Элементарная теория кривых второго порядка. Парабола

Лекция 3

Парабола

Определение. *Парабола* – геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние r до некоторой фиксированной точки, называемой фокусом F, равно расстоянию d до некоторой прямой, называемой директрисой (рис. 1).

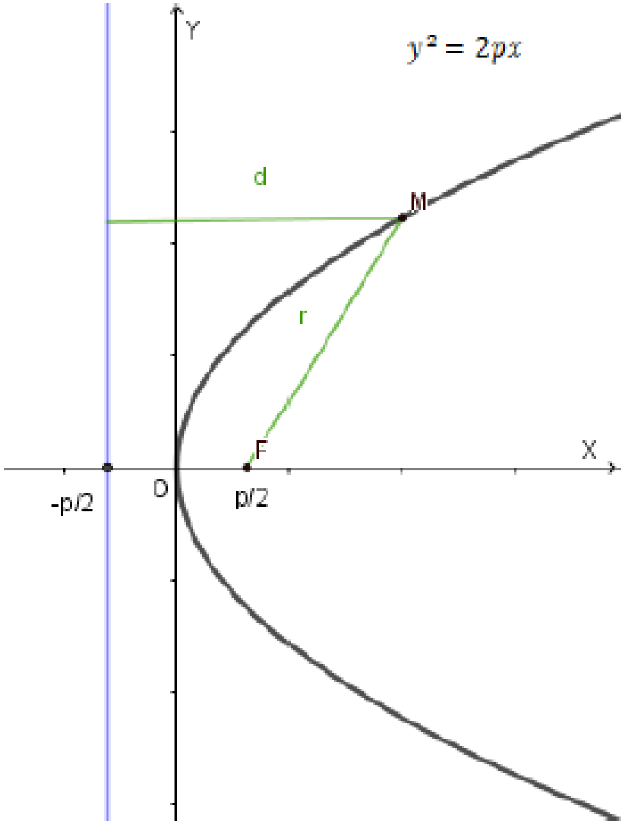


Рис. 1

Фокус параболы обозначается буквой F, а расстояние от фокуса до директрисы – p. Число p называется *параметром* параболы ($p > 0$).

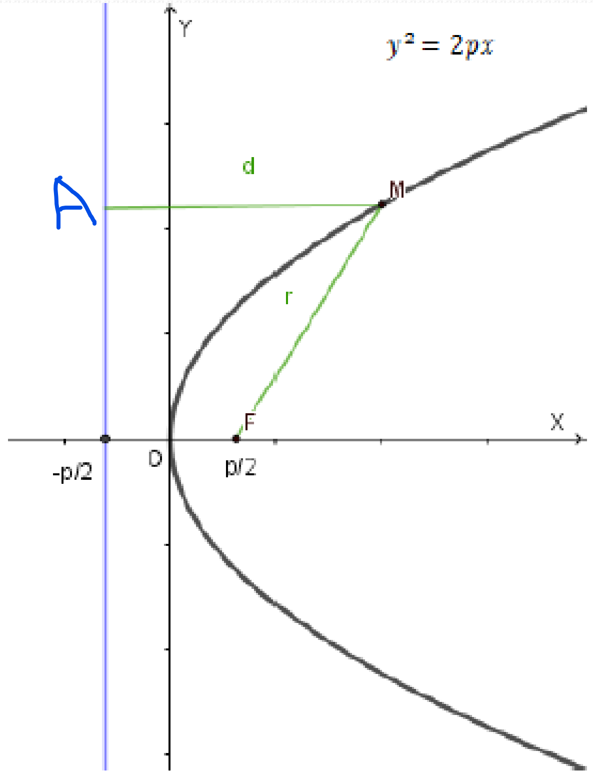


Рис. 1

Если M – произвольная точка параболы, то по определению имеет место равенство

$$d(M, F) = d(M, A). \qquad (1)$$

Для вывода канонического уравнения параболы выберем декартовую систему координат. Пусть ось абсцисс направлена перпендикулярно директрисе d, задаваемой уравнением $x = -\frac{p}{2}$ в сторону фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

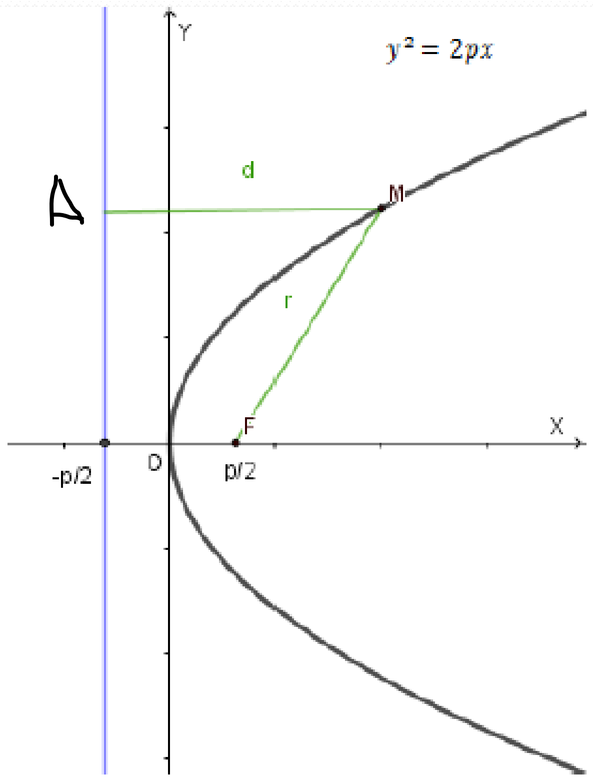


Рис. 1

$$d(M, F) = d(M, A). \quad (1)$$

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка параболы

Тогда

$$d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$d(M, A) = x + \frac{p}{2}.$$

$$d(M,F)=d(M,A). \qquad (1)$$

Из условия (1) следует уравнение параболы

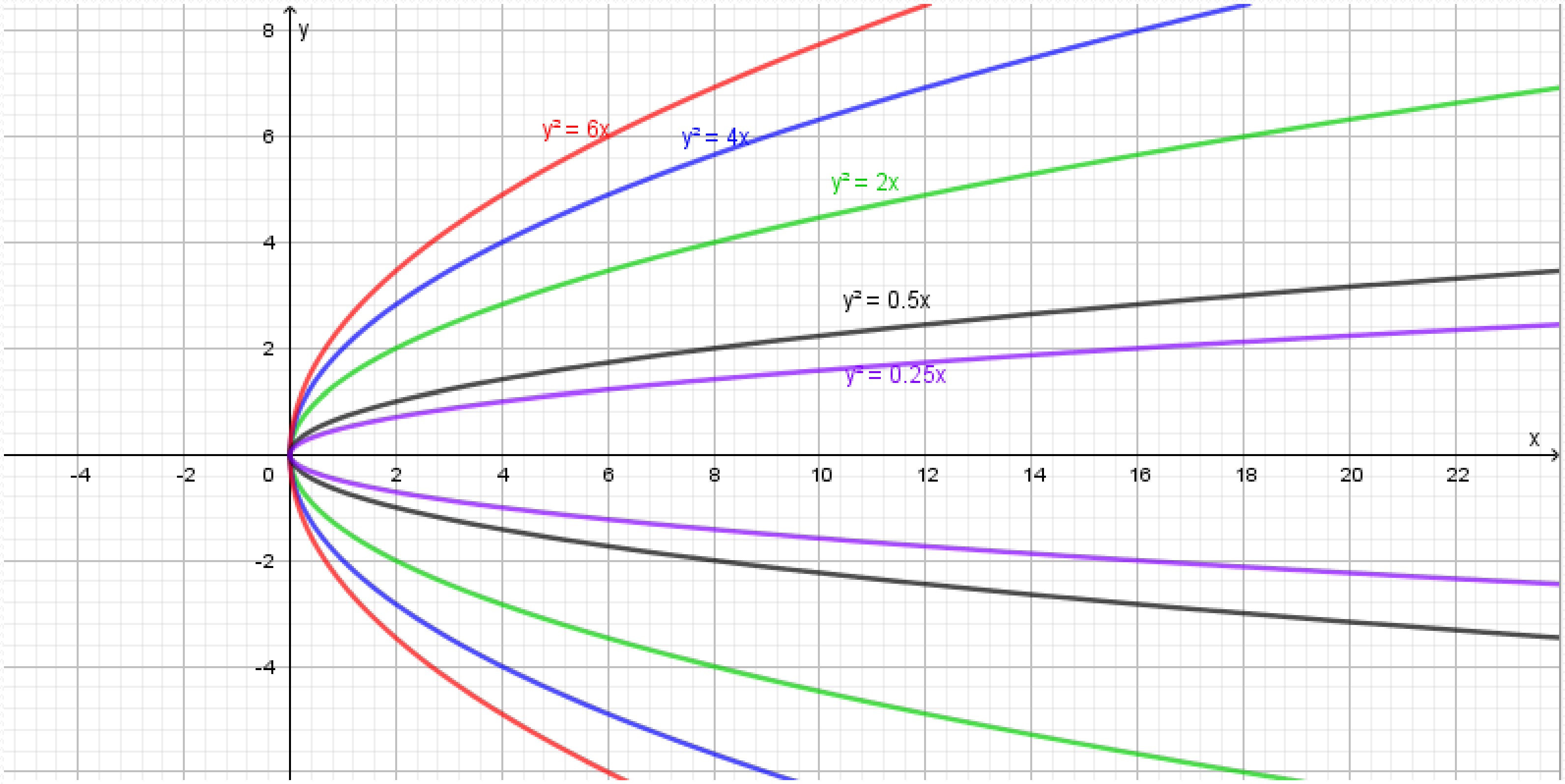
$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Для приведения его к каноническому виду нужно возвести обе части равенства в квадрат. После упрощения получаем

$$\boxed{y^2=2px.} \qquad (2)$$

Определение. Уравнение (2) называется *каноническим уравнением параболы*.

Определение. Величина p называется *параметром* параболы. Она характеризует величину так называемого фокального радиуса, т.е. ординаты точки параболы. Та из парабол имеет наибольший фокальный радиус, которая имеет большую величину параметра p.



Форма параболы

$$y^2 = 2px$$

Из уравнения параболы видно, что кривая симметрична относительно оси Ox и проходит через начало координат.

Для ее ветви в верхней полуплоскости при $y \geq 0$, уравнение относительно y:

$$y = \sqrt{2px} \quad (0 \leq x < \infty),$$

из которого следует, что когда x возрастает на полуинтервале $[0, +\infty)$, ордината y возрастает от 0 до $+\infty$.

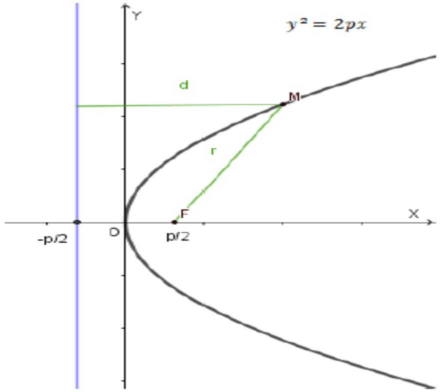
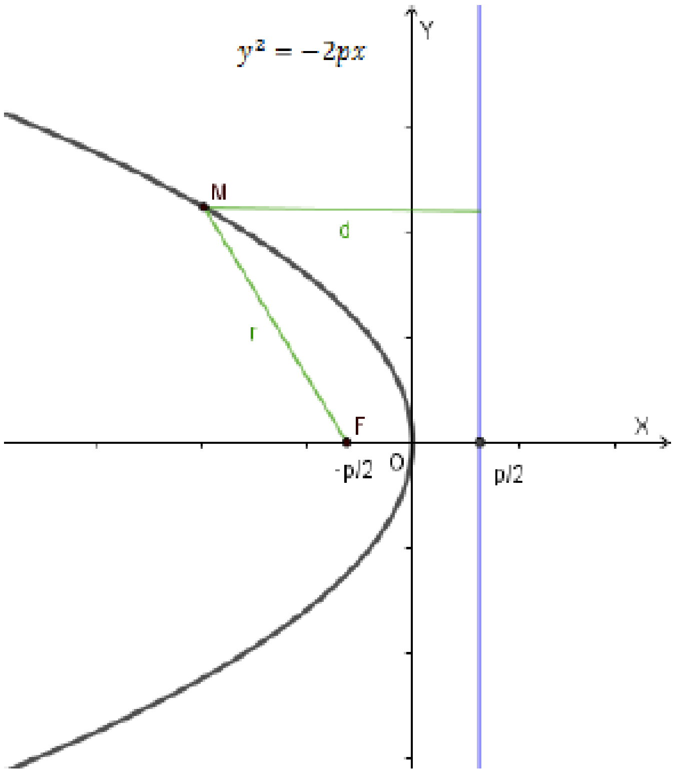


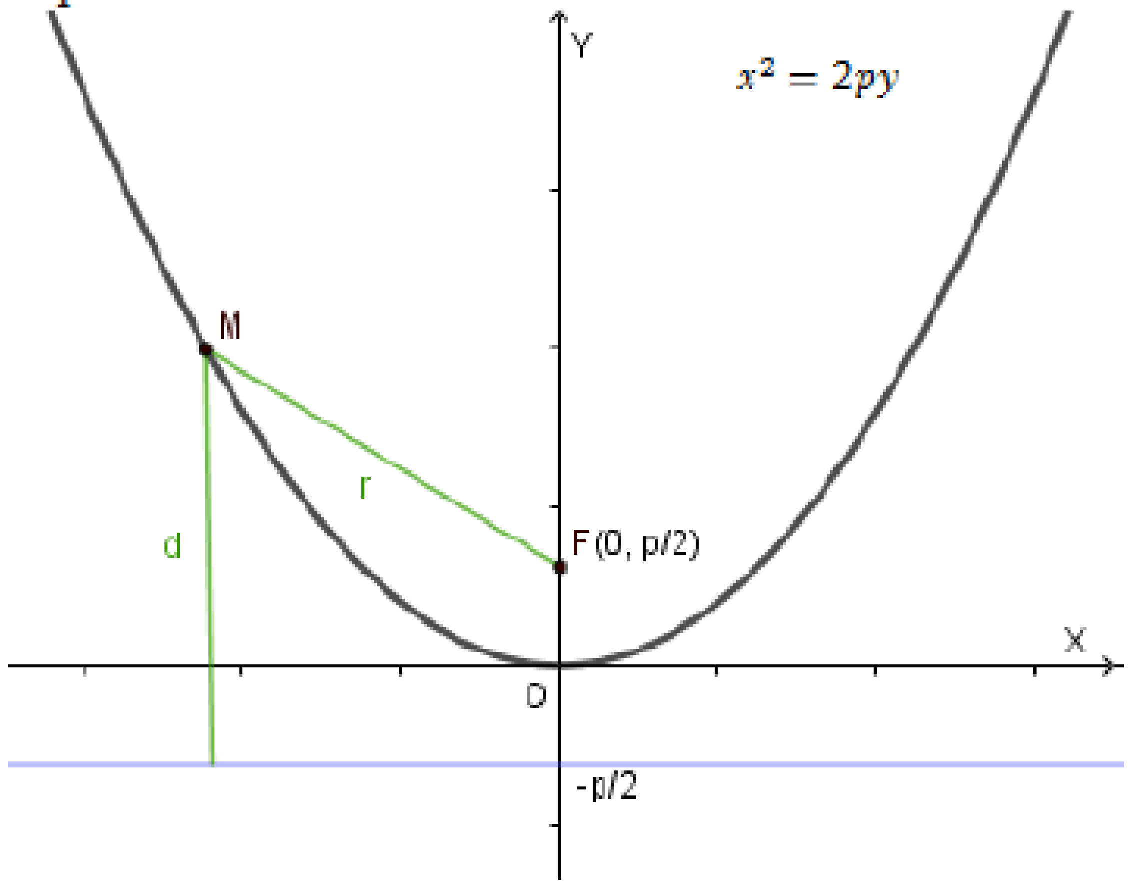
Рис. 1

Определение. *Осью параболы* называется ее ось симметрии.
Определение. *Вершиной параболы* называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии.

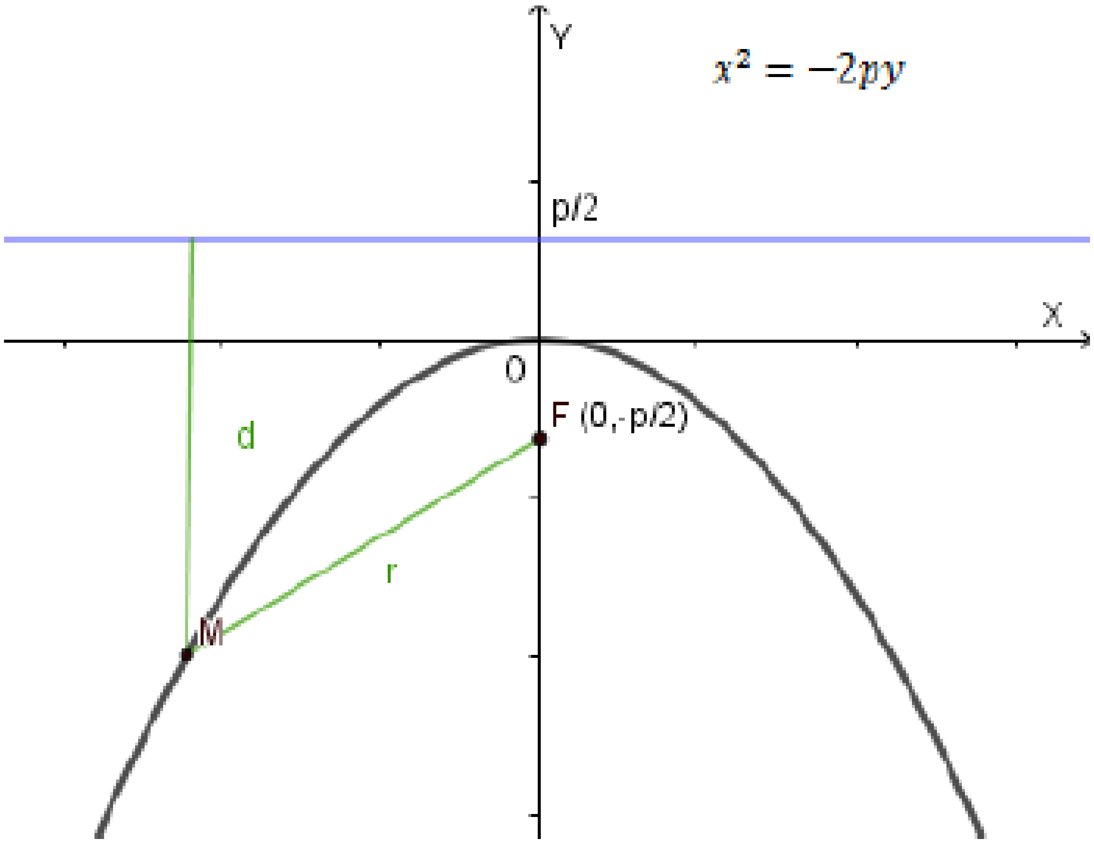
Парабола, симметричная относительно оси Ox, проходящая через начало координат с фокусом в точке $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, имеет уравнение $y^2=-2px$, изображена на рис.:



Парабола, симметричная относительно оси Oy, проходящая через начало координат с фокусом в точке $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$, имеет уравнение $x^2=2py$, изображена на рис. :



Парабола, симметричная относительно оси Oy, проходящая через начало координат с фокусом в точке $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$, имеет уравнение $x^2 = -2py$, изображена на рис.:



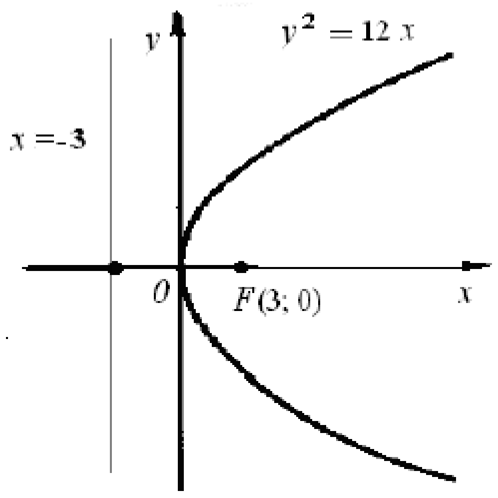
Пример. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат при условии $F(3;\,0)$ и найти уравнение директрисы.

Решение:

Фокус параболы лежит на положительной полуоси OX, следовательно, уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$.

Так как координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$, то $\frac{p}{2} = 3$, откуда $p = 6$.

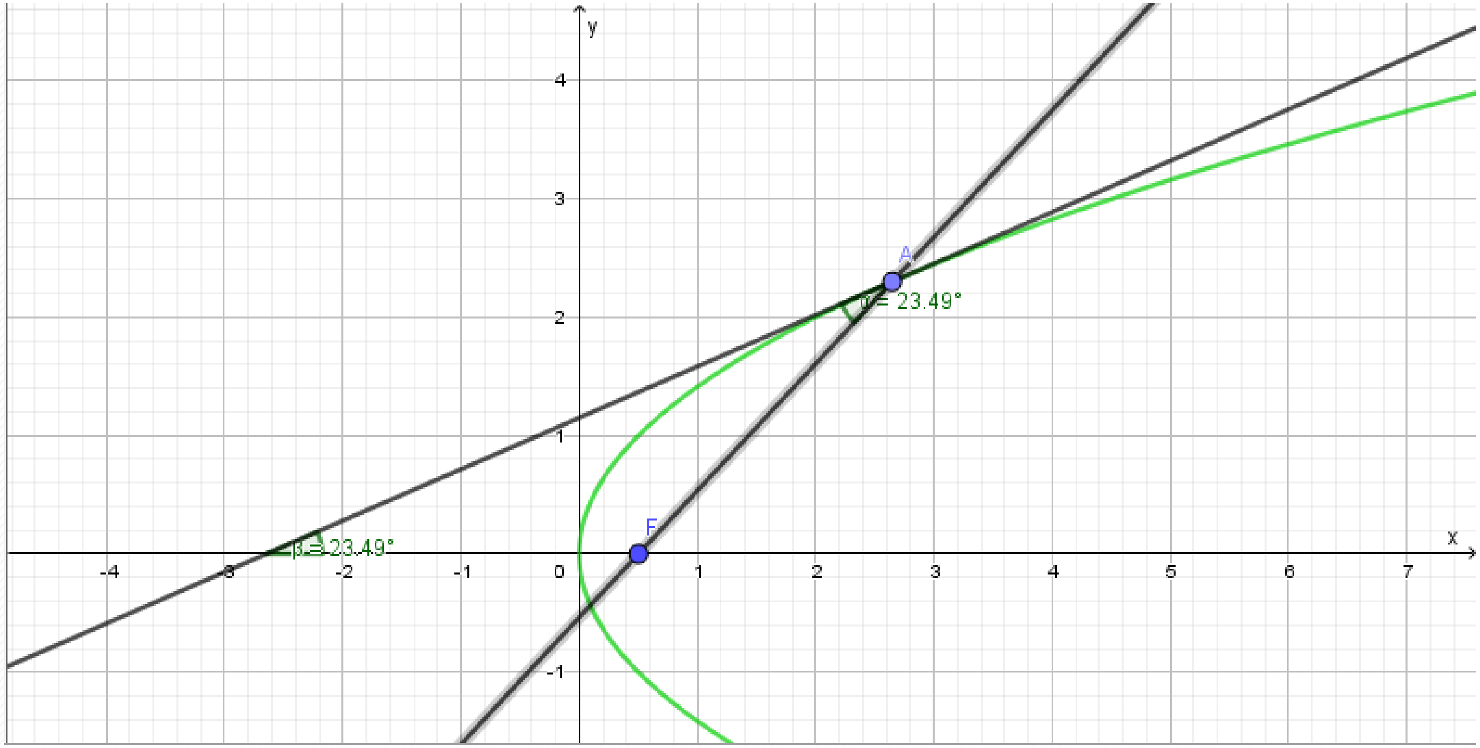
Искомое уравнение параболы $y^2 = 12x$. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$; $x = -3$.

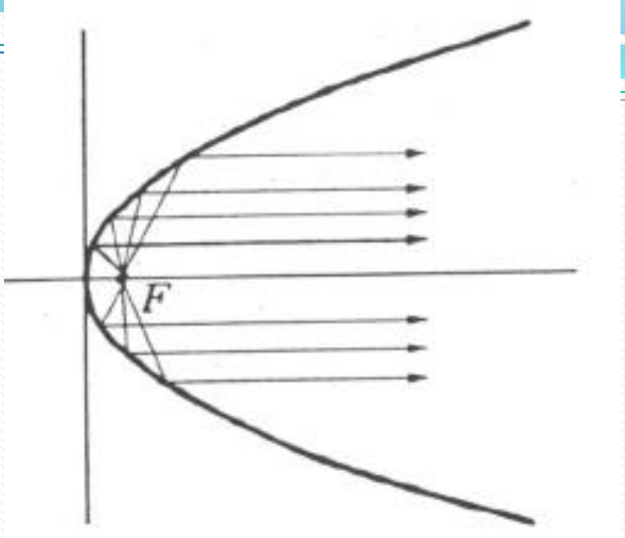


Свойства параболы

Директориальное свойство параболы: парабола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и равно единице.

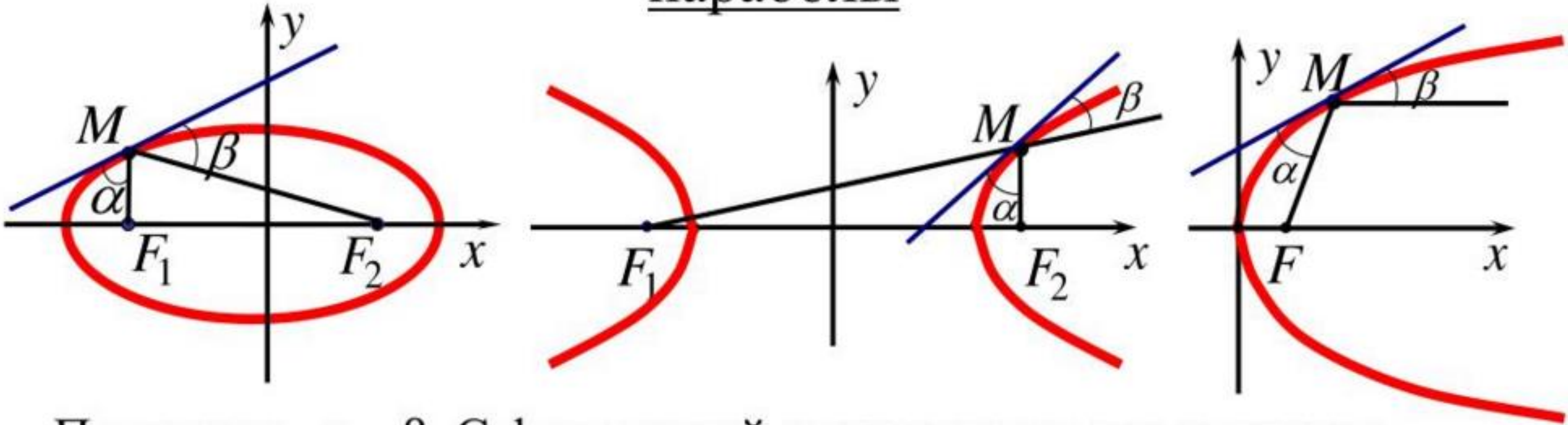
Оптическое свойство параболы: касательная в любой точке параболы образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и положительным направлением оси абсцисс.





Это свойство означает, что луч света, вышедший из фокуса F, отразившись от параболы, дальше пойдет параллельно оси этой параболы. И наоборот, все лучи, приходящие из бесконечности и параллельные оси параболы, сойдутся в ее фокусе. Это свойство широко используется в технике. В прожекторах обычно ставят зеркало, поверхность которого получается при вращении параболы вокруг ее оси симметрии (параболическое зеркало). Источник света в прожекторах помещают в фокусе параболы. В результате прожектор дает пучок почти параллельных лучей света. Это же свойство используется и в приемных антеннах космической связи и в зеркалах телескопов, которые собирают поток параллельных лучей радиоволн или поток параллельных лучей света и концентрируют его в фокусе зеркала.

Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы



Получаем: $\alpha = \beta$.С физической точки зрения это означает:

1) Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.
2) Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.
3) Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее

Касательная к параболе

Пусть парабола задана уравнением $y^2 = 2px$ и точка *M(x0, y0)* лежит на ней. Угловой коэффициент k касательной к данной параболе определяется по формуле $k = \dfrac{p}{y_0}$.

Уравнение касательной к параболе в точке *M* будет

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \text{ или } yy_0 - y_0^2 = p(x - x_0). \qquad (3)$$

Поскольку точка *M* лежит на параболе, то

$$y_0^2 = 2px_0.$$

Поэтому, подставив данное выражение в (3) вместо y_0^2, получим *уравнение касательной к параболе* $y^2 = 2px$ в точке *M(x0, y0)*:

$$\boxed{yy_0 = p(x + x_0).} \qquad (4)$$

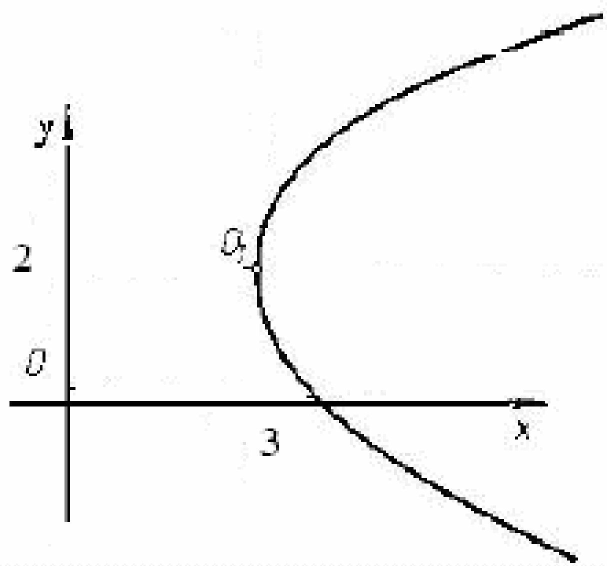
Различные положения параболы

Уравнение параболы с вершиной в точке $O'(x_0, y_0)$:

$(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0)$, ось симметрии параллельна Ox;

$(x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0)$, ось симметрии параллельна Oy.

Так, например, на рисунке изображена парабола $(y-2)^2 = 4(x-3)$.



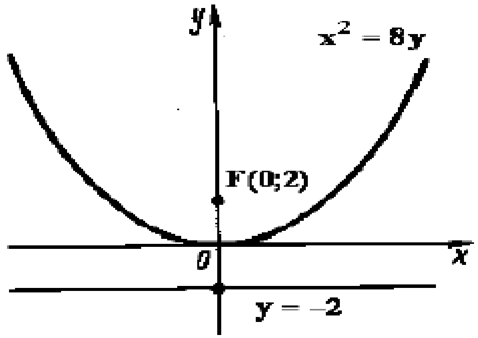
Пример . Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат при следующих условиях и найти недостающие параметры (уравнения директрис, фокусы):

1) парабола симметрична относительно оси OY и проходит через точку $A\,(4;\,2)$;

2) парабола симметрична относительно оси OX и проходит через точку $A\,(-3;-\sqrt{6})$.

Решение:

1. Парабола симметрична относительно оси OY, ветви ее направлены вверх, следовательно, ее уравнение имеет вид $x^2 = 2py$.



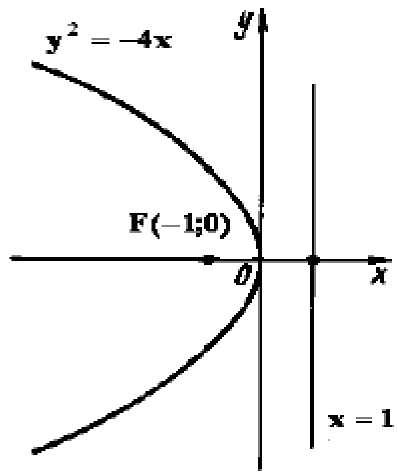
Подставив в это уравнение координаты точки $A\,(4;\,2)$, находим $16 = 2\cdot 2p$, откуда $p = 4$.

Искомое уравнение параболы: $x^2 = 8y$.

Уравнение директрисы: $y = -\dfrac{p}{2}$; $y = -2$.

Фокус: $F\,(0;\,\dfrac{p}{2})$, т. е. $F\,(0;\,2)$.

2. Парабола симметрична относительно оси OX и проходит через точку $A\ (-3;\ -2\sqrt{3})$.



Парабола симметрична относительно оси OX, ветви ее направлены влево, следовательно, ее уравнение имеет вид $y^2 = -2px$. Подставив в это уравнение координаты точки A, находим $12 = \ 2 \cdot 3p$, откуда $p = 2$.

Искомое уравнение параболы: $y^2 = -4x$.

Уравнение директрисы: $x = \dfrac{p}{2}$; $x = 1$.

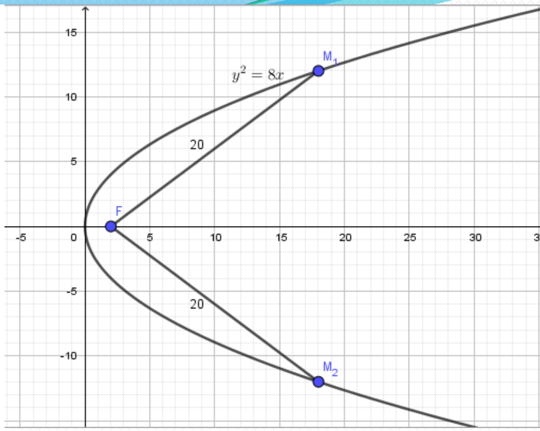
Фокус: $F\ (-\dfrac{p}{2};\ 0)$, т. е. $F\ (-1;\ 0)$.

Пример На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от фокуса параболы равно 20.

Решение:

Из канонического уравнения параболы получим, что параметр параболы равен 4. Следовательно, фокус параболы совпадает с точкой $F(2; 0)$.

Пусть искомая точка M параболы имеет координаты x и y. Тогда по условию задачи имеем



$$(x-2)^2 + y^2 = 400.$$

Итак, искомые точки есть точки пересечения полученной окружности и данной параболы. Решая совместно уравнение окружности с уравнением параболы, получим квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 + 4x - 396 = 0.$$

Корни уравнения равны $x_1 = 18$, $x_2 = -22$. Очевидно, что второй корень не подходит, т. к. должно быть $x \geq 0$. Подставляя значение первого корня в уравнение параболы, получим уравнение $y^2 = 144$, откуда $y_1 = 12$, $y_2 = -12$.

Таким образом, искомые точки, лежащие на параболе, имеют координаты (18; 12), (18; –12).

Пример Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2-4x=0$ и симметрична относительно оси OY.

Решение:

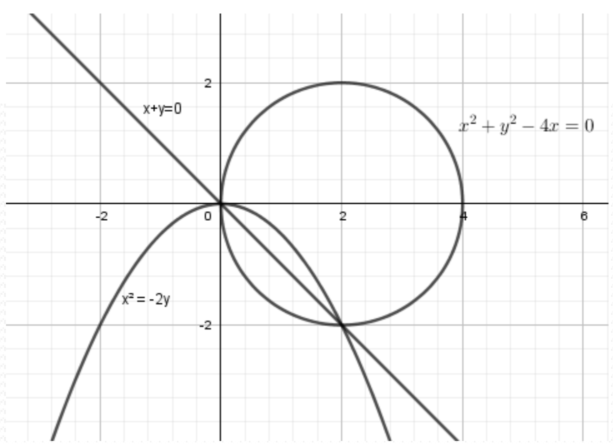
Найдем точки пересечения прямой и окружности:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2-4x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-y, \\ 2x(x-2)=0, \end{cases}$$

откуда точки пересечения имеют координаты $O(0;\,0)$ и точка $A\,(2;-2)$.

Так как парабола проходит через $O(0;\,0)$ и симметрична относительно оси OY, то ее уравнение имеет вид $x^2=-2py$. Подставляя координаты точки A, находим параметр p: $4=-2(-2)p$, откуда $p=+1$.

Итак, уравнение параболы – $x^2=-2y$, уравнение директрисы – $y=\frac{1}{2}$.




Спасибо
за внимание!