

# I. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

## Аудиторные задачи

1. В магазин поступило 30 новых цветных телевизоров, среди которых 5 имеют скрытые дефекты. Наудачу отбирается один телевизор для проверки. Какова вероятность, что он не имеет скрытых дефектов?
2. Подбрасываются 2 игральные кости. Найти вероятности указанных событий:  $A = \{\text{числа очков на обеих костях совпадают}\}$ ,  $B = \{\text{число очков на первой кости больше, чем на второй}\}$ ,  $C = \{\text{сумма очков четна}\}$ ,  $D = \{\text{сумма очков больше двух}\}$ ,  $E = \{\text{сумма очков не меньше пяти}\}$ ,  $F = \{\text{хотя бы на одной кости появится цифра 6}\}$ ,  $G = \{\text{произведение выпавших очков равна 6}\}$ .
3. На шахматную доску случайным образом ставят 2 ладьи. Какова вероятность того, что они не побьют друг друга?
4. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают 5 человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности событий:  $A = \{\text{будут выбраны одни третьекурсники}\}$ ,  $B = \{\text{все первокурсники попадут на конференцию}\}$ ,  $C = \{\text{не будет выбрано ни}$

одного второкурсника},  $D = \{\text{будут выбраны 2 первокурсника и 2 второкурсника}\}$ ,  $E = \{\text{будут выбраны 4 второкурсника}\}$ .

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написаны на пяти карточках. Наугад последовательно выбираются три карточки, и вытянутые таким образом цифры ставятся слева направо. Найти вероятность того, что полученное при этом трехзначное число будет четным.

6. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности событий:  $A = \{\text{числа будут записаны в порядке возрастания}\}$ ,  $B = \{\text{числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания}\}$ ,  $C = \{\text{числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом и в порядке возрастания}\}$ .

7.  $n$  мужчин и  $n$  женщин случайным образом рассаживаются в ряд на  $2n$  мест. Найти вероятности событий:  $A = \{\text{никакие два мужчины не будут сидеть рядом}\}$ ,  $B = \{\text{все мужчины будут сидеть рядом}\}$ .

8. Общество состоит из 5 мужчин и 10 женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке их на 5 групп по три человека в каждой группе будет мужчина.

9. Из разрезной азбуки выкладывается слово «Математика». Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится это слово?

10. Для уменьшения числа игр  $2n$  футбольных команд, среди которых 2 призера предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на 2 подгруппы по  $n$  команд каждая. Какова вероятность  $q_n$  того, что обе команды–призеры попадут в разные группы?

### Домашние задачи

11. Автомат изготавливает однотипные детали, причем технология изготовления такова, что 5% произведенной продукции оказывается бракованной. Из большой партии взята наудачу одна деталь для контроля. Найти вероятность события  $A = \{\text{деталь бракованная}\}$ .

12. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность событий:  $A = \{\text{число читается одинаково как слева направо, так и справа налево (например, 13531)}\}$ ,  $B = \{\text{число кратно пяти}\}$ ,  $C = \{\text{число состоит из нечетных цифр}\}$ .

- 13.** Бросаются 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпадет по одинаковому числу очков.
- 14.** В ящике комода лежат 10 носков черного цвета и 6 носков в зеленую полосочку. Наудачу вынимаются 3 носка. Найти вероятность того, что образовалась пара.
- 15.** Чайный сервиз на 6 персон состоит из 6 чашек, 6 блюдец, чайника, сахарницы и молочника. Во время ссоры нигде не работающая Клава запустила в своего друга Григория тремя первыми попавшимися под руку предметами из сервиза. Какова вероятность того, что не пострадали чашки? (Указание: считать, что предметы попадались Клавe под руку совершенно случайно.)
- 16.** В урне 7 белых, 3 черных и 2 красных. Наудачу достают 2 шара. Найти вероятность того, что они оба окажутся одного цвета.
- 17.** В урне 5 белых шаров, 3 черных и 6 красных. Наудачу достают 5 шаров. Какова вероятность того, что в выборку попадут 2 белых, 2 черных и 1 красный шар.

**18.** Из группы, где 8 мужчин и 5 женщин, наудачу выбрали 3 человека. Найти вероятность того, что среди выбранных лиц будет а) по крайней мере, одна женщина, б) по крайней мере две женщины.

**19.** В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 женщины?

**20.** 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?

**21.** Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита {а, б, к, о, м} и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово "мама"?

**22.** Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации равновероятны, найти вероятности событий:  $A = \{\text{четыре последние цифры номера одинаковы}\}$ ,  $B = \{\text{все цифры различны}\}$ ,  $C = \{\text{номер начинается с цифры 5}\}$ ,  $D = \{\text{номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2}\}$ .

### **Дополнительные задачи**

**Д1.** Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?

**Д2.** Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности событий:  $A = \{\text{в состав нового алфавита входит буква } a\}$ ,  $B = \{\text{в состав нового алфавита входят только согласные буквы}\}$ .

**Д3.** Полная колода карт (52 карты) делится пополам. Найти вероятность того, что количество черных и красных карт в обеих пачках одинаковым.

**Д4.** В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события  $A = \{\text{вошедшему удастся открыть дверь за один час}\}$ ?

**Решение.**  $A = \{\text{вошедшему удастся открыть дверь за один час}\}$ ,  $N = 3 \cdot 60 = 180$  – число попыток за час,  $B_k = \{\text{вошедшему удастся открыть с } k\text{-й попытки}\}$ ,  $n = A_{10}^3 = 720$  – количество кодов:

$$\mathbf{P}(B_k) = \frac{A_{n-1}^{k-1} \cdot 1}{A_n^k} = \frac{1}{n}, \quad \mathbf{P}(A) = \frac{N}{n} = \frac{180}{720} = \frac{1}{4}$$

**Д5.** 9 пассажиров наудачу рассаживаются в трех вагонах. Найти вероятность того, что а) в каждый вагон сядет по 3 пассажира; б) в один вагон сядут 4, в другой – 3 и в третий – 2 пассажира.

**Решение.** Число всех случаев  $n = 3^9$ .

$A = \{\text{в каждый вагон сядет по 3 пассажира}\}$ ,  $B = \{\text{в один вагон сядут 4, в другой – 3 и в третий – 2 пассажира}\}$

$$P(A) = \frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3^9} \quad P(B) = \frac{C_9^4 C_5^3 C_2^2 \cdot 3!}{3^9}$$



**Д6.** 52 карты раздаются четверем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности событий:  $A = \{\text{каждый игрок получит туза}\}$ ,  $B = \{\text{первый игрок получит все 13 карт одной масти}\}$ ,  $C = \{\text{все тузы попадут к одному из игроков}\}$ ,  $D = \{\text{двое определенных игроков не получают ни одного туза}\}$ .

**Решение.** Схема получения элементарного исхода: раздаем 13 карт 1-му игроку, задам 2-му и т.д.

$$n = C_{52}^{13} C_{39}^{13} C_{26}^{13} = \frac{52!}{13!13!13!13!},$$

$$m_A = C_4^1 C_{48}^{12} C_3^1 C_{36}^{12} C_2^1 C_{24}^{12},$$

$$m_A = C_4^1 C_{48}^{12} C_3^1 C_{36}^{12} C_2^1 C_{24}^{12},$$

$$m_B = 4 \cdot C_{39}^{13} C_{26}^{13},$$

$$m_C = 4 \cdot C_{48}^9 C_{39}^{13} C_{26}^{13},$$

$$m_D = C_4^2 \cdot C_{48}^{13} C_{35}^{13} C_{26}^{13},$$

**Д7.** Ирочка Маслова наивно верит, что если она соберет 20 разных наклеек от жевачек Барби и отошлет их по указанному адресу, то добрые тети и дяди пришлют ей взамен настоящую куклу Барби. Объясните Ирочке строго математически нереальность ее затеи, вычислив вероятность собрать 20 разных наклеек, купив ровно 20 жевачек. (Примечание: вероятность вытащить любую наклейку из произвольной жевачки одна и та же.)

**Д8.** Пустые горшочки с медом Винни-Пух ставит на полочку вместе с полными для того, чтобы вид уменьшающегося числа горшков не слишком портил ему настроение. В настоящий момент в Пуховом буфете попеременно стоят 5 горшочков с медом и 6 абсолютно пустых. Какова вероятность того, что в двух взятых на ужин горшочках окажется мед?

**Д10.**  $N$  человек случайным образом рассаживаются за круглым столом ( $N \geq 3$ ). Найти вероятность  $p$  того, что два фиксированных лица **A** и **B** окажутся рядом.

**Решение.**  $A = \{\text{два фиксированных лица } \mathbf{A} \text{ и } \mathbf{B} \text{ окажутся рядом}\}.$

$$P(A) = \frac{N \cdot 2! (N-2)!}{N!} = \frac{2}{N-1}$$

**Д11.** В одной урне 2 белых и 5 черных, во второй – 4 белых и 6 черных шаров. Наудачу достают по одному шару из каждой урны. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров окажется: а) один белый шар, б) два белых шара.

**Решение.**  $A = \{\text{среди вынутых шаров окажется один белый шар}\},$   
 $B = \{\text{среди вынутых шаров окажутся два белых шара}\}$

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 4}{7 \cdot 10} = \frac{32}{70}, \quad P(B) = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 10} = \frac{8}{70}.$$

**ОТВЕТЫ**

- 1.**  $5/6$  **2.**  $P(A) = 1/6$  **3.**  $7/9$  **4.**  $P(A) = 1/143$ ;  $P(B) = 2/91$ ;  $P(C) = 12/143$   
**5.**  $0,4$  **6.**  $P(A) = 1/9!$ ;  $P(B) = 1/9$ ;  $P(C) = 1/72$   
**7.**  $P(A) = 2(n!)^2 / (2n)!; P(B) = (n+1)(n!)^2 / (2n)!$  **8.**  $10!5!(3!)^5/2^515!$   
**9.**  $2!2!3!/10!$  **10.**  $n / (2n-1)$  **11.**  $0,05$ ;  $P(B) = 5/12$ ;  $P(C) = 1/2$ ;  $P(D) = 35/36$ ;  
 $P(E) = 5/6$ ;  $P(F) = 11/36$ ;  $P(G) = 1/9$ ; **12.**  $P(A) = 0,01$ ;  $P(B) = 0,2$ ;  $P(C) = 5/144$  **13.**  $1/216$  **14.**  $1$  **15.**  $12/65$  **16.**  $25/66$  **17.**  $90/1001$  **18.** а)  $115/143$ ; б)  
 $45/143$  **19.**  $18/35$  **20.**  $1/11$  **21.**  $1/625$  **22.**  $P(A) = 0,001$   
**Д1.**  $=0,932$ . **Д2.**  $P(A) = 1/2$ ;  $P(B) = 1/42$  **Д3.**  $(26!)^4/(13!)^452!$  **Д4.**  $0,25$ ;  $P(B)$   
 $= 0,0605$ ;  $P(C) = 0,1$ ;  $P(D) = 0,00021$  **Д5.** а)  $9!/(3!)^33^9$  б)  $3!9!/4!3!2!3^9$  **Д7.**  
 $20!/20^{20}$  **Д8.**  $2/11$  **Д9.** а)  $9!/(3!)^33^9$ ; б)  $9!/4!3!2!3^9$

## II. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

### Аудиторные задачи

1. На перекрестке установлен автоматический светофор, в котором одну минуту горит зеленый свет и полминуты – красный, затем снова одну минуту – зеленый и полминуты – красный и т.д. В случайный момент к перекрестку подъезжает автомобиль. Какова вероятность того, что он проедет перекресток без остановки?
2. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна  $a$ , а расстояние между их осями равно  $\ell$  ( $\ell > a$ )?
3. Значения  $a$  и  $b$  равновозможны в квадрате  $\{(a, b) : |a| \leq 1, |b| \leq 1\}$ . Найти вероятности событий:  $A = \{\text{корни квадратного трехчлена } x^2 + 2ax + b \text{ действительны}\}$ ,  $B = \{\text{корни квадратного трехчлена положительные}\}$ .

**4. (Задача Бюффона).** На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся на расстоянии  $2a$  друг от друга. На плоскость наудачу брошена тонкая игла длиной  $2\ell$  ( $\ell < a$ ). Найти вероятность того, что игла пересечет одну из прямых.

**См.** Гнеденко Б.В. курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 448 с.

**Решение.** Обозначим через  $x$  расстояние от центра иглы до ближайшей параллели и через  $\varphi$  – угол, составленный иглой с этой параллелью. Величины  $x$  и  $\varphi$  полностью определяют положение иглы. Всевозможные положения иглы определяются точками прямоугольника со сторонами  $\pi$  и  $a$ .

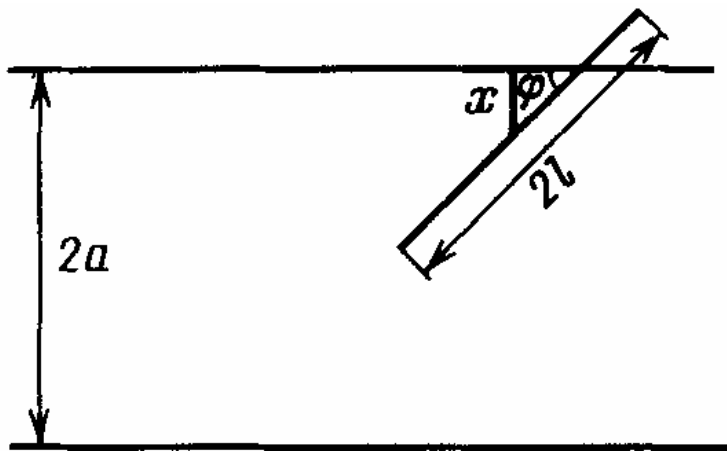


Рис. 1

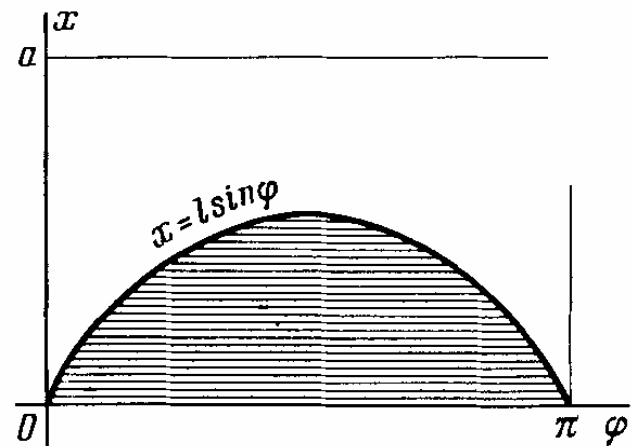


Рис. 2

Из рис.1 видно, что для пересечения иглы с параллелью необходимо и достаточно, чтобы  $x \leq \ell \sin \varphi$ . Искомая вероятность в силу сделанных предположений равна отношению площади заштрихованной на рис.2 области к площади прямоугольника

$$p = \frac{\int_0^{\pi} \ell \sin \varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2\ell}{a\pi}.$$

**5.** Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных изделий в партии из 1000 изделий. Найдите относительную частоту изготовления бракованных изделий.

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{изготовленная деталь бракованная}\}$ . Относительная частота события вычисляется по формуле

$$W_n(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{5}{1000}.$$

**6. (Парадокс Бертрана – детализация понятия случайности).** В круге радиуса  $R$  случайно проводится хорда. Найти вероятность того, что длина хорды больше стороны правильного треугольника, вписанного в окружность (центр хорды находится на диаметре, на биссектрисе центрального угла, в круге).

**Решение 1.** По соображениям симметрии можно заранее задать направление хорды. Проведем диаметр, перпендикулярный к этому направлению. Очевидно, что только хорды, пересекающие диаметр в промежутке от четверти до трех четвертей его длины, будут превосходить стороны правильного треугольника. Таким образом, искомая вероятность равна  $\frac{1}{2}$ .

**Решение 2.** По соображениям симметрии можно заранее закрепить один из концов хорды на окружности. Касательная к окружности в этой точке и две стороны правильного треугольника с вершиной в этой точке образуют три угла по  $60^\circ$ . Условию задачи благоприятствуют только хорды, попадающие в средний угол. Таким образом, при этом способе вычислений искомая вероятность оказывается равной  $\frac{1}{3}$ .



**Решение 3.** Чтобы определить положение хорды, достаточно задать ее середину. Чтобы хорда удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы ее середина находилась внутри круга, концентрического данному, но половинного радиуса. Площадь этого круга равна одной четверти площади данного; таким образом искомая вероятность равна  $1/4$ .

### Домашние задачи

**7.** Зритель собрался посмотреть по телевизору только один из двух намеченных фильмов, а именно тот который начнется транслироваться раньше. Как стало позднее известно, 2-й фильм начался в 10 часов, а 1-й в случайный момент времени между 9.30 и 10.15. Найти вероятность того, что зритель посмотрел 2-й фильм.

**Решение.** Исход – момент  $x$  начала трансляции 1-го фильма. Поскольку  $9^{30} \leq x \leq 10^{15}$ , то  $G = [9^{30}, 10^{15}]$ . Событию  $A = \{\text{зритель посмотрел 2-й фильм}\}$  соответствует область  $G_A = [10^{00}, 10^{15}]$ . Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{длина}(G_A)}{\text{длина}(G)} = \frac{15}{45}.$$

8. На плоскость с нанесенной на ней квадратной сеткой многократно бросается монета диаметра  $d$ , в результате чего установлено, что в 40% случаев монета не пересекает ни одной стороны квадрата. Оценить размер сетки.

**Решение.** Исход – попадание центра монеты в точку  $(x, y)$  одного из квадратов сетки (начало двумерной системы координат находится в левом нижнем углу этого квадрата  $G$ ). Длину стороны квадрата обозначим  $L$ . Событию  $A = \{\text{монета не пересекает ни одной стороны квадрата}\}$  соответствует квадрат  $G_A$ , находящийся внутри  $G$  на расстоянии  $d / 2$ . Длина стороны этого квадрата равна  $L - d$ . По условию

$$0,4 = \mathbf{P}(A) = \frac{S_{G_A}}{S_G} = \frac{(L - d)^2}{L^2}.$$

Осталось решить это уравнение относительно  $L$ .

**9.** Из отрезка  $[-1, 2]$  наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

**Решение.** Исход – выбор пары чисел  $(x, y)$  из отрезка  $[-1, 2]$ . Поэтому  $G = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$ . Событию  $A = \{\text{сумма чисел больше единицы, а произведение меньше единицы}\}$  соответствует область  $G_A = \{(x, y) \in G : x + y \geq 1, xy < 1\}$ . Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S_{G_A}}{S_G} = \frac{3^2 / 2 - \int_{0,5}^2 (2 - 1/x) dx}{3^2}.$$

**10.** Кусок проволоки длиной в 20 см был согнут в наудачу выбранной точке (точка сгиба равномерно распределена). После этого, перегнув проволоку еще в двух местах (не ломая ее) сделали прямоугольную рамку. Найти вероятность того, что площадь полученной рамки не превосходит  $21 \text{ см}^2$ .

**Решение.** Исход – точка сгиба  $x$  проволоки. Поскольку  $0 \leq x \leq 10$ , то  $G = [0, 10]$ . Событию  $A = \{ \text{площадь полученной рамки не превосходит } 21 \text{ см}^2 \}$  соответствует область  $G_A = \{ x \in G : x(10 - x) \leq 21 \}$ . Множество решений неравенства  $x(10 - x) \leq 21$ :  $x \geq 7 \cup x \leq 3$ . Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{длина}(G_A)}{\text{длина}(G)} = \frac{6}{10}.$$

**11.** Известный французский естествоиспытатель Бюффон провел 4040 подбрасываний монеты. При этом герб у него появился 2300 раз. Определить относительную частоту появления герба.

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{выпадет герб при бросании монеты}\}$ . Относительная частота события вычисляется по формуле

$$W_n(A) = \frac{m(A)}{n} = \frac{2300}{4040}.$$

### Дополнительные задачи

**Д1.** Внутри квадрата с вершинами  $(0,0), (1,0), (1,1)$  и  $(0,1)$  наудачу выбирается точка  $\mathbf{M}(X,Y)$ . Найти вероятности событий:

$$A = \left[ \mathbf{M} \in \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < a^2\} \right], B = \left[ \mathbf{M} \in \{(x, y) \mid xy < a\} \right], a > 0.$$

**Д2.** В случайный момент времени  $x \in [0, T]$  появляется радиосигнал длительностью  $t_1$ . В случайный момент времени  $y \in [0, T]$  включается приемник на время  $t_2 < t_1$ . Найти вероятность обнаружения сигнала, если:  
а) приемник настраивается мгновенно; б) время настройки приемника равно  $t_3$  ( $t_3 < t_2 < t_1$ ).

**Решение.** Исход испытания определяется парой значений  $(x, y)$ .

Поэтому

**Решение.** Исход – выбор пары чисел  $(x, y)$  из отрезка  $[-1, 2]$ . Поэтому

$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}$ . Событию  $A = \{\text{сигнал будет обнаружен, если приемник настраивается мгновенно}\}$  соответствует область

$$G_A = \{(x, y) \in G : [x, x + t_1] \cap [y, y + t_2] \neq \emptyset\} =$$

$$= \{(x, y) \in G : x \leq y \leq x + t_1 \cup x \leq y + t_2 \leq x + t_1\} = \{(x, y) \in G : x - t_2 \leq y \leq x + t_1\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(A) = \frac{S_{G_A}}{S_G} = \frac{T^2 - (T - t_1)^2 / 2 - (T - t_2)^2 / 2}{T^2}.$$

Событию  $B = \{\text{сигнал будет обнаружен, если время настройки приемника равно } t_3 \mid t_3 < t_2 < t_1\}$  соответствует область

$$G_A = \{(x, y) \in G : [x, x + t_1] \cap [y + t_3, y + t_2] \neq \emptyset\} = \\ = \{(x, y) \in G : x \leq y + t_3 \leq x + t_1 \cup x \leq y + t_2 \leq x + t_1\} = \{(x, y) \in G : x - t_2 \leq y + t_3 - t_1\}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(B) = \frac{S_{G_B}}{S_G} = \frac{T^2 - (T - (t_1 - t_3))^2 / 2 - (T - t_2)^2 / 2}{T^2}.$$

**Д3.** В сфере радиуса  $R$  случайно и независимо друг от друга разбросано  $N$  точек. а) Найти вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки будет не меньше  $a$ . б) Найти предел этой вероятности, если  $R \rightarrow \infty$  и  $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda$  (эта задача взята из звездной астрономии).

**ОТВЕТЫ**

**1.**  $2/3$ . **2.**  $\frac{a}{\ell} \left( 2 - \frac{a}{\ell} \right)$  **3.**  $P(A) = 2/3; P(B) = 1/12$  **4.**  $2l / \pi a$  **5.**  $0,005$  **6.**  $1/2; 1/3;$

$1/4$  **7.**  $1/3$  **8.**  $\frac{\sqrt{5}d}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$  **9.**  $1/6 + 2/9 \ln 2$  **10.**  $0.6$  **11.**  $115/202$

**Д1.**  $P(B) = \begin{cases} a(1 - \ln a), & 0 < a \leq 1, \\ 1, & 1 < a. \end{cases}$

**Д2.** а)  $1 - 0,5 \left( 1 - \frac{t_1}{T} \right)^2 - 0,5 \left( 1 - \frac{t_2}{T} \right)^2$ ; б)  $1 - 0,5 \left( 1 - \frac{t_1 - t_3}{T} \right)^2 - 0,5 \left( 1 - \frac{t_2}{T} \right)^2$

**Д3.** а)  $\left[ 1 - \left( \frac{a}{R} \right)^3 \right]^N$ ; б)  $e^{-\frac{4\pi a^3 \lambda}{3}}$



## III. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ, УМНОЖЕНИЯ, УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

### Аудиторные задачи

1. **Пересечение** (произведение) событий – событие, состоящее в их совместном появлении:  $A \cap B = A \cdot B = AB$ .
2. **Объединение** событий – событие, состоящее в появлении по крайней мере одного из них:  $A \cup B$ . Сумма событий – объединение несовместных событий:  $A + B$ .
3. **Дополнение** события:  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ . иначе  $\bar{A}$  – событие, противоположное к  $A$ .
4. **Импликация** событий:  $A \subset B$ .  
получил 3  $\subset$  сдал экзамен
5. **Равносильность** событий:  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \cap (B \subset A)$ .

1. Пусть события  $A$ ,  $B$  и  $C$  – три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из  $A$ ,  $B$ ,  $C$  а) произошло только  $A$ , б) произошли только  $A$  и  $B$ , в) все три события произошли; г) произошло по крайней мере одно из событий; д) произошли по крайней мере два события; е) произошло одно и только одно событие; ж) произошли два события; и) произошло не более двух событий.

Обозначения условной вероятности:  $P(A | B) \equiv P_B(A)$ .

Вычисляется по формуле условной вероятности

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

В условиях применения формулы классической вероятности ее можно найти по формуле

$$P(A | B) = \frac{m_{AB}}{m_B}.$$

**2.** Один раз подбрасывается игральная кость. События:  $A = \{\text{выпало простое число очков}\}$ ,  $B = \{\text{выпало четное число очков}\}$ . Вычислить вероятность  $P(A | B)$ .

**Решение.**  $m_B = 3, m_{AB} = 1$        $P(A | B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{1}{3}$

3. В семье двое детей. Считая, что рождение мальчика и девочки — независимые и равновероятные события, вычислить вероятность того, что оба ребенка — мальчики, если известно, что в семье есть мальчик.

**Решение.**  $A = \{ \text{оба ребенка – мальчики} \}, \quad B = \{ \text{в семье есть мальчик} \}$

$$1) m_B = 3, m_{AB} = 1 \quad \mathbf{P}(A|B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{1}{3}$$

$$2) A \subset B \Rightarrow \mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

### Независимые события

События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если условная вероятность события  $A$  совпадает с его безусловной вероятностью:  $\mathbf{P}(A|B)=\mathbf{P}(A)$  или  $\mathbf{P}(B|A)=\mathbf{P}(B)$ , или  $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ .

События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества событий вероятность произведения событий, входящих в это подмножество, равна произведению вероятностей отдельных событий, т.е.

$$\forall r \leq n, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n, \quad A_{j_1}, \dots, A_{j_r} : \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^r A_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^r \mathbf{P}(A_{j_k}).$$

4. Из колоды в 36 карт наудачу извлекается одна карта. События:  $A = \{\text{вынутая карта – туз}\}$ ,  $B = \{\text{вынута карта черной масти}\}$ ,  $F = \{\text{вынутая карта – фигура, т.е. валет, дама, король или туз}\}$ . Установить, зависимы или независимы три пары событий:  $A$  и  $B$ ,  $A$  и  $F$ ,  $F$  и  $B$ .

**Решение.**  $\mathbf{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ ,  $\mathbf{P}(B) = \frac{9 \cdot 2}{36} = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbf{P}(F) = \frac{4 \cdot 4}{36} = \frac{4}{9}$ ,

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

$$\mathbf{P}(AF) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(F),$$

$$\mathbf{P}(BF) = \frac{4 \cdot 2}{36} = \frac{2}{9} = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(F)$$

***Следствия из аксиоматического определения вероятности.***

1. Формула сложения вероятностей для несовместных событий:
2. Свойство полной группы событий:

$$P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1$$

3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.
4. Вероятность невозможного события равна 0.
5. Для любых событий  $A$  и  $B$  справедлива формула сложения вероятностей

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$6. \quad P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n \bar{A}_k\right)$$

Формула умножения вероятностей для независимых событий

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

**5.** В автопробеге участвуют 3 автомобиля: первый автомобиль может сойти с маршрута с вероятностью 0,15; второй – с вероятностью 0,05; третий – с вероятностью 0,1. Определить вероятность того, что к финишу придут: а) только один автомобиль; б) два автомобиля; в) по крайней мере два автомобиля.

**Решение.**  $A_j = \{j\text{-й автомобиль придет, } j = 1, 2, 3\}$ ,

$$P(\bar{A}_1) = 0,15, P(\bar{A}_2) = 0,05, P(\bar{A}_3) = 0,1,$$

$$P(A_1) = 0,85, P(A_2) = 0,95, P(A_3) = 0,9,$$

$B = \{\text{придет только один автомобиль}\}$ ,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \\ &= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = \dots \end{aligned}$$



$C = \{\text{прибудут два автомобиля}\},$

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3) =$$

$$= \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2) \mathbf{P}(\bar{A}_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_1) \mathbf{P}(A_2) \mathbf{P}(A_3) + \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(\bar{A}_2) \mathbf{P}(A_3) = \dots$$

$D = \{\text{прибудут по крайней мере два автомобиля}\},$

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(C + A_1 A_2 A_3) = \mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2) \mathbf{P}(A_3) = \dots$$

## Формулы умножения вероятностей для как угодно зависимых событий

1.  $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B).$

2.

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbf{P}\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^n A_k\right)\right) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \dots \cdot P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$$

6. Предположим, что 25% населения живет в области, охваченной коммерческим ТВ, рекламирующим две новые модели автомобилей фирмы; 34% населения охвачено радиорекламой. Также известно, что 10% населения слушают радио- и теле- рекламу. Если случайно отобрать человека, живущего в данной области, то чему равна вероятность того, что он знаком, по крайней мере, хотя бы с одной из рекламных передач фирмы?

**Решение.**  $A = \{\text{население охвачено коммерческим ТВ}\},$

$B = \{\text{население охвачено радиорекламой}\}$

$$P(A) = 0.25, P(B) = 0.34, 0.10 = P(AB)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.25 + 0.34 - 0.10 = 0.49$$

7. Предположим, что 86% людей, которые интересуются возможными инвестициями в брокерскую фирму, не покупают акции, а 33% не покупают облигации. Также известно, что 28% интересующихся прерывают покупку ценных бумаг – как акций, так и облигаций. Некто интересуется делами компании; чему равна вероятность того, что он будет покупать либо акции, либо облигации, либо и то и другое?

**Решение.**  $A = \{\text{некто будет покупать акции}\}, \quad B = \{\text{некто будет покупать облигации}\}, \quad C = \{\text{некто интересуется делами компании}\}$

$$\mathbf{P}(\bar{A} | C) = 0.86, \mathbf{P}(\bar{B} | C) = 0.33, \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B} | C) = 0.28$$

$$\mathbf{P}(A \cup B | C) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B} | C) = 1 - 0.28 = 0.72$$

**8.** Вероятность успешной сдачи экзамена по ТВ и МС равна 0,7, а при следующей попытке она увеличивается на 0,1. Определить вероятность того, что студент сдаст экзамен, если у него имеется только 3 попытки.

**Решение.**  $A_j = \{j\text{-я попытка успешная}, j = 1, 2, 3\},$

$$\mathbf{P}(A_1) = 0.7, \mathbf{P}(A_2) = 0.8, \mathbf{P}(A_3) = 0.9,$$

$B = \{\text{студент сдаст экзамен}\},$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - 0,3 \times 0,2 \times 0,1$$

9. Только один из  $n$  ключей подходит к данной двери. а) Найти вероятность того, что придется опробовать ровно  $k$  ключей ( $k \leq n$ ) для открывания данной двери. б) Найти вероятность, что для открытия двери потребуется не более 4 попыток.

**Решение.**  $A_j = \{ j\text{-й ключ откроет дверь, } j = 1, \dots, n \},$

$B_k = \{ \text{для открытия двери потребуются } k \text{ ключей, } k = 1, \dots, n \},$

$$\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbf{P}(B_2) = \mathbf{P}(\bar{A}_1 A_2) = \mathbf{P}(\bar{A}_1) \mathbf{P}(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$$

При  $k \geq 3$

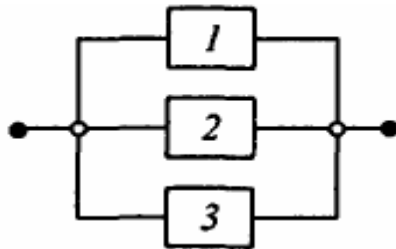
$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B_k) &= \mathbf{P}(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_{k-1} A_k) = \\ &= \mathbf{P}(\bar{A}_1) \mathbf{P}(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) \dots \mathbf{P}(\bar{A}_{k-1} | \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{k-2}) \mathbf{P}(A_k | \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{k-1}) = \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$C = \{ \text{для открытия двери потребуется не более 4 попыток} \},$

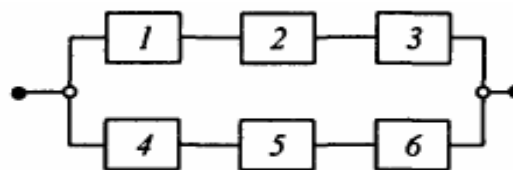
$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^4 B_k\right) = \sum_{k=1}^4 \mathbf{P}(B_k) = \frac{4}{n}$$

**10.** Ниже приведены 5 схем соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Предполагается, что отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями; надежность (вероятность безотказной работы)  $k$ -го элемента равна  $p_k$  (соответственно  $q_k = 1 - p_k$  – вероятность его отказа). Отказ каждого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надежность  $P$  каждой из схем.

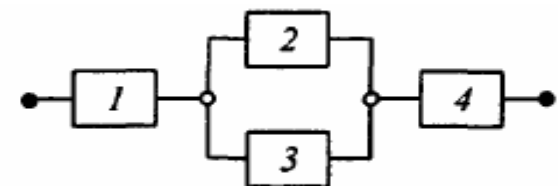
1.



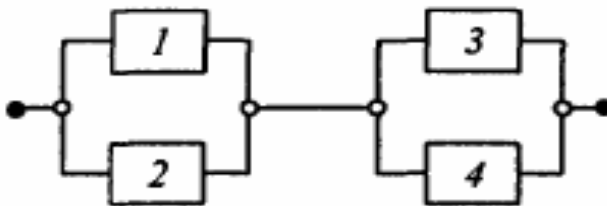
2.



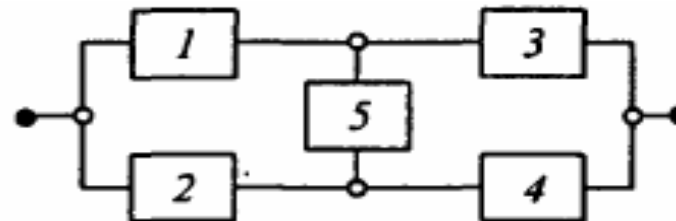
3.



4.



5.



**Решение.**

$A_k = \{k\text{-й элемент не откажет, } k = 1, \dots, 5\}, \quad B = \{\text{схема не откажет}\},$

$$\mathbf{P}(A_k) = p_k, \mathbf{P}(\bar{A}_k) = q_k$$

$$1) \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^3 A_k\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^3 \bar{A}_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^3 \mathbf{P}(\bar{A}_k) = \dots$$

$$2) \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 \cup A_4 A_5 A_6) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^3 A_k\right) + \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=4}^6 A_k\right) - \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^6 A_k\right) = \dots$$

**или**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 \cup A_4 A_5 A_6) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1 A_2 A_3} \cap \overline{A_4 A_5 A_6}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1 A_2 A_3}) \mathbf{P}(\overline{A_4 A_5 A_6}) = 1 - [1 - \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3)] [1 - \mathbf{P}(A_4 A_5 A_6)] \end{aligned}$$

$$3) \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 (A_2 \cup A_3) A_4) = \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 \cup A_3) \mathbf{P}(A_4) = \dots$$

$$4) \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}((A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4)) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) \mathbf{P}(A_3 \cup A_4) = \dots$$

**5)**

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_5 (A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4) + \bar{A}_5 (A_1 A_2 \cup A_3 A_4)) = \\ &= \mathbf{P}(A_5) \mathbf{P}((A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4)) + \mathbf{P}(\bar{A}_5) \mathbf{P}((A_1 \cup A_2)(A_3 \cup A_4)) = \dots \end{aligned}$$



**11.** Иван и Петр поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится герб. Иван бросает первым. Найти вероятности выигрыша для каждого из игроков, считая, что бросание монеты может продолжаться неограниченно долго.

**Решение.**  $A_j = \{\text{герб выпадет при } j\text{-м бросании монеты, } j = 1, 2, \dots\},$

$B = \{\text{выиграет Иван}\}, \quad C = \{\text{выиграет Петр}\},$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(A_1 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 A_5 + \dots) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3}, \\ \mathbf{P}(C) &= \mathbf{P}(\bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 \bar{A}_5 A_6 + \dots) = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

**12.** Партия из 25 деталей содержит 3 бракованные. Контролер для проверки берет наудачу 5 деталей. Если среди отобранных деталей не будет обнаружено бракованных деталей, то партия принимается. Найти вероятность того, что данная партия будет принята.

**Решение.**  $A_j = \{ j\text{-я извлекаемая деталь годная, } j = 1, 2, 3, 4, 5 \},$

$B = \{ \text{данная партия будет принята} \},$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^5 A_j\right) =$$

$$= \mathbf{P}(A_1) \mathbf{P}(A_2 | A_1) \mathbf{P}(A_3 | A_1 A_2) \mathbf{P}(A_4 | A_1 A_2 A_3) \mathbf{P}(A_5 | A_1 A_2 A_3 A_4) =$$

$$= \frac{22}{25} \cdot \frac{21}{24} \cdot \frac{20}{23} \cdot \frac{19}{22} \cdot \frac{18}{21} = \dots$$

### Домашние задачи

**13.** Бросаются две игральные кости. Пусть событие  $A$  состоит в том, что сумма очков нечетная;  $B$  – состоит в том, что хотя бы на одной из костей выпала единица. Описать события  $AB$ ,  $A \cup B$ ,  $A\bar{B}$ .

**Ответ.**  $AB = \{ \text{на одной из костей выпадет 1, на другой – четное число очков} \},$   $A \cup B$  – дополнение к событию {нет единицы, а сумма четная},  $A\bar{B} = \{ \text{выпали 3 или 5 и четное число} \}.$

**14.** Вероятность того, что СМО не откажет к моменту времени  $t_1$ , равна 0,8, а вероятность того, что она не откажет к моменту времени  $t_2 > t_1$ , равна 0,6. Найти вероятность того, что СМО, не отказавшая к моменту времени  $t_1$ , не откажет и к моменту времени  $t_2$ .

**Решение.**  $A = \{\text{СМО не откажет к моменту времени } t_2\}$ ,  $B = \{\text{СМО не откажет к моменту времени } t_1\}$ . Вычислим, учитывая что  $A \subset B$ ,

$$\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}.$$

**15.** В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются 2 шара. Найти вероятность того, что будут вынуты шары разного цвета, при условии, что не вынут синий шар.

**Решение.**  $A = \{\text{будут вынуты шары разного цвета}\}$ ,  $B = \{\text{не будет вынут синий шар}\}$ . Вычислим

$$m_B = C_{20}^2 = 190, m_{AB} = 12 \cdot 8 = 96, \quad \mathbf{P}(A | B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{96}{190}.$$

**16.** Прибор состоит из двух узлов; работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени  $t$  первого узла равна  $p_1$ , второго  $p_2$ . Прибор испытывался в течение времени  $t$ , в результате чего обнаружено, что он вышел из строя (отказал). Найти вероятность того, что отказал только первый узел, а второй исправен.

**Решение.**  $A = \{\text{откажет только первый узел, а второй окажется исправен}\}$ ,  $B = \{\text{прибор выйдет из строя}\}$ . Определим 2 события:  $C_j = \{\text{безотказная работа } j\text{-го узла, } j = 1, 2\}$ . Тогда

$$\mathbf{P}(A | B) = \mathbf{P}(C_1 \bar{C}_2 | B) = \frac{\mathbf{P}(C_1 \bar{C}_2)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{p_1(1 - p_2)}{1 - p_1 p_2}.$$

**17.** Вероятность разорения в течение года для первого банка равна  $p_1$ , для второго банка –  $p_2$ . Прошел год. Считая разорение банков независимыми событиями, найти вероятности событий:  $A = \{\text{ни один банк не разорился}\}$ ,  $B = \{\text{разорился один из банков}\}$ .

**18.** Партия из 25 деталей содержит 3 бракованные. Контролер для проверки берет наудачу 5 деталей. Если среди отобранных деталей будет обнаружено не более одной бракованной детали, то партия принимается. Найти вероятность того, что данная партия будет принята.

**Решение.**  $A_j = \{\text{среди отобранных деталей будет обнаружено } j \text{ бракованных, } j = 0, 1\}$ ,  $B = \{\text{данная партия будет принята}\}$ ,

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_0 + A_1) = \frac{C_{22}^5}{C_{25}^5} + \frac{C_3^1 C_{22}^4}{C_{25}^5} = \dots$$

**19.** Новому работнику предоставляются три попытки проявить свои способности. Вероятность того, что ему удастся это с первой попытки, равна 0,2, со второй – 0,3, с третьей – 0,4. Исходы попыток представляют независимые события. Найти вероятность того, что работник оправдает оказанное ему доверие.

**20.** Вероятность попадания в мишень для данного стрелка равна 0,7. Стрелок делает два выстрела по мишени. Найти вероятность следующих событий: а) стрелок попадет два раза, б) попадет один раз, в) попадет хотя бы один раз.

**21.** Служащий кредитного отдела банка знает, что 12% фирм, бравших кредит в банке, обанкротились и не вернут кредиты по крайней мере в течение пяти лет. Он также знает, что обанкротились 20% кредитовавшихся в банке фирм. Если один из клиентов банка обанкротился, то чему равна вероятность того, что он окажется не в состоянии вернуть долг банку?

**Решение.**  $A = \{\text{клиент будет не в состоянии вернуть долг банку}\}$ ,  
 $B = \{\text{клиент банка обанкротится}\}$ . Тогда

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,12}{0,2}.$$

**22.** Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шаров, наудачу и последовательно извлекают по одному шару до появления черного шара. Найти вероятность того, что придется производить четвертое извлечение, если выборка производится: а) с возвращением; б) без возвращения.

**Решение.**  $A_j = \{j\text{-й извлекаемый шар белый, } j = 1, 2, 3, 4\}$ ,

$B = \{\text{придется производить четвертое извлечение}\}$ .

а) Извлечения независимые испытания, поскольку состав шаров в урне не изменяется. Поэтому

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^3 A_j\right) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(A_3) = 0,6^3.$$

б) Извлечения зависимые испытания, поскольку состав шаров в урне изменяется. Поэтому

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^3 A_j\right) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2 | A_1)\mathbf{P}(A_3 | A_1 A_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8}.$$

**23.** Жюри состоит из трех судей. Первый и второй судьи принимают правильное решение независимо друг от друга с вероятностью  $p$ , а третий судья для принятия решения бросает монету. Окончательное решение жюри принимает по большинству голосов. Какова вероятность, что жюри примет правильное решение? Как изменится это значение, если третий судья будет вести себя также, как и два других? Укажите оптимальный состав жюри.

**Решение.**  $A_j = \{j\text{-й судья примет правильное решение, } j = 1, 2, 3\}$ ,

$B = \{\text{жюри примет правильное решение}\}.$

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3) =$$

$$1) \quad = p^2 \cdot \frac{1}{2} + p^2 \cdot \frac{1}{2} + p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)p \cdot \frac{1}{2} = p.$$

2) Если третий судья будет вести себя также, как и два других, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3) = p^3 + 3p^2 \cdot (1-p).$$

$$p^3 + 3p^2 \cdot (1-p) \geq p \Leftrightarrow p[3p - 3p^2 - 1] \geq 0.$$



Но  $3p - 3p^2 - 1 < 0$  при  $p \in [0;1]$ . Поэтому достаточно одного судьи.

### Дополнительные задачи

**Д1.** Студент может уехать в университет или троллейбусом, который ходит через каждые 20 мин., или автобусом, который ходит через каждые 10 мин. Какова вероятность того, что студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут?

**Решение.**  $A = \{\text{студент, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших пяти минут}\}$ ,  $B = \{\text{студент, подошедший к остановке, уедет на троллейбусе}\}$ ,  $C = \{\text{студент, подошедший к остановке, уедет на автобусе}\}$ . Вычислим

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B \cup C) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(BC) = \frac{5}{20} + \frac{5}{10} - \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{10}.$$

**Д2.** Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет считается сданным, если студент ответит не менее чем на три из четырех поставленных в билете вопросов. Взглянув на первый вопрос билета, студент обнаружил, что он его знает. Какова вероятность, что студент сдаст зачет?

**Д3.** (Задача де Мере). Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

**Решение.**  $n$  – количество бросаний, необходимое для появления события  $B = \{ \text{хотя бы один раз появится сумма очков, равная 12} \}$ ,  $A_j = \{ \text{при } j\text{-м бросании появится сумма очков, равная 12, } j = 1, 2, \dots \}$ .

$$\text{Вычислим } \mathbf{P}(A_j) = \frac{1}{36}, \mathbf{P}(\bar{A}_j) = \frac{35}{36}.$$

По условию

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \geq 0,5 \text{ или } 1 - \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^n \bar{A}_j\right) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,5.$$

Решим неравенство

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0,5 \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq 0,5 \Leftrightarrow n \ln \frac{35}{36} \leq \ln 0,5 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,5}{\ln(35/36)}.$$

**Д4.** Секрет увеличения доли определенного товара на рынке состоит в привлечении новых потребителей и их сохранении. Сохранение новых потребителей товара называется *brand loyalty* (приверженность потребителя к данной марке или разновидности товара) и это одна из наиболее ответственных областей рыночных исследований. Производители нового сорта товара знают, что вероятность того, что потребители сразу примут новый продукт и создание *brand loyalty* потребует по крайней мере шести месяцев, равна 0,02. Производитель также знает, что вероятность того, что случайно отобранный потребитель примет новый сорт, равна 0,05. Предположим, что потребитель только что изменил марку товара. Какова вероятность того, что он сохранит свои предпочтения в течение шести месяцев?

**Решение.**  $A = \{\text{потребитель сохранит свои предпочтения в течение шести месяцев}\}$ ,  $B = \{\text{потребитель примет новый сорт}\}$ .

По условию

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0,02}{0,05} = 0,4.$$

**Д5.** Аналитик по инвестициям собирает данные об акциях и отмечает, выплачивались ли по ним дивиденды и увеличивались или нет акции в цене за интересующий его период времени. Собранные данные представлены в следующей таблице:

Выплата дивидендов	Цена увеличилась	Цена не увеличилась	Итого
Производилась	34	78	112
Не производилась	85	49	134
Итого	119	127	246

- а) Если акция выбрана аналитиком случайно из набора в 246 акций, то чему равна вероятность того, что она из числа тех акций, которые увеличились в цене,
- б) Если акция выбрана случайно, то чему равна вероятность того, что по ней выплачены дивиденды?
- в) Если акция выбрана случайно, то чему равна вероятность того, что она выросла в цене и по ней выплачены дивиденды?
- г) Если акция выбрана случайно, то чему равна вероятность того, что по ней не выплачены дивиденды и она не выросла в цене?
- д) Зная, что акция выросла в цене, найдите вероятность того, что по ней также выплачены дивиденды.
- е) Если по акции не выплачены дивиденды, то оцените вероятность того, что она выросла в цене.
- ж) Чему равна вероятность того, что случайно отобранная акция в течение интересующего аналитика периода ухудшила все показатели?
- з) Оцените вероятность того, что случайно выбранная акция либо выросла в цене, либо по ней были выплачены дивиденды, либо и то и другое вместе.

## ОТВЕТЫ

1. б)  $AB\bar{C}$ ; д)  $AB \cup BC \cup AC$  2.  $1/3$  3.  $1/3$ . 4.  $A$  и  $B$ ,  $F$  и  $B$  независимы,  $A$  и  $F$  зависимы 5. а) 0,02525; б) 0,24725; в) 0,974 6. 0,49 7. 0,72 8. 0,994
9. а)  $1/n$  б)  $4/n$  10. 1)  $1 - q_1 q_2 q_3$ ; 2)  $1 - (1 - p_1 p_2 p_3)(1 - p_4 p_5 p_6)$ ;  
3)  $p_1(1 - q_2 q_3)p_4$ ; 4)  $(1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4)$ ;  
5)  $p_5(1 - q_1 q_2)(1 - q_3 q_4) + q_5(1 - (1 - p_1 p_2)(1 - p_3 p_4))$  11.  $2/3$  и  $1/3$
12.  $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{25 \cdot 24 \cdot 23}$  13.  $AB = \{\text{на одной из костей выпадет 1, на другой – четное число очков}\}$  14. 0,75 15.  $48/95$  16.  $\frac{(1 - p_1)p_2}{1 - p_1 p_2}$
17.  $P(A) = (1 - p_1)(1 - p_2)$ ,  $P(B) = p_1 + p_2 - 2p_1 p_2$  18.  $\frac{C_{22}^5 + C_3^1 C_{22}^4}{C_{25}^5}$  19. 0,664
20. а) 0,49; б) 0,42; в) 0,91 21. 0,6 22. 0,216;  $1/6$  23.  $p$  Д1.  $5/8$   
Д2.  $228/253 = 0,901$  Д3.  $n \geq 25$  Д4. 0,4 Д5. 0,4837; б) 0,4553; в) 0,1382;  
г) 0,1992; д) 0,2857; е) 0,6343; ж) 0,1992; з) 0,8008

## IV. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

**Условие применимости формул полной вероятности и Байеса.**

Известно, что событие  $A$  может произойти совместно только с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_k$ , образующих полную группу событий и называемых *гипотезами*.

Тогда, если до проведения испытания известны  $P(H_i)$  – априорные вероятности гипотез  $H_i$ , и условные вероятности  $P(A/H_i)$ , то полную вероятность события  $A$  можно найти по

формуле: 
$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(AH_i) = \sum_{i=1}^k P(H_i) \cdot P(A|H_i).$$

**Формула Байеса.** Формула Байеса позволяет найти  $P(H_j | A)$  – апостериорные вероятности гипотез:

$$P(H_j | A) = \frac{P(H_j A)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{\sum_{i=1}^k P(H_i) \cdot P(A | H_i)}$$

## Аудиторные задачи

**1.** В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10% и третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% – со второго и 50% – с третьего?

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{будет приобретен исправный телевизор}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно происхождения телевизора:

$H_1 = \{\text{телевизор изготовлен на 1-м заводе}\},$

$H_2 = \{\text{телевизор изготовлен на 2-м заводе}\},$

$H_3 = \{\text{телевизор изготовлен на 3-м заводе}\}.$

Опишем исходные данные  
 $20\% = 0,02 = P(\quad)$  и т.д.



Таким образом, по условию

$$P(H_1) = 0,3; \quad P(H_2) = 0,2; \quad P(H_3) = 0,5;$$

$$P(A|H_1) = 0,8; \quad P(A|H_2) = 0,9; \quad P(A|H_3) = 0,95.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0,3 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,9 + 0,5 \cdot 0,95 = \dots$$

**2.** В каждой из двух урн находится 5 белых шаров и 10 черных. Из первой урны во вторую наудачу переложили один шар, а затем из второй урны наугад вынули один шар. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второй урны, окажется белым.

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{из 2-й урны будет извлечен белый шар}\}$ . Состав шаров 2-й урны не определен. Выскажем следующие предположения относительно этого состава:

$H_1 = \{\text{во 2-ю урну переложат 1 белый шар}\},$

$H_2 = \{\text{во 2-ю урну переложат 1 черный шар}\}.$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i) = \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{16} + \frac{10}{15} \cdot \frac{5}{16} = \frac{80}{15 \cdot 16} = \frac{1}{3}.$$

**3.** Производится  $n$  независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью  $p$ . Если в резервуар попал один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью  $p_1$ , два снаряда – с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при  $n$  выстрелах горючее **воспламенится**. Можно перенести в раздел «Схема Бернулли».

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{при } n \text{ выстрелах горючее воспламенится}\}$ .

Выскажем следующие предположения относительно числа попаданий в резервуар:

$H_j = \{j \text{ попаданий в резервуар, } j = 0, 1, \dots, n\}$ .

По условию  $\mathbf{P}(A|H_1) = p_1, \mathbf{P}(A|H_j) = 1$  при  $j \geq 2$ .

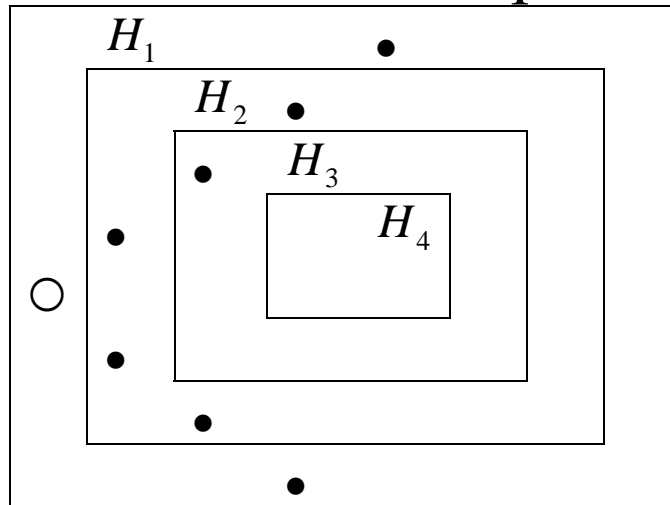
Вычислим  $\mathbf{P}(H_0) = (1-p)^n, \mathbf{P}(H_1) = np(1-p)^{n-1}$ .

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j) = np(1-p)^{n-1} p_1 + \sum_{j=2}^n \mathbf{P}(H_2) = \\ &= np(1-p)^{n-1} p_1 + 1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}. \end{aligned}$$

**4.** На шахматную доску ставят наудачу двух слонов, белого и черного. Какова вероятность того, что слоны побьют друг друга?

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{слоны побьют друг друга}\}$ . Осуществим разбиение доски на 4 concentric области:



Выскажем следующие предположения относительно первого поставленного слона:

$H_j = \{\text{слон поставлен в } j\text{-ю область, } j = 1, 2, 3, 4\}.$

Вычислим

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{64-36}{64}, \mathbf{P}(H_2) = \frac{36-16}{64}, \mathbf{P}(H_3) = \frac{16-4}{64}, \mathbf{P}(H_4) = \frac{4}{64},$$
$$\mathbf{P}(A|H_1) = \frac{7}{63}, \mathbf{P}(A|H_2) = \frac{9}{63}, \mathbf{P}(A|H_3) = \frac{11}{63}, \mathbf{P}(A|H_4) = \frac{13}{63}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{j=1}^4 \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j) = \frac{28}{64} \times \frac{7}{63} + \frac{20}{64} \times \frac{9}{63} + \frac{12}{64} \times \frac{11}{63} + \frac{4}{64} \times \frac{13}{63}.$$

**5.** При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы крови; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% – вторую, 20,9% – третью и 7,9% – четвертую группы крови. Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{больному можно перелить кровь случайно взятого донора}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно группы крови больного:

$H_j = \{\text{больной имеет } j\text{-ю группу крови, } j = 1, 2, 3, 4\}$ .

Тогда по условию

$$\mathbf{P}(H_1) = 0,337, \mathbf{P}(H_2) = 0,375, \mathbf{P}(H_3) = 0,209, \mathbf{P}(H_4) = 0,079,$$

$$\mathbf{P}(A | H_1) = 0,337, \mathbf{P}(A | H_2) = 0,337 + 0,375 = 0,712,$$

$$\mathbf{P}(A | H_3) = 0,337 + 0,209 = 0,546, \mathbf{P}(A | H_4) = 1.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{j=1}^4 \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A | H_j) = \\ &= 0,337 \cdot 0,337 + 0,375 \cdot 0,712 + 0,209 \cdot 0,546 + 0,079. \end{aligned}$$

**6.** Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении  $n_1 : n_2 : n_3$ , причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны  $p_1, p_2$  и  $p_3$ . Прибор, приобретенный научно–исследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что данный прибор произведен первым заводом (марка завода на приборе отсутствует)?

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{приобретенный научно–исследовательским институтом окажется бракованным}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно завода–изготовителя прибора:

$H_j = \{\text{прибор произведен } j\text{-м заводом, } j = 1, 2, 3\}$ .

Тогда по условию

$$\mathbf{P}(H_j) = \frac{n_j}{n_1 + n_2 + n_3}, \mathbf{P}(A | H_j) = p_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Применяя формулу Байеса, получим

$$\mathbf{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(A | H_1)}{\sum_{j=1}^3 \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A | H_j)} = \frac{\frac{n_1 p_1}{n_1 + n_2 + n_3}}{\sum_{j=1}^3 \frac{n_j p_j}{n_1 + n_2 + n_3}}.$$

**7.** При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна  $1 - \beta$ . Вероятность принять здорового человека за больного равна  $\alpha$ . Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна  $\gamma$ . а) Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании. б) Вычислить найденную условную вероятность при следующих числовых значениях:  $1 - \beta = 0,9$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\gamma = 0,001$ .

**Решение.** Определим события:

$A = \{\text{обследуемый человек будет признан больным}\},$

$H_1 = \{\text{обследуемый человек болен}\},$

$H_2 = \{\text{обследуемый человек здоров}\}.$

По условию



$$\mathbf{P}(H_1) = \gamma; \mathbf{P}(H_2) = 1 - \gamma; \mathbf{P}(A | H_1) = 1 - \beta; \mathbf{P}(A | H_2) = \alpha.$$

Теперь, используя формулы полной вероятности и Байеса, найдем последовательно

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(A | H_1) + \mathbf{P}(H_2) \cdot \mathbf{P}(A | H_2) = \gamma(1 - \beta) + (1 - \gamma)\alpha;$$

$$\mathbf{P}(H_2 | A) = \frac{\mathbf{P}(H_2) \cdot \mathbf{P}(A | H_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{(1 - \gamma)\alpha}{\gamma(1 - \beta) + (1 - \gamma)\alpha} =$$

$$= \frac{0,999 \cdot 0,01}{0,001 \cdot 0,95 + 0,999 \cdot 0,01} = \frac{0,00999}{0,01094} = 0,9173.$$

**Вывод.** Не надо преждевременно расстраиваться. Надо сначала дообследоваться.

8. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны  $p_1, p_2$  и  $p_3$ . Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{после выстрелов в мишени окажется две пробоины}\}$ ,  $B_j = \{\text{попадания в мишень } j\text{-м стрелком, } j = 1, 2, 3\}$ .

По условию  $P(B_j) = p_j, \quad j = 1, 2, 3$ .

Применяя формулу условной вероятности, получим

$$P(\bar{B}_2 | A) = \frac{P(\bar{B}_2 A)}{P(A)} = \frac{p_1(1-p_2)p_3}{p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3}.$$

## Домашние задачи

**9.** Два цеха штампуют однотипные детали. Первый цех дает  $\alpha\%$  брака, второй –  $\beta\%$ . Для контроля отобрано  $n_1$  деталей из первого цеха и  $n_2$  из второго. Эти  $n_1 + n_2$  деталей смешаны в одну партию, и из нее наудачу извлекают одну деталь. Какова вероятность того, что она бракованная?

**10.** В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую, после чего из второй урны извлечен один шар и переложен в третью. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

**Решение.** Пусть  $A_j = \{\text{из } j\text{-й урны будет извлечен белый шар, } j = 2, 3\}$ . Состав шаров 2-й урны не определен. Выскажем следующие предположения относительно этого состава:

$H_1 = \{\text{во 2-ю урну переложат 1 белый шар}\},$

$H_2 = \{\text{во 2-ю урну переложат 1 черный шар}\}.$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A_2) = \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A_2 | H_i) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{11} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{44}{10 \cdot 11} = 0,4; \quad \mathbf{P}(\bar{A}_2) = 0,6.$$

Состав шаров 3-й урны не определен. Выскажем следующие предположения относительно этого состава:

$A_2 = \{\text{в 3-ю урну переложат 1 белый шар}\},$

$\bar{A}_2 = \{\text{в 3-ю урну переложат 1 черный шар}\}.$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_2) \cdot \mathbf{P}(A_3 | A_2) + \mathbf{P}(\bar{A}_2) \cdot \mathbf{P}(A_3 | \bar{A}_2) = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{11} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} = \frac{44}{10 \cdot 11} = 0,4.$$

**11.** Студент Иванов знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы Иванова получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

**12.** В урне лежит шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый и черный. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{из урны будет извлечен белый шар}\}$ . Состав шаров урны не определен. Выскажем следующие предположения относительно этого состава:  $H_1 = \{\text{в урне лежал белый шар}\}$ ,  $H_2 = \{\text{в урне лежал черный шар}\}$ .

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Получим ответ на заданный вопрос по формуле Байеса

$$\mathbf{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(A | H_1)}{\sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A | H_j)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

**13.** В студенческой группе 4 студента подготовлены отлично, 5 студентов – хорошо, 2 – удовлетворительно и 1 студент подготовлен плохо. К экзамену предложено 20 вопросов. Отлично подготовленный студент знает ответы на 18 вопросов, хорошо подготовленный – на 15, удовлетворительно подготовленный учит половину из предложенных вопросов и плохо подготовленный знает 5 вопросов. Найти вероятность того, что наудачу вызванный студент ответит на два вопроса, предложенных экзаменатором.

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{вызванный студент ответит на два вопроса}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно того, какой из категорий студентов относится вызванный студент:

$H_1 = \{\text{студент подготовлен отлично}\}$ ,  $H_2 = \{\text{студент подготовлен хорошо}\}$ ,  $H_3 = \{\text{студент подготовлен удовлетворительно}\}$ ,  $H_4 = \{\text{студент подготовлен плохо}\}$ .

Используя условие задачи, вычислим

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{4}{12}, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{5}{12}, \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{2}{12}, \quad \mathbf{P}(H_4) = \frac{1}{12},$$

$$\mathbf{P}(A | H_1) = \frac{C_{18}^2}{C_{20}^2} = \frac{153}{195}, \quad \mathbf{P}(A | H_2) = \frac{C_{15}^2}{C_{20}^2} = \frac{105}{195},$$

$$\mathbf{P}(A | H_3) = \frac{C_{10}^2}{C_{20}^2} = \frac{45}{195}, \quad \mathbf{P}(A | H_4) = \frac{C_5^2}{C_{20}^2} = \frac{10}{195}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A | H_i) = \\ &= \frac{4}{12} \times \frac{153}{195} + \frac{5}{12} \times \frac{105}{195} + \frac{3}{12} \times \frac{45}{195} + 1 \times \frac{10}{195} = \dots \end{aligned}$$



**14.** Известно, что 5% мужчин и 0.25% всех женщин дальтоники. Наудачу выбранное лицо – дальтоник. Какова вероятность того, что это мужчина? (считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{выбранное лицо окажется дальтоник}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно гендерной принадлежности выбранного лица:  $H_1 = \{\text{выбранное лицо мужчина}\}$ ,  $H_2 = \{\text{выбранное лицо женщина}\}$ .

Используя условие задачи, запишем

$$\mathbf{P}(H_1) = 0,5, \quad \mathbf{P}(H_2) = 0,5, \quad \mathbf{P}(A | H_1) = 0,05, \quad \mathbf{P}(A | H_2) = 0,0025.$$

Применяя формулу Байеса, получим

$$\mathbf{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(A | H_1)}{\sum_{j=1}^2 \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A | H_j)} = \frac{0,5 \cdot 0,05}{0,5 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,0025} = \frac{0,05}{0,0525}.$$

**15.** В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

**Решение.** Пусть  $A = \{ \text{из этих двух шаров наудачу будет взят белый шар} \}$ . Выскажем следующие предположения относительно того, какие шары были извлечены из урн:

$H_1 = \{2 \text{ белых шара}\}$ ,  $H_2 = \{\text{из 1-й урны белый, из 2-й – черный}\}$ ,

$H_3 = \{\text{из 2-й урны белый, из 1-й – черный}\}$ ,  $H_4 = \{2 \text{ черных шара}\}$ .

Используя условие задачи, вычислим

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{20} = 0,16, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{16}{20} = 0,64,$$

$$\mathbf{P}(H_3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{20} = 0,04, \quad \mathbf{P}(H_4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{16}{20} = 0,16,$$

$$\mathbf{P}(A | H_1) = 1, \quad \mathbf{P}(A | H_2) = 0,5, \quad \mathbf{P}(A | H_3) = 0,5, \quad \mathbf{P}(A | H_4) = 0.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^4 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \\ &= 0,16 \times 1 + 0,64 \times 0,5 + 0,04 \times 0,5 + 0,16 \times 0 = 0,5. \end{aligned}$$

**16.** Экспортно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта 45%, в противном случае – 25%. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 40%. Чему равна вероятность заключения контракта?

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{контракт будет заключен}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно намерений конкурента:

$H_1 = \{\text{конкурент не будет претендовать на контракт}\},$

$H_2 = \{\text{конкурент будет претендовать на контракт}\}.$

По условию

$$\mathbf{P}(H_1) = 0,6, \quad \mathbf{P}(H_2) = 0,4, \quad \mathbf{P}(A|H_1) = 0,45, \quad \mathbf{P}(A|H_2) = 0,25.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i) = \dots$$

### Дополнительные задачи

**Д1.** По каналу связи передается одна из последовательностей букв  $AAAA$ ,  $BVVV$ ,  $CCCC$  с вероятностями  $p_1, p_2$  и  $p_3$ . ( $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ ). Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью  $\alpha$  или с равными вероятностями принимается за две другие буквы. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано  $AAAA$ , если принято  $ABCA$ .

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{будет принято } ABCA\}$ . Выскажем следующие предположения переданной последовательности букв:  
 $H_1 = \{AAAA\}$ ,  $H_2 = \{BVVV\}$ ,  $H_3 = \{CCCC\}$ .

Используя условие задачи, вычислим

$$\mathbf{P}(H_1) = p_1, \quad \mathbf{P}(H_2) = p_2, \quad \mathbf{P}(H_3) = p_3,$$

$$\mathbf{P}(A | H_1) = \mathbf{P}(ABCA | AAAA) = \alpha \cdot \frac{1-\alpha}{2} \cdot \frac{1-\alpha}{2} \cdot \alpha = \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{4},$$

$$\mathbf{P}(A | H_2) = \mathbf{P}(ABCA | BBBB) = \frac{\alpha(1-\alpha)^3}{8},$$

$$\mathbf{P}(A | H_3) = \mathbf{P}(ABCA | CCCC) = \frac{\alpha(1-\alpha)^3}{8}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A | H_i) = \\ &= p_1 \cdot \frac{\alpha^2(1-\alpha)^2}{4} + p_2 \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)^3}{8} + p_3 \cdot \frac{\alpha(1-\alpha)^3}{8} \end{aligned}$$

Получим ответ на заданный вопрос по формуле Байеса

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(H_1|A) &= \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}(A|H_1)}{\sum_{j=1}^3 \mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)} = \\
 &= \frac{p_1 \cdot \frac{\alpha^2 (1-\alpha)^2}{4}}{p_1 \cdot \frac{\alpha^2 (1-\alpha)^2}{4} + p_2 \cdot \frac{\alpha (1-\alpha)^3}{8} + p_3 \cdot \frac{\alpha (1-\alpha)^3}{8}} = \\
 &= \frac{2p_1\alpha}{2p_1\alpha + (1-\alpha)(p_2 + p_3)}.
 \end{aligned}$$

**Д2.** В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Первый игрок по схеме выбора без возвращения извлекает 3 шара. Обрато он возвращает черный шар, если среди вынутых шаров больше было черных. В противном случае возвращается белый шар. Второй игрок после этого извлекает один шар и по его цвету должен угадать число белых шаров среди трех шаров, вынутых первым игроком. Найти вероятность того, что у первого игрока было: а) 0 белых; б) 1 белый; в) 2 белых шара, если второй игрок вытащил белый шар.

**Решение.** Пусть  $A = \{\text{второй игрок вытащит белый шар}\}$ . Выскажем следующие предположения относительно количества белых шаров у 1-го игрока:

$H_j = \{\text{первый игрок вытащит } j \text{ белых шаров, } j = 0, 1, 2\}$ .

Вычислим



$$\mathbf{P}(H_0) = \frac{1}{C_5^3} = 0,1, \quad \mathbf{P}(H_1) = \frac{3 \cdot 2}{C_5^3} = 0,6, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{3}{C_5^3} = 0,3,$$

$$\mathbf{P}(A | H_0) = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(A | H_1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A | H_2) = \frac{1}{3}.$$

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A | H_i) = 0,1 \cdot \frac{2}{3} + 0,6 \cdot \frac{1}{3} + 0,3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{30}$$

По формуле Байеса найдем

$$\mathbf{P}(H_0 | A) = \frac{2 / 30}{11 / 30}, \quad \mathbf{P}(H_1 | A) = \frac{6 / 30}{11 / 30}, \quad \mathbf{P}(H_2 | A) = \frac{3 / 30}{11 / 30}.$$

**ДЗ.** Транснациональная компания обсуждает возможность инвестиций в некоторое государство с неустойчивой политической ситуацией. Менеджеры компании считают, что успех предполагаемых инвестиций зависит, в частности, и от политического климата в стране, в которую предполагается вливание инвестиционных средств. Менеджеры

оценивают вероятность успеха в 65%, если преобладающая политическая ситуация будет благоприятной; в 40%, если политическая ситуация будет нейтральной; в 20%, если политическая ситуация будет неблагоприятной. Менеджеры компании также полагают, что благоприятная, нейтральная и неблагоприятная политическая ситуация соотносятся как 6:3:1. Чему равна вероятность успеха инвестиций?

## ОТВЕТЫ

1. 0,895    2.  $1/3$     3.  $1 - npq_1q^{n-1} - q^n$ , где  $q_1 = 1 - p_1$     4.  $5/36$     5. 0,574

6.  $\frac{n_1 p_1}{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3}$     7. а)  $\frac{(1-\gamma)\alpha}{\gamma(1-\beta) + (1-\gamma)\alpha}$ ;    б) 0,9173

8.  $\frac{p_1 p_3 (1 - p_2)}{(1 - p_1) p_2 p_3 + (1 - p_2) p_1 p_3 + (1 - p_3) p_1 p_2}$     9.  $\frac{\alpha n_1 + \beta n_2}{100(n_1 + n_2)}$     10. 0,4    11.

Шансы одинаковы    12.  $2/3$     13. 0,54    14. 0,95    15. 0,5    16. 0,37    Д1.

$\frac{2\alpha p_1}{2\alpha p_1 + (1 - \alpha)(p_2 + p_3)}$     Д2. а)  $2/11$ ; б)  $6/11$ ; в)  $3/11$     Д3. 0,53

## V. СХЕМА НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ БЕРНУЛЛИ

Осуществляются  $n$  независимых испытаний, исходом каждого из которых может быть одно из противоположных событий  $A$  и  $\bar{A}$  (успех или неудача). В каждом испытании  $P(A) = p$  и  $P(\bar{A}) = 1 - p = q$  постоянны.

Далее  $X$  – число появлений (частота) события  $A$  в  $n$  испытаниях.  
*Задача 1.* Найти  $P(X = m) \equiv P_n(m)$  – вероятность того, что число появлений события  $A$  (успехов) в  $n$  испытаниях будет равно  $m$ :

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n \quad (\text{формула Бернулли}).$$

*Задача 2.* Найти  $P(m_1 \leq X \leq m_2) \equiv P_n(m_1, m_2)$  – вероятность того, что число появлений события  $A$  (успехов) в  $n$  испытаниях будет лежать в пределах от  $m_1$  до  $m_2$ :

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1) + \dots + P_n(m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

*Задача 3. Вычисление наивероятнейшего числа успехов  $m_0$  – числа появлений события  $A$  (успехов) в  $n$  испытаниях, которому соответствует наибольшее значение биномиальной вероятности  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ :*

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Определяется путем решения приведенного неравенства. Количество решений неравенства – два или одно в зависимости от того, являются ли границы неравенства целыми числами.

## Приближенные вычисления в схеме Бернулли

Рекомендации по выбору пуассоновского или нормального приближения.

Считается, что  $n \rightarrow \infty$  при  $n \geq 50$  (еще лучше, если  $n \geq 100$ ).

Если выполняются условия

$$npq > 9 \text{ и } \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1},$$

то используется *нормальное* приближение.

Во всех остальных случаях – *пуассоновское приближение*.

## Нормальное приближение

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

**Пуассоновское приближение** при  $\lambda = np$  :

$$P_n(m) \simeq \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \text{ или } P_n(m_1, m_2) \simeq \left[ \frac{\lambda^{m_1}}{m_1!} + \frac{\lambda^{m_1+1}}{(m_1+1)!} + \dots + \frac{\lambda^{m_2}}{m_2!} \right] e^{-\lambda}.$$

### **Аудиторные задачи**

**1.** Для изделия вероятность выхода из строя в течение месяца равна 0,25. Продано 5 изделий, функционирующих независимо друг от друга. Найти вероятность событий:  $A$  = (ровно одно изделие выйдет из строя),  $B$  = (ровно 2 изделия выйдут из строя),  $C$  = (хотя бы одно изделие выйдет из строя),  $D$  = (не менее трех изделий выйдут из строя).

**Решение.** Испытание – функционирование одного изделия, успех испытания – {выход изделия из строя}. По условию

$$n = 5, \quad p = 0,25, \quad q = 1 - p = 0,75.$$

Вычислим

$$\mathbf{P}(A) = P_5(1) = C_5^1 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} = \frac{405}{1024},$$

$$\mathbf{P}(B) = P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} = \frac{270}{1024},$$

$$\mathbf{P}(C) = P_5(1;5) = 1 - P_5(0) = 1 - C_5^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-0} = 1 - \frac{243}{1024} = \frac{781}{1024},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D) &= P_5(3;5) = \sum_{k=3}^5 P_5(k) = \\ &= C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} + C_5^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-4} + C_5^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} = \frac{90+15+1}{1024} = \frac{106}{1024} \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D) &= P_5(3;5) = 1 - P_5(0;2) = 1 - \sum_{k=0}^2 P_5(k) = \\ &= 1 - \frac{243}{1024} - \frac{405}{1024} - \frac{270}{1024} = 1 - \frac{918}{1024} = \frac{106}{1024}. \end{aligned}$$

**2.** Студент выполняет тестовую работу, состоящую из трех задач. Для получения положительной отметки достаточно решить две. Для каждой задачи предлагается 5 вариантов ответа, из которых только один правильный. Студент плохо знает материал и поэтому выбирает ответы для каждой задачи наудачу. Какова вероятность, что он получит положительную оценку?

**Решение.** Испытание – решение одной задачи, успех испытания – {получение правильного ответа при решении задачи};  $B = \{\text{студент получит положительную оценку}\}$ . По условию

$$n = 3, \quad p = 0,2, \quad q = 1 - p = 0,8.$$

$$\mathbf{P}(B) = P_3(2;3) = C_3^2 0,2^2 0,8^1 + C_3^3 0,2^3 0,8^0 =$$

Вычислим

$$= 3 \cdot 0,032 + 0,008 = 0,104.$$



**3.** Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которое товаровед признает годным к продаже.

**Решение.** Испытание – осмотр одного образца товара, успех испытания – {признание образца годным};  $m_0$  – наивероятнейшее число образцов, которое товаровед признает годным к продаже. По условию

$$n = 24, \quad p = 0,6, \quad q = 1 - p = 0,4.$$

Воспользуемся неравенством

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \Leftrightarrow 24 \cdot 0,6 - 0,4 \leq m_0 \leq 24 \cdot 0,6 + 0,6 \Leftrightarrow \\ 14 \leq m_0 \leq 15 \Rightarrow m_0 = 14 \text{ или } m_0 = 15.$$

**4.** Известно, что хотя бы одному покупателю из двух потребуется одежда 56 размера с вероятностью 0,91. Найти вероятность того, что из четырех покупателей двум потребуется одежда 56-го размера.

**Решение.** Испытание – выбор одежды покупателем, успех испытания – {покупателю потребуется одежда 56 размера},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{\text{хотя бы одному покупателю из двух потребуется одежда 56 размера}\}$ ;  $C = \{\text{из четырех покупателей двум потребуется одежда 56-го размера}\}$ . По условию

$$\mathbf{P}(B) = 0,91.$$

Имея в виду, что  $\mathbf{P}(B) = P_2(1; 2) = 1 - P_2(0) = 1 - q^2$ , найдем  $q, p$ :

$$1 - q^2 = 0,91 \Rightarrow q = 0,3; p = 0,7.$$

Теперь вычислим

$$\mathbf{P}(C) = P_4(2) = C_4^2 0,7^2 0,3^2 = 6 \cdot 0,0441 = 0,2646.$$

**5.** Завод отправил на базу 1000 изделий. Вероятность повреждения изделий в пути 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: а) 3 изделия; б) не более трех изделий; в) более трех изделий. Как изменятся приближенные вычисления при вероятности повреждения изделий 0,02?

**Решение.** Испытание – отправка одного изделия, успех испытания – {повреждение одного изделия},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{\text{будет повреждено 3 изделия}\}$ ;  $C = \{\text{будет повреждено не более трех изделий}\}$ ;  $D = \{\text{будет повреждено более трех изделий}\}$ .

По условию  $n = 1000$ .

Рассмотрим случай  $p = 0,002$ . Осуществим выбор типа приближения проверив два условия:

$$npq > 9 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

У нас  $npq = 1000 \cdot 0,002 \cdot 0,998 < 9 \Rightarrow$  следует использовать пуассоновское приближение для проведения приближенных вычислений с  $\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2$ :

$$\mathbf{P}(B) = P_{1000}(3) \simeq \frac{2^3}{3!} e^{-2} = 0,18,$$

$$\mathbf{P}(C) = P_{1000}(0;3) \simeq \sum_{k=0}^3 \frac{2^k}{k!} e^{-2} = 0,857,$$

$$\mathbf{P}(D) = P_{1000}(4;1000) = 1 - P_{1000}(0;3) = 1 - \mathbf{P}(C) \simeq 1 - 0,857 = 0,143.$$

**Примечание.**

$$P_n(m) \simeq \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} \text{ или } P_n(m_1, m_2) \simeq \left[ \frac{\lambda^{m_1}}{m_1!} + \frac{\lambda^{m_1+1}}{(m_1+1)!} + \dots + \frac{\lambda^{m_2}}{m_2!} \right] e^{-\lambda}.$$

Рассмотрим случай  $p = 0,02$ . Осуществим выбор типа приближения проверив два условия:

$$npq > 9 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

У нас

$$npq = 1000 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 19,6 > 9, \quad \frac{1}{1001} < 0,02 < \frac{1000}{1001}.$$

Следует использовать нормальное приближение для проведения приближенных вычислений с  $np = 1000 \cdot 0,02 = 20$ ,  $npq = 19,6$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) = P_{1000}(3) &\approx \left\{ P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right) \right\} \approx \\ &= \frac{1}{\sqrt{19,6}} \cdot \varphi\left(\frac{3 - 20}{\sqrt{19,6}}\right) = 0,226 \cdot \underbrace{\varphi(3,84)}_{=0,00025} = 0,000056, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C) &= P_{1000}(0;3) \simeq \left\{ P_n(m_1, m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \right\} \simeq \\
&\simeq \Phi\left(\frac{3 - 20}{\sqrt{19,6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 20}{\sqrt{19,6}}\right) = \Phi(-3,84) - \underbrace{\Phi(-4,52)}_{=0,0000} = \\
&= 1 - \underbrace{\Phi(3,84)}_{=0,9999} = 0,0001, \\
\mathbf{P}(D) &= P_{1000}(4;1000) \simeq \underbrace{\Phi\left(\frac{1000 - 20}{\sqrt{19,6}}\right)}_{>4} - \Phi\left(\frac{4 - 20}{\sqrt{19,6}}\right) = \\
&= 1 - \Phi(-3,61) = \Phi(3,61) = 0,9998.
\end{aligned}$$

**6.** Всхожесть семян растения равна 0,9. Какова вероятность того, что из 100 посеянных семян взойдет не менее 85? 92 семян?

**Решение.** Испытание – посев одного семени, успех испытания – {семя не взойдет},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{\text{взойдет не менее 85 семян}\}$ ;  $C = \{\text{взойдет 92 семян}\}$ .

По условию  $n = 100$ ,  $p = 0,1$ .

Осуществим выбор типа приближения проверив два условия:

$$npq > 9 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

У нас  $npq = 100 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 9$  следует использовать пуассоновское приближение для проведения приближенных вычислений с  $\lambda = np = 100 \cdot 0,1 = 10$ :

$$\mathbf{P}(B) = P_{100}(8) \simeq \frac{10^8}{8!} e^{-10} = 0,113,$$

$$\mathbf{P}(C) = P_{100}(0;15) \simeq \sum_{k=0}^{15} \frac{10^k}{k!} e^{-10} = 0,95.$$

7. В страховой компании застраховано 10 000 автомобилей. Вероятность поломки любого автомобиля в результате аварии равна 0,006. Каждый владелец застрахованного автомобиля платит в год 12 руб. страховых и в случае поломки автомобиля в результате аварии получает от кампании 1000 руб. Найти вероятности событий:  $A$  = (по истечении года работы страховая кампания потерпит убыток),  $B_m$  = (страховая кампания получит прибыль не менее  $m$  руб.,  $m = 40\ 000, 60\ 000, 80\ 000$  руб.).

**Решение.** Испытание – страхование автомобиля, успех – {поломка автомобиля},  $X$  – число аварийных автомобилей среди застрахованных.

Тогда

$$p = 0,006; n = 10000; np = 10000 \cdot 0,006 = 60, npq = 60 \cdot 0,994 = 59,64.$$



Поскольку  $n = 10000$  велико, определяем тип приближения:

$$npq > 9; \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10001} < p = 0,006 < \frac{n}{n+1} = \frac{10000}{10001}.$$

**Вывод:** будем пользоваться нормальным приближением.

а)  $A$  = (по истечении года работы страховая кампания потерпит убыток),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(120000 - 1000X < 0) = \mathbf{P}(X > 120) = \mathbf{P}(121 \leq X \leq 10000) = \\ &= P_{10000}(121; 10000) \simeq \Phi\left(\frac{10000 - 60}{\sqrt{59,64}}\right) - \Phi\left(\frac{121 - 60}{\sqrt{59,64}}\right) = \\ &= 1,0000 - 1,0000 = 0,0000. \end{aligned}$$

б)  $B_m$  = (страховая кампания получит прибыль не менее  $m$  руб.,  
 $m = 40\ 000, 60\ 000, 80\ 000$  руб.).

$$\mathbf{P}(B_m) = \mathbf{P}(120000 - 1000X \geq m) =$$

$$= \mathbf{P}\left(X \leq \frac{120000 - m}{1000}\right) \simeq \Phi\left(\frac{\frac{120000 - m}{1000} - 60}{\sqrt{59,64}}\right),$$

Тогда

$$\mathbf{P}(B_{40000}) \simeq \Phi\left(\frac{\frac{120000 - 40000}{1000} - 60}{\sqrt{59,64}}\right) = \Phi(2,59) = 0,9952,$$

$$\mathbf{P}(B_{60000}) \simeq \Phi \left( \frac{\frac{120000 - 60000}{1000} - 60}{\sqrt{59,64}} \right) = \Phi(0) = 0,5,$$

$$\mathbf{P}(B_{80000}) \simeq \Phi \left( \frac{\frac{120000 - 80000}{1000} - 60}{\sqrt{59,64}} \right) = \Phi(-2,59) = 1 - \Phi(2,59) = 0,0048.$$

8. Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы в среднем в 99 случаях из 100 все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть случаи: а) зрители приходят парами; б) зрители приходят поодиночке. Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

**Решение.** а) Испытание – вход пары в театр, успех испытания – {выбор левого входа},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{\text{все зрители смогут раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли}\}$ ,  $M$  – вместимость каждого гардероба,  $X$  – количество пар, которое выберет левый вход.

По условию  $n = 500$ ,  $p = 0,5$ ,  $q = 0,5$ .

Осуществим выбор типа приближения, проверив два условия:

$$npq > 9 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

У нас  $nprq = 500 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 125 > 9$ ,  $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1} \Rightarrow$  следует использовать нормальное приближение для проведения приближенных вычислений с  $np = 250$ .

По условию  $\mathbf{P}(B) \geq 0,99$ . С другой стороны

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(2X \leq M, 2(500 - X) \leq M) = \mathbf{P}(500 - M/2 \leq X \leq M/2) \simeq \\ &\simeq \Phi\left(\frac{M/2 - 250}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{500 - M/2 - 250}{\sqrt{125}}\right) = 2\Phi\left(\frac{M/2 - 250}{\sqrt{125}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, верно

$$2\Phi\left(\frac{M/2 - 250}{\sqrt{125}}\right) - 1 \geq 0,99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{M/2 - 250}{\sqrt{125}}\right) \geq 0,995.$$

Отсюда

$$\frac{M/2 - 250}{\sqrt{125}} \geq \Phi^{-1}(0,995) = 2,58 \Rightarrow \frac{M}{2} \geq 250 + \sqrt{125} \cdot 2,58 = 278,8$$

б) Испытание – вход зрителей в театр поодиночке, успех испытания – {выбор левого входа},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{\text{все зрители смогут раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли}\}$ ,  $M$  – вместимость каждого гардероба,  $X$  – количество зрителей, которое выберет левый вход.

По условию  $n = 1000, p = 0,5, q = 0,5$ .

Осуществим выбор типа приближения, проверив два условия:

$$npq > 9 \quad \text{и} \quad \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}.$$

У нас  $npq = 1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 250 > 9, \frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1} \Rightarrow$  следует

использовать нормальное приближение для проведения приближенных вычислений с  $np = 500$ .

По условию  $\mathbf{P}(B) \geq 0,99$ . С другой стороны

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(B) &= \mathbf{P}(X \leq M, 1000 - X \leq M) = \mathbf{P}(1000 - M \leq X \leq M) \simeq \\ &\simeq \Phi\left(\frac{M - 500}{\sqrt{250}}\right) - \Phi\left(\frac{1000 - M - 500}{\sqrt{250}}\right) = 2\Phi\left(\frac{M - 500}{\sqrt{250}}\right) - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, верно

$$2\Phi\left(\frac{M - 500}{\sqrt{250}}\right) - 1 \geq 0,99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{M - 500}{\sqrt{250}}\right) \geq 0,995.$$

Отсюда

$$\frac{M - 500}{\sqrt{250}} \geq \Phi^{-1}(0,995) = 2,58 \Rightarrow M \geq 500 + \sqrt{250} \cdot 2,58 = 540,8$$

### Домашние задачи

**9.** Шестигранный кубик подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что тройка появится: а) 2 раза; б) не менее 2, но не более 4 раз; в) хотя бы один раз?



**10.** В ячейку памяти ЭВМ записывается 4-разрядное двоичное число. Значения 0 и 1 в каждом разряде появляются с равной вероятностью. Найти вероятности событий:  $A = \{\text{количество нулей в числе равно двум}\}$ ,  $B = \{\text{количество нулей в числе больше двух}\}$ ,  $C = \{\text{количество нулей в числе не более одного}\}$ .

**Решение.** Испытание – запись одного разряда двоичного числа, успех испытания – {запись нуля}. По условию

$$n = 4, \quad p = 0,5, \quad q = 1 - p = 0,5.$$

Вычислим

$$\mathbf{P}(A) = P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16},$$

$$\mathbf{P}(B) = P_4(3; 4) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) + C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16},$$

$$\mathbf{P}(C) = P_4(0; 1) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

**11.** На контроль поступила партия изделий из цеха. Известно, что 5% всех деталей не удовлетворяет стандарту. Сколько нужно испытать деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,95 обнаружить хотя бы одну нестандартную деталь?

**12.** В ходе аудиторской проверки строительной компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Если 3% счетов содержат ошибки, чему равна вероятность того, что аудитор найдет а) только один счет с ошибкой; б) хотя бы один счет с ошибкой.

**13.** Вероятность рождения мальчика 0,512. Вычислить вероятность событий:  $A$  = (среди 100 новорожденных будет 51 мальчик),  $B$  = (среди 100 новорожденных будет больше мальчиков, чем девочек),  $C$  = (разница между количеством мальчиком и девочек из 100 новорожденных не превысит 10).

**14.** Игральный шестигранный кубик подбрасывается 500 раз. Какова вероятность того, что отклонение относительной частоты появления шестерки от вероятности ее появления в одном опыте по абсолютной величине не превзойдет 0,1?

**15.** Проведено 20 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трех монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании появятся три герба.

**16.** Для данного стрелка вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,9. Произведено 100 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что попаданий будет не менее 80. но не более 95. Как изменятся приближенные вычисления при вероятности попадания 0,04?

### Дополнительные задачи

**Д1.** Пара игральных костей бросается 7 раз. Какова вероятность событий:  $A$  = (сумма очков, равная 7, выпадет дважды),  $B$  = (сумма очков, равная 7, выпадет по крайней мере один раз).

**Д2.** Имеется (8,9)-код с проверкой четности. Вычислить вероятность того, что в случае ошибки этот код ее не обнаружит, если вероятность ошибки при передаче каждого бита равна 0,01? Вычислить вероятность ошибочной передачи без использования кода. Сделать аналогичные расчеты для случая, когда вероятность ошибки в 10 раз меньше.

**Решение.** а) Испытание – передача разряда, успех испытания – {передача разряда с ошибкой},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{\text{передача сообщения с ошибкой без ее обнаружения с проверкой четности}\}$ ,  $C = \{\text{передача сообщения с ошибкой без ее обнаружения без проверки четности}\}$ ,  $X$  – число ошибочно переданных разрядов.

По условию  $n = 9$ ,  $p = 0,01$ ,  $q = 0,99$ .

Вычислим

$$P(B) = \sum_{k=1}^4 P_9(2k) = \sum_{k=1}^4 C_9^{2k} 0,01^{2k} 0,99^{9-2k} = 0,00336;$$

$$P(C) = 1 - 0,99^9 = 0,0773.$$

То же самое при  $p = 0,001$ :

$$P(B) = \sum_{k=1}^4 C_9^{2k} 0,001^{2k} 0,999^{9-2k} = 0,000037;$$

$$P(C) = 1 - 0,999^8 = 0,0080.$$

**Д3.** Станция передает цифровой текст. В силу помех каждая цифра независимо от других может быть неправильно принята с вероятностью 0,01. Найти вероятности событий:  $A$  = (в принятом тексте, содержащем 1100 цифр, будет меньше 20 ошибок),  $B$  = (будет сделано ровно 7 ошибок)

**Д4.** В урне содержатся белые и черные шары в отношении 3:2. Производятся последовательные опыты по извлечению одного шара с возвращением, причем каждый раз фиксируется цвет вынутого шара. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0,9948, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины  $\varepsilon = 0,05$ ?

**Решение.** а) Испытание – извлечение шара, успех испытания – {будет извлечен белый шар},  $p$  – вероятность успеха;  $B = \{ \text{отклонение относительной частоты появления белого шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины } \varepsilon = 0,05 \}$ ,  $X$  – число извлеченных белых шаров,  $n$  – количество извлечений.

По условию  $p = 0,6, q = 0,4$ .

Будем использовать нормальное приближение, поскольку вероятности успеха и неудачи велики, а число испытаний должно быть большим.

По условию  $\mathbf{P}(B) \geq 0,9948$ . С другой стороны

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1.$$

Таким образом, верно

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 \geq 0,9948 \Leftrightarrow \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq 0,9974.$$

Отсюда

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \geq \Phi^{-1}(0,9974) = 2,79 \Rightarrow n \geq pq \left(\frac{2,79}{\varepsilon}\right)^2 = pq \left(\frac{2,79}{\varepsilon}\right)^2 = 747,3.$$

**Д5.** Для контроля отобрано 39 деталей. Наивероятнейшее число годных деталей среди отобранных равно 25. Определить вероятность признания

детали годной.

## ОТВЕТЫ

**Примечание. Приближенные вычисления проведены с помощью статистических функций EXCEL**

1.  $P(A) = 0,3955$ ,  $P(B) = 0,2637$ ,  $P(C) = 0,7627$ ,  $P(D) = 0,1035$  2. 0,104 3. 14 или 15 4. 0.2646 5. а) 0,271; б) 0,857; в) 0. 143 6. 0,952 и 0,106  
 7. 0,0000; 0,995; 0,5; 0,005 8. а) 558; б) 541 9. а) 0,161; б) 0,196; в) 0,598 10. а) 0,375; б) 0,313; в) 0,312 11.  $n \geq 59$  13.  $P(A) = 0,0797$ ,  $P(B) = 0,5160$ ,  $P(C) = 0,0,6689$  14.  $\approx 1$  15.  $1 - (7/8)^{20}$  16. а) 0,952; б) 0  
 Д1.  $P(A) = 0,234$ ,  $P(B) = 0,721$  Д2. 0,917 и 0,0773; 0,991 и 0,00797 Д3. 0,3788 Д4. 753 Д5. от 0,625 до 0,65