Лекция ПМИ-20 02.11.20

Логарифмическое дифференцирование

Определение. Логарифмической производной от функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции: $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$.

Пример 1. $f(x)=x^x$;

$$(\ln y)'=(x\cdot\ln x)',$$

т. е. $\dfrac{y'}{y}=(x)'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'$

или $\dfrac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$

$$y'=y(\ln x+1), \qquad y'=x^x(\ln x+1).$$

Пример 2. $f(x)=\dfrac{(x+2)^3\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}$.

$$\ln y=\ln\frac{(x+2)^3\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}.$$

$$(\ln y)'=\left(3\ln(x+2)+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{3}{4}\ln(x+1)\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{4(x+1)}$$

$$y' = \frac{(x+2)^3 \cdot \sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^3}} \cdot \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{4(x+1)} \right).$$

Производная обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть в этой точке существует производная $\frac{df(x_0)}{dx} \neq 0$; тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$ имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \frac{1}{\frac{df(x_0)}{dx}}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Данная функция всюду непрерывна и строго монотонна, является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, производная которой $\frac{dx}{dy} = (\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$ не обращается в нуль ни в одной точке интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\frac{dy}{dx}=(\operatorname{arctg}x)'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}x)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в некоторой окрестности точки t_0 и параметрически задают в окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ функцию $y = f(x)$. Тогда, если функции x и y имеют в точке t_0 производные и если $\frac{dx(t_0)}{dt} \neq 0$, то функция $y = f(x)$ в точке x_0 также имеет производную, которая может быть найдена по формуле

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{\frac{dy(t_0)}{dt}}{\frac{dx(t_0)}{dt}}.$$

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} .$$

Пример. Найти производную y'_x функции $y = f(x)$ заданной параметрически: $x = 3\cos t, y = 7\sin t$.

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t, \frac{dy}{dt} = 7\cos t .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{7\cos t}{-3\sin t} = -\frac{7}{3}\operatorname{ctg} t .$$

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y_x{}' = -\dfrac{7}{3}\operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

Производная функции, заданной неявно

Если дифференцируемая на некотором интервале функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то ее производную $y'(x)$ можно найти из уравнения

$$\frac{d}{dx}\big(F(x, y)\big) = \frac{d}{dx}\big(F(x, y(x))\big) = 0\,.$$

Пример. Найти производную неявно заданной функции $y = y(x)$: $x^3 + y^3 - xy = 0$.

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - y - x \cdot y' = 0$$

$$y'(3y^2 - x) = y - 3x^2.$$

$$y' = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}.$$

Производная с модулем

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x \qquad \left(|x|\right)' = \operatorname{sgn} x,\ x \neq 0$$

$$\left(|f(x)|\right)' = f'(x)\operatorname{sgn}\left(f(x)\right)$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + y^2}\right|$

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right)' = \frac{1}{\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|}\operatorname{sgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}{\operatorname{sgn}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}\frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Функция задана разными формулами

$$y=\begin{cases} f(x),\ x<a;\\ g(x),\ x\ge a\end{cases} \qquad y'=\begin{cases} f'(x),\ x<a;\\ g'(x),\ x>a\end{cases}$$

$$y'(a-0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-g(a)}{\Delta x}$$

$$y'(a+0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)-g(a)}{\Delta x}$$

$$y'(a-0)=y'(a+0)=y'(a)$$

Пример. Найти производную функции

$$y = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, -\dfrac{\pi}{2} < x < 0; \\ \operatorname{tg} x, \qquad\qquad 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$y'(-0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$y'(+0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(\Delta x)}{\Delta x}$$