Элементарная теория кривых второго порядка

Лекция 2

(2 триместр, ПМИ)

Определение. ***Кривыми второго порядка*** **называются плоские линии, определяемые в прямоугольной декартовой системе координат Oxy уравнением второй степени**

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов $A, B, C \neq 0.$

Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Пусть $C(a, b)$ − центр окружности. Расстояние любой точки окружности до центра обозначим r − *радиус* окружности.

Пусть $M(x, y)$ − любая (текущая) точка окружности.

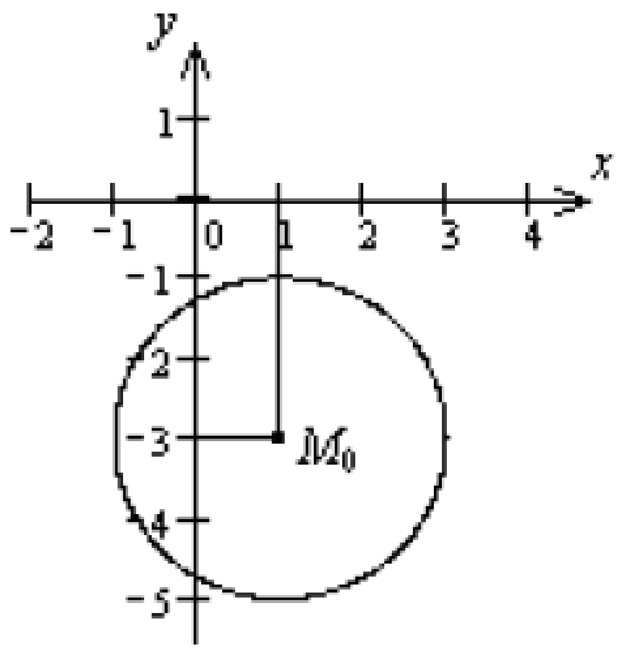
Определение. Уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ называется *нормальным уравнением* окружности. Если центр окружности лежит в начале системы координат, то уравнение вида $x^2+y^2=r^2$ называют *каноническим уравнением* окружности.

Пример. Построить кривую $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$.

Решение:

Выделяя полные квадраты, получим

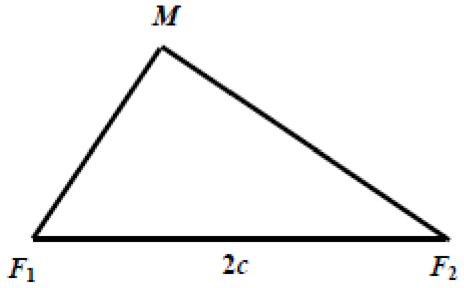
$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 + 6 = 0$ или $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$, т. е. уравнение окружности с центром в точке M_0 $(1; -3)$ и радиусом $r = 2$.



Эллипс

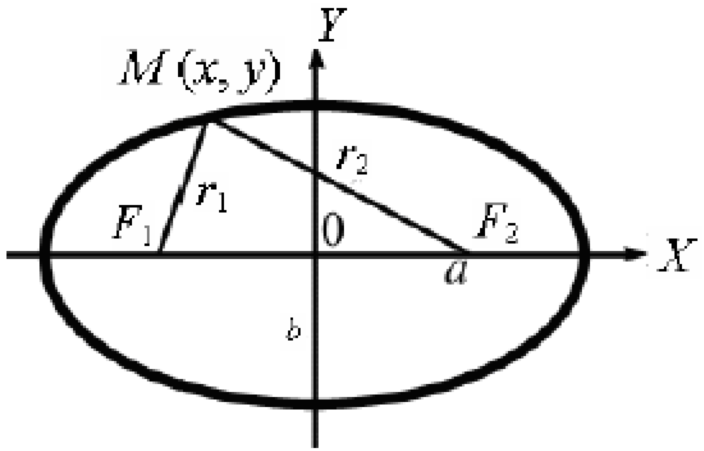
Определение. *Эллипс* – геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, бóльшая чем расстояние между фокусами .

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов принято обозначать через $2a$. Фокусы эллипса обозначаются F_1 и F_2; расстояние между ними – через $2c$.



Определение эллипса выражается формулой $MF_1 + MF_2 = 2a$. Обозначим расстояние $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$ как *фокусное расстояние*. Тогда из треугольника ΔMF_1F_2 получим $2c < 2a$, откуда $c < a$.

Выведем уравнение эллипса. Для начала рассмотрим систему координат Oxy.



Во введенной системе координат фокусы расположены на оси Ox и имеют координаты $F_1\left(-c;\ 0\right)$ и $F_2\left(c;\ 0\right)$. Пусть точка $M\left(\ x,\ y\right)$ принадлежит эллипсу.

Тогда $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$:

Тогда $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$:

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Перенеся первый радикал из правой части в левую и возведя в квадрат, имеем

$$4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (x-c)^2 + y^2,$$

или

$$4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = x^2 - 2xc + c^2 + y^2.$$

Приводя подобные члены, получим, что $4a^2 + 4cx = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Затем (после деления на 4) снова возведем в квадрат:

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2\left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right).$$

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2\left(x^2+2cx+c^2+y^2\right).$$

Последнее уравнение можно упростить, если раскрыть скобки и привести подобные члены:

$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

$$-\left(a^2-c^2\right)x^2=-a^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2.$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $a>c$, то число $a^2-c^2>0$ и можно обозначить $b^2=a^2-c^2>0$. Тогда уравнение запишется: $-b^2x^2=-a^2b^2+a^2y^2$ или $a^2b^2=b^2x^2+a^2y^2$.

Разделив это уравнение на $a^2b^2>0$, получим

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \text{где } b^2=a^2-c^2.}$$

Такое уравнение эллипса называется *каноническим*.

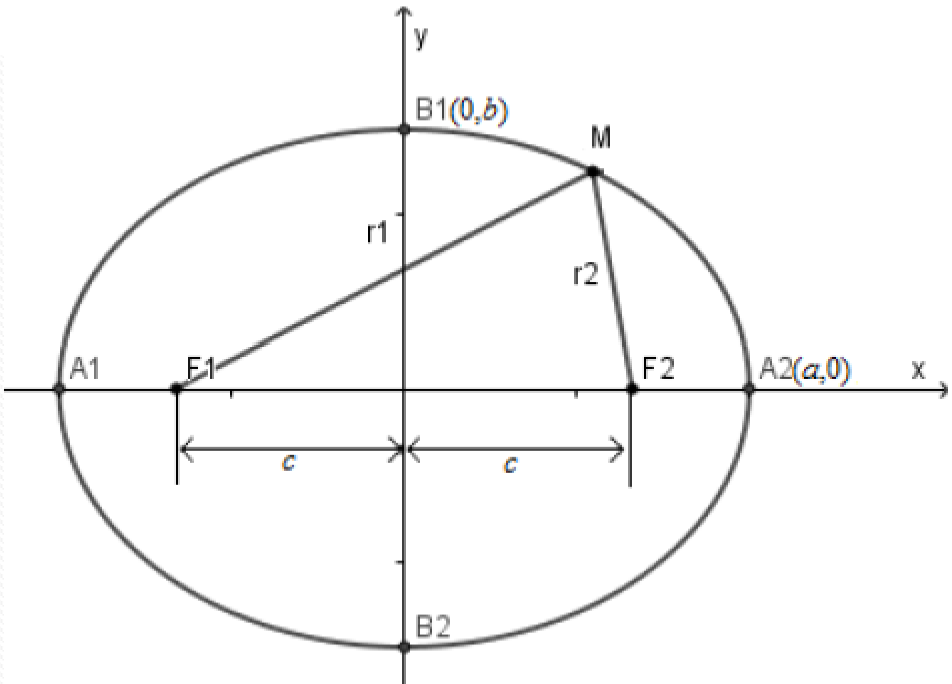
Форма эллипса

Исследуем форму эллипса. Если в уравнении эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ заменить x на $(-x)$, то оно не изменится. Это означает, что если точка $M(x, y)$ принадлежит кривой, то точка $M_1(-x, y)$ также принадлежит этой кривой, т. е. кривая симметрична относительно оси ординат. Эллипс симметричен и относительно оси абсцисс, потому что его уравнение не меняется при замене y на $(-y)$.

Таким образом, эллипс симметричен относительно точки O – *центра эллипса*. Учитывая это, достаточно изучить форму эллипса только в первой четверти, т. е. для $x,\ y \geq 0$.

При $x,\ y \geq 0$ из канонического уравнения можно получить уравнение кривой в явном виде, т. е. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $(0 \leq x \leq a)$. Из этого уравнения ясно, что кривая проходит через точки, $B(0;b)$ и $A(a;0)$. Эти точки называются *вершинами эллипса*.

Из явного уравнения эллипса ясно, что ордината y при непрерывном возрастании x на отрезке $[0;\ a]$ монотонно убывает. Построим по явному уравнению часть эллипса в первой четверти. В остальных четвертях кривая строится с учетом симметрии относительно координатных осей.



Характеристики эллипса

Числа a и b называются *полуосями эллипса*. При этом a называется большой полуосью, а b – малой полуосью эллипса.

При $a = b$ эллипс представляет собой окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Определение. ***Эксцентриситетом эллипса* называется число**

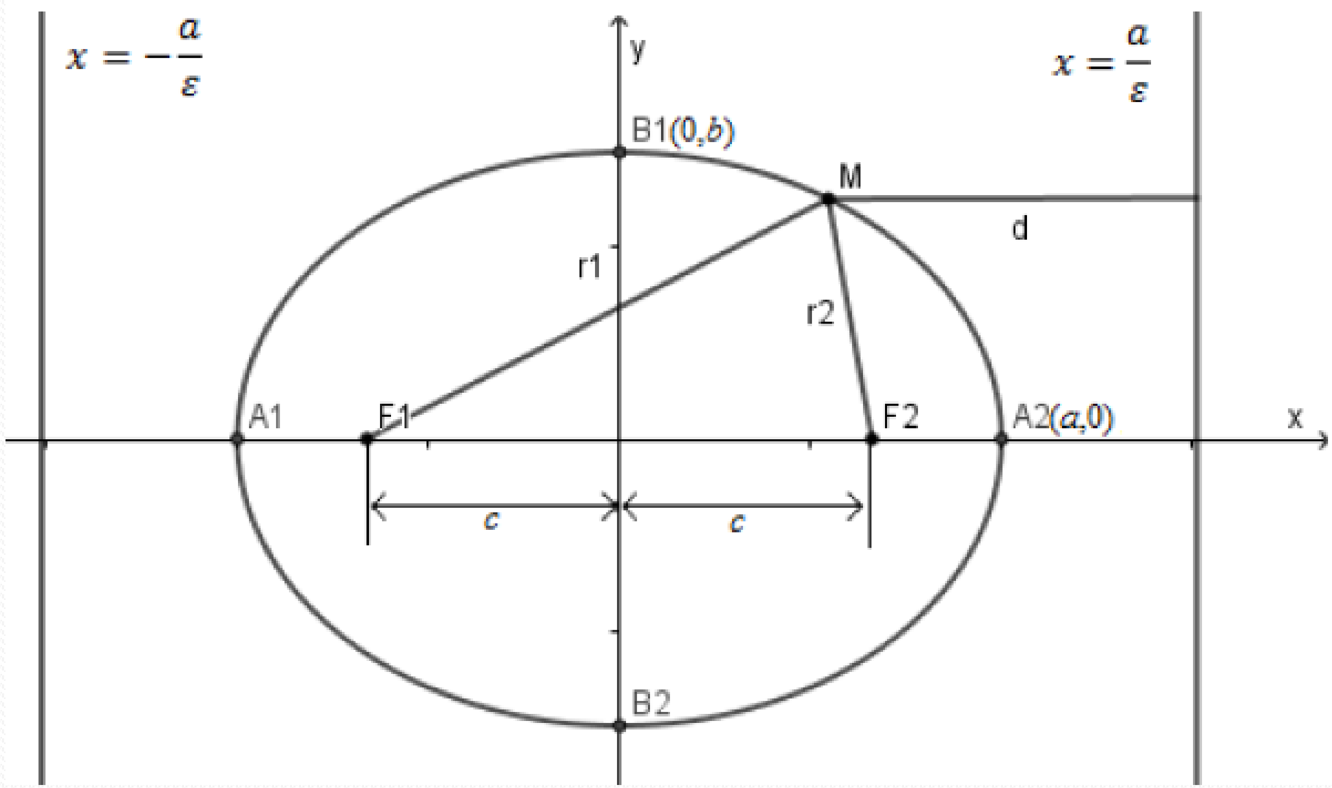
$$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}.$$

Поскольку из определения эллипса следует, что $a > c > 0$, то $\boxed{0 < \varepsilon < 1}$.

Эксцентриситет ε эллипса характеризует степень вытянутости эллипса. Чем ближе эксцентриситет к нулю, тем больше эллипс похож на окружность. Чем ближе эксцентриситет к 1, тем сильнее вытянут эллипс.

Определение. Две прямые, перпендикулярные большей оси эллипса, проходящие от его центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами эллипса*. Уравнения директрис имеют вид

$$\boxed{x = \pm\frac{a}{\varepsilon}}$$



Пример. Составить уравнение эллипса при следующих условиях и найти недостающие параметры: $c = 2,\ \varepsilon = \dfrac{2}{3}$.

Решение:

Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: $(a > b)$

$a = \dfrac{c}{\varepsilon} = 3$ – большая полуось;

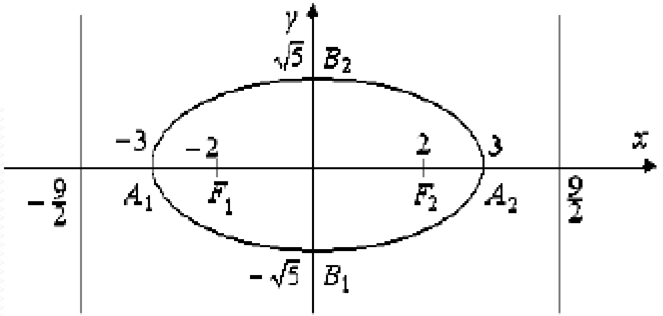
$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$ – малая полуось;

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ – каноническое уравнение искомого эллипса;

$F_1\ (-2; 0),\ F_2\ (2; 0)$ – фокусы эллипса;

$A_1\ (-3; 0),\ A_2\ (3; 0),\ B_1\ (0; -\sqrt{5}),\ B_2\ (0; \sqrt{5})$ – вершины эллипса;

$x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{9}{2}$ – уравнение директрис эллипса.



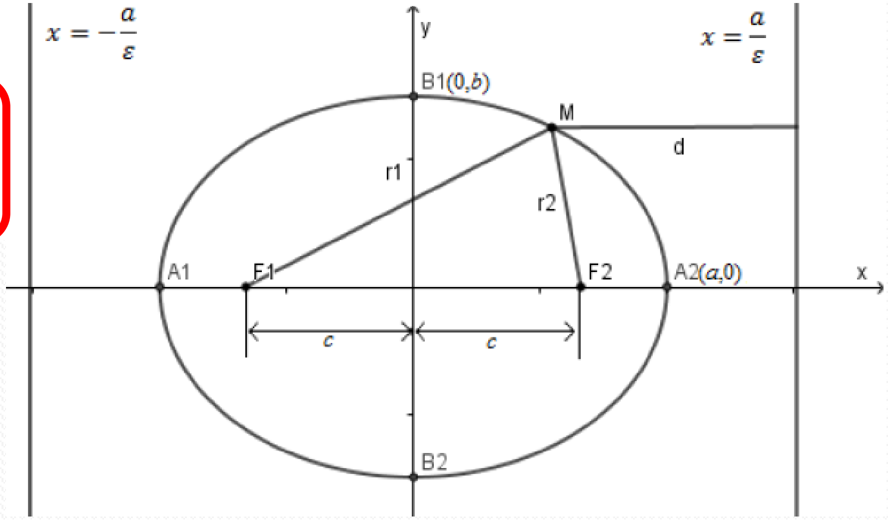
Свойства эллипса

Фокальное свойство эллипса: эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов, постоянна и равна $2a$.

Директориальное свойство эллипса:

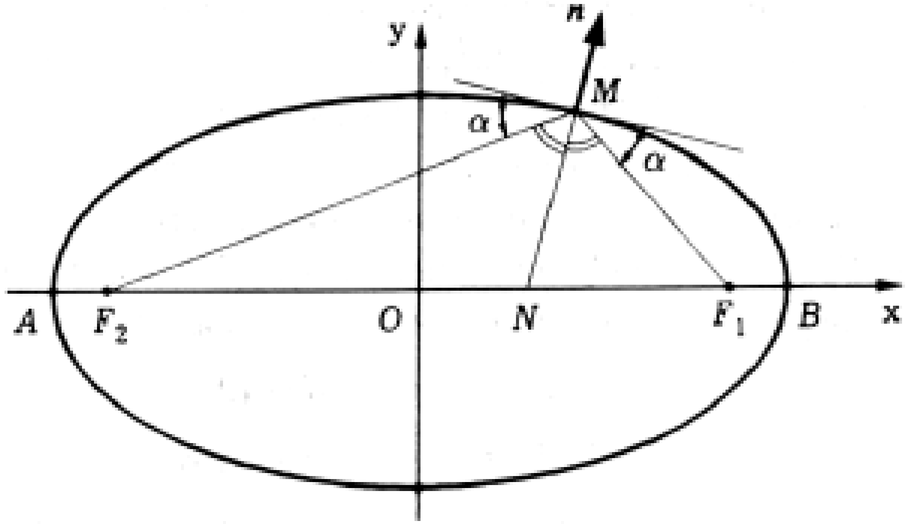
Теорема. Пусть r – расстояние произвольной точки $M(x, y)$ до ближайшего фокуса, d – расстояние от этой же точки до односторонней с фокусом директрисы. Тогда $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса:

$$\boxed{\frac{r}{d} = \varepsilon\,.}$$

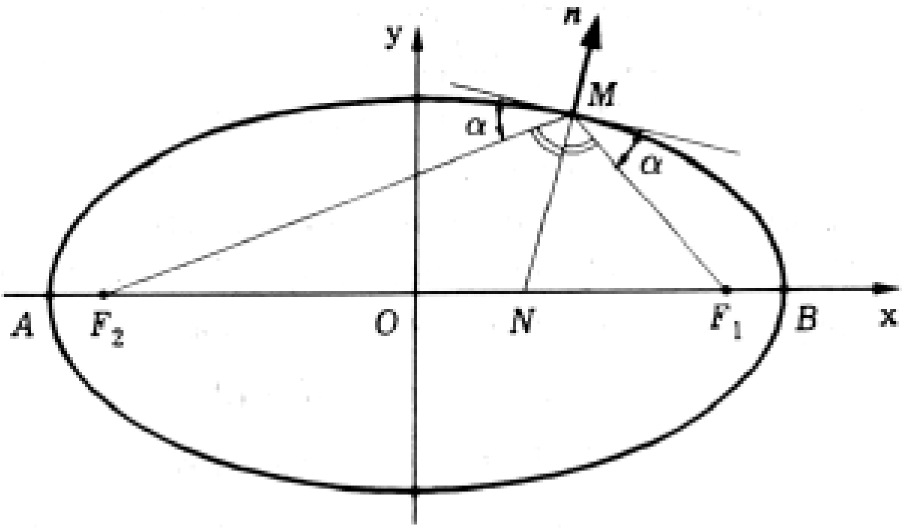


Оптическое свойство эллипса: касательная в любой точке эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы эллипса, M – произвольная точка на эллипсе. Тогда нормаль (перпендикуляр к касательной) к эллипсу в точке M делит угол F_1MF_2 пополам.



Данное свойство имеет достаточно простой физический смысл. Если из одного фокуса выходит в плоскости эллипса луч света, то, отразившись от самого эллипса, он обязательно пройдет через другой фокус. Возьмем поверхность, образованную вращением эллипса вокруг большой оси, и будем считать, что внутри она зеркальная. В один из фокусов поместим источник света. Тогда все лучи, выходящие из источника, отражаясь от поверхности, пройдут через другой фокус, т. е. освещенность в обоих фокусах будет одинаковой.



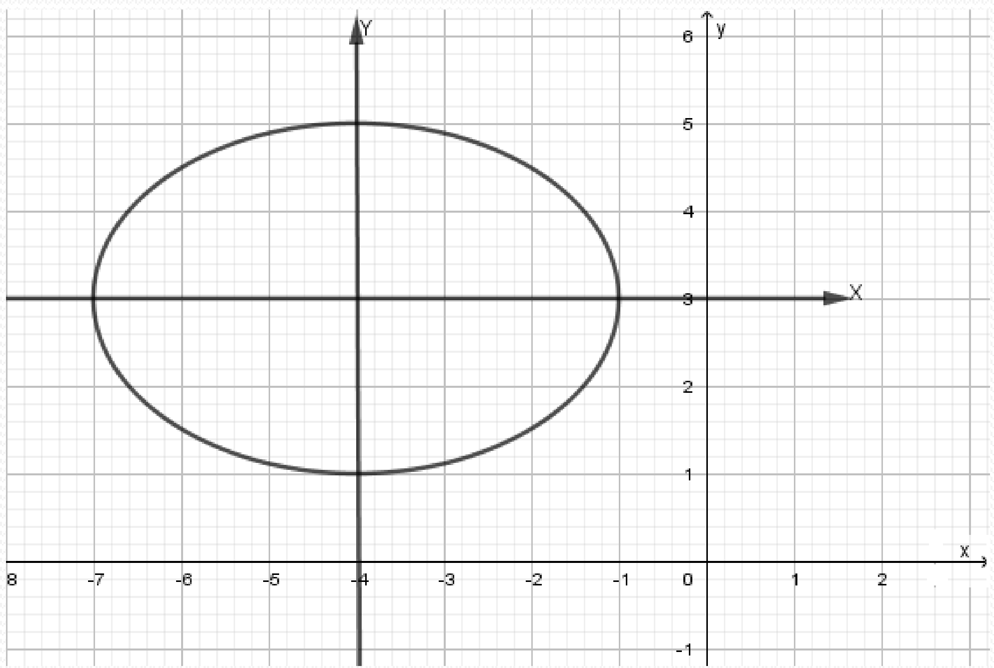
Аналогичное явление происходит и при отражении звука. На этом последнем свойстве было основано устройство «галерей шепота»: два человека, стоящих в фокусах эллиптической галереи, могли переговариваться вполголоса, тогда как остальные посетители галереи их не слышали.

Различные положения эллипса

Уравнение эллипса с центром в точке $O_1\,(x_0, y_0)$ имеет вид

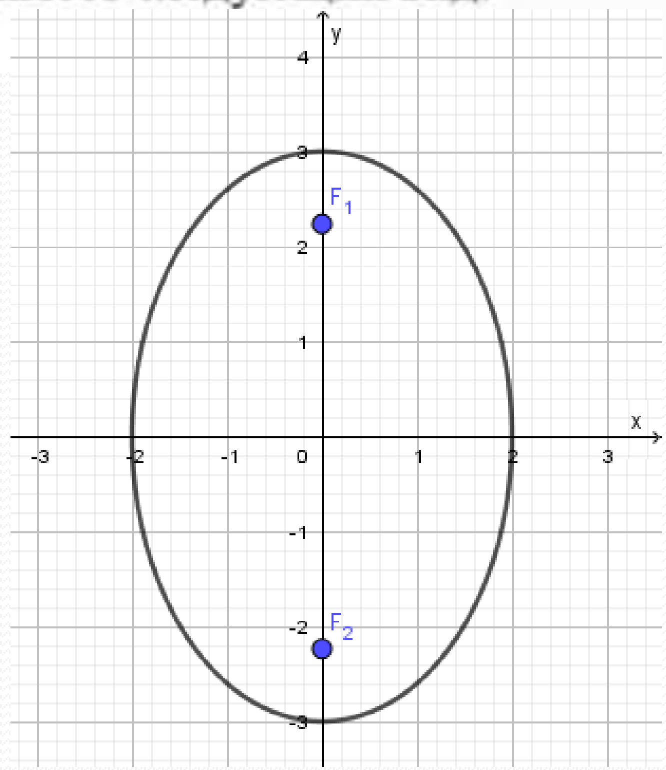
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Так, например, эллипс $\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$ имеет вид



Если в уравнении $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $b>a$, то большая ось и фокусы этого эллипса лежат на оси Oy, а малая ось – на оси Ox. Для такого эллипса $F_1(0;-c)$, $F_2(0;c)$, $c^2=b^2-a^2$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$.

Например, эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ имеет следующий вид:



Касательная к эллипсу

Уравнение касательной в точке $M(x_0, y_0)$, лежащей на эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, имеет вид $\boxed{\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1.}$

Если центр эллипса смещен в точку $C(x_0, y_0)$, но его оси параллельны осям координат, то уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

При этом координаты фокусов

$$F_1(-c+x_0, y_0), F_2(c+x_0, y_0),$$

координаты вершин эллипса

$$A_1(-a+x_0, y_0), A_2(a+x_0, y_0), B_1(x_0, -b+y_0), B_2(x_0, b+y_0),$$

уравнения директрис: $x-x_0=\pm\frac{a}{\varepsilon}$.


Спасибо
за внимание!