НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Математический анализ

Расчётно-графическая работа №1 «Последовательность и её предел»

Выполнили студенты

Егорова Варвара Александровна P3123

Ваганова Мария Александровна P3132

Кутовой Вячеслав Андреевич P3130

Пашов Илья Александрович P3130

Поток 10.3

Преподаватель: Исаева Татьяна Тимофеевна

г. Санкт-Петербург

2023

Задание 1.

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n ℕ:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$$

Решение:

1) Проверим утверждение для n = 1 (база индукции):

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{3+1}>1$$

$$\frac{13}{12}+...>1$$

Утверждение верно.

2) Предположим, что утверждение верно при n = k (индукционное предположение):

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...\frac{1}{3k+1}>1$$

3) Покажем, что из справедливости индукционного предположения для номера n = k следует справедливость этого утверждения для номера n = k + 1 (шаг индукции):

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3(k+1)+1}>1$$

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}>1$$

Прибавим и вычтем дробь $\frac{1}{k+1}$:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+1}...+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}>1$$

Введем замену: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{3k+1}=m$

$$m+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}+\frac{1}{k+1}(\frac{1}{3}-1)=$$

$$=m+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}-\frac{2}{3(k+1)}=$$

$$=m+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{3k+2}+\frac{-3k-5}{3(k+1)(3k+4)}=$$

$$=m+\frac{1}{k+3}+\frac{3(k+1)(3k+4)-(3k+5)(3k+2)}{3(3k+2)(k+1)(3k+4)}=$$

$$=m+\frac{1}{k+3}+\frac{9k^2+21k+12-9k^2-21k-10}{3(3k+2)(k+1)(3k+4)}=$$

$$=m+\frac{1}{k+3}+\frac{2}{3(3k+2)(k+1)(3k+4)}$$

4) Так как все слагаемые больше единицы, то и всё выражение

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$$

при любом n ℕ.

Задание 2.

Вещественная последовательность задана рекуррентно: $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$

где x_1 ℝ. Исследуйте её предел при $n \to \infty$ в зависимости от значения x_1.

1) Предположим, что последовательность имеет предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+x_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+x_{n-2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2$$

2) Найдём множество возможных значений x_1.

$$x_2=\sqrt{2+x_{2-1}}$$
$$2+x_1\geqslant 0$$
$$x_1\geqslant -2$$

Т. к. x_1 ℝ, то $x_1\in[-2;+\infty)$.

3) Найдём, при каком значении x_1 последовательность является стационарной. Предположим, что при $x_1 = 2$ последовательность стационарна. Докажем это методом математической индукции.

База индукции:

При n = 2: $x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2+2} = 2$

Индуктивное предположение:

$x_k = \sqrt{2 + x_{k-1}} => 2 = \sqrt{2 + x_{k-1}}$ При n = k ($x_k = 2$): $x_{k-1} = 2$

Шаг индукции:

При n = k + 1:

$\sqrt{2 + x_{k+1-1}} = \sqrt{2 + x_k} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + x_{k-1}}} = \sqrt{2 + \sqrt{2+2}} = \sqrt{2+2} = 2$

ЧТД.

4) Как мы уже выяснили, при $x_1 = 2$ последовательность стационарна. Рассмотрим некоторые случаи при $x_1 < 2$ и $x_1 > 2$.

$x_1 = 1$: $x_2 = \sqrt{3} \approx 1,73205080$; $x_3 \approx 1.93185165$; $x_4 \approx 1.98288972$.

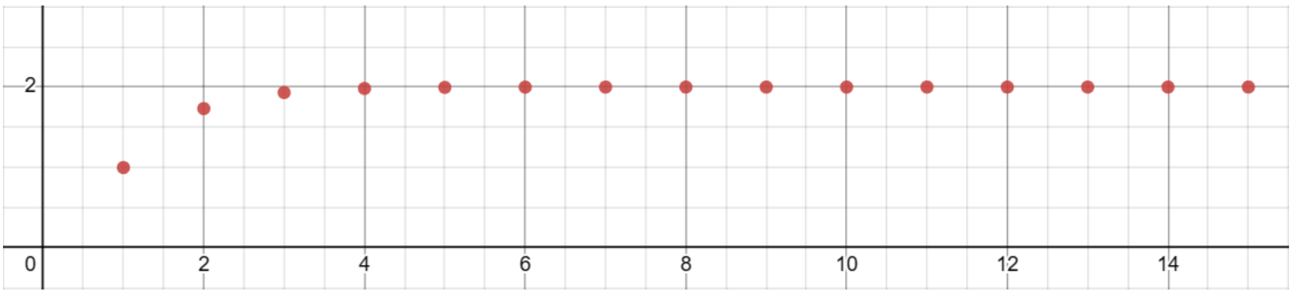
$x_1 = 0$: $x_2 \approx 1.41421356$; $x_3 \approx 1.84775906$; $x_4 \approx 1.96157056$.

$x_1 = -1$: $x_2 = 1$; $x_3 \approx 1.73205080$; $x_4 \approx 1.93185165$.

$x_1 = -2$: $x_2 = 0$; $x_3 \approx 1.41421356$; $x_4 \approx 1.84775906$.

Можно заметить, что при $-2 \le x_1 < 2$ последовательность возрастающая.

Изобразим последовательность при $x_1 = 1$:



Теперь рассмотрим случаи $x_1 > 2$.

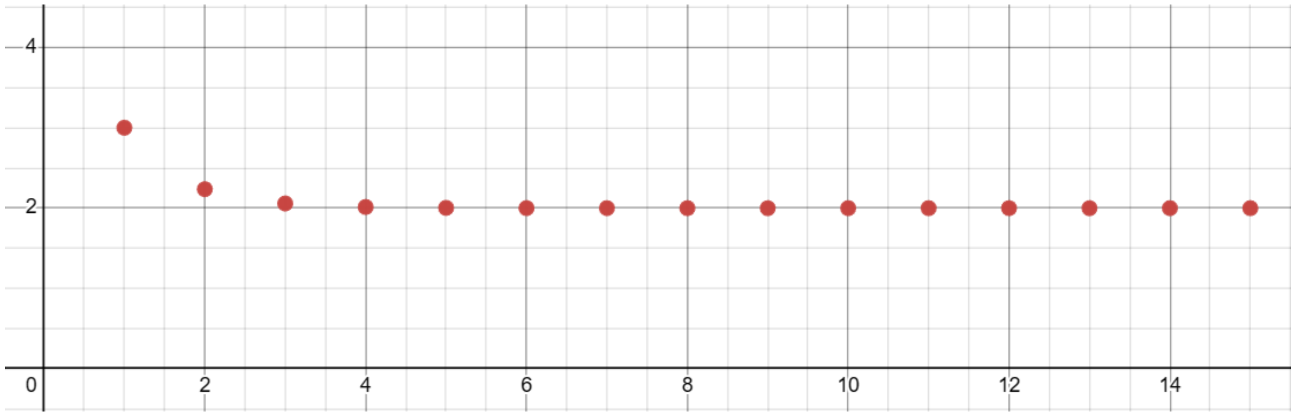
$x_1 = 3$: $x_2 \approx 2.23606797$; $x_3 \approx 2.05817102$; $x_4 \approx 2.01449026$.

$x_1 = 3,5$: $x_2 \approx 2.34520787$; $x_3 \approx 2.08451622$; $x_4 \approx 2.02101861$.

$x_1 = 4$: $x_2 \approx 2.44948974$; $x_3 \approx 2.10938136$; $x_4 \approx 2.02716091$.

В случае $x_1 > 2$ последовательность убывающая.

Изобразим последовательность при $x_1 = 3$:



Таким образом, при x_1 □ [-2; 2) – последовательность возрастающая, при $x_1 > 2$ – последовательность убывающая.

Задание 3.

Дана последовательность a_n. Исследуйте её поведение при $n \to \infty$.

1) Вычислим предел A последовательности при $n \to \infty$. Для этого выведем формулу общего члена последовательности:

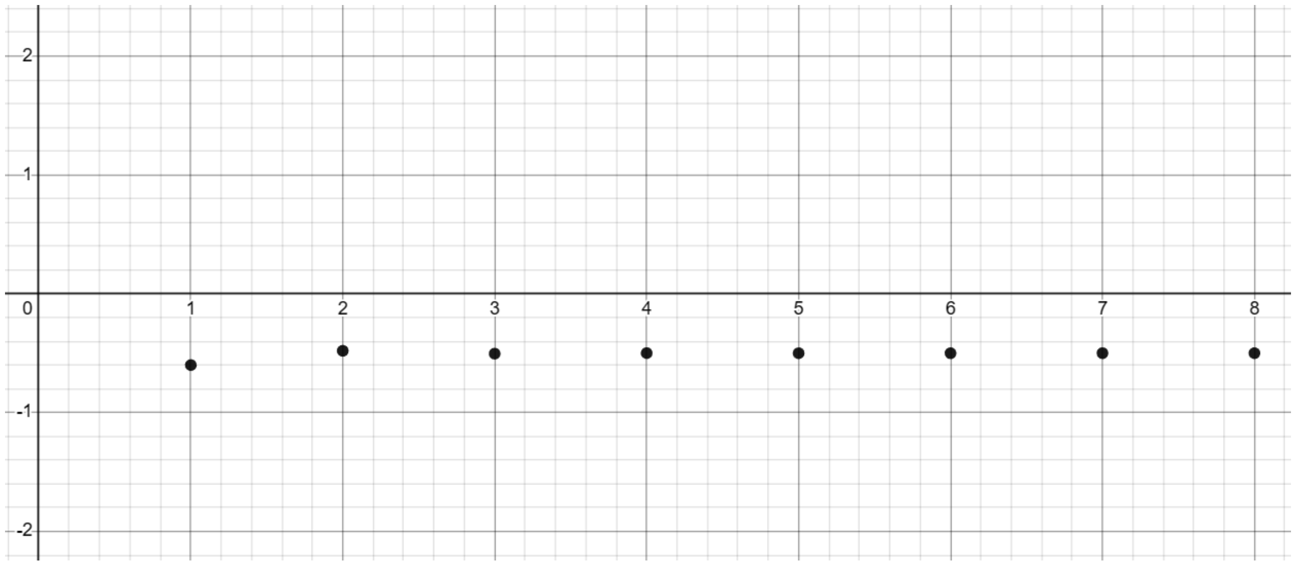
$$x_n = \frac{(\frac{-1}{5})^n - 1}{2}$$

Найдем предел этой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{-1}{5})^n - 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Таким образом, предел последовательности $x_n = -0.5$.

2) Построим график общего члена последовательности в зависимости от номера n:



3) Проиллюстрируем сходимость последовательности:

a. Запишем определение предела последовательности через неравенство:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > n_0 \ |x_n - A| < \varepsilon$

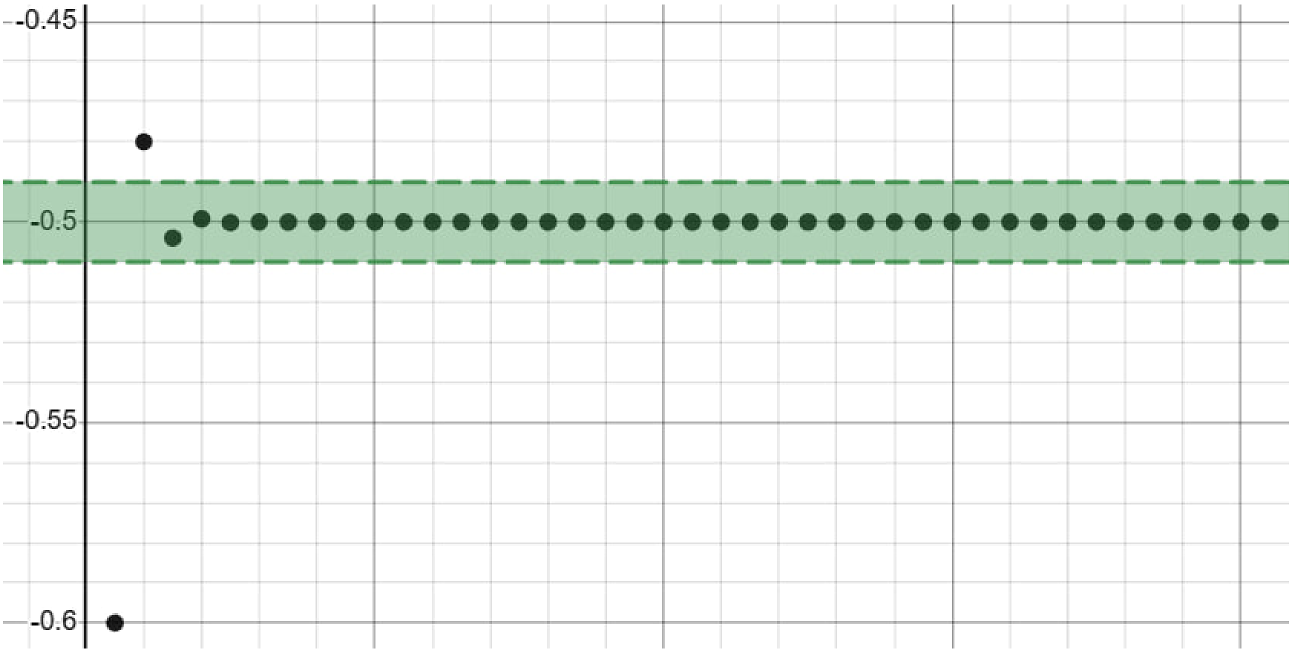
b. Выберем три различных положительных числа:

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$

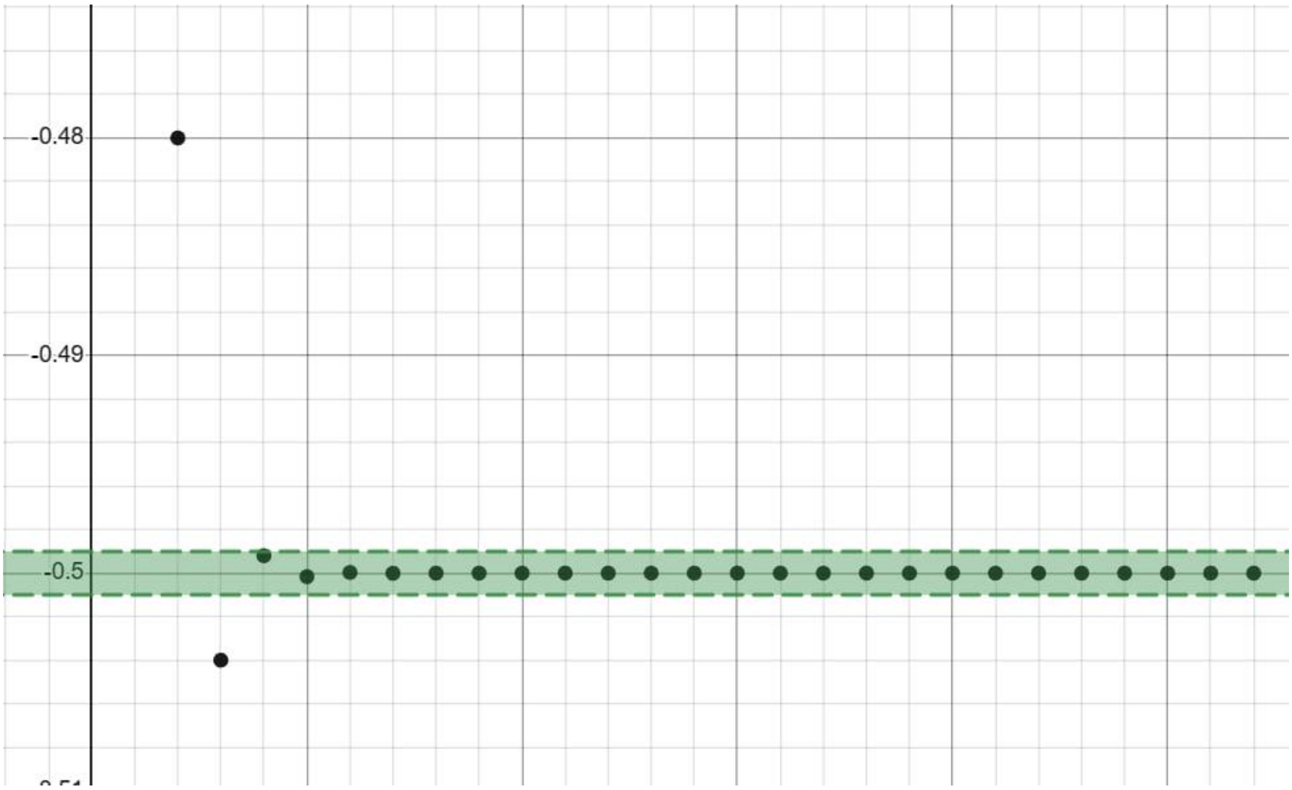
Пусть $\varepsilon_3 = 0.0001$, $\varepsilon_2 = 0.001$, $\varepsilon_1 = 0.01$

c. Изобразим для каждого случая соответствующую окрестность предела A:

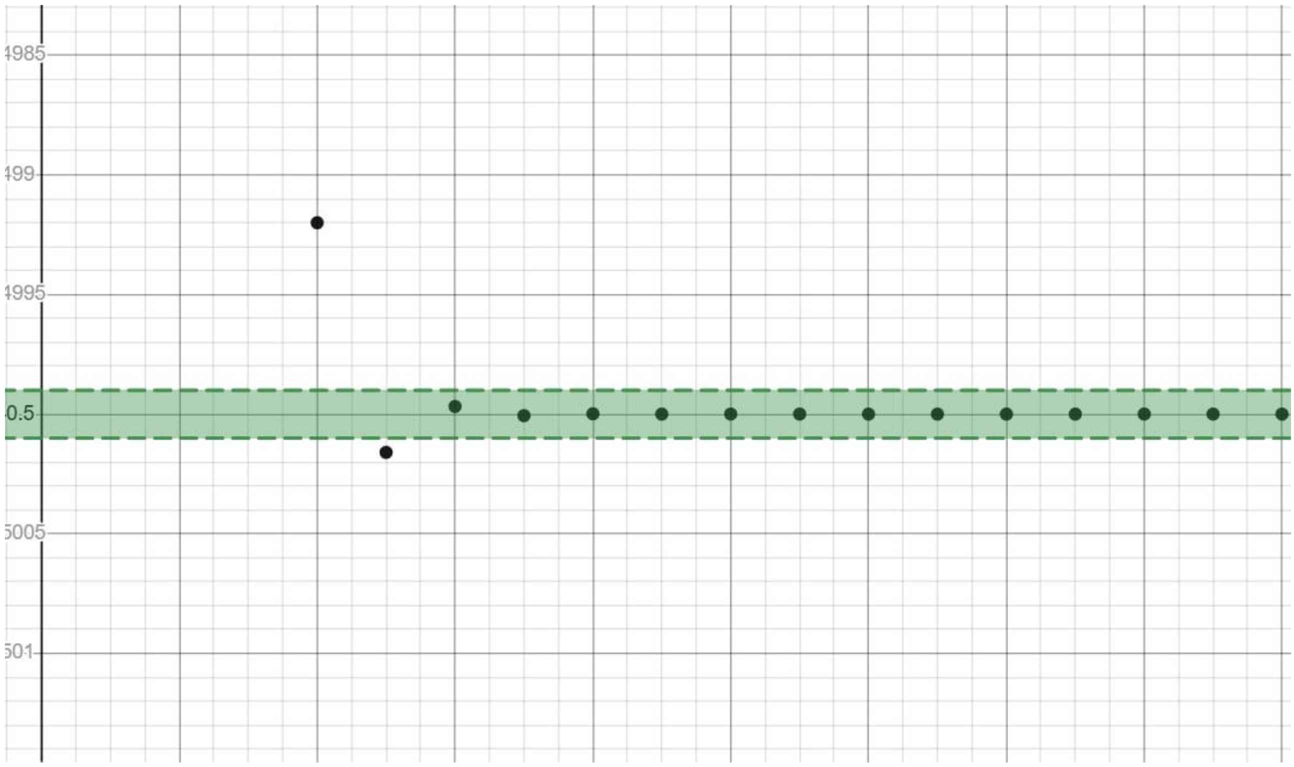
$\varepsilon_1 = 0.01$:



$\varepsilon_2 = 0.001$:



$\varepsilon_3 = 0.0001$:



d. Для каждого выбранного «эпсилон» найдем на графиках номер n_0, после которого все члены последовательности попадают в окрестность.

Для первого случая $n_0 = 3$; для второго - $n_0 = 4$; для третьего - $n_0 = 6$.

Для того чтобы значения n_0 превышали 10, 100 и 1000 необходимо выбирать очень маленькие «эпсилоны», поскольку, начиная с некоторого номера, все элементы становятся очень близки к пределу. Чтобы посчитать эти значения «эпсилон» мы можем вывести формулу зависимости n от «эпсилон» из формулы последовательности:

$$n = -\log_5(2\varepsilon) + 1$$

Сравнивая это выражение с 10, 100 и 1000 получим значения:

$n_0 = 12$ при $\varepsilon = 10^{-8}$;

$n_0 = 102$ при $\varepsilon = 10^{-71}$;

Для n_0 больше тысячи значение «эпсилон» настолько мало, что калькулятор не способен посчитать его.

Оценочный лист.

Егорова Варвара Александровна — 35 %

Ваганова Мария Александровна — 15 %

Кутовой Вячеслав Андреевич — 25 %

Пашов Илья Александрович — 25 %