Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

Лабораторная работа №6

по курсу «Численные методы»

«Аппроксимация методом наименьших квадратов.
Двупараметрические модели.»

Студент:

Группа: ИУ9-61Б

Преподаватель: Домрачева А.Б.

Москва 2025

1 Постановка задачи

Дано: Таблично заданная функция $y_i = f(x_i)$ для $i = 0, 1, \ldots, n$.

x_i	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
y_i	0.16	0.68	1.96	2.79	3.80	6.81	9.50	24.86

Найти:

1. Выбрать вид аппроксимирующей функции из семейства двупараметрических моделей.
2. Найти коэффициенты a и b методом наименьших квадратов.
3. Вычислить среднеквадратичное отклонение.

2 Основные теоретические сведения

2.1 Аппроксимация двупараметрическими моделями

Существует формальный подход для выбора вида аппроксимирующей функции, зависящей от двух параметров. Введем обозначения для средних значений:

$$x_a = \frac{x_0 + x_n}{2} \text{ – среднее арифметическое,}$$
$$x_g = \sqrt{x_0 x_n} \text{ – среднее геометрическое,}$$
$$x_h = \frac{2}{\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_n}} \text{ – среднее гармоническое.}$$

Аналогично определяются y_a, y_g, y_h для значений функции. Рассматриваются девять функций с характеристическими свойствами:

$$
\begin{aligned}
z_1(x) &= ax + b \iff z(x_a) = y_a, \\
z_2(x) &= ax^b \iff z(x_g) = y_g, \\
z_3(x) &= ae^{bx} \iff z(x_a) = y_g, \\
z_4(x) &= a \ln x + b \iff z(x_g) = y_a, \\
z_5(x) &= \frac{a}{x} + b \iff z(x_h) = y_a, \\
z_6(x) &= \frac{1}{ax + b} \iff z(x_a) = y_h, \\
z_7(x) &= \frac{x}{ax + b} \iff z(x_h) = y_h, \\
z_8(x) &= ae^{b/x} \iff z(x_h) = y_g, \\
z_9(x) &= \frac{1}{a \ln x + b} \iff z(x_g) = y_h.
\end{aligned}
$$

2.2 Алгоритм выбора функции

1. Построить график исходных данных и аппроксимирующей кривой.
2. Вычислить x_a, x_g, x_h и y_a, y_g, y_h.
3. Определить $z(x_a), z(x_g), z(x_h)$ по графику.
4. Вычислить величины $\delta_1, \ldots, \delta_9$ и выбрать наименьшую.

3 Реализация

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.array([1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5])
y = np.array([0.16, 0.68, 1.96, 2.79, 3.80, 6.81, 9.50, 15.60, 24.86])

x_a = (x[0] + x[-1]) / 2
x_g = np.sqrt(x[0] * x[-1])
x_h = 2 * x[0] * x[-1] / (x[0] + x[-1])
y_a = (y[0] + y[-1]) / 2
y_g = np.sqrt(y[0] * y[-1])
y_h = 2 * y[0] * y[-1] / (y[0] + y[-1])

print(f"x_a = {x_a:.3f}, x_g = {x_g:.3f}, x_h = {x_h:.3f}")
```

```python
print(f"y_a = {y_a:.3f}, y_g = {y_g:.3f}, y_h = {y_h:.3f}")

ln_x = np.log(x)
ln_y = np.log(y)
n = len(x)
A = np.sum(ln_x**2)
B = np.sum(ln_x)
D1 = np.sum(ln_x * ln_y)
D2 = np.sum(ln_y)

coeff_matrix = np.array([[n, B], [B, A]])
right_hand_side = np.array([D2, D1])
ln_a, b = np.linalg.solve(coeff_matrix, right_hand_side)
a = np.exp(ln_a)

print(f"a = {a:.3f}, b = {b:.3f}")

def z_2(x, a, b):
    return a * x**b

z_x_a = z_2(x_a, a, b)
z_x_g = z_2(x_g, a, b)
z_x_h = z_2(x_h, a, b)
print(f"z(x_a) = {z_x_a:.3f}, z(x_g) = {z_x_g:.3f}, z(x_h) = {z_x_h:.3f}")

delta = [
    abs(z_x_a - y_a),
    abs(z_x_g - y_g),
    abs(z_x_a - y_g),
    abs(z_x_g - y_a),
    abs(z_x_h - y_a),
    abs(z_x_a - y_h),
    abs(z_x_h - y_h),
    abs(z_x_h - y_g),
    abs(z_x_g - y_h)
]
for i, d in enumerate(delta, 1):
    print(f"_{i} = {d:.3f}")
xi_h = min(delta)
xi_h_idx = delta.index(xi_h) + 1
print(f"Наименьшее значение _i = {xi_h:.3f} для функции z_{xi_h_idx}")

y_pred = z_2(x, a, b)
Delta = np.sqrt(np.sum((y - y_pred)**2) / n)
print(f"Среднеквадратичное отклонение  = {Delta:.6f}")

```

```python
plt.scatter(x, y, color='blue', label='Табличные данные')
x_smooth = np.linspace(min(x), max(x), 200)
y_smooth = z_2(x_smooth, a, b)
plt.plot(x_smooth, y_smooth, color='red', label=f'z_2(x) = {a:.3f}x^{b:.3f}')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

Листинг 1: lab6.py

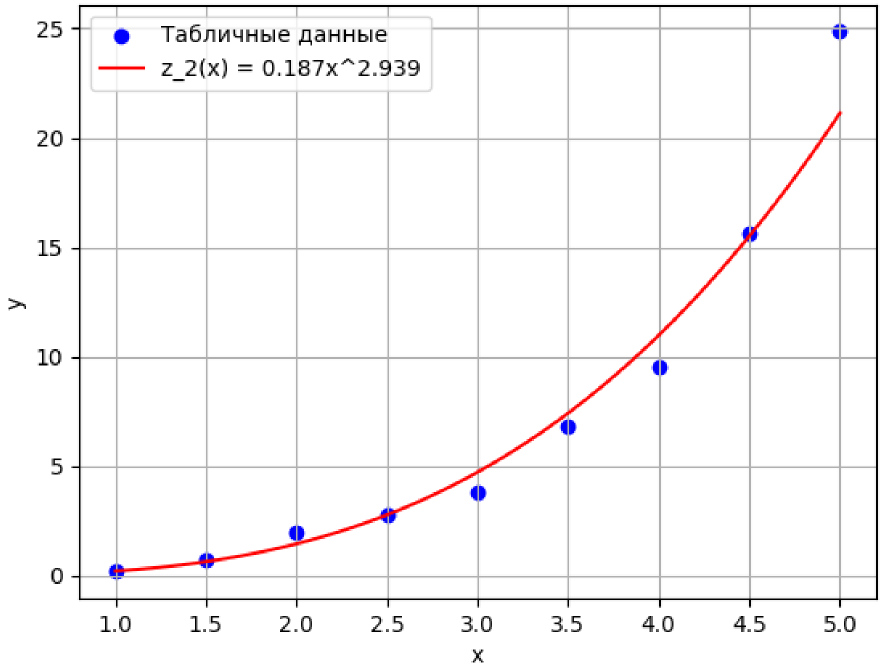

Рис. 1 — График исходных данных и аппроксимирующей функции $z_2(x) = 0.187x^{2.939}$

Вычисленные значения:

$$x_a = 3.000, \quad x_g = 2.236, \quad x_h = 1.667,$$
$$y_a = 12.510, \quad y_g = 1.994, \quad y_h = 0.318,$$
$$z(x_a) = 4.710, \quad z(x_g) = 1.986, \quad z(x_h) = 0.837.$$

Вычисленные значения δ_i:

$$\delta_1 = |4.710 - 12.510| = 7.800,$$
$$\delta_2 = |1.986 - 1.994| = 0.008,$$
$$\delta_3 = |4.710 - 1.994| = 2.716,$$
$$\delta_4 = |1.986 - 12.510| = 10.524,$$
$$\delta_5 = |0.837 - 12.510| = 11.673,$$
$$\delta_6 = |4.710 - 0.318| = 4.392,$$
$$\delta_7 = |0.837 - 0.318| = 0.519,$$
$$\delta_8 = |0.837 - 1.994| = 1.157,$$
$$\delta_9 = |1.986 - 0.318| = 1.668.$$

Наименьшее значение: $\delta_2 = 0.008$ (функция $z_2(x) = ax^b$).
Определение коэффициентов для функции $z_2(x) = ax^b$:
Для функции $z_2(x) = ax^b$ применяется следующая процедура:
1. Функция предварительно логарифмируется:

$$\ln z_2(x) = \ln a + b \ln x$$

2. Минимизируется величина:

$$\sum_{i=0}^{n} (\ln a + b \ln x_i - \ln y_i)^2$$

3. Решается система уравнений относительно $\ln a$ и b:

$$\begin{cases} \ln a \cdot \sum (\ln x_i)^2 + b \cdot \sum \ln x_i = \sum (\ln x_i \ln y_i) \\ \ln a \cdot \sum \ln x_i + b \cdot (n+1) = \sum \ln y_i \end{cases}$$

4. Элементы матрицы системы:

$$
\begin{aligned}
A &= \sum (\ln x_i)^2 \\
B &= \sum \ln x_i \\
D_1 &= \sum (\ln x_i \ln y_i) \\
D_2 &= \sum \ln y_i
\end{aligned}
$$

5. После решения системы по величине $\ln a$ определяется коэффициент a.

4 Результаты

Таблица 1: Результаты аппроксимации

Параметр	Значение
Выбранная функция	$z_2(x) = ax^b$
Коэффициент a	0.187
Коэффициент b	2.939
Наименьшее значение δ_2	0.008
Среднеквадратичное отклонение Δ	1.395722

5 Вывод

В ходе работы была выбрана аппроксимирующая функция $z_2(x) = 0.187x^{2.939}$. Среднеквадратичное отклонение составило $\Delta = 1.395722$. Метод наименьших квадратов позволил точно определить коэффициенты функции, а характеристические свойства средних значений (арифметического, геометрического и гармонического) обеспечили корректный выбор модели.