Коллоквиум №3

1. **4.1 Производная и дифференциал**
   Определение производной функции, примеры вычисления (конечная, бесконечная, не существует). Определение дифференцируемости функции и дифференциала. Теорема о связи производной и дифференцируемости. Лемма о непрерывности дифференцируемой функции. Односторонние производные, пример вычисления.

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Приведем пример.

Пример 40. Вычислить производную функции $f(x) = 5^{1-3x}$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left(5^{1-3x}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{5^{1-3(x_0+h)} - 5^{1-3x_0}}{h} =$$

$$= 5^{1-3x_0} \lim_{h\to 0} \frac{5^{-3h} - 1}{h} = 5^{1-3x_0}(-3\ln 5).$$

Отметим логичным образом возникающее замечание.

Замечание 117. Приведенный пример показывает, что функция f может иметь производную не только в одной точке x_0, но и на некотором, вообще говоря большем множестве.

Теперь рассмотрим пример, в котором производная может принимать бесконечные значения.

Замечание 118. Вычислить производную функции $f(x) = x^{1/3}$ в точке $x_0 = 0$.

$$\left(x^{1/3}\right)'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

Определение 64 (Понятие дифференцируемости функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если существует такое число A, что

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 48 (О связи производной и дифференцируемости). Функция $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную. В этом случае $A(x_0) = f'(x_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, значит

$$f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + o(h), \quad x_0 + h \in \langle a, b\rangle, \quad h \to 0.$$

Поделив на h, получим

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + o(1).$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получаем, что предел правой части равен A, значит

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = A,$$

то есть, согласно определению и введенным обозначениям,

$$f'(x_0) = A = A(x_0).$$

Достаточность. Согласно теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой (25), имеем

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \alpha(h), \quad \alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0, \quad x_0+h \in \langle a,b\rangle,$$

откуда

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + o(h),$$

то есть функция дифференцируема в точке x_0 и

$$A = A(x_0) = f'(x_0).$$

□

Лемма 60 (О непрерывности дифференцируемой функции). Если функция $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a,b\rangle$, то она непрерывна в точке x_0.

Доказательство. В представлении

$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad x_0+h \in \langle a,b\rangle, \quad h \to 0,$$

достаточно перейти к пределу при $h \to 0$. Тогда

$$\lim_{h\to 0} \left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = 0,$$

откуда

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0),$$

что и означает непрерывность функции в точке x_0 (лемма 33). □

Определение 67. Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Предел

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется правосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$.

Аналогично, предел

$$\lim_{h\to 0-0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется левосторонней производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'_-(x_0)$.

Пример вычисления односторонних производных нами, на самом деле, уже показан в примере 41. Более детально к применению односторонних производных мы обратимся при изучении типов экстремумов. Сейчас же завершим изложение данного пункта следующими замечаниямми. Начнем с идейного.

Пример 41. Пусть $f(x) = |x|$ и $x_0 = 0$. Пусть $h > 0$, тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Пусть $h < 0$, тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = -1.$$

Значит, рассматриваемая функция не имеет производной в точке $x_0 = 0$. Впрочем, последнее очевидно и геометрически.

2. **4.2 Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная.** Определение касательной. Лемма об уравнении касательной. Геометрический смысл дифференциала. Пример. Определение вертикальной касательной, пример. Определение односторонних касательных, пример.

Определение 68. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Предельное положение AC секущей AB графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Теперь сформулируем лемму об уравнении касательной.

Лемма 61 (Об уравнении касательной). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Доказательство. Угловой коэффициент, согласно сказанному выше, равен $k_{AC} = f'(x_0)$. Осталось воспользоваться уравнением прямой с заданным коэффициентом наклона и проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$. □

Замечание 127. Рисунок 4 показывает связь приращения функции, производной этой функции, дифференциала и $o(\Delta x)$. Можно сформулировать следующий геометрический смысл дифференциала: дифференциал есть приращение касательной к графику функции, отвечающее приращению аргумента Δx.

Отдельно введем понятие вертикальной касательной – касательной в случае, когда $f'(x_0) = \pm\infty$. Чтобы не упереться в казуистические случаи вроде того, что показан в замечании 123, придется дополнительно потребовать непрерывность рассматриваемой функции.

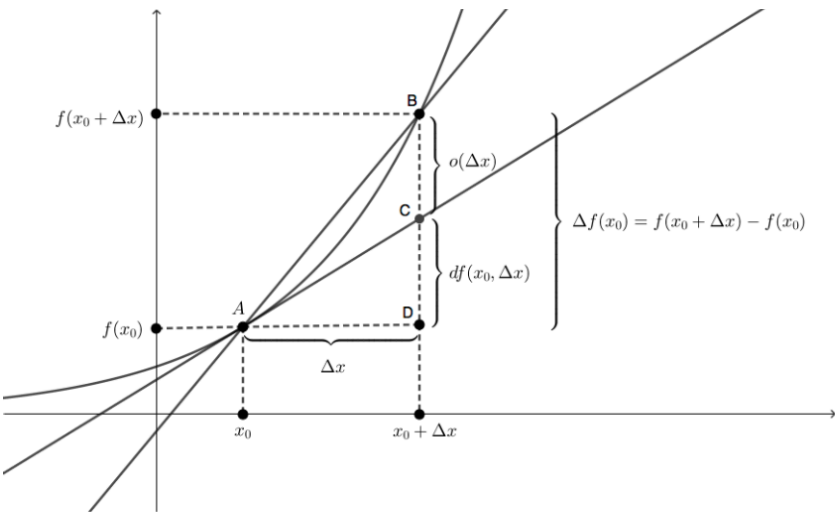

Рис. 4. Касательная и дифференциал

Определение 69. Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$ и $f'(x_0) = \pm\infty$. Прямая $x = x_0$ называется (вертикальной) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Для иллюстрации последнего определения полезно самостоятельно нарисовать картинку и понять происходящее, скажем, на примере функции $f(x) = x^{1/3}$, $x_0 = 0$.

Замечание 128. Аналогично понятиям односторонних производных, можно ввести понятия односторонних касательных. Односторонние касательные помогают охарактеризовать поведение функции в «проблемных» точках.

Так, если $f'(x_0 - 0)$, $f'(x_0 + 0)$ существуют в $\mathbb{R}$ и различны, то в точке x_0 график функции терпит «излом» (например, $f(x) = |x|$).

Если, например, $f'(x_0 - 0) = -\infty$, $f'(x_0 + 0) = +\infty$ и f непрерывна в точке x_0, то в точке x_0 график функции выглядит как «птичка» (например, $f(x) = x^{2/3}$).

Понятно, что описанные ситуации могут комбинироваться. Интересующемуся читателю мы советуем самостоятельно подумать над возможными комбинациями и примерами к ним.

Если хотя бы одной из односторонних производных в точке x_0 нет, то нет и соответствующей односторонней касательной в этой точке.

3. **4.3 Основные правила дифференцирования (производная суммы, произведения и частного)**
   Определения производной и дифференциала функции. Теорема о производной и дифференциале суммы, произведения, частного функций. Примеры.

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 49 (О производной суммы, произведения и частного). Пусть $f, g : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, дифференцируемы в точке x_0. Тогда:

1. Их сумма дифференцируема в точке x_0 и
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. Их произведение дифференцируемо в точке x_0 и
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
3. Их частное дифференцируемо в точке x_0 при условии, что $g(x_0) \neq 0$, и
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Доказательство. Согласно определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad g'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x},$$

причем оба предела конечны.

1. Докажем первый пункт. Так как

$$\Delta(f+g)(x_0) = f(x_0+\Delta x) + g(x_0+\Delta x) - f(x_0) - g(x_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x) - f(x_0) + g(x_0+\Delta x) - g(x_0),$$

то

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta(f+g)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Докажем второй пункт. Так как

$$\Delta(fg)(x_0) = f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x) + f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0),$$

то

$$(fg)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta(fg)(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим первый из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = g(x_0)f'(x_0),$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x_0+\Delta x) = g(x_0)$ в силу непрерывности функции $g(x)$ в точке x_0 (лемма 60). Теперь рассмотрим второй из двух пределов:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= f(x_0) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)g'(x_0).$$

Тем самым,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. Третий пункт предлагается доказать самостоятельно. □

4. **4.3 Основные правила дифференцирования (производная композиции функций и обратной функции)**
   Определения производной и дифференциала функции. Теорема о производной и дифференциале композиции функций, пример. Теорема о производной и дифференциале обратной функции, пример.

> **Определение 63** (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a,b\rangle$. Предел
>
> $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$
>
> если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала)**.** Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 50 (О производной композиции)**.** Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$, $g : \langle c, d\rangle \to \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y), \quad \Delta y \to 0,$$

где в представлении $o(\Delta y) = \alpha(\Delta y)\Delta y$, $\alpha(\Delta y) \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$, можно считать, что $\alpha(0) = 0$.

Положив

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - y_0,$$

можно заметить, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности f (лемма 60). Тогда

$$\begin{gathered} g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + o(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \\ = g'(y_0)(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \\ = g'(y_0)f'(x_0)\Delta x + g'(y_0)o(\Delta x) + o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)). \end{gathered}$$

Так как

$$o(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)),$$

то, используя непрерывность α в нуле и утверждение из замечания 90 легко убедиться (сделайте это), что

$$g'(y_0)o(\Delta x) + \alpha(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x))(f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

а значит композиция $g(f)$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(g(f))'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

$\square$

Теорема 51 (О производной обратной функции)**.** Пусть функции $f : \langle a, b\rangle \to \langle c, d\rangle$ и $f^{-1} : \langle c, d\rangle \to \langle a, b\rangle$ – взаимно обратные, причем f непрерывна в точке $x_0 \in \langle a, b\rangle$, а f^{-1} непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Если f дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то f^{-1} дифференцируема в точке y_0, причем

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Необходимо вычислить

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}.$$

Положим

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0), \quad \Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0).$$

В силу непрерывности функции f в точке x_0 и непрерывности обратной функции f^{-1} в точке y_0, выполнено

$$(\Delta x \to 0) \;\Leftrightarrow\; (\Delta y \to 0).$$

Кроме того, так как функции взаимно обратны, то

$$(\Delta x \neq 0) \;\Leftrightarrow\; (\Delta y \neq 0).$$

Тогда

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

5. **4.4 Таблица производных**
   Определения производной и дифференциала функции, примеры вычисления (конечная, бесконечная, не существует). Теорема о производных простейших функций.

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a,b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Приведем пример.

Пример 40. Вычислить производную функции $f(x) = 5^{1-3x}$ в точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\left(5^{1-3x}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{5^{1-3(x_0+h)} - 5^{1-3x_0}}{h} =$$

$$= 5^{1-3x_0} \lim_{h\to 0} \frac{5^{-3h} - 1}{h} = 5^{1-3x_0}(-3\ln 5).$$

Отметим логичным образом возникающее замечание.

Замечание 117. Приведенный пример показывает, что функция f может иметь производную не только в одной точке x_0, но и на некотором, вообще говоря большем множестве.

Теперь рассмотрим пример, в котором производная может принимать бесконечные значения.

Замечание 118. Вычислить производную функции $f(x) = x^{1/3}$ в точке $x_0 = 0$.

$$\left(x^{1/3}\right)'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty.$$

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 52 (Производные простейших функций). Справедливы следующие соотношения:

	f	f'	Область определения f'
1.	1	0	$\mathbb{R}$
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$.	смотри описание выше
3.	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
4.	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
5.	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
6.	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$
7.	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
8.	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$
9.	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
10.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
11.	$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
12.	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
13.	a^x	$a^x\ln a$	$\mathbb{R}$
14.	e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Доказательство. 1. Покажем, что $(1)'=0$, $x\in\mathbb{R}$. Действительно, так как

$$\Delta f(x_0)=1-1=0,\quad x_0\in\mathbb{R},$$

то

$$(1)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=0.$$

В силу произвольности x_0, получаем требуемое.
2. Покажем, что $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $x\in\mathbb{R}$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0)=(x_0+\Delta x)^\alpha-x_0^\alpha=x_0^\alpha\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha-1\right),\quad x_0>0,$$

то

$$(x^\alpha)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^\alpha\left(\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha x_0^{\alpha-1}\Delta x}{\Delta x}=\alpha x_0^{\alpha-1}.$$

В силу произвольности x_0, получаем требуемое. Остальные случаи остаются в качестве упражнения.
3. Покажем, что $(\sin x)'=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$. Так как

$$\Delta f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2},\quad x_0\in\mathbb{R},$$

то

$$(\sin x)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}2\cdot\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x_0+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2\cdot\frac{\dfrac{\Delta x}{2}\cos\dfrac{2x_0+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x_0.$$

4. Данный пункт доказывается аналогичным предыдущему образом.

5. Покажем, что $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. По формуле производной частного (теорема 49) и только что доказанным формулам производных функций $\sin x$ и $\cos x$, имеем

$$(\operatorname{tg} x)'(x_0) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'(x_0) = \frac{(\sin x)'(x_0)\cos x_0 - \sin x_0 (\cos x)'(x_0)}{\cos^2 x_0} =$$

$$= \frac{\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}.$$

6. Данный пункт доказывается аналогичным предыдущему образом.

7. Покажем, что $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (51). Обратная функция такова: $x = \sin y$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Все условия теоремы о производной обратной функции выполнены, а значит

$$(\arcsin x)'(x_0) = \frac{1}{(\sin y)'(y_0)} = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

8-10. Данные пункты доказывается аналогичным предыдущему образом.

11. Покажем, что $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $x_0 > 0$, тогда, так как

$$\Delta f(x_0) = \log_a (x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a \left(\frac{x_0 + \Delta x}{x_0}\right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right),$$

то

$$(\log_a |x|)'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x_0 \Delta x \ln a} = \frac{1}{x_0 \ln a}.$$

Аналогично рассматривается случай $x_0 < 0$.

12. Данный пункт – прямое следствие предыдущего.

13. Покажем, что $(a^x)' = a^x \ln a$, $x \in \mathbb{R}$. Воспользуемся теоремой о производной обратной функции (51). Обратная функция такова: $x = \log_a y$, $y > 0$. Все условия теоремы выполнены, а значит

$$(a^x)'(x_0) = \frac{1}{(\log_a y)'(y_0)} = \frac{1}{\dfrac{1}{y_0 \ln a}} = y_0 \ln a = a^{x_0} \ln a.$$

14. Данный пункт – прямое следствие предыдущего. □

6. **4.5 Немного о параметрически заданной функции**

Определения производной и дифференциала функции. Определение параметрически заданной функции, пример. Теорема о производной функции, заданной параметрически. Пример.

> **Определение 63 (Понятие производной функции).** Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
> если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Пусть T – множество, $\varphi, \psi : T \to \mathbb{R}$. Рассмотрим отображение

$$\gamma(t) = \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} : T \to \mathbb{R}^2.$$

Определяет ли введенная система y как функцию f от x? Если да, то говорят, что **система задает функцию f параметрически**. Переменную t при этом называют параметром.

Замечание 132. Понятно, что в общем случае ответ на поставленный вопрос отрицательный. Окружность, задаваемая системой

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

не является графиком какой-либо функции.

В то же время, если функция φ обратима, то ответ положительный:

$$t = \varphi^{-1}(x) \ \Rightarrow\ y = \psi(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in \varphi(T).$$

Иными словами, $f = \psi(\varphi^{-1})$.

Изучим способ нахождения производной функции f.

Теорема 53 (О производной функции, заданной параметрически). Пусть $T = \langle a, b\rangle$, $t \in T$, $\varphi \in C(T)$, φ строго монотонна, φ, ψ дифференцируемы в точке t, $\varphi'(t) \neq 0$, $f = \psi(\varphi^{-1})$ – параметрически заданная функция. Тогда f дифференцируема в $x = \varphi(t)$ и

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Доказательство. По правилам дифференцирования композиции (50) и обратной (51) функции, имеем

$$f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

$\square$

7. **4.6 Французские теоремы (Ферма, Ролля)**
Определения точек локального максимума, минимума и экстремума, примеры. Теорема Ферма, геометрический смысл, пример. Теорема Ролля, геометрический смысл, пример.

Определение 70 (Понятия локального максимума и минимума). Пусть $f : E \to \mathbb{R}$.

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) :\ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow\ f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Точка $x_0 \in E$ называется точкой локального минимума (строгого локального минимума) функции f, если

$$\exists \overset{o}{U}(x_0) :\ \forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E \ \Rightarrow\ f(x) \ge f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)).$$

Итак, x_0 – точка локального максимума, если в некоторой окрестности этой точки значения функции не больше, чем в самой точке. Если же в некоторой проколотой окрестности этой точки значения функции меньше, чем в самой точке, то x_0 – точка строгого локального максимума. На рисунке 5 видно, что точка $x = 0$ – точка стро-

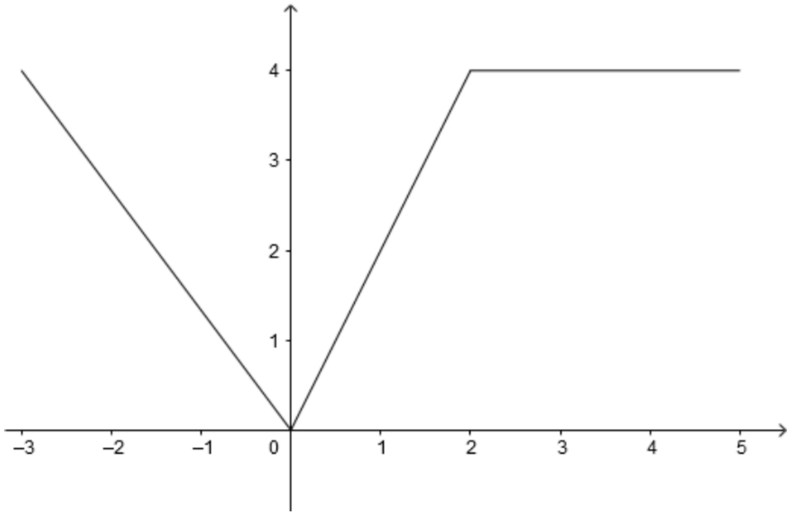

Рис. 5. Точки максимума и минимума

гого локального минимума, а точка $x = -3$ – точка строгого локального максимума. Все точки из множества $(2, 5]$ можно считать как точками локального максимума, так и точками локального минимума. Точка $x = 2$ – точка локального максимума (не строгого!).

Определение 71 (Понятие точек экстремума). Точки локального максимума (строго локального максимума) и точки локального минимума (строгого локального минимума) называются точками экстремума (строгого экстремума).

Теорема 54 (Ферма). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Для определенности будем полагать, что x_0 – точка локального максимума. При достаточно малом $\Delta x < 0$, из определения точки локального максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

При достаточно малом $\Delta x > 0$, из определения точки максимума получаем, что

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах (13),

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Сравнивая два неравенства, приходим к тому, что $f'(x_0) = 0$. $\square$

Теорема 55 (Ролля). Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), причем $f(a)=f(b)$. Тогда

$$\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi)=0.$$

Доказательство. Если f постоянна на отрезке $[a,b]$, то утверждение, очевидно, верно.

Если f не постоянна, то, по теореме Вейерштрасса (28), на отрезке $[a,b]$ существуют точки, в которых функция принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения, причем $M \neq m$. Значит, хотя бы одно из этих значений принимается внутри интервала (a,b) в некоторой точке ξ. Значит, по теореме Ферма (54), $f'(\xi)=0$. □

Конечно, не обойтись без замечания.

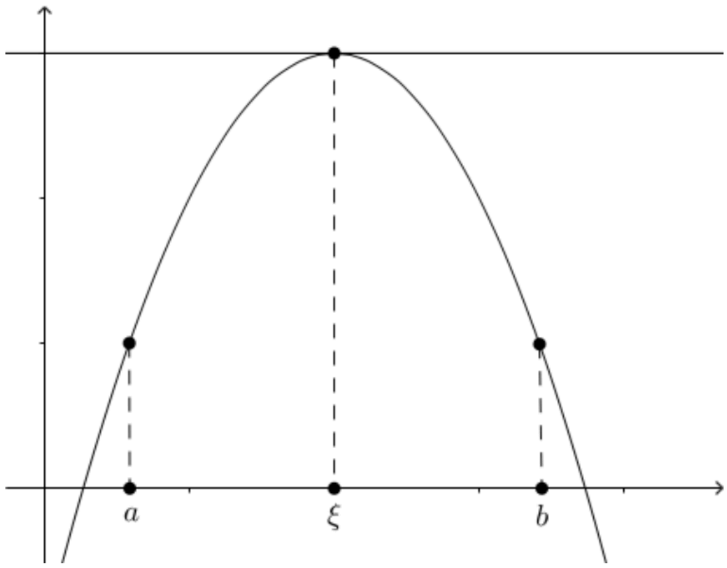

Рис. 6. Теорема Ролля

8. **4.6 Французские теоремы (Лагранжа)**
Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лагранжа, геометрический смысл, пример. Критерий монотонности функции, пример. Критерий постоянства функции.

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f:\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0+h \in \langle a,b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h)=Ah.$$

Теорема 56 (Лагранжа). Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда

$$\exists \xi \in (a,b): \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Доказательство. Пусть

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a).$$

Прямым вычислением проверяется, что $g(a) = g(b)$, причем $g \in C[a,b]$ как разность непрерывных функций, и дифференцируема на (a,b) как разность дифференцируемых функций. Значит, согласно теореме Ролля (55),

$$\exists \xi \in (a,b): \ g'(\xi) = 0,$$

откуда

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \ \Leftrightarrow \ f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

□

Замечание 135. Геометрически теорема Лагранжа означает, что на интервале (a,b) существует касательная к графику функции $y = f(x)$, параллельная секущей, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, см. рисунок 7.

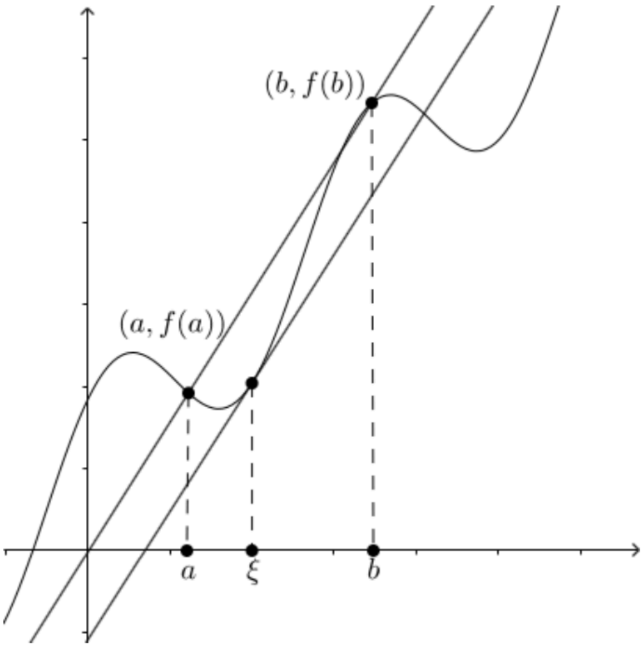

Рис. 7. Теорема Лагранжа

Теорема 57 (Критерий монотонности функции). Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. Для того чтобы функция f возрастала (убывала) на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) на (a, b).
2. Для строгого возрастания (строгого убывания) функции на $[a, b]$ достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает.
Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in (a, b)$, тогда при $\Delta x \neq 0$ имеем

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

значит, по теореме о предельном переходе в неравенстве (13),

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа (56) найдется $\xi \in (a, b)$, что

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Так как $f'(x) \geq 0$ на (a, b) и $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$. Так как x_1, x_2 – произвольные, получаем определение возрастающей функции.

Если же $f'(x) > 0$ на (a, b), то $f(x_2) > f(x_1)$ и мы приходим к определению строго возрастающей функции. □

Теорема 58 (Критерий постоянства функции). Пусть $f \in C[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Для того чтобы f была постоянной на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на (a, b).

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Если $f'(x) = 0$ на (a, b), то для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, по теореме Лагранжа (56)

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

то есть $f(x_2) = f(x_1)$. В силу произвольности точек x_1, x_2 функция постоянна. □

9. **4.6 Французские теоремы (Коши)**
Определения производной и дифференциала функции. Теорема о пределе производной, пример. Теорема Коши, геометрический смысл, пример.

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 59 (О пределе производной). Пусть $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Если

$$A = \lim_{x\to a+0} f \in \overline{\mathbb{R}},$$

то $f'_+(a) = A$.

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа (56), если $\Delta x > 0$, то

$$f(a+\Delta x) - f(a) = f'(\xi)\Delta x, \quad \xi \in (a, a+\Delta x).$$

Осталось устремить Δx к нулю и воспользоваться условием теоремы и определением односторонней производной. □

Теорема 60 (Коши). Пусть $f, g \in C[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b). Тогда $\exists \xi \in (a,b)$, что выполняется

$$(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi).$$

Если, кроме того, $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = g(x)\,(f(b) - f(a)) - f(x)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Прямые вычисления показывают, что $\varphi(a) = \varphi(b)$. Кроме того, из условий теоремы следует, что $\varphi \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Значит, по теореме Ролля (55) найдется $\xi \in (a,b)$, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть

$$g'(\xi)\,(f(b) - f(a)) = f'(\xi)\,(g(b) - g(a))\,.$$

Если $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то $g(b) \neq g(a)$ (иначе по теореме Ролля нашлась бы точка из интервала (a,b), в которой производная бы обращалась в ноль), а значит

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

Замечание 139. Геометрическая интерпретация к теореме Коши та же, что и к теореме Лагранжа. Пусть $g'(t) \neq 0$ на (a,b). Тогда, и это можно доказать, либо $g'(t) > 0$ на (a,b), либо $g'(t) < 0$ на (a,b), а значит система

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

задает функцию $y = f(g^{-1}(x))$ параметрически. Тогда в выражении

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

слева стоит коэффициент наклона хорды, соединяющей концы графика функции $y = f(g^{-1}(x))$, а справа – коэффициент наклона касательной к графику этой функции в некоторой промежуточной точке ξ (см. теорему 53).

10. **4.6 Французские теоремы (Лопиталя)**
Определения производной и дифференциала функции. Теорема Лопиталя, геометрический смысл, пример.

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 61 (Правило Лопиталя). Пусть f, g дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0$ на (a, b) и

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда в любом из двух случаев:

1. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to a+0} |g(x)| = +\infty.$

выполняется

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Доказательство. Докажем первый пункт. Так как

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0,$$

то функции f и g можно доопределить по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $c \in (a, b)$. Тогда $f, g \in C[a, c]$ и дифференцируемы на (a, c). Так как $g'(x) \neq 0$, то, согласно теореме Коши (60),

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < \xi < x < c.$$

При $x \to a + 0$ выполняется $\xi \to a + 0$, а значит

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A \ \Rightarrow \ \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Докажем второй пункт. Пусть $A \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b - a)$, что при $x \in (a, a + \delta_0)$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

В частности, при $x \in (a, a + \delta_0)$ функция $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ограничена, то есть

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq M.$$

Пусть $x \in (a, a + \delta_0)$, рассмотрим преобразования

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \frac{g(x) - g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} =$$

$$= \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right) \cdot \frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}.$$

На отрезке $[x, a+\delta_0]$ функции f и g непрерывны, а на интервале $(x, a+\delta_0)$ дифференцируемы, значит, по теореме Коши (60),

$$\frac{f(x)-f(a+\delta_0)}{g(x)-g(a+\delta_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad a < x < \xi < a+\delta_0.$$

Так как $|g(x)| \to +\infty$, то по ранее заданному ε, можно найти $\delta_1 < \delta_0$, что при $x \in (a, a+\delta_1)$ справедливы оценки

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда, при $x \in (a, a+\delta_1)$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| + \left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)} \cdot \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| \leq$$
$$\leq \varepsilon + \varepsilon \cdot M + \varepsilon = \varepsilon(2+M).$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое.

Пусть теперь $A = +\infty$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $\delta_0 < (b-a)$, что при $x \in (a, a+\delta_0)$ справедливо неравенство

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Так как $\lim\limits_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$, можно найти $\delta_1 < \delta_0$ так, чтобы при $x \in (a, a+\delta_1)$ выполнялось

$$\left|\frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{f(a+\delta_0)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Используя аналогичные выкладки, что и ранее, при $x \in (a, a+\delta_1)$ имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > \left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

В силу произвольности ε отсюда следует требуемое.

Случай $A = -\infty$ доказывается аналогично предыдущему пункту и остается в качестве упражнения. □

Замечание 144. Геометрически правило Лопиталя можно коротко, но не очень точно трактовать так: предел отношения функций в случае «неопределенности» равен пределу отношения коэффицентов наклона касательных, если последний существует.

Приведем, наконец, пример.

Пример 43. Вычислить предел

$$\lim_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Так как

$$(\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln \sin x},$$

то, в силу непрерывности экспоненты, достаточно вычислить предел

$$\lim_{x \to \pi/2} (\operatorname{tg} x \ln \sin x) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\ln \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = 0$$

Значит, значением предела будет $e^0 = 1$.

11. **4.7 Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница**
Определения производной и дифференциала функции. Определения производной и дифференциала высшего порядка, примеры. Определение классов гладкости. Теорема о формуле Лейбница.

> **Определение 63** (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел
> $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$
> если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

> **Определение 65** (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,
> $$df(x_0)(h) = Ah.$$

> **Определение 72** (Производная высшего порядка). Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции f. Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых
> $$E_{n-1} \cap (x-\delta, x+\delta)$$
> – невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим
> $$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$
> Введенная функция называется производной порядка n, или, короче, n-ой производной функции f. При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n.

> **Определение 74** (Дифференциал высшего порядка). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина
> $$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$
> называется n-ым дифференциалом функции f в точке x_0, соответсвующим приращению h.

> **Определение 73** (Классы гладкости). Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $f^{(n)} : E \to \mathbb{R}$. Если $f^{(n)} \in C(E)$, то f называется n раз непрерывно дифференцируемой на E и обозначается
> $$f \in C^n(E).$$
> Через $C^\infty(E)$ обозначается класс бесконечно дифференцируемых на E функций – функций, заданных на E, и имеющих на E производные всех порядков.

Теорема 62 (Формула Лейбница). Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ имеют $n \in \mathbb{N}$ производных в точке $x_0 \in E$. Тогда

1. Производная линейна, а именно:
$$(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
2. Справедлива формула Лейбница:
$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Доказательство. Доказательства проводятся индукцией по n. Доказательство формулы Лейбница идентично доказательству формулы бинома Ньютона, где в качестве базы выступает, например, формула производной произведения. □

12. **4.8 Формула Тейлора (+ 4.9 Разложение некоторых функций по формуле Маклорена)**
Определения производной и дифференциала функции. Определения производной и дифференциала высшего порядка. Определение многочлена Тейлора. Теорема о формуле Тейлора с остатком в форме Пеано. Теорема о единственности многочлена Тейлора. Примеры: e^x, sin(x), ln(1+x).

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, x_0, $x_0 + h \in \langle a, b \rangle$. Предел
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,
$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Определение 72 (Производная высшего порядка). Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции f. Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых
$$E_{n-1} \cap (x - \delta, x + \delta)$$
– невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим
$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$
Введенная функция называется производной порядка n, или, короче, n-ой производной функции f. При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n.

Определение 74 (Дифференциал высшего порядка). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина
$$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$
называется n-ым дифференциалом функции f в точке x_0, соответсnвующим приращению h.

Определение 75 (Понятие многочлена Тейлора). Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

Теорема 63 (Формула Тейлора с остатком в форме Пеано). Пусть функция f в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(x) = P_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = f(x) - P_n(x, x_0)$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что

$$\varphi(x) = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

а для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Так как функция φ имеет n производных в точке x_0, то все производные до $(n-1)$ порядка включительно определены как минимум на некотором промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$, причем $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Используем теорему Коши (60) несколько раз, учитывая, что $x \in \langle \alpha, \beta \rangle$, и что, согласно лемме 62,

$$\varphi^{(k)}(x_0) = 0, \quad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

Имеем:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{(x - x_0)^n - (x_0 - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi'(\xi_1) - \varphi'(x_0)}{n((\xi_1 - x_0)^{n-1} - (x_0 - x_0)^{n-1})} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi''(\xi_2)}{n(n-1)(\xi_2 - x_0)^{n-2}} = \ldots =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - \varphi^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

где ξ_1 лежит между x и x_0, ξ_2 между ξ_1 и x_0, и так далее, ξ_{n-1} между ξ_{n-2} и x_0. Предпоследнее равенство верно в силу существования $\varphi^{(n)}(x_0)$ и того, что

$$(x \to x_0) \ \Rightarrow \ (\xi_{n-1} \to x_0).$$

□

Теорема 64 (О единственности многочлена Тейлора)**.** Если существует многочлен

$$Q_n(x, x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

удовлетворяющий условию

$$f(x) = Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

то он единственен.

Доказательство. Сначала определим коэффициент a_0 из равенства

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (Q_n(x, x_0) + o((x - x_0)^n)) = a_0.$$

Далее, найдем коэффициент a_1 следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^{n-1} + o((x - x_0)^{n-1})\right) = a_1.$$

Продолжая, найдем коэффициент a_n:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} (a_n + o(1)) = a_n.$$

$\square$

① Показательная функция

Пусть $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Пусть $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$. Так как $f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a$, $f^{(n)}(0) = \ln^n a$, то

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{\ln^2 a}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

② Синус и косинус

Пусть $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1},$$

то

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0.$$

Пусть $y = \cos x$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right), \quad f^{(2n-1)}(0) = 0, \quad f^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$

то

$$y = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

③ Логарифм

Пусть $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

то

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

13. **4.8 Формула Тейлора (+ 4.9 Разложение некоторых функций по формуле Маклорена)**
Определения производной и дифференциала функции. Определения производной и дифференциала высшего порядка. Определение многочлена Тейлора. Теорема о характеристике остаточного члена в формуле Тейлора. Следствия об остаточных членах в формах Лагранжа и Коши. Примеры: (1+x)^a, arctg(x).

> **Определение 63** (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b\rangle$. Предел
>
> $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$
>
> если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

> **Определение 65** (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,
>
> $$df(x_0)(h) = Ah.$$

> **Определение 72** (Производная высшего порядка). Пусть $(n-1) \in \mathbb{N}$ и определена функция $f^{(n-1)} : E_{n-1} \to \mathbb{R}$ – производная $(n-1)$-ого порядка функции f. Обозначим через E_n множество точек $x \in E_{n-1}$, для которых
>
> $$E_{n-1} \cap (x - \delta, x + \delta)$$
>
> – невырожденный промежуток при некотором $\delta > 0$, и в которых функция $f^{(n-1)}$ дифференцируема. Положим
>
> $$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad x \in E_n.$$
>
> Введенная функция называется производной порядка n, или, короче, n-ой производной функции f. При этом функция f называется n раз дифференцируемой на множестве E_n.

> **Определение 74** (Дифференциал высшего порядка). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $f : E \to \mathbb{R}$ – n раз дифференцируемая в точке $x_0 \in E$ функция, $h \in \mathbb{R}$. Величина
>
> $$d^n f(x_0)(h) = d\left(d^{n-1} f(x)(h)\right)(h),$$
>
> называется n-ым дифференциалом функции f в точке x_0, соответсвующим приращению h.

Определение 75 (Понятие многочлена Тейлора). Пусть функция f имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Многочлен

$$P_n(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называется многочленом Тейлора порядка n функции f в точке x_0. В случае $x_0 = 0$ многочлен Тейлора часто называют многочленом Маклорена.

Теорема 65 (О характеристике остаточного члена). Пусть f непрерывна вместе со своими первыми n производными на отрезке с концами x_0 и x, а во внутренних точках этого отрезка имеет производную порядка $(n+1)$. Тогда для любой функции φ, непрерывной на данном отрезке и имеющей отличную от нуля производную во внутренних точках данного отрезка, найдется точка ξ, лежащая между x_0 и x, такая, что

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

Доказательство. Пусть на отрезке I с концами x_0 и x введена функция $F(t) = f(x) - P_n(x, t)$. F непрерывна на данном отрезке, имеет производную в его внутренних точках и записывается как

$$F(t) = f(x) - \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n\right).$$

Прямым вычислением проверяется, что

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Легко заметить, что $F(x) = 0$, а $F(x_0) = r_n(x, x_0)$. Применяя на отрезке I к функциям $F(t)$ и $\varphi(t)$ теорему Коши (60), получаем

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

откуда

$$r_n(x, x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!} f^{(n+1)}(\xi)(x - \xi)^n.$$

□

Получим несколько важных следствий из доказанной (искусственной) теоремы. Естественный аналог доказанной теоремы мы получим при изучении интегрального исчисления.

Следствие 20 (Остаточный член в форме Лагранжа). Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Лагранжа:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ лежит между x и x_0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. □

Следствие 21 (Остаточный член в форме Коши). Справедливо следующее соотношение для остаточного члена – остаточного члена в форме Коши:

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0),$$

где ξ лежит между x и x_0.

Доказательство. Для доказательства достаточно в предыдущей теореме положить $\varphi(t) = (x - t)$. □

4 Бином

Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$. Так как при $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, \quad y^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1)),$$

то

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

5 Арктангенс

Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$. В силу предыдущего примера легко заметить, что

$$\frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n),$$

откуда

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 + \ldots + (-1)^n (x^2)^n + o((x^2)^n)$$

и

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{2n} x^{2n} + o(x^{2n}).$$

С другой стороны, так как f бесконечное число раз дифференцируема в точке $x_0 = 0$, то, в силу следствия 19 из теоремы о единственности многочлена Тейлора,

$$\varphi(0) = f'(0),\ \varphi'(0) = 2f''(0),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(0) = nf^{(n)}(0),$$

откуда получается разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

14. **4.10 Исследование функции с помощью производных (монотонность и экстремумы)**
Теорема о связи монотонности и производной (без док-ва). Теорема о необходимом условии экстремума. Теорема о первом достаточном условии экстремума. Классификация точек экстремума. Теорема о втором достаточном условии экстремума.

Теорема 68 (О связи монотонности и производной). Пусть функция $f \in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда справедливы соотношения:

$$f'(x) > 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) < 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) \leq 0 \text{ на } (a,b).$$

Доказательство. Как уже было отмечено, данная теорема является переформулировкой уже доказанной теоремы 57 и замечания после нее. □

Теорема 69 (Необходимое условие экстремума). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Если $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0) = 0$, либо f не дифференцируема в x_0.

Доказательство. Если f дифференцируема в точке x_0, то доказательство напрямую следует из теоремы Ферма (54). Иначе утверждение тривиально. □

Теорема 70 (Первое достаточное условие экстремума). Пусть $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_-(x_0) = \{x \in U(x_0) : x < x_0\}$ и $U_+(x_0) = \{x \in U(x_0) : x > x_0\}$. Тогда:

1. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции f.
2. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции f.
3. Если $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.
4. Если $f'(x) < 0$ при $x \in U_-(x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Так как $f'(x) > 0$ при $x \in U_-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)$ и f непрерывна в точке x_0, то, согласно сформулированной выше теореме 68, f строго возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_-(x_0)$. Аналогично, так как $f'(x) < 0$ при $x \in U_+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon)$ и f непрерывна в точке x_0, то f строго убывает на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$. Значит, $f(x) < f(x_0)$ при $x \in U_+(x_0)$. Тем самым проверено, что точка x_0 – точка строгого локального максимума.

Доказательство остальных пунктов проводится аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

Определение 77 (Классификация точек экстремума). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума f.

1. Если f дифференцируема в x_0, то экстремум называется гладким.
2. Если $f'(x_0 - 0) = +\infty$, $f'(x_0 + 0) = -\infty$, или $f'(x_0 - 0) = -\infty$, $f'(x_0 + 0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

Теорема 71 (Второе достаточное условие экстремума). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и f имеет в точке x_0 производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n нечетно, то точка x_0 – не точка экстремума.
2. Если n четно, то точка x_0 – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (теорема 63), тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)), \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Из последнего следует, что найдется δ, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle a, b \rangle$, знаки выражений

$$f(x) - f(x_0) \quad \text{и} \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

совпадают.

Докажем первый пункт. При нечетном n выражение $(x-x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0, значит, по соображениям выше, меняет знак и выражение $f(x)-f(x_0)$, что означает, что x_0 – не точка экстремума.

Докажем второй пункт. Пусть, например, $f^{(n)}(x_0)>0$. Тогда, так как $(x-x_0)^n>0$ при $x\neq x_0$, то при $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x\neq x_0$,

$$f(x)-f(x_0)>0,$$

а значит x_0 – точка строгого локального минимума. Аналогичным образом разбирается случай, когда $f^{(n)}(x_0)<0$. □

15. **4.10 Исследование функции с помощью производных (монотонность и экстремумы)** Теорема о связи монотонности и производной (без док-ва). Теорема о необходимом условии экстремума (без док-ва). Теорема о первом достаточном условии экстремума. Замечание об отсутствии необходимости первого достаточного условия экстремума. Теорема о втором достаточном условии экстремума. Классификация точек экстремума, примеры.

Теорема 68 (О связи монотонности и производной). Пусть функция $f\in C[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда справедливы соотношения:

$$f'(x)>0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x)\geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x)\geq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ возрастает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x)\geq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x)<0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ строго убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x)\leq 0 \text{ на } (a,b).$$

$$f'(x)\leq 0 \text{ на } (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ убывает на } [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x)\leq 0 \text{ на } (a,b).$$

Доказательство. Как уже было отмечено, данная теорема является переформулировкой уже доказанной теоремы 57 и замечания после нее. □

Теорема 69 (Необходимое условие экстремума). Пусть $f:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$. Если $x_0\in(a,b)$ – точка экстремума, то либо $f'(x_0)=0$, либо f не дифференцируема в x_0.

Доказательство. Если f дифференцируема в точке x_0, то доказательство напрямую следует из теоремы Ферма (54). Иначе утверждение тривиально. □

Теорема 70 (Первое достаточное условие экстремума). Пусть $f: U(x_0)\to\mathbb{R}$, непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на множествах $U_-(x_0)=\{x\in U(x_0): x<x_0\}$ и $U_+(x_0)=\{x\in U(x_0): x>x_0\}$. Тогда:

1. Если $f'(x)>0$ при $x\in U_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального максимума функции f.
2. Если $f'(x)<0$ при $x\in U_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ при $x\in U_+(x_0)$, то x_0 является точкой строгого локального минимума функции f.
3. Если $f'(x)>0$ при $x\in U_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ при $x\in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.
4. Если $f'(x)<0$ при $x\in U_-(x_0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in U_+(x_0)$, то x_0 не является точкой экстремума функции f.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Так как $f'(x)>0$ при $x\in U_-(x_0)=(x_0-\varepsilon,x_0)$ и f непрерывна в точке x_0, то, согласно сформулированной выше теореме 68, f строго возрастает на $(x_0-\varepsilon,x_0]$. Значит, $f(x)<f(x_0)$ при $x\in U_-(x_0)$. Аналогично, так как $f'(x)<0$ при $x\in U_+(x_0)=(x_0,x_0+\varepsilon)$ и f непрерывна в точке x_0, то f строго убывает на $[x_0,x_0+\varepsilon)$. Значит, $f(x)<f(x_0)$ при $x\in U_+(x_0)$. Тем самым проверено, что точка x_0 – точка строгого локального максимума.

Доказательство остальных пунктов проводится аналогичным образом и остается в качестве упражнения. □

Замечание 156. Вышеизложенное достаточное условие не является необходимым. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция имеет строгий локальный минимум в точке $x = 0$, однако ее производная

$$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности нуля.

Теорема 71 (Второе достаточное условие экстремума)**.** Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$ и f имеет в точке x_0 производные до порядка $n \in \mathbb{N}$ включительно, причем $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n нечетно, то точка x_0 – не точка экстремума.
2. Если n четно, то точка x_0 – точка строгого локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, и точка строгого локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остатком в форме Пеано (теорема 63), тогда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n(1 + \alpha(x)), \quad \alpha(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Из последнего следует, что найдется δ, что при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \langle a, b\rangle$, знаки выражений

$$f(x) - f(x_0) \quad \text{и} \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

совпадают.

Докажем первый пункт. При нечетном n выражение $(x - x_0)^n$ меняет знак при переходе через точку x_0, значит, по соображениям выше, меняет знак и выражение $f(x) - f(x_0)$, что означает, что x_0 – не точка экстремума.

Докажем второй пункт. Пусть, например, $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда, так как $(x - x_0)^n > 0$ при $x \neq x_0$, то при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$,

$$f(x) - f(x_0) > 0,$$

Определение 77 (Классификация точек экстремума)**.** Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in (a, b)$ – точка экстремума f.

1. Если f дифференцируема в x_0, то экстремум называется гладким.
2. Если $f'(x_0 - 0) = +\infty$, $f'(x_0 + 0) = -\infty$, или $f'(x_0 - 0) = -\infty$, $f'(x_0 + 0) = +\infty$, то экстремум называется острым.
3. Если существуют (в $\overline{\mathbb{R}}$) $f'(x_0 \pm 0)$ и хотя бы одна из односторонних производных конечна, но $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то экстремум называется угловым.

Пример 52. Уже рассмотренная функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x_0 = 0$ угловой экстремум – минимум.

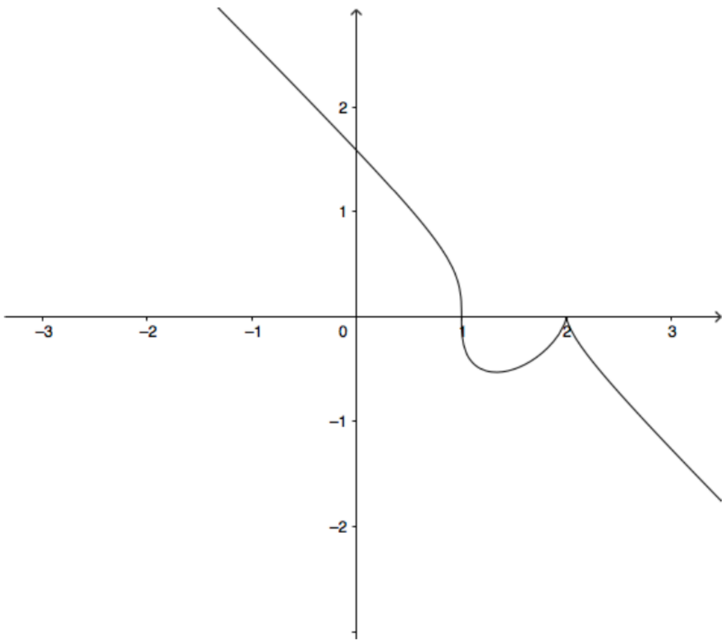

Рис. 9. График функции $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

16. **4.10 Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба)** Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости в терминах наклона хорд. Определения производной и дифференциала функции. Критерий выпуклости дифференцируемой функции. Определение точки перегиба. Пример.

Определение 78 (Понятие выпуклой функции). Пусть $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $\lambda \in (0,1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{\geq}{\leq} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0,1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

то f называется строго выпуклой вниз (верх).

Теорема 72 (Критерий выпуклости в терминах наклона хорд). Функция $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ выпукла вниз (вверх) на $\langle a,b\rangle$ тогда и только тогда, когда для любых $x, x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{\geq}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

При этом f строго выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{>}{<} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Доказательство. Продолжим начатые ранее преобразования. Из неравенства

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

получим

$$(x_2 - x_1) f(x) \le (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2).$$

Значит, так как

$$(x_2 - x_1) f(x) = (x_2 - x) f(x) + (x - x_1) f(x),$$

то

$$(x_2 - x)(f(x) - f(x_1)) \le (x - x_1)(f(x_2) - f(x)),$$

откуда, делением на $(x_2 - x)(x - x_1)$, приходим к требуемому.

Доказательство достаточности опирается на те же рассуждения, но проводимые «в обратную сторону». Строгая выпуклость, при этом, дает строгие неравенства, и наоборот. □

Определение 63 (Понятие производной функции). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0,\ x_0 + h \in \langle a, b \rangle$. Предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Определение 65 (Понятие дифференциала). Линейная по h функция Ah в определении дифференцируемости называется дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. В итоге,

$$df(x_0)(h) = Ah.$$

Теорема 73 (Критерий выпуклости дифференцируемой функции). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$ и дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда f' возрастает (убывает) на (a, b).
2. f строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b \rangle$ тогда и только тогда, когда f' строго возрастает (убывает) на (a, b).

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Для этого в неравенстве

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x, x_1, x_2 \in (a, b), \quad x_1 < x < x_2,$$

перейдем к пределу при $x \to x_1$, получив

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Переходя в том же неравенстве к пределу при $x \to x_2$, получим

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2).$$

В итоге,

$$f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le f'(x_2),$$

откуда и следует возрастание производной. Используя доказанное, для строго выпуклой вниз функции, используя теорему Лагранжа (56), получим

$$f'(x_1) \le f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2) \le f'(x_2)$$

при $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a, b)$. Следовательно, строгая выпуклость вниз влечет строгое возрастание производной.

Докажем достаточность. Пусть $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $x_1 < x_2$. Тогда, по теореме Лагранжа (56),

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad \xi_1 \in (x_1, x)$$

и

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad \xi_2 \in (x, x_2).$$

Так как f' возрастает на (a, b), то $f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

и функция f выпукла вниз (теорема 72). Если же f' строго возрастает, то $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$, откуда

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

и функция f строго выпукла вниз (теорема 72) □

Определение 79 (Понятие точки перегиба). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta)$ функция f имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда x_0 называется точкой перегиба f.

Пример 54. Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Найдем первую и вторую производные данной функции:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2(1 + x^2)^2 - 8x^2(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}.$$

Методом интервалов убеждаемся, что на множестве $(-\infty, -1/\sqrt{3}]; [1/\sqrt{3}, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на множестве $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ выпукла вверх. Точки $x = \pm 1/\sqrt{3}$ являются точками перегиба.

17. **4.10 Исследование функции с помощью производных (выпуклость и точки перегиба)** Определение выпуклой функции. Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции. Теорема о характеристике выпуклости в терминах касательных. Определение точки перегиба. Пример.

Определение 78 (Понятие выпуклой функции). Пусть $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$. Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \underset{\ge}{\le} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2),$$

то f называется выпуклой вниз (вверх) на $\langle a, b \rangle$.

Если $\forall x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, $x_1 \neq x_2$, $\lambda \in (0, 1)$, выполняется

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \underset{>}{<} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

то f называется строго выпуклой вниз (верх).

Теорема 74 (Критерий выпуклости дважды дифференцируемой функции). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a, b\rangle)$ и дважды дифференцируема на (a, b). Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \geq 0$ на (a, b) ($f''(x) \leq 0$ на (a, b)).
2. Если $f''(x) > 0$ на (a, b) ($f''(x) < 0$ на (a, b)), то f строго выпукла вниз (вверх).

Оказывается, выпуклость дифференцируемой на $\langle a, b\rangle$ функции можно охарактеризовать в терминах касательных. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 75 (Характеристика выпуклости в терминах касательных). Пусть f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$. Тогда:

1. f выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции f лежат не ниже (не выше) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть

$$f(x) \underset{\leq}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

2. f строго выпукла вниз (вверх) на $\langle a, b\rangle$ тогда и только тогда, когда все точки графика функции f, за исключением точки касания, лежат выше (ниже) касательной, проведенной в произвольной точке промежутка $\langle a, b\rangle$, то есть

$$f(x) \underset{<}{>} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x, x_0 \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

Доказательство. Будем рассматривать случай, когда функция выпукла вниз. Случай выпуклой вверх функции рассматривается аналогичным образом и остается в качестве упражнения.

Докажем необходимость. Пусть $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Уравнение касательной к графику функции в точке x_0 имеет вид

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Применяя теорему Лагранжа (56), получим

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0),$$

где ξ лежит между x и x_0. Так как f выпукла вниз, то f' возрастает на (a, b) (теорема 73) и знак выражения $f'(\xi) - f'(x_0)$ совпадает со знаком $x - x_0$. Значит,

$$f(x) - g(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Если f строго выпукла вниз, то f' строго возрастает на (a, b) (теорема 73), откуда

$$f(x) - g(x) > 0, \quad x \in \langle a, b\rangle, \quad x \neq x_0.$$

Докажем достаточность. Пусть $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ и

$$f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0.$$

Тогда при $x < x_0$ выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le f'(x_0),$$

а при $x > x_0$ выполняется

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge f'(x_0).$$

Тем самым, для любого набора точек $x, x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x < x_2$, выполняется

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x},$$

и, согласно теореме 72, f выпукла вниз. Легко понять, что строгое неравенство влечет строгую выпуклость, а значит утверждение доказано. □

Определение 79 (Понятие точки перегиба). Пусть $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, причем

1. Существует $\delta > 0$, что на промежутках $(x_0 - \delta, x_0]$, $[x_0, x_0 + \delta)$ функция f имеет разный характер выпуклости.
2. $f'(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда x_0 называется точкой перегиба f.

Пример 54. Исследовать на выпуклость и найти точки перегиба функции

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Найдем первую и вторую производные данной функции:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}, \quad f''(x) = -\frac{2(1 + x^2)^2 - 8x^2(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}.$$

Методом интервалов убеждаемся, что на множестве $(-\infty, -1/\sqrt{3}]; [1/\sqrt{3}, +\infty)$ функция выпукла вниз, а на множестве $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ выпукла вверх. Точки $x = \pm 1/\sqrt{3}$ являются точками перегиба.

18. **4.10 Исследование функции с помощью производных (асимптоты)**
Определение асимптоты (наклонная, горизонтальная, вертикальная). Теорема о формулах для коэффициентов наклонной асимптоты. Примеры.

Определение 80 (Понятие асимптоты). Прямая l называется асимптотой графика функции f, если расстояние от точки $(x, f(x))$, лежащей на графике, до прямой l стремится к нулю при удалении точки $(x, f(x))$ на бесконечность от начала координат.

Определение 82 (Понятие наклонной асимптоты). Прямая $g(x) = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В случае, если $k = 0$, прямая $g(x) = b$ часто называется горизонтальной асимптотой.

Определение 81 (Понятие вертикальной асимптоты). Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции f, если выполнено хотя бы одно из (четырех) условий:

$$\lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = -\infty$$

Теорема 76 (Формулы для коэффициентов наклонной асимптоты)**.** Для того чтобы прямая $g(x) = k_{\pm\infty}x + b_{\pm\infty}$ была асимптотой графика функции f при $x \to \pm\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k_{\pm\infty},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b_{\pm\infty}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x \to +\infty$. Случай $x \to -\infty$ разбирается аналогичным образом.

Докажем необходимость. Пусть прямая $g(x) = kx + b$ является асимптотой графика функции f при $x \to +\infty$. Тогда выполняется условие

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$$

или соотношение

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Обе части последнего равенства разделим на x, тогда

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}.$$

Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k.$$

Далее, соотношение $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ переписывается в виде $f(x) - kx = b + \alpha(x)$. Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Докажем достаточность. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Тогда второе соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - b = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0,$$

что по определению означает, что $y = kx + b$ – наклонная асимптота. □

Пример 56. Рассмотрим функцию $f(x) = e^{-x}$. Из соотношений

$$k_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0,$$

$$k_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty,$$

видно, что график f может иметь асимптоту лишь на $+\infty$. И правда,

$$b_{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,$$

а значит прямая $g(x) = 0$ – это асимптота графика функции f при $x \to +\infty$. Других асимптот нет.