Лекция ПМИ-20
26.01.21

4.

$$\frac{1}{2}\int \frac{(Ax+B)\cdot 2 + pA - pA}{\left(x^2+px+q\right)^m}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)}{\left(x^2+px+q\right)^m}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}.$$

$$\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m}$$

табличный

$$\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^m}$$

$t = x+\frac{p}{2}$, $a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Алгоритм интегрирования рациональной дроби $\dfrac{M(x)}{Q(x)}$:

1. Если дробь $\dfrac{M(x)}{Q(x)}$ неправильная, то необходимо выделить целую часть

2. Разложить знаменатель правильной дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ на множители:

$$Q(x)=(x-a_1)^{r_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{r_k}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s},$$

где $p_i^2-4q_i<0$.

3. Правильную рациональную дробь разложить на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_{11}}{x-a_1}+\frac{A_{12}}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}+\ldots+\frac{A_{k1}}{x-a_k}+$$

$$+\frac{A_{k2}}{(x-a_k)^2}+\ldots+\frac{A_{kr_k}}{(x-a_k)^{r_k}}+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\ldots+$$

$$+\frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{x^2+p_sx+q_s}+\frac{B_{s_2}x+C_{s_2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2}+\ldots+\frac{B_{sl_s}x+C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}.$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты

5. Вычислить интегралы от многочлена $N(x)$ и от простейших рациональных дробей.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{7x^2 + 26x - 9}{x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9} dx$.

Метод Остроградского

Пусть $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ правильная рациональная несократимая дробь и

знаменатель можно представить в виде:

$$Q(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_k)^{r_k} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s},$$

где $p_i^2 - 4q_i < 0,\ i = \overline{1, s}.$

формула Остроградского: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$

$$Q_2(x) = (x-a_1)\cdot\ldots\cdot(x-a_k)\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right),$$

$$Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)} = (x-a_1)^{r_1-1}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{r_k-1}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1-1}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{l_s-1}$$

$P_1(x)$ и $P_2(x)$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$.

В интеграле $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ используется метод неопределенных коэффициентов,

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^4}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx.$

Различные подстановки

Интегрирование рационально-тригонометрических функций

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx,$$

Специальные подстановки

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализует подстановка $\cos x = t.$

2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то рационализует подстановка $\sin x = t.$

3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то рационализует подстановка $\operatorname{tg} x = t.$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x(\cos x + 2)}$.

Интегрирование иррациональных выражений

1. $$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1/q_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_2/q_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n/q_n} \right) dx$$, где

R – рациональная функция используется подстановка $t^N = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где

$N = НОК\left\{q_1, q_2, \ldots, q_n\right\}$.

Пример. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

2. В интеграле $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ используем подстановки *Эйлера*:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t, a > 0,$

2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}, c > 0,$

3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = \sqrt{a}(x-x_i)\cdot t,$ где $i = 1$ или 2

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

3. В следующих интегралах используем тригонометрические подстановки:

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ $\qquad x = a\sin t$ или $x = a\cos t$,

$\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ $\qquad x = a\,\mathrm{tg}\,t$,

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ $\qquad x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

4. В интеграле $\int x^m \left(ax^n + b\right)^p dx$ (интегрирование дифференциального бинома) используют подстановки *Чебышева*:

I. $p \in \mathbf{Z},\ x = t^N$ где N – наименьшее общее кратное знаменателей m и n;

II. $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbf{Z},\ ax^n + b = t^s$, где s – знаменатель p;

III. $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z},\ a + \dfrac{b}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель p.

Утверждение. Если не выполняются условия I – III, то интеграл не выражается в элементарных функциях, т.е. интеграл «не берущийся».

Пример. Найти интеграл $\int x^{\frac{1}{5}}\left(x^{\frac{3}{5}}+2\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$

Интегрирование функции, содержащей показательную функцию

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$.