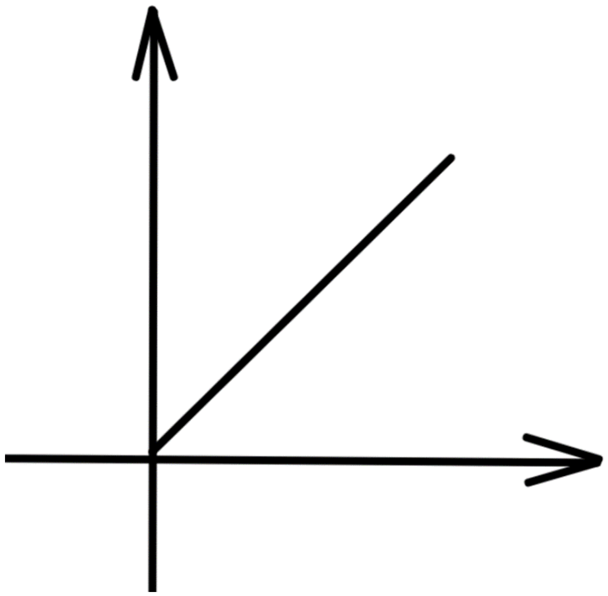
Лекция ПМИ-20
09.11.20
16.11.20

Свойства дифференцируемых функций

- **Теорема 1 (*необходимое условие дифференцируемости функции*).** Если функция f дифференцируема на $(a;b)$, то она непрерывна на $(a;b)$.

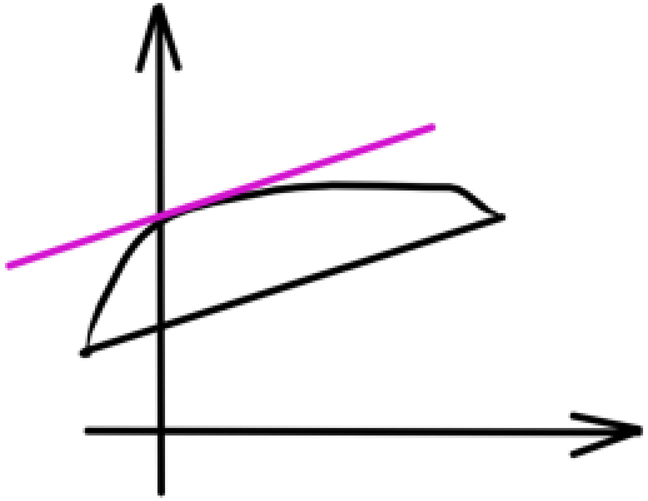
Теорема 2 (теорема Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b), имеет в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$ наибольшее или наименьшее значение, тогда если в этой точке функция имеет производную, то она равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

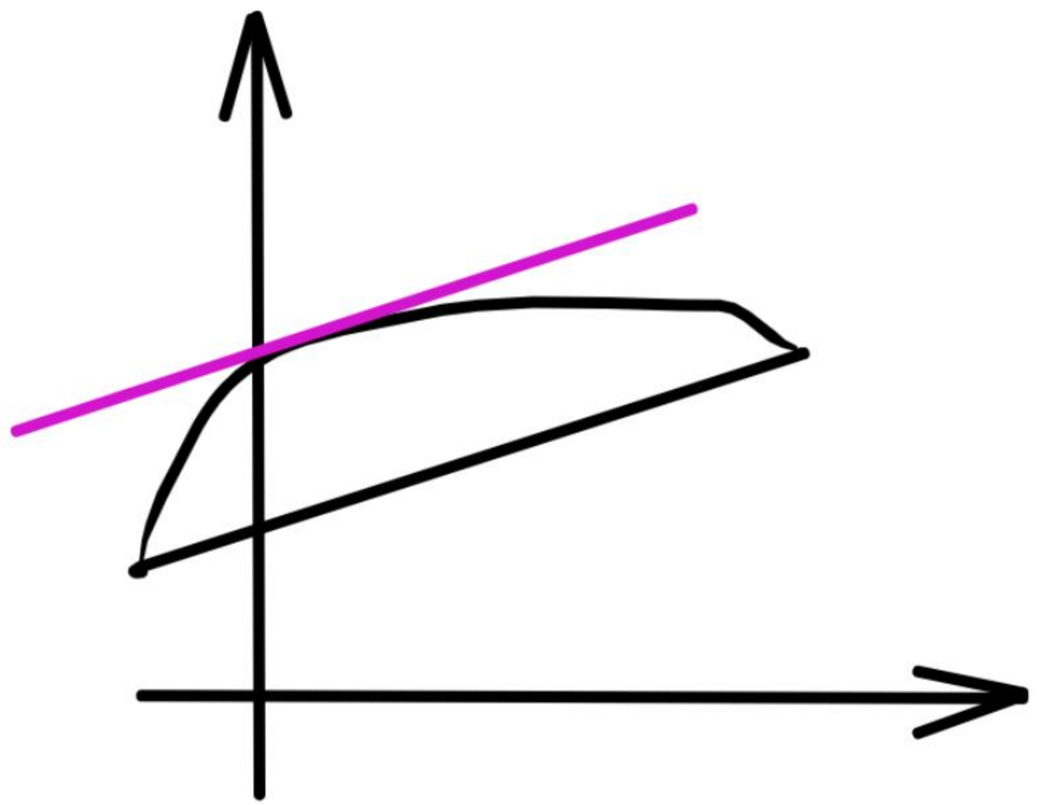


Теорема 3 (теорема Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), на концах принимает одинаковые значения $\big(f(a) = f(b)\big)$, тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$, в которой производная равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Теорема 4 (теорема Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b), тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$, такая что

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$





Следствие. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0, тогда существует точка $\xi \in \bigcup(x_0)$, такая что $f'(\xi) = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\left(f'(\xi) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \right)$

$\Delta y = f'(\xi)\Delta x$ - *формула конечных приращений Лагранжа.*

Теорема 5 (теорема Коши). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$, тогда существует точка $x_0 \in (a,b)$, такая что

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Теорема 6 (*правило Лопиталя*).

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $\forall x \in \bigcup(x_0) : g'(x) \neq 0$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Следствие 1. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и дифференцируемы при $x > c$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ и $\forall x > c : g'(x) \neq 0$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Следствие 2. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ и $\forall x \in \bigcup(x_0): g'(x) \neq 0$, тогда если функции f' и g' непрерывны в точке x_0, то существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Следствие 3. Если в условиях теоремы 1 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ оставляет нас в условиях неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и для функций f' и g' выполняются условия теоремы 1, тогда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Следствие 4. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ и $\forall x \in \bigcup(x_0): g'(x) \neq 0$, тогда если существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\left(1/x\right)}{\sin x}$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна вместе со своими производными до n – го порядка в точке x_0

Рассмотрим многочлен, который в точке x_0 имеет те же значения функции и ее производных в этой точке.

$P_n(x) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n$ называется ***многочленом Тейлора,*** $r_n\left(x\right) = f(x) - P_n\left(x\right)$ - остаточный член

Теорема 7. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна вместе со своими производными до n – го порядка в точке x_0 и до $(n+1)$ порядка в окрестности точки x_0, тогда

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi}{(n+1)!}$$

где $\xi \in \bigcup(x_0)$ ***формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.***

При $x_0 = 0$ получаем частный случай формулы Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$ - ***формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано.***

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$$

В частности при $m = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).$$

Пример. Разложить по степеням x функцию $y = e^{2x - x^2}$ до члена x^4.

$$y = e^{2x-x^2} \quad y(0) = 1;$$

$$y' = e^{2x-x^2}(2-2x) = 2e^{2x-x^2}(1-x) \quad y'(0) = 2;$$

$$y'' = e^{2x-x^2}\left((2-2x)^2 - 2\right) = 2e^{2x-x^2}\left(1-4x+2x^2\right) \quad y''(0) = 2;$$

$$y''' = 2e^{2x-x^2}\left((2-2x)\left(1-4x+2x^2\right) - 4 + 4x\right) =$$

$$y'''(0) = -4;$$

$$= 4e^{2x-x^2}\left(-1-3x+6x^2-2x^3\right)$$

$$y^{IV} = 4e^{2x-x^2}\left((2-2x)\left(-1-3x+6x^2-2x^3\right) - 3 + 12x - 6x^2\right)$$

$$y^{IV}(0) = -20.$$

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-4}{3!}x^3 + \frac{-20}{4!}x^4 + o\left(x^4\right) =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Воспользуемся готовым разложением $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o\left(t^4\right)$, взяв в качестве аргумента $t = 2x - x^2$.

$$e^{2x-x^2} = 1 + \left(2x - x^2\right) + \frac{\left(2x - x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(2x - x^2\right)^3}{3!} + \frac{\left(2x - x^2\right)^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

$$e^{2x-x^2} = 1 + 2x - x^2 + \frac{4x^2 - 4x^3 + x^4}{2} + \frac{8x^3 - 12x^4}{6} + \frac{16x^4}{24} + o\left(x^4\right) =$$

$$= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Пример. Используя готовые разложения найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-x^3-\sin x}$.

$$e^x-1-x-\frac{x^2}{2}=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)-1-x-\frac{x^2}{2}=\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right),$$

$$x-x^3-\sin x=x-x^3-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)=-x^3+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{-\frac{5x^3}{6}+o\left(x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}{-\frac{5}{6}+\frac{o\left(x^3\right)}{x^3}}=-\frac{1}{5}.$$

Пример. Вычислить значение $\sqrt{255}$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Воспользуемся готовым разложением функции $y = (1+x)^m$ при $m = \frac{1}{2}$.

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{255} = \sqrt{225+30} = 15\sqrt{1+\frac{30}{225}} = 15\sqrt{1+\frac{2}{15}}.$$

$$x_0 = 0,\ x = \frac{2}{15},\ \xi \in \left(0;\frac{2}{15}\right).$$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{3!}x^3 \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n n!}x^n + r_n(x) \text{ где}$$

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!(1+\xi)^{(2n-1)/2}}x^{n+1} \text{ при } n \geq 2\ .$$

$$|r_n(x)| = \left|(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!(1+\xi)^{(2n-1)/2}}x^{n+1}\right| \leq \qquad x_0 = 0,\ x = \frac{2}{15},\ \xi \in \left(0; \frac{2}{15}\right)$$

$$\leq \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}\left(\frac{2}{15}\right)^{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)(2n-1)}{(n+1)!\cdot 15^{n+1}} < \frac{1}{15000}$$

$$\sqrt{255} \approx 15 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{15} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2!}\left(\frac{2}{15}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{3!}\left(\frac{2}{15}\right)^3 \right) \approx 15,9689$$

$$\sqrt{255} \approx 15,968719$$