Теория графов

Экстремальные задачи

Взвешенные графы

- Взвешенный граф – это граф, в котором каждому ребру поставлено в соответствие некоторое число, называемое длиной (весом, стоимостью) ребра
- Матрица расстояний – это квадратная матрица $A=\{a_{ij}\}$, в которой a_{ij} = длине ребра (v_i, v_j). В случае отсутствия ребра $a_{ij} = \infty$. На главной диагонали a_{ii} = 0
- Длина цепи (цикла) во взвешенном графе равна сумме длин входящий в нее ребер

0	1	4	5	9
1	0	3	8	5
4	3	0	9	8
5	8	9	0	2
9	5	8	2	0

Экстремальные задачи

1. Нахождение минимального гамильтонова цикла
2. Нахождение минимального остовного дерева
3. Нахождение минимального расстояния
   a) От одной вершины до остальных
   b) Между всеми парами вершин
4. Нахождение максимального паросочетания

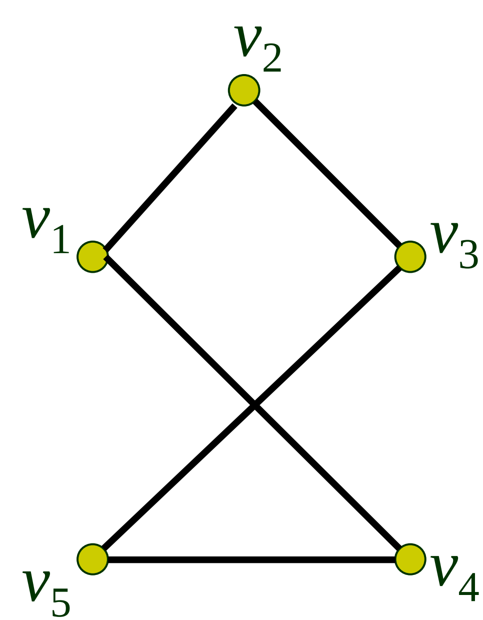
Минимальный гамильтонов цикл (задача коммивояжера)

- Можно считать, что граф является полным (отсутствующим ребрам можно просто придать достаточно большой вес)
- Задача сложная, все известные точные алгоритмы неэффективны

Минимальный гамильтонов цикл (задача коммивояжера): жадный алгоритм

1. Из неотмеченных ребер выбрать ребро минимальной длины
2. Проверить, что выбранное ребро вместе с отмеченными
   a) не образует циклов длины <n
   b) не образует вершин степени >2
3. Если оба условия выполнены, отметить выбранное ребро, иначе – удалить
4. Если отмеченные ребра еще не образуют гамильтонов цикл – перейти к шагу 1

0	1	4	5	9
1	0	3	8	5
4	3	0	9	8
5	8	9	0	2
9	5	8	2	0



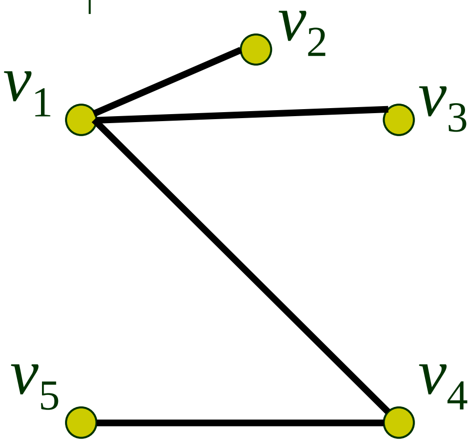
Экстремальные задачи

1. Нахождение минимального гамильтонова цикла
2. Нахождение минимального остовного дерева
3. Нахождение минимального расстояния
   a) От одной вершины до остальных
   b) Между всеми парами вершин
4. Нахождение максимального паросочетания

Минимальное остовное дерево
Алгоритм Краскала (растущий лес)

1. Из неотмеченных ребер выбрать ребро минимальной длины
2. Проверить, что выбранное ребро вместе с отмеченными не образует циклов
3. Если условие выполнено, отметить выбранное ребро, иначе – удалить
4. Если отмеченные ребра еще не образуют остовное дерево – перейти к шагу 1

0	1	3	5	9
1	0	4	∞	5
3	4	0	9	8
5	∞	9	0	2
9	5	8	2	0

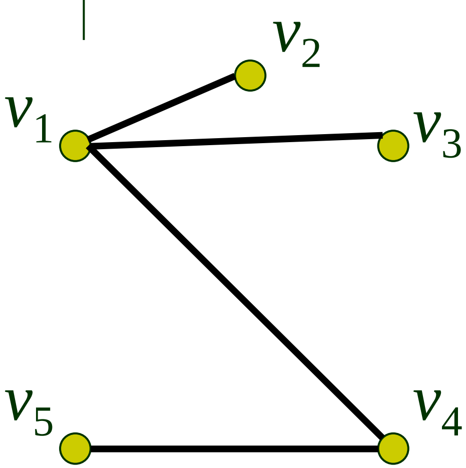


Минимальное остовное дерево

Алгоритм Прима (растущее дерево)

1. Отметить ребро минимальной длины
2. Из ребер, смежных отмеченным, выбрать ребро минимальной длины
3. Проверить, что выбранное ребро вместе с отмеченными не образует циклов
4. Если условие выполнено, отметить выбранное ребро, иначе – удалить
5. Если отмеченные ребра еще не образуют остовное дерево – перейти к шагу 2

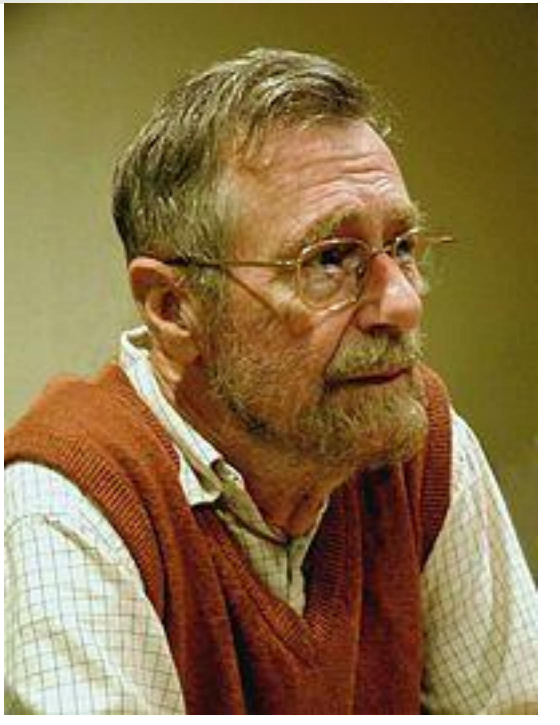
0	1	3	5	9
1	0	4	∞	5
3	4	0	9	8
5	∞	9	0	2
9	5	8	2	0



Экстремальные задачи

1. Нахождение минимального гамильтонова цикла
2. Нахождение минимального остовного дерева
3. Нахождение минимального расстояния
   a) От одной вершины до остальных
   b) Между всеми парами вершин
4. Нахождение максимального паросочетания

Минимальное расстояние
Алгоритм Дейкстры



- Рассмотрен на практике
- Работает только для неотрицательных длин ребер

Экстремальные задачи

1. Нахождение минимального гамильтонова цикла
2. Нахождение минимального остовного дерева
3. Нахождение минимального расстояния
   a) От одной вершины до остальных
   b) Между всеми парами вершин
4. Нахождение максимального паросочетания

Минимальное расстояние

Алгоритм Флойда (-Уоршалла)

- Работает для графов, не содержащих циклы с отрицательной длиной
- Основан на построении последовательности матриц C^0, C^1, …, C^n и D^0, D^1, …, D^n
- Пусть a_{ij} – элементы матрицы расстояний

$$c_{ij}^0 = a_{ij}; d_{ij}^0 = j$$

$$c_{ij}^k = \min\left(c_{ij}^{k-1}, c_{ik}^{k-1} + c_{kj}^{k-1}\right), d_{ij}^k = \begin{cases} d_{ij}^{k-1}, если\ c_{ij}^k = c_{ij}^{k-1} \\ d_{ik}^{k-1}, если\ c_{ij}^k \neq c_{ij}^{k-1} \end{cases}$$

Экстремальные задачи

1. Нахождение минимального гамильтонова цикла
2. Нахождение минимального остовного дерева
3. Нахождение минимального расстояния
   a) От одной вершины до остальных
   b) Между всеми парами вершин
4. Нахождение максимального паросочетания

Следующая тема:

Теория графов

Изоморфизм и планарность