1. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса.

Понятие подпоследовательности. Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ натуральных чисел. Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

Пример. Пусть рассматривается последовательность $x_n = (-1)^n$. Тогда из нее можно выделить, например, такие подпоследовательности:

$$x_{2k} = (-1)^{2k} \equiv 1, \quad x_{2k-1} = (-1)^{2k-1} \equiv -1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Понятие частичных пределов. Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности x_n называются частичными пределами этой последовательности.

Пример. Множество частичных пределов уже рассмотренной последовательности $x_n = (-1)^n$ состоит из двух элементов: ± 1.

Лемма о пределе подпоследовательностей последовательности, имеющей предел. Пусть последовательность x_n имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательность имеет тот же самый предел.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists n_0 : \ \forall n > n_0 \ \ x_n \in U_\varepsilon(A)$$

Пусть теперь x_{n_k} - подпоследовательность x_n. Так как $n_k \to +\infty$, то

$$\exists k_0 : \ \forall k > k_0 \ \ n_k > n_0,$$

а значит $x_{n_k} \in U_\varepsilon(A)$, что и доказывает утверждение. ЧТД.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. У любой ограниченной последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$S = \{x \in \mathbb{R} : x < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n\}.$$

Так как последовательность x_n ограничена, то S не пусто и ограничено сверху, а значит, согласно принципу точной грани, существует s = sup S. Согласно свойству супремума, если k - натуральное, то

$$\exists s' \in S: \; s - \frac{1}{k} < s' \leqslant s.$$

В частности, в силу транзитивности отношения <, справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Так как $s + \frac{1}{k} \notin S,$ то аналогичным образом устанавливается справедливость высказывания

$$s + \frac{1}{k} < x_n \text{ для конечного числа членов } x_n,$$

а значит для любого натурального k справедливо высказывание

$$s - \frac{1}{k} < x_n < s + \frac{1}{k} \text{ для бесконечного числа членов } x_n.$$

Теперь будем строить сходящуюся подпоследовательность. Пусть k = 1, выберем $x_{n_1} \in \{x_n: \; s - 1 < x_n < s + 1\}.$ Далее, пусть построены члены с номерами n_1, n_2, …, n_p. В качестве n_{p+1}-ого члена подпоследовательности выберем

$$x_{n_{p+1}} \in \left\{x_n: \; s - \frac{1}{p+1} < x_n < s + \frac{1}{p+1}\right\}$$

так, чтобы $n_{p+1} > n_p$. Последнее всегда возможно в силу доказанной бесконечности множества членов последовательности, удовлетворяющих выписанному неравенству. Продолжая по индукции, получаем подпоследовательность x_{n_p}, причем для всех натуральных p

$$s - \frac{1}{p+1} < x_{n_p} < s + \frac{1}{p+1}.$$

Тогда, согласно теореме о сжатой переменной, $x_{n_p} \xrightarrow[p \to \infty]{} s$. ЧТД.

<u>Лемма о дополнении теоремы Больцано-Вейерштрасса.</u> Если последовательность x_n не ограничена сверху (снизу), то из нее можно выделить сходящуюся к +∞ (−∞) подпоследовательность.
Доказательство. Пусть подпоследовательность не ограничена сверху. Тогда найдется номер n_1 такой, что $x_{n_1} > 1$. Далее будем

действовать по индукции. Если уже выбран номер $n_k > n_{k-1}$ такой, что $x_{n_k} > k$, то выбирается номер $n_{k+1} > n_k$ так, что $x_{n_{k+1}} > k + 1$. Такое построение возможно, так как иначе последовательность была бы ограничена сверху числом $\max(x_1, \ldots, x_{n_k}, k + 1)$. Тем самым
$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty.$

Для неограниченной снизу последовательности доказательство аналогично. ЧТД

2. Верхний и нижний пределы

Определение верхнего и нижнего пределов последовательности. Пусть E - (непустое) множество частичных пределов последовательнотси x_n. Верхним пределом этой последовательности называется sup E и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ *или* $\limsup\limits_{n} x_n$. Нижним пределом этой последовательности называется inf E и обозначается
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ *или* $\liminf\limits_{n} x_n$.

Пример. Нижний и верхний пределы $x_n = (-1)^n$: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1, \quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -1.$

Лемма о частичных пределах последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами.
Доказательство. Проведем доказательство для верхнего предела. Сначала рассмотрим случай, когда x_n ограничена сверху. Пусть
$y_k = \sup\limits_{n}\{x_n,\ n \geqslant k\}.$
y_k - убывающая последовательность. Значит по обобщенной теореме Вейерштрасса, она имеет предел. Кроме того, если x_{n_k} - подпоследовательность последовательности x_n, имеющая предел, то

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{n_k} \leqslant y_{n_k} \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

где последнее равенство верно в силу леммы о пределе подпоследовательностей последовательности, имеющей предел. Если мы построим подпоследовательность x_n, сходящуюся к пределу y_n, то теорема будет доказана. Для чисел $n \in \mathbb{N}$, используя свойства верхней грани, подберем числа k_n так, что

$$y_n - \frac{1}{n} < x_{k_n} \leqslant y_n, \quad k_n > k_{n-1}.$$

Теперь утверждение следует из теоремы о сжатой переменной. Если последовательность не ограничена сверху, то доказательство вытекает из дополнения к теореме Больцано-Вейерштрасса. ЧТД

Замечание об обозначениях. В доказательстве есть пояснение к тому, почему верхний предел часто обозначают как lim sup, а нижний как lim inf. Мы показали, что, например, в случае ограниченности x_n сверху

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n,\ n \geqslant k\},$$

что и есть верхний предел. В этом случае даже можно написать, опираясь на убывание y_k, что

$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \{x_n,\ n \geqslant k\} = \inf_k \sup_n \{x_n,\ n \geqslant k\}$$

Замечание о критерии наличия предела у последовательности. Последовательность x_n имеет предел в R расширенном тогда и только тогда, когда ее верхний предел равен нижнему.

3. Критерий Коши для последовательности.

Понятие фундаментальной последовательности. Последовательность x_n называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Пример. Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Мы знаем, что её пределом является число e, а значит эта последовательность фундаментальна.

Критерий Коши. Последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Доказательство. Необходимость. Пусть ε > 0, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\quad |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $p \in N$, тогда $n + p > n_0$ и

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - A) + (A - x_n)| \leqslant |x_{n+p} - A| + |A - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

то есть x_n фундаментальная последовательность

Достаточность. Пусть x_n - фундаментальная последовательность, ε = 1, тогда

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\quad |x_{n+p} - x_n| < 1.$$

В частности, при $n = n_0 + 1$

$$-1 + x_{n_0+1} < x_{n_0+p+1} < 1 + x_{n_0+1},$$

откуда члены последовательности x_n при $n > n_0 + 1$ ограничены числом

$$\max(|-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|).$$

Тогда, положив

$$C = \max(|x_1|, |x_2|, \ \ldots, |x_{n_0+1}|, |-1 + x_{n_0+1}|, |1 + x_{n_0+1}|)$$

получаем, что $|x_n| \leqslant C,$ то есть фундаментальная последовательность ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит

$$\exists x_{n_k} : \ \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = A.$$

Докажем, что пределом последовательности x_n является число A. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда в силу фундаментальности x_n,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} \ \ |x_{n+p} - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Так как $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = A$, то

$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \ \ |x_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $k_1 > k_0$ таково, что $n_{k_1} > n_0$, тогда при $n > n_0$ имеем

$$|x_n - A| = |(x_n - x_{n_{k_1}}) + (x_{n_{k_1}} - A)| \leqslant |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. ЧТД.

<u>Пример.</u> Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.
Оказывается, что она не имеет конечного предела. Согласно отрицанию критерия Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists n > n_0 \ \exists p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon_0$$

Пусть $n_0 \in N$, $n > n_0$, $p = n$, тогда

$$|x_{2n} - x_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} \cdot n\right| = \frac{1}{2}.$$

Это значит, что для $\varepsilon_0 = ½$ выполнено отрицание критерия Коши, откуда следует, что последовательность предела не имеет.

<u>Пример.</u> Докажем, что последовательность $x_n = \sin n$ не имеет предела.

От противного, пусть $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n = A \in \mathbb{R}$. Так как

$$|\sin(n+2) - \sin n| = 2|\sin 1 \cdot \cos(n+1)|$$

и $\lim_{n\to\infty} \sin(n+2) = A$, а также так как sin 1 не равен 0, то, переходя к пределу в полученном равенстве получаем, что $\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$. Значит, аналогично

$$\lim_{n\to\infty} \cos n = \lim_{n\to\infty} \cos(n+2) = 0.$$

Так как

$$|\cos(n+2) - \cos n| = 2|\sin 1 \cdot \sin(n+1)|,$$

то, аналогично, $\lim_{n\to\infty} \sin(n+1) = 0$, а значит A = 0. Но это невозможно в силу основного тригонометрического тождества.

4. Определение предела функции по Коши

Понятие предельной точки. Точка x_0 ∈ R(расширенному) называется предельной для множества E ⊂ R(расширенного), если в любой окрестности x_0 содержится бесконечное число элементов множества E, то есть

$$\forall U(x_0) \quad U(x_0) \cap E \quad \textit{бесконечно}.$$

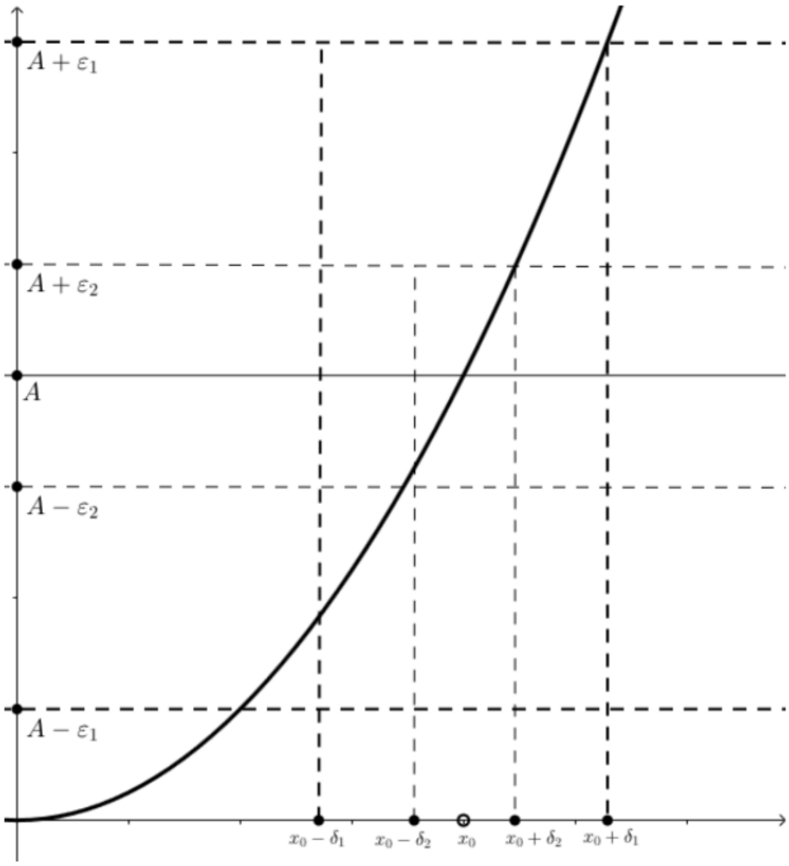
Пример. Пусть E = [a, b]. Множество предельных точек E - весь отрезок [a, b]. Если E = (a, b), то множество предельных точек E - снова отрезок [a, b]. Пусть $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, тогда множество предельных точек E состоит только из нуля.

Определение предела функции через ε-δ и неравенства. Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

Геометрическая иллюстрация.



Определение бесконечных пределов.

Определение предела функции через ε-δ-окрестности.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции через окрестности. Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A)\ \exists\overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0)\cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists\overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0)\cap E\right) \subset V(A)$$

Лемма об эквивалентности определений.

Доказательство. По аналогии с:

Доказательство. Сначала докажем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 2.2, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и в смысле определения 2.3.

Пусть $U(A) = (\alpha, \beta)$ – произвольная окрестность точки A. Положим $\varepsilon = \min(A-\alpha, \beta-A)$, тогда $U_\varepsilon(A) \subset U(A)$. Согласно определению 2.2, по выбранному ε

$$\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 \quad x_n \in U_\varepsilon(A) \subset U(A),$$

то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ в смысле определения 2.3.

Тот факт, что из определения 2.3 следует определение 2.2, моментально следует из того, что ε-окрестность является частным случаем окрестности. $\square$

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

Пусть ε > 0. Нужно найти те x, при которых выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon.$$

Так как x не равен 2, то

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon$$

Значит, если положить δ = ε, то при 0 < |x − 2| < δ выполняется неравенство выше.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - x) = 6$

Пусть ε > 0. Заметим, что $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Можно предполагать, что x ∈ (2, 4), x не равен 3. Тогда

$$|(x-3)(x+2)| \leqslant 6|x-3|$$

Если теперь потребовать, чтобы выполнялось неравенство 6|x − 3| < ε, то выбрав δ = min(1,ε/6), при всех x таких, что 0 < |x − 3| < δ, будет выполняться |x2 − x − 6| <= 6|x − 3| < ε.

Пример. Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Докажем, что у этой функции нет предела в точке 0. Запишем отрицание того факта, что число A является пределом введенной функции в нуле:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x \in E : 0 < |x - 0| < \delta \quad |\operatorname{sign} x - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Пусть $\varepsilon_0 = 1$ *и* $x_\delta = -\frac{\delta}{2}$, *если* $A \geqslant 0$, *и* $x_\delta = \frac{\delta}{2}$, *если* $A < 0$. Тогда, в любом из случаев: $|\operatorname{sign} x - A| \geqslant 1$.

5. Определение предела по Гейне

Определение предела по Гейне. Пусть $f : E \to R$, $x_0 \in R$(расширенному) - предельная точка для E. Элемент $A \in R$(расширенному) называется пределом функции f в точке x_0, если для любой последовательности x_n такой, что

(а) $x_n \in R$

(б) x_n не равно x_0

(в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

выполняется равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$

Теорема об эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне.

Доказательство. Остановимся подробно на случае, когда x_0, $A \in R$.

Сначала докажем, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Коши, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в смысле определения по Гейне. Пусть ε > 0, тогда, согласно определению по Коши,

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in V_\varepsilon(A)$$

Пусть последовательность x_n из условия. Тогда, по ранее найденному числу δ > 0,

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0)$$

Значит при $n > n_0$ $f(x_n) \in V_\varepsilon(A)$, что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. В силу произвольности x_n, утверждение доказано.

Теперь докажем обратное. Пойдем от противного, пусть не выполнено определение по Коши, то есть

$$\exists\varepsilon_0 : \forall\delta > 0 \ \exists x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}$. Тогда, согласно написанному выше, для каждого δ_n

$$\exists x_n \in \overset{o}{U}_{\delta_n}(x_0) \cap E : |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$$

Построенная последовательность x_n удовлетворяет (по построению) всем условиям, озвученным в теореме. В то же время, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, однако, так как $\forall n \in \mathbb{N} \ \ |f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq A$, то есть не выполнено определение по Гейне. Пришли к противоречию. ЧТД.

<u>Пример.</u> Докажем, что не существует предела sin x при x → +∞.
Рассмотрим две последовательности:

$$x_n^1 = 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \quad x_n^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Обе они удовлетворяют требованиям определения предела по Гейне. В то же время,

$$f(x_n^1) = \sin(2\pi n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad f(x_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

и, так как пределы между собой не равны, мы делаем вывод, что предела не существует.

6. Свойства функций, имеющих конечный предел

<u>Определение предела функции через ε-δ и неравенства.</u> Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

<u>Определение предела функции через ε-δ-окрестности.</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

<u>Определение предела функции через окрестности.</u> Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A)$$

<u>Определение бесконечных пределов</u>.

<u>Теорема о трех локальных свойствах функций, имеющих предел.</u> Пусть f : E → R и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, тогда:

(а) при A ∈ R предел единственен.

(б) При A ∈ R существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ функция f(x) ограничена.

(в) Если A не равно 0, A ∈ R, то существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ знаки f(x) и A совпадают.

Доказательство. (а) От противного, пусть существует 2 предела A_1 неравный A_2 и пусть последовательность x_n удовлетворяет определениям по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A_2$. Однако в силу единственности предела последовательности $A_1 = A_2$. Приходим к противоречию.

(б) Пусть ε = 1. Согласно определению пределу функции

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < 1 \;\Leftrightarrow\; (A-1) < f(x) < (A+1)$$

что и означает ограниченность.

(в) Пусть A ∈ R и пусть $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Тогда, согласно определению предела,

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \;\Leftrightarrow\; A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

откуда и следует требуемое. ЧТД.

<u>Замечание.</u> Дополнение к теореме выше:
При A ∈ R существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ функция f(x) ограничена.
Доказательство.

7. Арифметические свойства пределов.

<u>Определение предела функции через ε-δ и неравенства.</u> Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

<u>Определение предела функции через ε-δ-окрестности.</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции через окрестности. Пусть $f : E \to R$, $x_0 \in R$ - предельная точка для E. Число $A \in R$ называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A)$$

Определение бесконечных пределов.

Теорема об арифметических свойствах пределов в $R \cup \{\pm oo\}$. Пусть $f, g : E \to R$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B,\ A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, тогда, если определена соответствующая операция в R(расширенном), то:

(а) *Предел суммы равен сумме пределов, то есть*

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

(б) *Предел произведения равен произведению пределов, то есть*

$$f(x)g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} AB.$$

(в) *Если $g(x) \neq 0$ в некоторой $\overset{o}{U}(x_0)$, то предел частного равен частному пределов, то есть*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Используя определение предела по Гейне, доказательство этой теоремы сводится к применению соответствующей теоремы для последовательностей.

(a) Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A,\ \lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = B.$ Значит, по уже упомянутой теореме для последовательностей,

$$f(x_n) + g(x_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} A + B.$$

В силу произвольности x_n это означает, что

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A + B$$

Остальные пункты доказываются по аналогии. ЧТД.

8. Предельный переход в неравенствах.

Определение предела функции через ε-δ и неравенства. Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$.

Определение предела функции через ε-δ-окрестности.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции через окрестности. Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A)$$

Определение бесконечных пределов.

Теорема о влиянии неравенства между пределами функций на неравенство между функциями. Пусть f, g : E → R,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B, \ A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ и A < B. Тогда

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) < g(x).$$

Доказательство. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Тогда $f(x_n) < g(x_n)$, в силу произвольности x_n выполняется и f(x) < g(x). ЧТД.

Следствие о предельном переходе в неравенствах. Пусть f, g : E → R, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B, \ A, B \in \overline{\mathbb{R}}.$

(а) Если f(x) > g(x) на E, то A >= B

(б) Если f(x) >= g(x) на E, то A >= B

Доказательство. Доказательство строится на условиях определения по Гейне и аналогичном следствии для последовательностей. ЧТД.

Замечание. В первом пункте следствия нельзя утверждать, что A > B.

Например, для $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = 0$ при x > 0 выполняется f(x) > g(x), однако $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$

9. Теорема о сжатой переменной.

Определение предела функции через ε-δ и неравенства. Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

Определение предела функции через ε-δ-окрестности.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции через окрестности. Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A)\ \exists\overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists\overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A)$$

Определение бесконечных пределов.

Теорема о сжатой переменной. Пусть f, g, h : E → R, f(x) <= h(x) <= g(x) на E и $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,\ A \in \overline{\mathbb{R}}.$ *Тогда* $\lim_{x\to x_0} h(x) = A.$

Доказательство. Пусть последовательность x_n удовлетворяет условиям определения по Гейне. Согласно последнему,

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \ \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A$. По теореме о сжатой переменной для последовательностей получаем, что $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = A$. ЧТД.

10. Предел монотонной функции.

Определение предела функции через ε-δ и неравенства. Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

Определение предела функции через ε-δ-окрестности.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции через окрестности. Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A)$$

Определение возрастания и убывания функции. Пусть f : E → R. Говорят, что функция f возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Определение монотонной функции. Про (строго) возрастающую, (строго) убывающую функцию говорят что она монотонна.

Теорема о пределе монотонной функции. Пусть $f : E \to R$ – возрастающая (на E) функция, $s = \sup E$ - предельная для E. Тогда $\lim\limits_{x\to s} f(x) = \sup\limits_{x\in E} f(x)$

Доказательство. Пусть написанный предел конечен. Согласно локальным свойствам функций, имеющих предел, f ограничена в $U(s) \cap E$. Поскольку f - возрастающая на E функция, то это влечет ограниченность f сверху. Пусть теперь f ограничена сверху и $A = \sup f(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда, согласно свойству супремума

$$\exists x_0 \in E: \ \ A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant A$$

В силу неубывания f на E, при $x > x_0$, $x \in E$, имеем

$$A - \varepsilon < f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant A,$$

что и доказывает утверждение.
Для убывающей по аналогии. ЧТД.

11. Критерий Коши для функции

Определение предела функции через ε-δ и неравенства. Пусть $f : E \to R$, $x0 \in R$ - предельная точка для E. Число $A \in R$ называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A$.

Определение предела функции через ε-δ-окрестности.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \Leftrightarrow \ \forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

Определение предела функции через окрестности. Пусть $f : E \to R$, $x_0 \in R$ - предельная точка для E. Число $A \in R$ называется пределом функции f в точке x_0, если

$$\forall V(A) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(A).$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0) \cap E\right) \subset V(A)$$

<u>Формулировка критерия Коши для последовательностей.</u>
Последовательность x_n сходится (в R) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

<u>Критерий Коши для функции.</u> Пусть f : E → R, x_0 - предельная точка для E. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и пусть ε > 0, тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть $x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E,$ тогда, используя неравенство треугольника,

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) + (A - f(x''))| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть ε > 0, тогда

$$\exists\delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Пусть x_n - последовательность, удовлетворяющая условиям определения предела по Гейне. Тогда, в частности

$$\exists n_0 : \forall n > n_0 \quad x_n \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E.$$

Значит при $n > n_0$ и p ∈ N тем более

$$x_{n+p} \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$$

а значит

$$|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \varepsilon$$

что означает, что последовательность $f(x_n)$ фундаментальна и, согласно критерию Коши для последовательностей, имеет конечный предел. Тем самым доказано, что для любой последовательности, удовлетворяющей условиям определения предела по Гейне, последовательность f(xn) сходится. Осталось показать, что все эти пределы одинаковы. От противного, пусть есть последовательности x_n^1 и x_n^2, удовлетворяющие условиям определения предела по Гейне, но такие, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^1) = A_1 \neq A_2 = \lim_{n\to\infty} f(x_n^2)$$

Составим смешанную последовательность

$$x_n^3 = \{x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2,\ \ldots, x_n^1, x_n^2,\ \ldots\}$$

которая, как легко понять, тоже удовлетворяет условиям определения предела по Гейне. С одной стороны, по только что доказанному выше, последовательность $f(x_n^3)$ сходится, а с другой стороны

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{2k-1}^3) = A_1 \neq A_2 = \lim_{k\to\infty} f(x_{2k}^3)$$

Это противоречит утверждению леммы о пределе подпоследовательностей последовательности. Противоречие. ЧТД.

12. Односторонние пределы

Понятие правостороннего предела. Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$. Говорят, что элемент A ∈ R является пределом функции f в точке x_0 справа, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Обозначается, как $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$

Понятие левостороннего предела. Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$. Говорят, что элемент A ∈ R является пределом функции f в точке x_0 слева, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A),$$

Обозначается как $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$

Пример. Рассмотрим функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Ясно, что $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$$

Так как при x → 0 + 0 имеет место равенство

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$$

то легко понять, что

$$\lim_{x\to 0+0} 5^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Аналочино

$$\lim_{x\to 0-0} 5^{\frac{1}{x}} = 0$$

Критерий существования предела через односторонние. Пусть f : E → R и $x_0 \in$ R - предельная точка для множеств

$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ε > 0, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

В частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$

Достаточность. Пусть ε > 0, тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Аналогично,

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Пусть δ = min(δ_1, δ_2), тогда выполнены оба неравенства, а значит

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

что и доказывает утверждение.ЧТД.

Замечание о пределах на концах отрезка и на +-бесконечности. Если x_0 – не предельная точка ровно для одного из множеств $U_- \ \textit{или}\ U_+$, то теорема тоже остается верной. В этом случае понятие предела в точке x_0 само по себе становится понятием одностороннего предела. Это касается и пределов на бесконечностях.

Если x_0 - не предельная точка ни для множества U_-, ни для множества U_+, то понятия предела в точке x_0, ровно как и понятий односторонних пределов, не существует и вовсе.

13. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Понятие бесконечно малой функции. Функция α(x) называется бесконечно малой при x → x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

Понятие бесконечно большой функции. Функция β(x) называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} |\beta(x)| = +\infty$

Лемма о связи ББ и БМ функций. Пусть β(x) - ББ при $x \to x_0$. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$$

- БМ при $x \to x_0$.

Обратно, пусть α : E → R – бесконечно малая при $x \to x_0$ и

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad \alpha(x) \neq 0.$$

Тогда

$$\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$$

- ББ при $x \to x_0$.

Доказательство. (найти предел $\alpha(x)$ через $\frac{1}{\beta(x)}$ и определение ББ функции, для БМ функции аналогично)

Лемма о свойствах БМ функций. Пусть α, β : E → R - бесконечно малые при $x \to x_0$, тогда:

(а) Функция α(x) + β(x) - БМ при при $x \to x_0$.

(б) Функция α(x)β(x) - БМ при $x \to x_0$.

(в) Если функция θ : E → R ограничена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E$, то функция α(x)θ(x) - БМ при $x \to x_0$.

Доказательство. В силу арифметических свойств пределов, в доказательстве нуждается только третий пункт приведенной леммы. Согласно условию,

$$\exists \overset{o}{U}_\delta(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |\theta(x)| \leqslant C$$

Пусть ε > 0, тогда

$$\exists \delta_1 < \delta : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E \quad |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{C+1}$$

Тогда, при $x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \cap E$ выполняется

$$|\theta(x)\alpha(x)| < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Предел синуса, как мы знает не существует. В то же время синус ограничен. Кроме того, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, значит функция 1/x является БМ при $x \to +\infty$. Тогда, согласно доказанной лемме $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

<u>Теорема (критерий существования конечного предела в терминах БМ).</u> Пусть $f : E \to R$, x_0 - предельная для E, тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; f(x) = A + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, значит

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Обозначив $\alpha(x) = f(x) - A$ приходим к определению того, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ и, в то же время, представление $f(x) = A + \alpha(x)$.

Достаточность. Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A$$

14. Понятие непрерывности функции.

<u>Понятие непрерывности функции.</u> Функция $f : E \to R$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0)) \; \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0)) \; \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

<u>Лемма о связи непрерывности и предела.</u> Пусть $f : E \to R$, $x_0 \in E$. Для того чтобы функция $f : E \to R$ была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна x_0.
Доказательство. Необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда

$$\forall V(f(x_0)) \; \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

В частности,

$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall V(f(x_0)) \ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что

$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

и мы приходим к факту непрерывности f(x) в точке x_0.
Теперь докажем второе утверждение.
Если x_0 не является предельной точкой множества E, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме x_0, точек из E. А тогда если ε > 0, то

$$x \in U(x_0) \cap E \ \Rightarrow (x = x_0) \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

что и завершает доказательство.

Пример. Рассмотрим в качестве функции тождественную константу, то есть f(x) = c, c ∈ R. Докажем, что она непрерывна в любой точке x_0 ∈ R. Пусть ε > 0, тогда неравенство

$$|c - c| < \varepsilon$$

справедливо для любого δ > 0 и любой точки x_0, что и завершает доказательство.

Пример. Аналогично докажем, что функция f(x) = x непрерывна в любой точке x_0 ∈ R, ведь неравенство

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

верно как только $|x - x_0| < \delta = \varepsilon.$

Определение непрерывности функции на множестве. Функция f : E → R называется непрерывной на множестве D ⊂ E, если она непрерывна в каждой точка множества D.

Замечание о перестановочности операций взятия предела и функции. С точки зрения геометрии, непрерывность функции, например на отрезке [a, b] может трактоваться так: график функции на этом отрезке можно нарисовать, не отрывая ручки от бумаги.
Кстати, непрерывные функции, и только они перестановочны с операцией взятия предела, ведь только для них

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0),$$

где последний переход справедлив в силу доказанной выше непрерывности функции x.

15. Классификация точек разрыва.

Определение точки разрыва. Пусть f : E → R. Если $x_0 \in$ R - предельная для E и f не непрерывна в точке x_0, то точка x_0 называется точкой разрыва для функции f.

Лемма о характеристике непрерывности в терминах односторонних пределов. Пусть f : E → R и x_0 - предельная для E. Если существуют (в смысле определения) односторонние пределы $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0 - 0)$, то непрерывность функции в точке равносильна равенству

$$f(x_0+0) = f(x_0-0) = f(x_0)$$

Если существует (в смысле определения) лишь один из односторонних пределов, то непрерывность функции f в точке равносильна равенству

$$f(x_0 \pm 0) = f(x_0)$$

Доказательство. (Через существование предела в точке через односторонние и связь непрерывности и предела $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Лемма о связи непрерывности и предела. Пусть f : E → R, $x_0 \in$ E. Для того чтобы функция f : E → R была непрерывной в точке x_0, предельной для E, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Если точка x_0 не является предельной для E, то f непрерывна x_0.
Доказательство. Необходимость. Пусть функция f непрерывна в точке x_0, предельной для E, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0)).$$

В частности,

$$\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

Тем самым, мы пришли к тому, что $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Достаточность. Пусть $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, тогда

$$\forall V(f(x_0))\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

Так $f(x_0) \in V(f(x_0))$, то на самом деле выполняется и то, что

$$\forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

и мы приходим к факту непрерывности f(x) в точке x_0.
Теперь докажем второе утверждение.
Если x_0 не является предельной точкой множества E, то существует окрестность $U(x_0)$, не содержащая других, кроме x_0, точек из E. А тогда если ε > 0, то

$$x \in U(x_0) \cap E \;\Rightarrow (x = x_0) \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

что и завершает доказательство.

<u>Критерий существования предела через односторонние.</u> Пусть f : E → R и x_0 ∈ R - предельная точка для множеств

$$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$$

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ε > 0, тогда

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

В частности,

$$\forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = A$. Аналогично,

$$\forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

то есть $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = A$

Достаточность. Пусть ε > 0, тогда

$$\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta_1 \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Аналогично,

$$\exists \delta_2 > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta_2 \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, тогда выполнены оба неравенства, а значит

$$\forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

что и доказывает утверждение.ЧТД.

<u>Определение устранимого разрыва.</u> Пусть f : E → R и x_0 ∈ R. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, но значение функции в точке x_0 либо не определено, либо отличается от A, то эта точка называется точкой устранимого разрыва функции f.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ и точку x = 3. Ясно что предел f при x -> 3 равен 6, но функция не определена в точке x = 3. Тем самым, x = 3 - это точка устранимого разрыва функции f.

Определение разрыва 1-ого рода (скачка). Пусть f : E → R. Если существуют односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) \in R$, но

$$f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода или скачком.

Пример. Рассмотрим функцию f(x) = sign x. Точка $x_0 = 0$, очевидно, является точкой разрыва первого рода функции f, ведь, как мы знаем

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1, \qquad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = 1$$

(опечатка)

Определение разрыва 2-ого рода. Пусть f : E → R. Если не существует хотя бы одного из односторонних пределов $f(x_0 \pm 0)$ в R, то точка x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Пример. Пусть f(x) = ln x. Точка $x_0 = 0$ - точка разрыва второго рода, так как правосторонний предел в этой точке равен −∞.

16. Локальные свойства непрерывных функций.

Понятие непрерывности функции. Функция f : E → R называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

Теорема о пяти локальных свойствах непрерывной функции. Пусть функция f : E → R непрерывна в точке x_0, тогда:
(а) Функция f(x) ограничена в некоторой окрестности x_0
(б) Если $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что в $U(x_0) \cap E$ знаки f(x) и $f(x_0)$ совпадают.

Пусть кроме того $g : E \to R$ непрерывна в точке x_0, тогда:
(в) Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0
(г) Функция $f(x)g(x)$ непрерывна в точке x_0
(д) Функция $f(x)/g(x)$ непрерывна в точке x_0, если $g(x_0)$ не равно 0
Доказательство. Первые 2 пункта следуют из локальных свойств функций, имеющих предел.
(в) Если x_0 - не предельная точка для E, то функция $f(x) + g(x)$, чья область определения это множество E, автоматически непрерывна в точке x_0. Если же точка x_0 - предельная точка для E, то, используя определение непрерывности через предел, а также арифметические свойства пределов

$$f(x) + g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0)$$

что и доказывает непрерывность суммы. (остальное аналогично).

<u>Теорема о непрерывности композиции.</u> Пусть $f : E_1 \to E_2$, $g : E_2 \to R$, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E_1$, а функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in E_2$. Тогда функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.
Доказательство. Так как $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то

$$\forall V(g(y_0))\ \exists U(y_0) : \forall y \in U(y_0) \cap E_2 \quad g(y) \in V(g(y_0))$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f(x_0) = y_0$, то по $U(y_0)$

$$\exists W(x_0) : \forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad f(x) \in U(y_0)$$

и, так как $f : E_1 \to E_2$, то $f(x) \in U(y_0) \cap E_2$, откуда

$$\forall x \in W(x_0) \cap E_1 \quad g(f(x)) \in V(g(f(x_0)))$$

что и доказывает непрерывность $g(f(x))$ в точке x_0.

17. Теорема Вейерштрасса

<u>Понятие непрерывности функции.</u> Функция $f : E \to R$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

<u>Лемма о замкнутости отрезка.</u> Пусть $x_n \in [a, b]$ - сходящаяся последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Допустим противное, пусть A не принадлежит [a, b]. Тогда при ε = min(|a − A|, |b − A|) в ε-окрестности точки A нет точек из отрезка [a, b], а значит и членов последовательности x_n, что невозможно согласно лемме о свойствах последовательностей имеющих предел. Приходим к противоречию.

<u>Теорема Вейерштрасса.</u> Пусть f ∈ C[a, b]. Тогда:
(а) f ограничена на [a, b].
(б) f достигает на [a, b] наибольшего и наименьшего значений.
Доказательство. (а) От противного, пусть f, например, не ограничена сверху. Тогда существует последовательность x_n ∈ [a, b], что

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Так как x_n ограничена, то, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса,

$$\exists x_{n_k} : x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0.$$

Согласно лемме о замкнутости отрезка x_0 ∈ [a, b]. Так мы приходим к противоречию с непрерывностью f в точке x_0 ∈ [a, b]: с одной стороны, из непрерывности следует, что

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0) \in \mathbb{R}$$

а с другой стороны, из леммы о пределе подпоследовательности

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

(для ограниченности снизу аналогично)
(б) От противного. Пусть, например, супремум не достигается:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x), \quad f(x) \neq M \quad \text{при} \quad x \in [a, b]$$

Тогда функция

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

положительна на [a, b] и, кроме того, по теореме о локальных свойствах непрерывной функции, непрерывна на [a, b]. Значит, по доказанному в первом пункте, функция g(x) ограничена. Тогда существует число $M_1 > 0$, что $g(x) < M_1$ на [a, b]. В то же время, при x [a, b]

$$\frac{1}{M - f(x)} < M_1 \;\Leftrightarrow\; M - f(x) > \frac{1}{M_1} \;\Leftrightarrow\; f(x) < M - \frac{1}{M_1}$$

что противоречит тому, что $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

18. Теоремы Больцано-Коши.

Понятие непрерывности функции. Функция f : E → R называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

Первая теорема Больцано-Коши. Пусть $f \in C[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда

$$\exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, f(a) > 0, f(b) < 0. Обозначим $a_1 = a$, $b_1 = b$. Разделим $I_1 = [a_1, b_1]$ пополам точкой

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Если $f(c_1) = 0$, то доказательство закончено. Иначе, либо $f(c_1) > 0$, либо наоборот. Из получившихся двух отрезков выберем тот, на концах которого значения функции все так же имеют разный знак. Это значит, что в первом случае в качестве отрезка I_2 выберем отрезок $[c_1, b]$, а во втором - отрезок $[a, c_1]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_2 и b_2.

Продолжаем по индукции. Если построен отрезок $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$, то на шаге n>=2 разделим отрезок I_{n-1} пополам точкой

$$c_{n-1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

Если $f(c_{n-1}) = 0$, то доказательство закончено. Иначе, либо $f(c_{n-1}) > 0$, либо наоборот. В первом случае в качестве отрезка I_n выберем отрезок $[c_{n-1}, b_{c-1}]$, а во втором - $[a_{n-1}, c_{n-1}]$. В любом из двух случаев концы нового отрезка обозначим a_n и b_n.

Так как $a_n, b_n \in [a, b]$, то по теореме Больцано-Вейерштрасса

$$\exists a_{n_k} : a_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} a_0, \quad \exists b_{n_k} : b_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} b_0$$

причем $a_0, b_0 \in [a, b]$, что следует из леммы о замкнутости отрезка. Так как длина отрезка I_1 на каждой итерации уменьшается в 2 раза, то

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

откуда $a_0 = b_0 = x_0 \in [a, b]$. Пользуясь непрерывностью f на [a, b], имеем:

$$f(a_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(x_0), \quad f(b_{n_k}) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(x_0)$$

Так как, по построению, $f(a_{n_k}) > 0,\ f(b_{n_k}) < 0$, то, по теореме о предельном переходе в неравенствах

$$(f(x_0) \geqslant 0) \ \wedge \ (f(x_0) \leqslant 0) \ \Rightarrow \ f(x_0) = 0$$

и теорема доказана.

<u>Вторая теорема Больцано-Коши.</u> Пусть f ∈ C[a, b], f(a) = A, f(b) = B, A < B. Тогда

$$\forall C \in (A, B) \ \exists c \in (a, b) : f(c) = C.$$

Доказательство. Пусть C ∈ (A, B). Рассмотрим функцию

g(x) = f(x) - C

Во-первых, эта функция непрерывна на [a, b] как разность непрерывных функций. Во-вторых,

g(a) = A - C < 0, g(b) = B - C > 0.

Значит, согласно первой теореме Больцано-Коши,

$$\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) - C = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = C$$

что и доказывает теорему.

19. Промежутки.

<u>Определение промежутка.</u> Отрезок, интервал, полуинтервал или луч с концами a, b ∈ R(расширенном) называется промежутком и обозначается ⟨a, b⟩.

<u>Лемма о характеристике промежутка.</u> Следующие утверждения эквивалентны:

(а) E ⊂ R(расширенное) − промежуток.

(б) Если a, b ∈ E, a < b, то [a, b] ⊂ E.

Доказательство. Второе утверждение следует из первого по определению промежутка. Докажем обратное.

Пусть M = sup E, m = inf E. Ясно, что E ⊂ [m, M]. Покажем, что (m, M) ⊂ E. Действительно, если z ∈ (m, M), то, согласно свойству точных граней

$$\exists x, y \in E : \quad x < z < y.$$

Тогда, по условию, [x, y] ⊂ E, а значит z ∈ E, что и доказывает утверждение.

<u>Понятие непрерывности функции.</u> Функция f : E → R называется непрерывной в точке x_0 ∈ E, если

$$\forall V(f(x_0)) \ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

Теорема о сохранении промежутка. Пусть $f \in C(\langle a, b\rangle)$. Тогда

$$f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Доказательство. Пусть $E = f(\langle a, b\rangle)$. Согласно второй теореме Больцано-Коши, если $y_1, y_2 \in E$, $y_1 <= y_2$, то $[y_1, y_2] \subset E$. Тем самым, по только что доказанной лемме, E - промежуток.

Лемма о непрерывном образе отрезка. Пусть $[a, b] \subset R$, $f \in C[a, b]$. Тогда:

$$f([a, b]) = [m, M], \quad m = \min_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \max_{\langle a,b\rangle} f.$$

Доказательство. Согласно теореме о сохранении промежутка,

$$f([a, b]) = \langle m, M\rangle, \quad m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f$$

В то же время, согласно теореме Вейерштрасса, образ отрезка содержит максимальный и минимальный элементы. Эти рассуждения завершают доказательство.

Замечание. Теорема о сохранении промежутка не допускает прямого обращения. Например, разрывная в точке x = 1 функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

образом области определения имеет отрезок [0, 1].

В то же время, если наложить на функцию требование монотонности, то теорема о сохранении промежутка обращается. И правда, если и только если монотонная функция непрерывна, то ее образ не является промежутком.

20. Непрерывность и монотонность функции.

Определение возрастания и убывания функции. Пусть $f : E \to R$. Говорят, что функция f возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Функция f строго возрастает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Функция f убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Функция f строго убывает на E, если

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$$

Определение монотонной функции. Про (строго) возрастающую, (строго) убывающую функцию говорят что она монотонна.

Понятие непрерывности функции. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если

$$\forall V(f(x_0)) \ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0)) \ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

Критерий непрерывности монотонной функции. Пусть f – монотонная на $\langle a, b\rangle$ функция. Тогда:
(а) f не может иметь разрывов второго рода.
(б) Непрерывность f равносильна тому, что множество ее значений - промежуток.
Доказательство. Пусть, например, f возрастает.
(а) Пусть $x_0 \in (a, b\rangle$, $x_1 \in \langle a, x_0)$. В силу возрастания f, имеем

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0), \quad x \in (x_1, x_0)$$

По теореме Вейерштрасса, f имеет предел при $x \to x_0-0$. Согласно теореме о предельном переходе в неравенствах

$$f(x_1) \leqslant f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0)$$

Аналогично доказывается, что для $x_0 \in \langle a, b)$, $x_1 \in (x_0, b\rangle$

$$f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0) \leqslant f(x_1)$$

Тем самым, установлено существование (в R) односторонних пределов, что и доказывает утверждение.
(б) В силу теоремы о сохранении промежутка, в доказательстве нуждается лишь достаточность. Пусть $f(\langle a, b\rangle)$ – промежуток. Докажем непрерывность f в любой точке $x_0 \in (a, b\rangle$ слева. Если это не так, то

$$f(x_0 - 0) < f(x_0)$$

Пусть $y \in (f(x_0 - 0), f(x_0))$. Тогда, если $x_1 \in (a, x_0)$, то

$$y \in [f(x_1), f(x_0)] \subset f(\langle a, b\rangle)$$

а значит y - значение функции. Но, как показано в доказательстве первого пункта

$$f(x) \leqslant f(x_0 - 0) < y, \quad x \in (a, x_0)$$
$$f(x) \geqslant f(x_0) > y, \quad x \in [x_0, b\rangle,$$

а значит f не принимает значение y, что приводит к противоречию. Аналогичным образом доказывается непрерывность f в каждой точке множества ⟨a, b) справа.

<u>Теорема об обратной функции.</u> Пусть f ∈ C(⟨a, b⟩) и строго монотонна

$$m = \inf_{\langle a,b\rangle} f, \quad M = \sup_{\langle a,b\rangle} f.$$

Справедливы следующие утверждения:
(а) f : ⟨a, b⟩ → ⟨m, M⟩ – биекция
(б) f^-1 строго монотонна и имеет тот же характер монотонности, что и f
(в) f^−1 ∈ C(⟨m, M⟩).
Доказательство. Будем считать, что f строго возрастает
(а) В силу строгого возрастания f,

$$(x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle) \wedge (x_1 < x_2) \;\Rightarrow\; (f(x_1) < f(x_2)),$$

откуда f - инъекция. То, что f(⟨a, b⟩) = ⟨m, M⟩следует из теоремы о сохранении промежутка. Итого, f - биекция между указанными множествами.
(б) Пусть $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2),\ y_1 < y_2.$ Тогда, так как $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, то $x_1 < x_2$ в силу строгого возрастания f.
(в) Утверждение следует из прошлого пункта и критерия непрерывности монотонной функции.

21. Первый замечательный предел.

<u>Определение предела функции через ε-δ и неравенства.</u> Пусть f : E → R, x0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают это: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$.

<u>Определение предела функции через ε-δ-окрестности.</u>

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap E \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : f\left(\overset{o}{U}_\delta(x_0)\cap E\right) \subset U_\varepsilon(A).$$

<u>Определение предела функции через окрестности.</u> Пусть f : E → R, x_0 ∈ R - предельная точка для E. Число A ∈ R называется пределом функции f в точке x_0, если

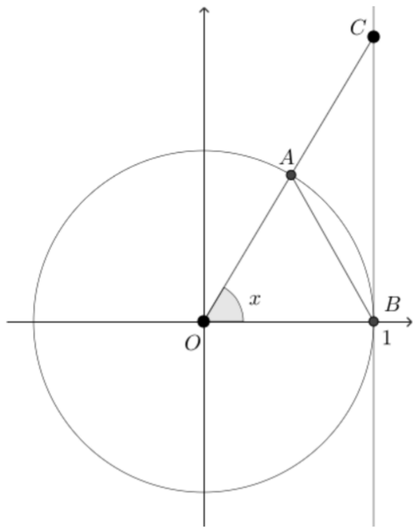
$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : \forall x \in \overset{o}{U}(x_0)\cap E \quad f(x) \in V(A)$$

или, что то же самое,

$$\forall V(A)\ \exists \overset{o}{U}(x_0) : f\left(\overset{o}{U}(x_0)\cap E\right) \subset V(A)$$

<u>Первый замечательный предел.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

Доказательство. Пусть $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Построим единичную окружность с центром в начале координат, а также ось тангенса - CB.



Из геометрических соображений очевидно неравенство

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\triangle OCB}.$$

Вычислив все эти площади, придем к соотношениям

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сект. } OAB} = \frac{\pi x}{2\pi} = \frac{x}{2},$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2}\cdot CB\cdot OB = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

которые приводят к цепочке неравенств

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \;\Leftrightarrow\; \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Поделив эту цепочку на sin x, и приняв во внимание четность входящих в нее функций, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве при x → 0 и докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Действительно, пусть ε > 0, тогда

$$|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| = \left|2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}\right| \leqslant \left|2 \sin \frac{x}{2}\right| < 2\left|\frac{x}{2}\right| = |x| < \varepsilon.$$

Взяв δ = ε, приходим к определению предела. Тем самым, по теореме о сжатой переменной,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

откуда и следует утверждение.

<u>Следствие.</u> Справедливо неравенство

$$|\sin x| \leqslant |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$

Доказательство. Пусть y = arctg x. Тогда:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = 1$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Доказательство. Пусть y = sin x. Тогда:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

22. Второй замечательный предел

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$

Доказательство. Функция

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

определена при $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$. Пусть $x_n \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$, $|x_n| \to +\infty$.

Достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=e.$

1. Пусть, сначала $x_n \in \mathbb{N}$ и пусть $\varepsilon > 0$. Используя определение числа e, имеем:

   $$\exists k_0:\ \forall k>k_0\quad |f(k)-e|<\varepsilon$$

   Так как $x_n \in \mathbb{N}$, то $x_n \to +\infty$ и

   $$\exists n_0:\ \forall n>n_0\quad x_n>k_0$$

   а значит для тех же n

   $$|f(x_n)-e|<\varepsilon$$

   что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=e$

2. Пусть теперь $x_n \to +\infty$. Тогда, начиная с некоторого номера, $x_n > 1$. Не нарушая общности можно считать, что x_n всегда больше 1. Очевидна цепочка неравенств

   $$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}\leqslant\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\leqslant\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1},$$

   которая переписывается в виде

   $$\frac{f([x_n]+1)}{1+\dfrac{1}{[x_n]+1}}\leqslant f(x_n)\leqslant f([x_n])\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)$$

   Так как $[x_n] + 1$ и $[x_n]$ - последовательности натуральных чисел, стремящиеся к $+\infty$, то, по доказанному в предыдущем пункте, имеем

   $$\lim_{n\to\infty} f([x_n]+1)=e,\qquad \lim_{n\to\infty} f([x_n])=e$$

а значит, по теореме о сжатой переменной, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$

3. Пусть $x_n \to -\infty$. Можно считать, что $x_n < -2$. Если положить $y_n = -x_n$, то $y_n \to +\infty$. Так как
$$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{-y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right) f(y_n - 1)$$
и, по доказанному в предыдущем пункте, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n - 1) = e$
4. Наконец, пусть $|x_n| \to +\infty$, $x_n \in R\backslash[-1, 0]$. Если число отрицательных (положительных) членов последовательности x_n конечно, то то $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$). Если же количество положительных и отрицательных членов последовательности бесконечно, но натуральный ряд разбивается на две подпоследовательности n_k и n_p так, что $x_{n_k} \geqslant 0,\ x_{n_p} < 0$. По доказанному,
$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}) = e$$
Пусть $\varepsilon > 0$, тогда
$$\exists k_0 : \forall k > k_0 \quad |f(x_{n_k}) - e| < \varepsilon,$$
$$\exists p_0 : \forall p > p_0 \quad |f(x_{n_p}) - e| < \varepsilon.$$
Положим $n_0 = \max(n_{k_0}, n_{p_0})$. Тогда при $n > n_0$ либо $n = n_k$ при $k > k_0$, либо $n = n_p$ при $p > p_0$, а тогда
$$|f(x_n) - e| < \varepsilon$$
то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = e$.

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Доказательство. Пусть $y = \dfrac{1}{x}$, тогда
$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{|y|\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}.$

В частности: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

Доказательство. В силу соотношения, позволяющего заменить основание логарифма, достаточно доказать второе равенство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx}=1,\quad s\in\mathbb{R}$

Доказательство. Пусть $y=(1+x)^s-1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{sx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{s\ln(1+y)}\frac{s\ln(1+x)}{x}\right)=1$$

<u>Следствие.</u> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

В частности: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Доказательство. Пусть $y=a^x-1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}=\ln a$$

23. Асимптотическое сравнение функций.

<u>Определение.</u> Пусть f, g : E → R, x_0 - предельная для E, и существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что f(x) = α(x)g(x) при $x\in\overset{o}{U}(x_0)\cap E$.

(а) *Если $\alpha(x)$ ограничена на множестве $\overset{o}{U}(x_0)\cap E$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «О большое» от функции $g(x)$ при $x\to x_0$ (или что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x\to x_0$) и пишут*

$$f(x)=O(g(x)),\quad x\to x_0.$$

(б) *Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «о малое» от функции $g(x)$ при $x\to x_0$ (или что функция $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x\to x_0$) и пишут*

$$f(x)=o(g(x)),\quad x\to x_0.$$

(в) *Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x\to x_0$ и пишут*

$$f(x)\sim g(x),\quad x\to x_0.$$

Лемма о сравнении функций в терминах пределов. В обозначениях предыдущего определения, если на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ выполняется $g(x) \neq 0$, то:

(а) $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to x_0$ *равносильно тому, что*

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant C, \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E.$$

В частности, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R},$$

то $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to x_0$.

(б) $f(x) = o(g(x))$ *при* $x \to x_0$ *равносильно тому, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(в) $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to x_0$ *равносильно тому, что*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Доказательство. (а) Пусть f(x) = O(g(x)) при $x \to x_0$. Тогда

$$f(x) = \alpha(x) g(x), \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$$

причем |α(x)| <= C при тех же x. Отсюда, в силу возможности “разделить”

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |\alpha(x)| \leqslant C, \quad x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E.$$

Обратное утверждение сразу следует из условия, если обозначить

$$\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

(б) и (в) по аналогии (делением на g(x)).

Определение. Если f(x) = o(g(x)) при $x \to x_0$ и функция g(x) является бесконечно малой при $x \to x_0$, то функция f(x) называется бм более высокого порядка, чем функция g(x) при $x \to x_0$.

Определение. Если f(x) = o(g(x)) при $x \to x_0$ и функция f(x) является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция g(x) называется бб более высокого порядка, чем функция f(x) при $x \to x_0$.

Лемма об арифметике О-больших и о-малых. При $x \to x_0$ справедливы равенства:

(а) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$.
(б) $O(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.
(в) $o(f(x)) + O(f(x)) = O(f(x))$.
(г) $o(f(x))$ является и $O(f(x))$, но не наоборот.
(д) $g(x)o(f(x)) = o(f(x)g(x))$ и $g(x)O(f(x)) = O(f(x)g(x))$.
Доказательство.(а) Слева стоит функция вида

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x)$$

где α_1 и α_2 - бм при $x \to x_0$. В силу равенства

$$\alpha_1(x)f(x) + \alpha_2(x)f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x))f(x)$$

и того, что $\alpha_1 + \alpha_2$ бесконечно малая при $x \to x_0$, приходим к требуемому.
Остальные пункты доказываются аналогичным образом.

<u>Теорема о замене на эквивалентную.</u> Пусть $f, g, \widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$, $f \sim \widetilde{f}$ при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} fg = \lim_{x \to x_0} \widetilde{f}g$$

Доказательство. Так как при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$ выполняется $f(x) = \alpha(x)\widetilde{f}(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$, то

$$\lim_{x \to x_0} fg = \lim_{x \to x_0} \alpha\widetilde{f}g = \lim_{x \to x_0} \alpha \lim_{x \to x_0} \widetilde{f}g = \lim_{x \to x_0} \widetilde{f}g.$$

<u>Теорема (необходимое и достаточное условие замены на эквивалентную).</u> Функции f, g эквивалентны при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to x_0$$

Доказательство. Необходимость. Пусть f ~ g при $x \to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо равенство

$$f(x) = \alpha(x)g(x)$$

где $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. Тогда

$$f(x) - g(x) = g(x)(\alpha(x) - 1)$$

откуда, так как $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha(x) - 1) = 0$, приходим к тому, что $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.
Достаточность. Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется

$$f(x) - g(x) = \beta(x)g(x),$$

где $\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$. Отсюда f(x) = g(x)(1 + β(x)) или f(x) = g(x)α(x), где α(x) = 1 + β(x) и $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$. А следовательно, f(x) ~ g(x) при x → x_0.

24. Равномерная непрерывность функций.

Понятие непрерывности функции. Функция f : E → R называется непрерывной в точке x_0 ∈ E, если

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : \forall x \in U(x_0) \cap E \quad f(x) \in V(f(x_0))$$

или, что то же самое,

$$\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0) : f\left(U(x_0) \cap E\right) \subset V(f(x_0))$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

Понятие равномерной непрерывности. Пусть f: E → R. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве D ⊂ E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x, x' \in D : \ |x - x'| < \delta \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

(добавить определения через ε-δ и неравенства, ε-δ-окрестности)

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$, очевидно, непрерывна на (0, 1). В то же время, равномерно непрерывной на этом множестве она не является. Чем ближе мы подходим к точке ноль (справа), тем быстрее изменяется значение функции, и маленькие “шаги” не помогают утихомирить это изменение. Если положить

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x'_n = \frac{1}{2n}$$

то $x_n, x'_n \in (0, 1),\ (x_n - x'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Несмотря на уменьшающуюся длину шага, по мере приближения к точке 0 рост функции не только не стабилизируется, но и даже ускоряется.

Лемма о связи равномерной непрерывности и непрерывности функции. Если f равномерно непрерывна на D, то f непрерывна на D.

Теорема Кантора. Непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство. От противного. Пусть f непрерывна, но не равномерно непрерывна на [a, b]. Значит,

$$\exists \varepsilon_0 : \ \forall \delta \ \exists x, x' \in [a,b] : \ |x - x'| < \delta, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon_0$$

Пусть $\delta_n = \frac{1}{n}$, тогда

$$\exists x_n, x'_n \in [a,b] : \ |x_n - x'_n| < \delta_n, \quad \text{но, в то же время,} \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$$

Так как $x_n \in [a, b]$, то, согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, из последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0,$$

где $x_0 \in [a, b]$ согласно лемме о замкнутости отрезка. Но тогда

$$(|x_n - x'_n| < \delta_n) \wedge (\delta_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0) \ \Rightarrow \ (x'_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k})$$

что оказывается несовместимым с неравенством $|f(x_n) - f(x'_n)| \geqslant \varepsilon_0$.
Противоречие.