Механико-математический факультет

Аналитическая геометрия, 1 семестр, 2 поток

Москва
2024

Содержание

1 Общие понятия (нет в билетах)

Уже известные нам понятия:

- Точка - то, что не имеет частей;
- Линия - длина без ширины;
- Прямая - линия, равно расположенная по отношению к точкам на ней;
- Поверхность - то. что имеет длину и ширину;
- ...

(Эти определения, как и последующие постулаты и аксиомы, были даны Евклидом.)

И определяемые понятия - аналогично школьным учебникам.

1.1 Постулаты

1. От всякой точки до всякой можно провести прямую.
2. Ограниченную часть прямой можно непрерывно продолжать.
3. Из всякой точки можно описать окружность со всяким радиусом.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая l образует с двумя другими прямыми l_1 и l_2 внутренние и по одну сторону углы, меньшие прямых, то l_1 и l_2 пересекутся с той стороны от l, где углы меньше прямых.

1.2 Аксиомы (общие понятия) по Евклиду

1. Равные одному и тому же равны между собой.
2. Если к равным прибавляются равные, то суммы равны.
3. Если из равных вычитаются равные, то разности равны.
4. Если к неравным прибавляются равные, то суммы неравны.
5. Удвоенные равные равны.
6. Половины равных равны.

7. Совмещающиеся друг с другом равны между собой.
8. Целое больше части.
9. Две прямые не образуют пространство.

Сейчас используется более строгая аксиоматика (Гильберт)

1.3 Современная аксиоматика

Определение. Плоскость (по Колмогорову) - тройка (X, L, d), где X - множество (точек), L - выделенная совокупность его подмножеств (прямых) и d - отображение. сопоставляющее паре точек $x, y \in X$ неотрицательное $d(x, y) \in \mathbb{R}$ - расстояние от x до y.

Аксиомы делятся на 5 групп:

I. **Аксиомы принадлежности:**

   1. Каждая прямая есть множество точек.
   2. Через любые две различные точки проходит прямая, и притом только одна.
   3. Существует хотя бы одна прямая.
   4. Каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.
   5. Вне каждой прямой существует хотя бы одна точка.

II. **Аксиомы расстояния:**

   1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   2. $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
   3. (Неравенство треугольника) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

   Пространство X с выполненными аксиомами принадлежности и расстояния называется метрическим.

   Определение. Точка y лежит между x и z, если $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. Множество точек между x и z называется отрезком $[x, z]$, а $d(x, z)$ - его длиной.

III. **Аксиомы порядка:**

1. Три точки лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ одна из них лежит между двумя другими.
2. Любая точка x прямой l разбивает множество отличных от x точек, лежащих на l, на два непустых подмножества так, что x лежит между любыми двумя точками из разных подмножеств.

Определение. Одно из таких подмножеств точек прямой, взятое вместе с точкой x, называется лучом с началом в точке x.

3. $\forall a \geqslant 0\ \exists!\ y$ на луче с началом в x такая, что $d(x, y) = a$.

Определение. Множество точек A плоскости называется выпуклым, если $\forall x, y \in A \quad [x, y] \in A$.

4. Любая прямая l разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на два непустых выпуклых подмножества.

Определение. Одно из таких подмножеств точек плоскости, взятое вместе с прямой l, называется полуплоскостью. Прямая l называется граничной для этой полуплоскости. Если l содержит луч, то эта полуплоскость примыкает к данному лучу.

IV. **Аксиомы подвижности:**

Определение. Взаимно однозначное отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния, называется движением (изометрией).

1. Для любой пары лучей l_1, l_2 и примыкающих к ним полуплоскостей π_1, π_2 существует единственное движение φ такое, что $\varphi(l_1) = l_2, \varphi(\pi_1) = \pi_2$.
2. Для любой пары отрезков $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ равной ненулевой длины существуют ровно два движения φ_1, φ_2 таких, что $\varphi_{1,2}([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$.

V. **Аксиома параллельных прямых:**

Через любую точку вне прямой l можно провести ровно одну прямую, не пересекающуюся с l (такая прямая называется параллельной к l).

Данная аксиома разделяет евклидову и неевклидову геометрии.

Методы аналитической геометрии основаны на том, что, задавая точки парами чисел (через координаты), мы можем получать разнообразные зависимости (например, уравнения множеств точек). Причем точку можно переопределить как пару чисел вместо абстрактного объекта, и все аксиомы останутся выполнены. То есть, рассматривая точки как арифметический объект, мы получим неотличимую по свойствам от абстрактной геометрии геометрию арифметическую, с которой уже можно работать по известным нам принципам.

2 Векторы и операции над ними

2.1 Векторные пространства

Геометрические векторы в математике являются **свободными векторами** - классами эквивалентности направленных отрезков по уже известному нам отношению эквивалентности векторов.

Определение. Векторным (линейным) пространством (над полем $\mathbb{R}$) называется множество V с введенными на нем бинарными операциями "+": $V \times V \to V$ и "*": $\mathbb{R} \times V \to V$, отвечающие следующим свойствам (аксиомам):
$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V; \lambda, \mu \in \mathbb{R}:$

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность сложения);
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ (ассоциативность сложения);
3. $\exists \bar{0} \in V : \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$ (существует нейтральный элемент по сложению - нулевой вектор);
4. $\exists (-\bar{a}) \in V : \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0}$ (существует противоположный элемент по сложению);
5. $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$ (ассоциативность умножения на числа);
6. $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ (дистрибутивность по умножению);
7. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$ (дистрибутивность по сложению);
8. $1 * \bar{a} = \bar{a}$.

Примеры. Векторные пр-ва:

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$:
- Функции;
- Многочлены;

- Многочлены степени $\leqslant n$.

Замечание. Св-ва векторных пространств:

1. $\bar{0}$ единственный.

   Пусть $\bar{0}_1, \bar{0}_2$ - нулевые векторы.

   Тогда $\bar{0}_1 = \bar{0}_1 + \bar{0}_2 = \bar{0}_2$, ч.т.д.

2. $-\bar{a}$ единственный.

   Пусть $-\bar{a}_1, -\bar{a}_2$ - противоположные к $\bar{a}$ векторы.

   Тогда $-\bar{a}_1 = -\bar{a}_1 + \bar{0} = -\bar{a}_1 + (\bar{a} + -\bar{a}_2) = (-\bar{a}_1 + \bar{a}) + (-\bar{a}_2) = \bar{0} + (-\bar{a}_2) = -\bar{a}_2$, ч.т.д.

3. $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$.

   $\lambda * \bar{0} = \lambda * (\bar{0} + \bar{0}) = \lambda * \bar{0} + \lambda * \bar{0}$

   Прибавив к обеим частям вектор, противоположный к $\lambda * \bar{0}$, получим $\lambda * \bar{0} = \bar{0}$, ч.т.д.

4. $-(\lambda\bar{a}) = (-\lambda)\bar{a} = \lambda(-\bar{a})$.

   Нетрудно видеть, что все три вектора противоположны $\lambda\bar{a}$, а далее из п.2.

5. $-\bar{a} = -1 * \bar{a}$

   Следует из п.4.

6. $\lambda\bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow$ либо $\lambda = 0$, либо $\bar{a} = \bar{0}$.

   Либо $\lambda = 0$, либо $\lambda \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} * \lambda * \bar{a} = \frac{1}{\lambda}\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a} = \bar{0}$, ч.т.д.

2.2 Линейная зависимость векторов

Определение. Сумма вида $\lambda_1\bar{x}_1 + ... + \lambda_n\bar{x}_n$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$.

Определение. Если в линейной комбинации $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$, то она называется тривиальной, а иначе - нетривиальной.

Определение. Если вектор $\bar{x}$ равен линейной комбинации $\lambda_1\bar{x}_1 + ... + \lambda_n\bar{x}_n$, то говорят, что он линейно выражается (раскладывается) через векторы $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$. (Сама линейная комбинация $\lambda_1\bar{x}_1 + ... + \lambda_n\bar{x}_n$ называется выражением (разложением) вектора $\bar{x}$ через $\bar{x}_1 ... \bar{x}_n$)

Определение. Множество векторов называется линейно зависимым, если существует равная нулю нетривиальная линейная комбинация векторов из этого множества. В противном случае оно называется линейно независимым.

Пример. Система из двух векторов $\bar{a}, \bar{b}$ линейно зависима $\Leftrightarrow \bar{a} = \lambda\bar{b}$.

Замечание. Множество векторов линейно зависимо $\Leftrightarrow$ один из векторов этого множества линейно выражается через некоторые другие векторы этого множества.

Определение. Упорядоченное множество векторов называется системой векторов. (В системе векторов элементы могут повторяться)

Определение. Множество (система) векторов из векторного пространства V называется полным(полной) в V, если любой вектор $\bar{x} \in V$ линейно выражается через векторы этого множества.

Замечание. $X \subset V$ полно в $V \Rightarrow \forall Y : X \subset Y$ полно в V.

Замечание. $X \subset V$ линейно независимо в $V \Rightarrow \forall Y \subset X$ линейно независимо в V.

2.3 Базис векторного пространства

Определение. Множество векторов E в векторном пространстве V называется базисом V, если E линейно независимо и полно в V.

Определение. Векторное пространство, в котором существует конечный (состоящий из конечного числа векторов) базис, называется конечномерным. В противном случае оно называется бесконечномерным.

Лемма. Если X - конечное полное множество из n векторов в векторном пространстве V и Y - линейно независимое множество векторов в V, то Y конечно и число векторов в $Y \leqslant n$.

Доказательство. (пер.) Произвольно занумеруем векторы в $X : (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$. Будем по одному добавлять в эту систему векторы из Y и одновременно выкидывать векторы из X так, чтобы система оставалась полной.

Пусть за k шагов $(0 \leqslant k \leqslant n)$ мы добавили некоторые $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_k$ и выкинули какие-то k векторов из X - осталась система $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_k, \bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_{n-k}})$. Возьмём $\bar{y}_{k+1}$ из Y (если такого нет, то в $Y \leqslant n$ векторов, что нам и нужно), и добавим его в систему. Так как до этого система оставалась полной, $\bar{y}_{k+1}$ выражается через

$(\bar{y_1}, ..., \bar{y_k}, \bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_{n-k}})$, причём какой-то $\bar{x}_{i_j}$ входит в это разложение с коэффициентом, не равным нулю (иначе противоречие с линейной независимостью Y - $\bar{y}_{k+1}$ выразился через $\bar{y}_1, ..., \bar{y}_k$).

Тогда $\bar{x}_{i_j}$ выражается через другие векторы системы и $\bar{y}_{k+1}$ (в выражении $\bar{y}_{k+1}$ перенесём всё, кроме $\bar{x}_{i_j}$ в другую часть и разделим на коэффициент перед ним). А так как $(\bar{y_1}, ..., \bar{y_{k+1}}, \bar{x}_{i_1}, ..., \bar{x}_{i_{n-k}})$ - полная, эта же система без $\bar{x}_{i_j}$. очевидно, останется полной.

Пусть смогли проделать n таких шагов. Тогда имеем систему $(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_n)$. Если в Y есть ещё векторы, то они с одной стороны выражаются через векторы системы из её полноты, а с другой - не выражаются через них из линейной независимости Y. Противоречие, т.е. в Y не может оказаться больше n векторов, ч.т.д. □

Теорема. Если в векторном пространстве есть конечный базис. то все базисы в нём конечны и содержат одинаковое количество векторов.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - конечный базис в V. Любой другой базис V линейно независим, т.е. по лемме содержит $k \leqslant n$ векторов, а с другой стороны полон, т.е. первый базис по лемме содержит $n \leqslant k$ векторов. Отсюда $n = k$, ч.т.д. □

Определение. Количество векторов в любом базисе векторного пространства V называется размерностью V и обозначается $dimV$.

Примеры. $dim\ \bar{0} = 0, dim\ \pi(= dim\ \mathbb{R}^2) = 2, dim\ \mathbb{R}^3 = 3$.

Теорема. В конечномерном векторном пространстве выражение любого вектора через базис определяется однозначно.

Доказательство. Если $\bar{x} = \lambda_1\bar{e}_1 + ... + \lambda_n\bar{e}_n = \lambda'_1\bar{e}_1 + ... + \lambda'_n\bar{e}_n$, то $\bar{x} - \bar{x} = \bar{0} = (\lambda_1 - \lambda'_1)\bar{e}_1 + ... + (\lambda_n - \lambda'_n)\bar{e}_n$. Если эти два разложения различны, то равная нулю линейная комбинация базисных векторов нетривиальна, что противоречит линейной независимости базиса. То есть двух различных разложений быть не может, ч.т.д. □

Определение. Пусть V - конечномерное векторное пространство и $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - базис в нём. Коэффициенты $\lambda_1, ..., \lambda_n$ в выражении любого вектора $x \in V$ через эти базисные векторы называются координатами вектора x в базисе $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$. ($\lambda_k$ называется k-й координатой)

Замечание. Векторы в n-мерном векторном пространстве находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной строкой из n чисел из $\mathbb{R}$ (например, векторы ассоциированного с евклидовой плоскостью векторного пространства соответствуют парам чисел) Таким образом можно задать операции сложения и умножения на число векторов плоскости через операции над числами, проводимыми покоординатно.

Однако элементы плоскости (как множества) - точки, а не векторы, поэтому для работы непосредственно с плоскостью необходимо ввести ещё одно определение.

2.4 Аффинные пространства

Определение. Аффинное пространство - тройка $(X, V, +)$ (обычно обозначается $\mathbb{A}$), где X - множество (точек), V - векторное пространство, а $+$ операция: $X \times V \to X$, для которых выполнены аксиомы:

1. $\forall A \in X, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V : A + (\bar{a} + \bar{b}) = (A + \bar{a}) + \bar{b}$;
2. $\forall A \in X : A + \bar{0} = A$;
3. $\forall A, B \in X \quad \exists!\ \bar{a} \in V : A + \bar{a} = B$. Обозначается $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$.

Если зафиксировать какую-нибудь точку $O \in X$, возникает взаимно однозначное соответствие между точками A и их радиус-векторами $\overrightarrow{OA}$.

Определение. Репер (система координат) в аффинном пространстве $(X, V, +)$ - пара (O, E), где $O \in X$ и E - базис в V. Точка O называется началом координат (отсчёта). Координаты точки A в (O, E) - координаты её радиус-вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисе E.

Замечание. Для аффинного пространства верно:

1. Если $A = (x_1, ..., x_n), \bar{a} = (y_1, ..., y_n)$, то $A + \bar{a} = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.
2. Если $A = (a_1, ..., a_n), B = (b_1, ..., b_n)$, то $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)$.

(Следует из сложения векторов)

Определение. Если $\mathbb{A} = (X, V, +)$ - аффинное пространство, то говорят, что V - векторное пространство, ассоциированное с $\mathbb{A}$.

Определение. $\mathbb{A}$ называется конечномерным, если ассоциированное с ним V конечномерно. В этом случае $dim\mathbb{A}$ (размерность $\mathbb{A}$) равна $dimV$.

Теперь точки аффинного пространства аналогично векторам можно ассоциировать с наборами чисел. Однако для ассоциирования евклидовой плоскости и её аксиом с двумерным аффинным пространством, необходимы отвечающие аксиомам понятия прямой и расстояния.

2.5 Подпространства

Определение. Векторным подпространством векторного пространства V называется непустое множество $V_1 \subset V$ такое. что $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V_1 : \bar{x} + \bar{y} \in V_1, \lambda\bar{x} \in V_1 (\forall \lambda \in \mathbb{R})$.

Замечание. Определение эквивалентно следующему: множество $V_1 \subset V$ - векторное подпространство V, если V_1 является векторным пространством относительно операций $+$ и $*$, определённых для V. (Доказательство осуществляется путём прямой проверки аксиом векторного пространства для V_1)

Введём несколько определений аффинного подпространства и докажем их эквивалентность.

Определение. Аффинным подпространством аффинного пространства $\mathbb{A} = (X, V, +)$ называется

1. его непустое подмножество вида $A + V_1 = A + \bar{a} : \bar{a} \in V_1$, где V_1 - векторное подпространство V и $A \in X$ - точка;
2. тройка $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$, где V_1 - векторное подпространство V и операция $+_1 = +$, для которой $\forall A, B \in X_1, \forall \bar{a} \in V_1 : A + \bar{a} \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1$;
3. тройка $(X_1 \subset X, V_1 \subset V, +_1)$, где V_1 - векторное подпространство V и операция $+_1 = +$, которая сама является аффинным пространством.

Утверждение. Приведённые определения эквивалентны.

Доказательство. Докажем следующие следствия:

1 $\Rightarrow$ 2 Пусть $P = A + \bar{a}, Q = A + \bar{b}$. Тогда $\overrightarrow{PQ} = \bar{b} - \bar{a}$ (в силу единственности такого вектора), т.е. $\overrightarrow{PQ} \in V_1$. Второе необходимое свойство 2 очевидно выполнено.

2 $\Rightarrow$ 1 Пусть X_1, V_1 удовлетворяют 2. Зафиксируем произвольную $A \in X_1$. $\forall B \in X_1$ имеем $B = A + \overrightarrow{AB}$, причём $A \in X_1, \overrightarrow{AB} \in V_1 \Rightarrow B \in X_1$.

Эквивалентность 2 $\Leftrightarrow$ 3 очевидна из определения аффинного пространства. □

Определение. Прямая в аффинном пространстве - его одномерное аффинное подпространство.
Плоскость (двумерная) в аффинном пространстве - его двумерное аффинное подпространство.

Определение. Единственный вектор в любом базисе векторного пространства, ассоциированного с одномерным аффинным пространством, называется направляющим вектором этого аффинного пространства.

Замечание. У любой прямой множество точек имеет вид $A+V^1$, где A - фиксированная точка.

Доказательство. Направляющий вектор $\bar{e}$ любой прямой ненулевой, т.к. базис одномерного векторного пространства линейно независим.
Так как любой вектор V^1 выражается через базис, $\forall \bar{x} \in V^1 \ \exists \lambda \in \mathbb{R} : \bar{x} = \lambda \bar{e}$.
Также $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \lambda \bar{e} \in V^1$, так как V^1 - векторное пространство.
Отсюда любое ассоциированное с прямой векторное пространство имеет вид $\{\lambda \bar{e} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, где $\bar{e}$ - фиксированный ненулевой вектор, а тогда, взяв любую точку одномерного аффинного пространства, получим, что всё его множество точек имеет необходимый вид. □

Утверждение. Для прямых в двумерном аффинном пространстве выполнены евклидовы аксиомы принадлежности.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}^2 = (X^2, V^2, +)$ - данное двумерное аффинное пространство, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ - некоторый базис $V^2 . l = \{O + \bar{e}_1\}$ - некоторая прямая (из предыдущего замечания). Тогда в $\mathbb{A}^2$ существует прямая, являющаяся множеством точек, на которой есть хотя бы одна точка - O, а вне её есть хотя бы одна точка - $O + \bar{e}_2$. (не на прямой, т.к. иначе $\bar{e}_2 = \lambda \bar{e}_1$)
Через любые две точки можно провести прямую ($\forall A, B \in X^2$ возьмём $\{A+\overrightarrow{AB}\}$ - прямую, проходящую через A, B), и притом только одну: если $l = \{O + \lambda \bar{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ - прямая и $A, B \in l$, то $A = O + \lambda \bar{x}, B = O + \mu \bar{x} \Rightarrow B = A + (\mu - \lambda)\bar{x} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\mu - \lambda)\bar{x}$. Тогда для любой $C \in l$ имеем $C = O + \eta \bar{x} = A + \overrightarrow{AO} + \eta \bar{x} = A + (\eta - \lambda)\bar{x} = A + \frac{\eta - \lambda}{\mu - \lambda}\overrightarrow{AB}$, т.е. любая проходящая через две точки прямая совпадает с этой.

□

Теорема. Любые два непропорциональных вектора $\bar{a}, \bar{b} \in V^2$ образуют базис двумерного векторного пространства V_2.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ - произвольный базис V^2. Тогда $\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, b = x'\bar{e}_1 + y'\bar{e}_2$. Пусть без ограничения общности $x \neq 0$ (т.к. вектор $\bar{a} \neq \bar{0}$, хотя бы один коэффициент в его разложении $\neq 0$). Тогда $\bar{e}_1 = \frac{1}{x}\bar{a} - \frac{y}{x}\bar{e}_2$. Подставим во второе выражение: $\bar{b} = x'(\frac{1}{x}\bar{a} - \frac{y}{x}\bar{e}_2) + y'\bar{e}_2 \Rightarrow \bar{e}_2 = \frac{x}{xy'-yx'}\bar{b} - \frac{x'}{xy'-yx'}\bar{a}$. Подставив это в первое выражение, получим, что $\bar{e}_1$ также выражается через $\bar{a}, \bar{b}$. Тогда система $\bar{a}, \bar{b}$ - полная (из полноты базиса), а тогда $\bar{a}, \bar{b}$ - базис по определению, ч.т.д. $\square$

Утверждение. Для прямых в двумерном аффинном пространстве выполнена аксиома параллельных прямых.

Доказательство. Если $l = \{O + \lambda\bar{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ - прямая и $O_1 \notin l$, то докажем, что $l_1 = \{O_1 + \lambda\bar{x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ - единственная прямая, проходящая через O_1 и параллельная l. Предположим, что у них есть общая точка: пусть $X = O + \lambda\bar{x} = O_1 + \mu\bar{x}$. Тогда $O_1 = O + (\lambda - \mu)\bar{x} \Rightarrow O_1 \in l$. Противоречие, т.е. прямая l_1 действительно параллельна l.
Пусть l_2 - другая прямая, проходящая через O_1. Тогда $l_2 = \{O_1 + \lambda\bar{y} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, причём $\bar{y}$ не пропорционален $\bar{x}$ (иначе прямые совпадают). Тогда $\bar{x}, \bar{y}$ - базис V^2, то есть $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OO_1} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$. Отсюда $O_1 = O + \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \Rightarrow O + \alpha\bar{x} = O_1 - \beta\bar{y}$, причём $O + \alpha\bar{x} \in l$ и $O_1 - \beta\bar{y} \in l_2$, т.е. l и l_2 имеют общую точку. Отсюда параллельная l прямая, проходящая через O_1, единственная, ч.т.д. $\square$

2.6 Скалярное произведение. Расстояния и углы

Определение. Пусть V - векторное пространство. Скалярным произведением в V называется функция $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$ со свойствами:

1. $(\bar{x}, \bar{x}) \geqslant 0\ \forall \bar{x} \in V$, причём $(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$ (положительная определённость);

2. $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})\ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V$ (коммутативность);

3. $(\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{z}) = \alpha(\bar{x}, \bar{z}) + \beta(\bar{y}, \bar{z})\ \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (линейность по первому аргументу)

Из коммутативности выполнена и линейность по второму аргументу, т.е. скалярное произведение - билинейная функция.

Определение. Длиной вектора называется величина $\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$.

Определение. Расстоянием (евклидовым) между точками $A, B \in \mathbb{A}$ называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$. Будем обозначать $d(A, B)$ как $|\overrightarrow{AB}|$.

Замечание. Зная длины всех векторов, скалярное произведение можно восстановить по формуле $(\bar{x},\bar{y}) = \frac{1}{2}(|\bar{x}+\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2)$. Это несложно проверить: $\frac{1}{2}(|\bar{x}+\bar{y}|^2 - |\bar{x}|^2 - |\bar{y}|^2) = \frac{1}{2}((\bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}) - (\bar{x},\bar{x}) - (\bar{y},\bar{y})) = \frac{1}{2}(2(\bar{x},\bar{y})) = (\bar{x},\bar{y})$.

Теорема (Неравенство Коши-Буняковского). $\forall \bar{a},\bar{b} \in V \quad (\bar{a},\bar{b}) \leqslant \sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})}$, причём равенство достигается только при $\bar{a} = \lambda\bar{b}$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $(\bar{a}+t\bar{b},\bar{a}+t\bar{b})$. Оно равно нулю $\Leftrightarrow \bar{a} = -t\bar{b}$, т.е. может быть равно нулю не более чем при одном t. С другой стороны $(\bar{a}+t\bar{b},\bar{a}+t\bar{b}) = (\bar{a},\bar{a}) + 2(\bar{a},\bar{b})t + (\bar{b},\bar{b})t^2$ - квадратный трёхчлен относительно t. Его дискриминант равен $4(\bar{a},\bar{b})^2 - 4(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})$, а из первого рассуждения знаем, что дискриминант $\leqslant 0$, причём равенство достигается только в случае коллинеарности $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Отсюда $(\bar{a},\bar{b}) \leqslant \sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})}$, ч.т.д. $\square$

Утверждение. Точки A, B, C лежат на одной прямой $\Leftrightarrow$ одна из них лежит между двумя другими.

Доказательство.
($\Rightarrow$) Пусть A, B, C лежат на одной прямой. Тогда $\exists O \in X^2, \bar{v} \in V^2, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: $A = O + \alpha\bar{v}, B = O + \beta\bar{v}, C = O + \gamma\bar{v}$. Пусть без ограничения общности $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Тогда $d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = (\beta - \alpha)|\bar{v}|, d(B,C) = |\overrightarrow{BC}| = (\gamma - \beta)|\bar{v}|, d(A,C) = |\overrightarrow{AC}| = (\gamma - \alpha)|\bar{v}|$. Отсюда видно, что $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$.
($\Leftarrow$) Пусть $d(A,C) = d(A,B) + d(B,C)$. Обозначим $\bar{a} = \overrightarrow{AB}, \bar{b} = \overrightarrow{BC}, \bar{c} = \overrightarrow{AC}$. Тогда $\sqrt{(\bar{c},\bar{c})} = \sqrt{(\bar{a}+\bar{b},\bar{a}+\bar{b})} = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} + \sqrt{(\bar{b},\bar{b})} \Rightarrow (\bar{a}+\bar{b},\bar{a}+\bar{b}) = (\bar{a},\bar{a}) + 2\sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})} + (\bar{b},\bar{b}) \Rightarrow 2(\bar{a},\bar{b}) = 2\sqrt{(\bar{a},\bar{a})(\bar{b},\bar{b})}$. Из неравенства Коши-Буняковского знаем, что равенство достигается при $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, т.е. $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен $\overrightarrow{BC}$, то есть A, B, C лежат на одной прямой. $\square$

Определение. Величиной угла между ненулевыми векторами $\bar{a}, \bar{b}$ называется число $arccos\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$ (из н. Коши-Буняковского $|\frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}| \leqslant 1$).

Определение. Конечномерное аффинное (векторное) пространство вместе со скалярным произведением называется точечно-евклидовым (евклидовым) пространством. Двумерное точечно-евклидово пространство называется евклидовой плоскостью.

2.7 Проектирование точек и векторов

Определение. Пусть задано два векторных подпространства V_1, V_2 векторного пространства V такие, что $V_1 \cap V_2 = \{\bar{0}\}$ и $V_1 + V_2 = V$ (обозначается $V = V_1 \oplus V_2$). Тогда сумма $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$, где $\bar{x} \in V, \bar{x}_1 \in V_1, \bar{x}_2 \in V_2$, определена единственно.

(Следует, например, из того, что в любом базисе V каждый его вектор лежит либо в V_1, либо в V_2, тогда разложение в эту сумму соответствует единственному разложению по базису). Проекцией вектора $\bar{x} \in V$ на V_1 параллельно V_2 называется слагаемое $\bar{x_1}$ этой суммы.

Определение. Пусть задано два аффинных подпространства $\mathbb{A}_1 = (X_1, V_1, +)$, $\mathbb{A}_2 = (X_2, V_2, +)$ аффинного пространства $\mathbb{A} = (X, V, +)$ такие, что $V = V_1 \oplus V_2$. Проекцией точки $P \in \mathbb{A}$ на $\mathbb{A}_1$ параллельно $\mathbb{A}_2$ - точка $P_1 = A_1 + \bar{v}$, где A_1 - произвольная точка из X_1, а $\bar{v}$ - проекция $\overrightarrow{A_1P}$ на V_1 параллельно V_2. (Очевидно, что от выбора A_1 расположение проеции не зависит)

Пример. Рассмотрим координаты точки евклидовой плоскости относительно прямоугольной системы координат.
Найдём проекцию точки $A = (x, y)$ на прямую Oy параллельно прямой Ox. По определению это точка (назовём её A_y), равная $O + \bar{v}$, где $\bar{v}$ - проекция $\overrightarrow{OP}$ на векторное пространство прямой Oy параллельно Ox. $\overrightarrow{OP} = \{x, y\} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$. Отсюда $\bar{v} = y\bar{e}_2 = \{0, y\}$, то есть $A_y = (0, y)$. Аналогично $A_x = (x, 0)$.

2.8 Ортонормированный базис и прямоугольная система координат

Определение. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

Определение. Базис векторного пространства V со скалярным произведением называется ортонормированным, если все его векторы попарно ортогональны и имеют длину 1.

Определение. Система координат в точечно-евклидовом пространстве называется прямоугольной, если её базис ортонормированный.

Утверждение. В точечно-евклидовом пространстве верно следующее выражение скалярного произведения через координаты векторов: если в некотором базисе $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, то $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} y_j (\bar{e}_i, \bar{e}_j)$.

Доказательство. $(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1\bar{e}_1 + ... + x_n\bar{e}_n, y_1\bar{e}_1 + ... + y_n\bar{e}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i\bar{e}_i, y_1\bar{e}_1 + ... + y_n\bar{e}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(\bar{e}_i, y_1\bar{e}_1 + ... + y_n\bar{e}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{n} y_j(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ □

Замечание. В случае, когда базис ортонормированный, имеем $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, т.е. $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$. То есть в прямоугольной системе координат длина вектора вычисляется по формуле $|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, а расстояние между точками $P = (x_1, ..., x_n), Q = (y_1, ..., y_n)$ выражается как $|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}$.

Пусть $\mathbb{A}^n = (X, V^n, +)$ - n-мерное точечно-евклидово пространство.

Утверждение. В V^n любая линейно независимая система из n векторов образует базис.

Доказательство. Предположим, что в V^n существует неполная линейно независимая система из n векторов. Т.к. система не полная, существует вектор из V^n, не выражающийся через векторы этой системы, т.е. этот вектор можно добавить в систему без потери линейной независимости. Но по лемме-аналогу ОЛЛЗ линейно независимая система в V^n не может иметь $> n$ векторов. Противоречие, т.е. любая линейно независимая система из n векторов является полной, а значит и базисом, ч.т.д. □

Утверждение. Если $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - попарно ортогональные ненулевые векторы в евклидовом пространстве, то $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ линейно независимы.

Доказательство. Предположим противное. Пусть один из векторов (без ограничения общности $\bar{e}_n$) линейно выражается через остальные: $\bar{e}_n = \lambda_1\bar{e}_1 + ... + \lambda_{n-1}\bar{e}_{n-1}$. Тогда запишем квадрат его длины: $|\bar{e}_n|^2 = (\bar{e}_n, \bar{e}_n) = (\bar{e}_n, \lambda_1\bar{e}_1 + ... + \lambda_{n-1}\bar{e}_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i(\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0$ (т.к. $\bar{e}_n$ ортогонален всем остальным векторам). Отсюда $|\bar{e}_n| = 0$, и притом $\bar{e}_n$ ненулевой. Противоречие, т.е. никакой вектор системы не выражается через остальные, а значит система линейно независима. ч.т.д. □

Теорема. В любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство. (пер.) Индукция по n - размерности пространства:

База: $n = 1$ - очевидно, что существует вектор длины 1, который составляет ортонормированный базис одномерного пространства;

Шаг: Пусть в любом n-мерном пространстве существует ортонормированный базис. Рассмотрим пространство V размерности $n + 1$ и выберем базис какого-то n-мерного подпространства W (пусть $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$). Найдём вектор, ортогональный всем выбранным векторам. Так как базис W не полон в V, к нему

можно добавить ещё один вектор $x \in V$ без потери линейной независимости $\Rightarrow$ $(\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n, \bar{x})$ - базис в V (ЛНЗ система из $n+1$ векторов).
Теперь необходимо представить $\bar{x}$ как следующую сумму: $\bar{x} = \lambda_1\bar{e}_1 + ... + \lambda_n\bar{e}_n + \bar{e}_{n+1}$, где $\bar{e}_{n+1}$ ортогонален $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$. Тогда $\bar{e}_{n+1} = \bar{x} - \lambda_1\bar{e}_1 - ... - \lambda_n\bar{e}_n$. Рассмотрим $(\bar{e}_{n+1}, \bar{e}_k) = (\bar{x} - \lambda_1\bar{e}_1 - ... - \lambda_n\bar{e}_n, \bar{e}_k) = (\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_k) - ... - \lambda_n(\bar{e}_n, \bar{e}_k)$. Так как $\bar{e}_k$ ортогонально всем этим векторам, кроме $\bar{e}_k$ и $\bar{x}$, это выражение равно $(\bar{x}, \bar{e}_k) - \lambda_k(\bar{e}_k, \bar{e}_k)$. Отсюда при $\lambda_k = \frac{(\bar{x}, \bar{e}_k)}{(\bar{e}_k, \bar{e}_k)}$ векторы $\bar{e}_{n+1}$ и $\bar{e}_k$ ортогональны (зависит только от λ_k). Составив таким образом все $\lambda_1, ..., \lambda_n$, получим выражение вектора $\bar{e}_{n+1}$, ортогонального всем векторам базиса W. Таким образом, векторы полученной системы $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_{n+1}$ попарно ортогональны (по предположению индукции) $\Rightarrow$ линейно независимы $\Rightarrow$ образуют базис в V. Разделив $\bar{e}_{n+1}$ на его длину, получим, что все векторы базиса попарно ортогональны и имеют длину $1 \Rightarrow V$ имеет ортонормированный базис, ч.т.д. $\square$

Следствие. Любую систему ортогональных векторов длины 1 в векторном пространстве можно дополнить до ортонормированного базиса.

3 Прямые

3.1 Уравнение прямой

Определение. Уравнением (либо уравнениями) множества точек будем называть уравнение со следующим свойством: точка принадлежит множеству тогда и только тогда, когда её координаты удовлетворяют уравнению.

Вывод формул (уравнения прямой). Пусть l - прямая на плоскости: $l = \{X : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM} + t\bar{v}\}$, где M - точка прямой, $\bar{v}$ - её направляющий вектор. Если $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, то из совпадения координат совпадающих векторов $\overrightarrow{OX}$ и $(\overrightarrow{OM} + t\bar{v})$ верно следующее: (**параметрические уравнения прямой**)

$$\boxed{X \in l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}}$$

Выразим t из первого уравнения и подставим во второе уравнение - получим **каноническое уравнение прямой**:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}}$$

(Заметим, что данное выражение не определено при нулевых a или b, но очевидно, что они не равны нулю одновременно, а запись, где одна из дробей имеет знаменатель 0, иногда используется, поэтому здесь и далее случай равенства нулю знаменателя может не рассматриваться как отдельный и будет означать, что числитель должен равняться 0)

Если известно, что прямой принадлежат $M = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, то $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$ - направляющий вектор, т.е. каноническое уравнение имеет вид

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}}$$

(**уравнение прямой по двум точкам**).

Домножим каноническое уравнение прямой на знаменатели: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} \Rightarrow bx - bx_0 = ay - ay_0 \Rightarrow bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0$. Такое уравнение обычно называют **общим уравнением прямой** и записывают как

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

Замечание. Для прямых в пространстве подобным образом выводятся параметрические и каноническое уравнения.

Замечание. Заметим также, что из итоговой формулы вывода общего уравнения ($bx - ay + (ay_0 - bx_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$) следует, что для прямой $Ax + By + C = 0$ вектор $(B, -A)$ (а соответственно и $(-B, A)$) является направляющим.

Утверждение. $Ax + By + C = 0$ является уравнением прямой $\Leftrightarrow$ A и B не равны нулю одновременно.

Доказательство.

$\Rightarrow$ Если $Ax + By + C = 0$, то её направляющий вектор ненулевой, а значит вектор $(-B, A)$ ненулевой, то есть одна из его координат $\neq 0$.

$\Leftarrow$ Пусть без ограничения общности $A \neq 0$. Тогда этому уравнению удовлетворяет точка $(x_0, y_0) = (-\frac{C}{A}, 0)$, а значит (нетрудно проверить) все удовлетворяющие ему точки имеют вид $(x_0 + Bt, y_0 - At)$, что соответствует прямой с такими параметрическими уравнениями. $\square$

3.2 Взаимное расположение прямых

Теорема. Прямые на плоскости параллельны (или совпадают) $\Leftrightarrow$ их направляющие векторы пропорциональны.

Доказательство. Пусть $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - данные прямые. Рассмотрим систему уравнений, которой удовлетворяют координаты точек, принадлежащих обоим прямым: $\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$

Из курса алгебры (форумла Крамера) известно, что система не является определённой $\Leftrightarrow det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 0$. Таким образом, прямые параллельны или совпадают $\Leftrightarrow$ имеют 0 или бесконечно много общих точек $\Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Leftrightarrow$ $(A_1\ B_1)$ пропорционален $(A_2\ B_2)$, ч.т.д. □

Замечание. Из этого также видно, что прямые совпадают $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Следствие. Прямые $l_1 : \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t \end{cases}$ $; l_2 : \begin{cases} x = x_2 + a_2t \\ y = y_2 + b_2t \end{cases}$ пересекаются $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Условие совпадения прямых также можно записать через параметрические уравнения (вектор $(x_2 - x_1\ y_2 - y_1) = \lambda(a, b)$).

Следствие. Через две различные точки проходит ровно одна прямая (все такие прямые совпадают).

3.3 Пучки прямых

Определение. Собственным пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через данную точку, называемую центром пучка.
Несобственным пучком прямых называется множество всех прямых, параллельных данной прямой.

Теорема. Пусть прямые $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают собственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая l принадлежит пучку $\Leftrightarrow l$ задаётся уравнением $\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ $(*)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$\Leftarrow$ Пусть l задаётся уравнением $(*)$. Тогда, подставив в уравнение l центр пучка (x_0, y_0), получим $\lambda(0) + \mu(0) = 0$ (т.к. центр удовлетворяет уравнениям l_1, l_2).

$\Rightarrow$ Пусть $(x_0, y_0) \in l$. Возьмём произвольную точку $(x_1, y_1) \in l, (x_1, y_1) \neq (x_0, y_0)$. Рассмотрим прямую вида $(*)$ с $\lambda = -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2),\ \mu = (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) : -(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) + (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$. Заметим, что это уравнение действительно задаёт прямую: в противном случае необходимы условия $\lambda A_1 + \mu A_2 = \lambda B_1 + \mu B_2 = 0$, но тогда (A_1, B_1) и (A_2, B_2) пропорциональны, а исходные прямые непараллельны. Такой прямой, очевидно, принадлежат точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Так как через две различные точки проходит ровно одна прямая, любая прямая из собственного пучка имеет вид $(*)$, ч.т.д. □

Теорема. Пусть прямые $l_1 : A_1x+B_1y+C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x+B_2y+C_2 = 0$ задают несобственный пучок (т.е. содержатся в нём и не совпадают). Тогда прямая l принадлежит пучку $\Leftrightarrow$ l задаётся уравнением $\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2) = 0$ $(*)$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
$\Leftarrow$ Так как $l_1 \parallel l_2$, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. Тогда если l имеет вид $(*)$, то $\frac{\lambda A_1 + \mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu A_2}{A_1} = \lambda + \frac{\mu B_2}{B_1} = \frac{\lambda B_1 \mu B_2}{B_1} \Rightarrow l \parallel l_1$.
$\Rightarrow$ Пусть l принадлежит пучку. Так как направляющие векторы l, l_1 и l_2; пропорциональны, можем домножить уравнения на числа так, что коэффициенты перед переменными станут равны: пусть $l_1 : Ax + By + C_1 = 0$; $l_2 = Ax + By + C_2 = 0$; $l = Ax + By + C_3 = 0$.Тогда возьмём λ, μ из следующей системы: $\begin{cases} C_1\lambda + C_2\mu = C_3 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{C_3 - C_2}{C_1 - C_2} \\ \mu = \frac{C_1 - C_3}{C_1 - C_2} \end{cases}$ ($C_1 \neq C_2$, иначе l_1 и l_2 совпадают). Очевидно, что для таких λ, μ уравнение l имеет вид $(*)$ (проверяется несложной подстановкой), ч.т.д. □

3.4 Отрезки

Определение. Пусть l - прямая, $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in l$ и $X_1 \neq X_2$. Отрезком с концами X_1, X_2 на плоскости называется множество всех точек, лежащих между X_1 и X_2 (на прямой l). Обозначается $[X_1, X_2]$.

Вывод формулы (Уравнение отрезка)**.** Пусть $X \in [X_1, X_2]$. Тогда знаем, что
$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} (X \in l) \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$t\overrightarrow{X_1X_2} = \overrightarrow{X_1X} \Rightarrow \overrightarrow{XX_2} = (1-t)\overrightarrow{X_1X_2}$. Отсюда видно, что $|\overrightarrow{X_1X}|$ и $|\overrightarrow{XX_2}| <$

$|\overrightarrow{X_1X_2}| \Leftrightarrow t \in [0,1]$. Отсюда

$$\boxed{X \in [X_1, X_2] \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ t \in [0,1] \end{cases}}$$

Утверждение. На плоскости выполяются вторая и третья аксиомы порядка.

Доказательство. Формульно зададим множества, на которые точка (x, y) делит прямую l (лучи без начала): $\{X : X(x,y) + \lambda\bar{v}, \lambda > 0\}(\lambda < 0)$, где $\bar{v}$ - произвольный направляющий вектор l. Без ограничения общности, пусть у $\bar{v}$ первая координата ненулевая (хотя бы одна ненулевая, т.к. вектор ненулевой). Тогда эти множества можно представить так: $\{X(x_1, y_1) : x_1 > x\}(x_1 < x)$ Тогда (x, y) лежит на отрезке между любыми двумя точками из разных множеств (несложно проверить), т.е. вторая аксиома порядка выполнена.
Для третьей аксиомы небходимо в одном из этих множеств найти точку на расстоянии d от (x, y). Тогда из условия на расстояние имеем: $|\lambda\bar{v}| = a$, т.е. $|\lambda| = \frac{a}{|\bar{v}|}$. Так как знак λ определяет, какому множеству принадлежит точка, в каждом из множеств такая точка существует и единственная, т.е. третья аксиома выполнена. $\square$

Определение. Отрезком в произвольном аффинном пространстве называется множество точек $[X_1, X_2] = \{X_1 + t\overrightarrow{X_1X_2}, t \in [0,1]\}$

Определение. Множество X в произвольном аффинном пространстве называется выпуклым, если $\forall\ X_1, X_2 \in X \quad [X_1, X_2] \subset X$.

Определение. Пусть в аффинной системе координат $l : Ax + By + C = 0$. Множества $\Pi_0^+ = \{X(x,y) : Ax + By + C \geqslant 0\}$ и $\Pi_0^- = \{X(x,y) : Ax + By + C \leqslant 0\}$ называются замкнутыми полуплоскостями, а множества $\Pi^+ = \{X(x,y) : Ax + By + C > 0\}$ и $\Pi^- = \{X(x,y) : Ax + By + C < 0\}$ - открытыми полуплоскостями.

Теорема. Для любой прямой $l : Ax + By + C = 0$ множества $\Pi_0^+, \Pi_0^-, \Pi^+, \Pi^-$ выпуклы.

Доказательство. Рассмотрим Π_0^+ (остальные аналогично).
Пусть $X_1(x_1, y_1), X_2(x_2, y_2) \in \Pi_0^+$. Знаем, что любая точка $X \in [X_1, X_2]$ имеет координаты $(tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2), 0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + C \geqslant 0 \\ Ax_2 + By_2 + C \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tAx_1 + tBy_1 + tC \geqslant 0 \\ (1-t)Ax_2 + (1-t)By_2 + (1-t)C \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A(tx_1 + (1-t)x_2) + B(ty_1 + (1-t)y_2) + C = 0 \Rightarrow X \in \Pi_0^+$, ч.т.д. $\square$

Следствие. На плоскости выполняется четвёртая аксиома порядка.

3.5 Угол между двумя прямыми

Определение. Пусть l - прямая, $O \in l, \bar{v}$ - любой направляющий вектор l. Множества $l^+ = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \geqslant 0\}$ и $l^- = \{O + \lambda\bar{v}, \lambda \leqslant 0\}$ называются лучами, на которые O делит l.

Замечание. Если даны два луча с общим началом (обозначим их l_1^+, l_2^+), то они являются подмножествами однозначно определённых прямых l_1, l_2, для которых можно выбрать направляющие векторы так, чтобы лучи соответствовали формуле из определения (назовём эти векторы $\bar{v}_1, barv_2$).

Определение. Углом на плоскости называется объединение двух лучей с общим началом. Величиной угла $l_1^+ \cap l_2^+$ называется величина угла между векторами $\bar{v}_1, \bar{v}_2$, определёнными как в замечании. Говорят, что один угол меньше другого, если величина первого угла меньше величины второго.

Определение. Угол называется прямым, если его величина равна $\frac{\pi}{2}$($\Leftrightarrow$ направляющие векторы лучей ортогональны). Угол называется развёрнутым, если его величина равна π($\Leftrightarrow$ образующие угол лучи дополняют друг друга до прямой).

Замечание. В дальнейшем будем иногда называть углом величину угла. Также аналогичным образом можно говорить о величине угла между вектором и прямой

Определение. Углом между двумя прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами с началом в их точке пересечения этих прямых и лежащих на этих прямых, если прямые пересекаются. Если прямые параллельны или совпадают, то угол между ними равен нулю. Обозначается $\angle(l_1 l_2)$.

Определение. Прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.

Определение. Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную прямую, называется прямая, проходящая через точку и перпендикулярная прямой, либо отрезок этой прямой с концами в данной точке и точке пересечения прямой с данной.

Вывод формулы (Угол между прямыми в прямоугольной с.к.). Пусть $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ - прямые в прямоугольной системе координат. Тогда их направляющие векторы равны $\begin{pmatrix} -B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \bar{v}_1, \begin{pmatrix} -B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = \bar{v}_2$. Отсюда (выражение скалярного произведения): $\cos\angle(l_1, l_2) = |\cos\angle(\bar{v}_1, \bar{v}_2)| \Rightarrow$

$$\boxed{\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

(модуль в косинусе, а соответственно и в числителе формулы, позволяет сразу взять меньший угол).

Следствие. Прямые $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ перпендикулярны $\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

3.6 Расстояние от точки до прямой

Определение. Нетрудно проверить, что в прямоугольной системе координат вектор $\bar{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ перпендикулярен вектору $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$, а значит и прямой $l : Ax + By + C = 0$. Вектор $\bar{n}$ называется нормалью (нормальным вектором) прямой l (в прямоугольной с.к.)

Замечание. Любой вектор, коллинеарный нормали, также является нормалью, так как уравнения $Ax + By + C = 0$ и $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ задают одну и ту же прямую.

Определение. Пусть A, B - множества в точечно-евклидовом пространстве. Расстоянием от A до B называется число $\inf\{|XY|, X \in A, Y \in B\}$ Расстояние от точки до прямой определяется аналогично. когда $A = \{X\}$ (его часто обозначают $d(X, l)$).

Замечание. У множества из определения существует верхняя грань, т.к. оно является ограниченным снизу подмножеством действительных чисел (принцип полноты Вейерштрасса из курса математического анализа).

Теорема. Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Доказательство. Пусть заданы $l : Ax+By+C = 0$ и X_0 - произвольные прямая и точка. Выберем на l произвольную точку X_1. Проведём через X_0 прямую

l' с направляющим вектором $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ - она будет перпендикулярна l, а значит имеет с ней единственную общую точку - назовём её X_2. Имеем: $|\overrightarrow{X_1X_0}|^2 = (\overrightarrow{X_1X_0}, \overrightarrow{X_1X_0}) = (\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_0}, \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_0}) = |\overrightarrow{X_1X_2}|^2 + |\overrightarrow{X_2X_0}|^2 \geqslant |\overrightarrow{X_2X_0}|^2$. Отсюда $|\overrightarrow{X_2X_0}|^2$ - минимум всех расстояний между X и точкой прямой, т.е. он достигается в точке пересечения l и l', ч.т.д. $\square$

Замечание. Расстояние между двумя прямыми на плоскости $\neq 0 \Leftrightarrow$ они параллельны и не совпадают (у них нет общих точек). В этом случае расстояние между ними равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой.

Вывод формулы (Расстояние от точки до прямой в прямоугольной с.к.)**.** Пусть $X_0 = (x_0, y_0), l : Ax + By + C = 0$. Посчитаем $d(X_0, l)$. Проведём через X_0 перпендикуляр l' к прямой l. Направляющий вектор l' - $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, то есть его параметрические уравнения - $\begin{cases} x = x_0 + At \\ y = y_0 + Bt \end{cases}$. Найдём t_1, удовлетворяющее точке пересечения: имеем $A(x_0 + At_1) + B(y_0 + Bt_1) + C = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$.
Отсюда точка пересечения X_1 имеет координаты $(x_0 + At_1, y_0 + Bt_1)$. Тогда $\overrightarrow{X_0X_1} = \begin{pmatrix} At_1 \\ Bt_1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{X_0X_1}|^2 = A^2t_1^2 + B^2t_1^2 = (A^2 + B^2)t_1^2 = \frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}$, а значит

$$\boxed{d(X, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

4 Преобразования координат

4.1 Преобразования координат векторов. Матрица перехода

Вывод формулы (Матрица перехода)**.** Пусть $E = (\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n)$ и $E' = (\bar{e}'_1, ..., \bar{e}'_n)$ - два базиса в одном и том же евклидовом пространстве V. Будем называть E старым базисом, а E' - новым. Получим формулу для координат в старом базисе вектора $\bar{x} \in V$, заданного в новом базисе координатами $(x'_1, ..., x'_n)$.
Итак, пусть в старом базисе $\bar{x}$ имеет координаты $(x_1, ..., x_n)$. Установим связь между базисами, выразив векторы нового базиса через старый: пусть

$\bar{e}'_i = c_{1i}\bar{e}_1 + ... + c_{ni}\bar{e}_n$, т.е. $\bar{e}'_i = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$. Подставляя эти выражения, получим:

$\bar{x} = x'_1\bar{e}'_1 + ... + x'_n\bar{e}'_n = x'_1(c_{11}\bar{e}_1 + ... + c_{n1}\bar{e}_n) + ... + x'_n(c_{1n}\bar{e}_1 + ... + c_{nn}\bar{e}_n) =$
$= (c_{11}x'_1 + ... + c_{1n}x'_n)\bar{e}_1 + ... + (c_{n1}x'_1 + ... + c_{nn}x'_n)\bar{e}_n \Rightarrow$ (из равенства координат)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & ... & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

Определение. Такая матрица C называется матрицей перехода от базиса E к базису E'.

Замечание. Столбцы матрицы C являются координатами базисных векторов E' в базисе $E \Rightarrow$ столбцы C линейно независимы $\Rightarrow C$ невырожденная (из курса алгебры).

Вывод формулы. Рассмотрим также скалярное произведение векторов в случае, когда базис E ортонормированный. Если $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ (в базисе E), имеем: $(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} C^T C \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$ (так как $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \left(C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \right)^T$). Нетрудно видеть, что произведение матриц C^TC имеет вид $G = \begin{pmatrix} (\bar{e}'_1, \bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_1, \bar{e}'_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\bar{e}'_n, \bar{e}'_1) & \dots & (\bar{e}'_n, \bar{e}'_n) \end{pmatrix}$ (строки C^T и столбцы C - координаты векторов базиса E' в базисе E)

Такая матрица называется матрицей Грама (матрицей скалярных произведений) для базиса E'. Так как матрица G не зависит от базиса E, получаем формулу для скалярного произведения в произвольном базисе:

$$\boxed{(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} x'_1 & \dots & x'_n \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}}$$

Следствие (1)**.** Если C и C_1 - матрицы перехода от базиса E к E' и от E' к E'' соответственно, то матрица перехода от базиса E к E'' равна CC_1

Следствие (2)**.** Если C - матрица перехода от базиса E к E', то матрица перехода от базиса E' к E равна C^{-1}.

Замечание. Пусть $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ - базис векторного пространства V. Тогда векторы $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n \in V$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ столбцы их координат линейно независимы. Это очевидно следует из представления линейной комбинации $\lambda_1\bar{x}_1 + ... + \lambda_n\bar{x}_n = 0$ через координаты.

Теорема. Для произвольного данного базиса матрица C является матрицей перехода к некоторому другому базису $\Leftrightarrow \det C \neq 0$.

Доказательство. Следует из утверждения из курса алгебры о том, что матрица невырожденна $\Leftrightarrow$ её столбцы линейно независимы ($\Leftrightarrow$ векторы-столбцы образуют базис). $\square$

4.2 Преобразования координат точек

Вывод формулы (Координаты точки при перемене с.к.)**.** Пусть заданы два репера $O\bar{e}_1...\bar{e}_n$ и $O'\bar{e}'_1...\bar{e}'_n$. Для этого необходимо задать новый репер через старый: пусть C - матрица перехода от $\bar{e}_1, ..., \bar{e}_n$ к $\bar{e}'_1...\bar{e}'_n$, а вектор $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$.

Пусть X - произвольная точка с координатами $(x_1, ..., x_n)$ в старой системе координат и $(x'_1, ..., x'_n)$ в новой. Тогда $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Также $\overrightarrow{O'X} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в новой с.к. $\Rightarrow C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ в старой. Осталось заметить, что $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'X}$, а отсюда (через старую с.к.)

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}}$$

Выразим новые координаты, умножив слева на C^{-1}:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = -C^{-1}\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + C^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

(отметим также, что $-C^{-1}\begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$ - новые координаты вектора $O'O$)

4.3 Ортогональные матрицы

Определение. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому называется ортогональной.

Теорема. Для $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$ следующие утверждения равносильны:

1. C - ортогональная;
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij}$ ("скалярное произведение"столбцов равно δ_{ij});
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}$ ("скалярное произведение"строк равно δ_{ij});
4. $CC^T = E$;
5. $C^TC = E$;
6. $C^T = C^{-1}$;

Доказательство. (в конспекте указан "прямой подсчёт")
Для начала заметим равносильность утверждений 4,5,6: 4 $\Leftrightarrow$ 5 (получаются друг из друга транспонированием обоих частей равенства), а 6 равносильно им по определению обратной матрицы.
1 $\Rightarrow$ 2: Столбцы матрицы С - координаты векторов ортонормированного базиса E в другом ортонормированном базисе E'. Рассмотрим скалярное произведение $(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j)$: с одной стороны оно равно $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj}$ (так как базис E ортонормирован, можем применять формулу с матрицей Грама, причём $G = E$ из ортонормированности E_1), а с другой стороны - δ_{ij} (из ортонормированности E_1).

1 $\Leftarrow$ 2: Из 2 знаем, что векторы с координатами в столбцах попарно ортогональны и имеют длину 1 в базисе, в котором записаны эти координаты. Значит, применив такое преобразование к векторам ортонормированного базиса, получим также попарно ортогональные векторы длины 1, т.е. C - ортогональная.
2 $\Leftrightarrow$ 5: Оба условия равносильны тому, что элемент C^TC на позиции ij равен δ_{ij}.
Аналогично 3 $\Leftrightarrow$ 4.
Итого 1 $\Leftrightarrow$ 2 $\Leftrightarrow$ 5 $\Leftrightarrow$ 6 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 3. □

Следствие. Для ортогональной $C : |C^T| = |C|,\ |C^TC| = |E| = 1 \Rightarrow |C| = \pm 1$

Следствие. (Из определения ортогональной матрицы)
Произведение ортогональных матриц - ортогональная матрица.
Матрица, обратная ортогональной, ортогональна.

Вывод формулы. (Двумерный случай ортогональной матрицы)
$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ортогональна $\Rightarrow a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow \exists \varphi : a = \cos\varphi, c = \sin\varphi$.
Из теоремы $a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\sin\varphi,\ d = \pm\cos\varphi$.
Из ортогональности столбцов $ab + cd = 0$, поэтому остаются следующие случаи:

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};\quad C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}}$$

т.е. для любой ортогональной C найдётся φ такой, что C имеет один из видов выше. Несложно также убедиться, что любая матрица такого вида ортогональна: первая производит поворот на угол φ, а вторая - поворот с отражением.

4.4 Ориентация

Определение. Два базиса в конечномерном векторном пространстве называются одинаково ориентированными (одноимёнными), если матрица перехода от одного базиса к другому имеет положительный определитель. В противном случае базисы называются противоположно ориентированными (разноимёнными).

Теорема. Отношение одноимённости является отношением эквивалентности на множестве базисов.

Доказательство. По определению отношения эквивалентности:

- рефлексивность: матрица перехода от базиса в себя равна E, $|E| = 1$;

- симметричность: $C: E \to E' \Rightarrow C^{-1}: E' \to E$, причём $|CC^{-1}| = 1$, т.е. $|C|$ и $|C^{-1}|$ одного знака;

- транзитивность: $C: E \to E',\ C': E' \to E'', C'': E \to E'' \Rightarrow C'' = CC'$, т.е. из одноимённостей E с E' и E' с E'' следует одноимённость E с E''.

$\square$

Определение. Ориентацией векторного пространства, а также любого аффинного пространства, с которым оно ассоциировано, называется выбор любого из двух классов эквивалентности по отношению одноимённости и объявления базисов в нём положительными (а остальных - отрицательными).
(Достаточно выбрать один базис и объявить его положительным)

Примеры. Ориентации различных пространств:

1. **Прямая**: Достаточно выбрать направляющий вектор (базис), и объявить его положительным. Матрица перехода на прямой - число (любые два вектора коллинеарны), и сонаправленность векторов (одноимённость базисов) зависит от знака этого числа.

2. **Плоскость**: Достаточно выбрать пару неколлинеарных векторов (базис), и объявить его положительным. Заметим, что пары $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{b}, \bar{a}$ разноимённы ($C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$).

   Посмотрим, когда пары $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}'$ одноимённые. Рассмотрим произвольную прямую l с направляющим вектором $\bar{a}$ и любую точку $O \in l$. В репере $O\bar{a}\bar{b}$ уравнение l имеет вид $y = 0$. Подставив в это уравнение координаты $\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, получим 1.

   Пусть $\bar{b}' = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} \Rightarrow$ матрица перехода между парами C равна $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
   $|C| > 0 \Leftrightarrow \mu > 0 \Leftrightarrow$ при подстановке координат $\bar{b}'$ в уравнение l результат будет $> 0 \Leftrightarrow$ точки B, B' с радиус-векторами $\bar{b}, \bar{b}'$ лежат в одной полуплоскости относительно l.
   Получили **критерий одноимённости пар $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}'$: они одноимённы $\Leftrightarrow$ точки, полученные прибавлением векторов $\bar{b}$ и $\bar{b}'$ к произвольной точке произвольной прямой с направляющим вектором $\bar{a}$, лежат относительно неё в одной полуплоскости.**

4.5 Угол от вектора до вектора

Определение. Углом от вектора $\bar{a}$ до вектора $\bar{b}$ в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, взятый со знаком плюс, если пара $\bar{a}, \bar{b}$ положительно ориентирована, и со знаком минус иначе.

Определение. Положительным углом от $\bar{a}$ до $\bar{b}$ называется угол φ от $\bar{a}$ до $\bar{b}$, если $\varphi > 0$, и угол $2\pi + \varphi$, если $\varphi < 0$.

Определение. Углом от прямой l_1 до прямой l_2 в ориентированном двумерном евклидовом пространстве называется наименьший положительный угол от направляющего вектора l_1 до направляющего вектора l_2.

Вывод формулы. (Известное ранее уравнение прямой. Угол наклона)
Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2$ и в ней прямая l определена уравнением $y = kx + b \Leftrightarrow kx - y + b = 0$. Прямая с направляющим вектором e_1 называется **осью абсцисс**, а угол от этой прямой до прямой l - **углом наклона** прямой l.

Подсчитаем угол наклона l. Направляющие векторы l имеют вид $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda k \end{pmatrix}$, причём φ, очевидно, зависит только от знака λ. Угол от $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ до $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm k \end{pmatrix}$ равен углу от $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ до $\begin{pmatrix} \mp 1 \\ \mp k \end{pmatrix}$, поэтому выбирать наименьший можем только из положительных углов от вектора $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ - наименьшим, как нетрудно видеть, будет угол до $\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ при $k > 0$ и до $\begin{pmatrix} -1 \\ -k \end{pmatrix}$ иначе. Обозначив нужный вектор $\bar{k}$, имеем:

$$\cos\varphi = \cos\angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \sin\angle(\bar{e}_1, \bar{k}) = \pm\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \pm k$$

Заметим, что при $k > 0$ необходимый угол должен иметь тангенс, больший нуля, а при $k < 0$ - меньший нуля. Отсюда видно, что вне зависимости от нужного нам вектора верно:

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = k}$$

4.6 Площади фигур на плоскости

Определение. Фигуры Φ_1, Φ_2 называются конгруэнтными, если $\exists$ отображение $f : \Pi \to \Pi$, сохраняющее расстояния $(|f(A)f(B)| = |AB| \ \forall A, B)$ такое, что

$f(\Phi_1) = \Phi_2$.

Определение. Площадь(мера) на евклидовой плоскости - численная величина (обозначается S_Φ, Φ - фигура), соответствующая следующим свойствам:

1. Площадь квадрата со стороной 1 равна 1;
2. Площади конгруэнтных фигур равны;
3. Если Φ_1, Φ_2 - фигуры, $\exists\ S_{\Phi_1}, S_{\Phi_2}$ и $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$, то $\exists S_{\Phi_1 \cup \Phi_2} = S_{\Phi_1} + S_{\Phi_2}$;
4. Если Φ - фигура и существуют такие последовательности фигур $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\varphi_n \subset \varphi_{n+1} \subset \Phi \subset \Phi_{n+1} \subset \Phi n\ \forall n \geqslant 1$, причём $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\varphi_n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\Phi_n}$ существуют и равны, то $S_\Phi = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\varphi_n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{\Phi_n}$

Следствие. (Площади некоторых фигур:)

- Площадь отрезка равна 0.

  Доказательство. Из предельного перехода (Площадь отрезка с длиной 1 равна 0, иначе площадь квадрата со стороной 1 не была бы конечной, а из этого можно получить длину любого отрезка). $\square$

- Площадь квадрата со стороной a равна a^2.

  Доказательство. Для $a = \frac{1}{n}$ разбиваем квадрат со стороной 1 на n^2 квадратиков, для $a \in \mathbb{Q}$ складываем квадрат со стороной $\frac{m}{n}$ из предыдущих, для $a \notin \mathbb{Q}$ приближаем квадрат сверху и снизу квадратами с рациональными сторонами и переходим к пределам (по 4 пункту определения). $\square$

- Площадь прямоугольника со сторонами a, b равна ab.

  Доказательство. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b$. Его можно разбить на квадрат со стороной a, квадрат со стороной b и два нужных нам прямоугольника. Отсюда $2S = (a + b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab \Rightarrow S = ab$. $\square$

Отсюда также выводятся формулы площади параллелограмммма (перестановкой треугольника из параллелограмммма получается прямоугольник) и треугольника (как половины параллелограмммма).

Определение. Говорят. что параллелограмм натянут на векторы $\bar{a}, \bar{b}$, если для одной из вершин A параллелограмма точки $A + \bar{a}$ и $A + \bar{b}$ также являются его вершинами. Площадь параллелограмммма, натянутого на векторы $\bar{a}, \bar{b}$, обозначается $S_{\bar{a},\bar{b}}$.

Вывод формулы. (Площадь параллелограммма в прямоугольной с.к.)
Нам уже известно, что $S_{\bar{a},\bar{b}} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$ (из выражения высоты параллелограммма через угол). В прямоугольной системе координат:

$$S^2_{\bar{a},\bar{b}} = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin\varphi = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2(1-\cos^2\varphi) = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a},\bar{b})^2$$

Если $\bar{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, то $S^2_{\bar{a},\bar{b}} = (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) - (x_1x_2+y_1y_2) = (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \Rightarrow$

$$\boxed{S_{\bar{a},\bar{b}} = |\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}|}$$

При этом определитель $> 0 \Leftrightarrow \bar{a},\bar{b}$ одноимённа с базисом.

Определение. Ориентированной площадью параллелограммма, натянутого на $\bar{a},\bar{b}$, на ориентированной плоскости называется число, равное $S_{\bar{a},\bar{b}}$, если пара $\bar{a},\bar{b}$ положительна, и $-S_{\bar{a},\bar{b}}$ иначе. Обозначается $<\bar{a},\bar{b}>$.

Следствие. В любом положительно ориентированном базисе $<\bar{a},\bar{b}> = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

Утверждение. Свойства ориентированной площади:

1. $<\bar{a},\bar{b}> = -<\bar{b},\bar{a}>$
2. $<\lambda\bar{a},\bar{b}> = \lambda<\bar{a},\bar{b}> = <\bar{a},\lambda\bar{b}>$
3. $<\bar{a}+\bar{b},\bar{c}> = <\bar{a},\bar{c}> + <\bar{b},\bar{c}>$
   $(<\bar{a},\bar{b}+\bar{c}> = <\bar{a},\bar{b}> + <\bar{a},\bar{c}>; <\bar{a}-\bar{b},\bar{c}> = <\bar{a},\bar{c}> - <\bar{b},\bar{c}>)$

Доказательство. Следует из свойств определителя. □

Мораль в том, что дальше очев...
(по свойствам производной, которые уже написал yakovlevki)