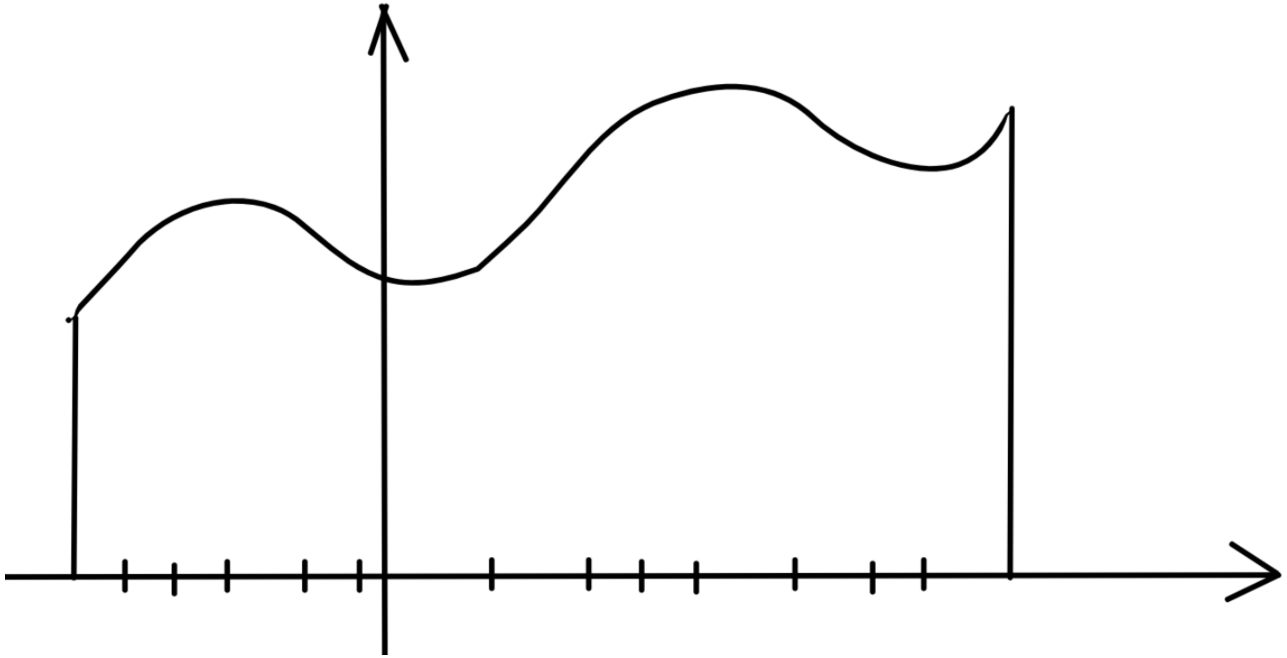
Лекция ПМИ-20
02.02.21

Определенный интеграл

Определение. *Криволинейной трапецией* называется плоская фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.



Определение. Если существует *предел* I *интегральных сумм* $I_n\left(x_i,\xi_i\right)$ при $\Delta\to 0$, не зависящий от способа разбиения и выбора промежуточной точки, то он называется *определенным интегралом* от функции f на отрезке $\left[a;b\right]$ и обозначается

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Определение. Функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a; b]$, если существует конечный предел интегральных сумм.

Функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a; b]$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} \lim_{\Delta \to 0} I_n\left(x_i, \xi_i\right) = I$$

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 x^2 dx$ с помощью интегральных сумм.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). Если функция f интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она ограничена на нем.

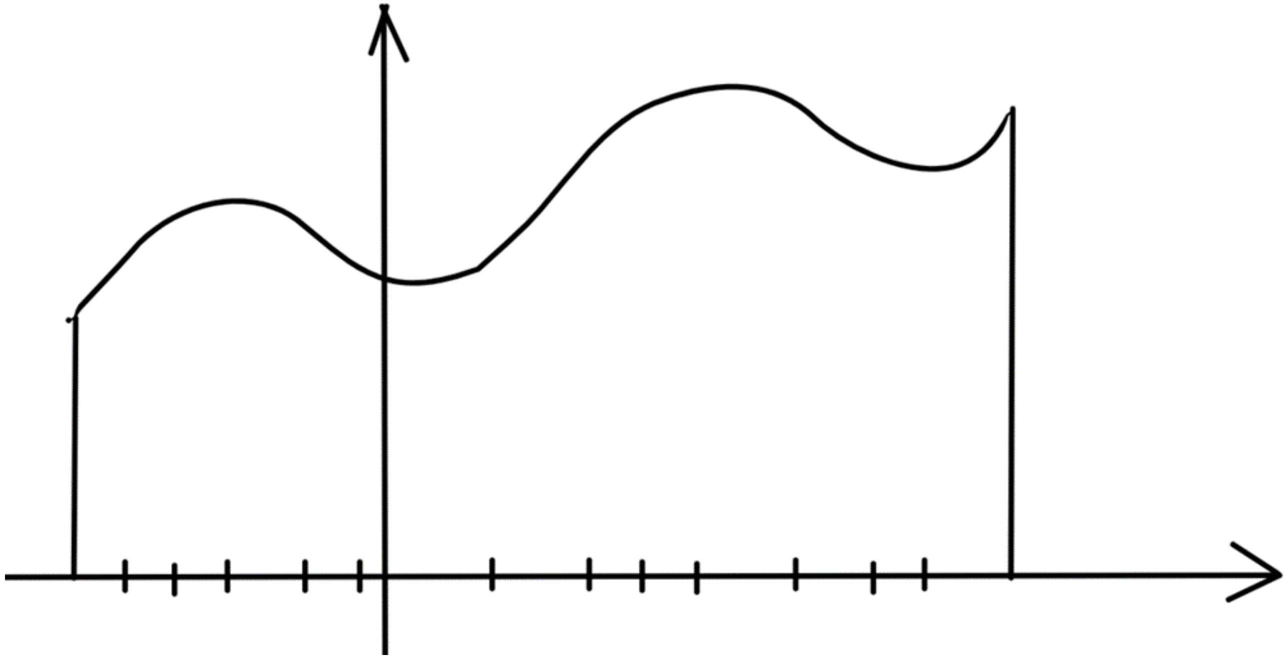
Суммы Дарбу

Пусть функция f определена и ограничена на отрезке $[a;b]$. Для произвольного разбиения T отрезка $[a;b]$ введем обозначения

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

и составим суммы

$$\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i , \quad \overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

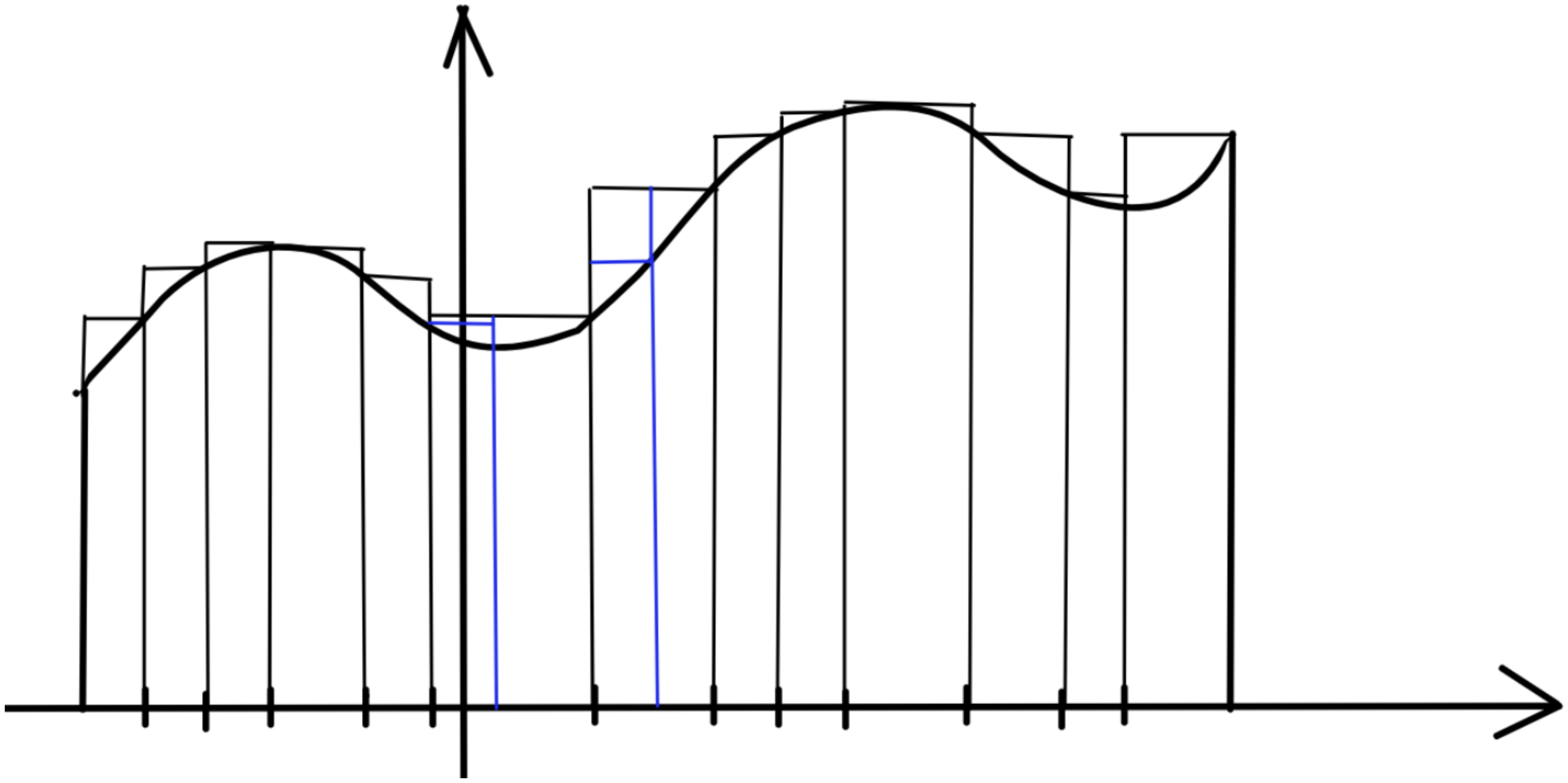


Свойства сумм Дарбу

1. Для данного разбиения T отрезка $[a;b]$ и любого выбора промежуточных точек на этом разбиении $\underline{S_n} \le I_n \le \overline{S_n}$.

2. Для любого фиксированного разбиения $\underline{S_n} = \inf\{I_n(x_i, \xi_i)\}$, $\overline{S_n} = \sup\{I_n(x_i, \xi_i)\}$.

3. При измельчении разбиения T нижняя сумма может лишь увеличиться, а верхняя – лишь уменьшиться.



4. Нижняя сумма произвольного разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

5. Для любых разбиений отрезка $[a;b]$ множество всевозможных нижних сумм ограничено сверху, а множество всевозможных верхних сумм ограничено снизу.

6. $m(b-a) \leq \underline{S_n} \leq \overline{S_n} \leq M(b-a)$, где m – наименьшее значение функции f на $[a;b]$, M – наибольшее значение функции f на $[a;b]$.

Теорема 2 (необходимое и достаточное условие интегрируемости). Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция была интегрируемой на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T отрезка $[a;b]$, для которого $\overline{S_n} - \underline{S_n} < \varepsilon$.

Некоторые классы интегрируемых функций

Теорема 3. Непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f интегрируема на нем.

Следствие. Всякая элементарная функция интегрируема на любом отрезке, целиком лежащем в области определения этой функции.

Теорема 4. Монотонная на отрезке $[a;b]$ функция f интегрируема на нем.

Теорема 5. Кусочно-непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция f (т.е. имеющая на нем конечное число точек разрыва 1 рода) интегрируема на нем.

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы 5, то значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ не зависит от значений функции f в точках разрыва.

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b 0dx = 0.$

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt,$ т.е. переменную интегрирования можно обозначать любой буквой.

4. *Линейность интеграла.* Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, α и β – любые действительные числа, то функция $\alpha f+\beta g$ также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\int_a^b (\alpha\, f(x)+\beta\, g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\,.$$

5. *Направленность интеграла.*

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx\,.$$

7. *Монотонность интеграла.* Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a; b]$ и $f(x) \geq g(x)$ для любого $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

8. *Абсолютная интегрируемость функции*. Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на $[a;b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_b^a |f(x)|dx.$$

9. *Теорема об оценке интегралов*. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

10. *Первая теорема о среднем.* Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$; $g(x) \geq 0$ и $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a;b]$, то найдется $\mu \in [m;M]$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Если в теореме положить $g(x) \equiv 1$, то

$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, где $\mu \in [m;M]$.

Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то найдется

$\xi \in [a;b]$ такое, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

11. *Вторая теорема о среднем*. Если функции f интегрируема на отрезке $[a;b]$; функция g монотонна на отрезке $[a;b]$, то существует $\xi \in [a;b]$, при котором

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx .$$