Организация дистанционной работы

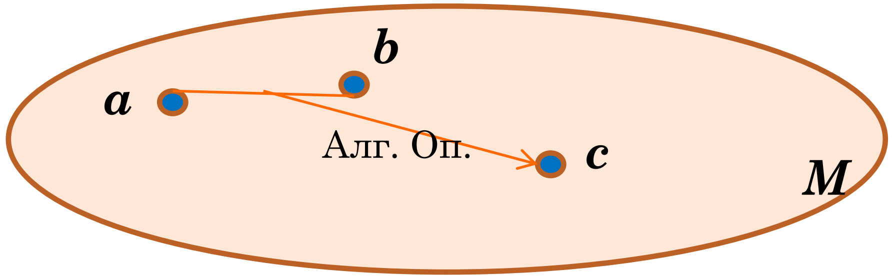
- Все лекции и практические занятия будут проводиться в дистанционном формате
  - Проведение лекций будет на платформе ВВВ (как и раньше)
  - Проведение практических занятий будет в Discord с применением виртуальной доски или по Skype с применением маркерной доски .
- Правила сдачи работ:
  - Работу присылать на почту с ЛИЧНОГО почтового ящика
  - В теме письма указать: **Иванов И_ПМИ-1_Тема лаб. работы**
  - Выполнять работу от руки на листе формата А4 (придерживаться правил оформления титульного листа).
  - Если работа состоит из нескольких страниц, то страницы нумеруются.
  - Высылается работа в виде вложенного в текст письма ОДНОГО архива или ОДНОГО файла формата pdf. Фотографии (сканы) каждой страницы при формировании архива *желательно именовать в соответствии с номером страницы,* например **рис 1.jpg** и т.д.
- В тексте письма также указать свою фамилию, группу и тему выполненной работы.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 7

Алгебраические операции

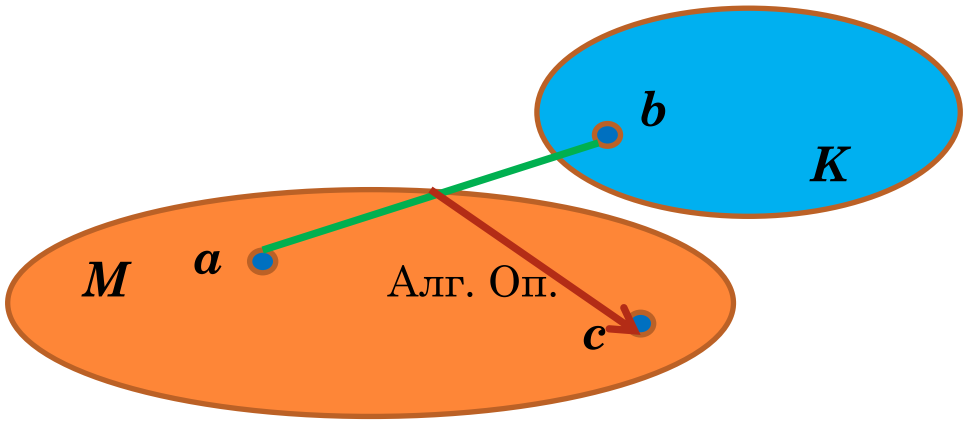
Пусть дано некоторое множество ***M*.** Будем говорить, что на множестве ***M*** задана ***внутренняя алгебраическая операция***, если задан закон (правило), по которому каждой упорядоченной паре элементов ***a*** и ***b*** из ***M*** ставится в соответствие вполне определённый элемент ***c***. Если при этом для любой пары элементов ***a*** и ***b*** из ***M*** соответствующий элемент ***c*** всегда тоже принадлежит ***M*,** то ***M*** ***замкнуто относительно данной операции***.



Пример:

1. Сложение и умножение действительных чисел
2. Сложение (вычитание) матриц одной размерности

Пусть даны два множества ***M*** и ***K*.** Будем говорить, что на множестве ***M*** задана ***внешняя алгебраическая операция***, если задан закон, по которому для каждой пары элементов ***a*** $\in$ ***M*, *b*** $\in$ ***K*** ставится в соответствие вполне определённый элемент ***c*** $\in$ ***M*.**



Пример:

1. Умножение вектора на действительное число
2. Умножение матрицы на число

Пусть на множестве элементов $\boldsymbol{P}$ определены *две внутренние алгебраические операции* - **сложение** и **умножение**:
при сложении $(\forall\, a, b \in \boldsymbol{P})(\exists\, c \in \boldsymbol{P})\colon c = a + b$;
при умножении $(\forall\, a, b \in \boldsymbol{P})(\exists\, c \in \boldsymbol{P})\colon c = a \cdot b$.

Опр. Множество элементов $\boldsymbol{P}$ называется ***полем***, если на нём заданы *две алгебраические операции*: сложение и умножение, удовлетворяющие следующим **требованиям** (**аксиомам**):

1. $\boldsymbol{P}$ замкнуто относительно обеих операций;
2. $\forall\, a, b \in \boldsymbol{P} : a + b = b + a$;
3. $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{P}\colon (a + b) + c = a + (b + c)$;
4. $(\forall\, a \in \boldsymbol{P})(\exists\, 0 \in \boldsymbol{P}) : a + 0 = a$;
5. $(\forall\, a \in \boldsymbol{P})(\exists\, (-a) \in \boldsymbol{P})\colon a + (-a) = 0$;
6. $\forall\, a, b \in \boldsymbol{P} : a \cdot b = b \cdot a$;
7. $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{P}\colon (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
8. $(\forall\, a \in \boldsymbol{P})(\exists\, 1 \in \mathrm{P})\colon 1 \cdot a = a$;
9. $(\forall\, a \in \boldsymbol{P} \backslash 0)(\exists\, a^{-1} \in \mathrm{P})\colon a \cdot a^{-1} = 1$;
10. $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{P}\colon (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Примеры полей:

1. Множество рациональных чисел $(\mathbb{Q})$,
2. Множество действительных чисел $(\mathbb{R})$,
3. Множество комплексных чисел $(\mathbb{C})$.

Определение и примеры линейных пространств

Пусть даны множество элементов $\boldsymbol{L}$ и поле $\boldsymbol{P}$. Элементы из $\boldsymbol{L}$ будем называть ***векторами.*** В качестве поля $\boldsymbol{P}$ будем использовать поле действительных (иногда комплексных) чисел. Векторы будем обозначать $\boldsymbol{a}$, $\mathbf{b}$, …; элементы поля $\boldsymbol{P}$: α, β, λ, …

Опр. Множество элементов $\boldsymbol{L}$ называется ***линейным (векторным) пространством над полем P***, если на $\boldsymbol{L}$ определены *две алгебраические операции*: сложение векторов и умножение вектора на элементы поля $\boldsymbol{P}$, удовлетворяющие следующим **условиям (аксиомам)**:

1. $\boldsymbol{L}$ замкнуто относительно обеих операций;
2. $\forall\, a, b \in \boldsymbol{L}$: $a + b = b + a$;
3. $\forall\, a, b, c \in \boldsymbol{L}$: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
4. $(\forall\, a \in \boldsymbol{L})(\exists\, 0 \in \boldsymbol{L}) : a + 0 = a$;
5. $(\forall\, a \in \boldsymbol{L})(\exists\, (-a) \in \boldsymbol{L})$: $a + (-a) = 0$;
6. $(\forall\, a \in \boldsymbol{L})(\exists\, 1 \in \mathrm{P})$: $1\cdot a = a$;
7. $(\forall\, a \in \boldsymbol{L})(\exists\, \alpha, \beta \in \boldsymbol{P})$: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\boldsymbol{a} = \alpha\cdot(\beta\cdot\boldsymbol{a})$;
8. $(\forall\, a \in \boldsymbol{L})(\exists\, \alpha, \beta \in \boldsymbol{P})$: $(\alpha + \beta)\cdot\boldsymbol{a} = \alpha\cdot\boldsymbol{a} + \beta\cdot\boldsymbol{a}$;
9. $(\forall\, a, b \in \boldsymbol{L})\ (\exists\, \alpha \in \boldsymbol{P})$: $\alpha\cdot(\boldsymbol{a} + \mathbf{b}) = \alpha\cdot\boldsymbol{a} + \alpha\cdot\mathbf{b}$.

Примеры линейных пространств:

1. $L = \{0\}$, P – любое поле.
2. Множество всех геометрических векторов, лежащих на одной прямой.
3. Множество всех геометрических векторов, лежащих в одной плоскости.
4. Множество всех возможных геометрических векторов трёхмерного пространства.
5. Множество всех многочленов степени не выше n с действительными (комплексными) коэффициентами.

Линейная зависимость и независимость векторов

Опр. Пусть $\boldsymbol{L}$ – линейное пространство над полем $\boldsymbol{P}$. Пусть $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$ (∗) конечная система векторов из $\boldsymbol{L}$. Вектор

$$\boldsymbol{b} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a_n}$$

называется ***линейной комбинацией (л/к) векторов*** (∗), или говорят, что вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через систему векторов (∗).

Опр 1. Система векторов (∗) называется ***линейно зависимой (л/з)***, если существует такой ***не***_нулевой набор коэффициентов_ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при котором (л/к) векторов (∗) равна нулевому вектору

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}.$$

Опр 2. Система векторов (∗) называется ***линейно независимой (л/н)***, если её (л/к) равна нулевому вектору

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$$

только при нулевом наборе коэффициентов, т.е. когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Свойства линейной зависимости и независимости

1⁰. Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

<u>Доказательство:</u>

Если в системе (∗) вектор $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{0}$, то $1\cdot\boldsymbol{0} + 0\cdot\boldsymbol{a_2} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}$.

2⁰. Если система векторов содержит два пропорциональных вектора, то она линейно зависима.

<u>Доказательство:</u>

Пусть $\boldsymbol{a_1} = \lambda\cdot\boldsymbol{a_2}$. Тогда $1\cdot\boldsymbol{a_1} - \lambda\cdot\boldsymbol{a_2} + 0\cdot\boldsymbol{a_3} + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \boldsymbol{0}$.

Опр 3. Конечная система векторов (∗) при $\boldsymbol{n} \geq 2$ называется ***линейно зависимой***, когда <u>хотя бы один</u> из её векторов является <u>линейной комбинацией остальных векторов этой системы</u>.

Утв. Определения **1** и **3** равносильны.

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть (∗) линейно зависима по определению 1. Тогда найдётся ненулевой набор коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, при котором

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{0}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$.

Тогда поделим обе части равенства на α_1 и выразим вектор $\boldsymbol{a_1}$:

$$\boldsymbol{a_1} = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \cdot \boldsymbol{a_2} + \ldots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) \cdot \boldsymbol{a_n}.$$

Итак, вектор $\boldsymbol{a_1}$ является линейной комбинацией остальных векторов.

$\Leftarrow$ Пусть один из векторов (∗) является линейной комбинацией остальных векторов. Не нарушая общности будем считать, что это первый вектор, т.е.

$$\boldsymbol{a_1} = \beta_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \beta_n \boldsymbol{a}_n.$$

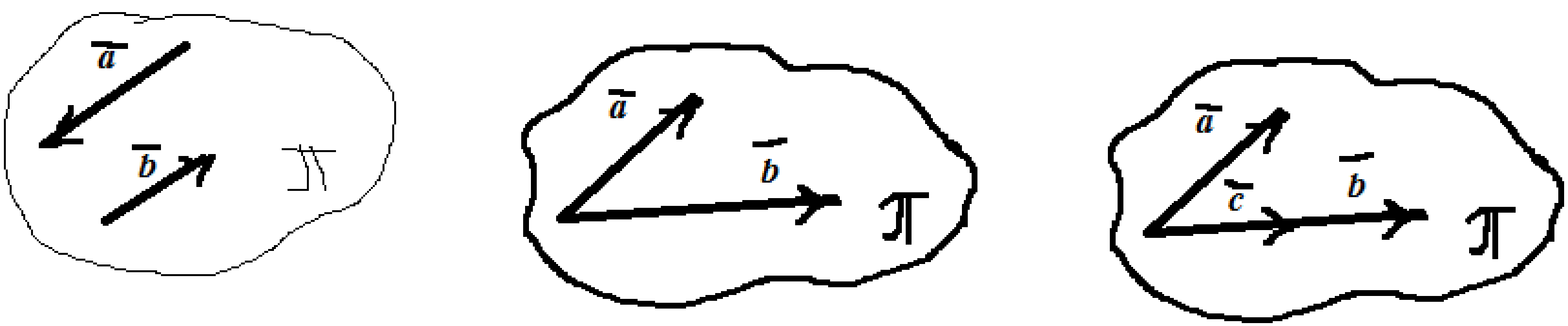
Отсюда $(-1) \cdot \boldsymbol{a_1} + \beta_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \beta_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$, т.е. система векторов (∗) линейно зависима по определению 1.

Опр 4. Конечная система векторов (∗) при $\boldsymbol{n} \geq 2$ называется ***линейно независимой***, если ни один из её векторов нельзя представить в виде линейной комбинацией остальных векторов этой системы.

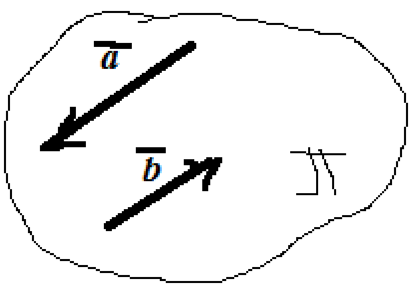
Утв. Определения **2** и **4** равносильны.

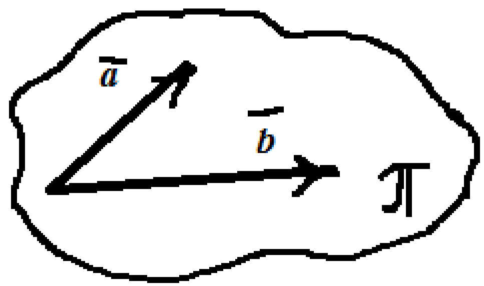
3^0. Если система векторов линейно независима, то любая её подсистема тоже линейно независима.

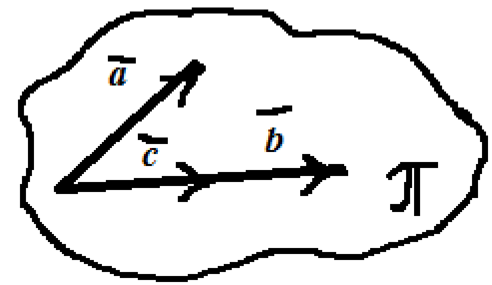
4^0. Если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и вся система тоже линейно зависима.



Опр. Система векторов называется ***максимальной линейно независимой системой векторов*** линейного пространства ***L***, если она линейно независима, но при добавлении к ней любого вектора из ***L*** , не входящего в эту систему, она становится уже линейно зависимой.







Примеры:

- Во множестве всех геометрических векторов, лежащих на одной прямой, *любая система, состоящая их одного ненулевого вектора*, является максимальной линейно независимой.

- Во множестве всех геометрических векторов, лежащих в одной плоскости, *любые два непараллельных вектора* составляют максимальную линейно независимую систему.

- Во множестве всех геометрических векторов трёхмерного пространства *любая система трёх не лежащих в одной плоскости вектора* является максимальной линейно независимой.

- Во множестве всех многочленов степени не выше n с действительными (комплексными) коэффициентами система многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$ является максимальной линейно независимой.

- Во множестве всех многочленов степени не выше n с действительными (комплексными) коэффициентами система многочленов $1,\ x,\ x^2,\ \dots\ ,\ x^n$ является максимальной линейно независимой.

Базис векторного пространства. Координаты вектора

Пусть $\boldsymbol{L}$ – линейное пространство над полем $\boldsymbol{P}$.

Опр. Базисом линейного пространства называется *любая упорядоченная максимальная линейно независимая* система его векторов.

Базису можно дать другое определение, эквивалентное приведённому:

Опр. Базисом линейного пространства $\boldsymbol{L}$ называется *любая упорядоченная система* $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}, \ldots$ (∗) его векторов, удовлетворяющая следующим требованиям:

1. любой вектор из $\boldsymbol{L}$ можно представить в виде линейной комбинации конечного числа векторов из (∗);
2. ни один вектор $\boldsymbol{a_к}$ из системы (∗) нельзя представить в виде линейной комбинации конечного числа остальных векторов из (∗).

Теорема. Если линейное пространство ***L*** имеет конечный базис, то все базисы этого пространства конечны и содержат одно и то же число векторов.

Опр. Линейное пространство называется ***бесконечно мерным,*** если в нём есть базис, содержащий бесконечное множество векторов. Если все базисы пространства содержат конечное число векторов (***n*** векторов), то пространство называется конечномерным (***n-мерным).***

Размерность линейного пространства будем обозначать ***dim L***.

Примеры:

1. Множество всех геометрических векторов, лежащих на одной прямой (***dim L*** = **1**).

2. Множество всех геометрических векторов, лежащих в одной плоскости (***dim L*** = **2**).

3. Множество всех возможных геометрических векторов трёхмерного пространства (***dim L*** = **3**).

4. Множество всех многочленов степени не выше *n* с действительными (комплексными) коэффициентами (***dim L*** = ***n*+1**).

5. ***Арифметическое n-мерное пространство.*** Пусть $\boldsymbol{A_n}$ – множество всех возможных упорядоченных наборов n действительных чисел, т.е.

$$A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} .$$

Если $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – какие-то два элемента (вектора) из множества $\boldsymbol{A_n}$, то сумму векторов и умножение вектора на действительное число определим следующим образом:

- $a + b = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$;
- $\lambda \cdot a = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$.

Легко проверить, что все требования (аксиомы) в определении линейного пространства выполняются, т.е. $\boldsymbol{A_n}$ является линейным пространством.

Очевидно, система $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots 0)$, … , $e_n = (0, 0, \dots, 0)$ является линейно независимой.

Если $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – произвольный вектор пространства $\boldsymbol{A_n}$, то

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n.$$

Следовательно, система $e_1, e_2, \dots, e_n$ является ***базисом*** в $\boldsymbol{A_n}$, т.е. $\boldsymbol{A_n}$ – $\boldsymbol{n}$-мерное линейное пространство.

Пусть $\boldsymbol{L}$ – n-мерное линейное пространство и $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ базис в линейном пространстве $\boldsymbol{L}$. Если $\boldsymbol{a}$ – произвольный вектор из $\boldsymbol{L}$, то

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \alpha_2 \boldsymbol{e_2} + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e_n}.$$

(иначе говоря, вектор $\boldsymbol{a}$ разложен по базису ***или*** вектор $\boldsymbol{a}$ представим в виде линейной комбинации базисных векторов)

Опр. Упорядоченный набор коэффициентов, с помощью которых данный вектор выражается через базисные векторы, называется ***координатами*** этого вектора в данном базисе.

Обозначение $\boldsymbol{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$.

Теорема. Каждый вектор пространства $\boldsymbol{L}$ имеет в базисе $\boldsymbol{B}$ единственный набор координат.

Теорема. Если векторы заданы координатами в одном и том же базисе, то при сложении векторов складываются их соответствующие координаты, при умножении вектора на действительное (комплексное) число на это число умножается каждая его координата.

Матрица перехода. Связь координат вектора в разных базисах

Пусть в линейном пространстве L_n заданы два базиса:

$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (назовем его старым базисом) и

$e' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ (назовем его новым базисом).

Разложим векторы базиса e' по базису e :

$$\begin{cases} e_1' = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n, \\ e_2' = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e_n' = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Матрицу $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$ называют *матрицей перехода* от базиса e к базису e'.

Равенства (1) в матричном виде удобно записывать так:

$$e' = e \cdot T \qquad (2).$$

Правило построения матрицы перехода

Для построения матрицы перехода от базиса e к базису e' нужно для всех векторов e_i' нового базиса e' найти их координатные столбцы в старом базисе e и записать их в качестве соответствующих столбцов матрицы T .

Теорема. Матрица перехода от одного базиса n -мерного линейного пространства L_n над полем P к другому его базису является невырожденной матрицей n -го порядка с элементами из поля P .

Пример 1. Найти матрицу перехода к базису $e_1' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, если векторы заданы своими координатами в базисе $e = (e_1, e_2)$.

Решение. Векторы нового базиса: $e' = (e_1', e_2')$ - заданы своими координатами в старом базисе: $e = (e_1, e_2)$, т.е. $e' = e \cdot T$.

$$e_1' = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2,$$

$$e_2' = (e_1, e_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1e_1 + 2e_2.$$

По определению матрицы перехода получаем $T_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Связь координат вектора в разных базисах

Пусть в линейном пространстве L_n заданы базисы $e=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ и $e'=(e_1',e_2',\dots,e_n')$ с матрицей перехода T от базиса e к базису e', т.е. верно $e'=e\cdot T$ (2). Вектор a имеет в базисах e и e' координаты

$$[a]_e=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \qquad [a]_{e'}=\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \dots\\ \alpha_n'\end{pmatrix},$$

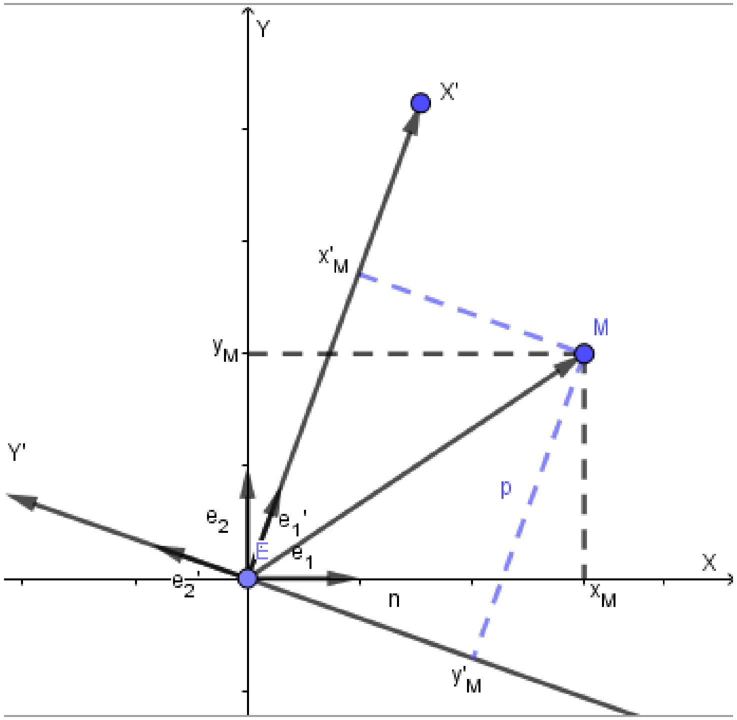
$$a=e[a]_e=(e_1,e_2,\dots,e_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \text{ и } a=e'[a]_{e'}=(e_1',e_2',\dots,e_n')\begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \alpha_2'\\ \dots\\ \alpha_n'\end{pmatrix}.$$

Тогда, с одной стороны, $a=e[a]_e$, а с другой стороны $a=e'[a]_{e'}=(e\cdot T)[a]_{e'}$

Из этих равенств получаем: $a=e[a]_e=e(T\cdot[a])_{e'}$. Отсюда в силу единственности разложения вектора по базису e вытекает равенство $[a]_e=T\cdot[a]_{e'}$ (3), или

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} \qquad (4)$$

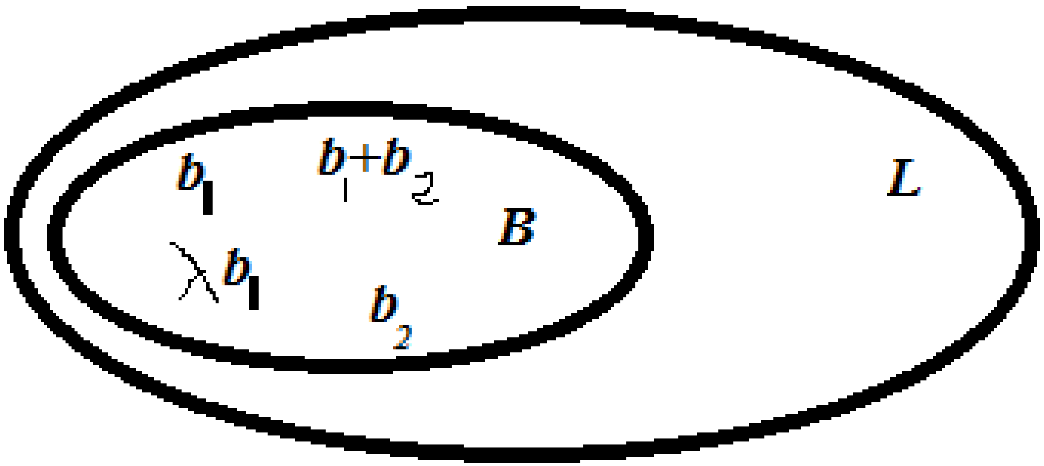
Соотношения (3) и (4) называют *формулами преобразования координат* при изменении базиса линейного пространства. Они выражают старые координаты вектора через новые. Эти формулы можно преобразовать относительно новых координат вектора, умножив (4) слева на T^{-1} (такая матрица существует, так как T – невырожденная матрица). Тогда получим $[a]_{e'} = T^{-1} \cdot [a]_e$. По этой формуле, зная координаты вектора в старом базисе е линейного пространства L_n, можно найти его координаты в новом базисе, e'.



Подпространства линейных пространств

Опр. Подпространством линейного пространства называется такое множество его элементов, которое само является линейным пространством над тем же полем.

Теорема. Непустое множество элементов $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{L}$ является линейным подпространством в $\boldsymbol{L}$ тогда и только тогда, когда для любых двух элементов $b_1, b_2 \in \boldsymbol{B}$ и любого $\lambda \in \boldsymbol{P}$ выполняются условия: $b_1 + b_2 \in \boldsymbol{B}$ и $\lambda \cdot b_1 \in \boldsymbol{B}$.



Примеры линейных подпространств.

- Пусть $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_к}$ – любая система векторов из $\boldsymbol{L}$. Множество всех линейных комбинаций этих векторов (т.е. элементов вида $\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_к\boldsymbol{a_к}$) называется ***линейной оболочкой*** данной системы векторов:

$$\langle \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k} \rangle = L(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$$
$$= \left\{ \alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a_k} \middle| \boldsymbol{a_i} \in L, \alpha_i \in P, i = \overline{1,k} \right\}$$

Линейная оболочка любой конечной системы векторов из $\boldsymbol{L}$ является линейным подпространством в $\boldsymbol{L}$. Одним из базисов линейной оболочки является максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_к}$.

Число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме данной системы векторов $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_к}$ будем называть рангом этой системы.

Следовательно, размерность линейной оболочки равна рангу этой системы.

- Множество многочленов степени не выше k ($k \le n$) с коэффициентами из поля $\boldsymbol{P}$ является линейным подпространством в пространстве многочленов степени не выше n.

- Множество геометрических векторов плоскости является линейным подпространством в пространстве всех геометрических векторов трёхмерного пространства.

- Нулевой вектор является линейным подпространством в том линейном пространстве, которому он принадлежит.

- Множество диагональных матриц порядка n является линейным подпространством во множестве квадратных матриц порядка n.

Спасибо за внимание!