Лекция 23.11.20
ММ-20

Алгоритм исследования функции и построение графика

- I. ***По виду функции*** $y = f(x)$
  - 1. Область определения
  - 2. Периодичность
  - 3. Четность-нечетность
  - 4. Непрерывность
  - 5. Нули функции, промежутки знакопостоянства
  - 6. Не вертикальные асимптоты

- II. ***По виду первой производной*** $y = f'(x)$.
  - 1. Критические точки
  - 2. Промежутки монотонности
  - 3. Экстремумы функции

- III. ***По виду второй производной*** $y = f''(x)$.
  - 1. Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует
  - 2. Промежутки выпуклости
  - 3. Точки перегиба

IV. ***Указать область значений функции с учетом предыдущего исследования.***

V. ***Построить график.***

Построение графика следует начать с асимптот и обозначения на плоскости xOy тех точек, координаты которых содержатся в исследовании. Для уточнения хода графика иногда бывает удобно вычислить значения функции в некоторых дополнительных точках.

Связь дифференцируемости с монотонностью функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***неубывающей (невозрастающей)*** на интервале (a,b), если для любых значений $x_1, x_2 \in (a,b) : x_1 < x_2$ значения функции удовлетворяют неравенству $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$.

Неубывающие и невозрастающие функции называются ***монотонными***.

Теорема 1 (критерий монотонности дифференцируемой функции). Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ была неотрицательной (неположительной) для любого $x \in (a,b)$

Теорема 2 (достаточное условие строгой монотонности дифференцируемой функции). Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $y = f(x)$ была убывающей (возрастающей) на этом интервале, достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ была отрицательной (положительной) для любого $x \in (a,b)$.

Замечание. Последняя теорема не является необходимым условием строгой монотонности. Например, функция $y = x^3$ на интервале $(-2,2)$ очевидно строго возрастает, но ее производная $y = 3x^2$ равна нулю при $x = 0$.

Утверждение. Непрерывная функция $y = f(x)$ убывает (возрастает) на интервале (a,b), если ее производная y' отрицательна (положительна) всюду на этом интервале, за исключением конечного числа точек, в которых эта производная равна нулю или не существует.

Локальный экстремум функции

Определение. Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 ***локальный максимум (минимум),*** если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)\ \left(f(x) \ge f(x_0)\right)$.

Будем обозначать $f(x_0) = \max f(x)$ - локальный максимум, $f(x_0) = \min f(x)$ - локальный минимум

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Определение. Корни уравнения $f'(x)=0$ называются точками возможного экстремума, или ***стационарными***.

К точками, подозрительным на экстремум, следует отнести и такие точки области определения, в которых производная функции $y = f(x)$ не существует.

Те и другие называются ***критическими*** точками.

Теорема 2 **(*первое достаточное условие экстремума*).** Пусть x_0 - критическая точка и функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, и непрерывна в точке x_0. Тогда, если в пределах указанной окрестности $f'(x_0)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x_0)<0$ при $x>x_0$, то f имеет в точке x_0 локальный максимум, если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x_0)>0$ при $x>x_0$, то x_0 - точка локального минимума. Если же производная f' имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0, то экстремума в этой точке нет.

Замечание. Обратим внимание, что в точке x_0 функция может быть дифференцируема и производная $f'(x_0)=0$ и недифференцируема.

***Теорема 3* (*второе достаточное условие экстремума*).** Пусть функция $y = f(x)$ имеет в данной точке возможного экстремума x_0 конечную вторую производную. Тогда функция f имеет в точке x_0 максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

***Теорема* 4 (*третье достаточное условие экстремума*).**

Пусть n – некоторое целое положительное число и функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную порядка n-1, а в самой точке x_0 - производную n-го порядка.

Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$, тогда, если n – четное число, то f имеет локальный экстремум в точке x_0: максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$. Если n – нечетное число, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Пример. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \begin{cases} e^{x+\frac{1}{x}}, & x < 0; \\ -x^2 + 5x - 4, & 0 \le x \le 6. \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} e^{x+\frac{1}{x}}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right), & x<0; \\ -2x+5, & 0<x<6, \end{cases}$$

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a,b), тогда, как известно, существует касательная к графику функции, проходящая через каждую точку $M(x; f(x))$, $x \in (a;b)$, причем эта касательная не параллельна оси Oy .

Определение. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх (вниз)*** на интервале (a, b), если он расположен не выше (не ниже) любой своей касательной

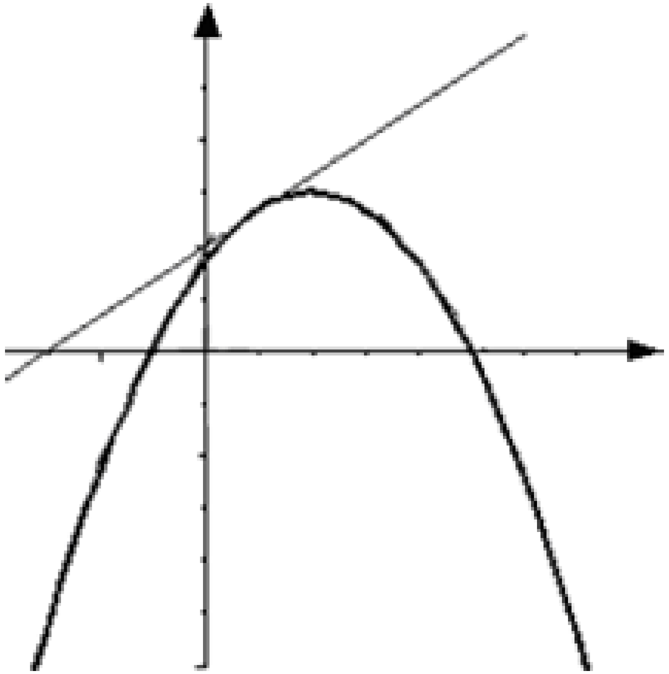


рис 1

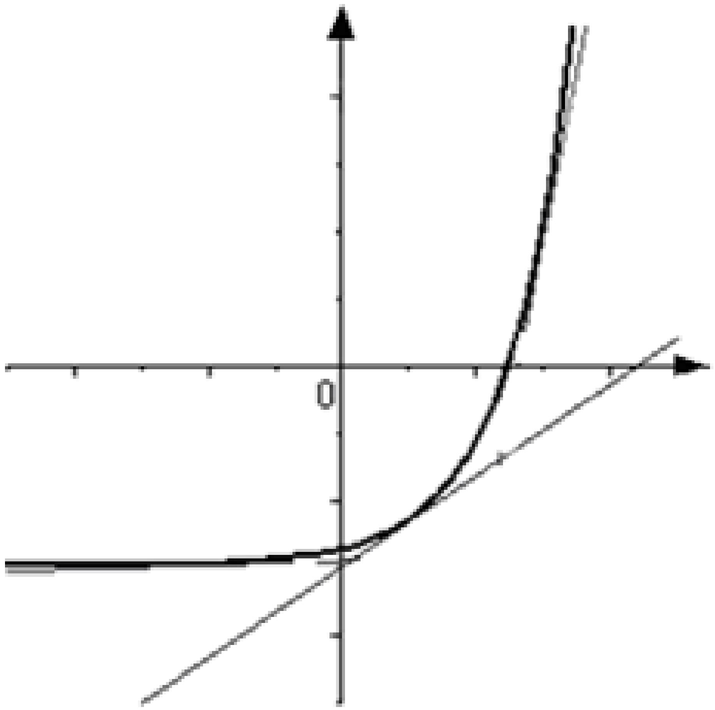
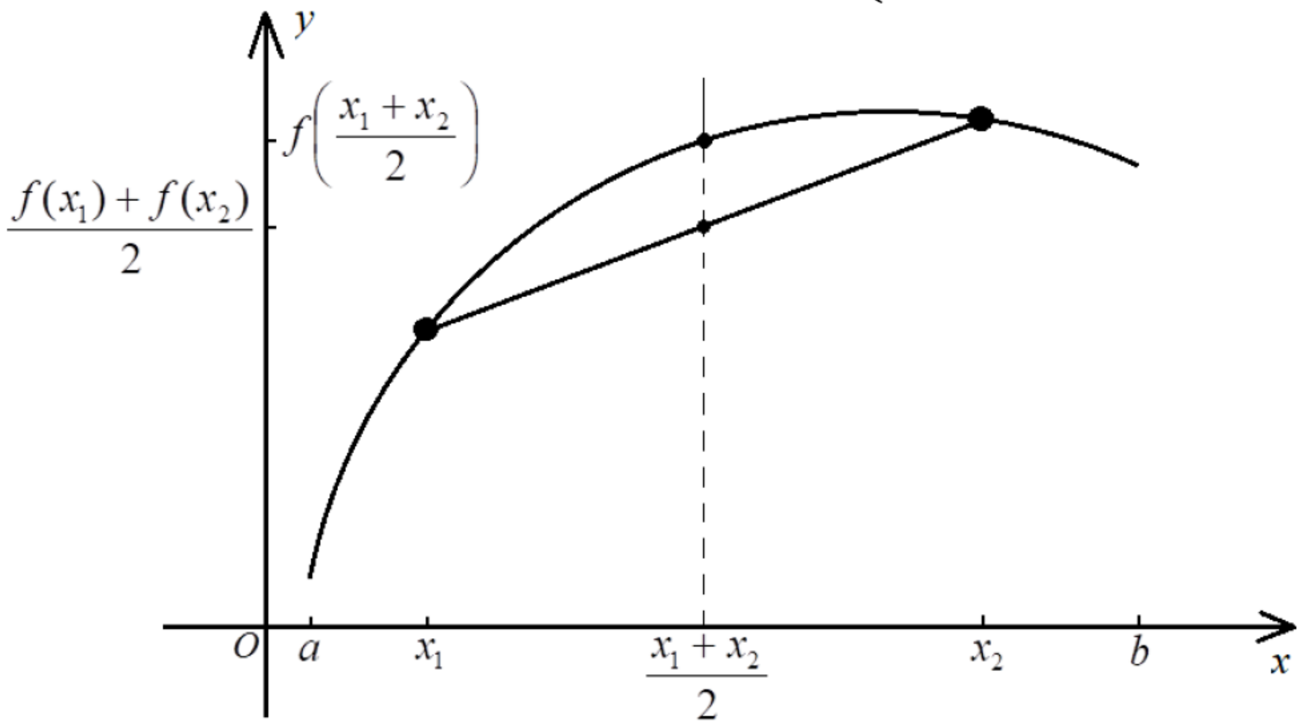


рис 2

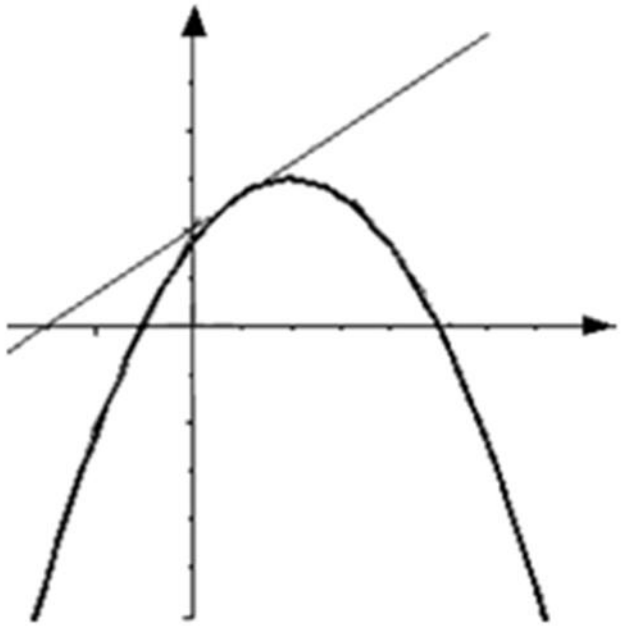
Определение. График функции $y = f(x)$ называется ***выпуклым вверх (вниз)*** на интервале (a,b), если каковы бы ни были точки x_1 и x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, выполняется неравенство

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \quad \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right).$$

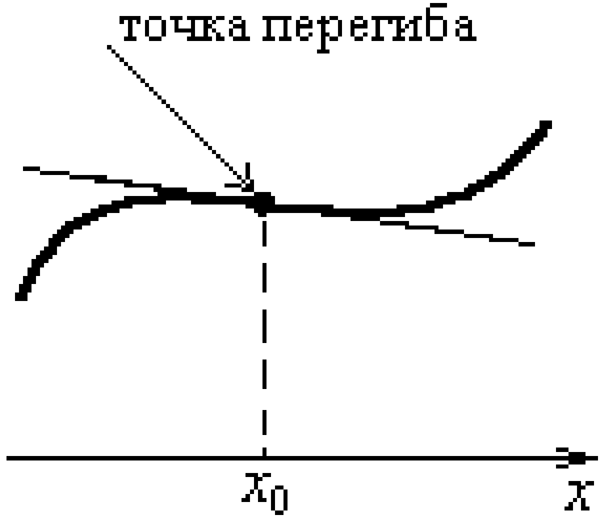


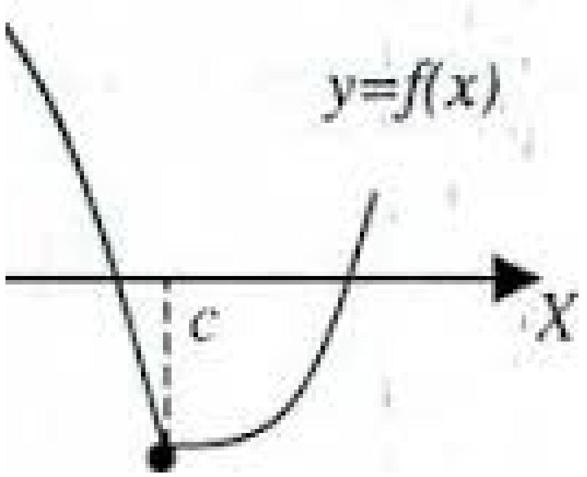
***Теорема** (достаточное условие выпуклости функции)*.

График функции $y = f(x)$ является выпуклым вверх (вниз) на интервале (a,b), если функция f дважды дифференцируема и ее вторая производная меньше нуля (больше нуля).



Определение. Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** графика функции $y = f(x)$, если в точке x_0 существует конечная или бесконечная производная функции f и в окрестности этой точки меняется направление выпуклости графика функции.





Теорема **(***необходимое условие точки перегиба***)**.

Если точка $M_0(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика дважды дифференцируемой функции *f*, то ее вторая производная равна нулю, т.е. $f''(x_0)=0$.

Теорема **(***достаточное условие точки перегиба***)**.

Если функция f дважды дифференцируема, ее вторая производная $f''(x_0)=0$ и меняет знак в окрестности точки x_0, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ - точка перегиба графика функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции. Область значений функции

Определение. Если $f(x) \le f(x_0)\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$ для всех $x \in D$, то говорят, что f имеет в точке x_0 ***абсолютный максимум (абсолютный минимум)*** на данном множестве (иначе: $f(x_0)$ - ***наибольшее или наименьшее значение***).

Замечание. Функция, определенная в интервале, может и не иметь в нем абсолютного экстремума

Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она имеет на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, которые достигаются либо в одной из критических точек, лежащих внутри отрезка, либо в граничных точках этого отрезка

Алгоритм исследования непрерывной функции на абсолютный экстремум

1) найти критические точки;

2) вычислить значение функции во всех критических точках и на концах промежутка;

3) из полученных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Алгоритм исследования функции на абсолютный экстремум

1) найти критические точки и значения функции в этих точках;
2) исследовать на экстремум по определению точки разрыва функции и найти значения функции в этих точках;
3) найти значения функции или предельные значения на концах множества;
4) выбрать наибольшее и наименьшее значения, если они существуют.