Лекция 4.
Случайные величины. Часть I

Интуитивное понятие случайной величины. Случайная величина как измеримая функция. Понятие закона распределения случайной величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Теорема Лебега о разложении функции распределения. Дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные случайные величины. Пример случайной величины смешанного типа.

1. Общие сведения о случайной величине

Далее испытание заключается в измерении (наблюдении) некоторого числового показателя, имеющего случайную природу; $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ – заданное вероятностное пространство, а $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ – вещественная прямая с борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Определение (содержательное). Числовая величина $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$, определенная на множестве элементарных событий, значение которой зависит от случая и непредсказуемо до завершения испытания, называется случайной величиной.

Примеры с.в. Величина выигрыша в зависимости от выпавшего числа очков на кубике. Стоимость акций в определенный день, ….

Случайные величины обозначают X, Y, Z , … или $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Конкретное *(возможное) значение* с.в. ξ будем обозначать x, множество всех возможных ее значений – $\mathfrak{X}$.

Определение (формальное). Действительная функция $\xi = \xi(\omega)$, определенная на измеримом пространстве $(\Omega, \mathfrak{A})$ называется $\mathfrak{A}$-измеримой или *случайной величиной*, если для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ $\{\omega:\ \xi(\omega) \in B\} \in \mathfrak{A}$, т.е. прообраз $\xi^{-1}(B)$ борелевского множества B является измеримым множеством в Ω.

Замечание. Если $\mathfrak{B}_\xi, \mathfrak{B}_\eta$ – две системы подмножеств, $A \in \mathfrak{B}_1 \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}_2$, то функция $y = f(x)$ – $(\mathfrak{B}_\xi, \mathfrak{B}_\eta)$-измерима.

Примечание 1. Вероятностную меру P_ξ, определенную на $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ с помощью соотношения

$$P_\xi(B)=\mathbf{P}\left(\xi^{-1}(B)\right)=\mathbf{P}\left\{\omega:\ \xi(\omega)\in B\right\},$$

называют *распределением вероятностей случайной величины* ξ.

Пример. Пусть ξ – величина выигрыша определяется по следующему правилу: $\xi=5$, если выпало четное число, и $\xi=-1$ – в противном случае. В данном случае элементарными исходами являются события ω_j = {при бросании кубика выпадет число j}, $j=1,2,\ldots,6$. При этом распределение вероятностей на исходном пространстве элементарных исходов $\Omega=\left\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\right\}$ задается набором вероятностей

$$\mathbf{P}\left(\omega_j\right)=\frac{1}{6},\quad j=1,2,\ldots,6.$$

Определим теперь распределение на множестве значений случайной величины, используя правило $P_\xi(B) = \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$:

$$\mathbf{P}(\xi = 5) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega : \xi(\omega) = 5) =$$

$$= \mathbf{P}(\omega = \omega_2) + \mathbf{P}(\omega = \omega_4) + \mathbf{P}(\omega = \omega_6) = \frac{3}{6}$$

$$\mathbf{P}(\xi = -1) = \mathbf{P}(\omega \in \Omega : \xi(\omega) = -1) =$$

$$= \mathbf{P}(\omega = \omega_1) + \mathbf{P}(\omega = \omega_3) + \mathbf{P}(\omega = \omega_5) = \frac{3}{6}.$$

Часто вместо того, чтобы задавать вероятностную меру сначала на $(\Omega, \mathfrak{A})$, ее сразу определяют на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Случайная величина исчерпывающим образом описывается посредством (закона) распределения вероятностей.

Закон распределения случайной величины – это множество возможных значений случайной величины и распределение вероятностей на этом множестве. Распределение вероятностей может быть задано с помощью функции распределения (ф.р.), таблицы распределения или формулы, плотности, редко графически.

Опр. Если $\mathcal{X}$ – дискретное множество, то ξ – *дискретная случайная величина* (ДСВ).

Примеры ДСВ. Количество произошедших за день правонарушений; количество обращений на станцию скорой помощи за определенный промежуток времени.

Опр. Если $\mathcal{X}$ – некоторая непрерывная область, то обычно ξ – *непрерывная случайная величина* (НСВ). Строгое определение НСВ будет дано позже через понятие плотности распределения.

Примеры НСВ. Доходы, расходы сырья, концентрация вещества, отклонение размера детали от номинала, температура воздуха в определенный день года; темп инфляции за месяц; масса мешка с сыпучим грузом.

ДСВ каждое из возможных значений принимает с положительной вероятностью. НСВ каждое конкретное значение принимает с нулевой вероятностью.

Если случайная величина обладает обоими свойствами, то это случайная величина *смешанного типа*.

Пример из страховой математики. Существует следующий вид страхования автомобиля. В случае наступления страхового случая застрахованный владелец имеет право отказаться от выплаты по этому случаю, рассчитывая сохранить действие договора на случай аварии с большой величиной ущерба. В таком случае владелец либо с ненулевой вероятностью ничего не получит (0 – величина выплат), либо достаточно большую сумму.

Примечание 2 (некоторые свойства измеримых функций).

1. Измеримая функция от измеримой функции есть измеримая функция.

Следствие. Борелевская функция от μ-измеримой числовой функции μ-измерима. Непрерывная функция от μ-измеримой числовой функции μ-измерима.

2. Действительная функция $f(x)$ измерима тогда и только тогда, когда $\{x:\ f(x) < c\}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

3. Сумма, разность, произведение двух измеримых функций измеримы.

4. Предел сходящейся при каждом $x \in X$ последовательности измеримых функций измерим.

Пример 1. Показать, что индикатор случайного события

$$I(A) \equiv I(A;\omega) \equiv I(\omega \in A) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A, \end{cases}$$

является случайной величиной.

Решение. Для любого $x \le 0$ $\{\omega:\ I(A;\omega) < x\} = \varnothing \in \mathfrak{A}$, при любом $0 < x \le 1$ $\{\omega:\ I(A;\omega) < x\} = \bar{A} \in \mathfrak{A}$, при любом $1 < x$ $\{\omega:\ I(A;\omega) < x\} = \Omega \in \mathfrak{A}$.

При этом $\{I(A;\omega) = 1\}$, $\{I(A;\omega) = 0\}$ – события на $\mathbb{R}$:

$$\{I(A) = 1\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{1 \le I(A) < 1 + \frac{1}{n}\right\}.$$

Пример 2. Определим $\xi(\omega)=\omega$, $\omega\in[0;1]=\Omega$; $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_{[0;1]}$. Тогда

$$\{\omega:\ \xi(\omega)<x\}=\{\omega:\ \omega<x\}=\begin{cases}\varnothing, & x\le 0,\\ [0,x), & 0<x\le 1,\\ \Omega, & x>1.\end{cases}$$

Вывод. Случайную величину можно сразу определять на числовой прямой.

2. Функция распределения случайной величины (ф.р.)

Ф.р. позволяет задать закон распределения любой с.в.

Опр. *Функцией распределения* с.в. ξ называется числовая функция $F(x) \equiv F_\xi(x), x \in \mathbb{R}$, заданная выражением $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$.

Ф.р. $F(x)$ определяет вероятность попадания с.в. левее точки x.

Основные свойства ф.р.

1. $0 \le F(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

2. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

3. *Непрерывна слева*.

Пусть $\{x_n\} \uparrow$. Тогда $A_n = (-\infty, x_n) \uparrow (-\infty, x) = A$ и по теореме непрерывности вероятностной меры

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A) = F(x).$$

4. *Неубывающая*.
Действительно
$$(-\infty, x_1) \subset (-\infty, x_2) \Rightarrow F(x_1) = P(X < x_1) \le \mathbf{P}(X < x_2) = F(x_2).$$

5. $P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$, $\quad \mathbf{P}(x_1 \le \xi \le x_2) = F(x_2 + 0) - F(x_1)$.

Так как $\{a \le \xi \le b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{a \le \xi < b + \frac{1}{n}\right\}$, то с использованием теоремы непрерывности вероятностной меры
$$\mathbf{P}(x_1 \le \xi \le x_2) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x_1 \le \xi < x_2 + \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(x_1 \le \xi < x_2 + \frac{1}{n}\right) =$$
$$= F(x_2 + 0) - F(x_1).$$

6. $\mathbf{P}(\xi \ge x) = 1 - F(x)$.

Возможный вид ф.р. определяет

Теорема Лебега. *Ф.р. произвольной с.в.* ξ *может быть представлена в виде смеси трех компонент:*

$$F_\xi(x) = w_1 F_Д(x) + w_2 F_Н(x) + w_3 F_С(x),$$

$F_Д(x)$ – ф.р. дискретного типа,

$F_Н(x)$ – ф.р. абсолютно непрерывного типа,

$F_С(x)$ – ф.р. сингулярного типа,

где $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, w_3 \geq 0$, $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ – весовые коэффициенты.

Примечание. Если ф.р. с.в. ξ имеет конечное или счетное число скачков, то ξ – ДСВ.

Опр. С.в. ξ имеет *абсолютно непрерывное распределение* (ф.р. абсолютно непрерывного типа), если существует функция $f_\xi(x) \equiv f(x)$, называемая плотностью распределения вероятностей, такая что

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Опр. Если ф.р. непрерывна, а множество точек ее роста имеет нулевую меру Лебега, то ξ имеет *сингулярное распределение*.

Анализ распределения случайной величины дискретного типа

Содержание. Основные способы описания распределения дискретной случайной величины. Таблица распределения вероятностей. Нахождение функции распределения и вероятности попадания в интервал дискретной случайной величины. Основные числовые характеристики: математическое ожидание и дисперсия, мода, начальные и центральные моменты. Содержательная интерпретация числовых характеристик, возможная сфера применения. Постановка и решение задачи нахождения распределения функции от дискретной случайной величины. Моделирование дискретной случайной величины с заданным распределением.

Таблица распределения ДСВ

Имеется с.в. ξ с множеством возможных значений $\{x_1,\ldots,x_n\}$ и соответствующих им вероятностей $\{p_1,\ldots,p_n\}$, $p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i)$. Множество пар $\{(x_i, p_i), i=\overline{1,n}\}$ с.в. ξ удобно представить в виде таблицы из двух строк:

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P_ξ	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $\{p_1,\ldots,p_n\}$– ряд распределения вероятностей с.в. ξ: $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1.$

Примечание. Возможно описание дискретного распределения с помощью функции вероятностей, если найдется единая формула, с помощью которой можно задать все элементы ряда распределения.

Основные типы задач, связанные с анализом ДСВ.

Тип 1. *Нахождение закона распределения ДСВ.*

Пример. 1-й магазин откроется в течение месяца с вероятностью $p_1 = 0{,}4$; 2-й магазин – с вероятностью $p_2 = 0{,}3$. Пусть открытие магазинов – независимые события. Обозначим X – число магазинов, открывшихся за указанный период.

Решение. Покажем, что таблица распределения имеет вид

X	0	1	2
P_X	0,42	0,46	0,12

Пусть $A_i = \{i$-й магазин откроется$\}$. Тогда

$$\mathbf{P}(X=0)=\mathbf{P}\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\right)=0,6\cdot 0,7=0,42;$$

$$\mathbf{P}(X=1)=\mathbf{P}\left(\overline{A_1}A_2+A_1\overline{A_2}\right)=0,6\cdot 0,3+0,4\cdot 0,7=0,46;$$

$$\mathbf{P}(X=2)=\mathbf{P}\left(A_1A_2\right)=0,4\cdot 0,3=0,12.$$

Тип 2. *Вычисление вероятности попадания ДСВ в заданное множество G:*

$$\mathbf{P}(\xi \in G) = \mathbf{P}\left(\sum_{\{i:\, x_i \in G\}} (\xi = x_i)\right) = \sum_{\{i:\, x_i \in G\}} p_i.$$

Продолжение примера. В условиях примера

X	0	1	2
P_X	0,42	0,46	0,12

вычислим

$$\mathbf{P}(0 < X \le 2) = \mathbf{P}((X = 1) + (X = 2)) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) =$$

$$= 0,46 + 0,12 = 0,58;$$

$$\mathbf{P}(X > 3) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

Тип 3. *Нахождение функции распределения ДСВ*:

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{\{i:\, \xi < x_i\}} p_i.$$

Особые свойства функции распределения ДСВ. Ф.р. $F(x)$ является ступенчатой функцией с точками разрыва $x_1, \ldots, x_n$.

1) Между соседними точками разрыва ф.р. сохраняет свое значение.

Действительно, пусть $x_1 < \ldots < x_n$; выберем $x_{j-1} < x < x_j$. Тогда левее точки x находятся только точки $x_1, \ldots, x_{j-1}$. Поэтому

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{i=1}^{j-1} p_i.$$

2) В точке разрыва x_i ф.р. получает приращение, равное p_i.

Вычислим

$$F(x_j) = \mathbf{P}(\xi < x_j) = \sum_{i=1}^{j-1} p_i; \quad F(x_j + 0) = \mathbf{P}(\xi < x_j + 0) = \sum_{i=1}^{j} p_i.$$

Продолжение примера. В условиях примера

X	0	1	2
P_X	0,42	0,46	0,12

вычислим с использованием установленных свойств:

$$F(x)=\begin{cases}\ldots, & x\le 0,\\ \ldots, & 0<x\le 1,\\ \ldots, & 1<x\le 2,\\ \ldots, & x>2.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \ldots, & 0<x\le 1,\\ \ldots, & 1<x\le 2,\\ \ldots, & x>2.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0+0.42, & 0<x\le 1,\\ 0+0.42+0.46, & 1<x\le 2,\\ 0+0.42+0.46+0.12, & x>2\end{cases} =\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0.42, & 0<x\le 1,\\ 0.88, & 1<x\le 2,\\ \boxed{1}, & x>2.\end{cases}$$

Тип 4. *Вычисление числовых характеристик распределения.*
Числовая характеристика распределения с.в. – это число, несущее в себе некоторую обобщенную информацию о распределении с.в.

Основные числовые характеристики с.в.
1) *Математическое ожидание* $\mathbf{M}[\xi]=\mathbf{M}\xi \quad (\mathbf{E}\xi)$ (expectation, mean value, expected value).
Опр. Если ξ – с.в., задаваемая таблицей распределения $\{(x_i, p_i), i=\overline{1,n}\}$, то математическое ожидание (м.о.) – число, определяемое выражением

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Характеризует среднее значение с.в., определяющее центр распределения. В экономических приложениях м.о. используется в качестве меры эффективности совершаемой экономической операции.

Примечание. Для произвольной функции $h(x)$ математическое ожидание определяется по формуле:

$$\mathbf{M}\left[h(\xi)\right]=\sum_{i=1}^{n}h(x_i)\,p_i.$$

Пример («лукавые цифры – средняя зарплата»).

ξ	12000	150000
P	0,8	0,2

$$\mathbf{M}\xi=\sum_{i=1}^{n}x_i\,p_i=12000\cdot 0,8+150000\cdot 0,2=39,6.$$

2) *Начальный момент k-го порядка* – $m_k, k = 0,1,\ldots.$

Опр. $m_k = \mathbf{M}\left[\xi^k\right].$

Формула для вычислений: $m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i..$

3) *Центральный момент k-го порядка* – $\nu_k, k = 0,1,\ldots.$; при этом $\xi - \mathbf{M}\xi$ – центрированная с.в.

Опр. $\nu_k = \mathbf{M}\left[\left(\xi - \mathbf{M}\xi\right)^k\right].$

Формула для вычислений: $\nu_k = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mathbf{M}\xi\right)^k p_i.$

Примечание (связь центральных и начальных моментов).

Воспользуемся биномом Ньютона: $\left(a+b\right)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^j b^{n-j}.$

Последовательно получим

$$\nu_k = \mathbf{M}\left[\left(\xi - \mathbf{M}\xi\right)^k\right] = M\left[\sum_{j=0}^{k} C_k^j \xi^j \left(-\mathbf{M}\xi\right)^{k-j}\right] = \sum_{j=0}^{k} C_k^j m_j \left(-\mathbf{M}\xi\right)^{k-j}.$$

Примечание. При выводе использован ряд линейных свойств математического ожидания:

- математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий от отдельных слагаемых,
- постоянный множитель выносится за знак математического ожидания,
- математическое ожидание равно константе.

На формальном языке (a, b – константы):

1. $\mathbf{M}\left[a + b\xi\right] = a + b\mathbf{M}\left[\xi\right]$.

   1.1. $\mathbf{M}\left[const\right] = const$.   1.2. $\mathbf{M}\left[b\xi\right] = b\mathbf{M}\left[\xi\right]$.

2. $\mathbf{M}\left[\xi_1 + \ldots + \xi_n\right] = \mathbf{M}\left[\xi_1\right] + \ldots + \mathbf{M}\left[\xi_n\right]$.

4) *Дисперсия (рассеяние)* $\mathbf{D}\left[\xi\right]=\mathbf{D}\xi\ \left(\mathbf{V}\xi\right)$ (*variance*).

Опр. $\mathbf{D}\left[\xi\right]=\nu_2=\mathbf{M}\left[\xi-\mathbf{M}\xi\right]^2$.

Характеризует изменчивость с.в., рассеяние ее значений. В экономических приложениях дисперсия используется в качестве меры риска совершаемой экономической операции. Считается, что риск операции обусловлен неопределенностью ее результата.

Формулы для вычислений:

$$\mathbf{D}\left[\xi\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mathbf{M}\xi\right)^2 p_i,\qquad \mathbf{D}\left[\xi\right]=m_2-m_1^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-\mathbf{M}^2\xi.$$

Простейшие свойства дисперсии.

- Дисперсия суммы независимых с.в. равно сумме дисперсий отдельных слагаемых.
- Постоянный множитель выносится за знак дисперсии в квадрате.
- Дисперсия константы равна нулю.
- Постоянное слагаемое не влияет на значение дисперсии.

5) *Среднеквадратичное (стандартное) отклонение* $\sigma_{\xi} = \sqrt{\mathbf{D}[\xi]}$.
Имеет то же назначение, что и дисперсия. Преимущество по сравнению с дисперсией – имеет ту же размерность, что и с.в.

6) *Мода распределения* $d_{\xi} = Mo(\xi)$.
Опр. Мода дискретной с.в. – ее наиболее вероятное значение. Если мода одна, то распределение называется *унимодальным*.

7) *Медиана распределения* $x_{0,5}$.
Опр. Число $x_{0,5}$ называется медианой распределения с.в. ξ, если оно удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{P}\left(\xi \geq x_{0,5}\right) \geq \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}\left(\xi \leq x_{0,5}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Примечание. Определяет середину (центр) распределения. Применяется в качестве альтернативы математическому ожиданию в том случае, когда то малоинформативно.

Продолжение примера. В условиях примера

X	0	1	2
P_X	0,42	0,46	0,12

$$x_{0,5} = 1, \quad \mathbf{M}\left[X\right] = 0 + 1 \cdot 0,42 + 2 \cdot 0,46 = 1,34,$$

Для

ξ	12000	150000
P	0,8	0,2

$$x_{0,5} = 12000, \;\; \mathbf{M}\xi = 39,6.$$

Тип 5. *Нахождение распределения функции от ДСВ*.

Примеры таких задач. Распределение выигрыша в зависимости от числа на выпавшей грани кубика; распределение дохода кафе в зависимости от числа обслуженных клиентов. Распределение разности между числами появления и не появления события в схеме испытаний Бернулли, и т.д.

Постановка задачи. Пусть $\xi \sim \left\{ \left(x_i, p_i \right), i = \overline{1, n} \right\}$ (ξ имеет таблицу распределения указанного вида) и задано ее преобразование $\eta = h\left(\xi \right)$. Требуется найти закон распределения с.в. η.

Решение задачи. Поскольку с.в. η может принимать только одно из значений $h(x_i), i=1,\ldots,n,$ то она также является ДСВ. Ее закон распределения находится по схеме.

1) Определяем множество возможных значений η: $y_1,\ldots,y_m$, выбирая их из множества $h(x_i), i=1,\ldots,n.$

2) Вычисляем $\mathbf{P}(\eta=y_j)=\mathbf{P}(h(\xi)=y_j)=\mathbf{P}\left(\sum_{\{i:\, h(x_i)=y_j\}}\{\xi=x_i\}\right).$

Продолжение примера. В условиях примера

X	0	1	2
P_X	0,42	0,46	0,12

Найти распределения с.в. $Y = 2X - 1, Z = \left| X - 1 \right|, U = e^X$

Сначала определяем возможные значения

X	0	1	2
$Y = 2X - 1$	-1	1	3
$Z = \left\| X - 1 \right\|$	1	0	1
$U = e^X$	1	e	e^2

Затем составляем их таблицы распределения вероятностей

Y	-1	1	3
P_Y			

Z	0	1
P_Z		

U	1	e	e^2
P_U			

Наиболее известные дискретные распределения и их числовые характеристики

Производящая функция моментов дискретной случайной величины. Биномиальное и отрицательное биномиальное распределения. Гипергеометрическое и пуассоновское распределения.

Нахождение моментов с помощью производящей функции

Опр. *Производящая функция начальных моментов* с.в. $\xi \sim \left\{ \left(x_i, p_i \right), i = \overline{1,n} \right\}$ определяется формулой

$$\psi_{\xi}\left(z \right) = \mathbf{M}\left[e^{z\xi} \right] = \sum_{i=1}^{n} e^{z x_i} p_i,$$

действительное значение z принадлежит некоторой окрестности нуля.

Вычисление начальных моментов с.в. можно осуществлять с помощью следующего свойства производящей функции:

$$m_k = \frac{d^k}{dz^k}\left[\psi_\xi(z)\right]\Big|_{z=0}.$$

1. Биномиальное распределение $B(n,p)$.

Пусть проводится n независимых испытаний с противоположными исходами (успех, неудача), p – вероятность успешного исхода отдельного испытания. Тогда ξ – число успешных среди n испытаний имеет биномиальное распределение $B(n,p)$. Биномиальное распределение определяется формулой Бернулли:

$$\mathbf{P}(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,\ldots,n.$$

Его основные числовые характеристики: $\mathbf{M}[\xi] = np$, $\mathbf{D}[\xi] = npq$.

Мода $m_0 = Mo(\xi)$ (***наивероятнейшее число успехов***) является решением неравенства: $np - q \le m_0 \le np + p$. Неравенство получается в результате последовательного решения задач:
1) вычисляем отношение двух последовательных биномиальных вероятностей

$$\Upsilon(m) = \frac{P_n(m)}{P_n(\xi = m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-(m-1)}} = \frac{(n-m+1)p}{mq}$$

– невозрастающая функция от m;
2) решаем систему

$$\begin{cases} \Upsilon(m) \ge 1 \\ \Upsilon(m+1) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-m+1)p \ge mq \\ (n-m)p \ge (m+1)q \end{cases}.$$

Производящая функция начальных моментов биномиального распределения имеет вид

$$\psi_{B(n,p)}(z) = \mathbf{M}\left[e^{z\xi}\right] = \sum_{m=0}^{n} e^{zm}\mathbf{P}(\xi = m) = \sum_{m=0}^{n} e^{zm} C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left(pe^z\right)^m q^{n-m} = \left(pe^z + q\right)^n .$$

Отсюда последовательно найдем

$$\psi'_{B(n,p)}(z) = n\left(pe^z + q\right)^{n-1} pe^z \Rightarrow \mathbf{M}\xi = n\left(pe^0 + q\right)^{n-1} pe^0 = np;$$

$$\psi''_{B(n,p)}(z) = n(n-1)\left(pe^z + q\right)^{n-2}\left(pe^z\right)^2 + \psi'_{B(n,p)}(z) \Rightarrow \mathbf{M}\xi^2 = n(n-1)^2 + np;$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - \mathbf{M}^2\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

Примечание (для сравнения). Прямое вычисление математического ожидания проводится по схеме с помощью комбинаторных преобразований:

$$\mathbf{M}\left[\xi\right]=\sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=1}^{n} m\cdot\frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}p^m q^{n-m} =$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{n!}{\left(m-1\right)!\left(n-m\right)!}p^m q^{n-m} = \left\{\begin{matrix} k=m-1, \\ m=k+1 \end{matrix}\right\} =$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!\left(n-k-1\right)!}p^{k+1}q^{n-k-1} = np\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(n-1\right)!}{k!\left(n-k-1\right)!}p^k q^{n-1-k} = np,$$

с учетом условия нормировки биномиального распределения $B\left(N,p\right)$:

$$\sum_{m=0}^{N} C_N^m p^m q^{N-m} = \sum_{m=0}^{N}\frac{N!}{m!\left(N-m\right)!}p^m q^{N-m} = 1.$$

2. Пуассоновское распределение $\Pi(\lambda)$.

С.в. ξ имеет распределение Пуассона $\Pi(\lambda)$ с параметром интенсивности λ, если ее ряд распределения задается формулой:

$$\mathbf{P}(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Обычно это распределение имеет число редких событий, происходящих за время T. При этом λ – среднее число редких событий, происходящих за это время.

Его основные числовые характеристики:

$\mathbf{M}[\xi] = \lambda, \mathbf{D}[\xi] = \lambda$; мода $Mo(\xi)$ является решением некоторого неравенства (какого?), определяемого по той же схеме, что и в случае биномиального распределения.

Производящая функция начальных моментов:

$$\psi_{\Pi(\lambda)}(z) = \mathbf{M}\left[e^{z\xi}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} e^{zm}\mathbf{P}(\xi = m) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{zm}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^z\right)^m}{m!}e^{-\lambda} = e^{\lambda\left(e^z-1\right)}.$$

Отсюда последовательно найдем

$$\psi'_{\Pi(\lambda)}(z) = e^{\lambda\left(e^z-1\right)}\lambda e^z \Rightarrow \mathbf{M}\xi = e^{\lambda\left(e^0-1\right)}\lambda e^0 = \lambda;$$

$$\psi''_{\Pi(\lambda)}(z) = e^{\lambda\left(e^z-1\right)}\left(\lambda e^z\right)^2 + \psi'_{\Pi(\lambda)}(z) \Rightarrow \mathbf{M}\xi^2 = \lambda^2 + \lambda;$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - \mathbf{M}^2\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Примечание. Вычисление начальных моментов возможно с использованием *факториальных моментов*

$$\mathbf{M}\left[\xi^{[k]}\right] \equiv \mathbf{M}\left[\xi(\xi-1)\cdot\ldots\cdot(\xi-k+1)\right] = \sum_{m=0}^{\infty} m^{[k]}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \lambda^k.$$

3. Отрицательное биномиальное распределение $NB(k, p)$.

Независимые испытания с противоположными исходами (успех, неудача) и вероятностью успешного исхода отдельного испытания, равной p, проводятся до k-го успеха. Тогда ξ – число неудачных испытаний до k-го успеха имеет отрицательное биномиальное распределение $NB(k, p)$. Отрицательное биномиальное распределение определяется формулой:

$$\mathbf{P}(\xi = m) = P_{m+k-1}(m) \cdot p = C_{m+k-1}^{m} q^{m} p^{k}, \quad m = 0,1,\ldots .$$

Его основные числовые характеристики:

$$\mathbf{M}[\xi] = \frac{kq}{p}, \mathbf{D}[\xi] = \frac{kq}{p^2}; \quad \mathbf{M}[\xi + k] = \frac{k}{p}.$$

Примечание. При $k = 1$ геометрическое распределение.

Производящая функция начальных моментов:

$$\psi_{NB(k,q)}(z)=\mathbf{M}\left[e^{z\xi}\right]=\sum_{m=0}^{\infty}e^{zm}\mathbf{P}(\xi=m)=\sum_{m=0}^{\infty}e^{zm}C_{m+k-1}^{m}q^{m}p^{k}=$$

$$=p^{k}\sum_{m=0}^{\infty}C_{m+k-1}^{m}\left(qe^{z}\right)^{m}\frac{\left(1-qe^{z}\right)^{k}}{\left(1-qe^{z}\right)^{k}}=\left(\frac{p}{1-qe^{z}}\right)^{k}.$$

Отсюда последовательно

$$\psi'_{NB(k,q)}(z)=k\left(\frac{p}{1-qe^{z}}\right)^{k-1}\frac{pqe^{z}}{\left(1-qe^{z}\right)^{2}}=k\left(\frac{p}{1-qe^{z}}\right)^{k}\frac{qe^{z}}{1-qe^{z}}\Rightarrow\mathbf{M}\xi=\frac{kq}{p};$$

$$\psi''_{NB(k,q)}(z)=k^{2}\left(\frac{p}{1-qe^{z}}\right)^{k}\left(\frac{qe^{z}}{1-qe^{z}}\right)^{2}+k\left(\frac{p}{1-qe^{z}}\right)^{k}\frac{q\left[e^{z}\left(1-qe^{z}\right)+qe^{2z}\right]}{\left(1-qe^{z}\right)^{2}}\Rightarrow$$

$$\mathbf{M}\xi^{2}=\left(\frac{kq}{p}\right)^{2}+\frac{kq}{p^{2}};\quad \mathbf{D}\xi=\mathbf{M}\xi^{2}-\mathbf{M}^{2}\xi=\left(\frac{kq}{p}\right)^{2}+\frac{kq}{p^{2}}-\left(\frac{kq}{p}\right)^{2}=\frac{kq}{p^{2}}.$$

Примечание. Вычисление характеристик с.в. возможно путем дифференцирования основного вероятностного тождества по переменной p. Для данного распределения вычисления состоят в следующем:

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k-1}^{m} q^m p^k = 1 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k-1}^{m} q^m p^k \left(\frac{m}{q} - \frac{k}{p} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\mathbf{M}[\xi]}{q} = \frac{k}{p},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m C_{m+k-1}^{m} q^m p^k = \frac{kq}{p} \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} m C_{m+k-1}^{m} q^m p^k \left(-\frac{m}{q} + \frac{k}{p} \right) = -\frac{k}{p^2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{M}\left[\frac{\xi^2}{q} \right] - \mathbf{M}[\xi] \cdot \frac{k}{p} = \frac{k}{p^2} \Rightarrow \mathbf{M}\left[\xi^2 \right] = q \left[\frac{k}{p^2} + \frac{kq}{p} \cdot \frac{k}{p} \right].$$

4. Гипергеометрическое распределение $H(N,D;n,d)$.

Имеется совокупность из N элементов, среди которых D элементов 1-го типа и $N-D$ элементов 2-го типа. Из нее извлекается случайная выборка объема *n*. Тогда ξ – число элементов 1-го типа в выборке имеет гипергеометрическое распределение $H(N,D;n,d)$. Гипергеометрическое распределение определяется формулой:

$$\mathbf{P}(\xi=m)=\frac{C_D^m\cdot C_{N-D}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1,\ldots,\min(n,D).$$

Его основные числовые характеристики:

$$\mathbf{M}[\xi]=\frac{nD}{N},\,\mathbf{D}[\xi]=\frac{nD}{N}\left(1-\frac{D}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$