Дискретная математика

Литература

1. Морозенко В.В. «Дискретная математика»
2. Новиков Ф.А. «Дискретная математика для программистов»
3. Иванов Б.Н. «Дискретная математика. Алгоритмы и программы»
4. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. «Задачи и упражнения по дискретной математике»
5. Грэхем, Кнут, Паташник «Конкретная математика»

Отличия от классической («непрерывной») математики

- Отсутствие проблем, связанных с бесконечностью (напр., парадокс Рассела)
- Возможность работы с объектами нечисловой природы (множество не только чисел, но любых объектов)
- Отсутствие единого «ядра», существенно различные подходы в различных разделах
- Иногда используются термины классической математики, но они определены несколько иначе (напр., «дискретная производная»)

Отношения

Основные понятия

Кортеж

- Пусть *a* и *b* – некоторые объекты. *Упорядоченную* пару этих объектов будем обозначать (*a*, *b*)
- Аналогично парам можно рассматривать наборы из *n* объектов
- Такие наборы называются *кортежами*
- Количество элементов в наборе называется длиной кортежа
- Два кортежа одной длины равны, если равны соответствующие объекты
- Результат прямого декартового произведения двух множеств – множество кортежей длины 2

Бинарное отношение

- Пусть даны два множества – A и B
- Бинарным отношением R между множествами A и B называется подмножество прямого декартового произведения множеств A и B, то есть $R \subseteq A \times B$
- Если множество B совпадает со множеством A, то их декартово произведение записывают как степень, то есть $A \times A = A^2$, и в этом случае говорят, что отношение R задано *на множестве* A
- Если кортеж (a, b) принадлежит отношению R, то говорят, что объекты a и b находятся в отношении R
- Отношения могут быть не только бинарными

Задание бинарных отношений

- Явное перечисление всех кортежей, принадлежащих отношению
- Правило для определения, какой кортеж принадлежит отношению, а какой не принадлежит

Частные случаи отношений

- Тождественное отношение на множестве А – отношение содержит только кортежи, объекты в которых одинаковы, то есть имеют вид (а, а)
- Универсальное отношение – содержит все возможные кортежи

Обратное отношение

- Пусть дано отношение R $\subseteq$ A$\times$B
- Обратным отношением R^{-1} называется отношение между множествами B и A такое, что (b, a)$\in R^{-1} \Leftrightarrow$ (a, b)$\in$R

Дополнение

- Пусть дано отношение R $\subseteq$ A$\times$B
- Дополнительным к R называется отношение $\overline{R}$, которое содержит все те и только те кортежи из декартового произведения, которых нет в R, то есть (a, b)$\in \overline{R} \Leftrightarrow$ (a, b)$\notin$R

Свойства бинарных отношений (1)

Пусть дано отношение R $\subseteq$ A^2

- Рефлексивность

Отношение R рефлексивно, если $\forall x \in A: (x, x) \in R$

- Антирефлексивность

Отношение R антирефлексивно, если
$\forall x \in A: (x, x) \notin R$

- Симметричность

Отношение R симметрично, если
$\forall x, y \in A: (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

- Антисимметричность

Отношение R антисимметрично, если
$\forall x, y \in A: (x, y) \in R \,\&\, (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

Свойства бинарных отношений (2)

Пусть дано отношение R $\subseteq$ A^2

- Транзитивность

Отношение R транзитивно, если
$\forall x, y, z \in A\colon (x, y) \in R \ \&\ (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

- Линейность (полнота)

Отношение R линейно, если
$\forall x, y \in A$ выполняется хотя бы одно из 3 условий:

1) $(x, y) \in R$

2) $(y, x) \in R$

3) $x = y$

- Если отношение не линейное, то оно называется частичным

Отношение эквивалентности

- Отношение R называется отношением эквивалентности, если R – рефлексивное, симметричное и транзитивное
- Если на множестве задано отношение эквивалентности, то все элементы разбиваются на *классы эквивалентности*. Все объекты в одном классе эквивалентны друг другу, но любые два объекта из разных классов между собой не эквивалентны
- Утверждение: классы эквивалентности образуют разбиение множества и наоборот, любое разбиение задает отношение эквивалентности

Фактормножество

- Если на множестве задано отношение эквивалентности R, то все элементы разбиваются на *классы эквивалентности*
- Множество классов эквивалентности называется фактормножеством отношения R
- Фактормножество – это множество множеств
- Пример. Пусть A={1,2,3,4,5}

  $(x,y)\in R \Leftrightarrow x \bmod 2 = y \bmod 2$

  Отношение R – отношение эквивалентности

  Имеем два класса эквивалентности:

  $C_1=\{1,3,5\}$, $C_2=\{2,4\}$

  Фактормножество = {{1,3,5}, {2,4}}

Отношение порядка

- Отношение R называется *отношением порядка*, если R – антисимметричное и транзитивное
- Если при этом R антирефлексивно, то R – отношение *строгого* порядка, иначе – *нестрогого* порядка
- Если R линейно, то R – отношение *линейного (полного)* порядка, иначе – *частичного* порядка

Функциональное отношение

- Отношение F между множествами A и B называется *функциональным* (или просто *функцией*), если каждому элементу из множества A соответствует не более одного элемента из множества B
- Обозначения:
  - $F: A \to B$
  - если $(a,b) \in F$, то $b = F(a)$
  - a называется аргументом функции, b – значением
- Если каждому элементу из A соответствует ровно один элемент из B, то функция называется тотальной, иначе – частичной
- Сюръективные, инъективные и биективные функции

Множества и отношения

Представление в программах

Перерыв. Проверка посещаемости

Голосование 1:

A. ПМИ-1
B. ПМИ-2
C. ПМИ-3
D. ПМИ-4

Перерыв. Проверка посещаемости

Голосование 2:

A. ПМИ-5
B. ПМИ-6
C. ПМИ-7
D. ПМИ-8

Следующая тема:

Комбинаторика

Бином, полином