Лекция 3

Независимые события.

События A и B называются ***независимыми***, если выполнено одно из соотношений

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$$

$$\text{или } \mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B),$$

$$\text{или } \mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B),$$

т.е. если условная вероятность события A совпадает с его безусловной вероятностью или … .

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называются* <u>*независимыми в совокупности*</u>, если для любого подмножества событий вероятность произведения событий, входящих в это подмножество, равна произведению вероятностей отдельных событий, т.е. $\forall\, r \le n, \quad 1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n, \quad A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{r} A_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} P\left(A_{j_k}\right).$$

Из попарной независимости событий не следует независимость событий в совокупности.

Пример Бернштейна. Имеется правильная пирамидка, 3 грани которой одноцветные (красная, черная и белая), а 4-я грань трехцветная (красно-черно-белая). В результате бросания может произойти одно из событий: A_1={выпадет грань, на которой есть красный цвет}, A_2={выпадет грань, на которой есть черный цвет}, A_3={выпадет грань, на которой есть белый цвет}. Вычислим

$$\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(A_2)=\mathbf{P}(A_3)=\frac{2}{4};$$

$$\mathbf{P}(A_1A_2)=\mathbf{P}(A_2A_3)=\mathbf{P}(A_1A_3)=\mathbf{P}(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}.$$

Поскольку

$$\mathbf{P}(A_1A_2)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2),\quad \mathbf{P}(A_2A_3)=\mathbf{P}(A_2)\cdot\mathbf{P}(A_3),$$

$$\mathbf{P}(A_1A_3)=\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_3),$$

$$\mathbf{P}(A_1A_2A_3)\neq\mathbf{P}(A_1)\cdot\mathbf{P}(A_2)\cdot\mathbf{P}(A_3),$$

то события попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Формулы умножения вероятностей.

1. Для независимых событий $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$

2. Для совместных событий $\mathrm{P}(AB)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A|B).$

3. $$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n} A_k\right)\right) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1 A_2)\ldots\cdot P(A_n \mid A_1\ldots A_{n-1}).$$

Способ вывода

$$P\left(ABC\right) = P\left(A \cap \left(BC\right)\right) =$$
$$= P(A)\cdot P(BC \mid A) = P(A)\cdot P(B \mid A)\cdot P(C \mid AB)$$

Пример 1. Студент знает 10 из 30 вопросов. Определить вероятность получения зачета, если для этого необходимо либо на оба предложенных вопроса, либо на один из них и один дополнительный.

Решение.

Обозначим: A_j={ j-й вопрос студент знает}, $j=1,2,3$;

B={студент получит зачет}. Вычислим искомую вероятность, применяя формулы сложения и умножения вероятностей:

$$P(B)=P\left(A_1A_2+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3\right)=P(A_1A_2)+P\left(A_1\overline{A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_1}A_2A_3\right)=$$

$$=P(A_1)\cdot P(A_2\mid A_1)+P(A_1)\cdot P\left(\overline{A_2}\mid A_1\right)\cdot P\left(A_3\mid\overline{A_2}A_1\right)+$$

$$+P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(A_2\mid\overline{A_1}\right)\cdot P\left(A_3\mid\overline{A_1}A_2\right)=$$

$$=\frac{10}{30}\cdot\frac{10-1}{30-1}+\frac{10}{30}\cdot\frac{20}{30-1}\cdot\frac{10-1}{30-2}+\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{30-1}\cdot\frac{10-1}{30-2}.$$

Пример 2. В партии 2 дефектных и 8 годных изделий. Случайным образом по одному извлекаются изделия для контроля. Найти вероятность того, что второе извлеченное изделие дефектное.

Решение. Обозначим A_j={ j-е извлеченное изделие дефектное}, $j=1,2,\ldots,10$; B={второе извлеченное изделие дефектное}. Вычислим искомую вероятность, применяя формулы сложения и умножения вероятностей:

$$P(B)=P\left(A_1A_2+\overline{A}_1A_2\right)=P\left(A_1A_2\right)+P\left(\overline{A}_1A_2\right)=$$

$$=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\mid A_1\right)+P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(A_2\mid\overline{A}_1\right)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}.$$

Независимые испытания. Формула умножения вероятностей для н/з испытаний.

Испытания *<u>независимые</u>*, если исход одного из них не влияет на исход (не связан с исходом) любого другого.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются результатами различных независимых испытаний, то они являются *причинно (физически) независимыми*. Тогда $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$

Формальное определение независимых испытаний. Пусть вероятностные пространства $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mathrm{P}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ соответствуют n различным испытаниям. Если для любых $A_i \in \mathfrak{A}_i$ $i = 1, \ldots, n$ выполнено соотношение $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$, то испытания независимы.

Пример 1. В охраняемое помещение можно пройти, преодолев 3 уровня безопасности. Вероятности преодоления каждого из них равны 0,2, 0,1 и 0,05 соответственно. Найти надежность (вероятность безотказной работы) этой системы безопасности.

Решение.

Вероятность попасть в охраняемое помещение

$P\left(A_1 A_2 A_3\right) = 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,05 = 0,01$

Надежность системы безопасности равна

$$1 - 0,01 = 0,99$$

Пример 2. $P\left(A\right) = P\left(B\right) = 1.$ Являются ли события A, B независимыми событиями?

Решение.

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cup B\right) = 2 - P\left(A \cup B\right) \geq 1 \Rightarrow P\left(AB\right) = 1.$$

Вывод. События A, B независимы.

Формула полной вероятности.

Условие ее применимости. Известно, что событие A может произойти совместно только с одним из событий H_1, H_2, …, H_k, *образующих полную группу* событий и называемых *гипотезами*.

Тогда, если до проведения испытания известны $\mathbf{P}(H_i)$ – *априорные вероятности* гипотез H_i, и условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_i)$, то полную вероятность события A можно найти по формуле:

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}(AH_i)=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A|H_i).$$

Обоснование формулы: события $\{H_j\}$ – несовместны, поэтому события $\{AH_j\}$– несовместны и $A=\sum_{j=1}^{k}AH_j$. Тогда

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A\cdot\Omega)=\mathbf{P}\left(A\cdot(H_1+H_2+\ldots+H_k)\right)=\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{k}(AH_i)\right)=\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}(AH_i)$$

Пример 1 (задача про две урны). Имеются 2 урны, в каждой из которых 6 белых и 4 черных шаров. И 1-й урны во вторую случайным образом извлекаются 2 шара и перекладываются во вторую урну. Затем из 2-й урны извлекается 1 шар. Найти вероятность того, он окажется белым.

Решение.

Пусть A ={из 2-й урны будет извлечен белый шар}.

<u>Предварительные рассуждения.</u> Невозможно воспользоваться формулой КВ, поскольку не определен состав шаров 2-й урны. Эту стохастическую неопределенность можно устранить, определяя следующие гипотезы:

$H_1 =${во 2-ю урну переложат 2 белых шара},

$H_2 =${во 2-ю урну переложат 1 белый шар и 1 черный шар},

$H_3 =${во 2-ю урну переложат 2 черных шара}.

Применяя формулу полной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i) =$$

$$= \frac{C_6^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{8}{12} + \frac{6 \cdot 4}{C_{10}^2} \cdot \frac{7}{12} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2} \cdot \frac{6}{12} = \frac{120 + 168 + 36}{45 \cdot 12} = \frac{324}{540} = 0,6$$

Формула Байеса. В описанных выше условиях стало известно, что событие A произошло. Формула Байеса позволяет найти $\mathbf{P}(H_j \mid A)$ – *апостериорные вероятности* (вероятности по данным эксперимента) гипотез:

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(H_j A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(H_j A)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(AH_i)} = \frac{\mathbf{P}(H_j) \cdot \mathbf{P}(A|H_j)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(H_i) \cdot \mathbf{P}(A|H_i)}$$

Продолжение пример 1 (задача про две урны). Извлеченный из 2-й урны шар оказался белым. Какие 2 шара скорее всего были переложены?

Применяем формулу Байеса:

$$\mathbf{P}(H_1|A)=\frac{\mathbf{P}(H_1)\cdot\mathbf{P}(A|H_1)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A|H_i)}=\frac{\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{8}{12}}{0,6}=\frac{2\cdot 5}{9\cdot 3}=\frac{10}{27}=\frac{50}{135}$$

$$\mathbf{P}(H_2|A)=\frac{\mathbf{P}(H_2)\cdot\mathbf{P}(A|H_2)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A|H_i)}=\frac{\frac{6\cdot 4}{C_{10}^2}\cdot\frac{7}{12}}{0,6}=\frac{70}{135}$$

$$\mathbf{P}(H_3|A)=\frac{\mathbf{P}(H_3)\cdot\mathbf{P}(A|H_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3}\mathbf{P}(H_i)\cdot\mathbf{P}(A|H_i)}=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{6}{12}}{0,6}=\frac{15}{135}$$

Вывод: скорее всего H_2

Пример 2. Двурукий бандит – это автомат с двумя ручками, причем вероятности успеха, соответствующие нажатию на ту или иную ручку, различны и равны $p_1, p_2, \alpha = p_1 / p_2 > 1$. Каждый раз игрок может нажать лишь одну ручку. Пусть A={произойдет выигрыш при нажатии случайно выбранной ручки}. Найти апостериорную вероятность события

$$H_1 = \{\text{следует нажать левую ручку}\}.$$

Решение. Априорные вероятности $\mathbf{P}\left(H_1\right) = \mathbf{P}\left(H_2\right) = \frac{1}{2}, H_2 = \overline{H_1}$.

Тогда

$$\mathbf{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbf{P}(H_1 A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{p_1 \cdot \frac{1}{2}}{p_1 \cdot \frac{1}{2} + p_2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > \frac{1}{2}.$$

Пример 3 (ошибки классификации). Изделие проверяется на стандартность одним из товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55, а ко второму – 0,45. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9, а вторым – 0,98. а) Найти вероятность того, что первое изделие в результате проверки будет забраковано. б) Найти вероятность того, что первое изделие проверял второй товаровед, если оно было признано стандартным.

Решение. Определим события:

A = {проверяемое изделие будет признано годным}, H_1={изделие проверит 1-й товаровед},
H_2={ изделие проверит 2-й товаровед}. По условию

$$\mathbf{P}\left(H_1\right)=0,55; \mathrm{P}\left(H_2\right)=0,45;$$

$$\mathbf{P}\left(\overline{A}\,|\,H_1\right)=1-0,9=0,1; \mathbf{P}\left(\overline{A}\,|\,H_2\right)=1-0,98=0,02.$$

Найдем по формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\left(\overline{A}\right)=\mathbf{P}\left(H_1\right)\cdot\mathbf{P}\left(\overline{A}\,|\,H_1\right)+\mathbf{P}\left(H_2\right)\cdot\mathbf{P}\left(\overline{A}\,|\,H_2\right)=0,55\cdot 0,1+0,45\cdot 0,02=$$

$$=0,055+0,009=0,064.$$

Применим формулу Байеса:

$$\mathbf{P}\left(H_2\,|\,A\right)=\frac{\mathbf{P}\left(H_2\right)\cdot\mathbf{P}\left(A\,|\,H_2\right)}{\mathbf{P}\left(A\right)}=\frac{0,45\cdot 0,98}{1-0,064}=\frac{0,441}{0,936}=0,47;$$

Пример 4. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$. Вероятность принять здорового человека за больного равна α. Доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. а) Найти вероятность того, что человек здоров, если он был признан больным при обследовании. б) Вычислить найденную в пункте а) вероятность при следующих числовых значениях: $1-\beta=0,95,\ \alpha=0,01,\gamma=0,001$.

Решение. Определим события:
A = {обследуемый человек будет признан больным},
H_1={обследуемый человек болен},
H_2={обследуемый человек здоров}.

По условию

$$\mathrm{P}\left(H_1\right)=\gamma;\ \mathrm{P}\left(H_2\right)=1-\gamma;\ \mathrm{P}\left(A \mid H_1\right)=1-\beta;\ \mathrm{P}\left(A \mid H_2\right)=\alpha.$$

Теперь, используя формулы полной вероятности и Байеса, найдем последовательно

$$\mathrm{P}\left(A\right)=\mathrm{P}\left(H_1\right)\cdot\mathrm{P}\left(A \mid H_1\right)+\mathrm{P}\left(H_2\right)\cdot\mathrm{P}\left(A \mid H_2\right)=\gamma\left(1-\beta\right)+\left(1-\gamma\right)\alpha;$$

$$\mathrm{P}\left(H_2 \mid A\right)=\frac{\mathrm{P}\left(H_2\right)\cdot\mathrm{P}\left(A \mid H_2\right)}{\mathrm{P}\left(A\right)}=\frac{\left(1-\gamma\right)\alpha}{\gamma\left(1-\beta\right)+\left(1-\gamma\right)\alpha}=$$

$$=\frac{0,999\cdot 0,01}{0,001\cdot 0,95+0,999\cdot 0,01}=\frac{0,00999}{0,01094}=0,91$$

Вывод. Не надо преждевременно расстраиваться. Надо сначала дообследоваться.

Тема 4. Схема независимых повторных испытаний

Описание схемы независимых повторных испытаний с двумя исходами: успех и неудача. Вычисление вероятностей наблюдения определенного числа успешных испытаний с помощью формулы Бернулли. Приближенные вычисления вероятностей в схеме независимых повторных испытаний с помощью предельных теорем. Теорема Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Следствия из интегральной теоремы об относительной частоте случайного события и вероятности наблюдения определенного числа успешных испытаний числа.

Независимые испытания. Формула умножения вероятностей для н/з испытаний.

Испытания <u>*независимые*</u>, если исход одного из них не влияет на исход (не связан с исходом) любого другого.

Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются результатами различных независимых испытаний. Они являются *причинно (физически) независимыми*. Тогда $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$

Схема независимых повторных испытаний. Формула Бернулли

Схема испытаний Бернулли. Осуществляются n независимых испытаний, исходом каждого из которых могут быть одно из противоположных событий A и $\overline{A}$ (успех или неудача). При этом в любом испытании $\mathbf{P}(A) = p$ и $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - p = q$ постоянны. Эту вероятностную модель называют *схемой независимых повторных испытаний Бернулли*.

<u>Примеры испытаний Бернулли</u>: страхование клиентов, контроль штучных изделий, функционирование элементов, рождение детей, … .

Далее X – число появлений (частота) события A в n испытаниях.

Основные вероятностные задачи в схеме Бернулли.

Задача 1. Найти $\mathbf{P}(X=m)\equiv P_n(m)$ – вероятность того, что число успешных испытаний будет равно m.

Задача 2. Найти $\mathbf{P}(m_1\le X\le m_2)\equiv P_n(m_1,m_2)$ – вероятность того, что число успешных испытаний будет лежать в пределах от m_1 до m_2.

Эти задачи решаются с помощью формулы Бернулли:

1) $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ m=0,1,\ldots n$ (формула Бернулли);

2) $P_n(m_1,m_2)=P_n(m_1)+\ldots+P_n(m_2)=\sum\limits_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$.

Задача 3. Вычисление наивероятнейшего числа успехов m_0 – числа успехов, которому соответствует наибольшее значение биномиальной вероятности $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

Наивероятнейшее число успехов определяется путем решения неравенства: $np-q\le m_0\le np+p$. Количество решений неравенства – одно или два.

Приближенные вычисления в схеме Бернулли

При $n \to \infty$ нахождение вероятности по формуле Бернулли сопряжено с преодолением проблемы вычислительного характера. Эта проблема решается либо с помощью нормального приближения, либо с помощью пуассоновского приближений. Также полезной оказывается формула Стирлинга.

Формула Стирлинга. При $n \to \infty$ $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ или

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \cdot e^{-\theta_n}, \left|\theta_n\right| \le \frac{1}{12n}.$$

Пример. Точное значение $20! = 2,43 \cdot 10^{18}, 10! = 3628800$; приближенное значение $20! \simeq 2,42 \cdot 10^{18}, 10! = 3600000$.

Рекомендации по выбору пуассоновского или нормального приближения. Считается, что $n \to \infty$ при $n \geq 50$ (еще лучше, если $n \geq 100$).

Если выполняются условия $npq > 9$ и $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$, то используется *нормальное* приближение.

Во всех остальных случаях – *пуассоновское приближение*.

Теорема Пуассона. Пусть в схеме испытаний Бернулли число испытаний неограниченно растет $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, $\lambda > 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},\ m = 0,1,\ldots.$$

Верно

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} \cdot p^m q^{n-m} =$$

$$= \underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{n^m}}_{A_n} \cdot \underbrace{\frac{(np)^m}{m!}}_{B_n} \cdot \underbrace{(1-p)^{n-m}}_{C_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

поскольку

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 1;\ \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{\lambda^m}{m!};\ \lim_{n\to\infty} C_n = e^{-\lim\limits_{n\to\infty}(-p)(n-m)} = e^{-\lambda}.\ \blacksquare$$

Следствие. При $n \to \infty$ и $np \to \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} P_n\left(m_1, m_2\right) = \left[\frac{\lambda^{m_1}}{m_1!} + \frac{\lambda^{m_1+1}}{(m_1+1)!} + \ldots + \frac{\lambda^{m_2}}{m_2!}\right] e^{-\lambda}.$$

Примечание. При конечном n вычисления проводятся по формуле

$$P_n(m) \simeq \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

$$P_n\left(m_1, m_2\right) \simeq \left[\frac{\lambda^{m_1}}{m_1!} + \frac{\lambda^{m_1+1}}{(m_1+1)!} + \ldots + \frac{\lambda^{m_2}}{m_2!}\right],$$

полагая $\lambda = np$.

Точность пуассоновской аппроксимации характеризуется величиной np^2.

Нормальное приближение вероятностей $P_n(m)$ и $P_n\left(m_1, m_2\right)$

Введем обозначения:

1) $\varphi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – плотность стандартного нормального распределения;

2) $\Phi\left(x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция распределения стандартной нормальной величины.

Свойства функций $\varphi\left(x\right), \Phi\left(x\right)$.

1) $\varphi\left(-x\right) = \varphi\left(x\right)$– четная функция, $\varphi\left(x\right)$ – убывает относительно $\left|x\right|$.

2) $\Phi\left(x\right)$ возрастает от $\Phi\left(-\infty\right) = 0$ до $\Phi\left(\infty\right) = 1$.

3) $\Phi\left(-x\right) = 1 - \Phi\left(x\right)$ (используется для расчета при $x < 0$).

4) Ф(0) = 0,5. 5) При $x \geq 4$ $\Phi\left(x\right) = 1{,}0000$ (погрешность вычислений не превышает одну десятитысячную).

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть X – число появлений события A в n независимых повторных испытаниях, $0 < p < 1$. Тогда при $n \to \infty$ для любых действительных x_1, x_2

$$\mathbf{P}\left(x_1 \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le x_2 \right) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Следствие 1. Если в условиях теоремы Муавра-Лапласа m_1 и m_2 изменяются таким образом, что значения $\left| \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} \right|, i = 1, 2,$ остаются ограниченными, то при $n \to \infty$

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \right) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Действительно при $n \to \infty$

$$P_n(m_1, m_2) = \mathbf{P}(m_1 \le X \le m_2) = \mathbf{P}\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \simeq$$

$$\simeq \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$ ■

Следствие 2 (оценка вероятности отклонения частости от вероятности на заданную величину).

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{m(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \simeq 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1.$$

Примечание. Для вычисления вероятностей $\mathbf{P}(X \le m)$ лучше использовать поправку на дискретность

$$\mathbf{P}(X \le m) \simeq \Phi\left(\frac{m+0,5-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

При $np^{3/2} > 1,07$ ошибка такой аппроксимации не превышает 0,05. В таком случае

$$P_n(m_1, m_2) \simeq \Phi\left(\frac{m_2+0,5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{(m_1-1)+0,5-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа. Если в схеме независимых повторных испытаний число испытаний неограниченно растет ($n \to \infty$), а m изменяется таким образом, что $\left|\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right|$ остается ограниченным, то

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) + \mathbf{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Пример 1 (*использование локальной теоремы Муавра-Лапласа*). Анализ итогов года показал, что лишь 20% держателей страховых полисов потребовали возмещения страховых сумм. Найти в этих условиях вероятность того, что из 60 клиентов, вновь заключивших договор страхования, 15 клиентов также потребуют возмещения страховых сумм.

Решение. В условиях примера: испытание – страхование клиента, A={наступление страхового события для отдельного клиента}, X – число страховых событий на 60 клиентов. Тогда

$$p = 0,2; n = 60; \quad np = 60 \cdot 0,2 = 12; \quad npq = 60 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 9,6 > 9;$$

$$\mathrm{P}\left(X = 15 \right) = \frac{1}{\sqrt{9,6}} \varphi\left(\frac{15 - 12}{\sqrt{9,6}} \right) = \frac{1}{3,1} \varphi\left(0,97 \right) = \frac{0,334}{3,1} = 0,108.$$

Пример 2 (*использование интегральной теоремы Муавра-Лапласа*). Для мужчины, дожившего до 30-летнего возраста, вероятность смерти на 31-м году жизни равна 0,005. Застрахована группа в 10000 человек 30-летнего возраста, причем каждый застрахованный внес в качестве взноса 1,2 рубля, В случае смерти застрахованного страховая компания выплачивает наследникам 100 руб. Какова вероятность того, что к концу года: а) компания окажется в убытке; б) чистый доход компании будет не менее 9000 рублей; в) чистый доход компании будет в пределах от 4000 до 5500 рублей.

Решение. В условиях примера: испытание – страхование клиента, A={смерть клиента}, X – число умерших клиентов из числа 10000 застрахованных. Тогда

$$p = 0,005; n = 10000; np = 10000 \cdot 0,005 = 50; npq = 50 \cdot 0,995 = 49,75;$$

а) $\mathbf{P}\left(12000-100X<0\right)=\mathrm{P}\left(X>120\right)=\mathbf{P}\left(121\le X\le 10000\right)=$

$$=\Phi\left(\frac{10000-50}{\sqrt{49,75}}\right)-\Phi\left(\frac{121-50}{\sqrt{49,75}}\right)=\Phi\left(1411\right)-\Phi\left(10\right)=;$$

$$=1.0000-1.0000=0$$

б) $\mathbf{P}\left(12000-100X\ge 9000\right)=\mathbf{P}\left(X\le 30\right)=\mathbf{P}\left(0\le X\le 30\right)=$

$$=\Phi\left(\frac{30-50}{\sqrt{49,75}}\right)-\Phi\left(\frac{0-50}{\sqrt{49,75}}\right)=$$

$$=\Phi\left(-2,83\right)-\Phi\left(-7,09\right)=1-0,9975-0=0,0025;$$

в) $\mathbf{P}\left(4000\le 12000-100X\le 5500\right)=\mathbf{P}\left(65\le X\le 80\right)=$

$$=\Phi\left(\frac{80-50}{\sqrt{49,75}}\right)-\Phi\left(\frac{65-50}{\sqrt{49,75}}\right)=$$

$$=\Phi\left(4,25\right)-\Phi\left(2,13\right)=1,000-0,949=0,001.$$

Пример 3 (*использование теоремы Пуассона*). В районе проживают 1000 человек. Каждый из них независимо друг от друга с вероятностью 0,002 посещает аптеку. Найти вероятности событий: B={в аптеку обратятся 3 человека}, C={в аптеку обратятся менее трех человек}, D={в аптеку обратятся хотя бы 2 человека}, E={в аптеку обратятся от двух до трех человек}.

Решение. В условиях примера: испытание – проживание отдельного человека в районе, A={обращение гражданина в аптеку}, X– суммарное число обращений в аптеку граждан проживающих в районе. Тогда

$$p = 0,002; n = 1000; \quad np = 1000 \cdot 0,002 = 2; \quad npq = 2 \cdot 0,998 = 1.996 < 9.$$

Воспользуемся в вычислениях приближением Пуассона:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(X = 3\right) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0,180;$$

$$\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}\left(X < 3\right) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathrm{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) =$$

$$= \frac{2^0}{0!}e^{-2} + \frac{2^1}{1!}e^{-2} + \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 0,135 + 0,271 + 0,271 = 0,677;$$

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}\left(X \geq 2\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X < 2\right) = 1 - \left[\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)\right] =$$

$$= 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 1 - 0,135 - 0,271 = 0,594;$$

$$\mathbf{P}(E) = \mathrm{P}\left(2 \leq X \leq 3\right) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 3) =$$

$$= \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0,271 + 0,180 = 0,451.$$

Локальная теорема для арифметического (решетчатого) распределения.

Существует обобщение локальной теоремы Муавра–Лапласа.

Опр. Случайная величина X имеет решетчатое распределение, если при некотором $h > 0$ $\sum_k \mathbf{P}\left(X = a + kh\right) = 1$. Наибольшее такое h называется шагом распределения.

Локальная теорема. Пусть $\left\{X_n\right\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (НОРСВ), имеющих арифметическое распределение с шагом h, причем существуют $\mathbf{M}\left[X_1\right] = a, \mathbf{D}\left[X_1\right] = b^2$. Тогда при $\left|m - na\right| \le cb\sqrt{n}$, где c – некоторая константа:

$$\mathbf{P}\left(X_1 + \ldots + X_n = m\right) \sim \frac{1}{b\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{\left(m - na\right)^2}{2nb^2}\right\}.$$