая  $l$  определена уравнением  $y = kx + b \Leftrightarrow kx - y + b = 0$ . Прямая с направляющим вектором  $e_1$  называется **осью абсцисс**, а угол от этой прямой до прямой  $l$  - **углом наклона** прямой  $l$ .

Подсчитаем угол наклона  $l$ . Направляющие векторы  $l$  имеют вид  $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda k \end{pmatrix}$ , причём  $\varphi$ , очевидно, зависит только от знака  $\lambda$  (так как углы при  $\lambda > 0$  и  $\lambda < 0$  различаются на  $\pi$ ). Угол от  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  до  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm k \end{pmatrix}$  равен углу от  $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  до  $\begin{pmatrix} \mp 1 \\ \mp k \end{pmatrix}$ , поэтому

выбирать наименьший можем только из положительных углов от вектора  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  - наименьшим, как нетрудно видеть, будет угол до  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$  при  $k > 0$  и до  $\begin{pmatrix} -1 \\ -k \end{pmatrix}$

иначе. Обозначив вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$  за  $\bar{k}$ , имеем:

$$\cos \varphi = \cos \angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sin \angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm k$$

(синус  $> 0$ , т.к. угол от 0 до  $\pi$ ).

Заметим, что при  $k > 0$  необходимый угол должен иметь тангенс, больший нуля, а при  $k < 0$  - меньший нуля (очевидно из расположения соответствующих векторов в координатных четвертях). Отсюда видно, что вне зависимости от нужного нам вектора верно:

$\operatorname{tg} \varphi = k$

## 4.6 Площади фигур на плоскости

**Определение.** Фигуры  $\Phi_1, \Phi_2$  называются конгруэнтными, если  $\exists$  отображение  $f : \Pi \rightarrow \Pi$ , сохраняющее расстояния ( $|f(A)f(B)| = |AB| \forall A, B$ ) такое, что  $f(\Phi_1) = \Phi_2$ .

**Определение.** Площадь (мера) на евклидовой плоскости - численная величина (обозначается  $S_\Phi$ ,  $\Phi$  - фигура), соответствующая следующим свойствам:

1. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1;
2. Площади конгруэнтных фигур равны;
3. Если  $\Phi_1, \Phi_2$  - фигуры,  $\exists S_{\Phi_1}, S_{\Phi_2}$  и  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ , то  $\exists S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}$ ;
4. Если  $\Phi$  - фигура и существуют такие последовательности фигур  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  и  $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ , что  $\varphi_n \subset \varphi_{n+1} \subset \Phi \subset \Phi_{n+1} \subset \Phi_n \forall n \geq 1$ , причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\varphi_n}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Phi_n}$  существуют и равны, то  $S_\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\varphi_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Phi_n}$

**Следствие.** (Площади некоторых фигур:)

- Площадь отрезка равна 0.

*Доказательство.* Из предельного перехода (Площадь отрезка с длиной 1 равна 0, иначе площадь квадрата со стороной 1 не была бы конечной, а из этого можно получить длину любого отрезка).  $\square$

- Площадь квадрата со стороной  $a$  равна  $a^2$ .

*Доказательство.* Для  $a = \frac{1}{n}$  разбиваем квадрат со стороной 1 на  $n^2$  квадратов, для  $a \in \mathbb{Q}$  складываем квадрат со стороной  $\frac{m}{n}$  из предыдущих, для  $a \notin \mathbb{Q}$  приближаем квадрат сверху и снизу квадратами с рациональными сторонами и переходим к пределам (по 4 пункту определения).  $\square$

- Площадь прямоугольника со сторонами  $a, b$  равна  $ab$ .

*Доказательство.* Рассмотрим квадрат со стороной  $a + b$ . Его можно разбить на квадрат со стороной  $a$ , квадрат со стороной  $b$  и два нужных нам прямоугольника. Отсюда  $2S = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab \Rightarrow S = ab$ .  $\square$

Отсюда также выводятся формулы площади параллелограмма (перестановкой треугольника из параллелограмма получается прямоугольник) и треугольника (как половины параллелограмма).



**Определение.** Говорят, что параллелограмм натянут на векторы  $\bar{a}, \bar{b}$ , если для одной из вершин  $A$  параллелограмма точки  $A + \bar{a}$  и  $A + \bar{b}$  также являются его вершинами. Площадь параллелограмма, натянутого на векторы  $\bar{a}, \bar{b}$ , обозначается  $S_{\bar{a}, \bar{b}}$ .

**Вывод формулы.** (Площадь параллелограмма в прямоугольной с.к.)

Нам уже известно, что  $S_{\bar{a}, \bar{b}} = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi$  (из выражения высоты параллелограмма через угол). В прямоугольной системе координат:

$$S_{\bar{a}, \bar{b}}^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$$

Если  $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , то  $S_{\bar{a}, \bar{b}}^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2) = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Rightarrow$

$$S_{\bar{a}, \bar{b}} = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right|$$

При этом определитель  $> 0 \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}$  одноимённа с базисом.

**Определение.** Ориентированной площадью параллелограмма, натянутого на  $\bar{a}, \bar{b}$ , на ориентированной плоскости называется число, равное  $S_{\bar{a}, \bar{b}}$ , если пара  $\bar{a}, \bar{b}$  положительно ориентирована, и  $-S_{\bar{a}, \bar{b}}$  иначе. Обозначается  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ .

**Следствие.** В любом положительно ориентированном базисе  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

**Утверждение.** Свойства ориентированной площади:

1.  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{a} \rangle$
2.  $\langle \lambda \bar{a}, \bar{b} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \langle \bar{a}, \lambda \bar{b} \rangle$
3.  $\langle \bar{a} + \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle$   
 $(\langle \bar{a}, \bar{b} + \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle; \langle \bar{a} - \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{c} \rangle - \langle \bar{b}, \bar{c} \rangle)$

*Доказательство.* Следует из свойств определителя. □

## 5 Трёхмерное аффинное пространство

### 5.1 Плоскость в пространстве

**Определение.** Плоскость в (трёхмерном) аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

**Вывод формулы** (Уравнения плоскости). Плоскость  $\pi$  - это множество  $X_0 + V^2$ , где  $X_0$  - точка и  $V^2$  - двумерное векторное подпространство пространства  $V$ , ассоциированного с трёхмерным аффинным пространством. Так как  $\dim V^2 = 2 \Rightarrow$  в нём есть базис  $\bar{a}, \bar{b} \Rightarrow \pi = \{X_0 + u\bar{a} + v\bar{b} : u, v \in \mathbb{R}\}$ . В произвольной системе координат: если  $X_0 = (x_0, y_0, z_0), \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ , то  $\pi$  - мн-во точек с координатами: (**параметрические уравнения плоскости**)

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}$$

Векторы  $\bar{a}, \bar{b}$  называются направляющими векторами плоскости  $\pi$ .  
Выражая параметры  $u, v$ , получим **общее уравнение плоскости**:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (|A| + |B| + |C| \neq 0)$$

**Определение.** Говорят, что вектор  $\bar{a}$  параллелен плоскости  $\pi$  (обозначается  $\bar{a} \parallel \pi$ ), если он выражается через направляющие векторы этой плоскости ( $\Leftrightarrow$  через любой базис ассоциированного с плоскостью векторного пространства).

**Замечание.** Ясно, что  $X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{X_0X} \parallel \pi$  (для любой  $X_0 \in \pi$ ). То же верно и для любой отличной от  $X_0$  точки плоскости:  $\overrightarrow{X_1X} = \overrightarrow{X_1X_0} + \overrightarrow{X_0X}$ , т.е.  $\overrightarrow{X_1X}$  выражается через направляющие векторы  $\Leftrightarrow \overrightarrow{X_0X}$  выражается через направляющие векторы.

## 5.2 Взаимное расположение плоскостей

**Вывод формулы.** Рассмотрим две плоскости, заданные уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Эти плоскости пересекаются  $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$  имеет решения. Матрица коэффициентов системы  $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ , а её расширенная матрица  $(A|B) =$

$\left( \begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array} \right)$ . По теореме Кронекера-Капелли из курса алгебры СЛУ совместна  $\Leftrightarrow rkA = rk(A|B)$ . Так как  $1 \leq rkA \leq 2$ , плоскости не пересекаются

$\Leftrightarrow$  строки  $A$  линейно зависимы ( $rk A = 1$ ), а строки  $(A|B)$  - нет. Таким образом, плоскости не пересекаются  $\Leftrightarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$$

Очевидно, плоскости совпадают  $\Leftarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$$

Докажем, что плоскости совпадают только в этом случае. Пусть плоскости совпадают. Приведём матрицу  $(A|B)$  к ступенчатому виду:  $\left( \begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{array} \right)$  (хотя бы один из коэффициентов первой плоскости  $\neq 0$ , без ограничения общности -  $A_1$ ). Так как плоскости совпадают, любая точка, принадлежащая первой плоскости, принадлежит и второй. Тогда для  $a_{24}$  из принадлежности плоскости  $(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$  следует  $a_{24} = 0$ , для  $a_{22}$  аналогично при  $B \neq 0$ , а при  $B = 0$  - из принадлежности точки  $(-\frac{D_1}{A_1}, 1, 0)$  (для  $a_{23}$  и  $C$  аналогично). Отсюда вторая строка ступенчатой матрицы нулевая, то есть строки  $(A|B)$  пропорциональны, а отсюда плоскости совпадают  $\Leftrightarrow$

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$$

Предположим, что плоскости пересекаются, но не совпадают. Тогда  $rk A = 2$ . Из курса алгебры знаем, что решение такой системы имеет вид  $X_0 + V^1$  (частное решение СЛУ + одномерное пространство решений ОСЛУ). Таким образом:

Плоскости совпадают  $\Leftrightarrow$  их уравнения (со свободными коэффициентами) пропорциональны;

Плоскости параллельны  $\Leftrightarrow$  их уравнения пропорциональны, а свободные члены - нет;

Плоскости пересекаются и не совпадают (их уравнения не пропорциональны)  $\Leftrightarrow$  пересечением плоскостей является множество вида  $X_0 + V^1$ , где  $X_0$  - точка и  $V^1 = \{\lambda \bar{a} : \lambda \in \mathbb{R}\}$  ( $\bar{a}$  - решение ОСЛУ  $AX = 0$ ), т.е. их пересечением является прямая.

### 5.3 Пучки плоскостей

**Определение.** Собственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через данную прямую, называемую центром пучка. Несобственным пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости.

**Теорема.** Пусть плоскости  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда плоскость  $\pi$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow \pi$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Пусть  $\pi$  задаётся уравнением (\*). Тогда, подставив в уравнение  $\pi$  любую точку прямой - центра пучка (назовём её  $l$ ), получим  $\lambda(0) + \mu(0) = 0$  (т.к. центр удовлетворяет уравнениям  $\pi_1, \pi_2$ ).

$\Rightarrow$  Пусть  $l \subset \pi$ . Возьмём произвольную точку  $(x_1, y_1, z_1) \in \pi, (x_1, y_1, z_1) \notin l$ . Рассмотрим плоскость вида (\*) с  $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)$ ,  $\mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) : -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ . Заметим, что это уравнение действительно задаёт плоскость: в противном случае необходимы условия  $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = \lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ , но тогда  $(A_1, B_1, C_1)$  и  $(A_2, B_2, C_2)$  пропорциональны, а исходные плоскости непараллельны. Такой плоскости, очевидно, принадлежат точки  $l$  и  $(x_1, y_1, z_1)$ . Так как через прямую и не лежащую на ней точку проходит ровно одна плоскость (она имеет вид  $\{X_1 + \vec{v} = X_1 + \lambda \overrightarrow{X_1X_2} + \mu \overrightarrow{X_1X_3}\}$ , где  $X_2, X_3$  - произвольные точки на  $l$ ), любая плоскость из собственного пучка имеет вид (\*), ч.т.д.  $\square$

**Теорема.** Пусть плоскости  $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда плоскость  $\pi$  принадлежит пучку  $\Leftrightarrow \pi$  задаётся уравнением  $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$  (\*) для некоторых  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.*

$\Leftarrow$  Так как  $\pi_1 \parallel \pi_2$ ,  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ . Тогда если  $\pi$  имеет вид (\*), то  $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1 + \mu B_2}{B_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \lambda + \frac{\mu C_2}{C_1} = \frac{\lambda C_1 + \mu C_2}{C_1} \Rightarrow \pi \parallel \pi_1$ .

$\Rightarrow$  Пусть  $\pi$  принадлежит пучку. Так как уравнения  $\pi, \pi_1$  и  $\pi_2$  пропорциональны (без свободных коэффициентов), можем домножить их на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть  $\pi_1 : Ax + By + Cz + D'_1 = 0$ ;  $\pi_2 : Ax + By + Cz + D'_2 = 0$ ;  $\pi : Ax + By + Cz + D'_3 = 0$ . Тогда возьмём

$\lambda, \mu$  из следующей системы: 
$$\begin{cases} D'_1\lambda + D'_2\mu = D'_3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{D'_3 - D'_2}{D'_1 - D'_2} \\ \mu = \frac{D'_1 - D'_3}{D'_1 - D'_2} \end{cases} \quad (D'_1 \neq D'_2,$$

иначе  $\pi_1$  и  $\pi_2$  совпадают). Очевидно, что для таких  $\lambda, \mu$  уравнение  $\pi$  имеет вид (\*) (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д.  $\square$

## 5.4 Полупространства

**Определение.** Аналогично прямой на плоскости, каждая плоскость  $\pi$  в пространстве  $V^3$  разбивает множество всех не принадлежащих ей точек пространства на два выпуклых подмножества  $V_1, V_2 : V_1 \cup \pi \cup V_2 = V^3, V_1 \cap V_2 = V_1 \cap \pi = V_2 \cap \pi = \emptyset$ . Такие подмножества называются полупространствами, ограниченными  $\pi$  и определяются однозначно с точностью до обозначения.

Также можем определить полупространства следующим образом: возьмём произвольную точку  $X \notin \pi$  и скажем, что  $V_1 = \{Y \in V^3 : [X, Y] \cap \pi = \emptyset\}$ , а затем выберем  $X' \notin \pi \cup V_1$  (такая точка всегда будет существовать) и определим  $V_2 = \{Y' \in V^3 : [X', Y'] \cap \pi = \emptyset\}$ .

**Утверждение.** Так определённые множества являются полупространствами и не зависят от выбора точек  $X, X'$

*Доказательство.* (Аналогично случаю прямой) Введём любую систему координат. Тогда полупространства  $V^\pm = \{X(x, y, z) : Ax + By + Cz + D \gtrless 0\}$ . Рассмотрим  $V^+$  (остальные аналогично).

Пусть  $X_1(x_1, y_1, z_1), X_2(x_2, y_2, z_2) \in V^+$ . Знаем, что любая точка  $X \in [X_1, X_2]$  имеет координаты  $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2), 0 \leq t \leq 1$ . Тогда:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \geq 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tCz_1 + D \geq 0 \\ (1-t)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C(tz_1 + (1-t)z_2) + D \geq 0 \Rightarrow X \in V^+.$$

Таким образом, для  $X_1, X_2 \in V^+ \quad [X_1, X_2] \subset V^+$  из доказанной выше выпуклости, а для точек  $X_1 \in V^+, X_2 \in V^-$  точку пересечения  $[X_1, X_2]$  и  $\pi$  можно найти явно, но её существование очевидно.  $\square$

## 6 Прямая в пространстве

### 6.1 Уравнения прямой в пространстве

**Вывод формул.** (Уравнения прямой) Пусть  $l$  - прямая в пространстве:  $l = \{X_0 + t\bar{c}\}$ , где  $X_0$  - точка прямой,  $\bar{c}$  - её направляющий вектор. Если  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ , то координаты точек на прямой выражаются следующим

образом: (параметрические уравнения прямой)

$$X \in l : \begin{cases} x = x_0 + tc_1 \\ y = y_0 + tc_2 \\ z = z_0 + tc_3 \end{cases}$$

Выразим  $t$  из всех уравнений и приравняем - получим **каноническое уравнение прямой**:

$$\frac{x - x_0}{c_1} = \frac{y - y_0}{c_2} = \frac{z - z_0}{c_3}$$

Если известно, что прямой принадлежат  $X_0 = (x_0, y_0, z_0), X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , то

$\overrightarrow{X_0X_1} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$  - направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет

следующий вид (уравнение прямой по двум точкам)

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

**Следствие.** Любая прямая является пересечением двух плоскостей. (Видно из канонического уравнения: например, плоскостей  $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$  и  $\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$ )

## 6.2 Взаимное расположение прямой и плоскости

**Вывод формул.** (Случаи расположения) Пусть  $l = \{X_0 + t\bar{c} : t \in \mathbb{R}\}, \pi = \{X_1 + u\bar{a} + v\bar{b}\}$ . Уже знаем, что для любых других точек прямой и плоскости верны те же выражения множеств точек.

Предположим, что прямая и плоскость пересекаются хотя бы в двух точках: пусть  $X_0, X_1$  - их различные общие точки. Имеем  $\overrightarrow{X_0X_1} = t_0\bar{c} = u_0\bar{a} + v_0\bar{b}$  (для некоторых  $t_0 \neq 0, u_0, v_0$ , из принадлежности точек и прямой, и плоскости). Отсюда  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$ , а значит для любой  $X \in l : X = X_0 + t\bar{c} = X_0 + t(\frac{u_0}{t_0}\bar{a} + \frac{v_0}{t_0}\bar{b}) \in \pi$ . Таким образом,

$l, \pi$  имеют 2 точки пересечения  $\Leftrightarrow l \subset \pi \Leftrightarrow l \cap \pi \neq \emptyset$ ,  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$

Заметим, что  $X \in l \cap \pi \Leftrightarrow X = X_0 + t_0\bar{c} = X_1 + u_0\bar{a} + v_0\bar{b} \Rightarrow \overrightarrow{X_0X_1} = u_0\bar{a} + v_0\bar{b} - t_0\bar{c}$ . В случае некомпланарности  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  вектор  $\overrightarrow{X_0X_1}$  выражается через них единственным образом, то есть точка пересечения есть и единственная, т.е.

$l, \pi$  имеют одну т. пересечения  $\Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  линейно независимы

(В случае, если  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b}$ :  $l, \pi$  имеют общую точку  $\Rightarrow l \subset \pi$ , поэтому т. пересечения одна только в этом случае)

**Следствие.**  $\bar{c}$  выражается через  $\bar{a}, \bar{b} \Leftrightarrow$  либо  $l \subset \pi$ , либо  $l \cap \pi = \emptyset$  (в этом случае говорят, что **прямая параллельна плоскости**)

$\bar{c}$  не выражается через  $\bar{a}, \bar{b} \Leftrightarrow l \cap \pi$  - одна точка.

### 6.3 Взаимное расположение двух прямых

**Определение.** Прямые  $l_1, l_2$  в пространстве называются параллельными, если они либо совпадают, либо лежат в одной плоскости и не пересекаются.

**Определение.** Прямые  $l_1, l_2$  в пространстве скрещиваются, если они не пересекаются и не параллельны.

**Замечание.** Если прямые  $l_1, l_2$  с направляющими векторами  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  пересекаются в точке  $X_0$  и не совпадают, то  $\bar{c}_1 \nparallel \bar{c}_2$  и  $l_1, l_2 \subset \pi = \{X_0 + u\bar{c}_1 + v\bar{c}_2 : u, v \in \mathbb{R}\}$ . Отсюда прямые скрещиваются  $\Leftrightarrow$  они не лежат в одной плоскости.

Если направляющие векторы  $\bar{c}_1, \bar{c}_2$  прямых  $l_1, l_2$  коллинеарны, то прямые либо параллельны, либо совпадают.

**Следствие.** Прямые  $l_1, l_2$  скрещиваются  $\Leftrightarrow$  они не пересекаются и  $c_1 \nparallel c_2$ .  
 $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow c_1 \parallel c_2$  (иначе прямые либо скрещиваются, либо пересекаются).

## 7 Плоскость в точечно-евклидовом пр-ве.

**Определение.** Пусть  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$  в прямоугольной с.к. Вектор  $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  называется нормалью (нормальным вектором) к плоскости  $\pi$ .

**Следствие.** Вектор нормали  $\bar{n}$  к плоскости  $\pi$  ортогонален любому вектору из  $\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $X_0 = (x_0, y_0, z_0), X_1 = (x_1, y_1, z_1), X_0, X_1 \in \pi \Rightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0$  (вектор  $\overrightarrow{X_0X_1} \parallel \pi$ ). Данное выражение также означает, что  $\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \overrightarrow{X_0X_1}$ . □

**Следствие.** Зная вектор нормали, направляющие векторы плоскости можно найти как любые два неколлинеарных вектора, ортогональных нормали.

## 7.1 Расстояния

**Вывод формулы.** (Расстояние от точки до плоскости)

$d(X_0, \pi) = \inf\{|\overrightarrow{X_0 Y}| : Y \in \pi\}$ . Из теоремы Пифагора (аналогично расстоянию от точки до прямой) следует, что это расстояние - длина отрезка перпендикуляра к  $\pi$ , проходящего через  $X_0$ , заключённого между  $X_0$  и  $\pi$  (только в прямоугольной с.к.!) Найдём это расстояние. Перпендикуляр к  $\pi$  через точку  $X_0$  имеет направляющий вектор  $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$  и проходит через  $(x_0, y_0, z_0)$ , т.е.

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tA \\ y = y_0 + tB \\ z = z_0 + tC \end{cases} \quad . \text{ Точка пересечения } l \text{ и } \pi:$$

$$A(x_0 + tA) + B(y_0 + tB) + C(z_0 + tC) + D = 0 \Rightarrow t = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2},$$

квадрат расстояния от  $X_0$  до неё равен  $(tA)^2 + (tB)^2 + (tC)^2 = \left(\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$

$$\Rightarrow d(X_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Величина расстояния от прямой  $l$  до плоскости  $\pi$  в пространстве имеет смысл только при  $l \parallel \pi$ . Пусть  $\bar{a}$  - направляющий вектор  $l$  и  $\bar{n}$  - нормаль к  $\pi$ . Проведём плоскость  $\pi'$  через  $l$  с направляющими векторами  $\bar{a}, \bar{n}$ . Тогда все перпендикуляры, опущенные из точки прямой  $l$  на  $\pi$ , будут лежать в  $\pi'$ . Кроме того, их основания будут лежать на  $l' = \pi \cap \pi'$ , а отсюда расстояния от всех точек  $l$  до  $\pi$  одинаковы. Поэтому **расстояние от прямой до плоскости, параллельной ей, равно расстоянию от любой точки прямой до плоскости.**

**Вывод формулы.** (Расстояние от точки до прямой)

Пусть в прямоугольной с.к. даны  $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$  - точка и  $l$  - прямая, проходящая через  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ .

(ВОЗМОЖНО, ЗДЕСЬ БУДЕТ ЧЕРТЁЖ)

$$d(X_1, l) = |X_0 X_1| \cdot \sin \varphi \text{ (угол между } \overrightarrow{X_0 X_1} \text{ и } l) = |X_0 X_1| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} \Rightarrow d(X_1, l)^2 = (\text{после раскрытия скобок})$$

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - \frac{(a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0))^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$



**Вывод формулы.** (Расстояние между скрещивающимися прямыми)

Пусть  $l_1, l_2$  - скрещивающиеся прямые с направляющими векторами  $\bar{a}, \bar{b}$  соотв.,  $X_1 \in l_1, X_2 \in l_2$ . Из уже известных нам соображений расстояние между  $X_1$  и  $X_2$  минимально в случае, если  $\overrightarrow{X_1 X_2} \perp l_1, l_2$ .

Покажем существование таких  $X_1, X_2$ : построим плоскость  $\pi$  через  $l_1$  с направляющими векторами  $\bar{a}, \bar{b}$  и построим перпендикуляры из точек  $l_2$  на  $\pi$ . Их основания лежат на некоторой прямой  $l \parallel l_2$ , причём  $l_1 \nparallel l$ , потому что иначе  $l_1 \parallel l_2$ . Значит, существует точка пересечения  $l_1$  и  $l$ , а следовательно существует перпендикуляр из точки  $l_2$  на  $\pi$ , основание которого лежит на  $l_1$ , т.е. этот перпендикуляр общий для  $l_1, l_2$ .

Тогда для произвольных  $X_1, X_2$  на прямых  $d(l_1, l_2) = d(l_2, \pi)$  - длина перпендикуляра, опущенного на  $\pi$  из любой точки  $l_2$  = высота параллелепипеда, построенного на векторах  $\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_1 X_2} \Rightarrow$

$$d(l_1, l_2) = \frac{V_{\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_1 X_2}}}{S_{\bar{a}, \bar{b}}}$$

Осталось только получить формулы для объёма.

## 7.2 Векторное и смешанное произведение. Объём

**Определение.** Векторным произведением неколлинеарных векторов  $\bar{a}, \bar{b}$  в ориентированном трёхмерном точечно-евклидовом пространстве называется вектор  $\bar{v}$  такой, что

1.  $|\bar{v}| = S_{\bar{a}, \bar{b}} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ ;
2.  $\bar{v} \perp \bar{a}, \bar{v} \perp \bar{b}$ ;
3. Тройка  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{v}$  имеет положительную ориентацию.

Обозначается  $[\bar{a}, \bar{b}]$ .

Для  $\bar{a} \parallel \bar{b}$   $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$ .

Обычный объём определяется полностью аналогично площади на плоскости. Из свойств выводится, что объём параллелепипеда, натянутого на векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  (т.е. для его вершины  $X_0$  его вершинами также являются  $X_0 + \bar{a}, X_0 + \bar{b}, X_0 + \bar{c}$ ), равен  $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \cdot h$ , где  $h = \bar{c} \cdot \sin \varphi$  - высота параллелепипеда  $\varphi$  - угол между  $\bar{c}$  и плоскостью  $X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$ . Запишем  $\varphi$  как  $\frac{\pi}{2} - \psi$ , где  $\psi$  - угол между  $\bar{c}$  и нормалью к плоскости  $X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$ . Отсюда:

$$h = |\bar{c} \cdot \cos \psi| = \left| \frac{(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])}{|\bar{c}| |[\bar{a}, \bar{b}]|} \cdot \bar{c} \right| = \frac{|(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|} = \frac{|(\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}])|}{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle} \Rightarrow V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = |([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})|$$

Определим ориентацию тройки  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ : рассмотрим базис  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{n}$ . В нём  $\bar{c}$  имеет координаты  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ (\cos \psi)|\bar{c}| \end{pmatrix}$  ( $c_1, c_2$  неважны), т.е. матрица перехода от этого базиса к  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  равна  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & (\cos \psi)|\bar{c}| \end{pmatrix}$ . Её определитель  $> 0 \Leftrightarrow \cos \psi > 0 \Leftrightarrow ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) > 0$ . Отсюда  $[\bar{a}, \bar{b}], \bar{c} > 0 \Leftrightarrow$  тройка  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  положительно ориентирована.

**Определение.** Ориентированным объёмом параллелепипеда, натянутого на векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ , называется число  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$ . Также это число называется смешанным произведением векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

**Следствие.**  $V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = |\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle|$ ;  
 $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} \Leftrightarrow \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  положительно ориентирована.

**Утверждение.** (Свойства смешанного произведения: )

1.  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{a}, \bar{c} \rangle = -\langle \bar{a}, \bar{c}, \bar{b} \rangle = -\langle \bar{c}, \bar{b}, \bar{a} \rangle$  (очев);
2.  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 + \bar{c}_2 \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1 \rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_2 \rangle$ ;
3.  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \lambda \bar{c} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ ;
4.  $\langle \bar{a}, \bar{b}_1 + \bar{b}_2, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b}_1, \bar{c} \rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}_2, \bar{c} \rangle$ ;
5.  $\langle \bar{a}, \lambda \bar{b}, \bar{c} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ ;
6.  $\langle \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \langle \bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c} \rangle + \langle \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ ;
7.  $\langle \lambda \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \lambda \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle$ ;
8.  $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = 1$  ( $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  - ортонормированный базис)

①, ⑧ - очев, ②, ③ - из свойств скалярного произведения, ④—⑦ получаются из ②, ③ с помощью ①.

### 7.3 Векторное и смешанное произведение в ортонормированном базисе

Пусть  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  - ортонормированный положительно ориентированный базис. В курсе алгебры доказывается, что единственная функция от строк (столбцов)  $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3), \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$  со свойствами ①—⑧ (полилинейность, кососимметричность, единица в  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ ) - определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (\text{или} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix})$$

Следовательно,  $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, V_{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right|$  (модуль).

**Вывод формулы.** (Векторное произведение в прямоугольной с.к.)

Знаем, что в ортонормированном базисе вектор  $\bar{x}$  имеет координаты

$$x = (\bar{x}, \bar{e}_1), \quad y = (\bar{x}, \bar{e}_2), \quad z = (\bar{x}, \bar{e}_3)$$

Вычислим:  $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{e}_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$

Аналогично  $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{e}_2) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \quad ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$  Данную формулу обычно записывают в виде определителя:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(не является определителем по сути, но считается по той же формуле)

**Замечание.** Прямые  $l_1 = X_1 + t\bar{a}, l_2 = X_2 + t\bar{b}$  скрещиваются  $\Leftrightarrow \langle \overrightarrow{X_1 X_2}, \bar{a}, \bar{b} \rangle \neq 0.$

## 7.4 Расстояния через векторное произведение

Расстояние от точки  $X_1$  до прямой  $l : X = X_0 + t\bar{a}$  - высота параллелограмма, натянутого на  $\bar{a}, \overrightarrow{X_0 X_1} = \frac{|S_{\bar{a}, \overrightarrow{X_0 X_1}}|}{|\bar{a}|} \Rightarrow$

$$d(X, l) = \frac{|[\overrightarrow{X_0 X_1}, \bar{a}]|}{|\bar{a}|}$$

Расстояние от точки  $X_1$  до прямой  $\pi : X = X_0 + u\bar{a} + v\bar{b}$  - высота параллелограмма, натянутого на  $\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_0 X_1} = \frac{|V_{\bar{a}, \bar{b}, \overrightarrow{X_0 X_1}}|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|} \Rightarrow$

$$d(X, \pi) = \frac{|[\overrightarrow{X_0 X_1}, \bar{a}, \bar{b}]|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|}$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми  $l_1 = X_1 + t\bar{a}$ ,  $l_2 = X_2 + t\bar{b}$ :

$$d(l_1, l_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{X_1 X_2}, \bar{a}, \bar{b} \rangle|}{|[\bar{a}, \bar{b}]|}$$

(так как равно расстоянию от точки первой прямой до плоскости, параллельной первой прямой и проходящей через вторую)

**Определение.** Углом между плоскостями называется угол между их нормальными.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её ортогональной проекцией на плоскость ( $= \frac{\pi}{2} - \angle(l, \bar{n})$ )

## 8 Линии второго порядка

### 8.1 Определения

Далее рассматриваем аффинную систему координат на плоскости (как на аффинном или точечно-евклидовом пространстве).

**Определение.** Линией первого порядка называется множество точек  $\{(x, y) : Ax + By + C = 0\}$ , где  $A, B, C$  - вещественные числа и хотя бы одно из чисел  $A, B$  не равно нулю. Другими словами, это множество точек, координаты которых удовлетворяют фиксированному уравнению первой степени.

(Это прямая)

**Определение.** Линией второго порядка (кривой второго порядка) называется множество точек, координаты которых (в некоторой аффинной системе координат) удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = 0$ , где

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$  - некоторые фиксированные числа и хотя бы одно из чисел  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ . Выражение для  $F(x, y)$  называется многочленом второй степени от переменных  $x, y$ . Уравнение  $F(x, y) = 0$  называется общим уравнением линии второго порядка.

**Определение.** Многочлен  $F(x, y)$  ставит в соответствие каждой паре чисел  $(x, y)$  некоторое вещественное число. С ним связано отображение  $f : \pi \rightarrow \mathbb{R}$  (вместо пары чисел  $f$  сопоставляет точку плоскости с такими координатами в заданной с.к.) Отображение  $f$  называется квадратичным отображением, представленным многочленом  $F$ .

**Замечание.** Соответствие  $F \leftrightarrow f$  взаимно однозначно.

(Каждая точка однозначно определяется своими координатами  $\Rightarrow f$  однозначно определяется  $F$ ; подставив в общую формулу для  $F(x, y)$  координаты шести различных точек, однозначно определим коэффициенты  $\Rightarrow F$  однозначно определяется  $f$ ).

**Определение.** Квадратичная часть  $F_1(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  многочлена  $F(x, y)$  называется его квадратичной формой.

**Определение.** Линия второго порядка в заданной системе координат однозначно определяется матрицей коэффициентов  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ . Она называется большой матрицей линии второго порядка.

**Определение.** Квадратичная форма линии второго порядка в заданной системе координат однозначно определяется матрицей коэффициентов  $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ . Она называется малой матрицей линии второго порядка.

Имеют место равенства (несложно проверить):

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad F_1(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

В прямоугольной системе координат на евклидовой плоскости также имеет место следующее равенство (из выражения скалярного произведения):

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0$$

## 8.2 Связь уравнений линий второго порядка в разных с.к.

Далее работаем в прямоугольной системе координат. Цель - избавиться от слагаемого с  $xy$ , т.е. перейти в такую прямоугольную систему координат, что  $A_1$  в ней - диагональная.

(Для произвольных аффинных систем координат задача упрощения уравнения простая - можно выделить полный квадрат в квадратичной форме и заменой избавиться сначала от члена с  $xy$ , а затем и от линейных членов за исключением нескольких простых случаев)

Сначала будем изменять только базис. Пусть старая система координат задана репером  $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ , новая -  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$  и  $C$  - матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда старые координаты радиус-вектора точки  $X = (x, y)$  выражаются через новые  $(x', y')$  так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T$$

Очевидно, многочлен линии второго порядка изменится, хоть линия и не меняется как множество точек. Назовём новый многочлен, полученный подстановкой новых координат в старый многочлен,  $F'$ . Тогда:

$$\begin{aligned} F'(x', y') &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T \cdot A_1 \cdot C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + a_0 = \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \cdot A'_1 \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} + a_0 \end{aligned}$$

где  $A'_1 = C^T A C$  и  $\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ .

Далее прямой подсчет показывает, что большая матрица изменяется так:

$$A' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь изменим ещё и начало координат. Тогда:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ где } D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Подставляя в выражение  $F(x, y)$ , получим:

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} x' & y' & 1 \end{pmatrix} D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } A' = D^T A D.$$

Несложно проверить, что при такой замене также верно равенство  $A'_1 = C^T A C$ .

Итак, найдём необходимую матрицу  $C$ . Она должна являться матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому, т.е. она по определению ортогональна. Таким образом, необходимо найти такие векторы  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$  (новый базис), что:

1.  $\vec{e}'_1 \perp \vec{e}'_2$ ;
2.  $|\vec{e}'_1| = |\vec{e}'_2| = 1$ ;
3. Если  $\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ , то матрица  $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  - искомая матрица  $C$ .  
Она уже будет ортогональной, т.е. достаточно условия, что  $A'_1 = C^T A_1 C$  - диагональная (пусть равна  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ).

$$A'_1 = C^{-1} A_1 C \Leftrightarrow A_1 C = C A'_1 \Leftrightarrow A_1 \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \\ A_1 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \end{cases}, \text{ т.е. } A_1 \vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{e}_1 \text{ и } A_1 \vec{e}_2 = \lambda_2 \vec{e}_2.$$

Найдём ненулевые  $\vec{x}$ , для которых существует  $\lambda$ :  $A_1 \vec{x} = \lambda \vec{x}$ , т.е.  $(A_1 - \lambda E) \vec{x} = \vec{0}$ . Это уравнение относительно  $\vec{x}$  имеет нетривиальное решение  $\Leftrightarrow |A_1 - \lambda E| = 0$  (из курса алгебры). Это квадратное уравнение относительно  $\lambda$  (оно называется **характеристическим многочленом линии второго порядка**) :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$$\mathcal{D} = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

то есть уравнение всегда имеет решения.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2$  - корни этого уравнения (возможно, совпадающие). Занумеруем их так: если они разных знаков, то  $\lambda_1$  - положительный корень, а если одного знака, то  $\lambda_1$  - меньший по модулю корень.

Из построения  $\lambda_1, \lambda_2$  следует, что существуют  $\vec{a}, \vec{b}$  такие, что  $A_1 \vec{a} = \lambda_1 \vec{a}$ ,  $A_1 \vec{b} = \lambda_2 \vec{b}$  (они называются собственными векторами матрицы  $A_1$ , соответствующими собственным значениям  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно)

Рассмотрим случаи:

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Пусть  $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . Из того, что матрица  $A$  симметричная и изначальная система координат прямоугольная, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\bar{a}, \bar{b}) &= (\lambda_1 \bar{a}, \bar{b}) = (A_1 \bar{a}, \bar{b}) = (A_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix})^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\bar{a}, A_1 \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda_2 \bar{b}) = \lambda_2(\bar{a}, \bar{b}) \end{aligned}$$

Притом  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , а значит  $(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ . Тогда система координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где  $\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \bar{e}_2 = \pm \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$  является прямоугольной, причём  $A'_1$  в ней - диагональная  $(= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix})$ , что мы и хотели получить (можем выбрать знаки так, что ориентация положительна).

2.  $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ .

Найдём  $\bar{a}$  такой, что  $A_1 \bar{a} = \lambda \bar{a}$ . Возьмём ненулевой вектор  $\bar{b}$ , ортогональный  $\bar{a}$ . Пусть  $\bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ . Тогда:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow (A_1 \bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}) = 0$$

С другой стороны,

$$(A_1 \bar{a}, \bar{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (\bar{a}, A_1 \bar{b}) \Rightarrow \bar{a} \perp A_1 \bar{b}$$

Отсюда  $A_1 \bar{b}$  пропорционален  $\bar{b}$ , т.е.  $A_1 \bar{b} = \lambda' \bar{b}$ . А так как уже знаем, что такое уравнение имеет решение только при  $\lambda' = \lambda$ , получаем, что для любого  $\bar{b} \perp \bar{a}$  верно  $A_1 \bar{b} = \lambda \bar{b}$ . Тогда подойдёт система координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где  $\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}, \bar{e}_2 = \pm \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$  (знак для положительной ориентации).

Итак, для любого случая нашли прямоугольную систему координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , в которой уравнение линии имеет вид:

$$F'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0$$

Вновь рассмотрим случаи:

1.  $\lambda_1 \neq 0$



Тогда из нашей нумерации и  $\lambda_2 \neq 0$ . Можем выделить полные квадраты:  $x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$ ,  $y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$  и перейти к системе координат  $O''\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где  $O'' = (\frac{a'_1}{\lambda_1}, \frac{a'_2}{\lambda_2})$  в системе координат  $O\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ . Получим уравнение:

$$\lambda_1(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}) + a_0 - \frac{a'^2_1}{\lambda_1} - \frac{a'^2_2}{\lambda_2} = 0$$

то есть в новейших координатах уравнение имеет вид  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = C$ . Если  $\lambda_1 > 0, C > 0$ , разделим на  $C$  и получим уравнение вида

$$\frac{x''^2}{a^2} \pm \frac{y''^2}{b^2} = 1 - \text{эллипс (если +) или гипербола (если -)}$$

Если  $\lambda_1 > 0, C < 0$ , посмотрим на  $\lambda_2$ :

Если  $\lambda_2 > 0$ , разделим на  $-C$  и получим

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1 - \text{пустое множество (уравнение мнимого эллипса)}$$

Если  $\lambda_2 < 0$ , разделим на  $-C$  и ещё раз заменим координаты, поменяв местами  $x$  и  $y$  (также надо развернуть одну из осей, чтобы сохранить ориентацию, поэтому матрица перехода имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ). Получим снова

$$\frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 1 - \text{гипербола}$$

Случаи с  $\lambda_1 < 0, C \neq 0$  рассматриваются аналогично - либо гипербола, либо эллипс, либо мнимый эллипс.

Если  $C = 0$  и  $\lambda_1, \lambda_2$  одного знака, то уравнение имеет вид (с точностью до домножения на -1):

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0 - \text{одна точка (пара мнимых пересекающихся прямых)}$$

Если  $C = 0$  и  $\lambda_1, \lambda_2$  разных знаков, то уравнение имеет вид (с точностью до домножения на -1):

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 - \text{пара пересекающихся прямых}$$

2.  $\lambda_1 = 0$ . Тогда  $\lambda_2 \neq 0$  (иначе уравнение не второго порядка).

$$F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a_0 = 0$$

Если  $a'_1 \neq 0$ , то выделением полного квадрата избавимся от члена с  $y$  и сдвигом по оси  $Ox$  избавимся от константы:  $x'' = x' + \frac{a_0}{2a'_1} - \frac{a'_2{}^2}{2a'_1\lambda_2}$ ,  $y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}$ . Получим уравнение  $\lambda_2 y''^2 + 2a'_1 x'' = 0$ , т.е.  $\lambda_2 y''^2 = -2a'_1 x''$ . Можем сделать  $\lambda_2$  и  $a'_1$  разного знака: если одного, заменим  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ . Поделив на  $\lambda_2$ , получим

$$y''^2 = 2px (p > 0) - \text{парабола}$$

Если  $a'_1 = 0$ , то  $F'(x', y') = \lambda_2 y'^2 + 2a'_2 y' + a_0 = 0$ , т.е.  $\lambda_2 y''^2 + C = 0$ . Поделив на  $\lambda_2$ , получим один из следующих случаев:

$$\begin{aligned} y''^2 + a^2 = 0 & - \text{пара мнимых параллельных прямых} \\ y''^2 - a^2 = 0 & - \text{пара параллельных прямых} \\ y''^2 = 0 & - \text{пара совпадающих прямых} \end{aligned}$$

Сформулируем то, что получили:

**Теорема.** (Классификация линий второго порядка)

Для любой линии второго порядка прямоугольная система координат (она называется канонической системой координат) такая, что в ней линия имеет один из следующих видов:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (эллипс);
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$  (мнимый эллипс);
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  (пара мнимых пересекающихся прямых);
4.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  (гипербола);
5.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  (пара пересекающихся прямых);
6.  $y^2 = 2px$  (парабола);
7.  $y^2 - a^2 = 0$  (пара параллельных прямых);
8.  $y^2 + a^2 = 0$  (пара мнимых параллельных прямых);
9.  $y^2 = 0$  (пара совпадающих прямых).

### 8.3 Ортогональные инварианты

Пусть линия второго порядка задана в прямоугольной системе координат формулой  $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ ,  $A$  - её большая матрица,  $A_1$  - малая матрица. При переходе к новой прямоугольной системе координат:

$$A' = D^T A D, D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A'_1 = C^T A C$$

( $C$  - матрица перехода,  $x_0, y_0$  - новое начало отсчёта)

При таком преобразовании не меняются:

1.  $\Delta = |A|$  (т.к.  $|D| = |D^T| = |D^{-1}| = \pm 1$ );
2.  $\delta = |A_1|$  (аналогично);
3.  $|A_1 - \lambda E|$ ;
4.  $S = a_{11} + a_{22}$ . (нетрудно проверить)

Заметим, что инварианты изменяются при домножении уравнения на число, но не меняются знаки  $\delta$  и  $\Delta \cdot S$ .

Запишем большие матрицы канонических уравнений:

1.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (эллипс) -  $\delta > 0, \Delta S < 0$ ;
2.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (мнимый эллипс) -  $\delta > 0, \Delta S > 0$ ;
3.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара мнимых пересекающихся прямых) -  $\delta > 0, \Delta S = 0$ ;
4.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (гипербола) -  $\delta < 0, \Delta S \neq 0$ ;

5.  $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара пересекающихся прямых) -  $\delta < 0, \Delta S = 0$ ;
6.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p \\ 0 & 1 & 0 \\ -2p & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (парабола) -  $\delta = 0, \Delta S \neq 0$ ;
7.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$  (пара параллельных прямых) -  $\delta = \Delta = 0$ ;
8.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$  (пара мнимых параллельных прямых) -  $\delta = \Delta = 0$ ;
9.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара совпадающих прямых) -  $\delta = \Delta = 0$ ;

Итак, разберём случаи знаков ортогональных инвариантов:

1.  $\delta \neq 0$  - центральный случай (кривые 1-5):  $\delta > 0 \Rightarrow$  либо эллипс ( $\Delta S < 0$ ), либо мнимый эллипс ( $\Delta S > 0$ ), либо пара мнимых пересекающихся прямых ( $\Delta S = 0$ );  
 $\delta < 0 \Rightarrow$  либо гипербола ( $\Delta \neq 0$ ), либо пара пересекающихся прямых ( $\Delta = 0$ );
2.  $\delta = 0$  - параболический случай (кривые 6-9):  $\Delta \neq 0$  - парабола;  $\Delta = 0$  - кривые 7-9 (чтобы различить их, понадобится семиинвариант, речь о котором пойдёт далее).

Для последнего случая необходим семиинвариант:  $K = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}$ .

**Утверждение.**  $K$  не изменяется при замене базиса (без сдвига)

*Доказательство.*

$$K = (a_{11} + a_{22})a_0 - a_1^2 - a_2^2 = S \cdot a_0 - |\bar{a}|^2$$

При переходе к новому ортонормированному базису  $a_0$  не изменяется (очев.),  $S$  не изменяется (инвариант), а  $\bar{a}$  умножается на транспонированную матрицу

перехода, которую можно представить в виде матрицы поворота на некоторый угол (см. Билет 23), т.е.  $|\bar{a}|$  не изменяется.  $\square$

**Утверждение.** В случае  $\delta = \Delta = 0$   $K$  не изменяется и при сдвиге.

*Доказательство.* Пусть уравнение кривой  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$  задано в прямоугольной системе координат. Доказали, что существует прямоугольная система координат с тем же началом, в которой данная линия задаётся уравнением  $\lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2 + a'_1x' + a'_2y' + a_0$ , и притом  $K$  не изменяется при этом переходе. Из условия  $\delta = 0$  следует, что  $\lambda_1\lambda_2 = 0$ . Пусть  $\lambda_1 = 0$  (в силу

нашей нумерации). Тогда большая матрица имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_1 \\ 0 & \lambda_2 & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a_0 \end{pmatrix}$ . Из условия

$\Delta = 0$  имеем  $\lambda_2a_1'^2 = 0$ . Причём знаем, что  $\lambda_2 \neq 0$  (иначе линия не является линией второго порядка), то есть  $a'_1 = 0$ . Тогда подстановкой получим, что  $K = Sa_0 - |\bar{a}|^2 = \lambda_2a_0 - a_2'^2$ . Заменим начало координат:  $x' = x'' + x_0, y' = y'' + y_0$ . Подставим в уравнение линии:

$$\begin{aligned} \lambda_2(y'' + y_0)^2 + 2a'_2(y'' + y_0) + a_0 &= \lambda_2y''^2 + 2(\lambda_2y_0 + a'_2)y'' + \lambda_2y_0^2 + 2a'_2y_0 + a_0 \Rightarrow \\ K' &= \lambda_2(\lambda_2y_0^2 + 2a'_2y_0 + a_0) - (\lambda_2y_0 + a'_2)^2 = \\ &= \lambda_2^2y_0^2 + 2\lambda_2a'_2y_0 + \lambda_2a_0 - \lambda_2^2y_0^2 - 2\lambda_2a'_2y_0 - a_2'^2 = \lambda_2a_0 - a_2'^2 = K \end{aligned}$$

Отсюда  $K' = K$ , ч.т.д.  $\square$

Тогда в случае  $\delta = \Delta = 0$ :

1.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$  (пара параллельных прямых) -  $K < 0$ ;
2.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$  (пара мнимых параллельных прямых) -  $K > 0$ ;
3.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (пара совпадающих прямых) -  $K = 0$ ;

Отсюда получаем во-первых единственность канонического уравнения линии второго порядка (из инвариантности однозначно определяющих её величин), а также алгоритм определения линии по значениям инвариантов в её большой матрице:

$\delta \neq 0$					$\delta = 0$			
$\delta > 0$			$\delta \neq 0$		$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$		
$\Delta S < 0$	$\Delta S > 0$	$\Delta S = 0$	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$		$K < 0$	$K > 0$	$K = 0$
эллипс	мн. эллипс	мн. $\times$	гипербола	$\times$	парабола	$\parallel$	мн. $\parallel$	совп. $ $

## 8.4 Центр линии второго порядка

**Определение.** Точка  $X_1$  называется симметричной точке  $X_2$  относительно точки  $O$ , если  $O$  - середина отрезка  $[X_1X_2]$

**Определение.** Точка  $O$  называется центром симметрии множества точек  $M$  (на плоскости), если для любой точки  $X$  из  $M$  точка, симметричная  $X$  относительно  $O$ , также принадлежит  $M$ .

**Лемма.** Координаты точки  $X(x_1, y_1)$  удовлетворяют или не удовлетворяют системе 
$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$
 независимо от того, в какой аффинной системе координат записано уравнение и координаты.

*Доказательство.*  $(x_1, y_1)$  удовлетворяет  $(*) \Rightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ , где  $\alpha = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_1$ . Тогда в другой системе координат, переход к которой задан матрицей  $D = \begin{pmatrix} C & x_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , имеем  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $A' = D^T A D \Rightarrow A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T A D \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ . Отсюда в новой системе координат для координат точки  $X$  эта система уравнений также выполнена.  $\square$

**Теорема.** Пусть непустая линия второго порядка задана в некоторой системе координат (не обязательно прямоугольной) уравнением  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ . Точка  $O = (x_0, y_0)$  является центром симметрии этой линии  $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$

*Доказательство.*

$\Rightarrow$  Сдвинем начало координат в точку  $O : x = x' + x_0, y = y' + y_0$  и получим

новое уравнение:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0$$

Так как для этой системы координат точка  $(0, 0)$  в этой системе координат является центром симметрии линии, если ей принадлежит точка  $(x'_1, y'_1)$ , то принадлежит и точка  $(-x'_1, -y'_1)$ . Подставим точку  $(-x'_1, -y'_1)$ :

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 - 2a'_1x' - 2a'_2y' + a'_0 = 0$$

Вычитая это уравнение из уравнения для точки  $(x'_1, y'_1)$ , получим:

$$4(a'_1x' + a'_2y') = 0 \Rightarrow a'_1x' + a'_2y' = 0$$

для любой точки  $(x_1, y_1)$  линии. Получаем следующее:

Либо  $a'_1 = a'_2 = 0$  (тогда уравнение верно всегда), либо все точки линии удовлетворяют уравнению прямой  $a'_1x' + a'_2y' = 0$ . (\*)

При этом можем выразить  $a'_1$  и  $a'_2$  через коэффициенты старого уравнения -

получим  $\begin{cases} a'_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a'_2 = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \end{cases}$ . Из рассуждений выше либо  $a'_1 = a'_2 = 0$ ,

то есть теорема верна, либо все точки линии лежат на одной прямой - для непустых линий второго порядка это возможно только в случае точки (пара мнимых пересекающихся прямых) или совпадающих прямых, а у этих линий каждая точка является центром симметрии.

$\Leftarrow$  Сдвинем начало координат в точку  $O : x = x' + x_0, y = y' + y_0$ . В новой системе получим новое уравнение:

$$F'(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + C_0 = 0$$

так как коэффициенты перед  $x', y'$  получаются равными нулю из системы. Очевидно, что это уравнение симметрично относительно начала координат.  $\square$

**Следствие.** В центральном случае для непустой линии второго порядка (не мнимый эллипс) центр симметрии единственный.

*Доказательство.* Центральный случай  $\Rightarrow \delta \neq 0 \Rightarrow$  система имеет единственное решение.

(Решение единственно и в случае мнимого эллипса, но у него нет действительных точек)  $\square$

Отдельно рассмотрим случаи из утверждения (\*). В первом случае имеем

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \text{ После перехода к базису канонической}$$

системы координат получим уравнение вида  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$  - таким уравнением можно представить всё, кроме параболы. Справедливо и обратное утверждение: если линия задаётся уравнением вида  $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0 = 0$ , то точка с координатами  $(0, 0)$  в этой с.к. - её центр симметрии.

Во втором случае все точки линии второго порядка лежат на одной прямой. Покажем, когда такое возможно:  $a'_1 x' + a'_2 y' = 0 \Leftrightarrow (a'_1 x' + a'_2 y')^2 = 0 \Leftrightarrow a_1'^2 x'^2 + a_1' a_2' x' y' + a_2'^2 y'^2 = 0$  - такое уравнение задаёт либо пару мнимых пересекающихся прямых, либо пару совпадающих прямых (либо пустое множество, для которого наши рассуждения о принадлежности всех точек одной прямой неприменимы, так что рассматриваем непустые линии) - то есть наша линия является либо точкой, либо прямой.

У любой линии второго порядка, кроме параболы, есть центр симметрии.

Итак, теперь можем определить центр линии второго порядка.

**Определение.** Точка  $O(x_0, y_0)$  называется центром линии второго порядка  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$ , если её координаты удовлетворяют системе уравнений 
$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 = 0 \end{cases}$$

**Замечание.** Из доказанного выше:  $O$  - центр линии  $\Leftrightarrow$  уравнение линии симметрично относительно этой точки в любой с.к.

Для всех прямых, кроме параболы, центр канонической с.к. является её центром (несложно проверить).

## 8.5 Сопряжённые направления

Попробуем найти произвольный базис (не обязательно ортогональный), в котором матрица  $A_1$  линии второго порядка станет диагональной. Пусть  $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  - координаты новых базисных векторов в старом базисе.

Их новые координаты -  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Так как  $A'_1 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix}$  - диагональная,  $a'_{12} = 0$ . Выразим  $a'_{12}$  через малую матрицу:  $a'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A'_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Так-



же если  $C$  - матрица перехода к новому базису, то известны равенства:  $A'_1 = C^T A_1 C$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Отсюда:

$$a'_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} A'_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} C^T A_1 C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Отсюда  $A'_1$  будет диагональной в случае  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$ .

**Определение.** Направления ненулевых векторов  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  и сами эти векторы называются сопряжёнными относительно линии второго порядка, заданной в некоторой с.к. уравнением с малой матрицей  $A_1$ , если выполнено  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$ .

**Замечание.** Направления или векторы  $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  сопряжены  $\Leftrightarrow$   
 $\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  сопряжены.

**Утверждение.** Направления являются или не являются сопряжёнными вне зависимости от системы координат.

*Доказательство.* Из размышлений до определения видно, что сопряжённость не зависит от базиса, а также в уравнении линии второго порядка она зависит только от малой матрицы, т.е. не зависит от начала координат. А значит сопряжённость не зависит от системы координат в целом.  $\square$

**Определение.** Направление (= ненулевой вектор)  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , сопряжённое самому себе, т.е.  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ , называется асимптотическим.

Далее во всех связанных с асимптотическими направлениями рассуждениях можем считать, что линия задана уравнением вида  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$  или  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$  - здесь и далее такой вид уравнения линии будем называть **простейшим**.

**Теорема. 1.** Если прямая  $l$  имеет асимптотическое направление относительно линии второго порядка  $L$ , то либо  $l$  имеет с  $L$  не более одной общей точки, либо  $l$  содержится в  $L$ .

2. Прямая  $l$  неасимптотического направления имеет с  $L$  не более двух общих точек (причём в случае ровно одной точки её обычно считают двумя совпадающими точками).

*Доказательство.* Пусть  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  - любое направление. Рассмотрим прямую  $l$  с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ :  $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$  и подставим в простейшее уравнение линии  $F(x, y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c$  или  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$ . После приведения подобных слагаемых получим не более чем квадратное уравнение относительно  $t$ , в котором коэффициент перед  $t^2$  будет равен  $\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2$ . Тогда уравнение не может иметь больше двух корней в случае, если этот коэффициент ненулевой, то есть при  $\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} A_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq 0$  - в случае неасимптотического направления. В случае асимптотического направления наше уравнение линейно, а значит оно либо не имеет решений, либо решение единственно, либо любое  $t$  является решением, т.е.  $l$  целиком содержится в  $L$ .  $\square$

**Следствие.** Никакие три точки эллипса, параболы или гиперболы не лежат на одной прямой.

*Доказательство.* Предположим противное. Тогда по доказанной выше теореме имеем, что линия второго порядка содержит прямую, на которой лежат данные точки. Докажем, что это невозможно:

- Эллипс: в канонической системе координат для его точек выполнены неравенства  $|x| \leq a, |y| \leq b$ , т.к.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , поэтому эллипс ограничен и не может содержать прямую;
- Парабола: в канонической системе координат для её точек выполнено неравенство  $x \geq 0$ , т.к.  $y^2 = 2px$ . Отсюда парабола не может содержать никакую прямую, кроме прямой вида  $x = c \geq 0$ , но уравнение  $y^2 = 2pc$  не может иметь более двух решений относительно  $y$ ;
- Гипербола: в канонической системе координат для её точек выполнено неравенство  $|x| \geq a$ , т.к.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , то есть она не может содержать

точек прямой  $x = 0$ . Тогда она не может содержать никакую прямую, кроме прямой вида  $x = c \neq 0$ , но уравнение  $\frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  не может иметь более двух решений относительно  $y$ .

□

**Определение.** Из следствия видно, что прямая может содержаться целиком только в линии, представляющей собой пару пересекающихся прямых, пару параллельных прямых или пару совпадающих прямых. Такие линии называются распадающимися, так как задающие их многочлены  $F(x, y)$  распадаются в произведение двух линейных функций. (это свойство очевидно для этих линий в каноническом виде, а далее можем проделать обратные к приведению к каноническому виду операции, чтобы получить тот же результат для произвольного вида).

## 8.6 Диаметры

Вернёмся к пересечению  $l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$  с линией второго порядка  $L$  в системе координат, где  $L$  имеет уравнение простейшего вида. Пусть  $l$  пересекает  $L$  ровно в двух точках (это в частности означает, что направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  - неасимптотическое), и точка  $(x_0, y_0)$  является серединой отрезка с концами в точках пересечения  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Тогда  $\begin{cases} x_1 = x_0 + \alpha t' \\ y_1 = y_0 + \beta t' \end{cases}$  и  $\begin{cases} x_2 = x_0 - \alpha t' \\ y_2 = y_0 - \beta t' \end{cases}$  для некоторого  $t' \in \mathbb{R}$ , так как точки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  симметричны относительно  $(x_0, y_0)$ , которой соответствует значение  $t = 0$ .

Подставим выражения для  $x$  и  $y$  в уравнение линии  $L$ :

$$\lambda_1(x_0 + \alpha t)^2 + \lambda_2(y_0 + \beta t)^2 + c = 0 \text{ или } \lambda_2(y_0 + \beta t)^2 + 2c(x_0 + \alpha t) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1\alpha^2 + \lambda_2\beta^2)t^2 + 2(\lambda_1x_0\alpha + \lambda_2y_0\beta)t + \dots = 0 \text{ или } \lambda_2\beta^2t^2 + 2t(\lambda_2y_0\beta + c\alpha)t + \dots = 0$$

Оба числа  $t'$  и  $-t'$  являются корнями этого уравнения, так как точки  $X_1, X_2$  принадлежат  $L$ . Из теоремы Виета это возможно только в случае

$$\lambda_1x_0\alpha + \lambda_2y_0\beta = 0 \text{ или } \lambda_2y_0\beta + c\alpha = 0 \text{ (в зависимости от линии)}$$

Таким образом, середина  $(x_0, y_0)$  любого отрезка, концы которого являются точками пересечения любой прямой с направляющим вектором  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , лежит на

прямой  $\lambda_1 x \alpha + \lambda_2 y \beta = 0$  (направляющий вектор  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ \lambda_1 \alpha \end{pmatrix}$ ) или  $\lambda_2 y \beta + c \alpha = 0$  (направляющий вектор  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ ). Несложно проверить, что это действительно прямые: в случае, если коэффициенты перед неизвестными равны нулю, направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  асимптотическое по определению, но уже известно, что это не так.

Направление прямой, содержащей эти середины, сопряжено направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ :

В случае линии вида  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ \lambda_1 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha & \lambda_2 \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ \lambda_1 \alpha \end{pmatrix} = 0;$$

В случае линии вида  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

**Замечание.** В случае, когда уравнение линии  $L$  можно привести к простейшему виду  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ , т.е. когда  $L$  - не парабола, полученная прямая проходит через начало координат, которое является центром  $L$ . Поэтому если  $L$  имеет центр, то полученная прямая обязательно через него проходит.

(Если центров больше одного, то за начало координат можно взять любой из них, поэтому прямая будет проходить через все центры)

Рассмотрим направление полученной прямой (это  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ \lambda_1 \alpha \end{pmatrix}$  или  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ ). Посмотрим, когда это направление может быть асимптотическим: в первом случае  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta & \lambda_1 \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ \lambda_1 \alpha \end{pmatrix} = \lambda_2^2 \lambda_1 \beta^2 + \lambda_1^2 \lambda_2 \alpha^2 = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2)$ . Это выражение равно нулю либо при  $\lambda_1 = 0$ , либо при  $\lambda_2 = 0$ , но в этом случае  $\lambda_1 = 0$  из нумерации  $\lambda$ , либо при  $\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ , но тогда направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  должно быть асимптотическим, а это не так.

Во втором случае направление  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 \beta \\ 0 \end{pmatrix}$  совпадает с направлением  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  - тогда

$\lambda_1$  также равно 0, а направление  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  - асимптотическое:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Те же рассуждения применимы и для случая, когда  $L$  - пара совпадающих прямых: ни для какого направления не встретится прямой, пересекающей  $L$  в двух различных точках, но если принять, что одна точка пересечения - совпавшие точки  $X_1$  и  $X_2$ , то прямая, содержащая все середины отрезков, если принять  $X_1 = X_0 = X_2$ , совпадёт с  $L$ .

Аналогичный результат получается при работе с произвольной системой координат. Подставив  $l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$  в уравнение  $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$  линии второго порядка  $L$ , получим:

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2))t + F(x_0, y_0) = 0$$

и из рассуждений, аналогичных приведённым выше, симметричные значения параметра  $t'$  и  $-t'$  могут быть корнями этого уравнения только в случае

$$\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0 \quad (*)$$

**Замечание.** Полученное уравнение задаёт прямую, когда направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  неасимптотическое - это было показано для канонической с.к., а при изменении с.к. прямая остаётся прямой. а неасимптотическое направление остаётся неасимптотическим.

Также из уравнения видно, что такой прямой принадлежат все центры  $L$ .

**Определение.** Прямая, заданная уравнением (\*), называется диаметром линии второго порядка  $L$ , сопряжённым данному неасимптотическому направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

**Теорема.** (Свойства диаметров)

1. Любой диаметр линии  $L$  проходит через все центры этой линии, если они есть.

2. Если существует прямая неасимптотического направления  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , пересекающая  $L$  ровно в двух точках  $X_1$  и  $X_2$ , то диаметр, сопряжённый направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , проходит через середину отрезка  $[X_1, X_2]$ .

*Доказательство.* Из рассуждений выше. □

**Определение.** Хордой называется отрезок, соединяющий две точки линии второго порядка и не имеющий других общих точек с линией.

**Замечание.** Уже показали, что диаметр имеет асимптотическое направление  $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$  линия  $L$  относится к параболическому случаю и является либо параболой, либо парой параллельных, мнимых параллельных или совпадающих прямых. Во всех этих случаях, кроме параболы, диаметр (любой) является прямой центров. В случае параболы имеется ровно одно асимптотическое направление - ось симметрии параболы - и прямые этого и только этого направления являются диаметрами. В частности, для любой прямой такого направления можно подобрать такое направление хорд, что прямая будет пересекать хорды этого направления в их середине.

## 8.7 Сопряжённые диаметры

В центральном случае (т.е.  $\delta \neq 0$  и линия имеет единственный центр) направление  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$  диаметра, сопряжённого данному неасимптотическому направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , является неасимптотическим (также уже показали выше), и в этом случае диаметр, сопряжённый направлению  $\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix}$ , имеет направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , поэтому в центральном случае имеет место понятие сопряженности диаметров.

**Определение.** Диаметры линии второго порядка называются сопряжёнными, если их направления сопряжены относительно этой линии.

**Теорема.** Если линия второго порядка имеет единственный центр, то всякий её диаметр является прямой неасимптотического направления, проходящей через центр, и всякая прямая неасимптотического направления, проходящая через центр, является её диаметром.

*Доказательство.* Утверждение про диаметр уже было доказано выше - он проходит через центр и в центральном случае (центр единственный) имеет неасимптотическое направление. Докажем обратное утверждение. Координаты центра удовлетворяют системе уравнений 
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{cases}$$
. В нашем случае эта система имеет единственное решение, то есть прямые  $a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0$  и  $a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0$  задают собственный пучок. Тогда если прямая проходит через центр, то она задаётся уравнением вида  $\alpha(a_{11}x + a_{12}y + a_1) + \beta(a_{12}x + a_{22}y + a_2) = 0$  для некоторых  $\alpha, \beta$ , одновременно не равных 0. Покажем, что направление прямой  $l$ , проходящей через центр  $\left(\begin{pmatrix} -\alpha a_{12} - \beta a_{22} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{12} \end{pmatrix}\right)$  сопряжено направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha a_{12} - \beta a_{22} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{12} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta a_{12} & \alpha a_{12} + \beta a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha a_{12} - \beta a_{22} \\ \alpha a_{11} + \beta a_{12} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Итак, прямая  $l$  проходит через центр, и её направление сопряжено  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ . Если её направление неасимптотическое, то и направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  неасимптотическое, а значит  $l$  - диаметр, сопряжённый направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .  $\square$

## 8.8 Касательная к линии второго порядка

В курсе математического анализа даны определения дифференциала и касательной к функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точке. Дадим аналогичные определения для  $f : \pi \rightarrow \mathbb{R}$  (от точки на евклидовой плоскости):

**Определение.** Функция  $f : \pi \rightarrow \mathbb{R}$  называется дифференцируемой в точке  $X_0 \in \pi$ , если

$$f(X_0 + \bar{h}) - f(X_0) = l(\bar{h}) + \bar{o}(|\bar{h}|) \text{ при } |\bar{h}| \rightarrow 0,$$

где  $l : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$  - линейная функция на двумерном векторном пространстве, ассоциированном с  $\pi$ . Функция  $l$  называется дифференциалом  $f$  в точке  $X_0$ .

Как известно из курса алгебры, линейность функции  $l$  означает, что  $l(\alpha\bar{u} + \beta\bar{v}) = \alpha l(\bar{u}) + \beta l(\bar{v})$  для любых  $\bar{u}, \bar{v} \in V^2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Таким образом:

$$f(X_0 + \bar{h}) - f(X_0) = l(\bar{h}) + \bar{o}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$f(X) = l(\overrightarrow{X_0 X}) + f(X_0) + \bar{o}(|\overrightarrow{X_0 X}|), \quad X \rightarrow X_0$$

Запишем в координатах: пусть задан репер  $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ , и пусть  $X_0 = (x_0, y_0)$ ,  $X = (x, y)$ ,  $\bar{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ . Тогда функции  $f: \pi \rightarrow \mathbb{R}$  соответствует функция  $F(x, y)$  от координат точки в данной с.к. Имеем:

$$f(X_0 + \bar{h}) = f(X_0) + l(\bar{h}) + \bar{o}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$f(X_0 + \bar{h}) = f(X_0) + h_1 l(\bar{e}_1) + h_2 l(\bar{e}_2) + \bar{o}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$F(x, y) = F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = h_1 l(\bar{e}_1) + h_2 l(\bar{e}_2) + F(x_0, y_0) + \bar{o}(|\bar{h}|), \quad |\bar{h}| \rightarrow 0$$

В частности,

$$F(x_0 + h_1, y_0) = h_1 l(\bar{e}_1) + F(x_0, y_0) + \bar{o}(h_1), \quad h_1 \rightarrow 0$$

$$F(x_0, y_0 + h_2) = h_2 l(\bar{e}_2) + F(x_0, y_0) + \bar{o}(h_2), \quad h_2 \rightarrow 0$$

Отсюда:

$$l(\bar{e}_1) = \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0) + \bar{o}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h, y_0) - F(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0),$$

где  $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$  - частная производная  $F$  по  $x$  в точке  $(x_0, y_0)$ , вычисляющаяся как производная  $F(x)$ , где  $y$  - фиксированный параметр.

По аналогичным рассуждениям  $l(\bar{e}_2) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ . Рассмотрим график функции  $z = F(x, y)$  - это некоторая поверхность в трёхмерном пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Тогда  $z = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + F(x_0, y_0)$  - плоскость, наиболее точно приближающая эту поверхность в окрестности точки  $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ . Эта плоскость называется касательной плоскостью к графику функции  $F(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ . Она не зависит от выбора системы координат.

В случае, когда  $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$ , имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_1;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_2$$



Уравнение касательной плоскости в точке  $(x_0, y_0, F(x_0, y_0))$  :

$$z = (2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_1)(x - x_0) + (2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_2)(y - y_0) + F(x_0, y_0)$$

Так как нас интересует касательная на плоскости, необходимо найти касательную плоскость в точке  $(x_0, y_0, 0) \in L$  ( $F(x_0, y_0) = 0$ ). Пересекая касательную плоскость в этой точке с плоскостью  $z = 0$ , получим прямую

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) \end{cases}$$

В плоскости  $z = 0$  (с координатами  $(x, y)$ ) она задаётся уравнением

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0$$

Очевидно, что это уравнение задаёт прямую тогда и только тогда, когда точка  $(x_0, y_0)$  не является центром  $L$ .

**Определение.** Пусть линия второго порядка  $L$  задана в некоторой аффинной системе координат уравнением  $F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ , и пусть  $(x_0, y_0) \in L$ , причём  $(x_0, y_0)$  не является центром  $L$ .

Касательной к  $L$  в точке  $(x_0, y_0)$  называется прямая, заданная уравнением

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) = 0$$

или, что то же самое:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0 = 0$$

(из условия  $F(x_0, y_0) = 0$ ). Последнее уравнение имеет матричный вид:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Касательные в центре линии не определены, даже если центр принадлежит линии.

**Утверждение.** Определение касательной не зависит от системы координат.

*Доказательство.* Рассмотрим другую систему координат  $O'\bar{e}'_1\bar{e}'_2$ , где

$O' = (x_1, y_1)$  - новое начало координат,  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  - матрица перехода,

$$D = \begin{pmatrix} C & x_1 \\ & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Подставим в уравнение:}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \end{pmatrix} D^T A D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_0 & y'_0 & 1 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Отсюда уравнение не зависит от системы координат.  $\square$

Теперь для удобства можем рассматривать уравнение в канонической системе координат - в ней оно имеет один из простейших видов. Рассмотрим случаи:

1. Уравнение имеет вид  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ .

Уравнение касательной в точке  $(x_0, y_0) \in L : \lambda_1 x_0 x + \lambda_2 y_0 y + c = 0$ . Её направление -  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_1 x_0 \end{pmatrix}$ . Может ли оно быть асимптотическим?

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 & \lambda_1 x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_1 x_0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2)$$

Так как  $\lambda_2 \neq 0$ , это число равно нулю либо при  $\lambda_1 = 0$ , либо при  $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$ .

В случае  $\lambda_1 = 0$  линия представляет собой пару параллельных, мнимых параллельных или совпадающих прямых. Для совпадающих прямых касательная не определена ни в одной точке, так как любая точка линии - её центр, случай мнимых параллельных прямых описывает пустую линию. В случае параллельных прямых касательная имеет асимптотическое направление и содержит точку на одной из прямых  $\Rightarrow$  она совпадает с одной из прямых.

Остаётся случай  $\lambda_1 \neq 0$ ,  $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 = 0$ . Из условия  $(x_0, y_0) \in L$  следует, что  $c = 0$ , т.е. линия задана уравнением  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$ . Отсюда  $L$  - пара пересекающихся или мнимых пересекающихся прямых. В первом случае касательная совпадёт с одной из прямых, а во втором линия состоит из одной точки-центра, поэтому для неё касательные не определены.

2. Уравнение имеет вид  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$ .

Уравнение касательной в точке  $(x_0, y_0) \in L : cx + \lambda_2 y_0 y = 0$ . Направляю-

щий вектор -  $\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ c \end{pmatrix}$ . Когда он асимптотический?

$$\begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ c \end{pmatrix} = \lambda_2 c^2$$

Так как в случае параболы  $\lambda_2 \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , у параболы нет касательных с асимптотическим направлением.

Итого:

1. Для мнимого эллипса, пары мнимых пересекающихся прямых, пары мнимых параллельных прямых и пары совпадающих прямых касательная не определена ни в одной точке.
2. Для пары пересекающихся прямых и пары параллельных прямых касательная в точке, не являющейся центром, совпадает с той прямой, на которой лежит точка касания.
3. Для эллипса, параболы и гиперболы касательная в любой точке существует и имеет неасимптотическое направление.

Рассмотрим подробнее касательные в случае эллипса, гиперболы и параболы. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

**Утверждение.** Пусть  $L$  - эллипс,  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда на  $L$  существуют точки, сколь угодно близкие к  $(x_0, y_0)$ . Более того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1.  $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  такой, что  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \exists \delta(\varepsilon) : (x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon)) \in L$ , причём  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
2.  $\forall \varepsilon_0 < 0 \exists \varepsilon_1 : \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < 0$  такой, что  $\forall \varepsilon \in (\varepsilon_1, 0) \exists \delta(\varepsilon) : (x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon)) \in L$ , причём  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

(Проще говоря, либо справа, либо слева от  $x_0$  есть сколь угодно малая полукрестность, для любого  $\varepsilon$  из которой есть точка  $(x, y)$ , где  $x_0 + \varepsilon$  принадлежащая  $L$ , причём при  $x \rightarrow x_0 \quad y \rightarrow y_0$ )

*Доказательство.* Рассмотрим эллипс в канонической с.к., т.е. его уравнение имеет простейший вид  $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ . Пусть для определённости  $\lambda_1, \lambda_2 >$

$0, c < 0$  (иначе домножим на  $-1$ ). Запишем условие на  $\delta(\varepsilon)$ , что точка  $(x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon))$  принадлежит  $L$ :

$$\lambda_1(x_0 + \varepsilon)^2 + \lambda_2(y_0 + \delta(\varepsilon))^2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_2 \cdot \delta(\varepsilon)^2 + 2\lambda_2 y_0 \cdot \delta(\varepsilon) + \lambda_1(x_0 + \varepsilon)^2 + \lambda_2 y_0^2 + c = 0$$

Получили квадратное уравнение относительно  $\delta(\varepsilon)$  ( $\lambda_2 \neq 0$ ). Обозначим свободный член за  $A$ . Заметим, что  $A \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , так как  $\lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 y_0^2 + c = 0$ . Запишем дискриминант полученного квадратного уравнения:

$$D = 4\lambda_2^2 y_0^2 - 4\lambda_2 \cdot A \Rightarrow D \rightarrow 4\lambda_2^2 y_0^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Если  $y_0 \neq 0$ , то для достаточно малых (по модулю)  $\varepsilon$  выполнено  $D \geq 0$ , поэтому корни  $\delta(\varepsilon)$  существуют и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  один из них стремится к 0, т.к.  $A \rightarrow 0$

Если же  $y_0 = 0$ , то  $D = -4\lambda_1 \lambda_2 (x_0 + \varepsilon)^2 - 4\lambda_2 c$ , и тогда

$$D \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_1(x_0 + \varepsilon)^2 \leq -c \Leftrightarrow |x_0 + \varepsilon| < \sqrt{\frac{-c}{\lambda_1}}$$

Так как  $y_0 = 0$ , имеем  $\lambda_1 x_0^2 + c = 0 \Rightarrow |x_0| = \sqrt{\frac{-c}{\lambda_1}}$ . Отсюда для достаточно малого  $\varepsilon$ , имеющего противоположный знаку  $x_0$  знак, будет выполнено  $D \geq 0$ , т.е. искомый  $\varepsilon_1$  существует и в этом случае (но только для одной полукрестности). Осталось заметить, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$D = -4\lambda_2(\lambda_1(x_0 + \varepsilon)^2 + c) \rightarrow 0 \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \frac{\pm\sqrt{D}}{2\lambda_2} \rightarrow 0$$

□

**Утверждение.** Пусть  $L$  - гипербола,  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда на  $L$  существуют точки, сколь угодно близкие к  $(x_0, y_0)$ . Более того, выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1.  $\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  такой, что  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \exists \delta(\varepsilon) : (x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon)) \in L$ , причём  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;
2.  $\forall \varepsilon_0 < 0 \exists \varepsilon_1 : \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < 0$  такой, что  $\forall \varepsilon \in (\varepsilon_1, 0) \exists \delta(\varepsilon) : (x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon)) \in L$ , причём  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

*Доказательство.* Абсолютно аналогично доказательству для эллипса с изменённым знаком  $\lambda_2$ . Этот знак повлияет только на знак неравенства в случае  $y_0 = 0$ , но одна и полукрестностей по-прежнему будет подходить. □

Пусть  $L$  - эллипс или гипербола,  $l_0 : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$  - касательная в точке

$(x_0, y_0) \in L$ . В канонической системе координат известен её направляющий вектор:  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_2 y_0 \\ \lambda_2 x_0 \end{pmatrix}$ . Возьмём произвольную точку  $(x_1, y_1) \in L$ , отличную от  $(x_0, y_0)$ , и рассмотрим прямую, параллельную  $l_0$ , проходящую через  $(x_1, y_1)$ :  $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + \alpha t \\ y = y_1 + \beta t \end{cases}$ . Найдём точки пересечения  $l_1$  и  $L$ :

$$\lambda_1(x_1 + \alpha t)^2 + \lambda_2(y_1 + \beta t)^2 + c = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2)t^2 + 2(\lambda_1 \alpha x_1 + \lambda_2 \beta y_1)t + \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + c = 0$$

Заметим, что коэффициент перед  $t^2$  не равен 0, т.к. направление касательной неасимптотическое, а свободный член  $= 0$ , т.к.  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда корень относительно  $t$  единственный  $\Leftrightarrow \lambda_1 \alpha x_1 + \lambda_2 \beta y_1 = 0$ .

Если для точки  $(x_1, y_1) \in L$  это условие не выполнено, то  $l_1$  пересекает  $L$  в двух точках. Предположим, что для точки  $(x_1, y_1)$  условие выполнено. Тогда прямая  $\lambda_1 \alpha x + \lambda_2 \beta y = 0$  уже имеет две точки пересечения с  $L$  -  $(x_0, y_0)$  и  $(x_1, y_1)$ . Тогда для любой точки  $(x_2, y_2) \in L$ ,  $|x_0 - x_2| < |x_0 - x_1|$  это же условие выполняться не может, т.к. прямая не может иметь более двух общих точек с  $L$ . Сформулируем доказанное утверждение:

**Утверждение.** Пусть  $L$  - эллипс или гипербола,  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0$  такой, что для любой точки  $(x_1, y_1) \in L : d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) < \varepsilon$  прямая, проходящая через  $(x_1, y_1)$  и параллельная касательной в точке  $(x_0, y_0)$ , пересекает  $L$  в двух точках.

Докажем аналогичные утверждения для параболы.

**Утверждение.** Пусть  $L$  - парабола,  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда на  $L$  существуют точки, сколь угодно близкие к  $(x_0, y_0)$ . Более того, выполнено условие:

$\forall \varepsilon_0 > 0 \exists \varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  такой, что  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1) \exists \delta(\varepsilon) : (x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon)) \in L$ , причём  $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а в случае  $y_0 \neq 0$  дополнительно  $\exists \gamma(\varepsilon) : (x_0 - \varepsilon, y_0 + \gamma(\varepsilon)) \in L$  и  $\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим параболу в канонической с.к., т.е. её уравнение имеет простейший вид  $\lambda_2 y^2 + 2cx = 0$ . Пусть для определённости  $\lambda_2 = 1, c < 0$  (иначе поделим на  $\lambda_2$ ). Запишем условие на  $\delta(\varepsilon)$ , что точка  $(x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta(\varepsilon))$  принадлежит  $L$ :

$$(y_0 + \delta(\varepsilon))^2 + 2c(x_0 + \varepsilon) = 0 \Rightarrow$$

$$\delta(\varepsilon)^2 + 2y_0 \cdot \delta(\varepsilon) + 2c(x_0 + \varepsilon) + y_0^2 = 0$$

Получили квадратное уравнение относительно  $\delta(\varepsilon)$  ( $\lambda_2 \neq 0$ ). Обозначим свободный член за  $A$ . Заметим, что  $A \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , так как  $y_0^2 + 2cx = 0$ . Запишем дискриминант полученного квадратного уравнения:

$$D = 4y_0^2 - 4A \Rightarrow D \rightarrow 4y_0^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

Если  $y_0 \neq 0$ , то для достаточно малых  $\varepsilon$  (по модулю, поэтому будут существовать и  $\delta(\varepsilon)$ , и  $\gamma(\varepsilon)$ ) выполнено  $D \geq 0$ , поэтому корни  $\delta(\varepsilon)$  существуют и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  один из них стремится к 0, т.к.  $A \rightarrow 0$

Если же  $y_0 = 0$ , то  $x_0 = 0$  из принадлежности параболы, и уравнение имеет вид

$$\delta(\varepsilon)^2 + 2c\varepsilon = 0 \Rightarrow \delta(\varepsilon) = \pm\sqrt{-2c\varepsilon} \Rightarrow \delta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

□

**Утверждение.** Пусть  $L$  - парабола,  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда  $\exists \varepsilon > 0$  такой, что для любой точки  $(x_1, y_1) \in L : d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) < \varepsilon$  прямая, проходящая через  $(x_1, y_1)$  и параллельная касательной в точке  $(x_0, y_0)$ , пересекает  $L$  в двух точках.

*Доказательство.* Рассуждения абсолютно аналогичны случаю эллипса и гиперболы. □

**Теорема.** Пусть  $L$  - эллипс, гипербола или парабола,  $l$  - диаметр, сопряжённый неасимптотическому направлению  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  и  $(x_0, y_0) \in L \cap l$ , причём  $(x_0, y_0)$  - не центр. Тогда касательная к  $L$  в точке  $(x_0, y_0)$  имеет направление  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

*Доказательство.* Запишем условие  $(x_0, y_0) \in l$  - точка принадлежит диаметру, сопряжённого  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ :

$$\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0 \quad (*)$$

Уравнение касательной в точке  $(x_0, y_0)$ :

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)(y - y_0) + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0,$$

её направляющий вектор -  $\begin{pmatrix} -a_{12}x_0 - a_{22}y_0 - a_2 \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \end{pmatrix}$ .

Если рассматривать  $(*)$  как уравнение относительно  $\alpha$  и  $\beta$ , то оно задаёт их с

точностью до пропорциональности (коэффициенты не равны нулю одновременно, т.к.  $(x_0, y_0)$  - не центр). Очевидно, что направляющий вектор касательной удовлетворяет этому уравнению, а значит её направление совпадает с направлением  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .  $\square$

**Теорема.** Пусть  $L$  - линия второго порядка,  $l$  - прямая неасимптотического направления,  $L \cap l = (x_0, y_0)$  и  $(x_0, y_0)$  - не центр  $L$ . Тогда  $l$  - касательная к  $L$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

*Доказательство.* Пусть  $l : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$ . Подставим в уравнение линии:

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2(\alpha(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + \beta(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2))t + F(x_0, y_0) = 0.$$

Коэффициент перед  $t^2$  не равен нулю, т.к.  $(x_0, y_0)$  - не центр, а свободный член равен нулю, т.к.  $(x_0, y_0) \in L$ . Тогда точка пересечения единственна только в случае, когда коэффициент перед  $t$  нулевой, а из этого

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -a_{12}x_0 - a_{22}y_0 - a_2 \\ a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1 \end{pmatrix}$$

Тогда  $l$  имеет с касательной к  $L$  в  $(x_0, y_0)$  общую точку и у них совпадают направления, а значит, эти прямые совпадают, т.е.  $l$  - касательная к  $L$  в точке  $(x_0, y_0)$ .  $\square$

**Мораль в том, что пупу...**